



HAL
open science

Cohérence de phase dans des circuits quantiques

Tom Morel

► **To cite this version:**

Tom Morel. Cohérence de phase dans des circuits quantiques. Physique [physics]. Université Paris Cité, 2022. Français. NNT : 2022UNIP7181 . tel-04372767

HAL Id: tel-04372767

<https://theses.hal.science/tel-04372767v1>

Submitted on 4 Jan 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE de DOCTORAT de PHYSIQUE d'UNIVERSITÉ PARIS CITÉ

École Doctorale 564 Physique en Île-de-France

Laboratoire : Matériaux et phénomènes quantiques

présentée par

Tom MOREL

pour obtenir le titre de

DOCTEUR d'UNIVERSITÉ PARIS CITÉ

Dirigée par Christophe Mora

Cohérence de phase dans des circuits quantiques

Présentée et soutenue publiquement le 28 juin 2022

devant un jury composé de :

- | | | |
|------|---|--------------------|
| M. | Xavier Waintal (Ingénieur CEA Grenoble - Phe-
liqs) | Rapporteur |
| M. | Pascal Degiovanni (Professeur des universités -
ENS de Lyon) | Rapporteur |
| M. | Gwendal Fève (Professeur des universités - Uni-
versité Sorbonne) | Examineur |
| Mme. | Adeline Crépieux (Professeur des universités -
Université Aix-Marseille) | Examinatrice |
| Mme. | Géraldine Haack (Professeur des universités -
Université de Genève) | Examinatrice |
| M. | Christophe MORA (Professeur des universités -
Université Paris Cité) | Directeur de thèse |

Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse à la cohérence de phase de systèmes mésoscopiques. Le travail de la thèse est décomposé en trois parties distinctes. La première traite d'un dispositif émulant des quasiparticules de charges fractionnaires, basé sur un îlot métallique recouvrant N canaux de bords. L'arrivée d'un électron à l'îlot engendre une rétrodiffusion au niveau du canal de bord de sortie, laissant un trou sur le canal initial. Ce trou pénètre dans l'îlot et sa charge doit être instantanément compensée par l'émission de charges fractionnaires dans les N états de bord sortants. On caractérise ainsi la statistique de ces charges à partir du calcul de la statistique de comptage complet et on propose une expérience de collision pouvant mettre en évidence l'effet de la statistique anyonique. Nos résultats montrent que le processus dominant n'est pas un effet de collision mais correspond à une propriété de ces quasiparticules : le tressage quantique. La seconde partie étudie un îlot quantique en présence d'une source de tension dépendante du temps en présence de rétrodiffusion à l'entrée de l'îlot. La cohérence de ce système est étudiée grâce à un interféromètre électronique de Mach-Zehnder. On démontre que l'étude de l'état électronique des électrons revient à regarder le devenir d'une distribution de photons virtuels. La présence de la rétrodiffusion à l'entrée de l'îlot conduit à des non-linéarités sur les photons, rendant possible des compressions d'état quantique. La dernière partie concerne la transition de phase quantique d'une jonction Josephson présentant une double périodicité, en présence d'un milieu dissipatif quantique, responsable de la décohérence de phase. L'étude de ce système est équivalent à regarder une diffusion d'électrons au niveau d'un supraconducteur, menant à des processus d'Andreev. On montre que le comportement de la résistance effective du circuit est non-monotone et permet de rendre compte de la compétition entre les deux périodicités de la jonction.

Mots Clefs : physique mésoscopique, îlot quantique, cohérence de phase, interféromètre de Mach-Zehnder, anyon, jonction Josephson

Abstract

In this thesis, we are interested in the phase coherence of mesoscopic systems. The structure of the thesis is as follows. In the first part of this thesis, we introduce a device of N ballistic edge channels in the quantum Hall effect covered by a gated quantum dot. The arrival of an electron at the island generates two processes : a single electron is scattered from the input to output channels. This process leaves a hole in the input channel and its charge must be automatically compensated by holes with fractional charges expelled in all channels. We thus characterize the statistic of these charges from the calculation of the full counting statistic and we propose a collider which can highlight the effect of the anyonic statistic by investigating the cross-correlations. Our results show that the dominant process is not a collision effect but the quantum braiding property of these quasiparticles. The second part studies a quantum island in the presence of a time-dependent voltage source in the presence of backscatter at the entrance of the island. The coherence of this system is studied using a Mach-Zehnder electronic interferometer. It is demonstrated that the study of the electronic state of electrons amounts to looking at the fate of a distribution of virtual photons. The presence of backscattering at the entrance of the island leads to nonlinearities on the photons, making possible quantum squeezing. The last part concerns the quantum phase transition of a Josephson junction exhibiting a double periodicity, in the presence of a quantum dissipative environment, responsible for the phase decoherence. Studying this system is equivalent to looking through electron scattering at the level of a superconductor, leading to Andreev processes. We show that the behavior of the effective resistance of the circuit is non-monotonic and makes it possible to account for the competition between the two periodicities of the junction.

Keywords : mesoscopic physic, quantum island, phase coherence, Mach-Zehnder interferometer, anyon, Josephson junction

Remerciements

Je remercie Xavier Waintal et Pascal Degiovanni d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce manuscrit, ainsi que Gwendal Fève, Adeline Crépieux et Géraldine Haack pour leur participation au jury. Qu'ils soient tous les cinq remerciés pour le travail fourni.

Ma thèse a été réalisée dans un cadre très particulier. L'ayant effectuée en parallèle de mon travail d'enseignement en Classe Préparatoire aux Grandes Écoles, mes remerciements sont différents de ceux que l'on peut lire dans un manuscrit de thèse puisque mes jours de présence au laboratoire se comptent sur les doigts de quelques mains. À la place, j'ai choisi de remercier l'ensemble des personnes qui m'ont amené à ce niveau.

Merci au premier « scientifique » que j'ai rencontré, mon beau-père Mickaël Cadot. Ses premières discussions et aides scientifiques m'ont probablement orientées inconsciemment vers les mathématiques et la physique. Il est le premier à m'avoir montré qu'on pouvait faire des erreurs (surtout lui) et que les discussions qui en découlent font parties du processus scientifique et améliorent notre compréhension.

Merci à mon professeur de physique-chimie de MPSI, Jean-Julien Fleck. Son envie de partager ses connaissances et ses capacités didactiques m'ont naturellement entraîné vers le chemin de la compréhension du monde qui nous entoure plutôt que vers celui des mathématiques pures, tout aussi louable par ailleurs. Sa capacité à lier les concepts physiques et les calculs mathématiques n'a fait que conforter ce choix.

Merci à Pierre Villain, mon professeur de physique statistique au centre de préparation à l'agrégation de l'ENS Paris-Saclay. Il est le premier à m'avoir démontré que même les calculs mathématiques compliqués des cours de physique statistique et physique quantique, a priori très formels, peuvent avoir un réel sens physique. Ma première remise en question de mes connaissances antérieures a été faite à son contact. Il a un don naturel pour vous faire comprendre que toutes les connaissances sont perfectibles et que certaines certitudes en physique peuvent être facilement brisées.

À tout seigneur tout honneur, je remercie finalement Christophe Mora sans qui cette dernière étape n'aurait jamais pu se faire. Il m'a tout d'abord accepté en stage puis en thèse malgré ma situation particulière. Il m'a beaucoup apporté sur le plan théorique et sur le monde de la recherche. Son apprentissage restera profondément ancré dans mon approche de la physique et son enseignement. Sa bienveillance,

son soutien dans les moments difficiles et ses compétences scientifiques et humaines m'ont permis de grandir et d'aiguiser mes propres compétences scientifiques.

Même si j'ai rencontré ces deux personnes pendant ma thèse dans le lycée où j'enseigne, je tiens à remercier Vincent Freulon, qui a partagé ses connaissances en physique mésoscopique expérimentale entre deux copies d'élèves, et à mon collègue mathématicien Jérémy Daniel qui m'a particulièrement aidé dans certains concepts mathématiques vus dans cette thèse.

Je ne peux pas finir cette partie sans remercier ma maman, ma sœur, ma belle-famille mais surtout ma très chère femme Rachel sans qui rien de ce qui va suivre n'aurait pu être possible. Pour m'avoir supporté et soutenu au jour le jour, notamment depuis les naissances de Anna et Mahé : encore un grand merci !

Désormais, ma phrase « Je dois travailler ma thèse » ne peut plus m'aider à esquiver certaines sorties en famille. Je pourrai enfin situer l'endroit du marché à Agon-Coutainville. Prochaine étape : la recherche des louis d'or.

Table des matières

Introduction	11
1 Systèmes mésoscopiques cohérents	15
1.1 Propagation cohérente des électrons	17
1.1.1 Le gaz bidimensionnel d'électrons	19
1.1.2 Utilisation de l'effet Hall quantique entier	21
1.2 Mesure de la cohérence : l'interféromètre de Mach-Zehnder	24
1.2.1 Présentation de l'interféromètre	24
1.2.2 Application à la cohérence des états de bord	24
1.3 Collisionneur de particules	28
1.3.1 Description	31
1.3.2 Présence de QPC en amont	33
1.3.3 Retour sur le collisionneur	35
1.4 Cohérence d'un flot métallique	38
1.4.1 Description du système	39
1.4.2 Les différents régimes	40
1.4.3 Cohérence en présence d'interactions	42
1.5 Entre cohérence et décohérence : la jonction Josephson résistive	50
1.5.1 La jonction Josephson	52
1.5.2 Le modèle quantique de la résistance	54
1.5.3 Dissipation couplée à la jonction Josephson	55
2 Fractionalisation et collision dans le régime d'effet Hall quantique	
($\nu = 1$)	60
2.1 Émetteur d'anyons	64
2.1.1 Îlot métallique couplé à N canaux	64
2.1.2 Amélioration du dispositif	68
2.1.3 Statistique de l'émission	71
2.2 Collisionneur anyonique	73
2.2.1 Cas des émetteurs de charges fractionnaires	73

2.2.2	Interprétation du bruit croisé	79
2.3	Conclusion	83
3	Cohérence et squeezing d'un îlot quantique	86
3.1	Influence de la source AC sur l'îlot	90
3.1.1	Positionnement de la source AC	91
3.1.2	Couplage parfait avec l'îlot : Approche de Floquet	92
3.1.3	Effet de la rétrodiffusion ($r \neq 0$)	94
3.2	Utilisation du Mach-Zehnder	97
3.2.1	Couplage parfait $r = 0$	98
3.2.2	Prise en compte de la rétrodiffusion	101
3.3	Formation d'états comprimés quantiques	102
3.3.1	Modèle étudié	103
3.3.2	Bruit dynamique	106
3.3.3	Observables de la compression quantique	110
3.4	Conclusion	112
4	Double périodicité d'une jonction Josephson résistive	115
4.1	Régime du blocage de Coulomb : $E_C \gg E_J, E_M$	122
4.1.1	Système et Hamiltonien	122
4.1.2	Expression générale de $R(T)$	123
4.1.3	Calcul perturbatif	126
4.1.4	Refermionisation du système	130
4.2	Régime de Josephson : $E_J \gg E_C$	135
4.2.1	Cas sans dissipation avec $E_M = 0$: théorie des bandes	137
4.2.2	Prise en compte de E_M	139
4.2.3	Prise en compte de la dissipation	142
4.2.4	Résistance $R(T)$ dans la limite $E_J \gg E_C$	144
4.3	Conclusions	147
5	Conclusion	150
Annexe A Lignes de transmission		152
A.1	Description	152
A.2	Condition aux limites	153
Annexe B Équations du mouvement de l'îlot quantique		154
B.1	Cas libre : $E_c = 0$	154
B.2	Prise en compte de l'îlot avec un seul canal $N = 0$	155

B.3 Équations en présence de N canaux de bord	156
Annexe C Statistique des fermions en sortie d'un QPC	158
Annexe D Fonction caractéristique de la FCS	160
Annexe E Résistance effective	162
Bibliographie	165

Introduction

Tout le long de ce manuscrit, on fera souvent référence à des concepts comme **la cohérence quantique** et **la décohérence**. Même si ces concepts sont en général utilisés par la communauté scientifique de la physique quantique, il peut être bon de rappeler ce qu'est la cohérence quantique. Clarifions ce concept à partir de l'expérience historique des fentes de Young. En optique classique lorsqu'une onde lumineuse est séparée par deux fentes, des franges d'interférences peuvent apparaître. Ces observations exigent la cohérence (spatiale ou temporelle) des deux ondes, c'est-à-dire à une relation de phase fixe entre les ondes. Cette propriété s'applique aussi pour des interférences avec des particules quantiques, telles que les fermions ou les bosons, même si cette notion de phase est une propriété intrinsèque à la fonction d'onde plutôt qu'à un champ classique. Si la cohérence quantique existe entre deux points, associés à la fonction d'onde de la particule, alors on peut considérer la particule dans ces deux états à la fois : on parle de superposition d'états quantiques. C'est cette cohérence de phase qui est à l'origine de la majorité des expériences et technologies quantiques [1]. Notons que cette cohérence ne se limite pas aux seuls systèmes microscopiques. On retrouve par exemple des effets quantiques macroscopiques tels que l'effet laser, la supraconductivité, les condensats de Bose-Einstein, etc.

Après lecture du paragraphe précédent, il est légitime de se demander pourquoi le monde quantique se comporte très différemment de l'environnement macroscopique auquel nous sommes habitués : la cohérence de phase est perdue. On parle alors de décohérence quantique. La décohérence est principalement due au couplage du système quantique à un environnement extérieur, comme par exemple un atome en interaction avec d'autres atomes ou avec un bain thermique. Si le système est parfaitement isolé du monde extérieur, la cohérence de phase reste préservée mais aucune mesure ou manipulation n'est possible. Dans le cas contraire, la cohérence est perdue comme l'est l'énergie en présence de forces de frottement en mécanique classique. C'est cette décohérence qui est responsable des difficultés à réaliser des expériences de physique quantique et qui est notamment un frein important à la fabrication du potentiel ordinateur quantique.

C'est dans cet optique que s'est construit tout mon travail de thèse en étudiant deux systèmes quantiques mésoscopiques.

Le premier correspond à une capacité quantique, appelé aussi boîte quantique, constituée d'une constriction géométrique à un état de bord électronique, chiral, et contrôlée par un couplage capacitif situé au-dessus de la boîte réalisant l'équivalent quantique d'un circuit RC classique. Dans cette configuration, les électrons sont quasi-confinés à l'intérieur de la boîte et l'écart entre deux niveaux d'énergie est discret. La boîte quantique est notamment à l'origine de la première source d'électron unique mise au point au Laboratoire Pierre Aigrain [2]. Dans ce manuscrit, on étudie le cas où la densité d'état dans la boîte est importante. On utilise pour cela un couplage ohmique, rendant la zone de confinement métallique, rendant la boîte métallique. On parle alors d'îlot métallique. Ce système est notamment particulier puisque ce sont les interactions à l'intérieur de l'îlot qui maintiennent la cohérence de phase de l'état de bord.

Le second système est une jonction Josephson couplée à un environnement dissipatif ohmique, équivalent à une résistance. La jonction Josephson constituée de deux supraconducteurs permet le transfert cohérent de paires de Cooper. À l'opposé, l'élément dissipatif peut être vu comme un système quantique possédant une infinité de degrés de liberté, engendrant ainsi de la décohérence. Lorsque les deux éléments sont couplés, on observe une transition de phase à température nulle : lorsque la résistance est plus grande qu'une valeur de référence, le milieu dissipatif est suffisamment fort pour détruire la cohérence de la jonction même à température nulle.

Cette thèse est organisée de la manière suivante. Le chapitre 1 est un chapitre introductif des différents systèmes mésoscopiques étudiés dans le reste du manuscrit. Après une introduction des états de bord d'effet Hall quantique, on présente l'interféromètre de Mach-Zehnder électronique nécessaire à la mesure de la cohérence de phase de systèmes quantiques. Cette partie se limite essentiellement à l'étude d'électrons sans interaction. Ensuite, on décrit une autre expérience qui cette fois-ci met en évidence le caractère corpusculaire d'un faisceau d'électrons à travers la mesure du bruit à fréquence nulle. Les deux dernières parties se concentrent sur les deux systèmes quantiques mésoscopiques : l'îlot métallique et la jonction Josephson résistive.

Le reste de la thèse est consacré à notre travail personnel. Le chapitre 2 présente un dispositif émulant des quasiparticules à charge fractionnaire appelées anyons. Un îlot quantique recouvre partiellement $N + 1$ états de bord d'effet Hall quantique entier et engendre des interactions entre ces canaux. On démontre que la présence de la rétrodiffusion à l'entrée d'un canal de bord permet d'émettre un faisceau dilué

de charges fractionnaires. Bien que formées à partir d'électrons, on s'est demandé si ces quasiparticules ont bien une statistique anyonique. Pour y répondre, on donne un calcul de cette statistique et on propose une expérience de collision pouvant mettre en évidence cette statistique, basée sur l'article [3].

Le chapitre suivant concerne l'étude de l'îlot quantique décrit dans le chapitre 1 en présence d'une source de tension dépendante du temps en présence de la rétrodiffusion en entrée de l'îlot. Les effets sur la cohérence de phase sont étudiés grâce à l'interféromètre de Mach-Zehnder électronique. On montre que ce système peut être décrit en suivant l'approche de Floquet où l'état électronique est totalement décrit par une assemblée de photons. En l'absence de rétrodiffusion, l'îlot ne modifie pas la cohérence des photons mais il y a décohérence pour les électrons. La rétrodiffusion induit des non-linéarités pour les photons (plasmons) que l'on cherche à interpréter dans ce formalisme. La dernière partie de ce chapitre est consacrée au phénomène de compression quantique des états. On montre que l'origine de cette compression est purement capacitif.

Enfin, le chapitre 4 étudie la transition de phase quantique d'une jonction Josephson standard et d'une jonction Josephson topologique de périodicité double, en présence d'un milieu dissipatif quantique, assimilable à une résistance quantique. Lorsque cette résistance est comprise entre $h/4e^2$ et h/e^2 , les deux jonctions ont des comportements opposés à température nulle : l'une reste supraconductrice et l'autre est isolante. Tout l'objectif de ce chapitre est de connaître le comportement du système global à toute température y compris à température nulle, à travers le calcul de la résistance effective du circuit.

1 Systèmes mésoscopiques cohérents

Résumé du chapitre

Ce chapitre introductif est composé de quatre parties présentant les différents systèmes mésoscopiques et leur cohérence étudiés dans le cadre de cette thèse. Après une brève introduction aux facteurs limitants la cohérence et leurs grandeurs associées, on introduit le gaz bidimensionnel d'électrons en régime d'effet Hall quantique. Ensuite, on discute de l'interféromètre de Mach-Zehnder, expérience fondamentale pour mettre en évidence la cohérence de phase. Dans la troisième partie, on introduit l'îlot quantique couplé à un contact métallique. Après avoir discuté des principales caractéristiques de cet îlot, sa cohérence est étudiée à l'intérieur de l'interféromètre de Mach-Zehnder. Enfin, on aborde dans la dernière partie l'interaction entre un élément parfaitement cohérent, la jonction Josephson, et un élément purement dissipatif, une résistance.

Cette partie donne un cadre sur les notions et dispositifs étudiés dans le reste de ce manuscrit.

Sommaire

1.1 Propagation cohérente des électrons	17
1.1.1 Le gaz bidimensionnel d'électrons	19
1.1.2 Utilisation de l'effet Hall quantique entier	21
1.2 Mesure de la cohérence : l'interféromètre de Mach-Zehnder	24
1.2.1 Présentation de l'interféromètre	24
1.2.2 Application à la cohérence des états de bord	24
1.3 Collisionneur de particules	28
1.3.1 Description	31
1.3.2 Présence de QPC en amont	33
1.3.3 Retour sur le collisionneur	35
1.4 Cohérence d'un filot métallique	38
1.4.1 Description du système	39
1.4.2 Les différents régimes	40
1.4.3 Cohérence en présence d'interactions	42
1.5 Entre cohérence et décohérence : la jonction Josephson résistive	50
1.5.1 La jonction Josephson	52
1.5.2 Le modèle quantique de la résistance	54
1.5.3 Dissipation couplée à la jonction Josephson	55

1.1 Propagation cohérente des électrons

Une des premières questions que se posent les expérimentateurs lorsqu'ils veulent construire une expérience de physique quantique est la suivante : « Quelle doit être la dimension de mon système et la température afin d'observer des effets quantiques ? ». En effet, à notre échelle (dite macroscopique), les propriétés quantiques de la matière sont pour la plupart imperceptibles contrairement à la physique microscopique où le comportement des atomes et molécules est régi par la physique quantique. C'est à l'interface entre ces deux mondes que se situe la physique mésoscopique, elle relève à la fois de la physique quantique et de la mécanique statistique. La physique mésoscopique fait intervenir un nombre très important de constituants élémentaires (électrons, photons, atomes, etc.). Toutefois des variables collectives apparaissent, qui - malgré le nombre très élevé de constituants - ont un comportement régi par la physique quantique.

Comprendre ce qui limite la cohérence de phase dans le transport électronique quantique est un enjeu crucial. La construction d'une expérience nécessite la connaissance de quelques longueurs caractéristique du système quantique étudié :

- la longueur L de l'échantillon ;
- la longueur d'onde de Fermi λ_F associée à l'énergie de Fermi $\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m^* \lambda_F^2}$ où m^* est la masse effective de l'électron dans le système étudié. Elle représente l'extension spatiale de l'électron et intervient en tant que la plus petite échelle caractéristique des phénomènes quantiques. En-deçà de λ_F les effets de quantification peuvent apparaître. Pour un métal, λ_F est de l'ordre de la distance interatomique donc de l'Angström. Dans un semi-conducteur dopé comme GaAs, λ_F peut prendre des valeurs vraiment plus grandes ;
- le libre parcours moyen ℓ_e (ou longueur élastique) associé aux chocs élastiques sur les impuretés non magnétiques de l'échantillon. Notons que les collisions élastiques ne brisent pas la cohérence de phase ;
- la longueur de cohérence de phase ℓ_ϕ en-dessous de laquelle les effets cohérents quantiques peuvent être mesurés. Il s'agit de la longueur fondamentale de la physique mésoscopique car elle correspond à la longueur sur laquelle un électron conserve une phase parfaitement définie.

Pour se fixer les idées, on donne quelques ordres de grandeur associées à ces longueurs caractéristiques pour différents systèmes (Figure 1.1). Une fois ces grandeurs définies, il est légitime de se demander ce qui limite la longueur de cohérence de phase. En physique classique, on sait depuis longtemps que la conductivité d'un métal est limité par les chocs que subissent les électrons sur les imperfections du

métal considéré. Il en est de même en physique mésoscopique. Cependant, les différents types de collisions ne produisent pas les mêmes effets et n'affectent pas de la même manière la phase des électrons. On distingue deux grandes catégories de collisions. Tout d'abord, il y a les collisions avec les impuretés statiques dans le matériau. Ces collisions sont dites élastiques car leur énergie est conservée lors de ce processus. Ces défauts se comportent comme un potentiel aléatoire qui s'ajoute au potentiel du réseau. Enfin, il y a aussi les collisions inélastiques, reliées au couplage des électrons avec leur environnement, c'est-à-dire avec les autres électrons, les phonons et parfois les photons. Ces collisions vont être une source de décohérence pour les électrons. À haute température, c'est-à-dire environ au-dessus de 1 K, les interactions électrons-phonons prédominent [4, 5]. À très basse température, ces interactions deviennent de plus en plus rare et il ne reste que les interactions électron-électron. Notons que les impuretés magnétiques de l'échantillon limitent rapidement la longueur de cohérence [6–8]. Notons alors ℓ_{e-e} la longueur caractéristique de l'interaction électron-électron.

Finalement, les systèmes permettant d'observer du transport électronique cohérent sont ceux dans lesquels les échelles vérifient dans le cas idéal et à basse température

$$\lambda_F \ll L \ll \ell_\phi \ll \ell_{e-e} \quad (1.1)$$

Rappelons que les longueurs ℓ_ϕ et ℓ_{e-e} dépendent de la température. Le libre parcours moyen ℓ_e peut se situer en général de deux façons par rapport à la longueur caractéristique de l'échantillon L . Si $L \ll \ell_e$, un électron n'a pas le temps de rencontrer les impuretés dans l'échantillon traversé : on parle de régime balistique. Dans le cas contraire, on parle de régime diffusif. Sauf mention contraire, on se place dans toute cette thèse dans le régime balistique.

Réduire la dimensionnalité d'un système permet d'observer de nouveaux effets quantiques, comme par exemple l'effet Aharonov-Bohm, la localisation forte, le blocage de Coulomb, etc., et est donc un enjeu fondamental dans la compréhension des propriétés quantiques de la matière. Prenons par un exemple un échantillon rectangulaire de volume $L_x \times L_y \times L_z$. Pour obtenir des systèmes bidimensionnels, la relation (1.1) devient par exemple

$$L_z \ll \lambda_F \ll L_x, L_y \ll \ell_\phi \ll \ell_{e-e} \quad (1.2)$$

Les autres inégalités sont toujours vérifiées.

Pourtant, même en prenant toutes ces précautions, la longueur de cohérence

	densité n	λ_F (μm)	ℓ_e (μm)	ℓ_ϕ (μm)
Métal ($T \simeq 300$ K)	$\sim 10^{23} \text{ cm}^{-3}$	~ 0.01	10^{-4} à 10^{-3}	$\sim 10^{-3}$
Métal ($T \simeq 1$ K)	$\sim 10^{23} \text{ cm}^{-3}$	~ 0.01	10^{-4} à 10^{-3}	~ 1
GaAs - AlGaAs ($T \simeq 1$ K)	$\sim 10^{11} \text{ cm}^{-2}$	~ 50	~ 10	~ 10 à 10^2

FIGURE 1.1 – Ordre de grandeur des différentes longueurs caractéristiques du transport électronique dans un métal à température ambiante et à basse température, puis pour un gaz d'électrons bidimensionnel. Ces valeurs proviennent des références [4,5]. Travailler à basse température avec un gaz d'électrons bidimensionnel permet alors d'augmenter drastiquement la longueur de cohérence de phase.

de phase est de l'ordre de 10 à 100 μm à la température de 1 K, ce qui contraint fortement la taille des expériences. Il a donc fallu attendre l'essor des techniques de cryogénie et les développements technologiques de la nano-fabrication pour que les expériences puissent véritablement se multiplier et notamment le gaz bidimensionnel d'électrons et le contrôle de l'effet Hall quantique.

1.1.1 Le gaz bidimensionnel d'électrons

Dans cette partie, on s'intéresse brièvement à la physique du gaz bidimensionnel d'électrons. Entendons-nous tout d'abord sur la définition quantique de bidimensionnel. En physique classique, un conducteur est dit bidimensionnel si une de ses dimensions caractéristiques, par exemple L_z , est très inférieure aux deux autres. En physique quantique, cette définition est plus subtile. On peut considérer qu'un système quantique, dans notre cas des électrons, est bidimensionnel si la fonction d'onde qui caractérise leur état a la forme de celle d'une particule libre dans le plan (Oxy) et d'une particule localisée selon l'axe (Oz). Dans cette situation, l'énergie du système s'écrit

$$E_i(k) = E_i + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (1.3)$$

où k est la norme du vecteur d'onde dans le plan (Oxy) et E_i l'énergie de confinement dans la direction (Oz). Le spectre énergétique a donc deux composantes : une composante continue dans le plan (Oxy) caractéristique des particules libres, et une composante discrète selon (Oz) caractéristique des particules localisées. À chaque valeur de i correspond un ensemble d'énergies disponibles selon (Oz). Une des conditions pour y arriver est d'avoir $L_z \ll \lambda_F \ll L_x, L_y$. On doit donc augmenter λ_F et diminuer L_z afin d'obtenir ce système. Diminuer L_z permet notamment de

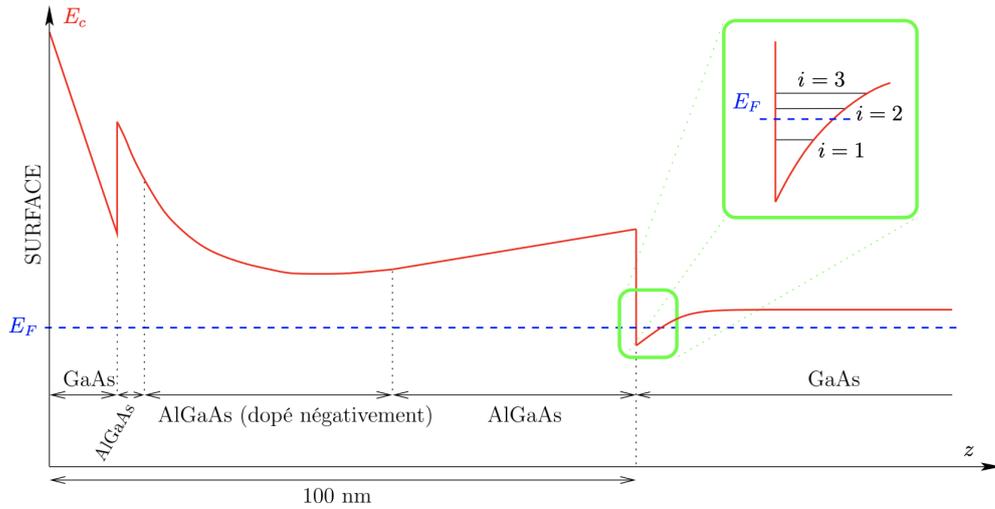


FIGURE 1.2 – Profil énergétique de la bande de conduction d’une hétérostructure en fonction de la profondeur z . L’ajout de couches successives des semi-conducteurs AlGaAs et GaAs engendre des sauts abrupts dans le profil énergétique et crée un puits de potentiel étroit de l’ordre de 10 nm. La séparation spatiale entre les impuretés ionisées donneuses et les électrons de conduction induit une grande mobilité des porteurs et donc un grand libre parcours moyen. La figure est issue de la thèse [9].

séparer les différentes sous-bandes (indexées par i) afin de ne peupler que la première sous-bande et « geler » la propagation selon (Oz).

Une première possibilité est d’utiliser un métal et de réduire son épaisseur afin de vérifier l’équation (1.3). Cependant les métaux ont une grande densité électronique de l’ordre de 10^{22} cm^{-3} , donc une longueur d’onde de Fermi de l’ordre de 0.1 nm. Une solution alternative pour pallier ces soucis est d’utiliser des hétérostructures de semi-conducteurs où s’empilent des couches de GaAs et de AlGaAs. Le procédé de croissance cristalline par épitaxie par jet moléculaire permet d’obtenir des profils énergétiques variés (voir Figure 1.2). Le choix de l’épaisseur des couches permet notamment de positionner le niveau de Fermi de sorte que les électrons viennent peupler le premier niveau du puits ($i = 1$ sur la figure). Ce type de structure permet d’obtenir des densités électroniques de l’ordre de 10^{11} cm^{-2} , c’est-à-dire une longueur d’onde de Fermi de l’ordre de 30 nm. La condition $L_z \ll \lambda_T$ est donc plus facilement accessible.

Dans ces conditions, les propriétés ondulatoires des électrons peuvent se manifester dans ces échantillons. Cependant, la taille des échantillons est en général plus

grand que le libre parcours moyen empêchant la propagation d'être balistique. Pour réaliser des expériences quantiques contrôlées, on doit s'assurer de bien guider les électrons. Pour y arriver, on utilise l'effet Hall quantique.

1.1.2 Utilisation de l'effet Hall quantique entier

On propose de résumer brièvement le principe de l'effet Hall quantique et de faire le lien avec la cohérence de phase.

Lorsqu'un gaz bidimensionnel d'électrons est soumis à un fort champ magnétique perpendiculaire et à basse température (les valeurs numériques seront précisées plus loin), le transport électronique s'effectue au voisinage des bords de l'échantillon. Les électrons au cœur de l'échantillon sont localisés sur des orbites circulaires et le volume de l'échantillon devient isolant.

Prenons l'exemple d'un électron au cœur d'un gaz bidimensionnel, comme celui décrit dans la partie précédente, sans impuretés quelconques mais soumis à un champ magnétique extérieur de norme B . Dans ce cas, l'électron n'est soumis qu'à ce champ magnétique et ses niveaux d'énergies accessibles s'écrivent

$$E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{1}{2} \hbar\omega_z \quad (1.4)$$

où $\omega_c = eB/m^*$ est la pulsation cyclotron (m^* est la masse effective de l'électron dans le gaz bidimensionnel) et $\hbar\omega_z$ correspond à l'écart d'énergie levée par la dégénérescence de spin due à l'effet Zeeman [10]. Cependant, les bords de l'échantillon induisent des interactions fortes avec les électrons, qui viennent ajouter à l'équation (1.4) un potentiel de confinement sur les bords. La conséquence est une augmentation des énergies (1.4) au niveau des bords [11]. Seuls les niveaux d'énergie en dessous de l'énergie de Fermi ϵ_F des électrons sont remplis et le nombre de canaux qui se propagent au niveau des bords correspond au nombre de niveaux situés en-dessous de ϵ_F (voir figure 1.3). On introduit alors le facteur de remplissage ν défini comme le nombre de niveaux d'énergie occupés par les électrons et qui correspond exactement au nombre de canaux de bords qui se propagent dans l'échantillon.

En pratique, il est nécessaire de se placer à basse température pour observer ces effets. En effet, la quantification des niveaux d'énergies (1.4) est visible si la température est petite devant $\hbar\omega_c/k_B \simeq 10 - 100$ K avec $m^* \simeq 0.07 m_e$ et des champs magnétiques entre 1 et 5 T [12, 13].

Trois propriétés importantes font de l'effet Hall quantique un effet remarquable :

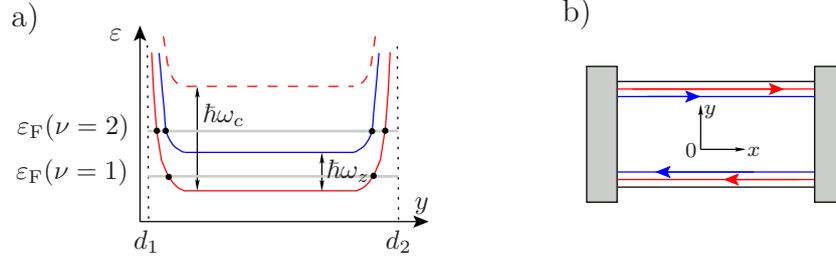


FIGURE 1.3 – a) Spectre énergétique en fonction de la largeur y de l'échantillon de largeur totale $d_2 - d_1$. Les bords de l'échantillon font croître les niveaux d'énergie. En-dehors des bords, les niveaux d'énergie suivent la formule (1.4). Le nombre de croisements entre les niveaux d'énergie et l'énergie de Fermi de l'échantillon donne le facteur de remplissage ν . Lorsque le champ magnétique est suffisamment élevé, l'effet Zeeman sépare les niveaux d'énergie et on peut alors obtenir deux états de bord dont les spins sont opposés. b) Représentation schématique des états de bords dans l'échantillon pour $\nu = 2$. La rétrodiffusion d'un canal de même couleur à un autre est fortement réduite et le régime est alors fortement balistique.

- La vitesse algébrique longitudinale est reliée à dE_n/dy où y est la longueur transverse à la propagation des canaux [11, 14]. Par conséquent, les canaux des deux bords opposés de l'échantillon se propagent dans des sens opposés. Dit autrement, la propagation d'un état de bord se fait toujours dans le même sens de propagation au niveau d'un bord de l'échantillon. On parle de propagation chirale.
- La présence d'impuretés à l'intérieur de l'échantillon ne modifie pas ces propriétés. En présence d'un potentiel de désordre, lié aux impuretés, les trajectoires cyclotrons des électrons s'enroulent autour des équipotentielles et sont donc localisées dans le volume de l'échantillon. Cette propriété est valable tant que le libre parcours moyen ℓ_e est grand devant le rayon cyclotron, donc pour des champs magnétiques suffisamment grands.
- La chiralité imposée par le champ magnétique rend difficile toute rétrodiffusion entre les canaux de bord [14, 15].

Ces trois propriétés combinées ensemble permettent notamment d'augmenter le libre parcours sur les bords jusqu'à atteindre environ une centaine de microns mais aussi d'augmenter la longueur de cohérence de phase qui peut atteindre jusqu'à $100 \mu\text{m}$ dans certains échantillons à basse température [12, 13].

Désormais, on s'intéresse dans tout ce manuscrit à l'effet Hall quantique avec un facteur de remplissage $\nu = 1$. Expérimentalement, les expériences d'effet Hall quantique se font en général avec un facteur $\nu = 2$ même si un des deux canaux

reste spectateur. Cette raison est essentiellement liée à l'écart entre les niveaux d'énergie. On obtient des facteurs $\nu = 2$ grâce à la dégénérescence de spin : un niveau de Landau est complètement rempli par les deux espèces de spin. En pratique pour $\nu = 1$, le niveau de Landau est complètement rempli par une seule espèce de spin. Mais l'agitation thermique $k_B T$ est en général de l'ordre de l'écart entre les deux niveaux d'énergie Zeeman $\hbar\omega_z$ (voir équation (1.4)), engendrant ainsi les deux espèces de spin et donc un facteur de remplissage $\nu = 2$. Pour cette raison, $\nu = 1$ est un remplissage assez difficile à contrôler pour des expériences d'interférométrie.

Dans ce cadre et au vu des propriétés précédentes, on peut considérer l'électron de bord comme une particule libre. L'Hamiltonien associé s'écrit

$$\hat{H}_0 = -i\hbar v_F \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi^\dagger(x) \partial_x \psi(x) \quad (1.5)$$

où $\psi(x)$ est l'opérateur fermionique associé à un électrons de bord et v_F la vitesse de Fermi des électrons. L'opérateur ψ vérifie la relation d'anticommutation $\{\psi(x), \psi^\dagger(y)\} = \delta(x-y)$. Par ailleurs, dans cette thèse, il est nécessaire de connaître le nombre d'électrons \hat{N} dans une région de l'espace, par exemple entre x_1 et x_2 . Cet opérateur s'écrit

$$\hat{N} = \int_{x_1}^{x_2} dx \psi^\dagger(x) \psi(x) \quad (1.6)$$

Dans les différentes expériences faisant intervenir l'effet Hall quantique, il est souvent utile de créer une différence de potentiels chimiques entre deux bords de l'échantillon. On soumet alors l'échantillon à une différence de potentiels $V(x, t)$ entre les deux extrémités. Ce couplage se traduit par l'Hamiltonien

$$\hat{H}_s = e \int_{-\infty}^{+\infty} V(x, t) \hat{n}(x) \quad (1.7)$$

avec \hat{n} la densité électronique définie par $\psi^\dagger(x)\psi(x)$. En présence de l'Hamiltonien $\hat{H}_0 + \hat{H}_s$, on trouve l'équation du mouvement

$$\partial_t \psi = -v_F \partial_x \psi - \frac{ie}{\hbar} V(x, t) \psi(x) \quad (1.8)$$

Finalement, un état de bord cohérent est décrit par l'opérateur fermionique

$$\psi(x, t) = \psi^{(0)}(x - v_F t, 0) e^{-\frac{ie}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' V(x - v_F(t-t'), t')} \quad (1.9)$$

où $\psi^{(0)}$ est l'opérateur fermionique associé à un électron libre en l'absence de potentiel électrique.

La propagation balistique des électrons dans ces canaux de bord induit par l'effet Hall quantique permet de bien guider ces particules dans les échantillons utilisés. On peut alors réaliser des expériences d'interférences électroniques similaires aux expériences d'optique [16]. Un exemple d'interféromètre inspiré par l'optique est étudié dans la partie suivante : l'interféromètre de Mach-Zehnder électronique.

1.2 Mesure de la cohérence : l'interféromètre de Mach-Zehnder

1.2.1 Présentation de l'interféromètre

La figure 1.4 décrit un schéma de principe de l'interféromètre de Mach-Zehnder, inspiré de son équivalent optique. Un flot d'électrons est injecté au potentiel V dans le gaz bidimensionnel d'électrons en régime d'effet Hall quantique.

Au lieu d'utiliser des lames séparatrices comme pour la lumière, on utilise un contact ponctuel quantique (QPC), formé par deux électrodes de grilles déposées à la surface de l'échantillon (voir figure 1.4). Modifier la tension de ces grilles permet de contrôler le passage des canaux de bord. Le QPC permet donc de partitionner le canal de bord en deux canaux qui suivent des bords différents de l'échantillon. Ces derniers se recombinent ensuite sur un second QPC. Le courant électrique est ensuite recueilli au niveau du canal de bord inférieur (voir figure 1.4). Le déphasage entre les deux voies de l'interféromètre peut être contrôlé géométriquement en modifiant notamment la longueur d'un canal de bord à l'aide d'une tension de grille ou par des variations du champ magnétique imposant le régime d'effet Hall quantique entier. Dans ce dernier cas, la différence de phase entre les deux voies engendre un flux d'Aharonov-Bohm et s'écrit $\Phi_{AB} = 2\pi SB/\Phi_0$ où S est la surface fermée par les deux canaux de bord, B le champ magnétique appliqué, SB le flux d'Aharonov-Bohm et $\Phi_0 = hc/e$ le quanta de flux. Cette différence de phase entre les deux voies entraîne donc des interférences entre les deux canaux de bord partitionnés.

1.2.2 Application à la cohérence des états de bord

Regardons maintenant l'interféromètre de Mach-Zehnder d'un point de vue plus formel. La partie qui suit est volontairement plus développée puisque l'interféromètre de Mach-Zehnder est au cœur d'un des projets. On s'intéresse seulement à des QPC avec un facteur de transmission t très petit devant 1 : les états de bord

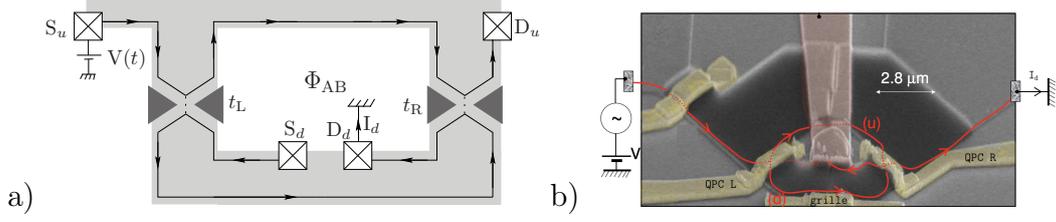


FIGURE 1.4 – a) Représentation schématique de l’interféromètre de Mach-Zehnder. La partie grisée correspond au gaz bidimensionnel. Tous les contacts (carrés blancs) sont reliés à la masse sauf la source de tension S_u et le détecteur D_d . Dans des expériences réelles, les contacts S_d et D_d coïncident. b) Interféromètre de Mach-Zehnder réalisé au CEA Saclay [17, 18]. Le déphasage entre les deux bras peut être modifié à l’aide d’une grille située en bas de l’échantillon (ou en changeant le champ magnétique). La taille de l’interféromètre $L \simeq 10 \mu\text{m}$ est bien plus petite que la longueur de cohérence de l’ordre de $50 - 100 \mu\text{m}$ pour $\nu = 1$.

sont essentiellement réfléchis par les QPC. Lorsqu’un état de bord est transmis par le QPC, un électron est enlevé de la voie supérieure (indiquée par u) et un autre est créé dans la voie inférieure (indiquée par d) et vice-versa. Chaque QPC est alors modélisé par l’Hamiltonien tunnel $H_{t,L/R} = \hbar v_F (\mathcal{T}_{L/R} + h.c.)$ avec

$$\mathcal{T}_j = t_j e^{i\varphi_j} \psi_u^\dagger(x_j) \psi_d(x_j) \quad (1.10)$$

où x_j est la position du QPC, t_j son amplitude de transmission et l’indice $j = L$ correspond au premier QPC (nommé *left*) et $j = R$ au second QPC (nommé *right*) [19]. La phase d’Aharonov-Bohm s’écrit $\Phi_{AB} = \varphi_L - \varphi_R$. Dans ce formalisme, le champ magnétique appliqué n’intervient pas directement dans les expressions des opérateurs $\psi_{u/d}$ mais on ajoute les phases accumulées d’Aharonov-Bohm au niveau des QPC.

Dans un interféromètre optique, les effets d’interférence sont observés sur un écran ou une photodiode. Pour un interféromètre électronique, les effets de cohérence de phase sont reliés au courant de la voie inférieure définie en représentation d’Heisenberg comme

$$\hat{I}_d = -e \frac{d\hat{N}_d}{dt} = -\frac{ie}{\hbar} [\hat{H}, \hat{N}_d] \quad (1.11)$$

où $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_s + \hat{H}_L + \hat{H}_R$. Les expressions de \hat{H}_0 et \hat{H}_s correspondent aux équations (1.5) et (1.7). Afin de calculer plus explicitement le courant, on utilise la représentation d’interaction par rapport à l’Hamiltonien tunnel $\hat{H}_t = \hat{H}_{t,L} + \hat{H}_{t,R}$, c’est-à-dire que l’opérateur courant peut s’écrire

$$\hat{I}_d(t) = U_I^\dagger(t) \hat{I}^{(I)}(t) U_I(t) \quad (1.12)$$

avec $U_I(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \hat{H}_t(t')}$ l'opérateur d'évolution et $\hat{I}^{(I)}(t)$ et l'opérateur courant en représentation d'interaction. Comme $t_{L/R} \ll 1$, on peut alors calculer l'opérateur perturbativement par rapport à \hat{H}_t . À l'ordre le plus bas, le courant mesuré est

$$I_d = \langle \hat{I}(t) \rangle = ev_F^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \langle [\mathcal{T}^\dagger(t'), \mathcal{T}(0)] \rangle \quad (1.13)$$

où $\mathcal{T}(t) = \mathcal{T}_R(t) + \mathcal{T}_L(t)$ et $\langle \dots \rangle$ est la moyenne quantique à l'équilibre par rapport à l'Hamiltonien $\hat{H}_0 + \hat{H}_s$. Afin d'obtenir cette relation, on s'est placé dans le cas où seule la voie supérieure de l'interféromètre est soumise à une tension $V(x, t)$ supposée stationnaire (régime DC). De plus, la tension est appliquée en amont de l'interféromètre, c'est-à-dire avant le premier QPC. Sans perte de généralité, la tension qui apparait dans l'équation (1.7) s'écrit $V(x, t) = \theta(d - x)V_{dc}$ où $\theta(x)$ est la fonction de Heaviside. La valeur précise de d n'a aucune importance du moment que $|d| > |x_L|$, puisqu'on peut redéfinir l'origine des temps afin de supprimer ce facteur d . On suppose cette condition vérifiée par la suite et on peut alors l'enlever de toutes les expressions. La représentation d'interaction permet alors de reprendre les opérateurs fermioniques de l'équation (1.9), c'est-à-dire

$$\psi_u(x, t) = \psi_u^{(0)}(x - v_F t, 0) e^{-\frac{ieV_{dc}}{\hbar}(t-x/v_F)} \quad \text{et} \quad \psi_d(x, t) = \psi_d^{(0)}(x - v_F t, 0) \quad (1.14)$$

$\psi_{u/d}^{(0)}(x, t)$ sont des opérateurs associés à des fermions libres. À température nulle, on a notamment

$$\langle \psi_{u/d}^{(0)}(x, t) \psi_{u/d}^{(0)\dagger}(0, 0) \rangle = -\frac{i}{2\pi v_F} \frac{1}{t - x/v_F - i0^+} \quad (1.15)$$

On remarque que le calcul du courant I_d ne fait intervenir que ces corrélateurs, appelés fonctions de cohérence à un électron dans le domaine de l'optique électronique. Ces fonctions de cohérence électronique permettent notamment de décrire les phénomènes de cohérence et de décohérence électroniques dans différents interféromètres dont l'interféromètre de Mach-Zehnder [20–22].

Notons que le courant (1.13) peut se décomposer en trois termes $I_d = I_{RR} + I_{LL} + 2\mathcal{R}(I_{LR})$ (\mathcal{R} est la partie réelle d'un nombre complexe) où

$$I_{jk} = ev_F^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \langle [\mathcal{T}_k^\dagger(t'), \mathcal{T}_j(0)] \rangle \quad (1.16)$$

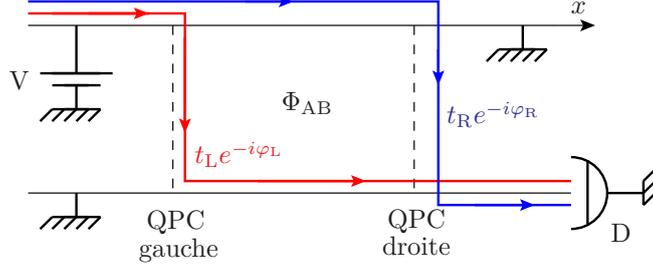


FIGURE 1.5 – Représentation schématique de l’interféromètre de Mach-Zehnder. On représente les différents chemins possibles (en bleu et rouge) pour une particule qui se propage initialement dans la voie supérieure, soumise à une tension V , vers le détecteur D . Les pointillés représentent les QPC. La différence de phase $\varphi_R - \varphi_L$ est la phase d’Aharonov-Bohm Φ_{AB} et provient du flux magnétique enlacé par les chemins. L’amplitude totale est reliée à la somme des amplitudes sur chaque chemin.

Les deux premiers termes de I_d correspondent la somme incohérente des deux voies de l’interféromètre. Le troisième terme contient la phase Φ_{AB} et correspond au terme d’interférence (voir figure 1.5). Avec les équations (1.14), (1.15) et (1.16), on arrive à $I_{RR} + I_{LL} = (t_R^2 + t_L^2) \frac{e^2 V_{dc}}{h}$. Le terme d’interférence est un peu plus complexe puisque que les opérateurs fermioniques ne sont pas tous évalués à la même position. On peut rapidement montrer que $I_{LR} = \frac{t_R t_L}{(2\pi)^2 \Delta L / v_F} e^{i\Phi_{AB}} A\left(\frac{eV \Delta L}{\hbar v_F}\right)$ avec $\Delta L = |L_u - L_d|$ la différence de longueur entre les deux bras de l’interféromètre et

$$A(\tilde{V}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-i\tilde{V}z} \left[\frac{1}{(z + i0^+)(z - 1 + i0^+)} - \frac{1}{(z - i0^+)(z - 1 - i0^+)} \right] \quad (1.17)$$

$$= 2\pi i (1 - e^{-i\tilde{V}})$$

En théorie du transport quantique, le paramètre important à étudier est la conductance G du système définie par $G(V) = dI/dV$. En combinant les expressions de I_{RR} , I_{LL} et I_{LR} , on arrive à

$$G(V) = \frac{e^2}{h} \left[t_R^2 + t_L^2 - 2t_R t_L \cos \left(\Phi_{AB} - \frac{eV \Delta L}{\hbar v_F} \right) \right] \quad (1.18)$$

La conductance (1.18) présente alors des oscillations par rapport à la phase d’Aharonov-Bohm Φ_{AB} . Ces oscillations, caractéristiques des interférences électroniques dans l’interféromètre, sont bien des manifestations de la cohérence de phase des électrons. La cohérence de phase des électrons est contenue dans la notion de visibilité \mathcal{V} définie comme le rapport de l’amplitude des oscillations d’Aharonov-Bohm sur

la valeur moyenne de la conductance c'est-à-dire $\mathcal{V} = \frac{G_{\Phi,max} - G_{\Phi,min}}{G_{\Phi,max} + G_{\Phi,min}}$. Dans cette situation, l'équation (1.18) donne

$$\mathcal{V}(V) = \mathcal{V}_0 = \frac{2t_R t_L}{t_R^2 + t_L^2} \quad (1.19)$$

Ce résultat montre tout simplement qu'il n'y a pas de perte de cohérence lors de la propagation des électrons dans les bras de l'interféromètre. Ceci n'est pas surprenant car les calculs précédents ont été effectués à partir de l'Hamiltonien $\hat{H}_0 + \hat{H}_s$ qui caractérise la propagation purement cohérente des états de bord de l'effet Hall quantique. Notons que les effets de température ont été mis de côté lors de calcul mais un calcul plus poussé à partir des corrélateurs (1.15) à température finie montre que la visibilité totale se met sous la forme $\mathcal{V} = \mathcal{V}_T \mathcal{V}_V$ où \mathcal{V}_V suit l'équation (3.3) et $\mathcal{V}_T = k_B T \frac{\pi \Delta L}{\hbar v_F} \operatorname{csch}(k_B T \frac{\pi \Delta L}{\hbar v_F})$ [23, 24]. On retrouve qu'à basse température ($k_B T \ll \frac{\hbar v_F}{\Delta L}$) $\mathcal{V}_T \simeq 1$ alors qu'à haute température, $\mathcal{V}_T \propto \exp(-k_B T \frac{\pi \Delta L}{\hbar v_F})$: les effets thermiques prennent le dessus et détruisent la cohérence des électrons.

La première réalisation d'un interféromètre de Mach-Zehnder a bien permis de visualiser ce phénomène d'interférences en regardant le courant de sortie [25] dont le résultat expérimental est représenté figure 1.6. Cependant, certaines mesures effectuées par d'autres groupes contredisent le résultat (3.3). En effet, au lieu de trouver une visibilité constante, les expériences montrent plutôt une visibilité qui décroît, en fonction du voltage appliqué, en forme de lobes [26, 27]. Ces lobes proviennent des interactions entre les différents canaux de bord car ces expériences sont faites avec un facteur de remplissage $\nu = 2$. Des électrons provenant des deux états de bord peuvent interagir entre eux et induire de la décohérence [28–31].

Nous venons de voir que le Mach-Zehnder est un outil indispensable pour étudier la cohérence du transport électronique. Cependant, ce dispositif est inefficace pour mettre en évidence la statistique quantique des particules, qu'elles soient des bosons, des fermions ou des anyons. On peut alors utiliser une expérience de collisions de particules.

1.3 Collisionneur de particules

L'interféromètre de MZI discuté à la section 1.2 ne peut pas mettre en évidence le caractère corpusculaire de la matière car ce dernier ne donne des informations que sur le courant. On peut alors utiliser l'expérience de Hong, Ou et Mandel [32] (abrégé HOM dans le reste du manuscrit). Une source d'électrons uniques est placée

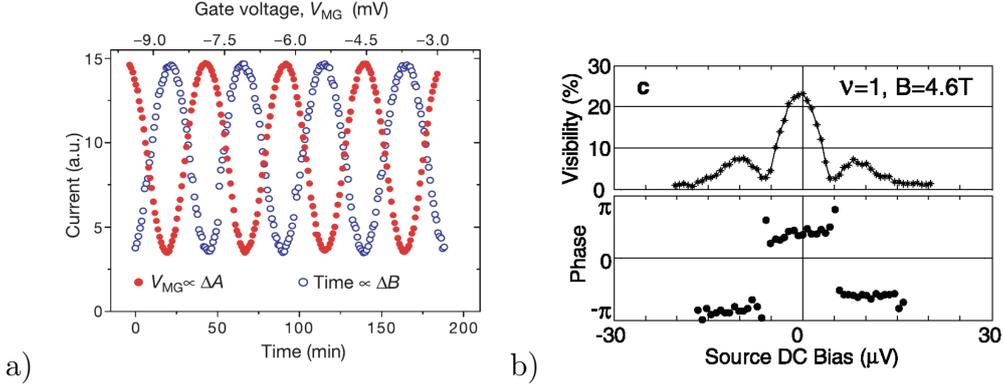


FIGURE 1.6 – a) Courant mesuré en fonction de la tension de grille (en rouge) et du champ magnétique appliqué (en bleu) [25], c'est-à-dire en fonction du flux d'Ahoronov-Bohm. La tension V_{MG} fait varier la surface de l'interféromètre et la variation du champ magnétique au cours du temps est de 0.12 mT/h . Dans les deux cas, ces variations engendrent des variations du flux magnétique et donc de Φ_{AB} . b) Visibilité et variation de la phase en fonction de la tension appliquée V en amont de l'interféromètre [26]. La décroissance de la visibilité et la présence de lobes contredisent l'équation (3.3).

sur chacun des deux bras séparés d'un interféromètre. Un point de contact quantique joue le rôle d'une lame séparatrice et permet de coupler les deux bras. On mesure ensuite les corrélations d'intensité, appelées aussi bruit croisé, entre les deux voies de sortie permettant d'étudier les propriétés d'émission de la source. Le principe de l'expérience est représenté sur la figure 1.7. Classiquement, soit les deux électrons émergent tous les deux sur le bras (3), soit ils émergent tous les deux sur le bras (4), soit enfin ils émergent chacun sur un bras différent. Chaque configuration a la même probabilité si bien que l'on s'attendrait à une probabilité de $1/4$ que les deux électrons se retrouvent tous les deux sur le bras (2) ou le bras (3) et une probabilité de $1/2$ de se retrouver sur deux bras différents. Ce n'est pas ce qui est observé avec des électrons. À cause du principe de Pauli, deux électrons qui arrivent simultanément au niveau du point de contact quantique ne peuvent pas se retrouver sur le même bras (*antibunching* en anglais). Par conséquent, le caractère aléatoire du partitionnement est supprimé et on trouve un bruit croisé nul. Dans l'expérience [16] dont les résultats sont représentés sur la figure 1.7, les deux sources électroniques sont retardées d'un temps τ . L'arrivée simultanée de deux électrons correspond à $\tau = 0$. On remarque alors que l'expérience de HOM permet de mettre en évidence la statistique fermionique des deux sources.

Contrairement à l'interféromètre de Mach-Zehnder dont les effets de cohérence sont totalement déterminés par la fonction de cohérence à un électron, outil de des-

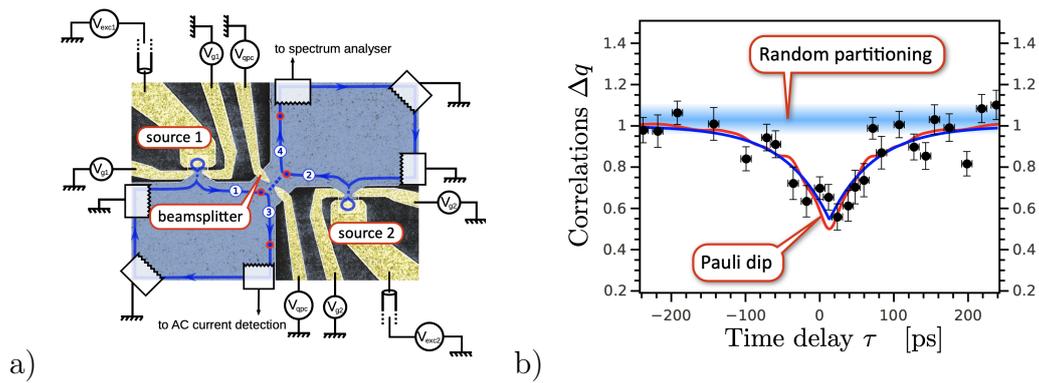


FIGURE 1.7 – **a)** Photo de l'interféromètre fait par un microscope électronique. Le gaz bidimensionnel est représenté en bleu et le QPC (appelé *beamsplitter* sur le schéma) et les sources de tension permettent de contrôler l'état des électrons incidents. **b)** Mesure du bruit renormalisé $\Delta q = 1 + (S_{AB} + S_{BA}) / (S_{AA} + S_{BB})$ en fonction du temps de retard τ entre les électrons arrivants sur le QPC. Lorsque $\tau = 0$, les deux électrons arrivent de façon simultanée et la corrélation diminue en accord avec le principe de Pauli. Lorsque le retard est supérieur à l'étalement du paquet d'onde $h/(eV)$, le bruit est alors donné par les deux électrons pris séparément vu que les électrons sont déviés par le QPC l'un après l'autre. Toutefois, le creux n'atteint pas la valeur théorique $\Delta q = 0$ lorsque $\tau = 0$ car au cours de leur propagation, les paquets d'onde électroniques subissent de la décohérence. Les résultats sont issus de [16].

cription des propriétés à un électron. Les propriétés d’indiscernabilité discutées dans le paragraphe précédent, donc de la statistique fermionique, ne se manifestent que de façon indirecte dans la cohérence à un électron. Pour mettre en évidence l’effet de cette statistique, il faut regarder la fonction de cohérence à deux électrons [20,33,34].

Cependant, cette expérience correspond à une mesure d’une différence de temps de retard, c’est-à-dire résolue en temps. Il est donc nécessaire d’avoir un contrôle presque parfait sur l’envoi des électrons dans chaque bras de l’interféromètre. On propose dans cette partie de décrire une autre expérience pouvant mettre en évidence la statistique des sources sans avoir besoin de contrôler leur émission. On utilise alors un collisionneur même si nous verrons que ce terme est mal choisi pour décrire cette expérience.

1.3.1 Description

Le principe de l’expérience est représenté sur la figure 1.8. Deux sources de particules sont situées en amont d’un point de contact quantique (QPC) et génèrent des courants $I_{A/B}^{in}$ où A/B sont les indices des deux bras du collisionneur, représentant des états de bord induit par l’effet Hall quantique. Ces deux faisceaux vont ensuite interférer au niveau d’un QPC dont les coefficients de réflexion et de transmission seront notés respectivement r_P et t_P .

L’information sur la statistique des particules est contenue dans le bruit croisé $\langle \delta \hat{I}_A \delta \hat{I}_B \rangle_{\omega=0}$ à fréquence nulle (équivalent à regarder sur des temps longs) entre les deux voies sortantes de l’interféromètre où $\delta I_{A/B} = I_{A/B} - \langle \hat{I} \rangle$. Retrancher $\langle \hat{I} \rangle$ permet de regarder les fluctuations du courant par rapport à sa valeur moyenne.

À partir du formalisme de Landauer-Büttiker, on peut calculer ce bruit croisé [35]. Dans ce formalisme de diffusion électronique, les électrons sortants des voies A et B , représentés par les opérateurs fermioniques $\psi_{A/B}^{out}(t)$, sont reliés aux opérateurs fermioniques des électrons incidents $\psi_{A/B}^{in}$ au niveau du QPC par

$$\begin{pmatrix} \psi_B^{out}(t) \\ \psi_A^{out}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_P & ir_P \\ -ir_P & t_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_B^{in}(t) \\ \psi_A^{in}(t) \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

On peut alors évaluer l’expression des courants sortants $\hat{I}_{A/B}$. Après quelques calculs sur les opérateurs fermioniques, on détermine le bruit croisé

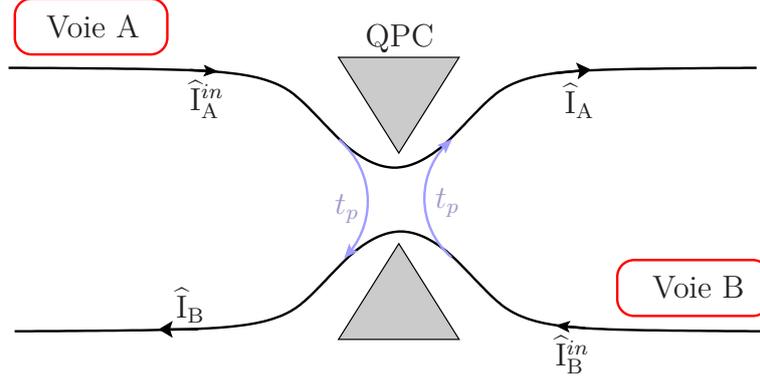


FIGURE 1.8 – Principe du collisionneur de particules. Deux sources, non représentées sur le schéma, génèrent des courants incidents $I_{A/B}^{in}$ sur les deux voies, notées A et B . Le QPC, d’amplitude de réflexion r_p , engendre des modifications sur les courants incidents. On mesure ensuite les corrélations croisées, appelés bruit croisé, entre les courants de sortie I_A et I_B .

$$\begin{aligned}
 \langle \delta \hat{I}_A \delta \hat{I}_B \rangle_{\omega=0} &= |t_p|^2 (1 - |t_p|^2) \frac{e^2}{h} \int d\epsilon \left[f_A(1 - f_A) + f_B(1 - f_B) - f_A(1 - f_B) - f_B(1 - f_A) \right] \\
 &= -|t_p|^2 (1 - |t_p|^2) \frac{e^2}{h} \int d\epsilon (f_A - f_B)^2
 \end{aligned}
 \tag{1.21}$$

où $f_{A/B}(\epsilon)$ est la distribution des électrons incidents des voies A et B . Les deux premiers termes du second membre, notés S_{AA} et S_{BB} , correspondent au bruit à l’équilibre de chaque état de bord incident. L’ensemble des deux derniers termes, noté $S_{AB} + S_{BA}$ et appelé bruit de partition, est relié à la combinaison des deux voies via le QPC. L’équation (1.21) montre alors que dans le cas de distributions $f_{A/B}$ identiques, le bruit $\langle \delta \hat{I}_A \delta \hat{I}_B \rangle_{\omega=0}$ s’annule. Le signe $-$ présent devant la formule (1.21) est une conséquence de la statistique fermionique.

Dans le cas où une des voies n’est pas alimentée ($f_B = 0$ par exemple), on trouve un bruit croisé strictement négatif. Les mesures expérimentales sont données à la figure 1.9.

Notons aussi que la formule (1.21) ne fait pas intervenir des termes en f_A ou f_B mais des termes en f_A^2 , f_B^2 et $f_A f_B$. Cette observation suggère que le QPC mixe les deux statistiques incidentes, qui peut être vue comme un effet de collision à deux particules. Les termes en f_A et f_B sont quant à eux représentatifs d’un effet à une particule. La formule (1.21) suggère alors que cette expérience met seulement en évidence un effet à deux particules. Nous verrons plus loin que ce n’est plus le cas lorsqu’il existe des interactions fermioniques.

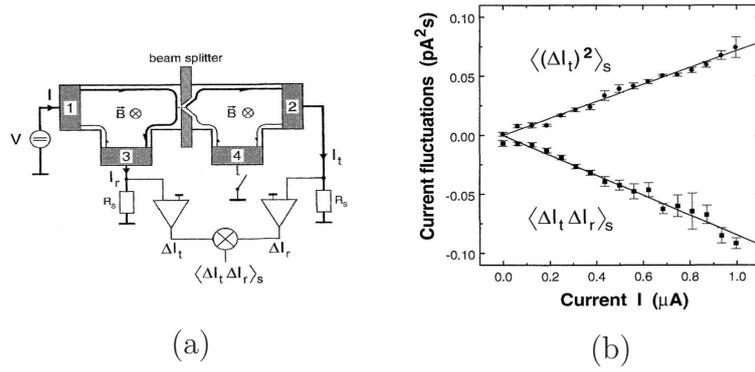


FIGURE 1.9 – Ces figures sont issues de la référence [36]. **Figure a** : Schéma expérimental du dispositif. Une différence de potentiels chimiques eV est appliquée entre les deux voies incidentes, notées 1 et 4. Le champ magnétique appliqué permet de créer des états de bord d'effet Hall quantique. Le circuit électronique permet d'amplifier et de mesurer les courants réfléchis et transmis, notés respectivement I_r et I_t , générés par le QPC (*beam splitter* sur le schéma). **Figure b** : Mesures expérimentales du bruit croisé $\langle\Delta I_t \Delta I_r\rangle$ et du bruit du signal transmis $\langle(\Delta I_t)^2\rangle$ en fonction du courant injecté I . Le bruit croisé est bien en accord avec la formule $\langle\Delta I_t \Delta I_r\rangle = -2e |I| |t|^2 (1 - |t|^2)$ avec t l'amplitude de réflexion du QPC.

Afin de mettre en évidence des effets à un ou deux électrons, on doit émuler des sources qui émettent des électrons suffisamment éloignés les uns des autres. Pour y arriver, on peut utiliser des points de contact quantique supplémentaires en amont du collisionneur.

1.3.2 Présence de QPC en amont

On représente le QPC sur le schéma 1.10. Les deux états de bords sont alors couplés par ce QPC, situé en $x = 0$, et permet d'injecter des électrons de l'état de bord L à R et on note r le coefficient de rétrodiffusion tel que $r \ll 1$. L'état de bord L est alimenté par une source de tension V . La limite $r \ll 1$ permet alors de considérer que le transfert d'un électron d'un état de bord à l'autre est un évènement rare. Le QPC sert à envoyer des particules de manière stochastique et la condition $r \ll 1$ suggère que les électrons envoyés ne se chevauchent pas. On désire dans cette partie de voir l'effet de ce QPC sur la statistique des fermions.

Notons $\psi_{R/L}$ les opérateurs fermioniques des électrons des états de bords qui se propagent dans le sens des x décroissants, indicés par L , et qui se propagent vers les x croissants, indicés par R . Chaque état représente un état de bord électronique :

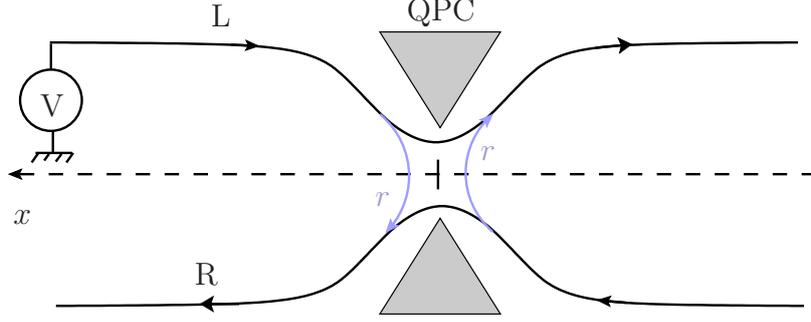


FIGURE 1.10 – Représentation de deux états de bord d'effet Hall quantique couplés par un point de contact quantique (QPC). L'ajout du QPC permet d'injecter un électron de l'état de bord L à l'état de bord R et vice-versa, laissant un trou derrière qui continue à se propager.

l'Hamiltonien (1.5) devient

$$\hat{H}_0 = -i\hbar v_F \int_{-\infty}^{+\infty} dx \{ \psi_R^\dagger(x) \partial_x \psi_R(x) - \psi_L^\dagger(x) \partial_x \psi_L(x) \} \quad (1.22)$$

À cet Hamiltonien, on ajoute un terme source $\hat{H}_s = e \int V(x, t) \hat{n}_L(x)$ avec $\hat{n}_L = \psi_L^\dagger \psi_L$ correspondant à la source de tension reliée à la voie L . Le QPC en entrée de l'îlot, situé en $x = 0$, peut soit transmettre l'état de bord incident ou le rétrodiffuser, c'est-à-dire détruire un électron de la branche (L) et en créer un dans la branche (R) avec une certaine amplitude r appelée coefficient de réflexion. Ce couplage entre les deux canaux de bord est décrit par l'Hamiltonien

$$\hat{H}_r = \hbar v_F r \{ \psi_R^\dagger(0) \psi_L(0) + \psi_L^\dagger(0) \psi_R(0) \} \quad (1.23)$$

Le calcul perturbatif en r du courant et du bruit de sortie est discuté dans le chapitre 2 de ce manuscrit. On propose de redonner les principaux résultats déjà établis dans les articles [35, 37, 38]. Pour ce dispositif, le courant de sortie I et le bruit S associé s'écrivent

$$I = r^2 \frac{e^2 V}{h} \quad \text{et} \quad S = e I \quad (1.24)$$

La valeur non nulle du bruit est reliée à la granularité de la charge (*shot noise* en anglais) en sortie du dispositif.

On désire remonter à la distribution $f_{A/B}$ des électrons. On cherche alors à évaluer le corrélateur fermionique $\langle \psi_R(L, t) \psi_R^\dagger(L, 0) \rangle$, relié à la statistique des électrons de l'état de bord R situés en $x = L$, suffisamment éloigné du QPC. L'évaluation de ce corrélateur se fait à partir du formalisme de Keldysh :

$$\langle \psi_R(L, t) \psi_R^\dagger(L, 0) \rangle = \langle T_K \psi_R(L, t^-) \psi_R^\dagger(L, 0^+) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_K dt' \hat{H}_{bs}(t')} \rangle \quad (1.25)$$

Le calcul complet est présenté dans l'appendice C. L'expression du corrélateur est la suivante

$$\langle \psi_R(L, t) \psi_R^\dagger(L, 0) \rangle = \frac{1}{2\pi v_F} \frac{1}{a + it} \left[1 + r^2 (e^{-i\frac{eV}{\hbar}t} - 1) \right] \quad \text{avec} \quad I = \frac{r^2 e^2 V}{h} \quad (1.26)$$

Cette expression ne fait aucune hypothèse sur le temps. Elle est à la fois valable pour les temps courts et les temps longs. L'expression (C.6) peut aussi être démontrée à partir d'un calcul perturbatif par rapport à \hat{H}_{bs} sans utiliser le formalisme de Keldysh. Notons que la condition $r^2 \ll 1$ impose $eV/\hbar \gg I/e$ (voir l'équation (1.24)), c'est-à-dire que les paquets d'ondes des électrons émis par le QPC ne se chevauchent pas.

Le résultat (1.26) suggère que la statistique des électrons est modifiée en présence du QPC. En effet, la distribution statistique des électrons, notée f , est composée de deux termes à température nulle : $(1 - r^2)\theta(-\omega)$ et $r^2\theta(-\omega + eV/\hbar)$. Ce résultat est bien différent du cas sans QPC. Ce n'est pas surprenant puisque l'ajout du QPC modifie la statistique des électrons. La rétrodiffusion du QPC est un événement rare, puisque $r \ll 1$. Les électrons sortants suivent alors une statistique poissonnienne : le bruit de l'état de bord n'est pas nul et proportionnel au courant de sortie. Le QPC permet donc d'avoir accès à la granularité de la charge contrairement à une source de tension directement reliée à l'état de bord. On discute alors de l'expérience de mesure de cette statistique.

1.3.3 Retour sur le collisionneur

Revenons au collisionneur initial en présence des QPC en amont. Ce dispositif, représenté entièrement sur la figure 1.11, doit permettre de mettre en évidence chaque électron séparément : on doit alors avoir des faisceaux électroniques suffisamment dilués. Or l'onde électronique générée par la source de tension V a un élargissement temporel de l'ordre de \hbar/eV . Afin de diluer les faisceaux, on doit vérifier la condition $e^2V/\hbar \gg I$ pour avoir des électrons suffisamment éloignés les uns des autres.

On désire retrouver le résultat central (1.21) à partir d'une approche perturbative. Dans cette partie, on s'intéresse aux deux grandeurs pertinentes du collisionneur : le courant généré par le QPC, noté \hat{I}_T et le bruit de ce dernier à fréquence nulle $\langle \hat{I}_T \hat{I}_T \rangle_{\omega=0}$.

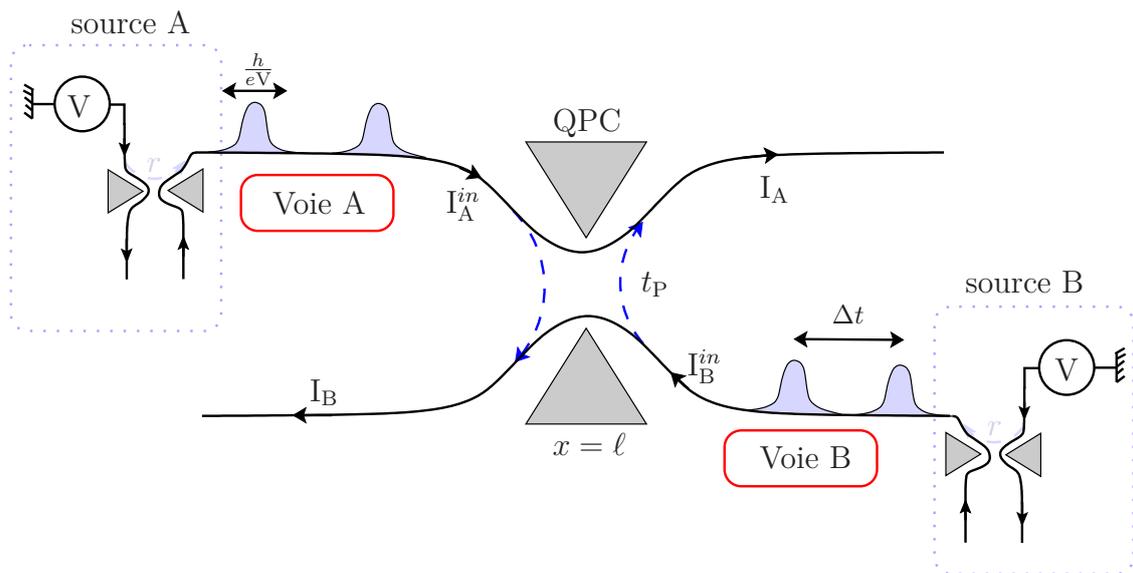


FIGURE 1.11 – Collisionneur de particules. Chaque source est constituée d'un QPC dont un des états de bord est relié à une source de tension V . Sur ce schéma, les deux sources sont identiques. L'amplitude de réflexion r étant très petite devant 1, les électrons sont émis par paquet de largeur temporelle h/eV , suffisamment séparés les uns des autres. L'ajout du QPC, situé en $x = \ell$, permet de mixer les deux voies et engendre un bruit croisé, a priori non nul, entre les deux voies sortantes.

Le calcul de ces deux grandeurs peut être réalisé en partant de l'expression Hamiltonienne du QPC

$$\hat{H}_T = \hbar v_F t_P \psi_A^\dagger \psi_B + h.c. \quad (1.27)$$

Cet Hamiltonien est traité de manière perturbative ($|t_P| \ll 1$) dans tout ce manuscrit. La théorie de la réponse linéaire permet alors d'obtenir l'expression du courant $I_T = \langle \hat{I}_T \rangle$ généré par le QPC

$$I_T = e v_F^2 |t_P|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle [\psi_A^\dagger(t) \psi_B(t), \psi_B^\dagger(0) \psi_A(0)] \rangle \quad (1.28)$$

À partir d'une approche de Landauer-Büttiker [35], les relations de passage (1.20) du QPC étant linéaires, on peut écrire les opérateurs courant en entrée en fonction de ceux en sortie, et après moyenne, on obtient naturellement

$$I_T = |t_P|^2 (I_A^{in} - I_B^{in}) \quad (1.29)$$

avec $I_{A/B}^{in} = \langle \hat{I}_{A/B}^{in} \rangle$ les courants générés par les deux QPC en amont (voir figure 1.11). Par ailleurs, on retrouve bien que si les deux courants sont identiques ($I_A = I_B$), aucun courant n'est généré au-niveau du QPC. On peut aussi calculer l'expression générale du bruit du QPC à fréquence nulle

$$\langle \delta \hat{I}_T \delta \hat{I}_T \rangle_{\omega=0} = e^2 v_F^2 |t_P|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle \{ \psi_A^\dagger(t) \psi_B(t), \psi_B^\dagger(0) \psi_A(0) \} \rangle \quad (1.30)$$

Les équations (1.28) et (1.30) font notamment intervenir les corrélateurs $\langle \psi_{A/B}(t) \psi_{A/B}^\dagger(0) \rangle$, évalués dans la partie précédente. Notons aussi que le calcul du bruit (1.30) est associé au comportement du corrélateur aux temps longs $t \gg \hbar/(eV)$.

Regardons le bruit croisé $\langle \delta \hat{I}_B \delta \hat{I}_A \rangle_{\omega=0}$. Comme les relations de passage des QPC sont linéaires, on peut utiliser la conservation du courant. Une augmentation du flux d'électrons dans une voie doit être compensée par une diminution du flux dans l'autre terminal. Si le courant \hat{I}_T est pris par convention de la voie A à la voie B, on peut alors définir les courants sortants $\hat{I}_A = \hat{I}_A^{in} - \hat{I}_T$ et $\hat{I}_B = \hat{I}_B^{in} + \hat{I}_T$ où $\hat{I}_{A/B}^{in}$ sont les opérateurs des courants incidents. Le bruit croisé s'écrit

$$\langle \delta \hat{I}_B \delta \hat{I}_A \rangle_{\omega=0} = -\langle \delta \hat{I}_T^2 \rangle_{\omega=0} + \langle \delta \hat{I}_A^{in} \delta \hat{I}_T \rangle_{\omega=0} - \langle \delta \hat{I}_B^{in} \delta \hat{I}_T \rangle_{\omega=0} \quad (1.31)$$

Il reste à évaluer les deux derniers termes de cette équation. L'expression du courant dans l'équation (1.29) suggère que l'on puisse écrire

$$\delta \hat{I}_T = \delta \hat{I}_T^0 + \frac{\partial I_T}{\partial I_A^{in}} \delta \hat{I}_A^{in} + \frac{\partial I_T}{\partial I_B^{in}} \delta \hat{I}_B^{in} \quad (1.32)$$

où on a introduit l'opérateur $\delta\hat{I}_T^0$ qui caractérise les éventuelles fluctuations du QPC en l'absence des fluctuations des courants incidentes. Ce terme ne joue aucun rôle dans le calcul des fluctuations (1.31) puisque qu'on cherche les corrélations avec les voies A et B . La statistique des faisceaux incidents est poissonnienne, on a alors la relation $\langle(\delta\hat{I}_{A/B}^{in})^2\rangle_{\omega=0} = eI_{A/B}^{in}$. Finalement,

$$\langle\delta\hat{I}_A^{in}\delta\hat{I}_T\rangle_{\omega=0} - \langle\delta\hat{I}_B^{in}\delta\hat{I}_T\rangle_{\omega=0} = \langle\delta\hat{I}_T^2\rangle_{\omega=0} \quad (1.33)$$

et on arrive à un bruit croisé nul, $\langle\delta\hat{I}_B\delta\hat{I}_A\rangle_{\omega=0} = 0$. Cette annulation parfaite peut surprendre mais nos calculs sont à l'ordre 1 en $I_{A/B}$ donc on décrit des processus où les électrons arrivent un à un depuis chaque voie et ne rendent pas compte des événements à deux électrons arrivant simultanément au niveau du QPC, contrairement à l'équation (1.21) qui est à l'ordre 2 en $I_{A/B}$ et tient donc compte des arrivées à deux électrons et donc des possibles collisions. Cependant, le calcul à l'ordre 1 en $I_{A/B}$ sera suffisant dans la suite du manuscrit pour analyser le comportement de nos quasiparticules.

Nous venons de voir deux expériences de physique mésoscopique : l'interféromètre de Mach-Zehnder et un collisionneur électronique. Ces deux expériences mettent notamment en évidence les effets de cohérence de phase (pour la première) à travers la mesure du courant, et les effets de la statistique quantique (pour la seconde) associés à une mesure de bruit du courant. La description faite précédemment reposait sur des fermions libres, c'est-à-dire sans interaction. Un des enjeux de ce manuscrit est de relier ces effets en présence d'interaction. On se propose d'étudier un système présentant des interactions électroniques : le couplage d'un effet de bord de l'effet Hall quantique avec un îlot métallique.

1.4 Cohérence d'un îlot métallique

En électrocinétique classique, le circuit le plus simple qui fait apparaître une composante non dissipative est le circuit RC , c'est-à-dire l'association en série d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C . En physique mésoscopique, la longueur de cohérence de phase des électrons est plus grande que la longueur caractéristique du système. Les premières expériences de physique mésoscopique ont montré qu'il fallait refonder les lois de l'électrocinétique [37, 39, 40]. En effet, les lois classiques s'appuient sur la localité des électrons, perdue en physique mésoscopique : les lois de Kirchhoff ne sont plus valables [41].

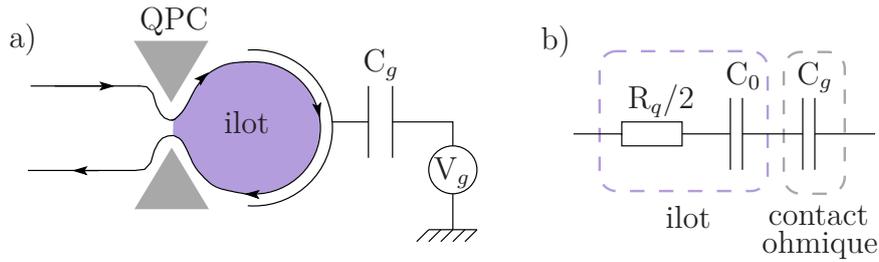


FIGURE 1.12 – a) Représentation schématique de la boîte quantique, de couleur violette. Le QPC en entrée de la boîte permet de contrôler le nombre de canaux de bord transmis. La boîte est couplée à un contact ohmique, relié à une source de tension V_g qui peut modifier le nombre d'électrons dans la constriction. b) Équivalent électrique de la boîte quantique. La résistance $R_q/2$ correspond à la dissipation de l'état de bord en-dehors de l'îlot, C_g à la capacité du contact ohmique et C_0 la capacité quantique reliée à la statistique quantique des électrons.

1.4.1 Description du système

Le circuit RC quantique est construit à partir d'un état de bord d'un gaz d'électrons 2D dont une portion de son chemin forme une boucle micrométrique dont la constriction à l'entrée est contrôlée par un point de contact quantique (QPC). Les dimensions de la boucle sont toutes inférieures à la longueur d'onde de Fermi : la boucle forme un système à 0 dimension que l'on nomme îlot quantique. L'ajout d'un contact métallique relié à une source de tension $V_g(t)$ (tension de grille) au-dessus du gaz bidimensionnel (voir figure 1.12.a). Le couplage capacitif touche pratiquement l'état de bord dans l'îlot ce qui entraîne un couplage capacitif très fort entre les deux systèmes.

Le circuit quantique peut être vu comme l'association d'une résistance R_q , appelée résistance de relaxation de charge et d'une capacité quantique C_0 [42, 43]. La présence de la capacité quantique C_0 est due à la statistique quantique des électrons. En effet, quand un électron est ajouté à la boîte quantique, le principe de Pauli empêche cet électron de se positionner dans un état quantique occupé par un autre électron. Il doit alors absorber une énergie Δ , correspondant à l'écart entre deux niveaux d'énergie. La présence du couplage capacitif engendre aussi une capacité géométrique, notée C_g , reliée à l'énergie électrostatique pour charger un conducteur métallique.

Les règles d'association d'impédances ne sont plus valables en régime quantique. Néanmoins, la correspondance entre le régime quantique et le régime classique se fait à basse fréquence lorsque $\omega \ll 1/R_q C_0$ (voir figure 1.12.b) : on retrouve la réponse

d'un circuit RC classique mais la capacité n'est pas la somme en parallèle de la capacité quantique C_0 et de la capacité géométrique C_g .

Autre point important, la résistance R_q ne fait pas intervenir le coefficient de transmission du QPC, prévue par Landauer [44]. En effet, pour le circuit RC quantique, la résistance de relaxation de charge est universelle à température nulle et vaut $R_q/2$, avec $R_q = h/e^2$ le quantum de résistance, et ne dépend donc pas de la transmission du QPC [42, 43]. Cette propriété de R_q provient de la corrélation en phase entre les électrons entrant et sortant : le transport à l'intérieur de la boîte quantique est cohérent et ces électrons ne peuvent donc pas dissiper de l'énergie à l'intérieur de la boîte. Seul l'état de bord à l'extérieur de la boîte dissipe de l'énergie. La capacité quantique C_0 est cependant reliée aux caractéristiques de la boîte et notamment à la densité d'états \mathcal{N} dans l'armature de la capacité mésoscopique par $C_0 = e^2 \mathcal{N}$. Ainsi, e^2/C_0 est le coût en énergie pour ajouter un électron dans le mode électronique considéré. L'effet de la capacité géométrie est souvent très grande et intervient peu dans les expériences [2, 40].

Ces effets ont par ailleurs été mesurés pour la première fois en 2006 [2, 40] grâce à des mesures d'admittance à basse fréquence et basse température (voir figure 1.13). La présence d'interaction dans l'îlot ne modifie pas la valeur de la résistance de relaxation de charge même en présence de rétrodiffusion au niveau du QPC [45].

1.4.2 Les différents régimes

Étudions un peu plus en détail la cohérence de ce système en présence d'interaction capacitive à l'intérieur de la boîte quantique. L'énergie typique de cette interaction est appelée énergie de charge E_C et vaut $E_C = \frac{e^2}{2C_g}$. Deux temps caractéristiques apparaissent alors dans ce modèle :

- le temps de passage de l'électron dans la boîte, noté τ_L . Si la longueur de l'état de bord à l'intérieur de la boîte est L , l'électron ressort au bout d'un temps $\tau_L \sim \frac{L}{v_F}$ où v_F est la vitesse de Fermi de l'état de bord de l'effet Hall quantique. Ce temps passé dans la boîte est en fait relié à la quantification des niveaux d'énergie à l'intérieur de cette boîte. En effet, l'écart Δ entre deux niveaux d'énergie vérifie $\Delta = hv_F/L$.
- le temps caractéristique t_c de l'interaction capacitive. Les fluctuations quantiques de la charge de la boîte induisent un temps caractéristique $t_c \sim \hbar/E_C$ où les interactions électroniques détruisent la cohérence de phase des électrons.

Deux cas limites peuvent se présenter : $\tau_L \ll t_c$ et $t_c \ll \tau_L$. Le premier cas revient à considérer $\Delta \gg E_C$. Les interactions électroniques n'induisent aucun effet

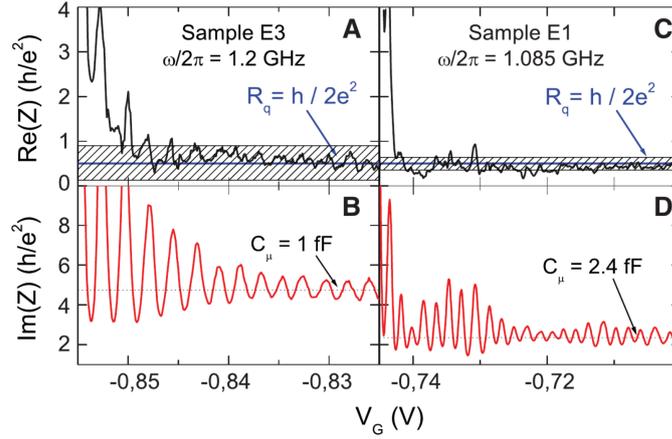


FIGURE 1.13 – Résultats expérimentaux des mesures de la résistance de relaxation de charge issue de [40], mesurés à une température de 100 mK et à des fréquences de l'ordre du gigaHertz (GHz). La boîte peut être vue comme une impédance complexe Z . La partie réelle de Z donne la résistance de l'échantillon et la partie complexe est reliée à la capacité totale C . Ces courbes sont exprimées en fonction de la tension de grille V_G appliquée au QPC, qui permet de contrôler la transmission dans l'îlot. Les parties hachurées correspondent aux incertitudes de mesure et les oscillations correspondent aux résonances de la densité d'états $d\mathcal{N}/d\epsilon$ de la boîte.

quantique important et renormalisent Δ . L'ajout d'un électron dans la boîte ne peut être réalisé que si on paie une énergie totale qui est la somme $\Delta + E_C$. On peut donc traiter cette situation comme pour des électrons sans interaction et retrouver les résultats de la partie précédente. Cependant, dans le second cas ($E_C \gg \Delta$), les interactions sont importantes et brisent la cohérence de phase à l'intérieur de la boîte. Cette situation revient à prendre la limite $L \rightarrow \infty$ ($\Delta \rightarrow 0$), à condition de ne pas sonder le système à des énergies de l'ordre de Δ , d'où le nom de cette limite : la boîte quantique infinie. Dans ce cas, les niveaux d'énergie, espacés de Δ , forment un continuum d'énergie : la boîte infinie peut donc dissiper de l'énergie en son sein. On peut alors montrer que la boîte ajoute une autre résistance en série $R_q/2$ en plus de celle initiale [45, 46]. La résistance totale est donc R_q . Cette valeur double de la résistance dans le cas cohérent n'est pas surprenante. En effet, ces interactions brisent la cohérence de phase entre le canal d'entrée et le canal de sortie. On a alors à faire à deux états de bords incohérents entre eux et double donc la résistance de l'ensemble.

Avant d'étudier plus en détail le cas cohérent, regardons quelques ordres de grandeur. La description quantique est nécessaire lorsque la température est de l'ordre de $T_c = \frac{e^2}{k_B C}$. Dans les circuits quantiques des expériences des articles [2, 40, 47],

la capacité C est de l'ordre de 1 fF, c'est-à-dire $T_c \simeq 1$ K. Pour des températures de l'ordre de 100 mK, une description quantique des capacités est nécessaire. Les deux régimes limites discutés plus haut sont aussi accessibles expérimentalement. Dans l'expérience de [47], $\tau_L \simeq 60 \mu\text{s}$ et $t_c \simeq 3$ ns ce qui permet d'analyser le régime incohérent que nous allons discuter plus en détails dans la prochaine partie. Dans l'expérience de l'article [40], l'énergie de charge E_c est beaucoup plus petite que Δ mais l'énergie E_c est trop petite pour être mesurée dans cette expérience. On se situe dans la limite $t_c \gg t_L$.

On a tendance à croire que les interactions entre les particules tuent la cohérence de phase, ce qui est généralement le cas. Cependant, dans ce cas précis, nous allons montrer que même dans le cas incohérent ($\tau_L \gg t_c$), les interactions électroniques peuvent garantir la cohérence de phase entre l'électron entrant dans la la boîte et l'électron sortant.

1.4.3 Cohérence en présence d'interactions

Description Hamiltonienne

Lorsque l'on cherche à diminuer l'écart entre deux niveaux d'énergie Δ dans la boîte quantique, on doit augmenter la densité d'état dans la zone confinée. On utilise pour cela un contact ohmique, donc métallique [47]. Dans cette situation, on parle plutôt d'îlot métallique. La condition $E_C \gg \Delta$ est alors vérifiée. Dans cette limite, la partie précédente montre que la cohérence de phase de l'électron incident est très vite perdue quand il rentre dans l'îlot, de même pour un électron qui sort. Les électrons entrant et sortant sont donc non corrélés et l'îlot peut être assimilable à une ligne semi-infinie. On peut remplacer l'état de bord initial par deux états de bord incohérents entre eux (voir figure 1.14). L'Hamiltonien (1.5) peut alors s'écrire [48]

$$\hat{H}_0 = -i\hbar v_F \int_{-\infty}^{+\infty} dx \{ \psi_R^\dagger(x) \partial_x \psi_R(x) - \psi_L^\dagger(x) \partial_x \psi_L(x) \} \quad (1.34)$$

où $\psi_{L/R}$ sont les opérateurs fermioniques des électrons qui se propagent vers l'îlot (L pour *left*) et qui y sortent (R pour *right*). Dans la limite incohérente, les opérateurs fermioniques ψ_L et ψ_R sont indépendants et donc anti-commutent. L'interaction électrostatique des électrons entre eux dans l'îlot s'écrit [49, 50]

$$\hat{H}_c = E_C (\hat{N} - N_g)^2 \quad (1.35)$$

où $N_g = C_g V_g / e$ est la tension de grille adimensionnée et \hat{N} l'opérateur qui correspond au nombre d'électrons à l'intérieur de l'îlot, situé en $x < 0$, qui s'écrit

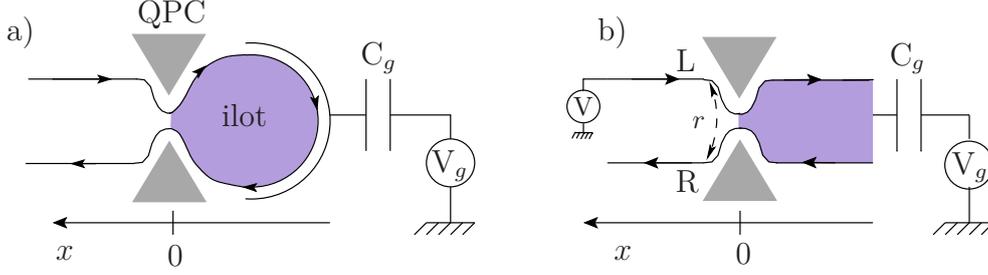


FIGURE 1.14 – Dans la limite $E_C \gg \Delta$, l'état de bord du système initial (figure a) peut être remplacé par deux états de bord incohérents entre eux (figure b).

$$\hat{N} = \int_{-\infty}^0 dx \{ \psi_R^\dagger(x) \psi_R(x) + \psi_L^\dagger(x) \psi(x) \} \quad (1.36)$$

On suppose dans cette partie que la tension de grille est indépendante du temps mais que l'état de bord L est couplé à une source de tension V_{dc} dont l'Hamiltonien suit l'équation (1.7)

$$\hat{H}_s = e \int_{-\infty}^{+\infty} V(x, t) \hat{n}_L(x) \quad (1.37)$$

avec $\hat{n}_L = \psi_L^\dagger \psi_L$. Le QPC en entrée de l'îlot, situé en $x = 0$, peut à nouveau soit transmettre l'état de bord incident ou le rétrodiffuser. Ce couplage entre les deux canaux de bord est toujours décrit par l'Hamiltonien

$$\hat{H}_r = \hbar v_F r \{ \psi_R^\dagger(0) \psi_L(0) + \psi_L^\dagger(0) \psi_R(0) \} \quad (1.38)$$

Pour plus de lisibilité, on peut écrire l'Hamiltonien précédent sous la forme $\hat{H}_r = \hbar v_F r (\mathcal{T} + \mathcal{T}^\dagger)$ avec $\mathcal{T} = \psi_R^\dagger(0) \psi_L(0)$. On se place désormais dans tout le manuscrit dans la limite quasi-balistique $r \ll 1$. L'îlot quantique est alors décrit par l'Hamiltonien $\hat{H}_0 + \hat{H}_c + \hat{H}_s + \hat{H}_r$. La résolution du système entier est impossible à cause notamment de \hat{H}_c qui est un terme non quadratique pour les variables fermioniques. Cependant, il est possible de traiter exactement l'interaction électrostatique contrairement à la rétrodiffusion du QPC. Afin d'y arriver, on peut employer les techniques de bosonisation rappelées dans l'encadré 1.

Description bosonique

La bosonisation, présentée dans l'encadré 1, permet de réécrire les différents termes de l'Hamiltonien $\hat{H}_0 + \hat{H}_c + \hat{H}_s + \hat{H}_r$

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar v_F}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \{(\partial_x \phi_L)^2 + (\partial_x \phi_R)^2\} \quad (1.39a)$$

$$\hat{H}_c = \frac{E_C}{4\pi^2} (\phi_R(0) - \phi_L(0) - 2\pi N_g)^2 \quad (1.39b)$$

$$\hat{H}_s = -\frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx V(x, t) \partial_x \phi_L \quad (1.39c)$$

$$\hat{H}_r = \frac{rD}{\pi} \cos(\phi_R(0) - \phi_L(0)) \quad (1.39d)$$

L'interaction électronique, reliée à \hat{H}_c , est maintenant quadratique par rapport aux bosons et peut donc être traitée exactement. Cependant, le terme de rétrodiffusion est devenu non-linéaire et doit donc être traité perturbativement. Dans cette partie, on suppose $r = 0$.

Encadré 1 : la bosonisation

Il ne s'agit pas de reproduire tout le formalisme de la bosonisation mais d'en donner les principaux ingrédients utilisés dans ce manuscrit. Un lecteur plus curieux pourra notamment lire [51,52]. L'idée principale derrière la bosonisation est de décrire des fermions en interaction dans un système unidimensionnel en termes de bosons sans interaction et repose sur la propriété suivante : les excitations particule-trou ont un caractère bosonique et sont bien définies à basse énergie.

D'un point de vue mathématique, les opérateurs fermioniques sont bosonisés en introduisant un opérateur bosonique ϕ selon la relation suivante

$$\psi_{R/L}(x) = \sqrt{\frac{D}{2\pi\hbar v_F}} \hat{F} e^{i\phi_{R/L}(x)} \text{ avec } [\phi_{R/L}(x), \phi_{R/L}(y)] = \pm i\pi \operatorname{sgn}(x-y) \quad (1.40)$$

où D est un paramètre énergétique de très haute valeur (« cut-off » en anglais) afin d'assurer lorsque $D \rightarrow +\infty$ l'obtention de quantités bien définies. Le paramètre numérique devant l'exponentielle permet d'obtenir le corrélateur (1.15). L'opérateur \hat{F} , appelé facteur de Klein, vérifie $\hat{F}^\dagger \hat{F} = 1$ et assure les bonnes relations d'anticommutation fermioniques. Ce facteur est important dès qu'il y a plusieurs types de fermions dans un système. Dans ce manuscrit, ce n'est pas le cas et on pourra oublier cet opérateur.

Dans ce formalisme, l'opérateur densité $\hat{n}_{L/R}$ s'exprime très simplement

$$\hat{n}_{R/L} = \pm \frac{1}{2\pi} \partial_x \phi_{R/L} \quad (1.41)$$

Un terme d'interaction densité-densité devient quadratique une fois exprimé en terme des variables bosoniques.

Lien avec les lignes de transmission quantiques

Pour des raisons de clarté, on suppose aussi que $\hat{H}_s = 0$. L'ajout du terme source a déjà été introduit dans la partie 1.2.2. On ne s'intéresse alors qu'à l'Hamiltonien $\hat{H}_0 + \hat{H}_c$.

La bosonisation peut s'interpréter comme une description des modes électromagnétiques liés aux électrons, un peu comme des plasmons, mais avec une vitesse de propagation beaucoup plus petite que la célérité de la lumière c . Une description en

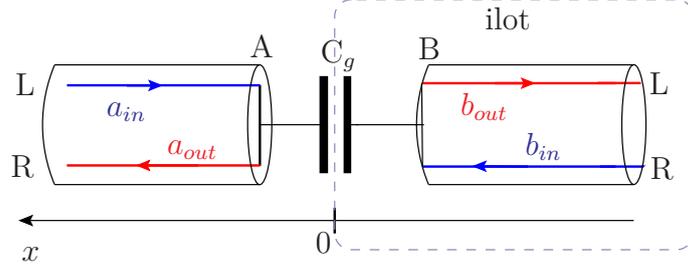


FIGURE 1.15 – Circuit équivalent de l’îlot quantique bosonisé. Le modèle est équivalent à deux lignes de transmission semi-infinies d’impédance $R_q/2 = h/2e^2$ couplées par une capacité C_g en $x = 0$. La ligne de transmission de gauche (respectivement de droite) correspond aux états de bord bosoniques à l’extérieur (respectivement à l’intérieur) de l’îlot. Ce circuit équivalent permet notamment de décrire l’îlot grâce à une théorie input-output. Ce modèle ramène toute l’interaction initiale à l’intérieur du dot ($x < 0$) en un seul point $x = 0$, représenté par la capacité C_g .

circuit devient alors naturelle.

Il est intéressant de noter que cet Hamiltonien est exactement le même que celui qui décrit deux lignes de transmission semi-infinies reliées par une capacité C_g . Le modèle est représenté sur la figure 1.15. Chaque ligne de transmission a une impédance caractéristique $R_q/2$ en accord avec la discussion de la partie 1.4.1. Un rappel sur les lignes de transmission est fait dans l’appendice A.1. On peut alors décrire l’interaction grâce à la capacité C_g et la traiter avec une matrice de diffusion qui relie linéairement les champs bosoniques en entrée et en sortie de la zone d’interactions [42, 53]. En dehors de la zone d’interactions, les bosons sont des bosons libres et peuvent être décomposés en ondes planes. Par exemple, pour le champ bosonique incident dans le canal de bord (L) ($x > 0$),

$$\phi_L(x > 0, t) = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} \left\{ a_{in}(\omega) e^{-i\omega(t+x/v_F)} + c.h. \right\} \quad (1.42)$$

où $c.h.$ est le conjugué hermitique. Les opérateurs $a_{in}(\omega)$ sont des opérateurs de Bose et vérifient la relation de commutation bosonique $[a_{in}(\omega), a_{in}^\dagger(\omega')] = \delta(\omega - \omega')$ et $\langle a_{in}^\dagger(\omega) a_{in}(\omega') \rangle = n_B(\omega) \delta(\omega - \omega')$ où $n_B(\omega) = 1/(e^{\beta\hbar\omega} - 1)$ est la distribution de Bose-Einstein avec $\beta = 1/k_B T$. On peut de même écrire la même relation pour le champ $\phi_L(x < 0, t)$ associé à l’opérateur b_{out} , mais aussi pour le champ bosonique $\phi_R(x, t)$ associé à b_{in} ($x < 0$) et a_{out} ($x > 0$), où on doit aussi remplacer $t + x/v_F$ par $t - x/v_F$. L’analogie entre le modèle de l’îlot incohérent et les lignes de transmission imposent les relations suivantes entre les opérateurs de charge et de tension (\hat{Q}, \hat{V}) et les opérateurs bosoniques (ϕ_R, ϕ_L)

$$\hat{Q}(x, t) = \frac{e}{2\pi} \left(\phi_L(x, t) - \phi_R(x, t) \right) \quad \text{et} \quad \hat{V}(x, t) = \frac{R_q v_F}{2} \partial_x \hat{Q}(x, t) \quad (1.43)$$

Notons A et B les positions respectives des lignes de transmission situées respectivement en $x = 0^+$ et $x = 0^-$ (voir figure 1.15). On associe à ces deux points les opérateurs de charge $\hat{Q}_{A/B}$ et de tension $\hat{V}_{A/B}$. Les relations entre les champs bosoniques a et b sont déduites des formules d'électrocinétique $\hat{Q}_A = C_g(\hat{V}_A - \hat{V}_B)$, relation constitutive d'une capacité, et $\hat{Q}_A = -\hat{Q}_B$, liée à la neutralité électrique de la capacité. On peut alors en déduire la matrice de diffusion associée à la diffusion par la capacité en $x = 0$:

$$\begin{pmatrix} a_{out}(\omega) \\ b_{out}(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 & t_0 \\ t_0^* & r_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{in}(\omega) \\ b_{in}(\omega) \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

où $r_0(\omega) = \frac{-i\omega\tau}{1-i\omega\tau}$ et $t_0(\omega) = \frac{1}{1-i\omega\tau}$ sont les coefficients respectifs de réflexion et de transmission, avec $\tau = R_q C_g = \hbar/(2E_C)$. Cette relation peut aussi être obtenue en résolvant les équations du mouvement (voir appendice B). Ces relations peuvent aussi être retrouvées par une approche de Langevin [54, 55].

La relation de passage (1.44) montre qu'une onde de type électromagnétique portée par les électrons qui arrive en direction de l'îlot ($x > 0$) est donc en partie réfléchiée et en partie transmise à l'îlot. Notons que cet effet de rétrodiffusion n'a aucun lien avec la rétrodiffusion du QPC. Analysons la cohérence en détail à partir des relations (1.44) dans la limite $\omega\tau \ll 1$. Ces relations de passage imposent alors

$$\phi_R(x = 0^+, t) = \phi_L(x = 0^+, t) \quad (1.45)$$

D'après l'équation (1.40), les opérateurs bosoniques décrivent les phases des électrons. Par conséquent, la condition (1.45) impose que l'électron émis par l'îlot métallique est cohérent en phase avec l'électron incident. Cet effet de cohérence est seulement due aux interactions dans l'îlot puisque sans interaction, les deux canaux (L) et (R) ne se parlent pas. Physiquement, un électron qui entre dans le dot modifie l'énergie d'interaction et brise la conservation de l'énergie : un électron doit alors sortir de l'îlot, sur un temps caractéristique de l'ordre de \hbar/E_C . Notons l'importance d'avoir une seule entrée et une seule sortie possible (cas monocanal). Les électrons entrant et sortant sont certes différents mais comme il n'y a qu'une seule voie de sortie et que l'entrée d'un électron déclenche la sortie d'un autre électron, l'émission se fait de façon cohérente avec l'entrée.

Regardons maintenant le cas général sans supposer $\omega\tau \ll 1$.

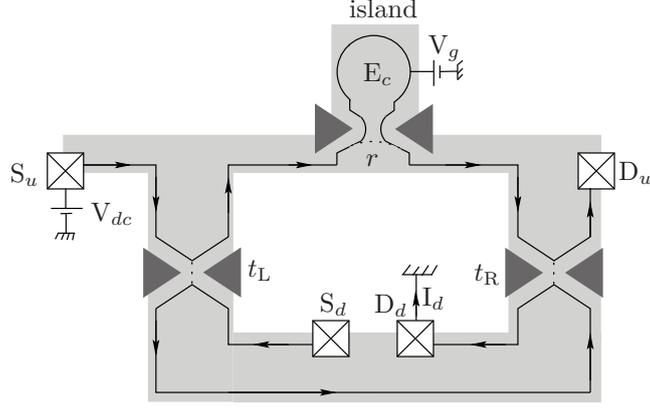


FIGURE 1.16 – Îlot métallique couplé à un des bras de l'interféromètre de Mach-Zehnder. Les deux bras de l'interféromètre ont des longueurs identiques. Les variations de la visibilité des franges sont donc simplement dues à l'îlot métallique.

Restauration de la cohérence de phase

Afin de visualiser les effets des interactions sur la cohérence, on couple l'îlot métallique à un des bras de l'interféromètre de Mach-Zehnder étudié dans la partie 1.2.2. Le schéma de l'expérience est représenté figure 1.16. Les seules quantités importantes pour le calcul de la visibilité sont évaluées en $x > 0$. De plus, on suppose que les deux bras de l'interféromètre ont exactement la même longueur ($L_u = L_d$). Dans ces conditions, les seules variations de cohérence de phase seront dues à l'îlot métallique.

En présence du voltage V_{dc} et de la quantité N_g , les champs bosoniques sont modifiés et sont donnés par (voir appendice B)

$$\phi_L(0^+, t) = \tilde{\phi}_L(0^+, t) - \frac{eV_{dc}t}{\hbar} \quad \text{et} \quad \phi_R(0^+, t) = \tilde{\phi}_R(0^+, t) - \frac{eV_{dc}t}{\hbar} + 2\pi N_g \quad (1.46)$$

où les champs $\tilde{\phi}_{L/R}$ sont donnés par (1.42) et (1.44). Deux points sont à noter. En premier, le canal de bord (R) est aussi affecté par la source de tension à cause des interactions à l'intérieur de l'îlot. Deuxièmement, il existe une certaine équivalence entre mettre une source de tension en amont de l'îlot et une tension de grille sur l'îlot mais cette équivalence sera discutée un peu plus loin dans le manuscrit.

Avec les relations de passage (1.44) (ou les équations du mouvement de l'appendice B), on peut aisément montrer que les champs fermioniques vérifient

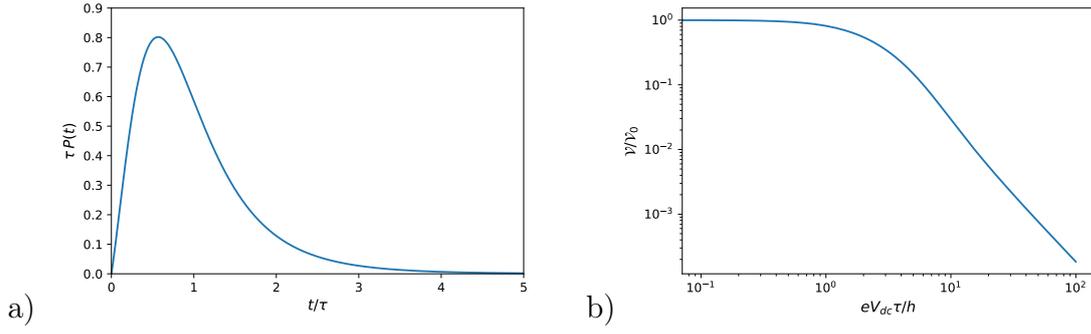


FIGURE 1.17 – a) Représentation graphique de la distribution normalisée des temps de rétrodiffusion $P(t)$ en fonction de t/τ avec $\tau = R_q C_g$ à température nulle. On peut vérifier que $\langle t \rangle = \tau$. Pour $t \ll \tau$, $P(t) \simeq e^{-\gamma} t/\tau^2$ et décroît exponentiellement pour $t \gg \tau$ selon $P(t) \simeq e^{-t/\tau}/t$. b) Allure de la visibilité de l'interféromètre en présence de l'îlot incohérent en présence des interactions électrostatiques. Pour $eV_{dc}/h \gg 1/\tau$, la visibilité normalisée $\mathcal{V}/\mathcal{V}_0$ devient $e^{-\gamma} (h/e\tau V_{dc})^2$ [55]. Pour $eV_{dc}/h \ll 1/\tau$, la visibilité normalisée tend vers 1 et montre alors que l'îlot est parfaitement cohérent à cause des interactions dans l'îlot.

$$\langle \psi_{L,u/d}^\dagger(t) \psi_{L,u/d}(0) \rangle = -\frac{i}{2\pi v_F} \frac{e^{i\frac{eV_{dc}t}{\hbar}}}{t - i0^+} \quad \text{et} \quad \langle \psi_{R,u/d}^\dagger(t) \psi_{R,u/d}(0) \rangle = -\frac{i}{2\pi v_F} \frac{e^{i\frac{eV_{dc}t}{\hbar}}}{t - i0^+} \quad (1.47)$$

où on a utilisé la notation $\psi(t) = \psi(0, t)$. Même en présence des interactions, ces corrélateurs sont identiques à ceux de fermions libres. Ce résultat n'est pas surprenant car si on ajoute et enlève un électron dans le même état de bord à l'extérieur de l'îlot, ces électrons ne peuvent pas atteindre l'îlot, siège des interactions. Les conductances $G_{RR} + G_{LL} = (t_R^2 + t_L^2) \frac{e^2}{h}$ de l'interféromètre ne sont donc pas modifiées.

Cependant, contrairement aux fermions libres, le corrélateur $\langle \psi_R^\dagger(t) \psi_L(0) \rangle$ n'est pas de valeur nulle mais devient, à température nulle,

$$\langle \psi_{R,u}^\dagger(t) \psi_{L,u}(0) \rangle = -\frac{i}{2\pi v_F} \frac{e^{i\frac{eV_{dc}t}{\hbar} - i2\pi N_g}}{t - i0^+} e^{\int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega} e^{-i\omega t} (r_0(\omega) - 1)} \quad (1.48)$$

On peut alors en déduire la conductance $G_{LR} = \frac{dI_{LR}}{dV_{dc}}$

$$G_{RL} = t_L t_R \frac{e^2}{h} e^{i(\Phi_{AB} + 2\pi N_g)} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-ieV_{dc}t/\hbar} P(t) \quad (1.49)$$

avec $P(t) = \frac{1}{\pi t} \sin(\pi e^{-t/\tau}) \exp(e^{-t/\tau} Ei(t/\tau))$ où $Ei(x)$ est l'exponentielle intégrale et $P(t < 0) = 0$. On peut alors donner l'interprétation suivante à la fonction $P(t)$. Au vu de la forme de l'équation (1.49), $P(t)$ correspond à une distribution de temps

de rétrodiffusion. En effet, t représente la durée d'un électron passé dans l'îlot avant d'être élastiquement rétrodiffusé par les interactions et ce temps est distribué selon la distribution normalisée $P(t)$. Par conséquent, la rétrodiffusion suit un processus stochastique décrit par un ensemble de phases de diffusion et donc engendre de la décohérence. L'allure de $P(t)$ est donnée sur la figure 1.17. De plus, d'après l'équation (1.49), le facteur $2\pi N_g$ est un facteur de phase constant ajouté par l'îlot et ne modifie pas la visibilité qui peut s'écrire

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-i\frac{e\tau V_{dc} t}{\hbar}} \overline{P}(z) \right| \quad (1.50)$$

où $\mathcal{V}_0 = \frac{2t_R t_L}{t_R^2 + t_L^2}$ et $\overline{P}(z) = \tau P(\tau z)$ est la distribution des temps de rétrodiffusion adimensionnée. L'allure de la visibilité est donnée sur la figure 1.17. Dans la limite $\frac{eV_{dc}}{\hbar} \ll 1/\tau = \frac{E_C}{\pi\hbar}$, la visibilité tend vers \mathcal{V}_0 , qui est la visibilité propre de l'interféromètre et non de l'îlot.

On peut donc conclure que les interactions à l'intérieur de l'îlot métallique incohérent rétablissent la cohérence de phase dans la limite des basses fréquences ($\omega \ll 1/\tau$) et ces calculs sont bien en accord avec les études précédentes [55, 56]. Ce phénomène a par ailleurs été récemment observé [47] dont les résultats sont donnés sur la figure 1.18 en utilisant également l'interféromètre de Mach-Zehnder décrit plus haut. L'ajout d'un canal de bord supplémentaire dans le système ($\nu = 2$) induit des degrés de liberté supplémentaires et détruit la restauration de la cohérence de phase [55].

Dans cette partie, Nous venons de voir que malgré les interactions entre électrons, la cohérence de phase pouvait être préservée sous certaines conditions. Nous allons maintenant étudier un autre système où la compétition entre éléments cohérents et décohérents cohabitent dans un même circuit : la jonction Josephson résistive.

1.5 Entre cohérence et décohérence : la jonction Josephson résistive

Dans cette partie, nous allons étudier la compétition entre un composant purement cohérent, la jonction Josephson, et un environnement dissipatif quantique, une résistance.

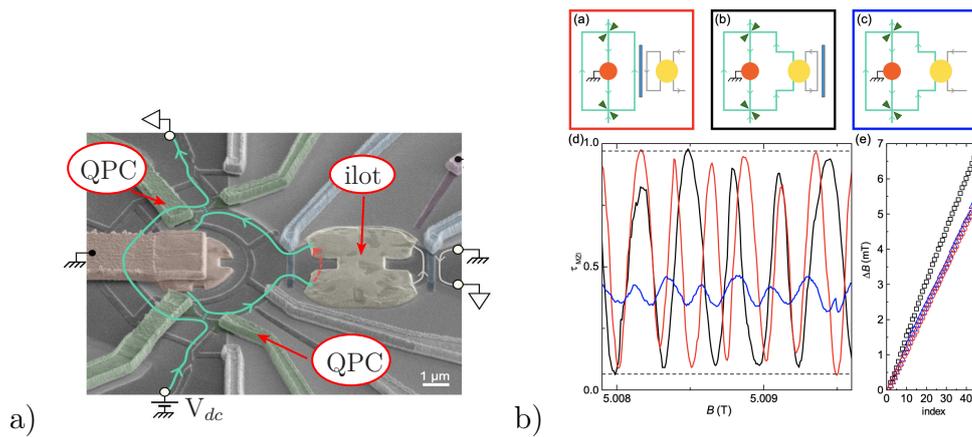


FIGURE 1.18 – Résultats de l'article [47]. a) Photo prise de l'interféromètre de Mach-Zehnder utilisé. L'ajout du QPC bleu, à droite sur la photo, permet d'ajouter un canal de bord supplémentaire. b) Représentation des oscillations du courant récupéré en sortie de l'interféromètre et des différentes configurations utilisées. La couleur de l'encadré correspond à la couleur de la courbe obtenue. Pour un facteur de remplissage $\nu = 1$, la présence de l'îlot (encadré noir) ne modifie pas la cohérence de phase et les interférences sont toujours présentes avec la même visibilité. L'ajout d'un canal supplémentaire (configuration bleue) fait fortement chuter la visibilité. Ce résultat est bien en accord avec les prédictions de [55]. Notons que la condition de basse fréquence pour l'observation de la cohérence de phase est bien vérifiée : l'énergie de charge est de l'ordre de $E_C \simeq k_B \times 0.3 \text{ K}$ et la température est d'environ 10 mK .

1.5.1 La jonction Josephson

Une jonction tunnel Josephson est constituée de deux supraconducteurs, donc cohérents, séparés par une couche d'isolant électrique (voir figure 1.19). Dans les supraconducteurs, tous les électrons s'apparient par paires, appelées paires de Cooper [5] de charge $-2e$. La jonction Josephson est donc un élément purement bosonique. En outre, lorsque la couche d'isolant est suffisamment mince de l'ordre de quelques dizaines d'angströms, les paires de Cooper peuvent traverser la couche par effet tunnel. Il y a donc apparition d'un courant d'intensité I_J entre les deux supraconducteurs :

$$I_J = I_c \sin \varphi \quad (1.51)$$

avec φ la différence de phase des paires de Cooper des deux supraconducteurs et I_c le courant critique, quantité caractéristique déterminée par la géométrie et la densité de paires de la jonction. De plus, en présence d'une différence de potentiels V entre les deux supraconducteurs, la relation suivante est aussi vérifiée

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2eV}{\hbar} \quad (1.52)$$

Les relations (1.51) et (1.52) sont les deux relations constitutives de la jonction Josephson. A priori, la jonction est en général caractérisée par deux quantités : la différence de phase φ et la charge $Q_J = -2eN$ la charge qui traverse la jonction et N le nombre de paires de Cooper.

Les progrès en nanofabrication ont permis de miniaturiser les jonctions Josephson. La conséquence directe est la diminution de la capacité C de la jonction, pouvant aller jusqu'à des valeurs de l'ordre de 1 fF. De nouveau, l'énergie de charge associée à cette capacité vaut $E_C = e^2/2C$, dont les valeurs typiques sont de l'ordre de $k_B \times 1 - 10$ K [57, 58]. L'effet de la capacité doit donc être pris en compte. On représente sur la figure 1.19 la représentation électrique de la jonction Josephson complète.

Dans la limite $k_B T \ll E_C$, il faut revoir la description théorique de la jonction Josephson. En effet, la différence de phase φ et le nombre de paires de Cooper N deviennent des opérateurs quantiques et ces opérateurs ne commutent pas entre eux. On a alors les relations

$$[\hat{\varphi}, \hat{N}] = i \quad \text{et} \quad \Delta \hat{\varphi} \Delta \hat{N} \geq \frac{1}{2} \quad (1.53)$$

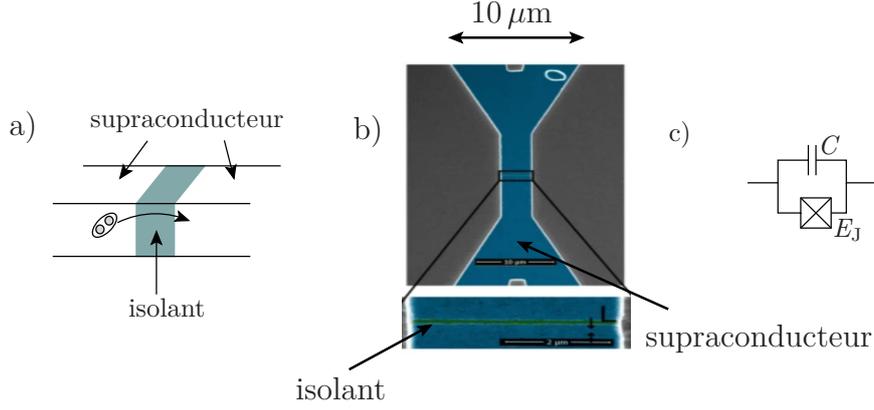


FIGURE 1.19 – Différentes représentations d'une jonction Josephson. a) Schéma de principe. b) Réelle représentation de la jonction issue de l'expérience [57] Le supraconducteur est représenté en bleu et l'isolant en vert (dans la partie zoomée). c) Schéma électrique équivalent d'une jonction Josephson.

Notons que \hat{N} est un opérateur dont les valeurs propres sont entières ($N \in \mathbb{Z}$). Les relations (1.53) imposent que $\hat{\varphi}$ est 2π -périodique, et vice-versa. On peut montrer que les relations (1.51) et (1.52) restent applicables avec les opérateurs équivalents. De plus, la charge sur les armatures du condensateur diffère en général de la charge Q_J puisque la jonction est placée dans un circuit électronique et les différents éléments peuvent contribuer à modifier la charge du condensateur, ce que nous allons étudier un peu plus loin dans le manuscrit.

Dans le formalisme quantique, les valeurs propres de \hat{N} représentent des états macroscopiques du circuit correspondants à des valeurs bien définies du nombre de Cooper traversant la jonction :

$$\hat{N} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n |n\rangle\langle n| \quad (1.54)$$

Le passage d'une paire de Cooper à travers la barrière ajoute ou enlève une paire des supraconducteurs et couple donc les états $|n\rangle$ et $|n\pm 1\rangle$. L'Hamiltonien correspondant s'écrit donc

$$\hat{H}_J = -\frac{E_J}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n| \right) \quad (1.55)$$

où $E_J = \hbar I_c / 2e$ est l'énergie Josephson de la jonction. La description en terme d'états $|n\rangle$ est appelée la représentation de charge. Dans certains cas que nous étudierons

plus loin, il peut être intéressant d'étudier la phase $\hat{\varphi}$. La relation de commutation (1.53) impose que $e^{i\hat{\varphi}}$ joue le rôle d'un opérateur déplacement pour les états $|n\rangle$, c'est-à-dire $e^{i\hat{\varphi}}|n\rangle = |n-1\rangle$. On peut alors réécrire l'équation (1.55) en

$$\hat{H}_J = -E_J \cos \hat{\varphi} \quad (1.56)$$

On parle alors de représentation de phase. On peut donc décrire la jonction Josephson complète, isolée de tout circuit, par l'Hamiltonien

$$\hat{H} = 4E_C \hat{N}^2 - \frac{E_J}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|) = 4E_C \hat{N}^2 - E_J \cos \hat{\varphi} \quad (1.57)$$

où le premier terme décrit l'énergie stockée dans la capacité et le second terme le passage par effet tunnel des paires de Cooper. Deux échelles d'énergie évidentes apparaissent : E_C et E_J . Deux cas extrêmes se présentent :

- $E_J \ll E_C$: l'énergie de charge est dominant ce qui implique que le système a une charge Q bien définie ;
- $E_J \gg E_C$: le système a une phase bien définie car les fonctions d'onde sont localisées dans les minima du potentiel $-E_J \cos \varphi$. Un courant peut alors circuler entre les deux supraconducteurs même en l'absence de source de tension.

Avant d'étudier le comportement de la jonction avec un élément dissipatif, il est intéressant d'introduire brièvement le modèle d'une résistance quantique.

1.5.2 Le modèle quantique de la résistance

Comme les équations de la physique quantique sont invariantes par renversement du temps ($t \rightarrow -t$), la théorie Hamiltonienne est dans l'impossibilité de traiter les systèmes dissipatifs donc irréversibles. Ce problème a été discuté par Caldeira et Leggett [59] et est brièvement discuté dans cette partie.

L'idée principale de ce modèle est de remplacer l'élément dissipatif, ici la résistance R_s par une ligne de transmission composée d'une infinité d'oscillateurs quantique LC (voir figure 1.20). Le passage d'un nombre fini de degrés de liberté à un nombre infini permet de concilier la réversibilité des équations et la dissipation quantique. D'un point de vue quantique, la dissipation représente le couplage entre le système étudié et un bain d'oscillations harmoniques, qui représente l'environnement et donc un continuum d'énergie. D'un point de vue physique, la ligne de transmission ne peut pas diluer l'énergie injectée par le système parmi le nombre infini de degrés de liberté de la ligne de transmission. Il est alors possible de décrire

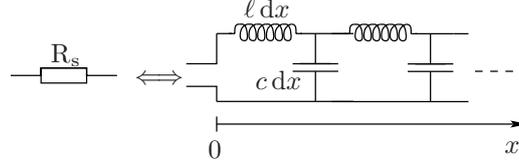


FIGURE 1.20 – La dissipation est décrite par une résistance R_s , elle-même décrite par une ligne de transmission semi-infinie composée d'éléments LC . Dans cette modélisation, $R_s = \sqrt{\ell/c}$ où ℓ et c sont respectivement les impédances et capacités linéiques.

la dissipation avec une description purement hamiltonienne. L'Hamiltonien H_{R_s} de la ligne de transmission s'écrit

$$\hat{H}_{R_s} = \int_0^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2\ell} (\partial_x \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2c} \hat{q}(x)^2 \right] \quad (1.58)$$

où ℓ et c sont respectivement les inductances et capacités linéiques. L'impédance de la ligne vaut $R_s = \sqrt{\ell/c}$ [60]. Les opérateurs $\hat{\phi}$ et \hat{q} sont les opérateurs locaux de flux et de charge et vérifient la relation de commutation $[\hat{\phi}(x), \hat{q}(x')] = i\hbar \delta(x - x')$. De la même manière que dans la partie sur le circuit RC quantique, on peut décomposer ces opérateurs sur les modes propres propagatifs

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(x) &= \sqrt{\frac{\hbar R_s}{4\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} [a_{in}(\omega) e^{-i\omega x/v_F} + a_{out}(\omega) e^{i\omega x/v_F} + c.h.] \\ \hat{q}(x) &= \frac{c}{i} \sqrt{\frac{\hbar R_s}{4\pi}} \int_0^{+\infty} d\omega \sqrt{\omega} [a_{in}(\omega) e^{-i\omega x/v_F} + a_{out}(\omega) e^{i\omega x/v_F} - c.h.] \end{aligned} \quad (1.59)$$

Les notations ont été introduites dans la partie 1.4.3. L'équation (1.58) peut se réécrire

$$\hat{H}_{R_s} = \int_0^{+\infty} d\omega \hbar \omega [a_{in}^\dagger(\omega) a_{in}(\omega) + a_{out}^\dagger(\omega) a_{out}(\omega)] \quad (1.60)$$

Les opérateurs bosoniques $a_{in/out}$ sont des modes propres de l'Hamiltonien (1.58).

On s'attend alors que la dissipation influe sur la dynamique et donc la physique de la jonction Josephson. C'est le but de la partie suivante.

1.5.3 Dissipation couplée à la jonction Josephson

Regardons maintenant la jonction Josephson décrite précédemment couplée à la résistance R_s et à une source de courant classique I_0 . Le schéma du circuit est

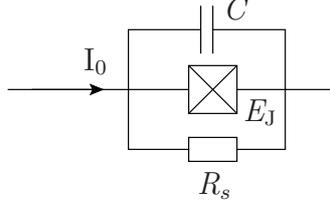


FIGURE 1.21 – Représentation électrique de la jonction Josephson résistive. Les présences de la source de courant et la résistance ajoutent des contributions à la charge accumulée sur les armatures du condensateur.

représentée sur la figure 1.21. L'ajout de la source de tension et de la résistance modifie la charge portée par le condensateur. En notant \hat{Q} la charge apportée par la résistance R_s , l'Hamiltonien (1.57) devient

$$\hat{H} = \frac{1}{2C} \left(2e\hat{N} + \hat{Q} + \int_{-\infty}^t dt' I_0(t') \right)^2 - \frac{E_J}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|) + H_{R_s} \quad (1.61)$$

Notons que l'Hamiltonien $\hat{Q}^2/2C + H_{R_s}$ est quadratique et donc diagonalisable. Cela revient à étudier la ligne de transmission semi-infinie (1.58) avec une capacité C en $x = 0$. Les conditions aux limites imposées par la présence de la capacité C sont (voir appendice A.1)

$$a_{out}(\omega) = \frac{1 + i\tau_s\omega}{1 - i\tau_s\omega} a_{in}(\omega) \quad \text{et} \quad \hat{Q} = \frac{C}{c} \hat{q}(0) \quad (1.62)$$

avec la condition supplémentaire $[\hat{\phi}(0), \hat{Q}] = i\hbar$. Les équations (1.59) et (1.62) donnent $H_{R_s} + \hat{Q}^2/2C = \int_0^{+\infty} d\omega \hbar\omega a_{in}^\dagger(\omega) a_{in}(\omega)$. On peut alors simplifier l'équation (1.61) en appliquant la transformation unitaire

$$\hat{U}(t) = \exp \left[\frac{i\hat{\phi}(0)}{\hbar} \left(2e\hat{N} + \int_{-\infty}^t dt' I_0(t') \right) \right] \quad (1.63)$$

Comme $[\hat{\phi}(0), \hat{Q}] = i\hbar$, \hat{U} joue le rôle d'un opérateur de déplacement pour \hat{Q} et a_{in} . Le nouveau Hamiltonien $\hat{\hat{H}}$ s'écrit $\hat{\hat{H}} = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger + i\hbar\partial_t\hat{U}\hat{U}^\dagger$ et on obtient

$$\hat{\hat{H}} = -\frac{E_J}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (|n\rangle\langle n+1| e^{-i\frac{2e}{\hbar}\hat{\phi}(0)} + |n+1\rangle\langle n| e^{i\frac{2e}{\hbar}\hat{\phi}(0)}) + \int_0^{+\infty} d\omega \hbar\omega a_{in}^\dagger(\omega) a_{in}(\omega) - I_0(t)\hat{\phi}(0) \quad (1.64)$$

En représentation de phase, on peut alors réécrire l'équation précédente

$$\hat{H} = -E_J \cos(\hat{\varphi} - 2e\hat{\phi}(0)/\hbar) + \int_0^{+\infty} d\omega \hbar\omega a_{in}^\dagger(\omega)a_{in}(\omega) - I_0(t)\hat{\phi}(0) \quad (1.65)$$

Un point important est la disparition de l'opérateur \hat{N} . Par conséquent, l'opérateur de phase de la jonction $\hat{\varphi}$ commute avec l'Hamiltonien \hat{H} et est donc une constante du mouvement qui peut disparaître en redéfinissant $\hat{\phi}(0)$. On remarque alors que la présence de la résistance R_s fait disparaître $\hat{\varphi}$ de l'Hamiltonien et donc la périodicité de la phase disparaît aussi. Sans l'élément résistif, les états quantiques associés à φ et $\varphi + 2\pi$ sont équivalents, c'est-à-dire indiscernables. La phase est donc définie sur un cercle unitaire de circonférence 2π . On parle alors de phase compacte. La présence de R_s fait disparaître cette périodicité ce qui entraîne une discernabilité des états quantiques associés à φ et $\varphi + 2\pi$. On peut alors choisir une phase définie entre $-\infty$ et $+\infty$, on parle de phase étendue. L'utilisation de la phase compacte ou de la phase étendue dans les différentes situations rencontrées n'est pas clair et fait encore parti de débats actuels [58, 61–63].

On vient de montrer que, sans faire aucune approximation, la discrétisation de la charge, associée à \hat{N} , et par conséquent, le choix d'utiliser une phase compacte ou une phase étendue n'a plus de sens vu que $\hat{\varphi}$ disparaît du formalisme. L'Hamiltonien (1.65) est un des points majeurs de notre problème.

Regardons maintenant l'influence de l'élément résistif sur la jonction Josephson. Naïvement, on peut penser que toute dissipation détruit la cohérence de phase de la jonction Josephson, c'est-à-dire perd son caractère supraconducteur. Nous allons voir que le caractère non linéaire de la jonction Josephson amène une physique plus complexe. La grandeur pertinente associée à la cohérence de phase est ici [64]

$$\langle e^{2ie\hat{\phi}(t)/\hbar} e^{-2ie\hat{\phi}(0)/\hbar} \rangle = e^{J(t)} \quad (1.66)$$

Ce facteur mesure à quelle vitesse la cohérence de phase décroît dans le temps. Avec la décomposition (1.59) et (1.62), on peut alors montrer que

$$J(t) = \frac{2}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{1}{1 + \omega^2(R_s C)^2} \frac{e^{-i\omega t} - 1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \propto \frac{R_s}{R_q} \quad (1.67)$$

avec $\alpha = R_q/4R_s$ le paramètre adimensionné associé à la dissipation et $R_q = h/e^2$ le quantum de résistance. Au temps longs, $e^{J(t)} \sim \left(\frac{R_s C}{t}\right)^{2/\alpha}$. Ainsi pour des grandes valeurs de α ($R_q \gg 4R_s$), les corrélations de phase diminuent très lentement ce qui imposent une phase très bien définie et donc une jonction supraconductrice. Dans le cas contraire, pour $R_q \ll 4R_s$, la décroissance est très rapide : les fluctuations de

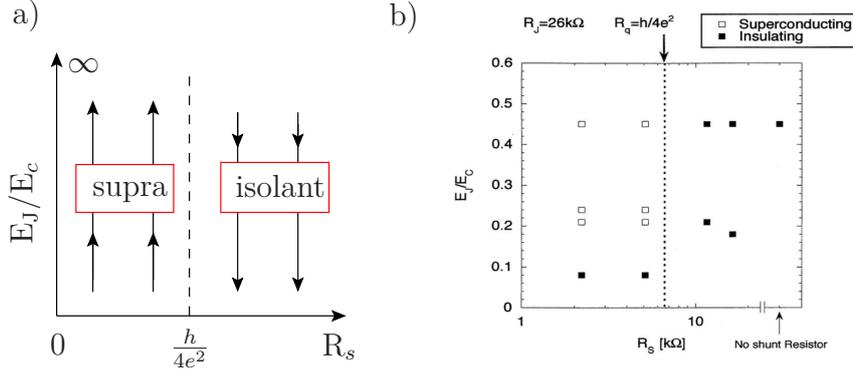


FIGURE 1.22 – Diagramme de phase de la jonction Josephson résistive. a) Diagramme théorique obtenu grâce au groupe de renormalisation à température nulle. Les lignes fléchées représentent dans quel sens varie E_J/E_C sous l'action des transformations de renormalisation. Par exemple pour $R_s < R_q/4$, le rapport E_J/E_C tend vers l'infini pendant la renormalisation : E_J domine le problème et la jonction est donc supraconductrice. b) Diagramme de phase obtenue expérimentalement par Yagi *et al.* [68] à la température de 45 mK. On remarque que la jonction est bien toujours supraconductrice pour $R_s < R_q/4$. Cependant, la jonction est des fois isolante même pour $R_s < R_q/4$. Pour ces points, $E_J/E_C \sim 0.08$ avec $E_C = k_B \times 0.97$ K. On a alors $E_J \simeq k_B \times 45$ mK. L'agitation thermique peut détruire la cohérence de phase ce qui explique ces points.

la phase sont importantes et la cohérence de phase est perdue. La jonction est donc isolante. Ces deux cas limites suggèrent une transition de phase quelque part. Un calcul à température nulle grâce au groupe de renormalisation [65–67] prédit que la transition se fait pour $\alpha = 1$ (voir figure 1.22). Cette transition a été observée expérimentalement [68, 69] dont le résultat est donné sur la figure 1.22. Ce résultat non intuitif montre que même à température nulle où on s'attend a priori à avoir de la cohérence de phase, la résistance brise cette cohérence pour $R_s > \frac{h}{4e^2}$.

Mentionnons aussi un article paru pendant la rédaction de ce manuscrit [70]. Les auteurs montrent que le groupe de renormalisation modifie aussi l'énergie de charge E_C , suggérant que la jonction Josephson peut rester supraconductrice même si $R_s > R_q/4$ lorsque E_J/E_C dépasse une valeur critique. Ces résultats n'invalident pas totalement nos résultats précédents mais ils montrent qu'on doit choisir $E_C \gg W$ où W est la largeur de bande des modes résistifs pour retomber sur nos résultats.

2 Fractionalisation et collision dans le régime d'effet Hall quantique ($\nu = 1$)

Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, on présente un dispositif d'émetteur de quasiparticules de charges fractionnaires, qui émulent des anyons. L'utilisation d'un îlot métallique couplé avec $N + 1$ états de bord permet de générer des charges fractionnaires à basse énergie. L'ajout d'un QPC sur un des états de bord entrants permet de contrôler l'émission de charges et d'obtenir une statistique poissonnienne : la quasiparticule de sortie est associée à un électron ayant sauté via le QPC et à un trou de charge $e/(N + 1)$ émis par l'îlot quantique. Dans un premier temps, on détermine l'expression du courant perturbativement par rapport à l'amplitude de réflexion du QPC. On montre ensuite que le factor de Fano associé au courant de sortie du QPC est bien associé à des charges fractionnaires. Afin de vérifier si ces quasiparticules possèdent bien une statistique anyonique, on calcule exactement la statistique de comptage complet qui valide effectivement cette propriété. Enfin, on propose une expérience de collisions de particules anyoniques. Le signe du bruit croisé entre les deux voies du dispositif permet de remonter à la statistique des particules incidentes. Pour des fermions libres, le bruit croisé est nul mais pour des particules de statistique fractionnaire, le bruit croisé est négatif. On trouve effectivement que ce bruit est bien négatif pour ce dispositif mais a la dimension d'un électron libre : notre dispositif ne crée pas de vrais anyons mais un hybride entre un électron et un anyon pur. Notre calcul prouve aussi que même si on parle de collisionneur anyonique, il ne s'agit pas de vraies collisions, processus non dominants pour des particules anyoniques. En effet, le signe du bruit croisé à l'ordre le plus bas correspond à un effet de phase quantique, appelé tressage quantique, c'est-à-dire notamment à des processus où les quasiparticules arrivent une à une au niveau du QPC.

Sommaire

2.1	Émetteur d'anyons	64
2.1.1	Îlot métallique couplé à N canaux	64
2.1.2	Amélioration du dispositif	68
2.1.3	Statistique de l'émission	71
2.2	Collisionneur anyonique	73
2.2.1	Cas des émetteurs de charges fractionnaires	73
2.2.2	Interprétation du bruit croisé	79
2.3	Conclusion	83

Dans notre monde à trois dimensions, les particules se classent en deux catégories distinctes : les bosons et les fermions. Les bosons et les fermions ont des comportements collectifs complètement différents. Les premiers tendent à se regrouper et les fermions au contraire tendent à se repousser. Ces deux propriétés antagonistes engendrent de nombreux effets quantiques différents.

Mais la situation est différente dans un environnement à deux dimensions, comme par exemple dans les hétérostructures où l'effet Hall quantique peut apparaître. Dans ce type de monde, d'autres types de particules peuvent exister [71] : les anyons, particules élémentaires qui partagent à la fois des propriétés des bosons et des fermions. Les anyons peuvent alors former de petits paquets de particules s'excluant mutuellement. Une première propriété remarquable est qu'ils portent une charge fractionnaire [72], notée e^* dans le reste du manuscrit, observée expérimentalement en 1997 [73].

Malgré des expériences d'interférométrie non convaincantes et de nombreuses études théoriques, la mise en évidence de leur statistique quantique a été réalisée par deux groupes distincts en 2020 [3, 74]. La seconde expérience [74] est discutée à la figure 2.1, la première étant discutée un peu plus loin dans le manuscrit. La principale difficulté de ces expériences provient des effets de décohérence dus aux fortes corrélations entre les particules, source principale de l'existence des anyons, mais aussi de l'énergie de Coulomb : les échantillons ayant une taille finie, ils présentent donc un effet d'énergie de charge qui pollue l'observation des interférences anyoniques.

Clarifions maintenant cette statistique quantique. Lorsque deux particules sont échangées de manière adiabatique, un terme de phase apparaît entre l'état initial et l'état final

$$|\Psi_1\Psi_2\rangle = e^{i\theta} |\Psi_2\Psi_1\rangle \quad (2.1)$$

Dans le monde à trois dimensions, deux valeurs sont possibles $\theta = 0, \pi$ qui représentent respectivement les statistiques bosonique et fermionique. À deux dimensions, θ peut prendre toutes les valeurs possibles d'où le terme anyon (*any* en anglais). Échanger deux particules anyoniques ajoute alors une phase θ à la fonction d'onde totale. On parle alors de tressage quantique (*braiding* en anglais). C'est notamment cette propriété quantique qui est à l'origine des observations faites par des interféromètres.

On se propose maintenant d'étudier un dispositif de formation de quasiparticules ayant des propriétés semblables aux anyons, dont celui d'une phase d'échange frac-

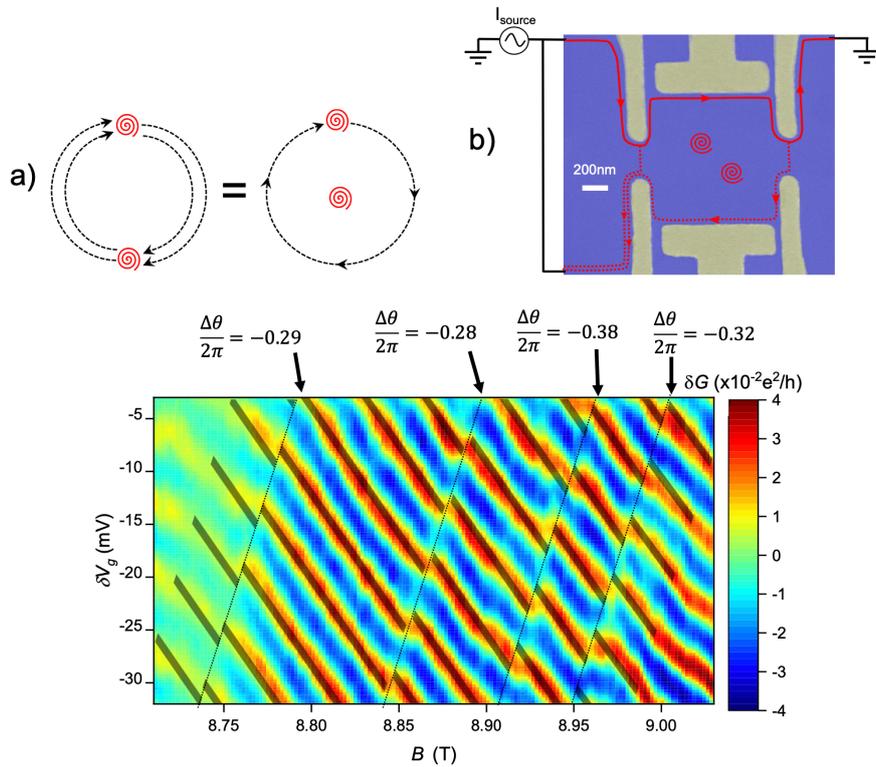


FIGURE 2.1 – **a)** Schéma de principe du phénomène de tressage anyonique (*braiding* en anglais) issu de l'article [74]. Deux quasiparticules, représentées par les vortex rouges, échangent leur position puis reviennent à leur point de départ. Cet échange est équivalent à une quasiparticule qui tourne autour de l'autre. Les propriétés anyoniques augmentent la phase du système de la quantité θ_{anyon} due à la statistique anyonique. **b)** Représentation de l'échantillon utilisé. La couleur bleue représente le gaz bidimensionnel d'électrons, la partie grise correspond aux portes métalliques qui modifient la trajectoire des états de bord, représentée en rouge. Au niveau des restrictions des bords métalliques (QPC), une quasiparticule peut être transmise à l'état de bord inférieur. Les quasiparticules qui sont transmises par les deux QPC peuvent interférer et les interférences sont sensibles à la phase θ_{anyon} . **c)** Oscillation de la conductance en fonction du champ magnétique appliqué et de la tension de grille. L'expérience est réalisée avec un facteur de remplissage $\nu = 1/3$. Le champ magnétique impose un flux d'Aharonov-Bohm Φ_{AB} et modifie l'expression de la conductance $\delta G = \delta G_0 \cos(\Phi_{AB} + \theta_0)$ où θ_0 correspond à toute phase supplémentaire autre que le flux d'Aharonov-Bohm. Augmenter le champ magnétique réduit le nombre de quasiparticules et provoque des sauts de phase de valeur θ_{anyon} . C'est en effet l'observation faite sur cette figure où le décalage de la conductance est visualisée par des traits en pointillés.

tionnaire, à partir d'un îlot métallique dans le régime d'effet Hall quantique entier ($\nu = 1$), recouvrant $N + 1$ canaux ballistiques, alimentés par des sources de tension continue. On dispose d'un point de contact quantique (QPC), avec une amplitude de réflexion $r \ll 1$, au niveau d'un des canaux à l'entrée de l'îlot métallique. On démontre qu'un électron incident d'un des canaux de bord, disons le canal 1, peut être rétrodiffusé à l'entrée de l'îlot par le QPC, laissant un trou qui peut entrer dans l'îlot. La conservation de l'énergie à l'intérieur de l'îlot impose que la charge du trou doit être compensée instantanément par l'émission de charges fractionnaires $-e/(N + 1)$ dans chaque état de bord sortant de l'îlot. Ces processus engendrent alors l'émission d'une charge $e - e/(N + 1)$ dans le canal de bord sortant 1.

En plus d'obtenir un émetteur de charges fractionnaires, on démontre que ces quasiparticules possèdent bien une statistique anyonique, sans pour autant être des anyons, en calculant exactement la statistique de comptage complet.

Enfin, on propose une expérience de collisionneur de particules qui met en évidence le phénomène de tressage quantique des anyons. On calcule les corrélations croisées de bruit et on trouve que ces corrélations sont bien négatives, caractéristiques des propriétés anyoniques, mais proportionnelles aux courants incidents, caractéristiques des électrons libres. Ces résultats confirment le caractère hybride de nos quasiparticules entre un anyon et un fermion.

Ces calculs permettent aussi de donner une interprétation correcte à la « collision » anyonique. Contrairement au cas purement fermionique où il y a une répulsion entre les fermions (*anti-bunching* en anglais), nos résultats suggèrent plutôt un effet de tressage quantique entre les quasiparticules.

2.1 Émetteur d'anyons

Dans cette partie, on présente un dispositif qui permet de générer des charges fractionnaires $e^* = Ne/(N + 1)$ et $e^* = e/(N + 1)$ où $N \in \mathbb{N}^*$. Générer ces charges fractionnaires ne suffit pas à émuler des anyons. Il faut vérifier qu'ils obéissent bien à une statistique anyonique, ce que nous allons calculer.

2.1.1 Îlot métallique couplé à N canaux

On complète le dispositif de l'îlot quantique présenté à la partie 1.4.3. Pour cela, on ajoute à ce système N canaux de bord supplémentaires qui sont aussi couverts partiellement par l'îlot métallique (voir figure 2.2). On montre que pour des énergies très petites devant l'énergie de charge E_C , ce système permet de générer des charges

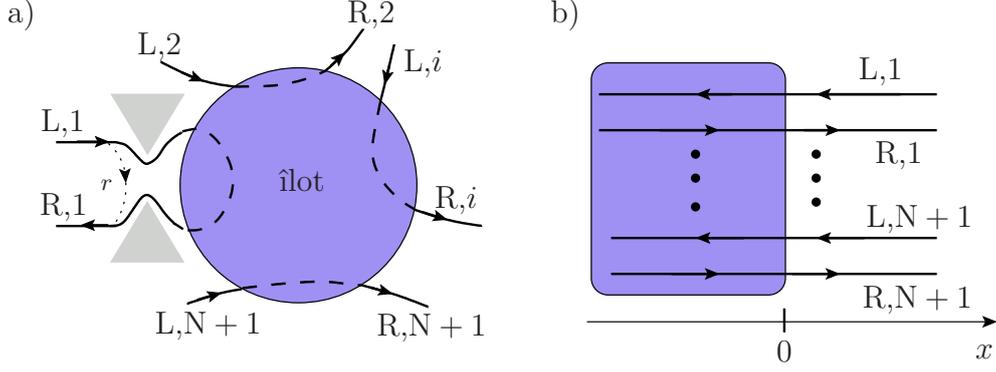


FIGURE 2.2 – **a)** Représentation de l'îlot métallique constitué de $N + 1$ états de bord (en trait noir) dans le régime d'effet Hall quantique entier. Une fraction de chaque état de bord est recouverte par l'îlot métallique (en violet). Chaque état de bord L est relié à une source de tension V_i non représentée sur le schéma. Seul le canal 1 passe par un QPC. **b)** Dans la limite incohérente, chaque état de bord i est représenté par deux fermions chiraux indépendants L et R . Le QPC de la voie 1 n'a pas été représenté.

fractionnaires. Cette propriété est notamment visible dans l'expression du courant associé à chaque état de bord sortant, ce que nous allons calculer. Cependant, on montre que la granularité de la charge ne peut pas s'observer avec ce dispositif.

Chaque état de bord, indicé par $i = 1, \dots, N + 1$, est dans la limite incohérente de l'îlot représenté par les deux opérateurs bosoniques $\phi_{L,i}$ et $\phi_{R,i}$. À nouveau, on ajoute des interactions de charge à l'intérieur de l'îlot entre tous les canaux de bord. En l'absence de termes sources et de rétrodiffusion, les équations (1.39) peuvent être adaptées. L'Hamiltonien devient $\hat{H}_0 + E_C \hat{N}^2$ avec

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 &= \frac{\hbar v_F}{4\pi} \sum_{i=1}^{N+1} \int_{-\infty}^{+\infty} dx [(\partial_x \phi_{L,i})^2 + (\partial_x \phi_{R,i})^2] \\ \hat{N} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{N+1} [\phi_{R,i}(0) - \phi_{L,i}(0)] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Le terme $E_C \hat{N}^2$ engendre de nombreuses interactions entre tous les champs bosoniques et nécessite une diagonalisation. Afin d'y arriver, on introduit un nouveau jeu de variables $\tilde{\phi}_{R/L,i} = O_{ij} \phi_{R/L,j}$ où O est une matrice de passage qui vérifie $O^t O = 1$. Les seuls termes intéressants correspondent à $i = 1, 2$ où

$$\tilde{\phi}_{R/L,1} = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{i=1}^{N+1} \phi_{R/L,i} \quad \text{et} \quad \tilde{\phi}_{R/L,2} = \sqrt{\frac{N}{N+1}} \left(\phi_{R/L,1} - \frac{1}{N} \sum_{i=2}^{N+1} \phi_{R/L,i} \right) \quad (2.3)$$

Les autres champs bosoniques peuvent être utiles si on calcule les observables des états de bord initiaux $i \geq 2$. Cette transformation ne modifie pas l'expression intrinsèque de \hat{H}_0 à condition de le réécrire avec les nouveaux champs $\tilde{\phi}_{R/L,i}$, contrairement à l'opérateur de charge qui devient $\hat{N} = \sqrt{N+1}[\tilde{\phi}_{R,1}(0) - \tilde{\phi}_{L,1}(0)]/(2\pi)$. On remarque que cette transformation permet de découpler tous les canaux $i > 1$ de l'îlot métallique. La présence du facteur $\sqrt{N+1}$ montre alors que l'équivalence de ce système avec les lignes de transmission couplées, discutée à la section 1.4.3, reste valable pour les champs $\tilde{\phi}_{L/R,1}$ mais en modifiant la capacité de couplage C_g en $C_g/(N+1)$. On peut alors adapter les relations (1.42) et (1.44) avec $\tau = R_q C_g/(N+1) = h/(2(N+1)E_C)$ et les nouveaux champs $\tilde{\phi}_{L/R,1}$.

Dans la suite de ce chapitre, on se place à basses énergies, c'est-à-dire $\omega\tau \ll 1$. Dans cette limite, la condition (1.44) s'écrit

$$\tilde{\phi}_{R,1}(x=0, t) = \tilde{\phi}_{L,1}(x=0, t) \quad (2.4)$$

Cette condition est bien entendue équivalente à l'équation (1.45). Les autres champs bosoniques $\tilde{\phi}_{R/L,i>1}$ ne sont pas affectés par l'îlot métallique. L'équation (2.4) est l'équation centrale de notre émetteur de charges fractionnaires. Cette propriété peut être mise en évidence si on injecte par exemple un électron dans l'état de bord 1 à partir d'une source de tension V . D'après l'équation (1.46), le champ bosonique L dans le canal 1 s'écrit $\phi_{L,1} - eVt/\hbar$ avec $\langle \phi_{L,1} \rangle = 0$. On peut alors écrire le courant $I_{L,1}$ entrant dans l'îlot à partir de ce canal

$$\langle \hat{I}_{L,1} \rangle = -\frac{e}{2\pi} \langle \partial_t \phi_{L,1} \rangle = \frac{e^2}{h} V \quad (2.5)$$

Le caractère fractionnaire des charges émises est directement lié au courant de sortie $I_{R,1}$. La décomposition (2.3) permet d'écrire le champ bosonique sortant

$$\phi_{R,1} = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \tilde{\phi}_{R,1} + \sqrt{\frac{N}{N+1}} \tilde{\phi}_{R,2} \quad (2.6)$$

L'îlot métallique induit une corrélation forte seulement entre les champs $\tilde{\phi}_{R,1}$ et $\tilde{\phi}_{L,1}$ si bien que $\tilde{\phi}_{R,1}$ est aussi remplacé par $\tilde{\phi}_{R,1} - eVt/\hbar$ avec $\langle \tilde{\phi}_{R,1} \rangle = 0$. Par contraste les champs $\tilde{\phi}_{L,i>1}$ et $\tilde{\phi}_{R,i>1}$ sont indépendants, c'est-à-dire que même si une tension est appliquée sur les états entrants L ($i > 1$), les champs $\tilde{\phi}_{R,i>1}$ ne sont pas affectés

et donc $\langle \tilde{\phi}_{R,i>1} \rangle = 0$. Rappelons que la source de tension n'est appliquée qu'à l'état de bord $L, 1$. La décomposition (2.3) impose que le nouveau champ $L, 1$ s'écrit $\tilde{\phi}_{L,1} - \frac{eVt}{\hbar\sqrt{N+1}}$. Les équations (2.4) et (2.6) permettent alors d'obtenir le courant de sortie du canal 1

$$\langle \hat{I}_{R,1} \rangle = -\frac{e}{2\pi} \langle \partial_t \phi_{R,1} \rangle = -\frac{e}{2\pi\sqrt{N+1}} \langle \partial_t \tilde{\phi}_{R,1} \rangle = \frac{e^2}{h} \frac{V}{N+1} \quad (2.7)$$

car $\langle \partial_t \tilde{\phi}_{R,2} \rangle = 0$. Cette relation met bien en évidence la fractionalisation du courant et donc de la charge. On peut d'ailleurs aussi calculer les courants sortants $I_{R,i>1}$ des autres états de bord sortants et obtenir la même expression ce qui vérifie bien la conservation du courant.

Maintenant, il faut s'assurer que les particules de charge fractionnaire possèdent une statistique anyonique. En effet, il n'est pas évident que cela soit le cas puisque la statistique de l'électron entrant dans l'îlot suit une statistique fermionique. Rappelons que l'équation (2.1) correspond à la relation fondamentale de la statistique anyonique. Essayons alors de trouver une relation équivalente. Reprenons les opérateurs fermioniques initiaux dont les expressions sont données dans l'encadré 1

$$\psi_{R/L,j}(x) = \sqrt{\frac{D}{2\pi\hbar v_F}} e^{i\phi_{R/L,j}(x)} \quad (2.8)$$

puis regardons l'opérateur tunnel $\mathcal{T}(t) = \psi_{R,1}^\dagger(0,t)\psi_{L,1}(0,t)$ de l'état de bord 1 par exemple. Cet opérateur crée un électron dans le canal $R, 1$ et un trou dans le canal $L, 1$. Les équations (2.6) et (2.8) permettent d'écrire

$$\mathcal{T}(t) = \frac{D}{2\pi\hbar v_F} e^{i\left[\frac{1}{\sqrt{N+1}}(\tilde{\phi}_{L,1}-\tilde{\phi}_{R,1})+\sqrt{\frac{N}{N+1}}(\tilde{\phi}_{L,2}-\tilde{\phi}_{R,2})\right]} \quad (2.9)$$

On a utilisé la notation $\tilde{\phi}_{R/L,j} = \tilde{\phi}_{R/L,j}(0,t)$ afin d'alléger cette relation. Comme on se place à basse énergie, les contractions entre les champs $\tilde{\phi}_{R/L,1}$ sont en général négligeable dans la limite $\omega\tau \ll 1$. Leur seul effet est d'ajouter un préfacteur numérique aux observables calculées. On peut ainsi intégrer sur les modes massiques $\tilde{\phi}_{L/R,1}$ et obtenir

$$\mathcal{T}(t) = \mathcal{N} e^{i\sqrt{\frac{N}{N+1}}(\tilde{\phi}_{L,2}-\tilde{\phi}_{R,2})} \quad (2.10)$$

avec $\mathcal{N} = \frac{D}{2\pi\hbar v_F} \left(\frac{e^\gamma(N+1)E_C}{\pi D}\right)^{1/(N+1)}$ et $\gamma = 0.5772$ la constante d'Euler. Cette intégration permet alors de mettre en évidence le caractère anyonique de notre système. Les relations de commutation entre les champs bosoniques $\tilde{\phi}_{R/L,2}$ permettent d'obtenir

$$\mathcal{T}(t)\mathcal{T}(0) = \mathcal{T}(0)\mathcal{T}(t)e^{2i\pi\nu\text{sgn}(t)} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}(t)\psi_{R,1}(0) = \psi_{R,1}(0)\mathcal{T}(t)e^{-i\pi\nu\text{sgn}(t)} \quad (2.11)$$

qui est un équivalent de l'équation (2.1), où on a introduit $\nu = N/(N+1)$.

Cette discussion suggère a priori que l'on peut émuler des charges fractionnaires grâce à ce dispositif mais ce n'est pas suffisant. En physique mésoscopique, les courants sont liés à la nature ondulatoire des électrons et le caractère particulaire est associé aux fluctuations du courant, appelées aussi bruit. De plus, pour un émetteur de charges fractionnaires, on s'attend à pouvoir contrôler le nombre de charges émises. Le calcul du bruit associé à l'opérateur courant $\hat{I}_{R,1}$ de l'équation (2.7) montre que le bruit, appelé bruit de grenaille, s'annule à température nulle. Ces calculs montrent alors que le caractère particulaire des anyons, c'est-à-dire la granularité de leur charge, ne peut pas être mis en évidence sans présence de point de contact quantique révélant la granularité de la charge. Pour y remédier, on peut dans un premier temps appliquer une source de tension V_i pour chaque état de bord entrant i . L'équation (2.7) devient

$$\langle \hat{I}_{R,1} \rangle = \frac{e^2}{h} \frac{\sum_i V_i}{N+1} \quad (2.12)$$

Afin d'annuler le flux continu de charges, on peut imposer $\sum_i V_i = 0$. Cependant, plus aucun courant ne sort de l'îlot. On doit alors ajouter un élément essentiel qui permet l'émission contrôlée de particules anyoniques : un QPC en amont de l'îlot quantique situé en $x = 0$ dans l'état de bord 1.

2.1.2 Amélioration du dispositif

Si toutes les sources de tension V_j des états de bord entrants L vérifient la relation $\sum_i V_i = 0$, l'îlot métallique n'injecte aucune charge à température nulle. Dans le cas contraire, on a un flux continu de charges fractionnaires. Un émetteur de charges fractionnaires doit pouvoir émettre ces charges de façon isolée. Chaque émission doit se faire sans empiéter sur une autre. Pour y arriver, on ajoute à l'Hamiltonien de la partie 2.1.1 un terme de rétrodiffusion $\hat{H}_{bs} = \hbar v_F r (\mathcal{T} + \mathcal{T}^\dagger)$ où \mathcal{T} est définie par l'équation (2.9). La rétrodiffusion est due à la présence d'un QPC à l'entrée de l'état de bord 1 dont l'amplitude de rétrodiffusion r est très petite devant 1. Le dispositif complet est représenté sur la figure (2.2). Traiter le terme de charge avec le formalisme de la bosonisation permet d'obtenir des relations exactes. Le terme de rétrodiffusion devient non linéaire (voir équation (1.39)). On peut cependant traiter

son effet de manière perturbative.

Encore une fois, on s'intéresse à l'opérateur courant $\hat{I}_{R,1}$ associé à l'état de bord sortant du canal 1. Contrairement à la partie précédente, le courant a deux contributions : les particules injectées par l'îlot à cause des interactions et les particules rétrodiffusées à l'entrée de l'îlot. En utilisant la représentation d'interaction déjà étudiée dans la partie 1.2.2, on cherche à calculer l'expression de $\hat{I}_{R,1}$ jusqu'à l'ordre 2 en r . Dans la partie précédente, on a par ailleurs montré que le nouveau champ $\tilde{\phi}_{R,1}$ est un champ massif que l'on peut intégrer dans l'Hamiltonien à basse énergie ($\ll E_c$). Or, on se situe à très basse énergie. L'intégration sur $\tilde{\phi}_{R,1}$ renormalise les différents paramètres. En s'inspirant des équations (2.6) et (2.10), on obtient les deux opérateurs suivants, en représentation d'interaction par rapport à \hat{H}_{bs}

$$\hat{I}_{R,1}^{(I)}(t) = -\frac{e}{2\pi} \sqrt{\frac{N}{N+1}} \partial_t \tilde{\phi}_{R,2}(t) \quad \text{et} \quad \mathcal{T}(t) = \mathcal{N} e^{-ih(t) - ieVt/\hbar} \quad (2.13)$$

où on a introduit l'opérateur $h = \sqrt{\frac{N}{N+1}}(\tilde{\phi}_{R,2} - \tilde{\phi}_{L,2})$ et $V = V_1$, la relation $\sum_i V_i = 0$ étant toujours vérifiée. Dans l'expression précédente, $\hat{I}_{R,1}^{(I)}(t)$ est l'opérateur courant en représentation d'interaction. La théorie de la réponse linéaire permet de calculer l'opérateur courant jusqu'à l'ordre 2 en r :

$$\begin{aligned} \hat{I}_{R,1}^{(0)} &= -\frac{e}{2\pi} \sqrt{\frac{N}{N+1}} \partial_t \tilde{\phi}_{R,2}(t) \\ \hat{I}_{R,1}^{(1)} &= -irv_F e^* [\mathcal{T}(t) - \mathcal{T}^\dagger(t)] \\ \hat{I}_{R,1}^{(2)} &= e^* (rv_F)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt' [\mathcal{T}^\dagger(t'), \mathcal{T}(0)] \end{aligned} \quad (2.14)$$

où on redonne $e^* = \nu e$ avec $\nu = N/(N+1)$. On peut alors évaluer le courant total $\langle \hat{I}_{R,1} \rangle$. Comme $\langle \tilde{\phi}_{R/L,2} \rangle = 0$, l'Hamiltonien non perturbé étant quadratique, $\langle \hat{I}_{R,1}^{(0)} \rangle = \langle \hat{I}_{R,1}^{(1)} \rangle = 0$ et il reste

$$\langle \hat{I}_{R,1}^{(2)} \rangle = I = e^* r^2 \frac{eV}{\hbar} \left(\frac{\tilde{E}_c}{\nu eV} \right)^{2(1-\nu)} \frac{\Gamma(1-2\nu) \sin 2\pi\nu}{2\pi^2} \quad (2.15)$$

Dans l'équation précédente, on a introduit l'énergie de charge renormalisée $\tilde{E}_C = NE_C e^\gamma / \pi$. Regardons le cas particulier où $N \rightarrow +\infty$ ($\nu = 1$). On trouve alors $\langle \hat{I}_{R,1} \rangle \rightarrow r^2 e^2 V / h$ qui correspond au courant généré seulement par la rétrodiffusion du QPC en $x = 0$, c'est-à-dire sans l'interaction due à l'îlot. L'énergie apportée par le trou entrant dans l'îlot s'est diluée par l'infinité de canaux et aucune charge fractionnaire ne ressort de l'îlot : l'état est purement électronique.

Regardons maintenant les fluctuations du courant, définies par le bruit S à fréquence nulle

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle \hat{I}_{R,1}(t) \hat{I}_{R,1}(0) \rangle \quad (2.16)$$

On rappelle que le bruit S , appelé aussi bruit de grenaille, donne des informations sur le caractère corpusculaire des particules [75]. On peut alors vérifier qu'à l'ordre 2 en r , $\langle \hat{I}_{R,1}^0 \hat{I}_{R,1}^2 \rangle = 0$ et de même pour son expression symétrique. La seule contribution non-nulle vient du terme $\langle \hat{I}_{R,1}^1 \hat{I}_{R,1}^1 \rangle$ et donne

$$S = e^* I = \nu e I \quad (2.17)$$

La relation précédente est l'équation centrale de notre émetteur de charges fractionnaires. Ce bruit est associé à l'arrivée non-corrélée de charges dont la fonction de distribution d'intervalles de temps entre les arrivées des charges est poissonnienne, c'est-à-dire que malgré la nature indépendante des transmissions de charges, celles-ci se produisent à un certain intervalle, bien qu'il soit irrégulier. La caractérisation des charges, c'est-à-dire du bruit de grenaille, peut notamment se faire via le facteur de Fano $F = S/(eI)$. Le facteur F est donc relié à la fraction ν de la charge et permet de remonter au caractère fractionnaire des charges émises [73, 76].

Avec la condition $\sum_i V_i = 0$, l'émetteur de charges fractionnaires est contrôlé seulement par l'amplitude de rétrodiffusion r . Cela sous-entend que le processus derrière la fractionalisation est différent de celui discuté dans la partie précédente. Ce processus est composé de deux effets qui s'ajoutent :

- un électron peut être rétrodiffusé à l'entrée de l'îlot par le QPC. Un électron est alors diffusé de la branche L à la branche R de l'état de bord du canal 1 ;
- La diffusion par rétrodiffusion laisse un trou dans la branche L qui peut alors entrer dans l'îlot. La conservation de l'énergie à l'intérieur de l'îlot doit être vérifiée. La charge du trou doit alors être compensée instantanément par l'émission de charges fractionnaires $-e/(N+1)$ dans chaque état de bord sortant.

Ces deux processus entraînent alors l'émission d'une charge $e - e/(N+1) = \nu e$ dans l'état de bord 1. Dans cette partie, on s'est intéressé notamment à l'état de bord sortant du canal 1 mais ce principe s'applique aussi sur les autres canaux. Par contre, le QPC ne se situe que sur le canal 1. Par conséquent, les charges émises dans les canaux de bord sortants ($i > 1$) valent $-e/(N+1)$. On peut le vérifier en reprenant les calculs qui permettent de retrouver les équations (2.13) et (2.15) et finalement trouver $S = eI/(N+1)$. Le procédé complet est représenté sur la figure 2.3.

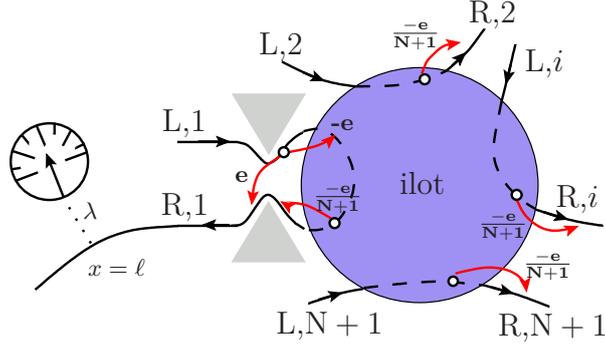


FIGURE 2.3 – Résumé des processus mis en jeu. L'ajout du QPC en entrée du canal 1 permet la rétrodiffusion d'électron du canal $L,1$ au canal $R,1$. Cette rétrodiffusion est accompagnée par l'ajout d'un trou de charge opposée qui peut entrer dans l'îlot. La conservation de l'énergie impose que l'ensemble des états de bord doit compenser la charge du trou entrant. Une charge $-e/(N+1)$ est alors éjectée par chaque état de bord. Finalement, la rétrodiffusion de l'électron combinée avec l'éjection de cette charge fractionnaire génère sur le canal $R,1$ une particule de charge $e - e/(N+1) = Ne/(N+1)$. Ces deux processus sont cohérents et permettent alors de générer des anyons de charge νe avec $\nu = Ne/(N+1)$. Notons qu'une charge $-e/(N+1)$ est aussi créée sur les états de bord $R,i > 1$. La présence du détecteur de charges en sortie de l'état $R,1$ est étudiée dans la partie suivante.

Il faut néanmoins nuancer le propos précédent. L'émission fractionnaire ne peut se faire que si les deux processus précédents s'ajoutent de manière cohérente. Par exemple, on peut montrer que des processus poissoniens fractionnaires peuvent apparaître dans le régime Kondo [77–79] mais ces processus s'ajoutent de manière incohérente et la statistique fractionnaire quantique n'est pas possible. Pour répondre à cette interrogation, on peut calculer la statistique de comptage complet (*full counting statistics* ou *FCS* en anglais).

2.1.3 Statistique de l'émission

Dans la partie précédente, l'effet fractionnaire de l'émetteur de charges est caractérisé par le courant $I_{R,1}$ et le bruit S en sortie. L'étude de la valeur moyenne du courant et sa variance n'est pas suffisante pour caractériser la statistique entière. Il est donc nécessaire de connaître les moments d'ordres supérieurs. Par exemple le moment d'ordre 3 correspond à l'asymétrie de la distribution statistique.

Afin de remonter à la statistique complète, il est nécessaire de pouvoir compter le nombre de particules à un endroit du dispositif et à un instant donné. Répéter cette mesure plusieurs fois permet alors de reconstituer la statistique. Pour notre système, on regarde le nombre de charges à la sortie de l'émetteur, c'est-à-dire

$\hat{N}_{R,1}(t) = -\phi_{R,1}(t)/2\pi$. D'un point de vue formel, la détermination de tous ces moments peut se faire grâce à la fonction caractéristique

$$\begin{aligned}\ln \chi(\lambda) &= \langle e^{i\lambda \hat{N}_{R,1}(t)} e^{-i\lambda \hat{N}_{R,1}(0)} \rangle \\ &= \langle e^{i\frac{\hat{H}}{\hbar}t} e^{i\lambda \hat{N}_{R,1}} e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t} e^{-i\lambda \hat{N}_{R,1}} \rangle \\ \ln \chi(\lambda) &= \langle e^{-i\lambda \hat{N}_{R,1}/2} e^{i\frac{\hat{H}}{\hbar}t} e^{i\lambda \hat{N}_{R,1}/2} e^{i\lambda \hat{N}_{R,1}/2} e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t} e^{-i\lambda \hat{N}_{R,1}/2} \rangle\end{aligned}\quad (2.18)$$

Les moments de la distribution statistique, ou cumulants $\langle\langle N^j \rangle\rangle$ (j est appelé ordre du moment) peuvent alors s'écrire $(\frac{\partial}{i\partial\lambda})^j \ln \chi(\lambda)|_{\lambda=0}$.

Avec $e^{\mp i\lambda \hat{N}_{R,1}/2} \hat{H} e^{\pm i\lambda \hat{N}_{R,1}/2} = \hat{H} + \hat{V}_{\pm}$ et $\hat{V}_{\lambda} = -\hbar\lambda \hat{I}_{R,1}/(2e)$, on peut alors montrer que l'équation (2.18) devient en représentation de Keldysh [80, 81]

$$\ln \chi(\lambda) = \langle T_K e^{-\frac{i}{\hbar} \int_K dt \hat{H}_{\pm\lambda}(t)} \rangle \quad (2.19)$$

où T_K est l'opérateur d'ordonnancement en temps par rapport au contour de Keldysh K et $\hat{H}_{\pm\lambda} = \hat{H} + \hat{V}_{\pm\lambda}$. Le signe \pm correspond au changement de signe du champ de comptage λ : le signe $+$ (respectivement $-$) est associé à la branche $+$ (respectivement à la branche $-$) du contour de Keldysh. La formule 2.19 est bien entendue associée à un détecteur de charge qui n'influe pas sur le circuit principal, c'est-à-dire sans dynamique interne. En pratique, la réalisation expérimentale d'un tel détecteur est difficile et les mesures notamment des moments d'ordre 3 et 4 restent encore un défi de taille [82–84], contrairement aux moments d'ordre 1 et 2 qui sont associés à la valeur moyenne du courant et au bruit associé.

Il s'agit maintenant de calculer la FCS de notre émetteur. De la même manière que précédemment, on se place en représentation d'interaction en prenant en compte cette fois-ci le champ de comptage λ . Le détecteur de charge se situe à une distance ℓ de l'îlot (voir figure 2.3). L'ajout du terme de couplage $\hat{V}_{\lambda} = -\hbar\lambda \hat{I}_{R,1}(x = \ell)/(2e)$ modifie seulement les équations du mouvement des nouveaux champs $\tilde{\phi}_{R,j}$ dérivées dans l'appendice B et ajoute à ces équations le terme

$$\frac{i}{\hbar} [\hat{V}_{\lambda}, \tilde{\phi}_{R,j}] = \frac{\lambda v_F}{2\sqrt{N+1}} \delta(x - \ell) (\delta_{1,j} + \sqrt{N} \delta_{2,j}) \quad (2.20)$$

On rappelle que pour les nouveaux champs bosoniques, seuls les champs $\tilde{\phi}_{R/L,1}$ sont couplés par l'îlot métallique. Par conséquent, la résolution des équations différentes montre alors que les nouveaux champs $\tilde{\phi}_{R,1/2}$ deviennent $\tilde{\phi}_{R,1} - \frac{\eta\lambda}{2\sqrt{N+1}}\theta(\ell - x)$ et $\tilde{\phi}_{R,2} - \frac{\eta\lambda}{2\sqrt{N+1}}\theta(\ell - x)$ où $\eta = \pm$ est l'indice du contour de Keldysh. Le champ $\tilde{\phi}_{L,1}$ prend la contribution $-\frac{\eta\lambda}{2\sqrt{N+1}}$ sans la fonction $\theta(\ell - x)$. Le champ de comptage ne

modifie pas la charge de l'îlot : le détecteur est bien idéal et n'influe pas les propriétés de l'émetteur. Ce décalage des opérateurs bosoniques implique une modification de l'opérateur tunnel (2.10) et peut s'écrire

$$\mathcal{T}(t) \rightarrow e^{i\eta\nu\lambda/2}\mathcal{T}(t) \quad (2.21)$$

La formule précédente indique que λ est bien un champ de comptage des charges fractionnaires ν . Notons que si on désire connaître la statistique d'un canal de bord $i > 1$ où on s'attend à avoir une charge fractionnaire $\nu_1 = 1/(N + 1)$, on doit remplacer ν par $-\nu_1$ dans l'équation (2.21). La présence du signe $-$ devant ν_1 est due à l'émission de trous et non de particules. En représentation d'interaction, la relation (2.19) peut alors s'écrire

$$\ln \chi(\lambda) = \langle T_K e^{-iv_F t} \int_K dt [\mathcal{T}(t)e^{i\eta\lambda\nu/2} + \mathcal{T}^\dagger(t)e^{-i\eta\lambda\nu/2}] \rangle \quad (2.22)$$

La suite du calcul, mathématiquement technique, est présentée dans l'appendice D. Finalement, on trouve aux temps longs, la fonction caractéristique suivante

$$\ln \chi(\lambda) \simeq -\frac{I}{e^*} |t| \left(1 - e^{i\lambda\nu}\right) \quad (2.23)$$

Cette fonction caractéristique coïncide exactement avec celle d'une distribution poissonienne [85]. Ce résultat est la première justification rigoureuse du caractère poissonien des émissions de charges fractionnaires pour ce système.

Maintenant que la description du système est faite, on propose une expérience permettant de mettre en évidence la statistique quantique anyonique.

2.2 Collisionneur anyonique

L'interféromètre de MZI discuté à la section 1.2 ne peut pas mettre en évidence le caractère corpusculaire de la matière car ce dernier ne donne des informations que sur le courant. On reprend alors le collisionneur étudié dans la partie 1.3 afin de mettre en évidence la statistique quantique de nos particules hybrides et vérifier si elles possèdent bien une statistique anyonique sans être des anyons purs.

2.2.1 Cas des émetteurs de charges fractionnaires

Le but de cette partie est d'étudier le calcul du bruit croisé de sortie du collisionneur. Pour des faisceaux purement fractionnaires, cette étude a déjà été réalisée théoriquement [86] et expérimentalement [3]. Dans notre situation, l'état de bord

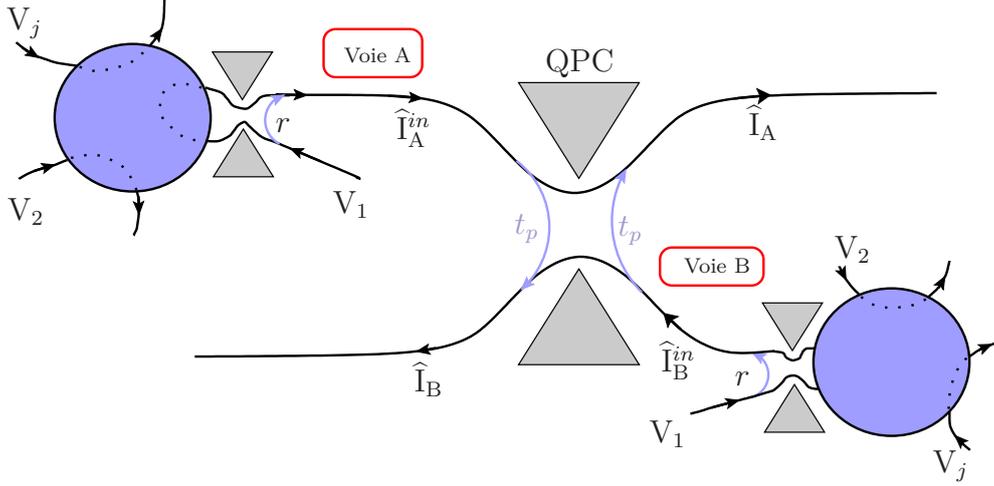


FIGURE 2.4 – Représentation du collisionneur de particules. Le dispositif discuté dans la partie 2.1 joue le rôle de source de quasiparticules. Il est identique et installé sur les deux voies A et B du collisionneur. Le QPC joue le rôle de lame séparatrice qui couple ces deux voies. Les courants incidents $\hat{I}_{A/B}^{in}$ se rencontrent au niveau du QPC ce qui impose l'existence a priori d'un courant au niveau du QPC et d'un bruit croisé entre les deux voies A et B .

de sortie de l'émetteur est constitué de deux particules : un électron de charge e et un trou de charge $-e/(N + 1)$. Le résultat sur le bruit de sortie n'est alors pas évident : obtient-on un bruit associé à une statistique fermionique ou une statistique anyonique ou un mélange des deux ? Le but de cette partie est de répondre à cette question.

On s'intéresse maintenant au cas où chaque voie de l'interféromètre est couplée à l'état de bord $R, 1$ de notre émetteur, étudié à la partie 2.1. Le système est représenté sur la figure 2.4. Les deux faisceaux de charges sont représentés par les courants incidents $\hat{I}_{A/B}^{in}$ définis par l'équation (2.15). Notons que l'on peut jouer sur les potentiels appliqués V , sur le nombre de canaux N ou sur l'énergie de charge pour influencer sur les valeurs de $\hat{I}_{A/B}^{in}$.

À nouveau, on s'intéresse au courant généré par le QPC central \hat{I}_T et au bruit de ce dernier $\langle \delta \hat{I}_T \delta \hat{I}_T \rangle$. Le calcul de ces deux grandeurs peut être réalisé en partant de l'expression Hamiltonienne du QPC, traitée perturbativement,

$$\hat{H}_T = \hbar v_F t_P \psi_A^\dagger \psi_B + h.c. \quad (2.24)$$

On rappelle ci-dessous les expressions du courant et du bruit du QPC, déjà établies dans la partie 1.3,

$$\begin{aligned}
I_T &= |t_P|^2 (I_A - I_B) \\
\langle \delta \hat{I}_T \delta \hat{I}_T \rangle_{\omega=0} &= e^2 v_F^2 |t_P|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle \{ \psi_A^\dagger(t) \psi_B(t), \psi_B^\dagger(0) \psi_A(0) \} \rangle
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Dans le cas où il y a une infinité de canaux de bord N ($\nu = \frac{N}{N+1} \rightarrow 1$), l'énergie apportée par la particule entrant dans l'îlot s'est diluée à travers l'infinité de canaux : aucune charge fractionnaire ne peut ressortir. On se retrouve alors à étudier le comportement d'électrons sans interaction ($\nu = 1$) générés par un QPC.

Pour un nombre d'états de bord N fini, nos discussions précédentes ont montré que les interactions électroniques diminuent la valeur $\langle \delta \hat{I}_B \delta \hat{I}_A \rangle_{\omega=0}$, nulle dans le cas purement fermionique. Pour les anyons, le principe d'exclusion de Pauli n'est plus vérifié et cette violation augmente le bruit de partition du QPC. On va donc chercher à évaluer le courant moyen I_T et le bruit $\langle \delta \hat{I}_T^2 \rangle_{\omega=0}$ à partir de l'évaluation du corrélateur (C.1) avec les expressions (2.10) et (2.15).

En utilisant les décompositions des champs bosoniques $\tilde{\phi}_{L/R,2}$ et le corrélateur pour les opérateurs bosoniques

$$\langle \tilde{\phi}_{i,2}(t) \tilde{\phi}_{j,2}(t') \rangle - \langle \tilde{\phi}_{i,2}^2 \rangle = \delta_{ij} \ln \left(\frac{a}{a + i(t - t')} \right) \tag{2.26}$$

On peut alors trouver l'équivalent fractionnaire du corrélateur (C.4). Par exemple, pour $t > 0$, un calcul perturbatif donne

$$\langle \psi_A(L, t) \psi_A^\dagger(L, 0) \rangle = \frac{1}{2\pi v_F} \frac{1}{a + it} \left[1 - \left(\frac{v_F r \mathcal{N}}{a^{-\nu}} \right)^2 \mathcal{K}(t) \right] \tag{2.27}$$

avec

$$\mathcal{K}(t) = \sum_{\eta_i} \eta_1 \eta_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \frac{e^{ieV(t_1-t_2)/\hbar}}{[a + i(t_1 - t_2) \chi_{\eta_1, \eta_2}]^{2\nu}} \left(\frac{a - it_2 \eta_2}{a - it_1 \eta_1} \right)^\nu \left(\frac{a + i(t - t_1) \eta_1}{a + i(t - t_2) \eta_2} \right)^\nu \tag{2.28}$$

Cherchons à évaluer le terme dominant pour des temps longs ($t \gg \hbar/(eV)$). L'expression (2.28) suggère que l'intégrale est dominée par la contribution $t_1 \simeq t_2$ avec $0 < t_{1,2} < t$. On peut alors écrire

$$\left(\frac{a - it_2 \eta_2}{a - it_1 \eta_1} \right)^\nu \left(\frac{a + i(t - t_1) \eta_1}{a + i(t - t_2) \eta_2} \right)^\nu \simeq e^{i\pi\nu(\eta_1 - \eta_2)} \tag{2.29}$$

La condition $t_1 \simeq t_2 \simeq t$ suggère aussi de réaliser un changement de variable $\bar{t} = (t_1 + t_2)/2$ et $\tau = t_1 - t_2$. L'équation (2.28) devient ainsi

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(t) &= t \sum_{\eta_i} \eta_1 \eta_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{e^{ieV\tau/\hbar}}{[a + i\tau\chi_{\eta_1\eta_2}(\tau)]^{2\nu}} e^{i\pi\nu(\eta_1 - \eta_2)} \\
&= (1 - e^{-2i\pi\nu}) 2 \sin(\pi\nu) \Gamma(1 - 2\nu) \left(\frac{eV}{\hbar}\right)^{2\nu-1} t
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Le corrélateur fermionique du QPC s'écrit finalement

$$\langle \psi_A(L, t) \psi_A^\dagger(L, 0) \rangle = \frac{1}{2\pi v_F} \frac{1}{a + it} \left[1 - \frac{I_A}{e^*} (1 - e^{-2i\pi\nu}) t \right] \tag{2.31}$$

où I_A suit l'équation (2.15). On peut d'ailleurs retrouver le cas $t < 0$ avec la propriété $\langle \psi_A(L, t) \psi_A^\dagger(L, 0) \rangle = \langle \psi_A(L, -t) \psi_A^\dagger(L, 0) \rangle^*$. Pour des temps longs, l'équation (2.31) n'est plus valable car le second terme explose. On doit alors revoir le calcul perturbatif. Contrairement à la plupart des systèmes, on peut calculer tous les termes perturbatifs à l'ordre r puis resommer tous ces termes. Le calcul est donné dans l'article [87] et donne

$$\langle \psi_A(L, t) \psi_A^\dagger(L, 0) \rangle = \frac{1}{2\pi v_F} \frac{1}{a + it} e^{-\frac{I_A}{e^*}(1 - e^{-2i\pi\nu})t} \tag{2.32}$$

Ce résultat suggère à nouveau que le faisceau de charges de la voie A a bien une statistique poissonnienne et coïncide bien avec (2.23) évalué pour $\lambda = 2\pi$. La valeur de λ n'est pas surprenante puisque le calcul de la FCS est basé sur le corrélateur $e^{-i\lambda\hat{N}_A}$ et celui du dessus par $e^{i\lambda\phi_A}$. La bosonisation assure la relation $\hat{N}_A = -\phi_A/(2\pi)$ et justifie la valeur de λ . L'origine du facteur $1 - e^{-2i\pi\nu}$ sera discuté plus tard mais est lié aux propriétés des anyons (voir (2.1)). Le bruit du partition du QPC peut alors être évalué, à partir de (1.30),

$$\langle \delta\hat{I}_T \delta\hat{I}_T \rangle_{\omega=0} = \frac{2e|t_P|^2}{\pi} I_+ \frac{\sin^2(\pi\nu)}{\pi\nu} \ln \left(\frac{\nu e^2 V/h}{2|\sin \pi\nu| \tilde{I}(\nu)} \right) \tag{2.33}$$

avec $\tilde{I}(\nu) = \sqrt{I_+^2 \sin^2 \pi\nu + I_-^2 \cos^2 \pi\nu}$ et $I_\pm = I_A \pm I_B$. Pour obtenir l'équation précédente, on a remplacé le cut-off temporel a par $h/(eV)$. En effet, l'expression (2.32) n'est valable qu'aux temps longs, c'est-à-dire pour $t \gg h/eV$: h/eV est la taille caractéristique d'un paquet d'onde électronique et la FCS n'a de sens que si le temps de mesure est grand devant le temps de chaque événement. Par conséquent, l'intégrale sur t de (2.32) démarre à h/eV . Or la présence de a permet de régulariser les intégrales en prenant la limite $a \rightarrow 0^+$, c'est-à-dire au final $t \gg a$. Il est alors justifié de remplacer le cut-off a par $h/(eV)$.

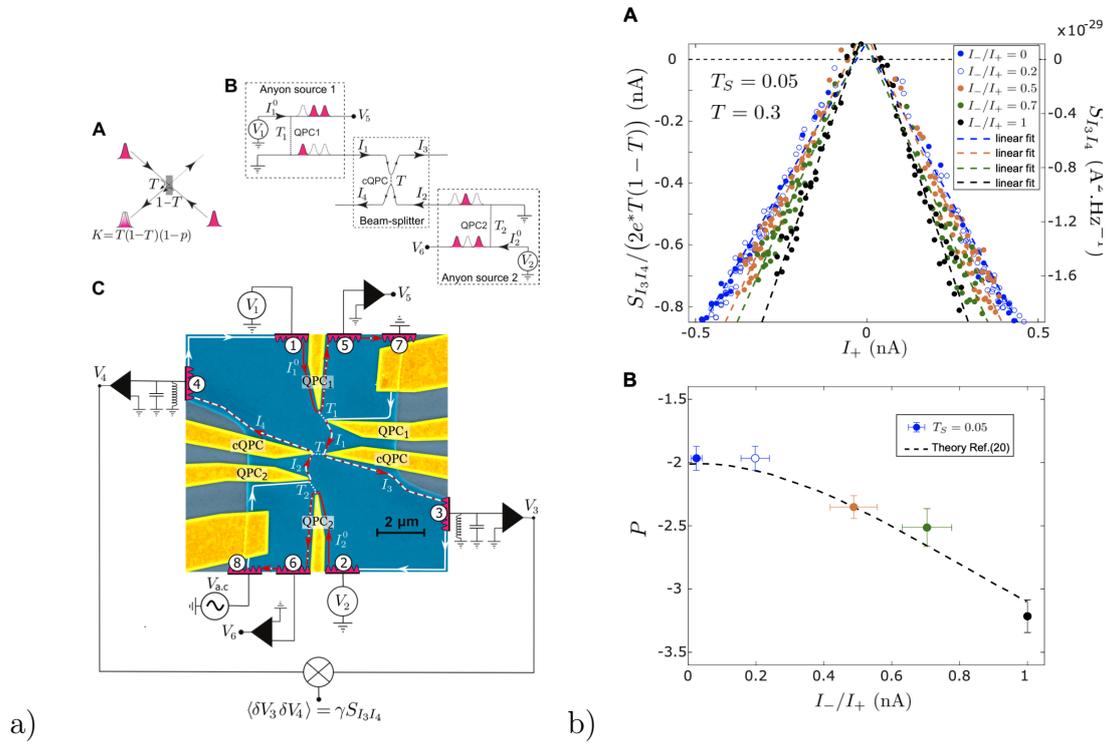


FIGURE 2.5 – a) Schémas de l'expérience et de l'échantillon utilisé dans [3]. La figure (A) représente la source émettrice d'anyons : un QPC avec une probabilité de transmission T à partir d'un échantillon soumis à un effet Hall quantique fractionnaire. La figure (B) représente le dispositif total où on injecte des anyons sur chaque bras incident, qui se rencontrent au niveau d'un troisième QPC. La figure (C) est une photo de l'échantillon faite avec un microscope électronique. b) Résultats de l'expérience pour un facteur de remplissage $\nu = 1/3$. La figure (A) représente le bruit croisé $S_{I_3 I_4}$ entre les deux voies sortantes 3 et 4 en fonction de $I_+ = I_1 + I_2$ pour différentes valeurs de I_-/I_+ avec $I_- = I_1 - I_2$. La figure (B) donne le facteur de Fano généralisé P en fonction du rapport I_-/I_+ , calculé à partir de la figure (A). La courbe en pointillés correspond au modèle calculé par Rosenow, Levkivskyi, et Halperin [86]. Dans ce modèle le facteur P suit la formule $P(I_-/I_+) = \frac{\langle \delta I_3 \delta I_4 \rangle}{e^* I_+ \frac{\partial I_T}{\partial I_-}}$. Pour $I_-/I_+ = 0$, on a $P(0) = -2\nu/(1-2\nu)$. Pour notre modèle, on obtient plutôt $P(0) = 1 - \frac{2 \sin^2(\pi\nu)}{(\pi\nu)^2} \ln \left(\frac{e^* eV/h}{4I_A \sin^2 \pi\nu} \right)$. Les deux résultats n'ont pas du tout la même forme mais nos émetteurs de charges sont radicalement différents. Pour l'expérience ci-dessus, leur émetteur crée des anyons purs et dans le nôtre, on a un objet hybride puisqu'il est constitué d'un anyon pur et d'un électron.

Il ne reste qu'à déterminer le bruit croisé entre les deux voies $\langle \delta \hat{I}_B \delta \hat{I}_A \rangle_{\omega=0}$ à partir des équations (1.31) et (1.32). Le bruit croisé peut se mettre sous une forme adimensionnée [3, 86] :

$$\frac{\langle \delta \hat{I}_B \delta \hat{I}_A \rangle_{\omega=0}}{e^* I_+ \partial_{I_-} I_T} \simeq 1 - \frac{2 \sin^2 \pi \nu}{(\pi \nu)^2} \ln \left(\frac{e^* e V / h}{2 |\sin \pi \nu| \tilde{I}(\nu)} \right) \quad (2.34)$$

Rappelons que la formule précédente n'est valable qu'aux temps longs, c'est-à-dire $e^2 V / h \gg I_{A/B}$. Le logarithme dans l'équation (2.34) est très grand et impose que le bruit croisé est bien négatif. Il s'agit du résultat central de ce sujet puisqu'il valide les propriétés anyoniques de nos charges. Néanmoins, notons deux arguments importants :

- Le calcul précédent a déjà été réalisé par Rosenow, Levkivskyi, et Halperin [86] mais le logarithme n'est pas présent. En effet, dans leur configuration leur émetteur émet des charges fractionnaires « pures ». Dans notre cas, rappelons que l'émetteur émet des électrons et des charges fractionnaires. La présence du logarithme est liée aux interactions mais ne change pas la dimension du corrélateur de bruit. La linéarité de l'expression (2.33) par rapport aux courants $I_{A/B}$ correspond à la dimension d'un électron libre. Notre système se comporte alors comme un système hybride entre des électrons et des anyons pures. Mentionnons que le calcul théorique [86] a été validé expérimentalement par l'équipe de Gwendal Fève [3] dont les résultats sont représentés sur la figure 2.5. Notons aussi que des expériences équivalentes ont été réalisées en mesurant le bruit croisé du système soumis à un gradient de température [88, 89].
- L'expression (2.33), et notamment (2.32), ne reproduit pas les résultats obtenus dans le cas fermionique $\nu = 1$. Cette contradiction provient notamment de l'évaluation de l'intégrale (2.30), évaluée aux temps longs $t \gg h/eV$. Mais il reste une contribution provenant de $t < h/eV$. Cette correction a la même dimension que (2.33) mais sans le logarithme, et est donc négligeable devant notre terme. Par contre, pour $\nu = 1$, ce terme doit être pris en compte et devient même dominant.

L'effet d'anti-bunching discuté dans la partie fermionique est associé à l'expression de (C.6). Dans notre cas, le résultat (2.33) est linéaire en $I_{A/B}$ alors qu'un terme en $I_A I_B$ par exemple correspond à un événement de collision. L'origine du terme (2.33) provient donc du tressage quantique des anyons discuté dans la partie suivante.

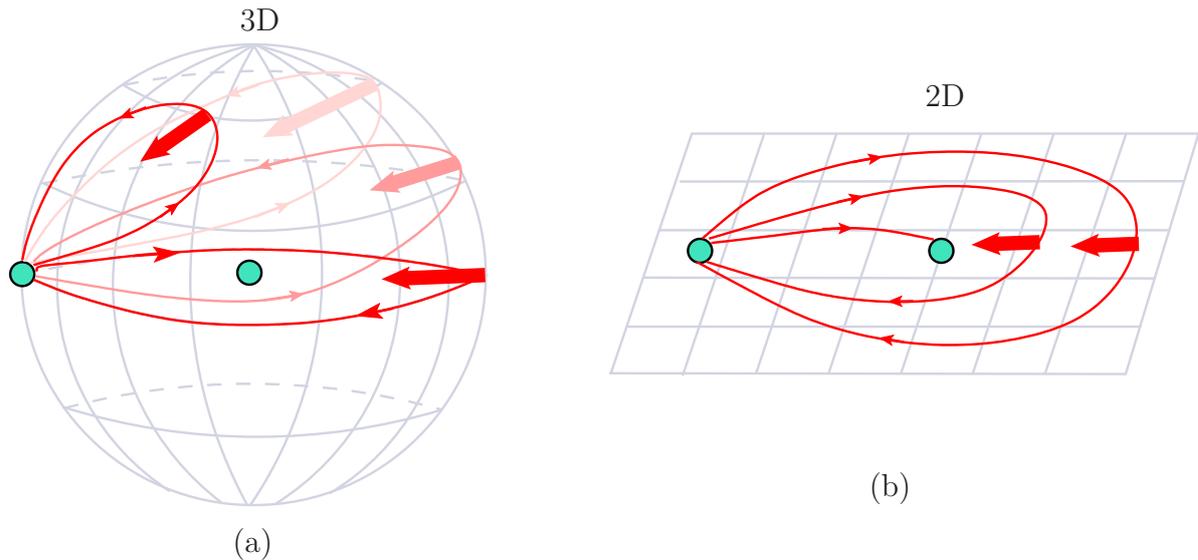


FIGURE 2.6 – Trajectoire d'un anyon qui tourne autour d'un anyon fixe. À trois dimensions, on peut modifier continuellement la trajectoire en la faisant passer au-dessus de l'anyon fixe puis en la ramenant en un point. Dans ce cas, revenir au point de départ revient topologiquement à ne rien faire. À deux dimensions, il n'est pas possible de le faire : il est nécessaire de couper la trajectoire en deux si on veut la ramener au point de départ. On ne peut pas la faire passer ni au-dessus ni en-dessous puisqu'on est à deux dimensions. Revenir au point de départ n'est donc plus équivalent à ne rien faire dans un monde à deux dimensions.

2.2.2 Interprétation du bruit croisé

Le tressage quantique

Revenons au texte introductif de ce chapitre. Vivant dans un monde à deux dimensions, les anyons n'ont pas les mêmes propriétés que les bosons et les fermions, qui sont les deux types de particules pouvant évoluer dans un monde à trois dimensions. En effet, pour les bosons et les fermions, lorsqu'une de ces particules, par exemple un fermion, tourne autour d'un autre fermion, supposé fixe (voir figure 2.6), le fermion mobile revenant à sa position de départ ne modifie pas l'état quantique du système : la particule est revenue dans sa position initiale, c'est-à-dire $|\Psi_1\Psi_2\rangle_f = |\Psi_1\Psi_2\rangle_i$. Pour les anyons, cette propriété n'est plus valable : ne rien faire ou faire tourner un anyon autour d'un autre fixe, tout en revenant à sa position initiale, ne correspond pas au même état quantique : $|\Psi_1\Psi_2\rangle_f \neq |\Psi_1\Psi_2\rangle_i$ (voir équation (2.1)).

Cette propriété anyonique peut notamment être expliquée à partir des mathéma-

tiques, et notamment de la topologie, qui étudie les propriétés d'objets géométriques préservées par déformation continue d'une forme à une autre. Dans un monde à trois dimensions, la trajectoire représentée sur la figure 2.6 peut être ramenée de manière continue (sans couper la trajectoire initiale) à un point. Topologiquement parlant, tourner autour d'une particule est équivalent à ne rien faire. Par contre, à deux dimensions, il n'est plus possible de ramener la trajectoire en un point sans la briser : revenir au point de départ après avoir tourné autour d'une particule n'est plus équivalent à ne rien faire. Par conséquent d'après l'équation (2.1) $|\Psi_1\Psi_2\rangle_f = e^{2i\theta}|\Psi_1\Psi_2\rangle_i$ avec $\theta \in [0, \pi]$. Finalement, à deux dimensions, nous avons accès à cette nouvelle classe de particules.

Dans les représentations de la figure 2.6, nous n'avons pas représenté la partie temporelle, qui est importante dans la description de nos résultats théoriques. Dans un espace-temps à 2+1 dimensions (2 spatiales et 1 temporelle), le mouvement d'un anyon dans le plan autour d'un autre anyon fixe forme une tresse (*braid* en anglais). Ce tressage quantique (*quantum braiding* en anglais) est un des enjeux majeurs pour le potentiel et futur ordinateur quantique. En effet, d'après la figure 2.7, la configuration de gauche est équivalente à celle de droite où le deuxième anyon, dont la trajectoire est représentée en noire, peut maintenant aussi tourner autour du premier car on peut déformer continûment la trajectoire et la ramener à la configuration de gauche. En pratique, la courbe de droite représente des tresses observables expérimentalement puisque les perturbations de l'environnement modifient les trajectoires des particules mais ne modifient pas cette propriété quantique des anyons.

Retour à notre expérience

Les calculs de la partie 2.1 ont montré que notre dispositif émule des quasiparticules de charge fractionnaire e^* à travers l'opérateur $\mathcal{T}_{A/B}$, défini par l'équation (2.10), associé aux QPC des voies A et B du collisionneur précédent. En outre, le QPC du collisionneur, qui permet de mixer les deux voies A et B , permet de faire passer un électron d'une voie à une autre, laissant un trou derrière qui se met à se propager. L'Hamiltonien associé fait notamment intervenir les opérateurs fermioniques de chaque voie $\psi_{A/B}$. Les calculs précédents ont montré la relation suivante

$$\mathcal{T}_{A/B}(t)\psi_{A/B}(0) = \psi_{A/B}(0)\mathcal{T}_{A/B}(t) e^{-i\pi\nu\text{sgn}(t)} \quad (2.35)$$

Cette relation est la relation fondamentale de notre système car elle est au cœur du tressage quantique. En effet, cette relation correspond à échanger les opérateurs dans le temps et est bien un équivalent de (2.1), prouvant à nouveau que nous avons

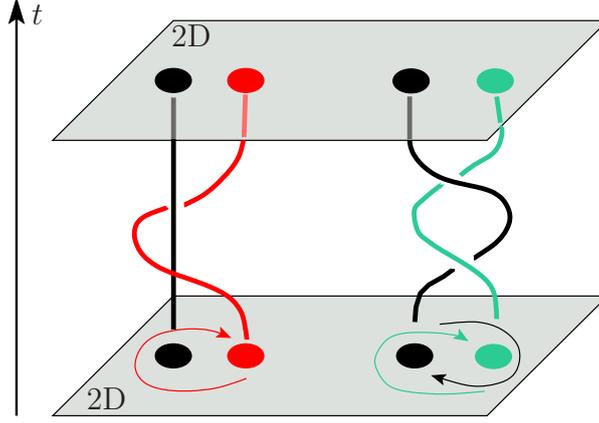


FIGURE 2.7 – Représentation de deux configurations possibles topologiquement équivalentes. Le plan grisé représente un espace spatial bidimensionnel et la coordonnée verticale correspond au temps t . Les traits représentent les trajectoires des anyons dans l'espace-temps de dimension $2 + 1$. On peut ramener la trajectoire noire de droite à celle de gauche en la déformant de manière continue sans modifier la boucle de l'autre anyon.

affaire à des quasiparticules ayant des propriétés anyoniques.

Comparons maintenant notre collisionneur anyonique avec celui fermionique déjà étudié dans la partie 1.3. On a par ailleurs montré que l'arrivée d'un électron au niveau du QPC du collisionneur entraîne immédiatement la création d'un électron (respectivement d'un trou) de la mer de Fermi laissant un trou (respectivement un électron). Dans notre cas anyonique, ce processus existe aussi : l'arrivée de la quasiparticule de charge e^* au niveau du QPC engendre aussi une excitation particule-trou (voir la figure 2.8). Cette excitation particule-trou corrélée à l'arrivée simultanée de la quasiparticule au niveau du QPC peut être vue dans les formules (2.27) et (2.28). L'intégrale sur les temps t_1 et t_2 correspondent au temps des excitations particule-trou et les temps $t = 0$ et t à l'arrivée des charges fractionnaires. Cette arrivée simultanée correspond à l'évaluation de l'intégrale (2.28) pour des temps $(t_1, t_2) \simeq (0, t)$, $(t_1, t_2) \simeq (0, 0)$ et $(t_1, t_2) \simeq (t, t)$. Le calcul aux temps longs donne une contribution

$$\langle \psi_A(t) \psi_A^\dagger(0) \rangle \simeq \frac{1}{2\pi v_F} \frac{1}{a + it} \times \frac{I_A \hbar}{e^2 V} \frac{\Gamma(2\nu)}{\nu \Gamma(\nu)^2} \left(e^{-ieVt/\hbar} - 1 + e^{-i\pi\nu \text{sgn}(t)} - \cos(\pi\nu) \right) \quad (2.36)$$

Notons que le résultat précédent correspond bien au terme d'ordre 2 dans le cas purement fermionique ($\nu = 1$) évalué à l'équation (C.6). Ce terme correspond donc bien au processus représenté sur la figure 2.8.

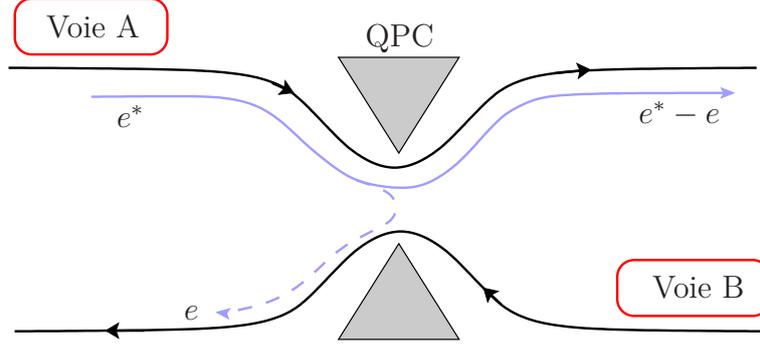


FIGURE 2.8 – Représentation du processus conventionnel. Une charge fractionnaire e^* arrive au niveau du QPC et un électron de la voie A saute immédiatement vers la voie B (en pointillés sur le schéma). En sortie de la voie, on récupère une quasiparticule de charge fractionnaire $e^* - e$. Le processus où un électron saute de la voie A à la voie B est aussi possible mais n'est pas représenté sur ce schéma.

Cependant, le terme (2.36) n'est pas associé au processus dominant. On rappelle le terme dominant évalué aux temps longs avec $0 \ll t_1 \simeq t_2 \ll t$:

$$\langle \psi_A(t) \psi_A^\dagger(0) \rangle \simeq \frac{1}{2\pi v_F} \frac{1}{a + it} e^{-\frac{I_A}{e^*} (1 - e^{-2i\pi\nu \text{sgn}(t)}) |t|} \quad (2.37)$$

La principale caractéristique de ce corrélateur est sa valeur non-nulle aux temps longs ($t \gg h/eV$) imposée par l'exponentielle. Le système a donc une mémoire très longue de l'arrivée des charges fractionnaires au niveau du QPC : les excitations particule-trou peuvent être alors créées avant ou après l'arrivée des charges au QPC. Ces deux processus, notés a_1 et a_2 , sont représentés sur la figure 2.9. La représentation graphique de l'espace-temps à 2 + 1 dimensions étant délicate, le caractère temporel est représenté orthogonalement à cette feuille : une trajectoire qui est au-dessus d'une autre est effectuée à un temps ultérieur. Le calcul du bruit croisé (2.34) résulte des interférences entre tous les processus comme par exemple $a_2^* a_1$, représenté sur la figure 2.9, et est relié au phénomène de tressage quantique où la quasiparticule enlace la trajectoire bouclée de l'électron issu de l'excitation particule-trou. Ce double échange fait donc intervenir le facteur de phase $e^{-2i\pi\nu}$, en accord avec l'équation (2.35). Le corrélateur (2.37) ne fait pas seulement intervenir le facteur $e^{-2i\pi\nu}$ mais plutôt $1 - e^{-2i\pi\nu}$. Ce facteur 1 provient d'une contribution quasiment identique à $a_2^* a_1$ où les deux boucles de trajectoire ne s'entrelacent pas car l'excitation particule-trou se passe bien avant ou bien après l'arrivée des quasiparticules au niveau du QPC. Ce facteur numérique 1 est important car il est notamment responsable de l'annulation du facteur de phase $1 - e^{-2i\pi\nu}$ dans le cas purement fermionique ($\nu = 1$). Cette annulation peut notamment se comprendre à

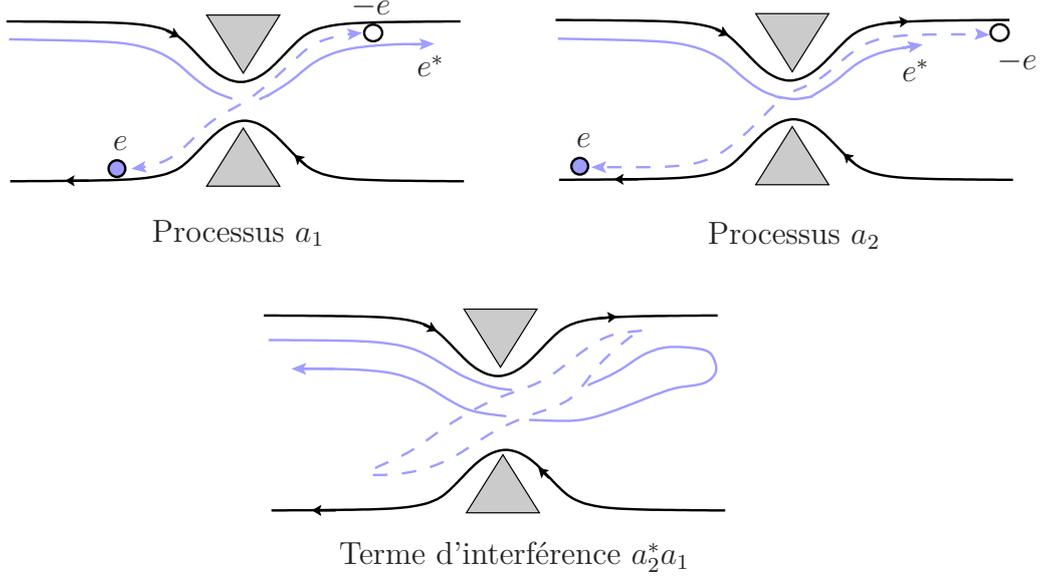


FIGURE 2.9 – Processus dominant. **Figures du dessus** : Le processus a_1 (respectivement a_2) correspond à une excitation électron-trou après (respectivement avant) le passage de la quasiparticule. L'excitation particule-trou est représentée en pointillés sur le schéma. Lorsque la trajectoire se situe au-dessus d'une autre, celle-ci se fait à des temps ultérieurs. Les autres processus, où un trou est injecté dans la voie B, ne sont pas représentés. **Figure du dessous** : Trajectoire équivalente au terme d'interférence $a_2^*a_1$ qui contribue au bruit croisé entre les deux voies. Elle correspond au tressage quantique discuté précédemment où la charge fractionnaire e^* s'enroule autour de la trajectoire associée à l'excitation particule-trou.

partir de diagrammes de Feynmann où le terme d'interférence $a_2^*a_1$ vient avec un diagramme partenaire qui se compensent exactement pour $\nu = 1$ [90,91].

2.3 Conclusion

Nous avons proposé un dispositif qui émet des charges fractionnaires. À partir de $N + 1$ états de bord d'effet Hall quantique, un îlot métallique recouvre partiellement ces $N + 1$ états de bord, impliquant notamment la conservation de la charge. Un QPC, de très petite amplitude de réflexion, est ajouté sur un des états de bord entrant dans l'îlot. Cette configuration entraîne deux processus : la réflexion d'un électron sur l'état de bord sortant grâce au QPC laissant un trou qui se propage vers l'îlot. La conservation de la charge à l'intérieur de l'îlot impose que la charge portée par le trou entrant doit être immédiatement compensée par l'émission de charges $-e/(N + 1)$ dans chaque état de bord sortant. En sortie de la voie associée au QPC, il y a émission de charges fractionnaires $e - e/(N + 1) = eN/(N + 1)$. Comme le

QPC a un coefficient de rétrodiffusion très petit devant un, l'émission de ces charges fractionnaires est diluée et est associée à une statistique poissonnienne, validée par un calcul de la statistique de comptage complet. Nos charges sont constituées d'un électron et d'une quasiparticule de charge fractionnaire.

Ensuite, on décrit une expérience de collision où le dispositif précédent est situé sur les deux bras du dispositif. Ces deux bras sont ensuite couplés par un QPC de coefficient de transmission très petit devant 1. La mesure du bruit croisé donne des informations sur la statistique des particules incidentes. Pour des électrons libres, le bruit croisé est nul. Pour notre dispositif, on trouve un bruit strictement négatif caractéristique des anyons. Bien qu'on parle de collisionneur, les collisions entre particules de charges fractionnaires ne sont pas les processus dominants. On démontre que le signe du bruit croisé est associé au phénomène de tressage quantique où la trajectoire de la quasiparticule incidente s'enroule autour de la trajectoire fictive d'une excitation particule-trou au niveau du QPC.

3 Cohérence et squeezing d'un îlot quantique

Résumé du chapitre

On étudie dans ce chapitre l'effet d'une source de tension sinusoïdale (source AC) sur l'îlot quantique, étudié dans la partie 1.4 en présence notamment de la rétrodiffusion à son entrée. L'utilisation d'un interféromètre électronique de Mach-Zehnder permet notamment de visualiser les effets de la source AC et de la rétrodiffusion sur la cohérence de phase du système. Dans un premier temps, on calcule l'expression de la visibilité des oscillations du flux d'Aharonov-Bohm. À partir du formalisme de Floquet, on montre que les effets de la source de tension se résument à étudier une distribution de photons virtuels arrivant en direction de l'îlot. La présence de la rétrodiffusion, et donc des non-linéarités, engendre des interactions entre ces photons : un photon sortant est associé à une multitude de photons incidents dont les différents processus associés engendrent des interférences constructives ou destructives. Ces interférences font alors varier la visibilité et ont pour conséquence une amélioration ou une diminution de la cohérence de phase en sortie de l'îlot.

Ces non-linéarités sont ensuite étudiées à travers le phénomène de compression quantique des états (*quantum squeezing* en anglais). En étudiant les deux quadratures du champ électromagnétique émis par le système, à travers les fluctuations de l'opérateur courant, on montre que la compression quantique est due à un effet capacitif, résultant d'une modification de la capacité quantique du système devenant dépendante du temps. On trouve alors que l'îlot quantique se comporte comme un oscillateur paramétrique permettant ainsi la compression quantique.

Sommaire

3.1	Influence de la source AC sur l'îlot	90
3.1.1	Positionnement de la source AC	91
3.1.2	Couplage parfait avec l'îlot : Approche de Floquet	92
3.1.3	Effet de la rétrodiffusion ($r \neq 0$)	94
3.2	Utilisation du Mach-Zehnder	97
3.2.1	Couplage parfait $r = 0$	98
3.2.2	Prise en compte de la rétrodiffusion	101
3.3	Formation d'états comprimés quantiques	102
3.3.1	Modèle étudié	103
3.3.2	Bruit dynamique	106
3.3.3	Observables de la compression quantique	110
3.4	Conclusion	112

La description complète d'un circuit électrique ne peut se faire sans étudier le régime permanent dépendant du temps (régime AC). C'est aussi le cas en physique quantique. Par exemple dans le cas de l'îlot quantique, soumis à une tension de grille $V_g(t)$ et étudié à la partie 1.4.1, l'admittance de l'îlot à basse fréquence ($\omega R_q C \ll 1$) peut s'écrire $Y(\omega) = -i\omega C + \omega^2 C^2 R_q$. Cette expression implique $Y(0) = 0$ car les deux états de bord sont reliés au même réservoir métallique et aucun courant ne sort de l'îlot, contrairement au régime AC ($\omega \neq 0$).

Dans un cadre théorique, l'étude peut se faire en prenant simplement une tension $V(t)$. Contrairement aux sources de tension constante (régime DC) où le flot d'électrons est continu, l'utilisation d'une source AC particulière permet d'avoir un contrôle précis des électrons. La nature des électrons sortants de la source permet alors de sonder le comportement des systèmes quantiques. En pratique, la réalisation d'une source d'électrons « à la demande » a été développée pour la première fois en 2007 au laboratoire Pierre Aigrain de l'ENS Paris [2] dont le principe est résumé sur la figure 3.1. Cependant, ces sources de tension ajoutent des excitations particule-trou ce qui peut être un frein pour certaines expériences où on veut seulement mettre en évidence le comportement des électrons. En particulier, les tensions de forme Lorentzienne permettent d'injecter des excitations seulement électroniques, appelées lévitons [80, 92, 93].

Une autre utilisation de ces tensions dépendantes du temps est de créer de nouveaux états, appelés états comprimés (ou *squeezed states* en anglais). Cette compression (ou *squeezing* en anglais) permet notamment de jouer sur le bruit. En physique quantique, à cause de la relation d'indétermination d'Heisenberg,

$$\sqrt{\langle \Delta \hat{A}^2 \rangle \langle \Delta \hat{B}^2 \rangle} \geq \frac{1}{2} |[\hat{A}, \hat{B}]| \quad (3.1)$$

avec \hat{A} et \hat{B} deux observables quantiques, il existe une limite inférieure à ces indéterminations. Bien que le bruit quantique ne puisse pas être éliminé, il est possible de le minimiser. Prenons l'exemple d'un oscillateur harmonique quantique en notant \hat{X} et \hat{Y} les opérateurs de position et de quantité de mouvement adimensionnés qui vérifient $[\hat{X}, \hat{Y}] = i$ et $\langle \Delta \hat{X}^2 \rangle \langle \Delta \hat{Y}^2 \rangle \geq 1/4$. Les limitations sur la précision pouvant être atteinte sont données par la limite quantique standard ; et présume que dans les états quantiques d'un oscillateur harmonique $\Delta X^2 = \Delta Y^2 = 1/2$. Cette valeur minimale non-nulle est appelée énergie quantique du point zéro ou fluctuation du vide. Lorsque qu'une des quadratures ΔX^2 ou ΔY^2 descend en-dessous de 1/2, au dépend de l'autre quadrature, il subit une compression. Les états comprimés se sont donc imposés naturellement comme un moyen d'augmenter la précision d'une me-

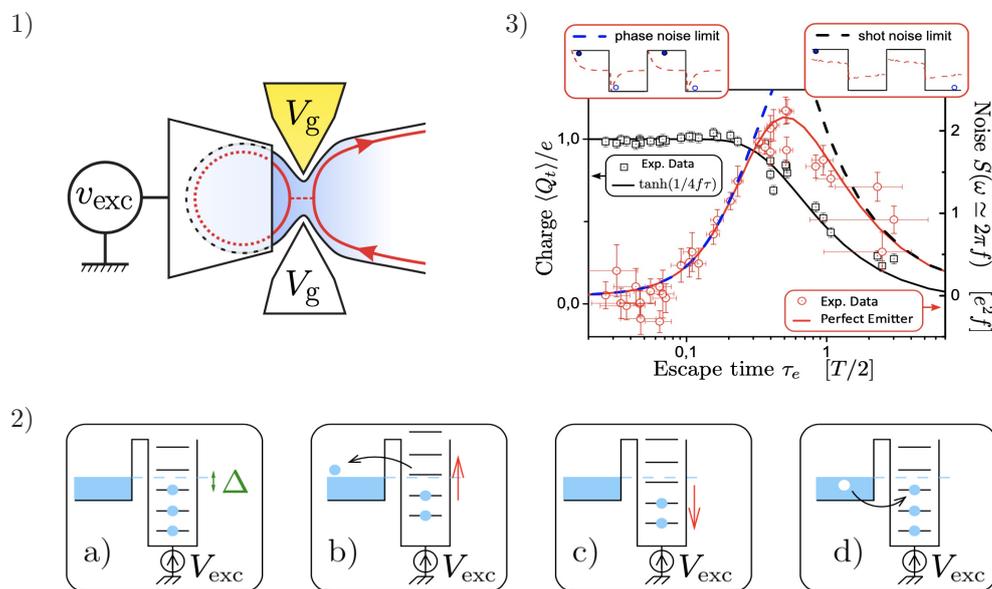


FIGURE 3.1 – Principe de fonctionnement d’une source à électron unique (figures extraites de [9]). **1)** Représentation de la source : une portion d’un gaz bidimensionnel dont les canaux sont couplés par un contact ponctuel quantique (QPC) dont le facteur de transmission est imposée par la valeur du potentiel de grille V_g . Le confinement entraîne l’apparition de niveaux d’énergie discrets pour les électrons modulés par une tension radio-fréquence d’amplitude V_{exc} . Typiquement, la fréquence se situe entre 700 MHz et 10 GHz et $V_{exc} \simeq 100 \mu\text{V}$. **2)** Cycle de fonctionnement de la source. Lorsque la source AC est synchronisée avec l’îlot, c’est-à-dire $V_{exc} = \Delta/e$ où Δ est l’écart entre deux niveaux d’énergie de l’îlot, un niveau de la boîte croise deux fois le niveau de Fermi par période. Le dernier niveau occupé passe alors périodiquement au-dessus du niveau de Fermi et un unique électron peut s’échapper de l’îlot (schéma (b)). Lorsque le niveau repasse en dessous du niveau de Fermi, un électron est absorbé par l’îlot et laisse un trou dans le réservoir. **3)** Mesures expérimentales du bruit haute fréquence (en rouge) et de la charge moyenne (en traits noirs continus) en fonction du temps de sortie de l’électron dans l’îlot (courbe extraite de [94]). Chaque carré noir représente la probabilité d’émission. Pour des temps de sortie $\tau_e \ll T/2$, une charge est émise chaque demi-période avec une probabilité proche de 1.

sure. De nombreux systèmes existent et peuvent comprimer des états. Une des deux conditions suivantes est nécessaire afin de produire des états comprimés : utiliser des processus/composants non-linéaires ou des oscillateurs paramétriques.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans un premier temps, on étudie l'influence d'une source AC sur l'îlot métallique. En discutant tout d'abord le choix de la position de cette source, on montre que positionner la source en amont de l'îlot est équivalent à la mettre au niveau de la tension de grille de ce dernier, à condition de vérifier une relation d'équivalence entre ces deux modèles. L'effet de la source AC en amont de l'îlot revient à étudier une assemblée d'électrons d'énergie $E_n = E + n\hbar\Omega$, où Ω est la pulsation de la source AC, ayant absorbé ou émit n photons virtuels (approche de Floquet). En l'absence de rétrodiffusion à l'entrée de l'îlot, le nombre de photons virtuels est conservé entre l'entrée et la sortie de l'îlot mais ce dernier modifie l'amplitude de probabilité associée à chaque processus d'absorption ou d'émission. Par contre, on démontre que la prise en compte de la rétrodiffusion induit des interactions entre ces photons et leur nombre n'est alors plus conservé. Ces effets sont mesurés à travers l'interféromètre de Mach-Zehnder.

En plus de ces propriétés, nos calculs montrent que la rétrodiffusion engendre bien dans le signal de sortie un signal de pulsation Ω mais aussi des signaux d'harmoniques supérieures de pulsation $p\Omega$ ($p \in \mathbb{N}$), d'amplitudes plus petites. La modulation de la tension de grille permet de jouer sur la répartition de ces pulsations en sortie de l'îlot. Cet effet non-linéaire est au centre de la dernière partie de ce chapitre : la formation d'états comprimés quantiques (*squeezing* en anglais). À partir de la description bosonique de l'îlot quantique, étudiée dans la partie 1.4.3, la prise en compte de la rétrodiffusion et de la source AC revient à étudier un circuit RC quantique où la capacité du circuit est maintenant dépendante du temps, comme pour un oscillateur paramétrique. Cet oscillateur quantique induit des corrélations entre les champs bosoniques de sortie à différentes fréquences, équivalents à des corrélations entre les courants, et donc permet de créer des états comprimés quantiquement.

3.1 Influence de la source AC sur l'îlot

On choisit dans tout ce manuscrit une tension sinusoïdale $V_{ac}(t) = V_{ac} \sin \Omega t$, de moyenne nulle, en présence aussi d'une différence de potentiels chimiques $\Delta\mu = eV_{dc}$ à l'aide d'une polarisation DC. Le choix d'une tension sinusoïdale plutôt qu'une source de lévitons ou des pulses carrés permet d'obtenir des relations analytiques. Le raisonnement est cependant transposable à tout type de sources périodiques.

3.1.1 Positionnement de la source AC

Une première question à se poser est la position de la source AC. En effet, il y a deux manières d'étudier le régime AC dans le cas de l'îlot métallique :

- on peut positionner la source en amont de l'îlot sur l'état de bord incident R . C'est par exemple le cas dans les interféromètres de Mach-Zehnder [13, 47] ou dans des expériences de collisions [3, 73] où les sources de tensions se situent en amont des premiers éléments du dispositif. Notons que dans cette configuration la source de tension est suffisamment éloignée de tout système afin d'éviter des interactions, notamment électrostatiques, entre les différents éléments du circuit.
- on peut aussi étudier le régime hors équilibre de l'îlot métallique en utilisant une tension de grille $V_g(t)$ dépendante du temps [40, 45, 95] (voir l'équation (1.35)). Jouer sur la tension de grille permet d'amener un niveau occupé de l'îlot au-dessus de la surface de Fermi et donc émettre une charge. C'est d'ailleurs la configuration utilisée pour fabriquer des sources d'électrons à la demande [2]. Dans cette situation, la conductance $G(\omega) = I(\omega)/V_g(\omega)$ se met sous la forme à basses fréquences [40, 45]

$$G(\omega) = -\frac{i\omega C}{1 - i\omega\tau} \quad (3.2)$$

avec $\tau = R_q C$. Cette formule coïncide avec l'admittance équivalente d'une association en série d'une résistance $R_q = h/e^2$ et d'une capacité C .

Comparons alors l'expression de la conductance dans le cas où la tension est reliée à l'état de bord incident. Regardons le cas simple où $V_{dc} = 0$ et $N_g = 0$. La résolution des équations du mouvement, faite dans l'appendice B, permet de calculer le courant moyen sortant de l'îlot $I(t) = -\frac{e}{2\pi} \langle \partial_t \phi_R(0^+, t) \rangle$ avec

$$\phi_R(0^+, t) = \tilde{\phi}_R(0^+, t) - \int_0^{+\infty} dz e^{-z} \Phi_{ac}(t - z\tau) \quad (3.3)$$

avec $\Phi_{ac}(t) = \frac{e}{h} \int_{-\infty}^t dt' V_{ac}(t')$ et $\langle \tilde{\phi}_R(0^+, t) \rangle = 0$. L'interprétation de ce terme sera fait dans la partie d'après. On en déduit

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} I(t) = \frac{e^2}{h} \times \frac{V_{ac}(\omega)}{1 - i\omega\tau} \quad (3.4)$$

L'expression précédente correspond à la réponse d'un circuit RC. La comparaison des conductances (3.2) et (3.4) permet de trouver le lien entre ces deux modèles

$$V_{ac}(\omega) = -i\omega R_q C V_g(\omega) \quad \text{ou} \quad V_{ac}(t) = R_q C \partial_t V_g(t) \quad (3.5)$$

En conclusion, appliquer la tension $V_{ac}(t)$ en amont du dispositif est équivalent à appliquer une tension de grille $V_g(t)$ si ces tensions sont reliées par la formule (3.5). Cette correspondance s'avèrera utile dans la partie 3.3.

3.1.2 Couplage parfait avec l'îlot : Approche de Floquet

L'ajout d'une tension sinusoïdale modifie les équations du mouvement dérivées dans l'appendice B. Les solutions (1.46) deviennent alors

$$\begin{aligned}\phi_L(0^+, t) &= \tilde{\phi}_L(0^+, t) - \frac{eV_{dc}t}{\hbar} - \Phi_{ac}(t) \\ \phi_R(0^+, t) &= \tilde{\phi}_R(0^+, t) - \frac{eV_{dc}t}{\hbar} + 2\pi N_g - \int_0^{+\infty} dz e^{-z} \Phi_{ac}(t - z\tau)\end{aligned}\tag{3.6}$$

avec $\tilde{\phi}_{R/L}$ les champs bosoniques en présence de l'îlot mais en l'absence de source de tension (voir équation (B.8)), et $\Phi_{ac}(t) = \frac{e}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' V_{ac}(t')$ la phase accumulée par l'électron incident. Le choix de la borne inférieure valant $-\infty$ est arbitraire. On peut éventuellement remplacer cette borne par t_0 avec la condition $V_{ac}(t < t_0) = 0$. Dans le formalisme de la bosonisation, les champs ϕ représentent les phases des électrons. Par conséquent, les expressions (3.6) montrent que l'effet d'une source de tension dépendante du temps peut être traité comme une phase de diffusion obtenue par les électrons qui quittent la zone de contact avec la source de tension. Par ailleurs, même si l'état de bord sortant R n'est directement soumis à aucune source de tension, les interactions à l'intérieur de l'îlot engendrent aussi une phase supplémentaire pour le champ bosonique ϕ_R . Le champ ϕ_R sent la tension appliquée dans le canal L via les interactions entre les électrons dans l'îlot. Finalement, les opérateurs fermioniques peuvent se déduire de (3.6)

$$\begin{aligned}\psi_L(0^+, t) &= \tilde{\psi}_L(0^+, t) e^{-\frac{ieV_{dc}t}{\hbar}} e^{-i\Phi_{ac}(t)} \\ \psi_R(0^+, t) &= \tilde{\psi}_L(0^+, t) e^{i2\pi N_g} e^{-\frac{ieV_{dc}t}{\hbar}} e^{-i \int_0^{+\infty} dz e^{-z} \Phi_{ac}(t-z\tau)}\end{aligned}\tag{3.7}$$

où $\tilde{\psi}_{R/L}$ sont associés aux champs bosoniques $\tilde{\phi}_{R/L}$ et vérifient les corrélateurs (1.47) et (1.48). Les relations (3.7) sont obtenues sans faire de supposition sur l'amplitude V_{ac} : elles sont exactes vis à vis de la source AC.

Essayons maintenant d'interpréter les formules (3.7). Regardons par exemple le champ ψ_L . Le terme $e^{-\frac{ieV_{dc}t}{\hbar}}$ peut se réécrire $e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ avec E l'énergie du système en l'absence de voltage AC, c'est-à-dire correspond à la solution stationnaire du système.

Comme le voltage est périodique de période $T_0 = 2\pi/\Omega$, $e^{i\Phi_{ac}(t)}$ est aussi périodique de période T_0 . On peut alors décomposer l'exponentielle en série de Fourier

$$e^{-i\Phi_{ac}(t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n e^{in\Omega t} \quad \text{avec} \quad p_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt e^{in\Omega t} e^{-i\Phi_{ac}(t)} \quad (3.8)$$

L'opérateur ψ_L se réécrit

$$\psi_L(0^+, t) = e^{-\frac{ieV_{dc}t}{\hbar}} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n e^{in\Omega t} \right) \tilde{\psi}_L(0^+, t) \quad (3.9)$$

Dans le cas purement stationnaire, seulement le terme $n = 0$ survit et l'énergie E est bien définie. Pour une tension dépendant du temps, l'énergie n'est plus une quantité bien définie. En effet, si on modifie l'énergie de (3.9) d'une quantité $p\hbar\Omega$ ($p \in \mathbb{Z}$), l'opérateur fermionique n'est pas modifié. On peut réindexer la somme en écrivant $n \rightarrow n + p$. Cette propriété peut être généralisée avec le théorème de Floquet [96, 97]. D'après l'équation (3.9), un électron, émis avec une énergie $E = eV_{dc}$, arrivant sur l'îlot métallique peut être vu comme une superposition d'états d'énergie $E_n = E + n\hbar\Omega$. Pour donner une image physique, un état E_n peut être décrit comme un électron ayant absorbé ($n > 0$) ou émis ($n < 0$) $|n|$ photons virtuels. Déterminer complètement l'état de l'électron en sortie de l'îlot revient à étudier le devenir de ces photons dans l'îlot. L'amplitude de probabilité d'absorber ou d'émettre $|n|$ photons est ainsi caractérisé par le coefficient p_n de l'équation (3.8). On se place alors dans le formalisme dit de Floquet.

Pour une tension sinusoidale, $p_n = i^n J_n(eq/\hbar)$ avec $q = V_{ac}/\Omega$ et J_n la fonction de Bessel d'ordre n . On peut d'ailleurs trouver la forme de p_n pour une tension créneau ou Lorentzienne [24]. Le calcul est légèrement plus complexe pour le terme de Floquet dans l'expression de ψ_R dans l'équation (3.7). En utilisant

$$\int_0^{+\infty} dz e^{-z} \Phi_{ac}(t - z\tau) = \frac{q}{\sqrt{1 + \Omega^2\tau^2}} \cos(\Omega t - \varphi) \quad (3.10)$$

avec $\varphi = \arctan(\Omega\tau)$, on peut alors calculer le terme de phase ajouté par le voltage AC :

$$e^{-i \int_0^{+\infty} dz e^{-z} \Phi_{ac}(t - z\tau)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(q, \Omega\tau) e^{in\Omega t} \quad (3.11)$$

où on a introduit $p_n(q, \Omega\tau) = i^n J_n\left(\frac{eq/\hbar}{\sqrt{1 + \Omega^2\tau^2}}\right) e^{-in\varphi}$. D'après l'équation (3.10), la source de tension AC perçue par les électrons sortants de l'îlot est modifiée. L'expression (3.10) indique que l'îlot joue le rôle d'un filtre passe-bas de pulsation de

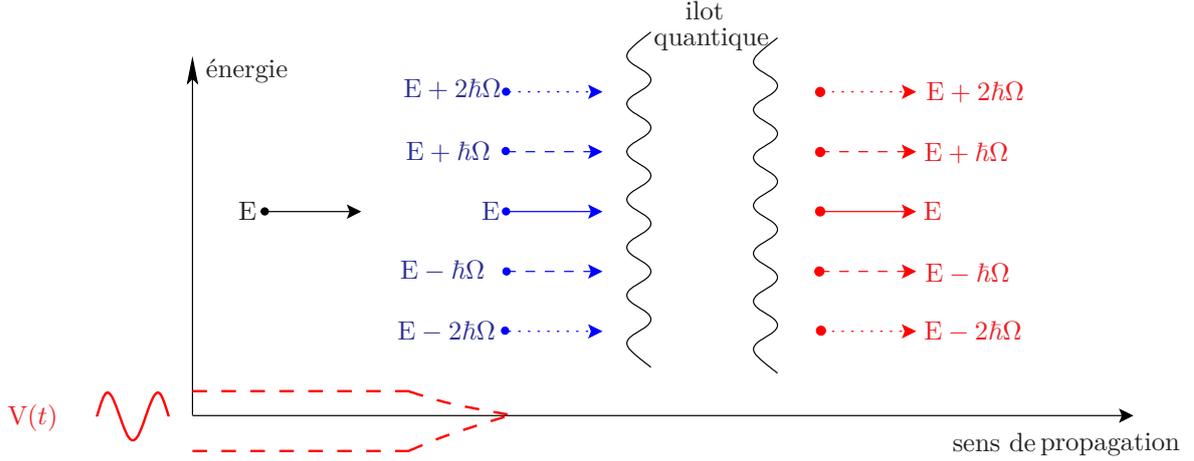


FIGURE 3.2 – Résumé du formalisme de Floquet. Les électrons d'énergie E , représentés par une flèche noire, sont soumis à une source de tension périodique et acquièrent une phase dépendante du temps. Pour une source de tension de pulsation Ω , les électrons peuvent être décrits par une superposition d'états d'énergie $E_n = E + n\hbar\Omega$ ($n \in \mathbb{Z}$), représentés par des flèches bleues. Chaque état E_n correspond à un électron ayant absorbé ($n > 0$) ou émis ($n < 0$) $|n|$ photons avec une probabilité $|p_n|^2$. La description du système revient à étudier le devenir de ces photons virtuels. En l'absence de rétrodiffusion, l'hamiltonien de l'îlot quantique est quadratique par rapport aux opérateurs bosoniques. Par conséquent, le nombre de photons est conservé mais le voltage perçu par les photons de sortie est modifié par l'îlot. La distribution de sortie, représentée par des flèches rouges, n'est donc pas modifiée mais les probabilités d'émettre ou d'absorber ces photons sont modifiées.

coupure $1/\tau$. Ce résultat est en accord avec le modèle proposé dans la partie 1.4 puisque l'îlot métallique est l'équivalent d'un circuit RC pour des contributions classiques. Cet effet se produit aussi pour d'autres types de source périodique mais le calcul analytique (3.11) n'est alors plus tractable. En résumé, l'opérateur fermionique sortant s'écrit

$$\psi_R(0^+, t) = e^{i2\pi N_g} e^{-\frac{ieV_{dc}t}{\hbar}} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(q, \Omega\tau) e^{in(\Omega t - \varphi)} \right) \tilde{\psi}_R(0^+, t) \quad (3.12)$$

Les équations (3.9) et (3.12) permettent de résumer la situation sur la figure 3.2.

3.1.3 Effet de la rétrodiffusion ($r \neq 0$)

Regardons l'effet de la rétrodiffusion, décrit par l'Hamiltonien

$$\hat{H}_r = \hbar v_F r \{ \psi_R^\dagger(0) \psi_L(0) + \psi_L^\dagger(0) \psi_R(0) \} = \frac{rD}{\pi} \cos(\phi_R(0) - \phi_L(0)) \quad (3.13)$$

dans la limite $r \ll 1$. Cet Hamiltonien est non-linéaire par rapport aux opérateurs bosoniques. Par conséquent, des effets non linéaires apparaissent. C'est ce que nous allons quantifier dans cette partie.

Avant de discuter l'effet combiné du voltage AC et de la rétrodiffusion, il est bon de donner les résultats dans le cas à l'équilibre ($V_{ac} = 0$). Dans ce cas particulier, le nombre d'électrons dans le dot suit la loi [48]

$$\langle \hat{N} \rangle = N_g - \frac{e^\gamma r}{\pi} \sin(2\pi N_g) \quad (3.14)$$

Cette modification du nombre d'électrons est notamment responsable de la modification de la capacité initiale de l'îlot puisque la capacité C est définie par $C = \frac{\partial \langle \hat{N} \rangle}{\partial (eV_g)}$ et est responsable des effets de la quantification de la charge. Par contre, la rétrodiffusion n'affecte pas la résistance de relaxation de charge $R_q = h/e^2$.

Dans la description faite dans la partie 1.4.3, un électron incident est diffusé par l'îlot avec une certaine phase de diffusion α qui suit notamment la règle de Friedel [98] $\alpha = \pi \langle \hat{N} \rangle$. L'équation (3.14) suggère que la somme de Friedel est encore vérifiée à l'ordre 1 en r [56]. Cette propriété montre que la rétrodiffusion ne modifie pas la cohérence de phase, en l'absence de source AC, et les résultats établis à la partie 1.4.3 avec l'interféromètre de Mach-Zehnder restent valables puisque la visibilité n'est pas affectée par les changements de phase.

En présence d'une tension de grille $V_g(t)$ dépendante du temps, un calcul similaire a été fait par C. Mora et K. Le Hur [45] où la tension de grille adimensionnée est traitée de manière perturbative, c'est-à-dire $N(t) = N_g + N_1(t)$ avec $|N_1(t)| \ll N_g$. Dans ce régime linéaire, le calcul montre que le résultat (3.14) est aussi reproduit.

Dans cette partie, on veut déterminer l'effet du terme de rétrodiffusion en présence du source de tension AC en amont de l'îlot, sans aucune approximation sur l'amplitude de cette source. L'ajout du terme (3.13) modifie les équations du mouvement dérivées dans l'appendice B. On doit alors ajouter aux équations d'Heisenberg le terme suivant pour les champs bosoniques $\phi_{R/L}$:

$$\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_r, \phi_{R/L}(t)] = -\frac{2rD}{\hbar} \theta(-x) \sin(\phi_R(0, t) - \phi_L(0, t)) \quad (3.15)$$

La correction d'ordre 1 en r peut être déterminée en moyennant les équations du mouvement sur les champs $\phi_{R/L}$ (3.6), c'est-à-dire les champs associés à l'Hamiltonien

nien bosonique quadratique ($r = 0$) [48]. Avec les relations de commutation entre les champs ϕ_R et ϕ_L (voir appendice B) et l'équation (3.6), on trouve

$$f(t) = -\frac{2rD}{\hbar} \langle \sin(\phi_R(0, t) - \phi_L(0, t)) \rangle_{r=0} = -\frac{2re^\gamma}{\tau} \sin(2\pi N_g - \Phi(t)) \quad (3.16)$$

avec $\Phi(t) = \int_0^{+\infty} dz e^{-z} \Phi_{ac}(t - z\tau) - \Phi_{ac}(t) = \frac{e\tau}{\hbar} \int_0^{+\infty} dz e^{-z} V_{ac}(t - z\tau)$. Le terme $f(t)\theta(-x)$ ajouté dans les équations du mouvement ressemble ainsi fortement au terme de charge $-\frac{2E_c}{\hbar}(\hat{N} - N_g)\theta(-x)$ dans ces mêmes équations. On peut réunir ces deux termes en un seul :

$$-\frac{2E_c}{\hbar}(\hat{N} - N_g)\theta(-x) + f(t)\theta(-x) = -\frac{2E_c}{\hbar}[\hat{N} - N_0(t)]\theta(-x) \quad (3.17)$$

avec $N_0(t) = N_g + f(t) = N_g - \frac{re^\gamma}{\pi} \sin(2\pi N_g - \Phi(t))$. Ce résultat est bien en accord avec l'équation (3.14) dans le cas $V_{ac}(t) = 0$. Le terme $N_0(t)$ est donc aussi affecté par l'îlot comme l'est la tension AC [95]. Le champ bosonique sortant $\phi_R(0^+, t)$ est alors affecté par cette nouvelle phase $\delta\Phi(t)$ définie par

$$\begin{aligned} \delta\Phi(t) &= -2re^\gamma \int_0^{+\infty} dy e^{-y} \sin(2\pi N_g - \Phi(t - y\tau)) \\ &= -2re^\gamma \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \sin[2\pi N_g - n(\Omega t - \varphi) + \varphi_n] \end{aligned} \quad (3.18)$$

où on a introduit $\varphi_n = \arctan(n\Omega\tau)$ et $B_n = \frac{1}{\sqrt{1+(n\Omega\tau)^2}} J_n\left(\frac{g\Omega\tau}{\sqrt{1+(n\Omega\tau)^2}}\right)$. Le champ bosonique ϕ_R s'écrit alors

$$\phi_R(0^+, t) = \phi_{R,r=0}(0^+, t) + \delta\Phi(t) \quad (3.19)$$

où $\phi_{R,r=0}$ correspond à la phase de l'électron sortant en l'absence de rétrodiffusion (voir équation (3.6)). Ce résultat est un élément central de ce problème. On remarque que la rétrodiffusion engendre un terme de même pulsation Ω que la source AC et correspondant à $n = \pm 1$ avec une amplitude $2re^\gamma B_1 \ll 1$. Cependant, la rétrodiffusion génère aussi l'équivalent de sources de pulsations $n\Omega$ avec d'amplitudes $2re^\gamma B_n$. Notons que le terme $n = 0$ ne joue aucun rôle dans la cohérence puisqu'il est indépendant du temps, comme pour le facteur de phase $2\pi N_g$. La génération des harmoniques $n\Omega$ ($n > 1$) est cachée par les termes $n = \pm 1$ d'amplitudes plus grandes. Mais le facteur $2\pi N_g$ présent dans le sinus permet de moduler ces amplitudes : pour $N_g = 0$, la rétrodiffusion peut générer des signaux d'harmoniques impairs et pour $N_g = 1/4$ des harmoniques paires. En effet,

$$\begin{aligned}
\delta\Phi(t) &\stackrel{N_g=0}{=} 2re^\gamma \sum_{n=1}^{+\infty} B_n [1 - (-1)^n] \sin[n(\Omega t - \varphi) - \varphi_n] \\
&\stackrel{N_g=\frac{1}{4}}{=} -2re^\gamma \sum_{n=2}^{+\infty} B_n [1 + (-1)^n] \cos[n(\Omega t - \varphi) - \varphi_n]
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Cette génération d'harmoniques supérieures est bien connue en optique non-linéaire et va nous permettre de faire des états quantiques comprimés. Mais avant cela, nous allons regarder l'effet de la source AC, en présence ou non de rétrodiffusion, sur la cohérence de phase grâce à l'interféromètre de Mach-Zehnder.

3.2 Utilisation du Mach-Zehnder

On reprend les raisonnements faits dans la partie 1.4.3 avec l'interféromètre de Mach-Zehnder, et on interprète les résultats à partir de l'approche de Floquet 3.1.2. Le système est représenté sur la figure 1.16.

Contrairement à la partie 1.4.3, la présence de la source AC brise l'invariance temporelle : la formule (1.13) du courant I_d n'est plus valable et on doit alors l'écrire

$$I_d(t) = ev_F^2 \int_{-\infty}^t dt' \{[\mathcal{T}^\dagger(t'), \mathcal{T}(t)] - [\mathcal{T}(t'), \mathcal{T}^\dagger(t')]\} \tag{3.21}$$

Dans le cas du voltage AC, il est intéressant de regarder la valeur moyenne de ce courant à fréquence nulle définie par

$$\bar{I}_d = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt I_d(t) \tag{3.22}$$

avec $T_0 = 2\pi/\Omega$. L'intégrale permet alors de rétablir une invariance temporelle et on peut alors montrer que les termes \bar{I}_{RR} et \bar{I}_{LL} ont la même expression que dans le cas sans voltage AC (voir dans le texte en-dessous de l'équation (1.16)) : $I_{RR} + I_{LL} = (t_R^2 + t_L^2) \frac{e^2 V_{dc}}{h}$. Seulement I_{RL} et I_{LR} vont dépendre du voltage V_{ac} . De la même manière que dans la partie 1.2.2, l'effet de la cohérence peut être mesuré en étudiant la conductance à fréquence nulle, définie par

$$\bar{G} = \left. \frac{d\bar{I}_d}{dV_{dc}} \right|_{V_{dc}=0} \tag{3.23}$$

On peut encore une fois écrire G comme $G_{RR} + G_{LL} + 2\mathcal{R}(G_{LR})$. La visibilité des oscillations de l'interféromètre peut alors se calculer à partir de cette conductance \bar{G} et est directement liée au terme d'interférence $2\mathcal{R}(G_{LR})$.

3.2.1 Couplage parfait $r = 0$

La partie sur l'interféromètre de Mach-Zehnder a montré que la grandeur pertinente est le corrélateur $\langle \psi_{R,u}^\dagger(t) \psi_{L,u}(0) \rangle$ associé à la cohérence de l'îlot, où l'indice u signifie qu'on s'intéresse à la branche supérieure de l'interféromètre, reliée à l'îlot. L'ajout de la source AC sur la branche supérieure u de l'interféromètre modifie le corrélateur (1.48) et se réécrit à partir de la relation (3.7)

$$\begin{aligned} \langle \psi_{R,u}^\dagger(t) \psi_{L,u}(t') \rangle_{ac} &= G(t-t') e^{-i\Phi_{ac}(t') + i \int_0^{+\infty} dz e^{-z} \Phi_{ac}(t-z\tau)} \\ &= G(t-t') \sum_{(n,p) \in \mathbb{Z}} (-1)^p i^{n+p} J_n\left(\frac{eq}{\hbar}\right) J_p\left(\frac{eq/\hbar}{\sqrt{1+\Omega^2\tau^2}}\right) e^{in\Omega t'} e^{ip(\Omega t - \varphi)} \end{aligned} \quad (3.24)$$

où $G(t-t') = \langle \psi_{R,u}^\dagger(t-t') \psi_{L,u}(0) \rangle_{dc}$ suit l'équation (1.48). On peut alors montrer que le courant moyen \bar{I}_{LR} s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\bar{I}_{LR}}{t_R t_L e^{i\Phi_{AB}}} &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt_0 e^{-i\Phi(t-t_0,t)} [\langle \psi_{R,u}(t_0) \psi_{L,u}^\dagger(0) \rangle_{dc} \langle \psi_d^\dagger(t_0) \psi_d(0) \rangle_{dc} \\ &\quad - \langle \psi_L^\dagger(0) \psi_R(t_0) \rangle_{dc} \langle \psi_d(0) \psi_d^\dagger(t_0) \rangle_{dc}] \end{aligned} \quad (3.25)$$

avec $\Phi(t,t') = -\Phi_{ac}(t') + \int_0^{+\infty} dz e^{-z} \Phi_{ac}(t-z\tau)$. Dans l'expression précédente, on a omis les positions $x_{L/R}$ des QPC de l'interféromètre car les deux bras ont des longueurs identiques. On peut alors faire un changement de variables $t_0 \rightarrow t_0 - (x_R - x_L)/v_F$ et faire disparaître ces abscisses. On peut maintenant utiliser la décomposition de Floquet de l'équation (3.24) et calculer la conductance G_{LR} :

$$\begin{aligned} \bar{G}_{LR} &= t_L t_R \frac{e^2}{\hbar} e^{i(\Phi_{AB} + 2\pi N_g)} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt_0 P(t_0) e^{-i\Phi(t-t_0,t)} \\ &= t_L t_R \frac{e^2}{\hbar} e^{i\Phi_{AB} + 2\pi N_g} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n\left(\frac{eq}{\hbar}\right) J_n\left(\frac{eq/\hbar}{\sqrt{1+\Omega^2\tau^2}}\right) e^{in\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_0 e^{-in\Omega t_0} P(t_0) \end{aligned} \quad (3.26)$$

où $P(t)$ est la fonction introduite à l'équation (1.49). On rappelle que $P(t)$ est la distribution stochastique des temps d'émission des électrons de l'îlot. L'intégration temporelle sur t a permis de restreindre une des deux sommes avec la formule $\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt e^{i(n+p)\Omega t} = \delta_{n,-p}$. On peut d'ailleurs trouver une forme plus explicite

en introduisant à nouveau les amplitudes de probabilité $p_n(q, \Omega\tau)$ d'absorber ou d'émettre un photon, définie à l'équation (3.11). La visibilité des oscillations du flux s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}_0} &= \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n^*(q, \Omega\tau) p_n(q, 0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt_0 e^{-in\Omega t_0} P(t_0) \right| \\ &= \left| p_0^*(q, \Omega\tau) p_0(q, 0) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} J_n\left(\frac{eq}{\hbar}\right) J_n\left(\frac{eq/\hbar}{\sqrt{1+(\Omega\tau)^2}}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} dt_0 \cos(n\Omega t_0 - n\varphi) P(t_0) \right| \end{aligned} \quad (3.27)$$

où $\mathcal{V}_0 = 2t_R t_L / (t_R^2 + t_L^2)$, c'est-à-dire la visibilité de l'interféromètre en l'absence de l'îlot (voir équation (3.3)). Notons que l'on retrouve le résultat (1.50) évalué pour $V_{dc} = 0$ puisque sans source AC ($q = 0$), $p_n = \delta_{n,0}$ et donc une visibilité \mathcal{V} qui vaut \mathcal{V}_0 . La seconde ligne de l'équation (3.27) suggère que la visibilité peut être vue comme une superposition d'ondes sinusoïdales de pulsation $n\Omega$ ($n \geq 1$). Chaque sinusoïde est affectée par l'îlot métallique à travers la fonction $P(t)$, discutée dans la partie 1.4.3. D'après la formule (3.27), la cohérence du système est associée à la cohérence entre l'électron sortant, associé à $p_n(q, \Omega\tau)$, et l'électron entrant, associé à $p_n(q, 0)$. On remarque qu'un électron ayant absorbé/émis n photons est toujours associé à un électron ayant absorbé/émis le même nombre de photons car la somme de l'équation (3.27) est indexée par un unique nombre n . Ce résultat suggère que l'îlot n'induit pas de décohérence pour les photons. Par contre, il y a décohérence pour les électrons.

Représentons maintenant l'allure de la visibilité en fonction du paramètre $\Omega\tau$ pour différentes valeurs de $q = V_{ac}/\Omega$, représentée sur la figure 3.3. On remarque alors plusieurs points :

- lorsque $\Omega\tau \ll 1$, $\mathcal{V} \simeq \mathcal{V}_0$. En effet, l'équation (3.27) suggère que la majorité des pulsations Ω sont inférieures à la pulsation de coupure $1/\tau$ et donc dans la bande passante de l'îlot. On a alors

$$\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}_0} \simeq \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n^*(q, 0) p_n(q, 0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt_0 P(t_0) \right| = 1 \quad (3.28)$$

où on a utilisé $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |p_n|^2 = 1$ qui correspond à la normalisation de la probabilité $|p_n|^2$: un électron a forcément absorbé/émis des photons ou gardé son énergie initiale. Dans ces conditions, l'îlot ne modifie pas la distribution d'électrons incidents.

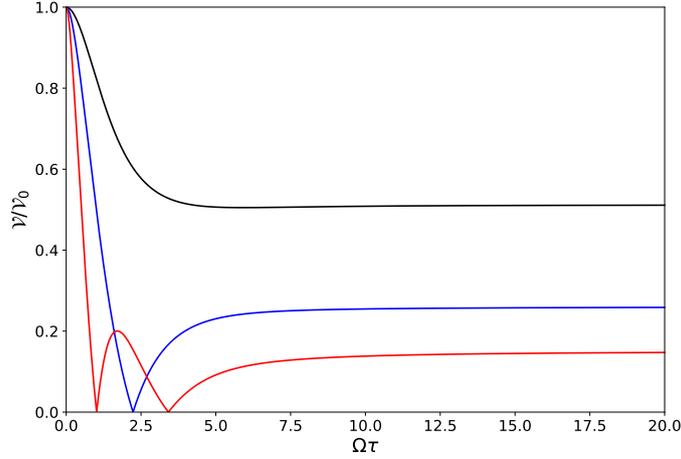


FIGURE 3.3 – Visibilité renormalisée des oscillations d’Aharonov-Bohm en fonction de $\Omega\tau$, pour $eq/\hbar = 1.5$ (courbe noire), $eq/\hbar = 3$ (courbe bleue) et $eq/\hbar = 6$ (courbe rouge).

- dans l’autre cas limite $\Omega\tau \gg 1$, toutes les pulsations, hormis la composante nulle $n = 0$, sont plus grandes que la pulsation de coupure et sont alors coupées par l’îlot. Le résultat (3.27) montre que $\mathcal{V}/\mathcal{V}_0 \simeq |p_0(q, 0)p_0^*(q, \Omega\tau)|$. La valeur de la visibilité est alors entièrement contrôlée par l’amplitude de probabilité $p_0(q, 0)$ puisque dans la limite $\Omega\tau \gg 1$, $|p_0^*(q, \Omega\tau)| \simeq 1$. Par conséquent, l’îlot réduit la distribution d’électrons incidents et donc réduit la cohérence.
- On remarque des annulations parfaites de la visibilité, qui n’apparaissent qu’à partir de certaines valeurs de q . Plus q augmente, plus le nombre de zéros augmente aussi. L’origine de ces annulations est double. La première est reliée à la relation de symétrie $J_n = (-1)^n J_n$ qui impose à la fonction à l’intérieur du module de l’équation (3.27) d’être réelle. Les contributions peuvent alors se compenser exactement ce qui n’est pas le cas pour des sources lévitoins où cette symétrie n’existe pas. La seconde explication se comprend bien en termes d’interférence. Le paramètre q est relié à l’amplitude de la tension V_{ac} et est un indicateur du nombre de photons virtuels. En effet, plus q est élevé, plus la probabilité $|p_n|^2$ de trouver un électron incident ayant absorbé ou émis $|n|$ photons, devient non nul pour des valeurs de n grandes. Par conséquent, plus il y a de photons, plus les interférences destructives sont marquées.

On vient de voir que l’îlot quantique ne modifie pas la répartition énergétique des électrons : le nombre de photons virtuels incidents est identique à celui sortant

de l'îlot. Le seul effet principal de l'îlot est de modifier la probabilité associée à l'absorption ou l'émission de $|n|$ photons. Ces propriétés se voient modifier en présence de la rétrodiffusion. La partie suivante est dédiée à ces effets.

3.2.2 Prise en compte de la rétrodiffusion

Le calcul réalisé dans la partie 3.1.3 a montré que l'ajout de la rétrodiffusion à l'entrée de l'îlot ajoute une phase $\delta\Phi(t)$ non linéaire au champ sortant ϕ_R . L'équation (3.18) a par ailleurs montré que la rétrodiffusion génère des harmoniques supérieures lorsque l'îlot est soumis à une tension de pulsation Ω . On montre alors que la visibilité peut toujours se mettre sous la forme compacte (3.27) mais cette fois-ci le nombre de photons virtuels en entrée et en sortie n'est plus conservé, provenant des interactions entre les différents photons virtuels. Les interférences entre tous les chemins possibles, amenant à l'absorption/l'émission de $|n|$ photons à partir de $|m|$ photons, peuvent être constructives ou destructives et augmentent ou diminuent la visibilité des interférences.

Avec la décomposition (3.18) et $e^{i\delta\Phi} \simeq 1 + i\delta\Phi$, la visibilité (3.27) devient

$$\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}_0} = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_{n,r}^*(q, \Omega\tau) p_n(q, 0) \int_{-\infty}^{+\infty} dt_0 e^{-in\Omega t_0} P(t_0) \right| \quad (3.29)$$

avec $p_{n,r}(q, \Omega\tau)$ l'amplitude de probabilité en présence de la rétrodiffusion

$$p_{n,r}(q, \Omega\tau) = p_n(q, \Omega\tau) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} A_{n,p} p_p(q, \Omega\tau) p_{n+p}^*(q\Omega\tau, \Omega\tau)$$

avec $A_{n,p} = \frac{re^\gamma}{\sqrt{1 + (n+p)^2(\Omega\tau)^2}} e^{-i\varphi_{n+p}} (-i)^n i^p [-e^{-i2\pi N_g} + (-1)^{n+p} e^{-i2\pi N_g}]$

$$(3.30)$$

avec γ la constante d'Euler. La relation précédente suggère que la rétrodiffusion crée des processus entre les différents niveaux d'énergie, c'est-à-dire des interactions entre les photons virtuels. En effet, contrairement au cas $r = 0$ où la visibilité fait apparaître une somme indexée par un indice unique n , il y a des contributions supplémentaires associées à la somme présente dans l'équation (3.30). Afin d'obtenir l'amplitude de probabilité d'émettre/absorber n photons, on doit prendre en compte tous les chemins possibles, partants des assemblées de photons p et $n+p$. Le terme $A_{n,p}$ de l'équation (3.30) peut être interprété comme l'amplitude d'interférence entre les chemins possibles. Ce terme d'interférence est modulé par le paramètre de grille

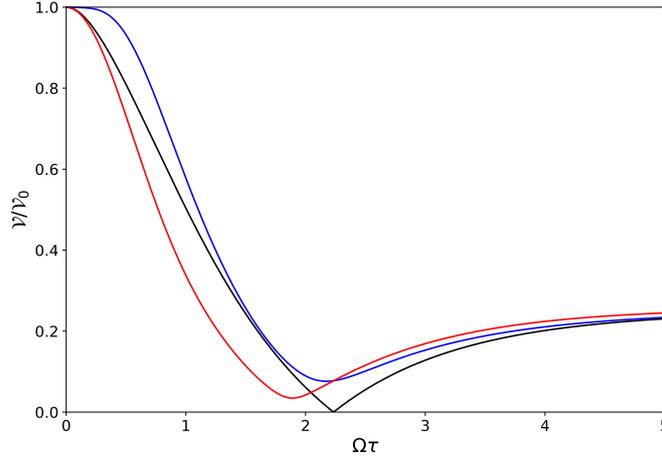


FIGURE 3.4 – Visibilité renormalisée des oscillations d’Aharonov-Bohm en fonction de $\Omega\tau$ en présence de la rétrodiffusion, tracée pour $eq/\hbar = 3$. La courbe noire correspond à $r = 0$ et les autres pour $r = 0.1$: $N_g = 1/4$ (courbe bleue) et $N_g = 0$ (courbe rouge). La rétrodiffusion engendre des processus entre tous les photons virtuels et une augmentation ou une diminution de la visibilité.

N_g : en changeant la valeur de N_g , on peut alors passer d’interférences constructives à des interférences destructives comme le suggère la visibilité tracée sur la figure 3.4.

La prise en compte de la rétrodiffusion fait apparaître des effets non linéaires et peut augmenter ou diminuer la visibilité des oscillations de la conductance. Ces non-linéarités sont entièrement déterminées par la phase ajoutée (3.20). Cette phase montre qu’à partir d’un signal initial de pulsation Ω , la rétrodiffusion génère un ensemble de signaux de pulsations $n\Omega$ dont la répartition est directement liée au paramètre de grille N_g . Cette propriété suggère que l’on peut utiliser cette non-linéarité afin de générer un signal électronique compressé quantique, semblable aux états comprimés de l’optique quantique.

3.3 Formation d’états comprimés quantiques

Dans tout ce manuscrit, la description des propriétés électriques est faite avec l’analyse de l’opérateur courant \hat{I} . A priori, cet opérateur ne commute pas avec lui-même quand ces derniers sont évalués à des temps ou des fréquences différent.e.s. Les fluctuations du courant d’un conducteur ont pour conséquence de produire un

champ électromagnétique quantique [99–102]. En pratique, il y a deux manières de mesurer ces corrélations : soit en analysant le champ électromagnétique émis par le conducteur, soit en mesurant directement le courant du conducteur et ses fluctuations.

Lorsqu’un conducteur cohérent est soumis à une excitation sinusoïdale, le champ électromagnétique émis par ce dernier peut être comprimé quantiquement [103–105] : les fluctuations d’une des quadratures de ce champ sont inférieures aux fluctuations du vide. Cette propriété a d’ailleurs été confirmée expérimentalement en 2016 [106]. Les résultats sont donnés sur la figure 3.5. En pratique afin d’obtenir des états comprimés, le champ électromagnétique peut être généré par modulation du bruit [107–109] avec des éléments non-linéaires, par exemple des jonctions Josephson [110,111] ou des oscillateurs paramétriques [112].

Dans cette partie, on propose un dispositif pouvant créer des états comprimés quantiquement, basé sur l’îlot quantique discuté dans les parties précédentes. Au lieu de regarder le comportement du courant de sortie de l’îlot quantique, on étudie les propriétés du champ électromagnétique quantique généré par le courant. En utilisant à nouveau l’analogie électrique discutée dans la partie 1.4.3, on caractérise les propriétés du champ électromagnétique, notamment ses deux quadratures, à partir des opérateurs bosoniques a_{out} en sortie de l’îlot. On montre alors que notre système est équivalent à un oscillateur paramétrique où la capacité quantique de l’îlot est dépendante du temps, pouvant créer un bruit dynamique. Ce bruit dynamique est responsable de l’effet de compression quantique, où les variances des quadratures du champ peuvent être plus petites que les fluctuations du vide.

3.3.1 Modèle étudié

Dans un premier temps, on décide de remonter l’équivalence entre les deux points de vue précédents : étudier le courant électronique ou le champ électromagnétique créé par le courant. Ensuite, on se propose de brièvement montrer l’analogie de notre système initial, constitué d’une source de tension AC en amont de l’îlot métallique, avec un circuit électronique où la source AC est maintenant contenue dans la tension de grille de l’îlot.

Les parties précédentes ont montré que la grandeur pertinente dans l’étude de l’îlot métallique et des interactions électroniques est le courant de sortie de l’état de bord R , noté $\hat{I}_R(x, t)$. La bosonisation du système a par ailleurs montré que

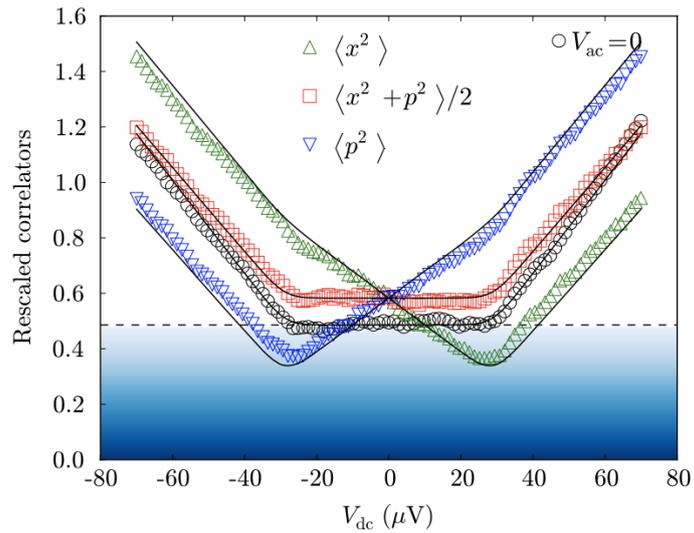


FIGURE 3.5 – Mesures expérimentales, issues de [106], des variances deux quadratures du champ électromagnétique, notées $\langle \hat{x}^2 \rangle$ et $\langle \hat{p}^2 \rangle$, et de la quadrature totale $\langle (\hat{x}^2 + \hat{p}^2) \rangle / 2$ en fonction du voltage DC appliqué au conducteur cohérent.. Ces variances sont renormalisées par rapport au bruit du vide afin de vérifier la relation simple de commutation $\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle = i$. Ces quadratures sont mesurées à la fréquence f_1 à partir d'une excitation sinusoïdale de fréquence $f_0 = 2f_1$. On superpose à ces courbes les mesures de $\langle (\hat{x}^2 + \hat{p}^2) \rangle / 2$ en l'absence de la source AC afin de mieux visualiser la compression quantique. La zone bleue représente le domaine où il y a compression quantique, où les variances sont inférieures aux fluctuations du vide, représentées par les traits en pointillés. On remarque que les deux quadratures ne peuvent pas être compressés en même temps, ce qui contredirait les inégalités d'Heisenberg $\langle \hat{x}^2 \rangle \langle \hat{p}^2 \rangle \geq 1/4$.

les courants peuvent être décrits par des opérateurs bosoniques $\phi_{L/R} : \hat{I}_{L/R}(x, t) = \pm \frac{e}{2\pi} \partial_t \phi_{R/L}(x, t)$.

Dans la partie 1.4.3, on a montré que l'îlot quantique couplé aux états de bord est équivalent au circuit électronique où deux lignes de transmissions de résistance $R_q/2$ sont couplées par un condensateur de capacité C_g (voir figure 1.15). La décomposition en ondes planes des champs bosoniques permet notamment d'écrire, dans la partie $x > 0$,

$$\phi_{L/R}(x > 0, t) = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} \left\{ a_{in/out}(\omega) e^{-i\omega(t \pm x/v_F)} + c.h. \right\} \quad (3.31)$$

La capacité en $x = 0$ relie notamment les champs sortants a_{out} et b_{out} aux champs incidents à travers la matrice de diffusion (1.44). La relation entre le courant \hat{I}_R et le champ ϕ_R de l'équation (3.31) permet d'en déduire la relation d'équivalence suivante :

$$a_{out}(\omega) = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\omega/R_q}} \hat{I}_R(\omega) \quad (3.32)$$

On a aussi des relations équivalentes pour les autres champs bosoniques a_{in} et $b_{in/out}$. Les effets de compression quantique du champ électromagnétique sont reliés notamment au corrélateur $\langle a_{out}(\omega) a_{out}(\omega) \rangle$. L'équation (3.32) montre que l'on peut regarder de façon équivalente le courant \hat{I}_R et obtenir des informations sur la compression quantique à partir de $\langle I_{R,out}(\omega) I_{R,out}(\omega) \rangle$. Les deux points de vue sont possibles. On choisit de regarder les champs bosoniques qui permettent une interprétation simple de la compression quantique.

Regardons maintenant le système sur lequel on se base pour faire ce calcul. On part initialement du système représenté sur la figure 1.15, en l'absence de rétrodiffusion du QPC et de la source de tension AC. La discussion de la partie 3.1.1 a montré qu'il était équivalent de positionner la source de tension AC en amont de l'îlot ou de la mettre au niveau de la tension de grille à condition de respecter la relation (3.5). On se place dans la situation où la tension de grille dépend maintenant du temps. On écrit par la suite que la tension adimensionnée $N(t) = N_0 + N_1(t)$, où N_0 est la charge imposée par la grille en l'absence de tension AC.

De plus, la prise en compte perturbativement de la rétrodiffusion laisse inchangé la résistance de relaxation de charge $R_q = h/e^2$ mais modifie la capacité C_0 du système [45, 48]

$$C_0 = C_g \left[1 - 2re^\gamma \cos(2\pi N_0) \right] \quad (3.33)$$

3.3.2 Bruit dynamique

Dans cette partie, on cherche à calculer le bruit dynamique, nécessaire à la compression quantique, et notamment le corrélateur $\langle \delta \hat{I}_R(\omega) \delta \hat{I}_R(\omega) \rangle$ ou son équivalent $\langle a_{out}(\omega) a_{out}(\omega) \rangle$. Afin de comprendre l'origine de la compression quantique de notre circuit, on modélise la présence d'une source de tension en amont du système par une tension de grille de l'îlot dépendante du temps. Dans ce modèle, la capacité (3.33) devient une capacité dépendante du temps $C(t)$ et le système se comporte alors comme un oscillateur paramétrique. On peut alors calculer les nouveaux champs bosoniques a_{out} en présence de la capacité $C(t)$ et démontrer que le corrélateur $\langle a_{out}(\omega) a_{out}(\omega) \rangle$, responsable de la compression quantique, est bien non-nul en présence de $C(t)$. On compare ensuite le résultat obtenu au corrélateur $\langle \delta I_R(\omega) \delta I_R(\omega) \rangle$ à partir du système initial, validant le modèle électrique étudié et donc l'origine de la compression quantique.

Dans toute cette partie, on choisit de prendre une tension sinusoïdale de la forme $V_{ac}(t) = V_{ac} \sin(\Omega t)$. La partie précédente a montré que déterminer le courant de sortie \hat{I}_R est équivalent à étudier le champ bosonique sortant \hat{a}_{out} (voir équation (3.32)) relié aux champs a_{in} et b_{in} à travers le circuit de la figure 1.15. Dans le système initial, la source de tension AC est située en amont de l'îlot métallique. La partie 3.1.1 a montré qu'il était équivalent d'appliquer une tension $V_{ac}(t)$ en amont ou une tension de grille dépendante $V_g(t)$ du temps à condition de vérifier la relation $V_{ac}(t) = \tau \partial_t V_g$. En plus, les équations de l'appendice B montrent que l'état de bord R en sortie de l'îlot ($x > 0$) ne perçoit pas exactement la tension $V_{ac}(t)$ mais une tension modifiée par la présence de l'îlot, qui agit comme un filtre passe-bas (voir équation (B.10)). Il est donc de même pour la tension de grille que l'on choisit d'écrire par analogie

$$N(t) = N_0 - \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^t dt' e^{-(t-t')/\tau} N_g(t') \quad (3.34)$$

avec $N_0 = C_g V_{g,dc} / e$ et $N_g(t) = C_g V_g(t) / e$. Une fois cette équation posée, on peut essayer de comprendre l'effet de $N(t)$ sur l'équation (3.33). Une première étape est de considérer que l'équation (3.33) est toujours valable même lorsque le nombre de charges N_0 est remplacé par $N(t)$. Cette transformation est justifiée dans la limite adiabatique où les variations temporelles de $N_g(t)$ sont suffisamment lentes pour que le système quantique s'adapte à chacune de ses variations. Le temps caractéristique associé à l'îlot quantique est τ ; la condition d'adiabaticité correspond à vérifier $|\frac{\partial N_g}{\partial t}| \ll 1/\tau$. Avec la relation d'équivalence (3.5), cette condition revient à vérifier $\frac{eV_{ac}\tau}{\hbar} \ll 1$. Dans la limite d'adiabaticité, la capacité $C(t)$ peut donc s'écrire

$$C(t) = C_0 + C_1 \cos(2\pi N(t)) \quad \text{avec} \quad C_0 = C_g \quad \text{et} \quad C_1 = -2re^\gamma C_g \quad (3.35)$$

avec $N(t)$ vérifiant l'équation (3.34).

À partir de ce modèle, représenté sur la figure 1.15, on cherche à exprimer le champ bosonique a_{out} à partir des champs incidents a_{in} et b_{in} . Les relations entre les champs $\phi_{R/L}$ et les opérateurs de charge et de tension (\hat{Q}, \hat{V}) de l'équation (1.43) sont toujours valables. L'électronneutralité du condensateur et sa relation constitutive s'écrivent

$$\hat{Q}_A(t) = -\hat{Q}_B(t) \quad \text{et} \quad \hat{Q}_A(t) = C(t) [\hat{V}_A(t) - \hat{V}_B(t)] \quad (3.36)$$

La première relation impose la relation simple $a_{in}(\omega) - a_{out}(\omega) = b_{out}(\omega) - b_{in}(\omega)$. La seconde relation peut s'écrire, avec la décomposition (1.42),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{|\omega|}} [a_{in}(\omega) - a_{out}(\omega)] e^{-i\omega t} = -iR_q C(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{|\omega|} d\omega [a_{out}(\omega) - b_{in}(\omega)] e^{-i\omega t} \quad (3.37)$$

Afin d'alléger les équations, on intègre sur l'ensemble des fréquences, positives et négatives. Dans ce cas, pour $\omega < 0$, $a(\omega) = a^\dagger(-\omega)$. La transformée de Fourier de la relation (3.37) impose

$$a_{in}(\omega) - a_{out}(\omega) = -iR_q \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' g(\omega', \omega) [a_{out}(\omega') - b_{in}(\omega')] \quad (3.38)$$

avec

$$g(\omega', \omega) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{|\omega\omega'|} \int_{-\infty}^{+\infty} dt C(t) e^{i(\omega-\omega')t} \quad (3.39)$$

Dans le cas $C(t) = C_0$, l'équation (3.38) retrouve les relations de passage entre les différents champs bosoniques (1.44). À partir de la tension $V_{ac}(t) = V_{ac} \sin(\Omega t)$, la relation d'équivalence (3.5) impose $N_g(t) = -N_{g,ac} \cos(\Omega t)$. L'équation (3.34) devient $N(t) = N_0 + \frac{N_{g,ac}}{\sqrt{1+\Omega^2\tau^2}} \cos(\Omega t - \varphi)$ avec $\varphi = \arctan \Omega\tau$. On peut alors décomposer $\cos(2\pi N(t))$ en utilisant la décomposition en fonction de Bessel

$$\cos(2\pi N(t)) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J_n \left(\frac{N_{g,ac}}{\sqrt{1+\Omega^2\tau^2}} \right) e^{in(\Omega t - \varphi)} \left[(-1)^n e^{i2\pi N_0} + e^{-i2\pi N_0} \right] \quad (3.40)$$

L'expression de $g(\omega', \omega)$ peut alors être calculée :

$$g(\omega', \omega) = C_0 |\omega| \delta(\omega - \omega') + \frac{C_1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n J_n \left(\frac{N_{g,ac}}{\sqrt{1 + \Omega^2 \tau^2}} \right) e^{-in\varphi} \left[(-1)^n e^{i2\pi N_0} + e^{-i2\pi N_0} \right] \sqrt{|\omega \omega'|} \delta(n\Omega + \omega - \omega') \quad (3.41)$$

Cette fonction détermine exactement les calculs de la compression quantique, et notamment la distribution de Dirac $\delta(n\Omega + \omega - \omega')$. Les contributions les plus importantes proviennent des termes $n = 0$ et $n = \pm 1$. On trouve alors la relation exacte entre les champs bosoniques, à l'ordre 1 en r et en présence de $C(t)$,

$$a_{in}(\omega) - a_{out}(\omega) = -iR_q \left[C_0 + C_1 J_0 \left(\frac{N_{g,ac}}{\sqrt{1 + \Omega^2 \tau^2}} \right) \cos(2\pi N_0) \right] |\omega| [a_{out}(\omega) - b_{in}(\omega)] + iR_q C_1 J_1 \left(\frac{N_{g,ac}}{\sqrt{1 + \Omega^2 \tau^2}} \right) \sin(2\pi N_0) \left[e^{-i\varphi} \sqrt{|\omega(\omega + \Omega)|} [a_{out}(\omega + \Omega) - b_{in}(\omega + \Omega)] + e^{i\varphi} \sqrt{|\omega(\omega - \Omega)|} [a_{out}(\omega - \Omega) - b_{in}(\omega - \Omega)] \right] \quad (3.42)$$

Sans perte de généralité, on peut prendre $\omega > 0$. Afin de rendre les formules plus compactes, on peut introduire $C = C_0 + C_1 J_0 \left(\frac{N_{g,ac}}{\sqrt{1 + \Omega^2 \tau^2}} \right) \cos(2\pi N_0)$ avec $N_{g,ac} = V_{ac} e / h\Omega$ et $\tilde{C}_1 = C_1 J_1 \left(\frac{N_{g,ac}}{\sqrt{1 + \Omega^2 \tau^2}} \right) \sin(2\pi N_0) e^{-i\varphi}$. L'équation (3.42) peut alors se réécrire plus simplement

$$a_{in}(\omega) - a_{out}(\omega) = -iR_q C |\omega| [a_{out}(\omega) - b_{in}(\omega)] - iR_q \left\{ \tilde{C}_1 \sqrt{\omega(\omega + \Omega)} [a_{out}(\omega + \Omega) - b_{in}(\omega + \Omega)] + \tilde{C}_1^* \theta(\omega - \Omega) \sqrt{\omega(\omega - \Omega)} [a_{out}(\omega - \Omega) - b_{in}(\omega - \Omega)] + \tilde{C}_1^* \theta(-\omega + \Omega) \sqrt{\omega(-\omega + \Omega)} [a_{out}^\dagger(-\omega + \Omega) - b_{in}^\dagger(-\omega + \Omega)] \right\} \quad (3.43)$$

Le dernier terme est le terme responsable du bruit dynamique. Il décrit des corrélations entre des photons de pulsations différentes et produit des termes $\langle a_{out}^2(\omega) \rangle$ non nuls. On peut oublier les deuxième et troisième termes de l'équation (3.43) puisqu'ils donneront naissance à des corrélateurs $\langle a_{in} a_{in} \rangle$ par exemple de valeurs nulles.

Comme $|C_1| \ll C_0$ (puisque $r \ll 1$), on peut adopter une approche perturbative en écrivant $a_{out} = a_{out}^{(0)} + a_{out}^{(1)}$, où

$$a_{out}^{(0)}(\omega) = \frac{1}{1 - iR_q C \omega} a_{in}(\omega) - \frac{iR_q C \omega}{1 - iR_q C \omega} b_{in}(\omega) \quad (3.44)$$

et $a_{out}^{(1)}$ correspond au terme d'ordre 1 en C_1 . Avec l'expression de $a_{out}^{(0)}$ et l'équation (3.43), on peut obtenir le terme responsable du bruit dynamique :

$$a_{out}^{(1)}(\omega) = -\frac{iR_q\tilde{C}_1^*}{1-iR_qC\omega} \sqrt{\omega(\Omega-\omega)} r_0^*(\Omega-\omega) [a_{in}^\dagger(\Omega-\omega) - b_{in}^\dagger(\Omega-\omega)] \quad (3.45)$$

avec $r_0(\omega) = 1/(1-iR_qC\omega)$ le coefficient de réflexion qui apparaît dans les relations de passage (1.44). Le champ total est alors donné par $a_{out}(\omega) = r_0(\omega)a_{in}(\omega) + t_0(\omega)b_{in}(\omega) + a_{out}^{(1)}(\omega)$ avec $t_0 = 1-r_0$. On peut alors vérifier que les deux contributions suivantes s'écrivent à température nulle et pour $\omega, \omega' > 0$

$$\begin{aligned} \langle a_{out}(\omega)a_{out}^\dagger(\omega') \rangle &= \langle a_{out}^{(0)}(\omega)a_{out}^{(0)\dagger}(\omega') \rangle = \theta(\omega)\delta(\omega-\omega') \\ \langle a_{out}(\omega)a_{out}(\omega) \rangle &= \langle a_{out}^{(0)}(\omega)a_{out}^{(1)}(\omega) \rangle = -i\frac{R_q\tilde{C}_1^*}{(1-i\tau\omega)^2} \omega \theta(\omega) \delta(2\omega-\Omega) \end{aligned} \quad (3.46)$$

On remarque plusieurs choses :

- sans la source de tension ($N_{g,ac} = 0$), le coefficient \tilde{C}_1^* est nul et $C = C_0[1 - 2re^\gamma \cos(2\pi N_0)]$. L'effet de compression quantique est optimisé lorsque la pulsation Ω de la source est directement relié aux deux photons générés de pulsation ω et ω' vérifiant $\Omega = \omega + \omega'$.
- La valeur de N_0 permet de moduler cette compression quantique à travers $\sin(2\pi N_0)$ dans l'expression de \tilde{C}_1^* . La compression est optimale dans le cas $N_0 = 1/4$.
- La compression quantique ne peut se faire que si la pulsation Ω de la source AC vérifie la relation $\Omega = 2\omega$. L'excitation sinusoïdale engendre alors deux photons corrélés de même pulsation ω .
- L'expression de $\langle a_{out}(\omega)a_{out}(\omega') \rangle$ n'est valable que si l'approximation adiabatique discutée précédemment est vérifiée c'est-à-dire si $eV_{ac}\tau/h \ll 1$, c'est-à-dire $N_{g,ac} \ll 1$. Dans cette limite ;

$$\tilde{C}_1^* \simeq \frac{C_1}{\sqrt{1+\Omega^2\tau^2}} e^{i\varphi} \sin(2\pi N_0) N_{g,ac} \quad (3.47)$$

Le calcul (3.46) et donc la représentation électrique du système n'est valable que dans l'approximation adiabatique. Le calcul plus complet doit être fait sur l'opérateur courant $\hat{I}_R(t)$, calculé perturbativement par rapport à l'amplitude de rétrodiffusion r du QPC de l'îlot. À partir de la tension $V_{ac}(t) = V_{ac} \sin(\Omega t)$ en amont de l'îlot, on trouve à température nulle et pour $\omega > 0$

$$\begin{aligned}
\langle \delta \hat{I}_R(\omega) \delta \hat{I}_R(-\omega) \rangle &= 2\pi S_{vac}(\omega) \delta(\omega + \omega') \\
\langle \delta \hat{I}_R(\omega) \delta \hat{I}_R(\omega) \rangle &= -2ir e^2 e^\gamma \frac{\omega}{(1 - i\tau\omega)^2} e^{i\varphi} J_1\left(\frac{e\tau V_{ac}/\hbar}{\sqrt{1 + \Omega^2\tau^2}}\right) \sin(2\pi N_0) \delta(2\omega - \Omega)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

avec $S_{vac}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{R_q}\theta(\omega)$ le bruit du vide. La formule (3.48) est plus générale et ne suppose pas l'hypothèse d'adiabaticité discutée précédemment. Avec la formule d'équivalence (3.5) et la relation (3.32) entre le champ a et le courant \hat{I}_R , l'équation (3.48) permet de retrouver (3.46) dans la limite d'adiabaticité $eV_{ac}\tau/\hbar \ll 1$, justifiant le modèle électrique équivalent. Finalement, la compression quantique est d'origine capacitive et notre système joue le rôle d'un oscillateur paramétrique.

Dans cette partie, nous nous sommes focalisés sur le calcul de $\langle a_{out}(\omega) a_{out}(\omega) \rangle$ ou de façon équivalente $\langle \delta \hat{I}_R(\omega) \delta \hat{I}_R(\omega) \rangle$. Cependant, ces corrélateurs ne sont pas directement mesurables puisqu'ils ne sont pas hermitiens mais servent de base pour illustrer la compression quantique. On propose alors dans la partie suivante de discuter des observables qui sont réellement mesurées expérimentalement.

3.3.3 Observables de la compression quantique

On se place à nouveau à température nulle dans toute cette partie.

Les parties précédentes ont notamment mis en évidence que l'étude de la compression quantique peut se faire à travers le champ électromagnétique émis, via les opérateurs bosoniques a_{out} , ou bien à partir de l'opérateur courant \hat{I}_R .

En théorie quantique des champs, le champ électromagnétique est représenté par deux opérateurs transverses \hat{X} et \hat{Y} , appelés quadratures du champ électromagnétique. Comme pour l'oscillateur harmonique quantique, ces deux quadratures peuvent être reliées à des opérateurs de création et d'annihilation [113], notés respectivement \hat{a}^\dagger et \hat{a} , tels que

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{a}^\dagger(\omega) + \hat{a}(\omega)] \quad \text{et} \quad \hat{Y}(\omega) = \frac{i}{\sqrt{2}}[\hat{a}^\dagger(\omega) - \hat{a}(\omega)] \tag{3.49}$$

On vérifie par ailleurs que ces opérateurs sont bien hermitiens et correspondent à des observables physiques. Leur variance vérifie la relation d'Heisenberg $\Delta\hat{X} \Delta\hat{Y} \geq 1/4$. La minimisation de ces variances (ou fluctuations) impose $\Delta\hat{X} = \Delta\hat{Y} = 1/2$. Cette condition minimale est notamment vérifiée à température nulle par le champ électromagnétique quantique. Par contre, la relation d'Heisenberg permet de diminuer

une de ces variances en-dessous de 1/2 au détriment de l'autre qui va augmenter afin de vérifier l'inégalité d'Heisenberg.

Le calcul théorique des fluctuations $\Delta\hat{O}^2 = \langle(\hat{O} - \langle\hat{O}\rangle)^2\rangle$ ($\hat{O} = \hat{A}, \hat{B}$) donne

$$\begin{aligned}\Delta\hat{X}^2 &= \frac{1}{2} \langle\{a(\omega), a^\dagger(\omega)\}\rangle + \frac{1}{2} [\langle a^2(\omega)\rangle + \langle a^{\dagger 2}(\omega)\rangle] \\ \Delta\hat{Y}^2 &= \frac{1}{2} \langle\{a(\omega), a^\dagger(\omega)\}\rangle - \frac{1}{2} [\langle a^2(\omega)\rangle + \langle a^{\dagger 2}(\omega)\rangle]\end{aligned}\quad (3.50)$$

avec $\{, \}$ l'anti-commutateur. Les termes $\langle a^{\dagger 2}(\omega)\rangle$ et $\langle a^2(\omega)\rangle$ sont non nuls sous réserve d'avoir $2\omega = \Omega$ où Ω est la pulsation de la source AC utilisée. Par conséquent les deux derniers termes sont reliés à la compression quantique, appelés bruit dynamique $\chi = \frac{1}{2}[\langle a^2\rangle + \langle a^{\dagger 2}\rangle]$, et l'anti-commutateur au bruit classique S_0 . La relation d'équivalence (3.32) permet donc de définir des quadratures sur les opérateurs courants $\delta\hat{I}_R(\omega)$ à condition de normaliser les différents termes par $2\pi S_{vac} = 2\pi \frac{\hbar\omega}{R_q}$. On a alors

$$\begin{aligned}S_0(\omega) &= \frac{1}{2} \frac{\langle\{\delta\hat{I}_R(\omega), \delta\hat{I}_R(-\omega)\}\rangle}{2\pi S_{vac}} \\ \chi(\omega) &= \frac{1}{2} \frac{\langle\delta\hat{I}_R^2(\omega)\rangle + \langle\delta\hat{I}_R^2(-\omega)\rangle}{2\pi S_{vac}}\end{aligned}\quad (3.51)$$

A priori les formules (3.50) et (3.51) font intervenir des distributions de Dirac $\delta(\dots)$ et ces expressions divergent. En pratique, les courants \hat{I}_R ou les champs a sont filtrés en général à travers un filtre passe-bande avant la détection [99, 106, 107, 109]. Ce filtre sélectionne les pulsations dans une bande passante $\Delta\omega$ autour d'une pulsation ω_0 telle que $\omega_0 \gg \Delta\omega$ permettant d'avoir une définition propre des fonctions S_0 et χ , sans se soucier des distributions $\delta(\dots)$. Avec les définitions de S_0 et χ , les quadratures deviennent $\Delta\hat{X}^2 = S_0(\omega) + \chi(\omega)$ et $\Delta\hat{Y}^2 = S_0(\omega) - \chi(\omega)$.

D'après les formules (3.48), à température nulle, $S_0(\omega) = 1/2$. L'effet du voltage AC n'a aucun effet sur le bruit standard, contrairement au cas d'un conducteur soumis à cette source de tension [107–109]. La compression de l'une des deux quadratures apparaît alors lorsque $\chi(\omega) \neq 0$ avec

$$\chi(\omega) = -2re^\gamma J_1\left(\frac{e\tau V_{ac}/\hbar}{\sqrt{1+(2\omega)^2\tau^2}}\right) \sin(2\pi N_0) \mathcal{R}\left[\frac{i}{(1-i\tau\omega)^2} e^{i\varphi}\right] \delta(2\omega - \Omega) \quad (3.52)$$

avec $\varphi = \arctan(2\omega\tau)$ et \mathcal{R} la partie réelle d'un nombre complexe. On retrouve une des propriétés discutée dans la partie 3.1.3 où la tension de grille adimensionnée N_0 permet de moduler l'amplitude de la compression quantique (voir formule (3.20)).

On peut alors donner quelques conditions pour contrôler la compression d'une des deux quadratures. Le choix de $N_0 = 1/4$ permet de maximiser $\sin(2\pi N_0)$. L'amplitude du signal sinusoïdal contrôle notamment quelle quadrature du champ est comprimée. En effet la fonction de Bessel J_1 , caractéristique de la source AC, change de signe en fonction de son argument, donc de même pour la fonction $\chi(\omega)$. Le terme $\mathcal{R}\left[\frac{i}{(1-i\tau\omega)^2}e^{i\varphi}\right]$ peut être interprété comme l'enveloppe de la compression caractéristique, dépendant simplement des caractéristiques de l'îlot quantique.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'effet d'une source de tension AC sur un îlot quantique. En pratique, il y a deux possibilités pour positionner cette source en regard de l'îlot. On peut soit la mettre en amont de l'îlot ou à travers sa tension de grille. Ces deux modèles sont équivalents à condition de préserver une relation d'équivalence entre les amplitudes des deux sources.

Ensuite, on s'est intéressé à la description d'un électron soumis à une source de tension sinusoïdale. L'approche de Floquet permet de décrire cet électron comme une superposition d'états électroniques où l'électron a absorbé ou émis n photons. Cette approche permet alors de décrire l'effet de l'îlot à travers ces photons virtuels.

Avec cette approche, on étudie le devenir de ces n photons grâce à l'interféromètre électronique de Mach-Zehnder en présence de la rétrodiffusion à l'entrée de l'îlot quantique. En l'absence de rétrodiffusion, l'Hamiltonien est quadratique par rapport aux opérateurs bosoniques : le nombre de photons est alors conservé. Chaque photon sortant de l'îlot est relié à un seul et unique photon incident de même énergie. Cependant, l'îlot modifie la probabilité d'existence de chaque photon et fait diminuer la visibilité des oscillations en sortie de l'interféromètre. La rétrodiffusion engendre des non-linéarités dans le système et induit des interactions entre les photons incidents : la distribution des photons est alors totalement modifiée et le nombre de ces photons n'est plus conservé. Chaque processus d'interaction est associé à un chemin quantique et il en résulte des interférences entre tous les chemins possibles amenant à un photon de sortie à une énergie donnée. La visibilité des oscillations peut alors augmenter ou diminuer si les interférences sont constructives et destructives. Notons que la tension de grille adimensionnée module ces interférences et sa variation peut modifier la nature constructive ou destructive de ces dernières.

Comme la rétrodiffusion à l'entrée de l'îlot engendre des non-linéarités vis à vis des opérateurs bosoniques, on s'intéresse dans la troisième partie à la compression

quantique des états. En effet, la présence de la rétrodiffusion et de la source de tension AC permet des corrélations entre les opérateurs courants à différentes fréquences. Les effets de la compression quantique des états du courant peuvent se comprendre en étudiant notamment les quadratures du champ électromagnétique générées par le système quantique. Cette représentation permet notamment de mettre en évidence que l'origine de la compression quantique de ce système résulte du caractère capacitif de l'îlot quantique. En effet, lorsque l'îlot est soumis à une tension AC, le système se comporte comme un oscillateur paramétrique où la capacité quantique de l'îlot est maintenant dépendante du temps, créant ainsi une compression quantique d'une des quadratures du champ électromagnétique.

Notons que ces résultats peuvent aussi s'étendre à d'autres sources de tension périodique comme les lévillons qui minimisent notamment le bruit de partition.

4 Double périodicité d'une jonction Josephson résistive

Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, on étudie l'effet de la dissipation sur un circuit composé d'une jonction Josephson présentant deux périodicités 2π et 4π , alimentée par une source de courant continu. À température nulle, le groupe de renormalisation prédit à nouveau des transitions de phase supraconducteur/isolant pour les deux jonctions. Pour la jonction de périodicité 4π , appelée jonction topologique, la transition se fait lorsque la résistance R_s dépasse le quantum de résistance $R_q = h/e^2$, contrairement à la jonction standard où la transition se fait à une valeur quatre fois plus petite. Lorsque $R_q/4 < R_s < R_q$, les deux jonctions ont des comportements opposés : la jonction standard est isolante et la jonction topologique est supraconductrice. En pratique, la présence de fermions de Majorana induit le passage cohérent d'électrons entre les deux supraconducteurs et ce transfert est associé à une périodicité de 4π . Par contre, il est très difficile d'isoler cette périodicité de 4π car celle de 2π est souvent présente. Il est donc nécessaire de comprendre les effets d'une périodicité de 4π en présence d'une périodicité de 2π sur le comportement du circuit entier.

Le comportement du circuit est notamment visible à travers la résistance effective de ce dernier.

Dans un premier temps, on regarde le cas où l'énergie de charge de la jonction est la plus grande énergie de ce système. On montre que pour une valeur particulière de la résistance dissipative, l'expression de la résistance effective en fonction de la température peut se déterminer exactement, grâce à la technique de reffermionisation. On trouve que le système se résume à l'étude de la diffusion électron-trou d'un électron incident arrivant vers un supraconducteur ayant des fermions de Majorana à ses extrémités. Le calcul de la résistance est entièrement contrôlé par la matrice de diffusion électron-trou et notamment par les processus d'Andreev au niveau du supraconducteur. Le calcul montre qu'à température nulle, la résistance est nulle

c'est-à-dire que c'est la jonction topologique qui domine. Dans le modèle reffermionisé, c'est le couplage entre l'état de bord électronique et le fermion de Majorana du supraconducteur qui induit un processus d'Andreev même à température nulle. Ensuite, on obtient que la résistance a un comportement non-monotone en fonction de la température qui suggère une réelle compétition entre les deux jonctions. On interprète cette propriété dans le modèle fermionique comme une compétition entre une réflexion d'Andreev, associée au passage d'électrons ou de paires de Cooper, et une réflexion normale, c'est-à-dire qu'un électron incident est simplement réfléchi par le supraconducteur.

Enfin on étudie l'autre cas limite où l'énergie Josephson domine les autres énergies. La description du système se fait grâce à la théorie des bandes. La présence de la jonction topologique diminue par deux la largeur de la zone de Brillouin puisque la jonction est associée au passage d'électrons et non de paires de Cooper. En présence de dissipation, on peut à nouveau reffermioniser le système et l'interpréter encore une fois comme une diffusion particule-trou au niveau d'un supraconducteur non topologique cette fois-ci. Cependant, le supraconducteur possède un état de bord d'Andreev d'énergie non-nulle qui induit un couplage entre ce dernier et l'état de bord électronique. Le calcul de la résistance montre aussi un comportement non-monotone en fonction de la température ce qui suggère à nouveau une compétition entre une réflexion d'Andreev et une réflexion normale.

Sommaire

4.1 Régime du blocage de Coulomb : $E_C \gg E_J, E_M$	122
4.1.1 Système et Hamiltonien	122
4.1.2 Expression générale de $R(T)$	123
4.1.3 Calcul perturbatif	126
4.1.4 Referredionisation du système	130
4.2 Régime de Josephson : $E_J \gg E_C$	135
4.2.1 Cas sans dissipation avec $E_M = 0$: théorie des bandes . . .	137
4.2.2 Prise en compte de E_M	139
4.2.3 Prise en compte de la dissipation	142
4.2.4 Résistance $R(T)$ dans la limite $E_J \gg E_C$	144
4.3 Conclusions	147

Depuis quelques années, un intérêt particulier est donné à l'effet Josephson fractionnaire, c'est-à-dire au passage de charges élémentaires e à travers la jonction tout en gardant l'effet Josephson intact [114, 115]. Ce passage électron par électron est associé à une périodicité de 4π de la phase supraconductrice au lieu d'une périodicité classique de 2π .

La volonté d'étudier cette double périodicité était à l'origine de l'étude des jonctions en présence de fermions de Majorana. Ces fermions ont la particularité d'être protégés des petites perturbations et sont de bons candidats pour le potentiel ordinateur quantique [116, 117]. La présence de cette périodicité de 4π est donc un signe d'existence de fermions de Majorana dans ce type de circuit. On parle alors de jonction Josephson topologique.

Afin d'étudier les propriétés d'une jonction possédant les deux périodicités, certains chercheurs ont élaborés des jonctions particulières sans la présence de fermions de Majorana. On peut citer par exemple :

- un arrangement spécifique de quatre jonctions Josephson appelé losange de Josephson [118–120], représenté sur la figure 4.1.
- un empilement successifs de supraconducteurs et de couches ferromagnétiques [121]. On peut alors simuler des systèmes dont l'énergie Josephson est proportionnelle à $\sin(\phi/n)$ où $n + 1$ est le nombre de supraconducteurs utilisés. Le système est représenté sur la figure 4.1.

D'un point de vue plus formel, le terme de périodicité 4π , associé au transfert d'électrons, peut s'écrire en représentations de phase et de charge

$$\hat{V} = -E_M \cos\left(\frac{\hat{\phi}}{2}\right) = -\frac{E_M}{2} \sum_n \left(|n\rangle \langle n + \frac{1}{2}| + c.h. \right) \quad (4.1)$$

où E_M est l'énergie Josephson de la jonction topologique et n le nombre de charges de Cooper. Le facteur $1/2$ indique qu'on transfère la moitié d'une paire de Cooper donc un électron. La représentation électrique d'un tel composant est donnée sur la figure 4.1.

Expérimentalement, l'effet Josephson fractionnaire a été mesuré par Laroche *et al.* grâce à des mesures de l'effet Josephson dans le régime AC [122, 123]. Quand une simple jonction Josephson est alimentée par une source de courant alternative de pulsation ω_{ac} , la tension aux bornes de la jonction présente des plateaux séparés de $\hbar\omega_{ac}/2e$, aussi appelés pas de Shapiro et résultent de la synchronisation parfaite entre la pulsation ω_{ac} et celle de la jonction. Le facteur $2e$ correspond à la charge d'une paire de Cooper qui traverse la jonction. Comme la double périodicité résulte

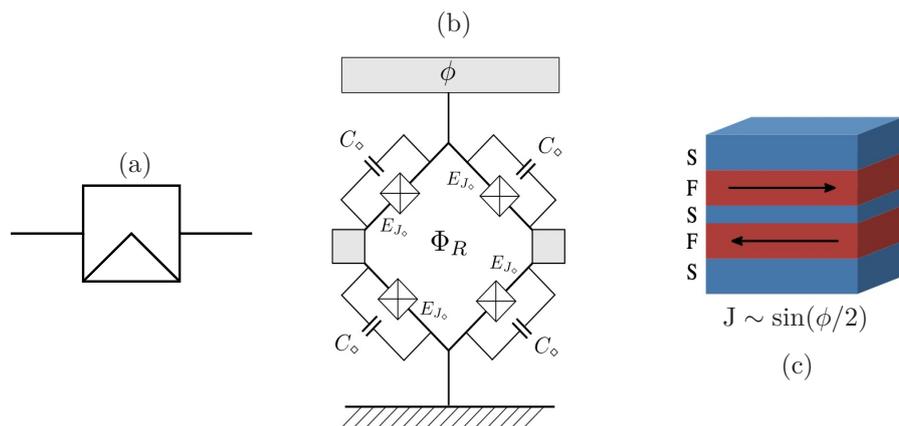


FIGURE 4.1 – (a) Représentation électrique d’une jonction Josephson topologique autorisant le transfert d’électrons à travers l’isolant. (b) Un losange de Josephson constitué de quatre jonctions Josephson identiques d’énergie E_{J_\diamond} et de capacité C_\diamond . Lorsqu’un flux magnétique Φ_R de valeur $h/4e$, l’énergie Josephson du dispositif entier devient π -périodique : $-E_{J2} \cos(2\phi)$. La figure est issue de [118]. (c) Schéma du dispositif, issue de [121], constitué d’une succession d’éléments supraconducteurs, notés S sur la figure, et d’éléments ferromagnétiques non supraconducteurs, notés F . La flèche noire représente l’alignement parallèle ou antiparallèle des ferromagnétiques. L’exemple représenté correspond à un arrangement $S/F/S/F/S$ et donc un courant Josephson $\sin(\phi/2)$. On peut aussi généraliser cette configuration où il y a n ferromagnétiques. Le potentiel Josephson est proportionnel à $\cos(\phi/n)$. Notons que l’énergie Josephson associée est nE_J . Pour une jonction de périodicité 4π , l’énergie Josephson vaut donc $2E_J$.

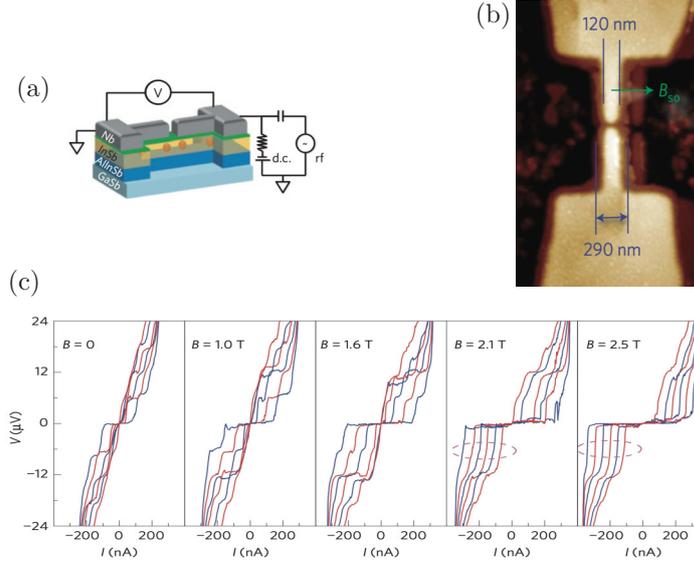


FIGURE 4.2 – Mesures des pas de Shapiro en présence de fermions de Majorana, faites par Rokhinson L. P., Liu X. et Furdyna J K [122]. (a) Représentation schématique de la jonction. Les points oranges représentent les fermions de Majorana à l'intérieur du supraconducteur InSb. (b) Image optique de la jonction Josephson. La présence du champ magnétique B_{so} permet de générer les fermions de Majorana. (c) Caractéristique tension-courant de la jonction pour différentes valeurs du champ magnétique B_{so} . Pour des champs $B_{so} < 2$ T, la caractéristique présente des plateaux séparés de $\Delta V = hf/2e = 6 \mu V$ où f est la fréquence de mesure, suggérant le passage de paires de Cooper à travers la jonction. Pour des champs magnétiques supérieurs à 2 T, un plateau sur deux est supprimé et le saut passe à $12 \mu V$, signe du transfert d'électrons à travers la jonction et donc de la présence de fermions de Majorana.

du passage d'électrons uniques à travers la jonction, les plateaux sont alors séparés de $\hbar\omega_{ac}/e$ ce qui entraîne une suppression des plateaux impairs. Ces propriétés ont bien été confirmées expérimentalement (voir figure 4.2).

Dans la partie 1.5, on a montré que la présence d'un environnement ohmique dissipatif peut diminuer la cohérence d'une jonction Josephson, jusqu'à même supprimer le passage des paires de Cooper à travers la jonction. En effet pour $R_s > h/(2e)^2$, la dissipation est suffisamment forte pour rendre la jonction isolante même à température nulle. Pour une jonction de périodicité 4π , le transfert d'électrons uniques engendre la même transition de phase mais la transition se fait pour une valeur de la résistance $R_s = h/e^2 = R_q$, c'est-à-dire à une valeur quatre fois plus petite que pour une jonction Josephson classique. On peut alors en déduire le diagramme de phase de la jonction de périodicité 4π (voir figure 4.3). Pour le système composé des deux

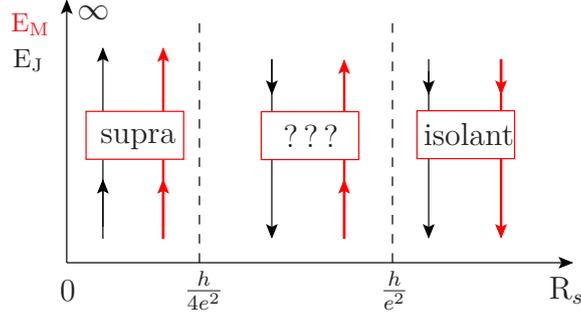


FIGURE 4.3 – Diagramme de phase des jonctions Josephson standard (en traits noirs) et topologique (en traits rouges) en présence de la dissipation et à température nulle. Pour $R_s < h/4e^2$ (respectivement $R_s > h/e^2$), les deux paramètres E_J et E_M tendent vers l'infini (respectivement vers zéro) et le système est supraconducteur (respectivement isolant). Le cas $h/4e^2 < R_s < h/e^2$ est non trivial puisque les deux jonctions ont des comportements opposés. On ne peut pas prédire le comportement de l'ensemble dans ce domaine. C'est l'objectif de ce chapitre.

périodicités, le comportement général est clair pour $R_s < R_q/4$ et $R_s > R_q$ puisque les deux jonctions se comportent de la même façon sous l'action des transformations de renormalisation. Par contre, dans le domaine $R_q/4 < R_s < R_q$, le comportement du système global est loin d'être trivial. L'objectif de cette partie est d'étudier et d'analyser le comportement à toute température de ce système en présence du système dissipatif. Notons toutefois qu'aucun point fixe non nul ne peut exister pour ces valeurs de résistance puisque la théorie des champs conformes prédit que seulement deux points fixes peuvent exister, représentant les états supraconducteur et isolant.

Afin d'analyser le comportement du système entier, on s'intéresse à la résistance effective notée $R(T)$ avec T la température du milieu. Dans la suite, on s'intéresse à une source de courant I_0 constante. La tension aux bornes de la jonction s'écrit $V = R(T) I_0$ avec

$$V = \langle \partial_t \hat{\phi}(x=0) \rangle \quad (4.2)$$

avec $\hat{\phi}(x=0)$ le flux local à l'entrée de la ligne de transmission semi-infinie définie à la partie 1.5.2. La partie 1.5.1 a montré que l'énergie de charge E_C et les énergies Josephson E_J , E_M induisent des comportements opposés. On va alors s'intéresser à calculer la résistance effective $R(T)$ dans les deux limites $E_C \gg E_J, E_M$ puis $E_C \ll E_J$. Dans ce dernier cas, la valeur de E_M sera spécifiée plus loin.

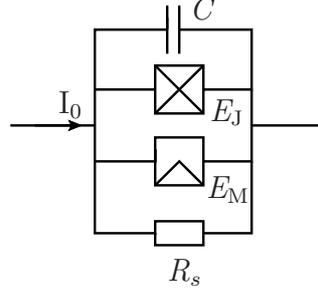


FIGURE 4.4 – Circuit électrique équivalent constitué des deux jonctions Josephson et de l'élément résistif. L'ensemble est alimenté par une source de courant continue I_0 .

4.1 Régime du blocage de Coulomb : $E_C \gg E_J, E_M$

4.1.1 Système et Hamiltonien

Le schéma électrique du système est représenté sur la figure 4.4. L'Hamiltonien total en présence du potentiel (4.1) peut s'écrire $\hat{H}_t = \hat{H} + \hat{V}$ avec \hat{H} qui suit l'équation (1.61). Le modèle de la ligne de transmission associé aux relations de passage (1.62) et la transformation unitaire (1.63) restent toujours valables. On peut alors déterminer la nouvelle expression de l'Hamiltonien (1.64) en représentation de charge

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -\frac{E_J}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(|n\rangle\langle n+1| e^{-2ie\hat{\phi}(0)/\hbar} + |n+1\rangle\langle n| e^{2ie\hat{\phi}(0)/\hbar} \right) + \int_0^{+\infty} d\omega \hbar\omega a_{in}^\dagger(\omega) a_{in}(\omega) \\ & - \frac{E_M}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(|n\rangle\langle n+1| e^{-ie\hat{\phi}(0)/\hbar} + |n+1\rangle\langle n| e^{ie\hat{\phi}(0)/\hbar} \right) - I_0 \hat{\phi}(0) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Encore une fois, en représentation de phase, l'opérateur de phase de la jonction $\hat{\phi}$ est une constante du mouvement et peut être absorbé en redéfinissant correctement l'opérateur $\hat{\phi}(0)$. Même en présence de la double périodicité, la périodicité de la phase disparaît au profit de l'opérateur $\hat{\phi}(0)$ qui est continu. En représentation de phase, l'équation (4.3) s'exprime

$$\hat{H} = -E_J \cos(2e\hat{\phi}(0)/\hbar) - E_M \cos(e\hat{\phi}(0)/\hbar) + \int_0^{+\infty} d\omega \hbar\omega a_{in}^\dagger(\omega) a_{in}(\omega) - I_0(t) \hat{\phi}(0) \quad (4.4)$$

Il est aussi utile de donner l'action associée à l'Hamiltonien (4.4) en représentation de Matsubara où tous les modes sont intégrés exceptés le mode $\phi_0 = 2e\hat{\phi}(0)/\hbar$ [67, 124] :

$$\begin{aligned}
S = & \frac{1}{2\beta} \sum_{i\omega_n} \left(\frac{\hbar}{8E_C} \omega_n^2 + \frac{\alpha}{2\pi} |\omega_n| \right) |\phi_0(i\omega_n)|^2 \\
& - E_J \int_0^\beta d\tau \cos \phi_0(\tau) - E_M \int_0^{\hbar\beta} d\tau \cos \left(\frac{\phi_0(\tau)}{2} \right) - \frac{\hbar}{2e} I_0 \int_0^{\hbar\beta} d\tau \phi_0(\tau)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

où $\beta = 1/k_B T$, τ le temps imaginaire et $\omega_n = 2\pi n/(\beta\hbar)$. On a de nouveau introduit le paramètre $\alpha = R_q/4R_s$, grandeur importante qui caractérise la dissipation dans ce système. L'action (4.5) sera notamment utilisée pour calculer la résistance effective du circuit.

4.1.2 Expression générale de $R(T)$

On s'intéresse à la résistance effective du circuit $R(T)$ en considérant que l'interaction $-I_0(t)\hat{\phi}(0)$ est perturbative. Grâce à une transformation mathématique astucieuse suggérée par [125], on montre que le calcul de la résistance effective revient à calculer un unique corrélateur sur les courants Josephson traversant les jonctions.

La théorie de la réponse linéaire impose

$$V(t) = \langle \dot{\hat{\phi}}(t) \rangle = -\frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G_{\dot{\phi},\dot{\phi}}^{ret}(t-t') I_0(t') \tag{4.6}$$

où on a introduit $\hat{\phi}(t) = \hat{\phi}(x=0, t)$ et la fonction de Green retardée $G_{\dot{\phi},\dot{\phi}}^{ret}(t) = -i\theta(t) \langle [\dot{\hat{\phi}}(t), \hat{\phi}(0)] \rangle$. On peut alors utiliser la transformée de Fourier de la relation précédente. L'équation (4.6) devient simplement $V(\omega) = -G_{\dot{\phi},\dot{\phi}}^{ret}(\omega) I_0(\omega)$. Notons que la fonction de Green est une fonction analytique dans le plan complexe supérieur. Par conséquent, on doit remplacer ω par $\omega + i0^+$ dans l'expression de la fonction de Green. Avec les expressions, $\phi_0 = 2e\hat{\phi}(0)$ et $G_{\dot{\phi},\dot{\phi}}^{ret}(\omega) = -i\omega G_{\phi,\phi}^{ret}(\omega)$, on arrive à une première expression de la résistance linéaire à fréquence nulle

$$\frac{R(T)}{R_s} = \frac{\alpha}{2\pi} \lim_{\omega \rightarrow 0} \mathcal{R} \left[i\omega G_{\phi,\phi}^{ret}(\omega + i0^+) \right] \tag{4.7}$$

où \mathcal{R} est la partie réelle d'un nombre complexe. Seule la partie réelle est intéressante puisqu'à fréquence nulle la partie imaginaire s'annule. Dans toute cette partie, on cherche à déterminer l'expression de la résistance R à toute température. Le corrélateur $G_{\phi,\phi}^{ret}(\omega + i0^+)$ est alors très difficile à calculer directement à température finie. Afin d'y arriver, on peut alors utiliser le formalisme de Matsubara, dont les principes sont résumés dans l'encadré . Il suffit alors de calculer la fonction de Green

de Matsubara $G(\tau) = -\langle \mathcal{T}_\tau \phi_0(\tau) \phi_0(0) \rangle$, avec $\tau = it$ et \mathcal{T}_τ l'opérateur d'ordonnement en temps. Ensuite, il suffit de faire un prolongement analytique $i\omega_n \rightarrow \omega + i0^+$ pour retrouver l'expression du corrélateur en temps réel.

Encadré 2 : Formalisme de Matsubara

Le formalisme de Matsubara repose sur la notion de temps imaginaire. Notons qu'il n'y a aucune interprétation physique de ce temps imaginaire et que cette notion est essentiellement une astuce mathématique, comme l'est l'utilisation des nombres complexes dans les circuits électriques.

Regardons simplement la fonction de corrélation $C(t, t') = \langle A(t)B(t') \rangle$. Le corrélateur peut s'écrire par définition

$$C(t) = \frac{1}{Z} \text{Tr}(e^{\beta H} A(t)B(0)) \quad (4.8)$$

où Tr est la trace mathématique et Z la fonction de partition. À partir d'un Hamiltonien $H = H_0 + V$, avec V une perturbation, il est intéressant de passer en représentation d'interaction

$$A(t)B(0) = U^\dagger(t) A^{(I)}(t) U(t) B^{(I)}(0) \quad (4.9)$$

avec $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} V t}$ si on suppose que la perturbation est indépendante du temps. Si l'interaction V est une perturbation, on peut alors développer en puissance de cette interaction. À température finie, on doit aussi développer $e^{-\beta H}$ et le calcul devient donc compliqué. L'astuce mathématique est de considérer que l'opérateur densité $\rho = e^{-\beta H}/Z$ et l'opérateur d'évolution $U(t) = e^{-iHt/\hbar}$ sont similaires. En effet, si on pose $t = -i\tau$, avec τ réel, $U(t)$ et ρ peuvent alors être traités de la même manière en faisant un seul développement en série entière en puissance de V . La principale difficulté est de pouvoir rebasculer en temps réel à la fin du développement. Cette astuce permet alors de connecter la physique quantique et la physique statistique.

Dans le formalisme en temps imaginaire, le corrélateur associé à $C(t)$ s'écrit $C(\tau) = \langle \mathcal{T}_\tau A(\tau)B(0) \rangle$, appelé corrélateur de Matsubara. \mathcal{T}_τ est l'opérateur d'ordonnement en temps et permet d'ordonner en temps la chronologie des opérateurs A et B . Par permutation cyclique de la trace, on peut alors montrer que C est une fonction de périodicité $\hbar\beta$ ce qui permet de décomposer C en série de Fourier

$$C(\tau) = \frac{1}{\hbar\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_n \tau} C(i\omega_n) \quad \text{et} \quad C(i\omega_n) = \int_0^{\hbar\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} C(\tau) \quad (4.10)$$

où on a introduit $\omega_n = 2n\pi/\hbar\beta$ (pour les bosons) et $\omega_n = (2n+1)\pi/\hbar\beta$ (pour les fermions). ω_n est appelé fréquence de Matsubara.

En représentation de Matsubara, on obtient

$$\frac{R(T)}{R_s} = -\frac{\alpha}{2\pi} \lim_{\omega \rightarrow 0} \mathcal{R} \left[i\omega \lim_{i\omega_n \rightarrow \omega + i0^+} \frac{1}{\hbar\beta} \sum_{i\omega_k} \langle \phi_0(i\omega_n) \phi_0(i\omega_k) \rangle \right] \quad (4.11)$$

Le corrélateur est alors calculé à partir de l'Hamiltonien (4.4) ou de l'action (4.5). Cependant, la prise en compte de l'énergie Josephson amène un terme non-linéaire en ϕ_0 . On aimerait pouvoir utiliser les corrélateurs (1.66) et (1.67) calculés pour $E_J = 0$, c'est-à-dire exprimer le corrélateur $\langle \phi_0(i\omega_n) \phi_0(i\omega_k) \rangle$ en fonction des corrélateurs des opérateurs $e^{i\phi_0(\tau)}$. Cette transformation a été proposée par [125] à travers l'ajout d'un terme source δS dans l'action (4.5) définie par

$$\delta S = \frac{1}{2\beta} \sum_{i\omega_k} \left(\frac{\alpha}{2\pi} |\omega_k| + \frac{\hbar}{8E_C} \omega_k^2 \right) a(-i\omega_k) \phi_0(i\omega_k) \quad (4.12)$$

Le corrélateur $\langle \phi_0(i\omega_n) \phi_0(i\omega_k) \rangle$ est donc proportionnel à $\frac{1}{Z} \frac{\delta^2 Z}{\delta a(-i\omega_n) \delta a(-i\omega_k)} \Big|_{a=0}$ où Z est la fonction de partition faisant intervenir notamment $e^{-S/\hbar}$ avec S est l'action (4.5). La transformation $\phi_0(\tau) \rightarrow \phi_0(\tau) - a(\tau)/2$ permet alors de transférer le terme source dans les termes Josephson. On trouve finalement

$$\frac{R(T)}{R_s} = 1 + \frac{2\pi}{\alpha} \lim_{\omega \rightarrow 0} \mathcal{R} \left[\frac{i}{\omega} \lim_{i\omega_n \rightarrow \omega + i0^+} \int_0^{\hbar\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} \frac{1}{(2e)^2} \langle \hat{I}_J(\tau) \hat{I}_J(0) \rangle \right] \quad (4.13)$$

avec $\hat{I}_J(\tau) = \frac{eE_J}{\hbar} \sin \phi_0(\tau) + \frac{eE_M}{2\hbar} \sin \frac{\phi_0(\tau)}{2}$ la somme des courants Josephson associés aux deux jonctions. On peut alors calculer cette résistance dans la limite $E_C \gg E_J, E_M$.

4.1.3 Calcul perturbatif

Dans cette partie, on cherche à calculer l'expression de la résistance à partir d'un calcul perturbatif par rapport à $E_J, E_M \ll E_C$. Le résultat obtenu vérifie bien les comportements prédits par le groupe de renormalisation. Une fois l'expression obtenue, on s'intéresse plus particulièrement au domaine $1/4 < \alpha < 1$ où les deux jonctions ont des comportements opposés à température nulle. On montre alors que ces deux jonctions sont en compétition et la résistance effective est une fonction non monotone de la température : il existe sous certaines conditions des extrema locaux non nuls caractéristiques de la jonction double périodique. Enfin, notre calcul prédit que le calcul perturbatif n'est pas suffisant puisque dans ce domaine, le terme topologique E_M grandit lorsque la température diminue et donc invalide la condition

$E_M \ll E_C$ en-dessous d'une certaine température.

L'équation (4.13) peut aisément se calculer à l'ordre le plus bas en E_J et E_M puisqu'elle est déjà écrite à l'ordre 2 en ces termes. Le corrélateur $\langle \dots \rangle$ est alors pris sur l'Hamiltonien (4.4) qui se réduit simplement à $\int_0^{+\infty} d\omega \hbar\omega a_{in}^\dagger(\omega) a_{in}(\omega)$.

Les seuls corrélateurs intervenant dans le calcul de $R(T)$ sont $\langle e^{ipe\hat{\phi}(\tau)} e^{-ipe\hat{\phi}(0)} \rangle = e^{J(\tau,p)}$ avec $p = 1$ ou 2 . Notons que les contractions entre les termes E_J et E_M n'interviennent pas dans ce résultat puisque leur corrélateur tend vers 0 dans la limite $\omega \rightarrow 0$, que l'on nomme habituellement la divergence infrarouge. Ce corrélateur a déjà été calculé précédemment pour $p = 1$. L'équation (1.67) peut alors se généraliser et devient

$$J(t,p) = \frac{p^2}{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{1}{1 + \omega^2 R_q^2 C^2} (e^{-i\omega t} - 1) \quad (4.14)$$

On rappelle que $R_q = h/e^2$ et $\alpha = R_q/4R_s$. Le calcul complet de la résistance est présenté dans l'appendice E. À l'ordre 2 en E_J et E_M , on arrive à

$$\frac{R(T)}{R_s} = 1 - \frac{1}{2\alpha} \left[\frac{E_J^2}{(k_B T)^2} \int_0^{+\infty} dy e^{j_2(y, \frac{2\alpha E_C}{\pi^2 k_B T})} - \frac{E_M^2}{4(k_B T)^2} \int_0^{+\infty} dy e^{j_1(y, \frac{2\alpha E_C}{\pi^2 k_B T})} \right] \quad (4.15)$$

où on a introduit la fonction $j_p(y, a)$ telle que

$$j_p(y, a) = -\frac{p^2}{2\alpha} \left\{ \gamma + \Psi(a) + \ln 2 + \ln \operatorname{ch} \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a} + \frac{\pi e^{-ay}}{\sin(\pi a)} \right] - \frac{e^{-y}}{2} \left[\frac{1}{1-a} {}_2F_1(1, 1-a, 2-a, -e^{-y}) + \frac{1}{1+a} {}_2F_1(1, 1+a, 2+a, -e^{-y}) \right] \right\} \quad (4.16)$$

avec γ la constante d'Euler déjà introduite précédemment, Ψ la dérivée logarithmique de la fonction Gamma $\Gamma(x)$ et ${}_2F_1$ une fonction hypergéométrique. Afin de faire le lien avec le groupe de renormalisation, il est intéressant de regarder la limite basse-température $k_B T \ll 2\alpha E_C/\pi^2$ où la résistance (4.15) devient

$$\frac{R(T)}{R_s} = 1 - K_J \left(\frac{E_J}{E_C} \right)^2 \left(\frac{k_B T}{E_C} \right)^{-2+2/\alpha} - K_M \left(\frac{E_M}{E_C} \right)^2 \left(\frac{k_B T}{E_C} \right)^{-2+1/(2\alpha)} \quad (4.17)$$

où $K_J = \frac{\pi^{\frac{1}{2} + \frac{4}{\alpha}} \Gamma(\frac{1}{\alpha})}{(2\alpha)^{1 + \frac{2}{\alpha}} (2e\gamma)^{\frac{2}{\alpha}} \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha})}$ et $K_M = \frac{\pi^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}} \Gamma(\frac{1}{4\alpha})}{4(2\alpha)^{1 + \frac{1}{2\alpha}} (2e\gamma)^{\frac{1}{2\alpha}} \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\alpha})}$. En effet en l'absence de E_M pour $\alpha < 1$, le terme en E_J tend vers 0 à température nulle : la jonction

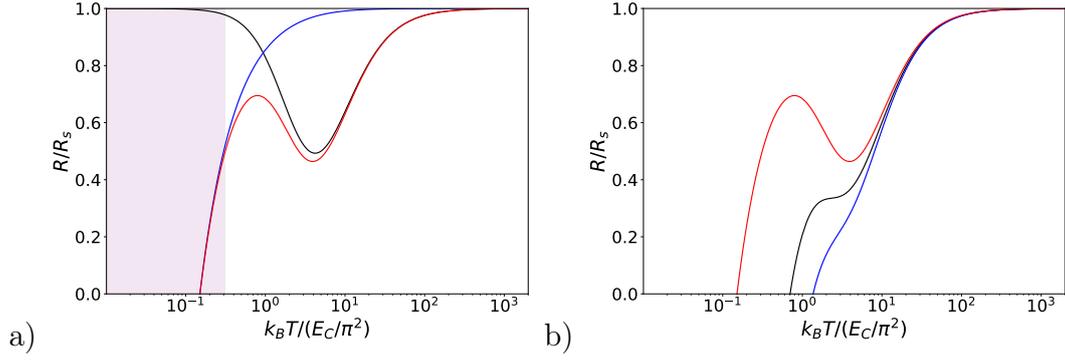


FIGURE 4.5 – a) Allure de la résistance adimensionnée R/R_s en fonction de la température réduite $k_B T / (E_C / \pi^2)$ pour $\alpha = 1/2$. Les courbes sont tracées pour $(E_J/E_C, E_M/E_C) = (0.3, 0.007)$ (courbe rouge), $(E_J/E_C, E_M/E_C) = (0.3, 0)$ (courbe noire) et $(E_J/E_C, E_M/E_C) = (0, 0.007)$ (courbe bleue). Le comportement à haute température est dominé par la jonction standard et à basse température par la jonction topologique. La partie violette correspond au domaine où le calcul perturbatif n'est plus valable puisque le terme en E_M explose lorsque la température diminue. b) Résistance adimensionnée R/R_s en fonction de la température réduite $k_B T / (E_C / \pi^2)$ pour $\alpha = 1/2$ pour $E_J/E_C = 0.3$ et différentes valeurs de E_M/E_C : 0.007 (courbe rouge), 0.03 (courbe noire) et 0.1 (courbe bleue). Les extrema locaux disparaissent lorsque E_M augmente.

est isolante. Et pour $\alpha > 1$, ce terme explose ce qui suggère que la cohérence de phase prend le dessus à température nulle : la jonction est supraconductrice. Ce raisonnement est aussi valable pour le terme en E_M mais en comparant cette fois-ci α à $1/4$.

Lorsque le coefficient α est compris entre $1/4$ et 1 , la physique est plus intéressante. En effet dans cet intervalle, les termes en E_J et E_M ont des comportements opposés. On donne sur la figure 4.5 l'allure de la résistance $R(T)$, associée à l'équation (4.15) pour $\alpha = 1/2$. L'analyse de ces courbes permet d'en déduire des propriétés intéressantes :

- À basse température, la résistance du système entier est dominée par le terme E_M , propriété validée par le groupe de renormalisation et l'équation (4.17) ;
- Pour $E_J = 0$, la résistance est une fonction croissante de la température. La température a pour effet de briser le caractère supraconducteur de la jonction qui a pour conséquence une augmentation de la résistance.
- Pour $E_M = 0$, elle présente un minimum local T^* . Ce minimum local est entièrement déterminé par α et E_C . Bien qu'aucune expression littérale n'existe pour T^* , on peut néanmoins l'exprimer sous la forme $k_B T^* = C(\alpha) \frac{2E_C}{\pi^2}$, suggérée par [66] avec l'allure de $C(\alpha)$ représentée sur la figure 4.6. Ce minimum

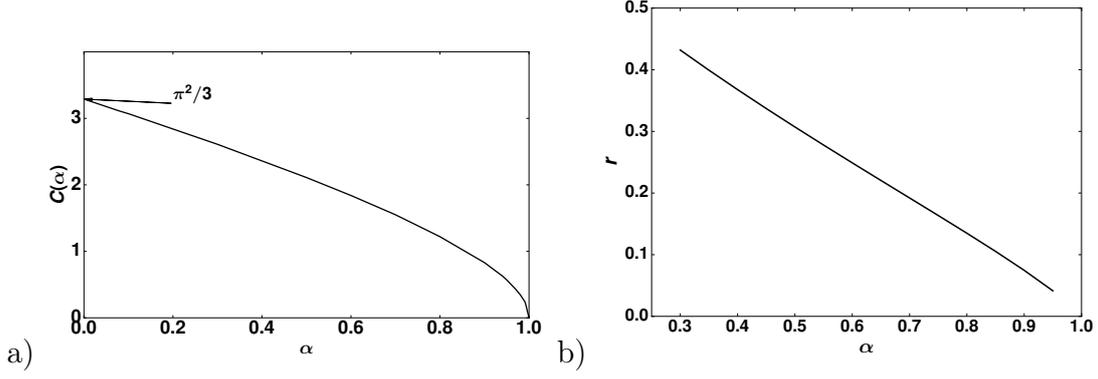


FIGURE 4.6 – a) $C(\alpha)$ en fonction de α . Le minimum local $T^* = C(\alpha) \frac{2E_C}{\pi^2 k_B}$ est contrôlé par E_J . Pour $\alpha > 1$, ce minimum n'existe pas et la courbe est une fonction croissante de la température. Pour $\alpha < 1$, T^* tend bien vers 0 lorsque $\alpha \rightarrow 1$ et tend vers $\pi^2/3$ pour $\alpha \rightarrow 0$, en accord avec les résultats de Fisher et Zwerger [66]. b) Rapport critique $r = (E_M/E_J)_c$ en fonction de α pour $\alpha \in [1/4, 1]$. En-dessous de la courbe, les extrema locaux T_m et T^* existent. Au-dessus, la résistance est une fonction croissante de la température. Une régression linéaire donne $r(\alpha) = 0.605 - 0.590\alpha$.

suggère qu'à température finie, la cohérence de phase apportée par la jonction Josephson diminue la résistance du circuit. Mais au-delà de T^* , les effets thermiques reprennent le dessus et brise cette cohérence.

- En présence des deux termes E_J et E_M , il y a une compétition entre les deux cas limites précédents. Cette compétition engendre un maximum local T_m (voir figure 4.5). Pour des températures vérifiant $k_B T \ll 2\alpha E_C/\pi^2$, l'analyse de l'équation (4.17) permet d'en déduire

$$\frac{k_B T_m}{E_C} = \frac{4e^\gamma \alpha}{\pi^2} \left[\frac{(4\alpha - 1)\tilde{\Gamma}(\alpha)}{16(1 - \alpha)} \left(\frac{E_M}{E_J} \right)^2 \right]^{2\alpha/3} \quad (4.18)$$

avec $\tilde{\Gamma}(\alpha) = \Gamma(\frac{1}{4\alpha}) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}) / [\Gamma(\frac{1}{\alpha}) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\alpha})]$. On note que ce maximum est contrôlé par α mais aussi par le rapport E_M/E_J .

- On observe aussi que ces deux extrema se rapprochent lorsque le rapport E_M/E_J augmente. Au-delà d'une certaine valeur critique, à α fixé, ces deux extrema disparaissent et la résistance est une fonction croissante de la température. On donne l'allure de ce rapport critique E_M/E_J en fonction de α pour $1/4 \leq \alpha \leq 1$, sur la figure 4.6.

Les propriétés précédentes mettent en évidence une compétition réelle entre les deux jonctions de périodicité différente. La présence d'un maximum de la résistance à une température non-nulle résulte de la présence d'une périodicité double dans le système. Par exemple, ce résultat peut être utilisé expérimentalement afin

de détecter la présence de fermions de Majorana dans un circuit à partir d'une mesure de résistance sans pour autant sonder les propriétés quantiques de ces fermions.

Par ailleurs, le résultat (4.17) montre que le calcul perturbatif précédent reste valable tant que la correction de la résistance en E_J^2 et E_M^2 est petite devant 1. Mais à température nulle, pour $1/4 \leq \alpha \leq 1$, le terme en E_M domine tout le problème. La description précédente est alors incomplète et on doit trouver une autre méthode que la technique perturbative.

4.1.4 Refermionisation du système

Dans cette partie, on décrit le comportement du circuit à très basse température, domaine où le calcul perturbatif précédent n'est plus valable. Après avoir posé les bases de la refermionisation, valable seulement pour $\alpha = 1/2$, on montre que l'Hamiltonien devient quadratique et peut être décrit en terme de fermions. On arrive à un modèle où un état de bord est couplé à un supraconducteur topologique : un électron incident arrivant sur le supraconducteur peut induire un trou dans l'état de bord (réflexion d'Andreev) ou un électron (réflexion classique). La résistance de notre circuit peut se déduire de la matrice de diffusion associée à ces processus et notamment à la probabilité de créer un trou dans l'état de bord. Le calcul de la résistance montre alors que le terme dominant est bien déterminé par E_M à basse température.

Hamiltonien fermionique

Le caractère non linéaire des termes Josephson rend les calculs impossibles à toute température et pour toutes valeurs arbitraires des paramètres E_J , E_M , etc. Dans le cas simple $E_J = E_M = 0$, l'équation (1.67) permet d'écrire aux temps longs $t \gg \tau_s = R_s C$,

$$\langle e^{ie\hat{\phi}(t)/\hbar} e^{-ie\hat{\phi}(0)/\hbar} \rangle \simeq e^{-i\pi/(4\alpha)} \left(\frac{\tau_s}{e\gamma t} \right)^{1/(2\alpha)} \quad (4.19)$$

Pour la valeur particulière $\alpha = 1/2$, ce corrélateur est alors proportionnel à $1/t$, dépendance caractéristique des fermions libres. En effet, à partir de l'Hamiltonien libre,

$$\hat{H}_0 = -i\hbar v_F \int_{-\infty}^{+\infty} dx \hat{\psi}^\dagger(x) \partial_x \hat{\psi}(x) \quad (4.20)$$

les opérateurs fermioniques vérifient la fonction de corrélation

$$\langle \hat{\psi}^\dagger(x=0, t) \hat{\psi}(0, 0) \rangle = \frac{-i}{2\pi v_F(t - i0^+)} \quad (4.21)$$

Pour $\alpha = 1/2$, les corrélateurs (4.19) et (4.21) ont exactement la même forme. L'idée principale de ce calcul pour $\alpha = 1/2$ est d'interpréter les opérateurs $e^{ie\hat{\phi}/\hbar}$ comme des fermions [52]. On parle alors de refermionisation du système. Il s'agit du processus inverse de la bosonisation, discutée à la partie 1.40. Les deux représentations coïncident si les fonctions de corrélation des fermions et des bosons sont identiques. Le lien entre les opérateurs dans chaque représentation s'écrit donc

$$\hat{\psi}(0) = \sqrt{\frac{e^\gamma}{\pi v_F \tau_s}} \hat{a} e^{ie\hat{\phi}(0)/\hbar} \quad (4.22)$$

\hat{a} est un fermion de Majorana local, avec $\hat{a} = \hat{a}^\dagger$ et $\hat{a}^2 = 1/2$, et permet de vérifier les relations d'anticommutation des opérateurs fermioniques $\hat{\psi}$. Avec la formule (4.22), le terme $-E_M \cos(e\hat{\phi}(0))$ devient en représentation fermionique

$$-E_M \cos\left(\frac{e\hat{\phi}(0)}{\hbar}\right) = -r_M \hat{a} (\hat{\psi}(0) - \hat{\psi}^\dagger(0)) \quad \text{avec} \quad r_M = E_M \sqrt{\frac{\pi v_F \tau_s}{e^\gamma}} \quad (4.23)$$

L'utilité de la refermionisation est alors flagrante : le système bosonique initial non linéaire peut être décrit par un système fermionique dont l'Hamiltonien est quadratique. Notons que même si l'Hamiltonien refermionisé est quadratique, les observables du système doivent aussi avoir la bonne dimension pour être refermionisé. Pour notre système il n'y a pas de soucis puisque la résistance se calcule à partir des courants Josephson qui ont la dimension de $\hat{a}\hat{\psi}$ pour $\alpha = 1/2$.

Avant de calculer la résistance effective, il reste à refermioniser le terme en $-E_M \cos(2e\hat{\phi}(0)/\hbar)$. Naïvement, on aimerait interpréter $e^{i2e\hat{\phi}(0)}$ comme le produit de deux termes $e^{ie\hat{\phi}(0)/\hbar}$. Cependant, le principe de Pauli impose que $\hat{\psi}(0)\hat{\psi}(0) = 0$. Il faut donc être plus précis. Utilisons la méthode de séparation (*point splitting* en anglais) : prenons l'opérateur fermionique $\hat{\psi}$ en deux points x et $x+b$ puis faisons tendre b vers 0. À l'ordre le plus bas en b , $\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(x+b) \simeq b \hat{\psi}(x) \partial_x \hat{\psi}(x)$. L'ordre 0 est nul à cause du principe de Pauli. L'opérateur $e^{i2e\hat{\phi}(0)/\hbar}$ est donc proportionnel à l'opérateur $\hat{\psi}(x) \partial_x \hat{\psi}(x)$. Chaque opérateur fermionique a une dimension de $1/2$ et la dérivée augmente cette dimension de 1 : $\hat{\psi}(x) \partial_x \hat{\psi}(x)$ est donc de dimension 2 . En comparant les corrélateurs de ces opérateurs, on peut alors refermioniser le terme Josephson de périodicité 2π :

$$-E_J \cos\left(\frac{2e\hat{\phi}(0)}{\hbar}\right) = ir_J (\hat{\psi}(0) \partial_x \hat{\psi}(0) + \hat{\psi}^\dagger(0) \partial_x \hat{\psi}^\dagger(0)) \quad \text{avec} \quad r_J = \frac{\pi v_F^2 \tau_s^2 E_J}{e^\gamma} \quad (4.24)$$

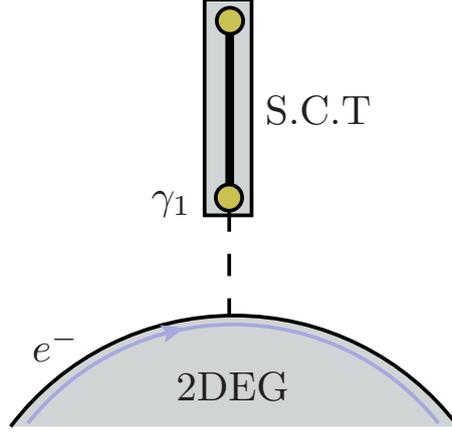


FIGURE 4.7 – Supraconducteur topologique (S.C.T.), possédant des fermions de Majorana à ses extrémités (rond jaune), couplé à un état de bord, fabriqué à partir d'un gaz bidimensionnel d'électrons (2DEG). En présence des fermions de Majorana, un électron de l'état de bord peut induire un transfert d'électrons, avec une amplitude de probabilité de saut r_M , ou de paires de Cooper dans le supraconducteur, avec une amplitude de probabilité r_J . On suppose que les fermions de Majorana sont suffisamment éloignés pour éviter toute interaction entre eux.

L'Hamiltonien résultant des équations (4.20), (4.23) et (4.24) est

$$\hat{H} = -i\hbar v_F \int_{-\infty}^{+\infty} dx \hat{\psi}^\dagger(x) \partial_x \hat{\psi} - r_M \hat{a} (\hat{\psi}(0) - \hat{\psi}^\dagger(0)) + ir_J (\hat{\psi}(0) \partial_x \hat{\psi}(0) + \hat{\psi}^\dagger(x) \partial_x \hat{\psi}^\dagger(x)) \quad (4.25)$$

On remarque tout de suite l'avantage de la refermionisation : tous les termes sont quadratiques par rapport aux opérateurs fermioniques donc les équations du mouvement associées à cet Hamiltonien peuvent se résoudre exactement. Notons que cette technique nécessite de se placer à basse énergie, c'est-à-dire pour des énergies bien plus petites que l'énergie de charge E_C . Lorsqu'on se rapproche de E_C , cette technique échoue et la théorie perturbative reprend la main.

Équivalence du modèle

L'Hamiltonien (4.25) n'est pas totalement nouveau. En effet, lorsqu'on approche un semi-conducteur d'un supraconducteur en présence d'un champ magnétique, il apparaît des fermions de Majorana aux extrémités du fil semi-conducteur. On parle alors de supraconducteur topologique. Lorsque ce système est couplé à un état de bord chiral par un point quantique (voir figure 4.7), l'Hamiltonien vérifié par l'opérateur fermionique de l'état de bord est [126–128]

$$\hat{H}' = -i\hbar v_F \int_{-\infty}^{+\infty} dx \hat{\psi}^\dagger(x) \partial_x \hat{\psi} + t\gamma_1 (\psi^\dagger(0) - \psi(0)) + (i\Delta \psi(0) \partial_x \psi(0) + c.h.) \quad (4.26)$$

avec

- t l'amplitude de transmission d'un électron entre l'état de bord chiral et le fermion de Majorana γ_1 , vérifiant $\gamma_1^2 = 1/2$.
- Δ l'amplitude de saut d'une paire de Cooper entre l'état de bord et le supraconducteur, responsable de la réflexion d'Andreev. Il s'agit du transfert d'une charge de Cooper induit par un électron incident arrivant sur le supraconducteur. Comme le supraconducteur n'autorise que le passage de paire d'électrons, ce transfert implique la création d'un trou dans l'état de bord.

Dans ce modèle, un électron incident peut induire un trou dans l'état de bord (réflexion d'Andreev) ou un électron (réflexion classique). Comme l'Hamiltonien (4.26) est quadratique par rapport aux opérateurs fermioniques, on peut décrire l'interaction entre les électrons/trous incidents ($x < 0$) et les électrons/trous sortants ($x > 0$) en utilisant la notion de matrice de diffusion (*S - matrix* en anglais).

En présence de ces interactions, les interactions entre l'état de bord et le supraconducteur topologique induisent un courant d'intensité I transmis au supraconducteur. Ce courant est généré par le passage de paires de Cooper donc créé par une réflexion d'Andreev. La conductance associée s'écrit à température finie [128, 129]

$$G(T) = G_0 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left(-\frac{\partial n_f}{\partial \omega} \right) |S_{ph}(\hbar\omega)|^2 \quad (4.27)$$

où $n_f = (1 + e^{\beta\hbar\omega})^{-1}$ est la distribution de Fermi-Dirac et S_{ph} est la composante de la matrice de diffusion traduisant l'amplitude de probabilité qu'un électron, avec une énergie $\hbar\omega$ soit diffusé en trou. S_{ph} peut se calculer à partir de l'Hamiltonien (4.26) [129] :

$$S_{ph}(E) = \frac{i(\tilde{t}^2 + 2\tilde{E}^2\tilde{\Delta})}{i\tilde{t}^2 + \tilde{E}[1 + \tilde{\Delta}(\tilde{t}^2 + \tilde{E}^2\tilde{\Delta})]} \quad (4.28)$$

avec la notation $\tilde{x} = x/(\hbar v_F)$. On remarque alors que même à énergie nulle ($E = 0$), il y a une réflexion d'Andreev au niveau du supraconducteur qui induit une valeur non nulle à la conductance. De plus, cette réflexion est entièrement dominée par le couplage entre le fermion de Majorana et l'état de bord puisque le terme Δ , associé aux paires de Cooper, disparaît de $S_{ph}(E)$.

On remarque alors que les Hamiltoniens (4.25) et (4.26) sont équivalents en opérant $r_M \leftrightarrow t$ et $r_J \leftrightarrow \Delta$. De plus, l'équation (4.13) montre que la résistance effective

de notre système est entièrement déterminée par les corrélations des courants Josephson. Dans le modèle équivalent précédent, la conductance est aussi déterminée par un calcul de fonction de corrélation des courants à partir de la formule de Kubo. L'équivalence entre les deux modèles permet alors de réécrire la résistance (4.13) en fonction de la matrice de diffusion associée au modèle précédent [130] :

$$\frac{R(T)}{R_s} = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left(-\frac{\partial n_f}{\partial \omega} \right) |S_{ph}(\hbar\omega)|^2 \quad (4.29)$$

avec $S_{ph}(E) = \frac{i(\tilde{r}_M^2 + 2\tilde{E}^2 \tilde{r}_J)}{i\tilde{t}^2 + \tilde{E}[1 + \tilde{\Delta}(\tilde{t}^2 + \tilde{E}^2 \tilde{\Delta})]}$, toujours en utilisant la notation $\tilde{x} = x/(\hbar v_F)$. La résistance effective peut alors se mettre sous la forme

$$\frac{R}{R_s} = 1 - F\left(\frac{4e^\gamma k_B T E_C^2}{\pi^2 E_M}, \frac{\pi^5 E_M^2 E_J}{8e^{3\gamma} E_C^3}\right) \quad (4.30)$$

où on a introduit la fonction $F(\bar{T}, \bar{r})$ adimensionnée

$$F(\bar{T}, \bar{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2\text{ch}^2 x} \frac{(2\bar{T}\bar{r}x^2 + 1)^2}{1 + \bar{T}^2 x^2 (1 + \bar{r} + \bar{T}^2 \bar{r}^2 x^2)^2} \quad (4.31)$$

On peut maintenant discuter du comportement du système à basse température.

Discussion

Même si l'expression (4.30) n'a pas une écriture analytique, on peut néanmoins la simplifier dans certaines limites.

Lorsque $E_J = 0$, on peut partir de la décomposition en série entière de $\text{th}x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{x}{x^2 + \pi^2(n+1/2)^2}$ puis prendre la dérivée par rapport à x pour obtenir le développement de $1/\text{ch}^2 x$. Ce développement peut alors être utilisé dans la formule (4.30) et on trouve

$$\frac{R}{R_s} \Big|_{E_J=0} = 1 - \frac{\pi E_M^2}{4e^\gamma E_C k_B T} \Psi' \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi E_M^2}{4e^\gamma E_C k_B T} \right) \quad (4.32)$$

où $\Psi'(x)$ est la dérivée de la fonction digamma. Ce résultat a déjà été obtenu dans un modèle équivalent du mouvement Brownien quantique dans un potentiel périodique en présence de dissipation quantique [130, 131]. On retrouve bien qu'à température nulle $R = 0$, cohérent avec un comportement supraconducteur de la jonction dans le cas $\alpha < 1$.

Rappelons que le résultat (4.30) n'est valable tant que $E_J, E_M \ll E_C$ et $k_B T \ll E_C$. Par conséquent pour des températures vérifiant $k_B T \ll E_M^2/E_C$, on peut ignorer E_J et faire un développement asymptotique de l'équation (4.32) :

$$\frac{R}{R_s} \simeq \frac{4e^{2\gamma}}{3\pi^2} \left(\frac{k_B T}{E_M^2/E_C} \right)^2 \quad (4.33)$$

Dans la limite opposée $k_B T \gg E_M^2/E_C$, le calcul de reffermionisation n'est plus valable puisque cette technique nécessite de se placer à basse énergie, pour des énergies bien plus petites que E_C . Par contre le développement perturbatif s'applique à nouveau.

On peut alors regrouper ces résultats en représentant les différentes courbes sur la figure 4.8 pour différentes valeurs de E_M/E_C et E_J/E_C .

On remarque alors que l'ajout de E_M dans le circuit modifie totalement son comportement à basses températures. En effet, le développement (4.33) ne fait pas apparaître le terme E_J : le comportement de la jonction est entièrement déterminée à température nulle et même pour des températures vérifiant $k_B T \ll E_M^2/E_C$. À plus hautes températures, le comportement est par contre dominé par le terme en E_J . Entre les deux, il y a une compétition entre les deux termes et la résistance peut présenter des extrema locaux. Notons aussi que ces résultats peuvent être généralisés pour des systèmes possédant des périodicités doubles autres que 2π et 4π . Dans la configuration où les deux systèmes ont des comportements opposés à température nulle d'après les calculs du groupe de renormalisation, le système de périodicité plus élevée domine toujours à basses températures et la périodicité la plus petite à hautes températures.

Dans toute cette partie, on a étudié le comportement du circuit lorsque les énergies Josephson E_J et E_M sont très petites devant l'énergie de charge E_C . Regardons maintenant l'autre cas limite où l'énergie de charge devient une des échelles les plus petites.

4.2 Régime de Josephson : $E_J \gg E_C$

Nous venons d'étudier la limite où l'énergie de charge est l'énergie la plus haute du système. Maintenant, nous allons regarder le cas limite complémentaire : $E_J \gg E_C$. Dans cette limite, une description en théorie des bandes est faite et on montre que l'ajout de la jonction Josephson topologique double le nombre de bandes. L'effet de la dissipation sur les deux bandes de plus basse énergie induit un Hamiltonien reffermionisé qui s'interprète aussi comme un problème de diffusion d'électrons sur un supraconducteur topologique. Au final, on détermine l'expression de la résistance ef-

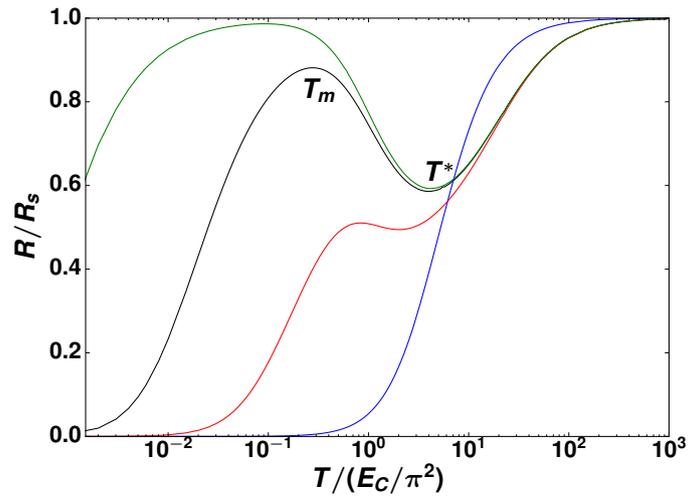


FIGURE 4.8 – Résistance adimensionnée R/R_s en fonction de la température réduite : $k_B T/(E_C/\pi^2)$ obtenue par l'interpolation des formules (4.15) et (4.30) obtenues respectivement par un calcul perturbatif et la reformionisation. Les courbes sont tracées pour différentes valeurs du couple $(E_J/E_C, E_M/E_C)$: (0.8, 0.1) (courbe rouge), (0.03, 0.5) (courbe bleue), (0.8, 0.006) (courbe verte) et (0.8, 0.03) (courbe noire). Contrairement à la figure 4.5, la reformionisation permet de décrire correctement la résistance à faible température et même à température nulle.

fective en fonction de la température et on obtient une allure confirmant les résultats précédents dans la limite $E_C \gg E_J$.

4.2.1 Cas sans dissipation avec $E_M = 0$: théorie des bandes

Cette partie permet d'introduire les concepts de la théorie des bandes sans la présence de la jonction topologique, ni de la dissipation. On montre que l'Hamiltonien est équivalent à celui d'un modèle de liaisons fortes où les électrons peuvent sauter entre les plus proches voisins.

Dans le cas simple où $E_M = 0$ et sans dissipation, l'Hamiltonien (1.61) se réduit à

$$\hat{H}_0 = 4E_C (\hat{N} - n_g)^2 - E_J \cos \hat{\varphi} \quad (4.34)$$

avec n_g est la charge adimensionnée apportée par l'extérieur à la capacité. Dans le cas $E_J \gg E_C$, le terme $-E_J \cos \hat{\varphi}$ domine le comportement du système : la phase de la jonction est très bien définie et localisée dans les minima du potentiel Josephson. On peut alors utiliser le formalisme de la théorie des bandes [67, 132] utilisé dans le modèle des liaisons fortes (*tight-binding model* en anglais). Dans ce formalisme, n_g , appelé quasicharge, est équivalent au pseudo-moment \vec{k} associé à l'électron en physique du solide.

Dans toute cette partie, on se place dans l'approximation $E_J \gg E_C$: la seule bande occupée est la bande $n = 0$. Pour le potentiel $-E_J \cos \varphi$, les minima de ce potentiel vérifient $2\pi m$ avec $m \in \mathbb{Z}$. On peut alors écrire la fonction d'onde totale du système sous la forme

$$\Psi_{n_g}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \psi_0(\varphi - 2\pi m) e^{i2\pi n_g m} \quad (4.35)$$

où N est le nombre total de minima et ψ_0 est appelé fonction de Wannier de la bande étudiée (ici $n = 0$). L'expression précédente suggère que la phase est définie sur l'intervalle $]-\infty; +\infty[$. L'expression de ψ_0 peut être déterminée en résolvant l'équation de Schrödinger indépendante du temps associée à l'Hamiltonien (4.34). La représentation de phase avec $\hat{N} = i\partial_\varphi$ et $n_g = 0$ donne

$$-4E_C \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \varphi^2} - E_J \cos \varphi \psi_0 = E \psi_0 \quad (4.36)$$

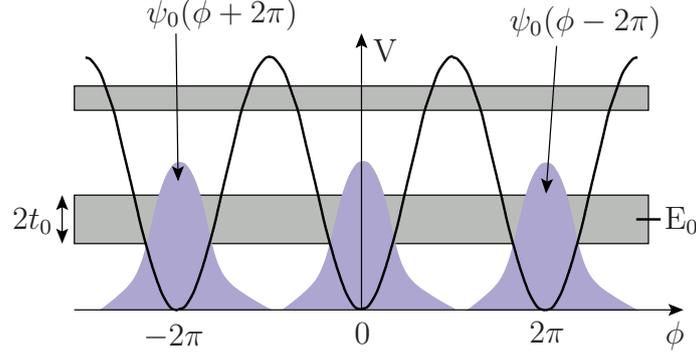


FIGURE 4.9 – Spectre d'énergie de bande pour une jonction Josephson ayant un potentiel $-E_J \cos \phi$. Les rectangles gris représentent les bandes dont la première suit la formule (4.37) avec $E_0 = -E_J + \hbar\omega_p/2$. Les courbes violettes correspondent aux fonctions de Wannier. Leur élargissement permet notamment des sauts entre plus proches voisins.

Comme la phase est fortement localisée au niveau des minima, on peut alors approximer $-\cos \phi$ par $-1 + \phi^2/2$. Le système se ramène alors à étudier le mouvement d'une particule dans un puits de potentiel harmonique. La valeur de l'énergie du fondamental et de la fonction d'onde associée valent

$$E_0 = -E_J + \frac{1}{2}\sqrt{8E_C E_J} = -E_J + \frac{\hbar\omega_p}{2} \text{ et } \psi_0(\phi) = \left(\frac{E_J}{8\pi^2 E_C}\right)^{1/8} \exp\left(-\frac{\phi^2}{2}\sqrt{\frac{E_J}{8E_C}}\right) \quad (4.37)$$

où $\omega_p = \sqrt{8E_J E_C}/\hbar$ est aussi appelée pulsation plasma. Notons que cette approximation harmonique n'est valable que pour les premiers niveaux d'énergies en l'absence d'excitations qui amènerait le système dans un état excité [67]. L'équation (4.36) possède néanmoins des solutions exactes en terme de fonction de Mathieu [133, 134], importantes lorsqu'on étudie notamment les transitions entre les niveaux d'énergie, notamment pour des qubits Josephson [134]. Le calcul plus complet montre notamment que l'état fondamental est séparé en énergie du premier niveau excité de $\hbar\omega_p$.

Les fonctions de Wannier ont un certain élargissement en phase. Deux fonctions consécutives peuvent alors se chevaucher et induire des sauts entre plus proches voisins (voir figure 4.9). L'énergie $E(n_g)$ se calcule selon la formule suivante

$$E(n_g) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\Psi_{n_g}(\phi))^* \hat{H}_0 \Psi_{n_g}(\phi) d\phi \quad (4.38)$$

avec \hat{H}_0 l'Hamiltonien (4.34) et Ψ_{n_g} la fonction d'onde totale (4.35). Si les sauts ne se font qu'entre plus proches voisins, l'intégrale précédente ne fait intervenir que

les termes $m = 0$ et $m = \pm 1$ de la somme de l'équation (4.35). Le calcul de $E(n_g)$ donne

$$E(n_g) = -E_J + \frac{\hbar\omega_p}{2} - t_0 \cos(2\pi n_g) \quad \text{avec} \quad t_0 = 16\sqrt{\frac{E_J E_C}{\pi}} \left(\frac{E_J}{2E_C}\right)^{1/4} e^{-\sqrt{8E_J/E_C}} \quad (4.39)$$

Comme $E(n_g) = E(n_g + 1)$, on peut restreindre n_g à l'intervalle $[-1/2; 1/2]$, appelé zone de Brillouin.

4.2.2 Prise en compte de E_M

L'ajout de E_M modifie la physique du système puisque ce terme autorise maintenant le passage électron par électron. Cette propriété va modifier l'allure des bandes puisque les fonctions d'onde correspondantes auront une périodicité de 4π et va donc doubler chaque bande précédente. On introduit pour cela deux états de parité différente et la jonction topologique va coupler ces états entre eux. Finalement, on obtient que le système est maintenant décrit par un Hamiltonien matriciel dans la base de ces deux états.

La résolution analytique n'est plus possible en présence de E_M . On propose alors une résolution numérique basée sur la représentation en charge de l'Hamiltonien suivant

$$\hat{H} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[4E_C(n - n_g)^2 - \frac{E_J}{2} (|n\rangle\langle n+1| + c.h.) - \frac{E_M}{2} (|n\rangle\langle n + \frac{1}{2}| + c.h.) \right] \quad (4.40)$$

On peut ainsi représenter l'Hamiltonien sous forme matricielle puis calculer les valeurs propres de la matrice correspondante. Pour y arriver, on tronque la somme de l'équation (4.40) puis on détermine numériquement les énergies propres associées. Le choix de n_{max} est choisi lorsque la convergence des paramètres est atteinte (en général $n_{max} \simeq 10$ suffit pour les premiers niveaux d'énergie). Le résultat numérique est représenté sur la figure 4.10. On constate que la présence de E_M ouvre un gap aux bords $n_g = \pm 1/4$ de la zone de Brillouin. Ce résultat était bien évidemment attendu puisque la largeur de la zone de Brillouin de valeur 1, en l'absence de E_M , est associée à la périodicité de n_g et donc au transfert d'une charge $2e$ d'une paire de Cooper. En présence de E_M , les transferts d'électrons sont possibles donc la nouvelle zone de Brillouin doit être de largeur $1/2$ afin d'avoir une périodicité $1/2$ vis à vis de n_g .

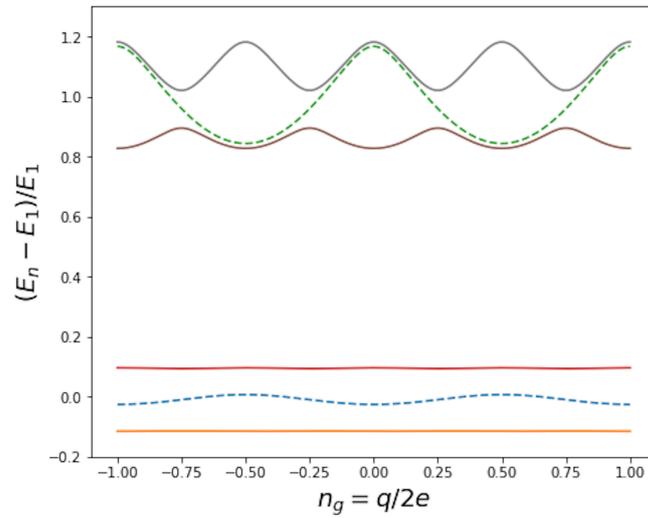


FIGURE 4.10 – Bandes de plus basse énergie obtenues numériquement de l'équation (4.40) en fonction de la quasicharge $n_g = q/2e$. La solution numérique [135, 136] est déterminée en tronquant la somme de (4.40) et en diagonalisant la matrice obtenue. On trace ensuite les niveaux d'énergie $(E_n - E_1)/E_1$ où E_1 est l'énergie du fondamental pour $E_J/E_C = 4$ et $E_M/E_C = 0.5$, représentées en traits pleins. Les courbes en pointillés correspondent aux niveaux d'énergie pour $E_M = 0$. La présence de E_M ouvre un gap aux extrémités de la zone de Brillouin, conséquence du transfert d'électrons et non de paires de Cooper.

Dans cette partie, on s'intéresse au cas où les deux premières bandes peuvent être occupées. On considère le cas $E_M < \hbar\omega_p$ afin d'éviter le mélange des bandes. La prise en compte du passage d'électrons en plus de celui des paires de Cooper nécessite de construire une base d'états propres constituée des états pairs et impairs associés à la parité fermionique [137, 138] :

$$\Psi_{\pm, n_g}(\varphi) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\pm 1)^p \psi_0(\varphi - 2p\pi) e^{in_g(2p\pi - \varphi)} \quad (4.41)$$

Ces états sont associés aux énergies $E_0(n_g)$ et $E_0(n_g + 1/2)$ où E_0 suit l'équation (4.39). De la même façon que la partie précédente, on projette l'Hamiltonien dans la base des états associés à l'équation (4.41). Le terme de charge et le terme de Cooper $-E_J \cos \hat{\varphi}$ ne couplent pas les états d'énergie $E_0(n_g)$ et $E_0(n_g + 1/2)$ puisque le terme de Cooper décale \hat{n} de ± 1 (le terme de charge garde \hat{n} constant). Par contre, ce n'est pas le cas de E_M qui couple l'état de parité paire à l'état de parité impaire. Il ne reste plus qu'à déterminer les quatre composantes de la matrice 2×2 formée par les deux états propres notés $|+\rangle$ et $|-\rangle$, respectivement pour les parités paire et impaire. On a alors

$$\langle +|\hat{H}_0|+\rangle = E_0(n_g) \quad \text{et} \quad \langle -|\hat{H}_0|-\rangle = E_0(n_g + 1/2) \quad (4.42)$$

Notons que l'on a aussi $\langle +|\hat{H}_0|-\rangle = 0$. Comme $\hat{V}_M = -E_M \cos(\hat{\varphi}/2)$ ne couple que les états $|+\rangle$ et $|-\rangle$, $\langle \pm|\hat{V}_M|\pm\rangle = 0$. Le calcul des termes non diagonaux se fait en suivant le même raisonnement que pour obtenir l'équation (4.39). On a alors

$$\langle +|\hat{V}_M|-\rangle = (\langle -|\hat{V}_M|+\rangle)^\dagger = E_M [c_0 - id_0 \sin(2\pi n_g)] \quad (4.43)$$

avec $c_0 = \int d\varphi |\psi_0(\varphi)|^2 \cos(\varphi/2)$ et $d_0 = 2 \int d\varphi \psi_0^*(\varphi) \cos(\varphi/2) \psi_0(\varphi - 2\pi)$. Le calcul des intégrales donne $c_0 = 1$ et $d_0 = \frac{2^{1/3} t_0}{3^{-1/3} \hbar\omega_p} \sqrt{\frac{E_C}{E_J}} \Gamma(1/3) \ll 1$. On peut alors négliger d_0 devant c_0 . En résumé, l'Hamiltonien projeté dans la base $\{|+\rangle; |-\rangle\}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \tilde{H}(n_g) &= \left(-E_J + \frac{\hbar\omega_p}{2} \right) I_d + \begin{pmatrix} t_0 \cos(2\pi n_g) & E_M \\ E_M & -t_0 \cos(2\pi n_g) \end{pmatrix} \\ &= \left(-E_J + \frac{\hbar\omega_p}{2} \right) I_d + t_0 \cos(2\pi n_g) \sigma_z + E_M \sigma_x \end{aligned} \quad (4.44)$$

où σ_x et σ_z sont les matrices de Pauli et I_d la matrice identité. C'est à partir de cette expression que nous allons calculer la résistance effective du système.

4.2.3 Prise en compte de la dissipation

On caractérise enfin le système entier, c'est-à-dire en présence de la dissipation, dans cette partie. On démontre à nouveau que l'Hamiltonien peut se reformioniser pour $\alpha = 1/2$ et s'interprète aussi comme un problème de diffusion particule/trou au niveau d'un supraconducteur.

La projection dans la base $\{|+\rangle; |-\rangle\}$ reste valable en présence de la dissipation. Cependant, la dissipation ohmique peut induire des transitions entre les deux premiers niveaux et les autres niveaux excités. Ces transitions remettent en cause tout le calcul précédent. On doit alors s'assurer que la dissipation n'est pas trop forte pour engendrer ces transitions, c'est-à-dire qu'on doit vérifier la condition $\alpha^2 \ll 2\pi^2 E_J/E_C$ [67, 139].

De même, la présence d'une source de courant peut produire ces mêmes effets mais notre calcul s'intéresse à la réponse linéaire du circuit à une variation infime de courant. Ces transitions peuvent alors être oubliées.

En reprenant le raisonnement de la partie 1.5.3, la charge contenue aux niveaux des armatures du condensateur vaut $2en_g = -\hat{Q} - \int^t dt' I_0(t')$ où \hat{Q} est toujours la charge apportée la résistance R_s du circuit. L'Hamiltonien total s'écrit alors

$$\hat{H}_t = \tilde{H} \left(\frac{\hat{Q}}{2e} + \frac{Q_0(t)}{2e} \right) + H_{R_s} \quad (4.45)$$

où \tilde{H} correspond à l'équation (4.44), H_{R_s} est définie par l'équation (1.58) et $Q_0(t) = \int^t dt' I_0(t')$. Comme on traite I_0 de manière perturbative, on peut développer l'Hamiltonien précédent :

$$\hat{H}_t \simeq \tilde{H} \left(\frac{\hat{Q}}{2e} \right) + H_{R_s} - t_0 \frac{\pi Q_0(t)}{e} \sin \left(\frac{\pi \hat{Q}}{e} \right) \sigma_z \quad (4.46)$$

Il ne reste plus qu'à donner les expressions des champs de la ligne de transmission. Contrairement à la partie (1.5.2), le terme de charge E_C et donc la capacité électrique, a disparu du problème (ce terme apparaît dans t_0 mais n'est plus interprétable comme une capacité électrique). Dans le cas $E_J \ll E_C$, la présence de E_C amène un temps $\tau_s = R_s C$ qui permet d'avoir les intégrales bien définies aux temps longs. Mais ce n'est plus le cas pour $E_J \gg E_C$. On introduit alors à la main un temps τ_0 qui régularise les intégrales de la même façon et on peut à la fin faire tendre τ_0 vers l'infini. En reprenant les résultats de la ligne de transmission déterminés dans les parties 1.5.2 et 1.5.3, le champ local $\hat{\phi}(0)$ et la charge \hat{Q} vérifient

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(0) &= \sqrt{\hbar R_s} 4\pi \int_0^{\omega_p} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} \left[\frac{2}{1 - i\tau_0\omega} a_{in,\omega} + c.h. \right] \\
\hat{Q} &= \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi R_s}} \int_0^{\omega_p} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} \left[\frac{-2i\tau_0\omega}{1 - i\tau_0\omega} a_{in,\omega} - c.h. \right]
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Les intégrales sont coupées à la pulsation ω_p parce qu'à des pulsations plus grandes, les bandes supérieures doivent être prises en compte. On décrit alors le comportement du système global à des énergies plus petites que $\hbar\omega_p$.

Lorsque $E_J \ll E_C$, la partie 1.5.3 a montré que la description de la cohérence de phase se fait à travers le corrélateur $\langle e^{2ie\hat{\phi}(t)/\hbar} e^{-2ie\hat{\phi}(0)/\hbar} \rangle$ qui mesure à quelle vitesse la cohérence décroît dans le temps. Dans le cas $E_J \gg E_C$, la phase est bien définie et ce sont les fluctuations de la charge qui modifient le comportement du système. Les fluctuations de la charge sont alors décrites par le corrélateur suivant

$$K_{\hat{Q}}(t) = \langle e^{i\pi\hat{Q}(t)/e} e^{-i\pi\hat{Q}(0)/e} \rangle = \exp \left[2\alpha \int_0^{\omega_p} \frac{d\omega}{\omega} \frac{(\tau_0\omega)^2}{1 + (\tau_0\omega)^2} (e^{-i\omega t} - 1) \right] \tag{4.48}$$

calculé à partir de la formule (4.47). Ce corrélateur peut alors être évalué dans la limite $1/\omega_p \ll t \ll \tau_0$ et donne $K_{\hat{Q}}(t) \sim (-i/\omega_p t)^{2\alpha}$. Encore une fois, ce corrélateur est similaire à celui des fermions pour $\alpha = 1/2$. L'Hamiltonien (4.46) peut être à nouveau refermionisé suivant le même raisonnement qu'à la partie 4.1.4. Le terme de saut $t_0 \cos(\pi\hat{Q}/2)$ devient

$$t_0 \cos\left(\frac{\pi\hat{Q}}{2}\right) = r_0 \hat{a} \left(\hat{\psi}(0) - \hat{\psi}^\dagger(0) \right) \quad \text{avec} \quad r_0 = t_0 \sqrt{\frac{\pi v_F}{\omega_p}} \tag{4.49}$$

L'expression de r_0 est déterminée en comparant les corrélateurs des deux modèles. Afin de traiter la dynamique des matrices de Pauli σ_i , il est intéressant de les écrire en terme de fermions de Majorana η_j avec $\sigma_x = i\eta_2\eta_3$, $\sigma_y = i\eta_3\eta_1$ et $\sigma_z = i\eta_1\eta_2$. Ces fermions de Majorana vérifient l'algèbre de Clifford : $\{\eta_i, \eta_j\} = 2\delta_{ij}$. L'Hamiltonien (4.46) devient

$$\hat{H}_t = -i\hbar v_F \int_{-\infty}^{+\infty} dx \hat{\psi}^\dagger(x) \partial_x \hat{\psi} + iE_M \eta_2 \eta_3 - ir_0 \left(\hat{\psi}(0) - \hat{\psi}^\dagger(0) \right) \hat{a} \eta_1 \eta_2 \tag{4.50}$$

Le terme $\hat{a}\eta_1$ apparaît seulement dans le dernier terme et donc commute avec l'Hamiltonien précédent. Comme $(\hat{a}\eta_1)^2 = -1/2$, on peut choisir $\hat{a}\eta_1 = i/\sqrt{2}$ d'où

$$\hat{H}_t = -i\hbar v_F \int_{-\infty}^{+\infty} dx \hat{\psi}^\dagger(x) \partial_x \hat{\psi} + iE_M \eta_2 \eta_3 + \frac{r_0}{\sqrt{2}} \left(\hat{\psi}(0) - \hat{\psi}^\dagger(0) \right) \eta_2 \tag{4.51}$$

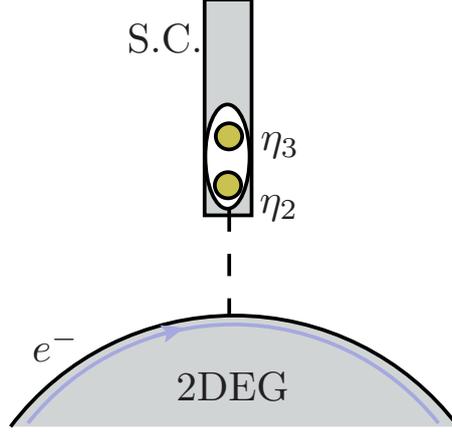


FIGURE 4.11 – Supraconducteur standard (S.C.), possédant un état de bord d’Andreev (ellipse blanche), dont l’un des fermions de Majorana, ici η_2 , est couplé à l’état de bord. Lorsque l’état de bord est seulement couplé à η_2 , une réflexion d’Andreev est alors possible.

Cet Hamiltonien est le point de départ du calcul de la résistance effective du circuit. Notons que cet Hamiltonien est différent de celui étudié précédemment (4.26). En effet, le couplage entre les fermions de Majorana η_2 et η_3 forme un état de bord d’Andreev d’énergie $2E_M$ dans le supraconducteur. La configuration est représentée sur la figure 4.11. La présence de l’interaction entre η_2 et l’état de bord chiral induit des réflexions d’Andreev au niveau du supraconducteur en $x = 0$. Notons que s’il y a un couplage supplémentaire entre l’état de bord et le second fermion de Majorana η_3 , cette réflexion d’Andreev disparaît [129].

4.2.4 Résistance $R(T)$ dans la limite $E_J \gg E_C$

Enfin, on détermine à nouveau l’expression de la résistance effective du circuit dans la limite $E_J \gg E_C$. On trouve à nouveau que la résistance a un comportement non monotone en fonction de la température. Néanmoins, notre calcul se limite aux énergies plus petites que $\hbar\omega_p$ et le comportement haute température n’est pas intégré dans notre approche. On montre alors que dans notre modèle refermionisé, la présence d’une énergie non-nulle E_M de l’état de bord d’Andreev détruit la réflexion d’Andreev à température nulle et donc impose une résistance nulle dans le modèle initial.

Le calcul de la résistance est très semblable au calcul dans la limite $E_J \ll E_C$. La tension aux bornes du circuit s’écrit toujours $V = \langle \dot{\phi}(t) \rangle$. Comme ϕ commute avec la partie dissipative H_{R_s} , il reste en l’absence du terme source

$$V = \frac{i}{\hbar} \langle [H_P, \hat{\phi}] \rangle = -t_0 \frac{\pi}{e} \langle \sin\left(\frac{\pi}{e} \hat{Q}\right) \sigma_z \rangle \quad (4.52)$$

On rappelle que l'ajout du source courant amène un terme $-t_0 \frac{\pi Q_0(t)}{e} \sin(\pi \hat{Q}/e)$ avec $Q_0 = \int^t I_0 dt'$ (voir équation (4.46)). Comme pour la partie 4.1.2, le terme source est traité perturbativement. De la même manière, on peut montrer que la résistance suit la formule

$$\frac{R(T)}{R_s} = 2\pi\alpha \lim_{\omega \rightarrow 0} \mathcal{R} \left(\frac{i}{\omega} \lim_{i\omega_n \rightarrow \omega + i0^+} \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} \langle \hat{g}(\tau) \hat{g}(0) \rangle \right) \quad (4.53)$$

avec

$$\hat{g}(\tau) = \frac{it_0}{\hbar} \sin\left(\frac{\pi}{e} \hat{Q}(\tau)\right) \eta_1(\tau) \eta_2(\tau) = -\frac{ir_0}{\sqrt{2}\hbar} \left(\hat{\psi}(0, \tau) + \hat{\psi}^\dagger(0, \tau) \right) \eta_2(\tau) \quad (4.54)$$

On peut reprendre le raisonnement de la partie 4.1.4 et exprimer le corrélateur $\langle \hat{g}(\tau) \hat{g}(0) \rangle$ en terme de la matrice de diffusion S [129] :

$$\frac{R(T)}{R_s} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left(-\frac{\partial n_f}{\partial \omega} \right) |S_{ph}(\omega)|^2 \quad \text{avec} \quad |S_{ph}|^2 = \frac{\tilde{r}_0^4 \tilde{E}^2}{(4\tilde{E}_M^2 - \tilde{E})^2 + \tilde{r}_0^4 \tilde{E}^2} \quad (4.55)$$

avec la notation $\tilde{x} = x/\hbar v_F$.

Cette expression peut notamment être calculée exactement dans la limite $E_M = 0$:

$$\frac{R(T)}{R_s} = \frac{r_0^2/\hbar v_F}{2\pi k_B T} \Psi' \left(\frac{1}{2} + \frac{r_0^2/\hbar v_F}{2\pi k_B T} \right) \quad (4.56)$$

À température nulle, on retrouve bien $R = R_s$ puisque pour $\alpha = 1/2$, le groupe de renormalisation prédit bien que la jonction Josephson, en l'absence de E_M , a un comportement d'isolant électrique. L'équation (4.55) montre aussi que la présence de E_M modifie drastiquement puisqu'à température nulle $-\frac{\partial n_f}{\partial \omega} = \delta(\omega)$. Pour $E_M \neq 0$, la matrice de diffusion devient nulle en ω_0 et impose alors une résistance $R = 0$. Cependant, pour $k_B T \gg E_M$, l'intégrale se simplifie et on a $R/R_s \simeq \frac{\pi}{4} \frac{r_0^2}{\hbar v_F k_B T}$ ce qui suggère le comportement du circuit est entièrement contrôlé par t_0 . Les différentes courbes sont tracées sur la figure 4.12.

L'équation (4.55) donne cependant une résistance nulle à très hautes températures alors qu'on s'attend à obtenir une valeur R_s puisque la température détruit toute cohérence de phase (régime classique). Cependant, ce résultat n'est valable que pour énergies en-dessous de $\hbar\omega_p$ et ne donne pas le bon comportement à hautes températures, qui est contrôlé notamment par $e^{-E_J/k_B T}$.

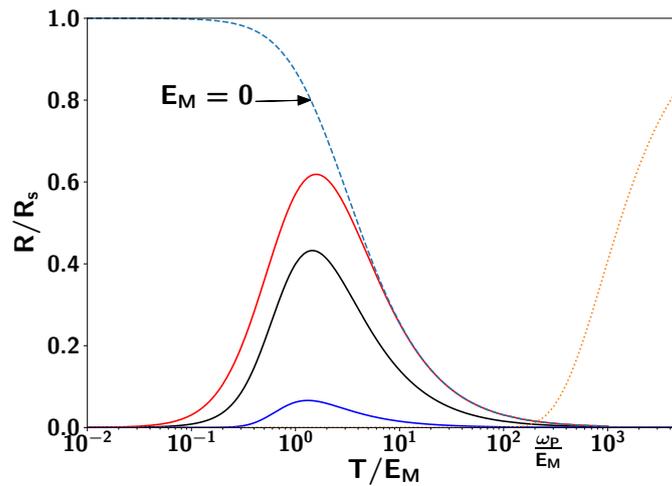


FIGURE 4.12 – Résistance adimensionnée R/R_s en fonction de la température réduite $k_B T/E_M$ pour différentes valeurs de $\tilde{r}_0^2/2\tilde{E}_M$: 0.1 (courbe bleue), 1 (courbe noire) et 2 (courbe rouge). Le cas $E_M = 0$ est représenté en pointillés bleus. La présence d'un maximum local est en accord avec les résultats précédents pour $E_J \ll E_C$. Notons que ce calcul prédit que la résistance tend vers 0 à haute température alors que normalement les effets thermiques brisent la cohérence de phase. En fait, notre calcul est limité à des énergies inférieures à $\hbar\omega_p$ où seules les deux premières bandes sont étudiées. À plus haute température, le calcul classique prédit un comportement en $e^{-E_J/k_B T}$, représenté en pointillés jaunes.

4.3 Conclusions

Nous avons exposé dans ce chapitre le comportement d'une jonction Josephson comportant une périodicité de 2π (jonction simple) et une de 4π (jonction dite topologique) en présence d'un milieu dissipatif, ici une résistance R_s .

Le groupe de renormalisation prédit que les deux systèmes se comportent différemment à température nulle et pour des valeurs de la résistance R_s comprises entre R_q et $4R_q$ avec $R_q = h/e^2$: la jonction simple se comporte comme un isolant et la jonction topologique comme un supraconducteur.

Dans un premier temps, on a résolu le problème du choix d'une phase compacte, associée à la discrétisation de la charge, ou d'une phase étendue. À partir d'une transformation unitaire bien choisie, le nouveau Hamiltonien se réécrit seulement en fonction d'une phase étendue en présence de l'environnement dissipatif. Il s'agit d'une première preuve rigoureuse de l'utilisation d'une phase étendue utilisée dans d'autres articles sur ce sujet.

On a ensuite déterminé le comportement du circuit entier dans les deux cas limites suivants :

- dans le cas où l'énergie de charge E_C domine les énergies Josephson E_J et E_M , un calcul perturbatif a montré que le circuit était essentiellement résistif, c'est à dire que sa résistance effective était égale à celle de la résistance R_s : toute cohérence de phase est perdue. Ce calcul perturbatif a par ailleurs montré que la résistance effective peut passer par un maximum local puis par un minimum local lorsque la température augmente. Cette propriété est due à la compétition entre les deux jonctions à des températures intermédiaires. À plus basse température, le calcul perturbatif n'est plus valable et on s'est tourné vers la refermionisation du système. En remarquant que le modèle refermionisé est équivalent à un état de bord d'effet Hall quantique couplé à un supraconducteur pouvant accueillir des fermions de Majorana, on a relié le calcul de la résistance effective à un problème de diffusion d'électrons/trous relié à la matrice de diffusion. On a alors montré qu'à température nulle, la jonction topologique domine la physique du système et impose une résistance nulle : la cohérence de phase est maintenue même en présence de la dissipation et de la jonction normale, supposée isolante pour ces valeurs de R_s .
- lorsque l'énergie Josephson est la plus grande énergie du problème, on peut décrire le système à partir de la théorie des bandes. La phase est localisée

dans les minima du potentiel et se traduit par une délocalisation de la charge. En l'absence de la jonction topologique, la dissipation supprime les sauts de charge et brise la cohérence de phase. La présence de la jonction topologique modifie ce comportement. La refermionisation de l'Hamiltonien montre que la résistance effective devient non nulle à température nulle et passe par un maximum local. Ce résultat confirme le comportement du système étudié dans la limite précédente.

Ces résultats montrent au final que le comportement du système est déterminée à très basse température par la périodicité la plus grande. À des températures intermédiaires, il y a une compétition entre les deux périodicités et il peut émerger des extrema locaux de la résistance effective. À haute température, la physique est déterminée par la périodicité la plus petite.

La présence des extrema et la valeur à très basse température peuvent être des indicateurs de la présence d'une double périodicité dans le circuit et notamment des fermions de Majorana.

5 Conclusion

Nous avons étudié dans cette thèse différents systèmes quantiques mésoscopiques et leurs propriétés de cohérence de phase.

Dans un premier temps, on a étudié un dispositif qui génère des quasiparticules de charge fractionnaire. Lorsque $N + 1$ états de bord électroniques sont recouverts partiellement par un îlot métallique, un électron d'un des états de bord peut être rétrodiffusé à l'entrée de l'îlot, engendrant l'émission de charges fractionnaires dans chaque état de bord. On récupère alors en sortie une particule hybride entre un électron et un anyon. Afin de connaître la statistique de cette quasiparticule, on a calculé sa statistique de comptage complet et obtenu une fonction caractéristique qui coïncide exactement avec celle d'une distribution poissonienne. On a ensuite proposé une expérience de collision de particules. Le calcul du bruit croisé a permis de montrer que le processus dominant n'est pas un effet de collision pur mais plutôt une propriété fondamentale des anyons, appelée tressage quantique. Notre étude s'est limitée à des sources de tension constante et à un collisionneur symétrique, où chaque voie incidente est identique mais nos raisonnements peuvent être étendus à des sources de tension dépendantes du temps, comme des lévillons, ayant des propriétés fractionnaires.

Nous avons poursuivi notre travail sur l'îlot quantique en étudiant ses effets de cohérence en présence d'une source de tension sinusoïdale et d'effets non-linéaires liés à la rétrodiffusion par un point de contact quantique en entrée de l'îlot. L'approche de Floquet permet de décrire l'état d'un électron soumis à cette tension dépendante du temps. Cet état électronique peut être entièrement déterminé par une distribution de photons virtuels. En étudiant la visibilité des oscillations d'Aharonov-Bohm dans un interféromètre de Mach-Zehnder électronique, nous avons pu mettre en évidence que la rétrodiffusion crée des processus de conversion paramétrique entre ces photons virtuels, associés à des interférences constructives et destructives. Ces interférences peuvent alors diminuer ou augmenter la visibilité dans le cas sans rétrodiffusion. Nous avons aussi constaté que l'état de bord sortant de l'îlot voyait un

potentiel électrique différent de la source de tension en amont. En effet, la rétrodiffusion génère des harmoniques de fréquences supérieures, équivalent à la génération d'harmoniques supérieures en optique non-linéaire. Cette propriété est à l'origine de l'étude de la compression quantique des états faite dans la dernière partie de ce chapitre. Nos calculs ont montré que l'origine de la compression quantique se situe au niveau capacitif. En présence de la source de tension, la capacité quantique du circuit devient dépendante du temps et est équivalente à un oscillateur paramétrique, système nécessaire pour former des états comprimés. La réflexion d'ondes par une condition au limite qui est elle-même modulée dans le temps crée des paires de photons réfléchis. On finit par étudier les conditions optimales pour maximiser cette compression quantique. Nos résultats peuvent notamment être étendus à d'autres sources de tension périodique pouvant notamment améliorer la compression quantique.

Dans la dernière partie, on a étudié l'interaction entre une jonction Josephson, possédant une double périodicité associée au transfert cohérent de paires de Cooper et d'électron, et un élément quantique purement dissipatif. L'étude du comportement du circuit se fait à travers le calcul de la résistance effective du circuit dans deux cas limites : lorsque l'énergie de charge est la plus grande ou plus petite échelle d'énergie. Dans les deux cas, on établit que l'étude de la résistance effective est équivalente à regarder le couplage d'un état de bord chiral avec un supraconducteur abritant des fermions de Majorana. Le problème revient à étudier une diffusion d'électron sur ce supraconducteur. On prouve ainsi que le comportement du système entier est supraconducteur à basse température, mais aussi que la résistance effective a un comportement non monotone en fonction de la température résultant d'une réelle compétition entre les deux jonctions. En parallèle de ces résultats, on a réussi à résoudre le problème de la phase compacte et de la phase étendue. Grâce à une transformation unitaire bien choisie, le choix d'utiliser une phase compacte ou une phase étendue n'a plus de sens car la phase associée à la discrétisation de la charge disparaît totalement du calcul. Dans le cadre de ce système, un certain nombre de points peuvent être apportés à notre travail. On peut à nouveau étudier le régime hors équilibre. L'article [70] a par ailleurs montré que la largeur de bande des modes résistifs joue un rôle fondamental dans la transition de phase d'une jonction Josephson standard couplé au milieu dissipatif. Il serait alors intéressant de regarder l'effet de cette largeur de bande pour notre système sur la résistance effective du circuit.

Appendice A: Lignes de transmission

A.1 Description

Cet appendice est un bref rappel sur les lignes de transmission quantique. Un lecteur plus curieux peut notamment lire la thèse [60].

Une ligne de transmission infinie est composée d'une succession infinie de condensateurs de capacité C et de bobines d'inductance L .

Lorsque la taille caractéristique de chaque élément LC est très petite devant la longueur caractéristique de la chaîne totale, le potentiel V et la charge Q de chaque condensateur devient une fonction du temps t et de la position x à l'intérieur de la ligne. En physique quantique, ces grandeurs deviennent des opérateurs et le Lagrangien de la ligne de transmission infinie s'écrit

$$\hat{\mathcal{L}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{\ell}{2} \left(\partial_t \hat{Q}(x, t) \right)^2 + \frac{1}{2c} \left(\partial_x \hat{Q}(x, t) \right)^2 \right] \quad (\text{A.1})$$

où ℓ et c sont respectivement les inductances et capacités linéiques de la ligne. L'impédance Z de la ligne est alors caractérisée par $Z = \sqrt{\ell/c}$. La résolution des équations donne

$$\ell \partial_t^2 \hat{Q}(x, t) = \frac{1}{c} \partial_x^2 \hat{Q}(x, t) \quad (\text{A.2})$$

Les solutions de cette équation d'onde peuvent alors s'écrire en terme d'ondes progressives : $\hat{Q}(x, t) = \hat{Q}_L(t + x/v) + \hat{Q}_R(t - x/v)$ où $v = 1/\sqrt{\ell c}$ est la vitesse de déplacement de l'onde et les indices L, R correspondent respectivement aux ondes qui se propagent dans le sens des x décroissants et des x croissants. Il est alors intéressant de décomposer la charge $\hat{Q}(x, t)$ comme une superposition d'ondes planes progressives :

$$\hat{Q}(x, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi Z}} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} \left[\hat{A}_L(\omega) e^{-i\omega(t+x/v)} - \hat{A}_R(\omega) e^{-i\omega(t-x/v)} + c.h. \right] \quad (\text{A.3})$$

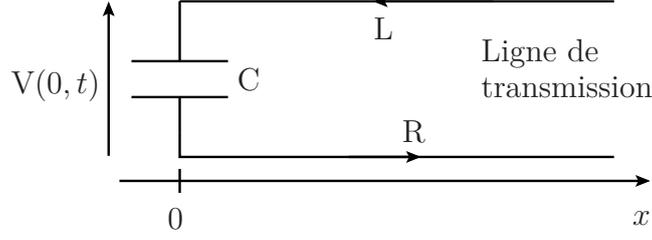


FIGURE A.1 – Ligne de transmission semi-infinie d'impédance Z reliée à un condensateur de capacité C en $x = 0$. Le condensateur couple les états L et R de la ligne.

où $\hat{A}_{L/R}$ sont des opérateurs de Bose associés aux ondes L/R et vérifient $[\hat{A}_j(\omega), \hat{A}_k(\omega')] = \delta(\omega - \omega')\delta_{jk}$. Dans cette représentation, l'Hamiltonien (A.1) s'écrit

$$\hat{H} = \int_0^{+\infty} d\omega \hbar\omega \left(\hat{A}_L^\dagger(\omega)\hat{A}_L(\omega) + \hat{A}_R^\dagger(\omega)\hat{A}_R(\omega) \right) \quad (\text{A.4})$$

à une constante près choisie nulle. On peut alors calculer l'opérateur tension $\hat{V}(x, t)$ en tout point de la ligne :

$$\hat{V}(x, t) = \frac{1}{c}\partial_x\hat{Q}(x, t) = -i\sqrt{\frac{\hbar Z}{4\pi}} \int_0^{+\infty} d\omega \sqrt{\omega} \left[\hat{A}_L(\omega)e^{-i\omega(t+x/v)} + \hat{A}_R(\omega)e^{-i\omega(t-x/v)} - c.h. \right] \quad (\text{A.5})$$

La notion de ligne de transmission permet notamment de simuler des éléments résistifs tels qu'une résistance $Z = R_s$ ou même des états de bord bosoniques de résistance $Z = R_q/2 = h/2e^2$.

A.2 Condition aux limites

Regardons le cas où une ligne de transmission se termine en $x = 0$ par une capacité C (voir figure A.1). Pour $x > 0$, l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la charge est identique à (A.2). En $x = 0$, la relation du condensateur $Q(0, t) = CV(0, t)$ impose avec (A.3) et (A.5),

$$\sqrt{\frac{\hbar}{4\pi Z}} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \left[\hat{A}_L(\omega) - \hat{A}_R(\omega) \right] = -i\sqrt{\frac{\hbar Z}{4\pi}} \sqrt{\omega} \left[\hat{A}_L(\omega) + \hat{A}_R(\omega) \right] \quad (\text{A.6})$$

On en déduit la relation entre les opérateurs $\hat{A}_L(\omega)$ et $\hat{A}_R(\omega)$:

$$\hat{A}_R(\omega) = \frac{1 + iZC\omega}{1 - iZC\omega} \hat{A}_L(\omega) \quad (\text{A.7})$$

Appendice B: Équations du mouvement de l'îlot quantique

On propose dans cet appendice de dériver les équations du mouvement de l'îlot quantique nécessaires aux parties 1.4.3 et 3.1.

Tout d'abord il est intéressant de regarder la résolution mathématique du cas libre, c'est-à-dire sans interaction de charge.

B.1 Cas libre : $E_c = 0$

L'Hamiltonien se réduit à

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar v_F}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \{(\partial_x \phi_L)^2 + (\partial_x \phi_R)^2\} - \frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx V(x, t) \partial_x \phi_L \quad (\text{B.1})$$

Les équations du mouvements associées aux champs $\phi_{R/L}$ peuvent se déduire des équations de Heisenberg : $\partial_t \phi_{R/L} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \phi_{R/L}]$. On obtient

$$\begin{aligned} \partial_t \phi_R &= -v_F \partial_x \phi_R \\ \partial_t \phi_L &= v_F \partial_x \phi_L - \frac{e}{\hbar} V(x, t) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Les solutions s'écrivent

$$\begin{aligned} \phi_R^{(0)}(x, t) &= \phi_R^{(0)}(x - v_F(t - t_0), t_0) \\ \phi_L^{(0)}(x, t) &= \phi_L^{(0)}(x + v_F(t - t_0), t_0) - \frac{e}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' V(x + v_F(t - t'), t') \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Le paramètre t_0 est un temps de référence arbitraire. Tant que les temps étudiés sont plus grand que t_0 , ce paramètre ne joue pas de rôle. On peut alors choisir $t_0 \rightarrow -\infty$ sans conséquence. Avec la forme $V(x, t) = \theta(x - d)V(t)$ avec $x = d$ la position de la source de tension, on a

$$\int_{-\infty}^t dt' V(x + v_F(t - t'), t') = \int_{-\infty}^{t + \frac{x-d}{v_F}} dt' V(t') \quad (\text{B.4})$$

On peut alors faire disparaître le paramètre d en redéfinissant l'origine des temps dans $V(t)$. Finalement,

$$\begin{aligned} \phi_R^{(0)}(x, t) &= \phi_R^{(0)}(x - v_F(t - t_0), t_0) \\ \phi_L^{(0)}(x, t) &= \phi_L^{(0)}(x + v_F(t - t_0), t_0) - \frac{e}{\hbar} \int_{-\infty}^{t + \frac{x}{v_F}} dt' V(t') \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

On introduit souvent $\Phi(t) = \frac{e}{\hbar} \int_{-\infty}^{t + \frac{x}{v_F}} dt' V(t')$ la phase accumulée le long de l'état de bord.

B.2 Prise en compte de l'îlot avec un seul canal $N = 0$

On se limite pour le moment à un îlot quantique traversé par un seul état de bord ($N = 0$) toujours avec une source de tension $V(x, t) = \theta(x - d)V(t)$.

On rappelle l'Hamiltonien bosonisé de l'îlot en l'absence de rétrodiffusion :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{E_c}{4\pi^2} (\phi_R(0) - \phi_L(0) - 2\pi N_g)^2 \quad (\text{B.6})$$

avec $\hat{N} = \frac{1}{2\pi}(\phi_R(0) - \phi_L(0))$ et \hat{H}_0 l'expression (B.1). Les équations du mouvements deviennent

$$\begin{aligned} \partial_t \phi_R &= -v_F \partial_x \phi_R - \frac{2E_c}{\hbar} (\hat{N} - N_g) \theta(-x) \\ \partial_t \phi_L &= v_F \partial_x \phi_L - \frac{2E_c}{\hbar} (\hat{N} - N_g) \theta(-x) - \frac{e}{\hbar} \theta(x - d) V(t) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

On remarque d'après ces équations que le terme de charge, proportionnel à E_C , couple les deux phases ϕ_R et ϕ_L . En l'absence de ce terme, on retrouve bien deux états de bord indépendants qui ne se parlent pas (voir (B.5)). Les solutions sont pour $x > 0$

$$\begin{aligned} \phi_R(x, t) &= \phi_R^{(0)}(x, t) - \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{t - \frac{x}{v_F}} dt' e^{-\frac{t-t'-x/v_F}{\tau}} \varphi(t') \\ \phi_L(x, t) &= \phi_L^{(0)}(x, t) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

où $\tau = R_q C = \pi \hbar / E_c$ et $\varphi(t) = \phi_R^{(0)}(0, t) - \phi_L^{(0)}(0, t) - 2\pi N_g$. La notation $\phi_{R/L}^{(0)}$ fait référence aux solutions (B.5) en l'absence de E_c , c'est-à-dire à des bosons libres. On remarque bien que le terme de charge n'apparaît pas dans ϕ_L pour $x > 0$ puisque l'état de bord n'a pas encore atteint l'îlot.

Pour $x < 0$, à l'intérieur de l'îlot, les solutions deviennent

$$\begin{aligned}\phi_R(x, t) &= \phi_R^{(0)}(x, t) - \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^t dt' e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \varphi(t') \\ \phi_L(x, t) &= \phi_L^{(0)}(x, t) - \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^t dt' e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \left[\varphi(t') - \varphi\left(t' + \frac{x}{v_F}\right) \right]\end{aligned}\quad (\text{B.9})$$

Notons que les solutions (B.8) et (B.9) coïncident bien en $x = 0$.

Le potentiel $V(x, t)$ est caché dans les expressions de $\phi_{R/L}^{(0)}$, d'après les équations (B.5). Il peut être intéressant de les afficher dans les équations précédentes, notamment pour $x > 0$ puisque c'est dans ce domaine que nous ferons tous les calculs. Les solutions (B.8) deviennent

$$\begin{aligned}\phi_R(x, t) &= \phi_R^{(0)}(x - v_F(t - t_0), t_0) - \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{t - \frac{x}{v_F}} dt' e^{-\frac{t-t'-x/v_F}{\tau}} \varphi(t') - \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{t - \frac{x}{v_F}} dt' e^{-\frac{t-t'-x/v_F}{\tau}} \Phi(t') \\ \phi_L^{(0)}(x, t) &= \phi_L(x + v_F(t - t_0), t_0) - \Phi(t + x/v_F)\end{aligned}\quad (\text{B.10})$$

avec, à nouveau, $\Phi(t) = \frac{e}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' V(t')$

B.3 Équations en présence de N canaux de bord

On regarde les nouvelles équations du mouvement lorsque l'îlot quantique est traversé par N canaux de bord supplémentaires.

La partie 2.1.1 suggère que la résolution des équations du mouvement nécessite de choisir un nouveau jeu de variables $\tilde{\phi}_{R/L,i} = O_{ij} \phi_{R/L,j}$ dont on rappelle les premiers termes :

$$\tilde{\phi}_{R/L,1} = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{i=1}^{N+1} \phi_{R/L,i} \quad \text{et} \quad \tilde{\phi}_{R/L,2} = \sqrt{\frac{N}{N+1}} \left(\phi_{R/L,1} - \frac{1}{N} \sum_{i=2}^{N+1} \phi_{R/L,i} \right) \quad (\text{B.11})$$

Cette décomposition modifie l'expression de \hat{N} qui devient $\hat{N} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{N+1} [\tilde{\phi}_{R,1}(0) - \tilde{\phi}_{L,1}(0)]$. Les équations du mouvement sur ces nouveaux champs deviennent en l'absence de source de tension

$$\begin{aligned}
\partial_t \tilde{\phi}_{R,j} &= -v_F \partial_x \tilde{\phi}_{R,j} - \frac{2E_c}{\hbar} \delta_{1,j} \sqrt{N+1} (\hat{N} - N_g) \theta(-x) \\
\partial_t \tilde{\phi}_{L,j} &= v_F \partial_x \tilde{\phi}_{L,j} - \frac{2E_c}{\hbar} \delta_{1,j} \sqrt{N+1} (\hat{N} - N_g) \theta(-x)
\end{aligned}
\tag{B.12}$$

Les solutions sont exactement les mêmes que (B.10) à condition de modifier l'expression de τ en $\pi\hbar/(N+1)E_c$.

Appendice C: Statistique des fermions en sortie d'un QPC

Dans cet appendice, on détermine l'expression du corrélateur $\langle \psi_R(L, t) \psi_R^\dagger(L, 0) \rangle$ en sortie d'un QPC. On utilise pour cela une approche de Keldysh :

$$\langle \psi_R(L, t) \psi_R^\dagger(L, 0) \rangle = \langle T_K \psi_R(L, t^-) \psi_R^\dagger(L, 0^+) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_K dt' \hat{H}_{bs}(t')} \rangle \quad (\text{C.1})$$

Sans perte de généralité, on considère $t > 0$. Comme $r \ll 1$, on peut traiter l'Hamiltonien \hat{H}_r de manière perturbative en r . On peut alors décomposer le corrélateur jusqu'à l'ordre 2 en r :

$$\begin{aligned} \langle \psi_R(L, t) \psi_R^\dagger(L, 0) \rangle_{(0)} &= \frac{1}{2\pi v_F} \frac{1}{a + it} \\ \langle \psi_R(L, t) \psi_R^\dagger(L, 0) \rangle_{(2)} &= -r^2 v_F^2 \sum_{\eta_i = \pm 1} \eta_1 \eta_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \langle \psi_R(L, t^-) \psi_R^\dagger(L, 0^+) \mathcal{T}(t_1^{\eta_1}) \mathcal{T}^\dagger(t_2^{\eta_2}) \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

où η_i sont les indices de Keldysh associés aux deux types de contours. Les valeurs moyennes sont prises respectivement par rapport à l'Hamiltonien $\hat{H}_0 + \hat{H}_s$. Le développement du corrélateur de l'ordre 2 et l'utilisation du théorème de Wick permet d'écrire

$$\begin{aligned} \langle \psi_R(L, t) \psi_R^\dagger(L, 0) \rangle_{(2)} &= -\frac{r^2}{(2\pi)^3} \sum_{\eta_i = \pm 1} \eta_1 \eta_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \frac{e^{-i\frac{eV}{\hbar}(t_1 - t_2)}}{a + i(t_1 - t_2) \chi_{12}(t_1 - t_2)} \\ &\times \left(\frac{1}{a + it} \frac{1}{a + i(t_1 - t_2) \chi_{12}(t_1 - t_2)} \right. \\ &\left. - \frac{1}{a + i(t - L/v_F - t_1) \chi_{-1}(t - t_1)} \frac{1}{a - i(t_2 + L/v_F) \chi_{+2}(-t_2)} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

où on a introduit $\chi_{\eta_1 \eta_2}(t) = \{\text{sgn}(t)(\eta_1 + \eta_2) - (\eta_1 - \eta_2)\}/2$ et utilisé les formules (1.47). Le principe de causalité impose la relation $\sum_{\eta_i} \eta_1 \eta_2 \frac{1}{[a + i(t_1 - t_2) \chi_{12}(t_1 - t_2)]^2} = 0$. Il ne

reste alors que le dernier terme à calculer. De plus, si le QPC de l'interféromètre est suffisamment éloigné des émetteurs, on peut décaler les temps t_1 et t_2 et intégrer le facteur L dans les fonctions $\chi_{\eta_1\eta_2}$. On peut alors simplifier ces fonctions : $\chi_{-1} = \eta_1$ et $\chi_{+2} = \eta_2$. Il reste alors

$$\begin{aligned} \langle \psi_R(L, t) \psi_R^\dagger(L, 0) \rangle_{(2)} &= \frac{r^2}{(2\pi)^3} \sum_{\eta_i = \pm 1} \eta_1 \eta_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \frac{e^{-i\frac{eV}{\hbar}(t_1-t_2)}}{a + i(t_1 - t_2)\chi_{12}(t_1 - t_2)} \\ &\quad \times \frac{1}{a + i\eta_1(t - t_1)} \frac{1}{a - i\eta_2 t_2} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Les contributions $\eta_1 = \eta_2 = +1$ et -1 se compensent exactement. La seule contribution qui survit à température nulle correspond à $\eta_1 = -\eta_2 = 1$. Le théorème des résidus donne

$$\langle \psi_R(L, t) \psi_R^\dagger(L, 0) \rangle_{(2)} = \frac{r^2}{2\pi v_F} \frac{1}{a + it} (e^{-i\frac{eV}{\hbar}t} - 1) \quad (\text{C.5})$$

Cette expression ne fait aucune hypothèse sur le temps. Elle est à la fois valable pour les temps courts et les temps longs. On en déduit l'expression du corrélateur

$$\langle \psi_R(L, t) \psi_R^\dagger(L, 0) \rangle = \frac{1}{2\pi v_F} \frac{1}{a + it} \left[1 + r^2 (e^{-i\frac{eV}{\hbar}t} - 1) \right] \quad \text{avec } I = \frac{r^2 e^2 V}{h} \quad (\text{C.6})$$

Appendice D: Fonction caractéristique de la FCS

Dans cet appendice, on donne les étapes de dérivation de l'équation (2.23). On part de

$$\ln \chi(\lambda) = \langle T_K e^{-iv_F r \int_K dt [\mathcal{T}(t)e^{i\eta\lambda\nu/2} + \mathcal{T}^\dagger(t)e^{-i\eta\lambda\nu/2}]} \rangle \quad (\text{D.1})$$

On peut développer cette expression jusqu'à l'ordre 2 en r , l'ordre 1 étant égal à zéro. Le terme d'ordre 2 s'écrit

$$\ln \chi^{(2)}(\lambda) = -\frac{v_F^2 r^2}{2} \sum_{\eta_{1/2}=\pm 1} \eta_1 \eta_2 \int_0^t dt_1 dt_2 \left[\langle \mathcal{T}(t_1^{\eta_1}) \mathcal{T}^\dagger(t_2^{\eta_2}) \rangle e^{i(\eta_1 - \eta_2) \frac{\lambda\nu}{2}} + \langle \mathcal{T}^\dagger(t_1^{\eta_1}) \mathcal{T}(t_2^{\eta_2}) \rangle e^{-i(\eta_1 - \eta_2) \frac{\lambda\nu}{2}} \right] \quad (\text{D.2})$$

On rappelle que $\mathcal{T} = \mathcal{N} e^{-ih(t) - ieVt/\hbar}$ avec $\mathcal{N} = \frac{D}{2\pi\hbar v_F} \left(\frac{e^\gamma(N+1)E_c}{\pi D} \right)^{1/(N+1)}$ et $h(t) = \sqrt{\frac{N}{N+1}} (\tilde{\phi}_{R,2} - \tilde{\phi}_{L,2})$. On en déduit

$$\langle \mathcal{T}(t_1^{\eta_1}) \mathcal{T}^\dagger(t_2^{\eta_2}) \rangle = \mathcal{N}^2 e^{-i\frac{eV}{\hbar}(t_1 - t_2)} \langle e^{-ih(t_1^{\eta_1})} e^{ih(t_2^{\eta_2})} \rangle \quad (\text{D.3})$$

Le champ h correspond à un champ bosonique libre de dimension ν d'où

$$G_{\eta_1 \eta_2}(t_1, t_2) = \langle e^{-ih(t_1^{\eta_1})} e^{ih(t_2^{\eta_2})} \rangle = \left(\frac{\hbar/D}{\hbar/D + i(t_1 - t_2)\chi_{\eta_1 \eta_2}(t_1 - t_2)} \right)^{2\nu} \quad (\text{D.4})$$

où $\chi_{\eta_1 \eta_2}(t) = \{\text{sgn}(t)(\eta_1 + \eta_2) - (\eta_1 - \eta_2)\}/2$. Rappelons la relation de causalité :

$$G_{++}(t_1, t_2) + G_{--}(t_1, t_2) = G_{+-}(t_1, t_2) + G_{-+}(t_1, t_2) \quad (\text{D.5})$$

La sommation sur les indices η_1 et η_2 et la relation de causalité permettent d'écrire

$$\ln \chi^{(2)}(\lambda) = -\frac{r^2 \hbar^{2\nu}}{2(2\pi\hbar)^2} \left(\frac{e^\gamma(N+1)E_c}{\pi} \right)^{\frac{2}{N+1}} \times \left\{ \int_0^t \frac{dt_1 dt_2}{[a - i(t_1 - t_2)]^{2\nu}} \left[(1 - e^{i\lambda\nu}) e^{-i\frac{eV}{\hbar}(t_1 - t_2)} + (1 - e^{-i\lambda\nu}) e^{i\frac{eV}{\hbar}(t_1 - t_2)} \right] + \int_0^t \frac{dt_1 dt_2}{[a + i(t_1 - t_2)]^{2\nu}} \left[(1 - e^{-i\lambda\nu}) e^{-i\frac{eV}{\hbar}(t_1 - t_2)} + (1 - e^{i\lambda\nu}) e^{i\frac{eV}{\hbar}(t_1 - t_2)} \right] \right\} \quad (\text{D.6})$$

Ces intégrales sont dominées pour $t_1 \simeq t_2$. Il est donc préférable de changer les variables de ces intégrales en les remplaçant par le centre de masse temporel et le temps relatif $\tau = t_1 - t_2$. Au temps longs, et pour $t > 0$,

$$\ln \chi^{(2)}(\lambda) = -\frac{r^2 \hbar^{2\nu}}{(2\pi\hbar)^2} \left(\frac{e^\gamma(N+1)E_c}{\pi} \right)^{\frac{2}{N+1}} \times t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{(a + i\tau)^{2\nu}} \left[A^* \nu(\lambda) e^{-i\frac{eV}{\hbar}\tau} + A_\nu(\lambda) e^{i\frac{eV}{\hbar}\tau} \right] \quad (\text{D.7})$$

où on introduit $A_\nu(\lambda) = 1 - e^{i\lambda\nu}$. Pour $t < 0$, on remplace t en $-t$. Le calcul de l'intégrale donne au final

$$\ln \chi^{(2)}(\lambda) = -\frac{r^2 eV}{2\pi^2 \hbar} \left(\frac{e^\gamma(N+1)E_c}{\pi eV} \right)^{2(1-\nu)} \Gamma(1 - 2\nu) \sin(2\pi\nu) t \left(1 - e^{i\lambda\nu \operatorname{sgn}(V)} \right) \quad (\text{D.8})$$

Avec l'expression du courant sortant (2.15), on tombe bien sur

$$\ln \chi(\lambda) \simeq -\frac{I}{e} |t| \left(1 - e^{i\lambda\nu \operatorname{sgn}(V)} \right) \quad (\text{D.9})$$

Appendice E: Résistance effective

On redérive dans cet appendice l'expression de la résistance (4.15). Étudions le cas $E_M = 0$ afin d'alléger le calcul.

Le calcul de la résistance se ramène au calcul du corrélateur $\langle \sin[p\phi_0(\tau)] \sin[p\phi_0(0)] \rangle$ avec $p = 1, 2$. Dans la limite $E_J \ll E_C$, l'Hamiltonian est quadratique et le théorème de Wick s'applique

$$\langle \sin[p\phi_0(\tau)] \sin \phi_0(0) \rangle = \frac{1}{2} e^{J(\tau,p)} \quad (\text{E.1})$$

Pour des temps réels, $J(t, p)$ suit l'équation (4.14). Notons que dans l'équation précédente, le corrélateur $\langle e^{ip\phi_0(\tau)} e^{ip\phi_0(0)} \rangle$ qui tend vers 0. Pour $E_M = 0$, la résistance s'écrit

$$\frac{R}{R_s} = 1 + \frac{\pi E_J^2}{\alpha \hbar^2} \lim_{\omega \rightarrow 0} \mathcal{R} \left[\frac{i}{\omega} \lim_{i\omega_n \rightarrow \omega + i0^+} \int_0^{\hbar\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} e^{J(\tau,2)} \right] \quad (\text{E.2})$$

Afin d'utiliser l'expression (4.14) en temps réel, on déforme le contour d'intégration sur τ :

$$\int_0^{\hbar\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} e^{J(\tau,2)} = \int_0^{+\infty} d(it) e^{i\omega_n(it)} e^{J(t,2)} - \int_0^{+\infty} d(it) e^{i\omega_n(it+\beta\hbar)} e^{J(t-i\beta\hbar,2)} \quad (\text{E.3})$$

La définition des pulsations de Matsubara permet d'écrire $\omega_n \hbar \beta = 2\pi n$ et $J(t - i\beta\hbar, 2) = J(-t, 2)$. On peut alors réaliser le prolongement analytique $i\omega_n \rightarrow \omega + i0^+$ et l'équation (E.2) devient

$$\frac{R}{R_s} = 1 - \frac{\pi E_J^2}{\alpha \hbar} \lim_{\omega \rightarrow 0} \mathcal{R} \left[\frac{1}{\omega} \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega t} \left(e^{J(t,2)} - e^{J(-t,2)} \right) \right] \quad (\text{E.4})$$

On peut prendre la limite $\omega \rightarrow 0$, c'est-à-dire $e^{i\omega t} \simeq 1 + i\omega t$. Par conséquent,

$$\frac{R}{R_s} = 1 - \frac{\pi E_J^2}{\alpha \hbar^2} \mathcal{R} \left[i \int_0^{+\infty} dt t \left(e^{J(t,2)} - e^{J(-t,2)} \right) \right] = 1 - \frac{\pi E_J^2}{\alpha \hbar^2} \mathcal{R} \left[i \int_0^{+\infty} dt t e^{J(t,2)} \right] \quad (\text{E.5})$$

On peut à nouveau déformer le contour d'intégration en décalant le temps t par $t - i\hbar\beta/2$. La fonction $J(t, 2)$ devient

$$J\left(t - \frac{\hbar\beta}{2}\right) = j_2(t) = \frac{4}{\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega} \times \frac{1}{1 + R_s^2 C^2 \omega^2} \frac{\cos(\omega t) - \cosh(\beta\hbar\omega/2)}{\sinh(\beta\hbar\omega/2)} \quad (\text{E.6})$$

qui devient une fonction paire par rapport à la variable t . L'équation (E.5) devient

$$\frac{R}{R_s} = 1 - \frac{\pi E_J^2 \beta}{\alpha \hbar} \int_0^{+\infty} dt e^{j_2(t)} \quad (\text{E.7})$$

L'évaluation numérique de l'expression précédente peut se révéler délicate. Néanmoins, notons que l'équation (E.6) possède une solution analytique :

$$j_2(t) = -\frac{4}{\alpha} \left[\frac{\pi}{\hbar\beta} \left(t - \frac{i\beta\hbar}{2} \right) + i\pi \frac{1 - e^{-\omega_{RC}(t - i\hbar\beta/2)}}{1 - e^{i\hbar\beta\omega_{RC}}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\omega_{RC}^2}{n(\omega_{RC}^2 - \omega_n^2)} \left(1 - e^{-\omega_n(t - i\hbar\beta/2)} \right) \right] \quad (\text{E.8})$$

où on a introduit $\omega_{RC} = 1/R_s C$ et $\omega_n = 2\pi n/\hbar\beta$. Cette somme peut alors être évaluée à partir de fonctions spéciales :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\omega_{RC}^2}{n(\omega_{RC}^2 - \omega_n^2)} \left(1 - e^{-\omega_n(t - i\hbar\beta/2)} \right) &= \gamma + \ln \left(1 + e^{-2\pi t/\hbar\beta} \right) + \frac{1}{2} \left(\Psi(1 - a) + \Psi(1 + a) \right) \\ &- \frac{1}{2} e^{-2\pi t/\hbar\beta} \left[\frac{1}{1 - a} {}_2F_1 \left(1, 1 - a, 2 - a, -e^{-2\pi t/\hbar\beta} \right) + \frac{1}{1 + a} {}_2F_1 \left(1, 1 + a, 2 + a, -e^{-2\pi t/\hbar\beta} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

avec $a = \hbar\beta\omega_{RC}/2\pi$, γ la constante d'Euler, Ψ la fonction digamma et ${}_2F_1$ la fonction hypergéométrique. Avec les relations, $\Psi(1 + a) = \Psi(a) + 1/a$ et $\Psi(1 - a) = \Psi(a) + \pi \cotan(\pi a)$, on peut finalement réécrire (E.7) sous la forme

$$\frac{R}{R_s} = 1 - \frac{E_J^2}{2\alpha(k_B T)^2} \int_0^{+\infty} dy e^{j_2(y, \alpha E_C/\pi^2 k_B T)} \quad (\text{E.10})$$

en faisant le changement de variable $y = 2\pi t/\hbar\beta$. On rappelle que $E_c = \frac{\hbar\pi}{R_s C}$. La fonction j_2 est définie par

$$\begin{aligned} j_2(y, a) &= -\frac{4}{\alpha} \left\{ \gamma + \Psi(a) + \ln 2 + \ln \cosh \left(\frac{y}{2} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a} + \frac{\pi e^{-ay}}{\sin(\pi a)} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-y}}{2} \left[\frac{1}{1 - a} {}_2F_1 \left(1, 1 - a, 2 - a, -e^{-y} \right) + \frac{1}{1 + a} {}_2F_1 \left(1, 1 + a, 2 + a, -e^{-y} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Les expressions (E.10) et (E.11) permettent alors de tracer les différentes courbes numériquement.

Notons que la prise en compte de E_M dans le calcul revient à reprendre le second terme à droite de l'égalité (E.10) et à remplacer E_J par E_M puis $4/\alpha$ en $1/\alpha$.

Bibliographie

- [1] Alexander Streltsov, Gerardo Adesso, and Martin B. Plenio. Colloquium : Quantum coherence as a resource. *Rev. Mod. Phys.*, 89 :041003, Oct 2017.
- [2] G. Fève, A. Mahé, J.-M. Berroir, T. Kontos, B. Placais, D. C. Glattli, A. Cavanna, B. Etienne, and Y. Jin. An on-demand coherent single-electron source. *Science*, 316 :1169–1172, May 2007.
- [3] H. Bartolomei, M. Kumar, R. Bisognin, A. Marguerite, J.-M. Berroir, E. Bocquillon, B. Plaçais, A. Cavanna, Q. Dong, U. Gennser, Y. Jin, and G. Fève. Fractional statistics in anyon collisions. *Science*, 368 :173–177, 2020.
- [4] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin. *Solid State Physics*. 33^e éd. HRW international editions. Holt, Rinehart and Winston, 2011.
- [5] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. Wiley, 2004.
- [6] Christopher Bäuerle, François Mallet, Félicien Schopfer, Dominique Mailly, Georg Eska, and Laurent Saminadayar. Experimental test of the numerical renormalization-group theory for inelastic scattering from magnetic impurities. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :266805, Dec 2005.
- [7] F. Mallet, J. Ericsson, D. Mailly, S. Ünlübayir, D. Reuter, A. Melnikov, A. D. Wieck, T. Micklitz, A. Rosch, T. A. Costi, L. Saminadayar, and C. Bäuerle. Scaling of the low-temperature dephasing rate in kondo systems. *Phys. Rev. Lett.*, 97 :226804, Nov 2006.
- [8] László Borda, Lars Fritz, Natan Andrei, and Gergely Zaránd. Theory of inelastic scattering from quantum impurities. *Phys. Rev. B*, 75 :235112, Jun 2007.
- [9] V. Freulon. *Etude de la décohérence de paquets d'onde monoélectroniques dans les canaux de bord de l'effet Hall quantique entier*. *Systèmes mésoscopiques et effet Hall quantique*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure, 2014.
- [10] D. Yoshioka. *The Quantum Hall Effect*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH and Co, 2002.

- [11] B. I. Halperin. Quantized hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential. *Phys. Rev. B*, 25 :2185–2190, Feb 1982.
- [12] Preden Roulleau, F. Portier, P. Roche, A. Cavanna, G. Faini, U. Gennser, and D. Mailly. Direct measurement of the coherence length of edge states in the integer quantum hall regime. *Phys. Rev. Lett.*, 100 :126802, Mar 2008.
- [13] P-A. Huynh, F. Portier, H. le Sueur, G. Faini, U. Gennser, D. Mailly, F. Pierre, W. Wegscheider, and P. Roche. Quantum coherence engineering in the integer quantum hall regime. *Phys. Rev. Lett.*, 108 :256802, Jun 2012.
- [14] M. Büttiker. Absence of backscattering in the quantum hall effect in multi-probe conductors. *Phys. Rev. B*, 38 :9375–9389, Nov 1988.
- [15] Thierry Martin and Shechao Feng. Suppression of scattering in electron transport in mesoscopic quantum hall systems. *Phys. Rev. Lett.*, 64 :1971–1974, Apr 1990.
- [16] E. Bocquillon, V. Freulon, J.-M Berroire, P. Degiovanni, B. Plaçais, A. Cavanna, Y. Jin, and G. Fève. Coherence and indistinguishability of single electrons emitted by independent sources. *Nature*, 339, 2013.
- [17] Preden Roulleau, F. Portier, P. Roche, A. Cavanna, G. Faini, U. Gennser, and D. Mailly. Direct measurement of the coherence length of edge states in the integer quantum hall regime. *Phys. Rev. Lett.*, 100 :126802, Mar 2008.
- [18] P. Roulleau, F. Portier, P. Roche, A. Cavanna, G. Faini, U. Gennser, and D. Mailly. Noise dephasing in edge states of the integer quantum hall regime. *Phys. Rev. Lett.*, 101 :186803, Oct 2008.
- [19] D. L. Kovrizhin and J. T. Chalker. Multiparticle interference in electronic mach-zehnder interferometers. *Phys. Rev. B*, 81 :155318, Apr 2010.
- [20] E. Thibierge. *Cohérence à un et deux électrons en optique quantique électronique*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 2015.
- [21] Géraldine Haack, Michael Moskalets, Janine Splettstoesser, and Markus Büttiker. Coherence of single-electron sources from mach-zehnder interferometry. *Phys. Rev. B*, 84 :081303, Aug 2011.
- [22] G. Haack, M. Moskalets, and M. Büttiker. Glauber coherence of single-electron sources. *Phys. Rev. B*, 87 :201302, May 2013.
- [23] V. S.-W. Chung, P. Samuelsson, and M. Büttiker. Visibility of current and shot noise in electrical mach-zehnder and hanbury brown twiss interferometers. *Phys. Rev. B*, 72 :125320, Sep 2005.

- [24] Patrick P. Hofer and Christian Flindt. Mach-zehnder interferometry with periodic voltage pulses. *Phys. Rev. B*, 90 :235416, Dec 2014.
- [25] Yang Ji, Yunchul Chung, D. Sprinzak, M. Heiblum, D. Mahalu, and Hadas Shtrikman. An electronic mach-zehnder interferometer. *Nature*, 422, 2003.
- [26] I. Neder, M. Heiblum, Y. Levinson, D. Mahalu, and V. Umansky. Unexpected behavior in a two-path electron interferometer. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :016804, Jan 2006.
- [27] Preden Roulleau, F. Portier, D. C. Glatli, P. Roche, A. Cavanna, G. Faini, U. Gennser, and D. Mailly. Finite bias visibility of the electronic mach-zehnder interferometer. *Phys. Rev. B*, 76 :161309, Oct 2007.
- [28] Eugene V. Sukhorukov and Vadim V. Cheianov. Resonant dephasing in the electronic mach-zehnder interferometer. *Phys. Rev. Lett.*, 99 :156801, Oct 2007.
- [29] Ivan P. Levkivskyi and Eugene V. Sukhorukov. Dephasing in the electronic mach-zehnder interferometer at filling factor $\nu = 2$. *Phys. Rev. B*, 78 :045322, Jul 2008.
- [30] J. T. Chalker, Yuval Gefen, and M. Y. Veillette. Decoherence and interactions in an electronic mach-zehnder interferometer. *Phys. Rev. B*, 76 :085320, Aug 2007.
- [31] Seok-Chan Youn, Hyun-Woo Lee, and H.-S. Sim. Nonequilibrium dephasing in an electronic mach-zehnder interferometer. *Phys. Rev. Lett.*, 100 :196807, May 2008.
- [32] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel. Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference. *Phys. Rev. Lett.*, 59 :2044–2046, Nov 1987.
- [33] Ch Grenier, R Hervé, E Bocquillon, F D Parmentier, B Placais, J M Berroir, G Fève, and P Degiovanni. Single-electron quantum tomography in quantum hall edge channels. *New Journal of Physics*, 13 :093007, 2011.
- [34] B. Roussel, C. Cabart, G Fève E Thibierge, and P Degiovanni. Electron quantum optics as quantum signal processing. *Physica Status Solidi*, 254 :1600621, 2017.
- [35] Ya.M. Blanter and M. Büttiker. Shot noise in mesoscopic conductors. *Physics Reports*, 336, 2000.
- [36] M. Henny, S. Oberholzer, C. Strunk, T. Heinzel, K. Ensslin, M. Holland, and C. Schönberger. The fermionic hanbury brown and twiss experiment. *Science*, 284, 1999.

- [37] M. Buttiker. Four-terminal phase-coherent conductance. *Phys. Rev. Lett.*, 57 :1761–1764, Oct 1986.
- [38] M. Büttiker. Scattering theory of current and intensity noise correlations in conductors and wave guides. *Phys. Rev. B*, 46 :12485–12507, Nov 1992.
- [39] Rolf Landauer. Electrical resistance of disordered one-dimensional lattices. *The Philosophical Magazine : A Journal of Theoretical Experimental and Applied Physics*, 21, 1970.
- [40] J. Gabelli, G. Fève, J.-M. Berroir, B. Plaçais, A. Cavanna, B. Etienne, Y. Jin, and D. C. Glattli. Violation of kirchhoff laws for a coherent rc circuit. *Science*, 313, 2006.
- [41] Yoseph Imry and Richard Webb. Quantum interference and the aharonov-bohm effect. *Scientific American - SCI AMER*, 260 :56–62, 04 1989.
- [42] M. Büttiker, A. Prêtre, and H. Thomas. Dynamic conductance and the scattering matrix of small conductors. *Phys. Rev. Lett.*, 70 :4114–4117, Jun 1993.
- [43] M. Büttiker, H. Thomas, and A. Prêtre. Mesoscopic capacitors. *Phys. Lett. A*, 180 :364–369, Sep 1993.
- [44] R Landauer. Conductance determined by transmission : probes and quantised constriction resistance. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 1 :8099–8110, Oct 1989.
- [45] Christophe Mora and Karyn Le Hur. Universal resistances of the quantum resistance–capacitance circuit. *Nature Physics*, 6(9) :697–701, Sep 2010.
- [46] Yuji Hamamoto, Thibaut Jonckheere, Takeo Kato, and Thierry Martin. Dynamic response of a mesoscopic capacitor in the presence of strong electron interactions. *Phys. Rev. B*, 81 :153305, Apr 2010.
- [47] H Duprez, E Sivre, A Anthore, Abdelhanin Aassime, Antonella Cavanna, U Gennser, and Frederic Pierre. Transferring the quantum state of electrons across a fermi sea with coulomb interaction. *Sciences*, 02 2019.
- [48] K. A. Matveev. Coulomb blockade at almost perfect transmission. *Phys. Rev. B*, 51 :1743–1751, Jan 1995.
- [49] D. V. Averin and K. K. Likharev. Coulomb blockade of single-electron tunneling, and coherent oscillations in small tunnel junctions. *Journal of Low Temperature Physics*, 62 :345–373, 1986.
- [50] I. Aleiner, Patrick Brouwer, and L.I. Glazman. Quantum effects in coulomb blockade. *Physics Reports*, 358 :309–440, 03 2001.

- [51] T. Giamarchi. *Quantum Physics in One Dimension*. Clarendon Press; 1st edition, 2003.
- [52] J. Delft and H. Schoeller. Bosonization for beginners and refermionization for experts. *Annalen der Physik*, 7 :225–305, 1998.
- [53] A. A. Clerk, M. H. Devoret, S. M. Girvin, Florian Marquardt, and R. J. Schoelkopf. Introduction to quantum noise, measurement, and amplification. *Reviews of Modern Physics*, 82(2) :1155–1208, April 2010.
- [54] Artur O. Slobodeniuk, Ivan P. Levkivskiy, and Eugene V. Sukhorukov. Equilibration of quantum hall edge states by an ohmic contact. *Phys. Rev. B*, 88 :165307, Oct 2013.
- [55] Edvin G. Idrisov, Ivan P. Levkivskiy, and Eugene V. Sukhorukov. Dephasing in a mach-zehnder interferometer by an ohmic contact. *Phys. Rev. Lett.*, 121 :026802, Jul 2018.
- [56] A.A. Clerk, P.W. Brouwer, and V. Ambegaokar. Interaction-induced restoration of phase coherence. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :186801, Oct 2001.
- [57] Matthieu C. Dartiailh, Joseph J. Cuzzo, Bassel H. Elfeky, William Mayer, Joseph Yuan, Kaushini S. Wickramasinghe, Enrico Rossi, and Javad Shabani. Missing shapiro steps in topologically trivial josephson junction on inas quantum well. *Nature*, 12 :78, 2021.
- [58] A. Murani, N. Bourlet, H. le Sueur, F. Portier, C. Altimiras, D. Esteve, H. Grabert, J. Stockburger, J. Ankerhold, and P. Joyez. Absence of a dissipative quantum phase transition in josephson junctions. *Phys. Rev. X*, 10 :021003, Apr 2020.
- [59] A.O Caldeira and A.J Leggett. Quantum tunnelling in a dissipative system. *Annals of Physics*, 149 :374, 1983.
- [60] J. Kokkala. *Quantum computing with itinerant microwave photons*. PhD thesis, Aalto university, school of science, 2013.
- [61] Kieran Mullen, Daniel Loss, and H. T. C. Stoof. Resonant phenomena in compact and extended systems. *Phys. Rev. B*, 47 :2689–2706, Feb 1993.
- [62] Pertti J. Hakonen and Edouard B. Sonin. Comment on "absence of a dissipative quantum phase transition in josephson junctions". *Phys. Rev. X*, 11 :018001, Mar 2021.
- [63] A. Murani, N. Bourlet, H. le Sueur, F. Portier, C. Altimiras, D. Esteve, H. Grabert, J. Stockburger, J. Ankerhold, and P. Joyez. Reply to "comment on 'absence of a dissipative quantum phase transition in josephson junctions'". *Phys. Rev. X*, 11 :018002, Mar 2021.

- [64] G.-L. Ingold and Y. V. Nazarov. *Charge Tunneling Rates in Ultrasmall Junctions*. ed. by H. Grabert and M.H. Devoret, NATO ASI Series B, 1992.
- [65] Albert Schmid. Diffusion and localization in a dissipative quantum system. *Phys. Rev. Lett.*, 51 :1506–1509, Oct 1983.
- [66] Matthew P. A. Fisher and Wilhelm Zwerger. Quantum brownian motion in a periodic potential. *Phys. Rev. B*, 32 :6190–6206, Nov 1985.
- [67] Gerd Schön and A.D. Zaikin. Quantum coherent effects, phase transitions, and the dissipative dynamics of ultra small tunnel junctions. *Physics Reports*, 198 :237–412, 1990.
- [68] Ryuta Yagi, Shun-ichi Kobayashi, and Youiti Ootuka. Phase diagram for superconductor-insulator transition in single small josephson junctions with shunt resistor. *Journal of the Physical Society of Japan*, 66 :3722–3724, 1997.
- [69] Carlos P. Herrero and Andrei D. Zaikin. Superconductor-insulator quantum phase transition in a single josephson junction. *Phys. Rev. B*, 65 :104516, Feb 2002.
- [70] Kanta Masuki, Hiroyuki Sudo, Masaki Oshikawa, and Yuto Ashida. Absence versus presence of dissipative quantum phase transition in josephson junctions. 2021.
- [71] J. M. Leinaas and J. Myrheim. On the theory of identical particles. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, 37, 1977.
- [72] R. B. Laughlin. Anomalous quantum hall effect : An incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations. *Phys. Rev. Lett.*, 50 :1395–1398, May 1983.
- [73] L. Saminadayar, D. C. Glattli, Y. Jin, and B. Etienne. Observation of the $e/3$ fractionally charged laughlin quasiparticle. *Phys. Rev. Lett.*, 79 :2526–2529, Sep 1997.
- [74] J. Nakamura, S. Liang, G. C. Gardner, and M. J. Manfra. Direct observation of anyonic braiding statistics. *Nature*, 16 :931 – 936, 2020.
- [75] Walter Schottky. On spontaneous current fluctuations in various electrical conductors. *Journal of Micro/Nanolithography, MEMS, and MOEMS*, 17, 2018.
- [76] R. de Picciotto, M. Reznikov, M. Heiblum, V. Umansky, G. Bunin, and D. Mahalu. Direct observation of a fractional charge. *Nature*, 389, 1997.
- [77] Eran Sela, Yuval Oreg, Felix von Oppen, and Jens Koch. Fractional shot noise in the kondo regime. *Phys. Rev. Lett.*, 97 :086601, Aug 2006.

- [78] Christophe Mora, Pavel Vitushinsky, Xavier Leyronas, Aashish A. Clerk, and Karyn Le Hur. Theory of nonequilibrium transport in the $SU(n)$ kondo regime. *Phys. Rev. B*, 80 :155322, Oct 2009.
- [79] Meydi Ferrier, Tomonori Arakawa, Tokuro Hata, Ryo Fujiwara, Raphaëlle Delagrangé, Richard Deblock, Yoshimichi Teratani, Rui Sakano, Akira Oguri, and Kensuke Kobayashi. Quantum fluctuations along symmetry crossover in a kondo-correlated quantum dot. *Phys. Rev. Lett.*, 118 :196803, May 2017.
- [80] Leonid S. Levitov, Hyunwoo Lee, and Gordey B. Lesovik. Electron counting statistics and coherent states of electric current. *Journal of Mathematical Physics*, 37, 1996.
- [81] Massimiliano Esposito, Upendra Harbola, and Shaul Mukamel. Nonequilibrium fluctuations, fluctuation theorems, and counting statistics in quantum systems. *Rev. Mod. Phys.*, 81 :1665–1702, Dec 2009.
- [82] Artem V. Galaktionov and Andrei D. Zaikin. Current fluctuations in composite conductors : Beyond the second cumulant. *Phys. Rev. B*, 84 :115418, Sep 2011.
- [83] Jian Wang Chao Zhang, Fuming Xu. Full counting statistics of phonon transport in disordered systems. *Frontiers of Physics*, 16(3) :33502, 2021.
- [84] Yanbo Wang and Zhi Tian. Third-order statistics reconstruction from compressive measurements. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 69 :2888–2901, 2021.
- [85] Yuli V. Nazarov. *Quantum Noise in Mesoscopic Physics*. Springer, Dordrecht, 2003.
- [86] Bernd Rosenow, Ivan P. Levkivskyi, and Bertrand I. Halperin. Current correlations from a mesoscopic anyon collider. *Phys. Rev. Lett.*, 116 :156802, Apr 2016.
- [87] Tom Morel, June-Young M. Lee, H.-S. Sim, and Christophe Mora. Fractionalization and anyonic statistics in the integer quantum hall collider, supplemental material. *Phys. Rev. B*, 105 :075433, Feb 2022.
- [88] Gu Zhang, Igor V. Gornyi, and Christian Spånslätt. Delta- t noise for weak tunneling in one-dimensional systems : Interactions versus quantum statistics. *Phys. Rev. B*, 105 :195423, May 2022.
- [89] J. Rech, T. Jonckheere, B. Grémaud, and T. Martin. Negative delta- t noise in the fractional quantum hall effect. *Phys. Rev. Lett.*, 125 :086801, Aug 2020.
- [90] Cheolhee Han, Jinhong Park, Yuval Gefen, and H. S. Sim. Topological vacuum bubbles by anyon braiding. *Nature Communications*, 1, 2016.

- [91] Byeongmok Lee, Cheolhee Han, and H.-S. Sim. Negative excess shot noise by anyon braiding. *Phys. Rev. Lett.*, 123 :016803, Jul 2019.
- [92] J. Keeling, I. Klich, and L. S. Levitov. Minimal excitation states of electrons in one-dimensional wires. *Phys. Rev. Lett.*, 97 :116403, Sep 2006.
- [93] J. Dubois, T. Jullien, F. Portier, P. Roche, A. Cavanna, Y. Jin, W. Wegscheider, P. Roulleau, and D. C. Glattli. Minimal-excitation states for electron quantum optics using levitons. *Nature*, 502 :659–663, 2013.
- [94] V. Freulon F.D. Parmentier J.-M Berroir B. Pla ?cais C. Wahl J. Rech T. Jonckheere T. Martin C. Grenier D. Ferraro P. Degiovanni G. F‘eve E. Bocquillon. Electron quantum optics in ballistic chiral conductors. *Annalen der Physik*, 2014.
- [95] Daniel Litinski, Piet W. Brouwer, and Michele Filippone. Interacting mesoscopic capacitor out of equilibrium. *Phys. Rev. B*, 96 :085429, Aug 2017.
- [96] J. Shirley. Solution of the schrödinger equation with a hamiltonian periodic in time. *Physical Review*, 138 :979–987, 1965.
- [97] Gloria Platero and Ramón Aguado. Photon-assisted transport in semiconductor nanostructures. *Physics Reports*, 395 :1–157, 2004.
- [98] J. S. Langer and V. Ambegaokar. Friedel sum rule for a system of interacting electrons. *Phys. Rev.*, 121 :1090–1092, Feb 1961.
- [99] C. W. J. Beenakker and H. Schomerus. Counting statistics of photons produced by electronic shot noise. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :700–703, Jan 2001.
- [100] C. W. J. Beenakker and H. Schomerus. Antibunched photons emitted by a quantum point contact out of equilibrium. *Phys. Rev. Lett.*, 93 :096801, Aug 2004.
- [101] A. V. Lebedev, G. B. Lesovik, and G. Blatter. Statistics of radiation emitted from a quantum point contact. *Phys. Rev. B*, 81 :155421, Apr 2010.
- [102] Arne L. Grimsmo, Farzad Qassemi, Bertrand Reulet, and Alexandre Blais. Quantum optics theory of electronic noise in coherent conductors. *Physical review letters*, 116 4 :043602, 2016.
- [103] Adam Bednorz, Christoph Bruder, Bertrand Reulet, and Wolfgang Belzig. Nonsymmetrized correlations in quantum noninvasive measurements. *Phys. Rev. Lett.*, 110 :250404, Jun 2013.
- [104] Udson C Mendes and Christophe Mora. Cavity squeezing by a quantum conductor. *New Journal of Physics*, 17 :113014, 2015.

- [105] Udson C. Mendes, Sébastien Jezouin, Philippe Joyez, Bertrand Reulet, Alexandre Blais, Fabien Portier, Christophe Mora, and Carles Altimiras. Parametric amplification and squeezing with an ac- and dc-voltage biased superconducting junction. *Phys. Rev. Applied*, 11 :034035, Mar 2019.
- [106] Jean-Charles Forgues, Christian Lupien, and Bertrand Reulet. Non-classical radiation emission by a coherent conductor. *Comptes Rendus Physique*, 17 :718–728, 2016.
- [107] R. J. Schoelkopf, A. A. Kozhevnikov, D. E. Prober, and M. J. Rooks. Observation of “photon-assisted” shot noise in a phase-coherent conductor. *Phys. Rev. Lett.*, 80 :2437–2440, Mar 1998.
- [108] A. A. Kozhevnikov, R. J. Schoelkopf, and D. E. Prober. Observation of photon-assisted noise in a diffusive normal metal–superconductor junction. *Phys. Rev. Lett.*, 84 :3398–3401, Apr 2000.
- [109] Julien Gabelli and Bertrand Reulet. The noise susceptibility of a coherent conductor. *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, 6600, 07 2007.
- [110] A. D. Armour, M. P. Blencowe, E. Brahim, and A. J. Rimberg. Universal quantum fluctuations of a cavity mode driven by a josephson junction. *Phys. Rev. Lett.*, 111 :247001, Dec 2013.
- [111] Juha Leppäkangas and Michael Marthaler. Inelastic scattering of microwave radiation in the dynamical coulomb blockade. *Phys. Rev. B*, 98 :224511, Dec 2018.
- [112] J. R. Johansson, G. Johansson, C. M. Wilson, and Franco Nori. Dynamical casimir effect in superconducting microwave circuits. *Phys. Rev. A*, 82 :052509, Nov 2010.
- [113] Rodney Loudon. *The Quantum Theory of Light*. Oxford ; 3e édition, 2000.
- [114] A. Yu. Kitaev. Unpaired majorana fermions in quantum wires. *Physics-Uspekhi*, 44 :131–136, 2001.
- [115] C.W.J. Beenakker. Search for majorana fermions in superconductors. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 4 :113–136, 2013.
- [116] Nicholas Read and Dmitry Green. Paired states of fermions in two dimensions with breaking of parity and time-reversal symmetries and the fractional quantum hall effect. *Physical Review B*, 61 :10267–10297, 2000.
- [117] Chetan Nayak, Steven H. Simon, Ady Stern, Michael Freedman, and Sankar Das Sarma. Non-abelian anyons and topological quantum computation. *Rev. Mod. Phys.*, 80 :1083–1159, Sep 2008.

- [118] Jascha Ulrich, Daniel Otten, and Fabian Hassler. Simulation of supersymmetric quantum mechanics in a cooper-pair box shunted by a josephson rhombus. *Phys. Rev. B*, 92 :245444, Dec 2015.
- [119] Matthew T. Bell, Joshua Paramanandam, Lev B. Ioffe, and Michael E. Gershenson. Protected josephson rhombus chains. *Phys. Rev. Lett.*, 112 :167001, Apr 2014.
- [120] Benoit Douçot and Julien Vidal. Pairing of cooper pairs in a fully frustrated josephson-junction chain. *Phys. Rev. Lett.*, 88 :227005, May 2002.
- [121] Jabir Ali Ouassou and Jacob Linder. Spin-switch josephson junctions with magnetically tunable $\sin(\delta\varphi/n)$ current-phase relation. *Phys. Rev. B*, 96 :064516, Aug 2017.
- [122] Leonid P. Rokhinson, Xinyu Liu, and Jacek K. Furdyna. The fractional a.c. josephson effect in a semiconductor-superconductor nanowire as a signature of majorana particles. *Nature*, 8 :795–799, 2012.
- [123] J. Wiedenmann and E. *et al.* Bocquillon. 4π -periodic josephson supercurrent in hgte-based topological josephson junctions. *Nature*, 7 :10303, 2016.
- [124] Alexander Altland and Ben D. Simons. *Condensed Matter Field Theory*. Cambridge University Press, 2 edition, 2010.
- [125] C. L. Kane and Matthew P. A. Fisher. Transmission through barriers and resonant tunneling in an interacting one-dimensional electron gas. *Phys. Rev. B*, 46 :15233–15262, Dec 1992.
- [126] H. H. Lin and Matthew P. A. Fisher. Mode locking in quantum-hall-effect point contacts. *Phys. Rev. B*, 54 :10593–10603, Oct 1996.
- [127] Zheng-Wei Zuo, Huijuan Li, Liben Li, L. Sheng, Ruohao Shen, and D. Xing. Detecting majorana fermions by use of superconductor-quantum hall liquid junctions. *EPL (Europhysics Letters)*, 114 :27001, 05 2016.
- [128] Dmitry I. Pikulin, Yashar Komijani, and Ian Affleck. Luttinger liquid in contact with a kramers pair of majorana bound states. *Phys. Rev. B*, 93 :205430, May 2016.
- [129] Lukasz Fidkowski, Jason Alicea, Netanel H. Lindner, Roman M. Lutchyn, and Matthew P. A. Fisher. Universal transport signatures of majorana fermions in superconductor-luttinger liquid junctions. *Phys. Rev. B*, 85 :245121, Jun 2012.
- [130] Ulrich Weiss and Matthias Wollensak. Dynamics of the dissipative multiwell system. *Phys. Rev. B*, 37 :2729–2732, Feb 1988.

- [131] C. Aslangul, N. Pottier, and D. Saint-James. Quantum brownian motion in a periodic potential : a pedestrian approach. *J. Phys. France*, 48 :1093–1110, 1987.
- [132] G. Catelani, R. J. Schoelkopf, M. H. Devoret, and L. I. Glazman. Relaxation and frequency shifts induced by quasiparticles in superconducting qubits. *Phys. Rev. B*, 84 :064517, Aug 2011.
- [133] Samuel Wilkinson, Nicolas Vogt, Dmitry Golubev, and Jared Cole. Approximate solutions to mathieu’s equation. *Physica E : Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 100, 09 2017.
- [134] Jens Koch, Terri M. Yu, Jay Gambetta, A. A. Houck, D. I. Schuster, J. Majer, Alexandre Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf. Charge-insensitive qubit design derived from the cooper pair box. *Phys. Rev. A*, 76 :042319, Oct 2007.
- [135] J.R. Johansson, P.D. Nation, and Franco Nori. Qutip : An open-source python framework for the dynamics of open quantum systems. *Computer Physics Communications*, 183 :1760–1772, 2012.
- [136] J.R. Johansson, P.D. Nation, and Franco Nori. Qutip 2 : A python framework for the dynamics of open quantum systems. *Computer Physics Communications*, 184 :1234–1240, 2013.
- [137] Konstantin Yavilberg, Eran Ginossar, and Eytan Grosfeld. Fermion parity measurement and control in majorana circuit quantum electrodynamics. *Phys. Rev. B*, 92 :075143, Aug 2015.
- [138] Eran Ginossar and Eytan Grosfeld. Microwave transitions as a signature of coherent parity mixing effects in the majorana-transmon qubit. *Nature*, 5 :4772, 2014.
- [139] S.E. Korshunov. Mobility of a dissipative quantum system in a periodic potential. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 66 :872, 1987.