



HAL
open science

La pensée algébrique chez des élèves avec MLD (Mathematical Learning Disabilities) : étude qualitative dans le secondaire

Francesca Gregorio

► **To cite this version:**

Francesca Gregorio. La pensée algébrique chez des élèves avec MLD (Mathematical Learning Disabilities) : étude qualitative dans le secondaire. Education. Université Paris Cité, 2022. Français. NNT : 2022UNIP7222 . tel-04398548

HAL Id: tel-04398548

<https://theses.hal.science/tel-04398548>

Submitted on 16 Jan 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris Cité

École doctorale 623 – *Savoirs, Sciences, Éducation*

Laboratoire de Didactique André Revuz

Haute École Pédagogique Vaud – UER MS

La pensée algébrique chez des élèves avec MLD (*Mathematical Learning Disabilities*) – *Étude qualitative dans le secondaire*

Par Francesca GREGORIO

Thèse de doctorat de Didactique des Disciplines – Mathématiques

Dirigée par Cécile OUVRIER-BUFFET

Et par Thierry DIAS

Présentée et soutenue publiquement le 28 octobre 2022

Devant un jury composé de :

Elisabetta ROBOTTI, *Professor*, Università di Genova, Rapportrice et Présidente du jury

Sophie SOURY-LAVERGNE, MCU-HDR, Université Grenoble Alpes, Rapportrice

Julia PILET, MCU, Université Paris-Est Créteil, Examinatrice

Luis RADFORD, *Professor*, Université Laurentienne, Examineur

Thierry DIAS, *Professor*, Haute École Pédagogique Vaud, Directeur de thèse

Cécile OUVRIER-BUFFET, PU, Université Paris-Est Créteil, Directrice de thèse

Titre

La pensée algébrique chez des élèves avec MLD (*Mathematical Learning Disabilities*) - Étude qualitative dans le secondaire

Résumé

Cette thèse s'intéresse à la pensée algébrique des élèves avec *Mathematical Learning Disabilities* (MLD). Les difficultés des élèves avec MLD sont considérées à l'interface des sciences cognitives et de la didactique des mathématiques. Ces difficultés sont variées et affectent plusieurs aspects des compétences mathématiques. Notre revue de littérature en didactique des mathématiques à propos de la pensée algébrique nous conduit à en approfondir quatre aspects : le focus sur la structure et le processus, la relation entre quantités associée à une vision relationnelle du signe égal, la généralisation et l'argumentation. Afin d'étudier ces aspects chez des élèves avec MLD, nous concevons huit tâches en exploitant le modèle d'algèbre de Kaput et nous les proposons lors d'entretiens cliniques à dix-huit élèves dans le secondaire : quinze avec MLD et trois sans MLD. Nous analysons ces données à l'aide de trois cadres théoriques : les langage constructs de l'équipe de Malara, les types de généralisation de Radford et la typologie de preuves de Balacheff. Les résultats montrent que les élèves avec MLD peuvent manifester une pensée algébrique. Celle-ci ne diffère pas qualitativement de celle des élèves sans MLD en ce qui concerne les procédures et les difficultés. Ce qui semble distinguer les deux catégories est plutôt la fréquence des difficultés. Ces résultats ouvrent la voie à la conception de propositions didactiques qui visent le développement de la pensée algébrique et qui sont destinées à des classes ayant des élèves avec MLD.

Mots-clés

MLD, *Mathematical Learning Disabilities*, *Mathematical Learning Difficulties*, *Mathematical Learning Disorders*, Troubles des apprentissages, Dyscalculie, *Early algebra*, *Pensée algébrique*, Généralisation algébrique, Argumentation, Rôle du signe égal.

Title

Algebraic thinking of students with MLD (Mathematical Learning Disabilities) -
A qualitative study in secondary school

Abstract

This thesis focuses on the algebraic thinking of students with Mathematical Learning Disabilities (MLD). The difficulties of students with MLD are considered at the interface of cognitive science and mathematics education. These difficulties are varied and affect several aspects of mathematical skills. Our review of the mathematics education literature on algebraic thinking leads us to concentrate on four aspects: the focus on structure and process; the relation between quantities, with a focus on the relational interpretation of the equal sign; generalisation; and argumentation. In order to study these aspects in students with MLD, we design eight tasks using Kaput's model of algebra and propose them in clinical interviews to eighteen students in secondary school: fifteen with MLD and three without. We analyse these data using three theoretical frameworks: language constructs by Malara and colleagues, Radford's types of generalisation, and Balacheff's typology of proofs. The results show that students with MLD can think algebraically. Their use of algebraic thinking does not differ qualitatively from that of students without MLD in terms of procedures and difficulties. What seems to distinguish the two categories is rather the frequency of difficulties. These results open the way to the design of didactic proposals aimed at the development of algebraic thinking and intended for classes with students with MLD.

Keywords

MLD, Mathematical Learning Disabilities, Mathematical Learning Difficulties, Mathematical Learning Disorders, Dyscalculia, Early algebra, Algebraic thinking, Algebraic generalisation, Argumentation, Role of the equal sign.

Remerciements

Ces années de thèse ont été pour moi d'une richesse inestimable en termes de développement personnel et ont changé ma manière de regarder le monde. Une importance capitale dans cette évolution l'ont eu les échanges et les rencontres que j'ai pu avoir pendant mon doctorat. C'est avec émotion que je remercie toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce projet, celles qui m'ont accompagnée du point de vue didactique et de recherche et également celles qui m'ont soutenue au quotidien.

Je tiens d'abord à remercier mon directeur et ma directrice de thèse de m'avoir accordé leur confiance. Merci, Cécile : tes conseils précieux et tes encouragements m'ont permis de m'approprier du rôle de chercheuse en développant mes propres idées. Merci, Thierry : malgré un agenda chargé, tu as su trouver le temps pour répondre à mes sollicitations, parfois avec des relectures pendant les week-ends ou les vacances. Grâce à votre direction, j'ai pu avancer à mon rythme et développer mon positionnement indépendant sur la didactique.

Merci à Michel, qui a été le responsable de l'UER MS tout au long de mon assistantat. Tu as compris à quel point il est important de travailler dans des conditions favorables pour une bonne réussite de thèse. Tu m'as toujours supportée en favorisant ma participation aux colloques et en limitant ma charge d'enseignement. Mais surtout, tu m'as soutenue humainement, en croyant en moi et en mon travail.

Je remercie les deux rapportrices Elisabetta Robotti et Sophie Soury-Lavergne d'avoir lu attentivement mon manuscrit et d'avoir apporté un regard critique et constructif qui m'aidera à progresser ultérieurement. Je remercie également Julia Pilet et Luis Radford d'avoir accepté de participer au jury de thèse. De surcroît, vos retours lors de mon parcours doctoral m'ont été très précieux : lors du WEJCh pour Luis Radford et aux rendez-vous du comité de suivi pour Julia Pilet.

Merci à Carine Reydy qui a aussi fait partie de mon comité de suivi en nourrissant mes réflexions. Je remercie également Brigitte Grugeon Allys pour les discussions lors du WEJCh et pour avoir relu un chapitre de ce manuscrit dont les commentaires m'ont été très utiles.

Merci aux institutions qui ont rendu possible ma formation doctorale : l'Université de Paris, le LDAR, L'École doctorale 623, la HEP, l'UER MS.

Merci à Pierre Ramelot pour l'aide dans la recherche de fonds pour la thèse. Merci à Swissuniversities pour la bourse de partenariat qui m'a permis de me déplacer entre mes deux institutions d'affiliation. Merci à Sandrine pour l'organisation de ces déplacements.

Merci aux collègues de l'UER qui m'ont énormément appris sur la formation et la recherche, et cela dans une ambiance de travail toujours accueillant. Je remercie les profs de l'UER pour la création du séminaire des doctorantes et doctorants, que je remercie également : vous avez rendu possible un échange régulier, en nous permettant de nous nourrir des perspectives des autres.

Je remercie toutes les personnes et les établissements qui ont participé de près ou de loin à la collecte des données pour cette thèse. Merci à Anne, Jimmy, Stéphanie et Stéphane pour la relecture des tâches. Grazie a Giacomo e Ginevra per avermi fatto da cavie ¹. Merci aux écoles, aux élèves, aux enseignantes et enseignants qui ont accepté cette collaboration.

Merci à qui m'a accompagnée dans ma postulation à la HEP Vaud. Merci à Kevin de m'avoir encouragée à envoyer une candidature spontanée, merci à Louis pour ta relecture du CV, grazie a Paola Cerrai per la lettera di raccomandazione.

Merci à l'équipe de recherche RITEAM avec qui j'ai beaucoup appris, qui a toujours été ouverte à échanger à propos de mon travail et qui m'a permis de me développer en tant que chercheuse. En particulier (en ayant cité les autres ailleurs), merci à Florence, pour l'écoute surtout aux débuts semés de doutes. Merci à Marie-Line pour le temps que tu as accordé à discuter autour de ma thèse en apportant toujours des pistes de réflexion pertinentes.

Grazie a Paola e Pietro, con cui ho collaborato questi ultimi anni e da cui ho imparato moltissimo. Grazie, Paola, di aver messo a disposizione la tua esperienza e avermi incluso in progetti entusiasmanti. Grazie, Pietro, per avermi fatto da padrino di ricerca già a partire dalla magistrale, il tuo credere in me ha avuto un ruolo centrale nelle mie scelte di vita.

Grazie a Rosetta Zan, per essere stata la prima ad avermi fatto sbalordire e innamorare della didattica della matematica.

Merci aux différents groupes des jeunes chercheurs et chercheuses. Nos rencontres m'ont permis d'apprendre de et avec mes pairs, m'ont donné l'occasion de poser tout type de question, m'ont rassurée en me faisant sentir comprise et moins

1. Pour les remerciements, j'ai choisi d'utiliser la langue de la personne concernée afin que tout le monde puisse comprendre pleinement ma gratitude. Je ne traduis pas pour ne pas alourdir ce texte déjà long.

perdue. Je profite donc pour remercier en particulier toutes les personnes qui ont pris en charge l'organisation des multiples événements auxquels j'ai pu participer pendant mes années de thèse. Merci au groupe des jeunes du LDAR pour les réunions régulières, en présence et à distance. En particulier, merci à Dorian, à Elann, à Macarena, à ma petite sœur Karine et à mon petit frère Matias. Merci au groupe des jeunes de l'ARDM pour les plages à l'école d'été, le WEJCh, le SVJC. En particulier, merci aux copains et copines d'aventure avec qui j'ai collaboré pour l'organisation de différents événements : Charlotte, Gaëlle, Julie, Mickaël, Nathan et Stéphane. Merci à l'ADA pour le soutien institutionnel, les rendez-vous informels et les midis de présentations de thèse. En particulier, merci à Valérie qui m'a guidée les premiers mois. Merci à Aleksandra, Claudia, May, Myrto, Natalina, Omara et Sara qui m'ont accompagnée tout au long du parcours en partageant les inquiétudes du doctorat et l'isolement de la Covid. Merci au nouveau volet, Benjamin, Chloé et Ludivine, que j'ai eu le plaisir d'accueillir. Merci à vous tous et toutes pour vos retours constructifs, soutien, aide, rigolades, repas sur les escaliers, relectures, séances de travail par Zoom, amitié. Grazie al gruppo giovani dell'AIRDM per la ricchezza didattica e umana che avete apportato alla mia esperienza di dottorato. In particolare, grazie a Agnese, Camilla, Carola e Marzia per le discussioni profonde che hanno alimentato e influenzato questo lavoro di tesi.

Grazie a Virgi e Matte per il tempo che avete speso a darmi consigli grafici. La forma di questa tesi è anche merito vostro.

Un grazie a parte va a Sara, che ha assistito a tutte le fasi della mia tesi, agli alti e ai bassi, alle progressioni e ai periodi di stagnazione. Grazie, Sara, per esserci sempre stata, che fosse per una chiacchierata nei corridoi, per un parere sulla ricerca o per una delle nostre passeggiate a bordo lago. Grazie per essere mia collega, vicina di casa, amica.

Grazie a Gianni, per l'aiuto con i tecnicismi di TeX e le riletture in inglese. Ti ringrazio soprattutto per la pazienza, gli incoraggiamenti, l'ascolto. Che sia a riguardo la tesi e meno, mi hai sempre supportata e spronata, facendomi vedere i miei pregi. Sono fortunata ad averti.

In questi anni di formazione incessante, mi sono interrogata a lungo sul rapporto tra successo scolastico, capacità "biologiche" e ambiente. Come didattica, e ancora di più dopo questo lavoro di tesi, non posso fare a meno di notare quanto ogni individuo possa progredire quando messo nelle giuste condizioni. Quindi grazie alla mia famiglia e in particolare grazie mamma, grazie papà per avermi sempre sostenuto, per aver sempre creduto in me, per esserci sempre quando ho bisogno di voi. Senza di voi e la vostra maniera di essere genitori, oggi non sarei qui.

Table des matières

Introduction	1
Introduction (english translation)	5
I - Cadre de la recherche	9
1 Contexte et problématique	11
1.1 Les troubles des apprentissages	12
1.1.1 Troubles des apprentissages de la lecture	12
1.1.2 Troubles des apprentissages de l'écriture	13
1.1.3 Troubles des apprentissages en mathématiques	13
1.1.4 Histoire et évolution du concept de troubles des apprentis- sages en mathématiques	13
1.2 Différentes disciplines s'intéressant aux MLD	16
1.2.1 Neuropsychologie cognitive et psychologie cognitive	17
1.2.2 Psychologie développementale	19
1.2.3 Didactique des mathématiques	19
1.3 Les MLD à l'école dans le canton de Vaud	20
1.4 Les domaines mathématiques étudiés : la nécessité de l'algèbre	22
1.5 Questionnement de recherche	25
1.6 Plan global de la thèse	25
2 Revue de littérature : les MLD	27
2.1 Définitions	27
2.1.1 Deux définitions en sciences cognitives	27
2.1.2 Une définition en <i>mathematics education</i>	30
2.1.3 La définition pour notre étude	32
2.2 Diagnostics	33
2.3 Prévalence	35

2.4	Points remarquables du concept de MLD	35
2.5	Nature des difficultés des élèves avec MLD	36
2.6	Les MLD et l'algèbre	38
3	Revue de littérature : la pensée algébrique	41
3.1	De l'arithmétique à l'algèbre : une transition difficile	41
3.1.1	Le symbolisme alphanumérique et sa manipulation	42
3.1.2	La modélisation	44
3.1.3	Laisser les calculs « non effectués »	44
3.1.4	Le rôle du signe égal	45
3.1.5	Opérer sur les nombres inconnus	46
3.2	L'émergence et le développement de l' <i>early algebra</i> en didactique des mathématiques	46
3.2.1	Le rôle du symbolisme alphanumérique	48
3.2.2	Vers une définition de pensée algébrique	49
3.2.3	Focus sur certains objets de recherche en <i>early algebra</i>	50
3.3	Choix et définitions pour ce travail de thèse	55
4	Appuis théoriques	57
4.1	Le modèle d'algèbre de Kaput	57
4.1.1	L'algèbre comme activité humaine	58
4.1.2	L'algèbre comme artefact culturel	60
4.1.3	Le modèle de Kaput en résumé	63
4.2	Les <i>language constructs</i> de Malara et collègues	64
4.2.1	Favoriser le changement de focus du résultat au processus	65
4.2.2	Associer plusieurs représentations d'un nombre naturel à une vision relationnelle du signe égal	66
4.2.3	Favoriser des pratiques socioconstructivistes en classe qui renforcent le rôle du langage naturel	67
4.3	Les types de généralisation de Radford	69
4.3.1	Généralisation arithmétique	70
4.3.2	Induction naïve	70
4.3.3	Généralisation factuelle	70
4.3.4	Généralisation contextuelle	71
4.3.5	Généralisation algébrique symbolique standard	72
4.4	La typologie de preuves de Balacheff	72
4.4.1	L'empirisme naïf	73
4.4.2	L'expérience cruciale	74

4.4.3	L'exemple générique	74
4.4.4	L'expérience mentale	74
4.4.5	Le calcul sur les énoncés	75
4.5	Complémentarité et nécessité des différents appuis théoriques retenus	75
5	Questions de recherche	77
5.1	Reformulation des questions de recherche	77
5.2	Hypothèses de recherche	78
II	La batterie de tâches	81
6	Réponse à la question de recherche Q1 : une batterie de tâches pour étudier la pensée algébrique	83
6.1	Adaptation du modèle de Kaput	84
6.2	Cohérence de l'adaptation du modèle de Kaput	85
6.3	Relation entre les différents appuis théoriques	86
7	Les tâches	89
7.1	La justification des tâches de la batterie	89
7.1.1	<i>La suite de carrés</i>	91
7.1.2	<i>Pierre et Manon</i>	92
7.1.3	<i>Nombres pairs/impairs</i>	93
7.1.4	<i>La tache bleue et 123</i>	93
7.1.5	<i>Nuage et maison</i>	94
7.1.6	<i>18+4=</i>	94
7.2	Les analyses <i>a priori</i> des tâches	95
7.3	Les choix en termes de variables	96
7.3.1	<i>La suite de carrés</i>	97
7.3.2	<i>Nombres pairs/impairs</i>	99
7.3.3	<i>La tache bleue</i>	101
7.3.4	<i>123</i>	102
III	Les entretiens	103
8	Méthode : recueil de données et analyse	105
8.1	Contexte et personnes participantes	105

8.1.1	Le système scolaire du canton de Vaud	108
8.1.2	L'établissement A et ses élèves	111
8.1.3	L'établissement B et ses élèves	114
8.1.4	L'établissement C et son élève	115
8.1.5	L'établissement D et ses élèves	115
8.1.6	L'établissement E et ses élèves	116
8.1.7	L'établissement F et ses élèves	117
8.2	La préparation des entretiens	118
8.2.1	L'entretien clinique	118
8.2.2	Les protocoles d'entretien	120
8.3	Étapes de recueil des données et de transcription	123
8.4	L'analyse des données : les analyses <i>a posteriori</i>	125
8.4.1	Choix des tâches à analyser	125
8.4.2	Description des données	126
8.4.3	Les grilles d'analyse	126
9	Les résultats	133
9.1	Analyse de la tâche <i>La tache bleue et 123</i>	134
9.1.1	Procédures identifiées lors de l'analyse <i>a priori</i>	134
9.1.2	Procédures identifiées lors de l'analyse <i>a posteriori</i>	137
9.1.3	Points remarquables de l'analyse <i>a posteriori</i>	141
9.1.4	La pensée des élèves avec MLD et celle des élèves sans MLD	145
9.2	Analyse de la tâche <i>La suite de carrés</i>	146
9.2.1	Procédures identifiées lors de l'analyse <i>a priori</i>	146
9.2.2	Procédures identifiées lors de l'analyse <i>a posteriori</i>	153
9.2.3	Points remarquables de l'analyse <i>a posteriori</i>	163
9.2.4	La pensée des élèves avec MLD et celle des élèves sans MLD	165
9.3	Analyse de la tâche <i>Nombres pairs/impairs</i>	166
9.3.1	Procédures identifiées lors de l'analyse <i>a priori</i>	166
9.3.2	Procédures identifiées lors de l'analyse <i>a posteriori</i>	170
9.3.3	Points remarquables de l'analyse <i>a posteriori</i>	179
9.3.4	La pensée des élèves avec MLD et celle des élèves sans MLD	189
IV	Conclusions	191
10	Synthèse des résultats	193
10.1	Synthèse de la réponse à Q1 : une batterie de tâches	193

10.2 Réponse à la question de recherche Q2 : la pensée algébrique d'élèves avec MLD	194
10.2.1 Réponse à Q2.1 : les <i>language constructs</i>	195
10.2.2 Réponse à Q2.2 : les types de généralisation	196
10.2.3 Réponse à Q2.3 : les exemples dans la preuve	197
10.3 Pour conclure : la pensée algébrique d'élèves avec MLD	198
10.3.1 Les élèves avec MLD : difficultés	198
10.3.2 Les élèves avec MLD : compétences	200
10.3.3 Analyse qualitative de la pensée algébrique des élèves avec MLD et des élèves sans MLD	200
11 Analyse critique de la thèse	203
11.1 Limites	203
11.2 Difficultés	206
11.3 Points forts	206
12 Perspectives de recherche	209
12.1 Une étude de cas	209
12.2 Le focus sur une tâche	210
12.3 Une recherche participative avec expérimentation en classe	210
12.4 Une étude sémiotique avec conception d'artefacts	211
12.5 Activité mathématique et conjectures chez des élèves avec MLD	213
12.6 Formation initiale et continue	214
Bibliographie	217
V - Annexes	243
A Le texte des tâches proposées lors du recueil des données	245
A.1 Séance 1 : <i>La suite de carrés</i>	246
A.2 Séance 2 : <i>Pierre, Manon et Nombres pairs/impairs</i>	251
A.3 Séance 3 : <i>La tache bleue, 123 et Nuage et maison</i>	254
A.4 Séance 4 : $18+4=$	260
B Les analyses a priori	263
B.1 <i>La tache bleue</i>	264
B.2 <i>123</i>	265
B.3 <i>La suite de carrés</i>	266

B.4	<i>Nombres pairs/impairs</i>	272
C	Les protocoles d'entretien	277
C.1	Présentation et règles de l'entretien	278
C.2	<i>La suite de carrés</i>	279
C.3	<i>Nombres pairs/impairs</i>	285
C.4	<i>La tache bleue et 123</i>	286
D	Les transcriptions des entretiens	289
D.1	<i>La tache bleue et 123</i>	290
D.2	<i>La suite de carrés</i>	321
D.3	<i>Nombres pairs/impairs</i>	461
E	Les productions écrites des élèves	529
E.1	<i>La tache bleue</i>	530
E.2	<i>123</i>	538
E.3	<i>La suite de carrés</i>	541
E.4	<i>Nombres pairs/impairs</i>	574
F	Les questions posées au corps enseignant	587

Introduction

Ces dernières décennies, un intérêt croissant a été porté dans les recherches aux « troubles des apprentissages en mathématiques » (*Mathematical Learning Disabilities*, noté dorénavant MLD). Avoir ce trouble implique avoir des difficultés sévères et/ou persistantes dans l'apprentissage des mathématiques (Deruaz et al., 2020). Il toucherait, selon les études, entre 5% et 8% des élèves (Butterworth, 2005; Geary, 2011; Lewis et Fisher, 2016; Noël et Karagiannakis, 2020) et serait persistant dans la scolarité (Geary et al., 2012), participant ainsi à la création de nouvelles inégalités scolaires et sociales.

À un niveau institutionnel, nous assistons à une intensification de la prise en compte des élèves avec MLD² par les instances politiques et éducatives, et ce dans différents pays. Par exemple, en Suisse, dans le canton de Vaud, le *Concept 360°* (2019) décline les solutions qui répondent de manière appropriée à la diversité des élèves en contexte inclusif. En France, la *Loi pour l'égalité des droits et des chances, la participation et la citoyenneté des personnes handicapées* (2005) et la *Loi pour la refondation de l'école* (2013) mettent en avant une école inclusive s'adaptant aux besoins spécifiques de chaque élève. Ou encore, en Italie, la *Loi 170/2010* (2010) réglemente les mesures éducatives compensatoires et dérogatoires offertes par les écoles aux élèves avec troubles des apprentissages et définit les possibilités de formations du corps enseignant sur le sujet, tout en prenant en considération la variété des protagonistes : personnel médical, personnel scolaire, élèves et familles.

Le concept de MLD est à la croisée de plusieurs domaines disciplinaires. Il est ancré en sciences cognitives pour ce qui concerne sa définition (American Psychiatric Association, 2013; Organisation mondiale de la Santé, 2022) et le diagnostic (Desmet et Mussolin, 2012), mais il est également étroitement lié au domaine de l'éducation (Baccaglioni-Frank, Di Martino et al., 2020; Gardes et Prado, 2016; Giroux, 2011) impactant ainsi des réformes scolaires. La plupart des études actuelles

2. Nous nous référons aux élèves utilisant des formulations *person-first* (<https://apastyle.apa.org/style-grammar-guidelines/bias-free-language/disability>) comme « élèves avec MLD » ou « élèves ayant des MLD », que nous avons considérées plus adaptées au groupe de personnes étudié pour notre travail. Nous utilisons le mot « MLD » pour indiquer le trouble.

sur les MLD se situent essentiellement dans le champ des sciences cognitives : neuropsychologie et psychologie cognitive (Giroux, 2011). En effet, historiquement, les premières traces de la notion de MLD remontent à 1919, quand le neurologue Henschen a introduit le terme « *akalkulia* » (Fischer, 2009b). Les sciences cognitives s'intéressent au fonctionnement cognitif et aux caractéristiques propres à l'individu. Elles mettent en lien les difficultés en mathématiques avec un dysfonctionnement sur le plan neurologique (Butterworth, 2005; Dehaene, 2010; Geary et Hoard, 2005).

La didactique des mathématiques s'empare de ces questions, tout en apportant un point de vue complémentaire à l'approche cognitiviste (Baccaglini-Frank, Di Martino et al., 2020; Gauvrit, 2012). En effet, en étudiant les situations d'enseignement et d'apprentissage, la didactique considère les MLD en fonction du savoir mathématique plutôt qu'en relation avec les caractéristiques personnelles de l'élève (Giroux, 2011).

Par exemple, Roiné et Barallobres (2018) prennent pour objet d'étude des classes d'enseignement spécialisé en France et au Québec en s'interrogeant sur le profil des élèves fréquentant ces écoles et sur le type d'enseignement qui leur est dispensé. Les auteurs mettent en avant certains phénomènes qui caractérisent l'enseignement spécialisé, comme l'appauvrissement des savoirs scolaires à transmettre, ce qui peut produire un effet cumulatif entraînant ainsi une aggravation des difficultés des élèves.

De plus, la didactique a pour vocation de comprendre comment intervenir face aux difficultés des élèves (Baccaglini-Frank, Di Martino et al., 2020). Cette intention est claire dans le travail en Italie de Robotti (2017) qui se demande, après l'identification des principales difficultés pour des élèves avec MLD, « *How can we didactically intervene in effective ways?* » (p. 100). La chercheuse propose un logiciel pour construire le sens de certains objets mathématiques qui est favorisé par la variété des représentations sémiotiques de l'outil et le lien que celui-ci permet entre le système sensori-moteur de l'élève et le contenu mathématique.

Certaines recherches sur les MLD se construisent en didactique des mathématiques, mais avec une articulation avec les études cognitives. Par exemple, Peteers (2018), dans sa thèse, mène une analyse didactique des tests diagnostiques pour les MLD, qui sont, pour la plupart, fondés sur des recherches en sciences cognitives. Par ailleurs, toujours à titre d'exemple, une équipe gréco-italienne (Karagiannakis et al., 2016) a conçu un test pour l'identification de différents profils de MLD avec une approche au croisement entre didactique et psychologie.

Nonobstant ces quelques exemples, les recherches en didactique des mathéma-

tiques sur les MLD méritent d'être davantage développées. Cette thèse apporte une contribution à cet égard.

Ainsi, dans ce manuscrit, nous nous intéressons à la pensée algébrique des élèves avec MLD. Le choix du focus mathématique est lié à son importance dans la scolarité et au manque de recherches dans ce domaine pour des élèves avec MLD (Lewis et Fisher, 2016). En effet, la quasi-totalité des études sur les MLD concerne l'arithmétique à l'école primaire. Pourtant, les difficultés des élèves avec MLD sont variées (Fias et al., 2013) et affectent plusieurs aspects des compétences mathématiques (Kaufmann et al., 2013). Afin d'apporter un point de vue didactique et d'élargir le champ des domaines mathématiques analysés, nous interrogeons, dans notre travail de thèse, les compétences et les difficultés d'élèves avec MLD en ce qui concerne la pensée algébrique.

À cet effet, dans la première partie de notre travail, après avoir présenté le contexte et notre problématique (chapitre 1), nous réalisons deux revues de littérature. La première revue de littérature concerne les MLD et se situe à l'interface entre sciences cognitives et didactique des mathématiques, en articulant les deux points de vue (chapitre 2). La seconde, spécifique à la didactique, porte sur la pensée algébrique, et nous conduit à en étudier plus spécifiquement quatre aspects : la généralisation, la structure, l'argumentation et la relation entre quantités associée à une vision relationnelle du signe égal (chapitre 3).

En ayant pour objectif l'étude de ces aspects chez des élèves avec MLD, et après avoir présenté nos appuis théoriques (chapitre 4), nous posons une première question de recherche (chapitre 5) :

Q1 Quelles tâches créer pour analyser les difficultés et les compétences des élèves spécifiques à la pensée algébrique?

Pour y répondre, nous concevons une batterie de tâches en exploitant le modèle d'algèbre de Kaput (Kaput, 1995, 2008), dont le cœur est la généralisation. Les huit tâches choisies sont décrites et analysées dans la deuxième partie de la thèse (chapitres 6 et 7). Elles sont proposées lors d'entretiens cliniques à dix-huit élèves dans le secondaire : quinze avec MLD et trois sans MLD. L'expérimentation est présentée dans la troisième partie (chapitre 8).

Nous analysons les transcriptions des entretiens à l'aide de trois cadres : les *language constructs* de Malara et collègues (Cusi et al., 2011 ; Malara et Navarra, 2018), les types de généralisation de Radford (2001, 2008) et la typologie de preuves de Balacheff (Balacheff, 1987). Cette analyse nous permet de répondre à la question de recherche suivante et à ses sous-questions :

Q2 Comment pouvons-nous décrire la pensée algébrique d'élèves avec MLD en termes de *language constructs*, types de généralisation et types de preuve?

Q2.1 Quels *language constructs* identifient la pensée algébrique d'élèves avec MLD?

Q2.2 Quels types de généralisation sont utilisés par des élèves avec MLD dans l'étude d'un *pattern* géométrique?

Q2.3 Comment des élèves avec MLD mobilisent des exemples et s'engagent dans une preuve dans une tâche d'*early algebra* nécessitant une argumentation?

Les analyses des transcriptions des entretiens et des productions écrites mettent en lumière la capacité d'élèves avec MLD à porter un regard algébrique sur les tâches proposées en ayant recours à une vision relationnelle du signe égal et en se focalisant sur le processus et la structure d'une certaine tâche (chapitre 9). Par ailleurs, elles montrent que des élèves avec MLD mettent en place plusieurs types de généralisation (arithmétique, algébrique factuelle, algébrique contextuelle, etc.) et ont recours à différentes fonctions des exemples.

Pour conclure, les résultats indiquent que des élèves avec MLD peuvent faire appel à une pensée algébrique. Celle-ci ne diffère pas qualitativement de celle des élèves sans MLD en ce qui concerne les procédures et les difficultés. Ce qui semble distinguer les deux catégories est plutôt la fréquence et la persistance des difficultés lors des relances réalisées dans l'expérimentation. Nous détaillons ces résultats dans la troisième partie.

Ces résultats ouvrent la voie à la conception de propositions didactiques qui visent le développement de la pensée algébrique et qui sont destinées à des classes ayant des élèves avec MLD. Nous aborderons ce point dans la quatrième partie de la thèse, tout comme la portée et les limites de notre travail (chapitres 10, 11 et 12).

Introduction (english translation)

In recent decades, there has been a growing research interest in “Mathematical Learning Disabilities” (henceforth noted MLD). Having this disorder implies having severe and/or persistent difficulties in learning mathematics (Deruaz et al., 2020). According to different studies, it affects between 5% and 8% of pupils (Butterworth, 2005; Geary, 2011; Lewis and Fisher, 2016; Noël and Karagiannakis, 2020) and is persistent throughout the schooling process (Geary et al., 2012), thus contributing to the creation of new educational and social inequalities.

At an institutional level, we are witnessing an intensification of the consideration of students with MLD³ by political and educational authorities in different countries. For example, in Switzerland, in the canton of Vaud, the *Concept 360°* (2019) lays out solutions which appropriately address the diversity of pupils in an inclusive context. In France, the *Loi pour l'égalité des droits et des chances, la participation et la citoyenneté des personnes handicapées* (2005) and the *Loi pour la refondation de l'école* (2013) put forward an inclusive school adapting to the specific needs of each pupil. Or again, in Italy, Law 170/2010 (2010) regulates the educational measures, both compensating and dispensing, offered by schools to pupils with learning disabilities, and defines the possibilities for training the teaching staff on the subject, while taking into consideration the variety of actors: medical staff, school staff, pupils and families.

The concept of MLD is at the crossroads of several disciplinary fields. It is rooted in cognitive sciences as far as its definition (American Psychiatric Association, 2013; Organisation mondiale de la Santé, 2022) and diagnosis (Desmet and Mussolin, 2012) are concerned, but it is also closely linked to the field of education (Baccaglioni-Frank, Di Martino, et al., 2020; Gardes and Prado, 2016; Giroux, 2011), thus impacting school reforms. Most of the current studies on MLDs are essentially situated in the field of cognitive sciences: neuropsychology and cognitive psychol-

3. We will refer to students using person-first formulations (<https://apastyle.apa.org/style-grammar-guidelines/bias-free-language/disability>) such as “students with MLD”, which we considered more appropriate to the group of people studied for our work. We use the word “MLD” to indicate the disorder.

ogy (Giroux, 2011). Indeed, historically, the first traces of the notion of MLD date back to 1919, when the neurologist Henschen introduced the term “*akalkulia*” (Fischer, 2009b). Cognitive sciences are concerned with cognitive functioning and the characteristics of the individual. They link difficulties in mathematics with a dysfunction on the neurological level (Butterworth, 2005; Dehaene, 2010; Geary and Hoard, 2005).

Mathematics education takes up these questions, while bringing a point of view complementary to the cognitivist approach (Baccaglini-Frank, Di Martino, et al., 2020; Gauvrit, 2012). Indeed, in studying teaching and learning situations, mathematics educators consider the MLDs in terms of mathematical knowledge rather than in relation to the personal characteristics of the student (Giroux, 2011).

For example, Roiné and Barallobres (2018) take as their object of study special education classes in France and in Quebec by analysing the profile of the pupils attending these schools and the type of teaching they receive. The authors highlight certain phenomena that characterise special education, such as the impoverishment of the school knowledge to be transmitted, which can produce a cumulative effect leading to an aggravation of the pupils’ difficulties.

Moreover, the vocation of mathematics education is to understand how to intervene in the face of pupils’ difficulties (Baccaglini-Frank, Di Martino, et al., 2020). This intention is clear in the work of Robotti (2017) in Italy who asks, after identifying the main difficulties for students with MLD, “How can we didactically intervene in effective ways?” (p. 100). The researcher proposes a software to construct the meaning of some mathematical objects. The understanding of this meaning is enhanced by the variety of semiotic representations of the tool and the link that it allows between the student’s sensory-motor system and the mathematical content.

Some research on MLDs is carried out in the field of mathematics education, at the interface with cognitive studies. For example, in her thesis, Peteers (2018) conducts a didactic analysis of diagnostic tests for MLDs, which are, for the most part, based on research in cognitive sciences. Furthermore, still by way of example, a Greek-Italian team (Karagiannakis et al., 2016) has designed a test for the identification of different MLD profiles with an approach at the crossroads between mathematics education and psychology.

Notwithstanding these few examples, research in mathematics education on MLDs deserves to be further developed. This thesis makes a contribution in this respect.

Indeed, in this manuscript, we are interested in the algebraic thinking of students with MLD. The choice of the mathematical focus is related to its importance

in schooling and to the lack of research in this area for pupils with MLD (Lewis and Fisher, 2016). In fact, almost all studies on MLD concern arithmetic in primary school. Yet, the difficulties of pupils with MLD are varied (Fias et al., 2013) and affect several aspects of mathematical skills (Kaufmann et al., 2013). In order to provide a didactic perspective and to broaden the scope of the analysed mathematical domains, we question, in our thesis, the competences and difficulties of pupils with MLD with regard to algebraic thinking.

To this end, in the first part of our work, after presenting the context and our research problem (chapter 1), we carry out two literature reviews. The first literature review concerns the MLDs and is situated at the interface between cognitive sciences and mathematics education, by articulating the two points of view (chapter 2). The second one, specific to mathematics education, concerns algebraic thinking, and leads us to study more specifically four aspects of it: generalisation; structure; argumentation; and the relation between quantities, with a focus on the relational interpretation of the equal sign (chapter 3).

With the aim of studying these aspects in students with MLD, and after presenting our theoretical supports (chapter 4), we pose a first research question (chapter 5):

Q1 What tasks should be created to analyse students' difficulties and skills specific to algebraic thinking?

To answer this, we design a battery of tasks using Kaput's model of algebra (Kaput, 1995, 2008), the core of which is generalization. The eight tasks chosen are described and analysed in the second part of the thesis (chapters 6 and 7). They are proposed during clinical interviews to eighteen secondary school students: fifteen with MLD and three without MLD. The experimentation is presented in the third part (chapter 8).

We analyse the interview transcripts using three frameworks: Malara and colleagues' language constructs (Cusi et al., 2011; Malara and Navarra, 2018), Radford's generalisation types (2001, 2008) and Balacheff's types of proofs (Balacheff, 1987). This analysis allows us to answer the following research question and its sub-questions:

Q2 How can we describe the algebraic thinking of students with MLD in terms of language constructs, types of generalisation and types of proof?

Q2.1 Which language constructs identify the algebraic thinking of students with MLD?

Q2.2 What types of generalisation are used by students with MLD in the study of a geometric pattern?

Q2.3 How do students with MLD mobilise examples and engage in proofs in an early algebra task requiring argumentation?

The analyses of the transcripts of the interviews and of the written productions highlight the ability of pupils with MLD to take an algebraic look at the tasks proposed by resorting to a relational vision of the equal sign and by focusing on the process and the structure of a certain task (chapter 9). Furthermore, they show that students with MLD implement several types of generalisation (arithmetic, factual algebraic, contextual algebraic, etc.) and different functions of the examples.

In conclusion, the results indicate that students with MLD can use algebraic thinking. This does not differ qualitatively from that of students without MLD in terms of procedures and difficulties. What seems to distinguish the two categories is rather the frequency and persistence of difficulties even following the inputs of the researcher during the experiment. We detail these results in the third part.

These results open the way to the design of didactical proposals aimed at the development of algebraic thinking and intended for classes with students with MLD. We will discuss this in the fourth part of the thesis, where we also examine the scope and limitations of our work (chapters 10, 11 and 12).

Première partie

Cadre de la recherche

Chapitre 1

Contexte et problématique

La recherche est marquée ces dernières années par une attention croissante vers ce qu'on appelle les *troubles des apprentissages* et nous assistons à une augmentation des recherches sur la compréhension des difficultés qu'ils entraînent (Deruaz et al., 2020; Kaufmann et al., 2013). Le concept de trouble des apprentissages a été mis en évidence par les sciences cognitives, mais il est étroitement lié au domaine de l'éducation (Baccaglini-Frank, Di Martino et al., 2020; Gardes et Prado, 2016; Giroux, 2011). Cette caractéristique l'expose aux tensions entre les différentes disciplines qui s'y intéressent, parmi lesquelles nous pouvons identifier : la psychologie, la didactique, les sciences cognitives (Giroux, 2011). Ces disciplines abordent la question avec des points de vue différents en ayant des objectifs, des questions de recherche, des méthodes et des cadres théoriques à la fois variés et complémentaires.

L'intérêt pour ce sujet n'est guère que scientifique. L'avancement de la recherche va de pair avec l'attention des institutions politiques. En effet, les troubles des apprentissages font désormais aussi partie des documents officiels de différents pays européens, qui en préconisent une prise en charge par l'école : par exemple avec le *Concept 360°* (2019) dans le canton de Vaud en Suisse, avec la *Loi pour l'égalité des droits et des chances, la participation et la citoyenneté des personnes handicapées* (2005) et la *Loi pour la refondation de l'école* (2013) en France ou avec la *Loi 170/2010* (2010) en Italie.

Il s'agit donc d'un thème particulièrement actuel, concernant directement le terrain scolaire qui est toujours davantage demandeur d'outils à mettre en place en classe pour prendre en charge ces élèves. Cela est d'autant plus vrai pour les troubles des apprentissages en mathématiques, qui sont beaucoup moins explorés que, par exemple, ceux de la lecture (Dehaene et al., 2004; Furlong et al., 2016).

Dans ce chapitre, nous présentons plus en détail ce qui précède : nous donnons

un aperçu de différents troubles avec un focus particulier sur les troubles en mathématiques qui constituent le sujet de notre étude, nous présentons le point de vue de différentes disciplines scientifiques, nous donnons plus d'informations sur le contexte scolaire à propos des troubles des apprentissages et nous constatons un manque d'études à propos de certaines disciplines comme l'algèbre. Tout cela nous amène à introduire notre problématique et à exposer le plan global de la thèse.

1.1 Les troubles des apprentissages

Les troubles des apprentissages sont traditionnellement associés à une dysfonction cognitive qui entraîne des difficultés scolaires sévères et persistantes qui ne relèveraient ni d'une pédagogie inappropriée, de facteurs socioculturels, d'un retard de développement ou d'un handicap sensoriel (American Psychiatric Association, 2013; Noël et Karagiannakis, 2020). Ces troubles peuvent être diagnostiqués à l'aide de tests standardisés (American Psychiatric Association, 2013; Geary, 2011). Le *Manuel Diagnostique et Statistique des troubles mentaux* (DSM-5, American Psychiatric Association, 2013), offre des spécifications supplémentaires pour trois types de troubles des apprentissages qui peuvent coexister chez un même individu : les troubles de la lecture, les troubles de l'écriture et les troubles des mathématiques. Une organisation similaire est reprise par la *Classification Internationale des Maladies*, qui ouvre également aux troubles « avec autre altération précisée de l'apprentissage » et aux troubles des apprentissages « sans précision » (CIM-11, Organisation mondiale de la Santé, 2022). Dans les sections suivantes, nous présentons brièvement les troubles de la lecture et de l'écriture, puis nous nous concentrons sur ceux concernant à l'apprentissage des mathématiques.

1.1.1 Troubles des apprentissages de la lecture

Les troubles des apprentissages de la lecture compromettent la capacité à associer les sons d'une certaine langue aux caractères écrits (American Psychiatric Association, 2013). Cela peut avoir un impact sur la précision de lecture des mots, la vitesse ou fluidité de lecture et la compréhension de ce qui est lu. « Dyslexie » est un terme alternatif utilisé pour désigner des difficultés dans la reconnaissance précise et fluide des mots et de faibles capacités orthographiques.

1.1.2 Troubles des apprentissages de l'écriture

Les troubles des apprentissages de l'écriture affectent la précision orthographique, grammaticale et de ponctuation et la clarté de l'organisation des expressions écrites (American Psychiatric Association, 2013).

1.1.3 Troubles des apprentissages en mathématiques

Les troubles des apprentissages en mathématiques influencent le sens du nombre, la mémorisation des faits arithmétiques, la précision ou fluidité de calcul et le raisonnement mathématique (American Psychiatric Association, 2013). « Dyscalculie » est un terme alternatif utilisé pour désigner des difficultés dans le traitement de l'information numérique, l'apprentissage des faits arithmétiques et la réalisation des calculs. Selon la classification du DSM-5, le mot dyscalculie ne comprend donc pas le raisonnement mathématique.

1.1.4 Histoire et évolution du concept de troubles des apprentissages en mathématiques

Dans notre travail, nous explorons les troubles des apprentissages en mathématiques.

Les premières traces de l'intérêt vers les troubles en mathématiques remontent au 1919, quand le médecin et neurologue suédois Henschen (cité dans Fischer, 2009b) introduit le mot « *akalkulie* » pour désigner l'incapacité à calculer. En 1934, le neurologue Kleist (cité dans Fischer, 2009b) rapporte dans ses recherches l'observation de nombreux blessés de guerre qui ont développé des troubles du calcul sans pourtant manifester d'autres troubles (comme une perturbation du langage). Dans les années 1960, des études apparaissent à propos d'adultes victimes de traumatismes physiques ou d'accidents vasculaires cérébraux avec des conséquences sur les mathématiques (Meljac, 2010). À partir de ces études qui identifiaient la cause du trouble en l'endommagement d'une zone cérébrale spécifique, les concepts de « dyscalculie acquise » ou « acalculie acquise » ont été développés (Fischer, 2009b; Meljac, 2010).

Le fait que la détérioration de certaines aires cérébrales puisse altérer les fonctions liées au calcul a conduit à l'idée que cela était également possible dès la naissance, en contribuant à créer le concept de « dyscalculie développementale » introduit par Cohn en 1968 (Dehaene et al., 2004; Fischer, 2009b; Meljac, 2010). À cette

époque le terme concernait seulement les difficultés des enfants à se référer à des symboles graphiques.

En 1974, le psychologue Kosc publie la première étude systématique sur la dyscalculie en explorant certaines des difficultés des apprentissages en arithmétique (Butterworth, 2005). Le chercheur propose une méthode pour détecter les enfants avec dyscalculie développementale qui se base sur l'écart entre le quotient intellectuel (QI) et la performance effective en mathématique (Fischer, 2009b). Il retient les élèves dont le QI est supérieur à 90 (critère d'exclusion : faible niveau intellectuel) et qui sont dans le 10% les moins bons au moins dans un des tests mathématiques proposés (critère d'inclusion : faiblesse en calcul).

Dans les années suivantes, le concept de « sens du nombre », défini comme un système de traitement des nombres approximatif permettant la représentation de grandes quantités, s'ajoute à la difficulté à se référer à des symboles graphiques comme caractéristiques de la dyscalculie en devenant un aspect fondamental (American Psychiatric Association, 2013; Dehaene et al., 2004; Fischer, 2009b).

Le concept de dyscalculie s'inspire de celui de dyslexie, trouble avec une histoire plus longue et qui a été davantage étudié (Butterworth, 2005; Dehaene et al., 2004; Meljac, 2010). La définition de dyslexie des sciences cognitives a été un modèle pour celle de dyscalculie (Giroux, 2011).

Après citation dans le DSM-2 (American Psychiatric Association, 1968) d'un générique « *specific learning disturbance* » sans détails supplémentaires, en 1980, la dyscalculie développementale est officiellement considérée parmi les troubles mentaux en faisant son apparition dans le DSM-3 sous le nom « *developmental arithmetic disorder* » dans la section « *specific developmental disorders* ». En 2000, la version française du DSM-4 parle de « troubles des apprentissages » et en particulier de « trouble du calcul ». Dans la version actuelle (2013), on trouve « *specific learning disorder with impairment in mathematics* » et le terme « dyscalculie » est cité pour la première fois. Le DSM-5 préconise l'identification des troubles des apprentissages par moyen de tests mathématiques standardisés. Les outils actuellement à disposition pour détecter les troubles en mathématiques testent quasi exclusivement les connaissances arithmétiques de base comme le comptage ou la capacité à trouver le résultat d'un simple calcul (Baccaglioni-Frank, Di Martino et al., 2020; Fischer, 2009b; Peteers, 2018).

L'évolution au cours des années du vocabulaire du DSM décrit dans le paragraphe précédent témoigne de l'existence de différents termes pour indiquer cette condition. En plus de ceux déjà mentionnés, nous trouvons dans la littérature « dysfonctionnement cognitif », « innumérisme », « *specific arithmetic learning difficulties* »,

difficultés des apprentissages en mathématiques (en anglais « *mathematical learning difficulty* », abrégé en MLD), « *mathematical learning disorder* » (à nouveau MLD), « *mathematical learning disability* » (encore MLD), ou autres encore (Baccaglini–Frank, Di Martino et al., 2020; Butterworth, 2005; Deruaz et al., 2020; Dias, 2018; Giroux, 2011; Vigier, 2012). Le vocabulaire ne fait pas encore consensus et les différents termes coexistent. Comme nous justifions dans la section 2.1.3, nous utilisons dorénavant l’acronyme MLD¹, qui fait référence à l’ensemble de ces définitions.

L’évolution de la terminologie suit le changement de posture des études plus récentes. D’une interprétation strictement biologique et liée à la condition physique du cerveau, les dernières études ouvrent la possibilité à une influence de l’environnement et donc des apprentissages sur l’émergence des difficultés spécifiques en mathématiques (Geary, 2011). En effet, dans les premières études sur la dyscalculie, le contexte social et scolaire n’est pas pris en considération, alors que le terme dyscalculie entre dans les écoles pour décrire la situation déjà bien connue par le corps enseignant d’élèves avec de « sévères difficultés » en mathématiques (Giroux, 2011). En outre, alors qu’au début les études sur les MLD étaient plutôt axées sur le domaine médical, en commençant à concerner le milieu scolaire, elles touchent ainsi d’autres domaines de recherche tels que la didactique des mathématiques.

Les causes des MLD ne font pas consensus, et les différentes approches biologiques et environnementales coexistent.

Récemment, des études en sciences cognitives ont montré que les MLD sont hétérogènes (Fias et al., 2013) et affectent plusieurs aspects des compétences mathématiques (Kaufmann et al., 2013). Par conséquent, comme nous le montrons dans les prochaines sections, les domaines mathématiques étudiés ont également évolué. La recherche est passée de ne s’intéresser que des sujets d’arithmétique de base à prendre en compte aussi d’autres disciplines comme la géométrie ou l’algèbre (Deruaz et al., 2020; Gregorio, 2019, 2021; Karagiannakis et al., 2016; Lewis et Fisher, 2016). Cela remet en question la pertinence des tests qui sont utilisés pour détecter les MLD qui se basent quasi exclusivement sur des connaissances d’arithmétique de base (Baccaglini–Frank, Di Martino et al., 2020; Fischer, 2009b).

1. Nous nous référons aux élèves utilisant des formulations *person-first* (<https://apastyle.apa.org/style-grammar-guidelines/bias-free-language/disability>) comme « élèves avec MLD » ou « élèves ayant des MLD », que nous avons considérées plus adaptées au groupe de personnes étudié pour notre travail. Nous utilisons le mot « MLD » pour indiquer le trouble.

SCIENCES COGNITIVES		PSYCHOLOGIE DÉVELOPPEMENTALE	DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES
NEUROPSYCHOLOGIE	PSYCHOLOGIE COGNITIVE		
<i>Étude du siège cérébral des fonctions mentales</i>	<i>Étude des processus cognitifs / formation de connaissances</i>	<i>Étude du développement cognitif de l'enfant</i>	<i>Études des conditions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques</i>
←-----		-----→	
<i>Fonctionnement cognitif Traitement symbolique Caractéristiques individuelles</i>		<i>Fonctionnement du savoir Contenu de la connaissance Interactions sujet/savoir/milieu</i>	

Figure 1.1 – Organisation des disciplines qui étudient les difficultés en mathématiques selon les finalités poursuivies (Giroux, 2011, p. 152).

1.2 Différentes disciplines s'intéressant aux MLD

Comme pointé dans la section 1.1, les MLD sont un domaine d'étude au croisement de différentes disciplines (Gardes et Prado, 2016; Gauvrit, 2012; Giroux, 2011; Karagiannakis et al., 2016; Peteers, 2018; Robotti, 2017) : neuropsychologie cognitive, psychologie cognitive, psychologie développementale, didactique des mathématiques, entre autres.

Giroux (2011) a organisé ces disciplines selon les finalités qu'elles poursuivent (figure 1.1). La gauche de la flèche symbolise un intérêt croissant pour le fonctionnement cognitif et les caractéristiques propres à l'individu. C'est une posture typique des sciences cognitives (neuropsychologie cognitive et psychologie cognitive) qui lie les difficultés en mathématiques à un dysfonctionnement sur le plan neurologique (par exemple Butterworth, 2005; Dehaene, 2010; Geary et Hoard, 2005). En se déplaçant vers la droite, on retrouve une approche qui s'intéresse à l'étude du fonctionnement du savoir en situation d'apprentissage et d'enseignement caractéristique de la didactique des mathématiques. Selon ce point de vue, les difficultés des élèves ne sont pas uniquement dues à des caractéristiques propres aux individus, mais le contexte scolaire est également pris en considération dans sa capacité de favoriser ou défavoriser l'accès à la connaissance mathématique.

Actuellement, la posture cognitiviste semble dominante (par exemple Butterworth, 2005; Dehaene, 2010; Geary et Hoard, 2005), mais la didactique des mathématiques gagne de plus en plus sa place en offrant des apports complémentaires à partir des savoirs mathématiques qui ne sont pas centraux pour les sciences cogni-

tives (par exemple Dias et Deruaz, 2012; Gardes, 2021; Heyd-Metzuyanim, 2013; Peteers, 2020; Powell et al., 2020; Robotti et Baccaglini-Frank, 2017).

Dans les prochaines sections, nous présentons plus en détail les apports des différentes disciplines.

1.2.1 Neuropsychologie cognitive et psychologie cognitive

La notion de dyscalculie est apparue dans le champ des sciences cognitives (Giroux, 2011), domaine qui inclut la neuropsychologie cognitive et la psychologie cognitive. La psychologie cognitive étudie les difficultés des apprentissages avec une interprétation cognitive sans investir la recherche d'un substrat neuronal. La neuropsychologie cognitive se développe à partir de la neurologie et de la psychologie cognitive en investiguant les relations entre les systèmes nerveux et la cognition.

L'approche des sciences cognitives est fortement biologique : selon cette posture, les MLD renverraient à un dysfonctionnement neurologique inné et héréditaire (Butterworth, 2005; Giroux, 2011). L'hypothèse à la base de ces disciplines est le fonctionnement modulaire du cerveau, qui n'agirait pas comme une entité unique, mais serait composé de différents modules spécialisés. Chacun de ces modules serait autonome et destiné à une fonction précise avec sa propre localisation neuronale.

Notamment, un rôle particulier pour le traitement des nombres a été associé au sillon intrapariétal (figure 1.2, Dehaene et al., 2004) qui a été désigné comme le siège de notre intuition numérique à la suite de recherches utilisant l'imagerie fonctionnelle. Le sillon intrapariétal est « une scissure qui s'insère en profondeur au sein du lobe pariétal. Cette région s'active automatiquement dans les deux hémisphères pour toutes les tâches qui nécessitent une manipulation des quantités » (Dehaene et al., 2004, p. 46) telles que l'estimation d'un nombre d'objets ou la présentation visuelle de chiffres. Le lobe frontal est également impliqué dans le calcul mental, mais semble être plutôt lié à la mémorisation verbale des calculs et donc pas spécifique à l'arithmétique (figure 1.2).

D'ailleurs, des différences dans l'activation des zones cérébrales chez les enfants avec MLD par rapport à des enfants sans MLD ont été observées (figure 1.3, Kucian et al., 2006).

Malgré ces hypothèses sur une différence à un niveau cérébral, aujourd'hui il n'est pas possible de repérer les sujets avec MLD à l'aide d'une imagerie médicale (Rubinsten, 2009). L'identification se fait par le biais de la performance mathématique face à un test standardisé (American Psychiatric Association, 2013; Baccaglini-Frank, Di Martino et al., 2020; Peteers, 2020).

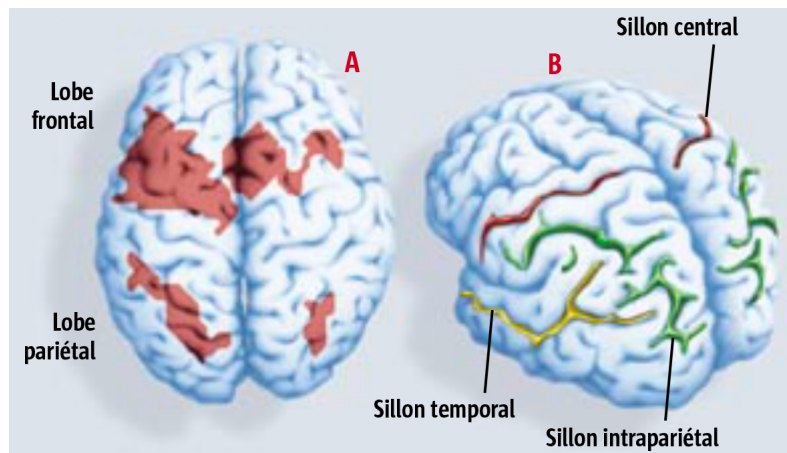


Figure 1.2 – Activation des zones cérébrales lors du calcul mental. Le sillon intrapariétal est systématiquement activé (Dehaene et al., 2004, p. 44).

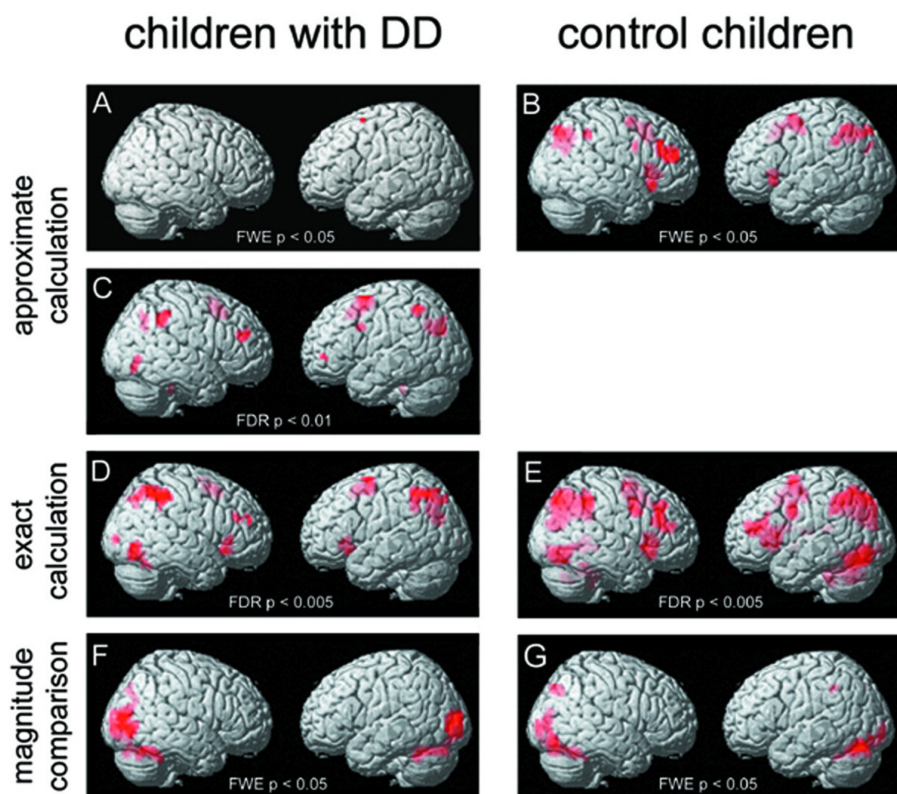


Figure 1.3 – Activation des zones cérébrales d'élèves avec ou sans dyscalculie (DD) pendant différentes activités mathématiques (Kucian et al., 2006).

1.2.2 Psychologie développementale

Cette approche cognitiviste fortement biologique est remise en cause par la psychologie développementale. Cette discipline, d'inspiration piagétienne, prend en considération l'influence de l'apprentissage scolaire et du milieu social et éducatif sur le développement de l'individu et par conséquent sur ses difficultés en mathématiques (Fischer, 2009a; Giroux, 2011; Meljac, 2010; Vannetzel, 2012; Vilette, 2009). La psychologie développementale est spécialement critique à propos de l'hypothèse du fonctionnement modulaire du cerveau et donc de la vision des MLD comme innées et héréditaires. Un indice du rôle de l'environnement socioculturel sur un éventuel diagnostic est la disproportion d'élèves avec MLD dans certaines catégories comme parmi les filles en France (Vannetzel et al., 2009) ou parmi la population afro-américaine aux États-Unis (Geary et al., 2012).

1.2.3 Didactique des mathématiques

La didactique des mathématiques s'intéresse aux situations d'enseignement et d'apprentissage et à l'influence que celles-ci ont sur l'accès aux savoirs et l'émergence d'éventuelles difficultés. Dans cette optique, les MLD sont considérées en relation avec la spécificité du savoir mathématique et le système didactique plutôt qu'en fonction des caractéristiques personnelles de l'élève (Giroux, 2011). D'ailleurs, l'objectif de la didactique est de comprendre comment intervenir face aux difficultés des élèves (Baccaglini-Frank, Di Martino et al., 2020). Cette troisième approche est complémentaire à celles cognitiviste et psychologique dans les finalités et dans son rapport au savoir, qui est souvent négligé dans les deux autres (Gauvrit, 2012; Giroux, 2011).

La perspective didactique est inévitablement différente aussi en ce qui concerne la définition de MLD. Comme nous le montrons plus en détail à la section 2.1, en s'intéressant à la classe, la didactique prend en considération non seulement les élèves ayant un diagnostic, en s'appuyant donc sur les définitions cognitivistes, mais aussi celles et ceux avec de sévères difficultés par rapport à ce qui est attendu pour des élèves d'un certain âge au point de justifier la mise en place d'un plan d'intervention (Deruaz et al., 2020; Giroux, 2011). En effet, le diagnostic de MLD, quand il existe, n'est pas toujours accessible au corps enseignant. De plus, les élèves présentant de sévères difficultés n'ont pas forcément passé un test diagnostique pour les MLD. Ces deux constats rendent trop restrictif de s'intéresser uniquement aux élèves ayant un diagnostic.

Il semble donc nécessaire d'élargir le champ pour pouvoir apporter de l'aide à

chaque élève qui le nécessite, indépendamment d'un diagnostic.

De plus, la didactique des mathématiques peut grandement bénéficier de l'étude des élèves avec MLD, car cela permet non seulement d'étudier cette population particulière, mais aussi d'avoir un effet « loupe » sur les difficultés rencontrées par les élèves sans MLD. En effet, plusieurs recherches montrent que les difficultés des élèves avec MLD sont qualitativement similaires à celles de leurs camarades sans MLD (Desmet et Mussolin, 2012; Geary, 2011; Giroux, 2011).

L'engagement croissant de la didactique en faveur de ce sujet de recherche au cours des dernières années se manifeste par l'augmentation du nombre de groupes de recherche et de conférences qui lui sont consacrées. Par exemple, RITEAM², dont nous faisons partie, est une équipe de recherche fondée en 2017 incluant des chercheurs et des chercheuses venant de différents pays européens (France, Italie, Suisse) et s'intéressant au repérage des MLD, aux caractéristiques des élèves avec MLD et aux dispositifs de soutien pour ces élèves (Dias, 2018; Dias et Ouvrier-Buffet, 2018; Gardes et al., 2019). En ce qui concerne les manifestations scientifiques, à partir de 2018, l'organisation d'EMF³ a intégré un groupe de travail sur l'enseignement spécialisé⁴ qui donne la possibilité d'échanger à propos des MLD d'un point de vue didactique (Millon-Faure et al., 2018). De surcroît, à l'occasion de CERME11⁵ en 2019, il a été créé un groupe dédié à l'*inclusive education*⁶, à l'occasion duquel les MLD ont été objet de discussion (Scherer et al., 2019).

L'attention accrue de la didactique des mathématiques pour l'enseignement à visée inclusive, et en particulier pour les élèves avec MLD, démontre la pertinence de notre intérêt envers le sujet, d'autant plus que cette discipline s'empare dernièrement d'un thème de recherche davantage développé avec les instruments des sciences cognitives. Une approche complémentaire par le savoir disciplinaire paraît donc nécessaire.

1.3 Les MLD à l'école dans le canton de Vaud

L'avancement de la recherche au sujet des MLD a permis, au cours des années, de rejoindre le terrain scolaire. Après leur première apparition dans le DSM-3 (American Psychiatric Association, 1980), les troubles des apprentissages ont petit à petit

2. Recherche Internationale sur les Troubles d'Enseignement et d'Apprentissage des Mathématiques, <http://riteam.ch/fr/>.

3. Espace Mathématique Francophone, <http://emf.unige.ch>.

4. Groupe de travail 11 – « Enseignement auprès de publics spécifiques ou dans des contextes particuliers ».

5. Conférence de la *European Society for Research in Mathematics Education*, <http://erme.site>.

6. TGW25 « *Inclusive Mathematics Education - Challenges for Students with Special Needs* ».

tit influencé les politiques éducatives et bénéficient aujourd'hui d'une attention importante des différentes institutions et figures professionnelles scolaires et parascolaires (corps enseignant, logopédistes, etc.) et par conséquent des élèves et leurs familles.

Notre étude est basée dans le canton de Vaud, en Suisse romande. Le cadre scolaire vaudois est concerné par la prise en charge des élèves en difficulté. La Loi sur l'enseignement obligatoire (Le grand conseil du canton de Vaud, 2011) clarifie que c'est à la charge du corps enseignant de veiller à proposer une pédagogie adaptée à tous et toutes les élèves de la classe. Les difficultés rencontrées par les élèves doivent donc être prises en compte dans la programmation des leçons.

D'ailleurs, en 2019, le canton de Vaud a mis en place le *Concept 360°* visant « une réponse adéquate à la diversité des élèves » (Département de la formation, de la jeunesse et de la culture, 2019, p. 1) en milieu d'enseignement inclusif. Le dispositif décrit les différentes possibilités de prise en charge des élèves et offre des pistes à propos des coordinations entre les différentes parties concernées (élève, écoles, personnel médical, familles, etc.) et il devrait être mis en place dans tous les établissements vaudois avant la fin de l'année 2023.

Le concept prend explicitement en compte les élèves ayant un trouble, parmi lesquelles la dyscalculie apparaît, et plus génériquement les élèves présentant des besoins spécifiques. Le terme « besoin spécifique » est assez large, en permettant une certaine souplesse d'interprétation et d'application :

Ensemble des besoins auxquels le concept cantonal 360° vise à apporter une réponse structurée. Ils s'inscrivent aussi bien dans le champ de la pédagogie régulière, de la pédagogie spécialisée, du socio-éducatif, de l'allophonie, que dans celui de la promotion de la santé et de la prévention en milieu scolaire » (Département de la formation, de la jeunesse et de la culture, 2019, p. 53).

De surcroît, en 2019, un groupe de travail du Département de la formation, de la jeunesse et de la culture sous la coordination de la Haute École Pédagogique Vaud a mené une évaluation de l'enseignement des mathématiques dans le canton de Vaud. Cette enquête a abouti à des propositions de développement pour l'école. Entre autres, elle a mis en évidence le besoin de renforcer la formation initiale des enseignantes et enseignants sur les difficultés d'apprentissage en mathématiques.

La tendance du canton de Vaud est donc de se diriger vers des propositions de plus en plus inclusives en classe ordinaire et d'élargir le soutien offert à chaque élève ayant des besoins spécifiques, indépendamment de la présence ou pas d'un diagnostic.

L'intérêt de l'organisation scolaire vers des solutions visant une école inclusive nous confirme la nécessité d'explorer davantage les MLD du point de vue de la didactique. Non seulement il s'agit d'un thème de recherche riche et encore relativement nouveau, mais également les institutions scolaires et le corps enseignant se trouvent démunis face à des élèves ayant reçu un diagnostic de MLD (Deruaz et Dias, 2016). Le terrain d'enseignement est ainsi demandeur de ressources pour faire face aux difficultés scolaires et en particulier en mathématiques. En effet, même s'il existe des fiches d'information destinées au corps enseignant et concernant les besoins éducatifs particuliers des élèves (par exemple Fondation Centre suisse de pédagogie spécialisée, 2020), pour l'instant la recherche n'offre pas encore assez d'outils pratiques à mettre en place en classe. D'ailleurs, l'adoption des concepts de sciences cognitives par le terrain entraîne des difficultés et des risques (Gardes et Prado, 2016), notamment de traiter le concept superficiellement ou en la banalisant en procédant simplement à de l'« applicationnisme », c'est-à-dire en considérant « l'enseignement comme un terrain modelable au bon gré des avancées des sciences de l'enfant, qui deviennent alors normatives pour l'enseignement » (Brun, cité dans Giroux, 2011). La didactique des mathématiques peut être un bon médiateur pour éviter un tel scénario.

1.4 Les domaines mathématiques étudiés : la nécessité de l'algèbre

Conformément à l'histoire de la naissance du concept de trouble des apprentissages en mathématiques (voir section 1.1.4), les premières études concernant les MLD ont été dédiées au sens du nombre et à certaines connaissances arithmétiques de base (Geary, 2004).

Dans leur méta-analyse parue en 2016, et analysant les derniers 40 ans de recherche sur les MLD, Lewis et Fisher ont trouvé que 20% des articles analysés portent sur le traitement numérique⁷ et 44% sur un certain domaine mathématique⁸. De ce 44%, une partie disproportionnée concerne des connaissances de base comme le comptage et les calculs arithmétiques. La plupart des recherches se concentrent sur les domaines mathématiques élémentaires avant la troisième année d'école primaire⁹, en effet seulement 9% des articles abordent un sujet mathé-

7. Passage entre mot-nombre, nombre en chiffres et représentation analogique.

8. Les 36% restants concernent des compétences qui ne sont pas exclusives aux mathématiques, comme la mémoire, l'attention, etc.

9. *Third grade* dans la littérature internationale, 5P en Suisse romande.

matique plus avancé, dont trois (2% du total) l'algèbre.

Ces résultats sont cohérents avec la méta-analyse de 2020 de Deruaz et al. qui a mis en évidence qu'en didactique des mathématiques la plupart des recherches ¹⁰ concerne des élèves de moins de douze ans et la quasi-totalité ¹¹ des connaissances arithmétiques.

L'état de l'art va de pair avec les instruments existants pour l'identification des élèves avec MLD qui se situent quasi exclusivement dans le domaine arithmétique (Fischer, 2009b; Peteers, 2018). Ce fait cache l'hypothèse implicite que les difficultés dans n'importe quel domaine mathématique peuvent être ramenées à des difficultés en arithmétique (Baccaglini-Frank, Di Martino et al., 2020). Cette hypothèse est discutable, car toutes les difficultés mathématiques ne découlent pas forcément de l'arithmétique, et d'ailleurs on peut avoir des difficultés en arithmétique sans avoir de MLD.

C'est pourquoi, même si les connaissances arithmétiques sont fondamentales pour les mathématiques, cette disproportion des domaines disciplinaires est particulièrement problématique. D'ailleurs, il a été démontré que les MLD sont hétérogènes et influencent différentes compétences mathématiques (Fias et al., 2013; Kaufmann et al., 2013).

Ces dernières années, nous assistons à une augmentation des recherches sur les MLD qui analysent d'autres domaines mathématiques que les premiers concepts d'arithmétique de base. Par exemple Hughes et al. (2020) ont étudié le raisonnement mathématique d'élèves avec MLD, Petitfour (2018) la géométrie, Gardes (2021) et Hacker et al. (2020) les fractions, Powell et al. (2020) la préalgèbre ¹² et Robotti (2017) les concepts de variable et inconnue symboliques. Le peu d'études sur des domaines mathématiques plus avancés a mis en évidence que les difficultés des élèves avec MLD résident non tellement dans la maîtrise des faits numériques, mais plutôt dans des questions conceptuelles liées aux différentes aires disciplinaires (Lewis et Fisher, 2016).

Malgré l'élargissement progressif des disciplines mathématiques à l'étude, l'arithmétique de base reste encore le sujet sur lequel la plupart des recherches portent, les connaissances scientifiques sur les autres domaines ne sont pas encore assez stabilisées. Par exemple, les tests diagnostics n'incluent que des tâches arithmétiques, mais il serait important de vérifier aussi les compétences dans d'autres domaines et de manière à rendre les diagnostics utiles pour les enseignements en classe. Il serait par exemple important de vérifier des compétences comme le rai-

10. 70% parmi les études prises en considération.

11. 94% parmi les études prises en considération.

12. Nous renvoyons au chapitre 3 pour la définition de préalgèbre.

sonnement mathématique, la perception des relations et structures, les processus de généralisation et abstraction, etc. (Baccaglioni–Frank, Di Martino et al., 2020). Approfondir les autres domaines mathématiques en relation avec les MLD semble donc capital.

Un domaine mathématique particulièrement adapté à développer la réflexion sur la structure mathématique, la généralisation et l'abstraction est la pensée algébrique (Kieran, 2018a). De plus, l'entrée dans l'algèbre a traditionnellement posé difficultés aux élèves (Grugeon, 1997; Herscovics et Linchevski, 1994; Vergnaud et al., 1988). Comme Lewis et Fisher le soulignent, « *it is critically important that researchers begin to explore MLD in algebra, given its role as an educational gatekeeper* » (Lewis et Fisher, 2016, p. 365). L'étude de ces difficultés, qui sont bien documentées en didactique des mathématiques (par exemple Booth, 1984; Kieran et Sfard, 1999; Mason, 1989), en relation avec les élèves avec MLD paraît par conséquent pertinente et nécessaire (Gregorio, 2019, 2021).

Comme nous le démontrerons à la section 2.6, la littérature existante sur les MLD et la pensée algébrique est peu riche (Baccaglioni–Frank, Di Martino et al., 2020; Deruaz et al., 2020; Lewis et Fisher, 2016). Elle représente surtout le contexte des États-Unis (par exemple Powell et al., 2020; Witzel et al., 2003; Xin, 2008) avec des recherches pour la plupart dans le domaine de l'enseignement spécialisé (Dibbs et al., 2020). Une partie considérable des recherches existantes restreignent l'algèbre à la manipulation du symbolisme alphanumérique (Bone et al., 2021; J. Lee et al., 2020; Lugo, 2004), alors que moins d'études se concentrent sur les traits caractéristiques de la pensée algébrique.

En didactique des mathématiques, il existe une longue tradition de recherches sur les difficultés des élèves en algèbre (Booth, 1984; Kieran, 2007; Kieran et Sfard, 1999; Mason, 1989). Les difficultés décrites dans la plupart de ces recherches ne sont pourtant pas caractéristiques d'une population avec MLD, mais sont des difficultés observées chez des élèves sans MLD, ou en tout cas le concept de MLD n'est pas pris en considération explicitement. Pilet (2012, 2015) a développé des recherches visant à étayer la prise en charge de l'hétérogénéité des apprentissages des élèves en algèbre élémentaire. Même si des liens solides peuvent être tissés entre la gestion de l'hétérogénéité et un enseignement inclusif avec les élèves en difficulté, ces recherches ne se sont pas explicitement projetées pour des élèves avec MLD.

1.5 Questionnement de recherche

Les considérations rapportées dans les pages précédentes nous ont amenée à nous intéresser à l'étude du raisonnement algébrique avec des élèves ayant des MLD. En particulier, nous voulons comprendre quelles sont les difficultés que les élèves avec MLD rencontrent dans la pensée algébrique et quelles peuvent être leurs compétences.

Nous formulons donc une première question de recherche que nous reformulons ensuite au chapitre 5 après avoir présenté les cadres théoriques utilisés :

Q0 Quelles compétences¹³ et quelles difficultés ont les élèves avec MLD dans la pensée algébrique?

Cette question nous permet d'explorer le raisonnement mathématique des élèves, aspect qui n'est pas fréquemment pris en considération dans les recherches sur les élèves avec MLD.

Cette posture nous permet à la fois de ne pas nous baser exclusivement sur des compétences arithmétiques de base telle que le comptage et de mettre en lumière des compétences de raisonnement mathématique que les élèves avec MLD pourraient manifester.

Nous faisons l'hypothèse que les élèves avec MLD peuvent avoir recours à la pensée algébrique en se trouvant dans une situation en favorisant l'émergence. Ces élèves seraient donc capables de mettre en place de « bons » raisonnements algébriques.

De surcroît, nous faisons l'hypothèse qu'en étudiant cette population particulière d'élèves avec MLD, nous rencontrons des comportements et des difficultés qui sont propres à la plupart des élèves, mais qui dans cette population sont plus évidentes. L'étude de cette population pourrait donc servir de miroir grossissant pour tous et toutes les élèves et stimuler la création de pistes d'étayage aptes à aider toute la classe.

1.6 Plan global de la thèse

Pour aborder la problématique exposée au cours du chapitre, nous avons procédé comme résumé dans le schéma en figure 1.4.

Nous avons en premier lieu mené deux revues de littérature. La première concerne les élèves avec MLD en mathématiques et elle est présentée au cha-

13. Ici, le terme « compétence » doit être conçu dans son acception courante, à l'opposé de « difficulté ».

pitre 2 à partir de la page 27. Nous donnons la définition de MLD que nous utilisons au cours de cette étude et nous décrivons les caractéristiques principales des élèves avec MLD selon la littérature actuelle en didactique des mathématiques, en sciences cognitives et en psychologie. Nous mettons aussi en lumière le nombre insuffisant de recherches à propos des élèves avec MLD en algèbre.

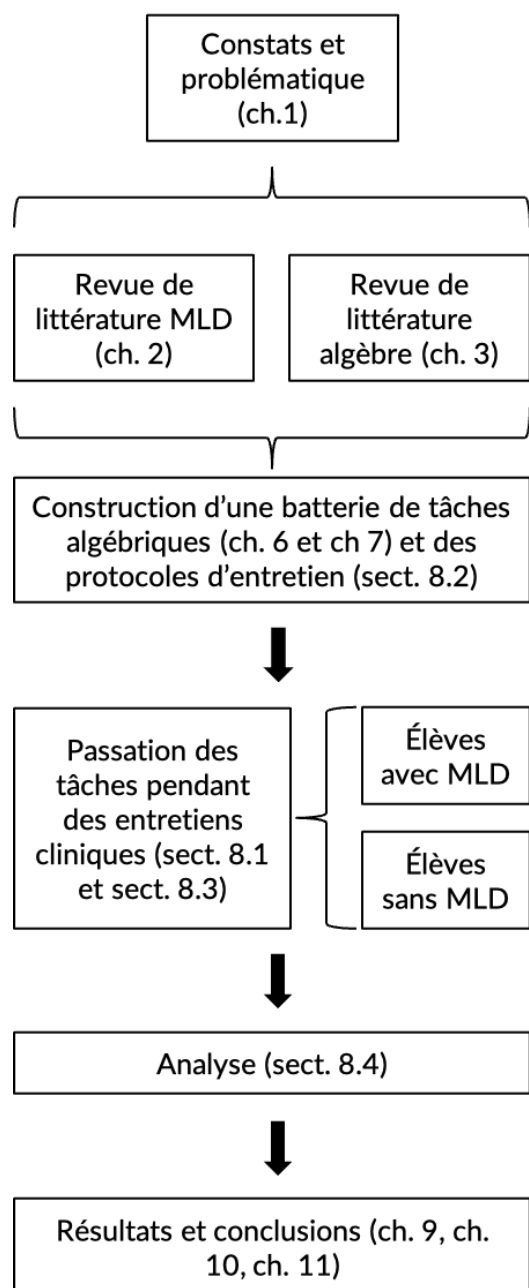


Figure 1.4 – Schéma résumant le plan global de la thèse.

Deuxièmement, nous avons conduit une revue de littérature en didactique des mathématiques au sujet de la pensée algébrique, présentée au chapitre 3 à partir de la page 41. Grâce à cette étude bibliographique, nous cernons mieux l'objet mathématique à l'étude dans cette thèse.

Ces deux revues de littérature étayent ensuite la construction d'une batterie de tâches algébriques (chapitres 6 et 7 à partir de la page 83) et d'un protocole d'entretien (section 8.2 à partir de la page 118).

Ces tâches ont été proposées à des élèves avec MLD et à des élèves sans MLD pendant des entretiens cliniques (sections 8.1 et 8.3 à la page 105).

Les entretiens ont été enfin analysés (section 8.4 à partir de la page 125) pour décrire la pensée algébrique des élèves et répondre à nos questions de recherche (chapitres 9, 11 et 10 à partir de la page 133).

Chapitre 2

Revue de littérature : les MLD

Nous dédions ce chapitre à la revue de littérature à propos des MLD, acronyme de « *mathematical learning difficulty* », « *mathematical learning disorder* » et « *mathematical learning disability* ». Nous approfondissons ici certains aspects déjà évoqués au chapitre 1.

2.1 Définitions

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, différentes définitions de MLD coexistent, en s'accompagnant à un vocabulaire varié. La définition de MLD ne fait pas encore consensus au sein de la communauté scientifique (Baccaglini-Frank, Di Martino et al., 2020; Lewis et Fisher, 2016).

Dans cette section, nous présentons les définitions dans deux domaines de recherche, les sciences cognitives (section 2.1.1) et la didactique des mathématiques (section 2.1.2). La première définition est plutôt médicale et fait référence à des causes biologique et la deuxième prend en considération le contexte d'enseignement-apprentissage. Pour conclure, nous nous positionnons sur la définition retenue pour notre travail (section 2.1.3).

2.1.1 Deux définitions en sciences cognitives

La définition du DSM-5

Une définition fondamentale est celle donnée par le *Manuel Diagnostique et Statistique des troubles mentaux* (DSM-5, American Psychiatric Association, 2013) rédigé par la Société américaine de psychiatrie. Le DSM-5 (2013) adopte une approche holistique en décrivant d'abord un général « *specific learning disorder* » : « *Specific learning disorder is a neurodevelopmental disorder with a biological origin that is the*

basis for abnormalities at a cognitive level that are associated with the behavioral signs of the disorder » (p. 68). Le manuel fournit quatre critères diagnostiques (A-D). Le critère A spécifie le type de difficultés mathématiques possibles (4-5).

A. *Difficulties learning and using academic skills, as indicated by the presence of at least one of the following symptoms that have persisted for at least 6 months, despite the provision of interventions that target those difficulties :*

1-3. ...

4. *Difficulties mastering number sense, number facts, or calculation (e.g., has poor understanding of numbers, their magnitude, and relationships; counts on fingers to add single-digit numbers instead of recalling the math fact as peers do; gets lost in the midst of arithmetic computation and may switch procedures).*

5. *Difficulties with mathematical reasoning (e.g., has severe difficulty applying mathematical concepts, facts, or procedures to solve quantitative problems).*

B. *The affected academic skills are substantially and quantifiably below those expected for the individual's chronological age, and cause significant interference with academic or occupational performance, or with activities of daily living, as confirmed by individually administered standardized achievement measures and comprehensive clinical assessment. For individuals age 17 years and older, a documented history of impairing learning difficulties may be substituted for the standardized assessment.*

C. *The learning difficulties begin during school-age years but may not become fully manifest until the demands for those affected academic skills exceed the individual's limited capacities (e.g., as in timed tests, reading or writing lengthy complex reports for a tight deadline, excessively heavy academic loads).*

D. *The learning difficulties are not better accounted for by intellectual disabilities, uncorrected visual or auditory acuity, other mental or neurological disorders, psychosocial adversity, lack of proficiency in the language of academic instruction, or inadequate educational instruction. (American Psychiatric Association, 2013, pp. 66-67)*

Selon le DSM-5, il s'agit donc de difficultés d'origine biologique, persistantes qui se manifestent en âge scolaire et rendent les résultats en mathématiques nettement inférieures à ceux attendus pour l'âge sans que cela soit imputable à un handicap ou à un autre trouble. Cette définition holistique conçoit donc les MLD comme

une occurrence particulière d'un trouble plus large concernant les apprentissages scolaires en général.

Le DSM-5 fournit des détails supplémentaires pour les difficultés mathématiques à spécifier au moment du diagnostic :

Number sense, memorization of arithmetic facts, accurate or fluent calculation, accurate math reasoning. Note : Dyscalculia is an alternative term used to refer to a pattern of difficulties characterized by problems processing numerical information, learning arithmetic facts, and performing accurate or fluent calculations. If dyscalculia is used to specify this particular pattern of mathematic difficulties, it is important also to specify any additional difficulties that are present, such as difficulties with math reasoning or word reasoning accuracy ». (American Psychiatric Association, 2013, p. 67)

Le DSM-5 identifie différents niveaux de sévérité possible : légère, modérée et sévère. Cette distinction est importante, car elle met en lumière la diversité qu'il peut y avoir entre différentes personnes étant toutes identifiées comme ayant des MLD. Cela appelle à la vigilance parce que derrière le même diagnostic peuvent se cacher des difficultés de niveaux différents et, comme nous le verrons ensuite, également de types différents.

La définition du CIM-11

La Classification Internationale des Maladies rédigée par l'Organisation mondiale de la Santé (CIM-11, Organisation mondiale de la Santé, 2022) donne une définition similaire à celle du DSM-5 :

Le trouble développemental de l'apprentissage avec difficultés en mathématiques se caractérise par des difficultés significatives et persistantes d'acquisition des compétences scolaires relatives aux mathématiques ou à l'arithmétique, comme le sens des nombres, la mémorisation de faits concernant les nombres, l'exactitude des calculs, la fluidité des calculs et l'exactitude du raisonnement mathématique. Les performances de l'individu en mathématiques ou arithmétique sont bien en dessous de ce qui serait attendu pour l'âge chronologique et le niveau de fonctionnement intellectuel et cela entraîne une déficience importante dans le fonctionnement scolaire ou professionnel de l'individu. Le trouble développemental de l'apprentissage avec difficultés en mathématiques n'est pas dû à un trouble du développement intellectuel, à une déficience sensorielle (visuelle ou auditive), à un trouble neurologique,

à un manque d'accès à l'éducation, à un manque de maîtrise de la langue enseignée ou à une adversité psychosociale. (Organisation mondiale de la Santé, 2022)

Nous soulignons le statut particulier dont bénéficie l'arithmétique dans les définitions du DSM-5 et de la CIM-11. Les difficultés arithmétiques concernées sont décrites en détail dans les deux cas, ou au moins certaines parmi ces difficultés. Tandis qu'au reste des mathématiques n'est accordée qu'une référence générique à un « raisonnement mathématique » (Organisation mondiale de la Santé, 2022), ou « *accurate math reasoning* » (American Psychiatric Association, 2013, p. 67). En outre, dans les deux cas, l'idée d'arithmétique qui repose derrière les définitions semble se référer à quelque chose d'automatisé (« la fluidité des calculs » dans la CIM-11, « *memorization of arithmetical facts* » dans le DSM-5, etc.). De surcroît, ces textes n'explicitent pas un moment précis de l'apprentissage lié à ces difficultés et n'interrogent pas la construction d'énoncés mathématiques en classe. Les deux définitions semblent donc mettre plutôt l'accent sur l'aspect calculatoire de l'arithmétique que sur celui structurel ou relationnel.

2.1.2 Une définition en *mathematics education*

En *mathematics education*, quand on se réfère aux MLD, on prend en considération un spectre plus large d'élèves par rapport aux définitions médicales exposées dans la section précédente. La recherche de Deruaz et al. (2020) le montre bien. En menant une étude de synthèse des dix dernières années de recherche internationale en *math education* à propos des MLD, le groupe a identifié trois catégories d'élèves qui sont considérées comme rentrant dans la définition de MLD pour ce domaine scientifique : élèves avec *Math Disorder*, *Learning Disabilities* ou *Severe Difficulties in Mathematics*.

- *Math Disorders* (Deruaz et al., 2020) : ce terme correspond aux MLD au sens des sciences cognitives (American Psychiatric Association, 2013; Organisation mondiale de la Santé, 2022). Les élèves ayant des *math disorders* ont un diagnostic qui a été effectué à l'aide d'un test spécifique en mathématiques (par exemple, des tests psychométriques tels que le WJ-Test) avec des critères spécifiques d'inclusion (par exemple, seuil, écart entre les différentes populations, pourcentage limite, etc.). Les *math disorders* impliquent des difficultés persistantes et spécifiques aux mathématiques.
- *Learning Disabilities* (Deruaz et al., 2020) : ce terme correspond aux « *specific learning disorders* » pas spécifique aux mathématiques du DSM-5 (Ameri-

can Psychiatric Association, 2013). Selon cette catégorisation, les élèves présentant des *learning disabilities* ont des difficultés pas spécifiques aux mathématiques (par exemple la dyslexie) ayant des conséquences sur l'apprentissage des mathématiques. Ces élèves ont un diagnostic pas forcément effectué à l'aide d'un test spécifique en mathématiques. Les *learning disabilities* impliquent des difficultés persistantes, mais pas nécessairement spécifiques aux mathématiques.

- *Severe Difficulties in Mathematics* (Deruaz et al., 2020) : ce terme désigne les élèves en sévère difficulté en mathématiques sans pourtant avoir un diagnostic pouvant les identifier comme ayant des *math disorders* ou des *learning disabilities*. Le repérage des élèves ayant des *severe difficulties in mathematics* peut se faire par le corps enseignant ou à travers des tests non médicaux (par exemple des tests faits passer à niveau d'école ou de classe et pas standardisés). Les *severe difficulties in mathematics* impliquent des difficultés spécifiques, mais pas nécessairement persistantes aux mathématiques.

Selon cette classification, les élèves ayant des MLD font partie d'une des trois catégories ci-dessus. Deruaz et al. (2020) excluent de leur définition les élèves avec « *other types of disabilities such as physical, mental, sensory impairments* » (p. 4).

En didactique des mathématiques, il est nécessaire d'élargir la définition de MLD en prenant en considération les *severe difficulties in mathematics* car en classe les diagnostics ne sont pas toujours disponibles : parfois ils ne sont pas mis à disposition du corps enseignant pour des raisons de confidentialité, parfois les élèves n'ont pas passé de test diagnostic pour des causes diverses (les familles ne savaient pas que cela était possible ¹, l'école ne l'a pas proposé, etc.). Sur le terrain, il est donc nécessaire de prendre en charge chaque élève en difficulté, avec ou sans diagnostic : dans une salle de classe, l'objectif est d'aider les élèves qui rencontrent des difficultés, indépendamment des causes de ces difficultés ou du fait d'avoir passé ou pas un test diagnostic. Il est donc important d'adopter un point de vue plus global par rapport aux sciences cognitives.

De manière conséquente, la référence aux éventuelles origines biologiques des MLD n'est présente qu'indirectement dans l'utilisation des *math disorders* et des *learning disabilities*. En effet, le point de vue de la didactique considère qu'il est très

1. Nous n'avons pas trouvé de statistiques à propos des élèves avec MLD, mais nous trouvons intéressantes les données fournies par Lignier (2011) par rapport aux enfants reconnus comme « précoces ». Le chercheur a montré que les parents de ces enfants ont des métiers intellectuellement supérieurs ou ont fait de longues études avec une proportion bien majeure que la moyenne de la population. Comme pour les MLD, ce constat pose question à propos de l'accès au diagnostic en fonction de la classe sociale et à l'influence du contexte sur celui-ci.

difficile, voire impossible, de différencier les causes biologiques des causes socio-culturelles ou affectives du diagnostic (Baccaglioni–Frank, Di Martino et al., 2020).

Nous soulignons également que la définition proposée par Deruaz et al. (2020) se focalise moins sur les compétences strictement arithmétiques des enfants, en ouvrant la définition à tous les domaines mathématiques.

2.1.3 La définition pour notre étude

Pour notre étude, nous avons choisi la définition de Deruaz et al. (2020; section 2.1.2) issue des recherches en *mathematics education*. Ce choix est dû à plusieurs raisons.

En premier lieu, comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe précédent, la didactique a besoin d'une définition plus large comprenant les élèves en difficulté sévère ou persistante, indépendamment des causes de difficulté. Cela est cohérent avec la tendance politique et scolaire des dernières années qui s'éloigne des définitions restrictives des neurosciences pour aboutir au concept plus inclusif d'élève à besoin spécifique (Département de la formation, de la jeunesse et de la culture, 2019).

Deuxièmement, dans le canton de Vaud où nous avons mené l'étude, il n'y a pas beaucoup d'élèves ayant un diagnostic médical de *math disorder*. Les élèves en difficultés graves en mathématiques ont souvent également un autre type de diagnostic (par exemple de dyslexie) ou le système les considère simplement en difficulté sans pourtant disposer d'un diagnostic. Il aurait donc été très difficile de trouver un nombre suffisant d'élèves pour participer à notre étude en utilisant une définition plus stricte de MLD. De surcroît, l'accès aux tests standardisés pour détecter les élèves avec MLD est réservé aux personnes ayant un profil scientifique en sciences cognitives ou psychologie. Il nous aurait donc été impossible de recourir à un diagnostic expressément pour notre étude.

En conformité avec ce choix de définition, nous nous adaptons au vocabulaire de Deruaz et al. (2020) qui parlent de « MLD » (et non de trouble, dyscalculie ou autre). Il s'agit d'un terme qui, en plus d'être fréquemment utilisé dans la littérature, englobe trois points de vue à la fois : « *Mathematical Learning Disorder* », « *Mathematical Learning Disability* » ou « *Mathematical Learning Difficulty* ».

2.2 Diagnostics

Les MLD sont diagnostiquées au moyen de tests de performance en mathématiques (Baccaglini–Frank, Di Martino et al., 2020; Desmet et Mussolin, 2012; Fischer, 2009b; Peteers, 2018, 2020). Nous soulignons qu’indépendamment de l’attribution des causes (biologiques ou pas), actuellement il n’y a pas d’autres manières de détecter les MLD que par un test qui évalue les connaissances disciplinaires. Les MLD ne peuvent pas être repérées par des caractéristiques cérébrales propres aux individus (Rubinsten, 2009).

Les tests de performance mathématique ne parviennent pas à différencier les résultats faibles dus à des difficultés cognitives de ceux ayant une autre source (par exemple un apprentissage inadapté ou un milieu socio-économique défavorisé; Baccaglini–Frank, Di Martino et al., 2020; Desmet et Mussolin, 2012). En particulier, ces tests certifient que l’enfant a obtenu un certain résultat à un certain moment, sans en expliquer les raisons.

Bien que différents tests existent, le diagnostic des MLD ne fait pas encore consensus au sein de la communauté scientifique et est objet de débat et nouvelles propositions (Baccaglini–Frank, Di Martino et al., 2020).

Les tests communément utilisés sont par exemple le Tedi-Math, le Woodcock Johnson et le Zareki-R, mais il y en a beaucoup d’autres² (Desmet et Mussolin, 2012; Peteers, 2018, 2020). Ces outils sont tous centrés sur des compétences arithmétiques de base (comptage, comparaison de collections, estimation de collections, transcodage, les quatre opérations symboliques, etc.) avec l’hypothèse implicite que les difficultés dans n’importe quel domaine mathématique sont dues à des difficultés en arithmétique (Baccaglini–Frank, Di Martino et al., 2020). Cette hypothèse est problématique, parce que toutes les difficultés en mathématiques ne sont pas nécessairement liées à l’arithmétique. De plus, il est possible d’avoir des difficultés en arithmétique sans avoir de MLD, mais par exemple à cause d’un enseignement inadéquat.

De plus, les tests sont presque tous conçus pour de jeunes enfants, la plupart sont destinés à des élèves jusqu’à onze ans (Desmet et Mussolin, 2012; Peteers, 2018, 2020).

Bien que les tests soient majoritairement dans le domaine arithmétique, ils testent des aspects différents de l’arithmétique (Peteers, 2020). En effet, avoir un diagnostic de MLD ne donne pas toujours des informations précises sur le type de difficulté que l’élève rencontre (Baccaglini–Frank, Di Martino et al., 2020). De sur-

2. Voir Peteers (2018, 2020) pour un aperçu des tests existants.

croît, des tests différents se focalisent sur différents aspects (Peteers, 2020). Cela implique qu'en changeant de test, une même personne pourrait se révéler ayant des MLD ou pas (Vannetzel et al., 2009). Une autre conséquence est que les élèves ayant des MLD peuvent avoir des profils très variés (Karagiannakis et al., 2014; Karagiannakis et al., 2016). Derrière le même terme « MLD », il peut y avoir des types de difficultés hétérogènes (American Psychiatric Association, 2013).

Les tests pour les MLD offrent une photographie de la situation à un moment donné de l'histoire scolaire d'un individu (Desmet et Mussolin, 2012). En subissant des tests diagnostiques à différents moments, le même élève pourrait aboutir à des résultats différents, obtenant ou pas le diagnostic de MLD (Karagiannakis et Baccaglini-Frank, 2014).

En général, les tests diagnostiques sont accompagnés de critères d'exclusion pour maximiser les possibilités d'exclure d'autres causes de difficultés en mathématiques (Peteers, 2018). Certains de ces tests reposent sur la mesure du QI³. D'autres tests utilisent des épreuves de langage ou d'aptitude intellectuelle non verbale comme les matrices progressives de Raven.

De récentes études interdisciplinaires (au croisement entre sciences cognitives et didactique des mathématiques) ont développé des tests qui produisent des profils d'élèves avec MLD (Baccaglini-Frank, Karagiannakis et al., 2020; Karagiannakis et Baccaglini-Frank, 2014; Karagiannakis et al., 2014; Karagiannakis et al., 2016). Classer les élèves selon des profils de MLD et non simplement comme ayant ou pas MLD, offre une description plus précise des difficultés de l'enfant. Cela permet de ne pas mettre derrière le même terme « MLD » des élèves avec des profils éloignés. Cette approche s'avère particulièrement adaptée en classe, car ces profils d'élèves détaillés permettent au corps enseignant d'utiliser les diagnostics pour intervenir de manière consciente et ciblée. Pour l'instant, ce type de diagnostic n'est pas encore très répandu.

Nous soulignons que le terme « diagnostic » relève du milieu médical. En effet, ce sont plutôt les sciences cognitives qui s'intéressent à diagnostiquer les MLD. Comme nous l'avons écrit dans la section 2.1.2, dans notre définition de MLD, nous incluons également les élèves en sévère difficulté en mathématiques sans diagnostic et les élèves avec un diagnostic qui n'est pas spécifique aux mathématiques.

3. Par exemple selon le American Psychiatric Association (2013), le QI d'un enfant doit être au moins de 70 ± 5 pour être diagnostiqué ayant des MLD. En présence d'une déficience intellectuelle, les MLD ne peuvent être diagnostiquées que si les difficultés sont excessivement sévères par rapport au QI.

2.3 Prévalence

Dépendant de la définition de MLD et des moyens utilisés pour les détecter qui ne sont pas encore stabilisés, la prévalence des MLD ne fait pas consensus au sein de la communauté scientifique.

Une grande partie des études estiment la prévalence des élèves avec MLD entre 5% et 8% (Butterworth, 2005; Geary, 2011; Lewis et Fisher, 2016; Noël et Karagiannakis, 2020).

D'autres recherches, notamment en psychologie développementale, sont moins généreuses, en n'identifiant qu'environ 1% d'élèves avec MLD (Fischer, 2009a; Vannetzel et al., 2009).

Cette variété dépend des critères d'inclusion (faiblesse mathématique démontrée à travers les résultats obtenus au test mathématique) et d'exclusion (par exemple un QI faible, comme décrit dans 2.2) retenus dans les différentes recherches (Fischer, 2009a). D'abord, il n'y a pas de consensus en ce qui concerne l'aspect qualitatif des critères d'inclusion et d'exclusion : les tests utilisés peuvent être différents d'une étude à l'autre. Ensuite, il n'y a pas de consensus sur les critères quantitatifs : les seuils d'inclusion et d'exclusion ne sont pas stables à travers les recherches.

Cette variété met également en évidence les limites d'une définition biologique des MLD associée à un diagnostic des performances disciplinaires : en choisissant un seuil pour les résultats du test, le pourcentage de personnes MLD est modifié. Pourtant, ce taux ne devrait pas varier si les causes étaient strictement biologiques.

La prévalence des MLD à travers les différents pays n'est pas stable. Vigier (2009) a montré qu'en Finlande le pourcentage d'élèves ayant des MLD ne peut pas être supérieur à 1,1%, alors qu'au Portugal peut arriver jusqu'à 12%. Cette considération amène à interroger à la fois les critères d'inclusion et l'impact de l'environnement sur les compétences mathématiques et le diagnostic.

2.4 Points remarquables du concept de MLD

Au cours de ce chapitre, nous avons pu mettre en évidence les principaux éléments de l'état de l'art en ce qui concerne le concept de MLD. En particulier, nous avons pu remarquer les divers points sur lesquels il n'y a pas encore de consensus scientifique et les conséquences que cela entraîne. Pour résumer, nous listons ici quatre points problématiques du concept de MLD.

1. La définition de MLD n'est pas stabilisée. La recherche a identifié à la fois des causes biologiques et des causes environnementales.
2. Les tests diagnostiques sont focalisés principalement sur l'arithmétique.
3. Les tests diagnostiques ne différencient pas entre une condition biologique et les facteurs socioculturels et affectifs.
4. Une interprétation strictement biologique des causes peut amener à considérer le diagnostic de MLD comme quelque chose d'immuable.

Malgré ces points critiques, il s'agit d'un concept fécond à développer davantage en didactique des mathématiques. D'abord, les diagnostics de MLD font désormais partie intégrante de la réalité scolaire. Ensuite, ces diagnostics ne devraient pas être interprétés comme des conditions immuables propres à un groupe d'enfants qui décharge l'école de toute responsabilité en cas de difficulté ou d'échec. Le recours au diagnostic ne signifie pas qu'il n'y a pas possibilité d'intervention (Baccaglini-Frank, Di Martino et al., 2020; Baccaglini-Frank et Scorza, 2013; Geary, 2011). Les diagnostics de MLD peuvent au contraire être utilisés comme point de départ pour construire un suivi adapté aux difficultés rencontrées.

2.5 Nature des difficultés des élèves avec MLD

La recherche s'est longtemps intéressée aux caractéristiques des élèves avec MLD par rapport aux élèves sans MLD. Les difficultés mathématiques décrites dans la littérature concernent majoritairement l'arithmétique. Cela est dû à la disproportion de recherche dans le domaine arithmétique plutôt qu'au fait que les difficultés de ces élèves ne concernent que cette aire mathématique (Geary, 2004; Lewis et Fisher, 2016). Dans les paragraphes suivants, nous résumons les principales difficultés rencontrées par les élèves avec MLD et les caractéristiques de ce groupe en suivant la revue de Geary (2011) : *number, procedural competence, memory for basic arithmetic facts, working memory, processing speed*.

- *Number* : Les élèves avec MLD peuvent avoir une faible intuition des quantités numériques par rapport aux élèves sans MLD (Geary, 2011). Cela peut se manifester de différentes manières : plus de difficultés à différencier entre les petites quantités à travers le *subitizing*⁴, difficultés dans l'estimation d'un nombre d'objets, difficultés dans l'interprétation des nombres représentés

4. Le *subitizing* est la capacité à identifier rapidement et sans compter la quantité d'objets dans de petits ensembles représentés analogiquement (Cordes et Gelman, 2005).

en chiffres, difficultés à placer correctement les nombres sur la ligne des nombres.

- *Procedural competence* : Les élèves avec MLD et les élèves sans MLD développent des procédures similaires pour résoudre des calculs arithmétiques plus ou moins simples (comme $4 + 3$ ou $745 - 198$; Geary, 2011). Les élèves avec MLD utilisent plus longtemps des approches basiques en manifestant plus de résistance à l'évolution des stratégies mathématiques. Les élèves avec MLD ont en général deux ou trois ans de retard par rapport à leurs camarades en ce qui concerne les types de procédures utilisées dans le calcul arithmétique. Par exemple, les élèves avec MLD comptent sur les doigts plus longtemps et commencent plus tard à calculer silencieusement (« dans leur tête »). Une erreur typique des élèves avec MLD dans des additions comme $5 + 3$ est de commencer le surcomptage à partir de 5 et non de 6, en obtenant ainsi 7 à la place de 8.
- *Memory for basic arithmetic facts* : Les élèves avec MLD ont des difficultés persistantes à mémoriser et utiliser des faits arithmétiques comme 6×6 ou $4 + 7$ ⁵ (Geary, 2011). Deux erreurs typiques sont : confondre les résultats d'opérations différentes (par exemple $5 + 8 = 40$ à la place de $5 \times 8 = 40$), décaler de 1 dans la table de multiplication (par exemple $6 \times 5 = 36$ à la place de $6 \times 6 = 36$). Ces erreurs n'appartiennent pas exclusivement aux élèves avec MLD, mais sont plus fréquentes et persistantes pour cette catégorie.
- *Working memory* : Les élèves avec MLD présentent des déficits de mémoire de travail, ce qui affecte les résultats mathématiques (Geary, 2011). Ce groupe d'élèves a des difficultés à conserver les informations dans la mémoire de travail, à changer de tâche et à filtrer les informations non pertinentes pour une certaine tâche.
- *Processing speed* : Les élèves avec MLD ont besoin de plus de temps par rapport aux élèves sans MLD pour résoudre des calculs et des problèmes mathématiques (Geary, 2011).

Pour conclure cette section, nous soulignons que les difficultés des élèves avec MLD décrites dans la littérature ne sont pas qualitativement différentes de celles rencontrées par les élèves sans MLD (Geary, 2011). Ce qui diffère entre les deux groupes est plutôt leur fréquence et leur persistance dans le temps. Ce constat est

5. Ce point nécessite une attention particulière, car des recherches ont mis en évidence que les résultats de ces types d'opérations ne sont pas toujours connus par cœur mais peuvent être recalculés à chaque occurrence, même parmi les adultes sans difficulté en mathématiques (Barrouillet et Thevenot, 2013). L'utilisation de la mémoire pour les petits calculs n'est donc pas certaine.

à notre avis particulièrement important, car cela signifie que l'étude de la population d'élèves avec MLD nous offre un « portrait zoomé » des difficultés des autres élèves. Cela implique également que les propositions d'intervention pourraient être transversales aux deux groupes d'élèves.

2.6 Les MLD et l'algèbre

Malgré le peu d'études relatives aux élèves avec MLD et l'algèbre, nous avons effectué une revue de littérature sur ce sujet que nous présentons dans cette section.

La quasi-totalité de travaux concernant les élèves avec MLD et l'algèbre sont basés aux États-Unis (par exemple Dibbs et al., 2020; Powell et al., 2020; Witzel et al., 2003; Xin, 2008). Bien qu'il existe des recherches européennes (par exemple Gregorio, 2019, 2021; Robotti, 2017), d'autres études avec différents contextes culturels, programmes et organisations scolaires seraient nécessaires pour compléter l'apport partiel des recherches existantes.

La littérature actuelle concerne principalement le domaine de l'enseignement spécialisé (Dibbs et al., 2020) avec des références plutôt en sciences cognitives (Hughes et al., 2014; J. Lee et al., 2020; Maccini et al., 1999). Il existe quelques travaux en *mathematics education*, comme Powell et al. (2020) ou Robotti (2017), mais ils ne sont pas très fréquents. Cela étaye notre intérêt pour le sujet qui n'a pas encore été assez exploré avec le point de vue de la didactique des mathématiques. Une entrée par les contenus disciplinaires est fondamentale pour ne pas perdre la spécificité mathématique des difficultés des élèves avec MLD, en recherche comme pour les interventions proposées sur le terrain.

À cause du cadre géographique de la plupart des recherches, les types d'algèbre pris en considération dans ces études sont souvent définis en référence aux programmes scolaires des États-Unis. Une grande importance est donnée à l'utilisation du symbolisme algébrique alphanumérique standard (Hwang et al., 2019; Lugo, 2004; Maccini et al., 1999; Witzel et al., 2003; Xin, 2008) et différentes études se concentrent sur la résolution d'équations exprimées avec celui-ci (par exemple Bone et al., 2021; J. Lee et al., 2020). Cependant Powell et al. (2020) ont analysé dans leur recherche des concepts préalgébriques⁶ avec des élèves ayant des MLD. En particulier, un travail sur la vision relationnelle du signe égal a été mené. Ce type d'étude n'est pourtant pas commun, la majorité des recherches se concentrant sur l'aspect technique du calcul littéral (par exemple Lugo, 2004).

6. Nous renvoyons au chapitre 3 pour la définition de préalgèbre.

En ce qui concerne les caractéristiques des élèves avec MLD dans l'apprentissage de l'algèbre, nous n'avons pas trouvé beaucoup d'études. Certaines des difficultés découlent directement des difficultés arithmétiques (J. Lee et al., 2020; Maccini et al., 1999; Robotti et Faggiano, 2013) : apprendre des nouveaux concepts algébriques avec des prérequis faibles en calcul peut être un obstacle. D'autres difficultés ne sont pas typiques de l'algèbre et nous les avons présentées dans la section 2.5 : la mémoire de travail et la mémorisation de faits mathématiques (Bone et al., 2021; Hwang et al., 2019). D'autres difficultés encore ne sont pas spécifiques aux élèves avec MLD, mais sont des difficultés répandues chez toute la population qui se présentent plus fréquemment dans la population avec MLD : difficultés dans la représentation des problèmes algébriques, difficultés à donner du sens au symbolisme algébrique, à choisir les bonnes opérations pour leur modélisation et à interpréter une variable comme un ensemble de valeurs à la place qu'un nombre générique (Bone et al., 2021; Maccini et al., 1999; Robotti, 2017).

Dans la littérature, nous trouvons différents types d'intervention pour les élèves avec MLD en algèbre. Trois interventions sont particulièrement fréquentes : l'enseignement explicite, l'utilisation d'artefacts et une approche *Concrete-Representational-Abstract* (Bone et al., 2021; Hughes et al., 2014; Hwang et al., 2019; J. Lee et al., 2020; Maccini et al., 1999; Robotti, 2017; Watt et al., 2016; Witzel et al., 2003).

L'enseignement explicite est un type d'accompagnement offert aux élèves en difficulté qui est caractérisé par les points suivants :

(a) The teacher demonstrated a step-by-step plan (strategy) for solving the problem, (b) this step-by-step plan needed to be specific for a set of problems (as opposed to a general problem-solving heuristic strategy), and (c) students were asked to use the same procedure/steps demonstrated by the teacher to solve the problem. (Gersten et al., 2009, p. 1211)

Selon la littérature, l'enseignement explicite est une approche efficace avec les élèves ayant des MLD pour l'apprentissage des mathématiques⁷ en général (Gersten et al., 2009; Lacombe et al., 2021), et en particulier pour l'algèbre (Hughes et al., 2014; J. Lee et al., 2020; Watt et al., 2016; Xin, 2008).

Certaines études proposent l'utilisation d'artefacts concrets ou numériques pour les élèves avec MLD en en mettant en lumière les bienfaits pour les élèves

7. Un risque de cette approche pourrait être l'automatisation des mathématiques qui pourrait aggraver les difficultés des élèves (Roiné et Barallobres, 2018).

avec MLD⁸ (Bone et al., 2021). En ce qui concerne l'algèbre, Witzel et al. (2003) proposent du matériel concret pour représenter les équations de premier degré à une inconnue. Bouck et al. (2019) ont également créé un logiciel qui symbolise les équations du second degré à une inconnue. Robotti (2017) propose un logiciel pour construire le sens des concepts de variable, d'expression algébrique dépendant de la variable, d'inconnue et d'équation en ayant recours à une variété de représentations sémiotiques et en liant les systèmes sensori-moteurs des élèves aux contenus mathématiques.

Différentes études proposent d'utiliser ces artefacts à travers une approche concret-représentation-abstraction qui sert à soutenir le raisonnement des élèves avec MLD (Hughes et al., 2014; Hwang et al., 2019; Maccini et al., 1999; Witzel et al., 2003). Cette approche consiste en une première étape concrète où l'élève utilise l'artefact concret pour résoudre le problème mathématique, une deuxième étape où l'élève travaille exactement de la même manière qu'avec l'artefact, mais en le représentant graphiquement, et une troisième étape où l'élève abstrait (par exemple en composant l'équation avec le symbolisme alphanumérique algébrique standard).

Malgré les quelques points que nous avons cités ci-dessus à propos des interventions proposées pour les élèves avec MLD et des difficultés rencontrées en algèbre, les recherches en algèbre avec des élèves avec MLD sont encore trop peu nombreuses pour pouvoir disposer de résultats stabilisés dans le domaine (Bone et al., 2021).

Pour conclure, nous soulignons que l'étude de l'algèbre avec des élèves ayant des MLD est un sujet de recherche qui a acquis de l'intérêt surtout ces dernières années. C'est un champ de recherche assez actuel et qui mérite d'être davantage exploré (Bone et al., 2021; J. Lee et al., 2020).

8. En utilisant des artefacts comme moyen de construire des objets algébriques, il est toujours important de veiller au rôle que ceux-ci peuvent avoir sur la conceptualisation mathématique (Barrallobres, 2017).

Chapitre 3

Revue de littérature : la pensée algébrique

3.1 De l'arithmétique à l'algèbre : une transition difficile

Dans l'histoire de la didactique des mathématiques, beaucoup d'attention a été dédiée à la transition de l'arithmétique à l'algèbre, celle-ci a été largement reconnue comme problématique (Boulton-Lewis et al., 2000; Chevallard, 1984; Grugeon, 1997; L. Lee et Wheeler, 1989). Herscovics et Linchevski (Herscovics et Linchevski, 1994; Linchevski et Herscovics, 1996) identifient un « *cognitive gap* » et Vergnaud et ses collègues « une rupture épistémologique importante » entre les deux disciplines (Cortès et al., 1990; Vergnaud et al., 1988). On passe du domaine numérique, qui est concret et dont les élèves voient la finalité (Pillay et al., 1998), à celui algébrique, qui demande un niveau d'abstraction nettement plus élevé (Hodgen et al., 2018; Tabach et Friedlander, 2004; Wu, 2001).

Traditionnellement l'algèbre élémentaire a été considérée comme la suite naturelle de l'arithmétique, en permettant l'utilisation des lettres pour exprimer des nombres quelconques et de l'écriture littérale pour représenter des énoncés généraux (Booth, 1984; Chevallard, 1984; Sfard et Linchevski, 1994). L'algèbre a donc été vue comme « arithmétique généralisée » (Gascon, 1994) car elle entre en dialectique avec l'arithmétique en utilisant de nouveaux objets, les expressions algébriques, pour travailler sur un champ d'application déjà connu, celui du calcul arithmétique (Chevallard, 1994). Cette perspective implique une identification entre algèbre et symbolisme algébrique alphanumérique, vision qui a en effet caractérisé une grande partie des travaux en didactique des mathématiques (Kieran, 2004a;

Radford, 2010a).

Avec cette vision de l'algèbre impliquant le symbolisme algébrique alphanumérique standard, Kieran (2004a, 2004b) a modélisé l'« algèbre scolaire » à travers les activités¹ habituellement proposées aux élèves à l'école. La chercheuse identifie trois activités : activités génératives, activités transformationnelles et activités globales/de niveau méta.

Les activités génératives concernent la création d'expressions algébriques, qui sont vues comme les objets de l'algèbre (Kieran, 2004a, 2004b). Des exemples d'activités génératives sont la création d'équations correspondant à un problème quantitatif ou des écritures représentant des relations entre quantités numériques.

Les activités transformationnelles concernent la manipulation d'écritures algébriques en suivant les règles syntaxiques. Des exemples en sont la simplification d'expressions algébriques, la résolution d'équations ou d'inégalités, la factorisation de polynômes, la multiplication et la somme entre polynômes (Kieran, 2004a, 2004b).

Les activités globales, ou de niveau méta, concernent les activités où l'algèbre est utilisé comme outil (Kieran, 2004a, 2004b). Des exemples en sont la preuve, la généralisation, la justification, la modélisation, la résolution de problèmes, la prédiction, l'analyse de relations, l'étude de structures. Cette troisième dimension permet de créer du sens et soutient la nécessité et l'introduction des activités de génération et de transformation.

Dans les sections suivantes, nous détaillons certains points de difficulté de la transition arithmétique-algèbre qui ont été mis en évidence par la recherche en didactique.

3.1.1 Le symbolisme alphanumérique et sa manipulation

Le symbolisme algébrique littéral standard donne la possibilité d'atteindre un niveau d'abstraction supérieur qui confère à l'algèbre sa puissance caractéristique (Grugeon, 1997; Kieran et Sfard, 1999) et en même temps constitue une source de difficulté (Mason, 1989).

En introduisant l'utilisation des lettres à la place des nombres, différents statuts des lettres sont en fait introduits, et ceux-ci doivent donc être interprétés et traités différemment (Arcavi, 2005; Arzarello et al., 2001; Germi et Bessot, 1997; Küchemann, 1978). Premièrement, la lettre peut être utilisée pour désigner des objets géométriques (points, angles...) ou pour indiquer une dimension dans les formules

1. Suivant Lee (1997, cité dans Kieran, 2004b), l'activité est définie par Kieran comme quelque chose qu'on fait, une aire d'action.

géométriques (aires, périmètres...). Par exemple, dans la formule de l'aire du carré $A = c^2$, la lettre A en indique l'aire et la lettre c la longueur du côté. Deuxièmement, la lettre peut être utilisée comme inconnue. Dans les premiers exemples d'équations qui sont proposés en classe, la lettre est en général utilisée comme nombre inconnu, manipulable comme s'il était connu. Avec ce statut, l'inconnue est conçue comme un nombre précis qu'il faut retrouver. Troisièmement, la lettre peut avoir le rôle d'indéterminée, par exemple dans le calcul algébrique, ou de paramètre, par exemple au cours de la transformation des équations un peu plus complexes. Dans ces cas, la lettre ne représente plus un nombre particulier. Mais la lettre peut aussi avoir le statut de variable, et donc représenter un ensemble de nombres. Ainsi, ces différents statuts ne sont pas forcément distingués pour les élèves et cela peut être une source de difficulté. En particulier, dans l'utilisation de la lettre comme variable ou indéterminée, il est requis de considérer un seul symbole comme représentant de plusieurs objets, ce qui comporte une nouveauté par rapport à l'arithmétique.

La manipulation du symbolisme alphanumérique peut aussi poser problème, car les expressions sont vues comme une chaîne de symboles à laquelle appliquer des procédures standards sans forcément donner un sens aux actions produites (Arcavi, 1994; Arzarello et al., 2012; Bazzini et al., 2002; Coulange et Grugeon, 2008; Grugeon-Allys et al., 2012; Radford, 2002; Robotti, 2017; Sfard et Linchevski, 1994). Il peut arriver que, bien que l'on parvienne à gérer correctement la grammaire du symbolisme alphanumérique, on n'arrive pas à donner une explication à des règles qui peuvent paraître arbitraires (Arcavi et al., 1990; Assude et al., 2012; Kieran et Sfard, 1999). Cela se produit lorsque les élèves ne tiennent pas compte de la *dénotation* d'une expression, c'est-à-dire du fait que les expressions littérales² peuvent être exprimées au moyen de signes différents sans que l'objet qu'elles réfèrent ne change (Drouhard, 1992; Pilet et Grugeon-Allys, 2020, 2021). Cette compréhension partielle du symbolisme peut amener à une capacité réduite de résolutions de problèmes et entraver un bon développement des compétences mathématiques. Une des raisons de cette difficulté est la caractéristique du symbolisme alphanumérique à être en même temps un objet mathématique et une de ses représentations qui peut être manipulée (Duval, 2002; Kieran et Sfard, 1999; Mason, 1989).

2. Mais aussi numériques.

3.1.2 La modélisation

Un autre point de résistance pour les élèves est l'étape de modélisation dans des problèmes mathématiques ou extramathématiques (en physique, biologie, etc.). Celle-ci permet de créer un modèle en langage algébrique standard du système à l'étude en établissant les relations entre les données et les inconnues en jeu (Chevallard, 1989). Cette étape est en général difficile pour les élèves (Bazzini, 1999; Chevallard, 1994; Duval, 1995, 2002; Vergnaud et al., 1988). En effet, il ne s'agit pas d'une simple traduction entre différentes langues parlées, mais d'une démarche beaucoup plus complexe : non seulement les élèves qui doivent modéliser ne maîtrisent pas encore le langage d'arrivée (c'est-à-dire le symbolisme algébrique standard), mais en plus, celui-ci n'est pas naturel (Radford, 2010c). L'étape d'identification des relations entre les données et les inconnues du problème est souvent difficile (Grugeon, 2000), ainsi comme la conversion entre le langage naturel et l'écriture symbolique (Duval, 2002).

De l'autre côté, le registre symbolique algébrique littéral standard permet un détachement du cas particulier et par conséquent la résolution conjointe d'une classe entière de problèmes (Bazzini et al., 2002; Duval, 2002; Filloy et Rojano, 1989; Radford, 2010a). Cette séparation du problème particulier de son contexte et la conséquente mise en évidence des relations entre les données permettent un contrôle sur celles-ci, ce qui produit de nouvelles informations réinterprétables dans le contexte de départ (Chevallard, 1989; Ferrari, 2003; Malara, 1996; Navarra, 2019). La manipulation des expressions littérales qui constituent la modélisation permet de produire des connaissances inédites, tout en étant un outil de calcul. Cependant, ce détachement du contexte implique un « détour » (Vergnaud et al., 1988), c'est-à-dire un éloignement du sens du problème qui peut être source de difficulté (Bazzini et al., 2002).

3.1.3 Laisser les calculs « non effectués »

Une tendance assez fréquente que l'on peut observer chez les élèves qui apprennent à manipuler les écritures littérales est la volonté d'aboutir à un résultat numérique « compact » (Booth, 1984; Grugeon-Allys, 2015; Kaput et al., 2008). En particulier, une concaténation de symboles comme $a + b$ n'est pas acceptée en tant qu'objet, mais elle est reconnue en tant que calcul, et comme telle, elle doit être effectuée. Afin d'atteindre cet objectif, il n'est pas rare que les élèves produisent des égalités fausses du type $a + b = ab$. En arithmétique, il est possible de séparer la procédure de calcul, par exemple $3 + 4$, et l'objet, qu'on peut représenter dans cet

exemple avec 7 (Linchevski et Herscovics, 1996). De surcroît, en général les exercices arithmétiques que l'on rencontre à l'école demandent d'aller vers la simplification des écritures³ ($3+4 = 7$) et non vers la complexification de celles-ci ($7 = 3+4$; Chevallard, 1994; Grugeon, 1997; L. Lee et Wheeler, 1989). Au contraire, en manipulant les polynômes, non seulement il faut apprendre à laisser certains calculs « non effectués », mais il faut même en défaire d'autres, par exemple lorsqu'une factorisation de polynômes s'avère nécessaire.

Le signe moins joue un rôle important dans cette dichotomie objet-calcul, car son statut change lors du passage des naturels aux relatifs (Chevallard, 1990; Kieran, 2007). En effet, en plus de son statut opératoire, qui symbolise l'opération soustraction comme c'est le cas dans $7 - 4 = 3$, il ajoute le statut prédicatoire (-3) et le statut d'opposé ($-(3)$). Le monôme $-x$ a donc un sens qui lui est propre, sans nécessairement devoir effectuer un calcul.

En traitant avec le symbolisme alphanumérique, la séparation entre objet et calcul doit être dépassée pour pouvoir exploiter la complémentarité des deux conceptions (Linchevski et Herscovics, 1996; Sfard, 1991).

3.1.4 Le rôle du signe égal

À l'école primaire, le signe égal est fréquemment interprété comme un symbole qui annonce un résultat (Cortès et al., 1990; Vergnaud et al., 1988). Ainsi, de fausses chaînes d'égalités peuvent être produites : pour performer deux additions à la suite, souvent les élèves écrivent des chaînes du type : $10 + 3, 5 = 13, 5 + 4, 2 = 17, 7$ (Grugeon-Allys et Pilet, 2017; Kieran, 1981; Pilet et Grugeon-Allys, 2021). Cette interprétation du signe égal met à l'écart son statut de relation d'équivalence et par conséquent ses propriétés : réflexivité, symétrie et transitivité (Pilet et Grugeon-Allys, 2021; Vergnaud et al., 1988). Cela est évident dans l'exemple du paragraphe 3.1.3, où l'écriture $3+4 = 7$ est acceptée, mais pas $7 = 3+4$ (Bloch, 2008; Carpenter et Franke, 2001; Herscovics et Kieran, 1980), ou encore il peut être dérangeant de rencontrer des égalités sans opérateur du type $8 = 8$ (Ginsburg, 1977, cité dans Freiman et Lee, 2004).

Par contre, une interprétation relationnelle du signe égal est nécessaire dans la manipulation du symbolisme alphanumérique, par exemple pour la résolution d'équations ou pour toute transformation des expressions (Kieran, 1981).

Il est important de noter que le signe égal ne change pas de signification entre son utilisation avec les nombres et celle avec les lettres (Kieran, 2007). Toutefois,

3. Il y a des exceptions, comme le calcul réfléchi.

dans le premier cas il est possible d'ignorer sa nature relationnelle et de ne rester que sur le niveau opérationnel. Dans le deuxième cas, ce dernier n'est pas suffisant et une compréhension partielle de la signification du signe égal engendre quasi systématiquement des erreurs et des difficultés. L'algèbre révèle ici des conceptions erronées, ou au moins partielles, déjà présentes au niveau arithmétique.

3.1.5 Opérer sur les nombres inconnus

Une fois l'utilisation des lettres à la place des nombres acceptée par les élèves, il reste encore à surmonter une difficulté importante : l'opération sur et avec ce nombre indéterminé que la lettre représente (inconnue, variable, etc.; Radford, 2006; Vergnaud et al., 1988). Nous pouvons observer cela dans la résolution d'équations. Les équations qui ne comportent que l'inconnue d'un côté de l'égal, en général, ne posent pas trop de problèmes et sont résolues assez naturellement en appliquant les opérations réciproques (Fillooy et Rojano, 1989; Herscovics et Linchevski, 1994; Linchevski et Herscovics, 1996). Par exemple :

$$x + 3 = 5 \Rightarrow x = 5 - 3 \Rightarrow x = 2$$

Cette procédure n'est plus applicable si l'inconnue apparaît des deux côtés de l'égal ($4n + 9 = 7n$), ou même simplement d'un côté, mais plusieurs fois ($7n + 5n + 7 = 55$). Dans ces cas, il est nécessaire d'opérer sur les inconnues pour résoudre l'équation et cela est un processus qui ne se manifeste pas spontanément chez les élèves, mais doit faire l'objet d'un enseignement explicite.

Il semble donc y avoir un vrai saut cognitif en ce qui concerne l'opération sur les nombres inconnus qui participe à la perception de l'algèbre comme difficile (Herscovics et Linchevski, 1994; Linchevski et Herscovics, 1996).

3.2 L'émergence et le développement de l'*early algebra* en didactique des mathématiques

Dans les sections 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4 et 3.1.5, nous avons mis en lumière certaines des difficultés que la recherche en didactique des mathématiques a soulignées à propos de l'enseignement traditionnel de l'algèbre vue comme développement naturel de l'arithmétique. Pour réagir aux points de friction de cette transition, la communauté didactique a commencé à envisager des approches à l'enseignement-apprentissage pour anticiper ces difficultés. Il s'est ainsi développé

un nouveau domaine de recherche, l'*early algebra*, qui apporte une nouvelle manière de penser, de nouveaux objets d'étude et de nouvelles questions de recherche.

L'*early algebra* a gagné de plus en plus d'importance et a permis le développement de différentes pistes d'action ayant le point commun de voir dans l'enseignement de l'arithmétique une première possibilité pour prévenir les difficultés en algèbre. En effet, celles-ci ont une partie de leurs racines dans un enseignement d'arithmétique ne prenant pas suffisamment en compte les aspects épistémologiques nécessaires à l'entrée dans l'algèbre, et dont la modification pourrait jeter les bases pour un bon apprentissage de celle-ci (Carraher et al., 2006 ; Kieran, 2007 ; Lins, 1992 ; Pilet et Grugeon-Allys, 2020). En particulier, un enseignement traditionnel au cours de l'école primaire qui ne prend pas en considération l'aspect relationnel de l'arithmétique et le sens des calculs peut avoir des conséquences négatives au moment de la transition vers l'algèbre (Kieran, 1989b). Au contraire de ce qui a été nommé pré-*algèbre*, qui est vue comme une passerelle à parcourir après l'arithmétique et avant l'algèbre (Boulton-Lewis et al., 2000 ; Pillay et al., 1998), il est possible de faire de l'*early algebra* à chaque fois qu'on fait de l'arithmétique, car celle-ci est intrinsèquement algébrique (Carraher et Schliemann, 2018). En effet, selon Malara et Navarra (2018), l'*early algebra* est une métadiscipline comprenant un ensemble de concepts appartenant à la fois à l'arithmétique et à l'algèbre. Ce qui caractérise cette métadiscipline est le langage unificateur arithmético-algébrique.

C'est à cause de ses liens étroits avec l'arithmétique que l'*early algebra* s'occupe d'un large éventail d'âges d'élèves, à partir du préscolaire (Boily et al., 2020 ; Navarra et Zamboni, 2006) jusqu'à l'école secondaire (Adihou, 2020 ; Malara et al., 2012).

Au cours des années, différentes approches à l'*early algebra* se sont développées (Kieran, 2018a). Certaines recherches favorisent l'introduction du symbolisme alphanumérique à partir de l'école primaire et d'autres pas. Dans les deux cas, la proposition est de travailler en classe afin de développer la pensée algébrique, dans le sens que nous allons définir au cours de ce chapitre. Avec l'*early algebra*, il ne s'agit pas de faire de « l'algèbre tôt », autrement dit simplement d'avancer l'enseignement traditionnel de l'algèbre (Carraher et Schliemann, 2018 ; Franke et al., 2008). Il s'agit plutôt de proposer un enseignement au cours de l'école primaire qui prépare le terrain pour pouvoir affronter l'apprentissage du secondaire. Ceci est possible par exemple à travers ce que Pilet et Grugeon-Allys (2021) appellent l'activité « numérico-algébrique ». Il est même envisageable de faire de l'*early algebra* sans proposer des tâches différentes à celles typiques de l'arithmétique de l'école primaire, mais en adoptant une posture particulière sur celles-ci (Pang et Kim, 2018) et en travaillant certains aspects des concepts communs tels que l'égalité, les expres-

sions numériques, les relations. En effet, tous les calculs caractérisant l'arithmétique sont encore présents, mais ils sont subordonnés à des objectifs plus « nobles » : raisonner, réfuter, argumenter, etc. (Cusi et al., 2011 ; Navarra, 2019).

3.2.1 Le rôle du symbolisme alphanumérique

Comme nous venons de l'écrire ci-dessous, le symbolisme alphanumérique n'est plus systématiquement considéré comme indispensable pour travailler la pensée algébrique. Certains chercheurs et chercheuses privilégient le recours à la notation littérale (par exemple Blanton et al., 2018 ; Carraher et al., 2006 ; Kaput et al., 2008), alors que d'autres pas (par exemple Mason, 2018 ; Noble et al., 2001).

En effet, il est possible de faire de l'algèbre sans symbolisme standard et il est possible d'utiliser les lettres en mathématiques sans faire de l'algèbre (Carraher et Schliemann, 2018 ; Squalli et al., 2020 ; Zazkis et Liljedahl, 2002). Par exemple, différentes recherches montrent l'émergence de la pensée algébrique lors de la généralisation non symbolique de suites géométriques (Radford, 2001, 2010b). D'ailleurs, il est possible de produire des expressions alphanumériques en les construisant par essai-erreur sans faire le lien avec la structure de la situation à l'étude (Radford, 2008, 2010a).

L'analyse de l'histoire des mathématiques le confirme : Euclide utilise des lettres dans les *Éléments* pour traiter de géométrie (Kline, 1990 ; Radford, 2012). D'ailleurs, pendant des siècles, les équations ont été résolues sans le symbolisme que nous connaissons aujourd'hui (Boyer, 2009). Dans ce qui a été appelé « algèbre rhétorique », les concepts mathématiques sont exposés complètement en langage courant (Nesselmann, 1842). Les opérations et les calculs sont totalement exprimés en mots venant du langage naturel : cela se produit par exemple chez les algébristes mésopotamiens (environ 1800 av. J.-C.), les algébristes arabes (environ 8^e-9^e siècle), et encore le médiéval Fibonacci (environ 1180-1235 ; Bagni, 2008 ; Serfati, 1997 ; Sesiano, 1999). Il est à noter que, malgré l'absence de symbolisme, les résultats mathématiques atteints ne sont pas triviaux.

Le symbolisme algébrique standard contemporain ne peut donc pas être retenu comme une condition ni nécessaire ni suffisante pour identifier la présence de l'algèbre (Radford, 2012 ; Sfard et Linchevski, 1994 ; Zazkis et Liljedahl, 2002) : l'algèbre et la pensée algébrique ne peuvent pas être réduites à l'utilisation de lettres.

C'est pourquoi, au cours des dernières décennies, de plus en plus de recherches en didactique concernant la pensée algébrique ne considèrent pas le symbolisme alphanumérique standard comme indispensable (Radford, 2010a). Le symbolisme standard est bien évidemment nécessaire pour l'algèbre avancée (par exemple, la

théorie de Galois), mais ne l'est pas pour l'*early algebra*. Abandonner l'identification entre symbolisme et algèbre permet aux chercheurs et chercheuses de pouvoir mettre en évidence les types de raisonnements qui sont vraiment au centre de la pensée algébrique.

3.2.2 Vers une définition de pensée algébrique

Si la pensée algébrique n'est pas déterminée exclusivement par le symbolisme alphanumérique, il est légitime de se demander quelles sont alors ses caractéristiques. La pensée algébrique est marquée par une manière particulière de penser : « *[algebraic thinking is] a habit of mind that permeates all of mathematics and that involves students' capacity to build, justify, and express conjectures about mathematical structure and relationships* » (Blanton et Kaput, 2004, p. 142).

Mais ce qui caractérise cette manière de penser ne fait pas consensus. Dans la citation ci-dessus, les rôles de la structure, des relations et de leur justification sont mis en évidence. Selon Kieran :

Algebraic thinking can be interpreted as an approach to quantitative situations that emphasizes the general relational aspects with tools that are not necessarily letter-symbolic, but which can ultimately be used as cognitive support for introducing and for sustaining the more traditional discourse of school algebra. (Kieran, 1996, p. 275)

En effet, Kieran (2004a) part du constat que les activités globales/de niveau méta présentées à la section 3.1 ne nécessitent pas forcément du symbolisme littéral et peuvent être proposées déjà à de jeunes enfants afin de développer une manière de penser nécessaire pour une bonne réussite en algèbre (dans le sens de l'algèbre scolaire de Kieran) dans les années suivantes de leur scolarité. La chercheuse propose ainsi un ensemble d'activités mathématiques dont la résolution nécessite le recours à la pensée algébrique.

Algebraic thinking in the early grades involves the development of ways of thinking within activities for which letter-symbolic algebra can be used as a tool but which are not exclusive to algebra and which could be engaged in without using any letter-symbolic algebra at all, such as, analyzing relationships between quantities, noticing structure, studying change, generalizing, problem solving, modeling, justifying, proving, and predicting. (Kieran, 2004a, p. 149)

Malara et Navarra reprennent les idées de Kieran tout en ajoutant l'accent sur la régularité et les propriétés en définissant la pensée algébrique : « *[it] occurs in all the*

activities aimed at building in pupils an attitude to look for regularities, relationships, and properties, and to express them first in natural, and then in algebraic, language » (Malara et Navarra, 2018, p. 54).

Certains chercheurs mettent au cœur de la pensée algébrique la généralisation (Kaput, 2008; Mason, 2018). Par exemple Kaput (2008), comme expliqué plus en détail au chapitre 4, définit la pensée algébrique comme la généralisation de régularités et son expression dans des systèmes de symboles conventionnels de plus en plus systématiques. Des champs possibles pour généraliser sont les structures et les systèmes abstraits de calculs et de relations (par exemple en arithmétique) ou l'espace des fonctions. Selon Kaput, la pensée algébrique comporte aussi le raisonnement et l'action guidée par des règles syntaxiques sur des généralisations exprimées dans des systèmes symboliques organisés. Le processus de généralisation semble donc être fondamental pour la pensée algébrique.

Selon Radford (2010a, 2012, 2018), même si les processus de généralisation sont très importants pour la pensée algébrique, généralisation et pensée algébrique ne sont pas synonymes. Selon le chercheur, dont le point de vue est largement repris (par exemple Grugeon–Allys et Pilet, 2017; Jeannotte et al., 2019; Squalli et al., 2020), la pensée algébrique élémentaire comporte trois composantes :

- Les quantités indéterminées. La situation mathématique qui permet de mettre en place la pensée algébrique comprend des nombres non connus (variables, inconnues, paramètres, nombres généralisés, etc.).
- Les manières de représenter ces quantités indéterminées et leurs opérations. Ces manières sont culturellement et historiquement construites. Le symbolisme alphanumérique peut faire partie de celles-ci, et constitue un système sémiotique particulièrement puissant. Mais l'utilisation du symbolisme standard n'est pas nécessaire, et il est également possible de faire recours à d'autres types de représentations, comme le langage naturel, les gestes, etc.
- L'analyticité. Les quantités indéterminées sont considérées comme si elles étaient des nombres connus ou des nombres spécifiques et l'on opère sur elles (on divise, multiplie, soustrait, etc. les nombres indéterminés). Les nombres connus et ceux inconnus n'ont pas de véritable différence.

3.2.3 Focus sur certains objets de recherche en *early algebra*

Pour la suite de notre travail nous avons identifié des objets de recherche en *early algebra* qui sont centraux pour notre travail. Avant de présenter les choix théoriques faits pour notre thèse, nous dédions donc encore quelques paragraphes à ap-

profondir : la généralisation, la structure, la relation entre quantités, la justification. Ces thèmes ne sont guère disjoints : au contraire, ils ont de forts liens et se soutiennent et légitiment l'un l'autre.

La généralisation

Comme indiqué au paragraphe 3.2.2, la généralisation est très importante pour la pensée algébrique. Elle permet de se détacher d'un cas particulier ou d'un nombre restreint de cas dans lesquels une affirmation ou une propriété est vérifiée pour en élargir l'ensemble de validité (Carraher et al., 2008 ; Pinto et Cañadas, 2017). La portée de la généralisation est toujours plus grande que l'ensemble de départ des cas vérifiés individuellement.

Plus globalement, la généralisation est importante non seulement pour l'algèbre, mais pour tous les domaines mathématiques⁴ (Mason, 2008). En effet, la généralisation n'est pas une exclusivité de l'algèbre (Kieran, 1989a). Comme mieux détaillé au chapitre 4, Radford (2008, 2010a) identifie différents types de généralisation, en distinguant entre généralisation arithmétique et algébrique.

Le processus de généralisation algébrique comporte différentes étapes (Radford, 1996, 2006, 2008). D'abord il faut identifier une propriété commune (C) entre différents éléments particuliers (c_1, c_2, \dots, c_k). Cela passe par l'interprétation logique de la personne qui observe qui dépend de ses connaissances et intentions. Les interprétations des c_i peuvent beaucoup différer selon la façon de penser de qui généralise. Ensuite, cette propriété commune C doit être généralisée aux autres éléments c_{k+1}, \dots, c_n de l'ensemble où la propriété est vraie. Le processus de généralisation est donc caractérisé par le passage des connaissances empiriques (les c_i) à une connaissance abstraite.

Dans la littérature, on trouve une grande variété de travaux sur la généralisation en *early algebra* (par exemple Carraher et al., 2008 ; Ferrara et Sinclair, 2016 ; Navarra et Zamboni, 2006 ; Radford, 2010b ; Specht, 2005). Nous pouvons identifier deux principaux axes d'application liés à la généralisation : la généralisation liée à des activités de suites numériques, motifs géométriques ou autres *patterns* et la généralisation liée aux nombres, propriétés des opérations et aux structures numériques (Grugeon-Allys et Pilet, 2017 ; Kieran et al., 2016 ; Strachota et al., 2018). Ces

4. Plus globalement encore, la généralisation est fondamentale aussi en dehors des mathématiques, dans la vie quotidienne. Par exemple, pensons au mot « chien ». Le genre humain a pu inventer ce mot, car il a su reconnaître des aspects communs aux différents exemplaires de chiens. Si la généralisation n'était pas une activité caractéristique de l'espèce humaine, le langage n'existerait même pas et nous ne pourrions communiquer qu'en pointant du doigt (Mason, 2009, cité dans Twohill, 2013 ; Radford, 2001).

axes permettent non seulement de construire des généralisations, mais aussi de les vérifier et les justifier.

Nous soulignons que ces axes répondent à certaines des difficultés de l'entrée dans l'algèbre traditionnelle que nous avons évoquées à 3.1. Par exemple, généraliser des motifs géométriques permet d'opérer avec des nombres indéterminés en faisant ressentir le besoin de trouver un système sémiotique efficace pour modéliser la situation (English et Warren, 1998). Ou encore, le travail sur les propriétés des opérations peut aider à avoir une vision relationnelle du signe égal et à dépasser la séparation stricte entre objet et calcul (Malara et Navarra, 2018; Pilet et Grugeon-Allys, 2021).

La structure

Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, pour pouvoir généraliser il faut d'abord reconnaître la structure⁵ du système étudié (l'opération arithmétique, le motif géométrique, etc.). La généralisation inclut ainsi une composante structurale⁶. Les deux processus, celui de généralisation et celui structurel, sont complémentaires et nécessaires pour penser algébriquement (Kieran, 2018b). En algèbre, non seulement il faut généraliser, mais aussi savoir « *looking through mathematical objects and to decomposing and recomposing them in various structural ways* » (Kieran, 2018a, p. 429).

Selon Mason et al. (2009), il ne suffit pas de reconnaître une relation entre des objets dans une situation spécifique pour se focaliser sur la structure. Il faut aussi identifier ces relations comme représentantes de certaines propriétés générales. On voit ainsi que généralisation et structure sont intimement liées et participent de manière complémentaire à la pensée algébrique.

Différentes propositions en *early algebra* comportent un focus sur la structure (comme Schifter, 2018; Steinweg et al., 2018). Par exemple en arithmétique plusieurs recherches se concentrent sur les propriétés des opérations (commutativité, associativité, distributivité), la relation entre les opérations (par exemple le fait que l'addition et la soustraction sont l'une la réciproque de l'autre), les propriétés des nombres (parité, divisibilité, etc.), la décomposition en facteurs premiers, etc. (Kieran, 2018a; Mason et al., 2009). Le focus sur la structure arithmétique est essentiel,

5. Dans ce travail, nous nous n'intéressons pas aux structures algébriques de l'algèbre abstraite. Pour approfondir cet aspect, différentes références didactiques sont possibles, par exemple Dorier et Sierpiska (2001).

6. Comme pour la généralisation, aussi savoir reconnaître des structures est fondamental pour tous les jours. Cette capacité « simplifie la vie » en réduisant certaines tâches à une répétition et en permettant d'affronter de nouveaux défis (Vogel, 2005).

entre autres, pour comprendre pleinement le concept d'équivalence et dépasser la vision strictement opérationnelle du signe égal (Mason et al., 2009). Le regard structurel des opérations aide aussi à en développer une interprétation en tant qu'objets mathématiques (Schifter, 2018).

L'argumentation

La généralisation et la structure sont profondément interconnectées avec l'argumentation de celles-ci : les unes supportent l'autre et vice versa (Arcavi et al., 1990; Maher, Sran et al., 2010b). En effet, il n'est pas possible d'accomplir une généralisation sans la justifier et cette généralisation peut être acceptée ou refusée en fonction de la justification donnée (Blanton et al., 2018; Jeannotte et al., 2019). La même chose est vraie pour la structure. Justifier une généralisation permet aussi de vérifier si elle a été construite grâce à l'induction naïve⁷ ou si l'élève a mis en place un vrai raisonnement algébrique basé sur la structure de la situation mathématique (Maher, Sran et al., 2010a; Radford, 2008). Inversement, pour démontrer une propriété, il faut généraliser la situation dans laquelle la propriété est vérifiée (Chevallard, 1990).

La justification a un rôle fondamental dans la pensée algébrique (Blanton et al., 2018; Blanton et Kaput, 2004; Cusi et al., 2011; Franke et al., 2008; Navarra, 2019). La verbalisation de l'argumentation soutient la capacité de réflexion sur ce que l'on dit (Malara et Navarra, 2018). En argumentant, non seulement on justifie ses positions, mais on arrive aussi à faire évoluer des idées qui se co-crément avec l'argumentation et dont on n'avait pas forcément connaissance avant.

La capacité d'expliquer et justifier les propriétés arithmétiques qui permettent d'effectuer certains calculs participe à l'apprentissage de certains fondements essentiels de l'algèbre (Carpenter et Franke, 2001; Pilet et Grugeon-Allys, 2021). La recherche en didactique a démontré que les élèves peuvent mettre en place des justifications déjà à partir de l'école primaire (Kaput, 2008; Kaput et al., 2008; Maher, 2010; Maher et Uptegrove, 2010). Au début cela sera surtout de l'ordre de l'empirisme naïf⁸, mais avec l'habitude et le temps les élèves peuvent développer des formes plus sophistiquées en se détachant du cas particulier (Blanton et al., 2018; Carpenter et Franke, 2001; Schifter, 2018).

Le focus sur l'argumentation participe à la construction, entre autres, du processus de symbolisation qui n'est plus simplement présenté aux élèves, mais conçu et

7. Le terme induction naïve est défini à 4.3.2.

8. Le terme empirisme naïf est défini à 4.4.1.

justifié petit à petit (Arcavi et al., 1990; Kaput et al., 2008; Maher et Yankelewitz, 2010; Navarra, 2019)⁹.

La relation entre quantités

Comme nous l'avons montré dans la section 3.1, la transition de l'arithmétique traditionnelle à l'algèbre implique l'inclusion d'une interprétation relationnelle des écritures, des signes (opérateurs et d'égalité) et des situations mathématiques en plus de la vision calculatoire (Kieran, 2007; Mason et al., 2009). Prendre conscience de la relation entre quantités et savoir l'exprimer est donc un des éléments capitaux de la pensée algébrique (Franke et al., 2008; Kieran, 1996; Kieran et al., 2016).

Plusieurs recherches ont été dédiées au développement de la pensée relationnelle, surtout dans le champ de l'arithmétique, mais aussi dans celui du raisonnement quantitatif, où les raisonnements se basent sur les quantités physiques qui sont regardées comme mesurables (par exemple Carpenter et Franke, 2001; Davydov, 1990; Dougherty, 2008; Franke et al., 2008; Kaput, 2008; Schifter, 2018; Schmittau et Morris, 2004).

Le focus sur la relation entre quantités est nécessaire pour le développement d'une vision relationnelle de l'égalité et des opérations (Grugeon-Allys et Pilet, 2017). Au cours des décompositions et recompositions des écritures, numériques comme littérales, leur *dénotation* reste inchangée (Drouhard, 1992; Pilet et Grugeon-Allys, 2020, 2021). Une réflexion sur la *dénotation* des expressions est abordable en champ numérique par exemple avec le calcul réfléchi.

Avec ce type de travail, il est aussi possible de juxtaposer au statut opératoire des expressions comme 2×3 celui d'objet en tant que représentant du nombre 6. Comme approfondit à la section 4.2, Malara et collègues (Cusi et al., 2011; Malara et Navarra, 2018) mettent en lumière l'importance de faire faire l'expérience des représentations non canoniques des nombres pour favoriser la pensée relationnelle et structurelle. La représentation devient ainsi plus *transparente* en permettant de voir les propriétés et la structure des nombres. Différentes représentations *transparentes* avec la même dénotation n'ont pas le même *sens* (Drouhard, 1992; Pilet et Grugeon-Allys, 2021) : par exemple, 2×3 et $2 + 2 + 2$ ne donnent pas la même information à propos du nombre 6.

9. Les forts liens entre le symbolisme alphanumérique standard et la démonstration ont été objets d'étude en didactique des mathématiques. Chevallard (1984, 1990) a mis en lumière l'« information monstrative » que le symbolisme apporte et la capacité de celui-ci à fixer et expliciter les connaissances en permettant la généralisation de propriétés. Nous n'approfondissons pas plus le lien entre démonstration et registre alphanumérique du fait que ceci n'est pas central dans la définition de pensée algébrique que nous allons choisir.

3.3 Choix et définitions pour ce travail de thèse

Nous rappelons que l'objectif de cette thèse est d'étudier la pensée algébrique des élèves avec MLD. Comme nous l'avons vu au cours de ce chapitre, un aspect qui est déterminant en mathématiques pour l'émergence des difficultés est le manque de sens qu'on subit face à une certaine situation mathématique. Il semble donc particulièrement important de proposer des tâches qui font travailler le sens de la situation¹⁰, surtout avec des élèves qui sont déjà en difficulté. Des tâches en *early algebra* semblent particulièrement adaptées pour ce but.

De surcroît, dans la section 2.6, nous avons documenté différents types d'intervention pour les élèves avec MLD en algèbre. L'un d'eux est l'enseignement explicite, qui est particulièrement fréquent dans des classes d'enseignement spécialisé ou avec des élèves en grave difficulté en mathématiques (Hughes et al., 2014; J. Lee et al., 2020; Watt et al., 2016; Xin, 2008). Cette approche s'avère être transmissive (Gersten et al., 2009) et une de ses conséquences pourrait être la production d'automatismes chez les élèves, condition courante dans l'enseignement spécialisé (Bloch, 2008; Roiné et Barallobres, 2018). Il pourrait donc être particulièrement intéressant de montrer qu'avec les élèves avec MLD aussi il est possible de cibler des compétences mathématiques qui vont au-delà de la simple répétition d'applications et de travailler sur des sujets fondateurs pour les mathématiques, comme la généralisation, la structure, l'argumentation ou la relation entre quantités.

Au moment du recueil des données, la quasi-totalité¹¹ des élèves qui ont participé à cette étude n'avait pas encore rencontré le symbolisme alphanumérique. Nous allons donc considérer celui-ci non comme une composante indispensable de la pensée algébrique, mais comme un parmi les registres sémiotiques possibles.

Avec ces jeunes élèves, nous allons donc travailler en *early algebra*, définie comme une métadiscipline comprenant des concepts à la fois arithmétiques et algébriques (Cusi et al., 2011; Malara et Navarra, 2018). Les objets de cette métadiscipline ne sont pas les objets des deux disciplines, mais c'est la construction d'un langage commun et unificateur. Nous approfondissons le point de vue de Malara et collègues dans la section 4.2. Ce choix s'avère pertinent pour les élèves avec MLD car, comme expliqué au chapitre 2, l'arithmétique est un domaine disciplinaire assez investigué dans l'enseignement spécialisé (Lewis et Fisher, 2016).

10. Il est évident que les problèmes proposés ne sont pas suffisants en eux-mêmes pour faire émerger la pensée algébrique chez les élèves. La posture du chercheur est également cruciale pour le stimuler, notamment en ce qui concerne les questions posées. Dans le cadre de notre travail, cela a été facilité par une préparation adéquate des entretiens visant à créer un contexte approprié.

11. Seulement l'Élève 18 avait été exposée à l'enseignement du symbolisme alphanumérique.

Comme nous l'avons souligné au cours de ce chapitre, la généralisation est fondamentale pour la pensée algébrique. Nous mettons la généralisation au centre de notre définition de pensée algébrique. Ce choix est dû à l'absence d'études à propos de la pensée algébrique avec des élèves avec MLD. En effet, comme nous l'avons vu au chapitre 2, il n'a pas beaucoup de travaux sur la pensée algébrique des élèves avec MLD. Au contraire, la littérature sur la généralisation dans la pensée algébrique est riche. Il nous semble donc important de commencer à étudier la pensée des élèves MLD dans un champ qui peut nous offrir des bases théoriques solides. Pour ce faire, nous suivons Kaput (2008) qui identifie deux activités qui caractérisent l'algèbre liées à la généralisation :

- la généralisation de régularités et leur expression dans des systèmes de symboles conventionnels de plus en plus systématiques;
- le raisonnement et l'action guidée par des règles syntaxiques sur des généralisations exprimées dans des systèmes symboliques organisés.

Ces deux activités se manifestent à travers trois artefacts culturels : arithmétique généralisée et raisonnement quantitatif; fonctions, relations et covariations; modélisation intra ou extramathématique.

Le focus de la définition choisie sur la généralisation¹² nous permet de prendre en considération d'autres aspects emblématiques de la pensée algébrique : la gestion du signe égal, la structure des objets, la justification, etc. Nous exposons dans le détail le point de vue de Kaput dans la section 4.1 en soulignant toutes ses caractéristiques.

12. Bien que ce point de vue sur la pensée algébrique ne soit pas partagé par tout le monde (Radford, 2018).

Chapitre 4

Appuis théoriques

Comme nous l'avons vu au chapitre 3, nous concevons l'*early algebra* selon Malara et collègues (Malara et Navarra, 2018), qui voient l'arithmétique et l'algèbre combinées comme une métadiscipline concernant des concepts qui peuvent se référer aux deux disciplines.

Le point de vue sur la pensée algébrique que nous adoptons est celui de Kaput (1995, 2008), au cœur duquel se situe le concept de généralisation.

Nous exposons, dans ce chapitre, ces deux cadres en les complétant avec les appuis théoriques venant des travaux de Radford et de Balacheff. Nous nous sommes servie du modèle d'algèbre de Kaput pour la construction de la batterie de tâches à proposer pendant les entretiens (section 7.1). Nous avons utilisé les *language constructs* de Malara et collègues, les types de généralisation de Radford et la typologie de preuves de Balacheff pour les analyses *a priori* (section 7.2) et *a posteriori* des tâches (chapitre 9) et pour la création des canevas d'entretiens (section 8.2.2).

4.1 Le modèle d'algèbre de Kaput

Kaput (1995, 2008) utilise deux approches simultanément pour définir l'algèbre. En effet, pour décrire les mathématiques ou une de ses sous-disciplines, une première possibilité est de le faire à travers les actions réalisées par les personnes quand elles font des mathématiques : par exemple calculer ou abstraire. Avec ce point de vue, les mathématiques sont quelque chose que l'être humain fait, une manière de penser. Elles sont innées dans le genre humain et transversales aux cultures. Le raisonnement et la manière d'agir et de penser des êtres humains sont centraux.

Une deuxième possibilité est de décrire les mathématiques à travers leurs artefacts culturels (Kaput, 1995, 2008). Les êtres humains apprennent des procédures

et acquièrent la connaissance d'objets mathématiques (par exemple l'algorithme de l'addition en colonne) avec lesquels ils ont pu interagir en fonction de la culture, du système scolaire et du pays dans lequel se trouvent. Avec ce point de vue, il est possible de parler des mathématiques sans prendre en considération les sujets qui font des mathématiques. Elles sont vues comme un corps de connaissances lié à une culture donnée à un moment donné.

Pareillement, quand on veut donner une définition de l'algèbre, on peut porter l'attention sur les activités que les élèves (les personnes, les mathématicien et les mathématiciennes...) font quand elles ou ils font de l'algèbre. Certaines activités qui caractérisent la pensée algébrique (mais qui ne sont pas une exclusivité de l'algèbre) sont, par exemple, les actions de généraliser ou de justifier (Kaput, 1995, 2008 ; Kieran, 2004b). Parallèlement, on peut donner une définition de l'algèbre à travers les artefacts culturels typiques de cette branche, par exemple les polynômes, les fonctions, ou les anneaux.

Kaput (1995, 2008) prend en considération les deux approches pour donner une définition de l'algèbre qui soit la plus complète possible. Ne pas prendre en compte les deux aspects peut s'avérer inadapté. Il est par exemple possible de travailler avec des objets algébriques de manière arithmétique : on peut travailler avec des relatifs modulo 12 dans le contexte de l'heure en restant dans un contexte concret précis, sans abstraction et sans faire véritablement de l'algèbre. Ou encore, il est possible de modéliser une situation en créant une formule symbolique littérale standard par essai erreur, sans utiliser un raisonnement algébrique (Radford, 2010a). D'un autre côté, il est possible d'entamer un raisonnement abstrait et algébrique en utilisant des nombres spécifiques (Kaput, 2008 ; Radford, 2006, 2010a).

Nous schématisons les idées des sections suivantes dans la figure 4.1.

4.1.1 L'algèbre comme activité humaine

Les deux activités qui selon Kaput (1995, 2008) caractérisent l'algèbre sont :

- la généralisation de régularités et son expression dans des systèmes de symboles conventionnels de plus en plus systématiques ;
- le raisonnement et l'action guidée par des règles syntaxiques sur des généralisations exprimées dans des systèmes symboliques organisés.

La frontière entre ces deux activités est parfois peu définie, et il peut y avoir des points d'intersection.

L'objectif de la première activité est l'expression de la généralisation en une forme de langage symbolique qui permet d'avancer dans le raisonnement et d'obte-

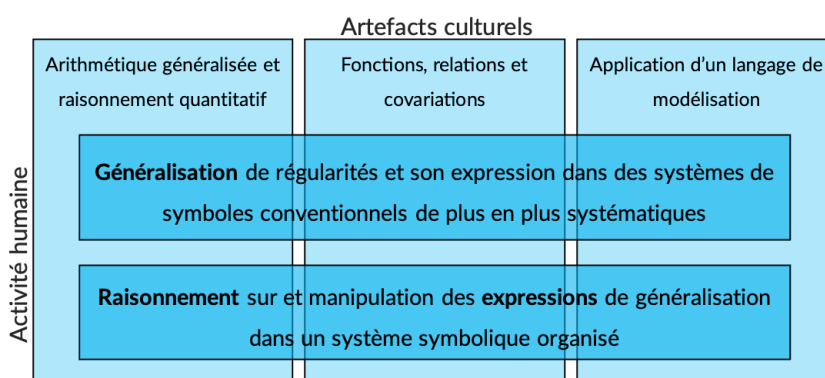


Figure 4.1 – Schéma résumant les activités et les axes algébriques de Kaput, créé pour cette thèse sur la base du modèle précédemment présenté (Kaput, 1995, 2008).

nir de nouveaux résultats. La généralisation peut être exprimée avec des représentations symboliques plus ou moins formalisées, en fonction de l'âge et des connaissances de la personne qui généralise. Les formes conventionnelles de symbolisme (tableaux, notations littérales, droite numérique...) permettent non seulement de représenter une situation, mais aussi de mieux la comprendre et d'avancer dans le raisonnement.

La deuxième action caractérisant la pensée algébrique concerne la manipulation des expressions de généralisation qui permet de déduire de nouvelles informations sur le problème. Reasonner avec des généralisations comprend à la fois la déduction et l'induction d'une structure à partir des configurations de symboles, que l'on soit ou non en train de les transformer activement et physiquement. Cela inclut donc les cas où l'on étudie la structure d'une expression particulière ou d'une séquence, ainsi que les cas où on les transforme activement en utilisant des règles de transformation symboliques.

La manipulation des symboles peut être sémantique, si les actions sont guidées par le sens donné aux symboles (Kaput, 1995). Par exemple, l'équation $3x - 2 = 10$ peut être résolue comme il suit : « si j'enlève 2 de 3 fois un nombre, j'obtiens 10. Donc, 3 fois le nombre est égal à 12, qui signifie que le nombre est 4. » La manipulation est syntaxique si les symboles sont considérés comme objets indépendants, sans lien avec ce qu'ils représentent. L'opération sur les symboles est dans ce cas géré par des règles syntaxiques. L'équation précédente est résolue en additionnant 2 aux deux cotés pour obtenir $3x = 12$ et en divisant par 3 pour trouver le résultat $x = 4$. C'est avec la manipulation syntaxique que la puissance du symbolisme se manifeste à son maximum. Par exemple, une équation où l'inconnue est des deux

côtés du signe égal, comme $2x - 4 = 1 - 3x$, peut difficilement être résolue par manipulation sémantique (Fillooy et Rojano, 1989; Herscovics et Linchevski, 1994).

L'aspect lié à la manipulation symbolique devrait généralement être développé après la généralisation et sa formalisation dans la mesure où la manipulation du langage symbolique nécessite de savoir au préalable comment les symboles peuvent se combiner entre eux. En outre, c'est à travers des expériences qu'il est possible de donner du sens au traitement symbolique (Kaput, 1995, 2008).

4.1.2 L'algèbre comme artefact culturel

Les deux activités algébriques que nous avons présentées dans la section 4.1.1 se manifestent dans les trois axes que Kaput (1995, 2008) identifie comme les principaux artefacts culturels de l'algèbre. Les deux activités et les trois axes ont des points d'intersection et ne doivent pas être considérés comme disjoints. Ils sont plutôt complémentaires et une même tâche peut parfois être classée de manières différentes ou sous plus qu'un artefact et/ou plus qu'une activité.

Cette classification des artefacts algébriques s'avère particulièrement opérationnalisable car elle nous fournit des types de tâches à proposer pour faire émerger la pensée algébrique.

Arithmétique généralisée et raisonnement quantitatif

Une source pour la généralisation et sa formalisation est l'étude des structures et des systèmes abstraits de calculs et de relations, y compris celles et ceux qui surgissent en arithmétique et dans le raisonnement quantitatif (Kaput, 1995, 2008).

Dans le champ arithmétique, un raisonnement algébrique est possible à partir de contextes déjà familiers pour les élèves, par exemple les propriétés des opérations ou les relations entre nombres. Dans ce cas, l'algèbre est vue dans sa forme d'arithmétique généralisée et la généralisation est ici intramathématique. L'utilisation du symbolisme littéral standard peut être évitée, au moins jusqu'à un certain moment dans l'avancement de l'apprentissage mathématique. L'algèbre comme arithmétique généralisée permet d'utiliser des connaissances préalables des élèves pour construire un raisonnement algébrique, mais avec un nouveau point de vue : les expressions arithmétiques ne sont plus regardées dans le but de faire un calcul pour obtenir un résultat, mais elles sont analysées par rapport à leur structure. L'action de calculer peut encore être présente, mais elle est subordonnée à des finalités plus évoluées, comme la justification ou l'argumentation (Navarra, 2019). Ce changement de perspective implique aussi un changement dans la conception du signe

égal, qui perd son rôle d'annoncer simplement le résultat. Il devient un symbole indiquant une relation d'équivalence (Kieran, 1981, 2007 ; Malara et Navarra, 2018).

Plusieurs types de tâches classiques s'inscrivent dans cet axe (Kaput, 2008).

- La généralisation des opérations arithmétiques, leurs propriétés et relations (par exemple la propriété commutative de l'addition, l'addition vue comme réciproque de la soustraction, les propriétés du zéro, etc.). Ce type de tâches souligne la structure de l'arithmétique et participe à la construction de l'aspect syntaxique de l'algèbre qui permet de remplacer une expression avec une autre équivalente.
- Un deuxième type de tâches classique est la généralisation de propriétés ou relations particulières entre les nombres. Par exemple : le fait que la somme de deux nombres impairs est paire ; trouver et exprimer des régularités dans les tableaux d'addition et multiplication ; effectuer des raisonnements sur l'écriture en base dix (comme se questionner sur le fait que multiplier par dix un nombre entier ait comme résultat l'ajout d'un 0 à droite du nombre).
- Un troisième type de tâches classique est l'expression explicite de stratégies de calcul plus ou moins conventionnelles. Par exemple des stratégies de compensation ou le recours à l'utilisation des propriétés des opérations pour faciliter un certain calcul.

Un autre contexte qui permet également de généraliser les calculs, les relations et les structures est celui du raisonnement quantitatif. À la place d'utiliser les nombres et l'arithmétique, les raisonnements se basent sur les quantités physiques, par exemple la comparaison de volumes, longueurs, masses ou âges¹. Le raisonnement quantitatif surgit lorsqu'une qualité d'une situation est regardée comme mesurable et est basé sur la mathématisation d'une situation extramathématique (Kaput, 1995, 2008). Néanmoins, le raisonnement quantitatif peut inclure aussi des grandeurs abstraites, par exemple compter combien de fois le nombre 3 doit être ajouté pour arriver à 15 fait intervenir des grandeurs numériques. L'arithmétique généralisée peut donc être considérée comme un sous-ensemble du raisonnement quantitatif qui offre un panel plus large, varié et concret de situations pour la construction du raisonnement algébrique.

Les deux contextes, arithmétique ou du raisonnement quantitatif, permettent de généraliser et exprimer la généralisation de manière systématique et explicite.

L'artefact culturel ici décrit l'algèbre comme l'étude des structures et des systèmes abstraits des calculs et des relations, à un niveau mathématique avancé, se

1. Cette approche a été développée à partir des travaux de Davydov (1990).

développe en l’algèbre abstraite des structures.

L’algèbre vue comme l’étude des fonctions, des relations et des covariations

Le deuxième axe concerne la généralisation et son expression en se basant sur l’idée de fonction (Kaput, 1995, 2008). L’expression de la généralisation décrit la variation sur un certain domaine.

Une tâche classique est la généralisation de motifs géométriques élémentaires², qui sont capitaux pour le développement d’autres formes plus avancées de généralisation mathématique. Dans les tâches de motifs, l’aspect syntaxique de l’algèbre peut être utilisé pour montrer que deux expressions de la suite sont équivalentes, ou pour trouver quand la fonction prend une valeur particulière, ou pour comprendre quand la fonction satisfait certaines conditions (construire et résoudre des équations et inégalités). Cet axe inclut aussi d’autres tâches dans lesquelles l’idée de variation est présente, comme par exemple celles qui concernent la linéarité et la proportionnalité. Les outils symboliques à disposition de cet axe sont nombreux : le symbolisme littéral, les tableaux, les graphiques, mais aussi d’autres formes de symbolisme moins formalisées comme le langage courant ou les machines à fonction.

Ce deuxième artefact culturel, l’algèbre comme l’étude des fonctions, des relations et des covariations, à un niveau avancé n’appartient pas strictement à l’algèbre, mais se développe dans ce qu’on appelle l’analyse mathématique. Même si elle ne fait pas strictement partie de l’algèbre, au moins à partir d’un certain niveau mathématique, elle implique des contenus essentiels pour le développement du raisonnement algébrique et elle offre un contexte de modélisation et généralisation extrêmement répandu dans les classes.

L’algèbre vue comme langage de modélisation intra ou extramathématique

L’algèbre a un rôle essentiel dans la modélisation des situations qui peuvent venir des mathématiques mêmes (modélisation intramathématique) ou hors des mathématiques (modélisation extramathématique; Chevallard, 1984; Kaput, 1995, 2008).

2. Dans les tâches de patterns géométriques unidimensionnels, la variable dont dépend le pattern n’est pas explicite (il s’agit souvent du nombre d’éléments de la suite) et la structure de fonction est assez bien cachée Kaput, 2008. Il est donc possible de se focaliser sur la relation entre termes successifs de la suite, sur la correspondance entre la variable et son image ou encore sur la façon dont la variable et son image covarient. Il est ainsi possible de mettre en lumière trois manières différentes de voir les fonctions (Confrey et Smith, 1991; Pinto et Cañadas, 2017; Smith, 2008).

Plusieurs types de tâches classiques s'inscrivent dans cet axe (Kaput, 1995, 2008).

- La modélisation de situations concernant une quantité ou un nombre particulier, sans généraliser forcément une classe de situations. Par conséquent, le nombre indéterminé est regardé comme une inconnue plutôt que comme une variable. Il s'agit d'un problème arithmétique qui nécessite l'emploi de la représentation littérale pour être résolu, souvent à l'aide de la résolution d'équations ou d'inégalités.
- Un deuxième type de tâches concerne la modélisation de la généralisation à partir de problèmes comme ceux décrits dans le point précédent dans cette liste ou de problèmes arithmétiques qui ne nécessitent pas l'utilisation du symbolisme littéral pour être résolus. Le raisonnement algébrique commence quand les contraintes du problème sont assouplies pour étudier comment les relations entre les différentes quantités changent. Dans ce type de tâches, le nombre indéterminé est regardé comme un paramètre.
- La modélisation de la généralisation de *patterns* et régularités intra ou extramathématiques. Comme dans ce type de tâches on modélise la généralisation, on a recours aux variables qui expriment une fonction ou une classe de fonctions.

Nous répétons que les axes ici présentés peuvent avoir des intersections. Cela est évident dans le troisième point de la liste ci-dessus, qui montre comment le troisième axe (algèbre comme modélisation) peut parfois impliquer le deuxième (algèbre comme étude des relations et fonctions). Nous soulignons aussi le fait que ce troisième axe est particulièrement lié au symbolisme littéral standard.

4.1.3 Le modèle de Kaput en résumé

La figure 4.1 résume ce qui est décrit dans les sections 4.1.1 et 4.1.2 (Kaput, 1995, 2008). Le raisonnement algébrique peut être décrit à travers les deux activités qui le caractérisent : la généralisation de régularités et son expression et le raisonnement sur les expressions de généralisation et leur manipulation. Ces deux activités se manifestent dans les trois artefacts culturels algébriques : l'étude des structures et des systèmes abstraits des calculs et des relations (y compris ceux qui surgissent en arithmétique et dans le raisonnement quantitatif), l'étude des fonctions, des relations et des covariations et la modélisation intra ou extramathématique.

Les artefacts peuvent être mieux détaillés. Trois types de tâches typiques de l'arithmétique généralisée sont (Kaput, 2008) :

- la généralisation des opérations arithmétiques, leurs propriétés et relations;
- la généralisation de propriétés ou relations particulières entre nombres;
- l'expression explicite de stratégies de calcul.

L'axe des fonctions, relations et covariations peut être développé en travaillant avec la généralisation de motifs géométriques élémentaires, des tâches qui concernent la linéarité et la proportionnalité et en général d'autres tâches où on travaille l'idée de variation (Kaput, 2008). Trois types de tâches de modélisation sont :

- la modélisation de situations concernant une quantité ou un nombre particulier;
- la modélisation de la généralisation de problèmes arithmétiques;
- la modélisation de la généralisation de motifs et régularités intra ou extramathématiques.

La classification des artefacts algébriques de Kaput est facilement opérationnalisable car elle nous fournit des types de tâches favorisant l'émergence de la pensée algébrique.

4.2 Les *language constructs* de Malara et collègues

L'idée de base dans les travaux de Malara et collègues (Cusi et al., 2011; Malara et Navarra, 2018) est l'analogie entre l'apprentissage du langage algébrique et du langage naturel. Dans cette vision, le langage algébrique peut être construit petit à petit déjà à partir de l'école primaire, avec un parcours qui mène l'élève à travers un processus de construction et perfectionnement du langage grâce au « bégaiement algébrique » : parallèlement à ce qui se passe dans le langage naturel, les expressions brutes sont affinées au cours des années par l'élève.

L'algèbre et l'arithmétique sont donc conçues comme deux disciplines qui constituent une seule métadiscipline : l'*early algebra*. Elles se basent sur les mêmes concepts et les mêmes mots-clés, plutôt que sur les mêmes objets, et peuvent être véhiculées par un seul langage unificateur, un métalangage. Dans cette perspective, certains *language construct* se sont révélés fondamentaux pour susciter une nouvelle vision de l'arithmétique qui soit adaptée à la généralisation algébrique et à sa représentation. Leurs introductions et utilisations, possibles déjà à partir de l'école primaire, amènent à construire des habitudes qui favorisent le développement de la pensée algébrique.

En observant les *language constructs*, on observe la mise en place de la pensée algébrique. Ils s'avèrent donc bien opérationnalisables pour analyser le recours à la pensée algébrique des élèves.

Dans les sections qui suivent, nous illustrons trois macro-catégories de *language constructs* : favoriser le changement de focus du résultat au processus, associer plusieurs représentations d'un nombre naturel à une vision relationnelle du signe égal, favoriser des pratiques socioconstructivistes en classe qui renforcent le rôle du langage naturel.

4.2.1 Favoriser le changement de focus du résultat au processus

Trois *language constructs* fortement entrelacés entre eux font partie de cette catégorie : représenter versus résoudre, processus versus produit et transparent versus opaque. Grâce à eux, il est possible le passage du plan de l'action à celui de la réflexion.

Représenter versus résoudre

L'approche traditionnelle de l'arithmétique porte une grande attention sur l'identification du résultat. Le but est de résoudre, trouver la solution d'un problème et identifier le résultat sont considérées comme synonymes. L'attention de l'élève est donc portée sur les calculs à faire et sur les opérations, en empêchant l'exploration d'autres possibilités mathématiques de caractère algébrique comme l'intérêt à la structure du problème ou sa représentation en langage mathématique. Mais la représentation mathématique n'est pas spécifique à l'algèbre et peut très bien advenir dans le contexte arithmétique, si cela devient partie du contrat didactique³. Ce changement de perspective favorise le passage du point de vue opérationnel à celui relationnel.

Processus versus produit

La dichotomie que nous avons décrite dans le paragraphe précédent est strictement liée à celle entre le processus et le produit. Si l'attention est tournée vers la résolution, le centre d'intérêt devient le résultat obtenu, le produit du calcul, en lais-

3. Par contrat didactique nous entendons ici « l'ensemble des obligations réciproques et des "sanctions" que chaque partenaire de la situation didactique - impose ou croit imposer, explicitement ou implicitement, aux autres - et celles qu'on lui impose ou qu'il croit qu'on lui impose, à propos de la connaissance en cause. Le contrat didactique est le résultat d'une "négociation" souvent implicite des modalités d'établissement des rapports entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu et un système éducatif » (Brousseau, 2010, p. 6).

sant de côté le processus qui a amené à l'obtenir. Cela devient problématique quand on passe à l'algèbre alphanumérique, où avant de résoudre il faut d'abord représenter mathématiquement la situation. En effet une des difficultés épistémologiques classiques identifiées dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre est exactement cette transition d'une résolution immédiate à une résolution après la représentation mathématique du problème (Bazzini et al., 2002; Vergnaud et al., 1988). Surmonter la préoccupation du produit permet de prêter attention au raisonnement et à la structure du problème, et donc au processus.

Transparent versus opaque

Une représentation mathématique est une chaîne de symboles dont la compréhension dépend à la fois de la représentation elle-même et de la personne qui l'interprète. Les représentations peuvent être plus ou moins « transparentes », c'est-à-dire que les informations qu'elles véhiculent peuvent être plus ou moins faciles à capter.

L'attention au processus, accompagnée par une habitude aux représentations non canoniques du nombre, rend les mathématiques plus explicites, plus transparentes. Par exemple, la représentation canonique du nombre 12 et une de ses représentations non canonique $2^2 \times 3$ véhiculent deux informations très différentes. La première est plus « opaque » dans le sens où les propriétés du nombre sont implicites et cachées par sa représentation. La deuxième, par contre, est plus riche et communique des informations intéressantes sur les diviseurs de 12, chose qui n'était pas visible dans la première représentation du nombre. La transparence d'une représentation favorise la compréhension de la stratégie adoptée et du processus qui a permis de passer du texte du problème au produit (son résultat).

4.2.2 Associer plusieurs représentations d'un nombre naturel à une vision relationnelle du signe égal

Le rôle du signe égal, qui peut être vu comme signe opératoire ou relationnel, est étroitement lié aux représentations qu'on donne des nombres. Dans les paragraphes qui suivent, nous présentons ces deux *language constructs*.

Représentations canoniques ou non canoniques

La représentation canonique du nombre est celle liée à son nom, par exemple 12 pour *douze*. Mais ce même nombre peut être représenté d'autres manières qui ne sont pas moins bonnes que celle canonique. Par exemple, 12 peut être exprimé avec d'autres formes :

$$3 \times 4 ; (2 + 2) \times 3 ; 36/3 ; 10 + 2 ; \text{etc.}$$

Ces dernières sont rarement considérées comme des nombres par les élèves, ils sont plutôt classés comme «calculs» ou «opérations». Chacune de ces représentations non canoniques communique des informations à propos du nombre qui n'étaient pas visibles dans la forme canonique et dont la signification dépend du contexte dans lequel elle avait été générée. Le concept de représentation canonique/non canonique d'un nombre a aussi des répercussions importantes sur la signification de l'égal et donne l'occasion de développer des réflexions à ce sujet.

Rôle du signe égal

L'approche traditionnelle à l'arithmétique implique une utilisation «opératoire» du signe égal. Il s'agit d'un symbole qui «donne le résultat». Dans $(6 + 11) - 2 = 15$, la partie de gauche est considérée comme le calcul à faire (elle n'est pas vue comme un nombre, car c'est dans une forme non canonique) duquel on obtient le résultat, qui se trouve dans la partie droite, grâce au symbole égal. Dans cette vision, les égalités ont une direction, le calcul à faire à gauche et le résultat à droite, et le signe d'égal perd son rôle relationnel. Il n'est plus un symbole pour indiquer une relation entre quantités, mais il a une caractérisation spatio-temporelle : il indique qu'il faut faire l'action de calculer et que le résultat de ce calcul se trouvera à sa droite. Une expression comme $8 = 8$ ne peut pas être acceptée, car «il n'y a pas de calcul à faire». Cela devient problématique lors du passage à l'algèbre, car dans cette discipline les deux côtés des égalités ont souvent le même statut et il n'est pas possible d'en identifier une comme résultat de l'autre. Pour accepter l'écriture $2a - 6 = 2(a - 3)$ une vision de l'égal comme symbole relationnel entre deux représentations différentes de la même quantité est nécessaire.

4.2.3 Favoriser des pratiques socioconstructivistes en classe qui renforcent le rôle du langage naturel

Les pratiques de classe et le contrat didactique établi sont fondamentaux pour le développement du langage algébrique comme outil de communication. Nous présentons les trois *language constructs* qui renforcent cette culture et en indiquent la présence, en s'appuyant sur l'utilisation du langage naturel : le bégaiement algébrique, l'argumentation et la généralisation, syntaxe et sémantique.

Le bégaiement algébrique

L'apprentissage du langage naturel se produit petit à petit, à travers erreurs et essais. L'enfant acquiert graduellement la signification du langage et ses règles. Comme pour le langage naturel, le langage algébrique peut être acquis progressivement. Il peut être construit à partir des premières années de l'école primaire en promouvant une certaine vision de l'arithmétique qui mette en lumière la signification de ce qui est fait. L'apprentissage des règles du langage algébrique est donc un chemin qui amène l'élève à traduire les phrases exprimées en langage courant, en langage mathématique et se fait de manière expérimentale. Cela est possible si le contrat didactique tolère des moments d'imprécision et est favorisé par des moments d'apprentissage de groupe où les différentes propositions sont présentées et justifiées. Ce processus de raffinement linguistique, appelé « *algebraic babbling* », « bégaiement algébrique » en français, offre de bonnes occasions pour souligner l'importance des règles syntaxiques et pour les intérioriser. Ce parcours permet à l'élève de construire et perfectionner sa compréhension du langage, en passant à travers des formes langagières indiquant une vision opératoire (« on peut trouver le nombre de voitures en multipliant par 2 les arbres ») pour aboutir à une vision relationnelle (« le nombre de voitures est le double du nombre d'arbres »).

Argumentation et généralisation

Comme nous l'avons vu au chapitre 3, la relation entre l'argumentation et la généralisation peut avoir un rôle important pour la construction et le développement de la pensée algébrique. L'argumentation doit devenir un outil culturel partagé au niveau de la classe pour pouvoir expliciter son lien avec la généralisation. Cette relation permet de s'appuyer sur le rôle de la verbalisation pour nourrir la métacognition sur ce qui est fait ou dit. L'argumentation permet de développer des idées et des intuitions qui n'étaient pas encore complètement établies avant d'essayer de les communiquer.

Syntaxe et sémantique

L'apprentissage d'une nouvelle langue passe notamment par la maîtrise de ses aspects syntaxiques. Mais ceux-ci peuvent être contrôlés seulement si un contrôle sémantique sur ce qui est à exprimer existe déjà. Ce rapport naturel syntaxe/sémantique est inversé dans l'approche classique à l'algèbre. En effet, traditionnellement, la représentation avec un symbolisme standard et sa manipulation syntaxique sont proposées aux élèves avant l'appropriation sémantique. Le

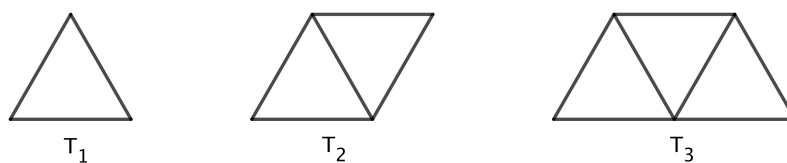


Figure 4.2 – Les premières trois étapes d'un *pattern* géométrique à généraliser.

contrôle sémantique est en général construit après que la classe ait atteint une bonne maîtrise syntaxique.

Le contexte de classe donne une occasion de comparer les différentes représentations algébriques produites par les élèves et leurs interprétations. Cela offre l'opportunité de travailler sur la syntaxe (qui permet de comprendre si une écriture est correcte ou pas), la sémantique (qui permet d'évaluer si une certaine représentation algébrique est cohérente avec la situation mathématique) et leur relation.

4.3 Les types de généralisation de Radford

Les sections et les chapitres précédents mettent en lumière l'importance de la généralisation pour la pensée algébrique (Kaput, 2008; Malara et Navarra, 2018), c'est pourquoi il est important de trouver des outils théoriques qui permettent de mieux analyser le processus de généralisation. Dans ce but, nous allons maintenant présenter les différents types de généralisation identifiés par Radford dans le contexte de la généralisation d'un *pattern* géométrique (2001, 2008, 2010a, 2010b).

Le chercheur identifie différents types de généralisation chez l'élève : *généralisation arithmétique*, *induction naïve*⁴, *généralisation factuelle*, *généralisation contextuelle* et *généralisation algébrique symbolique standard* (Radford, 2001, 2008, 2010a, 2010b).

Cette typologie aide l'identification de certains processus chez l'élève et ne doit pas être interprétée en termes de stades du développement biologique ou cognitif. Il ne s'agit même pas d'étapes hiérarchisées : en fonction du contexte et de la consigne proposée, les élèves peuvent passer d'une manière de penser à l'autre. En effet, selon Radford (2010a, 2010b), la possibilité de penser algébriquement dépend des conditions didactiques créées en classe plus que du niveau de maturation cognitive de l'élève. Les différents types de généralisation seront expliqués à partir de l'exemple de *pattern* géométrique à généraliser dans la figure 4.2.

4. Nous avons inclus l'induction naïve parmi les généralisations par abus de langage. En effet l'induction naïve concerne l'essai et erreur plus que la généralisation comme décrite dans la section 3.2.3 (Radford, 2006).

4.3.1 Généralisation arithmétique

Radford identifie un type de généralisation qu'il classe d'« arithmétique » (2006, 2008). Elle se produit lorsque l'élève saisit la relation qui existe entre les termes successifs d'une suite, sans pourtant identifier une formule⁵ applicable à un terme quelconque. Par exemple, dans le *pattern* géométrique dans la figure 4.2, il est possible de déterminer que chaque étape nécessite de deux côtés de plus que l'étape précédente, en distinguant ainsi la relation entre deux termes qui se suivent dans la suite. Cette observation n'amène toutefois pas à établir une règle directe qui permet de trouver le nombre de côtés pour une figure quelconque. Par exemple, pour trouver le nombre de côtés pour l'étape 100, il serait possible de généraliser en disant « il faut faire $3 + 2 + 2 + 2 \dots$ etc. et arriver jusqu'à 100 ». Cette généralisation n'est pas algébrique car il n'y a pas d'indéterminée en jeu. De plus, elle n'est pas analytique (définition dans la section 3.2.2) : on n'opère pas sur les nombres inconnus.

4.3.2 Induction naïve

Il est possible de parvenir à une généralisation qui à l'apparence est algébrique sans pourtant que le processus que l'élève a fait pour l'obtenir ne le soit (Radford, 2008, 2010a). Par exemple, pour le *pattern* géométrique dans la figure 4.2, on pourrait produire la formule en langage littéral standard $2n + 1$. Pourtant, ce n'est pas seulement le résultat qui compte, mais aussi le processus qui permet de l'obtenir. Si la formule, bien que correcte et exprimée en symbolisme standard, est obtenue par essais et erreurs, le raisonnement relève de l'induction naïve plutôt que de la généralisation algébrique. En effet, pour arriver à l'écriture $2n + 1$, il est possible de procéder par tâtonnement : on essaie d'abord avec $3n$, qui marche pour la première étape, mais pas pour la deuxième; ensuite on teste $n + 3$ qui marche pour la deuxième, mais pas pour les autres. Pour finir, puisque les formules plus intuitives ne fonctionnent pas, on essaie celles un peu plus sophistiquées. On essaie $2n + 1$ qui est la formule retenue, car elle renvoie le bon résultat pour les termes vérifiés, et non parce qu'elle a été construite de manière structurelle.

4.3.3 Généralisation factuelle

Avec la généralisation factuelle, les généralisations que Radford appelle « algébriques » commencent (2001, 2010a, 2010b). En effet, dans les généralisations fac-

5. Comme expliqué dans les sections suivantes, nous utilisons le terme « formule » au sens de Radford (2010a), qui lui donne une signification très large en incluant des suites d'actions à produire (*formule factuelle*) et des outils sémiotiques divers (langage courant, etc.).

tuelle, contextuelle et standard on opère sur les nombres inconnus. Ce type de généralisation peut se manifester comme réponse à des questions du type « trouver le nombre de côtés des figures 5 et 25 » de la suite représenté dans la figure 4.2.

Il est possible d'identifier deux étapes dans ce processus. Dans un premier moment, les élèves identifient la régularité du motif en se basant sur une décomposition spatiale et perceptive des trois étapes du motif données. Par exemple les élèves peuvent noter que pour l'étape 2 il y a 2 côtés horizontaux (un en bas et un en haut) et trois côtés obliques, pour la figure 3 il y a 3 côtés horizontaux (2 en bas et un en haut) et 4 côtés obliques. Dans un deuxième moment, cette régularité est généralisée à une figure qui n'est pas disponible dans le champ perceptif des élèves : ils déduisent que pour la figure 25 il y aura 25 côtés horizontaux, et 26 obliques, pour un total de $25 + 26 = 51$ côtés.

À ce stade, les élèves peuvent calculer le nombre de côtés de chaque figure qu'on pourrait leur proposer. Ils ont à disposition un schème opératoire qui généralise les actions numériques à faire, une *formule en acte* qui leur permet de trouver la réponse pour une quelconque figure particulière. Il s'agit d'une formule algébrique composée par des actions plus que par des symboles formels. La formule obtenue est concrète et s'adapte à des cas particuliers (l'élève reste à un niveau numérique, même en arrivant à résoudre n'importe quel cas spécifique du motif). Les concepts de variable et indéterminée sont pressentis par les élèves, mais pas explicites.

4.3.4 Généralisation contextuelle

La généralisation contextuelle peut se manifester comme réponse à des questions du type « expliquer comment calculer le nombre de côtés d'une figure quelconque » du motif représenté dans la figure 4.2 (Radford, 2001, 2010a, 2010b).

D'un point de vue mathématique, la généralisation concerne pour la première fois une figure qui n'est pas spécifique. Le passage de la demande de trouver un résultat (comme dans la généralisation factuelle) à celle d'expliquer comment on le trouve, pousse l'élève à rendre explicite sa procédure et à la création d'une formule objective.

Une réponse possible à la consigne est « le nombre de la figure pour les côtés horizontaux plus le nombre après le nombre de la figure pour les côtés obliques ». L'aspect indéterminé est rendu explicite et il est exprimé par la formule « le nombre de la figure ». Cependant, la formule obtenue est encore contextuelle, liée à des caractéristiques spatiales et temporelles et basée sur l'interprétation personnelle de la figure. L'exemple de formule donnée est lié à une vision de la figure partagée en deux : il y a les côtés horizontaux et après les côtés obliques. La formule est une

description du terme général, qui peut être déduit à partir d'une figure particulière utilisée pour véhiculer la composition générique d'une figure quelconque.

4.3.5 Généralisation algébrique symbolique standard

La généralisation algébrique symbolique standard répond à la consigne « écrire une formule mathématique pour calculer le nombre de côtés dans la figure n » (Radford, 2001, 2010a).

L'utilisation du symbolisme algébrique standard peut entraîner des difficultés pour les élèves même quand ils savent exprimer le concept en langage courant. Il s'agit donc de quelque chose de beaucoup plus complexe qu'une simple traduction.

Une première étape du symbolisme standard est représentée dans la formule suivante : $n + (n + 1)$. L'apparence de cette formule est complètement dans le registre alphanumérique, mais sa création est encore liée à une vision subjective de la figure : le premier n correspond aux côtés horizontaux et $(n + 1)$ aux côtés obliques. À ce stade, la formule est encore contextuelle et iconique, car décrit la perception que l'élève en a. Une démonstration de cela est la résistance que parfois les élèves opposent à l'élimination des parenthèses : sans les parenthèses, il n'est plus possible de reconnaître les différentes parties qui composent la figure et la formule perd sa caractéristique descriptive et narrative.

Cette étape doit être surmontée pour permettre au symbolisme littéral de manifester sa force en se détachant du contexte concret. Les symboles ne doivent plus représenter, pour les élèves, une certaine partie de la figure, mais ils doivent assumer une signification relationnelle en fonction d'autres symboles. La formule $n + (n + 1)$ doit être vue sous une nouvelle lumière qui en fait disparaître la dimension narrative : les élèves doivent atteindre un « *des-embodiment of their spatial-temporal embodied situated experience* » (Radford, 2001, p.85). La comparaison et la simplification de formules peuvent être une stratégie pour atteindre cet objectif en arrivant, par exemple, à la formule $2n + 1$.

4.4 La typologie de preuves de Balacheff

Le modèle d'algèbre de Kaput et les *language constructs* de Malara et collègues attribuent une place importante à l'argumentation pour la pensée algébrique. Pour cette raison, il est important d'avoir des outils théoriques qui en permettent l'étude. Nous allons donc présenter dans les sections qui suivent la typologie de preuve de Balacheff (1987, 2019b).

Avec le mot preuve, nous entendons ici « une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné », où une explication est « un discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité, acquis pour le locuteur, d'une proposition ou d'un résultat » (Balacheff, 1987, pp. 147–148). En s'intéressant à la preuve, on pose le regard sur l'activité des élèves.

La démonstration est une preuve acceptée au sein de la communauté des mathématiciens (Balacheff, 1987). Ce type de preuve assume une forme particulière : la validité d'un énoncé est reconnue comme vraie ou prouvée à partir d'autres énoncés en suivant des conventions et des règles bien définies.

Comme pour les types de généralisation de Radford, les différents types de preuves ne doivent pas être interprétés comme des stades consécutifs qui décrivent et définissent le niveau mathématique de l'élève, mais plutôt comme des manifestations qui dépendent de la tâche proposée. Il ne s'agit pas d'étapes qui doivent être franchies dans l'ordre, mais de types de preuves qui sont utilisés dans des contextes et avec des buts différents.

On peut identifier deux grandes familles de types de preuves, les preuves pragmatiques et les preuves intellectuelles (Arsac et al., 1992 ; Balacheff, 1987, 2019b).

- Les preuves pragmatiques, parmi lesquelles on distingue l'empirisme naïf, l'expérience cruciale et l'exemple générique, sont liées à l'action.
- Les preuves intellectuelles supposent un détachement de l'action et s'articulent en expérience mentale et calcul sur les énoncés. Avec les preuves intellectuelles, nous assistons à un changement de posture où la décontextualisation, dépersonnalisation et détemporalisation prennent place.

Pour illustrer les différents types de preuves, nous faisons recours aux problèmes du dénombrement des diagonales d'un polygone (Balacheff, 1987, 2019b), tâche qui demande à l'élève de trouver le nombre de diagonales d'un polygone en fonction du nombre de côté.

4.4.1 L'empirisme naïf

Le premier type de preuve est l'empirisme naïf, qui se manifeste quand on prouve la validité d'un énoncé à partir d'un ou d'un petit nombre de cas (Balacheff, 1987).

Pour le problème du dénombrement des diagonales d'un polygone, une preuve relevant de l'empirisme naïf consiste à en déduire la validité en se basant sur un nombre limité d'essais : par exemple l'élève trouve qu'un pentagone a cinq diagonales et en déduit qu'un hexagone aura six diagonales

4.4.2 L'expérience cruciale

Un énoncé peut être prouvé en présentant un exemple qui, aux yeux de l'élève, est si peu particulier que, si la proposition est vraie pour lui, alors elle doit nécessairement l'être toujours (Balacheff, 1987). Dans ce cas, on parle d'expérience cruciale.

L'expérience cruciale se distingue de l'empirisme naïf, car la problématique de la généralité est explicitement posée.

Pour le problème des diagonales, des exemples d'expérience cruciale sont « on va faire une immense figure pour vérifier » (Balacheff, 1987, p. 164) ou « essaie une fois avec 15 et puis si ça marche, ben ça veut dire qu'ça marche avec les autres ».

4.4.3 L'exemple générique

On parle d'exemple générique quand l'énoncé est prouvé en se basant sur un cas qui n'est pas traité dans sa particularité, mais en tant que représentant d'une certaine famille d'objets (Balacheff, 1987, 2019b). La preuve par exemple générique fait recours aux propriétés caractéristiques et aux structures d'une certaine classe en s'appuyant sur un de ses représentants pour la mise en place du raisonnement. Il est possible de voir dans l'exemple générique des aspects des preuves intellectuelles.

Pour la tâche des diagonales d'un polygone, un élève pourrait raisonner comme il suit :

Dans un polygone à 6 sommets, il part 3 diagonales par sommets donc il part 18 diagonales ; mais comme une diagonale joint deux points : il n'y a que 9 diagonales : $18 \div 2 = 9$ et de même avec 7 sommets 8, 9, 10 11,... etc alors à 7 sommets il partira 4 diagonales par sommets à chaque fois que l'on ajoute un sommet au précédent polygone on ajoute une diagonale par sommets au [sic] précédentes diagonales on divise par 2 le nombre de toutes les diagonales et on trouve le nombre de diagonale du polygone et pour trouver le nombre de diagonales partant de chaque sommets on soustré [sic] au nombre de sommet, trois, mais pour les concaves on enleve [sic] encore 1 diagonale. (Balacheff, 1987, p. 173)

4.4.4 L'expérience mentale

C'est entre l'exemple générique et l'expérience mentale qu'il y a le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles (Balacheff, 1987, 2019b). L'expérience mentale permet de prouver en intériorisant l'action et en la détachant de sa

concrétisation sur un représentant particulier. En restant liée à la temporalité anecdotique, elle abandonne le traitement d'un cas particulier comme il était le cas pour l'exemple générique.

Dans la tâche des diagonales, l'élève pourrait fournir la preuve suivante :

en sachant le nombre de sommets d'un polygone, il partira de chaque point, le nombre de sommets – (ses deux voisins + lui-même) il faudrait multiplier à ce qu'on a trouvé par le nombre de sommets (par chaque sommet, partent le même nombre de diagonales), MAIS [sic], on compte chaque diagonale deux fois. Le nombre de diagonales trouvé est donc à diviser par deux et on obtient une fois chaque diagonale. (Balacheff, 1987, p. 173)

La preuve qui se base sur l'expérience mentale peut utiliser différents registres sémiotiques, comme le langage naturel dans l'exemple qui précède ou le symbolisme algébrique standard (ou autres).

4.4.5 Le calcul sur les énoncés

C'est avec le calcul sur les énoncés qu'on se détache complètement de l'action, des exemples et des constats sur la figure (Arsac et al., 1992; Balacheff, 1988). Il s'agit de preuves qui ne doivent rien à l'expérience. Elles se basent sur l'utilisation des théories, des définitions, des notions et des propriétés en jeu dans la résolution du problème.

Pour la tâche des diagonales d'un polygone, à la place de dessiner et interagir avec la figure, les élèves pourraient faire des déductions à partir des définitions et des propriétés de polygone et diagonale. Un exemple est donné par Balacheff : deux élèves « s'accordent sur le fait que pour un sommet : “[il y] a autant de diagonales que de sommets” . . . d'où ils déduisent que “c'est l'carré [sic] des sommets” » (Balacheff, 1988, p. 144). Avec le calcul sur les énoncés, la conclusion n'est pas basée sur l'expérience, mais sur la propriété, dans ce cas fautive, que dans un polygone il y a autant de diagonales que de sommets.

4.5 Complémentarité et nécessité des différents appuis théoriques retenus

Dans ce chapitre, nous avons présenté différents outils théoriques sur lesquels nous basons la suite de notre travail. Dans cette section, nous discutons de leur né-

cessité et de leur complémentarité. Nous aborderons d'autres points à propos de l'articulation des cadres dans la section 6.3.

La section 1.6 résume les étapes principales de notre étude. Les revues de littérature sont suivies de la construction d'une batterie de tâches algébriques. Comme expliqué aux chapitres 6 et 7, nous nous sommes servie du modèle d'algèbre de Kaput pour étayer la création des tâches.

Pour analyser les données, nous avons besoin de pouvoir identifier l'émergence de la pensée algébrique. Les *language constructs* de Malara et collègues sont un bon instrument pour cela. Ils se divisent en trois macro-catégories. « Favoriser le changement de focus du résultat au processus » offre des axes d'analyse facilement opérationnalisables. Par exemple observer si le focus de l'élève pendant la résolution est sur la représentation du problème ou sur le résultat numérique. Ou encore, si les représentations mathématiques sont plus ou moins « transparentes ».

La deuxième catégorie « associer plusieurs représentations d'un nombre naturel à une vision relationnelle du signe égal » fournit aussi des axes d'analyses, par exemple selon la manière d'utilisation du signe égal, comme opérateur ou comme relation.

La troisième catégorie « favoriser des pratiques socioconstructivistes en classe qui renforcent le rôle du langage naturel » est par contre moins adaptée. Nous soulignons d'abord que notre contexte expérimental⁶ n'a pas été la classe, mais quatre entretiens cliniques d'environ 30 minutes. Malgré la tendance à tenir une posture similaire à celle suggérée par Malara et collègues, par exemple à travers des relances adaptées (comme décrit à la section 8.2.2), notre contexte expérimental a bien entendu eu un impact moins fort que les pratiques que les élèves rencontrent au quotidien en classe. Nous avons toutefois pu utiliser les différents *language constructs* pour comprendre si les élèves y faisaient recours et quelles difficultés ils faisaient surgir. Cette troisième catégorie offre des axes d'analyse, mais pas assez d'instruments pratiques pour les analyser finement. Notamment, pour le *language construct* « argumentation et généralisation », nous avons intégré d'autres apports théoriques pour les étudier en détail.

Pour ce faire, nous avons eu recours à deux autres cadres. Pour la généralisation, nous avons choisi les types de généralisation de Radford, idéal pour étudier des tâches de préalgèbre. Pour l'argumentation, nous avons opté pour la typologie de preuves de Balacheff, qui s'adapte bien à l'analyse de tâches numérico-algébriques.

Nous poursuivons nos réflexions à propos de l'articulation des différents appuis théoriques dans la section 6.3.

6. Pour plus de détails sur le contexte expérimental, aller à la page 118.

Chapitre 5

Questions de recherche

5.1 Reformulation des questions de recherche

Au chapitre 1, nous avons introduit le questionnement de recherche suivant pour notre travail :

Q0 Quelles compétences et quelles difficultés ont les élèves avec MLD dans la pensée algébrique?

Après la présentation de la revue de littérature et des appuis théoriques choisis aux chapitres précédents, nous pouvons ainsi reformuler ce questionnement. Voici les questions de recherche qui dirigent cette thèse :

Q1 Quelles tâches créer pour analyser les difficultés et les compétences¹ des élèves spécifiques à la pensée algébrique?

Q2 Comment pouvons-nous décrire la pensée algébrique d'élèves avec MLD en termes de *language constructs*, types de généralisation et types de preuve?

Q2.1 Quels *language constructs* identifient la pensée algébrique d'élèves avec MLD?

Q2.2 Quels types de généralisation sont utilisés par des élèves avec MLD dans l'étude d'un *pattern* géométrique?

Q2.3 Comment des élèves avec MLD mobilisent des exemples et s'engagent dans une preuve dans une tâche d'*early algebra* nécessitant une argumentation?

Avec Q1, nous voulons d'abord comprendre quelles tâches créer afin qu'elles nous permettent d'étudier la pensée algébrique des élèves. La réponse à Q1 est

1. Ici, le terme « compétence » doit être conçu dans son acception courante, à l'opposé de « difficulté ».

ancrée dans la littérature en didactique des mathématiques (comme nous le présentons au chapitre 7). Tout d'abord, l'étude bibliographique des tâches utilisées dans des recherches antérieures fonde la création de notre batterie de tâches. Ensuite, les outils théoriques choisis nous permettent de la créer. Cet ancrage théorique nous amène à faire l'hypothèse que les tâches de notre batterie sont robustes et favorisent l'émergence de la pensée algébrique (bien que, dans la littérature, ces tâches aient été utilisées pour la plupart avec des élèves sans MLD). La mise à l'épreuve de cette hypothèse de recherche se fait lors de l'expérimentation avec les élèves.

Cela nous amène au traitement de Q2, qui nous permettra de valider expérimentalement la batterie construite théoriquement. Lors de l'expérimentation des tâches et des entretiens, nous pourrons étudier la pensée algébrique des élèves avec MLD et répondre ainsi à Q2. En particulier, nous allons observer les *language constructs* utilisés par les élèves, les types de généralisation mis en place et le rôle des exemples dans leurs preuves (voir le chapitre 4 pour la présentation de ces outils théoriques).

5.2 Hypothèses de recherche

Dans ce qui suit, nous formulons nos hypothèses de recherche répondant aux questions de la section 5.1 et que nous testons ensuite avec l'analyse des données empiriques.

Nous répondons à Q1 avec une proposition de tâches basée sur des concepts théoriques. Notre réponse sera donc bien fondée théoriquement, mais elle ne sera pas la seule possible : d'autres batteries de tâches pourraient être créées en fonction des appuis théoriques choisis.

Le traitement de la question de recherche Q2 va nous conduire à mettre à l'épreuve les trois hypothèses de recherche suivantes. La première hypothèse est que les élèves avec MLD mettent en place des stratégies de résolution en s'appuyant sur la pensée algébrique². Le constat de l'émergence de la pensée algébrique chez des élèves avec MLD serait un résultat important pour la compréhension des possibilités d'apprentissage de ces élèves. Il confirmerait le peu de littérature existante à ce propos (par exemple Maccini et al., 1999; Xin, 2008).

2. Nous nous limitons ici à une formulation d'hypothèses qui ne font pas référence aux appuis théoriques utilisés et évoqués dans les questions Q2.1, Q2.2 et Q2.3. Des hypothèses plus fines se référant aux cadres seraient possibles.

D'ailleurs, Kaufmann et al. (2013) se demandent si les MLD représentent « *the extreme end of a continuum (or several continua) of mathematical ability* » ou si les difficultés associées aux MLD « *are qualitatively different from more common mathematics difficulties* » (p. 2). La différence ou ressemblance des difficultés et des stratégies des élèves avec MLD et sans MLD est un questionnement très présent en recherche et nous amène à la formulation d'hypothèses ultérieures.

Notre deuxième hypothèse de recherche est que la pensée algébrique des élèves MLD ne diffère pas d'un point de vue qualitatif de ce qui est déjà connu pour des élèves sans MLD. Les difficultés spécifiques à la pensée algébrique que ces élèves rencontrent ne sont pas différentes dans le fond des difficultés des élèves sans MLD.

Cette deuxième hypothèse de recherche est cohérente avec la recherche sur les élèves avec MLD dans le domaine arithmétique. Par exemple, Desmet et Mussolin (2012) concluent que « au regard des manifestations typiques décrites ci-dessus, nous pouvons conclure que les erreurs des enfants dyscalculiques ne sortent pas du développement typique » (p. 344).

Notre troisième hypothèse de recherche est que ce qui différencie la population avec MLD de celle sans MLD pour la pensée algébrique est plutôt la persistance des difficultés dans la résolution des tâches. Cette dernière hypothèse a été déjà vérifiée pour le domaine de l'arithmétique (Geary, 2011).

La partie expérimentale de cette thèse permettra de tester les hypothèses présentées ci-dessus.

Deuxième partie

La batterie de tâches

Chapitre 6

Réponse à la question de recherche

Q1 : une batterie de tâches pour étudier la pensée algébrique

Comme décrit à la section 1.6, la première étape de la partie expérimentale de cette thèse concerne la conception d'une batterie de tâches. En ayant pour objectif la création de cette batterie, nous répondons ainsi dans ce chapitre à la question de recherche Q1 que nous rappelons ici :

Q1 Quelles tâches créer pour analyser les difficultés et les compétences des élèves spécifiques à la pensée algébrique?

La réponse à Q1 est ancrée dans la littérature en didactique des mathématiques. Tout d'abord, pour fonder la création de notre batterie de tâches, nous avons mené une étude bibliographique des tâches utilisées dans des recherches antérieures. Les liens entre ces tâches et celles choisies pour cette thèse sont présentés au chapitre 7.

Ensuite, pour créer la batterie, nous nous sommes appuyée sur le modèle d'algèbre de Kaput (2008), que nous avons décrit à la section 4.1. Ce modèle non seulement adopte une vision de la pensée algébrique basée sur la généralisation, mais encore propose trois artefacts culturels propres à l'algèbre. Pour chaque artefact, il liste des types de problèmes possibles. Le modèle s'avère ainsi facilement opérationnalisable : le passage du modèle théorique à la création d'une batterie de tâches se fait de manière assez directe.

De plus, le modèle de Kaput prend en considération différents aspects de la pensée algébrique des élèves et permet ainsi de construire une batterie de tâches assez variées couvrant un large spectre des compétences algébriques. Ce modèle inclut

non seulement des tâches travaillant la généralisation, mais aussi la structure, l'argumentation, la relation entre quantités associée à une vision relationnelle du signe égal, etc. La batterie de tâches ainsi construite dépend de choix théoriques. Elle n'est donc pas la seule possible. D'autres définitions de pensée algébriques pourraient être choisies à la place du modèle de Kaput en menant à d'autres résultats en ce qui concerne la batterie de tâches.

L'ancrage théorique (étude bibliographique et modèle de Kaput) qui fonde notre batterie nous amène à faire l'hypothèse que les tâches sont robustes et favorisent l'émergence de la pensée algébrique. La mise à l'épreuve de cette hypothèse de recherche se fait lors de l'expérimentation avec les élèves.

La batterie de tâches est présentée en détail au chapitre 7.

6.1 Adaptation du modèle de Kaput

Comme justifié à la section 3.3, nous considérons le symbolisme alphanumérique comme une composante non indispensable de la pensée algébrique. Ce choix implique une réflexion à propos du modèle de Kaput qui a une perspective symbolique de la pensée algébrique et amène à une adaptation du modèle (figure 6.1; Kaput, 2008; Kaput et al., 2008).

D'abord, nous soulignons la pertinence du choix. Bien qu'en ayant une approche symbolique, le modèle s'ouvre à différentes interprétations de ceci, en étant conçu pour modéliser la pensée algébrique à travers les différents niveaux scolaires (Kaput, 2008). En effet, la première activité du modèle implique « la généralisation de régularités et son expression dans des systèmes de symboles conventionnels *de plus en plus systématiques* ». Cette perspective d'évolution du symbolisme comporte donc différents niveaux de formalisme.

De plus, Kaput différencie entre les activités qu'il appelle algébriques au sens strict et les activités qu'il nomme « quasi-algébriques ». Les activités algébriques concernent l'expression de la généralisation ou le raisonnement sur cette généralisation par moyen d'un système conventionnel de symbolisation algébrique, y compris le symbolisme alphanumérique et les représentations graphiques en coordonnées, etc. (Kaput, 2008; Kaput et al., 2008). Une activité pour être quasi-algébrique doit toujours concerner l'expression de la généralisation ou le raisonnement sur cette généralisation, mais cela par n'importe quel type de symbolisme (langage naturel, symbolisme arithmétique, manipulations physiques, etc.).

La prise en compte dans notre travail de types informels de symbolismes, comme celui de l'arithmétique ou le langage oral, classeront notre proposition

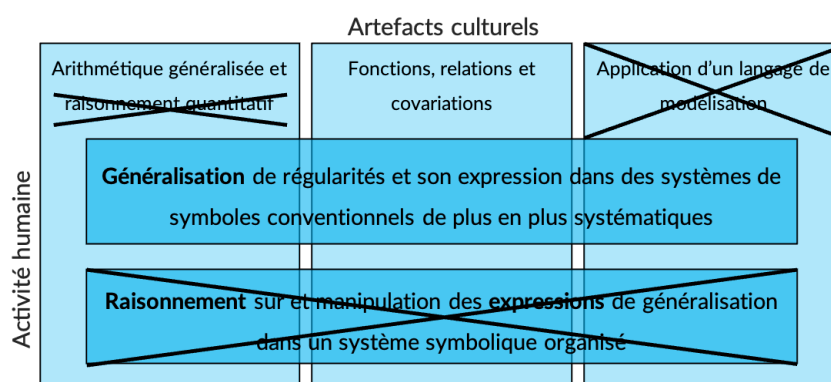


Figure 6.1 – Schéma résumant notre adaptation du modèle d'algèbre de Kaput.

comme quasi-algébrique selon Kaput, sans pourtant rendre inadéquat le modèle.

L'adaptation du modèle a néanmoins des conséquences pratiques. La première est que pour ce travail nous ne prenons pas en considération la deuxième activité algébrique du modèle : « le raisonnement et l'action guidée par des règles syntaxiques sur des généralisations exprimées dans des systèmes symboliques organisés ». En effet, en ne visant pas le langage algébrique standard, cette activité serait beaucoup moins riche.

La deuxième adaptation concerne la troisième activité culturelle « langage de modélisation intra ou extramathématique ». En ne nous focalisant pas sur la symbolisation alphanumérique, cet axe est moins pertinent pour notre étude.

En troisième lieu, en ce qui concerne le premier artefact culturel, nous avons opté pour l'arithmétique généralisée au détriment du raisonnement quantitatif. Ce choix est dû à la volonté d'être cohérente avec le contexte scolaire du canton de Vaud, où une approche par raisonnement quantitatif est moins répandue que celui en arithmétique généralisée. De plus, une entrée par l'arithmétique semble particulièrement adaptée à l'*early algebra* comme nous la concevons : une métadiscipline unificatrice entre l'arithmétique et l'algèbre (Cusi et al., 2011; Malara et Navarra, 2018).

Pour ce travail de thèse, nous nous limitons à la première activité et aux deux axes « arithmétique généralisée et raisonnement quantitatif » et « fonctions, relations et covariations ». Le modèle adapté est représenté en figure 6.1.

6.2 Cohérence de l'adaptation du modèle de Kaput

Tout en prenant en compte seulement une partie du modèle de Kaput, l'adaptation présentée à la section 6.1 reste suffisante pour explorer les aspects embléma-

tiques de la pensée algébrique. Les objets de recherche exposés à la section 3.2.3 peuvent tous être abordés avec les tâches (présentées au chapitre 7) construites grâce à l'adaptation du modèle :

- la généralisation est à la base du modèle, étant l'une des activités caractérisant la pensée algébrique ;
- la structure est indispensable pour les deux artefacts culturels pris en considération. La généralisation concerne les structures arithmétiques ou la structure d'une situation modélisable grâce à l'idée de fonction ;
- la justification sera favorisée pendant les entretiens ;
- la relation entre quantités ressort des deux artefacts culturels, dans le premier surtout dans le contexte arithmétique de relation entre nombres et dans le deuxième dans le concept même de fonction.

D'ailleurs, Kieran et al. (2016, p.5) ont identifié quatre thèmes centraux en *early algebra* :

- « *Generalizing related to patterning activity* ». Ce thème est en fort lien avec l'artefact culturel « fonctions, relations et covariations », dont une des tâches typiques est la généralisation de motifs géométriques.
- « *Generalizing related to properties of operations and numerical structure* ». Ce thème fait partie du premier artefact culturel « arithmétique généralisée ».
- « *Representing relationships among quantities* ». Ce thème aussi fait partie de l'artefact culturel « arithmétique généralisée ».
- « *Introducing alphanumeric notation* ». Ce thème serait plutôt en lien avec le troisième artefact culturel « application d'un langage de modélisation » et la deuxième activité « raisonnement sur et manipulation des expressions de généralisation dans un système symbolique organisé » que nous ne prenons pas en compte ici.

Nous pouvons conclure que l'adaptation du modèle de Kaput est robuste et cohérente avec la littérature en didactique des mathématiques.

6.3 Relation entre les différents appuis théoriques

Dans notre thèse, nous nous servons donc de différents appuis théoriques : l'adaptation du modèle d'algèbre de Kaput, les *language constructs* de Malara et collègues, les types de généralisation de Radford et la typologie de preuves de Balacheff. En prenant en considération différentes approches théoriques, la question

se pose à propos de leur *networking* (Prediger et Bikner-Ahsbabs, 2014; Prediger et al., 2008), notamment en ce qui concerne la définition de pensée algébrique. En effet, Kaput, Malara et collègues et Radford ont des interprétations différentes de ce qui peut être défini comme algébrique. Dans les lignes qui suivent, le point de vue de Balacheff n'est pas discuté parce que sa typologie de preuves n'a pas été conçue spécialement dans le domaine de l'algèbre.

Comme nous l'avons souligné au cours de ce chapitre et du chapitre 4, Kaput met au centre de l'algèbre la généralisation de différentes situations, via l'utilisation du symbolisme littéral algébrique standard. Dans notre adaptation du modèle, une importance particulière est toujours donnée à la généralisation en prenant en considération aussi d'autres manières pour l'exprimer que le symbolisme standard.

Pour Radford, il est possible de généraliser sans mettre en place un raisonnement algébrique (par exemple dans la généralisation arithmétique) et il est possible de raisonner algébriquement sans symbolisme (par exemple dans la généralisation contextuelle). Cette approche ne se base pas sur le recours à la symbolisation alphanumérique, mais il prend en considération un symbolisme plus large, et définit la pensée algébrique par l'analytisme.

Malara et collègues ont une approche linguistique pour laquelle la généralisation est importante, mais non indispensable et l'expression algébrique peut avoir lieu d'abord en langage naturel et enfin par moyen du symbolisme alphanumérique, à travers le « bégaiement algébrique ».

Nous avons déjà mis en évidence l'apport et la nécessité de chaque cadre au chapitre 4.

En ce qui concerne la symbolisation, comme nous l'avons déjà expliqué au cours de ce chapitre, nous avons décidé de suivre Malara et collègues et Radford et garder un point de vue non nécessitant la symbolisation standard, en adaptant le modèle de Kaput.

Pour conclure, nous nous sommes assurée que l'utilisation des cadres choisis pour l'analyse, les *language constructs*, les types de généralisation et la typologie de preuve sont adaptés pour les tâches qu'on a produites au moyen de l'adaptation du modèle de Kaput. Comme expliqué à la section 8.4, cela est le cas.

Chapitre 7

Les tâches

Au chapitre 6, nous avons justifié le choix d'utiliser le modèle de Kaput (1995, 2008) pour étayer la création de la batterie de tâches utilisée pour la partie expérimentale de cette thèse. Dans les paragraphes suivants, nous illustrerons quelles tâches nous avons conçues et quels choix nous avons faits en termes de variables¹.

7.1 La justification des tâches de la batterie

L'adaptation du modèle de Kaput (1995, 2008) introduit précédemment (section 6.1) offre deux artefacts culturels, chacun caractérisé par des tâches mathématiques classiques. À partir de cela nous avons pu construire les tâches de la batterie, dont la version donnée aux élèves pendant les entretiens se trouve en annexe à la page 245². Le modèle adapté a été utilisé en formulant les tâches de manière à ne pas utiliser forcément le symbolisme alphanumérique. Ce choix est cohérent avec notre échantillon, qui est composé d'élèves du secondaire I (12-15 ans) qui, au moment du recueil des données, n'avaient pas encore rencontré le symbolisme alphanumérique³.

L'association entre les artefacts culturels et les tâches est résumée en figures 7.1 et 7.2. Chaque tâche a été classée selon l'axe le plus marquant, mais comme expliqué à 4.1, les artefacts ne sont pas disjoints et les tâches pourraient inclure des as-

1. Par variable on entend « variable cognitive, une variable de la situation telle que par le choix de valeurs différentes on peut provoquer des changements de la connaissance optimale » (Brousseau, 1997, p.3).

2. À l'annexe A, la mise en page et la police des tâches correspondent à celles de la version reçue par les élèves. Cela a été conçu de manière à rendre les documents aussi accessibles que possible, notamment en utilisant une police (*OpenDyslexic*) facilement lisible par des personnes avec des troubles de la lecture et en bien espaçant les différentes parties (Fondation Centre suisse de pédagogie spécialisée, 2015). Cette précaution n'a pas été prise pour ce chapitre.

3. Seulement l'Élève 18 avait été exposée à l'enseignement du symbolisme alphanumérique.

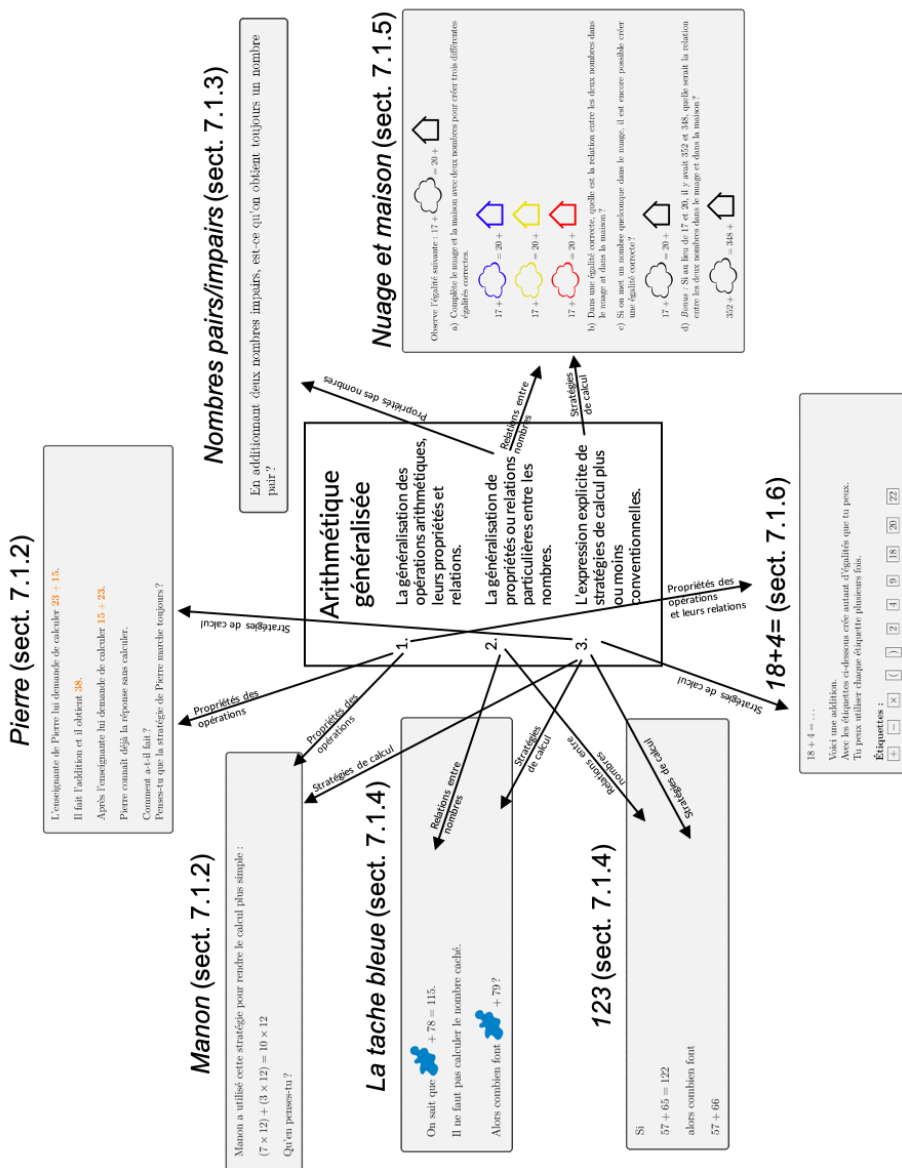


Figure 7.1 – Association entre les tâches créées et l’adaptation du modèle de Kaput : arithmétique généralisée.

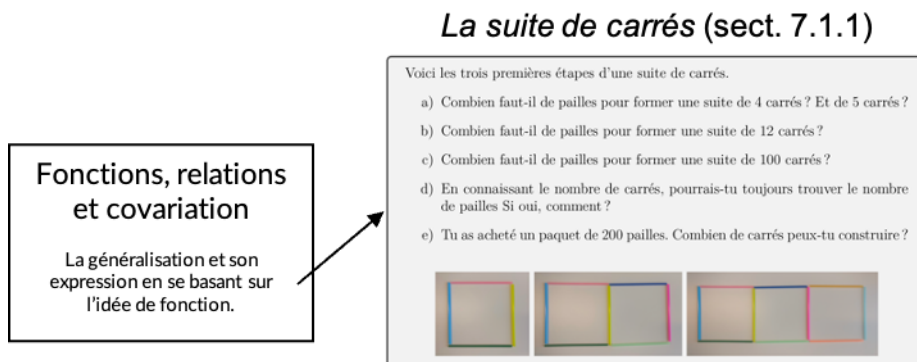


Figure 7.2 – Association entre les tâches créées et l’adaptation du modèle de Kaput : fonctions, relations et covariation.

pects qui permettraient de les classer différemment. De plus, en fonction de la procédure utilisée, certaines des tâches choisies pourraient bien s'inscrire aussi dans le troisième axe « algèbre comme langage de modélisation intra ou extramathématique ». Cependant, il est toujours possible de les résoudre sans symbolisme standard et elles incluent d'autres aspects qui permettent de les relier aux deux autres axes.

Dans les prochaines sections, nous analysons plus en profondeur la création de chaque tâche. Ici, l'ordre de présentation des tâches correspond à celui de passation avec les élèves⁴.

7.1.1 La suite de carrés

Voici les trois premières étapes d'une suite de carrés.

- Combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés ? Et de 5 carrés ?
- Combien faut-il de pailles pour former une suite de 12 carrés ?
- Combien faut-il de pailles pour former une suite de 100 carrés ?
- En connaissant le nombre de carrés, pourrais-tu toujours trouver le nombre de pailles ? Si oui, comment ?
- Tu as acheté un paquet de 200 pailles. Combien de carrés peux-tu construire ?

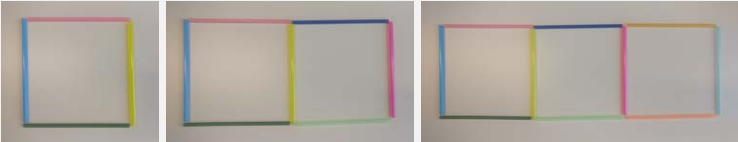


Figure 7.3 – La tâche *La suite de carrés*.

Pour l'artefact culturel « fonctions, relations et covariations », nous avons cherché une tâche travaillant la généralisation en se basant sur l'idée de fonction. Une tâche classique citée par Kaput (2008) est la généralisation de *patterns* géométriques élémentaires, comme celui créé pour notre batterie et présenté dans la figure 7.3. Pour la conception de *La suite de carrés*, nous nous sommes référée à de nombreux travaux en didactique des mathématiques à propos des *patterns* géométriques (par exemple Coulange et Grugeon, 2008; Ferrara et Sinclair, 2016; Grugeon–Allys et Pilet, 2017; Malara et Navarra, 2018; Radford, 2008; Stacey, 1989; Strømskag, 2015).

4. En fonction du chapitre, l'ordre des tâches peut correspondre à celui des questions de recherche. Par exemple, dans le chapitre 9, nous présentons d'abord les résultats relatifs à *La tache bleue* et 123, ensuite à *La suite de carrés*, et enfin à *Nombres pairs/impairs*.

Cette tâche a l'avantage de travailler l'idée de relation entre deux quantités (nombre de carrés et nombre de pailles utilisées pour les construire) sans avoir forcément besoin d'une symbolisation littérale standard. De surcroît, plusieurs questions relatives à différents nombres de carrés (5, 100, un nombre quelconque, etc.) sont possibles ce qui rend la tâche adaptable à des compétences diverses des élèves.

7.1.2 Pierre et Manon

L'enseignante de Pierre lui demande de calculer $23 + 15$.

Il fait l'addition et il obtient 38 .

Après l'enseignante lui demande de calculer $15 + 23$.

Pierre connaît déjà la réponse sans calculer.

Comment a-t-il fait ?
Penses-tu que la stratégie de Pierre marche toujours ?

Manon a utilisé cette stratégie pour rendre le calcul plus simple :

$$(7 \times 12) + (3 \times 12) = 10 \times 12$$

Qu'en penses-tu ?

Figure 7.4 – Les tâches *Pierre* (en haut) et *Manon* (en bas).

Pour l'artefact culturel « arithmétique généralisée », nous avons créé différentes tâches à partir des tâches classiques identifiées par Kaput (2008).

Pour pouvoir observer les réflexions des élèves à propos des propriétés des opérations arithmétiques (deuxième type de tâche dans l'axe arithmétique généralisée), nous avons créé *Pierre* et *Manon* (figure 7.4). Dans *Pierre* l'objectif est de faire recours à la propriété commutative de l'addition et dans *Manon* à la propriété distributive de la multiplication sur l'addition. Dans les deux tâches, les propriétés des opérations sont utilisées pour faciliter un certain calcul, en liant *Pierre* et *Manon* aussi au troisième type de tâches classiques pour l'axe arithmétique généralisée (« expression explicite de stratégies de calcul plus ou moins conventionnelles »). Pour la construction des deux tâches, nous nous sommes inspirée à nombreuses recherches en didactique des mathématiques travaillant les propriétés des opérations (par exemple Boulton-Lewis et al., 2000; Constantin, 2015; Hunter et al., 2018; Schifter, 2018; Strachota et al., 2018).


En additionnant deux nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair ?


Figure 7.5 – La tâche *Nombres pairs/impairs*.

7.1.3 Nombres pairs/impairs

Nombres pairs/impairs (figure 7.5) travaille la preuve de la généralisation d'une propriété des nombres, être pair ou impair. Bien que cela n'apparaissait pas à l'écrit, la demande de justifier l'affirmation était posée à l'oral⁵. Pour la création de cette tâche, nous nous sommes appuyée sur certains des nombreux problèmes similaires connus en didactique des mathématiques (par exemple Alves et al., 2013; Bieda et al., 2006; Chimoni et Pitta-Pantazi, 2017; Malara, 1996; Miyakawa, 2002).

7.1.4 La tache bleue et 123

On sait que  + 78 = 115.
Il ne faut pas calculer le nombre caché.

Alors combien font  + 79 ?

Si
57 + 65 = 122
alors combien font
57 + 66

Figure 7.6 – Les tâches *La tache bleue* (en haut) et 123 (en bas).

Pour pouvoir travailler sur la relation entre nombres, nous avons inséré dans la batterie *La tache bleue* et 123 (figure 7.6). Les deux tâches se différencient l'une de l'autre par la présence d'un nombre inconnu dans *La tache bleue* caché derrière la tâche qui n'apparaît pas dans 123. Dans les deux tâches, les relations entre les nombres en jeu sont utilisées pour calculer de manière plus aisée, en liant *La tache bleue* et 123 aussi au troisième type de tâches classiques pour l'axe arithmétique généralisée (« expression explicite de stratégies de calcul plus ou moins conventionnelles »). 123 a été utilisé comme relance si les élèves rencontraient des difficultés dans la résolution de *La tache bleue*. Pour la formulation de ces deux tâches, nous

5. Nous avons effectué ce choix pour ne pas alourdir la consigne écrite.

nous sommes inspirée, parmi les différents travaux en didactique des mathématiques portant sur ce type de tâches, à Malara et Navarra (2018) et Navarra (2003) pour *La tache bleue* et à Malara (1996) et Schifter (2018) pour 123.

7.1.5 Nuage et maison

Observe l'égalité suivante : $17 + \text{nuage} = 20 + \text{maison}$

a) Complète le nuage et la maison avec deux nombres pour créer trois différentes égalités correctes.

$17 + \text{nuage} = 20 + \text{maison}$

$17 + \text{nuage} = 20 + \text{maison}$

$17 + \text{nuage} = 20 + \text{maison}$

b) Dans une égalité correcte, quelle est la relation entre les deux nombres dans le nuage et dans la maison ?

c) Si on met un nombre quelconque dans le nuage, il est encore possible créer une égalité correcte ?

$17 + \text{nuage} = 20 + \text{maison}$

d) *Bonus* : Si au lieu de 17 et 20, il y avait 352 et 348, quelle serait la relation entre les deux nombres dans le nuage et dans la maison ?

$352 + \text{nuage} = 348 + \text{maison}$

Figure 7.7 - La tâche Nuage et maison.

Nuage et maison (figure 7.7) travaille comme *La tache bleue* et 123 les relations entre nombres et les stratégies de calcul. Dans ces deux tâches, il y a une inconnue (*La tache bleue*) ou tous les nombres sont fixes et connus (123). En revanche, dans *Nuage et maison* la généralisation à un nombre quelconque est demandée, en faisant rentrer en jeu une variable. La création de *Nuage et maison* a été guidée par les travaux de Stephens (2008) et de Stephens et Wang (2008).

7.1.6 18+4=

Au cœur de la tâche 18+4= (figure 7.8) il y a la vision du signe égal comme relation. Le but de la tâche est d'écrire autant d'égalités possibles avec les étiquettes

$18 + 4 = \dots$

Voici une addition.
Avec les étiquettes ci-dessous crée autant d'égalités que tu peux.
Tu peux utiliser chaque étiquette plusieurs fois.

Étiquettes :

$+$ $-$ \times $($ $)$ 2 4 9 18 20 22

Figure 7.8 - La tâche $18+4=$.

à disposition. Après avoir utilisé l'étiquette « 22 » en interprétant l'égalité comme directionnelle et le signe égal comme calculateur, les élèves peuvent créer d'autres égalités en utilisant le signe égal pour indiquer la relation entre les deux côtés. On met ainsi en place des stratégies de calculs en faisant recours aux propriétés des opérations (la commutativité de l'addition et la distributivité de la multiplication sur l'addition), aux relations entre opérations (la relation réciproque entre l'addition et la soustraction) et aux stratégies de compensation. Dans la littérature en didactique des mathématiques, nous avons rencontré multiples tâches similaires sur lesquelles nous nous sommes basée pour la construction de $18+4=$ (par exemple Hunter et al., 2018).

7.2 Les analyses *a priori* des tâches

Après la création de la batterie de tâches, mais avant l'expérience avec les élèves, nous avons effectué une analyse préalable (Margolinas, 1992) des tâches retenues pour le recueil des données afin d'en fixer les variables. Il est très difficile, voire impossible, d'anticiper tous les comportements, c'est pourquoi cette analyse préalable a été perfectionnée après les premières passations avec des élèves, ce qui a donné lieu à l'analyse *a priori* des tâches.

Largement utilisée en didactique des mathématiques, l'analyse *a priori* a pour finalité de préparer l'observation (Mercier et Salin, 1988) et vise à donner des explications rationnelles aux comportements cognitifs des élèves (Dorier, 2010). Cette analyse permet de prévoir des champs de comportements possibles et de contrôler leurs sens, en décrivant les choix effectués (Artigue, 1989).

Dans cette acception, l'expression « *a priori* » n'indique pas une antériorité temporelle : cela ne signifie pas « avant la réalisation » de la tâche en classe ou avec l'élève (concept qui correspond plutôt à l'analyse préalable ; Margolinas, 1992), mais « en préparation » à l'analyse *a posteriori* et à l'interprétation des données du terrain (Dorier, 2010).

Les analyses *a priori* complètes des tâches sont consultables en annexe B à la page 263 (nous nous limitons aux tâches retenues pour l'analyse, comme expliqué dans 8.4.1).

Notre analyse *a priori* est composée des éléments suivants :

1. les procédures possibles ;
2. les variables cognitives ;
3. les difficultés et les erreurs possibles ;
4. les relances⁶ en fonction des difficultés et des erreurs.

Pour les analyses *a priori*, nous nous sommes basée principalement sur les *language constructs* de Malara et Navarra, les niveaux de généralisation de Radford et la typologie de preuves de Balacheff (pour la description des cadres, voir le chapitre 4). D'autres références théoriques peuvent être utilisées, les différents apports sont mieux détaillés à l'intérieur de chaque analyse.

Les procédures possibles de résolution et les variables cognitives qui les favorisent nous ont permis de modifier les tâches et leurs consignes. Les versions finales des tâches, qui correspondent à celles rapportées dans ce chapitre, ont été choisies de manière à orienter l'élève vers les procédures qui nous intéressaient pour l'observation (comme mieux expliqué dans 7.3). Cette première partie de l'analyse *a priori* a donc étayé la construction des tâches à proposer pendant les entretiens consacrés au recueil des données.

L'identification des difficultés et des relances relatives nous a servi de base pour la construction de nos protocoles d'entretien utilisés pendant les entretiens (comme mieux détaillé dans la section 8.2.2). Anticiper ces éléments a permis de réagir de manière plus homogène et réfléchi aux blocages des élèves pendant la partie expérimentale.

L'analyse *a priori* aura aussi un rôle dans l'analyse des données. C'est sur la confrontation entre analyse *a priori* et analyse *a posteriori* (section 8.4) que se base la validation des hypothèses de recherche (Artigue, 1989).

7.3 Les choix en termes de variables

Dans cette section, nous justifions les choix en termes de variables cognitives pris pour les tâches de la batterie. Nous nous tenons à la présentation des choix pour les tâches retenues pour l'analyse (la sélection est décrite à 8.4.1). Dans cette section, nous faisons référence à l'annexe B, où nous avons détaillé les analyses *a priori*.

6. Nous utilisons le mot « relance » dans le sens courant du terme.

7.3.1 La suite de carrés

L'analyse *a priori* complète de cette tâche est disponible à la page [266](#).

Le nombre de carrés dont il faut trouver le nombre de pailles

Dans les tâches de généralisation de *patterns* géométriques, il est possible de poser une infinité de questions en fonction de la valeur de la variable choisie. Dans notre cas, il est possible de demander de trouver le nombre de pailles de différentes quantités de carrés : combien de pailles pour 4 carrés, 12, 100, un nombre quelconque de carrés, etc. En fonction du nombre demandé, des procédures différentes seront favorisées (Coulange et Grugeon, [2008](#) ; Radford, [2010a](#), [2010b](#)).

De petits nombres de carrés, comme 4 ou 5, doivent permettre aux élèves le recours au dessin des figures demandées et le comptage des pailles (Coulange et Grugeon, [2008](#) ; Radford, [2010a](#), [2010b](#)). Pour de petits nombres, il est aussi envisageable de compter les pailles nécessaires pour les carrés manquants (3 pailles pour construire un quatrième carré) et de faire le calcul (10 pailles pour 3 carrés, donc $10 + 3 = 13$ pour la suite de 4 carrés). Il est aussi possible d'utiliser une formule arithmétique, qui se base sur la récursivité de la suite et la régularité d'écart entre étapes successives de celle-ci, par exemple, pour les 5 carrés : « je fais $4 + 3 + 3...$ pour arriver à 5 carrés ». Ces deux dernières procédures se différencient dans leur rapport à la généralisation. Si avec le comptage et calcul les élèves n'ont pas forcément saisi une caractéristique commune aux différentes étapes de la suite, avec la généralisation arithmétique cette caractéristique est mise en évidence et utilisée. Les autres procédures (formule factuelle, contextuelle, etc.) ne sont bien évidemment pas mises en défaut, mais deviennent beaucoup moins fréquentes.

Demander le nombre de pailles nécessaires pour un grand nombre de carrés (dans notre cas, 100) veut favoriser l'émergence d'une résolution par généralisation factuelle, comme $3 \cdot 100 + 1 = 301$ (Coulange et Grugeon, [2008](#) ; Radford, [2010a](#), [2010b](#)). En fonction de la confiance de l'élève avec les nombres, il est possible de mettre en place une procédure par formule arithmétique en utilisant des paquets de carrés (Weber et al., [2015](#)). Par exemple, l'élève pourrait dessiner 10 carrés, qui sont constitués de 31 pailles, remarquer que pour ajouter encore 10 carrés, il faut 30 pailles, $31 + 30 = 61$, et continuer ainsi jusqu'à 100. Pour répondre à la question sur les 100 carrés, une procédure par dessin et comptage n'est pas mise en défaut, mais l'amplitude du nombre décourage en général les élèves à entreprendre une telle démarche. Une procédure par formule symbolique standard serait aussi possible. À nouveau, d'autres procédures ne sont pas mises en défaut, mais deviennent

beaucoup moins fréquentes et sources d'erreurs (par exemple la procédure par formule arithmétique).

En demandant aux élèves le nombre de pailles pour construire un nombre indéterminé, les élèves doivent mettre en place des procédures recourant à une formule contextuelle ou symbolique standard (Radford, 2010a, 2010b). Les procédures par dessin et comptage, comptage et calcul, formule arithmétique et formule factuelle sont mises en défaut.

Il y aurait aussi la possibilité de poser explicitement la variable en symbolisme standard (par exemple en demandant combien de pailles pour n carrés) qui obligerait les élèves à présenter une formule symbolique standard. Nous n'explorons pas ici ce cas dans le détail, car il n'est pas au cœur de notre objet d'étude.

Pour la tâche de notre batterie *La suite de carrés*, nous avons fait le choix de proposer différentes valeurs pour la variable « nombre de carrés dont il faut trouver le nombre de pailles ». D'abord nous demandons le nombre de pailles pour 4 et 5 carrés (sous-tâche a). Cette étape est essentielle pour permettre aux élèves de s'approprier le problème et de construire une bonne représentation de ceci. Travailler sur des termes consécutifs permet aussi de mettre en valeur la relation de récurrence entre un terme et son successeur (pour chaque carré, on ajoute 3 pailles). Nous avons aussi posé la question par rapport à 12 carrés (sous-tâche b), car il s'agit d'une valeur intermédiaire entre 4 et 5 (sous-tâche a) et 100 (sous-tâche c) et permet l'utilisation à la fois de procédures par comptage ou formule arithmétique et formule factuelle qui commence à avoir son intérêt.

Ensuite, nous avons choisi la valeur 100 (sous-tâche c) pour faire ressortir la procédure par formule factuelle, qui met en lumière la structure de la suite.

Avec la sous-tâche d), nous avons voulu faire émerger une procédure par formule contextuelle sans la référence à un nombre de carrés particulier. Nous avons choisi une formulation qui permet d'évoquer l'aspect variable du nombre de carrés sans utiliser le mot « quelconque » que les élèves peuvent ne pas connaître : « en connaissant le nombre de carrés, pourrais-tu toujours trouver le nombre de pailles ? Si oui, comment ? »

Type de matériel à disposition

En mettant à disposition des élèves du matériel pour la construction de la suite (des pailles ou une feuille assez grande pour dessiner par exemple 100 carrés) les procédures par comptage sont favorisées. Nous avons choisi de fournir le matériel pour dessiner (papier et crayon) pour les petits nombres de carrés (4, 5 et 12). Cela permet une bonne représentation de la suite. Au cas où l'élève aurait une mauvaise

représentation de la situation ou des difficultés dans le dessin, de vraies pailles ont été proposées comme relance. Le matériel n'a pas été mis à disposition pour les 100 carrés, car à ce stade de la résolution du problème la représentation de la suite devrait être acquise et le but est plutôt la généralisation de celle-ci.

Quantité d'étapes données de la suite

Dans la consigne de la tâche, il est possible de présenter plusieurs étapes de la suite (dans notre cas nous avons affiché les photos des trois premières étapes de la suite de carrés) ou d'en présenter qu'une (par exemple la troisième étape). Fournir plusieurs étapes consécutives favorise une vision récursive du problème, en mettant en lumière la relation entre chaque étape et la suivante et en ouvrant ainsi la voie à des formules arithmétiques. Nous avons choisi d'insérer les trois premières étapes, car nous estimons que cela aide la construction de la bonne représentation de la suite. D'ailleurs, l'obtention d'une formule arithmétique n'empêche pas le recours à des formules factuelles ou contextuelles.

Le nombre de carrés de la sous-tâche b)

Pour la sous-tâche b), il est possible de demander la quantité de pailles pour construire un nombre de carrés qui peut être multiple ou pas des étapes étudiées précédemment. Le recours à un multiple favorise la mise en place de procédures se basant sur une fausse relation proportionnelle entre le nombre de pailles et de carrés, risque qui est moins présent si on propose un non-multiple. Dans notre tâche, nous avons choisi la valeur 12, qui est un multiple, entre autres, de 4 (cas analysé à la sous-tâche a) et de 3 qui est la dernière étape donnée en photo de laquelle souvent les élèves commencent à réfléchir. La raison de notre choix est de faire ressortir à ce moment de la résolution une éventuelle procédure fausse de type proportionnel pour pouvoir la corriger dans un registre numérique « simple ». Ce faisant, nous voulons augmenter les chances que pour les 100 carrés les élèves se dédient complètement à la recherche d'une formule factuelle sans avoir le poids d'une mauvaise représentation du problème.

7.3.2 Nombres pairs/impairs

L'analyse *a priori* complète de cette tâche est disponible à la page [272](#).

Termes de l'addition

La même tâche peut être proposée en choisissant comme termes de l'addition des nombres pairs (et donc des multiples de 2) et impairs ou des multiples d'autres nombres, par exemple 3, 4 ou 5. L'utilisation de nombres pairs et impairs ou multiples de 5 rend possibles des procédures de résolutions qui se basent sur l'écriture décimale (car 2 et 5 sont des diviseurs de 10). Cela est également vrai pour les multiples de 10. Dans ces cas, des procédures utilisant la conception des pairs comme multiples de 2 restent possibles. Les procédures se basant sur le dernier chiffre des nombres dans leur représentation décimale sont mises en défaut pour des multiples des nombres différents des diviseurs ou multiples de 10 et l'utilisation de ceux-ci favorise le recours à l'exemple générique ou à l'expérience mentale. Nous avons fait le choix de travailler d'abord avec les nombres pairs et impairs parce que nous estimions que les élèves les connaissaient. Cela n'est pas toujours vrai pour les « multiples », mot qui ne fait pas forcément partie du vocabulaire des élèves participant à notre étude. Une relance à propos des multiples de 3 (de 4, etc.) était prévue au cas où l'élève ne proposait que des procédures basées sur la représentation décimale des nombres⁷. De plus, le choix de travailler avec des impairs permet de manipuler des « non-multiples » de 2, en faisant rencontrer aux élèves une situation où additionner deux éléments avec une certaine propriété (être impairs) fait obtenir un résultat avec la propriété opposée (être pairs). Cela est moins faisable avec des multiples d'autres nombres.

Exemple dans la consigne

Afin de contribuer à la bonne représentation du problème, la tâche *Nombres pairs/impairs* peut être formulée en ayant un exemple dans la consigne, par exemple comme il suit « En additionnant 7 et 11, on obtient un nombre pair. En additionnant deux nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair? » Cette formulation pourrait induire les élèves à penser que montrer des exemples soit suffisant pour justifier l'affirmation, en les induisant ainsi vers des procédures d'empirisme naïf et expérience cruciale. Nous avons choisi de ne pas insérer un exemple dans la consigne afin de minimiser ce risque.

7. Nous rappelons que les relances ont été proposées aussi en fonction de l'état de l'élève (humeur, fatigue, réussite ou pas de la tâche, etc.) avec l'objectif de ne pas rendre l'élève frustré-e par une répétition d'échecs. Cette relance n'a donc pas été proposée à tout le monde.

7.3.3 La tache bleue

L'analyse *a priori* complète de cette tâche est disponible à la page [264](#).

Taille des nombres

Une variable de *La tache bleue* concerne la taille des nombres en jeu. En choisissant de petits nombres, une procédure arithmétique dans laquelle on calcule la valeur de la tache et après on résout l'addition demandée est possible. De plus, dans ce cas la procédure arithmétique ne demande pas beaucoup d'efforts. La procédure algébrique qui utilise la relation entre les deux écritures reste valable, mais moins efficace que pour de grands nombres. En choisissant de grands nombres, la rentabilité de la procédure algébrique est mise en valeur, car elle permet d'économiser de nombreux calculs. Nous avons donc choisi les valeurs numériques 78 (et 79) et 115 (et 116) qui ne permettent pas d'obtenir le résultat de « $115 - 78$ » trop facilement, mais demandent dans la plupart des cas au moins de poser le calcul par écrit. Nous voulions ainsi favoriser le recours à la procédure algébrique.

Il est à noter que la frontière entre « grands » et « petits » nombres n'est pas objective, mais varie en fonction de l'aisance avec le système numérique propre à chaque élève.

Type de nombres

La procédure arithmétique serait favorisée en cas de calculs faciles. Cela ne se reproduit qu'avec de petits nombres, mais aussi en cas de soustractions sans retenue, par exemple « $115 - 13 = 102$ ». Devoir résoudre une soustraction avec retenue pourrait décourager la procédure arithmétique en cherchant d'autres procédures utilisant la relation entre les deux écritures, et donc algébrique. Nous avons choisi les valeurs numériques 115 et 78 qui impliquent la soustraction « $115 - 78 = 37$ » qui nécessite deux retenues. Pour poursuivre avec la procédure arithmétique, il faut additionner « $37 + 79 = 116$ » qui comporte à nouveau deux retenues.

Phrase à propos du nombre caché

Afin de mettre en défaut la procédure arithmétique, il est possible de demander explicitement à l'élève de ne pas calculer la valeur du nombre caché derrière la tâche. Nous avons choisi d'insérer une phrase avec cette consigne pour favoriser la procédure algébrique⁸.

8. Comme mieux expliqué dans [9.1.2](#), cela n'a pas eu l'effet souhaité.

7.3.4 123

L'analyse *a priori* complète de cette tâche est disponible à la page [265](#). Les variables prises en considération pour cette tâche sont la taille des nombres et le type de nombres, déjà illustrées dans la section précédente pour *La tache bleue*. Nous avons fait les mêmes choix pour les deux tâches.

Troisième partie

Les entretiens

Chapitre 8

Méthode : recueil de données et analyse

Ce chapitre est consacré à la description de la méthode mise en place pour notre travail de thèse pour le recueil de données et leur analyse. Comme devis de recherche, nous avons choisi une approche qualitative. Plus particulièrement, nous avons mené une étude de cas multiple (Stake, 2005, cité dans Fortin et Gagnon, 2016) qui permet de décrire en profondeur la pensée des sujets concernés (Fortin et Gagnon, 2016). Le recueil de données a été conduit par moyen d'entretiens cliniques (Ginsburg, 1981) avec un échantillon par choix raisonné¹ de vingt-deux élèves. Les entretiens ont été ensuite transcrits et analysés qualitativement selon nos appuis théoriques.

La section 8.1 décrit le contexte et les personnes participantes à la recherche. Dans la section 8.2, nous présentons la construction des entretiens et son appui théorique. La section 8.3 résume les étapes de recueil des données et d'analyse et la section 8.4 présente la grille d'analyse, son utilisation et les outils théoriques utilisés pour sa construction.

8.1 Contexte et personnes participantes

Le recueil de données a été effectué dans des établissements de l'enseignement secondaire I (âge des élèves entre 12 et 15 ans) du canton de Vaud, en Suisse. Pour fournir une vision complète du contexte de la recherche, nous avons résumé dans

1. L'échantillonnage par choix raisonné « consiste à sélectionner certaines personnes en fonction de caractéristiques typiques de la population à l'étude » (Fortin et Gagnon, 2016, p. 271). Il est indiqué pour des études qui nécessitent des données riches et significatives concernant une population particulière. Cela est l'idéal pour notre recherche avec laquelle nous voulons étudier la pensée algébrique d'élèves avec MLD.

le paragraphe 8.1.1 le fonctionnement du système scolaire vaudois et ses particularités, avec un focus sur le degré secondaire I (degré de notre expérimentation).

Comme résumé dans le tableau 8.1, nous avons interviewé vingt-deux élèves provenant de six établissements du secondaire I différents. De plus, nous avons interviewé les enseignantes et enseignants de mathématiques des vingt-deux élèves². Le recueil de données concerne une école spécialisée et cinq écoles ordinaires.

- L'établissement A est une école spécialisée et regroupe des élèves avec différents troubles (*Learning Disabilities*, *Math Disorder*, mais aussi troubles du spectre de l'autisme, etc.).
- L'établissement B est une école ordinaire et nous avons travaillé avec des élèves d'une classe ressource (un type de classe qui fait le lien entre l'école ordinaire et l'école spécialisée). Nous avons travaillé avec un élève avec des *Learning Disabilities* et deux élèves avec de *Severe Difficulties* en mathématiques.
- L'établissement C est une école ordinaire où nous avons travaillé avec un élève avec *Math disorder*.
- L'établissement D est une école ordinaire où nous avons travaillé avec des élèves avec de bons résultats en mathématiques et une élève avec de *Severe Difficulties* en mathématiques.
- L'établissement E est une école ordinaire où nous avons travaillé avec deux élèves avec de très bons résultats en mathématiques.
- L'établissement F est une école ordinaire où nous avons travaillé avec une élève avec *Math Disorder* et une élève avec de *Severe Difficulties* en mathématiques.

Nous avons choisi les écoles et les élèves, dont une description détaillée est donnée dans les sections à partir de la page 111, par choix raisonné, afin de représenter une bonne diversité en termes de catégories de MLD selon la définition de Deruaz et al. (2020, section 2.1.2). En effet, dans notre échantillon, nous avons des élèves avec des *Math Disorder* (élèves 9, 14 et 21), d'autres avec des *Learning Disabilities*

2. Le but de ces entretiens était surtout de mieux comprendre le contexte scolaire des élèves et d'obtenir davantage des informations sur leurs difficultés ou caractéristiques. Ces échanges ont étayé la rédaction des paragraphes du 8.1.2 au 8.1.7 et ont permis de comprendre que les tâches proposées n'étaient pas habituelles pour les élèves. Les questions posées lors de ces entretiens se trouvent à l'annexe F.

Tableau 8.1 – Les élèves du recueil de données. Les élèves 2 et 10 n'ont pas été retenus pour l'analyse des données, car ayant un trouble du spectre de l'autisme. Les élèves 19 et 20 n'ont pas été retenus pour l'analyse des données, car à haut potentiel soupçonné et les tâches proposées n'ont pas permis de montrer au mieux leur pensée algébrique.

Élève	Établissement	Niveau	Âge	Caractéristique	Classification de MLD (Deruaz et al., 2020)
1	Établissement A École spécialisée	9S Maths : 8P	13	Dyslexie Dysorthographe	<i>Learning Disabilities</i>
2	Établissement A École spécialisée	10S Maths : 7P	14	Trouble du spectre de l'autisme	Écarté pour l'analyse
3	Établissement A École spécialisée	10S Maths : 6-7P	14	Trouble de la communication Trouble du repère spatio-temporel Trouble du spectre de l'autisme soupçonné	<i>Learning Disabilities</i>
4	Établissement A École spécialisée	11S Maths : 7-8P	15	Troubles psychiques Hyper activité soupçonnée	<i>Learning Disabilities</i>
5	Établissement A École spécialisée	11S Maths : 7-8P	15	Dysorthographe	<i>Learning Disabilities</i>
6	Établissement A École spécialisée	11S Maths : 6-7P	15	Dyslexie Dyspraxie	<i>Learning Disabilities</i>
7	Établissement A École spécialisée	11S Maths : 6-7P	14	Dyslexie	<i>Learning Disabilities</i>
8	Établissement A École spécialisée	11S Maths : 6-7P	15	Dyslexie	<i>Learning Disabilities</i>
9	Établissement A École spécialisée	11S Maths : 7P	15	Dyslexie Dysorthographe Dyscalculie QI limite	<i>Math Disorder</i>
10	Établissement A École spécialisée	11S Maths : 7P	15	Trouble du spectre de l'autisme Dysphasie Trouble envahissant du développement	Écarté pour l'analyse
11	Établissement B École ordinaire	10S Classe ressource	15	Dysphasie Dyslexie	<i>Learning Disabilities</i>
12	Établissement B École ordinaire	10S Classe ressource	14	Allophonie	<i>Severe Difficulties in Mathematics</i>
13	Établissement B École ordinaire	10S Classe ressource	16	Allophonie	<i>Severe Difficulties in Mathematics</i>
14	Établissement C École ordinaire	10S VG1	14	Dyscalculie Dyspraxie visuospatiale	<i>Math Disorder</i>
15	Établissement D École ordinaire	9S VG2	13	Bons résultats en mathématiques	-
16	Établissement D École ordinaire	9S VG2	12	Bons résultats en mathématiques	-
17	Établissement D École ordinaire	9S VP	12	Bons résultats en mathématiques	-
18	Établissement D École ordinaire	11S VP	15	Dyscalculie soupçonnée	<i>Severe Difficulties in Mathematics</i>
19	Établissement E École ordinaire	9S VP	12	Haut potentiel soupçonné	Écarté pour l'analyse
20	Établissement E École ordinaire	9S VP	12	Haut potentiel soupçonné	Écarté pour l'analyse
21	Établissement F École ordinaire	11S VG1	14	Dyscalculie Dyslexie Hypotonie musculaire soupçonnée	<i>Math Disorder</i>
22	Établissement F École ordinaire	11S VG1	14	Sévères difficultés en mathématiques	<i>Severe Difficulties in Mathematics</i>

(élèves de 1 à 8 et 11) et d'autres encore avec des *Severe Difficulties in Mathematics* (élèves 12, 13, 18, 22). Nous avons inclus aussi cinq élèves sans MLD et avec de bons résultats en mathématiques (élèves 15, 16, 17, 19 et 20). Ce panel très diversifié nous a permis d'étudier la manifestation de la pensée algébrique chez des élèves avec MLD, tout en comparant ces élèves à des élèves avec de bons résultats en mathématiques pour pouvoir mettre en lumière certaines spécificités ou similitudes entre les deux populations.

Au moment des entretiens, les élèves n'avaient jamais rencontré le symbolisme alphanumérique pendant leur scolarisation, sauf l'élève 18.

Dans les prochains paragraphes, nous présentons plus en détail le contexte : le système scolaire du canton de Vaud, ses mesures pour les élèves à besoins spécifiques, les six établissements et les élèves qui ont fait partie de notre recueil de données.

8.1.1 Le système scolaire du canton de Vaud

14-15 ans	11S	Degré secondaire I : Voie générale (VG)	Degré secondaire I : Voie pré-gymnasiale (VP)
13-14 ans	10S		
12-13 ans	9S		
11-12 ans	8P	Degré primaire	
10-11 ans	7P		
9-10 ans	6P		
8-9 ans	5P		
7-8 ans	4P		
6-7 ans	3P		
5-6 ans	2P		
4-5 ans	1P		

Figure 8.1 – Structure de l'école obligatoire du canton de Vaud.

Comme règlementé par la *Loi sur l'enseignement obligatoire* (Le grand conseil du canton de Vaud, 2011) entrée en vigueur le 1^{er} août 2013, dans le canton de Vaud la scolarité obligatoire se déroule sur onze années partagées en deux degrés, le degré primaire et le degré secondaire I (figure 8.1).

Le degré primaire a une durée de huit ans, de l'année 1P à la 8P. Les enfants commencent l'école à l'âge de quatre ans révolus au 31 juillet.

D'une durée de trois ans, le degré secondaire I comprend les années 9S, 10S et 11S, en accueillant les élèves de 12 à 15 ans. Deux voies sont possibles : la voie générale (VG) et la voie pré-gymnasiale (VP). Les élèves sont partagés en ces deux voies sur la base de leurs résultats en fin d'école primaire.

La voie générale est destinée aux élèves qui poursuivront leur parcours dans les écoles de culture générale et de commerce, de maturité professionnelle ou dans la formation professionnelle. Pour les mathématiques, le français et l'allemand, deux niveaux sont prévus. Le niveau 1 (VG1) satisfait les exigences de base, alors que le

niveau 2 (VG2) offre une formation plus avancée. Le niveau d'un élève peut être différent en fonction de la discipline.

La voie pré-gymnasiale est destinée aux élèves qui poursuivront leur parcours au gymnase, qui correspond au degré secondaire II qui offre le plus haut niveau de préparation dans le canton Vaud.

Les élèves des degrés secondaires ont périodiquement la possibilité de changer de voie ou de niveau en fonction de leurs résultats.

Les élèves à besoins spécifiques

Nous résumons dans cette section les différentes offres du canton de Vaud pour les élèves à besoins spécifiques. Nous soulignons que nous n'en donnons ici qu'un aperçu en présentant ce qui est pertinent pour notre travail de thèse³.

Avec la *Loi sur l'enseignement obligatoire* (Le grand conseil du canton de Vaud, 2011), l'*Accord intercantonal sur la collaboration dans le domaine de la pédagogie spécialisée* (Conférence Suisse des Directeurs cantonaux de l'Instruction Publique, 2007) et la *Loi sur la pédagogie spécialisée* (Le grand conseil du canton de Vaud, 2015) constituent le cadre juridique de l'enseignement spécialisé dans le canton de Vaud.

Comme principe général, « les enseignants différencient leurs pratiques pédagogiques pour rendre leur enseignement accessible à tous leurs élèves » (Le grand conseil du canton de Vaud, 2011).

Si l'enseignement dispensé en classe ordinaire se révèle insuffisant pour aboutir à une bonne formation de l'élève, un appui pédagogique peut être mis en œuvre. Il a pour but d'aider les élèves à atteindre les objectifs du plan d'étude en leur apportant une aide spécifique. Il peut être donné de manière individuelle, par groupe ou dans des classes spécifiques.

Lorsque l'appui pédagogique ne suffit pas, des mesures ordinaires ou renforcées d'enseignement spécialisé peuvent être mises en place.

Les mesures ordinaires comprennent :

le conseil et le soutien, l'éducation précoce spécialisée, la logopédie⁴ et la psychomotricité, des mesures de pédagogie spécialisée dans une école ordinaire ou dans une école spécialisée, ainsi que la prise en charge en structures de jours ou à caractère résidentiel dans une institution de pédagogie spécialisée. (Conférence Suisse des Directeurs de l'Instruction Publique, 2007, p. 8)

3. Pour obtenir des informations complètes à propos de ce qui est offert, veuillez consulter les sources officielles qui composent la bibliographie de cette section.

4. Le terme « logopédie » est l'équivalent en Suisse Romande de ce qu'en France s'appelle « orthophonie ».

Les mesures renforcées, octroyées lorsque celles de base s'avèrent insuffisantes, se caractérisent par : une longue durée, une intensité soutenue, un niveau élevé de spécialisation du personnel intervenant ou des conséquences marquantes sur la vie quotidienne, le parcours de vie ou l'environnement social de l'élève.

Les mesures ordinaires et renforcées sont assurées par des enseignantes et enseignants spécialisés, des psychologues, des logopédistes ou des spécialistes de la psychomotricité.

Si l'élève rencontre des difficultés, mais qu'elle ou il peut, grâce aux mesures mises en place, atteindre les objectifs du plan d'étude, le conseil de direction peut établir un contrat d'aménagement.

Dans les cas où l'élève n'est pas en mesure d'atteindre les objectifs du plan d'études, un programme personnalisé peut être mis en place en l'adaptant périodiquement à la progression de l'élève.

Même si, comme principe général, « les solutions intégratives sont préférées aux solutions séparatives » (Conférence Suisse des Directeurs cantonaux de l'Instruction Publique, 2007, p.2), ces dernières ne sont pas rares dans le canton de Vaud. Différentes structures existent : les écoles spécialisées privées reconnues (qui sont donc disjointes des établissements ordinaires), les classes d'enseignement spécialisé au sein d'écoles ordinaires (classes de développement, classes officielles d'enseignement spécialisé, classes ressources; Parisi et Suchaut, 2019). Les classes de développement sont destinées aux élèves qui ne sont pas en mesure de tirer profit de l'enseignement en milieu ordinaire et qui nécessitent un programme individualisé. Les classes officielles d'enseignement spécialisé accueillent de petits groupes d'élèves qui pourraient être scolarisés en milieu ordinaire, mais qui ont d'importantes difficultés d'apprentissage ou d'intégration scolaire. Les classes ressources (ou lieu ressource) accueillent ponctuellement des élèves intégrés dans des classes ordinaires, mais qui nécessitent du soutien. De plus, dans certaines écoles des enseignantes et enseignants spécialisés sont à disposition des élèves en difficulté scolaire.

Les offres en termes d'enseignement spécialisé dans le canton de Vaud sont donc assez variées et les solutions offertes peuvent différer d'une école à l'autre.

Le canton de Vaud souhaite se diriger vers des solutions de plus en plus inclusives et élargir le soutien offert aux élèves à besoins spécifiques. Avec ce propos, le « Concept 360° » (Département de la formation, de la jeunesse et de la culture, 2019) a pour but un système global de soutien aux élèves à besoins spécifiques, indépendamment de leurs causes. Il sera mis en place dans tous les établissements vaudois d'ici à la fin de l'année 2023 et vise plusieurs socles. Le niveau 1 concerne

l'intégralité des élèves, et met l'accent sur une approche collective avec des mesures de différenciation pédagogique pour le groupe classe. Le niveau 2 concerne les élèves qui rencontrent des difficultés généralement non pérennes. Le niveau 3 est destiné aux élèves avec des difficultés durables préalablement évaluées. Le niveau 4 est réservé aux élèves ayant un trouble invalidant qui engendre des limitations potentielles durables dans leur vie.

8.1.2 L'établissement A et ses élèves

L'établissement A est une école spécialisée qui regroupe des élèves avec différents troubles (troubles des apprentissages, mais aussi troubles du spectre de l'autisme, etc.). Il s'agit pour la plupart d'élèves qui ont commencé leur scolarité à l'école ordinaire et, après avoir rencontré des difficultés importantes, ont été redirigés vers l'enseignement spécialisé. Les élèves peuvent suivre cette école dès les premières années de l'école primaire jusqu'à la fin de l'école obligatoire.

Souvent le niveau de mathématiques (mais pas uniquement) des élèves ne correspond pas à la classe à laquelle elles ou ils sont inscrits. Par exemple, comme rapporté dans le tableau 8.1, l'Élève 2 est en 10S, mais son niveau mathématique est celui attendu d'un élève de 7P.

Pendant les heures de mathématiques, les élèves sont réparties selon leur niveau dans la discipline, indépendamment de leur classe d'appartenance.

Le corps enseignant des degrés secondaires de l'établissement A travaille en équipe et il y a une bonne collaboration et une bonne relation entre collègues. La relation entre le corps enseignant et les élèves est également bonne et une grande attention est accordée à l'individu. Les classes secondaires ont quatre enseignantes et enseignants principaux qui enseignent plusieurs disciplines et connaissent très bien les élèves. Ils et elles ont été notre contact principal dans l'école.

Dans ce contexte, nous avons travaillé avec dix élèves des degrés secondaires : un élève de 9S, deux de 10S et sept de 11S (élèves 1-10 du tableau 8.1). La sélection des élèves a été convenue en collaboration avec le corps enseignant qui a indiqué les élèves avec un niveau adéquat pour aborder les tâches proposées. Du moment que les tâches ont été pensées pour le degré secondaire, nous avons retenu les élèves que selon le corps enseignant de l'école avaient les meilleurs résultats en mathématiques. Il s'agit néanmoins d'élèves en grandes difficultés dans la discipline.

Dans les paragraphes qui suivent, nous décrivons la situation de chaque élève plus en détail, leurs troubles diagnostiqués, leur niveau estimé en mathématiques (qui n'est pas relatif à un test standardisé) et les indications que nous avons reçues

du corps enseignant grâce aux entretiens. Une partie des informations ici reportées reflètent donc le point de vue du corps enseignant de l'école.

L'Élève 1

L'Élève 1 a un diagnostic de dyslexie et de dysorthographe. Il a des blocages au niveau psychologique affectif; il ne s'agit pas de trouble, mais une certaine attention est nécessaire lors de l'interaction avec cet élève. Il est inscrit en 9S et a un niveau en mathématiques environ de 8P. C'est un bon niveau pour le contexte de l'établissement A, mais les troubles de dyslexie et de dysorthographe de l'Élève 1 ont des conséquences pour son apprentissage des mathématiques dans la mesure où la présence du langage dans les tâches le ralentit et lui pose des difficultés.

L'Élève 2

L'Élève 2 a un trouble du spectre de l'autisme. Il a été diagnostiqué très tôt et il a été pris en charge par l'enseignement spécialisé dès le début de sa scolarité, en lui permettant une adéquate compensation du trouble. Il est inscrit en 10S et a un niveau en mathématiques de 7P. L'Élève 2 est intéressé par la compréhension des mathématiques. Il peut également réinvestir ses connaissances dans des problèmes. Ces deux aspects sont rares dans le contexte de l'établissement A. En raison d'un trouble du spectre de l'autisme, l'Élève 2 n'est pas compris dans notre définition d'élève avec MLD et n'a donc pas été retenu pour l'analyse des données.

L'Élève 3

L'Élève 3 a un diagnostic de trouble de la communication et du repère spatio-temporel. Un trouble du spectre de l'autisme est soupçonné, mais un bilan à tel propos n'a pas encore été établi. Il est inscrit en 10S et a un niveau en mathématiques de 7P (faible). Il est à l'aise avec des procédures mathématiques algorithmiques, mais le réinvestissement de ses connaissances dans un autre cadre que celui où il a l'habitude de les travailler lui pose problème. En particulier, l'Élève 3 réussit bien dans l'application des règles et moins bien dans leur compréhension. Il a aussi des problèmes liés à la concentration qui peut varier considérablement et soudainement sans raison apparente.

L'Élève 4

L'Élève 4 a un diagnostic de troubles psychiques et un trouble d'hyperactivité est soupçonné (mais pas encore confirmé). Il est inscrit en 11S et a un niveau en mathé-

matiques de 7P-8P. Ses troubles lui causent des problèmes d'angoisse et d'estime de soi. Dans les situations d'apprentissage, il se compare à ses pairs avec l'objectif de démontrer qu'il est le meilleur de la classe. Il nécessite d'être encouragé et rassuré et d'avoir confirmation de ses capacités. L'Élève 4 vit très mal ses erreurs qui sont, à ses yeux, signe d'un manque d'intelligence. Ces troubles psychiques lui ont fait prendre du retard dans les mathématiques au cours des années.

L'Élève 5

L'Élève 5 a un diagnostic de dysorthographe. Il est inscrit en 11S et a un niveau en mathématiques de 7P-8P. Dans le cas de l'Élève 5, ce trouble a des répercussions négatives dans l'apprentissage des mathématiques, car sa compréhension difficile du langage (surtout écrit) le retarde aussi dans cette discipline. Il a des résultats assez bons en calcul et dans le raisonnement logique, mais les domaines qui requièrent plus de vocabulaire (comme grandeur et mesure) sont cause de difficultés. À côté des troubles, il a un sentiment de persécution assez fort qui doit être pris en considération dans le cadre scolaire afin d'éviter des blocages dans l'apprentissage. En particulier, l'Élève 5 doit être rassuré et mis en confiance.

L'Élève 6

L'Élève 6 a un diagnostic de dyslexie et de dyspraxie. Il est inscrit en 11S et a un niveau en mathématiques de 7P. Le trouble de dyslexie est très accentué et a de grandes conséquences en mathématiques, notamment dans l'ordre des chiffres d'un nombre.

L'Élève 7

L'Élève 7 a un diagnostic de dyslexie. Il est inscrit en 11S et a un niveau en mathématiques de 6P-7P. En mathématiques, son trouble se manifeste avec des difficultés dans l'ordre spatio-temporel.

L'Élève 8

L'Élève 8 a un diagnostic de dyslexie. Il est inscrit en 11S et a un niveau en mathématiques de 7P. Il peut avoir besoin de beaucoup de temps pour accomplir une tâche, mais il est assez performant en termes de résultats, concentration et organisation.

L'Élève 9

L'Élève 9 a un diagnostic de dyslexie, dysorthographe et dyscalculie. Son quotient intellectuel n'est pas très écarté de la moyenne⁵. Elle est inscrite en 11S et a un niveau en mathématiques de 7P. Dans le cas de l'Élève 9, les troubles des apprentissages sont exacerbés par ses problèmes de confiance en elle, qui requiert de la rassurer régulièrement pour lui permettre d'avancer dans les apprentissages.

L'Élève 10

L'Élève 10 a un diagnostic de trouble du spectre de l'autisme, de dysphasie et de trouble envahissant du développement. Il est inscrit en 11S et a un niveau en mathématiques de 7P. Il réussit sans problème dans les tâches qui demandent une application concrète de règles déjà connues. Par contre, il rencontre des difficultés si le texte doit être interprété ou s'il faut en déduire des informations. Ces troubles ont un fort impact sur les apprentissages mathématiques de l'Élève 10 et notamment sur son niveau de concentration. En raison d'un trouble du spectre de l'autisme, l'Élève 10 n'est pas compris dans notre définition d'élève avec MLD et n'a donc pas été retenu pour l'analyse des données.

8.1.3 L'établissement B et ses élèves

L'établissement B est une école ordinaire qui offre la possibilité aux élèves en grande difficulté de fréquenter une classe ressource. Il s'agit d'une classe à effectif réduit qui a comme objectif la réintégration de ses élèves en contexte ordinaire. Notre contact a été l'enseignante principale de la classe qui, parmi d'autres branches, enseigne les mathématiques. Dans ce contexte, nous avons travaillé avec trois élèves (élèves 11-13 du tableau 8.1).

L'Élève 11

L'Élève 11 est inscrit en 10S VG et a un diagnostic de trouble de dyslexie et de dysphasie. Ces troubles impactent fortement l'apprentissage mathématique de l'Élève 11 en ce qui concerne la compréhension des mots et des énoncés et l'expression verbale et écrite.

5. Nous n'avons pas la valeur exacte.

L'Élève 12

L'Élève 12 est inscrite en 10S VG. Elle n'a pas de diagnostic, mais elle est allophone, arrivée en Suisse avec un niveau scolaire très faible à cause duquel elle a dû être scolarisée en classe ressource.

L'Élève 13

L'Élève 13 est inscrite en 10S VG. Elle n'a pas de diagnostic, mais elle est allophone, arrivée en Suisse avec un niveau scolaire très faible à cause duquel elle a dû être scolarisée en classe ressource. Elle a d'ailleurs un parcours personnel de vie difficile qui a des conséquences sur ses apprentissages.

8.1.4 L'établissement C et son élève

L'établissement C est une école ordinaire. L'élève retenu pour notre recueil de données a un certificat de dyscalculie (voir Élève 14 dans le tableau 8.1) et nous avons pu discuter plus en profondeur de sa situation avec son enseignante de mathématiques et un enseignant de mathématiques et sciences en stage dans sa classe.

L'Élève 14

L'Élève 14 est inscrit en 10S VG1 et a un diagnostic de trouble de dyscalculie et de dyspraxie visuospatiale. Il a un contrat d'aménagement, valable pour toutes les branches, qui a été établi entre les parents et le doyen. Le contrat reporte les difficultés et les ressources de l'élève et règle les aménagements possibles. Les troubles causent à l'Élève 14 des difficultés d'attention, d'organisation et de planification. Il n'a pas de difficultés particulières en ce qui concerne le raisonnement, mais il a de sévères difficultés en calculs. Il a besoin de beaucoup plus de temps pour accomplir une tâche mathématique.

8.1.5 L'établissement D et ses élèves

L'établissement D est une école ordinaire. Les élèves retenues pour notre recueil de données sont trois élèves avec de bons résultats en mathématiques de 9S et une élève en difficultés en mathématiques de 11S (élèves 15-18 du tableau 8.1). Notre contact dans l'école a été l'enseignant de mathématiques de ces quatre élèves.

L'Élève 15

L'Élève 15 est inscrite en 9S VG2. Elle a toujours eu des bons résultats en mathématiques, mais à la transition entre le degré primaire le secondaire a eu un peu de difficultés. L'enseignant affirme qu'elle a de bons résultats en mathématiques parce qu'elle étudie et s'applique et que ses résultats sont particulièrement bons si les tâches sont standards. L'Élève 15 sous-estime ses compétences mathématiques.

L'Élève 16

L'Élève 16 est inscrite en 9S VG2. Il s'agit d'une élève avec de bons résultats en mathématiques et selon l'enseignant elle réussit parce qu'elle est naturellement douée.

L'Élève 17

L'Élève 17 est inscrite en 9S VP. Elle est une élève avec de bons résultats dans toutes les branches et l'enseignant la décrit comme particulièrement douée.

L'Élève 18

L'Élève 18 est inscrite en 11S VP. Elle a de grandes difficultés en mathématiques qui sont présentes au moins depuis le début de l'école secondaire. Malgré son niveau en mathématiques, elle est en VP, car elle arrive à compenser avec les autres branches, où elle a de bonnes notes. Cet écart entre ses résultats en mathématiques et dans les autres disciplines fait suspecter l'enseignant une dyscalculie jamais diagnostiquée. La faible confiance en ses capacités mathématiques rend encore plus difficile son rapport aux mathématiques. L'Élève 18 était la seule dans notre échantillon à avoir déjà rencontré le symbolisme alphanumérique. Cela est dû au type de voie : elle est la seule à être en 11VP.

8.1.6 L'établissement E et ses élèves

L'établissement E est une école ordinaire où nous avons travaillé avec deux élèves de 9S VP avec des résultats particulièrement bons en mathématiques (élèves 19 et 20 du tableau 8.1). Notre contact a été son enseignante de mathématiques. La classe de l'Élève 19 regroupe un nombre important d'élèves qui réussissent particulièrement bien en mathématiques.

L'Élève 19

L'Élève 19 est inscrit en 9S VP. Il a de très bons résultats en mathématiques, il assimile vite les concepts et il arrive à faire des liens très facilement. C'est un élève assez timide qui n'aime pas intervenir en classe. L'enseignante pense qu'il est à « haut potentiel ». L'Élève 19 n'a pas été retenu pour l'analyse des données, car à cause de son haut niveau en mathématiques, les tâches proposées n'ont pas permis de montrer et mettre en valeur les mécanismes de sa pensée algébrique.

L'Élève 20

L'Élève 20 est inscrit en 9S VP. Il a de très bons résultats en mathématiques, il assimile vite les concepts et il arrive à faire des liens entre les différents sujets très facilement. C'est un élève actif qui aime bien participer en classe et répondre aux questions. Il a des difficultés en français. L'enseignante pense qu'il est à « haut potentiel ». L'Élève 20 n'a pas été retenu pour l'analyse des données, car à cause de son haut niveau en mathématiques, les tâches proposées n'ont pas permis de montrer et mettre en valeur les mécanismes de sa pensée algébrique. De surcroît, à cause d'un problème technique la moitié des vidéos n'ont pas enregistré le son.

8.1.7 L'établissement F et ses élèves

L'établissement F est une école ordinaire. Nous avons travaillé avec une première élève de 11S VG1 avec un diagnostic de dyscalculie, dyslexie et avec une hypotonie musculaire suspectée (Élève 21 du tableau 8.1) et une deuxième élève ayant de sévères difficultés en mathématiques, mais sans diagnostic (Élève 22 du tableau 8.1). Notre contact a été l'enseignante de mathématiques.

L'Élève 21

L'Élève 21 est inscrite en 11S VG1. Elle a un diagnostic de dyscalculie et de dyslexie. Une hypotonie musculaire est soupçonnée, ce qui la fatigue très rapidement. À cause de sa fatigue, l'Élève 21 est exemptée du cours d'allemand depuis l'école primaire et du cours d'anglais depuis la 10S. Elle a de grandes difficultés en mathématiques et ses résultats sont instables selon le sujet. En géométrie elle a en général moins de difficultés. L'Élève 21 réussit particulièrement bien en dessin. Elle a des difficultés dans la compréhension des marches à suivre à cause de son diagnostic de dyslexie et parfois elle ne comprend pas les énoncés.

L'Élève 22

L'Élève 22 est inscrite en 11S VG1. Elle a d'importantes difficultés en mathématiques depuis le début de l'école. Ces difficultés ont contribué à créer auprès de cette élève des forts sentiments négatifs envers la discipline. L'Élève 22 les voit comme la raison pour laquelle elle n'a pas pu suivre la VP. La mauvaise relation avec les mathématiques participe au fait que l'élève ne travaille pas suffisamment.

8.2 La préparation des entretiens

Nous avons organisé avec chaque élève quatre séances d'entretien individuel. Chaque entretien a été préparé sur la base du modèle de l'entretien clinique (section 8.2.1) et de l'analyse *a priori* de la tâche (section 7.2).

Les entretiens étaient de longueur variable en fonction de la tâche et de la réaction de l'élève (réponses données, nécessité de relances ou pas, état de fatigue, etc.). En général, la longueur d'une séance a été d'environ 30 minutes.

Comme mieux détaillé dans la section 8.3, les entretiens ont été filmés et transcrits.

Les tâches, dont le choix est présenté au chapitre 7 et la version intégrale est disponible en annexe à la page 245, ont été proposées dans l'ordre suivant⁶ :

- Séance 1 : *La suite de carrés*
- Séance 2 : *Pierre, Manon, Nombres pairs/impairs*
- Séance 3 : *La tache bleue, 123, Nuage et maison*
- Séance 4 : $18+4=$

Les tâches ont été regroupées par séances de manière à nécessiter approximativement la même quantité de temps.

8.2.1 L'entretien clinique

Déjà utilisé par Piaget et largement répandu dans la recherche en didactique des mathématiques (par exemple dans Maracci, 2008), l'entretien clinique permet de découvrir les processus de raisonnement des élèves.

Il s'agit d'un entretien semi-directif et à réponse ouverte entre un chercheur ou une chercheuse et un ou une élève, dont le but est celui de favoriser la manifestation et l'observation de la pensée mathématique (Ginsburg, 1981; Hunting, 1997).

6. Nous avons parfois dû adapter l'ordre des tâches en fonction de contraintes pratiques comme la vitesse de réponse des élèves.

L'entretien clinique est caractérisé par une grande flexibilité dans les questions posées (Ginsburg, 1981). Les questions choisies dépendent de ce que l'élève dit et de ses réponses. Elles sont vouées à tester les hypothèses à propos de la procédure utilisée par l'élève et à améliorer la compréhension de la stratégie mise en place pour résoudre la tâche. Bien que caractérisé par un important niveau de flexibilité, l'entretien clinique peut être préparé en amont. Les tâches à proposer, leur présentation, les premières questions posées et le matériel à utiliser peuvent être établis à l'avance (Hunting, 1997; Swanson et al., 1981). Les relances aux principales réponses des élèves peuvent être également préparées, il en est de même qu'une première classification des réponses attendues (Hunting, 1997; Swanson et al., 1981). Tous ces points font l'objet d'un protocole d'entretien suivi par les chercheurs et chercheuses et qui a la caractéristique de rester assez ouvert (Hunting, 1997).

La flexibilité de l'entretien clinique passe aussi par le temps à disposition qui n'est pas strictement préétabli, mais varie en fonction de la situation. Ne pas avoir de limite temporelle permet d'explorer toutes les pistes qui se manifestent et de persister dans les questions jusqu'à l'épuisement du sujet (Swanson et al., 1981). Il est néanmoins souhaitable de prévoir une durée approximative et de rester à l'écoute de possibles signaux qui suggèrent que les élèves ont atteint les limites de leur concentration (agitation, distraction, etc.; Hunting, 1997).

Toutes ces caractéristiques facilitent l'observation de la pensée mathématique. De plus, cette méthode est particulièrement pertinente pour notre recherche qui se focalise sur des élèves à besoins spécifiques.

Premièrement, elle permet d'avoir accès à une explication des processus sous-jacents à la solution des élèves et de l'induire si elle ne se manifeste pas de manière naturelle (contrairement à ce que l'on pourrait faire dans une séance de classe; Ginsburg, 1981). La verbalisation de la procédure utilisée peut être difficile pour certains élèves (surtout pour le public cible de cette recherche) et avoir la possibilité de demander des clarifications, de réexpliquer ou sonder les ambiguïtés est un point de force de la méthode utilisée.

Deuxièmement, la population étudiée est composée par d'élèves qui ont de grandes difficultés en mathématiques (ou à l'école en général) et qui ont souvent fait l'expérience d'émotions négatives face à des situations d'apprentissage. Il s'agit d'élèves qui ne manifestent pas fréquemment leurs propres compétences mathématiques dans des situations ordinaires de classe. Cette méthode d'entretien permet d'investiguer ce que les élèves savent faire – à la place de se concentrer sur ce qu'ils ne savent pas faire – en suivant leur raisonnement avec des questions adaptées (Swanson et al., 1981).

De plus, la consigne écrite est accompagnée par celle donnée à l'oral, démarche qui permet de maximiser la possibilité de sa bonne compréhension. Toute reformulation est possible et le chercheur ou la chercheuse reste vigilant à ce que le vocabulaire et les différents aspects de la tâche soient clairs et bien compris par l'élève.

Pour conclure, il est possible de maximiser la réussite de l'entretien en travaillant sur la relation de confiance avec les élèves, en les mettant à l'aise de s'exprimer mathématiquement et en construisant un climat bienveillant (Hunting, 1997). Cela implique la possibilité de les encourager, de leur poser des questions qu'on suppose être à leur niveau et d'arrêter d'insister si on voit surgir un début de frustration ou de gêne chez les élèves (Hunting, 1997).

Toutes ces caractéristiques nous ont amenée à retenir l'entretien clinique comme méthode de recueil de données pour l'étude de la pensée algébrique chez des élèves à besoins spécifiques ou en grandes difficultés en mathématiques.

8.2.2 Les protocoles d'entretien

Un protocole d'entretien de chaque tâche a été créé sur la base des consignes de la littérature (Ginsburg, 1981; Hunting, 1997; Swanson et al., 1981) à propos de l'entretien clinique et de son analyse *a priori* (voir 7.2). En effet, l'analyse *a priori* a amené à l'identification des difficultés et des relances relatives qui nous ont servi de base pour la construction des protocoles. Anticiper ces éléments nous a permis de réagir de manière plus homogène et réfléchi aux blocages des élèves pendant les entretiens et de limiter les différences entre les différentes séances à cause de nos interventions.

Nous nous sommes inspirée d'autres protocoles d'entretiens ou documents dans le champ de la didactique des mathématiques (Giroux et Fortier-Moreau, 2017; Weber et al., 2015).

Les protocoles complets sont disponibles en annexes à partir de la page 277.

Les protocoles ont été créés avant le début des entretiens et ont continué à être modifiés tout au long du recueil des données. Pendant les entretiens, nous prenions note de nouvelles relances dont nous avons eu besoin et nous les ajoutions au protocole d'entretien. Les protocoles en annexe de cette thèse sont donc les protocoles définitifs obtenus après ce travail de perfectionnement continu.

La première séance a toujours démarré avec une présentation faite par la chercheuse avec l'objectif de mettre à l'aise l'élève. Une attention particulière était dédiée à l'explication du fait que l'élève n'aurait pas reçu une évaluation sur la base des

c) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 100 carrés ?

Matériel : feuille et crayon.

À dire : « Maintenant, combien faut-il de pailles pour former une suite de 100 carrés ? »

Si l'élève **n'explique pas** ce qu'il fait : « Pourquoi as-tu écrit (dit) cela ? »

Si l'élève **reste en silence sans rien faire** : « À quoi penses-tu ? »

Si l'élève **bloque devant les calculs** : « J'ai une calculatrice avec moi. Si tu me donnes le calcul à faire, je peux le faire pour toi. »

Si l'élève n'abandonne pas la **vision arithmétique** : « Et pour 5000 ? »

Si l'élève n'est pas convaincu de la formule ou la **formule est fausse** : « Comment pourrais-tu contrôler si la formule est correcte ? » ou « Pourquoi as-tu utilisé ce calcul ? »

Si l'élève essaie de **dessiner** : « Cela devient long. Pourrait-on trouver une manière de trouver le résultat sans dessiner ? » ou « Et pour 5000 carrés ? »

L'élève a une **vision proportionnelle** de la correspondance carrés-pailles : « Comment pourrais-tu vérifier si ta stratégie est correcte ? » ou « Pourrais-tu vérifier si ta stratégie fonctionne pour la quatrième étape (ou autre) ? »

Si l'élève fait **confusion entre pailles et carrés** : « C'est quoi cela ? »

Si l'élève aboutit à une **généralisation fausse** : « Comment pourrais-tu vérifier si ta stratégie est correcte ? » ou « Pourrais-tu vérifier si ta stratégie fonctionne pour la quatrième étape (ou autre) ? »

En fonction de la réaction de l'élève : « **Tu es fatigué-e ? Est-ce que ça va si on continue encore un peu ?** »

Figure 8.2 – Protocole d'entretien du point c) de la tâche *La suite de carrés*. La version intégrale de la tâche est disponible aux pages [246-250](#).

entretiens, et que ce qui était intéressant pour la chercheuse était la procédure plutôt que le résultat. Le matériel dédié au recueil des données (caméra, microphone, ordinateur, etc.) a été montré à l'élève et le cadre de l'entretien leur a été présenté. Nous avons demandé aux élèves de penser à voix haute (Falardeau et al., 2014), afin de favoriser l'explicitation du raisonnement mathématique. À la page [278](#), nous rapportons le texte type avec lequel la chercheuse se présentait et introduisait les rencontres aux élèves.

En figure [8.2](#), à titre d'exemple nous rapportons le protocole d'entretien du point c) de la tâche *La suite de carrés*, dont la version intégrale est disponible aux pages [279-284](#). Le protocole indique dans les premières lignes le texte donné aux élèves.

En bleu il est précisé le matériel à utiliser ou à mettre à disposition et ce que la chercheuse doit dire pour présenter la tâche.

Le texte en rouge signale les possibles points de difficultés pour les élèves et les relances retenues pour débloquer la situation. Les difficultés mathématiques relatives aux tâches retenues pour l'expérimentation ont été identifiées grâce à la littérature en didactique des mathématiques, comme mieux indiqué dans les analyses *a priori* des tâches (voir l'annexe B). Pour la plupart, il s'agit de difficultés mathématiques classiques pour les tâches en objet. Une relance seulement a été conçue pour faire face à une difficulté mathématique spécifique aux élèves avec MLD : la troisième dans la figure 8.2 concernant la possibilité d'utiliser une calculatrice. En effet, la récupération directe de faits arithmétiques en mémoire pose problème aux élèves avec MLD (Geary, 2011) et nous avons ainsi inséré une relance à ce propos. Il est à remarquer qu'il s'agit de la seule relance mathématique qui touche une caractéristique spécifique aux élèves avec MLD. Cela vient du fait que les élèves avec ou sans MLD utilisent les mêmes procédures de résolution et ce qui les différencie est la rapidité d'acquisition de celles-ci, les élèves avec MLD présentant un retard (Geary, 2011). En général, nous avons relancé les élèves en cas de difficulté ou pour favoriser l'émergence de la pensée algébrique.

Parmi les relances mathématiques, certaines sont transversales et on les retrouve presque dans tous les protocoles : les trois premières relances dans la figure 8.2 sont présentes presque toujours, car destinées à débloquer une situation qui n'est pas spécifique à cette tâche en particulier. D'autres relances mathématiques sont pensées pour empêcher ou induire une certaine procédure : dans le cas en figure 8.2, la sixième relance veut éviter que les élèves utilisent la procédure par représentation graphique pour trouver la solution pour les 100 carrés. Nous avons inséré dans le protocole un type de relance non mathématique, la dernière dans la figure 8.2 : « Tu es fatigué-e? Est-ce que ça va si on continue encore un peu? ». Ce type de relance est présent pour toutes les séances et a été pensé pour répondre à certaines des difficultés non mathématiques que les élèves avec MLD peuvent rencontrer (par exemple éprouver une fatigue majeure par rapport à leurs congénères; Fondation Centre suisse de pédagogie spécialisée, 2015, 2020). Une autre relance est présente pour tous les protocoles, la première dans la figure 8.2 : « Pourquoi as-tu écrit (dit) cela? » Cette relance est liée aux *language constructs* de Malara et collègues (décrits à la section 4.2) qui préconisent de « *fostering socio-constructive classroom practices enhancing the role of natural language* » (Malara et Navarra, 2018, p. 63), comme l'argumentation.

En parallèle aux protocoles d'entretien, nous avons maintenu une posture bien-

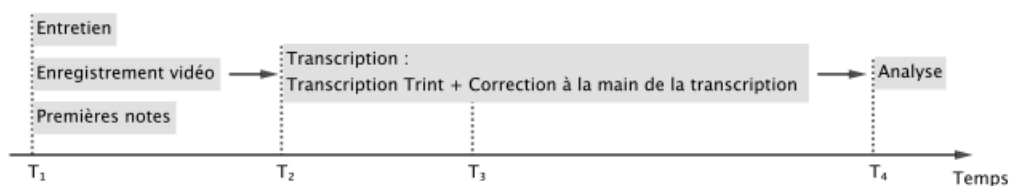


Figure 8.3 – Les étapes du recueil des données et de l'analyse.

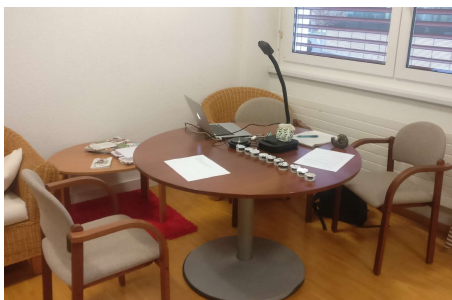


Figure 8.4 – Configuration de la table et de la caméra pendant le recueil de données.

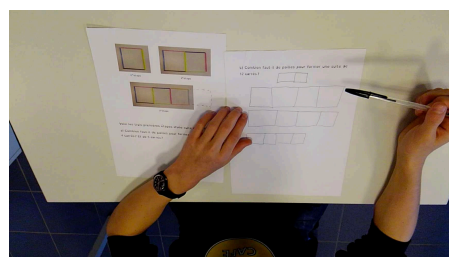


Figure 8.5 – Image extraite d'une des vidéos.

veillante, toujours dans le respect des réactions et des émotions des élèves. En particulier, nous nous arrêtons dans l'entretien si l'élève manifestait fatigue ou frustration à cause de son échec. Les tâches sont composées de plusieurs questions, qui ont été posées ou pas en fonction de la réaction et du niveau de l'élève. Nous n'avons pas bloqué les élèves dans leurs raisonnements, au contraire, nous avons soutenu leur pensée. Un des objectifs des interventions de la chercheuse était de favoriser l'émergence de la pensée algébrique chez les élèves, aussi à travers l'utilisation de relances adaptées. Les retours donnés aux élèves ont été encourageants indépendamment de l'exactitude des réponses données.

8.3 Étapes de recueil des données et de transcription

Comme schématisé en figure 8.3, le recueil des données et l'analyse se composent de plusieurs étapes.

Tout d'abord, chaque entretien a été filmé. Nous avons utilisé une caméra de table qui permettait de filmer la production de l'élève et ses mains en montrant le visage. En figure 8.4, nous avons reporté la configuration classique de la table, du matériel didactique, de la caméra et de l'ordinateur pendant le recueil des données. La figure 8.5 est une image extraite d'une des vidéos du recueil de données : il est possible de voir les mains et la production de l'élève, mais pas son visage.

Les entretiens ont été dirigés par les protocoles décrits dans la section 8.2.2. En

l'occurrence, des questions supplémentaires ont été posées en fonction de la réaction et des réponses des élèves avec les principaux objectifs de mieux comprendre leurs résolutions ou de les encourager à mieux les expliciter.

Pendant l'entretien avec l'élève, nous avons pris note des premières impressions et les premiers commentaires. Ces notes se sont révélées très riches et importantes pour l'analyse.

Par la suite, l'audio de l'entretien a été transcrit. Pour un premier brouillon de transcription, nous nous sommes appuyée sur le site Trint⁷ qui permet de passer de l'audio à l'écrit de manière automatique. Cette première transcription a été relue et corrigée à la main⁸. Les transcriptions complètes se trouvent à l'annexe D à la page 289. Pour la transcription, nous avons choisi d'aller à la ligne à chaque tour de parole (changement de locuteur). Ce choix est très important, car il détermine l'unité élémentaire d'analyse, définie comme il suit : « la plus petite unité d'analyse sur laquelle un travail de recherche est basé afin d'organiser les données » (Badreddine et Woods, 2014, p. 98). Le tour de parole se situe à l'échelle microscopique, car il est de l'ordre de quelques secondes⁹.

Pour la transcription¹⁰, nous avons adopté les règles suivantes :

- nous indiquons le numéro du tour de parole, ensuite le nom de la personne qui parle, puis nous transcrivons ses mots ;
- nous insérons une nouvelle ligne pour chaque changement de locuteur ;
- si l'audio est incompréhensible, nous marquons « *[inaudible]* » ;
- les précisions nécessaires pour la compréhension de la transcription sont indiquées en italique entre crochets, [*par exemple comme cela*] ;
- nous indiquons avec « *[sic]* » les erreurs présentes dans la citation ;
- nous indiquons la durée de chaque enregistrement en début de transcription¹¹ ;

7. <https://trint.com>.

8. Pour une partie des entretiens, nous avons pu bénéficier du travail d'une collaboratrice scientifique.

9. Les auteurs (Badreddine et Woods, 2014) utilisent les concepts de Tiberghien et al. (2007) qui schématisent les possibles unités d'analyse comme il suit : échelles microscopique (ordre de quelques secondes, un mot, un geste, un déplacement, un tour de parole, une action, une interaction, etc.), mésoscopique (ordre de quelques minutes, un thème, une phase didactique, l'organisation de la classe, une activité, etc.) et macroscopique (ordre de quelques jours ou semaines, une séquence d'enseignement par exemple).

10. Nous avons suivi les normes APA7 (<https://apastyle.apa.org>).

11. Le minutage n'est pas rapporté, car il n'a pas été utilisé pour les analyses.

- pour les citations des transcriptions dans le texte, nous indiquons avec « ... » l'omission d'un passage à l'intérieur d'une citation, en veillant toutefois à ne pas modifier le sens de la citation ¹².

Enfin, la transcription a été insérée dans un fichier Excel pour être analysée en suivant les grilles d'analyse décrites dans la section 8.4.3.

8.4 L'analyse des données : les analyses *a posteriori*

Dans cette section, nous décrivons les données recueillies et la méthode d'analyse. Celle-ci a été orientée par les analyses *a priori* (section 7.2). Ce processus a permis de produire une analyse *a posteriori* des faits effectivement observés pendant les entretiens. Tout décalage et concordance entre l'analyse *a priori* et celle *a posteriori* a été interprété au moyen des grilles d'analyse décrites dans la section 8.4.3. Les grilles ainsi conçues nous permettent d'identifier l'apparition de la pensée algébrique chez les élèves et de la décrire qualitativement.

8.4.1 Choix des tâches à analyser

Parmi les tâches créées pour les entretiens (chapitre 7 et annexe A), pour ce travail de thèse nous avons choisi d'en sélectionner un sous-ensemble à analyser en fonction de notre question de recherche Q2, que nous rappelons ici :

- Q2 Comment pouvons-nous décrire la pensée algébrique d'élèves avec MLD en termes de *language constructs*, types de généralisation et types de preuve ?
- Q2.1 Quels *language constructs* identifient la pensée algébrique d'élèves avec MLD ?
- Q2.2 Quels types de généralisation sont utilisés par des élèves avec MLD dans l'étude d'un *pattern* géométrique ?
- Q2.3 Comment des élèves avec MLD mobilisent des exemples et s'engagent dans une preuve dans une tâche d'*early algebra* nécessitant une argumentation ?

Pour répondre à la question Q2.1, nous avons utilisé *La tache bleue* et 123 (textes des tâches aux pages 254 et 255), car dans ces deux tâches le rôle de l'égal est central et elles permettent d'observer un panel de diverses approches, certaines plutôt liées au résultat et d'autres au processus (au sens de Malara et Navarra, 2018).

12. Il ne faut pas confondre « ... » (avec les espaces) qui indique l'omission d'une partie de l'entretien et les points de suspension « ... » (sans espaces) utilisés comme ponctuation ordinaire.

Pour répondre à la question Q2.2, nous avons utilisé la tâche *La suite de carrés* (texte de la tâche aux pages 246 et suivantes), qui travaille la généralisation d'un *pattern* géométrique.

Pour répondre à la question Q2.3, nous avons utilisé *Nombres pairs/impairs* (texte de la tâche à la page 253) qui permet de mettre en place différents types de preuve pour justifier l'affirmation proposée. Il s'agit d'une tâche qui offre la possibilité de s'appuyer sur les exemples pour avancer dans la compréhension du problème et dans le raisonnement.

8.4.2 Description des données

Nous avons interviewé vingt-deux élèves et leur avons demandé de résoudre des tâches mathématiques, comme précédemment décrit dans ce chapitre. La langue des entretiens était le français. En général, la longueur d'une séance a été d'environ 30 minutes, mais cela a pu varier d'un élève à l'autre en fonction de diverses conditions de contexte : fatigue ou moral de l'élève, vitesse de résolution, etc. Nous avons eu quatre rendez-vous par élève. Au total, nous avons donc recueilli $22 \cdot 4 = 88$ enregistrements d'environ une demi-heure.

Les entretiens ont été transcrits comme décrit dans 8.3 et le texte obtenu constitue le vrai matériel analysé.

Quatre élèves parmi les vingt-deux ont été exclus de l'analyse, car : deux élèves étaient atteints du trouble du spectre de l'autisme et n'étaient donc pas compris dans notre définition d'élève avec MLD (Élève 2 et Élève 10), deux élèves avaient un très haut niveau en mathématiques et les tâches proposées n'ont pas permis de montrer et mettre en valeur les mécanismes de leur pensée algébrique (Élève 19 et Élève 20)¹³.

Après la sélection de tâches à analyser décrite dans 8.4.1, notre panel de données analysées est composé de la transcription d'une partie de trois entretiens de dix-huit élèves ($18 \cdot 3 = 54$ transcriptions analysées au total). Les transcriptions retenues pour l'analyse se trouvent à l'annexe D.

8.4.3 Les grilles d'analyse

Nous avons étudié les tâches retenues grâce à des grilles d'analyse. En fonction de la tâche et la sous-question de recherche qui lui est liée, nous avons eu recours à différents outils théoriques issus de trois cadres théoriques : les *language constructs*

13. De surcroît, pour l'Élève 20, à cause d'un problème technique la moitié des vidéos n'ont pas enregistré le son.

de Malara et collègues (Cusi et al., 2011; Malara et Navarra, 2018), les types de généralisation de Radford (2001, 2008, 2010a, 2010b), les types de preuves de Balacheff (1987, 2019b). Ces cadres théoriques sont décrits respectivement dans les sections 4.2, 4.3 et 4.4.

À partir des différents apports théoriques des cadres décrits et des réflexions menées pour la réalisation des analyses *a priori* (section 7.2), nous avons créé les grilles d'analyse pour les transcriptions (figures 8.6, 8.7 et 8.8).

Dans les trois grilles, la colonne C nous permet de résumer la solution proposée ou ce que l'élève et la chercheuse font. Cette colonne est réservée au « résumé » de l'entretien. Les colonnes D-E sont destinées à noter si cela est correct ou pas et pourquoi dans les cas qui nécessitent une interprétation pour être compris. Par exemple, dans la figure 8.7, nous avons noté dans la cellule D35 que le raisonnement est correct, mais dans E35 que le calcul relatif est faux. Dans les colonnes F et suivantes, nous classons la solution de l'élève selon les procédures identifiées dans l'analyse *a priori* et les cadres théoriques d'analyse.

Pour *La tâche bleue* et 123 (textes complets aux pages 254 et 255), la grille utilise les outils théoriques de Malara et collègues (grille dans la figure 8.6). Aux colonnes F-G nous spécifions le type de procédure selon celles identifiées lors de l'analyse *a priori*. Les colonnes H-O permettent l'analyse selon les différentes entrées des *langage constructs* de Malara et collègues présentés dans la section 4.2. Lors de l'analyse, nous nous sommes rendu compte que pour nos données les colonnes M-O ne sont pas fréquemment utilisées. Ces entrées sont donc moins présentes dans la partie analyse des résultats.

Pour la tâche *La suite de carrés* (texte complet aux pages 246 et suivantes), nous avons construit une grille qui s'appuie sur les types de généralisation de Radford (grille en figure 8.7) présentés dans la section 4.3. Les colonnes F-N se réfèrent aux possibles procédures identifiées lors de l'analyse *a priori*. Les entrées sont classées selon la généralisation : pas de généralisation, généralisation ou pas, généralisation non algébrique et généralisation algébrique.

Pour la tâche *Nombres pairs/impairs* (texte complet à la page 253), nous avons construit une grille qui s'appuie sur la typologie de preuves de Balacheff (grille dans la figure 8.8) présentée dans la section 4.4. Les colonnes F-K se réfèrent aux possibles procédures selon les types de preuves de Balacheff identifiées lors de l'analyse *a priori*. Les colonnes L-Q permettent d'explorer plus en profondeur le rôle des exemples. Elles ont été créées lors de l'analyse avec une démarche récursive sur les données expérimentales (théorisation enracinée; Fortin et Gagnon, 2016).

Ces trois grilles permettent de démontrer la présence de la pensée algébrique

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
			Solution élève	Exactitude		Procédure tâche et 123		Du résultat au processus		Plusieurs représentations des nombres et vision relationnelle de =			Rôle du langage naturel		
				Oui	Non	Calcul de la tâche (arith)	Raisonnement sur la relation entre les 2 additions (alg)	Représenter Vs résoudre	Processus Vs produit	Transparent Vs opaque	Rôle de l'égal	Représentations canoniques-non canoniques	Bégalement algébrique	Argumentation (generalisation)	Syntaxe and sémantique
1															
2															
3															
13	Élève 21	Du coup on ne doit pas réfléchir à qu'est ce que c'est, ça (en indiquant la première tâche) ? Puis directement trouver ça (en indiquant la deuxième tâche) ?	Elle sait qu'on ne doit pas trouver la tâche mais elle n'a pas fait le lien entre les tâches des deux égalités												
14	Chercheuse	Tout cela. Tout ensemble, d'accord ?													
15	Élève 21	Fin, moi je sais comment faire pour trouver 115, mais là (en indiquant "tache-79") je ne sais pas ce qu'on doit chercher pour arriver à un résultat qu'on connaît pas.													
16	Chercheuse	D'accord. Alors, on sait que derrière la tâche, il y a le même nombre.													
17	Élève 21	Ah, oui.													
18	Chercheuse	D'accord ?													
19	Élève 21	Oui, d'accord. Du coup, il faut juste trouver ce nombre (en indiquant la première tâche) pour avoir ce nombre-là (en indiquant la deuxième tâche), pour avoir la réponse (en indiquant à droite de "tache-79").	Explication de la procédure arithmétique	X		X									

Figure 8.6 – Les entrées de la grille d'analyse de *La tâche bleue* et 123 et l'analyse d'un extrait de l'entretien avec l'Élève 21.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
Solution élève		Oui	Non	Empirisme naif	Expérience cruciale	Exemple générique	Expérience mentale	Preuve intellectuelle algébrique	Preuve intellectuelle arithmétique	S'approprier les données	S'approprier la tâche	Explorer la tâche	Opinion	Conjecturer	Démontrer	Contreexemple
1																
2																
3																
4																
5																
41	Élève 22															
42	Chercheuse P de pair [en écrivant "1+P"]															
43	Élève 22															
44	Chercheuse C'est-à-dire?															
45	Élève 22															

Figure 8.8 – Les entrées de la grille d'analyse de *Nombres pairs/impairs* et l'analyse d'un extrait de l'entretien avec l'Élève 22.

chez des élèves avec ou sans MLD et de la caractériser (en termes de compétences et difficultés). Les différentes cellules peuvent être complétées simplement avec une croix, pour signaler la présence d'un certain phénomène : par exemple, dans la grille 8.6, la cellule F19 signale que l'élève a eu recours à une procédure arithmétique. Par contre, dans la grille 8.7, la cellule H27-29, non seulement indique que l'élève utilise le calcul et comptage, mais contient aussi un commentaire à propos de la procédure.

Il est à noter que les colonnes ne sont pas toujours pertinentes et que cela dépend de la ligne analysée. Par l'exemple en figure 8.6, l'axe « du résultat au processus » n'a pas été utilisé pour les lignes ici rapportées.

Les grilles présentées ci-dessus ont été expressément conçues pour les tâches de cette thèse, mais elles peuvent être utilisées pour d'autres tâches similaires, dans l'état ou après des modifications mineures. Le principal point d'attention concernerait la pertinence des procédures pour la nouvelle tâche.

Chapitre 9

Les résultats

Comme décrit et justifié dans la section 8.4, les résultats ont été produits au moyen de la confrontation entre l'analyse *a priori* et celle *a posteriori*.

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord les résultats découlant de l'analyse des tâches *La tache bleue et 123*, *La suite de carrés*, et *Nombres pairs/impairs*¹. Les tâches ont été analysées à l'aide des outils théoriques décrits dans les sections 4.2, 4.3 et 4.4, et les grilles d'analyse présentées dans 8.4.3 se basant sur différents cadres théoriques en fonction de la tâche analysée. Pour chaque tâche, l'analyse est présentée selon la structure suivante :

1. Procédures identifiées lors de l'analyse *a priori* : nous illustrons les procédures identifiées lors de l'analyse *a priori* (disponible en annexe B) grâce aux productions des élèves recueillies pendant nos entretiens.
2. Procédures identifiées lors de l'analyse *a posteriori* : nous présentons la répartition des différentes procédures de notre recueil de données et nous les commentons.
3. Points remarquables de l'analyse *a posteriori* : notre focale porte sur certains aspects des analyses *a posteriori*.
4. La pensée des élèves avec MLD et celle des élèves sans MLD : nous exposons les différences et les points de contact entre les deux catégories d'élèves ayant participé à notre prise de données.

À partir des analyses des tâches, nous allons ensuite pouvoir répondre à la question de recherche Q2, à propos de la pensée algébrique d'élèves avec MLD, au chapitre 10.

1. Pour ce chapitre, contrairement à 7, l'ordre de présentation des tâches correspond à celui des questions de recherche.

9.1 Analyse de la tâche *La tache bleue* et 123

Les deux tâches *La tache bleue* et 123 ont été analysées avec les *language constructs* de Malara et Navarra, présentés à la section 4.2, selon la grille décrite dans 8.4.3.

9.1.1 Procédures identifiées lors de l'analyse *a priori*

Dans la section qui suit, nous présentons les deux principales procédures de résolution de *La tache bleue* et 123² (déjà identifiées dans l'analyse *a priori*, page 264 et 265) au moyen des productions des élèves recueillies pendant nos entretiens.

Procédures arithmétique et algébrique de *La tache bleue*

Comme schématisé dans l'analyse *a priori* à la page 264, la tâche *La tache bleue*³ a deux procédures principales. La procédure arithmétique consiste à établir la valeur du nombre caché par la tache bleue et à l'utiliser pour trouver la réponse à la question. Par exemple, l'Élève 5 résout cette tâche comme il suit.

8 - Élève 5 : Combien font la tâche plus... Ah j'ai peut-être trouvé. Faut que je fasse ça [en pointant « 115 »], moins ça [en pointant « 78 ». L'élève pose en colonne « $115 - 78 = 37$ »]. 37.

9 - Chercheuse : Ok, donc 37 qu'est ce que c'est?

10 - Élève 5 : C'est le nombre qui est là [en pointant la première tache] pour faire ça [en pointant « 115 »] et qui peut être aussi là [en pointant la deuxième tache].

11 - Chercheuse : D'accord.

12 - Élève 5 : Donc si j'avais... comma ça [il calcule en colonne « $37 + 79 = 116$ »], ça fait 116.

Il s'agit d'une procédure arithmétique dans la mesure où l'inconnue est calculée avec l'opération inverse ($115 - 78 = 37$) et utilisée pour faire un autre calcul ($37 + 79 = 116$) afin d'obtenir la bonne réponse. Tous les nombres sont explicités et les élèves n'opèrent pas sur les inconnues.

La tâche peut aussi être résolue avec une procédure algébrique qui repose sur la relation entre la première écriture et la deuxième. Par exemple, l'Élève 9 utilise la procédure algébrique : « Ben je dirais 116, vu que c'est plus 1. » L'Élève 9 se base sur le fait que les deux écritures sont composées par le même nombre inconnu (celui caché par la tache bleue) auquel est ajouté dans le premier cas 78 et dans le deuxième

2. Le texte complet des tâches se trouvent aux pages 254 et 255.

3. Le texte complet de la tâche se trouve à la page 254.

$$\begin{array}{r} 57 \\ + 66 \\ \hline 123 \end{array}$$

Figure 9.1 – Résolution arithmétique de la tâche 123 par l'Élève 12.

79. On peut donc en déduire que pour obtenir la valeur de la deuxième écriture il suffit d'ajouter 1 à la première, en trouvant $115 + 1 = 116$. Cette deuxième procédure est algébrique, car elle s'appuie sur la relation mentionnée ci-dessus sans le besoin de trouver la valeur du nombre caché. La présence de ce nombre inconnu est acceptée et les élèves s'autorisent à l'utiliser dans leurs calculs.

Procédures arithmétique et algébrique de 123

Les mêmes deux procédures peuvent être utilisées pour la tâche 123⁴ (voir l'analyse *a priori* de la tâche à la page 265). Cette tâche a été proposée aux élèves comme relance au cas où la stratégie algébrique ne serait pas trouvée pour *La tache bleue* ou si sa résolution avait été difficile pour les élèves. La procédure arithmétique consiste à calculer $57 + 66$ sans utiliser l'information donnée dans la consigne ($57 + 65 = 122$). Par exemple, l'Élève 12 pose en colonne le calcul $57 + 66 = 123$ pour résoudre cette tâche (figure 9.1).

Or, la procédure algébrique repose sur la connaissance préalable que $57 + 65 = 122$ pour déduire que $57 + 66 = 123$ car il s'agit du même nombre (57) plus 66, qui est vu comme $65 + 1$. Par exemple, l'Élève 13 met en place la stratégie de résolution suivante :

59 - Chercheuse : Ok super regarde. Avant, j'ai fait ce calcul, j'ai fait 57 plus 65 qui donne 112 [sic] et maintenant, je me demande combien font ça.

60 - Élève 13 : 123

61 - Chercheuse : Comment tu as fait ?

62 - Élève 13 : C'est facile parce que là on a la même. 57 plus 65, 122. Là 57 plus 66, on a ajouté 1, ça fait. On ajoute juste à 122 un de plus.

L'Élève 13 utilise la relation entre les deux écritures pour trouver la solution, sans ressentir la nécessité d'effectuer le calcul $57 + 66$. Elle met en place un raisonnement relationnel entre les deux écritures.

4. Le texte complet de la tâche se trouve à la page 255.

Le rôle du signe égal

Pour les deux tâches, nous pouvons faire les mêmes considérations en ce qui concerne le focus sur le problème et le rôle du signe égal. Le rôle du signe égal est conçu de manière différente en fonction de la procédure utilisée. Dans la méthode de résolution algébrique, le signe égal est vu comme une relation entre deux quantités et les élèves reconnaissent la propriété qui permet de déduire :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a = b \Rightarrow a + c = b + c$$

Plus précisément, pour les deux tâches en objet :

$$\text{[tache]} + 78 = 115 \Rightarrow \text{[tache]} + 78 + 1 = 115 + 1 \Rightarrow \text{[tache]} + 79 = 116$$

$$57 + 65 = 122 \Rightarrow 57 + 65 + 1 = 122 + 1 \Rightarrow 57 + 66 = 123$$

Cette *vision relationnelle de l'égal* est liée à l'interprétation des nombres en jeu et à leur représentation. 116 et 123 doivent être considérés comme $115 + 1$ et $122 + 1$ respectivement, et 79 et 66 comme $78 + 1$ et $65 + 1$. Cette considération des nombres est *transparente*, dans le sens que les relations existantes entre les différentes parties de l'exercice sont mises en évidence. Cette conception de l'égal est en relation avec la *représentation non canonique* des nombres utilisée dans *La tache bleue* : un nombre est caché et peut le rester sans perdre son statut de nombre, il n'est pas nécessaire de le représenter par un nombre particulier et résoudre les calculs présents.

Dans la méthode de résolution arithmétique, le signe égal est utilisé dans son rôle de *calculateur*, pour effectuer les différentes opérations présentes. Il est aussi partiellement utilisé comme relation, car dans *La tache bleue*, pour trouver le nombre caché, il est nécessaire de se baser sur la relation entre les deux membres de l'égalité :

$$\text{[tache]} + 78 = 115 \Rightarrow \text{[tache]} = 115 - 78 \Rightarrow \text{[tache]} = 37$$

Pourtant, dans ce cas, la relation entre les deux membres est utilisée pour calculer et la relation entre les deux écritures n'est pas prise en considération. Avec cette procédure presque mécanique, l'élève n'atteint pas la pleine maîtrise du sens de la situation, mais se focalise sur une compréhension locale : les différentes étapes sont comprises, mais il manque une vision d'ensemble donnée par la vision relationnelle.

La résolution arithmétique porte l'attention des élèves sur la résolution et le produit final plus que sur le processus et la représentation de la situation.

Les deux tâches analysées en cette section, *La tache bleue* et *123*, sont donc assez similaires en ce qui concerne les procédures possibles, mais si seuls des nombres explicites apparaissent dans la deuxième, dans la première les élèves doivent faire face à un nombre inconnu. Nous serions donc tentée de soutenir que la deuxième a une forme plutôt arithmétique et la première plutôt algébrique, car elle a explicitement recours à une inconnue.

Alors que seuls des nombres explicites apparaissent dans la deuxième tâche, dans la première, les élèves sont confrontés à un nombre inconnu.

9.1.2 Procédures identifiées lors de l'analyse *a posteriori*

Lors de l'analyse *a posteriori* nous avons retrouvé les deux procédures identifiées avec l'analyse *a priori*. Nous avons résumé dans le tableau 9.1 les procédures utilisées par les élèves. Dans celui-ci, nous avons noté la présence d'une procédure si elle a été employée au moins une fois au cours de l'entretien. Une même procédure a pu être utilisée plusieurs fois par les mêmes élèves, mais cette information n'apparaît pas dans le tableau. Il ne s'agit pas d'un tableau de fréquence des procédures, mais simplement de leur présence. Nous avons fait le choix de noter dans le tableau 9.1 la présence d'une procédure même lorsque celle-ci n'était pas complète.

Procédure arithmétique Vs procédure algébrique

Pendant les entretiens, les élèves ont utilisé les deux procédures pour résoudre les deux tâches⁵. Comme il est évident du tableau 9.1, les élèves ont en général préféré une résolution arithmétique pour *La tache bleue* (quinze élèves sur les dix-huit qui font partie de notre analyse ont utilisé une procédure arithmétique comme première option). Pour cette tâche, la procédure algébrique a été souvent proposée comme deuxième méthode, soit pour justifier davantage le résultat trouvé, soit après les relances de la chercheuse qui a mené les entretiens cliniques. Au contraire, les élèves ont quasi systématiquement proposé comme première méthode la procédure algébrique pour résoudre la tâche *123* (dix élèves sur les treize qui l'ont eu à résoudre). Cette observation pourrait paraître inattendue vu que *La tache bleue* contient une inconnue alors que *123* n'est composée que par des nombres expli-

5. Comme expliqué dans le chapitre 8, la chercheuse relançait les élèves afin de favoriser la manifestation de la procédure algébrique.

Tableau 9.1 – Les stratégies utilisées par les élèves pour les tâches *La tache bleue* et 123. En jaune, les élèves sans MLD. Pour le détail sur chaque élève, consulter le tableau à la page 107.

Élève	Tache bleue			123		
	Arithmétique	Algébrique I possibilité	Algébrique II possibilité ou autre	Arithmétique	Algébrique I possibilité	Algébrique II possibilité ou autre
1	X		X		X	
2	Écarté : trouble du spectre de l'autisme					
3	X	X		X		X
4	X			X		X
5	X				X	
6	X		X		X	
7	X		X		X	
8	X		X		X	
9		X			X	
10	Écarté : trouble du spectre de l'autisme					
11	X				X	
12	X			X		X
13	X		X		X	
14	X		X		X	
15	X		X	Pas proposé		
16		X		Pas proposé		
17	X		X	Pas proposé		
18		X		Pas proposé		
19	Écarté : haut potentiel soupçonné					
20	Écarté : haut potentiel soupçonné et une vidéo sans son					
21	X		X	Pas proposé		
22	X		X		X	
Total	15/18	4/18	10/18	3/13	10/13	3/13

cites. Dans les prochaines sections, nous donnons des éléments de réponse à ce constat.

Variable cognitive

En créant la tâche *La tache bleue*, nous avons essayé de décourager la procédure arithmétique en écrivant dans la consigne qu'il ne fallait pas calculer le nombre caché. Cette variable s'est avérée dans la plupart des cas inutile vu que très fréquemment les élèves l'ont lue et ont décidé de l'ignorer du fait qu'il s'agissait de la seule stratégie envisagée à ce moment-là. L'Élève 22 en est un bon exemple :

5 - **Chercheuse** : Regarde. Un nombre est caché par cette tache-là [*en pointant la première tache*]. Derrière, il y a un nombre.

6 - **Élève 22** : Mh mh.

7 - **Chercheuse** : Et on sait que le nombre caché plus 78 est égal à 115. Ok? Il ne faut pas calculer le nombre caché.

8 - **Élève 22** : Ça il ne faut pas le calculer [*en pointant la première tache*].

9 - Chercheuse : Exactement. Mais on voudrait comprendre combien font le nombre caché plus 79.

10 - Élève 22 : Moi, j'aurais déjà fait 115 moins 78.

11 - Chercheuse : D'accord.

12 - Élève 22 : Normalement ça donne le résultat [*elle pose* « $115 - 78 =$ »]. Et après, je calcule 78 [*en pointant la deuxième tache*] plus 79.

13 - Chercheuse : Tu calcules quoi, pardon?

14 - Élève 22 : 78... Non. Du coup, le résultat qui aura ici [*en pointant le vide à droite de* « $115 - 78 =$ »], je vais faire plus 79. Et après il y aura le résultat.

L'Élève 22 reformule la contrainte, en disant qu'il ne faut pas calculer la tâche, pourtant immédiatement après elle l'ignore et utilise une procédure arithmétique en calculant la valeur du nombre derrière la tache. Cependant, si la même demande est faite quand les élèves sont prêtes et prêts à l'écouter, elle n'est plus ignorée. Par exemple, l'Élève 21 a été relancée après qu'elle avait résolu la tâche par une procédure arithmétique :

24 - Élève 21 : ... Du coup, ça fait 116 ...

...

27 - Chercheuse : Oui. Très bien. Donc pour faire cela, tu es passée par la valeur de la tache, par la valeur du nombre qu'il y a derrière la tache.

28 - Élève 21 : Oui.

29 - Chercheuse : Est-ce que tu arriverais à retrouver une manière pour trouver cela [*en entourant* « *tache*+79 »], comme tu viens de le faire, mais sans passer par la valeur de la tache?

30 - Élève 21 : Sans essayer de trouver le calcul-là [*en pointant la première tache*]?

31 - Chercheuse : Oui.

32 - Élève 21 : Si on dit que 79 et 78, il y a juste 1 de différence.

33 - Chercheuse : Mh mh.

34 - Élève 21 : Du coup, si on dit que là [*en pointant les 2 taches*] c'est le même nombre, mais en fait, il y en aura juste 1 de plus [*en pointant* « *tache*+79 »] vu que là c'est 79.

L'Élève 21 a pu bénéficier de la requête de ne pas calculer la valeur du nombre caché pour mettre en place un raisonnement algébrique parce que celle-ci a été faite au bon moment.

Tension entre procédure arithmétique et procédure algébrique

Dans les résolutions des élèves, on assiste parfois à une tension entre la procédure arithmétique et celle algébrique. Cette tension est évidente dans la résolution de *La tache bleue* par l'Élève 14.

19 - Chercheuse : Pourquoi t'as fait ça [en pointant le calcul en colonne « $115 - 78 = 37$ »] ?

20 - Élève 14 : Parce que là, j'ai fait 115 moins 78 pour trouver justement ce qu'il y avait derrière la tache, pour trouver combien 78 plus combien ça faisait 115 et j'ai trouvé 37. Oui, ça devrait dire que ça ferait 37 plus 79, du coup ça ferait 116.

21 - Chercheuse : Comment t'as calculé ?

22 - Élève 14 : Vous m'avez dit qu'ici à la même place, c'est le même chiffre. Vu que là 37, j'ai mis 37 et 37 plus 78, ça fait 115 et 79 c'est un chiffre plus haut que 78, du coup j'ai fait 115 plus 1.

L'Élève 14 calcule d'abord la valeur du nombre caché par la tache, 37. Il explique que pour trouver la solution il faut additionner $37 + 79$ qui fait 116. Dans un premier temps, il justifie son résultat 116 au moyen d'une stratégie arithmétique. Toutefois, dans l'échange qui suit, il explique le même résultat sur la base de la relation $79 = 78 + 1$. L'Élève 14 montre ensuite une certaine résistance à la possibilité d'arriver à 116 sans passer par 37, et cela malgré sa deuxième explication algébrique. Il a identifié la relation entre les deux écritures et il a mis en place un raisonnement algébrique tout en ayant besoin de mettre un nombre à la place de la tache bleue. L'attention de cet élève est tournée vers la *résolution* et le *produit* (chaque nombre est calculé), mais il a aussi une attention à la *représentation* et au *processus*. Le nombre 116 est moins *opaque* dans la vision de l'Élève 14, car il vient de $115 + 1$, vu que $79 = 78 + 1$. Il y a une vision relationnelle et calculatoire en même temps : il connaît la relation entre les deux écritures, il la cite explicitement, pourtant il ne se donne pas le droit de l'utiliser de manière explicite.

La différence entre la préférence pour la procédure arithmétique pour *La tache bleue* et celle algébrique pour 123 est induite par la forme des deux tâches, ou plus exactement par la présence ou absence d'un nombre inconnu. Cette différence entre les deux tâches est expliquée par les élèves mêmes, comme par l'Élève 14 dans la transcription qui suit. Comme nous venons de le voir dans les lignes ci-dessus, l'Élève 14 a utilisé un mélange des procédures arithmétique-algébrique pour résoudre *La tache bleue* :

30 - Élève 14 : Je ne vois pas parce que du coup, là [en pointant « $57 + 65$ »] de toute façon on connaît au moins les deux premiers chiffres, donc ça marche. Mais là [en pointant « *tache*+79 »], vu qu'on connaît qu'un seul chiffre, et qu'on connaît pas le chiffre non plus [en pointant « *tache* + 78 »]. Je ne comprends pas comment on pourrait faire en trouvant... Fin, trouver la réponse-là [en pointant « *tache*+79 »] sans déjà trouver ce qui est sous la tache là [en pointant « *tache*+78 »] et en sachant que c'est la même là [en pointant « *tache*+79 »], je ne comprends pas.

9.1.3 Points remarquables de l'analyse *a posteriori*

Dans cette section, notre focale porte sur certains aspects complémentaires à ceux exposés dans les sections précédentes. En particulier, nous abordons des considérations relatives au contrat didactique et au rôle de l'erreur.

Contrat didactique

Comme décrit dans la section précédente, les élèves favorisent une procédure arithmétique pour *La tache bleue* et une procédure algébrique pour 123, et cela est apparemment en contraste avec la présence d'un nombre inconnu dans la première tâche et non dans la deuxième. Cette condition est liée au contrat didactique⁶ qui encourage à calculer les inconnues et à expliciter tous les nombres : le contrat de résolution des équations veut que chaque équation soit résolue. Par conséquent, dans *La tache bleue*, la présence de l'inconnue incite les élèves à en dériver la valeur et à l'utiliser pour trouver la solution au moyen de l'addition $37 + 79$. Le contrat didactique incite ici les élèves à mettre en place un raisonnement arithmétique, bien qu'une procédure algébrique soit possible et à leur portée. Parfois, même quand la relation entre les différentes écritures est connue et rendue explicite, les élèves n'utilisent pas cette information pour résoudre la tâche. En guise d'exemple, voici

6. Nous rappelons que par contrat didactique nous entendons « l'ensemble des obligations réciproques et des "sanctions" que chaque partenaire de la situation didactique - impose ou croit imposer, explicitement ou implicitement, aux autres - et celles qu'on lui impose ou qu'il croit qu'on lui impose, à propos de la connaissance en cause. Le contrat didactique est le résultat d'une "négociation" souvent implicite des modalités d'établissement des rapports entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu et un système éducatif » (Brousseau, 2010, p. 6). Les entretiens cliniques de notre partie expérimentale font partie du panel des situations didactiques, même si les règles du contrat didactique en ce contexte peuvent ne pas être les mêmes que celles de la classe. D'ailleurs, bien que les entretiens soient faits hors classe, ils ont été menés dans des locaux scolaires et le rendez-vous a été organisé en collaboration avec l'enseignant ou l'enseignante de la classe, qui a servi d'intermédiaire entre les élèves et la chercheuse. Ainsi, les élèves ont abordé l'entretien avec le bagage du contrat didactique de la classe, ou au moins une partie de celui-ci. Nous donnons un exemple de l'importance du contrat didactique dans le contexte de l'entretien clinique dans la section 9.1.3.

une partie d'entretien à propos de *La tache bleue* avec l'Élève 7 qui est représentative du phénomène.

14 - Élève 7 : Combien il fait... j'ai compris. C'est 37 pour arriver à 115. Ici c'est 116 [en pointant « tache+79 »].

15 - Chercheuse : Comment tu as fait ?

16 - Élève 7 : J'ai fait 30 plus 70. 100. J'ai pris les unités, j'ai calculé 9 plus quelque chose. Plus 7. Et voilà, ça me donne 116. Et pour celui-là [en pointant « tache+78 = 115 »], moins 1 ça fait 115.

17 - Chercheuse : D'accord. Donc pour faire cette addition-là [en pointant la deuxième addition], tu as trouvé le nombre qui était caché. N'est-ce pas ?

18 - Élève 7 : Oui.

L'Élève 7 trouve d'abord 37, la valeur de l'inconnue, et calcule $37 + 79 = 116$. Après avoir donné la réponse avec la résolution de l'addition, il démontre qu'il connaissait la relation entre les deux écritures et il l'explique avec son commentaire « moins 1 ça fait 115 », qu'il n'a pas utilisé pour trouver 116. Dans l'entretien de l'Élève 3, le phénomène est encore plus évident, car il calcule la valeur du nombre caché, cependant après il donne la solution en n'utilisant pas ce résultat qui reste inexploité, mais en se basant sur la relation entre les deux écritures.

11 - Chercheuse : Alors, on sait que le nombre... Un nombre qui est caché plus 78 est égal à 115.

12 - Élève 3 : Donc là ça fait 37 alors.

13 - Chercheuse : Qu'est ce que t'as fait, là ?

14 - Élève 3 : J'ai compté.

...

23 - Chercheuse : Mh mh. Et alors, pour répondre à la question, combien font le nombre caché plus 79 ?

...

26 - Élève 3 : Ah. 116.

27 - Chercheuse : Comment tu as fait ?

28 - Élève 3 : J'ai compté plus 1 parce qu'il y avait 78 et il y a 79 [en pointant « 79 »] donc du coup, ça fait plus 1.

La tendance est de calculer tous les bouts qui apparaissent dans la tâche, pour pouvoir utiliser l'égal comme calculateur. Le contrat didactique encourage à calculer tous les nombres et à considérer impossible de calculer sur ou avec des nombres inconnus, en causant des difficultés à accepter la présence de l'inconnue. Ce constat se lie au concept d'analyticité (Radford, 2011, 2012, voir chapitre 3.2.2) qui voit dans

le fait d'opérer sur et avec les nombres inconnus une caractéristique de l'algèbre. La résistance que les élèves ont montré à utiliser une procédure algébrique pour *La tache bleue* est en relation avec le statut différent donné aux nombres connus et à ceux inconnus.

Nous voyons apparaître la croyance de l'impossibilité de calculer sur ou avec des nombres inconnus même chez les élèves avec de bons résultats en mathématiques. Par exemple, l'Élève 17 au début de l'entretien à propos de *La tache bleue* se révèle très surprise par la possibilité de résoudre la tâche sans calculer la valeur du nombre caché. Ce mécanisme est particulièrement frappant chez les élèves qui, au début de l'entretien, n'ont pas compris que les deux taches cachent le même nombre. Ces élèves commencent automatiquement à faire les calculs nécessaires afin de trouver la valeur du premier nombre caché ($115 - 78 = 37$), malgré que cela soit inutile pour répondre à la question si on ne reconnaît pas que le nombre trouvé (37) puisse être utilisé pour trouver ce qui est demandé ($37 + 79 = 116$). Ces élèves se lancent mécaniquement dans la résolution, avec une vision *produit* de la tâche mathématique et de l'égal comme calculateur. Cette résolution automatisée est parfois abordée avant d'en avoir constaté l'utilité ou d'avoir pris connaissance ou compris ce que la question demande. Dans ces cas, c'est comme si les élèves supposaient par contrat didactique que la question concernait les nombres cachés : s'il y a un nombre inconnu, il faut le calculer.

Ce lourd héritage n'est pas présent dans la tâche 123 où tous les nombres sont exprimés explicitement. Ici, les élèves se donnent le droit d'utiliser un raisonnement algébrique pour répondre à la question posée. Le fait de connaître tous les nombres en jeu permet aux élèves de considérer la bonne question et les autorise à se baser sur la relation entre les deux écritures pour trouver le résultat à la place de calculer l'addition.

Le rôle de l'erreur

Dans certains cas, le recours indirect à une certaine procédure a pu devenir évident grâce à des erreurs commises par les élèves.

Prenons le cas de l'Élève 1, dont la production écrite est présentée en figure 9.2.

15 - Chercheuse : D'accord, je peux te poser une autre question? C'est similaire à ce qu'on vient de faire, ok? Tu as un nombre caché là derrière, et on sais que le nombre caché plus 78, donne ça [*en pointant* « 115 »]. Est-ce que tu saurais faire, est-ce que tu sais combien ça vaut?

16 - Élève 1 : Il faut juste que je calcule.

17 - Chercheuse : Quel calcul tu ferais?

$$\begin{array}{l} 33 + 78 = 115 \\ 33 + 79 = 116 \end{array}$$

Figure 9.2 – Production écrite de la tâche *La tache bleue* par l'Élève 1.

- 18 - Élève 1 :** Du coup je pense que je ferais, du coup, je vais remplacer, du coup, 78 par 80 moins 2 [il écrit « 80 – 2 » en dessus de 78 et il écrit en colonne $80 + 115 = 195$]. Du coup 80 plus 115. Du coup ça ferait...
- 19 - Chercheuse :** Alors je te pose une question. Est-ce que, maintenant tu es en train de calculer la tache, n'est-ce pas? Est-ce que tu arriverais à me dire combien ça vaut ça [en pointant « tache+79 »] sans calculer la tache?
- 20 - Élève 1 :** C'est-à-dire ?
- 21 - Chercheuse :** C'est à dire que tu vois ici, tu sais que la tache plus 78 donne ça [en pointant « 115 »].
- 22 - Élève 1 :** Excusez-moi. Je me suis trompée dans le calcul. C'est totalement faux.
- 23 - Chercheuse :** Pas de problème de toute façon on essaie de ne pas calculer la tache cette fois d'accord?
- 24 - Élève 1 :** Du coup la tache elle fait 33 [il écrit « 33 » dans la première tache et « 112 » à coté de « tache+79 »].
- 25 - Chercheuse :** Qu'est-ce que tu as fait?
- 26 - Élève 1 :** C'est pas censé faire 112.
- 27 - Chercheuse :** Pourquoi t'as dit que ça ne fait pas 112?
- 28 - Élève 1 :** Parce que par rapport à ces calculs [il pointe les deux lignes], c'est un de plus par rapport au même nombre de la même tache. Ce ne serait pas logique, ça serait 116 [il écrit « 116 » et « 33 » dans la tache de la deuxième ligne].

L'Élève 1 utilise une procédure arithmétique pour répondre à la question, mais il se trompe dans la soustraction en obtenant que $115 - 78 = 33$. À partir de ce faux résultat, il calcule correctement que $33 + 79 = 112$. L'Élève 1 réagit immédiatement en disant que « c'est pas censé faire 112 », car le bon résultat est 116, un de plus par rapport à 115 de la première écriture. L'élève a donc utilisé l'égal comme un calculateur. En vrai, il connaissait déjà la réponse avant de calculer et il a pu corriger sa réponse grâce à une vision méta de la situation basée sur le rôle relationnel de l'égal. Cependant, il ne s'est pas donné la possibilité d'utiliser cette connaissance pour résoudre la tâche, qui est passée par la procédure habituelle des calculs. Dans ce cas l'erreur a pu faire ressortir une compétence de l'élève qui serait autrement restée cachée.

$$\begin{array}{l} \text{1870} \\ \text{☁} + 3478 = 5248 \\ \text{1870} \\ \text{☁} + 3479 = 5339 \end{array}$$

Figure 9.3 – Production écrite de l'Élève 7 pour résoudre la relance pendant l'entretien à propos de la tâche *La tache bleue*.

Similairement, l'Élève 7 produit des erreurs de calcul en résolvant la tâche en figure 9.3, proposée comme relance à *La tache bleue*. L'élève fait une première erreur dans la valeur du nombre caché ($5248 - 3478 = 1770$ et non pas 1870) et une deuxième dans l'addition ($1870 + 3479 = 5349$ et non pas 5339). Ces deux erreurs l'amènent à obtenir un résultat final de 5339 à la place de 5249. Pourtant l'élève n'est pas troublé par le résultat et il l'accepte de bon gré. Dans cette occasion, l'erreur et la non-réaction de l'élève nous permettent de déduire que la procédure utilisée par l'élève est purement arithmétique, nous pouvons exclure que l'élève soit arrivé à la solution par un raisonnement basé sur la relation entre les deux égalités et justifié par les calculs arithmétiques.

Nous voyons donc le rôle que l'erreur peut avoir pour détecter l'utilisation, ou pas, de la pensée algébrique et son importance pour mettre en lumière la tension entre les deux manières d'aborder le problème en question.

9.1.4 La pensée des élèves avec MLD et celle des élèves sans MLD

Pour conclure cette section, nous nous penchons sur les possibles différences entre la pensée des élèves avec MLD et celle des élèves sans MLD et manifestées pendant la résolution des tâches *La tache bleue* et 123.

Comme montré dans le tableau 9.1, les trois élèves sans MLD analysées (Élève 15, Élève 16 et Élève 17) ont toutes résolu la *La tache bleue* grâce à un raisonnement algébrique, soit comme première possibilité (Élève 16) soit comme deuxième (Élève 15 et Élève 17). Cela n'est pas vrai pour les élèves avec MLD. Seulement trois élèves (Élève 3, 9 et 18) sur les quinze avec MLD utilisent la procédure algébrique comme première possibilité et trois élèves (Élève 6, 8 et 21) comme deuxième. Quatre élèves sur quinze (les élèves 4, 5, 11 et 12) ne montrent jamais une approche algébrique à *La tache bleue*, ni de manière directe pour la résoudre ni de manière indirecte (par exemple en forme de commentaire ou pour corriger les erreurs comme vu précédemment pour l'Élève 1).

Nous pouvons ainsi déduire que les élèves sans MLD ont plus facilement mis en

place un raisonnement algébrique que les élèves avec MLD. Cela n'est pas systématique, par exemple l'Élève 9, élève avec MLD, a utilisé une procédure algébrique avec aisance et rapidité.

En revanche, en considérant conjointement la tâche 123 qui pose moins d'obstacles du point de vue du contrat didactique, nous observons que la totalité des élèves montre d'une manière ou d'une autre la conscience de l'existence de la relation entre les deux égalités et sa possible utilisation pour la résolution du problème.

Nous pouvons donc conclure que d'un point de vue qualitatif, nous n'avons pas rencontré des différences entre les deux catégories. Par contre, les élèves avec MLD semblent être plus résistantes à passer de la vision arithmétique à celle algébrique.

Ce qui est essentiel à retenir est que l'analyse de ces deux tâches indique que, même si dans certaines circonstances les élèves montrent une résistance à utiliser la pensée algébrique, ils et elles ont montré la possibilité à s'en servir dans différentes occasions.

9.2 Analyse de la tâche *La suite de carrés*

La tâche *La suite de carrés* a été analysée avec les types de généralisation de Radford, présentés à la section 4.3, selon la grille décrite dans 8.4.3.

9.2.1 Procédures identifiées lors de l'analyse *a priori*

Dans la section qui suit, nous présentons les principales procédures de résolution de la tâche *La suite de carrés*⁷ (déjà identifiées dans l'analyse *a priori*, page 266) au moyen des productions des élèves recueillies pendant nos entretiens⁸.

Dessin et comptage

Une première procédure utilisée pour résoudre *La suite de carrés* est la représentation par dessin (ou autres moyens de représentation) de l'étape demandée et le comptage des pailles la composant. Par exemple, l'Élève 12, pour trouver le nombre de pailles nécessaires à construire 4 et 5 carrés, les représente graphiquement (figure 9.4) en les comptant.

7. Le texte complet de la tâche se trouve aux pages 246-250.

8. La tâche *La suite de carrés* a été légèrement modifiée après le premier jour d'entretiens. Initialement, les sous-tâches a) et b) étaient confondues et demandaient de trouver le nombre de pailles pour construire sept carrés. Nous avons ensuite modifié les questions pour aboutir à la version actuelle. Ce choix est dû au fait que nous nous sommes rendu compte que l'écart entre les étapes données en image et l'étape 7 était trop grand et ne favorisait pas la généralisation arithmétique. Cela concerne les élèves 4, 5 et 7.

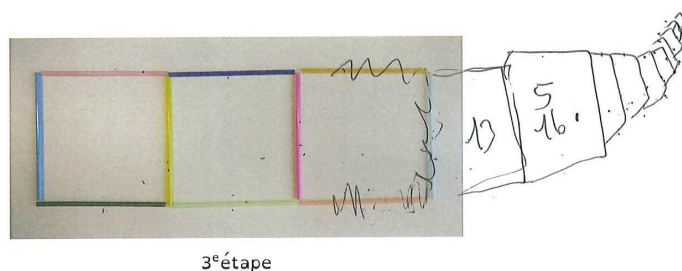


Figure 9.4 – Résolution par dessin et comptage de la sous-tâche a) de *La suite de carrés* par l'Élève 12.

- 11 - Chercheuse :** ... Maintenant, ma question est en total, combien de pailles pour 4 carrés?
- 12 - Élève 12 :** Ah, pour 4 carrés! [*L'élève compte les pailles pour les 3 carrés et elle dessine un quatrième carré. Elle modifie sa réponse écrite en effaçant 3 et en écrivant 12 à la place.*]
- 13 - Chercheuse :** Qu'est ce que tu as fait, là?
- 14 - Élève 12 :** J'ai compté toutes les pailles.
- 15 - Chercheuse :** Et donc combien tu as obtenu?
- 16 - Élève 12 :** J'ai obtenu 12.
- 17 - Chercheuse :** D'accord, tu me montres juste comment tu as fait?
- 18 - Élève 12 :** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13! Pardon [*l'élève compte à nouveau les pailles et corrige sa réponse écrite.*]
- 19 - Chercheuse :** D'accord donc pour la deuxième question, et pour 5 carrés?
- 20 - Élève 12 :** [*L'élève dessine un cinquième carré à côté du quatrième et écrit sa réponse « Il faut 16 pailles pour faire 5 carrés ».*]

La procédure par dessin et comptage est efficace pour un petit nombre de carrés, comme ceux de la sous-tâche a).

Procédure erronée : dessin erroné et comptages

La reproduction par dessin de la suite peut aussi être erronée quand l'élève n'en a pas la bonne représentation. Par exemple, l'élève peut disposer les carrés autrement qu'un après l'autre, par exemple comme en figure 9.5. Dans cette image, l'Élève 18 compose 4 carrés pour former un grand carré. L'Élève 5, quant à lui, veut construire les 100 carrés par blocs de 10 carrés par colonne.

Même en ayant la bonne représentation des carrés « à la suite », le dessin peut être erroné notamment à cause de la double reproduction d'une même paille en allant à la ligne, comme dans les figures 9.6 et 9.7.

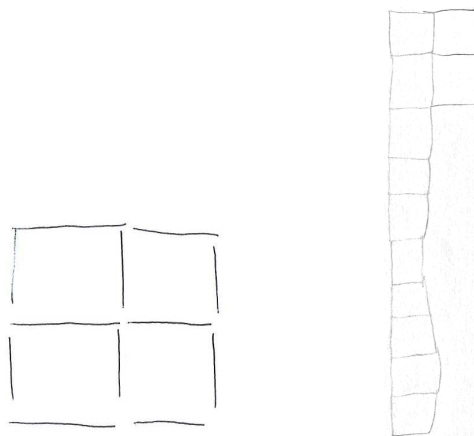


Figure 9.5 – Résolution par dessin erroné et comptage de la sous-tâche a) (4 carrés) de *La suite de carrés* par l'Élève 18 (à gauche) et du début de la sous-tâche c) (100 carrés) de par l'Élève 5 (à droite).

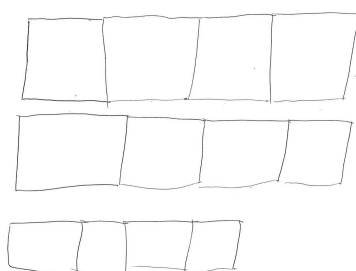


Figure 9.6 – Résolution par dessin erroné et comptage de la sous-tâche b) (12 carrés) de *La suite de carrés* par l'Élève 14.

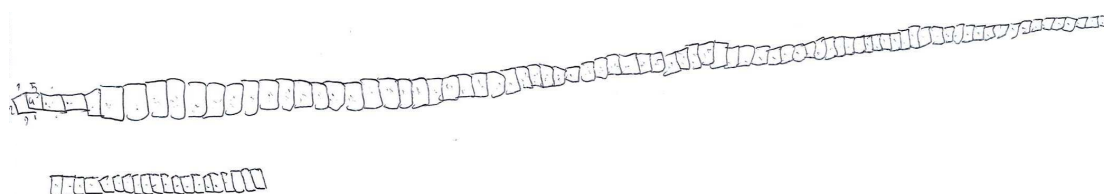


Figure 9.7 – Résolution par dessin erroné et comptage de la sous-tâche c) (100 carrés) de *La suite de carrés* par l'Élève 16.

Comptage et calcul

Pour trouver le nombre de pailles pour un nombre donné de carrés, il est possible d'ajouter 3 à l'étape précédente. Dans ce cas, l'accent est mis sur la relation de récurrence entre termes successifs de la suite : si $p(n)$, $n \in \mathbb{N}$ indique le nombre de pailles pour une certaine étape n , alors $p(n) = p(n - 1) + 3$. Pour accomplir cette procédure, l'élève part d'un nombre de pailles connues, par exemple en comptant les pailles nécessaires pour trois carrés, et additionne à ce nombre 3, comme le fait l'Élève 13 :

35 - Chercheuse : D'accord. Donc combien de pailles au total ?

36 - Élève 3 : Au total, si je fais encore 1 ?

37 - Chercheuse : Oui, pour le 4 carrés.

38 - Élève 3 : 13.

39 - Chercheuse : Ok. Et si on continue, donc pour la cinquième étape ? Pour les 5 carrés ?

40 - Élève 3 : 16.

41 - Chercheuse : Comment tu as fait ?

42 - Élève 3 : Parce que j'ai compté plus 3.

À ce stade, l'élève n'a pas encore forcément accompli la généralisation qui lui permet d'affirmer que la relation $p(n) = p(n - 1) + 3$ est valide pour tout n naturel. L'identification de la relation peut n'être repérée que localement, comme le fait ci-dessus l'Élève 3 pour les quatre et cinq carrés.

Procédure erronée : relation de proportionnalité

Une procédure erronée assez répandue consiste à identifier la relation entre le nombre de pailles et le nombre de carrés comme proportionnelle. Par exemple, l'Élève 7 assume que chaque carré soit composé de quatre pailles.

5 - Chercheuse : Combien ?

6 - Élève 7 : Pour avoir 4 pailles ? 16 pailles.

7 - Chercheuse : Comment tu as fait ?

8 - Élève 7 : Ben vous voyez. Là il y a 1, 2, 3, 4, dans un carré il y a 4 pailles [*en pointant les 4 pailles de la première étape*]. Et si je fais genre 4, 4, 4, carrés avec des pailles, ça me fait 12 pailles. Non, 16 pailles, pardon.

Généralisation arithmétique

Quand la relation de récurrence entre étapes successives de la suite est généralisée, nous parlons de généralisation arithmétique.

284 - Élève 4 : Parce qu'après on en utilise à chaque fois 3. On utilise une fois 1, 2, 3, 4 [*en comptant les pailles du premier carré*]. Et après à chaque fois 3, chaque fois 3, on pourrait faire 10000, il y en aura 3 qu'on utilisera pour faire ce type de carrés.

L'Élève 4 généralise la relation $p(n) = p(n - 1) + 3$ et remarque que le premier carré a quatre pailles contrairement aux suivants qui en ont trois, mais ne fournit pas une formule directe qui permette d'obtenir le nombre de pailles pour un nombre quelconque de carrés.

Induction naïve

Les élèves peuvent arriver à une formule de généralisation sans l'avoir construite algébriquement, mais par exemple par ressemblance avec les cas connus, comme c'est le cas pour l'Élève 16 dans l'échange qui suit.

118 - Élève 16 : Parce que là il y a 3 carrés [*en pointant les 3 carrés*] et dans chaque carré, il y a 3 pailles, donc il faut faire 3 fois 3. Ça fait 9, ça fait pas 10!

119 - Chercheuse : C'est vrai, je vois bien ce que tu veux dire.

120 - Élève 16 : Mais là [*en ajoutant le premier carré*], 3 fois 1 ça fait 1... Ah non, ça fait 3. Et là.... Ah, mais il faut rajouter plus 1.

121 - Chercheuse : Pourquoi?

122 - Élève 16 : Parce que si on fait 3 fois 1 ça fait 3. Il faut faire plus 1. Là [*en pointant les 2 carrés*] si on fait 3 fois 2, ça fait 6. Et là il y a 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Là si on fait 3 fois 3 [*en pointant les 3 carrés*], ça fait 9, mais là il y en a 10. Du coup il faut faire plus 1 à chaque fois.

123 - Chercheuse : D'accord, donc, d'où ça vient ce plus 1 que tu as trouvé?

124 - Élève 16 : Je ne sais pas.

Généralisation factuelle

La généralisation factuelle est un type de généralisation algébrique qui fournit une *formule en acte* permettant de trouver la réponse pour une figure quelconque particulière. Par exemple, l'Élève 6 propose la généralisation factuelle suivante pour cent carrés.

66 - Élève 6 : Combien faut-il de pailles pour former 100 carrés? 301 je dirais, de tête...

67 - Chercheuse : Comment tu as fait?

68 - Élève 6 : Le premier il a forcément 4. Après le reste il a que des 3.

69 - Chercheuse : D'accord.

70 - Élève 6 : Si... J'ai fait de tête... J'ai essayé sans poser.

71 - Chercheuse : D'accord. Et donc quelles opérations t'as fait pour obtenir le résultat?

72 - Élève 6 : J'ai fait 4 pour le premier et après, j'ai fait 3 fois 99 ça faisait 297 plus 4 ça fait 301.

L'Élève 6 pourrait étendre sa procédure à tout nombre particulier qui lui serait proposé. Cependant, dans l'échange précédent, la référence à la variable n'est pas explicite.

Généralisation contextuelle

L'abandon de la référence à un nombre particulier de carrés permet une généralisation contextuelle, comme dans le cas qui suit de l'Élève 22.

362 - Chercheuse : Parfait. Ok. Je te pose une question un peu dans la suite. On se demande si en connaissant le nombre de carrés, on peut toujours trouver le nombre de pailles.

363 - Élève 22 : Oui.

364 - Chercheuse : Comment?

365 - Élève 22 : Parce que si c'est toujours... Vu qu'ils sont toujours à la suite, ça sera toujours fois 3.

366 - Chercheuse : Mh mh.

367 - Élève 22 : Du coup, c'est avec le nombre de carrés qu'on va pouvoir faire le calcul.

368 - Chercheuse : Mh mh. Et comment tu le ferais avec le nombre de carrés?

369 - Élève 22 : Je mets le nombre de carrés, fois 3 et après je mettrais plus 4 pour celui du début... Fin, le nombre des carrés, mais moins 1 du coup et ensuite, je mets plus 4 pour le premier carré.

L'aspect indéterminé de la situation est ici rendu explicite et exprimé par la formulation « le nombre de carrés ». Cependant, la généralisation proposée est encore contextuelle, liée à des caractéristiques spatiales et temporelles et basée sur l'interprétation personnelle de la figure. Par exemple, l'Élève 22 parle de « celui du début » et du « premier carré ».

d) En connaissant le nombre de carrés, pourrais-tu toujours trouver le nombre de pailles? Si oui, comment?

n carrés

$$3 \cdot n - 3 + 4$$

Figure 9.8 – Généralisation standard de *La suite de carrés* par l'Élève 18.

Généralisation algébrique symbolique standard

La généralisation peut aussi être véhiculée par le symbolisme algébrique standard, comme il est le cas pour l'Élève 18⁹ (figure 9.8).

202 - Chercheuse : Alors maintenant la question est... Regarde... En connaissant le nombre de carrés, pourrais-tu toujours trouver le nombre de pailles?

...

208 - Chercheuse : C'est-à-dire, je reformule la question en fait... Combien faut-il de pailles pour former une suite de n carrés?

...

212 - Chercheuse : ... Alors, n carrés, d'accord? [*La chercheuse écrit sur la feuille « n carrés »*].

213 - Élève 18 : Ah, d'accord, il faudrait que je l'écrive comme une équation. Donc ce serait 3 fois n . 3 fois n ... Moins 3, techniquement. Plus 4 [*L'élève écrit « $3 \cdot n - 3 + 4$ »*].

Bien qu'exprimée avec du symbolisme algébrique standard avec la formule dans la figure 9.8, la généralisation de l'Élève 18 fait encore référence aux caractéristiques spatio-temporelles de la suite. En effet, la formule est encore liée à l'action sur la suite. L'élève trouve 3 pailles par carré, ensuite elle enlève 3 car elle a besoin du multiple « d'avant » et enfin elle ajoute 4 pour les 4 pailles du dernier carré. L'Élève 18 elle-même l'explique très bien :

203 - Élève 18 : Oui, parce que du coup, si j'utilise cette méthode, qui est probablement pas la meilleure, mais en ayant le nombre de carrés, on sait quel multiple c'est... donc par exemple, si c'est 100, je sais que je dois faire 3 fois 100. Après, juste trouver le multiple d'avant et faire plus 4.

9. Comme relance, nous avons posé la question à l'Élève 18 par rapport à n carrés. Nous savions que cette élève avait déjà rencontré le symbolisme alphanumérique. Il s'agit de la seule élève dans notre échantillon qui l'avait déjà abordé.

Tableau 9.2 – Les stratégies utilisées par les élèves pour la tâche *La suite de carrés*. En jaune, les élèves sans MLD. Pour le détail sur chaque élève, consulter le tableau à la page 107.

#	Pas de généralisation			Généralisation ou pas Relation de proportionnalité	Généralisation arithmétique	Induction naïve	Généralisation algébrique		
	Dessin et comptage	Dessin et comptage erronés	Comptage et calcul				Factuelle	Contextuelle	Standard
1	X		X	X	X				
2	Écarté : trouble du spectre de l'autisme								
3	X		X		X				
4	X		X	X	X		X	X	
5	X	X		X					
6	X		X	X	X		X	X	
7	X		X	X		X	X	X	
8	X		X	X	X	X	X	X	
9	X		X		X	X			
10	Écarté : trouble du spectre de l'autisme								
11	X		X	X			X		
12	X		X	X	X				
13	X	X	X	X	X		X		
14	X	X	X	X			X		
15			X	X			X	X	
16	X	X	X	X		X	X	X	
17	X		X	X	X		X	X	
18	X	X	X	X	X		X	X	X
19	Écarté : haut potentiel soupçonné								
20	Écarté : haut potentiel soupçonné et une vidéo sans son								
21				X	X		X	X	X
22	X		X	X	X		X	X	
Total	16	5	16	16	12	4	13	10	2

9.2.2 Procédures identifiées lors de l'analyse *a posteriori*

Lors de l'analyse *a posteriori* nous avons retrouvé les différentes procédures identifiées avec l'analyse *a priori*. Nous avons résumé les procédures effectuées par les élèves dans le tableau 9.2. Dans ce tableau, nous avons noté la présence d'une procédure si elle a été employée au moins une fois au cours de l'entretien. Une même procédure a pu être utilisée plusieurs fois par les mêmes élèves, mais cette information n'apparaît pas dans le tableau. Comme pour les tâches précédentes, il ne s'agit pas d'un tableau de fréquence des procédures, mais simplement de leur présence. D'ailleurs, le tableau 9.2 inclut également des procédures incorrectes ou partiellement incorrectes.

Dessin et comptage

Il ressort du tableau 9.2 que la procédure par dessin et comptage a été utilisée, sous une forme ou une autre, par la totalité des élèves sauf les élèves 15 et 21. Il est à noter qu'il n'y a pas de différence substantielle entre élèves avec ou sans MLD.

Le dessin et comptage peut paraître une stratégie de résolution élémentaire, mais avec cette procédure il est déjà possible de s'appuyer sur la structure de la suite, en entrevoyant la régularité du *pattern* grâce à une décomposition spatiale et perceptive. Ceci implique que la première étape du processus de généralisation, l'identification d'une propriété commune entre différents éléments (Radford,

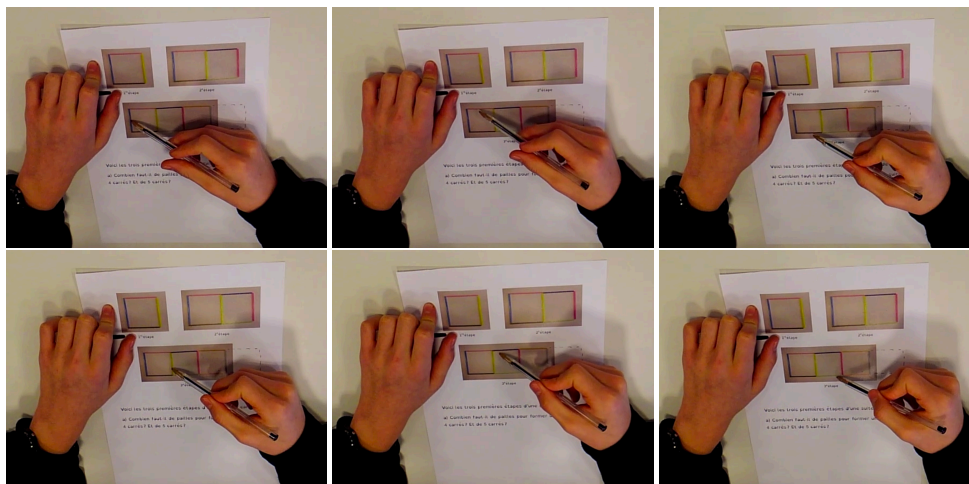


Figure 9.9 – Comptage structuré des premières six pailles de *La suite de carrés* par l'Élève 14. Il pointe avec le stylo toujours dans le même ordre : sur le côté, en haut, en bas.

2008), peut être accomplie grâce au dessin et comptage. Par exemple, l'Élève 14 compte de manière structurée les pailles des carrés en faisant preuve d'une certaine *régularité en acte*. Il pointe avec le stylo toujours dans le même ordre pour compter les pailles : sur le côté, en haut, en bas (figure 9.9).

Nous avons pu observer chez quelques élèves diverses décompositions de la représentation de la suite afin de faciliter le comptage. Certaines de celles-ci sont, contrairement à l'exemple rapporté en figure 9.9, moins adaptées à une généralisation, car elles ne permettent pas d'identifier la propriété commune entre les différentes étapes. Par exemple, pour trouver le nombre de pailles pour quatre carrés, l'Élève 18 propose la décomposition suivante.

22 - Elève 18 : Du coup, j'ai regardé le carré comment ça sera. Là on sait qu'il y en a 4 [en pointant les pailles du premier carré], du coup l'autre bout aussi il y en a 4 [en pointant les pailles du quatrième carré]. Du coup, j'ai fait plus 3 [en pointant les pailles du haut, du bas et de droite du deuxième carré] plus 2 [en pointant les pailles du haut et du bas du troisième carré].

Procédure erronée : dessin erroné et comptages

La possibilité de représenter graphiquement la suite s'est démontrée fondamentale également en cas de reproduction erronée de celle-ci. Il est ainsi possible d'identifier les représentations incorrectes et de relancer adéquatement. Au cours de nos entretiens, cinq élèves (tableau 9.2) ont proposé une représentation erronée de la suite à l'étude, quatre élèves avec MLD et une sans.

Comptage et calcul

Comme il ressort du tableau 9.2, la procédure par comptage et calcul a été utilisée par la totalité des élèves sauf les élèves 9 et 21. Il s'agit donc d'une procédure très fréquente. Il est à noter qu'il n'y a pas de différence substantielle entre élèves avec ou sans MLD. Cette procédure peut avoir ses racines dans le dessin et comptage, duquel il est parfois difficile de la différencier. L'extrait qui suit se trouve à la frontière entre le dessin et comptage et le comptage et calcul, avec une représentation du quatrième carré imaginé et parallèlement l'identification d'une relation de récurrence entre un élément et le suivant.

11 - Chercheuse : D'accord. Et donc pour 4 carrés? Combien de pailles?

12 - Élève 8 : 13.

13 - Chercheuse : Qu'est ce que t'as fait? Comment t'as fait pour obtenir 13?

14 - Élève 8 : Euh là, une là... J'en ai imaginé une là, une là, une là [*en indiquant les 3 pailles à ajouter pour le quatrième carré*].

Le recours au comptage et calcul est souvent lié à la prise de conscience que deux carrés adjacents partagent une paille, ou autrement dit, qu'il n'y a pas de relation de proportionnalité entre le nombre de carrés et le nombre de pailles :

15 - Chercheuse : Oui. Est-ce que... Pour la deuxième étape, qu'est-ce que tu ferais donc?

16 - Élève 6 : Ah bah, la deuxième étape, il y en a 8. Il y a 8 pailles. Attendez... 1, 2, 3, 4, 5 [*il compte les pailles pour les 2 carrés*]... Ah! Mais comme elles sont reliées, ça fait qu'il y a 7 pailles. Ah! Je n'avais pas compris. [*Il compte les pailles pour les 3 carrés*] en fait il y en a 10 sur 3. Ah, ça je n'avais pas compris au début.

17 - Chercheuse : Ah non mais c'est pas grave. On est encore au début de toute façon.

18 - Élève 6 : D'accord [*il lit à voix basse la consigne*]. Comme à chaque fois... Ouais, pour une suite de 5, il en faudrait 16 normalement.

Procédure erronée : relation de proportionnalité

Ainsi qu'il résulte du tableau 9.2, la plupart des élèves ont, à un moment ou à un autre, manifesté avoir une représentation de la suite impliquant la proportionnalité, tant parmi les élèves avec MLD que parmi les élèves sans MLD. Seulement les élèves 3 et 9, les deux avec MLD, n'ont pas fait référence à une telle vision. Vu sa fréquence, nous avons choisi de mentionner cette procédure erronée, parmi d'autres possibles.

Cette représentation de la suite peut être généralisée ou pas. Par exemple, l'Élève 8 propose une généralisation factuelle à 100 carrés avec la relation incorrecte de proportionnalité.

88 - Chercheuse : Toujours la même tâche. On fait toujours sur ça et la question est maintenant : combien de pailles pour 100 carrés?

...

123 - Élève 8 : ... Il faut 300 pailles pour faire 100 carrés.

124 - Chercheuse : Comment tu as fait?

125 - Élève 8 : Ben j'ai fait, ben 1, 2, 3. 1, 2, 3. 1, 2, 3. On doit faire fois 3. Là on va à 100, faut 100 carrés. Du coup j'ai fait fois, du coup j'ai mis... 300. Parce que 3 fois 100 ça fait 300.

Par contre, dans l'extrait qui suit, l'Élève 11 n'utilise que localement la relation de proportionnalité.

3 - Chercheuse : D'accord? Regarde ces photos, il y a les 3 premières étapes d'une suite de carrés. C'est la première étape. La deuxième, la troisième. Et la question est combien faut-il de pailles pour former une suite de 7... Pardon, de 4 carrés?

4 - Élève 11 : [*Inaudible*] ...

5 - Chercheuse : Qu'est ce que t'as dit, pardon?

6 - Élève 11 : Non, je réfléchis... De 5 pailles non... 20?

7 - Chercheuse : Qu'est ce que tu as fait?

8 - Élève 11 : J'ai compté les pailles qu'il y avaient dans un seul, il y en avait 4. Si on fait plus 4, plus 1, ça fait 8. Encore 1 ça fait 12 et plus 1 ça fait 16 encore 1, ça fait 20.

Comme il ressort de deux exemples précédents, différentes relations erronées de proportionnalité sont possibles : $\#pailles = 3 \cdot \#carres$, $\#pailles = 4 \cdot \#carres$ et d'autres encore sont émergés pendant les entretiens.

Non seulement la représentation de la suite comme relation de proportionnalité est très fréquente, mais elle est aussi assez résistante chez les élèves. Il est commun que cette représentation soit proposée à plusieurs reprises chez la ou le même élève aussi après une ou plusieurs autocorrections. Cette résistance nous l'avons rencontrée chez les élèves avec MLD (par exemple les élèves 7, 13 et 22), mais également chez les élèves sans MLD (l'Élève 16).

Le fait que la relation entre nombre de pailles et nombre de carrés n'est pas une relation de proportionnalité pose une difficulté dans la modélisation du problème, car il est nécessaire de faire intervenir deux opérations (addition et multiplication) à la place d'une seule. Cela est évident dans l'échange avec l'Élève 22.

248 - Chercheuse : Mh mh. Mais je comprends. C'est un exercice très difficile. C'est normal, si on galère un peu à arriver à la solution. Qu'est-ce qui n'est pas logique, pour toi?

249 - Élève 22 : Parce que si c'est vraiment des multiplications, on devra faire fois 3. Je sais pas quoi... Mais quand on les compte, mais du coup, c'est pas des multiplications, ça fait pas le même nombre.

250 - Chercheuse : Mh mh. Oui, parce qu'il y a encore un petit bout qui manque. C'est-à-dire que tu es sur la bonne route, mais il y a un petit bout qui manque.

...

259 - Élève 22 : 4. Non, pas pour chaque carré du coup. Pour le premier carré, il y en aura 4, mais pour les autres, il y en aura toujours 3.

...

264 - Chercheuse : Parfait. Très bien. Est-ce que ce que tu viens de dire tu n'arrives à l'utiliser?

265 - Élève 22 : Ben non, parce que du coup, si on les multiplie, on ne peut pas parce que là [*en pointant la photo de l'étape 3*] j'aurais pu faire fois 3. Ou bien fois 4, mais vu que le premier en a 4 et l'autre y en a 3, moi je peux pas les multiplier les 2, pour refaire une suite.

Généralisation arithmétique

La plupart des élèves ont montré au cours de l'entretien une généralisation arithmétique : douze sur dix-huit (tableau 9.2). Parmi les élèves avec MLD, onze sur quinze y ont eu recours. Parmi les élèves sans MLD, seulement une sur trois a utilisé une procédure arithmétique.

Quelques élèves proposent une généralisation arithmétique qui se fonde sur une représentation proportionnelle de la suite. Par exemple, l'Élève 1 :

93 - Chercheuse : Alors je te pose encore une question. On se demande si en connaissant le nombre de carrés, on peut toujours trouver le nombre de pailles.

94 - Élève 1 : Théoriquement, oui, on pourrait. Ce serait peut-être un peu plus compliqué il faudra peut-être se baser sur une aide. Par exemple 10 carrés est égal 31 pailles. Mais sinon on pourrait.

95 - Chercheuse : Quelle serait la stratégie que tu pourrais utiliser?

96 - Élève 1 : Celle que j'utiliserais, du coup, ça sera du coup celle des 10 carrés [*en indiquant « 31 (10 carrés) »*]. Du coup, pour arriver plus vite, du coup, au nombre voulu.

L'Élève 1 généralise, car il propose une procédure qui est applicable à tout nombre : se réduire à un cas connu (dix carrés dans l'exemple donné par l'Élève 1) qui soit diviseur du cas à l'étude. Pourtant, il ne fournit pas une formule directe qui permette de calculer le nombre de pailles pour tout nombre de carrés, en produisant ainsi une généralisation arithmétique.

La seule élève sans MLD à avoir utilisé la généralisation arithmétique est l'Élève 17, qui se démontre y être particulièrement attachée. En effet, pour trouver le nombre de pailles pour cent carrés, elle décompose correctement la suite en paquets de vingt carrés et additionne le nombre de pailles nécessaires (figure 9.10 à gauche) :

33 - Chercheuse : D'accord. Ok. Je vais avec la question d'après? Toujours même tâche, combien de pailles pour former une suite de 100 carrés?

34 - Élève 17 : [*L'élève dessine sur sa feuille un croquis de la suite de 100 pailles. Elle commence avec un rectangle qui représente 12 carrés. Elle note 12 dans le rectangle. Elle écrit quelques calculs sur les marges de la feuille, puis les efface. Elle continue son croquis en ajoutant un rectangle qui représente 7 carrés.*]

...

44 - Élève 17 : Bah là j'ai fait... J'ai essayé d'en trouver pour faire 20. Au début, j'ai cru que c'était 7, c'était une petite erreur. Donc, il en fallait 61. Après, j'ai fait la même chose pour 20. Sauf qu'il y avait une paille de moins, parce qu'il y a déjà 1 côté là. Ça fait 60. J'ai fait la même chose il y a une paille encore de moins.

...

52 - Élève 17 : ... [*elle écrit le calcul en colonne suivant : « 60 + 61 + 60 + 60 ».*] Donc il en faudra 241.

53 - Chercheuse : Alors...

54 - Élève 17 : Ah non, bah non, j'ai oublié un 60. [*L'élève écrit le calcul en colonne suivant : 241 + 60 = 301.*]

La généralisation arithmétique par paquets de l'Élève 17 fonctionne assez bien, car elle a une bonne maîtrise des calculs arithmétiques et sa procédure marche sans trop d'erreurs. Le fait de gérer avec aisance les nombres élevés ne lui fait pas ressentir la nécessité de généraliser algébriquement à ce stade. Pour favoriser la création d'une généralisation algébrique, nous avons dû relancer avec 5000 carrés. L'Élève 17 a encore essayé de trouver la solution avec une procédure arithmétique par paquets (figure 9.10 à droite), mais sans y parvenir.

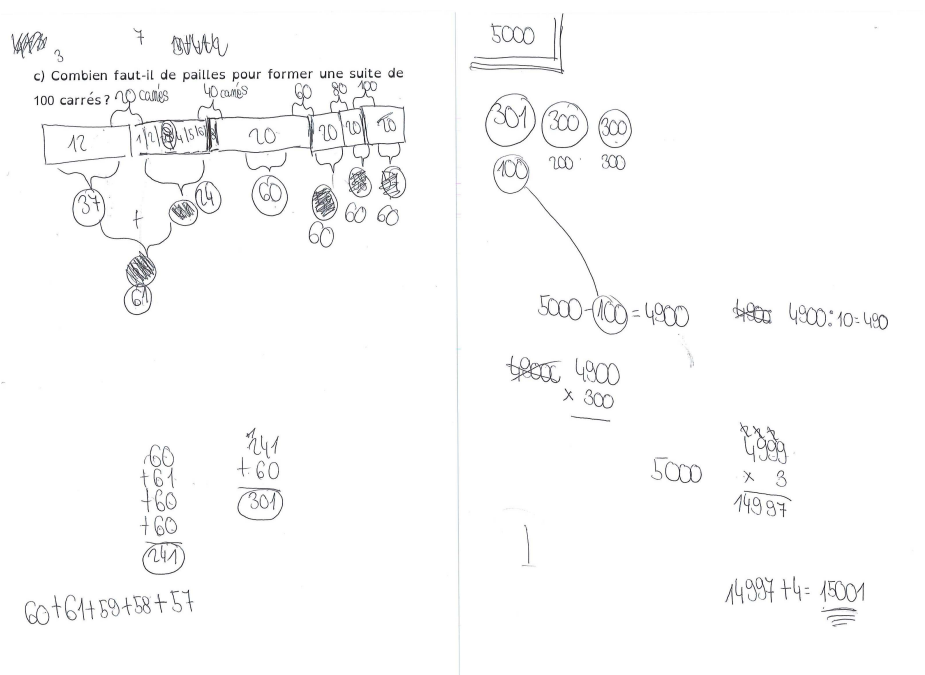


Figure 9.10 – Résolution par généralisation arithmétique de la sous-tâche c) (100 carrés) de *La suite de carrés* par l'Élève 17 (à gauche). Début de résolution par généralisation arithmétique de la relance à 5000 carrés de *La suite de carrés* par l'Élève 17 (à droite). Cette résolution se conclut avec une généralisation factuelle.

Induction naïve

En ce qui concerne l'induction naïve, trois élèves avec MLD et une sans y ont eu recours (tableau 9.2). Il n'est pas possible d'établir une véritable différence entre élèves avec ou sans MLD du fait du faible effectif concerné par cette procédure.

Généralisation factuelle

Comme résumé dans le tableau 9.2, treize élèves sur dix-huit ont mis en place une généralisation algébrique factuelle. Parmi les élèves avec MLD, cinq n'ont pas proposé de généralisation factuelle. Néanmoins, les élèves sans MLD ont toutes produit une généralisation factuelle. Nous pouvons donc voir une certaine différence entre les deux populations.


Parmi les différentes productions d'élèves, nous voulons ici mettre en évidence celle de l'Élève 21, élève avec MLD, pour les quatre et cinq carrés (figure 9.11 en haut à gauche).

21 - Chercheuse : Ok? Donc. Combien de pailles pour 4 carrés?


...

24 - Élève 21 : On a 4 pailles en haut, ensuite 4 pailles en bas [en notant « 4 » et « 4 » en « colonne »]. Puis ensuite, on aura dans les intersections et on aura 3 inter-

- a) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés? Et de 5 carrés?
- b) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 12 carrés?

$$\begin{array}{l} 4 \\ 4 \end{array} \quad 3 \times 2 = 13$$


$$\begin{array}{l} 5 \\ 5 \end{array} \quad 4 \times 2 = 16$$

$$\begin{array}{l} 12 \\ 12 \end{array} \quad 2 = 22$$


- c) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 100 carrés?

$$\begin{array}{l} 5000 \\ 5000 \end{array} \quad 4999 \times 2 = 15000$$

$$\begin{array}{l} 100 \\ 100 \end{array} \quad 99 \times 2 = 301$$

Figure 9.11 – Résolution par généralisation factuelle de la sous-tâche a) (4 et 5 carrés) de *La suite de carrés* par l'Élève 21 (à gauche en haut). Résolution par généralisation factuelle de la sous-tâche b) (12 carrés) de *La suite de carrés* par l'Élève 21 (à droite en haut). Résolution par généralisation factuelle de la relance à 5000 carrés de *La suite de carrés* par l'Élève 21 (à gauche en bas). Résolution par généralisation factuelle de la sous-tâche c) (100 carrés) de *La suite de carrés* par l'Élève 21 (à droite en bas).

sections, celles-là, là [*en pointant les pailles verticales de la photo 3, mais la première. Elle écrit « 3 » à côté des « 4 »*].

25 - Chercheuse : Oui.

26 - Élève 21 : Plus les 2 du bout, donc ça fait plus 2 [*elle écrit « 2 » à côté du « 3 »*].

27 - Chercheuse : Mh mh.

28 - Élève 21 : Du coup... Du coup, en tout, pour tout, là, c'est égal à 13, donc ça fait 13 pailles [*elle écrit « =13 »*].

29 - Chercheuse : Parfait. Très bien. Et pour les 5 carrés?

...

32 - Élève 21 : Ah, pour 5 carrés on fait la même chose, mais pour les 5.

33 - Chercheuse : Mh mh.

34 - Élève 21 : Du coup, il y en aura 5 en haut, 4 au milieu et toujours 2 sur les côtés [*elle écrit « 5 » et « 5 » en colonne, « 4 » et « 2 » à côté des « 5 »*]. Du coup, ce sera 16 [*elle écrit « =16 »*] pailles.

L'élève 21 propose une généralisation factuelle pour les 4 et 5 carrés en identifiant la régularité de la suite et les caractéristiques en commun entre les différents éléments. La procédure de cette élève est remarquable, car en général, pour des étapes si petites, les stratégies favorisées sont le dessin et comptage ou le comptage et calcul. L'élève 21, par contre, se focalise sur la structure de la suite en utilisant les caractéristiques en commun entre les figures pour généraliser. Nous pouvons noter l'importance donnée à la disposition spatiale des nombres (figure 9.11) : le même

nombre répété deux fois en colonne correspond aux pailles « en haut » et « en bas », après il y a le nombre de pailles qui correspond aux « intersections » et pour finir il y a toujours 2 qui correspond aux pailles aux extrémités. Cette même structure est proposée pour les 12 carrés (figure 9.11 en haut à droite), pour les 100 carrés (figure 9.11 en bas à droite) et pour les 5000 carrés (figure 9.11 en bas à gauche). Ce lien entre la formule factuelle et la disposition spatiale aidera la transition vers la généralisation factuelle et celle contextuelle.

Généralisation contextuelle

Dix élèves ont mis en place une généralisation algébrique contextuelle (tableau 9.2). Parmi les élèves avec MLD, sept ont produit une généralisation contextuelle. Les trois élèves sans MLD ont toutes eu recours à une généralisation contextuelle. Seulement trois élèves qui avaient produit une généralisation factuelle n'en produisent pas une contextuelle (élèves 11, 13 et 14). En plus, la sous-tâche d) n'a pas été proposée à l'Élève 13. Toutes ces considérations nous amènent à soutenir que la grande difficulté pour les élèves réside dans la généralisation algébrique, et l'écart entre généralisation factuelle et contextuelle n'est pas si important. Cette considération est également confirmée par le fait que dans plusieurs entretiens que nous avons menés après un long travail pour faire ressortir une généralisation factuelle, la production d'une généralisation contextuelle arrive assez naturellement (par exemple dans les entretiens avec les élèves 16 et 22).

Un phénomène assez répandu que nous avons pu observer est de répondre à la sous-tâche d), qui était pensée pour favoriser l'émergence de la généralisation contextuelle, avec une généralisation factuelle en choisissant un exemple générique. Cela est visible dans l'échange avec l'Élève 14 ci-dessous.

81 - Chercheuse : . . . en connaissant le nombre de carrés, pourrais-tu toujours trouver le nombre de pailles ?

82 - Élève 14 : Ah... Ben oui, parce que c'est le calcul que je viens de faire là.

83 - Chercheuse : Et alors comment tu ferais ?

84 - Élève 14 : Bas comme ici. Je prendrais, par exemple 12 pailles... Il faudrait faire 12 fois 4 parce que du coup, il y a 4 pailles dans un carré et vu qu'il y a 12 carrés... 12 fois 4 égal 48... Du coup, il y en aurait 11 sur 12 qui manquent. Et du coup, il faudrait faire 48 moins 11, 7... Du coup ça fait 37, en tout il y aurait 37 pailles dans 12 carrés.

85 - Chercheuse : Oui, très bien, et donc pour... Si, en général, tu connais le nombre de carrés, comment tu fais ?

86 - Élève 14 : En général, si on connaît déjà le nombre de carrés ?

87 - Chercheuse : Oui, si, tu vois, en connaissant le nombre de carrés, comment peux-tu trouver le nombre de pailles?

88 - Élève 14 : En faisant comme ça [il indique ses calculs avec l'exemple générique du 12], parce que là, je savais qu'il y avait 12 carrés.

L'Élève 14 reconnaît la généralité de la situation en liant le cas proposé à celui des cent carrés (« le calcul que je viens de faire ») et en produisant une généralisation factuelle pour les douze carrés pour exemplifier le cas général.

Généralisation algébrique symbolique standard

En ce qui concerne la généralisation symbolique standard, seulement deux élèves y ont eu recours : l'Élève 18 et l'Élève 21 (tableau 9.2). Le manque d'utilisation de cette procédure n'est pas étonnant, car, à part l'Élève 18, les élèves de notre échantillon n'avaient pas encore étudié le symbolisme algébrique standard dans leur scolarité au moment des entretiens.

L'Élève 21, de son côté, met en place un type de généralisation qui a des caractéristiques à la fois de la contextuelle et de la standard (figure 9.12).

167 - Chercheuse : ... Et si on connaissait ce nombre de carrés?

168 - Élève 21 : Oui. On pourrait savoir combien de pailles y aurait.

169 - Chercheuse : Ah oui? Et comment tu ferais avec ce nombre?

170 - Élève 21 : Si on prend le nombre en question... Je ne sais pas, je représente juste le nombre par un rond.

171 - Chercheuse : Très bien.

172 - Élève 21 : On devra juste faire ce rond en question fois 2, égal un nombre quelconque vu que c'est un nombre qu'on ne connaît pas [elle écrit « $O \times 2 = OO$ »], mais, du coup, vu qu'il y a tous ceux d'en haut qui sont... Disons que s'il y a, ce nombre c'est le nombre de fois qu'il y a 1 carré avec un certain nombre de pailles, ça veut dire... De toute façon, on doit faire, vu qu'il a ce nombre de pailles qui sera 2 fois dans le calcul, il sera de toute façon 2 fois [elle écrit « O » et « O » en colonne], sinon...

173 - Chercheuse : Oui.

174 - Élève 21 : Et il y aura, toujours ce nombre moins 1 dans la suite du calcul. Plus, si on part toujours du principe que c'est des carrés, plus 2 par la suite [elle écrit « $OOO-1+2$ »].

175 - Chercheuse : Mh mh.

176 - Élève 21 : Qui resoudra toujours à ta-ta-ta... Fin, ces [en écrivant « = OOO »]...

177 - Chercheuse : C'est quoi ton ta-ta-ta?

Figure 9.12 – Résolution par généralisation contextuelle et symbolique de la sous-tâche d) (nombre quelconque de carrés) de *La suite de carrés* par l'Élève 21.

178 - Élève 21 : C'est un nombre. Un nombre final. Mais en soi, le but du calcul, c'est de prendre 2 fois le nombre qu'on a...

179 - Chercheuse : Oui...

180 - Élève 21 : Moins ce nombre... Fin, moins 1 de ce nombre, plus ce qu'on a trouvé là [*en cerclant « O O »*], plus ensuite les 2 qui vont venir par la suite. Et on va trouver le nombre final [*en pointant « OOO »*].

Nous avons jugé opportun de présenter cet épisode dans le paragraphe sur la généralisation standard, car il est particulièrement intéressant que cette élève avec MLD ayant d'importantes difficultés en mathématiques ait produit de son propre gré une généralisation avec un symbolisme très similaire à celui standard ¹⁰.

Dans l'extrait rapporté ci-dessus, l'Élève 21 montre un début de généralisation standard au moment où elle propose de symboliser la variable avec un « rond ». En même temps, la généralisation reste liée aux caractéristiques spatio-temporelles de la suite. Cela est évident, entre autres, de la disposition spatiale des ronds (figure 9.12) qui reprennent la disposition utilisée pour la généralisation factuelle (figure 9.11).

9.2.3 Points remarquables de l'analyse *a posteriori*

Dans cette section, notre focale porte sur certains aspects des analyses *a posteriori*. Nous souhaitons approfondir ici certains éléments complémentaires, en particulier, nous exposons des considérations relatives aux difficultés rencontrées par les élèves.

Confusion pailles/carré

Une difficulté que les élèves ont rencontrée fréquemment est la confusion entre pailles et carrés. L'Élève 9 en donne un bon exemple (figure 9.13) :

10. Même si l'Élève 21 n'avait pas encore abordé l'étude du symbolisme algébrique standard à l'école, il est bien évidemment probable qu'elle avait déjà rencontré à quelque occasion dans son expérience d'élève. D'ailleurs, notre échantillon comprend des élèves de la 9S à la 11S, et l'Élève 21 fréquentait la 11S, donc la classe la plus avancée.

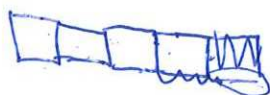


Figure 9.13 – Résolution par dessin et comptage de la sous-tâche b) (12 carrés) de *La suite de carrés* par l'Élève 9.

19 - Chercheuse : D'accord. Alors maintenant, je te pose une autre question. C'est toujours la même tâche, ok? C'est juste la question d'après. Et pour 12 carrés?

...

22 - Élève 9 : [Elle dessine 4 carrés et un bout, elle a dessiné les carrés en utilisant 12 pailles] Il en faut 12.

Erreurs de calcul

Les erreurs de calcul ont été assez fréquentes pendant les entretiens sur *La suite de carrés*. Souvent, les erreurs de calcul peuvent accompagner un raisonnement correct, comme dans le cas de l'Élève 22.

49 - Chercheuse : Mh mh. Ok, donc, on fait un petit résumé de ce qu'on a trouvé jusqu'à maintenant? 1 carré, combien de pailles?

50 - Élève 22 : 4.

51 - Chercheuse : Oui. Et pour les 2 carrés?

52 - Élève 22 : 8.

53 - Chercheuse : Pourquoi tu dis 8? Comment tu as fait pour trouver 8?

54 - Élève 22 : J'ai rajouté plus 3.

55 - Chercheuse : C'est-à-dire, tu as fait plus 3 quoi?

56 - Élève 22 : Plus 3 pailles.

57 - Chercheuse : De... Oui, mais à partir quel nombre?

58 - Élève 22 : De 4.

59 - Chercheuse : Ok.

60 - Élève 22 : J'avais 4 plus 3.

61 - Chercheuse : Et ça donne?

62 - Élève 22 : Ah, mais ça fait 7 en fait. Ça fait 7.

Malgré les erreurs de calcul, le bon raisonnement peut ressortir en interrogeant en profondeur l'élève. En effet, à une première lecture, on pourrait associer l'erreur de l'Élève 22 qui trouve huit pailles pour deux carrés à une représentation de la suite basée sur une relation de proportionnalité entre pailles et carrés, représentation que l'élève n'a pas en ce cas.

Ce qui émerge de cette constatation est que des erreurs de calcul peuvent cacher ce qu'il y a de correct dans la procédure des élèves, et cela est particulièrement vrai pour des élèves avec MLD pour lesquels les erreurs de calcul peuvent être assez fréquentes (Geary, 2011).

Difficulté de l'analyticité

L'analyticité a été une source de difficulté pour les élèves. Les élèves ont, en général, reconnu que la réponse à la sous-tâche d) « En connaissant le nombre de carrés, pourrais-tu toujours trouver le nombre de pailles? » était affirmative. Mais comprendre et expliquer comment n'a pas été si simple. La possibilité d'opérer sur et avec un nombre inconnu, dans ce cas le nombre de carrés, pose problème aux élèves. L'élève 3 communique très bien cette difficulté :

83 - Chercheuse : D'accord. Toujours le même exercice, toujours la même tâche. Et maintenant, on se demande, en connaissant le nombre de carrés, peut-on toujours trouver le nombre de pailles?

84 -  l ve 3 : Je sais pas.

85 - Chercheuse : La question est claire ou pas trop?

86 -  l ve 3 : J'en sais rien. Parce que  a dépend.

87 - Chercheuse :  a dépend de quoi?

88 -  l ve 3 :  a dépend dans le nombre de carrés. Et du coup, ils n'ont pas compté. Et du coup, ils n'ont pas mis le numéro combien il y en a. Du coup... Après dire je ne sais pas trop.

9.2.4 La pensée des élèves avec MLD et celle des élèves sans MLD

Le tableau 9.2 montre un clair écart entre les élèves avec MLD et les élèves sans MLD. Les élèves sans MLD (en jaune dans le tableau) sont arrivées toutes les trois à mettre en place des généralisations factuelles et contextuelles.

Il n'est pas de même pour les élèves avec MLD. Il est vrai que tout l'échantillon avec MLD (sauf l'élève 5) généralise, soit arithmétiquement soit algébriquement. Cependant, la généralisation algébrique apparaît plus difficile à atteindre, car un tiers des élèves avec MLD n'y parviennent pas. Il est intéressant de noter que, aussi parmi les élèves avec MLD, la difficulté principale est la production d'une généralisation factuelle, la contextuelle en découlant après assez naturellement.

  partir de ces constats, nous pouvons donc déduire que les élèves avec MLD éprouvent plus de résistance à montrer une pensée algébrique que les élèves sans MLD.

En même temps, le fait que deux tiers des élèves avec MLD produisent une généralisation algébrique montre que ces élèves peuvent mettre en place une pensée algébrique et qu'il est intéressant et fructueux de leur proposer des tâches construites pour la faire émerger.

D'ailleurs, parmi les élèves avec MLD de notre échantillon, nous avons pu interviewer l'Élève 21, qui non seulement a généralisé factuellement et contextuellement, mais a également abordé une première généralisation standard. De l'autre côté, nous avons pu constater chez les élèves sans MLD certaines des mêmes difficultés que les élèves avec MLD. Par exemple, l'Élève 16 a proposé un dessin incorrect de la suite (figure 9.7) et a opposé particulièrement résistance à abandonner une représentation proportionnelle de la suite.

Pour conclure, nous constatons que, bien qu'il y ait une différence de fréquence entre les deux populations, nous n'avons pas trouvé de différence qualitative entre les procédures utilisées ou les difficultés rencontrées.

9.3 Analyse de la tâche *Nombres pairs/impairs*

La tâche *Nombres pairs/impairs* a été analysée avec la typologie de preuve de Balacheff, présentée à la section 4.4, selon la grille décrite dans 8.4.3.

Ce que nous présentons dans ce qui suit concerne à la fois la tâche dans sa formulation originale (impair plus impair) et dans ses formulations comme relances (pair plus pair, impair plus pair et pair plus impair).

9.3.1 Procédures identifiées lors de l'analyse *a priori*

Dans la section qui suit, nous présentons les principales procédures de résolution de la tâche *Nombres pairs/impairs*¹¹ (déjà identifiées dans l'analyse *a priori*, page 272) au moyen des productions des élèves.

Empirisme naïf

Une première approche de la tâche peut être l'empirisme naïf. Pour répondre à la question posée, les élèves donnent un ou plusieurs exemples sur lesquels la propriété est vraie. Par exemple, l'Élève 15 répond ainsi (voir aussi la figure 9.14) : « [Elle écrit « $9 + 11 = 20$ » et « $1 + 3 = 4$ »] Ça marche. Ça donne tout le temps un nombre pair. » La chercheuse relance en demandant à l'Élève 15 si cela est toujours vrai.

7 - Chercheuse : Et à ton avis, ça marche toujours ?

11. Le texte complet de la tâche se trouve à la page 253.

En additionnant deux nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair ?

$$9 + 11 = 20$$

$$1 + 3 = 4$$

$$103 + 111 = 114$$

Figure 9.14 – Résolution écrite par empirisme naïf et expérience cruciale de la tâche *Nombres pairs/impairs* par l'Élève 15.

8 - Élève 15 : Oui.

9 - Chercheuse : Pour tous les nombres ?

10 - Élève 15 : Oui.

11 - Chercheuse : Comment tu peux dire cela ?

12 - Élève 15 : Je ne sais pas... je ne sais pas.

13 - Chercheuse : Ça va continuer comme ça, ou à un certain moment on peut avoir l'addition entre 2 nombres impairs qui ne donne pas un pair ?

14 - Élève 15 : Non, ça ne s'arrête jamais.

15 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu as fait pour dire cela ?

16 - Élève 15 : [L'élève écrit « $103 + 111 = 114$ »] J'ai fait 130 [sic] plus 111.

Expérience cruciale

À la ligne 16 de l'échange ci-dessus, l'Élève 15 met en place une autre procédure possible, l'expérience cruciale. Pour s'assurer de la vérité de la proposition, elle prend en considération un exemple qui, à ses yeux, est si peu particulier tel qu'il en fournit une preuve suffisante. En présentant de grands nombres, l'Élève 15 consolide la généralité de l'affirmation. Cela est bien expliqué par l'Élève 22 : « Toujours quand on les additionnera, au final, ça sera toujours un nombre pair. Même si c'est des petits nombres ou des grands nombres ».

Exemple générique

Quelques élèves font usage de l'exemple générique pour résoudre cette tâche. Dans ce cas, la preuve est encore liée à un exemple numérique particulier, mais celui-ci est utilisé en tant que représentant d'une certaine famille d'objets en ayant les propriétés caractéristiques. En guise d'exemple, voici l'explication de l'Élève 21, accompagné par le croquis en figure 9.15.

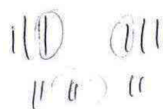


Figure 9.15 – Représentation de l'exemple générique donné par l'Élève 21 en résolvant la tâche *Nombres pairs/impairs*.

13 - Chercheuse : Très bien, oui, c'est ça. Donc, on se demande si en additionnant 2 nombres impairs, on obtient un nombre pair.

14 - Élève 21 : Je dirais que non. Fin... Non, c'est pas vrai, si on fait 3 plus 3, par exemple, ça ferait 6 et 6, ça donne un nombre pair parce que si on prend 3 bâtonnets, plus 3 bâtonnets [*elle dessine 2 groupes de 3 bâtonnets*]... C'est pour dire les 3, il y en avait 2 avant dans une paire, en soi, qui était tout seul [*en entourant l'unité pas « en couple » de chaque groupe de 3*]. Puis du coup, là, ça en fait 1 [*elle dessine les 6 bâtonnets en groupes de 2 et entoure ensemble les 2 unités pas « en couple » précédemment*]. Du coup, on peut en faire un nouveau.

15 - Chercheuse : Ok, ok, et donc ok, très bien. Et donc, est-ce que c'est vrai ou pas?

16 - Élève 21 : En principe, si on fait à chaque fois on additionne juste 2 nombres, oui, ça marche.

17 - Chercheuse : 2 nombres, comment?

...

20 - Élève 21 : Impairs. Vu qu'il en y a toujours 1 dans les nombres impairs qui est tout seul, mais en mettant 2 ensemble, ce qui est tout seul, il n'est plus tout seul.

L'Élève 21 utilise le cas $3+3$ (figure 9.15) comme représentant de l'addition entre un couple quelconque d'impairs. Cela est évident du fait qu'elle identifie dans les deux termes des unités qui étaient déjà « en couple » et une unité par terme qui était « tout seul ». Cette considération relève de la vision du 3 comme nombre impair quelconque, vu comme des groupes des 2 plus une unité seule. Les deux unités toutes seules vont former un nouveau couple quand on additionne $3 + 3$, et donc le résultat (6) est pair, car formé par ce nouveau groupe de 2 et les couples déjà présents dans chacun des 3.

Expérience mentale

La dernière phrase de l'Élève 21 à la ligne 20 ci-dessus montre le passage qu'elle fait vers l'expérience mentale. L'élève se détache ici du représentant particulier et l'intériorise en arrivant à proposer une preuve qui ne se réfère plus au cas $3 + 3$ mais qui peut s'appliquer à toutes les additions entre deux impairs. Ici, l'Élève 21

propose une généralisation des nombres impairs comme $2n + 1, n \in \mathbb{N}$ avec une formule contextuelle, sans utiliser le symbolisme littéral standard.

Preuve intellectuelle arithmétique

Quelques élèves ont mis en place une procédure sur la base des chiffres des unités des nombres en jeu. Par exemple, l'Élève 16 a raisonné comme il suit (voir aussi la figure 9.16).

6 - Élève 16 : Oui, ça fait toujours un nombre pair.

7 - Chercheuse : Comment tu sais? Qu'est-ce que tu as fait dans ta tête pour dire cela?

8 - Élève 16 : J'ai essayé plusieurs calculs avec deux nombres impairs et ça donnait toujours des nombres pairs. Mais peut-être qu'il y a des exceptions.

9 - Chercheuse : Comment être sûr qu'il n'y a pas d'exceptions?

10 - Élève 16 : Mettre tous les nombres pairs et tous les nombres impairs et tous les calculer ensemble.

11 - Chercheuse : Par exemple, comment tu ferais? Vas-y, tu peux écrire!

12 - Élève 16 : [*L'élève écrit une première ligne avec les pairs « 0 2 4 6 8 » et une deuxième ligne « 1 3 5 7 9 »*] Et du coup on les fait tous. Là ça fait [*en reliant « 0 » et « 1 » et après en se rendant compte que c'est 2 impairs qu'elle doit prendre en considération*]... Ben non, en fait. Là ça fait 3 plus [*elle relie le « 1 » avec les autres impairs*]... 1 plus 3 ça fait 4. Là si on fait fait 1 plus 5, ça fait 6. 1 plus 7, ça fait 8. Là ça fait 10 [*en reliant « 1 » et « 9 »*]. Ici [*elle relie le « 3 » avec les autres impairs*], ça fait toujours 4. Là, ça fait 8. Ici ça fait 10. Et là, ça fait 12. Et 5 [*elle relie le « 5 » avec tous les autres*] ici, ça fait 6. Là ça fait 12. Ici, ça fait 14. [*Elle relie le « 7 »*] 7 plus 1 ça fait 8. 7 plus 3 ça fait 10. 7 plus 5, 12. 7 plus 9, 16. Et du coup [*elle passe au « 9 »*] 9 plus 7, 16. 9 plus 5, 14. 9 plus 3, 12. 9 plus 1, 10.

13 - Chercheuse : Et donc, après avoir fait cela, tu peux conclure que si on fait l'addition entre tous les nombres, entre n'importe quels 2 nombres impairs, on obtient un pair?

14 - Élève 16 : Oui.

15 - Chercheuse : Pourquoi tu peux le conclure aussi pour des grands nombres, par exemple?

16 - Élève 16 : Parce que les grands nombres, ce qui compte pour que ça soit pair ou impair c'est toujours le dernier chiffre à la fin. Et comme le dernier chiffres à la fin, il est soit pair soit impair. Et c'est un de cela [*en pointant sa ligne des nombres impairs*].

En additionnant deux nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair ?

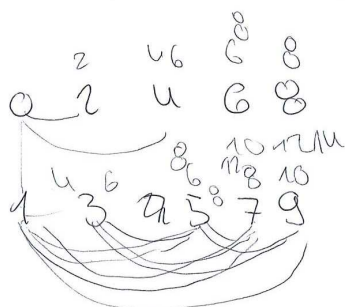


Figure 9.16 – Résolution de la tâche *Nombres pairs/impairs* de l'Élève 16 par preuve intellectuelle arithmétique sur la base de derniers chiffres des nombres.

La procédure de l'Élève 16 est correcte en base dix, bien qu'elle ne fasse pas référence à la conception de pairs (impairs) comme des entiers qui sont (ne sont pas) multiples de 2. L'élève s'assure que les sommes de toutes les combinaisons possibles d'impairs soient paires (sauf les doubles) et remarque que le raisonnement est valide pour tous les impairs, car la parité du résultat ne dépend que des chiffres des unités.

Nous ne nous attardons pas ici sur la procédure par preuve intellectuelle algébrique décrite dans l'analyse *a priori* (voir B.4), car elle n'est pas à la portée des élèves de l'échantillon de ce travail de thèse.

9.3.2 Procédures identifiées lors de l'analyse *a posteriori*

Lors de l'analyse *a posteriori* nous avons retrouvé les différentes procédures identifiées avec l'analyse *a priori*. Dans le tableau 9.3, nous avons résumé les procédures utilisées par notre échantillon. Nous avons noté la présence d'une procédure si elle a été employée au moins une fois au cours de l'entretien, y compris comme résolution d'une des relances proposées¹². Une même procédure a pu être utilisée plusieurs fois par les mêmes élèves, mais cette information n'apparaît pas dans le tableau. Comme pour les tâches précédentes, il ne s'agit pas d'un tableau de fréquence des procédures, mais simplement de leur présence. Nous avons fait le choix de noter dans le tableau 9.3 la présence d'une procédure même celle-ci n'était pas complète ou complètement correcte.

12. Par exemple, la somme de deux pairs ou la somme de deux multiples de 3. Pour plus de précisions sur les relances, voir l'analyse *a priori* à la page 272.

Tableau 9.3 – Les stratégies utilisées par les élèves pour la tâche *Nombres pairs/impairs*. En jaune, les élèves sans MLD. Pour le détail sur chaque élève, consulter le tableau à la page 107.

#	Contrexemple	Empirisme naïf	Expérience cruciale	Exemple générique	Expérience mentale	Preuve intellectuelle arithmétique
1	X	X	X			
2	Écarté : trouble du spectre de l'autisme					
3		X				
4	X	X				
			X			
5		X				
			X			
6		X	X			
			X			
7		X				
8		X				X
9		X				
			X			
10	Écarté : trouble du spectre de l'autisme					
11	X	X	X			
12	X	X				
13	X	X				
			X			
14		X		X		
			X		X	
15		X	X			X
			X			
16	X	X	X			X
			X			
17		X			X	X
18		X	X	X	X	X
19	Écarté : haut potentiel soupçonné					
20	Écarté : haut potentiel soupçonné et une vidéo sans son					
21		X		X	X	
22	X	X	X			
Total	7	18	7	3	3	5
			8		1	

Différentes conceptions des nombres pairs/impairs

La plupart des élèves ont su montrer leur capacité à reconnaître les nombres pairs et impairs. Seulement l'Élève 11 et l'Élève 12 ont eu besoin que la chercheuse leur rappelât la définition, conformément à l'analyse *a priori* (page 272). Pour l'Élève 12, voici la relance qui a été faite :

7 - Chercheuse : ... Alors, un nombre pair est un nombre qui est multiple de 2. Ça, c'est un nombre pair. C'est-à-dire qu'un nombre pair est un nombre qui peut être divisé par 2. Un nombre entier, qui peut être divisé par 2...

À part ces deux exceptions, les élèves ont su montrer une forme de conception¹³ (au moins partiellement) correcte de nombre pair et impair. Pour cela faire, trois

13. Nous nous limitons ici à une signification courante du mot « conception », sans rentrer dans des considérations théoriques du terme.

manières ont été utilisées. Une première possibilité consiste à fournir des exemples, en sachant que la liste pourrait être étendue, comme le fait l'Élève 5.

3 - Chercheuse : On veut comprendre si en additionnant 2 nombres impairs, on obtient toujours un nombre pair. Est-ce que tu te rappelles ce que c'est un nombre pair, un nombre impair ?

4 - Élève 5 : Pair, c'est genre 2, 4 et tout ça, et impair c'est 1, 3 et 5.

5 - Chercheuse : D'accord. Il y a aussi d'autres nombres pairs et impairs ou il y a juste les nombres que tu m'as dit ?

6 - Élève 5 : Il y en a d'autres aussi.

7 - Chercheuse : Oui ? Par exemple ?

8 - Élève 5 : Pair genre 2, 4, 6, 8, 10, 12 ça. Et impair 1, 3, 5, 7, 9, 11.

9 - Chercheuse : Oui et après c'est fini ou il en y a encore d'autres ?

10 - Élève 5 : Il y en a encore d'autres.

Une deuxième manière comporte la référence au chiffre des unités d'un nombre entier. Il s'agit d'une définition correcte en base dix, bien que cela ne soit pas suffisant mathématiquement.

1 - Chercheuse : Ok, d'accord. Alors je prends ça. Maintenant, on veut comprendre si, en additionnant 2 nombres impairs, on obtient toujours un nombre pair. Tu sais ce qu'est pair et impair ?

2 - Élève 16 : Oui.

3 - Chercheuse : Qu'est-ce que c'est ?

4 - Élève 16 : Impair c'est tout ce qui finit par 1, 3, 5, 7 et 9. Et pair c'est ce qui finit par 0, 2, 4, 6, 8.

La conception de l'Élève 16 est problématique, car elle n'est correcte que dans le cas de nombres entiers et cette contrainte n'est pas toujours claire pour les élèves.

Une troisième voie repose sur la définition de nombre pair comme multiple de 2 et de nombre impair comme nombre entier non multiple de 2.

3 - Chercheuse : ... On veut comprendre, si, en additionnant 2 nombres impairs, on obtient toujours un nombre pair. Est-ce que c'est clair la question ?

4 - Élève 8 : Oui. Les nombres impairs c'est les nombres qu'on ne peut diviser par 2 ?

5 - Chercheuse : Mh mh.

6 - Élève 8 : Ok.

7 - Chercheuse : Et un nombre pair ?

8 - Élève 8 : C'est un nombre qu'on peut diviser par 2.

Les élèves ont parfois basculé d'une conception à l'autre au cours de l'entretien. Par exemple, pour répondre à la demande de la chercheuse de dire ce qu'est un nombre impair et pair, dans l'extrait ci-dessous l'Élève 6 donne d'abord une liste d'exemples de nombres pairs avec une caractérisation incorrecte « tu peux le multiplier par 2 » et il identifie de façon erronée les impairs comme multiples de 3. Après avoir listé correctement des pairs et des impairs comme demandé par la chercheuse, il identifie une certaine régularité (« c'est à chaque fois plus 2 »). En dernier, il caractérise les nombres pairs et impairs comme multiples ou pas de 2.

53 - Chercheuse : Est-ce que tu sais me dire qu'est ce que c'est un nombre impair ?

54 - Élève 6 : Ben par exemple, tu ne pourras jamais... Tu ne pourras... J'arrive pas trop.

55 - Chercheuse : Sinon, un nombre pair. Tu sais ce que c'est un nombre pair ?

56 - Élève 6 : Tu peux le multiplier par 2. 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18...

57 - Chercheuse : D'accord. Et donc, qu'est-ce que c'est un nombre impair ?

58 - Élève 6 : Ben, c'est tous les par 3. 1... 1, 3, 6, 9, 12.

59 - Chercheuse : Tu saurais m'écrire, peut-être dans un côté de la feuille les nombres pairs et de l'autre les nombres impairs ? Quelques-uns.

60 - Élève 6 : Ok. [Il écrit « 1, 3, 6, 9 »] Non, mais pas 6 ! [Il efface tout et reprend « 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 » et « 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 »]. Voilà.

61 - Chercheuse : D'accord. Ok. Donc très bien. Avant, tu m'as dit que les nombres...

62 - Élève 6 : Oui, non, mais non je me suis trompé avant.

63 - Chercheuse : C'est-à-dire ?

64 - Élève 6 : C'est parce que, en fait, là si tu fais 1, 3 [en pointant la liste d'impairs]... En fait là c'est 1, 3 mais en fait c'est à chaque fois plus 2. Là ça fait 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13. Là ça fait 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 et ainsi de suite.

65 - Chercheuse : Ok, donc. Maintenant que tu les a écrit, est-ce que tu sais m'expliquer comme si je ne savais pas ce qu'est un nombre pair ?

66 - Élève 6 : Euh... 3... Là je n'arrive pas trop... Oui, je crois que j'ai ! Par exemple un chiffre pair tu peux le diviser par 2. Ça représente 1, là, 2, là 3, là 4, là 5, là 6 et là 7 [en pointant sa liste de nombres pairs]. Par exemple, là ça fera 0,50. Là 1,5. Là 2,5. Là 3,5. Là 4,5. Là 5,5. Et 6,5 [en pointant sa liste de nombres impairs].

Bien évidemment, les conceptions de pair et impair auxquelles les élèves font référence influencent les procédures utilisées. Les données montrent toutefois qu'il est possible de mettre en place différents types de preuve pour chacune des conceptions utilisées.

Empirisme naïf

À la lecture du tableau 9.3, il est évident qu'indépendamment de la conception de nombre pair et impair utilisée, les élèves ont fait un usage intensif de l'empirisme naïf. La totalité des élèves a mis en place ce type de résolution à un moment ou à un autre de leur résolution. Parfois l'empirisme naïf est constaté de manière indirecte, non pas à travers l'observation d'exemples, mais grâce à la description de ces exemples qu'en fait l'élève après les avoir implicitement utilisés.

32 - Élève 9 : ... Alors oui, toujours. On met toujours un nombre pair ¹⁴.

33 - Chercheuse : Quel est ton raisonnement pour le dire?

34 - Élève 9 : Parce qu'à chaque fois qu'on prend un nombre, avec un autre nombre, du nombre impair, ça fait un nombre pair.

35 - Chercheuse : Tu le dis parce que tu as fait quelques exemples dans ta tête?

36 - Élève 9 : Oui.

Expérience cruciale

La répétition d'empirisme naïf peut amener les élèves à prendre en considération la généralisation de la situation, comme dans l'échange précédent quand l'Élève 9 dit que « à chaque fois... ça fait un nombre pair ». Pour ce type d'interventions, nous avons fait le choix de noter dans le tableau 9.3 une procédure à cheval entre empirisme naïf et expérience cruciale, avec une case qui prend les deux colonnes. En effet, c'est dans la répétition d'empirismes naïfs qu'apparaît l'expérience cruciale, car dans la répétition d'exemples ceux-ci sont présentés de manière à poser effectivement le problème de la généralisation. Cela est spécialement évident dans l'entretien avec Élève 11, où l'expérience cruciale se manifeste exactement grâce à cette répétition qui permet à l'élève de prendre en compte la généralisation et de décider autrement que péremptoirement.

45 - Chercheuse : ... Alors... À ton avis, si je fais un nombre pair plus un autre nombre pair? Le résultat, comment il sera?

46 - Élève 11 : Pair.

47 - Chercheuse : Comment tu sais?

48 - Élève 11 : Ba, si on met 12 plus 12 ça fait 24 et si on me 14 plus 14 ça fait 28 et c'est tout le temps pair, sinon 4 plus 4 ça fait 8, 6 plus 6 ça fait 12, 8 plus 8 ça fait 16, c'est tout le temps pair.

49 - Chercheuse : Et cela est vrai pour tous les nombres pairs?

14. Cette phrase signifie que la somme entre deux impairs est toujours paire.

Figure 9.17 – Résolution de la tâche *Nombres pairs/impairs* de l'Élève 14 par exemple générique à gauche et à cheval entre exemple générique et expérience cruciale à droite.

50 - Élève 11 : Oui.

51 - Chercheuse : Comment tu sais ?

52 - Élève 11 : Si on continue après... Si on fait 2 [sic] plus 2 [sic] ça fait 24 et si on fait 24 plus 24 ça fait 48 et c'est tout le temps pair.

Le tableau 9.3 montre une difficulté assez répandue à se détacher de l'empirisme naïf et de l'expérience cruciale. Onze élèves sur les dix-huit qui font partie de notre analyse se limitent à ces deux procédures. Cela semble être particulièrement vrai chez les élèves avec MLD, qui dans certains cas ne manifestent pas d'autres types de résolution malgré les multiples relances. Toutefois, nous soulignons que les deux procédures ont eu un rôle majeur aussi chez l'Élève 15, élève sans MLD qui en a eu recours pendant la quasi-totalité de l'entretien.

Exemple générique

Seulement trois élèves se servent de l'exemple générique, l'Élève 14, l'Élève 18 et l'Élève 21, dans les trois cas élèves avec MLD. Nous avons déjà présenté l'exemple générique de l'Élève 21 à la page 167. L'Élève 14 réalise cette procédure pour un sous-cas très particulier du problème donné, le double d'un nombre pair ou impair. Cela lui permet de mettre en place un raisonnement basé sur la réciprocity entre la division et la multiplication vue comme addition réitérée (voir aussi la figure 9.17).

10 - Élève 14 : Du coup, je pourrais prendre, par exemple... 7 plus 7, 14, qui se divise aussi par 2. Ba, oui, parce que du coup, à chaque fois qu'on fait un nombre impair plus un autre nombre impair, le même [en pointant 7 sur son exemple], ça donne ce chiffre [en pointant 14] et ce chiffre, il est pair parce que du coup, à chaque fois, on peut le diviser par 2 pour que ça donne 7... Fin, pour que ça donne le... [En pointant 7].

Expérience mentale

Il émerge de l'extrait précédent une tension vers l'expérience mentale. La référence au représentant particulier ($7 + 7 = 14$) est encore présente. Cela est évident

aussi grâce à la vidéo et aux gestes de l'élève qui pointe aux nombres 7 et 14. La dernière phrase de l'élève met en évidence la volonté de se détacher de ce cas spécifique quand l'élève remplace le mot « sept » (« pour que ça donne 7 ») par l'exclusif geste de pointage au « 7 » (« Fin, pour que ça donne le... [En pointant 7] ») sans pourtant trouver la manière de l'exprimer avec une expression du type « le nombre de départ ». L'Élève 14 trouve une manière pour exprimer cela plus tard dans l'entretien, en manifestant une procédure à cheval entre l'exemple générique et l'expérience mentale (voir aussi la figure 9.17).

26 - Élève 14 : Parce que, du coup, si on met 2 chiffres pairs qui sont les mêmes... 5 plus 5 [sic] égal 10 [il pose le calcul], on peut toujours les diviser par 2 parce que de toute façon, ça donnera les 2 qu'on a fait plus.

Comme le présente le tableau 9.3, l'expérience mentale est exploitée par quatre élèves sur dix-huit. Pour l'Élève 17 et l'Élève 18, cette procédure a été mise en place après la relance à propos de la somme de deux multiples de 3, relance qui a favorisé le détachement de la conception de pair et impair comme un entier avec un certain chiffre des unités et facilité la vision des multiples d'un certain nombre comme composé par des paquets d'unités de ce même nombre.

Preuve intellectuelle arithmétique

Quatre élèves sur dix-huit mettent en œuvre une preuve intellectuelle arithmétique (tableau 9.3) basée sur le dernier chiffre des nombres pairs et impairs dans leur écriture en base dix. Cette preuve est liée à la conception de pair comme nombre qui se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8.

Contre-exemples

Pendant l'analyse, nous avons remarqué des stratégies que nous n'avions pas évoquées dans l'analyse *a priori*. Comme rapporté dans le tableau 9.3, cinq élèves utilisent des contre-exemples pour prouver que l'affirmation « En additionnant deux nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair ? » est fausse. Par exemple, l'Élève 4 explique comme suit son raisonnement :

11 - Chercheuse : ... Alors, on veut comprendre si, en additionnant 2 nombres impairs, on obtient un nombre pair.

12 - Élève 4 : Non.

13 - Chercheuse : Ok, alors... Pourquoi ?

14 - Élève 4 : Comme si je fais 7 plus 7, ça fait 14.

15 - Chercheuse : Oui...

16 - Élève 4 : Si je fais...

17 - Chercheuse : Donc 14 est pair ou impair ?

18 - Élève 4 : Impair.

Il est vrai que les contre-exemples sont faux, étant donné que l'affirmation en objet est vraie. Cette procédure mérite pourtant d'être soulignée, car le raisonnement par *contre-exemple* est connu en littérature comme une étape fondamentale dans le processus de conjecture et de preuve (Lockwood et al., 2016). Il est ainsi intéressant de noter que dans notre étude plusieurs élèves avec MLD y ont eu recours, malgré leurs difficultés en mathématiques. D'autres élèves, comme l'Élève 18, utilisent au contraire la notion de contre-exemple pour étayer correctement leur idée que la somme est paire, en disant de ne pas avoir trouvé des cas où l'affirmation n'est pas vérifiée.

1 - Chercheuse : ... On veut comprendre si en additionnant 2 nombres impairs, on obtient toujours un nombre pair. Tu te rappelles ce que c'est un nombre pair, un nombre impair ?

2 - Élève 18 : Oui, oui bien sûr. Bah en soi... en faisant des exemples. Par exemple 3 plus 3 ça fait 6. 3 plus 7 ça fait 10. 3 plus 11 ça fait 14. En soi oui, je pense que ça sera toujours comme ça, c'est qu'il y a quelque chose de logique derrière. En tout cas, je n'ai pas d'exemple qui me vient, qui, où ce serait pas possible.

Dans le cadre de cette thèse, nous n'analysons pas plus que cela cet aspect, qui pourtant est très riche. En effet, l'utilisation des contre-exemples a plusieurs aspects (Lakatos, 1984) et son emploi, avec celui des exemples, s'avère être fondamentale pour l'apprentissage des mathématiques et de la preuve (Lockwood et al., 2016).

Non-exemple

L'Élève 8 a utilisé un non-exemple, c'est-à-dire un exemple de quelque chose qui ne correspond pas à l'objet en question (Tsamir et al., 2008), pour mieux saisir les propriétés du cas à l'étude. Il se sert d'un exemple (la somme de deux pairs) qui ne représente pas ce qu'il veut regarder (la somme entre un pair et un impair) pour comprendre la structure en bénéficiant de la comparaison des deux cas (voir aussi la figure 9.18).

69 - Chercheuse : Et si on fait impair plus pair ?

...

$$I + P =$$

$$9 + 4 = 13$$

$$19 + 10 = 29$$

$$18 + 10 = 28$$

Figure 9.18 – Résolution de la tâche *Nombres pairs/impairs* de l'Élève 8 en s'appuyant sur un non-exemple.

- 85 - Chercheuse :** On se demande juste si la... Si, quand je fais l'addition, le résultat est pair ou impair et s'il est toujours pair ou toujours impair.
- 86 - Élève 8 :** Okay, ça peut pas être les 2?
- 87 - Chercheuse :** Je ne sais pas. Peut-être. On va regarder.
- 88 - Élève 8 :** [Il écrit « $19 + 10 = 29$ », « $18 + 10 = 28$ »].
- 89 - Chercheuse :** Tu as envie de m'expliquer un moment ce que tu fais?
- 90 - Élève 8 :** Je fais des calculs plus ou moins au hasard. Pour voir si c'est... enfin avec des nombres impairs là [en pointant le « 19 »] et des nombres pairs et pairs [en pointant « 18 » et « 10 »]. Comme ça je me demande... Pour les comparer.
- 91 - Chercheuse :** D'accord. Et à quelle question tu es en train de répondre, là?
- 92 - Élève 8 :** Celle si les chiffres impairs plus pairs font des chiffres impairs ou pairs.
- 93 - Chercheuse :** Juste une petite question, alors, pourquoi tu as écrit 18 plus 10?
- 94 - Élève 8 :** Pour pouvoir les comparer.
- 95 - Chercheuse :** C'est-à-dire?
- 96 - Élève 8 :** Voir qu'est ce qui change entre les 2. Je pense que ce sera des chiffres tout le temps impairs.

Généralisation à tous les multiples d'un nombre quelconque

Pour terminer cette section, nous évoquons un type d'observation digne de mention que nous avons remarquée chez quelques élèves. Après avoir eu la relance à propos de la somme de deux multiples de 3, 4 ou autres nombres, quelques élèves généralisent l'affirmation en constatant qu'elle est vraie pour les multiples de n'importe quel nombre. L'échange avec l'Élève 14 est particulièrement intéressant.

- 69 - Chercheuse :** Ok, alors je te pose encore une question [elle l'écrit et la lui montre]. En additionnant 2 multiples de 3, est-ce qu'on obtient toujours un multiple de 3?...

70 - Élève 14 : Ok [il pose les calculs « $3 + 6$ », « $3 + 3$ », « $3 + 9$ », « $6 + 9$ »]... divisé par 3, ça fait 3. 3... 6... divisé par 3. Donc là ça fait 4. Oui, Je pense on obtient toujours un multiple de 3.

...

75 - Chercheuse : Et si, par exemple, si je fais l'addition entre 2 multiples de 4?

76 - Élève 14 : [Il pose les calculs « $4 + 4$ » et « $4 + 8$ »] Oui, je pense, ça marche, quand on fait chaque multiple plus le... Par exemple, si on prend un multiple de 5 plus un autre multiple de 5, ça donnera tous... Ça donnera de toute façon un multiple de 5. Si on prend un multiple de 7, et on fait plus un autre multiple de 7, ça donnera toujours un multiple de 7. Je pense, ça marche pour tous les multiples.

77 - Chercheuse : Et pourquoi?

78 - Élève 14 : Parce que c'est comme ça qu'on a fait où il y avait... Je crois que c'était... Oui, c'est possible que ça soit là. Avec les chiffres pairs, c'est pareil. Quand on fait 4 plus 4, ça fera forcément 8, qui est pair parce que du coup, 4 et 4, c'est pair. Et si on fait 2 chiffres pairs, c'est obligé que ça donne un nombre pair. Donc si on fait 2 chiffres d'un même multiple, c'est pareil. C'est presque... C'est obligé que ça fasse un chiffre du même multiple.

À partir de quelques exemples particuliers, l'Élève 14 conjecture d'abord que l'affirmation est vraie pour les multiples de 3 et 4. Cela le conduit à essayer avec des multiples d'autres nombres et à l'étendre aux multiples de 5 et de 7. Cette répétition d'exemples pour lesquels l'affirmation est vraie amène l'élève à la généraliser en conjecturant qu'elle est correcte pour les multiples de tout nombre. Bien que l'élève ne propose pas une preuve à part celles relevant de l'empirisme naïf, cette observation est déjà remarquable. En effet, on assiste à un glissement du niveau de généralisation : non seulement l'affirmation proposée est généralisée à tous les multiples d'un tel nombre, mais elle est généralisée à tous les multiples d'un nombre quelconque.

9.3.3 Points remarquables de l'analyse *a posteriori*

Dans cette section, notre focale porte sur certains aspects des analyses *a posteriori*, en approfondissant ici certains éléments complémentaires. En particulier, nous abordons : les relances proposées, le statut des doubles, le rôle des exemples et un aspect de difficulté de la preuve.

Les relances

Dans notre analyse *a priori* (page 272), nous avons identifié, parmi d'autres, deux relances qui méritent un commentaire *a posteriori*. Au cas où l'élève se contenterait de l'empirisme naïf ou de l'expérience cruciale, nous avons demandé comment expliquer à quelqu'un que l'affirmation en objet est vraie sans faire des calculs. Cette relance ne s'est pas avérée très efficace afin de favoriser d'autres procédures. Dans cette situation, les élèves ont répondu qu'il n'était pas possible, qu'elles ou ils ne savaient pas répondre ou parfois simplement en reformulant l'affirmation en étude, comme l'Élève 8 : « Je dirais que les chiffres impairs plus des chiffres pairs ça fera toujours des chiffres impairs. » L'Élève 9 contourne la relance en déléguant à la personne imaginaire d'effectuer les calculs, en manifestant encore un raisonnement basé sur l'empirisme naïf.

45 - Chercheuse : Est-ce que ce qu'on arriverait à l'expliquer à quelqu'un sans utiliser des calculs, sans faire de calculs?

46 - Élève 9 : Je dirais à une personne, par exemple, de prendre que les nombres entre 1 et 11. D'abord, pour commencer. À écrire 2 fois un nombre n'importe. Par exemple 3 plus 5 tout et qu'il voit combien ça fait. Si ce sera égal à ces nombres là [*en pointant sa liste de nombres pair*].

47 - Chercheuse : Oui. Et là, là, on utilise à nouveau des calculs. N'est-ce pas?

48 - Élève 9 : Non.

49 - Chercheuse : Non?

50 - Élève 9 : Non.

51 - Chercheuse : Pourquoi?

52 - Élève 9 : Parce que j'ai expliqué sans calcul.

53 - Chercheuse : Ah d'accord, c'est la personne qui doit faire le calcul. Oui, je comprends...

En revanche, la relance qui propose de se focaliser sur la somme entre deux nombres pairs en cas de blocage s'est révélée particulièrement utile. Cela offre aux élèves un contexte à la fois connu et innovant. Il s'agit en effet d'un cas similaire à celui de l'addition entre deux nombres impairs, et il est possible d'y transposer tous les raisonnements précédemment construits. Cependant, la situation proposée est nouvelle pour l'élève qui peut recommencer à résoudre sans la frustration naturelle que l'on peut éprouver en n'arrivant pas à résoudre la même tâche pendant longtemps. De surcroît, en général les élèves connaissent mieux le fonctionnement des nombres pairs que ceux des impairs, donc la consigne est tout de suite mieux comprise et cela leur permet de se dédier directement à la recherche d'une justification

en en connaissant déjà la réponse.

Les doubles

En abordant la tâche avec l'empirisme naïf, une grande partie des élèves donne des exemples où la somme considérée est le double d'un certain nombre. Par exemple, voici un extrait de l'entretien de l'Élève 4 : « Comme si je fais 7 plus 7, ça fait 14... Tout ça fait pair. 3 plus 3, ça fait 6, c'est pair. Attendez. 5 plus 5 ça fait 10, c'est pair. » Treize élèves sur les dix-huit démarrent la résolution avec ce type d'addition, il s'agit donc d'une famille d'exemples très fréquemment exploitée. Parmi les élèves qui ne les ont pas utilisés, nous assistons néanmoins à l'attribution d'un rôle spécial aux doubles. Par exemple, l'Élève 15 demande explicitement s'il faut prendre deux fois le même nombre : « Le nombre impair, ça doit être le même chiffre impair ? »

Les élèves élargissent leur champ d'exemples aux non-doubles au fil de l'entretien grâce à leurs observations ou après une relance de la chercheuse. Cependant, la tendance à recourir aux doubles semble résistante aux relances. Par exemple, l'Élève 22 commence sa réflexion au sujet de la somme de deux impairs avec des doubles. Après relance elle passe à des exemples en considérant des non-doubles, mais pour examiner le cas de l'addition entre deux nombres pairs elle utilise à nouveau des doubles. La chercheuse la relance une deuxième fois et à la toute fin de l'entretien l'Élève 22 revient encore une fois sur les doubles.

1 - Chercheuse : Et j'ai encore quelques questions pour toi. En additionnant 2 nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair ?

...

8 - Élève 22 : Ah ouais... Ah ouais ! [Elle efface « $3 + 3 = 9$ »] Bon. Mais du coup. Oui, je crois alors oui. C'est partout un pair si [inaudible]. Parce que 3 plus 3, 6. 5 plus 5, 10. 7 plus 7, 14. 9 plus 9, 18 [en écrivant les différents exemples]. Donc oui, ça sera toujours la même chose.

9 - Chercheuse : D'accord. Et est-ce que c'est vrai même si les deux nombres impairs ne sont pas le même ?

...

12 - Élève 22 : Ah. Non, je ne crois pas. Je ne sais pas, je vais essayer. Ba, déjà là ça fait 8 [elle écrit « $5 + 3 = 8$ »], 7 plus 5, 12 [elle écrit l'exemple]. 9 plus 7, 16 [elle écrit l'exemple]. Oui, ça marche aussi.

...

25 - Chercheuse : D'accord. Et alors, qu'est-ce qui se passe si je fais un nombre pair plus un autre pair ? Tu vois, j'ai écrit P et P pour pair plus pair [en écrivant « $P + P$ »] ?

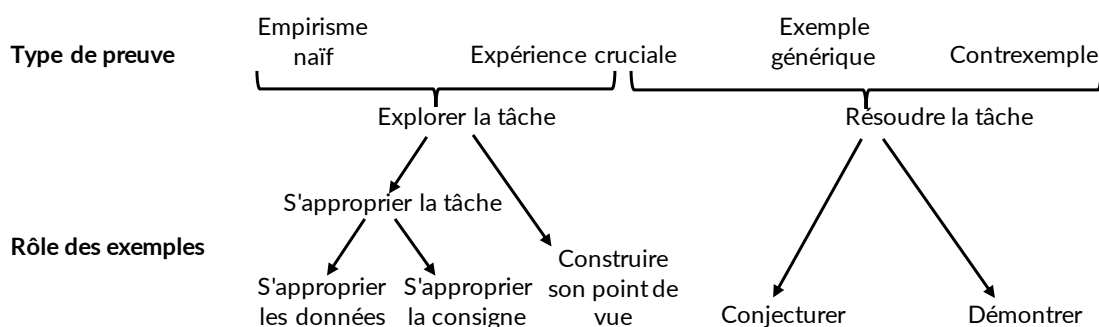


Figure 9.19 – Les rôles des exemples des différents types de preuve.

26 - Élève 22 : C'est pareil, je crois. Parce que par exemple, 2 plus 2, 4. 10 plus 10, 20. 6 plus 6, 12 [en écrivant les différents exemples]. C'est pareil qu'ici. Mais... Oui, c'est bon.

...

29 - Chercheuse : D'accord. Est-ce que ça marche aussi quand les 2 nombres ne sont pas le même ?

30 - Élève 22 : Et oui, bah oui, du coup. Si je mets 10 plus 6, ça fera 16. Si je mets 6 plus 2, ça fera 8. Et si je mets 8 plus 4, ça fera 12 [en écrivant les différents exemples]. Du coup là ça marche aussi.

...

126 - Élève 22 : Par exemple, si je prends 2 plus 2, ça sera 4. 6 plus 6, ça fera 12. Fin, on aura toujours des nombres pairs...

L'utilisation des doubles favorise d'ailleurs la mise en place de procédures particulières et raisonnements valides uniquement dans ce cas spécifique, par exemple comme pour l'exemple générique de l'Élève 14 à la page 175.

Les rôles des exemples

Comme nous l'avons déjà évoqué à la page 174, les élèves ont fait un usage intensif de l'empirisme naïf pour résoudre *Nombres pairs/impairs* (tableau 9.3). Cela implique une riche production d'exemples utilisés à des fins diverses. En conséquence, la tâche en objet s'avère être particulièrement propice à l'étude des rôles des exemples dans la preuve. Nous avons ainsi pu identifier cinq fonctions différentes pour lesquelles les exemples ont été employés. Nous les avons schématisés en fonction du type de preuve associée (figure 9.19) et nous les décrivons dans les paragraphes qui suivent.

Les exemples relevant d'empirisme naïf et d'expérience cruciale sont utilisés pour *explorer la tâche*. Dans un premier temps l'élève a recours à des exemples pour

s'approprier la tâche pour pouvoir ensuite *construire son point de vue*. L'appropriation de la tâche par l'élève est un moment capital et cette phase peut être divisée en deux parties : appropriation des données et appropriation de la consigne.

Face à des tâches mathématiques particulièrement exigeantes, les élèves peuvent avoir des difficultés à comprendre ce qui est demandé. Une première étape consiste donc en *s'approprier les données*, et cela est souvent fait à travers la création d'exemples de données. Dans l'extrait suivant, l'Élève 1 produit différents exemples de nombres pairs (4, 6, etc.) et impairs (5, 7, 9, etc.) qui lui permettent d'en donner une définition (« impair c'est un nombre qu'on ne peut pas avoir par 2 »), qui à son tour génère la production d'autres exemples (« par exemple pair, ça va être 2, 4, 6, 8, 10 et impair ça va être 1, 3, 5, 7, 9 »).

1 - Chercheuse : . . . Alors, on veut comprendre si en additionnant 2 nombres impairs, on obtient toujours un nombre pair.

2 - Élève 1 : Impair c'est...

3 - Chercheuse : Qu'est-ce que c'est un nombre... Tu te rappelles pair-impair qu'est-ce que c'est?

4 - Élève 1 : Pair, c'est par exemple 4 et impair c'est 5.

5 - Chercheuse : Est-ce que t'as d'autres exemples de nombres pairs?

6 - Élève 1 : Nombre pair il y a 6. Et après comme nombre impair il y a 7 et 9. Non il n'y a pas 9.

7 - Chercheuse : 9 est pair ou impair?

8 - Élève 1 : 9 c'est impair.

9 - Chercheuse : D'accord. Comment tu les reconnais les nombres pairs ou les nombres impairs?

10 - Élève 1 : Les nombres pairs ou impairs?

11 - Chercheuse : Oui.

12 - Élève 1 : Impair c'est un nombre qu'on ne peut pas avoir par 2. Par exemple pair, ça va être 2, 4, 6, 8, 10 et impair ça va être 1, 3, 5, 7, 9.

Être à l'aise avec les données de la tâche ouvre la voie à *s'approprier la consigne*. Certains exemples en effet sont produits par les élèves non pas pour résoudre la tâche, mais déjà pour la découvrir. Ainsi, l'Élève 18 crée un exemple pour s'assurer qu'elle a bien compris ce qui est demandé par la chercheuse.

31 - Chercheuse : Ouais. Alors maintenant, je te pose une autre question. On se demande si en additionnant 2 nombres qui sont des multiples de 3, on obtient encore un multiple de 3. La question est-elle claire?

32 - Chercheuse : ... Du même... du coup, du même multiple... Donc ça donne... Ah je vois. D'accord, en additionnant par exemple, 3 et 12. Est-ce que ça donne un multiple de 3?

33 - Chercheuse : Oui, exactement.

Dans l'extrait suivant, l'Élève 13 met en place plusieurs exemples pour s'approcher la tâche et pour comprendre les propriétés des nombres de départ et de la somme.

7 - Chercheuse : Tu te rappelles ce que c'est un nombre pair ou impair?

8 - Élève 13 : Oui. Pair c'est quand ils sont par exemple 1, 3. C'est juste? 7, tout ça, c'est juste?

9 - Chercheuse : Mh mh.

10 - Élève 13 : Bah, on peut faire par exemple 3 plus 3, ça fait 6. Et 6 c'est un nombre... Non non... 6 c'est un nombre pair. Impair c'est... On peut faire 1 plus 2, ça fait, 3, c'est nombre impair.

11 - Chercheuse : Ok. Qu'est ce que tu as fait là?

12 - Élève 13 : Je fais 1 plus 2 ça fait un nombre impair. Parce que moi, je travaille plutôt des nombres pairs, parce que tous mes exercices, sont vraiment pairs, pairs, pairs. C'est pour ça que là je me dis il ne faut pas chercher loin, je suis tout près. En plus, ça fait 3.

13 - Chercheuse : Mais et donc, pourquoi tu as pris 1 et 2?

14 - Élève 13 : Parce que 1 et 2 ça fait 3 et 3 c'est un nombre impair. Par exemple, si je faisais 2 plus 2, ça me fait 4. 4 c'est pas un nombre impair, c'est un nombre pair.

15 - Chercheuse : Oui d'accord. Et donc, comment cet exemple t'aide à répondre à la question?

16 - Élève 13 : En addition des nombres. Un pair [*inaudible*]. Non non! Qu'est-ce que je fais là c'est faux. Voilà, là c'est bon. Parce qu'il a dit qu'il obtient 2 nombres impairs et en fait il additionne 2 nombres impairs. 3 et 7 sont des nombres impairs et en fait on obtient un nombre pair. 10 est un nombre pair.

Quand la consigne est acquise, les exemples peuvent être utilisés par l'élève pour *construire son point de vue* à propos de la vérité de l'affirmation à l'étude. À ce stade, l'élève est toujours dans l'exploration de la tâche, la certitude de son point de vue sur l'énoncé n'est pas encore établie et n'est donc pas stable et peut changer. Il est possible de reconnaître la construction de points de vue par des expressions comme « je crois » ou par l'incertitude à propos de l'idée exprimée. L'Élève 7 en offre un bon exemple dans l'extrait qui suit.

65 - **Chercheuse** : À ton avis, si je prends 2 nombres qui sont...

66 - **Élève 7** : Impair et pair ?

67 - **Chercheuse** : Exactement...

68 - **Élève 7** : Genre... Euh. Je crois que ça va nous former un nombre... Ah non, les nombres impairs ? Ça va nous donner plus de nombres impairs que de pairs. Parce que si tu fais 2 plus 3, 5. 2 plus 1, 3. Ouais. ça va quand même former des nombres impairs.

69 - **Chercheuse** : Et c'est toujours comme ça ?

70 - **Élève 7** : Je pense... Genre... 3 plus 4... Ouais toujours ça.

La répétition de l'empirisme naïf et le recours à l'expérience cruciale consolident le niveau de certitude des élèves qui peuvent exprimer leur *conjecture*. La conjecture se différencie de la construction du point de vue dans le degré de confiance que les élèves y confient. Quand les élèves conjecturent, elles et ils font une affirmation mathématique et ne sont plus dans l'exploration, mais déjà dans la *résolution de la tâche*. C'est l'accumulation de différents exemples et la prise en compte de la généralité de la situation qui amène à la conviction à propos d'une certaine affirmation et à formuler une conjecture. Dans l'épisode suivant, l'Élève 6 commence à produire des exemples qui lui permettent de se construire un point de vue. La répétition d'exemples qui montrent les mêmes caractéristiques et l'expérience cruciale à la ligne 18 permettent à l'élève de formuler la conjecture de la ligne 20.

1 - **Chercheuse** : ... Alors on veut comprendre, si en additionnant 2 nombres impairs, on obtient toujours un nombre pair.

2 - **Élève 6** : Par exemple... Ben, 1 ça fait 2, 3 ça fait 6... 10... Ben, oui !

3 - **Chercheuse** : Qu'est-ce que tu as fait ?

4 - **Élève 6** : Chaque fois, enfin 1 plus 1 ça fait 2. Après 3 plus 3, ça fait 6. Après forcément 5 plus 5 10. Après de suite quoi, ça ne va pas changer.

5 - **Chercheuse** : Et tu peux même additionner 2 nombres impairs qui ne sont pas les mêmes.

6 - **Élève 6** : Par exemple 33 et 45 ?

7 - **Chercheuse** : Par exemple. Oui.

8 - **Élève 6** : Euh ça fait 78. Ah ben ouais. C'est vrai.

9 - **Chercheuse** : Et donc, ta réponse est oui. Est-ce que à ton avis, c'est vrai toujours ou juste pour les exemples que tu as fait ?

10 - **Élève 6** : Non, je pense toujours.

11 - **Chercheuse** : Et comment tu sais ?

12 - **Élève 6** : En général, ça change pas...
...

18 - Élève 6 : Oui je sais. Par exemple 99 plus 99 ça fera forcément 198. Donc ils seront forcément toujours impairs.

19 - Chercheuse : Oui. Et comment l'expliquer à quelqu'un sans faire des calculs?

20 - Élève 6 : Ah. Par exemple, tu fais plus... Euh non. Oui, tu fais plus chaque fois un chiffre impair, ça fera forcément un chiffre pair. Parce que...

Les exemples peuvent être considérés selon leurs propriétés en tant que représentants d'une classe d'objets. Dans ce cas, il s'agit d'un exemple générique qui a un rôle majeur dans le soutien de l'expérience mentale et donc de la *démonstration*. L'exemple générique peut servir de pont pour abandonner l'utilisation des exemples, comme dans le cas de l'Élève 18.

35 - Chercheuse : Ouais, ouais, je vois bien. Et avec les multiples de 4? Si je fais l'addition entre 2 multiples de 4?

...

38 - Elève 18 : Le résultat, ça sera toujours un multiple de 4. Je crois bien.

39 - Chercheuse : Oui. Et là... pour quelles raisons?

40 - Élève 18 : Est-ce que du coup, c'est comme si on prenait par exemple... C'est comme si on faisait le calcul du début ¹⁵. Par exemple, 1 fois 4 plus 2 fois 4. C'est rajouter des multiples ça donne de toute manière, un chiffre qui fait partie des multiples. Je ne sais pas...

41 - Chercheuse : Et cela est vrai aussi pour... pour tous les multiples de 4 ou juste pour les premiers multiples de 4?

42 - Elève 18 : Je pense tous parce qu'après, comme c'est des chiffres pairs, ils finissent tout le temps par le même nombre... Ils ont toujours par exemple 4, 8...

43 - Chercheuse : Oui. Fais attention parce que si on fait.. Essaie d'écrire... J'écris juste ici ce qu'on fait 4. Essaie d'écrire le livret de 4. .

44 - Elève 18 : [*L'élève écrit sur la feuille « 0; 4; 8; 12; 16; 20 »*].

45 - Chercheuse : Voilà, et ainsi de suite... Là, tu viens de dire qu'il faut regarder le dernier chiffre, n'est-ce pas? Fais attention parce que, tu vois, ici, il y a un 4 comme dernier chiffre mais il n'y a pas le 14.

46 - Elève 18 : Ah oui, je vois ce que... Dans ce cas, avec 4, je ne sais pas si ça marche. Est-ce que c'est... Du coup, c'est des chiffres pairs mais... Du coup, ça me met en doute. J'y avais pas pensé. Du coup, en additionnant 2 multiples de 4 est-ce que ça reste un... Euh oui. Oui, ça fonctionne de la même manière, même du coup, si on ne regarde pas comme j'avais dit le chiffre à la fin... ça fonctionne de

15. Elle se réfère à la propriété distributive vue le jour même dans la tâche *Manon*.

la même manière que si je prenais, du coup les calculs au début, c'est comme si je rajoutais 4 fois quelque chose et du coup, c'est comme rajouter en soi 4 plus 4 plus 4... Et du coup, ça fonctionne comme si je continuais à les écrire comme ça [*en pointant sa liste de multiples de 4*]. On va de toute manière tomber sur un des chiffres...

L'Élève 18 prend conscience de la vérité de l'affirmation « la somme de deux multiples de 4 est encore un multiple de 4 ». Elle a recours à l'exemple générique $1 \cdot 4 + 2 \cdot 4$ à la ligne 40 pour mettre en évidence la propriété caractéristique des multiples de 4, pouvoir s'écrire comme $4x, x \in \mathbb{Z}$. Cette conception des multiples de 4 lui permet de s'apercevoir de la possibilité d'utiliser la propriété distributive comme elle l'avait fait tout de suite avant pendant l'entretien dans la tâche *Manon* (elle parle du « calcul du début » à la ligne 40 et des « calculs au début » à la ligne 46). À la fin de l'extrait, l'Élève 18 abandonne l'utilisation de l'exemple générique pour se concentrer uniquement à la propriété des multiples de 4 d'être « 4 fois quelque chose » et par conséquent d'être composés par « 4 plus 4 plus 4... »

Les exemples jouent donc un rôle important dans la formation et le soutien de la pensée mathématique pour les élèves avec MLD.

Difficultés des élèves à prendre en charge la preuve

Comme déjà évoqué à partir de la page 174, nous constatons une résistance répandue à abandonner l'empirisme naïf. Non seulement nous attestons une basse fréquence d'utilisation de l'exemple générique et de l'expérience mentale, mais nous avons remarqué souvent un manque de nécessité de la part des élèves de justifier ce qui était soutenu. Nous avons anticipé la possibilité de difficultés liées au détachement de l'empirisme naïf et nous avons prévu des relances adaptées. Pourtant, la possibilité que les élèves ne ressentissent pas le besoin de généraliser et de soutenir avec une explication cette généralisation n'avait pas été assez anticipée dans notre analyse *a priori*. Les questions posées par la chercheuse visant à stimuler la justification (par exemple « pourquoi ? » Ou « pour quelle raison ? ») ont souvent été interprétées comme une demande de décrire la situation plutôt que de donner un argument à soutien de ce qui avait été affirmé.

101 - Chercheuse : Et comment l'expliquer à quelqu'un sans faire de calculs ?

...

106 - Élève 8 : Je dirais que les chiffres impairs plus des chiffres pairs ça fera toujours des chiffres impairs.

107 - Chercheuse : Ouais, c'est vrai, c'est bien. Est-ce que tu aurais une raison à lui donner pour lui expliquer le pourquoi?

108 - Élève 8 : Parce que on ne peut pas... Le nombre de derrière [*en pointant les 3 résultats « 13 », « 29 » et « 28 »*], après je suis pas sûr pour tout, mais le nombre de derrière implique que si c'est un 5 comme on ne peut pas le diviser, ça sera pas forcément impair. Et si c'est des chiffres qu'on pourrait diviser derrière bah ça ferait un pair.

L'Élève 8 décrit ce qu'il a observé et réalisé au lieu d'en donner une justification. L'Élève 4 exprime sa surprise lorsque la chercheuse lui demande de justifier ses affirmations.

45 - Chercheuse : D'accord. Est-ce que tu arriverais à l'expliquer sans faire des calculs?

46 - Élève 4 : Je ne sais pas, je n'ai pas inventé les maths.

47 - Chercheuse : Quoi?

48 - Élève 4 : Je n'ai pas inventé les maths.

49 - Chercheuse : Mais est-ce que tu arriverais à dire quelque chose?

50 - Élève 4 : Comment, ça?

51 - Chercheuse : Est-ce que tu as une idée du pourquoi cela... Cette phrase est vraie? Est-ce que tu arriverais à l'expliquer, mais sans faire de calculs?

52 - Élève 4 : Parce que c'est comme ça. Je ne sais pas. Ça a été fait comme ça.

L'extrait de l'Élève 4 met en évidence que la justification et l'explication ne font pas partie du contrat didactique auquel il est habitué. L'Élève 5 va même jusqu'à dire qu'il a répondu au hasard (« j'ai dit ça comme ça, en fait », ligne 90) en raison de la difficulté qu'il a à trouver une justification, alors qu'il ressort clairement des échanges précédents que sa réponse était raisonnée.

83 - Chercheuse : Ok, ok. Oui, d'accord. Est-ce qu'on arriverait à l'expliquer sans faire des calculs?

84 - Élève 5 : Oui, je pense.

85 - Chercheuse : Oui? Tu as quelques traces, quelques pistes?

86 - Élève 5 : Non.

87 - Chercheuse : Non? Tu peux dessiner, si tu veux.

88 - Élève 5 : Je ne sais pas comment expliquer.

89 - Chercheuse : Tu as quelques idées en tête et tu sais pas comment les expliquer ou...?

90 - Élève 5 : J'ai dit ça comme ça, en fait.

Pour favoriser la prise en charge de la preuve de la part des élèves, cela doit commencer par faire partie des tâches mathématiques ordinaires rencontrées en classe.

9.3.4 La pensée des élèves avec MLD et celle des élèves sans MLD

Nous dédions cette dernière partie relative aux résultats de la tâche *Nombres pairs/impairs* aux différences relevées entre la pensée algébrique des élèves avec MLD et celle des élèves sans MLD.

À la page 187, nous avons discuté du manque de nécessité ressentie par les élèves pour généraliser et justifier ce qui était soutenu. Cela est lié à la difficulté mentionnée précédemment de proposer d'autres procédures de résolution mis à part l'empirisme naïf. Le tableau 9.3 montre que cela est moins vrai pour les élèves sans MLD. Les élèves sans MLD interviewées pour cette thèse ont toutes les trois mis en place des stratégies qui leur ont permis d'obtenir une preuve mathématiquement exhaustive et correcte. Pourtant, l'Élève 15 et l'Élève 16 ont eu recours exclusivement à une preuve qui se base sur l'écriture en base dix des nombres pairs et impairs et n'ont pas raisonné en s'appuyant sur les groupements par 2 (ou par 3, 4, etc. pour les multiples après relance de la chercheuse). La résolution choisie a donc été arithmétique et quand la seule procédure possible était une preuve intellectuelle algébrique (pour les multiples de 3, 4, etc.) elles ont su former leur point de vue, mais sans formuler une conjecture ni la prouver par expérience mentale. En particulier, l'Élève 15, élève sans MLD, a eu recours à l'empirisme naïf et à l'expérience cruciale pendant la quasi-totalité de l'entretien. De plus, l'Élève 16, à la suite de la relance sur les multiples de 3 ou de 4¹⁶, a eu d'abord de la peine à comprendre la consigne. Ensuite, elle s'est créé son point de vue grâce à des exemples et n'a pas aboutit à une conjecture ni s'est posée la question de la généralisation de l'affirmation en se contentant d'en constater la vérité par empirisme naïf. Mise en difficulté, l'Élève 16 a un comportement très similaire à celui d'une partie des élèves avec MLD.

D'ailleurs, l'expérience mentale et la preuve intellectuelle ne sont pas une exclusivité des élèves sans MLD. Dans notre échantillon, trois élèves avec MLD (Élève 14, Élève 18 et Élève 21) y ont eu recours.

D'un point de vue qualitatif, il n'y a donc pas de différence entre élèves avec ou sans MLD, la différence semble plutôt être dans la fréquence des différentes procédures. Ces considérations nous amènent à constater un retard chez les élèves avec MLD, ou la nécessité d'un temps d'apprentissage plus long. L'idée qu'il n'existe pas de procédures inaccessibles aux élèves avec MLD est également confirmée.

16. « En additionnant deux multiples de trois (quatre), on obtient toujours un multiple de trois (quatre)? »

Quatrième partie

Conclusions

Chapitre 10

Synthèse des résultats

Nous apportons dans ce chapitre la synthèse des résultats de la thèse. Notre travail a été dirigé par deux questions de recherche :

- Q1 Quelles tâches créer pour analyser les difficultés et les compétences des élèves spécifiques à la pensée algébrique?
- Q2 Comment pouvons-nous décrire la pensée algébrique d'élèves avec MLD en termes de *language constructs*, types de généralisation et types de preuve?

La réponse à Q1 a été présentée en détail au chapitre 6. Nous en rapportons une synthèse dans la section 10.1.

En ce qui concerne Q2, nous avons exposé en détail les résultats au chapitre 9. Nous répondons à Q2 et ses sous-questions dans la section 10.2.

Nous concluons le chapitre avec des résultats concernant la pensée algébrique d'élèves avec MLD dans la section 10.3.

10.1 Synthèse de la réponse à Q1 : une batterie de tâches

Avec notre travail, nous avons construit une batterie de tâches d'*early algebra* pour étudier les difficultés et les compétences d'élèves spécifiques à la pensée algébrique. Pour la créer, nous avons mené une revue de littérature en didactique de l'algèbre (chapitre 3) et nous en avons identifié des aspects centraux. Cette revue de littérature, concernant aussi les tâches utilisées dans des recherches antérieures, a orienté la sélection de tâches pour notre batterie (voir le chapitre 7). Celle-ci s'appuie sur le modèle d'algèbre de Kaput (1995, 2008) et est composée de huit tâches algébriques (voir les chapitres 6 et 7).

En se fondant sur le modèle de Kaput, la généralisation est au cœur de la batterie de tâches. Ce choix théorique¹ nous a permis de construire un large éventail de tâches grâce auxquelles nous avons pu étudier différents aspects de la pensée algébrique : non seulement la généralisation, mais aussi l'argumentation, le focus sur la structure et le processus, la relation entre quantités associée à une vision relationnelle du signe égal.

Cet ancrage théorique et l'utilisation de tâches antérieures nous ont amenée à faire l'hypothèse que les tâches de notre batterie sont robustes et favorisent l'émergence de la pensée algébrique (bien que, dans la littérature, ces tâches aient été utilisées pour la plupart avec des élèves sans MLD). La mise à l'épreuve de cette hypothèse s'est faite lors de l'expérimentation avec les élèves. Les entretiens que nous avons menés à partir des tâches ont fait ressortir chez les élèves les processus que nous avions prévu d'observer. Ceci s'est produit même chez des enfants avec MLD, groupe pour lequel les tâches n'avaient pas encore été utilisées (dans la littérature). Ce constat valide expérimentalement le choix des tâches.

Cette batterie est donc fondée théoriquement, validée expérimentalement et est également exploitable à des fins diagnostiques concernant la pensée algébrique d'élèves de fin primaire (11-12 ans) ou début du secondaire I (12-13 ans) avec ou sans MLD.

10.2 Réponse à la question de recherche Q2 : la pensée algébrique d'élèves avec MLD

Après les analyses présentées dans les sections 9.1, 9.2 et 9.3, nous pouvons dans les sections qui suivent répondre à la question de recherche Q2 et à ses sous-questions, que nous rappelons :

Q2 Comment pouvons-nous décrire la pensée algébrique d'élèves avec MLD en termes de *language constructs*, types de généralisation et types de preuve ?

Q2.1 Quels *language constructs* identifient la pensée algébrique d'élèves avec MLD ?

Q2.2 Quels types de généralisation sont utilisés par des élèves avec MLD dans l'étude d'un *pattern* géométrique ?

1. En s'agissant d'un choix théorique, il n'est pas le seul possible. D'autres définitions de pensée algébrique pourraient être choisies en menant à des résultats différents en ce qui concerne la création de la batterie de tâches.

Q2.3 Comment des élèves avec MLD mobilisent des exemples et s'engagent dans une preuve dans une tâche d'*early algebra* nécessitant une argumentation?

10.2.1 Réponse à Q2.1 : les *language constructs*

Dans la section 9.1, nous avons pu analyser les *language constructs* d'élèves avec MLD et ainsi répondre à Q2.1 : Quels *language constructs* identifient la pensée algébrique d'élèves avec MLD?

L'analyse qualitative des entretiens nous a permis de mettre en lumière la capacité d'élèves avec MLD à porter un regard algébrique sur les tâches proposées. En effet, la totalité des élèves participant à l'expérimentation se réfère d'une manière ou d'une autre à une procédure algébrique pour les résoudre. Ceci s'est manifesté à travers le recours à une vision relationnelle du signe égal, à des représentations transparentes et non canoniques des nombres et le focus sur le processus relatif à une certaine tâche plutôt que sur le résultat. Les élèves avec MLD ont donc montré la possibilité d'utiliser ces *language constructs* indicateurs d'une pensée algébrique.

Cependant, nos résultats montrent une certaine résistance des élèves avec MLD à abandonner une vision opératoire du signe égal et à favoriser l'importance du processus au détriment du produit. S'il est vrai que les élèves avec MLD ont eu recours aux *language constructs* indiquant d'une pensée algébrique, en même temps elles et ils ont montré un attachement à des procédures opératoires et visant le produit et le résultat, comme déjà montré par des travaux de l'équipe de Malara (Cusi et al., 2011; Malara et Navarra, 2018). Cela confirme ainsi la difficulté, bien étudiée en littérature (par exemple Bloch, 2008; Carpenter et Franke, 2001; Grugeon-Allys et Pilet, 2017; Herscovics et Kieran, 1980; Kieran, 1981), d'utiliser le signe égal comme relation et non pas simplement comme opérateur.

La préférence pour l'utilisation des divers *language constructs* typiques de l'algèbre dépend de la tâche proposée. Nous avons identifié une caractéristique, la présence d'un nombre inconnu dans *La tâche bleue*, comme obstacle à l'explicitation d'une procédure algébrique. Cette caractéristique, liée au contrat didactique, amène donc les élèves vers une procédure arithmétique.

Ces résultats sont significatifs, car ils montrent qu'en fonction de la tâche et dans des conditions favorables, des élèves avec MLD peuvent utiliser les *language constructs* indicateurs d'une pensée algébrique. En conformité avec la littérature (Maccini et al., 1999; Xin, 2008), notre première hypothèse de recherche (voir 5.2) semble donc confirmée dans le traitement de Q2.1 : les élèves avec MLD peuvent mettre en place des stratégies de résolution en s'appuyant sur la pensée algébrique.

10.2.2 Réponse à Q2.2 : les types de généralisation

Dans la section 9.2, nous avons pu analyser les types de généralisation auxquels des élèves avec MLD ont eu recours et ainsi répondre à Q2.2 : Quels types de généralisation sont utilisés par des élèves avec MLD dans l'étude d'un *pattern* géométrique?

Grâce à l'analyse qualitative des entretiens, nous avons observé que les élèves avec MLD généralisent : seul l'Élève 5 n'a mis en place aucune généralisation. Cette population arrive donc à étendre des considérations, correctes ou non, à toute étape du *pattern*, y compris hors du domaine sensible.

Cependant, pour une partie de ces élèves (quatre élèves sur les quinze avec MLD), nous avons constaté uniquement une généralisation arithmétique basée sur la relation entre termes successifs. La généralisation algébrique est ainsi une difficulté pour des élèves avec MLD, qui ne l'ont mise en place que dans deux tiers des cas.

Malgré cette difficulté, nous soulignons que la plupart des élèves, dix sur quinze, ont eu recours à des types de généralisation algébrique et cela est un résultat remarquable pour la population particulière à l'étude, composée par des élèves avec MLD.

Les deux tiers des élèves avec MLD ont en effet généralisé factuellement. Pour cette partie de l'échantillon, le passage de la production d'une généralisation factuelle à une généralisation contextuelle s'est fait de manière assez naturelle, en confirmant la littérature (Radford, 2010a; Squalli et al., 2020) : l'obstacle majeur réside dans l'analyticité de la situation et pas tant dans le niveau d'explicitation réservé à la variable. En effet, environ la moitié des élèves avec MLD (sept sur quinze) ont également proposé une généralisation contextuelle. La généralisation standard n'a pas été beaucoup utilisée (seulement deux élèves), car le registre sémiotique alphanumérique n'était pas connu par la quasi-totalité des élèves au moment de l'entretien.

Pour conclure, de manière cohérente avec la littérature existante (Maccini et al., 1999; Xin, 2008), notre première hypothèse de recherche (voir 5.2) semble donc confirmée aussi pour la généralisation étudiée avec Q2.2 : les élèves avec MLD mettent en place des stratégies de résolution en s'appuyant sur la pensée algébrique.

10.2.3 Réponse à Q2.3 : les exemples dans la preuve

Dans la section 9.3, nous avons pu analyser les types de preuve utilisés par des élèves avec MLD et ainsi répondre à Q2.3 : Comment des élèves avec MLD mobilisent des exemples et s'engagent dans une preuve dans une tâche d'*early algebra* nécessitant une argumentation ?

L'analyse qualitative des données nous a permis de souligner les types de preuves mises en place par des élèves avec MLD ainsi que le rôle que l'utilisation des exemples dans ces dernières.

Les élèves de notre échantillon ont eu recours à différents types de preuve : empirisme naïf, expérience cruciale, exemple générique et expérience mentale.

Cependant, les différents types de preuve n'ont pas été utilisés de manière homogène. Premièrement, la totalité des élèves de notre échantillon a fait un usage intensif de l'empirisme naïf. Deuxièmement, l'expérience cruciale a également été assez exploitée (onze élèves sur les quinze avec MLD). Troisièmement, l'exemple générique a été beaucoup moins utilisé (seulement trois élèves sur les quinze avec MLD). Enfin, nous avons rarement vu apparaître l'expérience mentale dans la population avec MLD, seulement dans trois cas sur quinze.

Nous pouvons donc déduire que les différents types de preuve sont utilisables par des élèves avec MLD. Cette conclusion est remarquable, car elle ouvre des perspectives sur les possibilités d'apprentissage de ces élèves. En même temps, nous soulignons une fréquence majeure des preuves pragmatiques telles que l'empirisme naïf et l'expérience cruciale. La variété des preuves pragmatiques est significative et peut être un point d'appui pour les apprentissages d'élèves avec MLD. D'autre part, la littérature souligne que le saut conceptuel entre preuves pragmatiques et preuves intellectuelles est de toute façon difficile à franchir, y compris pour des élèves sans MLD (Arsac et al., 1992).

Dans les types de preuve, les exemples se sont révélés essentiels pour que les élèves se centrent sur la structure algébrique de la tâche proposée, dans notre cas une addition entre nombres pairs ou impairs, comme déjà d'autres travaux didactiques l'ont mis en évidence (Jeannotte et Corriveau, 2020). Ils peuvent avoir des rôles différents, conformément à la littérature à ce sujet (par exemple Arcavi et al., 1990; Franke et al., 2008). Nous avons identifié deux rôles principaux : explorer la tâche et résoudre la tâche. Les exemples relevant de l'empirisme naïf et de l'expérience cruciale sont utilisés pour explorer la tâche : s'approprier les données, s'approprier la consigne et créer son *point de vue*. L'expérience cruciale ouvre à la résolution de la tâche proprement dite. Les élèves peuvent ainsi conjecturer. L'exemple générique permet de mettre en lumière et prouver les caractéristiques d'une cer-

taine situation d'une manière généralisable. Avec le contre-exemple, l'exemple générique ouvre les portes vers la démonstration et ainsi l'abandon des exemples pour prouver. Nous attirons l'attention sur le fait que des élèves avec MLD exploitent des exemples à un niveau pragmatique et soient capables de prendre position sur un énoncé mathématique et de formuler une conjecture est un résultat saillant : cela constitue un premier pas vers la généralisation et la démonstration dans le cadre d'une situation de résolution de problème. Nous faisons l'hypothèse qu'un temps de travail plus long avec les élèves aurait peut-être permis davantage la manifestation de l'expérience cruciale et de l'exemple générique qui sont des étapes fondamentales dans la preuve grâce à leur prise en compte de la généralité (Balacheff, 1987).

Pour conclure, de manière cohérente avec la littérature existante (Maccini et al., 1999; Xin, 2008), notre première hypothèse de recherche (voir 5.2) semble donc confirmée aussi pour la généralisation étudiée avec Q2.3 : les élèves avec MLD peuvent prouver et argumenter leurs points de vue dans des tâches algébriques.

10.3 Pour conclure : la pensée algébrique d'élèves avec MLD

Pour conclure, nous pouvons faire diverses considérations finales sur le recours à la pensée algébrique d'élèves avec MLD. Ces résultats confirment notre deuxième et troisième hypothèse de recherche (voir 5.2) : la pensée algébrique d'élèves MLD ne diffère pas d'un point de vue qualitatif de ce qui est déjà connu pour les élèves sans MLD. Ce qui différencie la population avec MLD de celle sans MLD pour la pensée algébrique est plutôt la fréquence et la persistance des difficultés lors des relances dans la résolution des tâches.

10.3.1 Les élèves avec MLD : difficultés

La première considération est que notre étude confirme le fait, pas surprenant et déjà connu en littérature (par exemple Bone et al., 2021; Powell et al., 2020), que les élèves ayant des MLD montrent en général des difficultés dans des tâches d'*early algebra*. Les analyses rapportées au chapitre 9 indiquent que les difficultés des élèves avec MLD sont plus persistantes aux relances lors de la résolution d'une tâche que celles des élèves sans MLD en *early algebra*. Ce résultat confirme notre troisième hypothèse de recherche (section 5.2) : ce qui différencie la population avec MLD de celle sans MLD pour la pensée algébrique est plutôt la persistance des difficultés dans la résolution des tâches. Cette dernière hypothèse a été déjà

vérifiée pour le domaine arithmétique par différents travaux de recherche (Geary, 2011). Notre résultat concernant la persistance se situe à une échelle locale concernant la tâche et ses relances. Des résultats relatifs à une échelle globale nécessiteraient une étude longitudinale d'au moins six mois (American Psychiatric Association, 2013).

Si cette considération est vraie globalement sur notre échantillon, elle ne l'est plus lorsque nous analysons les élèves individuellement. Par exemple, les tableaux 9.1, 9.2 et 9.3 indiquent que l'Élève 21, avec MLD, a pu mettre en place des procédures utilisant l'*algebraic thinking* avec agilité et pertinence. L'Élève 21 a montré de « bonnes » capacités dans les tâches proposées malgré d'autres difficultés en mathématiques et hors mathématiques qui l'ont amenée à être identifiée comme élève avec MLD. Ce type d'analyse par élève n'a pas été menée dans ce travail de thèse : nous avons en effet préféré nous concentrer sur l'ensemble des élèves pour offrir une vision plus large de cette population. Cependant, nous souhaitons souligner le fait que lorsque les élèves avec MLD ont globalement montré des difficultés dans les tâches algébriques que nous leur avons proposées, un sous-groupe a fait preuve d'une certaine aisance, malgré leur identification comme élèves avec MLD.

Ce résultat nous amène à soutenir que les élèves qui ont reçu un diagnostic de MLD ou que l'école reconnaît comme ayant des MLD peuvent avoir des profils très variés. Notre travail met en évidence qu'il n'existe pas qu'un seul profil d'élève avec MLD : par conséquent, envisager un seul type d'intervention à proposer à ces élèves peut avoir des répercussions négatives sur leurs apprentissages. Ce constat est cohérent avec la direction que la recherche à propos des MLD a prise avec le souhait de créer des tests diagnostiques pour différencier différents profils d'élèves avec MLD (Karagiannakis et Baccaglini-Frank, 2014; Karagiannakis et al., 2014; Karagiannakis et al., 2016). Une conclusion en découle : identifier un élève comme ayant des MLD ne signifie pas que l'élève en question ne peut pas mener des raisonnements mathématiques ou que ses difficultés concernent tous les domaines mathématiques. C'est pourquoi il est important que le corps enseignant connaisse chaque élève avec MLD, en se questionnant non seulement sur le type de ses difficultés, mais surtout sur ce qu'elle ou il peut accomplir au cours des apprentissages, dans tous les domaines de connaissances mathématiques et de compétences. Les compétences des élèves avec MLD sont en effet importantes à mettre en valeur pour une bonne réussite didactique (Lewis, 2014).

10.3.2 Les élèves avec MLD : compétences

Une deuxième considération importante qui découle de notre travail est que les élèves avec MLD peuvent recourir à la pensée algébrique, et cela nonobstant les difficultés dont nous avons discuté dans la section précédente. Le groupe d'élèves analysé a montré la possibilité d'utiliser la pensée algébrique dans des conditions favorables à son développement. Comme nous l'avons déjà écrit, cela confirme notre première hypothèse de recherche (voir 5.2) : les élèves avec MLD mettent en place des stratégies de résolution en s'appuyant sur la pensée algébrique. Ce résultat consolide le peu de littérature existante à ce propos sur les MLD et l'algèbre (par exemple Maccini et al., 1999; Xin, 2008).

Ce résultat est particulièrement important pour les élèves de notre échantillon qui fréquentent une école spécialisée (élèves 1-10 du tableau 8.1) ou une classe ressource (élèves 11-13 du tableau 8.1). En effet, les entretiens que nous avons menés avec le corps enseignant² ont fait émerger que, dans ce type de classes, la résolution de problèmes similaires à ceux que nous avons proposés est peu proposée. En général, il y a une préférence pour des tâches de calcul où une attention importante est donnée au résultat et au produit, au détriment du processus et de la mise en valeur d'une représentation « transparente ». Une partie du corps enseignant a aussi montré de privilégier une manière d'enseigner qui se rapproche de l'enseignement explicite présentée dans la section 2.6³. Les capacités que les élèves avec MLD ont montrées pour résoudre des tâches d'*early algebra* en généralisant, en prouvant des énoncés et en ayant recours à des *language constructs* dénotant une pensée algébrique ouvrent la voie à la proposition d'autres pratiques de classe pour ces élèves (déjà en 1987, Bloch a fait une proposition dans cette direction).

10.3.3 Analyse qualitative de la pensée algébrique des élèves avec MLD et des élèves sans MLD

Une troisième considération importante concerne l'analyse qualitative de la pensée algébrique des élèves avec MLD. Comme nous avons pu le montrer au chapitre 9, les procédures utilisées par les élèves avec MLD ne divergent pas, d'un point de vue qualitatif, de celles des élèves sans MLD. Cela est également vrai en ce qui concerne les difficultés rencontrées par les élèves avec MLD et par les élèves sans MLD : qualitativement, elles ne diffèrent pas.

2. La présentation des entretiens que nous avons menés avec le corps enseignant est disponible dans l'annexe F à la page 587.

3. Cela confirme la tendance en enseignement spécialisé à appauvrir les savoirs scolaires, en mathématiques, par exemple, via l'automatisation des connaissances (Roiné et Barallobres, 2018).

Cela confirme notre deuxième hypothèse de recherche (voir 5.2) : la pensée algébrique des élèves MLD ne diffère pas d'un point de vue qualitatif de ce qui est déjà connu pour les élèves sans MLD. Ce résultat consolide également certains résultats déjà établis, mais non spécifiques à la pensée algébrique, qui soutiennent que les difficultés des élèves avec MLD sont similaires à celles rencontrées par les élèves sans MLD (Geary, 2011).

Ce qui semble distinguer les difficultés rencontrées par les deux catégories d'élèves n'est pas le type de difficulté, mais plutôt la fréquence et la persistance aux relances lors de la résolution d'une tâche.

Cela confirme notre troisième hypothèse de recherche (voir 5.2) : ce qui différencie la population avec MLD de celle sans MLD pour la pensée algébrique est plutôt la persistance des difficultés dans la résolution des tâches.

Ce résultat est cohérent avec le choix de MLD de Deruaz et al. (2020) qui les définissent comme des difficultés persistantes et/ou spécifiques aux mathématiques (voir la section 2.1.2)⁴.

Les similitudes observées en termes de pensée algébrique des deux catégories d'élèves (avec ou sans MLD), nous apparaissent comme particulièrement importantes. En effet, étudier la population d'élèves avec MLD permet d'avoir un effet « loupe » sur les difficultés pour tout type d'élèves. L'étude des élèves MLD pourrait donc bénéficier non seulement à cette population restreinte, mais à tous et toutes les élèves (Robotti, 2017). Il implique en outre que les propositions d'intervention pourraient être transversales pour les deux groupes d'élèves (Watt et al., 2016).

4. Nous soulignons qu'avec notre travail, nous avons constaté une persistance au niveau de la tâche et ses relances. Pour parler de persistance dans le temps au sens du American Psychiatric Association (2013), il faudrait mettre en place une recherche longitudinale d'au moins six mois.

Chapitre 11

Analyse critique de la thèse

Suite à notre travail, nous avons pu observer la présence de la pensée algébrique chez une population particulière, d'élèves avec MLD, et nous l'avons caractérisée. Cela a été possible grâce à l'analyse de leur utilisation des *language constructs*, et des processus de généralisation et de preuve. Néanmoins, certains aspects de notre recherche pourraient encore bénéficier d'une marge d'amélioration.

Dans les paragraphes qui suivent, nous présentons quelques limites de notre recherche et leurs possibles leviers de progression, certaines des difficultés rencontrées pendant la réalisation de ce travail, ainsi que les points forts.

11.1 Limites

Notre travail de thèse est très étendu. Nous avons pris en considération divers appuis théoriques (chapitre 4) : le modèle d'algèbre de Kaput, les *language constructs* de Malara et collègues, les types de généralisation de Radford et la typologie de preuves de Balacheff. De plus, nous avons construit huit tâches (chapitre 7) pour les entretiens cliniques. Nous avons donc à disposition une quantité considérable de références théoriques et de données empiriques. L'abondance de contenu n'est pas une limite de recherche en soi, mais elle peut devenir problématique si la quantité des résultats prime sur la qualité et la profondeur de ceux-ci. Bien entendu, dans la condition utopique de disposer d'un temps indéfini, la question ne se poserait pas, car toutes les données pourraient être analysées en détail.

Une première contre-mesure que nous avons prise pour éviter cela a été la réduction des tâches à considérer pour l'analyse (section 8.4.1) : nous nous sommes restreinte à quatre tâches, parmi lesquelles une (123) n'était utilisée qu'en cas de nécessité comme relance (de *La tache bleue*).

Nous estimons qu'il y aurait la possibilité d'approfondir ultérieurement certains des phénomènes étudiés. Une alternative envisageable pourrait consister à limiter davantage les contenus, théoriques comme empiriques, pour permettre un focus encore plus détaillé sur lesdits phénomènes.

La prise en compte de différents appuis théoriques a également posé la question de la gestion de l'articulation entre ceux-ci. Nous avons exposé nos choix et notre point de vue à ce propos dans les sections 4.5 et 6.3. Le résultat final a été une *combinaison de théories* (selon la catégorisation décrite dans Prediger et Bikner-Ahsbahs, 2014; Prediger et al., 2008). Ce *networking* nous a demandé un effort considérable pour articuler les approches et définitions (par exemple celle de pensée algébrique) des différents cadres.

Nous nous sommes donc questionnée sur la pertinence de deux approches de recherche alternatives. La première consiste à considérer moins d'appuis théoriques, ce qui permettrait des analyses fines plus approfondies sur des phénomènes précis. La deuxième comporte la prise en compte d'un nombre de cadres théoriques plus étendu qui permet de saisir une variété de phénomènes qui ne serait pas possible avec un apport théorique réduit.

Pour ce travail de thèse, nous avons préféré suivre cette deuxième approche, car elle nous a permis d'obtenir une vision d'ensemble de la population avec MLD étudiée. Cette démarche nous a semblé pertinente vu le manque de travaux concernant les MLD et la pensée algébrique (voir la section 2.6) et, par conséquent, notre recherche a clairement un statut exploratoire.

Pour la suite de nos recherches, comme présenté dans la section 12.1, une alternative serait de suivre la première approche, en réduisant les apports théoriques avec l'objectif de rendre plus stables les résultats. En particulier, nous souhaiterions uniformiser le cadre qui a permis la création des tâches (pour cette thèse, le modèle d'algèbre de Kaput) avec le cadre qui en a permis l'analyse (Malara et collègues, Radford ou Balacheff en fonction de la tâche). Cette possibilité serait également cohérente avec la présentation de cette recherche sous forme d'article, qui nécessiterait un choix en termes de contenus à exposer en raison de contraintes d'espace.

Cela est réalisable assez aisément à partir de ce qui a été présenté dans ce manuscrit. En effet, s'il est vrai que les tâches analysées ont été construites sur la base du modèle d'algèbre de Kaput, leur emploi peut être justifié en faisant seulement recours au cadre d'analyse (voir section 8.4.1). Par conséquent, la conception de tâches analogues à celles utilisées pour cette thèse pourrait être faite en se passant du modèle de Kaput, sans que cela ne soit problématique pour l'analyse et les résultats relatifs aux tâches. En effet, une piste possible pourrait être de ne se concen-

trer que sur une tâche à la fois, en la justifiant et en l'analysant avec un seul cadre théorique, celui que nous avons déjà utilisé pour l'analyse dans cette thèse. Dans ce cas, nous pourrions répondre à une seule question de recherche à la fois parmi les sous-questions de Q2 de ce manuscrit (chapitre 5.1). Cette harmonisation du cadre théorique pourrait nous aider à mieux cibler l'objet d'étude et à étayer davantage nos conclusions, en nous permettant d'améliorer la précision et la mise en évidence des résultats.

Cependant, nous voulons insister sur le fait que le modèle de Kaput s'est avéré pertinent et indispensable pour notre thèse (voir chapitre 6). En effet, non seulement il a été facilement opérationnalisable, mais il nous a également permis de créer une batterie de tâches adaptées à l'étude de divers aspects de la pensée algébrique en couvrant les différentes dimensions du dit modèle (voir la section 10.1).

Par ailleurs, nous soulignons que les analyses menées et les résultats obtenus dans les pages précédentes sont pertinents dans leur forme actuelle.

Pour conclure cette section, nous souhaitons évoquer une dernière limite. Un des résultats présentés au chapitre 10 concerne la persistance des difficultés des élèves avec MLD. Des analyses menées, il émerge que les difficultés des élèves avec MLD sont plus persistantes aux relances que celles des élèves sans MLD dans des tâches d'*early algebra*. Notre méthode, quatre entretiens cliniques d'environ 30 minutes, nous permet d'entendre le terme « persistance » dans un sens local à l'échelle de la tâche : les difficultés des élèves avec MLD ont été persistantes aux relances de la chercheuse lors de la résolution d'un problème algébrique. Pour parler de persistance des difficultés dans le temps, les recherches mettent une limite d'au moins six mois (American Psychiatric Association, 2013). Donc, pour obtenir des résultats globaux sur la persistance, il faudrait utiliser une méthodologie adaptée, par exemple une étude longitudinale. Sinon, la persistance peut également être testée en proposant à l'élève des tâches similaires et en étudiant les *schèmes*¹ et les *invariants opératoires*² (Vergnaud, 1990, 2011). Notre thèse propose une batterie de tâches très variées en couvrant différents aspects algébriques, et n'est donc, en l'état, pas idoine pour ce type d'étude.

1. Vergnaud définit le schème comme « une organisation invariante de l'activité pour une classe de situations donnée » (2011, p. 43).

2. C'est-à-dire des concepts-en-acte et des théorèmes-en-acte (Vergnaud, 1990, 2011).

11.2 Difficultés

Bien que les aspects que nous avons décrits dans la section précédente puissent être considérés à la fois comme limite et difficulté, nous souhaitons ici discuter d'un aspect particulier en termes de difficulté. En effet, il ne s'agit guère d'une limite, mais plutôt d'un point fort de notre travail : l'articulation entre les deux entrées, par les élèves avec MLD et par l'algèbre. Malgré l'intérêt de ce croisement entre domaines de recherche (Peteers, 2018, 2020), nous le présentons comme une difficulté, car il s'agit d'un obstacle inhérent au processus d'articulation, accentué par un manque d'une littérature solide sur le sujet (voir la section 2.6).

Comme nous avons pu l'exposer au chapitre 1, la didactique des mathématiques et la psychologie sont deux disciplines ayant des points de vue, des objectifs, des questions de recherche, des méthodes et des cadres théoriques à la fois variés et complémentaires (Giroux, 2011). Avec notre travail, nous avons voulu aborder un thème de recherche issu de la psychologie avec des instruments didactiques. L'objectif s'est avéré complexe et en même temps extrêmement intéressant.

La complexité majeure de ce croisement disciplinaire réside dans l'appropriation didactique de la définition de MLD et par conséquent dans tous les choix méthodologiques qui en découlent : sélection de l'échantillon, type de recueil de données, etc. Notre réflexion a été nourrie par de travaux antérieurs en didactique (par exemple Deruaz et al., 2020), mais ceux-ci ne sont pas assez nombreux et le nombre restreint de ce type de recherches, surtout en algèbre (Lewis et Fisher, 2016), n'offre pas encore des directions claires et partagées. Nous avons donc dû trouver un angle d'attaque pour aborder le sujet d'un point de vue didactique. La réalisation de cette thèse nous a ensuite ouvert la voie pour d'autres approches didactiques aux MLD, comme discuté plus précisément au chapitre 12.

De plus, la pertinence de l'intérêt pour le concept de MLD d'un point de vue didactique nous a longuement interpellée et un travail important pour en étayer la légitimité a été nécessaire. Nous estimons avoir répondu suffisamment à ce point au chapitre 1.

11.3 Points forts

Comme mentionné dans la section précédente, se situer au croisement de deux disciplines offre également certains avantages. Notre recherche peut être intéressante à la fois pour la communauté didactique et pour celle des sciences cognitives. Notre regard didactique, nourri de la littérature en psychologie, a pu contribuer à la

recherche en apportant des résultats innovants sur la population avec MLD.

D'abord, le choix de l'entretien clinique comme méthode d'investigation nous a permis de rentrer en communication avec les élèves tout en prenant en considération leurs caractéristiques personnelles et leurs difficultés. Un échange à deux favorise davantage la prise en compte de la singularité de chaque individu. Cet instrument a également rendu possible de soutenir au maximum des élèves dans leurs raisonnements, à travers des relances adaptées et un temps accordé aux élèves ajusté au cas par cas. Tout cela a favorisé le recours à la pensée algébrique et à son explicitation.

En outre, grâce à l'entretien clinique, nous avons pu étudier le recours à la pensée algébrique d'un groupe d'élèves du secondaire avec MLD. En effet, la plupart des travaux existants sur les MLD concernent le domaine arithmétique avec des élèves du primaire (Deruaz et al., 2020; Lewis et Fisher, 2016). Le premier aspect innovant de notre thèse est l'intérêt pour une population plus âgée d'élèves fréquentant l'école secondaire I (12-15 ans).

À l'âge des élèves est lié le deuxième aspect innovant, qui réside dans l'intérêt porté à cette population particulière et sa manière de généraliser, de prouver des énoncés et de recourir à des *language constructs* dénotant une vision algébrique du problème, comme l'interprétation de l'égal (comme relation entre quantités). La démonstration de l'existence de compétences algébriques chez ces élèves en ce qui concerne la pensée algébrique ouvre la voie à de futures recherches didactiques (nous exposons ce point plus en détail dans le chapitre 12).

Chapitre 12

Perspectives de recherche

Ce travail de thèse, en ce qui concerne la partie théorique comme la partie expérimentale, a nourri nos réflexions et dirigé notre intérêt pour de futures recherches. Dans les paragraphes suivants, nous exposons certaines de ces perspectives.

12.1 Une étude de cas

Dans la section [10.3.1](#), nous avons évoqué la valeur ajoutée qu'une analyse individuelle par élève pourrait avoir. Une perspective de recherche est de conduire une telle analyse en ne nous focalisant que sur un sous-ensemble d'élèves de notre échantillon. Par exemple, pour mettre en avant la potentialité des élèves avec MLD en ce qui concerne la pensée algébrique, il pourrait être pertinent de choisir l'Élève 14 et l'Élève 21, qui ont montré une aisance particulière dans les raisonnements accomplis parallèlement à des difficultés persistantes en calcul et confirmées par un diagnostic. Nous retenons que mener une telle étude de cas pourrait faire émerger des finesses liées au profil particulier de chaque élève que nous n'avons pas pu mettre en évidence dans ce manuscrit.

Par ailleurs, réduire le nombre d'élèves donnerait la possibilité à la fois d'étudier l'éventail de tâches dans leur intégralité et de le faire de manière détaillée. De plus, un travail de ce type nous donnerait la possibilité de diminuer la quantité de données expérimentales en répondant ainsi à l'une des limites exposées dans [11.1](#). Cette démarche nous permettrait de mieux saisir certaines caractéristiques de la population à l'étude tout en confirmant les résultats de cette thèse.

12.2 Le focus sur une tâche

Une deuxième perspective est de focaliser la recherche sur une tâche particulière (ou sur un sous-ensemble de tâches) en gardant l'échantillon entier. Cette réduction se reflète dans le choix du cadre théorique utilisé, qui pourrait être limité au cadre d'analyse employé dans cette thèse en fonction de la tâche.

L'avantage de cette approche est de mettre en exergue des phénomènes liés au type de tâche étudiée, que nous n'avons pas eu la possibilité d'approfondir ultérieurement dans cette thèse. Un travail de cette nature nous donnerait la possibilité de réduire l'apport théorique en répondant à une des limites discutées dans 11.1. Avec cette démarche, nous pourrions mieux comprendre et expliciter certains aspects et en même temps confirmer les résultats de ce travail.

12.3 Une recherche participative avec expérimentation en classe

Les perspectives de recherche exposées dans les sections précédentes restent très liées au travail de cette thèse, en se proposant de retravailler les données pour pallier certaines limites et pour donner plus de visibilité à certains aspects. Bien que pertinentes, ces perspectives conservent leur caractère exploratoire à propos de la pensée algébrique d'élèves avec MLD.

Un autre projet qui nous anime est la transposition d'une partie de nos résultats à la classe. En particulier, notre travail de thèse montre la possibilité pour des élèves avec MLD d'utiliser la pensée algébrique dans les conditions favorables à son développement. Nous retenons donc comme très importante la conception de propositions didactiques (séquences didactiques, tâches, ingénieries didactiques, ou autre) à présenter dans des classes ayant des élèves avec MLD. Cela contribuerait aux propositions existantes issues de la recherche en didactique des mathématiques ou en pédagogie spécialisée (Witzel et al., 2003).

Un point d'attention pour le développement de ce projet serait lié à la difficulté, décrite au chapitre 1, de devoir travailler avec des élèves avec MLD, sans pourtant avoir accès à leur diagnostic. Un autre défi de cette perspective de recherche serait de prendre en compte l'hétérogénéité (Pilet, 2012, 2015) des difficultés et des compétences des élèves en proposant une différenciation. En effet, comme nous l'avons relevé dans la section 10.3.1, les élèves avec MLD peuvent présenter des profils assez différents en termes de difficultés et compétences.

Travailler avec la classe impliquerait la possibilité de travailler sur un temps plus long en donnant l'occasion aux élèves de construire leurs connaissances en classe grâce à un dispositif expressément conçu. En plus de favoriser l'apprentissage, une telle extension temporelle pourrait permettre de confirmer ou infirmer en ce qui concerne la pensée algébrique le caractère de persistance sur un temps long qui semble être typique des difficultés en mathématiques des élèves avec MLD (Deruaz et al., 2020).

Nous sommes de l'avis qu'un tel projet peut bénéficier de la construction en collaboration avec un groupe d'enseignantes et enseignants qui connaissent les élèves et le contexte scolaire. Nous concevons donc ce projet de recherche comme une recherche participative comportant la participation de figures plus liées à la recherche et d'autres plus liées au terrain (Roy, 2021). Les compétences complémentaires de ces diverses personnes maximisent la réussite du projet didactique (Marlot et al., 2017). Cela est d'autant plus vrai pour le contexte de l'enseignement spécialisé, que nous retenons comme idéal pour ce projet, car rarement investigué à notre connaissance.

Par ailleurs, une recherche menée dans la salle de classe implique la collaboration entre élèves et entre élèves et corps enseignant. Cela pourrait apporter une vision complémentaire à propos de la pensée algébrique des élèves avec MLD par rapport à celle donnée dans cette thèse, pour laquelle nous nous sommes servie de l'entretien clinique comme méthode de recueil de données. Étudier ces interactions contribuant au *travail conjoint* (Radford, 2021) de la classe pourrait compléter les échanges entre chercheuse et élèves que nous avons décrits dans ce travail de thèse.

12.4 Une étude sémiotique avec conception d'artefacts

Cette expérimentation en collaboration avec le corps enseignant pourrait également aboutir à la création d'artefacts pour accompagner les tâches et pour soutenir le développement de la pensée algébrique des élèves avec MLD. La conception du matériel pourrait s'appuyer sur les résultats de cette thèse, en particulier en essayant de réagir aux difficultés que nous avons pu mettre en évidence. Par exemple, pour la tâche *La suite de carrés*, dans 9.2.3 nous avons remarqué la confusion fréquente des élèves entre nombre de pailles et nombre de carrés. Nous pourrions donc nous demander quel type de matériel ou artefact pourrait aider les élèves à

surmonter cette difficulté spécifique.

En effet, à propos du recours au matériel, notre revue de littérature dans la section 2.6 met en avant la fréquence de l'utilisation d'artefacts dans les recherches concernant l'intervention en algèbre pour des élèves avec MLD (Bone et al., 2021; Bouck et al., 2019; Robotti, 2017; Witzel et al., 2003). Nous faisons donc l'hypothèse qu'accompagner la proposition de tâches travaillant la pensée algébrique avec des artefacts adaptés pourrait avoir un effet positif sur les apprentissages de la classe. En effet, les artefacts peuvent offrir d'autres représentations sémiotiques dont les élèves pourraient bénéficier (Bartolini Bussi et Mariotti, 2008). De plus, dans le cas d'artefacts matériels, l'utilisation d'objets concrets peut contribuer à la construction de connaissances mathématiques à travers la stimulation du système sensori-moteur (et même en présence de MLD; Robotti, 2017). En dernier lieu, le matériel à manipuler peut faciliter la dévolution de la tâche (Ouvrier-Buffet, 2021), aspect qui demande en général davantage d'effort avec les élèves avec MLD (Bloch, 1987).

L'utilisation d'artefacts lors d'une expérimentation en classe pourrait aussi donner la possibilité d'étudier la pensée des élèves en analysant d'autres registres sémiotiques, par exemple en se concentrant davantage sur leurs gestes. Dans notre thèse, nous avons fait le choix de considérer comme corpus de données les transcriptions des échanges oraux et les productions écrites des élèves¹. Or, lors de l'analyse, nous avons pu remarquer à plusieurs reprises le recours aux gestes et la valence sémiotique que ceux-ci peuvent avoir. Notre méthode n'a pas permis d'approfondir cet aspect, mais un exemple significatif de sa portée est exposé dans la figure 9.9, à la page 154. Au-delà de l'écrit, de la communication parlée et des gestes, il existe d'autres ressources sémiotiques comme les regards, les dessins et les modes extralangagiers d'expression (Arzarello, 2006). Un cadre théorique qui pourrait permettre d'étudier ces différents registres est le *faisceau sémiotique* d'Arzarello (2006).

De plus, cette approche a le potentiel de mettre encore plus en valeur la pensée algébrique. En effet, l'étude de la relation entre le corps, les actions, les arte-

1. Parmi nos données, nous avons partiellement dû prendre en compte les gestes ou d'autres modes d'expressions quand sans ceux-ci l'échange oral serait devenu inaccessible. Comme expliqué dans la section 8.3, dans les transcriptions nous avons indiqué les précisions nécessaires pour la compréhension en italique entre crochets. Par exemple, dans l'extrait suivant à propos de *La tache bleue*, nous avons ressenti le besoin d'explicitier à quoi les deux « là » réfèrent après la consultation de l'enregistrement vidéo.

34 - Élève 21 : Du coup, si on dit que là [*en pointant les 2 taches*] c'est le même nombre, mais en fait, il y en aura juste 1 de plus [*en pointant « tache+79 »*] vu que là c'est 79.

facts et l'activité linguistique et symbolique est capitale pour une bonne compréhension de la pensée mathématique (Radford, 2005). Cela est davantage vrai pour des élèves avec des MLD, qui peuvent avoir des comorbidités (Von Aster, 2009) rendant la communication orale ou écrite encore plus compliquée. Par exemple, dans notre échantillon, l'Élève 11 avait des difficultés langagières liées à un diagnostic de trouble de dyslexie et de dysphasie. En effet, la prise en compte de plusieurs registres sémiotiques semble particulièrement adaptée pour les élèves MLD bénéficiant d'un enseignement spécialisé (Lacombe et al., 2020).

12.5 Activité mathématique et conjectures chez des élèves avec MLD

Dans les sections 9.3 et 10.2.3, nous avons mis en évidence la capacité des élèves avec MLD de construire leur point de vue à propos d'un énoncé mathématique et de conjecturer. Ce résultat est remarquable pour la finesse mathématique en jeu et ouvre d'autres perspectives de recherche plus spécifiques sur l'argumentation d'une conjecture (Pedemonte, 2007). En effet, bien qu'il existe des recherches sur le raisonnement mathématique des élèves avec MLD (par exemple Hughes et al., 2020), nous ne sommes pas à connaissance d'une étude ciblant précisément le processus de conjecture ou de preuve chez cette population. Il s'agirait donc d'un apport innovant et pertinent, basé sur la recherche (Gravier et Ouvrier-Buffet, 2022). Cette approche aurait donc des points de contraste avec l'appauvrissement des savoirs scolaires dans l'enseignement spécialisé (Roiné et Barallobres, 2018) et les études sur l'enseignement explicite (voir la section 2.6) qui est plutôt transmissif (Gersten et al., 2009).

Pour cette perspective, nous imaginons un temps de travail plus long par rapport à ce qui a été choisi pour cette thèse. Cela serait compatible avec une expérimentation en classe, comme décrit dans la section 12.3, et permettrait de dépasser la limite relative à la signification de persistance de nos résultats (section 11.1). En effet, nous faisons l'hypothèse qu'un temps de travail plus long avec les élèves aurait peut-être permis davantage la construction de preuves (Maher, Powell et al., 2010; Ouvrier-Buffet, 2021).

L'implication des élèves dans la production de conjecture via l'utilisation de l'expérience cruciale et de l'exemple générique reste à approfondir. En effet, la conjecture implique un saut conceptuel important et encore insuffisamment exploré. Par exemple, la question de la validation a été longtemps sous-estimée (Balacheff,

2010).

12.6 Formation initiale et continue

Le travail sur la preuve présenté dans 12.5 pourrait bénéficier d'un accompagnement pour les enseignantes et enseignants. En effet, la formation au sujet de l'enseignement de la preuve est souvent inadéquate (Mariotti et al., 2018). Le fait de travailler avec des élèves avec MLD pourrait poser des spécificités liées à la population particulière, mais de toute manière une formation dans ce sens serait souhaitable.

L'importance de la formation initiale et continue ressort également des perspectives décrites dans les sections 12.3 et 12.4. Celles-ci impliquent une coopération avec un groupe d'enseignantes et enseignants. Cela comporterait la mise en place d'une recherche participative qui aurait comme effet secondaire, tout à fait désirable, d'offrir une formation continue particulièrement efficace au groupe enseignant (Roy et al., 2021). En effet, la participation active du corps enseignant à la conception de l'expérimentation didactique permet d'obtenir des effets qui ne soient pas transitoires et qui s'inscrivent durablement dans la pratique d'enseignement (Montalbano et al., 2012). Par ailleurs, le résultat d'une recherche participative ne serait pas seulement la construction d'une séquence didactique. Ce serait aussi l'occasion pour proposer un exemple de « bonnes pratiques » de classe au groupe participant, et également à d'autres enseignantes et enseignants grâce à la présentation de la recherche en formation initiale et continue.

Nous estimons que les résultats de cette thèse et les éventuelles perspectives décrites ci-dessus pourraient servir de base pour des formations initiales et continues. Dans la section 10.3.1, nous avons souligné la variété possible en termes de profils de difficultés et compétences que les élèves avec MLD peuvent avoir. Cet élément est capital pour la transposition de la recherche à la classe, car implique parfois la proposition d'un soutien varié face à des élèves avec le même diagnostic. Ainsi, le repérage par le corps enseignant des différents profils est nécessaire, tout comme la construction d'interventions adaptées, aspect pour lequel la didactique des mathématiques peut offrir une aide fondamentale.

Le corps enseignant dans l'enseignement ordinaire n'est en général pas ou trop peu formé sur le sujet des élèves avec MLD. Une formation dans cette direction pourrait avoir un impact important sur l'enseignement, comme il a été récemment mis en avant par le rapport de l'*Évaluation de l'enseignement des mathématiques dans le canton de Vaud* (Département de la formation, de la jeunesse et de la culture et HEP Vaud, 2019).

Nous nous sommes limitée dans ce chapitre à quelques pistes de recherche pour la suite de notre travail. Comme nous avons eu l'occasion de l'écrire à plusieurs reprises au cours de ce manuscrit, l'articulation entre pensée algébrique et élèves avec MLD demeure encore majoritairement inexplorée et il reste encore beaucoup à étudier.

Bibliographie

- Adihou, A. (2020). Nature analytique des raisonnements d'élèves au début du secondaire : qu'en est-il lors de la résolution de problèmes visant le développement de la pensée algébrique? *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(1), 63-98. <https://doi.org/10.7202/1070025ar>
- Alves, C., Coppé, S., Duval, V., Golslard, A., Kuhman, H., Martin Damé, S., Piolti Lamorthe, C., & Roubin, S. (2013). Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre au collège. *Repères IREM*, 92, 9-30.
- American Psychiatric Association. (1968). Special symptoms (306). In *Diagnostic and statistical manual of mental disorders* (2ème éd., p. 607-614). <https://doi.org/10.1016/B0-12-657410-3/00457-8>
- American Psychiatric Association. (1980). Specific Developmental Disorders. In *Diagnostic and statistical manual of mental disorders* (3ème éd., p. 92-99).
- American Psychiatric Association. (2000). Troubles des apprentissages. In *Manuel diagnostique et statistique des troubles mentaux* (4ème éd., p. 56-65). [https://doi.org/10.1016/s1773-035x\(19\)30277-1](https://doi.org/10.1016/s1773-035x(19)30277-1)
- American Psychiatric Association. (2013). Specific Learning Disorder. In *Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders* (3ème éd., p. 66-74). <https://doi.org/10.1176/appi.books.9780890425596>
- Arcavi, A. (1994). Symbol sense : Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.
- Arcavi, A. (2005). Developing and Using Symbol Sense in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 25(2), 42-47.
- Arcavi, A., Friedlander, A., & Hershkowitz, R. (1990). L'algèbre avant la lettre. *Petit x*, 24, 61-71.
- Arsac, G., Chapiron, G., Colonna, A., Germain, G., Guichard, Y., & Mante, M. (1992). Typologie des preuves produites par les élèves. Des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles. In *Initiation au raisonnement déductif au collège* (p. 141-153). Presses Universitaires de Lyon.

- Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281-308. <https://revue-rdm.com/1988/ingenierie-didactique-2/>
- Arzarello, F. (2006). Semiosis as a Multimodal Process. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*, 9, 267-299. <http://funes.uniandes.edu.co/9710/>
- Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (2012). A theoretical model to analyze algebraic thinking and its application in school activities. In L. Coulange, J. Drouhard, J.-L. Dorier & A. Robert (Éd.), *Recherches en Didactique des Mathématiques, enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives* (p. 193-207). La Pensée sauvage. <https://revue-rdm.com/ouvrage/enseignement-de-lalgebre-elementaire-bilan-et-perspectives/>
- Arzarello, F., Maschietto, M., & Robutti, O. (2001). Riflessioni su variabili e funzioni. *Attes du Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algèbre -SFIDA XVI. Il simbolismo dell'algebra nell'approccio all'analisi*, 17-26.
- Assude, T., Coppé, S., & Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège - Atomisation et réduction. In L. Coulange, J. Drouhard, J.-L. Dorier & A. Robert (Éd.), *Recherches en Didactique des Mathématiques, enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives* (p. 41-85). La Pensée sauvage.
- Baccaglioni-Frank, A., Di Martino, P., & Maracci, M. (2020). Dalla definizione di competenza matematica ai profili cognitivi e affettivi. Il difficile equilibrio tra ricerca di una definizione teorica dei costrutti e sviluppo di strumenti di osservazione e intervento. *XXXVII seminario nazionale di didattica della matematica "Giovanni Prodi"*. https://www.airdm.org/semnaz2020_relazione/
- Baccaglioni-Frank, A., Karagiannakis, G., Pini, C., Termine, C., & Girelli, L. (2020). Identificare profili di apprendimento matematico di bambini tra 6 e 12 anni : la standardizzazione italiana della batteria. MathPro Identifying mathematical learning profiles of children between age 6 and 12 : the Italian standardization of the MathPro batt. *Ricercazione*, 12(1), 167-199. <https://doi.org/10.32076/RA12109>
- Baccaglioni-Frank, A., & Scorza, M. (2013). Preventing Learning Difficulties in Early Arithmetic : The PerContare Project. *Libro de Actas I Congreso Internacional de Ciencias de la Educación y des Desarrollo*, 341.
- Badreddine, Z., & Woods, D. K. (2014). L'usage de Transana pour l'étude de l'action conjointe et de la co-construction du sens en classe de sciences. *Recherches en didactiques*, 17(1), 93-111. <https://doi.org/10.3917/rdid.017.0093>

- Bagni, G. T. (2008). Equazioni e disequazioni dalla storia alla didattica della matematica. In L. Bazzini (Éd.), *Atti del seminario franco italiano di didattica dell'algebra*, VI, (SFIDA 21, 22, 23, 24, 25) (p. 53-64). Dipartimento di Matematica, Università di Torino.
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176. <https://doi.org/10.1007/bf00314724>
- Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège* (thèse de doct.). Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph- Fourier - Grenoble I. https://tel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/326426/filename/Balacheff.Nicolas_1988_these_vol_1_et_2.pdf
- Balacheff, N. (2010). Bridging knowing and proving in math : a didactical perspective. In G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Éd.), *Explanation and proof in mathematics* (p. 115-135). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0576-5_9
- Balacheff, N. (2019a). Contrôle, preuve et démonstration. Trois régimes de la validation. In J. Pilet & C. Vendeira (Éd.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2018* (p. 423-456).
- Balacheff, N. (2019b). L'argumentation mathématique précurseur problématique de la démonstration. *XXVle Colloque CORFEM*.
- Barallobres, G. (2017). Ciertos fenómenos didácticos que caracterizan las dificultades de aprendizaje en la transición de la aritmética al álgebra en la escuela secundaria. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 13(51), 27-47. <http://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/384>
- Barrouillet, P., & Thevenot, C. (2013). On the problem-size effect in small additions : Can we really discard any counting-based account? *Cognition*, 128(1), 35-44. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2013.02.018>
- Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom : Artifacts and signs after a vygotskian perspective. *Handbook of international research in mathematics education*, 746. <https://doi.org/10.4324/9780203930236.ch28>
- Bazzini, L. (1999). On the construction and interpretation of symbolic expressions. In I. Schwank (Éd.), *Proceedings of the 1st congress of the european society for research in mathematics education* (p. 112-122). Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik; ERME.
- Bazzini, L., Boero, P., & Garuti, R. (2002). Algebraic expressions and the activation of sense. In Jarmila Novotná (Éd.), *Proceedings of the 2nd congress of the european*

- society for research in mathematics education (p. 447-456). Charles University, Faculty of Education; ERME. http://www.mathematik.tu-dortmund.de/~erme/doc/CERME2_proceedings.pdf
- Bieda, K., Holden, C., & Knuth, E. (2006). Does proof prove? students' emerging beliefs about generality and proof in middle school. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Éd.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 395-402). Universidad Pedagógica Nacional.
- Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Murphy Gardiner, A., Stroud, R., Fonger, N. L., & Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. In C. Kieran (Éd.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (p. 27-50). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2004). Elementary Grades Students' Capacity for Functional Thinking. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Éd.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education (vol. 2)* (p. 135-142). PME. <https://www.igpme.org/publications/current-proceedings/>
- Bloch, I. (1987). Un essai d'expérience didactique : l'enseignement mathématique à l'école élémentaire de Bonneuil sur Marne. *Petit x*, (14-15), 101-139. <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-14-15-petit-x/8-un-essai-d-experience-didactique-l-enseignement-mathematiques-a-l-ecole-elementaire-de-bonneuil-sur-marne--568580.kjsp?RH=1550098744495>
- Bloch, I. (2008). Les signes mathématiques dans l'enseignement spécialisé : restauration du processus interprétatif. Étude d'une progression sur la multiplication en SEGPA ». *Les Sciences de l'éducation - Pour l'Ère nouvelle*, 41(1), 91-113.
- Boily, M., Polotskaia, E., Lessard, G., & Anwandter Cuellar, N. S. (2020). Les suites non numériques et le potentiel de la pensée algébrique chez les élèves du préscolaire. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(1), 11-35. <https://doi.org/10.7202/1070023ar>
- Bone, E., Bouck, E., & Witmer, S. (2021). Evidence-Based Systematic Review of Literature on Algebra Instruction and Interventions for Students With Learning Disabilities. *Learning Disabilities : A Contemporary Journal*, 19(1), 1-22. https://www.ldw-ldcj.org/images/open_access_articles/1_Review_of_Literature_on_Algebra_Instruction.pdf

- Booth, L. (1984). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x*, 5, 5-17. <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-5-petit-x/1-erreurs-et-incomprehensions-en-algebre-elementaire--570212.kjsp?RH=1550098436891>
- Bouck, E. C., Park, J., Satsangi, R., Cwiakala, K., & Levy, K. (2019). Using the Virtual-Abstract Instructional Sequence to Support Acquisition of Algebra. *Journal of Special Education Technology*, 34(4), 253-268. <https://doi.org/10.1177/0162643419833022>
- Boulton-Lewis, G. M., Cooper, T. J., Atweh, B., Pillay, H., & Wilss, L. (2000). Readiness for algebra. In T. Nokahara & M. Koyama (Éd.), *Proceedings of the 24th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 2)* (p. 89-96). Hisoshima University. <https://www.igpme.org/publications/current-proceedings/>
- Boyer, C. B. (2009). *Storia della matematica* (A. Carugo, Trad.). Mondadori Editore S.p.A.
- Brousseau, G. (1997). La théorie des situations didactiques. *Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal*. <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/06/MONTREAL-archives-GB1.pdf>
- Brousseau, G. (2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques (1998)* (rapp. tech.). <https://guy-brousseau.com/biographie/glossaires/>
- Butterworth, B. (2005). Developmental dyscalculia. In J. I. D. Campbell (Éd.), *Handbook of mathematical cognition* (p. 455-468). Psychology Press. <https://doi.org/10.4324/9780203998045-37>
- Carpenter, T. P., & Franke, M. L. (2001). Developing Algebraic Reasoning in the Elementary School : Generalization and Proof. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Éd.), *12th ICMI Study Conference. The future of the teaching and learning of algebra* (p. 155-162). University of Melbourne.
- Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40, 3-22. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7>
- Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2018). Cultivating early algebraic thinking. In C. Kieran (Éd.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (p. 107-138). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_5

- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(2), 87-115. <https://doi.org/10.2307/30034843>
- Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie : l'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51-94. <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-5-petit-x/3-le-passage-de-l-arithmetique-a-l-algebrique-dans-l-enseignement-des-mathematiques-au-college-1ere-partie--570218.kjsp?RH=1550098436891>
- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-72. <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-19-petit-x/5-le-passage-de-l-arithmetique-a-l-algebre-dans-l-enseignement-des-mathematiques-au-college--567769.kjsp?RH=1550098889641>
- Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie : voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, 23, 5-38. <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-23-petit-x/1-le-passage-de-l-arithmetique-a-l-algebrique-dans-l-enseignement-des-mathematiques-au-college--567674.kjsp?RH=1550099027142>
- Chevallard, Y. (1994). Enseignement de l'algèbre et transposition didactique. In Silvio Zamorani editore (Éd.), *Rendiconti del seminario matematico Università e Politecnico Torino* (p. 175-234). <http://www.seminariomatematico.unito.it/rendiconti/cartaceo/52-2/175.pdf>
- Chimoni, M., & Pitta-Pantazi, D. (2017). The effect of two intervention courses on students' early algebraic thinking. *Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME 10*, 424-431. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01914682>
- Conférence Suisse des Directeurs cantonaux de l'Instruction Publique. (2007). *Accord intercantonal sur la collaboration dans le domaine de la pédagogie spécialisée*.
- Conférence Suisse des Directeurs de l'Instruction Publique. (2007). Commentaire des dispositions sur l'Accord intercantonal sur la collaboration dans le domaine de la pédagogie spécialisée. http://www.edudoc.ch/static/web/aktuell/medienmitt/konk_sonder_web_f.pdf%7B%5C%7D5Cnhttp://www.edk.ch/dyn/14642.php

- Confrey, J., & Smith, E. (1991). A framework for functions : Prototypes, multiple representations, and transformations. In R. G. Underhill (Éd.), *13th annual meeting North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 57-63).
- Constantin, C. (2015). Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au collège? In A.-C. Mathé & É. Mounier (Éd.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (p. 238-253).
- Cordes, S., & Gelman, R. (2005). The Young Numerical Mind. When Does It Count? In J. I. D. Campbell (Éd.), *Handbook of mathematical cognition* (p. 127-142). Psychology Press. <https://doi.org/10.4324/9780203998045-16>
- Cortès, A., Vergnaud, G., & Kavafian, N. (1990). From arithmetic to algebra : negotiating a jump in the learning process. In G. Booker, P. Cobb & T. N. de Mendicuti (Éd.), *Proceedings of the annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education with the North American chapter 12th PME-NA conference* (p. 27-34).
- Coulange, L., & Grugeon, B. (2008). Pratique enseignantes et transmissions de situations d'enseignement en algèbre. *Petit x*, 78, 5-23.
- Cusi, A., Malara, N. A., & Navarra, G. (2011). Early Algebra : Theoretical Issues and Educational Strategies for Bringing the Teachers to Promote a Linguistic and Metacognitive approach to it. In J. Cai & E. Knuth (Éd.), *Early algebraization : Cognitive, curricular, and instructional perspectives* (p. 483-510). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_25
- Davydov, V. V. (1990). *Types of generalization in instruction : Logical and psychological problems in the structuring of school curricula. Soviet Studies in Mathematics Education* (J. Teller, Trad.; T. 2). National Council of Teachers of Mathematics.
- Dehaene, S. (2010). *La bosse des maths : quinze ans après (Nouv. édition revue et augmentée)*. Odile Jacob.
- Dehaene, S., Molko, N., & Wilson, A. (2004). Dyscalculie, le sens perdu des nombres. *La recherche*, 379, 42-47.
- Département de la formation, de la jeunesse et de la culture. (2019). *Concept 360°*. https://www.vd.ch/fileadmin/user_upload/organisation/dfj/dgeo/fichiers_pdf/concept360/Concept_360.pdf
- Département de la formation, de la jeunesse et de la culture et HEP Vaud. (2019). *Évaluation de l'enseignement des mathématiques dans le canton de Vaud*.
- Deruaz, M., & Dias, T. (2016). Élèves en difficulté : dyscalculiques? *Petit x*, 101, 7-35.
- Deruaz, M., Dias, T., Gardes, M.-L., Gregorio, F., Ouvrier-Buffet, C., Peteers, F., & Robotti, E. (2020). Exploring MLD in mathematics education : ten years of

- research. *Journal of Mathematical Behavior (The)*, 60(60). <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100807>
- Desmet, L., & Mussolin, C. (2012). Évaluer les troubles d'apprentissage en mathématique. *ANAE. Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant*, 24(120-121), 541-545.
- Dias, T. (2018). Difficultés d'apprentissage en mathématiques : un regard didactique. In J. Pilet & C. Vendeira (Éd.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (p. 251-259).
- Dias, T., & Deruaz, M. (2012). Dyscalculie : et si les enseignants reprenaient la main? *ANAE. Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant*, 24(120-21), 529-534.
- Dias, T., & Ouvrier-Buffet, C. (2018). Perspectives de recherches sur les difficultés d'apprentissage en mathématiques. *Revue de Mathématiques pour l'école*, 229, 47-53. <https://www.revue-mathematiques.ch/files/5115/2224/0117/RMe229-Dias.pdf>
- Dibbs, R. A., Hott, B. L., Martin, A., Raymond, L., & Kline, T. (2020). Combining like Terms : A qualitative meta-synthesis of algebra i interventions in mathematics and special education. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 8(3), 219-232. <https://doi.org/10.46328/IJEMST.V8I3.862>
- Dorier, J.-L. (2010). L'analyse a priori : un outil pour la formation d'enseignants – exemple d'un jeu issu des manuels suisses romands de première année primaire. In P. Danos (Éd.), *L'enseignement des mathématiques à l'école : Où est le problème – actes du xxxvième colloque international des formateurs de professeurs des écoles en mathématiques (copirelem)*. ARPEME.
- Dorier, J.-L., & Sierpiska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In D. Holton (Éd.), *The teaching and learning at university level - An ICMJ Study* (p. 255-273). Springer.
- Dougherty, B. (2008). Measure Up : A Quantitative View of Early Algebra. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Éd.), *Algebra in the early grades* (p. 389-412). Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9781315097435-18>
- Drouhard, J. (1992). *Les Écritures Symboliques de l'Algèbre Élémentaire* (thèse de doct.). Université Paris 7 Denis-Diderot.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang.

- Duval, R. (2002). L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets. *Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'algèbre*, 13, 67-96. <https://doi.org/10.1037/h0021964>
- English, L. D., & Warren, E. A. (1998). Introducing the Variable through Pattern Exploration. *The Mathematics Teacher*, 91(2), 166-170.
- Falardeau, É., Pelletier, C., & Pelletier, D. (2014). La méthode de la pensée à voix haute pour analyser les difficultés en lecture des élèves de 14 à 17 ans. *Éducation et didactique*, 8(3), 43-54. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.2022>
- Ferrara, F., & Sinclair, N. (2016). An early algebra approach to pattern generalisation: Actualising the virtual through words, gestures and toilet paper. *Educational Studies in Mathematics*, 92(1), 1-19. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9674-3>
- Ferrari, P. L. (2003). Abstraction in mathematics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences*, 358, 1225-1230. <https://doi.org/10.1098/rstb.2003.1316>
- Fias, W., Menon, V., & Szucs, D. (2013). Multiple components of developmental dyscalculia. *Trends in Neuroscience and Education*, 2, 43-47. <https://doi.org/10.1016/j.tine.2013.06.006>
- Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.
- Fischer, J.-P. (2009a). La dyscalculie développementale: une conclusion. *ANAE. Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant*, (102), 179-185.
- Fischer, J.-P. (2009b). Six questions ou propositions pour cerner la notion de dyscalculie développementale. *ANAE. Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant*, (102), 117-133.
- Fondation Centre suisse de pédagogie spécialisée. (2015). *Dyslexie-dysorthographe à l'école régulière. Informations à l'intention des enseignants sur le trouble, les mesures de différenciation pédagogique et la compensation des désavantages* (rapp. tech.). <https://www.csps.ch/fr/fiches-d-information-pour-enseignants>
- Fondation Centre suisse de pédagogie spécialisée. (2020). *Dyscalculie (trouble spécifique d'apprentissage en mathématiques) à l'école régulière. Informations à l'intention des enseignant-e-s sur le trouble, les mesures de différenciation pédagogique et la compensation des désavantages* (rapp. tech.). https://www.ciip.ch/files/2/Fiche_info_Dyscalculie_version_longue.pdf

- Fortin, M.-F., & Gagnon, J. (2016). *Fondements et étapes du processus de recherche. Méthodes quantitatives et qualitatives*. Chenelière Éducation. <https://doi.org/10.7202/1042088ar>
- Franke, M. L., Carpenter, T. P., & Battey, D. (2008). Early algebra as analysis of structure : A focus on operations. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Éd.), *Algebra in the Early Grades* (p. 333-360). Lawrence Erlbaum Associates.
- Freiman, V., & Lee, L. (2004). Tracking primary students' understanding of the equal sign. *28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 415-422.
- Furlong, M., McLoughlin, F., McGilloway, S., & Geary, D. (2016). Interventions to improve mathematical performance for children with mathematical learning difficulties (MLD). *Cochrane Database of Systematic Reviews*, (4). <https://doi.org/10.1002/14651858.CD012130>
- Gardes, M.-L. (2021). Compréhensions des fractions chez des adultes porteurs ou non de dyscalculie développementale. In G. Hilaire-Debove & N. Joyeux (Éd.), *La cognition mathématique. état des pratiques et de la recherche*. OrthoÉdition.
- Gardes, M.-L., Gregorio, F., Dias, T., & Deruaz, M. (2019). Mathematical learning disabilities : a challenge for mathematics education. In M. Graven, H. Venkat, A. Essien & P. Vale (Éd.), *Proceedings of the 43rd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 173-174). PME.
- Gardes, M.-L., & Prado, J. (2016). Entre neurosciences et éducation : des chaînons manquants. *Les cahiers pédagogiques*, 71(527), 35-38.
- Gascon, J. (1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'«arithmétique généralisée». *Petit x*, (37), 43-63.
- Gauvrit, N. (2012). Didactique des mathématiques et psychologie. L'impossible débat? *ANAE. Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant*, 24(120-121), 525-528.
- Geary, D. C. (2004). Mathematics and Learning Disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 37(1), 4-15. <https://doi.org/10.1177/00222194040370010201>
- Geary, D. C. (2011). Consequences, Characteristics, and Causes of Mathematical Learning Disabilities and Persistent Low Achievement in Mathematics. *Journal of Developmental & Behavioral Pediatrics*, 32(3), 250-263. <https://doi.org/10.1097/DBP.0b013e318209edef>
- Geary, D. C., & Hoard, M. K. (2005). Learning disabilities in arithmetic and mathematics. In J. I. D. Campbell (Éd.), *Handbook of mathematical cognition* (p. 253-267). Psychology Press.

- Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L., & Bailey, D. H. (2012). Mathematical cognition deficits in children with learning disabilities and persistent low achievement : A five-year prospective study. *Journal of Educational Psychology*, 104(1), 206-223. <https://doi.org/10.1037/a0025398>
- Germi, P.-E., & Bessot, A. (1997). Statut des lettres et notion de variable. *Petit x*, 45, 59-79.
- Gersten, R., Chard, D. J., Jayanthi, M., Baker, S. K., Morphy, P., & Flojo, J. (2009). Mathematics Instruction for Students With Learning Disabilities : A Meta-Analysis of Instructional Components. *Review of Educational Research*, 79(3), 1202-1242. <https://doi.org/10.3102/0034654309334431>
- Ginsburg, H. (1981). The Clinical Interview in Psychological Research on Mathematical Thinking : Aims, Rationales, Techniques. *For the Learning of Mathematics*, 1(3), 4-11. <https://www.jstor.org/stable/pdf/40247721.pdf>
- Giroux, J. (2011). Pour une différenciation de la dyscalculie et des difficultés d'apprentissage en mathématiques. *Actes de colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec*, 148-158.
- Giroux, J., & Fortier-Moreau, G. (2017). *Analyse a priori di protocole d'investigation didactique des connaissances sur les structures multiplicatives* (rapp. tech.). Projet orthodidactique des mathématiques 2013-2015 et 2016-2019.
- Gravier, S., & Ouvrier-Buffet, C. (2022). The mathematical background of proving processes in discrete optimization - Exemplification with Research Situations for the Classrooms. *ZDM Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01400-3>
- Gregorio, F. (2019). Mathematical learning disabilities in early algebra. In M. Graven, H. Venkat, A. Essien & P. Vale (Éd.), *Proceedings of the 43rd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 138). PME.
- Gregorio, F. (2021). Les troubles de l'apprentissage en mathématiques dans le cadre de l'algèbre de base. In H. Chaachoua, A. Bessot, B. Berta, L. Coulangue, G. Ciraide, P. Job, A.-C. Mathé, A. Pressiat, M. Schneider & F. Vanderbrouk (Éd.), *Nouvelles perspectives en didactique : Le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure* (p. 649-652). La pensée sauvage.
- Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, 17(2), 167-210.

- Grugeon, B. (2000). Une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire : conception, exploitation et perspectives. In *L'algèbre au lycée et au collège* (p. 5-39). IREM de Montpellier.
- Grugeon-Allys, B. (2015). Réguler l'enseignement en algèbre élémentaire : une approche multidimensionnelle. In A.-C. Mathé & É. Mounier (Éd.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (p. 40-63).
- Grugeon-Allys, B., & Pilet, J. (2017). Quelles connaissances et quels raisonnements en arithmétique favorisent l'entrée dans l'algèbre? *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 106-130. <https://doi.org/10.7202/1055730ar>
- Grugeon-Allys, B., Pilet, J., Chenevotot-Quentin, F., & Delozanne, É. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. In L. Coulange, J. Drouhard, J.-L. Dorier & A. Robert (Éd.), *Recherches en Didactique des Mathématiques, enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives* (p. 137-162). La Pensée sauvage.
- Hacker, D. J., Kiuvara, S. A., & Levin, J. R. (2020). A metacognitive intervention for teaching fractions to students with or at-risk for learning disabilities in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 51. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01040-0>
- Herscovics, N., & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *The Mathematics Teacher*, 73(8), 572-580. <https://doi.org/10.5951/MT.73.8.0572>
- Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 59-78. <https://doi.org/10.1007/bf01284528>
- Heyd-Metzuyanin, E. (2013). The co-construction of learning difficulties in mathematics-teacher-student interactions and their role in the development of a disabled mathematical identity. *Educational Studies in Mathematics*, 83(3), 341-368. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9457-z>
- Hodgen, J., Oldenburg, R., & Strømskag, H. (2018). Algebraic Thinking. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger & K. Ruthven (Éd.), *Developing research in mathematics education : Twenty years of communication, cooperation and collaboration in europe* (p. 32-45). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315113562-4>
- Hughes, E. M., Riccomini, P. J., & Lee, J.-Y. (2020). Investigating written expressions of mathematical reasoning for students with learning disabilities. *Journal of Mathematical Behavior*, 58. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100775>

- Hughes, E. M., Witzel, B. S., Riccomini, P. J., Fries, K. M., & Kanyongo, G. Y. (2014). A Meta-Analysis of Algebra Interventions for Learners with Disabilities and Struggling Learners. *Journal of the International Association of Special Education*, 15(1), 36-47.
- Hunter, J., Anthony, G., & Burghes, D. (2018). Scaffolding teacher practice to develop early algebraic reasoning. In C. Kieran (Éd.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (p. 379-402). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_16
- Hunting, R. P. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(2), 145-165. [https://doi.org/10.1016/s0732-3123\(97\)90023-7](https://doi.org/10.1016/s0732-3123(97)90023-7)
- Hwang, J., Riccomini, P. J., & Morano, S. (2019). Examination of Cognitive Processes in Effective Algebra Problem-Solving Interventions for Secondary Students with Learning Disabilities. *Learning Disabilities : A Contemporary Journal*, 17(2), 205-222.
- Jeannotte, D., & Corriveau, C. (2020). Étude de raisonnements mathématiques associés à la pensée algébrique chez les élèves avant l'introduction de l'algèbre. In H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner & M. Larguier (Éd.), *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires* (p. 121-133). Livres en ligne du CRIRES. <https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-%20algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches>
- Jeannotte, D., Squalli, H., & Robert, V. (2019). Mise à l'épreuve d'un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique par l'entremise d'une analyse du Programme de Formation de l'École Québécoise au primaire. In C. Corriveau, V. Martin, M. Thibault & A. Savard (Éd.), *Colloque du groupe de didactique des mathématiques du Québec 2019. à quoi ressemble aujourd'hui la recherche en didactique des mathématiques au Québec?* (p. 146-155). Université Laval, Québec.
- Kaput, J. J. (1995). A research base supporting long term algebra reform? In D. T. Owens, M. K. Reed & G. M. Millsaps (Éd.), *Proceedings of the 17th annual meeting of PME-NA* (p. 71-94).
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carragher & M. L. Blanton (Éd.), *Algebra in the early grades* (p. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9781315097435-2>

- Kaput, J. J., Blanton, M. L., & Moreno, L. (2008). Algebra From a Symbolization Point of View. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Éd.), *Algebra in the early grades* (p. 19-56). Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9781315097435-3>
- Karagiannakis, G., & Baccaglioni-Frank, A. (2014). The DeDiMa battery : a tool for identifying students' mathematical learning profiles. *Health Psychology Report*, 2(4), 291-297. <https://doi.org/10.5114/hpr.2014.46329>
- Karagiannakis, G., Baccaglioni-Frank, A., & Papadatos, Y. (2014). Mathematical learning difficulties subtypes classification. *Frontiers in human neuroscience*, 8(57). <https://doi.org/10.3389/fnhum.2014.00057>
- Karagiannakis, G., Baccaglioni-Frank, A., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian Journal of Learning Difficulties*, 21(2), 115-141. <https://doi.org/10.1080/19404158.2017.1289963>
- Kaufmann, L., Mazzocco, M. M., Dowker, A., von Aster, M., Göbel, S. M., Grabner, R. H., Henik, A., Jordan, A., Kamiloff-Smith, A., Kucian, K., Rubinsten, O., Szucs, D., Shalev, R., & Nuerk, H.-C. (2013). Dyscalculia from a developmental and differential perspective. *Frontiers in Psychology*, 4(516), 1-5. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00516>
- Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 317-326. <https://doi.org/10.1007/bf00311062>
- Kieran, C. (1989a). A perspective on algebraic thinking. In G. Vergnaud, J. Rogalski & M. Artigue (Éd.), *Proceedings of the 13th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 163-171).
- Kieran, C. (1989b). The early learning of algebra : A structural perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Éd.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (p. 33-56). NCTM.
- Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson & A. Laborde C. Pérez (Éd.), *8th international congress on mathematical education : Selected lectures* (p. 271-290). S.A.E.M. Thales.
- Kieran, C. (2004a). Algebraic Thinking in the Early Grades : What Is It? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.
- Kieran, C. (2004b). The Core of Algebra : Reflections on its Main Activities. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Éd.), *The future of the teaching and learning of algebra. the 12th ICMI study* (p. 21-33). Springer. https://doi.org/10.1007/1-4020-8131-6_2

- Kieran, C. (2007). What Do Students Struggle with When First Introduced to Algebra Symbols?
- Kieran, C. (2018a). Conclusions and looking ahead. In C. Kieran (Éd.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (p. 427-438). Springer.
- Kieran, C. (2018b). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations : A fundamental path to developing early algebraic thinking. In C. Kieran (Éd.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (p. 79-106). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_4
- Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early algebra : Research into its nature, its learning, its teaching*. Springer Nature. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258-2>
- Kieran, C., & Sfard, A. (1999). Seeing through symbols : The case of equivalent expressions. *Focus on learning problems in mathematics*, 21(1), 1-17.
- Kline, M. (1990). *Mathematical Thought from ancient to modern times* (T. 1). Oxford University Press.
- Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school*, 7(4), 24-28.
- Kucian, K., Loenneker, T., Dietrich, T., Dosch, M., Martin, E., & von Aster, M. (2006). Impaired neural networks for approximate calculation in dyscalculic children : A functional MRI study. *Behavioral and Brain Functions*, 2(31). <https://doi.org/10.1186/1744-9081-2-31>
- Lacombe, N., de Chambrier, A. F., & Dias, T. (2021). Des données probantes au service de l'enseignement différencié des mathématiques. *Revue de Mathématiques pour l'école (RMé) - Ex. Math-Ecole*, 236(31), 13-26. <https://doi.org/10.1186/1744-9081-2-31>
- Lacombe, N., Petitpierre, G., & Dias, T. (2020). Observer les gestes pour analyser les habiletés spatiales des élèves ayant une déficience intellectuelle. *Revue Suisse de Pédagogie Spécialisée*, (2), 47-53.
- Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations*. Hermann.
- Le grand conseil du canton de Vaud. (2011). *Loi sur l'enseignement obligatoire*. https://www.vd.ch/fileadmin/user_upload/themes/formation/sante_scolaire/fichiers_pdf/Loi_sur_l_enseignement_obligatoire_LEO_.pdf
- Le grand conseil du canton de Vaud. (2015). *Loi sur la pédagogie spécialisée*. https://www.vd.ch/fileadmin/user_upload/organisation/dfj/sesaf/LPS/LPS_417_31.pdf

- Lee, J., Bryant, D. P., Ok, M. W., & Shin, M. (2020). A Systematic Review of Interventions for Algebraic Concepts and Skills of Secondary Students with Learning Disabilities. *Learning Disabilities Research and Practice*, 35(2), 89-99. <https://doi.org/10.1111/ldrp.12217>
- Lee, L., & Wheeler, D. (1989). The arithmetic connection. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 41-54. <https://doi.org/10.1007/BF00356040>
- LEGGE 8 ottobre 2010, n. 170. (2010). <https://www.gazzettaufficiale.it/gunewsletter/dettaglio.jsp?service=1&datagu=2010-10-18&task=dettaglio&numgu=244&redaz=010G0192&tmstp=1288002517919>
- Lewis, K. E. (2014). Difference Not Deficit : Reconceptualizing Mathematical Learning Disabilities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(3), 351-396. <https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.3.0351>
- Lewis, K. E., & Fisher, M. B. (2016). Taking Stock of 40 Years of Research on Mathematical Learning Disability : Methodological Issues and Future Directions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47(4), 338-371. <https://doi.org/10.5951/jresematheduc.47.4.0338>
- Lignier, W. (2011). La cause de l'intelligence. Comment la supériorité intellectuelle enfantine est devenue une catégorie de l'action publique d'éducation en France (1971-2005). *Politix*, 94(2), 179-201. <https://doi.org/10.3917/pox.094.0179>
- Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra : operating on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 39-65. <https://doi.org/10.1007/bf00163752>
- Lins, R. C. (1992). *A framework for understanding what algebraic thinking is* (thèse de doct.). University of Nottingham.
- Lockwood, E., Ellis, A. B., & Lynch, A. G. (2016). Mathematicians' Example-Related Activity when Exploring and Proving Conjectures. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2, 165-196. <https://doi.org/10.1007/s40753-016-0025-2>
- Loi n° 2005-102 du 11 février 2005 pour l'égalité des droits et des chances, la participation et la citoyenneté des personnes handicapées. (2005). https://www.legifrance.gouv.fr/jorf/article_jo/JORFARTI000001099341
- Loi n°2013-595 du 8 juillet 2013 d'orientation et de programmation pour la refondation de l'École de la République. (2013). <https://www.legifrance.gouv.fr/loda/id/JORFTEXT000027677984/>

- Lugo, A. A. (2004). *The effects of multimedia-based instructional technology on Algebra I problem-solving skills of ninth through grade students with learning disabilities* (thèse de doct.). Howard University.
- Maccini, P., Mcnaughton, D., & Ruhl, K. L. (1999). Algebra instruction for students with learning disabilities : implications form a research review. *Learning Disability Quarterly*, 22(2), 113-126. <https://doi.org/10.2307/1511270>
- Maher, C. A. (2010). The longitudinal study. In C. A. Maher, A. B. Powell & E. B. Uptegrove (Éd.), *Combinatorics and Reasoning. Representing, Justifying and Building Isomorphisms* (p. 3-8). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-98132-1_1
- Maher, C. A., Powell, A. B., & Uptegrove, E. B. (Éd.). (2010). *Combinatorics and Reasoning. Representing, Justifying and Building Isomorphisms*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-98132-1>
- Maher, C. A., Sran, M. K., & Yankelewitz, D. (2010a). Building an inductive argument. In C. A. Maher, A. B. Powell & E. B. Uptegrove (Éd.), *Combinatorics and Reasoning. Representing, Justifying and Building Isomorphisms* (p. 45-58). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0615-6_2
- Maher, C. A., Sran, M. K., & Yankelewitz, D. (2010b). Towers : Schemes, strategies, and arguments. In C. A. Maher, A. B. Powell & E. B. Uptegrove (Éd.), *Combinatorics and Reasoning. Representing, Justifying and Building Isomorphisms* (p. 27-44). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-98132-1_4
- Maher, C. A., & Uptegrove, E. B. (2010). Methodology. In C. A. Maher, A. B. Powell & E. B. Uptegrove (Éd.), *Combinatorics and Reasoning. Representing, Justifying and Building Isomorphisms* (p. 9-14). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-98132-1_1
- Maher, C. A., & Yankelewitz, D. (2010). Representations as tools for building arguments. In C. A. Maher, A. B. Powell & E. B. Uptegrove (Éd.), *Combinatorics and Reasoning. Representing, Justifying and Building Isomorphisms* (p. 17-26). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-98132-1_3
- Malara, N. A. (1996). Il pensiero algebrico : come promuoverlo sin dalla scuola dell'obbligo limitandone le difficoltà? *Actes du Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algèbre - SFIDA VII. Que signifie la question : « L'algèbre est-elle un langage? » Et que signifient les réponses possibles?*, 16-29.
- Malara, N. A., & Navarra, G. (2018). New words and concepts for early algebra teaching : Sharing with teachers epistemological issues in early algebra to develop students' early algebraic thinking. In C. Kieran (Éd.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds The Global Evolution of an Emerging*

- Field of Research and Practice* (p. 51-78). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_3
- Malara, N. A., Navarra, G., & Sini, S. (2012). *Unità 12. Successioni come funzioni. Loro esplorazioni attraverso differenti registri di rappresentazione*. Pitagora Editrice.
- Maracci, M. (2008). Combining different theoretical perspectives for analyzing students' difficulties in vector spaces theory. *ZDM*, 40(2), 256-276. <https://doi.org/10.1007/s11858-008-0078-z>
- Margolinas, C. (1992). Analyse de situation et analyse du rôle du maître sur un cas particulier. *Séminaire de l'équipe recherche en didactique des mathématiques et de l'informatique*, (January 1992), 185-205.
- Mariotti, M. A., Durand-Guerrier, V., & Stylianides, G. J. (2018). Argumentation and proof. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger & K. Ruthven (Éd.), *Developing research in mathematics education – Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (p. 75-89). Taylor Francis. <https://doi.org/10.4324/9781315113562-7>
- Marlot, C., Toullec-Théry, M., & Daguzon, M. (2017). Processus de co-construction et rôle de l'objet biface en recherche collaborative. *Phronesis*, 1(6), 21-34.
- Mason, J. (1989). Mathematical Abstraction as the Result of a Delicate Shift of Attention. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 2-8. <http://www.jstor.org/stable/pdf/40247947.pdf>
- Mason, J. (2008). Making Use of Children's Powers to Produce Algebraic Thinking. *Algebra in the early grades*, 57-94. <https://doi.org/10.4324/9781315097435-4>
- Mason, J. (2018). How early is too early for thinking algebraically? In C. Kieran (Éd.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (p. 329-350). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_14
- Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating Mathematical Structure for All. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 10-32. <https://doi.org/10.1007/BF03217543>
- Meljac, C. (2010). Dyscalculie : un mythe passablement mité. In M. Bergès-Bounes, S. Calmettes, C. Ferron, J.-M. Forget & C. Rey (Éd.), *L'enfant et les apprentissages malmenés* (p. 33-43). Érès.
- Mercier, A., & Salin, M. (1988). L'analyse a priori, outil pour l'observation. *Actes de l'Université d'été de didactique des mathématiques*, 203-236.

- Millon-Faure, K., Dias, T., Kouame Koffi, P., & Theis, L. (2018). Bilan du groupe 11. In M. Abboud (Éd.), *Actes du colloque emf 2018* (p. 1161-1169). Editions de l'IREM de Paris.
- Miyakawa, T. (2002). Relationship between proof and conception : the case of proof for the sum of two even numbers.
- Montalbano, V., Benedetti, R., Mariotti, E., Mariotti, M. A., & Porri, A. (2012). Attempts of transforming teacher practice through professional development.
- Navarra, G. (2019). Il progetto ArAl per un approccio relazionale all'insegnamento nell'area aritmetico-algebraica. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 5, 70-94.
- Navarra, G., & Giacomini, A. (2003). *Unità 2. Rappresentazioni del numero : le maschere e il domino*. Pitagora Editrice.
- Navarra, G., & Zamboni, M. T. (2006). *Unità 10. Qual è il colore della sedia? Successioni modulari e forme embrionali di generalizzazione*. Pitagora Editrice.
- Nesselmann, G. H. F. (1842). *Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra, nach den Quellen bearbeitet*. Reimer.
- Noble, T., Nemirovsky, R., Wright, T., & Tierney, C. (2001). Experiencing Change : The Mathematics of Change in Multiple Environments. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(1), 85-108. <https://doi.org/10.2307/749622>
- Noël, M.-p., & Karagiannakis, G. (2020). *Dyscalculie et difficultés d'apprentissage en mathématiques. Guide pratique de prise en charge*. De Boeck Supérieur.
- Organisation mondiale de la Santé. (2022). *Classification internationale des maladies* (11ème éd.). <https://icd.who.int/browse11/l-m/fr#/http%5C%3a%5C%2f%5C%2fid.who.int%5C%2fid%5C%2fentity%5C%2f2099676649>
- Ouvrier-Buffer, C. (2021). *Exploring proof in elementary schools within Research-Situations for the Classroom - The case of polyominoes*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03499721>
- Pang, J., & Kim, J. (2018). Characteristics of Korean students' early algebraic thinking : A generalized arithmetic perspective. In C. Kieran (Éd.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (p. 141-166). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_6
- Parisi, F., & Suchaut, B. (2019). *La scolarisation des élèves au bénéfice d'une mesure de pédagogie spécialisée. description et analyse au sein des établissements pilotes vaudois*. Unité de recherche pour le pilotage des systèmes pédagogiques.

- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 23-41. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9057-x>
- Peteers, F. (2018). *Un trouble à l'interface entre différents champs disciplinaires (handicap, santé et formation) : la dyscalculie - Une approche didactique* (thèse de doct.). Université de Reims Champagne-Ardenne. Reims.
- Peteers, F. (2020). Apports croisés de la didactique et de la cognition numérique pour l'étude des troubles des apprentissages en mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques*, 40(2), 2728.
- Petitfour, É. (2018). Quel accompagnement en géométrie pour des élèves dyspraxiques? *Grand N*, 101, 45-70. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/101n3_1551696435186-pdf
- Pilet, J. (2012). *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation* (thèse de doct.). Université Paris-Diderot - Paris VII. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00784039v2/document>
- Pilet, J. (2015). Réguler l'enseignement en algèbre élémentaire par des parcours d'enseignement différencié. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 35(2), 273-312. <https://revue-rdm.com/2015/reguler-l-enseignement-en-algebre/>
- Pilet, J., & Grugeon-Allys, B. (2020). Quelles potentialités du calcul en ligne dans l'enseignement primaire en France pour favoriser une entrée précoce dans l'algèbre? In H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner & M. Larguier (Éd.), *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires* (p. 71-95). Livres en ligne du CRIRES. <https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-%20algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches>
- Pilet, J., & Grugeon-Allys, B. (2021). L'activité numérique-algébrique à la transition entre l'arithmétique et l'algèbre. *Éducation et didactique*, 15(2), 9-26. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.8580>
- Pillay, H., Wilss, L., & Boulton-Lewis, G. (1998). Sequential development of algebra knowledge : A cognitive analysis. *Mathematics Education Research Journal*, 10(2), 87-102. <https://doi.org/10.1007/BF03217344>
- Pinto, E., & Cañadas, M. (2017). Functional thinking and generalisation in third year of primary school. *Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME 10*, 472-479.

- Powell, S. R., Berry, K. A., & Barnes, M. A. (2020). The role of pre-algebraic reasoning within a word-problem intervention for third-grade students with mathematics difficulty. *ZDM*, 52, 151-163. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01093-1>
- Prediger, S., & Bikner-Ahsbals, A. (2014). Introduction to networking : networking strategies and their background. In A. Bikner-Ahsbals & S. Prediger (Éd.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (p. 117-125). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9_8
- Prediger, S., Bikner-Ahsbals, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches : First steps towards a conceptual framework. *ZDM - the International Journal on Mathematics Education*, 40, 165-178. <https://doi.org/10.1007/s11858-008-0086-z>
- Radford, L. (1996). Some reflections about the teaching of algebra through generalization. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Éd.), *Approaches to algebra* (p. 107-111). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_7
- Radford, L. (2001). Factual, Contextual and Symbolic Generalizations in Algebra. In Marja van den Huevel-Panhuizen (Éd.), *Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 81-89).
- Radford, L. (2002). Algebra as Tekhné : Artefacts, Symbols and Equations in the Classroom. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics education*, 1(1), 31-56.
- Radford, L. (2005). Body, Tool, and Symbol : Semiotic Reflections on Cognition. In E. Simmt & B. Davis (Éd.), *Proceedings of the 2004 annual meeting of the canadian mathematics education study group* (p. 111-117).
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns : A semiotic perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Éd.), *28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American chapter* (p. 2-21).
- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction : A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 40(1), 83-96. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0>
- Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19. <https://doi.org/10.1080/14794800903569741>

- Radford, L. (2010b). Elementary Forms of Algebraic Thinking in Young Students. In M. F. Pinto. & T. F. Kawasaki (Éd.), *Proceedings of the 34th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 73-80). PME.
- Radford, L. (2010c). Signs, gestures, meanings : Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Éd.), *Proceedings of the sixth congress of the european society for research in mathematics education*. Institut National de Recherche Pédagogique; ERME.
- Radford, L. (2011). Grade 2 Students' Non-Symbolic Algebraic Thinking. In J. Cai & E. Knuth (Éd.), *Early algebraization* (p. 303-322). Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_17
- Radford, L. (2012). Early algebraic thinking : Epistemological, semiotic, and developmental issues. In S. J. Cho (Éd.), *Icme-12 regular lecture* (p. 675-694). Seoul National University.
- Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Éd.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (p. 3-26). Springer. https://doi.org/doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1
- Radford, L. (2021). *The theory of objectification : A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning*. Brill/Sense. <https://doi.org/10.1163/9789004459663>
- Robotti, E. (2017). Designing Innovative Learning Activities to Face Difficulties in Algebra of Dyscalculic Students : Exploiting the Functionalities of AINuSet. In A. Leung & A. Baccaglini-Frank (Éd.), *Digital technologies in designing mathematics education tasks. mathematics education in the digital era* (p. 193-214). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-43423-0_10
- Robotti, E., & Baccaglini-Frank, A. (2017). Using digital environments to address students' mathematical learning difficulties. In E. Faggiano, F. Ferrara & A. Montone (Éd.), *Innovation and technology enhancing mathematics education : Perspectives in the digital era* (p. 77-106). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-61488-5_5
- Robotti, E., & Faggiano, E. (2013). Difficulties in algebra : new educational approach by AINuSet. In E. Faggiano & A. Montone (Éd.), *Proceedings of ICTMT11* (p. 250-255). ICTMT.
- Roiné, C., & Barallobres, G. (2018). Pensando con Pierre Bourdieu la categorización de los alumnos con dificultades. *Cadernos de Pesquisa*, 48(170), 1168-1192. <https://doi.org/10.1590/198053145362>

- Roy, P. (2021). Des recherches participatives en éducation : convergences et divergences? In P. Roy (Éd.), *Des recherches participatives dans les didactiques disciplinaires et autres domaines de connaissance. Quelles finalités? Quels savoirs? Et quelles stratégies méthodologiques pour favoriser leur circulation dans les milieux de la recherche, de la formation et de la pratique?* (p. 12-34).
- Roy, P., Marlot, C., Haan, D., & Küll, C. (2021). Favoriser le développement professionnel d'enseignants du primaire au sein d'une communauté discursive de pratiques en sciences. In M. Hyndryckx & C. Poffé (Éd.), *Actes des onzièmes rencontres scientifiques de l'association pour des recherches en didactique des sciences et des technologies* (p. 313-326).
- Rubinsten, O. (2009). Peut-on caractériser davantage la distinction entre les dyscalculies développementales pure et avec comorbidité? *ANAE. Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant*, 158-164.
- Scherer, P., Kroesbergen, E., Moraová, H., & Roos, H. (2019). Introduction to the work of TWG25 : Inclusive Mathematics Education – challenges for students with special needs. In U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Éd.), *Eleventh congress of the european society for research in mathematics education*. Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.
- Schifter, D. (2018). Early algebra as analysis of structure : A focus on operations. In C. Kieran (Éd.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (p. 309-328). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_13
- Schmittau, J., & Morris, A. (2004). The Development of Algebra in the Elementary Mathematics Curriculum of V.V. Davydov. *The Mathematics Educator*, 8(1), 60-87.
- Serfati, M. (1997). *La constitution de l'écriture symbolique mathématique* (thèse de doct.). Université Paris 1.
- Sesiano, J. (1999). *Une introduction à l'histoire de l'algèbre : résolution des équations des Mésopotamiens à la Renaissance*. Presses polytechniques et universitaires romandes.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36. <https://doi.org/10.1007/BF00302715>
- Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification - The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2), 191-228. <https://doi.org/10.1007/bf01273663>

- Smith, E. (2008). Representational Thinking as a Framework for Introducing Functions in the Elementary Curriculum. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Éd.), *Algebra in the early grades* (p. 133-160). Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9781315097435-6>
- Specht, B. J. (2005). Early algebra - Processes and concepts of fourth graders solving algebraic problems. In M. Bosch (Éd.), *CERME4 - European Research in Mathematics Education IV : Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 706-7016). [http://www.mathematik.uni-dortmund.de/%5Csim\\$erme/CERME4/CERME4_WG6.pdf](http://www.mathematik.uni-dortmund.de/%5Csim$erme/CERME4/CERME4_WG6.pdf)
- Squalli, H., Larguier, M., Bronner, A., & Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(1), 36-62. <https://doi.org/https://doi.org/10.7202/1070024ar>
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147-164. <https://doi.org/10.1007/BF00579460>
- Steinweg, A. S., Akinwunmi, K., & Lenz, D. (2018). Making implicit algebraic thinking explicit : Exploiting national characteristics of german approaches. In C. Kieran (Éd.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (p. 283-308). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_12
- Stephens, M. (2008). Some key junctures in relational thinking. In M. Goos, R. Brown & K. Makar (Éd.), *Merga 31* (p. 491-498). Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Stephens, M., & Wang, X. (2008). Investigating Some Junctures in Relational Thinking : A study of Year 6 and Year 7 students from Australia and China. *Journal of Mathematics Education*, 1(1), 28-39.
- Strachota, S. A., Knuth, E., & Blanton, M. L. (2018). Cycles of generalizing activities in the classroom. In C. Kieran (Éd.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (p. 351-378). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_15
- Strømskag, H. (2015). A pattern-based approach to elementary algebra. In K. Kraimer & N. Vondrová (Éd.), *Cerme 9* (p. 474-480). Charles University in Prague, Faculty of Education; ERME. [http://www.mathematik.uni-dortmund.de/%5Csim\\$prediger/ERME/CERME9_Proceedings_2015.pdf](http://www.mathematik.uni-dortmund.de/%5Csim$prediger/ERME/CERME9_Proceedings_2015.pdf)

- Swanson, D., Schwartz, R., Ginsburg, H., & Kossan, N. (1981). The Clinical Interview : Validity, Reliability and Diagnosis. *For the Learning of Mathematics*, 2(2), 31-38. <https://www.jstor.org/stable/40247736>
- Tabach, M., & Friedlander, A. (2004). The role of context in learning beginning algebra. In M. A. Mariotti (Éd.), *Proceedings of the third conference of the european society for research in mathematics education*. University of Pisa; ERME. [http://www.mathematik.uni-dortmund.de/\\$%5Csim\\$erme/CERME3/Groups/TG6/TG6_tabach_cerme3.pdf](http://www.mathematik.uni-dortmund.de/$%5Csim$erme/CERME3/Groups/TG6/TG6_tabach_cerme3.pdf)
- Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples : The case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 81-95. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9133-5>
- Twohill, A. (2013). Proceedings of the Fifth Conference on Research in Mathematics Education in Ireland. *2003 Joint Meeting of PME and PME-NA*, 19-38.
- Vannetzel, L. (2012). Dyscalculiques ou laissés pour compte? *ANAE. Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant*, 24(120-21), 497-502.
- Vannetzel, L., Eynard, L. ., & Meljac, C. (2009). Dyscalculie : une rencontre difficile. Étude d'une population d'enfants consultant dans un centre de référence pour troubles des apprentissages. *ANAE. Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant*, (102), 135-144.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2.3), 133-170.
- Vergnaud, G. (2011). La pensée est un geste. Comment analyser la forme opératoire de la connaissance. *Enfance*, (1), 37-48. <https://doi.org/10.3917/enf1.111.0037>
- Vergnaud, G., Cortès, A., & Favre-Artigue, P. (1988). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles : problèmes épistémologiques et didactiques. In G. Vergnaud (Éd.), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques : Actes du colloque de Sèvres* (p. 259-279). Pensée sauvage.
- Vigier, M. (2009). Les élèves en grande difficulté en maths : sont-ils dyscalculiques et peuvent-ils bénéficier d'une approche du calcul par tableaux et tableurs? *ANAE. Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant*, 171-178.
- Vigier, M. (2012). L'innomérisme : de quoi parle-t-on? Peut-on y remédier facilement? *ANAE. Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant*, 24(120-121), 511-518.
- Vilette, B. (2009). L'estimateur : un programme de remédiation des troubles du calcul. *ANAE. Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant*, 165-170.

- Vogel, R. (2005). Patterns – a fundamental idea of mathematical thinking and learning. *ZDM*, 37(5), 445-449. <https://doi.org/10.1007/s11858-005-0035-z>
- Von Aster, M. (2009). Le problème de la comorbidité dans les troubles du calcul. *ANAE. Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant*, 152-157.
- Watt, S. J., Watkins, J. R., & Abbitt, J. (2016). Teaching Algebra to Students With Learning Disabilities : Where Have We Come and Where Should We Go? *Journal of Learning Disabilities*, 49(4), 437-447. <https://doi.org/10.1177/0022219414564220>
- Weber, A., Baud, É., Baetschmann, K., Molina, O., Reichen, V., Florey, V., Balegno, M., Clerc, A., & Clivaz, S. (2015). *Résolution de problèmes Les 99 carrés* (rapp. tech.). 3LS Laboratoire Lausannois Lesson Study. <https://www.hepl.ch/accueil/recherche/laboratoires-hep-vaud/3ls/plans-de-lecon.html>
- Witzel, B. S., Mercer, C. D., & Miller, M. D. (2003). Teaching Algebra to Students with Learning Difficulties : An Investigation of an Explicit Instruction Model. *Learning Disabilities : Research & Practice*, 18(2), 121-131. <https://doi.org/10.1111/1540-5826.00068>
- Wu, H. (2001). How To Prepare Students for Algebra. *American Educator*, 25(2), 10-17.
- Xin, Y. P. (2008). The effect of schema-based instruction in solving mathematics word problems : an emphasis on prealgebraic conceptualization of multiplicative relations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(5), 526-551. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.39.5.0526>
- Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns : the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49(3), 379-402. <https://doi.org/10.1023/A:1020291317178>

Cinquième partie

Annexes

Annexe A

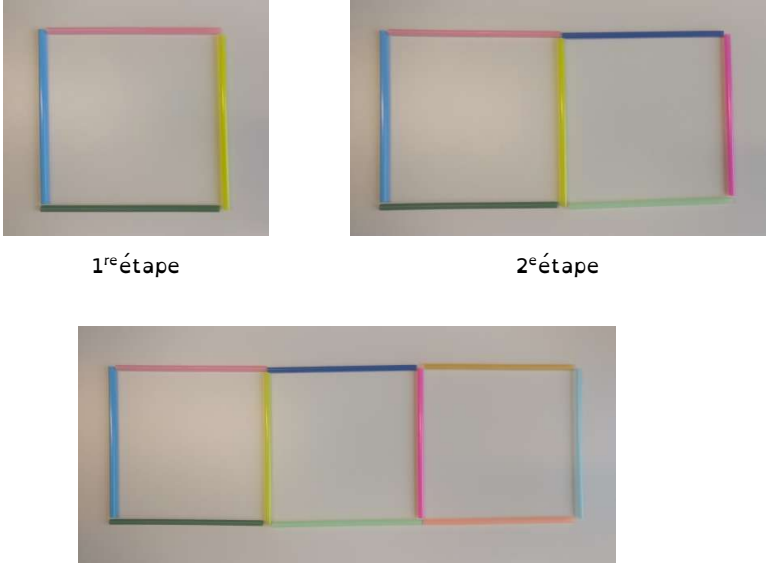
Le texte des tâches proposées lors du recueil des données

Nous présentons dans les pages qui suivent les tâches dans leurs exactes versions (texte, figures et mise en page) proposées aux élèves pendant les entretiens de recueil de données. Cette version a été conçue de manière à rendre les documents aussi accessibles que possible, notamment en utilisant une police facilement lisible par des personnes avec des troubles de la lecture et en bien espaçant les différentes parties (Fondation Centre suisse de pédagogie spécialisée, 2015). Nous avons présenté une question par feuille, en laissant la place pour répondre par écrit si souhaité par l'élève. Si nécessaire, nous avons fourni des feuilles supplémentaires.

Pour ce chapitre, l'ordre de présentation des tâches correspond à celui de passation avec les élèves lors des entretiens.

Le recueil de données a été constitué par quatre séances individuelles par élève, comme décrit en 8.2.

A.1 Séance 1 : La suite de carrés.



The figure shows three stages of a sequence of squares made of sticks. The first stage, labeled '1^{ère} étape', shows a single square with four sticks of different colors: blue on the left, pink on the top, yellow on the right, and green on the bottom. The second stage, labeled '2^{ème} étape', shows two squares side-by-side. The left square is identical to the first. The right square shares its left side (yellow stick) with the right side of the first square. Its top side is blue, its right side is pink, and its bottom side is green. The third stage, labeled '3^{ème} étape', shows three squares in a row. The first square is identical to the first stage. The second square shares its left side (yellow stick) with the first square. The third square shares its left side (pink stick) with the second square. The top side of the third square is blue, and its bottom side is green.

1^{ère}étape

2^{ème}étape

3^{ème}étape

Voici les trois premières étapes d'une suite de carrés.

a) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés? Et de 5 carrés?

Figure A.1 – Séance 1 : La suite de carrés.

b) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 12 carrés ?

Figure A.2 – Séance 1 : *La suite de carrés*. La tâche a été légèrement modifiée après le premier jour d'entretiens. Initialement, les sous-tâches a) et b) étaient confondues et demandaient de trouver le nombre de pailles pour construire sept carrés. Nous avons ensuite modifié les questions pour aboutir à la version actuelle. Ce choix est dû au fait que nous nous sommes rendu compte que l'écart entre les étapes données en image et l'étape 7 était trop grand et ne favorisait pas la généralisation arithmétique. Cela concerne les élèves 4, 5 et 7.

c) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 100 carrés ?

Figure A.3 – Séance 1 : *La suite de carrés.*

d) En connaissant le nombre de carrés, pourrais-tu toujours trouver le nombre de pailles? Si oui, comment?

Figure A.4 – Séance 1 : *La suite de carrés.*

e) Tu as acheté un paquet de 200 pailles. Combien de carrés peux-tu construire ?

Figure A.5 – Séance 1 : *La suite de carrés.*

A.2 Séance 2 : Pierre, Manon et Nombres pairs/impairs.

L'enseignante de Pierre lui demande de calculer $23 + 15$.

Il fait l'addition et il obtient 38 .

Après l'enseignante lui demande de calculer $15 + 23$.

Pierre connaît déjà la réponse sans calculer.

Comment a-t-il fait ?

Penses-tu que la stratégie de Pierre marche toujours ?

Figure A.6 – Séance 2 : Pierre.

Manon a utilisé cette stratégie pour rendre le calcul plus simple :

$$(7 \times 12) + (3 \times 12) = 10 \times 12$$

Qu'en penses-tu ?

Figure A.7 – Séance 2 : Manon.

En additionnant deux nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair ?

Figure A.8 – Séance 2 : *Nombres pairs/impairs*. La chercheuse pose à l'oral la question « Pourquoi ? » afin de ne pas alourdir la consigne écrite.

A.3 Séance 3 : La tache bleue, 123 et Nuage et maison.

Un nombre se cache derrière la tache.

On sait que  + 78 = 115.

Il ne faut pas calculer le nombre caché.


Alors combien font  + 79 ?

Figure A.9 – Séance 3 : La tache bleue.

Si

$$57 + 65 = 122$$

alors combien font

$$57 + 66 ?$$

Figure A.10 – Séance 3 : 123. Cette tâche a été utilisée comme relance quand les élèves rencontraient des difficultés à mettre en place un raisonnement relationnel dans la tâche en figure [A.9](#).

Observe l'égalité suivante : $17 + \text{☁} = 20 + \text{🏠}$

a) Complète le nuage et la maison avec deux nombres pour créer trois différentes égalités correctes.

$$17 + \text{☁} = 20 + \text{🏠}$$

$$17 + \text{☁} = 20 + \text{🏠}$$

$$17 + \text{☁} = 20 + \text{🏠}$$

Figure A.11 – Séance 3 : Nuage et maison.

b) Dans une égalité correcte, quelle est la relation entre le nombre dans le nuage et le nombre dans la maison ?

Figure A.12 – Séance 3 : Nuage et maison.

c) Si on met un nombre quelconque dans le nuage, il est encore possible créer une égalité correcte ?

$$17 + \text{☁} = 20 + \text{🏠}$$

Figure A.13 – Séance 3 : Nuage et maison.

d) Bonus : Si au lieu de 17 et 20, il y avait 352 et 348, quelle serait la relation entre le nombre dans le nuage et le nombre dans la maison ?

$$352 + \text{cloud} = 348 + \text{house}$$

Figure A.14 – Séance 3 : Nuage et maison.

A.4 Séance 4 : $18+4=$.

$18 + 4 =$
Voici une addition.
Avec les étiquettes, crée autant d'égalités que tu peux.
Tu peux utiliser chaque étiquette plusieurs fois.

$18 + 4 =$

$18 + 4 =$

Figure A.15 - Séance 4 : $18+4=$.

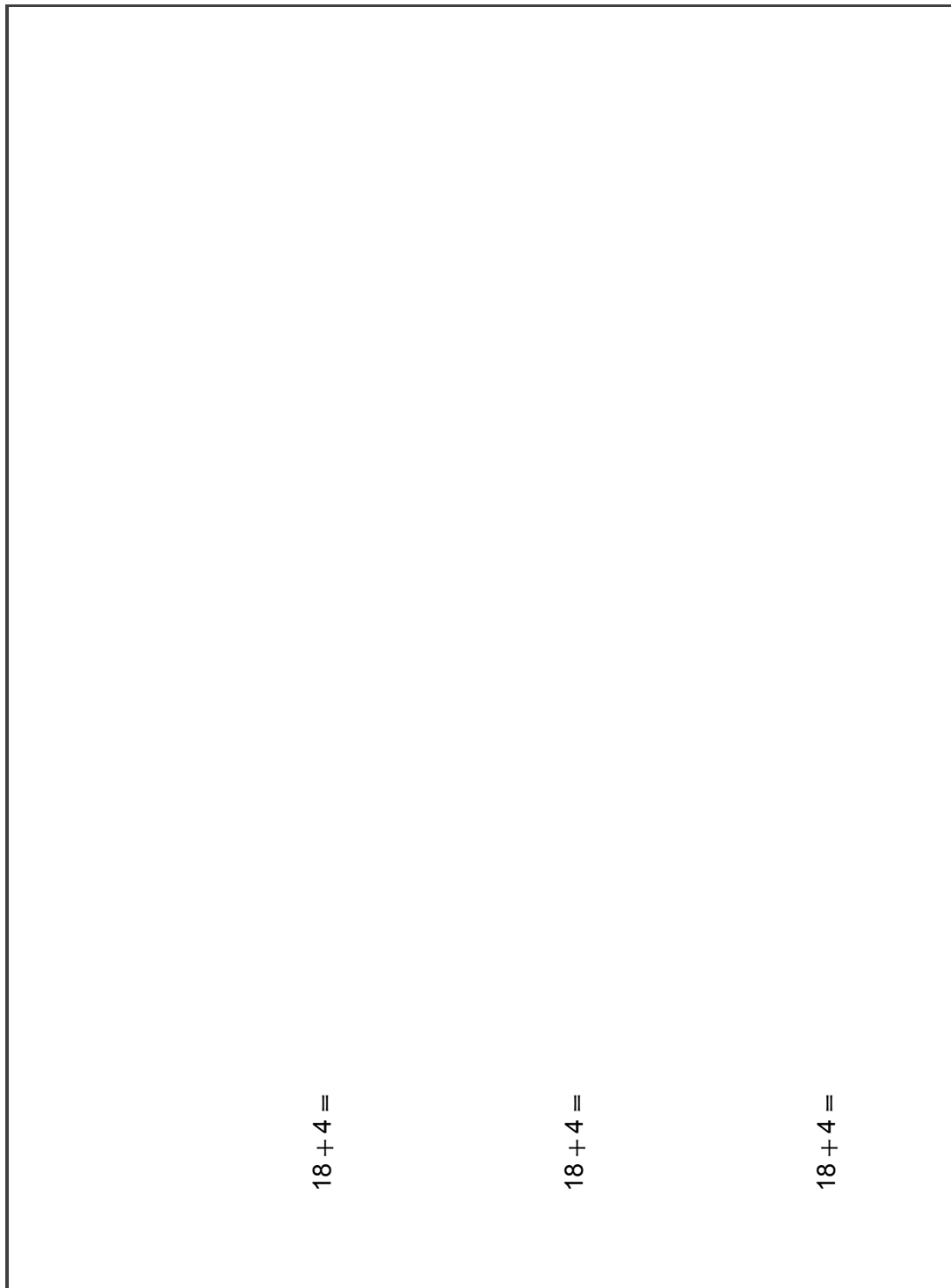


Figure A.16 – Séance 4 : $18+4=$. Nous avons fourni un nombre variable de cette deuxième feuille en fonction des idées de l'élève.

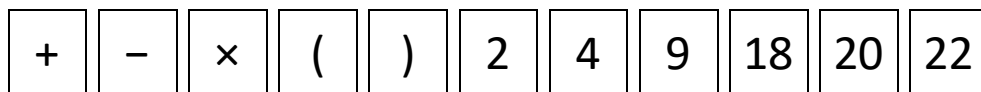


Figure A.17 – Séance 4 : $18+4=$. Les étiquettes plastifiées fournies aux élèves.

Annexe B

Les analyses *a priori*

Nous rapportons dans les pages suivantes les analyses *a priori* des tâches proposées aux élèves pendant les entretiens de prise de données. Nous nous limitons aux tâches que nous avons analysées et utilisées pour répondre à la question de recherche Q2 de cette thèse : *La tache bleue, 123, La suite de carrés* et *Nombres pairs/impairs*. Notre analyse *a priori* se compose de : procédures, variables cognitives¹, erreurs et difficultés, relances² en fonction des difficultés et des erreurs.

Pour ne pas alourdir la présentation, les procédures de résolution décrites sont essentiellement celles qui permettent de résoudre le problème plus (en rouge) quelques procédures erronées « classiques » si particulièrement pertinentes pour la tâche. Les procédures et les variables qui les favorisent nous ont permis de modifier les tâches et leurs consignes (comme décrit dans 7.3). Cette première partie de l'analyse *a priori* a donc étayé la création de la batterie de tâches à proposer pendant le recueil des données. Les difficultés (et les relances relatives) sont divisées en difficultés mathématiques classiques et difficultés mathématiques spécifiques aux élèves en sévère difficulté. Leur identification a été utilisée pour la construction des protocoles d'entretien (voir 8.2.2). L'analyse *a priori* a aussi un rôle dans l'analyse des données grâce à sa confrontation avec l'analyse *a posteriori* (voir 8.4).

Les analyses *a priori* sont étayées par des travaux de recherche portant sur des tâches similaires et par les cadres théoriques d'analyse. Ces apports sont mieux détaillés à l'intérieur de chaque analyse.

Pour ce chapitre, l'ordre de présentation des analyses *a priori* des tâches correspond à celui des questions de recherche.

1. Nous rappelons que par variable nous entendons « variable cognitive, une variable de la situation telle que par le choix de valeurs différentes on peut provoquer des changements de la connaissance optimale » (Brousseau, 1997, p.3).

2. Nous utilisons le mot « relance » dans le sens courant du terme.

B.1 La tache bleue

Le texte complet de la tâche *La tache bleue* se trouve à la page 254. Il est possible de trouver des tâches similaires étudiées en didactique des mathématiques (par exemple dans Malara et Navarra, 2018). Pour les procédures de l'analyse *a priori* de cette tâche, nous nous sommes basée principalement sur la différence entre la pensée arithmétique et celle algébrique donnée par les *language constructs* de Malara et Navarra (Malara et Navarra, 2018, voir 4.2). D'autres références théoriques ont été utilisées pour compléter l'analyse, comme mieux détaillé dans ce qui suit.

Procédures

1. Procédure arithmétique (Malara et Navarra, 2018). Calculer la valeur de la tache et après l'addition demandée : $tache = 115 - 78 = 37$, alors $37 + 79 = 116$.
2. Procédure algébrique (Malara et Navarra, 2018). Utilisation de la relation : $78 + 1 = 79$, donc $115 + 1 = 116$.

Variables cognitives

Tableau B.1 – Variables cognitives de *La tache bleue*.

Variable cognitive	Valeur	Effet
Taille des nombres (Carpenter et Franke, 2001)	Petits nombres	Procédure favorisée : arithmétique (1)
	Grands nombres	Procédure favorisée : algébrique (2)
Type de nombres	Opérations sans retenue	Procédure favorisée : arithmétique (1)
	Opérations avec retenue	Procédure favorisée : algébrique (2)
Phrase à propos du nombre caché	Présence d'une phrase qui demande de ne pas calculer le nombre caché	Procédure favorisée : algébrique (2)

Erreurs, difficultés et relances

Tableau B.2 – Erreurs, difficultés et relances de *La tache bleue*.

Erreurs et difficultés	Relances
L'élève ne propose que la procédure arithmétique (Schifter, 2018)	Si l'élève propose la procédure arithmétique : « Pourrais-tu trouver une autre manière pour obtenir le résultat sans calculer la valeur de la tâche ? » « Quelle différence y a-t-il entre ces deux opérations ? » [En indiquant les deux égalités]. Lui proposer la tâche 123.
Difficultés à opérer avec un nombre inconnu (Fillooy et Rojano, 1989)	Quelle différence y a-t-il entre ces deux opérations ? [En indiquant les deux égalités].
L'élève considère les deux taches comme deux nombres différents	« Derrière les deux taches bleue, il y a le même nombre. »
Difficultés avec les calculs (Geary, 2011)	« J'ai une calculatrice avec moi. Si tu me donnes le calcul à faire, je peux le faire pour toi. »

B.2 123

Le texte complet de la tâche 123 se trouve à la page 255. Des tâches similaires ont été étudiées en didactique des mathématiques (Malara, 1996 ; Schifter, 2018). Pour les procédures de l'analyse *a priori* de cette tâche, comme pour *La tache bleue*, nous nous sommes basée principalement sur la différence entre la pensée arithmétique et celle algébrique donnée par les *language constructs* de Malara et Navarra (Malara et Navarra, 2018, voir 4.2). D'autres références théoriques ont été utilisées pour compléter l'analyse, comme mieux détaillé dans ce qui suit.

Procédures

1. Procédure arithmétique (Malara et Navarra, 2018). Calculer (par exemple en colonne) $57 + 66 = 123$.
2. Procédure algébrique (Malara et Navarra, 2018). Utilisation de la relation entre quantités : on sait que $57 + 65 = 122$. $65 + 1 = 66$, donc $122 + 1 = 123$.

Variables cognitives

Tableau B.3 – Variables cognitives de 123.

Variable cognitive	Valeur	Effet
Taille des nombres (Carpenter et Franke, 2001)	Petits nombres	Procédure favorisée : arithmétique (1)
	Grands nombres	Procédure favorisée : algébrique (2)
Type de nombres	Opérations sans retenue	Procédure favorisée : arithmétique (1)
	Opérations avec retenue	Procédure favorisée : algébrique (2)

Erreurs, difficultés et relances

Tableau B.4 – Erreurs, difficultés et relances de 123.

Erreurs et difficultés	Relances
L'élève ne propose que la procédure arithmétique (Schifter, 2018)	Si l'élève propose la procédure arithmétique : « Pourrais-tu trouver une autre manière pour obtenir le résultat? » « Quelle différence y a-t-il entre ces deux opérations? » [En indiquant les deux égalités].
Difficultés avec les calculs (Geary, 2011)	« J'ai une calculatrice avec moi. Si tu me donnes le calcul à faire, je peux le faire pour toi. »

B.3 La suite de carrés

Le texte complet de la tâche *La suite de carrés* se trouve à la page 246 et suivantes. Des tâches similaires ont fait l'objet de nombreuses publications en didactique des mathématiques (entre autres Coulange et Grugeon, 2008; Ferrara et Sinclair, 2016; Malara et Navarra, 2018; Radford, 2008; Strømskag, 2015). Pour l'ana-

lyse *a priori* de cette tâche, nous nous sommes basée principalement sur les niveaux de généralisation de Radford (voir 4.3) pour établir les différentes procédures. D'autres références théoriques ont été utilisées pour compléter les procédures et le reste de l'analyse, comme mieux détaillé à l'intérieur l'analyse. En rouge, nous avons décrit les procédures erronées³.

Procédures sous-tâche a)

1. Dessin et comptage (Coulange et Grugeon, 2008). Construire ou dessiner les carrés et compter les pailles.
2. Comptage et calcul. Compter les pailles nécessaires pour construire une étape précédente et ajouter 3 pailles par carré. Par exemple, en partant de 3 carrés pour les 5 carrés : $10 + 3 + 3 = 16$.
3. Généralisation arithmétique (Radford, 2008). Par exemple, pour les 5 carrés : $4 + 3 + 3 + 3 \dots$ jusqu'arriver à 5 carrés. L'élève peut trouver cette formule et l'appliquer en calculant jusqu'au cinquième terme.
4. Relation de proportionnalité (Weber et al., 2015). Par exemple $4 \cdot 5 = 20$ pour les 5 carrés. Procédure erronée.

Procédures sous-tâche b)

5. Dessin et comptage (Coulange et Grugeon, 2008). Construire ou dessiner les carrés et compter les pailles.
6. Comptage et calcul. Compter les pailles nécessaires pour construire une étape précédente et ajouter 3 pailles par carré. Par exemple, en partant des 5 carrés : $16 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 37$.
7. Généralisation arithmétique (Radford, 2008). Trouver une généralisation arithmétique et l'appliquer en calculant jusqu'au douzième terme. Par exemple : $4 + 3 + 3 + 3 \dots$ jusqu'arriver à 12 carrés.
8. Dessin erroné et comptage (Weber et al., 2015). Par exemple dessiner les 12 carrés pour compter les pailles en allant à la ligne et refaire deux fois le même côté. Procédure erronée.
9. Relation de proportionnalité (Weber et al., 2015). Par exemple $4 \cdot 12 = 48$. Procédure erronée.

3. Nous nous sommes restreinte à deux procédures erronées parmi les possibles : la relation de proportionnalité et le dessin erroné et comptage. Il s'agit de deux procédures particulièrement significatives, car fréquentes et révélatrices d'une mauvaise représentation de la suite.

Procédures sous-tâche c)

10. Dessin et comptage (Coulange et Grugeon, 2008). Construire ou dessiner les 100 triangles et compter les pailles.
11. Généralisation arithmétique (Radford, 2008). Trouver une généralisation arithmétique et l'appliquer en calculant jusqu'au centième terme. Par exemple : $4 + 3 + 3 + 3 \dots$ jusqu'arriver à 100 carrés. La généralisation arithmétique peut être par « paquets » (Radford, 2008; Weber et al., 2015). Par exemple, l'élève dessine 10 carrés, qui sont constitués de 31 pailles. Pour ajouter encore 10 carrés, il faut 30 pailles, $31 + 30 = 61$. Continuer ainsi jusqu'à 100.
12. Généralisation factuelle (Radford, 2001). Par exemple : $3 \cdot 100 + 1 = 301$.
13. Généralisation algébrique symbolique standard (Radford, 2001). Trouver une généralisation algébrique symbolique standard et l'appliquer à 100. Par exemple : $(3x + 1)|_{x=100} = 3 \cdot 100 + 1 = 301$. Cette procédure n'est pas à la portée des élèves de l'échantillon de ce travail de thèse.
14. Induction naïve (Radford, 2008). Trouver une formule qui marche pour un cas spécifique et la prendre comme généralisation.
15. Dessin erroné et comptage (Weber et al., 2015). Par exemple dessiner les 100 triangles pour compter les pailles en allant à la ligne et refaire deux fois le même côté. Procédure erronée.
16. Relation de proportionnalité (Weber et al., 2015). Par exemple $4 \cdot 100 = 400$. Procédure erronée.

Procédures sous-tâche d)

17. Généralisation contextuelle (Radford, 2001). Par exemple : 3 fois le nombre de carrés plus 1.
18. Généralisation algébrique symbolique standard (Radford, 2001). Par exemple : $3x + 1$. Cette procédure n'est pas à la portée des élèves de l'échantillon de ce travail de thèse.
19. Généralisation arithmétique (Radford, 2008). Par exemple : $4 + 3 + 3 + 3 \dots$ jusqu'arriver au nombre de carrés. Procédure incomplète.
20. Induction naïve (Radford, 2008). Trouver une formule qui marche pour un cas spécifique et la prendre comme généralisation.
21. Relation de proportionnalité (Weber et al., 2015). Par exemple : 4 fois le nombre. Procédure erronée.

Procédures sous-tâche e)

22. Dessin et comptage. Dessiner ou construire les carrés jusqu'à utiliser maximum 200 pailles. Obtenir 66 carrés et une paille qui reste.
23. Essai-erreur. Utiliser la formule trouvée précédemment en essayant de se rapprocher le plus possible de 200.
24. Généralisation arithmétique (Radford, 2008). Utiliser l'inverse d'une généralisation arithmétique, par exemple : $200 - 4 = 196$, $196 - 3 = 193$, $193 - 3 = 190$, ... \Rightarrow 66 carrés.
25. Généralisation factuelle. Utiliser l'inverse d'une généralisation factuelle, par exemple : $200 - 1 = 199$, $199/3 = 66, \bar{3} \Rightarrow$ 66 carrés
26. Généralisation contextuelle. Utiliser l'inverse d'une généralisation contextuelle, par exemple : il y a 3 pailles par carrés plus une paille pour fermer, et cela doit faire maximum 200 \Rightarrow 3 fois le nombre des carrés doit faire maximum 199 \Rightarrow le nombre des carrés doit être maximum $66, \bar{3} \Rightarrow$ le nombre des triangles est 66.
27. Généralisation algébrique symbolique standard. Utiliser l'inverse d'une généralisation algébrique symbolique standard : $3x + 1 \leq 200 \Rightarrow 3n \leq 199 \Rightarrow x \leq 66, \bar{3} \Rightarrow$ On peut construire 66 carrés. Cette procédure n'est pas à la portée des élèves de l'échantillon de ce travail de thèse.
28. **Dessin erroné et comptage. Dessiner ou construire les carrés jusqu'à utiliser 200 pailles en allant à la ligne et en dessinant une paille deux fois. Procédure erronée.**
29. **Relation de proportionnalité. Par exemple : $200/4 = 50$ carrés. Procédure erronée.**

Variables cognitives**Tableau B.5** – Variables cognitives de *La suite de carrés*.

Variable cognitive	Valeur	Effet
Le nombre de carrés dont il faut trouver le nombre de pailles (Radford, 2010b)	Petits nombres	Procédures favorisées : dessin et comptage (1, 5, 10), comptage et calcul (2, 5), généralisation arithmétique (3, 7, 11)

	<p>Grands nombres</p> <p>Nombre « quelconque »</p> <p>n (poser explicitement la variable en symbolisme standard)</p>	<p>Procédures favorisées : généralisation factuelle (12), généralisation algébrique symbolique standard (13)</p> <p>Procédures favorisées : généralisation contextuelle (17), généralisation algébrique symbolique standard (18) et induction naïve (20)</p> <p>Procédures mises en défaut : dessin et comptage (1, 5, 10), comptage et calcul (2, 5), généralisation arithmétique (3, 7, 11), généralisation factuelle (12)</p> <p>Procédures favorisées : généralisation algébrique symbolique standard (18) et induction naïve (20)</p> <p>Procédures mises en défaut : dessin et comptage (1, 5, 10), comptage et calcul (2, 5), généralisation arithmétique (3, 7, 11), généralisation factuelle (12), généralisation contextuelle (17)</p>
Type de matériel à disposition	<p>Matériel nécessaire pour la construction ou le dessin de la suite (pailles ou une feuille assez grande) à disposition</p> <p>Pas de matériel pour la construction ou le dessin de la suite</p>	<p>Procédures favorisées : dessin et comptage (1, 5, 8, 10, 15, 23, 28)</p> <p>Procédures non favorisées : dessin et comptage (1, 5, 8, 10, 15, 22, 28)</p>

Quantité d'étapes de la suite données	Plusieurs étapes consécutives	Procédures favorisées : comptage et calcul (2, 6) et généralisation arithmétique (3, 7, 11, 19, 24).
Le nombre de carrés de la sous-tâche b)	Multiple des étapes précédentes	Procédure favorisée : relation de proportionnalité (9, en proportion avec le diviseur) favorisée
	Pas multiple des étapes précédentes	Procédure non favorisée : relation de proportionnalité (9)

Erreurs, difficultés et relances

Tableau B.6 – Erreurs, difficultés et relances de *La suite de carrés*.

Erreurs et difficultés	Relances
L'élève ne démarre pas (Weber et al., 2015)	« Saurais-tu dessiner la quatrième étape? Combien de pailles as-tu utilisées? » « Maintenant, ajoute encore un carré pour dessiner la cinquième étape. Combien de pailles as-tu ajoutées? Combien de pailles as-tu utilisées en tout? »
L'élève n'a pas la bonne représentation de la suite (par exemple carrés en dessous et pas à la suite, Weber et al., 2015)	« Les carrés sont un après l'autre, comme les wagons d'un train. » (Weber et al., 2015)
L'élève a une vision proportionnelle de la correspondance carrés-pailles (Weber et al., 2015)	Lui proposer de construire les carrés avec les pailles. « Comment pourrais-tu vérifier si ta stratégie est correcte? » « Pourrais-tu vérifier si ta stratégie fonctionne pour la quatrième étape (ou autre)? »

L'élève produit un dessin faux, par exemple en allant à la ligne et en dessinant une paille deux fois (Weber et al., 2015)	« J'ai de vraies pailles. Veux-tu essayer de les utiliser pour construire les carrés? »
Confusion entre pailles et carrés (Weber et al., 2015)	« C'est quoi cela? » (En se référant aux nombres en jeu)
L'élève n'aboutit pas à une généralisation arithmétique, à voir que pour chaque carré on ajoute 3 pailles	Lui proposer de remplir le tableau de correspondance carrés-pailles (English et Warren, 1998).
L'élève aboutit à une généralisation fausse	« Comment pourrais-tu vérifier si ta stratégie est correcte? » « Pourrais-tu vérifier si ta stratégie fonctionne pour la quatrième étape (ou autre)? »
L'élève dessine pour la sous-tâche c) (Weber et al., 2015)	« Cela devient long. Pourrait-on trouver une manière de trouver le résultat sans dessiner? » « Et pour 5000 carrés? »
L'élève n'abandonne pas la vision arithmétique pour la sous-tâche c) (Stacey, 1989)	« Et pour 5000 carrés? »
L'élève utilise un exemple générique pour la sous-tâche d)	« Arriverais-tu à me l'expliquer sans utiliser un nombre? »
L'élève répond $66, \overline{3}$ à la sous-tâche e), ou difficulté dans l'interprétation de ce résultat	« C'est quoi, le $66, \overline{3}$? »
Difficultés avec les calculs (Geary, 2011)	« J'ai une calculatrice avec moi. Si tu me donnes le calcul à faire, je peux le faire pour toi. »

B.4 Nombres pairs/impairs

Le texte complet de *Nombres pairs/impairs* se trouve à la page 253. Il s'agit d'une tâche très étudiée en didactique des mathématiques (par exemple Alves et al., 2013; Bieda et al., 2006; Chimoni et Pitta-Pantazi, 2017; Malara, 1996; Miyakawa,

2002). Notre analyse *a priori* de cette tâche dépend de la typologie de preuves de Balacheff (Balacheff, 1987, décrite dans 4.4). Ce cadre permet d'établir les procédures possibles. Nous n'avons pas utilisé le calcul sur les énoncés, car il n'est pas adapté aux élèves de notre échantillon. D'autres références théoriques ont été utilisées pour compléter les procédures et le reste de l'analyse, comme mieux détaillé à l'intérieur l'analyse.

Procédures

1. Empirisme naïf (Balacheff, 1987). Donner un ou plusieurs exemples sur lesquels la propriété est vraie et en tirer la certitude de la vérité de la proposition, par exemple : oui parce que $5 + 3 = 8$ est pair et aussi $3 + 7 = 10$ est pair.
2. Expérience cruciale (Balacheff, 1987). Donner un exemple qu'aux yeux de l'élève est si peu particulier que, si la proposition est vraie pour lui, alors elle doit nécessairement l'être toujours, par exemple : oui parce que même si on essaie avec un grand nombre on obtient une somme paire. $17011 + 35427 = 5238$ est pair.
3. Exemple générique (Balacheff, 1987). La propriété est justifiée par moyen d'un exemple qui est traité comme représentant d'une certaine classe d'objets, par exemple : oui, parce qu'avec le 11, on peut faire des groupes de 2 et il reste 1. Avec le 7, on peut faire des groupes de 2 et il reste 1. Donc on peut faire un groupe avec le 2 restes et donc la somme est paire. Ou encore : $11 + 7 = 10 + 1 + 6 + 1 = 16 + 2 = 18$ est pair.
4. Expérience mentale (Balacheff, 1987). La propriété est prouvée sans référence à un représentant particulier, par exemple : dans un nombre impair, on peut faire des groupes de 2 et il reste une unité. Cela pour les deux nombres \square avec les deux restes on peut faire un groupe de 2.
5. Preuve intellectuelle arithmétique (Miyakawa, 2002). Sur la base des chiffres des unités des nombres, lister les résultats de toutes les possibles additions entre deux nombres impairs à un chiffre. Observer que la parité d'un nombre dépend de son chiffre des unités. Observer que le chiffre des unités d'une somme ne dépend que des chiffres des unités des termes. En déduire la vérité de la proposition.
6. Preuve intellectuelle algébrique (Balacheff, 1987). La propriété est prouvée à l'aide du symbolisme littéral, par exemple : $2n + 1 + 2m + 1 = 2n + 2m +$

$2 = 2(n + m)$ qui est pair. Cette procédure n'est pas à la portée des élèves de l'échantillon de ce travail de thèse.

Variables cognitives

Tableau B.7 – Variables cognitives de *Nombres pairs/impairs*.

Variable cognitive	Valeur	Effet
Termes de l'addition	Nombres pairs, impairs ou multiples de 5 (Mason, 2008) Multiples de 3 (ou autres multiples sauf de 2 et 5)	Procédure favorisée : démonstration arithmétique (6) Procédures favorisées : exemple générique (3) et expérience mentale (4) Procédure mise en défaut : démonstration arithmétique (6)
Exemple dans la consigne	Présence d'un exemple dans la consigne	Procédures favorisées : empirisme naïf (1) et expérience cruciale (2)

Erreurs, difficultés et relances

Tableau B.8 – Erreurs, difficultés et relances de *Nombres pairs/impairs*.

Erreurs et difficultés	Relances
Savoir ce qu'est un nombre pair et impair (Balacheff, 2019a)	« Tu te souviens de ce que sont un nombre pair et un nombre impair? » « Un nombre pair est un nombre qui est multiple de 2, qui est dans le livret du 2. Un nombre impair est un nombre qui n'est pas un multiple de 2, un nombre qui n'est pas dans le livret du 2. »
L'élève est bloqué du début	« Tu te souviens de ce que sont un nombre pair et un nombre impair? » « Tu pourrais essayer avec des exemples. »

	« Tu pourrais essayer avec des vrais nombres. »
Après quelques exemples, l'élève n'a pas de conjecture ou est bloqué-e dans son raisonnement	« Et si on avait deux nombres pairs (ou un nombre impair et un nombre pair ou un nombre pair et un nombre impair)? » [<i>En écrivant $P + P$ (ou $I + P$ ou $P + I$).</i>] « Et si on avait deux multiples de 3 (ou de 4, ou d'un autre nombre)? » [<i>En écrivant la consigne à propos du nouveau multiple.</i>]
L'élève se base sur le dernier chiffre des nombres (Mason, 2008)	« Et si on avait deux multiples de 3 (ou de 4, ou d'un autre nombre)? » [<i>En écrivant la consigne à propos du nouveau multiple.</i>] (Miyakawa, 2002)
L'élève se contente de l'empirisme naïf ou de l'expérience cruciale (Bieda et al., 2006)	« Comment tu sais que cela est vrai pour tous les nombres impairs? » (Arcavi et al., 1990) « Comment l'expliquer à quelqu'un sans faire des calculs? »
Difficultés avec les calculs (Geary, 2011)	« J'ai une calculatrice avec moi. Si tu me donnes le calcul à faire, je peux le faire pour toi. »

Annexe C

Les protocoles d'entretien

Nous rapportons dans les pages qui suivent les protocoles d'entretiens des tâches. Comme expliqué au paragraphe 8.2.2, les protocoles ont été construits sur la base des consignes de la littérature et des analyses *a priori* des tâches, en s'inspirant d'autres protocoles existants (Giroux et Fortier-Moreau, 2017; Weber et al., 2015) et ont été nourris au fur et mesure des entretiens avec les élèves. Ils étaient à disposition de la chercheuse et ont été utilisés comme une base pour les entretiens semi-dirigés constituant le corpus des données. Pendant l'entretien, en plus de celles du protocole, d'autres interventions adaptées à la situation contextuelle ont été toutefois possibles.

Pour les annexes, nous nous tenons aux protocoles des tâches que nous avons analysées et utilisées pour répondre à la question de recherche Q2 de cette thèse : *Nombres pairs/impairs, La suite de carrés, La tache bleue et 123*.

Pour ce chapitre, l'ordre de présentation des tâches correspond à celui de passation avec les élèves lors des entretiens.

C.1 Présentation et règles de l'entretien

Protocole pour le premier entretien

Matériel : caméra, microphone, ordinateur, feuilles et crayon pour l'élève, protocole d'entretien des tâches, feuilles et crayon pour la chercheuse.

À dire : « Salut, je m'appelle Francesca Gregorio et je suis chercheuse en didactique des mathématiques. Mon travail est d'améliorer l'enseignement des mathématiques : j'essaie de les rendre plus amusantes, moins difficiles, plus intéressantes... Pour faire cela, de temps en temps j'ai besoin de discuter avec de vrais élèves, comme toi. C'est pour cette raison que j'ai demandé à ton enseignant de travailler un peu avec toi, aujourd'hui. Je ne suis pas ici pour te juger ou pour voir si tu résous correctement ou pas les tâches. Je ne suis pas intéressée au fait que tu me donnes la bonne réponse, mais je veux plutôt savoir comment tu penses, quels raisonnements tu fais. Cela te va ?

Je vais enregistrer la séance parce que comme cela je peux regarder une deuxième fois ce que tu fais et mieux comprendre. Regarde, ici il y a la caméra, qui filme la feuille, on ne peut pas voir ton visage et cela est le microphone. Pour l'instant, ils sont éteints. En même temps, je prends des notes, car si je note quelque chose d'intéressant je l'écris et après je peux retrouver ce moment dans la vidéo.

Je te propose qu'on fasse comme cela : je vais te donner une tâche de mathématiques et je te demande de la résoudre. Tu as un stylo à disposition, tu peux écrire si tu veux, sinon tu m'expliques à l'oral. S'il y a quelque chose que tu ne comprends pas, n'hésite pas à me poser des questions, je suis là aussi pour cela. Je te demande juste de me raconter tout ce qui te passe par la tête, de dire à voix haute ce que tu penses. C'est bon pour toi ? Si oui, je fais partir l'enregistrement. »

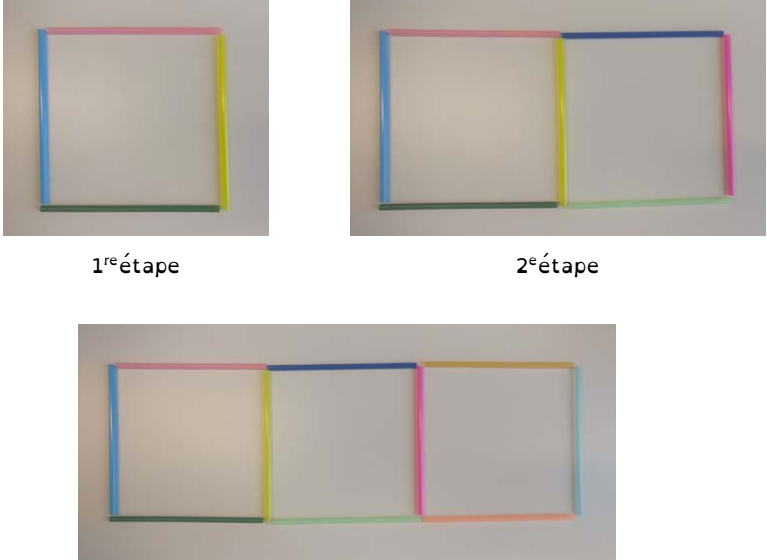
Protocole pour les entretiens 2, 3 et 4

Matériel : caméra, microphone, ordinateur, feuilles et crayon pour l'élève, protocole d'entretien des tâches, feuilles et crayon pour la chercheuse.

À dire : « Salut, aujourd'hui on va faire comme la dernière fois, je vais te donner une tâche de mathématiques et je te demande de la résoudre. S'il y a quelque chose que tu ne comprends pas, n'hésite pas à me poser des questions, je suis là aussi pour cela. Je te demande juste de me raconter tout ce qui te passe par la tête, de dire à voix haute ce que tu penses. C'est bon pour toi ? »

Figure C.1 – Présentation de la chercheuse et règles de l'entretien données lors des différentes séances.

C.2 La suite de carrés



1^{ère}étape

2^{ème}étape

3^{ème}étape

Voici les trois premières étapes d'une suite de carrés.

a) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés? Et de 5 carrés?

Matériel : feuille et crayon. Feuille blanche supplémentaire. Une trentaine de pailles à disposition si l'élève en a besoin.

À dire : « Regarde ces photos. Il y a les trois premières étapes d'une suite de carré. Celle-ci est la première étape, cette-ci est la deuxième et cette-ci la troisième » [en indiquant] « Combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés? Et de 5 carrés? »

Si l'élève **n'explique pas** ce qu'il fait : « Pourquoi as-tu écrit (dit) cela? »

Si l'élève **reste en silence sans rien faire** : « À quoi penses-tu? »

Figure C.2 – Protocole d'entretien de *La suite de carrés*.

Si l'élève **bloque devant les calculs** : « J'ai une calculatrice avec moi. Si tu me donnes le calcul à faire, je peux le faire pour toi. »

Si l'élève a des **difficultés à dessiner** : « J'ai de vraies pailles. Veux-tu essayer de les utiliser pour construire les carrés? »

Si l'élève **bloque** : « Saurais-tu dessiner la quatrième étape? Combien de pailles as-tu utilisées? Maintenant, ajoute encore un carré pour dessiner la cinquième étape. Combien de pailles as-tu ajoutées? Combien de pailles as-tu utilisées en tout? »

Si l'élève n'a pas la **bonne représentation de la suite** (par exemple carrés en dessous et pas à la suite) : « Les carrés sont un après l'autre, comme les wagons d'un train. »

En fonction de la réaction de l'élève : « **Tu es fatigué-e? Est-ce que ça va si on continue encore un peu?** »

Figure C.3 – Protocole d'entretien de *La suite de carrés*.

b) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 12 carrés ?

Matériel : feuille et crayon.

À dire : « Maintenant, combien faut-il de pailles pour former une suite de 12 carrés ? »

Si l'élève **n'explique pas** ce qu'il fait : « Pourquoi as-tu écrit (dit) cela ? »

Si l'élève **reste en silence sans rien faire** : « À quoi penses-tu ? »

Si l'élève **bloque devant les calculs** : « J'ai une calculatrice avec moi. Si tu me donnes le calcul à faire, je peux le faire pour toi. »

Si l'élève compte plus qu'une fois une **paille en vertical** : « Est-ce que ta manière de faire marche pour les 5 carrés ? » [Ou 4, 6, etc., en fonction de ce qu'il a fait avant.]

L'élève a une **vision proportionnelle** de la correspondance carrés-pailles : lui proposer de construire les carrés avec les pailles, ou « comment pourrais-tu vérifier si ta stratégie est correcte ? » Ou « Pourrais-tu vérifier si ta stratégie fonctionne pour la quatrième étape (ou autre) ? »

Si l'élève n'aboutit pas à une **généralisation arithmétique**, à voir que pour chaque carré on ajoute 3 pailles : lui proposer de remplir le tableau de correspondance carrés-pailles, « je t'écris ici le nombre de l'étape et tu écris à côté de combien de pailles on a besoin », en listant en colonne 1^{er}, 2^e, 3^e, etc.

Si l'élève n'a pas la **bonne représentation de la suite** (par exemple carrés en dessous et pas à la suite) : « Les carrés sont un après l'autre, comme les wagons d'un train. »

En fonction de la réaction de l'élève : « **Tu es fatigué-e ? Est-ce que ça va si on continue encore un peu ?** »

Figure C.4 – Protocole d'entretien de *La suite de carrés*.

c) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 100 carrés ?

Matériel : feuille et crayon.

À dire : « Maintenant, combien faut-il de pailles pour former une suite de 100 carrés ? »

Si l'élève **n'explique pas** ce qu'il fait : « Pourquoi as-tu écrit (dit) cela ? »

Si l'élève **reste en silence sans rien faire** : « À quoi penses-tu ? »

Si l'élève **bloque devant les calculs** : « J'ai une calculatrice avec moi. Si tu me donnes le calcul à faire, je peux le faire pour toi. »

Si l'élève n'abandonne pas la **vision arithmétique** : « Et pour 5000 ? »

Si l'élève n'est pas convaincu de la formule ou la **formule est fausse** : « Comment pourrais-tu contrôler si la formule est correcte ? » ou « Pourquoi as-tu utilisé ce calcul ? »

Si l'élève essaie de **dessiner** : « Cela devient long. Pourrait-on trouver une manière de trouver le résultat sans dessiner ? » ou « Et pour 5000 carrés ? »

L'élève a une **vision proportionnelle** de la correspondance carrés-pailles : « Comment pourrais-tu vérifier si ta stratégie est correcte ? » ou « Pourrais-tu vérifier si ta stratégie fonctionne pour la quatrième étape (ou autre) ? »

Si l'élève fait **confusion entre pailles et carrés** : « C'est quoi cela ? »

Si l'élève aboutit à une **généralisation fausse** : « Comment pourrais-tu vérifier si ta stratégie est correcte ? » ou « Pourrais-tu vérifier si ta stratégie fonctionne pour la quatrième étape (ou autre) ? »

En fonction de la réaction de l'élève : « **Tu es fatigué-e ? Est-ce que ça va si on continue encore un peu ?** »

Figure C.5 – Protocole d'entretien de *La suite de carrés*.

d) En connaissant le nombre de carrés, pourrais-tu toujours trouver le nombre de pailles? Si oui, comment?

Matériel : feuille et crayon.

À dire : « Maintenant, en connaissant le nombre de carrés, peut-on toujours trouver le nombre de pailles? »

Si l'élève **n'explique pas** ce qu'il fait : « Pourquoi as-tu écrit (dit) cela? »

Si l'élève **reste en silence sans rien faire** : « À quoi penses-tu? »

Si l'élève **bloque devant les calculs** : « J'ai une calculatrice avec moi. Si tu me donnes le calcul à faire, je peux le faire pour toi. »

Si l'élève reste au niveau d'**exemple générique** : « Arriverais-tu à me l'expliquer sans utiliser un nombre? »

Si l'élève fait **confusion entre pailles et carrés** : « C'est quoi cela? »

Si l'élève aboutit à une **généralisation fausse** : « Comment pourrais-tu vérifier si ta stratégie est correcte? » ou « Pourrais-tu vérifier si ta stratégie fonctionne pour la quatrième étape (ou autre)? »

En fonction de la réaction de l'élève : « **Tu es fatigué-e? Est-ce que ça va si on continue encore un peu?** »

Figure C.6 – Protocole d'entretien de *La suite de carrés*.

e) Tu as acheté un paquet de 200 pailles. Combien de carrés peux-tu construire ?

Matériel : feuille et crayon.

À dire : « Tu as acheté un paquet de 200 pailles. Combien de carrés peux-tu construire ? »

Si l'élève **n'explique pas** ce qu'il fait : « Pourquoi as-tu écrit (dit) cela ? »

Si l'élève **reste en silence sans rien faire** : « À quoi penses-tu ? »

Si l'élève **bloque devant les calculs** : « J'ai une calculatrice avec moi. Si tu me donnes le calcul à faire, je peux le faire pour toi. »

Si l'élève répond $66.\overline{3}$, ou a des difficultés dans l'interprétation de ce résultat : « C'est quoi, le $66.\overline{3}$? »

En fonction de la réaction de l'élève : « **Tu es fatigué-e ? Est-ce que ça va si on continue encore un peu ?** »

Figure C.7 – Protocole d'entretien de *La suite de carrés*.

C.3 Nombres pairs/impairs

En additionnant deux nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair ?

Matériel : feuille et crayon.

À dire : « On veut comprendre si en additionnant deux impairs, on obtient toujours un nombre pair. Je voudrais que tu y réfléchisses et que tu expliques pourquoi. »

En fonction de la réaction de l'élève : « **Tu te rappelles qu'est ce que c'est un nombre pair et un nombre impair ?** »

« Un nombre pair c'est un nombre qui est multiple de deux, qui est dans le livret de 2. Un nombre impair est un nombre qui n'est pas un multiple de 2, un nombre qui n'est pas dans le livret de 2. »

Si l'élève **n'explique pas** ce qu'il fait : « Pourquoi as-tu écrit (dit) cela ? »

Si l'élève **reste en silence sans rien faire** : « À quoi penses-tu ? »

Si l'élève **bloque devant les calculs** : « J'ai une calculatrice avec moi. Si tu me donnes le calcul à faire, je peux le faire pour toi. »

Si l'élève reste au niveau **d'empirisme naïf ou expérience cruciale** : « Comment peut-on être sûrs que cela est vrai pour tous les nombres impairs ? » ou « Comment l'expliquer à quelqu'un sans faire des calculs ? »

Si l'élève **bloque** : « Tu pourrais essayer avec des exemples » ou « Tu pourrais essayer avec de vrais nombres ».

Pour **pousser la réflexion** :

« Et si on avait deux nombres pairs ? », en écrivant P+P.

« Et si on avait un impair et un pair ? », en écrivant I+P.

« Et si on avait un pair et un impair ? », en écrivant P+I.

En fonction de la réaction de l'élève : « **Tu es fatigué-e ? Est-ce que ça va si on continue encore un peu ?** »


Figure C.8 – Protocole d'entretien de *Nombres pairs/impairs*.

C.4 La tache bleue et 123


Un nombre se cache derrière la tache.

On sait que  + 78 = 115.

Il ne faut pas calculer le nombre caché.

Alors combien font  + 79 ?

Matériel : feuille et crayon.



À dire : « Un nombre est caché par cette tache [indiquer la tache]. On sait que le nombre caché + 78 est égal à 115. Il ne faut pas calculer le nombre caché, d'accord? Alors, sais-tu comment combien font cela [indiquer  + 79]? »

Si l'élève **n'explique pas** ce qu'il fait : « Pourquoi as-tu écrit (dit) cela? »

Si l'élève **reste en silence sans rien faire** : « À quoi penses-tu? »

Si l'élève **bloque devant les calculs** : « J'ai une calculatrice avec moi. Si tu me donnes le calcul à faire, je peux le faire pour toi. »

L'élève considère les **deux taches comme deux nombres différents** : « Derrière les deux taches bleues, il y a le même nombre ».

Si l'élève **bloque** : « quelle différence y a-t-il entre ces deux opérations? »
[indiquer  + 79 et  + 78].

Si l'élève **calcule la valeur** de la tache : « Pourrais-tu trouver une autre manière pour obtenir le résultat sans calculer la valeur de la tache? »

Si l'élève **calcule la valeur** de la tache : Lui donner la tâche 123.

En fonction de la réaction de l'élève : « Tu es fatigué-e? Est-ce que ça va si on continue encore un peu? »

Figure C.9 – Protocole d'entretien de *La tache bleue*.

Si

$$57 + 65 = 122$$

alors combien font

$$57 + 66 ?$$

Matériel : feuille et crayon.

À dire : « Avant j'ai calculé que $57 + 65 = 122$. Alors, combien font $57 + 66$? »

Si l'élève **n'explique pas** ce qu'il fait : « Pourquoi as-tu écrit (dit) cela ? »

Si l'élève **reste en silence sans rien faire** : « À quoi penses-tu ? »

Si l'élève **bloque devant les calculs** : « J'ai une calculatrice avec moi. Si tu me donnes le calcul à faire, je peux le faire pour toi. »

Si l'élève **calcule**, je le laisse calculer et après : « Pourrais-tu trouver une autre manière pour obtenir le résultat ? »

En fonction de la réaction de l'élève : « **Tu es fatigué-e ? Est-ce que ça va si on continue encore un peu ?** »

Figure C.10 – Protocole d'entretien de 123.

Annexe D

Les transcriptions des entretiens

Nous rapportons dans les pages suivantes les transcription des entretiens avec les élèves. Nous nous limitons aux entretiens que nous avons analysées et utilisées pour répondre à la question de recherche Q2 de cette thèse : *La tache bleue et 123, La suite de carrés et Nombres pairs/impairs*. Les transcriptions des entretiens des élèves 2, 10, 19 et 20 ne sont pas incluses ici car ces élèves ont été écartés pour les raisons décrites dans les sections 8.1.2 et 8.1.6.

Les séances avec les élèves commençaient ou se concluait souvent de manière informelle et ce moment n'a pas forcément été enregistré afin de garantir la confidentialité des sujets abordés qui pourraient sortir du cadre de ce travail de recherche. En outre, les tâches ici transcrites ont occasionnellement été proposées comme secondes pendant l'entretien. Pour ces raisons, les transcriptions commencent parfois *in medias res* et peuvent se conclure de manière abrupte.

Pour la transcription, nous avons choisi d'aller à la ligne à chaque tour de parole (changement de locuteur).

Pour ce chapitre, l'ordre de présentation des transcription des tâches correspond à celui des questions de recherche.

Pour la transcription ¹, nous avons adopté les règles suivantes :

- nous indiquons le numéro du tour de parole, ensuite le nom de la personne qui parle, puis nous transcrivons ses mots ;
- nous insérons un nouvelle ligne pour chaque changement de locuteur ;
- si l'audio est incompréhensible, nous marquons « *[inaudible]* » ;
- les précisions nécessaires pour la compréhension de la transcription sont indiquées en italique entre crochets, [*par exemple comme cela*] ;
- nous indiquons avec « *[sic]* » les erreurs présentes dans la citation ;

1. Nous avons suivi les normes APA7 (<https://apastyle.apa.org>).

- nous indiquons la durée de chaque entretien en début de transcription².

D.1 La tache bleue et 123

La tache bleue et 123 : Élève 1

Durée de l'entretien : 6 min 40 s

- 1 - **Chercheuse** : Alors, on va faire comme toujours. Je te donne une tache. Tu peux écrire si tu veux. Si c'est pas clair tu me demandes. Je te demande de dire tout ce que tu penses.
- 2 - **Élève 1** : Un nombre se cache derrière la tache. On sait que blabla plus 4 est égal à 11. Du coup c'est 7 [*il écrit « 7 » sur la première tache*].
- 3 - **Chercheuse** : Ouais et alors?
- 4 - **Élève 1** : Du coup, c'est logique, c'est... Attendez, je vais juster éteindre le (inaudible). Parce qu'on m'a installé un appareil pour calculer ma tension.
- 5 - **Chercheuse** : Pas de problème.
- 6 - **Élève 1** : Du coup je ne sais pas. Je ne comprends du coup là. Il ne faut pas calculer le nombre caché. Combien font le chiffre caché plus 5?
- 7 - **Chercheuse** : La question est claire ou pas trop?
- 8 - **Élève 1** : Non pas trop.
- 9 - **Chercheuse** : Ici, tu sais que le nombre caché plus 4 ça donne 11. La question est alors, le même nombre plus 5?
- 10 - **Élève 1** : Du coup ça fait 13.
- 11 - **Chercheuse** : Comment tu as fait?
- 12 - **Élève 1** : Non ça fait 12.
- 13 - **Chercheuse** : Comment tu as fait là?
- 14 - **Élève 1** : Du coup j'ai calculé 5 plus 7 ça fait 12.
- 15 - **Chercheuse** : D'accord, je peux te poser une autre question? C'est similaire à ce qu'on vient de faire, ok? Tu as un nombre caché là derrière, et on sait que le nombre caché plus 78, donne ça [*en pointant « 115 »*]. Est-ce que tu saurais faire, est-ce que tu sais combien ça vaut?
- 16 - **Élève 1** : Il faut juste que je calcule.
- 17 - **Chercheuse** : Quel calcul tu ferais?
- 18 - **Élève 1** : Du coup je pense que je ferais, du coup, je vais remplacer, du coup, 78 par 80 moins 2 [*il écrit « 80 – 2 » en dessus de 78 et il écrit en colonne 80 + 115 = 195*]. Du coup 80 plus 115. Du coup ça ferait...

2. Le minutage n'est pas rapporté car il n'a pas été utilisé pour les analyses.

- 19 - **Chercheuse** : Alors je te pose une question. Est-ce que, maintenant tu es en train de calculer la tache, n'est-ce pas ? Est-ce que tu arriverais à me dire combien ça vaut ça [*en pointant « tache+79 »*] sans calculer la tache ?
- 20 - **Élève 1** : C'est-à-dire ?
- 21 - **Chercheuse** : C'est à dire que tu vois ici, tu sais que la tache plus 78 donne ça [*en pointant « 115 »*].
- 22 - **Élève 1** : Excusez-moi. Je me suis trompée dans le calcul. C'est totalement faux.
- 23 - **Chercheuse** : Pas de problème de toute façon on essaie de ne pas calculer la tache cette fois d'accord ?
- 24 - **Élève 1** : Du coup la tache elle fait 33 [*il écrit « 33 » dans la première tache et « 112 » à côté de « tache+79 »*].
- 25 - **Chercheuse** : Qu'est-ce que tu as fait ?
- 26 - **Élève 1** : C'est pas censé faire 112.
- 27 - **Chercheuse** : Pourquoi t'as dit que ça ne fait pas 112 ?
- 28 - **Élève 1** : Parce que par rapport à ces calculs [*il pointe les deux lignes*], c'est un de plus par rapport au même nombre de la même tache. Ce ne serait pas logique, ça serait 116 [*il écrit « 116 » et « 33 » dans la tache de la deuxième ligne*].
- 29 - **Chercheuse** : D'accord. Je peux t'en donner une autre ? Je prends ça. Avant, j'ai calculé, j'ai fait ce calcul-là [*elle pointe « 57 + 65 = 122 »*]. Alors je me demande maintenant combien ça fait ça [*en pointant « 57 + 65 = 122 »*].
- 30 - **Élève 1** : [*L'élève écrit « 123 » à côté de « 57 + 66 »*].
- 31 - **Chercheuse** : Comment tu as fait ?
- 32 - **Élève 1** : Du coup c'est exactement le même calcul. Sauf que au lieu que ça soit 5 c'est 6. J'ai juste fait le calcul initial et j'ai rajouté 1.
- 33 - **Chercheuse** : D'accord. Et pourquoi tu as rajouté 1 ?
- 34 - **Élève 1** : Parce que du coup ce sera le même résultat mais plus 1. Donc, 6 c'est plus grand que 5.

La tache bleue et 123 : Élève 3

Durée de l'entretien : 7 min 06 s

- 1 - **Chercheuse** : Ça, ça regarde toujours la table, d'accord ? C'est comme ça. Et on va faire comme d'habitude, c'est-à-dire que je te donne une tâche, je te l'explique, si tu as des questions, n'hésite pas et je te demande... Si tu veux tu peux écrire, il y a un stylo. Si tu préfères, tu m'expliques ce que tu penses à l'oral et me dis tout ce que tu penses, d'accord ?
- 2 - **Élève 3** : Ok, je vais essayer.
- 3 - **Chercheuse** : Quoi ?

- 4 - Élève 3 : Je vais essayer.
- 5 - Chercheuse : D'accord, parfait. Regarde : là un nombre et caché par la tache, d'accord? Un nombre se cache ici, derrière la tache. Et on sait que le nombre caché plus 78 est égal à 115. D'accord? Il ne faut pas calculer la tache, donc il ne faut pas calculer le nombre derrière la tache, mais il faut essayer de comprendre combien sont le nombre cachés plus 79.
- 6 - Élève 3 : Je sais pas. Non, je sais pas faire. Non, je ne sais pas quoi faire en fait. Bon, j'en sais rien, je sais pas quoi faire.
- 7 - Chercheuse : La question eest claire? Est-ce que tu as envie de m'expliquer la question?
- 8 - Élève 3 : Ils ont dit qu'un nombre caché, tache qu'on sait que... Na na na [*en pointant* « $tache+78 = 115$ »]... Et ça, je sais, mais ils ont dit que je ne dois pas calculer le nombre caché et du coup là ils ont mis 79 [*en pointant* « $tache+79$ »], c'est pour ça que je comprends pas.
- 9 - Chercheuse : Parce que regarde. Là [*en pointant* « $tavhe+78=115$ »] on sait que le nombre ceché plus 78 est égal à 115. Ça, c'est clair ou pas trop?
- 10 - Élève 3 : Quoi? Recommencez.
- 11 - Chercheuse : Alors, on sait que le nombre... Un nombre qui est caché plus 78 est égal à 115.
- 12 - Élève 3 : Donc là ça fait 37 alors.
- 13 - Chercheuse : Qu'est ce que t'as fait, là?
- 14 - Élève 3 : J'ai compté.
- 15 - Chercheuse : Mh mh. Comment tu as compté?
- 16 - Élève 3 : J'ai compté avec... Ma tête.
- 17 - Chercheuse : Et quel calcul tu as fait?
- 18 - Élève 3 : Jusqu'à 1, 2, 3 [*inaudible*] et du coup en premier j'ai fait... En pensant que j'ai fait 78 et je mets... J'ai dit 37?
- 19 - Chercheuse : Mh mh.
- 20 - Élève 3 : [*Il écrit en colonne* « $37 + 78 = \dots$ »] Après, au début je voulais faire l'arrière, du coup j'ai fait... Plus ça fait 100 [*en calculant* « $3 + 7 = 10$ »].
- 21 - Chercheuse : Mh mh.
- 22 - Élève 3 : Et après j'ai compté, j'ai fait 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. Donc ça veut dire, je fais comme ça [*en calculant* « $7 + 8 = 15$ », *il efface le* « 0 » *de* « $3 + 7 = 10$ » *et met un* « 1 » *à la place*].
- 23 - Chercheuse : Mh mh. Et alors, pour répondre à la question, combien font le nombre caché plus 79?
- 24 - Élève 3 : 37.

- 25 - Chercheuse : Oui, le nombre cachés plus 79, pour répondre à la question-là [en pointant « tache + 79 »].
- 26 - Élève 3 : Ah. 116.
- 27 - Chercheuse : Comment tu as fait?
- 28 - Élève 3 : J'ai compté plus 1 parce qu'il y avait 78 et il y a 79 [en pointant « 79 »] donc du coup, ça fait plus 1.
- 29 - Chercheuse : D'accord. Plus 1 par rapport à quoi?
- 30 - Élève 3 : Par rapport au premier chiffre-ici [en pointant « 79 » et après « 78 »]?
- 31 - Chercheuse : D'accord, ok. Et alors, est-ce que tu arriverais à faire ça? Regarde avant, j'ai calculé, et j'ai calculé que 57 plus 65 égale à 112. D'accord? Je le calculé avant. Et je me demande maintenant alors combien font 57 plus 66.
- 32 - Élève 3 : Alors... Qu'est ce que je fais? Je fais... [il calcule en colonne « 57 + 66 = 123 »] 123.
- 33 - Chercheuse : D'accord. Est-ce que tu aurais une autre manière sans faire le calcul?
- 34 - Élève 3 : Oui!
- 35 - Chercheuse : C'est-à-dire?
- 36 - Élève 3 : C'est-à-dire que je peux faire sans calculer.
- 37 - Chercheuse : Et comemnt?
- 38 - Élève 3 : Je vais pas compter.
- 39 - Chercheuse : C'est-à-dire?
- 40 - Élève 3 : Je vais compter dans ma tête, mais je ne vais pas écrire.
- 41 - Chercheuse : D'accord. Et donc, qu'est-ce que tu ferais dans ta tête?
- 42 - Élève 3 : Je vais réfléchir combien ça fait.
- 43 - Chercheuse : Mh mh. Est-ce que ce calcul-là [en pointant « 57 + 65 = 122 »] pourrait être utile pour faire ce calcul-là [en pointant « 57 + 66 »]?
- 44 - Élève 3 : Oui, je crois.
- 45 - Chercheuse : Comment?
- 46 - Élève 3 : Genre... J'en sais rien en fait. Je ne sais pas quoi dire.
- 47 - Chercheuse : Je n'ai pas compris, qu'est ce que tu as dis, pardon?
- 48 - Élève 3 : En vrai je sais pas quoi dire.
- 49 - Chercheuse : D'accord, regarde ce calcul-là [en pointant « 57 + 65 = 122 »], tu vois? 57 plus 65. Est-ce que il y a quelque chose qui rassemble un peu ce calcul-là [en pointant « 57 + 66 »]?
- 50 - Élève 3 : Oui.
- 51 - Chercheuse : Quoi?
- 52 - Élève 3 : Il faut faire plus 1, et ça fait 123.

53 - Chercheuse : D'accord. Donc, c'est le même résultat que tu as obtenu avant.

54 - Élève 3 : Presque le même résultat.

55 - Chercheuse : Pourquoi presque?

56 - Élève 3 : Parce qu'il y avait 65 et 66 [*inaudible*] c'est le seul un truc.

La tache bleue et 123 : Élève 4

Durée de l'entretien : 6 min 49 s

1 - Chercheuse : Alors, on fait comme on a déjà fait les autres jours, je te donne des tâches, je te donne un stylos, si tu as envie d'écrire.

2 - Élève 4 : Mh.

3 - Chercheuse : Et puis tu me dis tout ce que tu penses. Ok? Alors, regarde, un nombre se cache derrière la tache, celle tache-là [*en pointant la première tache*]. Il ne faut pas calculer le nombre caché. Ok? Mais on sait que le nombre caché plus 78, ça donne 115.

4 - Élève 4 : Ok [*L'élève calcule en colonne « 115 – 78 = 37 »*]. Voilà, c'est 37.

5 - Chercheuse : Oui. Et la question en fait était combien font ça [*en pointant « tache+79 »*]?

6 - Élève 4 : Combien il fait quoi?

7 - Chercheuse : Le nombre caché...

8 - Élève 4 : 78 plus 37?

9 - Chercheuse : Le nombre caché plus 79.

10 - Élève 4 : Mais c'est ça le nombre caché.

11 - Chercheuse : Oui.

12 - Élève 4 : Ça fait 115.

13 - Chercheuse : Quoi, ça fait 115?

14 - Élève 4 : 37 plus 79.

15 - Chercheuse : Comment tu sais?

16 - Élève 4 : J'ai calculé l'écart qu'il y avait.

17 - Chercheuse : Oui...

18 - Élève 4 : [*Inaudible*].

19 - Chercheuse : Oui, parce que je n'ai pas trop compris le raisonnement. Je ne dis pas que c'est faux. C'est juste que je n'ai pas compris.

20 - Élève 4 : C'est 37 [*Il calcule en colonne « 79 + 37 = 116 »*]. Ah non. [*Inaudible*]
Ba non, ça fait 116.

21 - Chercheuse : Ok.

22 - Élève 4 : C'est juste 116?

23 - Chercheuse : Oui, c'est bon. Et pourquoi avant, tu disais que c'était 115?

- 24 - Élève 4 : Parce que c'est l'espace qu'il y a entre les 2.
- 25 - Chercheuse : Pardon, c'est ?
- 26 - Élève 4 : L'espace qu'il y a entre 78 et le 115, il y a 37.
- 27 - Chercheuse : Oui, d'accord. Donc tu avais repris, ce résultat-là [*en pointant* « $tache+78 = 115$ »] ?
- 28 - Élève 4 : Mh. Ça veut dire que ce n'est pas ça ?
- 29 - Chercheuse : Non, mais c'est juste ce que tu as fait, c'est correct. Je voulais juste savoir comment tu avais fait.
- 30 - Élève 4 : Mh. C'est juste, là ?
- 31 - Chercheuse : Oui, c'est bien ce que tu as fait, c'est juste. On passe à une autre tâche ? Avant, j'ai calculé, j'ai fait ce calcul-là. J'ai calculé que 57 plus 65 donne 122. Est-ce que tu sais combien ça donne ça [*en pointant* « $57 + 66$ »] ?
- 32 - Élève 4 : Je peux avoir l'ancienne fiche [*en parlant de la fiche sur la tache bleue*] ?
- 33 - Chercheuse : Pardon ?
- 34 - Élève 4 : Cette fiche, je peux l'avoir ?
- 35 - Élève 4 : Celle-là ? Après, peut-être je peux faire... Je peux juste prendre une photo, d'accord ? Je la laisse un moment ici.
- 36 - Élève 4 : Ah non, juste l'avoir là maintenant.
- 37 - Chercheuse : Ah, oui. Bien sûr, mais c'est une autre tâche.
- 38 - Élève 4 : Mh.
- 39 - Chercheuse : Tu pensais encore quelque chose par rapport à ça ? Tu es encore concentré sur cette tâche ?
- 40 - Élève 4 : Attendez.
- 41 - Chercheuse : Oui.
- 42 - Élève 4 : Et là je dois trouver combien ça fait [*en se référant à la tâche 123*] ?
- 43 - Chercheuse : Je peux te demander un truc par rapport à ça [*en pointant la tache bleue*] ? Qu'est-ce que tu étais en train de regarder ? Il y avait quelque chose...
- 44 - Élève 4 : Si est 115 quand le nombre est plus petit [*en pointant la tache de* « $tache+78 = 115$ »], quand on calcule 37 plus 78. Et là c'est 116 quand on calcule... Ah, mais j'avais mal lu ! Ah non, j'ai rien dit, j'ai rien dit.
- 45 - Chercheuse : Qu'est-ce que t'avais lu, là ?
- 46 - Élève 4 : J'ai cru que c'était 78, là [*en pointant* « $tache+79$ »].
- 47 - Chercheuse : Ah d'accord, je comprends maintenant ce que tu as fait. Ok, super
- 48 - Élève 4 : Ça fait 113 alors celui-là.
- 49 - Chercheuse : 113 ?
- 50 - Élève 4 : Oui.

- 51 - Chercheuse : Comment tu as fait ?
- 52 - Élève 4 : J'ai calculé de tête.
- 53 - Chercheuse : Ok.
- 54 - Élève 4 : C'est ça ?
- 55 - Chercheuse : Il y a une petite erreur.
- 56 - Élève 4 : Ah non, 123.
- 57 - Chercheuse : Ok.
- 58 - Élève 4 : C'est ça ?
- 59 - Chercheuse : Oui. Comment tu as fait ?
- 60 - Élève 4 : J'ai calculé.
- 61 - Chercheuse : Ok. En tête ?
- 62 - Élève 4 : Mh.
- 63 - Chercheuse : Ok. Et est-ce que tu pourrais utiliser cette ligne [*en pointant* « $57 + 65 = 122$ »] pour avoir ce résultat [*en pointant* « $57 + 66$ »] ?
- 64 - Élève 4 : Oui, j'aurais pu utiliser facilement parce que là [*en pointant* « $57 + 65 = 122$ »], c'est juste un de plus, moi j'ai calculé.

La tâche bleue et 123 : Élève 5

Durée de l'entretien : 4 min

- 1 - Chercheuse : On fait comme toujours, d'accord ? Je te donne des tâches, si tu as envie, tu écris. Tu me dis ce que tu penses. Si ce n'est pas clair, tu me poses des questions. C'est bon ?
- 2 - Élève 5 : Mh mh.
- 3 - Chercheuse : Alors. Un nombre se cachent derrière cette tâche-là [*en pointant la tâche bleue*]. On sait que le nombre cachés plus 78...
- 4 - Élève 5 : Doit faire 115.
- 5 - Chercheuse : Exactement, est égal à 115. Il ne faut pas calculer, le nombre caché. Est-ce que tu arriverais à savoir combien font ça-là, tâche plus 79 [*en les pointant*] ?
- 6 - Élève 5 : On ne peut pas savoir ce qu'il y a dans la tâche...
- 7 - Chercheuse : C'est vrai, mais qu'est ce qu'on sait ?
- 8 - Élève 5 : Combien font la tâche plus... Ah j'ai peut-être trouvé. Faut que je fasse ça [*en pointant* « 115 »], moins ça [*en pointant* « 78 ». *L'élève pose en colonne* « $115 - 78 = 37$ »]. 37.
- 9 - Chercheuse : Ok, donc 37 qu'est ce que c'est ?
- 10 - Élève 5 : C'est le nombre qui est là [*en pointant la première tâche*] pour faire ça [*en pointant* « 115 »] et qui peut être aussi là [*en pointant la deuxième tâche*].

- 11 - **Chercheuse** : D'accord.
- 12 - **Élève 5** : Donc si j'avais... comma ça [*il calcule en colonne « 37 + 79 = 116 »*], ça fait 116.
- 13 - **Chercheuse** : Oui, c'est correct et pour faire cela, t'as trouvé le 37 qui était le nombre derrière la tache.
- 14 - **Élève 5** : Mh mh.
- 15 - **Chercheuse** : Oui, est-ce que tu arriverais à trouver cela [*en pointant « tache+79 »*] sans calculer 37, est-ce qu'il y a une autre manière?
- 16 - **Élève 5** : Non, je ne pense pas.
- 17 - **Chercheuse** : Quelle différence y a entre ces deux opérations? Celle-là et celle-là [*en pointant « tache+78 = 115 » et « tache+79 »*].
- 18 - **Élève 5** : Bah pour celle-là [*en pointant la première*] j'ai dû faire moins pour trouver la réponse. Et là [*en pointant la deuxième*], j'ai juste fait plus pour trouver la réponse qui était là [*en pointant la première*].
- 19 - **Chercheuse** : Okay. D'accord. Je peux te proposer une autre tache?
- 20 - **Élève 5** : Mh mh.
- 21 - **Chercheuse** : Avant, j'ai calculé et j'ai calculé que 58 plus 65, ça donne 122. Donc j'ai ça, j'ai ça [*en pointant « 57 + 65 = 122 »*]. Et alors, combien font 57, plus 66?
- 22 - **Élève 5** : 123.
- 23 - **Chercheuse** : Comment tu as fait?
- 24 - **Élève 5** : Bah parce que, en fait, là, c'est la même chose [*en pointant les deux égalités*]. Et là, c'est la même chose. On a juste rajouté un chiffre en plus et ça fait 123.

La tache bleue et 123 : Élève 6

Durée de l'entretien : 2 min 56 s

- 1 - **Chercheuse** : Ok, alors là, je fais partir comme d'habitude. D'accord? On fait comme les autres jours, je te donne des tâches. Si tu as des problèmes, tu me dis. Et tu me dis tout ce qui te passe par la tête. D'accord?
- 2 - **Élève 6** : Ok.
- 3 - **Chercheuse** : Regarde. Alors un nombre est caché par cette tache. Donc derrière il y a un nombre. Et on sait que le nombre caché plus 78.
- 4 - **Élève 6** : Ça fait 115.
- 5 - **Chercheuse** : Très bien. Et il ne faut pas calculer le nombre qu'il y a là-dérrière. C'est pas ça le but. D'accord? On veut comprendre combien font cela. C'est à dire le nombre caché qui est le même plus 79.

- 6 - Élève 6 : Ah okay. Bah déjà, ça fait...
- 7 - Chercheuse : Tu peux écrire si tu veux.
- 8 - Élève 6 : Attendez ! 37.
- 9 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu as fait, là ?
- 10 - Élève 6 : Bah j'ai fait plus [en pointant « 78 »] 22 on revient à 100. Après, comme il reste 15, ça fait 37.
- 11 - Chercheuse : D'accord. Qu'est-ce que tu as calculé ? T'as trouvé la valeur de la tache, n'est-ce pas ? Du nombre caché ?
- 12 - Élève 6 : Oui 37. 37 plus... là [en pointant la tache et en écrivant « 37 » dans la deuxième tache] ? Ce sera 116.
- 13 - Chercheuse : D'accord. Comment tu as fait ?
- 14 - Élève 6 : Bah en fait, j'aurais juste dû faire normalement, en fait la même chose mais plus 1 [en pointant « 78 » et « 79 »]. Mais je n'y ai pas pensé.
- 15 - Chercheuse : D'accord, mais tu as fait d'une autre manière. Les 2 marchent bien.
- 16 - Élève 6 : Mais je n'avais pas pensé que j'avais oublié que 78 c'était la même chose, mais fallait juste faire plus 1.
- 17 - Chercheuse : D'accord. Et maintenant, ici. Avant, j'ai fait ce calcul là, je fais 57 plus 65 qui est égal 122. Je me demande combien font cela ?
- 18 - Élève 6 : Bah 123 [il écrit « 133 »].
- 19 - Chercheuse : D'accord. Qu'est-ce que tu as fait ?
- 20 - Élève 6 : Plus 1.
- 21 - Chercheuse : Pourquoi ?
- 22 - Élève 6 : Parce que 57 c'est le même chiffre et que là il y juste une unité en plus. (inaudible) 133... Ah non 123 ! J'ai fait le Gogol. J'ai fait une boulette... 123. C'est une erreur d'inattention.

La tache bleue et 123 : Élève 7

Durée de l'entretien : 12 min 50 s

- 1 - Chercheuse : Et on fait comme d'habitude, je te donne une tâche. Si tu as des questions, n'hésite pas. Tu peux écrire si tu veux. Là, tu as un stylo, un crayon, ce que tu veux. Et tu me dis tout ce qui te passe par la tête, d'accord ?
- 2 - Élève 7 : D'accord.
- 3 - Chercheuse : Regarde, un nombre est caché par cette tache. Et on sait que le nombre caché plus 78 est égal à 115.
- 4 - Élève 7 : Oui.

- 5 - **Chercheuse** : D'accord? Ça, on le sait. Il ne faut pas calculer le nombre caché. Donc on ne le calcule pas, mais on se demande combien font le nombre caché plus 79. Là [*en pointant les 2 taches*] derrière il y a le même nombre, d'accord. Est-ce que tu sais répondre à la question? Est-ce que tu as quelques idées?
- 6 - **Élève 7** : J'ai trouvé.
- 7 - **Chercheuse** : T'as trouvé?
- 8 - **Élève 7** : Oui 36.
- 9 - **Chercheuse** : Quoi?
- 10 - **Élève 7** : 36 plus 79. Mais c'est les 2 les mêmes [*en pointant les 2 taches, ou les 2 égalités*]?
- 11 - **Chercheuse** : Oui. Mais qu'est-ce que tu avais fait, sinon, toi?
- 12 - **Élève 7** : Celui-là [*en pointant « tache+79 »*], pour arriver à 115, j'aurais fait 36. Et pour l'autre, j'aurais fait 37.
- 13 - **Chercheuse** : D'accord, mais on ne sait pas que le total, là [*en pointant « tache+79 »*], ça donne 115. D'accord? On sait juste que le nombre plus 79 est égal à 115. Et on se demande combien font le même nombre plus 79. C'est-à-dire qu'ici [*en pointant les 2 taches*] il y a...
- 14 - **Élève 7** : Combien il fait... j'ai compris. C'est 37 pour arriver à 115. Ici c'est 116 [*en pointant « tache+79 »*].
- 15 - **Chercheuse** : Comment tu as fait?
- 16 - **Élève 7** : J'ai fait 30 plus 70. 100. J'ai pris les unités, j'ai calculé 9 plus quelque chose. Plus 7. Et voilà, ça me donne 116. Et pour celui-là [*en pointant « tache+78 = 115 »*], moins 1 ça fait 115.
- 17 - **Chercheuse** : D'accord. Donc pour faire cette addition-là [*en pointant la deuxième addition*], tu as trouvé le nombre qui était caché. N'est-ce pas?
- 18 - **Élève 7** : Oui.
- 19 - **Chercheuse** : Est-ce que tu arriverais à faire l'addition sans calculer ce nombre-là [*en pointant les 2 taches*] ? Je ne sais pas si la question est claire.
- 20 - **Élève 7** : Eh...
- 21 - **Chercheuse** : Je peux te faire un autre exemple?
- 22 - **Élève 7** : Oui!
- 23 - **Chercheuse** : T'as froids?
- 24 - **Élève 7** : Non, ça va.
- 25 - **Chercheuse** : Si jamais je ferme la fenêtre, c'est juste pour changer l'air, covid, etc.
- 26 - **Élève 7** : Non, ça va.
- 27 - **Chercheuse** : En classe vous garder les fenêtres ouvertes ou c'est fermé?

- 28 - Élève 7 : Ouais aussi on fait ça.
- 29 - Chercheuse : Bon, ici on est juste 2 à la fois, mais quand même. Okay. Ah pardon je n'ai pas écrit la deuxième chose. Nous avons un nombre caché, plus quelque chose. Et on sait le résultat [*en pointant* « $tache+3478=5248$ »]. Est-ce que tu saurais combien fait cette addition-là [*en pointant* « $tache+3479$ »]?
- 30 - Élève 7 : [*L'élève essaye de poser en colonne* « 3478 »].
- 31 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu fais, là?
- 32 - Élève 7 : J'essaie de trouver. J'essaie de faire un calcul.
- 33 - Chercheuse : Et quel est ton calcul?
- 34 - Élève 7 : Là je suis entrain de le faire.
- 35 - Chercheuse : Mais quel calcul tu fais?
- 36 - Élève 7 : Je fais des calculs avec 1000, des trucs comme ça pour trouver le [*en pointant la tache*]...
- 37 - Chercheuse : D'accord, est-ce que tu arriverait sans calculer ça [*en pointant la tache*]?
- 38 - Élève 7 : Mh?
- 39 - Chercheuse : Est-ce que tu arriverais sans calculer la tache?
- 40 - Élève 7 : Peut-être, oui.
- 41 - Chercheuse : Est-ce que tu veux y penser un moment? On essaie, et si on n'arrive pas c'est pas grave.
- 42 - Élève 7 : [*Il écrit* « 1870 » *en dessus de la tache de* « $tache+3478=5248$ »].
- 43 - Chercheuse : Ok, qu'est ce que t'as fait?
- 44 - Élève 7 : J'ai calculé. Genre, j'ai fait pour 1 millier et comme ça [*en pointant les 4 chiffres de* « 3478 »]... J'ai essayé d'arriver jusqu'ici [*en pointant* « 5248 »].
- 45 - Chercheuse : Et comment tu répondrais donc à la question?
- 46 - Élève 7 : (inaudible) Oui, je crois que c'est ça. Enfin je crois que c'est la réponse [*en pointant* « 5248 »].
- 47 - Chercheuse : D'accord. Donc là tu as trouvé le nombre caché. Et donc cette addition [*en pointant* « $tache+3479$ »]?
- 48 - Élève 7 : [*Il écrit* « 1870 » *à côté de la tâche, il fait le calcul en tête et écrit* « 5339 »] Voilà.
- 49 - Chercheuse : Donc qu'est-ce que tu as obtenu?
- 50 - Élève 7 : J'ai obtenu 5339.
- 51 - Chercheuse : D'accord. Alors maintenant. Avant j'ai fait ce calcul là, j'ai calculé 57 plus 65 et j'ai trouvé 122. Maintenant, je me demande est-ce qu'on sait combien ça donne 57 plus 66?
- 52 - Élève 7 : Oui, 123.

53 - Chercheuse : Comment tu as fait ?

54 - Élève 7 : Je rajoute un plus parce que, vous voyez, 65 (inaudible) j'ai rajouté 1 [en indiquant « 66 »], ça fait 123.

La tache bleue et 123 : Élève 8

Durée de l'entretien : 3 min 41 s

1 - Chercheuse : Je te pose des questions et tu peux écrire si tu veux. Et après tu me dis tout ce qui te passe par la tête, ok ?

2 - Élève 8 : Ok.

3 - Chercheuse : Regarde. Ici, il y a un nombre qui se cache derrière cette tache-là.

4 - Élève 8 : Ok.

5 - Chercheuse : Ok ? Et on sait que la tâche plus 78 est égale à 115. Il ne faut pas calculer le nombre qui est derrière la tache. Il ne faut pas le calculer, mais on se demande si on sait combien font le nombre caché qui est le même [en pointant les 2 taches]. D'accord ? C'est le même nombre qui est derrière la tâche, plus 79.

6 - Élève 8 : (inaudible) plus 79.

7 - Chercheuse : Oui.

8 - Élève 8 : Alors là pourquoi trouver le chiffre qui est là [en pointant la première tache], elle doit faire ça [en pointant « 78 »] moins ça [en pointant « 115 »]. Mais là [en pointant « tache+79 »] je n'ai pas compris, par contre.

9 - Chercheuse : Ici on ne veut pas calculer le nombre caché, d'accord ? C'est pas ça la question. La question, est comprendre si on ne sait combien ça fait ça [en pointant « tache+79 »].

10 - Élève 8 : Mais il n'y a pas de résultat alors.

11 - Chercheuse : On doit le trouver. Est-ce qu'on peut le trouver ?

12 - Élève 8 : Il doit y avoir la réponse de [en pointant « tache+78=115 »]... Le chiffre qui doit être là [en pointant la première tache] ? Ça va être celui-là [en pointant la deuxième tache]. Il doit aller là [en pointant la deuxième tache]. D'accord, c'est ça ?

13 - Chercheuse : Oui.

14 - Élève 8 : [Il calcule en colonne « 115-78=37 »] 37.

15 - Chercheuse : Le nombre de caché d'accord.

16 - Élève 8 : Du coup je dois faire 37 plus 79 [il calcule « 79+37=116 »]. La réponse là, c'est 116 [il écrit « 116 » et « 37 » dans les 2 taches].

17 - Chercheuse : Donc, maintenant, qu'est ce que t'as fait ? Pour calculer cette addition-là [en pointant la deuxième addition], t'as trouvé le nombre qui était

caché, n'est-ce pas? Mais est-ce que à ton avis, on pourrait trouver...

18 - Élève 8 : Oui! Parce que là [*en pointant* « 79 »] il y a juste un chiffre de plus du coup [*en pointant* « 116 »].

19 - Chercheuse : Donc comment t'aurais pu faire?

20 - Élève 8 : Comme on sait le résultat là [*en pointant* « 115 »], on peut facilement savoir celui-là [*en pointant* « 116 »].

21 - Chercheuse : Alors maintenant. Avant, j'ai fait ces calculs-là, j'ai fait 57 plus 65, j'ai obtenu, 122. Combien font ça [*en pointant* « 57+66 »]?

22 - Élève 8 : [*Il écrit* « 123 »].

23 - Chercheuse : Comment tu as fait?

24 - Élève 8 : Là il y a juste 1 en plus. C'est des plus, du coup bah...

La tache bleue et 123 : Élève 9

Durée de l'entretien : 2 min 02 s

1 - Chercheuse : Alors, on fait comme d'habitude, d'accord? Je te donne une tache et tu m'expliques un peu ce que tu penses. T'écris si tu as envie. Et si tu as des questions n'hésites pas. Ok? Regarde, un nombre est caché derrière cette tache-là. Okay? Et on sait que le nombre caché, plus 78 est égal à 115. D'acc? Donc, il ne faut pas calculer le nombre qui est caché derrière la tache. Mais on se demande combien font le nombre caché plus 79.

2 - Élève 9 : Euhh. Je ne sais pas du tout.

3 - Chercheuse : Regarde. On sait ça [*en pointant* « tache+78 = 115 »] : on sait que le nombre caché plus 78 est égal à 115.

4 - Élève 9 : Ben je dirais 116, vu que c'est plus 1.

5 - Chercheuse : D'accord. Et... Et là. Regarde. Avant j'ai fait ce calcul. J'ai calculé que 57 plus 65 est égal à 122. Et maintenant je me demande combien font ça [*en pointant* « 57 + 66 »].

6 - Élève 9 : Ben ça fait 123.

7 - Chercheuse : Oui, qu'est-ce que tu as fait, là?

8 - Élève 9 : J'ai rajouté plus 1.

La tache bleue et 123 : Élève 11

Durée de l'entretien : 6 min 24 s

1 - Chercheuse : C'est parti, et on fait comme d'habitude, c'est à dire que je te donne des tâches. S'il y a quelque chose que tu ne comprend pas tu me demandes, on

va essayer de les résoudre ensemble. Tu me dis ce qui te passe par la tête. Ça joue?

2 - **Élève 11** : Ça joue.

3 - **Chercheuse** : Regarde là, alors un nombre est caché par cette tache. Il y a un nombre derrière et on sait que le nombre caché plus 78 est égal à 115. On ne doit pas calculer le nombre caché. La question est combien font le nombre caché plus 79?

4 - **Élève 11** : En premier ont fait, pour savoir le nombre qu'il y a là, on fait 115 moins 78. Est ça fait...

5 - **Chercheuse** : Je peux te le faire si tu veux... ou sinon vas-y!

6 - **Élève 11** : 37, pardon.

7 - **Chercheuse** : D'accord, qu'est-ce que t'as fait?

8 - **Élève 11** : J'ai fait 115 moins 78, comme ça j'ai le résultat du nombre caché, maintenant ils disent plus 79. Je fais 115 plus 79. Ça fait 194.

9 - **Chercheuse** : Qu'est-ce que t'as fait là?

10 - **Élève 11** : Bah, ils disent de faire... Ils disent de calculer plus 79. J'ai fait 15... 115 plus 79.

11 - **Chercheuse** : Très bien, donc qu'est-ce que t'as fait? Tu pourrais faire avec moi le calcul?

12 - **Élève 11** : Le premier, pour celui-là...

13 - **Chercheuse** : Non, mais celui-là c'est bien, je dis le deuxième, là. Comment t'as fait pour faire ce calcul-là?

14 - **Élève 11** : Bah... Déjà, je savais déjà le résultat de celui-là. C'était 115 et ils ont dit de faire encore plus ce nombre.

15 - **Chercheuse** : D'accord. Il fallait seulement faire ça plus ça. D'accord. Mais alors effectivement, ça, c'est, tu vois? C'est le même nombre qu'il y avait ici.

16 - **Élève 11** : Ah, c'est..! Ok, j'ai compris.

17 - **Chercheuse** : D'accord? Ok!

18 - **Élève 11** : Ça fait 114.

19 - **Chercheuse** : Comment t'as fait?

20 - **Élève 11** : J'ai fait 79 plus 37.

21 - **Chercheuse** : Ouais, et comment t'as fait pour faire 79 plus 37?

22 - **Élève 11** : J'ai fait en premier 7 plus 9, ça fait 14. J'ai mis le 4 en bas le un juste en haut du 7. Après j'ai fait 3 plus 7 ça fait 10, plus 1 ça fait 11.

23 - **Chercheuse** : Maintenant, on garde... C'est très bien ce que tu as fait. Si on regarde la tâche, on savait qu'un nombre caché plus 78, ça faisait ça. La question était le même nombre, plus 79. Est-ce qu'il y aurait une autre manière

pour trouver cela sans calculer le nombre qu'il y a là derrière? Sans calculer le 37?

24 - Élève 11 : Ce nombre, mais sans le calculer?

25 - Chercheuse : Trouver tout. Combien ça vaut ça, sans calculer la tache, le nombre caché. En sachant cela.

26 - Élève 11 : 115... [Inaudible] 114...

27 - Chercheuse : Oui, mais comment tu sais, ça tu sais parce que tu l'as calculé avant...

28 - Élève 11 : Oui, je savais pas...

29 - Chercheuse : Est-ce qu'il y a une autre manière?

30 - Élève 11 : Ben non, y'a pas, parce qu'y'a pas...

31 - Chercheuse : Pourquoi?

32 - Élève 11 : Parce qu'il y a pas un nombre qui me donne ce calcul. Parce que ça... Au moins il y a l'égal et il y a un chiffre. Et on peut faire moins et savoir combien il en y avait avant, mais là il y a pas.

33 - Chercheuse : D'accord, merci. Je te pose une autre question, d'accord? Une autre tâche. Regarde, avant j'ai fait un calcul et j'ai calculé que 57 plus 65 fait 122. Combien font ça?

34 - Élève 11 : Ça fait 123.

35 - Chercheuse : Comment tu sais?

36 - Élève 11 : C'est le même calcul, il y a seulement, il y a seulement un chiffre de plus parce que là c'est 65 et là c'est 60.

37 - Chercheuse : D'accord.

38 - Élève 11 : Et là, bah, on sait déjà que... Que 57 plus sss...

39 - Chercheuse : 65.

40 - Élève 11 : Voilà, ça fait 122. La même chose, mais seulement qu'il y a 1 chiffre de plus. Il faut seulement mettre 1 chiffre de plus. Il faut mettre le 1.

La tache bleue et 123 : Élève 12

Durée de l'entretien : 12 min 58 s

1 - Chercheuse : On fait comme toujours. C'est-à-dire que je te donne une tâche. Tu me poses tes questions si tu as des questions et tu me dis ce à quoi tu penses.

2 - Élève 12 : Ok.

3 - Chercheuse : Regarde, là il y a un nombre qui se cache derrière la tache et on sait que le nombre caché plus 78 est égal à 115. Donc, il ne faut pas calculer le nombre caché, mais on doit comprendre combien font le nombre caché, qui est le même, plus 79.

- 4 - Élève 12 :** Je vais faire 115 moins 78 [*l'élève écrit en colonne et résout le calcul*]. Là c'est pas possible, là il y en a 0, là il y en a 10, là il en y a 15 [*l'élève est en train de résoudre le calcul*]. Je peux faire avec 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 [*l'élève dessine 15 bâtonnets*]. Et 8, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 [*l'élève efface 8 bâtonnets et compte ce qui reste*], 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, là ça fait 7. Là, ça fait 0. Et là, ça fait 1.
- 5 - Chercheuse :** D'accord,
- 6 - Élève 12 :** Du coup 107 plus 78 [*l'élève calcule en colonne « $107 + 78 = 185$ »*]... *eleven, twelve... 185... Ce n'est pas possible.*
- 7 - Chercheuse :** Pourquoi ce n'est pas possible?
- 8 - Élève 12 :** Parce qu'il faut que je trouve le même chiffre que là [*en pointant l'égalité « $tache + 78 = 115$ »*].
- 9 - Chercheuse :** Pourquoi le même chiffre?
- 10 - Élève 12 :** parce qu'il faut que je trouve quoi et quoi, par exemple 78 plus 78 est égal à ça [*en pointant « 115 »*], il faut que je trouve le chiffre même pour savoir vraiment si c'est 107.
- 11 - Chercheuse :** Donc tu dis que là, ce nombre ici, le 115, est égal à tout ça [*en pointant « $tache + 79$ »*]? C'est ça, que tu dis ou c'est autre chose?
- 12 - Élève 12 :** Ou non, pour trouver quel numéro ça va faire, pour trouver là [*en pointant la tache dans « $tache + 78 = 115$ »*]. Moi, je fais toujours 115 moins 78 et ça donne ce chiffre-là [*en pointant « 107 »*]. Et ce chiffre-là, il faut que j'essaie de le faire plus 78. Il faut que je trouve un chiffre qui vait faire là [*en pointant la tache de « $tache + 78 = 115$ »*].
- 13 - Chercheuse :** Ah, tu essayé... D'accord, j'ai compris que c'était tu as fait. OK, donc, qu'est-ce que tu pourrais faire?
- 14 - Élève 12 :** Je pense je peux faire 115 plus 78. 8... 9, 10, 11, 12, 12... 263 [*l'élève pose en colonne le calcul « $78 - 115 = 675$ » et le résoud en alignant les centaines*]. 78 [*l'élève pose « $115 - 78$ », après « $78 - 115$ »*].
- 15 - Chercheuse :** Alors, c'est compliqué avec tous ces calculs, n'est-ce pas? Mais peut-être qu'on peut y arriver sans faire tous ces calculs-là. On regard un moment la tâche du début, d'accord? C'est un nombre, que là tu essayes de calculer [*en pointant les calculs de l'élève*]. Parce que quand tu fais ce calcul là, là tu essayes de calculer la tache [*en pointant « $115 - 78$ »*]. Donc, tu sais que ce nombre qu'on ne connaît pas, plus 78 est égal à 115. Et on veut essayer de comprendre si on arrive à voir combien ça fait le même nombre plus 79. Tu vois? Tu as le résultat du nombre plus 78 et recherche le nombre plus 79. Est-ce que tu aurais une idée sans calculer le nombre ici? [*En pointant la tache de « $tache + 78 = 115$ »*].

- 16 - Élève 12 : D'ici? [*En pointant la tache de « tache+79 »*].
- 17 - Chercheuse : De tout ça [*en pointant « tache+79 »*], tu vois, on ne veut pas seulement ça [*en pointant la tache*] on veut tout ça [*en pointant « tache+79 »*].
- 18 - Élève 12 : Ben là, ça fait 1 plus 78, 79.
- 19 - Chercheuse : Pourquoi 1?
- 20 - Élève 12 : Parce qu'il faut une fois pour rentrer dans 79. Si là, c'est 78, il faut ajouter encore 1 pour arriver à 79.
- 21 - Chercheuse : Est-ce qu'on peut savoir combien ça fait tout ça? [*En pointant « tache+79 »*].
- 22 - Élève 12 : Ça fait 80 parce que 1 plus 79, ça fait 80.
- 23 - Chercheuse : Mais comment tu sais que là [*en pointant la tache*], il y a 1?
- 24 - Élève 12 : Parce que on vient de sortir de 78. Et puis, ils nous donnent 79. C'est-à-dire que là il y en a 1 [*en pointant la tache de « tache+79 »*].
- 25 - Chercheuse : Mais tout ça, tu vois, tout ça [*en pointant « tache+78 »*] est égal à ça [*en pointant « 115 »*]. Tu veux y penses encore un moment ou on change de tâche?
- 26 - Élève 12 : On peut changer.
- 27 - Chercheuse : On le laisse un moment ici, si jamais t'as une idée, on revient. Regarde, là. Avant, j'ai fait ce calcul-là. J'ai calculé que 57 plus 65 me donne 122. Ma question est combien font 57 plus 66?
- 28 - Élève 12 : [*L'élève pose le calcul en colonne « 57 + 66 = 123 »*] 123.
- 29 - Chercheuse : Très bien. Mais est-ce que tu aurais pu trouver le résultat sans faire le calcul?
- 30 - Élève 12 : Non.
- 31 - Chercheuse : Pourquoi?
- 32 - Élève 12 : Parce que...
- 33 - Chercheuse : Regarde, on savait ça.
- 34 - Élève 12 : Ah oui, parce que c'est juste le dernier chiffre qui change. Là on doit mettre 3. Parce que là, c'était un 65, là c'est 66.
- 35 - Chercheuse : Et maintenant que tu as fait ça, est-ce que tu arriverais à revenir ici [*en lui donnant la feuille d'avant*]?
- 36 - Élève 12 : [*L'élève pose en colonne « 79 + 78 = 159 »*].
- 37 - Chercheuse : Ok, qu'est-ce que tu as fait?
- 38 - Élève 12 : J'ai fait 79 plus 78.
- 39 - Chercheuse : Pourquoi tu as fait ce calcul-là?
- 40 - Élève 12 : Parce que là il nous proposé 79. J'ai pensé que si je fais 79 plus 78 peut-être ça va faire le même chiffre.

- 41 - **Chercheuse** : D'accord. Tu es satisfaite de ce que tu as fait ?
- 42 - **Élève 12** : Non, ça ne me va pas parce que c'est pas le chiffre que je cherche.
- 43 - **Chercheuse** : Qu'est-ce que tu cherches ?
- 44 - **Élève 12** : Je cherche 115. Moi, j'ai trouvé 157.
- 45 - **Chercheuse** : Bon, d'accord, on revient après si jamais, d'accord ? Je peux prendre ? Tu es encore prête pour une autre tâche, ça va encore, pas trop fatiguée ?
- 46 - **Élève 12** : Non.

La tâche bleue et 123 : Élève 13

Durée de l'entretien : 9 min 11 s

- 1 - **Chercheuse** : On fait comme d'habitude, je te donne des tâches. Tu me poses des questions si tu en as, et tu me dis ce qui se passe par la tête. Là, tu as un nombre qui se cache derrière cette tâche là et on sait que le nombre caché plus 78 et égal à 50. Donc, il ne faut pas calculer le nombre caché.
- 2 - **Élève 13** : Il faut trouver le nombre caché.
- 3 - **Chercheuse** : Non, il ne faut pas calculer le nombre caché. La question est une autre. La question est combien font le nombre caché plus 79 ?
- 4 - **Élève 13** : Mais d'abord, il faut qu'on trouve le nombre de caché. Oui ?
- 5 - **Chercheuse** : Ça, c'est une possibilité.
- 6 - **Élève 13** : Parce que sinon on ne sait pas. Je peux commencer ? [Elle pose en colonne « $115 - 78 = 37$ »] C'est 37 et si on fait...
- 7 - **Chercheuse** : Alors, je peux juste te demander si tu arrives à écrire avec un stylo, c'est juste parce qu'on voit mieux.
- 8 - **Élève 13** : Ah, pas de soucis, oui j'ai. Parce que je travaille plutôt avec... Euh là, on voit bien ou je refais.
- 9 - **Chercheuse** : Ce n'est pas grave.
- 10 - **Élève 13** : En fait je fais 115 moins 78 pour arriver au résultat. Par exemple, si je fais 37 plus 78 ça va me faire 115. Et pour celle ci, pour savoir, je peux faire 37 plus 79. Il faut arriver au même résultat ?
- 11 - **Chercheuse** : A ton avis, on va arriver au même résultat ?
- 12 - **Élève 13** : Non... Non
- 13 - **Chercheuse** : A quel résultat on va arriver ?
- 14 - **Élève 13** : On va arriver à 114.
- 15 - **Chercheuse** : Comment tu sais ?
- 16 - **Élève 13** : Parce que là, on a 79 et là on a 78. Si on fait 35 plus 78, ça fait 115. Et si on fait 37, plus 79 ça fait 116. Parce que on en ajoute un.

- 17 - Chercheuse : D'accord. Mais donc là, t'as pas utilisé le nombre caché.
- 18 - Élève 13 : Si...
- 19 - Chercheuse : Comment ?
- 20 - Élève 13 : Ou ici ? J'ai utilisé. Là j'ai 37 [en l'écrivant dans la tache]. Là j'ai 37, même si on ne le voit pas. Là j'ai 37 plus 79 que ça va me faire 116.
- 21 - Chercheuse : D'accord et comment tu sais que ça fait 116 ?
- 22 - Élève 13 : Bah automatique...
- 23 - Chercheuse : C'est à dire ?
- 24 - Élève 13 : Si vous voulez, je peux calculer parce que là 37 plus 78 ça fait 115. Bah là 79, 37 plus 79, ça fait 116 là il y a 78 et là il y a 79. On en a ajouté juste un.
- 25 - Chercheuse : D'accord. Et donc, est ce qu'on aurait pu arriver à cette conclusion, sans calculer cela ?
- 26 - Élève 13 : Il faut calculer ça parce que si on a, on calcule pas ça, on arrive pas à un résultat qu'il est caché.
- 27 - Chercheuse : Bon, d'accord. Et si je te dis : un nombre caché plus 1178 égal à ça [en pointant « tache + 1178 = 5212 »].
- 28 - Élève 13 : Je vais faire pareil.
- 29 - Chercheuse : Est-ce que tu aurais une manière de le faire sans calculer le nombre caché ?
- 30 - Élève 13 : Non.
- 31 - Chercheuse : Pas possible.
- 32 - Élève 13 : En fait il faut que je fais ça addition ça, pour trouver le résultat. Sinon je n'arrive pas. Je n'ai pas de proposition. Non. Je ne peux pas donner un nombre par hasard. Il faut donner le nombre exact. Et puis faire ça addition ça que ça va me faire [inaudible] Je peux ?
- 33 - Chercheuse : Vas-y !
- 34 - Élève 13 : [Elle calcule en colonne « 5212 - 1178 = 4034 »] Ça va me faire 400....Hyn ?
- 35 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu as fait ?
- 36 - Élève 13 : Attendez, ça va me faire 4034. On peut faire 434 aussi. Est-ce qu'on peut calculer avec votre calculatrices pour avoir ces... Est-ce que c'est juste.
- 37 - Chercheuse : Oui, juste dis moi qu'est-ce que tu veux faire.
- 38 - Élève 13 : Je fais 5212 moins, 1117 [elle a des difficultés à lire le nombre]... Ah, je n'arrive pas !
- 39 - Chercheuse : 1178
- 40 - Élève 13 : Voilà, 1178. Et j'arrivais à 4034. Et là, je ne suis pas sûre si c'est 434

ou c'est 4034. Parce qu'en fait, j'ai ajouté juste un 0. C'est 4034 plus 1071... ?

41 - Chercheuse : 1178

42 - Élève 13 : 1178. Ça va arriver à 5212.

43 - Chercheuse : D'accord.

44 - Élève 13 : Et là, je ne suis pas sûr que c'est juste.

45 - Chercheuse : Bon, ça va on continue avec ça, d'accord? On assume que c'est juste.

46 - Élève 13 : Et pour arriver à ça? Je dois faire 4 34 plus [elle pose en colonne « $4034 + 1179 = 5213$ »]. Il faut arriver au même résultat que ça ou pas.

47 - Chercheuse : A ton avis, on va arriver au même résultat?

48 - Élève 13 : Hum non. On va arriver à un peu plus, je pense.

49 - Chercheuse : Combien de plus?

50 - Élève 13 : 1?

51 - Chercheuse : Ok, comment tu sais?

52 - Élève 13 : Bah parce que ce sont les mêmes sauf le 8 et 9. On en avait ajouté 1. Mais attendez. Ouais! C'est juste!

53 - Chercheuse : Qu'est ce que tu as fais?

54 - Élève 13 : J'ai fait 400 euh 4034 plus 1179, ça m'arrivait 5213. Voilà.

55 - Chercheuse : Parfait.

56 - Élève 13 : C'est juste?

57 - Chercheuse : Oui.

58 - Élève 13 : Yes!

59 - Chercheuse : Ok super regarde. Avant, j'ai fait ce calcul, j'ai fait 57 plus 65 qui donne 112 [sic] et maintenant, je me demande combien font ça.

60 - Élève 13 : 123

61 - Chercheuse : Comment tu as fait?

62 - Élève 13 : C'est facile parce que là on a la même. 57 plus 65, 122. Là 57 plus 66, on a ajouté 1, ça fait. On ajoute juste à 122 un de plus.

La tache bleue et 123 : Élève 14

Durée de l'entretien : 7 min 37 s

1 - Chercheuse : Là, il y a un nombre qui est caché derrière cette tache et on sait que le nombre caché plus 78 est égal à 115. Donc, sans calculer le nombre caché, on se demande combien font cela [en pointant « tache+79 »].

2 - Élève 14 : On ne peut pas trouver parce que... Du coup si c'est 79 et qu'on ne sait pas la réponse, on ne peut même pas faire la réponse moins 79 pour trouver ce qu'il y a en dessous de la tache.

- 3 - **Chercheuse** : D'accord, donc, tu dis qu'on ne peut pas trouver... il n'y a aucune manière de savoir.
- 4 - **Élève 14** : Au moins qu'on fasse 115 moins 78, et du coup on regarde, si ça donne 79, on sait que là [*en pointant la deuxième tache*] c'est 78.
- 5 - **Chercheuse** : D'accord, donc, comment tu ferais dans ce cas-là?
- 6 - **Élève 14** : Je vais faire 115 moins 78 [*il bouge les doigts*]. [*Il écrit « 115 – 78 = 157 »*] Ah, mais j'ai fait plus...
- 7 - **Chercheuse** : Qu'est-ce que tu avais fait, là?
- 8 - **Élève 14** : Bas, en fait là, j'ai commencé, j'ai fait 5 moins 8. Donc là, j'ai fait moins. Et après, j'ai fait plus. [*Il calcule à nouveau en colonne « 115 – 78 = 37 »*] 37... Oui, non, du coup... Mais là, du coup, je comprends pas comment trouver, puisque 37 plus 78, ça fait 115.
- 9 - **Chercheuse** : Ouais.
- 10 - **Élève 14** : Mais du coup là, ça veut dire que c'est pas 79 plus 78 qui fait 115.
- 11 - **Chercheuse** : OK, mais. Qu'est ce qu'il faut faire dans cette tâche?
- 12 - **Élève 14** : Il faut... Il faut trouver combien là [*en pointant la tache*] plus ça [*en pointant 79*], combien ça fait.
- 13 - **Chercheuse** : Ouais.
- 14 - **Élève 14** : Sauf quand on sait pas ce qu'il y a là [*en pointant la tache*] mais on ne connaît pas la réponse, donc on ne peut pas trouver ça sans la réponse.
- 15 - **Chercheuse** : D'accord. Ok. Alors effectivement, tu vois la tache cache le même nombre, d'accord? Est ce que cette information pourrait être?
- 16 - **Élève 14** : Comment elle peut m'aider?
- 17 - **Chercheuse** : C'est-à-dire qu'ici-derrière et ici-derrière, il y a le même nombre.
- 18 - **Élève 14** : Ah!
- 19 - **Chercheuse** : Pourquoi t'as fait ça [*en pointant le calcul en colonne « 115 – 78 = 37 »*] ?
- 20 - **Élève 14** : Parce que là, j'ai fait 115 moins 78 pour trouver justement ce qu'il y avait derrière la tache, pour trouver combien 78 plus combien ça faisait 115 et j'ai trouvé 37. Oui, ça devrait dire que ça ferait 37 plus 79, du coup ça ferait 116.
- 21 - **Chercheuse** : Comment t'as calculé?
- 22 - **Élève 14** : Vous m'avez dit qu'ici à la même place, c'est le même chiffre. Vu que là 37, j'ai mis 37 et 37 plus 78, ça fait 115 et 79 c'est un chiffre plus haut que 78, du coup j'ai fait 115 plus 1.
- 23 - **Chercheuse** : Et donc, est-ce que tu arriverais à résoudre cette tâche, cet exercice, mais sans trouver les 37?

- 24 - Élève 14 : Je ne vois pas comment. Non, je ne vois pas comment je pourrais faire sans trouver le 37.
- 25 - Chercheuse : Ok, alors regarde ici [*en lui donnant la tâche « 57+65 »*]. Avant, j'ai fait ce calcul. J'ai trouvé que 57 plus 65, est égale à 112. Pardon, 122, j'a mal lu. Alors, combien font ça? [*en pointant 57+66*]
- 26 - Élève 14 : Ça fait 123.
- 27 - Chercheuse : Comment t'as fait?
- 28 - Élève 14 : Ba, il faut faire le même calcul, et après j'ai juste rajouté 1 puisque c'est 1 plus haut. Du coup 57 plus 65, ça fait 122, du coup j'ai fait à nouveau 57 plus 65. Ça fait 122 et j'ai rajouté le 1 qui manque là et ça fait 123.
- 29 - Chercheuse : D'accord, très bien. Est-ce que cela te donne une idée pour cela [*en pointant la tâche de la « tache bleue »*], cette tâche ici, sans calculer la valeur de ce nombre derrière.
- 30 - Élève 14 : Je ne vois pas parce que du coup, là [*en pointant « 57 + 65 »*] de toute façon on connaît au moins les deux premiers chiffres, donc ça marche. Mais là [*en pointant « tache+79 »*], vu qu'on connaît qu'un seul chiffre, et qu'on connaît pas le chiffre non plus [*en pointant « tache + 78 »*]. Je ne comprends pas comment on pourrait faire en trouvant... Fin, trouver la réponse-là [*en pointant « tache+79 »*] sans déjà trouver ce qui est sous la tache là [*en pointant « tache+78 »*] et en sachant que c'est la même là [*en pointant « tache+79 »*], je ne comprends pas.
- 31 - Chercheuse : Oui, merci pour ton explication.

La tache bleue et 123 : Élève 15

Durée de l'entretien : 7 min 15 s

- 1 - Élève 15 : L'élève 5 m'a dit que c'était un peu compliqué.
- 2 - Chercheuse : Ah, elle t'a dit comme ça?!
- 3 - Élève 15 : On se dit tout le temps si c'est un peu compliqué ou pas.
- 4 - Chercheuse : Alors, la première fois, c'était compliqué?
- 5 - Élève 15 : Ça va.
- 6 - Chercheuse : La deuxième?
- 7 - Élève 15 : Pour moi c'était un peu dur. Tellement de questions... Tellement de questions inexplicables!
- 8 - Chercheuse : Écoute, à la fin de cette séance, tu me diras si l'élève 5 avait raison ou pas. On fait comme d'habitude. Je te donne une tâche, tu me poses des questions si ce n'est pas clair. Et tu me racontes un peu comment tu raisones.
- 9 - Élève 15 : Demain ça va être la dernière fois?

- 10 - **Chercheuse** : Demain c'est la dernière fois, exactement. On sera dans l'autre salle.
- 11 - **Élève 15** : Chaque fois [*inaudible*].
- 12 - **Chercheuse** : Voilà, parce que le lundi ce n'est pas disponible, cette salle. Regarde, un nombre se cache derrière la tache. Et on sait que cela [*en pointant « tache+78 »*] est égal à 115. C'est clair jusqu'ici?
- 13 - **Élève 15** : Mh-mh.
- 14 - **Chercheuse** : Donc sans calculer le nombre caché, donc le nombre qu'il y a derrière la tâche, on se demande combien font ça [*en pointant « tache+79 »*].
- 15 - **Élève 15** : Je n'ai pas compris. J'ai pas compris celle là [*en pointant « tache+79 »*].
- 16 - **Chercheuse** : Quoi? La dernière ligne?
- 17 - **Élève 15** : Cette question-là [*en pointant la dernière ligne*].
- 18 - **Chercheuse** : Jusqu'ici c'était clair [*en pointant les deux premières lignes*]. Cette phrase est claire?
- 19 - **Élève 15** : Pas trop.
- 20 - **Chercheuse** : Alors, tu vois, ici derrière il y a un certain nombre [*en pointant « tache+78 »*]. On ne veut pas, on ne peut pas le calculer. Donc, il ne faut pas calculer le nombre qu'il y a ici [*en pointant la première tache*]. C'est une consigne de la tâche. Je te demande pas calculer le nombre.
- 21 - **Élève 15** : On pourrait faire 78 divisé par 115.
- 22 - **Chercheuse** : Pourquoi divisé?
- 23 - **Élève 15** : Parce que ça nous donne le résultat qu'il y a... Ça me donne le nombre qui est dans la tache-là. Mais s'il ne faut pas faire ça, ba...
- 24 - **Chercheuse** : On va essayer d'une autre manière, d'accord?
- 25 - **Élève 15** : Mais là, si on ne sait pas le résultat, c'est un peu impossible.
- 26 - **Chercheuse** : Pourquoi tu dis que c'est impossible?
- 27 - **Élève 15** : Parce que si on n'a pas le résultat, on ne peut pas savoir le chiffre, mais on pourrait mettre n'importe quel chiffre et après faire n'importe... Calculer.
- 28 - **Chercheuse** : Qu'est-ce que tu ferais? Tu me montres?
- 29 - **Élève 15** : Si j'aurais pas de résultat, je mettrais n'importe quel chiffre.
- 30 - **Chercheuse** : Mais comment? Tiens, t'as un stylo ici.
- 31 - **Élève 15** : Je choiserais un chiffre et je mettrais un chiffre au bol.
- 32 - **Chercheuse** : Et après? Comment...
- 33 - **Chercheuse** : Et après je calcule.
- 34 - **Chercheuse** : Ok, montre-moi,.
- 35 - **Élève 15** : Je sais pas. Si je fais ça [*en écrivant « 50 + 79 »*], par exemple... 129.

Après, je sais pas... Ça doit donner le même résultat qu'il y a là [en pointant « 115 »]?

36 - Chercheuse : Non, alors, regarde. Le nombre qu'il y a ici derrière...

37 - Élève 15 : C'est le même.

38 - Chercheuse : C'est le même.

39 - Élève 15 : Ah, d'accord. Alors, pour savoir ça, il faut faire 78 divisé par 115. On peut faire ça à la calculatrice?

40 - Chercheuse : Oui.

41 - Élève 15 : Si c'est possible.

42 - Chercheuse : Oui, c'est possible, je la prends. 78 divisé par...?

43 - Élève 15 : 115.

44 - Chercheuse : Voilà, c'est ça [en montrant le résultat à l'élève].

45 - Élève 15 : 0 virgule... Comment faire ça?

46 - Chercheuse : 6, 7, 8, 2, etc.

47 - Élève 15 : Ah, non, c'est à l'envers. 115... Je crois. Je crois que c'est 115 divisé par 78, sinon c'est pas possible.

48 - Chercheuse : Ça donne 1,4743 etc.

49 - Élève 15 : C'est pas possible.

50 - Chercheuse : Qu'est ce que t'as fait avec ce calcul-là?

51 - Élève 15 : Je ne sais pas, j'ai juste mis un peu le résultat... Je comprends pas.

52 - Chercheuse : Mais qu'est ce que tu voulais obtenir avec ces calculs?

53 - Élève 15 : Le résultat qui est là [en pointant la tache].

54 - Chercheuse : D'accord, derrière la tache.

55 - Élève 15 : Oui. Sinon, on peut calculer tout simplement en faisant 78 et en faisant ce qui manque pour arriver à 115. 37.

56 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu as fait?

57 - Élève 15 : J'ai fait 80, plus ce qui manque pour arriver à 100. Ça fait 20. Et j'ai rajouté pour arriver à 80 parce qu'on était à 78, alors pour arriver à 80. Et après, j'ai fait plus 15, alors 22 plus 15.

58 - Chercheuse : Ok.

59 - Élève 15 : On peut essayer de faire le calcul.

60 - Chercheuse : Et donc, pour répondre à la question? Cette question-là [en pointant « tache+79 »]?

61 - Élève 15 : Ba c'est 37 [elle calcule en colonne « 37 + 79 »]... 116. En fait c'était facile sans calculer parce qu'on pouvait faire le résultat qui donne plus 1, là [en pointant la tache] c'est le même chiffre et là [en pointant « 79 » et « 78 »], c'est juste un chiffre de [inaudible].

La tache bleue et 123 : Élève 16

Durée de l'entretien : 56 s

- 1 - **Chercheuse** : On fait comme les dernières fois. Je te donne la tâche, s'il y a quelque chose que tu ne comprends pas, tu me demandes. Tu peux écrire, tu m'expliques. Tu me racontes un peu comment tu penses, comment tu raisones. Voilà, il y a un nombre qui se cache derrière cette tache-là. Et on sait que ça [*en pointant la tache*] plus 78 est égal à 115. Donc, sans calculer le nombre caché, donc sans calculer le nombre qui est derrière, on se demande combien font cela [*en pointant « tache+79 »*].
- 2 - **Élève 16** : Et du coup, ici et là [*en pointant les deux taches*], c'est toujours le même nombre.
- 3 - **Chercheuse** : Exactement.
- 4 - **Élève 16** : Ok. Ça fait 116.
- 5 - **Chercheuse** : D'accord, qu'est-ce que tu as fait ?
- 6 - **Élève 16** : 78 plus 1 ça fait 79, et du coup on rajoute 1 à la réponse finale.

La tache bleue et 123 : Élève 17

Durée de l'entretien : 1 min 21 s

- 1 - **Chercheuse** : Première tâche; un nombre se cache derrière la tâche bleue et on sait cela. D'accord, il ne faut pas calculer le nombre
- 2 - **Élève 17** : Je n'ai pas le droit de calculer...
- 3 - **Chercheuse** : Voilà exactement.
- 4 - **Élève 17** : Combien ça fait ?
- 5 - **Chercheuse** : Oui la question est combien ça fait ça. (La chercheuse montre le deuxième calcul comportant une tâche sous laquelle se cache un nombre.)
- 6 - **Élève 17** : Sans calculer ?
- 7 - **Chercheuse** : Sans calculer le nombre qu'il y a derrière.
- 8 - **Élève 17** : Alors ça ! Je ne sais vraiment pas...
- 9 - **Chercheuse** : Donc si tu avais le droit de calculer le nombre
- 10 - **Élève 17** : Bah j'aurais fait 115 moins 78, ça m'aurait donné un truc. Et ce truc plus 79 ça m'aurait donné la réponse.
- 11 - **Chercheuse** : D'accord.
- 12 - **Élève 17** : Mais du coup... Ah bah ça fait 116.
- 13 - **Chercheuse** : Qu'est ce que tu as fait ?
- 14 - **Élève 17** : C'est juste que j'étais bloquée parce que je ne voyais vraiment pas comment faire. Mais en fait ça fait 1 de plus, parce que là, c'est un de plus. Donc

ça va faire 116.

La tache bleue et 123 : Élève 18

Durée de l'entretien : 1 min 51 s

- 1 - **Chercheuse** : Un nombre est caché par cette tache. Et on sait que le nombre caché plus 78 est égal à 115. Donc il ne faut pas calculer le nombre caché. Et alors on se demande combien font ça? [*La chercheuse pointe sur la feuille le calcul suivant : « tache + 79 = ? »*]
- 2 - **Élève 18** : Donc je ne peux pas faire de calculs. Je ne peux pas, par exemple, savoir. Par exemple, je ne pourrais pas faire 115 au moins 78 pour savoir combien ça fait.
- 3 - **Chercheuse** : Ouais exactement. La question est : est-ce que t'as une autre manière?
- 4 - **Élève 18** : Bah, il n'y a pas besoin de connaître le nombre, on fait juste plus 1 parce que si le nombre reste le même, on sait que le résultat, ça fait 116 parce que c'est juste bah 78 plus 1. Il n'y a pas besoin de connaître celui-là.
- 5 - **Chercheuse** : D'accord. Oui parfait donc, pour donner une réponse numérique.
- 6 - **Élève 18** : La réponse, c'est 116.
- 7 - **Chercheuse** : Très bien. Merci, je peux le reprendre [*en parlant de la feuille de consigne*]?

La tache bleue et 123 : Élève 21

Durée de l'entretien : 3 min 48 s

- 1 - **Chercheuse** : On commence?
- 2 - **Élève 21** : Mh mh.
- 3 - **Chercheuse** : Alors, il y a un nombre qui est caché par cette tache [*en pointant la première tache*]. Là derrière il y a un nombre. Et on sait que ce nombre plus 78...
- 4 - **Élève 21** : Oui.
- 5 - **Chercheuse** : Est égal à 115.
- 6 - **Élève 21** : Mh mh.
- 7 - **Chercheuse** : Et donc, sans calculer le nombre caché...
- 8 - **Élève 21** : Oui.
- 9 - **Chercheuse** : On se demande combien font cela [*en pointant « tache + 79 »*].
- 10 - **Élève 21** : Du coup on ne doit pas réfléchir à qu'est ce que c'est, ça [*en pointant la première tache*] ? Puis directement trouver ça [*en pointant la deuxième tache*] ?

- 11 - Chercheuse : Tout cela. Tout ensemble, d'accord?
- 12 - Élève 21 : Fin, moi je sais comment faire pour trouver 115, mais là [*en pointant « tache+79 »*] je ne sais pas ce qu'on doit chercher pour arriver à un résultat qu'on connaît pas.
- 13 - Chercheuse : D'accord. Alors, on sait que derrière la tache, il y a le même nombre.
- 14 - Élève 21 : Ah, oui.
- 15 - Chercheuse : D'accord?
- 16 - Élève 21 : Oui, d'accord. Du coup, il faut juste trouver ce nombre [*en pointant la première tache*] pour avoir ce nombre-là [*en pointant la deuxième tache*], pour avoir la réponse [*en pointant à droite de « tache+79 »*].
- 17 - Chercheuse : Comment tu ferais dans ce cas-là?
- 18 - Élève 21 : En fait, 115 moins 78.
- 19 - Chercheuse : D'accord. C'est comme toujours. Si tu veux que je fasse des calculs, ça suffit que tu me dises.
- 20 - Élève 21 : Oui. J'essaie de faire de tête, ce n'est pas trop compliqué.
- 21 - Chercheuse : D'accord.
- 22 - Élève 21 : Alors [*elle essaye de calculer de tête*]. Je prend la calculatrice comme ça c'est plus rapide. Du coup ça fait 37. Du coup, là, sous la tache c'est marqué 37 [*elle écrit « 37 » à côté de la première tache*].
- 23 - Chercheuse : Mh mh.
- 24 - Élève 21 : Du coup là c'est 37 aussi [*elle écrit « 37 » en dessous de la deuxième tache*]. Alors du coup, là si on fait, du coup ça fait plus 79. Du coup, ça fait 116 [*elle écrit « +79 = 116 »*].
- 25 - Chercheuse : Oui.
- 26 - Élève 21 : Calcul final.
- 27 - Chercheuse : Oui. Très bien. Donc pour faire cela, tu es passée par la valeur de la tache, par la valeur du nombre qu'il y a derrière la tache.
- 28 - Élève 21 : Oui.
- 29 - Chercheuse : Est-ce que tu arriverais à retrouver une manière pour trouver cela [*en entourant « tache+79 »*], comme tu viens de le faire, mais sans passer par la valeur de la tache?
- 30 - Élève 21 : Sans essayer de trouver le calcul-là [*en pointant la première tache*]?
- 31 - Chercheuse : Oui.
- 32 - Élève 21 : Si on dit que 79 et 78, il y a juste 1 de différence.
- 33 - Chercheuse : Mh mh.
- 34 - Élève 21 : Du coup, si on dit que là [*en pointant les 2 taches*] c'est le même

nombre, mais en fait, il y en aura juste 1 de plus [en pointant « tache+79 »] vu que là c'est 79.

35 - Chercheuse : Oui. Très bien. Je peux prendre ?

36 - Élève 21 : Oui.

La tache bleue et 123 : Élève 22

Durée de l'entretien : 8 min 50 s

1 - Chercheuse : Ok, c'est parti. Je vais te donner des tâches, je te demande de m'expliquer ce qui te passe par la tête. Tu peux écrire si tu veux, tu as besoin d'un stylo ?

2 - Élève 22 : Merci.

3 - Chercheuse : Et s'il y a quelque chose qui n'est pas clair, tu peux me demander. Si

4 - Élève 22 : Mh mh. Ok.

5 - Chercheuse : Regarde. Un nombre est caché par cette tache-là [en pointant la première tache]. Derrière, il y a un nombre.

6 - Élève 22 : Mh mh.

7 - Chercheuse : Et on sait que le nombre caché plus 78 est égal à 115. Ok ? Il ne faut pas calculer le nombre caché.

8 - Élève 22 : Ça il ne faut pas le calculer [en pointant la première tache].

9 - Chercheuse : Exactement. Mais on voudrait comprendre combien font le nombre caché plus 79.

10 - Élève 22 : Moi, j'aurais déjà fait 115 moins 78.

11 - Chercheuse : D'accord.

12 - Élève 22 : Normalement ça donne le résultat [elle pose « $115 - 78 =$ »]. Et après, je calcule 78 [en pointant la deuxième tache] plus 79.

13 - Chercheuse : Tu calcules quoi, pardon ?

14 - Élève 22 : 78... Non. Du coup, le résultat qui aura ici [en pointant le vide à droite de « $115 - 78 =$ »], je vais faire plus 79. Et après il y aura le résultat.

15 - Chercheuse : D'accord. Et est-ce que tu arriverais à le faire, donc ?

16 - Élève 22 : Oui.

17 - Chercheuse : Si tu as besoin d'une calculatrice, moi je l'ai sur l'ordinateur. Tu dois juste me dire quoi je dois calculer.

18 - Élève 22 : 115...

19 - Chercheuse : Oui.

20 - Élève 22 : Moins 78.

21 - Chercheuse : Regarde [la chercheuse lui montre la calculatrice « $115 - 78 = 37$ »].

- 22 - Élève 22 : Ok. Du coup, 37. Là je fait du coup 79 plus 37. Et ça fait 121, je crois.
- 23 - Chercheuse : Comment tu as fait ?
- 24 - Élève 22 : J'ai fait 79 plus 37. 121. Ça fait 121, non ? Non ? ! Attendez !
- 25 - Chercheuse : Fais-le en colonne, peut-être.
- 26 - Élève 22 : Alors 117. Oui, 117.
- 27 - Chercheuse : Comment tu as fait ?
- 28 - Élève 22 : 70 plus 30, ça fait 100. Ensuite j'ai fait plus 9 et plus 7, du coup 117.
- 29 - Chercheuse : Ça fait 100 plus 9, ça fait combien ?
- 30 - Élève 22 : 100 plus 9 ?
- 31 - Chercheuse : Oui.
- 32 - Élève 22 : 109.
- 33 - Chercheuse : Plus 7 ?
- 34 - Élève 22 : 117.
- 35 - Chercheuse : Non.
- 36 - Élève 22 : Alors 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116... 116 [elle écrit « $79 + 37 = 116$ »] !
- 37 - Chercheuse : Ok, super ! Donc, est-ce que tu peux me résumer ce que tu fait, là [en pointant les 2 calculs écrits par l'élève] ?
- 38 - Élève 22 : Alors, là j'ai fait 115 moins 78 pour trouver le nombre caché, là [en pointant la première tache]. Et du coup, pour savoir plus combien ça fait 115. Et du coup, le nombre qui était caché, je l'ai mis ici [en pointant la deuxième tache] et j'ai fais... Juste calculé ensemble après.
- 39 - Chercheuse : D'accord, donc, tu l'as calculé le nombre caché ?
- 40 - Élève 22 : Mh mh.
- 41 - Chercheuse : Oui, très bien. C'est juste ce que tu as fait. Donc, ma question maintenant est-ce que tu arriverait à trouver la solution, c'est-à-dire combien font ça [en pointant « tache+79 »], mais sans calculer le nombre caché.
- 42 - Élève 22 : Mais ça veut dire que là [en pointant la deuxième tache] je pourrais mettre n'importe quoi, non ? Parce qu'il n'y a pas de résultat.
- 43 - Chercheuse : Oui, c'est vrai. Mais derrière ces tâches [en pointant les deux taches], il y a toujours la même chose. Le nombre ici, derrière, c'est toujours le même.
- 44 - Élève 22 : Oui, mais du coup, s'il n'y a pas de résultat, je fais comment ? Parce que s'il n'y a pas de résultat, je peux donner... Je pourrais mettre un nombre... Ah mais non. Mais si en fait. Ça dépend si c'est toujours en rapport avec le premier. Le premier truc ici [en pointant « tache+78 = 115 »].
- 45 - Chercheuse : Disons que ce qu'il y a ici, c'est la même chose de ce qu'il y a ici

[*en pointant les 2 taches*].

46 - Élève 22 : Oui, ça je sais. Mais est-ce que le résultat doit toujours faire 115?

47 - Chercheuse : Pas forcément. Ça pourrait être mais... Si c'est 115, tu dois m'expliquer pourquoi.

48 - Élève 22 : Mais là [*en pointant la première tache*] vu que je connais déjà le nombre d'ici [*en pointant la deuxième tache*] qui fait 37...

49 - Chercheuse : Oui... Mais là théoriquement on ne devrait pas le savoir.

50 - Élève 22 : Oui, justement.

51 - Chercheuse : Parce qu'on cherche une technique, une procédure sans calculer le nombre caché.

52 - Élève 22 : Franchement j'aurais mis un nombre au bol, là. Parce que je ne sais pas comment faire. Donc voilà.

53 - Chercheuse : Alors peut-être je te pose une autre question. Ça va?

54 - Élève 22 : Mh mh.

55 - Chercheuse : Regarde. Alors avant, j'ai pris ma calculette et j'ai trouvé que 57 plus 65 donne 122. Et je te demande combien font ça [*en pointant « 57 + 66 »*].

56 - Élève 22 : Ça fait 123.

57 - Chercheuse : Comment tu sais?

58 - Élève 22 : Parce que là on a 65 et là on 66. Il y a juste plus 1. Du coup 123.

59 - Chercheuse : Et alors, ici [*en lui montrant la fiche de la tache*].

60 - Élève 22 : Ah, mais c'est pareil! Attendez!

61 - Chercheuse : Prends tout le temps que tu veux.

62 - Élève 22 : En fait, là c'est pareil, sauf qu'ici [*en pointant la fiche 123*], le nombre il n'est pas caché. Mais du coup, vu que le nombre n'est pas caché, on a donné le résultat ici [*en pointant « 57 + 66 »*]. Et ici [*en pointant la fiche de la tache*] déjà, on ne peut pas calculer puisqu'une il faut pas calculer, je ne sais pas. Et... je ne sais comment faire.

63 - Chercheuse : La question est toujours, combien font ça [*en pointant « tache+79 »*].

64 - Élève 22 : Mh mh.

65 - Chercheuse : Ici comment tu as fait [*en pointant la fiche 123*]?

66 - Élève 22 : Juste rajouté plus 1. Mais là [*en pointant la fiche de la tache bleue*], je ne peux pas rajouter juste 1.

67 - Chercheuse : Pourquoi?

68 - Élève 22 : Parce que je connais pas le nombre qu'il y a derrière.

69 - Chercheuse : Mais à quoi tu as rajouté 1, ici?

70 - Élève 22 : Dans le résultat final.

71 - Chercheuse : Mh mh.

72 - Élève 22 : Du coup là sera déjà 116 le résultat final... Ah ba, oui [*elle écrit « 116 » à droite de « tache+79 »*]. Du coup je ferais 116 moins 79. Et là ça donne le résultat.

73 - Chercheuse : Ça donne quoi?

74 - Élève 22 : Le nombre caché.

75 - Chercheuse : Oui, mais la question n'est pas de calculer le nombre caché. La question est de calculer ça [*en pointant « tache+79 »*]. Et tu l'as fait.

76 - Élève 22 : Ah.

77 - Chercheuse : C'était 116.

78 - Élève 22 : Bon...

79 - Chercheuse : Mais tu as compris pourquoi tu as écrit 116, là?

80 - Élève 22 : Oui.

81 - Chercheuse : Pourquoi?

82 - Élève 22 : Parce que j'ai rajouté plus 1.

83 - Chercheuse : À quoi?

84 - Élève 22 : Au résultat final [*en pointant « 115 »*].

85 - Chercheuse : Et pourquoi tu as rajouté 1?

86 - Élève 22 : Parce que ici c'est 78 et ici c'est 79.

87 - Chercheuse : Oui.

88 - Élève 22 : Du coup bas, ce sera juste plus 1.

89 - Chercheuse : Oui.

90 - Élève 22 : C'est pareil qu'ici [*en pointant la fiche 123*].

91 - Chercheuse : Voilà, parce que ici, derrière, c'est la même chose [*en pointant les 2 taches*]. En fait, ce n'est pas important, ce qui y a ici derrière, tu es d'accord?

92 - Élève 22 : Oui.

93 - Chercheuse : Il pourrait y avoir n'importe quoi, mais du moment que c'est la même chose [*en pointant les 2 taches*]... Et si on ajoute 1 [*en pointant « 78 » et « 79 »*]... On doit aussi l'ajouter ici [*en pointant « 115 » et « 116 »*]. Tu es d'accord? pourquoi tu rigoles?

94 - Élève 22 : Non, je sais pas, c'est bizarre en vrai.

95 - Chercheuse : C'est bizarre?

96 - Élève 22 : Oui.

97 - Chercheuse : Qu'est-ce que c'est... Bizarre... Qu'est-ce que c'est?

98 - Élève 22 : Parce que si j'aurais pas fait ça [*en pointant la fiche 123*], j'aurais pas pu trouver ici [*en pointant la fiche de la tache*].

99 - Chercheuse : Mais c'est pour ça, tu vois, que j'essaye de travailler avec toi, avec

vous, avec les élèves en général. Pour trouver aussi des tâches qui marchent. Trouver après un ordre des tâches qui marche, ce type de choses. Comprendre un peu comment enseigner. Ça joue?

100 - Élève 22 : Oui.

D.2 La suite de carrés

La suite de carrés : Élève 1

Durée de l'entretien : 15 min 14 s

1 - **Chercheuse** : Merci d'être là. Je m'appelle Francesca et mon travail est de rendre les maths un peu plus faciles, donc de trouver des manières pour rendre les mathématiques un peu moins difficiles. De les enseigner de manière un peu plus simple. Donc, je suis ici aujourd'hui pour travailler un peu avec toi, pour voir... trouver une manière pour aider d'autres élèves. Est-ce que ça va?

2 - **Élève 1** : Oui.

3 - **Chercheuse** : Tu as quelques questions?

4 - **Élève 1** : Non.

5 - **Chercheuse** : On peut commencer?

6 - **Élève 1** : Oui.

7 - **Chercheuse** : Ok. Alors je te demande de... Je te donne une tâche. Tu peux écrire si tu veux, si tu as envie, tu as des feuilles. T'es pas obligé, c'est comme tu veux, d'accord? Si tu as envie, tu m'expliques juste à l'orale ce que tu es en train de faire. Et je te demande de penser à voix haute, c'est-à-dire de me dire tout ce que tu penses. Ok?

8 - **Élève 1** : Oui.

9 - **Chercheuse** : Regarde, regarde les photos. Là, tu a les 3 premières étapes d'une suite de carrés. Ça, c'est la première étape. La deuxième, la troisième. Tu vois, à chaque fois, on rajoute un carré. Et la première question est combien de pailles on a utilisé pour la première étape?

10 - **Élève 1** : 4.

11 - **Chercheuse** : D'accord et pour la troisième?

12 - **Élève 1** : 7.

13 - **Chercheuse** : Comment tu as fait?

14 - **Élève 1** : Parce que il y a déjà un carré. Et il n'y a pas de... Ils ont fait 2 carrés collés.

- 15 - Chercheuse : D'accord.
- 16 - Élève 1 : Il n'ont pas fait 2 détachés. On utilise déjà une surface du coup on n'a pas besoin du coup d'en refaire une.
- 17 - Chercheuse : D'accord. Et donc, pour la troisième étape?
- 18 - Élève 1 : (inaudible) 10. Du coup, j'ai fait le calcul du deuxième et j'en ai rajouté 3.
- 19 - Chercheuse : D'accord. Et donc, si je te demande pour faire 7 carrés.
- 20 - Élève 1 : 7 carrés?
- 21 - Chercheuse : Oui. Combien de pailles?
- 22 - Élève 1 : Pour 7, il en faudra 23.
- 23 - Chercheuse : Comment tu as fait?
- 24 - Élève 1 : J'ai pris la troisième étape qui en faisait 10, je l'ai doublé. J'en ai rajouté 3 pour faire le septième carré.
- 25 - Chercheuse : D'accord. Est-ce que tu veux essayer si ça marche? Contrôler peut-être avec un dessin.
- 26 - Élève 1 : Oui. [*L'élève dessine les 7 carrés et compte les pailles*] 22.
- 27 - Chercheuse : 22. Qu'est-ce que tu avais dit avant déjà?
- 28 - Élève 1 : Euh 22 je crois.
- 29 - Chercheuse : Oui, donc, d'accord. Alors si t'avais 8 carrés? Combien de pailles?
- 30 - Élève 1 : Du coup pour 8 carrés ça en fait 6.
- 31 - Chercheuse : Je n'ai pas compris.
- 32 - Élève 1 : Ah non 5. Ça fait du coup 25.
- 33 - Chercheuse : 25, pourquoi?
- 34 - Élève 1 : Du coup, j'ai pris du coup les 7 qui fait 22. J'en ai rajouté 3. Du coup ça fait 25.
- 35 - Chercheuse : Et donc, pour trouver, par exemple 12? Qu'est-ce que tu ferais?
- 36 - Élève 1 : Pour trouver 12, ça va me prendre un peu plus de temps.
- 37 - Chercheuse : Tu peux prendre tout le temps que tu veux.
- 38 - Élève 1 : Ça en prend 37.
- 39 - Chercheuse : Comment tu as fait?
- 40 - Élève 1 : J'ai compté du coup le nombre de pailles, qu'il aurait fallu pour faire 4 supplémentaires. Et du coup, j'ai combiné ce chiffre du coup avec les 8.
- 41 - Chercheuse : Donc 8, c'était 25?
- 42 - Élève 1 : Oui.
- 43 - Chercheuse : Oui.
- 44 - Élève 1 : Du coup, ça fait du coup, plus 12 ça fait 37.
- 45 - Chercheuse : Okay. Donc 25 plus 12, 37 et les 12, d'où tu les a pris?

- 46 - Élève 1 : Du coup vu qu'on ne veut pas (inaudible) on prends 3. Et vu qu'il fallait 4 pour aller jusqu'à 12 carrés. Du coup, 3 plus 3, ça fait 6 et du coup, plus 3 encore, ça fait 9 et plus 3 encore, ça fait 12.
- 47 - Chercheuse : D'accord, je comprends. D'accord, okay. D'accord. Donc, tu as rajouté le 3 4 fois à partir de 8.
- 48 - Élève 1 : J'ai pas vraiment fait ça. J'ai fait plus 3 jusqu'à aller à 6. Après, j'ai doublé vu que c'était un nombre pair.
- 49 - Chercheuse : Je vois bien d'accord, ok, très bien. Et donc, alors si je te demande combien de pailles pour 30 carrés?
- 50 - Élève 1 : 30?
- 51 - Chercheuse : Oui.
- 52 - Élève 1 : Là on était à 12.
- 53 - Chercheuse : Là on était à 12, oui.
- 54 - Élève 1 : 30. Je peux écrire?
- 55 - Chercheuse : Tu peux faire tout ce que tu veux. Même si tu veux une autre feuille, tu peux la prendre.
- 56 - Élève 1 : [*L'élève pose en colonne « $37+37=74$ »*].
- 57 - Chercheuse : Si tu veux, je peux faire des calculs pour toi, j'ai une calculette. Si tu veux, je peux l'utiliser si tu préfères.
- 58 - Élève 1 : (inaudible) Passer de 12 à 50 ça fait un peu...
- 59 - Chercheuse : Ça suffit que tu me dis quoi faire. Je te dis combien ça fait. Qu'est-ce que tu veux faire alors?
- 60 - Élève 1 : Du coup, je prends du coup les 12. Et je vois du coup jusqu'à où je peux en mettre. Et après, du coup, ce qui reste du je le comble en comptant dans ma tête.
- 61 - Chercheuse : D'accord, ok, alors quel calcul je peux faire?
- 62 - Élève 1 : Du coup, ça serait 37 plus 37 plus 37 plus 37, il me semble encore, ça fait 48 plus, du coup 6. Du coup, pour les 2 carrés qui restent.
- 63 - Chercheuse : D'accord. Alors là, j'ai fais 37 plus 37 plus 37 plus 37. Oui, d'accord, ça, ça donne 148.
- 64 - Élève 1 : Oui.
- 65 - Chercheuse : Si tu veux le noter quelque part, je ne sais pas. Donc jusqu'à là, qu'est-ce que t'as fait? Expliques moi, un moment. Quel est ton raisonnement?
- 66 - Élève 1 : J'ai pris du coup les 12. Je les ai multipliés du coup pour arriver du coup au chiffre le plus proche de 50 c'était 48. J'ai rajouté du coup les pailles qui restaient pour en faire du coup 50.
- 67 - Chercheuse : Donc, à 148. il faut rajouter encore 3? N'est-ce pas?

- 68 - Élève 1 : Pour arriver à 148 il faut en rajouter 6.
- 69 - Chercheuse : 6, pardon, oui. Ça donne 154. 154.
- 70 - Élève 1 : [*L'élève écrit « 154 (50 carrés) » sur sa feuille*].
- 71 - Chercheuse : Donc, si maintenant je te demande par exemple pour 100, qu'est-ce que tu ferais ?
- 72 - Élève 1 : Je prendrais du coup la somme du coup utilisée pour les 50 carrés, je la doublerais, ce qui ferait du coup 308.
- 73 - Chercheuse : D'accord. OK, je vois bien. Je reprends un moment ton raisonnement, on le regarde ensemble. Là [*en indiquant le calcul en colonne « 37+37=74 »*], t'as dit, il faut faire 37 plus 37, etc. Non ? Parce que tu prends 12 carrés et puis tu en rajoutes d'autres 12. Mais essaie si cette manière de faire marche, par exemple entre la suite de 2 carrés et 4. C'est-à-dire, combien de pailles sont nécessaires pour le faire 2 carrés ?
- 74 - Élève 1 : Bah pour en faire 2, il en faudrait 7.
- 75 - Chercheuse : Oui, très bien. Donc, si tu veux l'écrire, je ne sais pas si cela t'aide, pour 2 carré il faut 7 pailles. A partir de 2 carrés, combien trouver les pailles pour 4 carrés ?
- 76 - Élève 1 : (inaudible) Non, pas 14, il en faudrait 13.
- 77 - Chercheuse : Pourquoi ?
- 78 - Élève 1 : Parce que là, j'ai calculé, avec un carré complet plus, du coup, les 3 pailles. Du coup si on veut faire en longueur, il en faudrait plus plutôt 13 du coup.
- 79 - Chercheuse : Et donc, comment tu as changé le 14 ?
- 80 - Élève 1 : J'ai changé le 14, du coup moins 1. parce que du coup, on retire une paille [*en indiquant la dernière paille verticale du dessin des 3 carrés*]. Et du coup, 6 plus 7 ça fait 13.
- 81 - Chercheuse : Donc, après avoir fait ce raisonnement, est-ce que tu es encore convaincu qu'il faut toujours faire 37 plus 37 plus 37 ?
- 82 - Élève 1 : Non. On peut aussi prendre, du coup, le 12 est retiré 2 carrés, du coup compter la dizaine. Du coup, pour aller jusqu'à 50, 200.
- 83 - Chercheuse : Ok, donc comment ?
- 84 - Élève 1 : Du coup, 37 moins 6 du coup, ça ferait 31 pailles du coup pour 10 carrés. Comme ça, je pourrais aller jusqu'au chiffre que je voudrait, ce sera plus simple.
- 85 - Chercheuse : Par exemple, pour aller jusqu'à 50. Comment tu ferais ?
- 86 - Élève 1 : Du coup, ça sera du coup 31 fois 5. Pour aller jusqu'à 50.
- 87 - Chercheuse : D'accord, oui, et de cette manière là, tu te rappelles... Avant, tu

m'as dit que si tu prends 2 carrés pour aller à 4, il faut enlever une paille.

- 88 - Élève 1 :** Oui, il faut pas en enlever 1, du coup pour faire 1 carré il en faut 4. Et du coup, pour en faire 2 il en faudra du coup que 3 vu qu'il y a déjà [*en indiquant la deuxième paille verticale du dessin des 2 carrés*] une face. Et du coup, si on fait en longueur, du coup, ça fera la même chose.
- 89 - Chercheuse :** Oui, d'accord. Et cette chose est vraie aussi pour les 10 carrés, les 50 carrés?
- 90 - Élève 1 :** Oui, si on fait en longueur. Pas si on fait par exemple, un gros carré. Si on fait plein de petits carrés, ce sera un peu différent.
- 91 - Chercheuse :** Oui, en effet, mais ici on fait toujours en longueur, comme si c'était un petit train, d'accord?
- 92 - Élève 1 :** Ok.
- 93 - Chercheuse :** Alors je te pose encore une question. On se demande si en connaissant le nombre de carrés, on peut toujours trouver le nombre de pailles.
- 94 - Élève 1 :** Théoriquement, oui, on pourrait. Ce serait peut-être un peu plus compliqué il faudra peut-être se baser sur une aide. Par exemple 10 carrés est égal 31 pailles. Mais sinon on pourrait.
- 95 - Chercheuse :** Quelle serait la stratégie que tu pourrais utiliser?
- 96 - Élève 1 :** Celle que j'utiliserais, du coup, ça sera du coup celle des 10 carrés [*en indiquant « 31 (10 carrés) »*]. Du coup, pour arriver plus vite, du coup, au nombre voulu.
- 97 - Chercheuse :** D'accord, ok. C'est une question un peu difficile, celle-là. On essaie de la faire quand même?
- 98 - Élève 1 :** Oui!
- 99 - Chercheuse :** Alors...
- 100 - Élève 1 :** (L'élève lit à voix basse la question).
- 101 - Chercheuse :** Elle est clair la question?
- 102 - Élève 1 :** C'est-à-dire?
- 103 - Chercheuse :** C'est clair, la question?
- 104 - Élève 1 :** Oui.
- 105 - Chercheuse :** Donc tu as à disposition 200 pailles et tu construis toujours des carrés comme ça, en ligne. D'accord?
- 106 - Élève 1 :** Oui.
- 107 - Chercheuse :** Combien de carrés t'arrives à construire?
- 108 - Élève 1 :** [*Il pose en colonne « 154+31=185 (60 carrés) »*] Alors ça c'est égal du coup à 60 carrés.

109 - **Chercheuse** : Qu'est-ce que tu as fait là?

110 - **Élève 1** : Du coup, j'ai pris 50 plus 10. Et là je dois encore, en rajouter 10. Ah non là ej ne pourrais pas en rajouter 10. Du coup je vais peut-être compter. Par rapport au petits carrés.

111 - **Chercheuse** : À nouveau, j'ai toujours une calculette. Si tu veux me dire le calcul que tu veux que je fasse, je peux le faire.

112 - **Élève 1** : Non c'est bon.

113 - **Chercheuse** : D'accord.

114 - **Élève 1** : [*Il continue son calcul en colonne « 185+10=195 71 »*] Du coup je pourrais, du coup. Je pourrais construire encore un carré. J'arriverai à en faire. Du coup 70 plus 1 du coup 71. Du coup après, il me manquerait, du coup, une paille pour pouvoir en faire 72.

115 - **Chercheuse** : D'accord, donc, tu peux pas le faire. T'as 2 pailles qui restent?

116 - **Élève 1** : Oui.

117 - **Chercheuse** : Oui, d'accord. Bon, très bien, merci beaucoup. C'est ce que je voulais faire aujourd'hui. Tu as des questions?

118 - **Élève 1** : Non, c'est bon.

119 - **Chercheuse** : C'est bon? Ça te va si on se voit à nouveau demain ou les prochains jours?

120 - **Élève 1** : Ok.

La suite de carrés : Élève 3

Durée de l'entretien : 18 min 17 s

1 - **Chercheuse** : C'est Noha?

2 - **Élève 3** : Oui.

3 - **Chercheuse** : Moi, c'est Francesca. Est-ce qu'ils t'ont un peu expliqué qui je suis, ce que que je fais?

4 - **Élève 3** : Non, pas du tout.

5 - **Chercheuse** : Alors, je m'appelle Francesca Gregorio et mon travail est de comprendre un peu comment enseigner les math de manière un peu moins difficile, un peu plus agréable. Ok? Donc, aujourd'hui, je vais te poser des questions de math. On va travailler un moment ensemble et je vais regarder ce que tu fais pour essayer d'aider d'autres élèves à avoir moins de difficultés, à avoir les maths un peu plus facile. Est-ce que c'est bon pour toi? Je ne vais pas regarder si tu fais juste ou pas. Si tu fais des erreurs, c'est pas ça qui m'intéresse. D'accord? Je vais voir plutôt ta manière de raisonner pour essayer d'aider d'autres élèves. C'est bon pour toi? T'as des questions?

6 - Élève 3 : Non, c'est bon.

7 - Chercheuse : Tu veux savoir qu'est ce que ça?

8 - Élève 3 : Oui.

9 - Chercheuse : Alors ça, c'est une caméra qui regarde la table. Regard, je te montre ici. Tu vois?

10 - Élève 3 : Ah, ok.

11 - Chercheuse : Donc, elle regarde ici pour voir ce que tu fais, comme ça après je peux le regarder.

12 - Élève 3 : D'accord.

13 - Chercheuse : C'est bon pour toi?

14 - Élève 3 : Oui.

15 - Chercheuse : Ok. Maintenant, je vais te donner une tâche. Est-ce que t'as un stylo pour écrire? Non? Tiens. Tu peux écrire si tu veux, tu n'es pas obligé. C'est comme tu veux. Si tu préfères, tu parles. Ici tu as des feuilles. Tu peux les prendre, si tu veux. Et tu vas essayer de me dire ce que tu penses. Ok? C'est bon? Ok. Donc regarde ces photos...

16 - Élève 3 : Voici 3 premières étapes d'une suite de carrés. Combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés et de 5 carrés?

17 - Chercheuse : Oui. Donc, il y a les 3 premières étapes d'une suite. Ça, c'est la première, ça c'est la deuxième. Et ça, c'est la troisième étape.

18 - Élève 3 : Mh mh.

19 - Chercheuse : Et les carrés sont faits avec des pailles, tu vois qu'il y a des couleurs différentes? Donc, la question est combien de pailles, on a besoin pour former une suite de 4 carrés?

20 - Élève 3 : 10.

21 - Chercheuse : Comment t'as fait?

22 - Élève 3 : Parce que, vous voyez, j'ai fait 1 [en indiquant la première paille des 3 carrés], et j'ai 4 [en indiquant les 4 pailles du premier carré et la suite de 3].

23 - Chercheuse : Oui...

24 - Élève 3 : Mais on ne peut pas faire encore 4 parce que puisqu'il y avait déjà ça [en indiquant la deuxième paille verticale] donc du coup, je vais faire 3 plus 3 [en indiquant les 3 pailles du deuxième et troisième carré] égal 10.

25 - Chercheuse : Ok. Donc pour 3 étapes, il faut 10 pailles.

26 - Élève 3 : Oui.

27 - Chercheuse : Oui, et alors, pour 4 carrés? Pour la quatrième étape?

28 - Élève 3 : Celui-là [en indiquant les 3 carrés]?

29 - Chercheuse : Celle d'après.

- 30 - Élève 3 : Ok, celui-là [*en indiquant le deuxième carré des 3 carrés*].
- 31 - Chercheuse : Là, ça c'est 3 carrés, tu vois? C'est la troisième étape, tu as très bien dit il faut 10 pailles. Mais alors, est-ce que tu arriverais à dessiner l'étape d'après? Comment cette suite continue?
- 32 - Élève 3 : Je ne sais pas.
- 33 - Chercheuse : Alors, regarde, j'essaie de... Ça c'est première étape. Il y a un carré [*en l'indiquant*]. La deuxième étape, il y a 2 carrés [*en les indiquant*].
- 34 - Élève 3 : Ah, je dois faire plus de carrés. Juste 1. Genre, je fais encore 3 pailles.
- 35 - Chercheuse : D'accord. Donc combien de pailles au total?
- 36 - Élève 3 : Au total, si je fais encore 1?
- 37 - Chercheuse : Oui, pour le 4 carrés.
- 38 - Élève 3 : 13.
- 39 - Chercheuse : Ok. Et si on continue, donc pour la cinquième étape? Pour les 5 carrés?
- 40 - Élève 3 : 16.
- 41 - Chercheuse : Comment tu as fait?
- 42 - Élève 3 : Parce que j'ai compté plus 3.
- 43 - Chercheuse : Ok, d'accord, donc très bien. Et donc maintenant, c'est toujours la même tâche. Donc toujours la même suite, comme ça. On continue à rajouter des carrés. Combien faut-il de pailles pour former une suite de 12 carrés?
- 44 - Élève 3 : Ok [*l'élève dessine les 12 carrés et les compte*]. 37.
- 45 - Chercheuse : Combien?
- 46 - Élève 3 : 37.
- 47 - Chercheuse : 37, ok. Et est-ce que tu arriverais à trouver les pailles sans faire le dessin? Ici c'était très bien. Tu as fait les 12 carrés, tu as compté, très bien. Est-ce que tu arriverais à trouver le nombre de pailles sans dessiner les carrés?
- 48 - Élève 3 : Oui.
- 49 - Chercheuse : Oui? Comment?
- 50 - Élève 3 : De dire de dire combien il y a de trucs? Et je compte?
- 51 - Chercheuse : Oui, mais comment? Donc, comment tu ferais ici de manière pratique?
- 52 - Élève 3 : Dire... Je ne sais pas quoi dire. Moi, J'en sais rien.
- 53 - Chercheuse : D'accord. Alors, tu m'as dit que pour 12 carrés, il faut 37 pailles. Tu viens de le dire, et c'était bien. Et à ton avis, alors, pour une suite de 13 carrés, combien de pailles, donc?
- 54 - Élève 3 : Je dois faire plus 37. Non, je dois faire encore. Du coup, là, on est au début de 13 carrés, genre?

55 - Chercheuse : Pardon?

56 - Élève 3 : En fait, on doit faire... Comment dire? On doit faire 12 carrés plus 13 carrés, c'est ça?

57 - Chercheuse : Non. 13 au total,

58 - Élève 3 : 13 au total, ok. Donc... 40.

59 - Chercheuse : Et comment tu as fait?

60 - Élève 3 : Parce que j'ai fait plus 3. Parce que vu qu'il y avait le 12, et que ça fait 37, j'ai fait plus 3.

61 - Chercheuse : Ok, très bien. Et donc alors pour 14?

62 - Élève 3 : 43.

63 - Chercheuse : Qu'est ce que tu as fait, là?

64 - Élève 3 : J'ai compter dans la tête.

65 - Chercheuse : Oui. Et donc, à chaque fois, tu rajoute 3 pailles. N'est-ce pas? Pourquoi tu rajoutes 3 pailles à chaque fois?

66 - Élève 3 : Parce que dans une paille de carrés, il y avait 4 [en indiquant le premier carré de la troisième étape] mais vu qu'il y avait déjà 1 [en indiquant la deuxième paille verticale], on ne peut pas remettre ça [en indiquant tout le deuxième carré]. Du coup, on doit faire 3 [en indiquant les 3 pailles du deuxième carré], 3 [en indiquant les 3 pailles du troisième carré].

67 - Chercheuse : D'accord, très bien. Je vai te poser une question un peu plus poussée. Tu es prêt? Ça te va de continuer?

68 - Élève 3 : Oui!

69 - Chercheuse : Oui, courage! C'est toujours les mêmes carrés, la même suite. Et la question est combien faut-il de pailles pour former une suite de 100 carrés?

70 - Élève 3 : Je peux faire [il prend le stylo]?

71 - Chercheuse : Tu veux dessiner?

72 - Élève 3 : Oui.

73 - Chercheuse : Est-ce que tu arriverais à avoir une idée sans dessiner?

74 - Élève 3 : Difficile à dire. Je vais essayer [il compte sur ses doigts]. 311.

75 - Chercheuse : Ok. Comment tu as compté, comment t'as fait?

76 - Élève 3 : J'ai compté les côtés... En fait j'avais compté les pailles qui font jusqu'à 10. Et du coup, comme ça fait 31. J'ai fait 10. J'ai fait plus 3. Parce qu'il y a 3 pailles du coup, j'ai fait plus 3, plus 3, plus 3, plus 3 jusqu'à 10 en fait.

77 - Chercheuse : D'accord, super. Et est-ce que tu aurais une idée pour faire plus vite cette opération que tu as fait?

78 - Élève 3 : Et oui.

79 - Chercheuse : Oui.

80 - Élève 3 : Je crois.

81 - Chercheuse : Comment ?

82 - Élève 3 : Genre je crois que je peux le faire vite.

83 - Chercheuse : D'accord. Toujours le même exercice, toujours la même tâche. Et maintenant, on se demande, en connaissant le nombre de carrés, peut-on toujours trouver le nombre de pailles ?

84 - Élève 3 : Je sais pas.

85 - Chercheuse : La question est claire ou pas trop ?

86 - Élève 3 : J'en sais rien. Parce que ça dépend.

87 - Chercheuse : Ça dépend de quoi ?

88 - Élève 3 : Ça dépend dans le nombre de carrés. Et du coup, ils n'ont pas compté. Et du coup, ils n'ont pas mis le numéro combien il y en a. Du coup... Après dire je ne sais pas trop.

89 - Chercheuse : D'accord, parce qu'à ton avis, il y a des nombres... Un certain nombre de carrés pour lesquels on ne peut pas trouver le nombre de pailles ?

90 - Élève 3 : Mh.

91 - Chercheuse : Oui ?

92 - Élève 3 : Oui.

93 - Chercheuse : Et s'il y avait un nombre quelconque ? Un nombre quelconque de carrés ? C'est-à-dire n'importe quel nombre. Est-ce que tu arriverais à trouver le nombre de pailles ?

94 - Élève 3 : 250 ? Non, ça paraît [*inaudible*], mais... Oui. Oui, je crois 250.

95 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu es en train de penser, là ?

96 - Élève 3 : Je sais pas si je peux compter... Si j'arrive à compter vite fait 150.

97 - Chercheuse : D'accord. Et si c'était encore un autre nombre ? Qu'est-ce que tu ferais ?

98 - Élève 3 : Je compterais, dans ma tête vite fait. Oui, parce que je [*inaudible*] les carrés. Les pailles je dois faire jusqu'à 10. Et du coup, je dois compter, compter, compter, et du coup voilà.

99 - Chercheuse : D'accord. J'ai encore une question...

100 - Élève 3 : Tu as acheté un paquet de 200 pailles. Combien de carrés peux-tu construire ?

101 - Chercheuse : La question est claire ?

102 - Élève 3 : Donc, ça veut dire... Ok...

103 - Chercheuse : Donc, tu as 200 pailles. Et on se demande combien de carrés peut-on construire.

104 - Élève 3 : Bah, 10.

- 105 - Chercheuse :** Comment tu as fait ?
- 106 - Élève 3 :** Parce que imaginez... Vous voyez, il y a, je compte 10, 20, 30, 50. J'ai compté. Je dois juste dire 10 parce qu'il y avait... C'est 10 c'est le nombre... Comment ça s'appelle ? Un chiffres complet pour 200. Parce que le 10 ç'arrive au 200. En fait il y a 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, gna gna gna, jusqu'à 200.
- 107 - Chercheuse :** Oui. D'accord, mais...
- 108 - Élève 3 :** Ou, peut-être je dois aussi faire des fois, des multiplications. Je ferais, je crois, 100 fois 10 égal 200, si je dis bien juste.
- 109 - Chercheuse :** Oui, ça, c'est correct. C'est vrai, 100 fois 10, ça fait 200. Pardon, non, qu'est-ce que as dit ?
- 110 - Élève 3 :** 100 fois 10.
- 111 - Chercheuse :** 100 fois 10 ça donne combien ?
- 112 - Élève 3 :** Ah non...
- 113 - Chercheuse :** Tu peux écrire si tu veux, si tu préfères.
- 114 - Élève 3 :** Oui [*il pose en colonne « 100x10=1111 »*]. Je réfléchis. Attendez. [*il pose en colonne « 200+10=2112 »*] Ça sert à rien, je sais plus... Je suis pas très grand en calcul.
- 115 - Chercheuse :** Si tu veux, je peux faire des calculs pour toi. Mais est-ce qu'on revient peut-être à la question, là. On laisse un moment de côté ces opérations, d'accord ? Nous avons 200 pailles. 200 pailles comme ça [*en indiquant les pailles des 2 carrés*]. Ok ? On se demande combien de carrés peut-on construire ?
- 116 - Élève 3 :** Des carrés ?
- 117 - Chercheuse :** Oui, des carrés comme ça [*en indiquant les 2 carrés*].
- 118 - Élève 3 :** 10. Ou 3 carrés. Genre... 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 [*il compte les pailles pour les 3 carrés*]. Il y a 3 carrés qu'on peut construire. C'est à dire qu'on a 10 carrés... Pardon, on a 10 pailles de 3 carrés.
- 119 - Chercheuse :** D'accord. Et donc pour 200 pailles ?
- 120 - Élève 3 :** Pour 200 pailles... On a 10... Je ne sais pas, je ne sais pas comment l'expliquer.
- 121 - Chercheuse :** Tu penses à quelque chose et tu sais juste pas comment l'expliquer ?
- 122 - Élève 3 :** Non. Oui, je ne sais pas comment l'expliquer.
- 123 - Chercheuse :** Est-ce qu'on s'arrête là, ça te va ?
- 124 - Élève 3 :** Oui.

La suite de carrés : Élève 4

Durée de l'entretien : 27 min 36 s

- 1 - **Chercheuse** : Donc, alors, là, tu as des feuilles. Si tu veux, tu écris, si t'as pas envie on discute juste à l'oral. D'accord? En tout cas, si tu veux, là il y a autant de feuilles que tu veux. Et je te demande, si tu arrives, à dire tout ce que tu penses.
- 2 - **Élève 4** : Ok.
- 3 - **Chercheuse** : D'accord? Donc, à penser à voix haute.
- 4 - **Élève 4** : Mh mh.
- 5 - **Chercheuse** : Donc, regarde ces photos-là. Il y a les 3 premières étapes d'une suite de carrés, c'est-à-dire que celle-ci, c'est la première étape. Deuxième étape, troisième étape. Et puis, ça pourrait continuer, d'accord?
- 6 - **Élève 4** : Mh.
- 7 - **Chercheuse** : Et la question est combien faut-il de pailles... Tu vois, là c'est des pailles, tic tic tic [*en indiquant les 4 pailles du premier carré*]? Combien faut-il de pailles pour former une suite de 7 carrés?
- 8 - **Élève 4** : Une suite de 7 carrés?
- 9 - **Chercheuse** : Oui.
- 10 - **Élève 4** : Ça veut dire, attendez 7 carrés comme ça?
- 11 - **Chercheuse** : Oui.
- 12 - **Élève 4** : Je peux écrire?
- 13 - **Chercheuse** : Oui, bien sûr.
- 14 - **Élève 4** : [*Il dessine les 7 carrés et compte les pailles*] 22.
- 15 - **Chercheuse** : 22, ok.
- 16 - **Élève 4** : 22 pailles.
- 17 - **Chercheuse** : Comment tu as fait?
- 18 - **Élève 4** : De base j'allais faire de tête, mais c'est plus rapide comme ça.
- 19 - **Chercheuse** : Qu'est... Pardon, je n'ai pas compris.
- 20 - **Élève 4** : De base, j'allais faire des têtes, mais c'est plus rapide comme ça.
- 21 - **Chercheuse** : D'accord. Et de tête comment t'aurais fait?
- 22 - **Élève 4** : Je mettrais le carré dans ma tête. Ça aurait été plus long, mais...
- 23 - **Chercheuse** : Donc combien de pailles pour 7 carrés, nous avons dit?
- 24 - **Élève 4** : 22.
- 25 - **Chercheuse** : 22, d'accord.
- 26 - **Élève 4** : C'est juste?
- 27 - **Chercheuse** : Oui, c'est juste. Et donc, alors...
- 28 - **Élève 4** : Ah, mais es fait je suis bête, j'aurais dû faire ça.

- 29 - Chercheuse : Pourquoi?
- 30 - Élève 4 : Pour 7 carrés, 1, 2, 3, 4 [*il compte les premières pailles de la suite de 3 carrés*]... Ah, non, en fait non, j'ai rien dit.
- 31 - Chercheuse : Pourquoi? Qu'est-ce que tu as essayé de faire, là?
- 32 - Élève 4 : J'allais dire... J'avais juste à faire fois, mais non.
- 33 - Chercheuse : Fois quoi?
- 34 - Élève 4 : J'ai regardé, [*inaudible*] je pourrais faire, ça marche pas.
- 35 - Chercheuse : Non? Pourquoi à ton avis ça ne marche pas?
- 36 - Élève 4 : Fin, je pense que c'est possible mais je n'ai pas [*inaudible*] en tout cas.
- 37 - Chercheuse : Oui, mais t'as une idée du pourquoi ça ne marche pas?
- 38 - Élève 4 : Non.
- 39 - Chercheuse : Non? D'accord. Et donc, après, pour 7 carrés c'est 22. Et pour 8 carrés, à ton avis, c'est combien?
- 40 - Élève 4 : Pour 8 carrés?
- 41 - Chercheuse : Oui.
- 42 - Élève 4 : 26.
- 43 - Chercheuse : Et comment tu as fait?
- 44 - Élève 4 : J'ai fait plus 4.
- 45 - Chercheuse : Ok. Tu veux...?
- 46 - Élève 4 : Non! 25.
- 47 - Chercheuse : Ok, pourquoi?
- 48 - Élève 4 : Parce qu'il y a chaque fois un carré comme ça [*en indiquant la dernière paille des 3 carrés*]. Donc, c'est comme si j'enlèvais un carré, c'est-à-dire, je peux?
- 49 - Chercheuse : Oui, bien sûr!
- 50 - Élève 4 : Ça veut dire, là... On va dire là il y en 7 déjà [*en indiquant les 3 carrés*]. Donc 22...
- 51 - Chercheuse : Oui.
- 52 - Élève 4 : Et je fais comme ça [*en dessinant un quatrième carré composé par 3 pailles*].
- 53 - Chercheuse : D'accord.
- 54 - Élève 4 : 23, 24, 25 [*en indiquant les 3 pailles qu'il a ajoutées*].
- 55 - Chercheuse : Donc combien t'en as rajoutées?
- 56 - Élève 4 : 3.
- 57 - Chercheuse : D'accord. Et donc pour 9?
- 58 - Élève 4 : Pour 9?
- 59 - Chercheuse : Oui.

- 60 - Élève 4 : J'avais dit combien déjà? 25?
- 61 - Chercheuse : 25, oui.
- 62 - Élève 4 : Pour 9, c'est plus 3, ça fait 28.
- 63 - Chercheuse : 28, super. Et donc...
- 64 - Élève 4 : C'est juste, non?
- 65 - Chercheuse : Oui, c'est juste. On passe à la...
- 66 - Élève 4 : Mais si c'est faux vous ne me dites pas?
- 67 - Chercheuse : Quoi?
- 68 - Élève 4 : Si c'est faux pas, vous ne me dites pas?
- 69 - Chercheuse : Non, mais c'est juste, là. D'accord?
- 70 - Élève 4 : Mh.
- 71 - Chercheuse : On continue avec une autre question, ça te va?
- 72 - Élève 4 : Mh mh. Op!
- 73 - Chercheuse : Très bien. Alors, c'est toujours la même suite de carrés. Mais la question est : est-ce que tu as une idée de combien de pailles pour 100 carrés?
- 74 - Élève 4 : Attendez. 3 fois 25. Non! Pardon, [inaudible] 25... Combien faut-il de pailles... Non!
- 75 - Chercheuse : Quel calcul tu as fait, là?
- 76 - Élève 4 : J'ai fait... Il en faut... Je ne sais pas. Je ne sais même pas comment j'ai fait le calcul.
- 77 - Chercheuse : Tu as oblié?
- 78 - Élève 4 : 3 fois 25...
- 79 - Chercheuse : Et pourquoi 25?
- 80 - Élève 4 : Ça fait 100.
- 81 - Chercheuse : Pourquoi 25? Si jamais pour les calculs, ce n'est pas important, je peux les faire. Si tu me dis quel calcul faire, je peux le faire à la calculette.
- 82 - Élève 4 : Non, c'est bon. 3 fois 25 ça fait 100 normalement si je ne me trompe pas.
- 83 - Chercheuse : 3 fois 25...
- 84 - Élève 4 : Ah non, non, non... 4 fois 25 ça fait 100.
- 85 - Chercheuse : Oui, exactement.
- 86 - Élève 4 : Alors... Je vais dire que... 400.
- 87 - Chercheuse : Comment tu fais, là?
- 88 - Élève 4 : 4 fois 25 ça fait 100, donc je pense c'est 400 pailles. Ou sinon je sais même pas. Non, 250 pailles. Non, je ne sais pas.
- 89 - Chercheuse : Je me suis perdue dans tes calculs. Tu peux juste m'expliquer pourquoi tu fait ces calculs-là?

- 90 - Élève 4 : Parce que, combien faut-il de pailles pour former une suite de 100 carré? Il y a 100 carrés et puis là dedans [*en indiquant le premier carré des 3 carrés*], il y a 3 pailles. Enfin, comment dire? Dans un carré il y en a 4, plutôt. Enfin, ça dépend... Le premier carré.
- 91 - Chercheuse : Le premier carré, d'accord.
- 92 - Élève 4 : Donc, j'ai fait fois 4 le nombre qui fait 100 [*inaudible*]. Dans le livret 4 ce qui fait 100, vous voyez?
- 93 - Chercheuse : D'accord, oui.
- 94 - Élève 4 : Et ça m'est revenu à [*inaudible*]. Non, je ne sais pas.
- 95 - Chercheuse : Oui, mais c'est pas mal le raisonnement que t'as mis en place, effectivement. Là [*en indiquant les 3 carrés, le quatrième carré dessiné par l'élève et en mimant un cinquième carré*], effectivement, c'est comme si tu continues ta suite. La t'avais dit, si je rajoute un carré, je fais comme ça [*en indiquant les 3 pailles du quatrième carré*]. Si j'en rajoute un autre, tu fais comme ça à nouveau [*en mimant les 3 pailles du cinquième carré*]. Et si tu continues jusqu'à 100, à chaque fois, tu fais ça [*en mimant les 3 pailles du cinquième et sixième carré*].
- 96 - Élève 4 : Je pense que... Combien il faut...
- 97 - Chercheuse : Je pensais moi aussi.
- 98 - Élève 4 : Mh?
- 99 - Chercheuse : Je pense... Je suis en train de penser moi aussi. On pourrait essayer ça.
- 100 - Élève 4 : L'Élève 5, il a trouvé cela?
- 101 - Chercheuse : [*Elle rigole*] Tu fais de la compétition, là?
- 102 - Élève 4 : Non, je demandais.
- 103 - Chercheuse : Non, mais on en a discuté un peu, comme toi.
- 104 - Élève 4 : Mh.
- 105 - Chercheuse : Il a trouvé des choses. Alors, 7 carrés, tu m'avais dit 22. Ça te dérange, tu veux que je ferme?
- 106 - Élève 4 : Non, c'est tout bon.
- 107 - Chercheuse : Ok. 7 carré, là, tu m'avais dit 22, n'est-ce pas? Tu veux l'écrire, peut-être que ça t'aide?
- 108 - Élève 4 : Mh?
- 109 - Chercheuse : Tu veux l'écrire?
- 110 - Élève 4 : 7 carrés?
- 111 - Chercheuse : 7 carrés, ça donne...
- 112 - Élève 4 : [*L'élève dessine à nouveau les 7 carrés et compte les pailles*] Oui, c'est bon.

- 113 - **Chercheuse** : Oui. Combien donc?
- 114 - **Élève 4** : 22.
- 115 - **Chercheuse** : 22, super. Donc, 7 22. Pour 8 carrés?
- 116 - **Élève 4** : Pour 8 25, on avait dit.
- 117 - **Chercheuse** : Oui, 25. Parce ce qu'est-ce que tu avais fait, déjà?
- 118 - **Élève 4** : Plus 3.
- 119 - **Chercheuse** : D'accord. Et donc pour 9?
- 120 - **Élève 4** : 28 aussi on avait dit.
- 121 - **Chercheuse** : D'accord et donc pour 10?
- 122 - **Élève 4** : 31.
- 123 - **Chercheuse** : Et pour 11?
- 124 - **Élève 4** : 33... Et non, 34.
- 125 - **Chercheuse** : 34, d'accord. Là, je me perds dans les calculs, je dois écrire parce que sinon... Ok, et donc pour 12?
- 126 - **Élève 4** : Mh?
- 127 - **Chercheuse** : Pour 12.
- 128 - **Chercheuse** : 37.
- 129 - **Chercheuse** : Pour 13?
- 130 - **Élève 4** : 40.
- 131 - **Chercheuse** : D'accord. 14?
- 132 - **Élève 4** : 43.
- 133 - **Chercheuse** : D'accord. Et ainsi de suite.
- 134 - **Élève 4** : 46, 49, 52... Et après 55, et après 58 et après 61, et après ça recommence.
- 135 - **Chercheuse** : D'accord. Et donc là, est-ce que tu aurais une idée de comment trouver pour 100 carrés?
- 136 - **Élève 4** : J'écris 100 carrés!
- 137 - **Chercheuse** : Tu vas dessiner 100 carrés... Là, c'est vrai, on y arrive. Et sans dessiner?
- 138 - **Élève 4** : Je ne sais par trop.
- 139 - **Chercheuse** : Quoi?
- 140 - **Élève 4** : Je ne sais pas trop.
- 141 - **Chercheuse** : D'accord. Tu as envie d'y enser encore un moment ou on change?
- 142 - **Élève 4** : On peut changer.
- 143 - **Chercheuse** : Oui, d'accord. Je peux te poser encore une question?
- 144 - **Élève 4** : Oui.

- 145 - **Chercheuse** : Alors, regarde, là. Donc, tu penses que si je connais le nombre de carrés, je peux toujours trouver le nombre de pailles?
- 146 - **Élève 4** : Oui.
- 147 - **Chercheuse** : Oui?
- 148 - **Élève 4** : C'est quel nombre de carrés, là?
- 149 - **Chercheuse** : Un nombre quelconque. N'importe quel nombre.
- 150 - **Élève 4** : Si c'est de ces carrés qu'on parle, oui.
- 151 - **Chercheuse** : Pardon? Je n'ai pas entendu.
- 152 - **Élève 4** : Si c'est de ces carrés qu'on parle, oui.
- 153 - **Chercheuse** : Oui, c'est car carré-là, de cette forme-là, d'accord?
- 154 - **Élève 4** : Mh mh.
- 155 - **Chercheuse** : Et donc si... Comment je pourrais faire si je connais le nombre de carrés pour trouver le nombre de pailles?
- 156 - **Élève 4** : Je sais pas. Enfin, ça dépend. Je sais qu'on peut le calculer plus le truc qui est marqué.
- 157 - **Chercheuse** : Pardon?
- 158 - **Élève 4** : C'est quoi votre question, déjà?
- 159 - **Chercheuse** : Si je connais le nombre de carrés, est-ce que je peux trouver le nombre de pailles?
- 160 - **Élève 4** : Oui, mais c'est dur.
- 161 - **Chercheuse** : Oui. Et à ton avis, comment on pourrait faire? C'est vrai que c'est dur.
- 162 - **Élève 4** : Soit tu les compte tous.
- 163 - **Chercheuse** : D'accord.
- 164 - **Élève 4** : Sinon, tu fais fois, mais je ne sais pas fois combien.
- 165 - **Chercheuse** : Ok. Pourquoi fois quelque chose?
- 166 - **Élève 4** : Mh, comment dire? C'est come si je dessine [*il dessine 4 carrés pas collés, 3 grands et un petit*]... Je crois c'est [*inaudible*] des carrés comme ça, pas collés.
- 167 - **Chercheuse** : Mh mh.
- 168 - **Élève 4** : J'en fait 3... C'est comme là... Genre... Comment dire? J'arrive pas à expliquer. Mh... J'arrive pas à expliquer.
- 169 - **Chercheuse** : Ok. Alors là, tu peux me montrer. Là tu ferais fois quoi?
- 170 - **Élève 4** : Il y a 4 carrés.
- 171 - **Chercheuse** : Oui.
- 172 - **Élève 4** : Et là il y en a 3 [*en indiquant les 3 grands carrés qu'il a dessinés*]. Alors ça fait 4 fois 3, vous voyez ce que je veux dire?

- 173 - **Chercheuse** : Il y a 3 de quoi?
- 174 - **Élève 4** : 3 carrés. Enfin, il y a 3 carré, les carrés ont 4 côtés, c'est ça que je voulais dire.
- 175 - **Chercheuse** : D'accord. Et s'ils étaient collés, alors?
- 176 - **Élève 4** : C'est-à-dire que si ça c'est des pailles...
- 177 - **Chercheuse** : Oui...
- 178 - **Élève 4** : Ça voudrait dire... Attendez... 4 fois 3, ça fait 12.
- 179 - **Chercheuse** : D'accord.
- 180 - **Élève 4** : Ça voudrait dire, il y a 12 pailles.
- 181 - **Chercheuse** : Oui, je comprends. D'accord. Et dans le cas que les carrés sont collés?
- 182 - **Élève 4** : [*Il dessine 3 carrés collés*] Là ça veut dire... Ce n'est pas la même chose parce que comme ils sont collés, il y a... Je ne peux pas faire 1, 2, 3, 4 [*en comptant les pailles du premier carré*]... Oui, 4. Mais de toute façon il y a 3 carrés.
- 183 - **Chercheuse** : Oui.
- 184 - **Élève 4** : Et là si je fais genre 1, 2, 3, 4 [*en comptant les pailles du premier carré*]. 1, 2, 3 [*en comptant les pailles du deuxième carré*]. Alors, plutôt, je vais me stopper. 1, 2, 3, 4 [*il recompte les pailles du premier carré*]. 1, 2, 3 [*en recomptant les pailles du deuxième carré*]. Ça fait pas la même, comme ce côté [*en indiquant la deuxième pailles verticale*] il est déjà utilisé.
- 185 - **Chercheuse** : D'accord.
- 186 - **Élève 4** : C'est ça que je voulais dire.
- 187 - **Chercheuse** : Oui. Et donc là, tu ferais fois quoi?
- 188 - **Élève 4** : Je ne sais pas. Voilà, pou ces 3-là [*en indiquant les 3 carrés*], je ferais fois 9.
- 189 - **Chercheuse** : Ok, pourquoi?
- 190 - **Élève 4** : Parce qu'il y a 9 pailles, on va dire.
- 191 - **Chercheuse** : D'accord.
- 192 - **Élève 4** : Et il y a 3 carrés. 3 fois 9, ou 9 fois 3.
- 193 - **Chercheuse** : D'accord, ok. Donc, d'un...
- 194 - **Élève 4** : C'est juste ou je me perd?
- 195 - **Chercheuse** : Il y a des raisonnements qui sont corrects, oui. Et donc, si tu ajoutes par exemple un quatrième carré, là? Là, dans le petit train [*en indiquant la suite de 3 carrés dessinée par l'élève*]. Tu ferais... T'aurais une idée de formule mathématique que tu pourrais faire?
- 196 - **Élève 4** : Là 13, donc [*inaudible*]. Ça fait 13 fois 4.
- 197 - **Chercheuse** : 13 fois 4? Pourquoi 13 fois 4?

- 198 - Élève 4 : Parce qu'il y a 13 pailles et il y a 4 carrés. Ou plutôt 4 fois 13.
- 199 - Chercheuse : D'accord.
- 200 - Élève 4 : Si ça fait la même chose.
- 201 - Chercheuse : Est-ce que 13 fois 4, c'est la même chose que 4 fois 13 ou pas ?
- 202 - Élève 4 : Oui. Enfin, le résultat est le même.
- 203 - Chercheuse : D'accord.
- 204 - Élève 4 : C'est comme si je fais 8 fois 6 ou 6 fois 8. Ça fait le même chiffre, ça fait 48.
- 205 - Chercheuse : D'accord. Ok. Ok, donc, là, tu disais que tu voulais faire 4 fois 13.
- 206 - Élève 4 : Mh mh.
- 207 - Chercheuse : Oui, ok.
- 208 - Élève 4 : Si j'ai bien compté [*il compte les pailles pour les 4 carrés*].
- 209 - Chercheuse : Mais qu'est-ce que tu obtiens avec 4 fois 13 ?
- 210 - Élève 4 : 4 fois 13 ?
- 211 - Chercheuse : Mh mh.
- 212 - Élève 4 : Attendez. Attendez.
- 213 - Chercheuse : Tu peux écrire tout ce que tu veux.
- 214 - Élève 4 : [*Il pose en colonne « 13x4=52 »*] 52.
- 215 - Chercheuse : Et pourquoi tu as fait ce calcul-là ?
- 216 - Élève 4 : Parce que vous me l'avez demandé.
- 217 - Chercheuse : D'accord, mais alors je retourne la question. Qu'est-ce que c'est ces 52 ? Qu'est-ce que tu as obtenu ?
- 218 - Élève 4 : C'est le résultat du nombre de pailles. Non... Ah ! C'est le... 13 pailles, fois 4.
- 219 - Chercheuse : 13 pailles fois 4. D'accord, oui. C'est vrai, c'est 52. Et qu'est-ce que ça donne ?
- 220 - Élève 4 : 52.
- 221 - Chercheuse : D'accord, ok.
- 222 - Élève 4 : Je crois je fais n'importe quoi.
- 223 - Chercheuse : Non, pourquoi ? Ce n'est pas vrai ! C'était hyper intéressant ce qu'on a fait aujourd'hui !
- 224 - Élève 4 : Mh ?
- 225 - Chercheuse : Pour moi c'était hyper intéressant ce que tu as fait aujourd'hui. Tu trouves pas ?
- 226 - Élève 4 : Je n'ai pas su répondre à la question des 100, là.
- 227 - Chercheuse : Des 100 ? Tu as dit quelque chose quand même.

228 - Élève 4 : Mh?

229 - Chercheuse : T'as dit quelque chose. Tu n'es pas arrivé au résultat final, mais t'as fait des bons raisonnements. Moi, je suis assez contente. Tu veux encore essayer ou tu veux arrêter?

230 - Élève 4 : Je trouve pas.

231 - Chercheuse : Quoi?

232 - Élève 4 : Je les trouve pas.

233 - Chercheuse : Oui... Mais peut-être que si on cherche encore un peu, on trouve. Qu'est-ce que tu veux... On cherche encore?

234 - Élève 4 : On peut chercher.

235 - Chercheuse : On cherche. Oui. Tu sais ce qu'on pourrait faire, peut-être pour arriver à trouver? T'es bien arrivé vraiment à trouver pour 7 carrés, et pour 9... Tu es allé jusqu'à 14. On pourrait... On pourrait continuer dans cette direction-là, pour voir si on arrive.

236 - Élève 4 : Mais c'est long!

237 - Chercheuse : Oui, c'est un peu long. C'est vrai, tu as raison. Est-ce que tu as d'autres idées?

238 - Élève 4 : Alors... C'est bon. Je ne sais pas si c'est juste [*il écrit « 98x7= »*]. 7 fois 8, c'est 56, einh, ça fait?

239 - Chercheuse : Quoi?

240 - Élève 4 : 7 fois 8, ça fait 56?

241 - Chercheuse : je contrôle parce que moi, les calculs, parfois... Qu'est-ce que tu veux que je fasse?

242 - Élève 4 : 7 fois 8.

243 - Chercheuse : 7 fois, 8, ça fait 56.

244 - Élève 4 : [*Il complète « 98x7=686 »*] Ok. Alors. Je ne sais plus pourquoi j'ai fait ça. Donc, attendez... Si je ne me trompe pas, pour... 686 pailles.

245 - Chercheuse : 686 pailles pour 100 carrés?

246 - Élève 4 : Mh mh.

247 - Chercheuse : Comment tu as fait?

248 - Élève 4 : C'est juste?

249 - Chercheuse : Je ne sais plus. Je devrais faire le calcul. Mais comment tu as fait pour en arriver là?

250 - Élève 4 : En gros, j'ai fait 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et tout [*en comptant les pailles de la photo des 3 carrés*], donc en gros 2 [*en indiquant les 2 premiers carré de la suite de 3*], donc 98, j'ai enlevé 2, [*inaudible*] et tout. Et après j'ai fait le nombre qui est là, genre...

- 251 - **Chercheuse** : Mais pourquoi tu as enlevé 2 à 100?
- 252 - **Élève 4** : Mais peut-être... Non, peut-être c'est 3. Parce que quand j'en ai déjà pris 2, là [en indiquant les 2 premiers carrés de la photo de 3]. Je ne sais pas si vous voyez.
- 253 - **Chercheuse** : Oui, qu'est-ce que tu as déjà pris, en fait?
- 254 - **Élève 4** : Genre, là, j'ai fait 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [en indiquant les pailles des premiers 2 carrés] et j'ai calculé à partir de là [en indiquant les 2 premiers carrés]. J'ai enlevé 2 carré, si on veut.
- 255 - **Chercheuse** : Ah d'accord, donc...
- 256 - **Élève 4** : Ou sinon c'est peut être ça-là [en écrivant « 98×4 » et « 98×3 »]... L'un des 3 qui est juste?
- 257 - **Chercheuse** : Mias... Si tu m'expliques parce que je... Qu'est-ce que tu as fait, là? Qu'est-ce que c'est, ça [en indiquant « 98×3 »]?
- 258 - **Élève 4** : Ça c'est parce qu'e fait... 1, 2, 3, 4 [en comptant les 4 premières pailles de la suite de 3] et puis après on n'utilise que 3 carrés.
- 259 - **Chercheuse** : D'accord, donc..
- 260 - **Élève 4** : Oui, sinon le 4, c'est parce que sur le premier, on n'utilise que 4 carrés.
- 261 - **Chercheuse** : D'accord. Et donc là [en indiquant « 98×4 »], qu'est-ce que c'est 98?
- 262 - **Élève 4** : Mh?
- 263 - **Chercheuse** : T'as fait une opération là ou ce n'est pas une opération?
- 264 - **Élève 4** : 98 fois 4, un des 2 normalement il doit être juste [en indiquant « 98×4 » et « 98×3 »].
- 265 - **Chercheuse** : D'accord, donc c'est l'opération que tu dois faire.
- 266 - **Élève 4** : Oui, je crois.
- 267 - **Chercheuse** : Ok, d'accord. Et à ton avis, laquelle faut-il faire?
- 268 - **Élève 4** : Je vais faire les 2, on verra.
- 269 - **Chercheuse** : Si tu veux, je peux le faire, ou tu préfères les faire à la main?
- 270 - **Élève 4** : Non, c'est facile [il calcule « $98 \times 3 = 284$ »].
- 271 - **nan** : Mais en fait, tu es hyper vite à faire les calculs, incroyable! T'es hyper vite!
- 272 - **Élève 4** : Comment ça? [Il calcule « $98 \times 4 = 392$ »].
- 273 - **Chercheuse** : Tu es vite à faire les calculs.
- 274 - **Élève 4** : Mh. Je me suis trompé. Là [en indiquant « 392 »], je crois je me suis trompé. Je suis allé si vite que ça?
- 275 - **Chercheuse** : Ben, ça me semblait vite, oui. Et donc, 98 fois 3 ou 98 fois 4?

- 276 - Élève 4 : [Il calcule à nouveau « $98 \times 4 = 392$ »] Non, c'est juste. Alors.... Je dirais 3.
- 277 - Chercheuse : Pourquoi?
- 278 - Élève 4 : Je ne sais pas. Est-ce qu'il y en a un des 2 qui est juste?
- 279 - Chercheuse : Ouais.
- 280 - Élève 4 : Mh?
- 281 - Chercheuse : Ouais.
- 282 - Élève 4 : 3, c'est 3.
- 283 - Chercheuse : Pourquoi 3?
- 284 - Élève 4 : Parce qu'après on en utilise à chaque fois 3. On utilise une fois 1, 2, 3, 4 [en comptant les pailles du premier carré]. Et après à chaque fois 3, chaque fois 3, on pourrait faire 10000, il y en aura 3 qu'on utilisera pour faire ce type de carrés.
- 285 - Chercheuse : Et donc, pourquoi 98? On cherchait la suite de 100 carrés.
- 286 - Élève 4 : Ah, mais il y en a un des 2 qui est juste avec 98?
- 287 - Chercheuse : Quoi?
- 288 - Élève 4 : Il y en a un des 2 qui est juste?
- 289 - Chercheuse : Alors... Oui, il y a un raisonnement qui est correct. D'accord? Effectivement, t'as raison, à chaque fois, on rajoute 3. D'accord? Mais je me demandais juste pourquoi tu a pris 98 quand dans le texte, c'était demandé 100 carrés.
- 290 - Élève 4 : Ah non... Là, pour là, ça devrait être 97.
- 291 - Chercheuse : Pourquoi?
- 292 - Élève 4 : Parce que 3 pailles. Vous voyez ce que je veux dire? [Inaudible] Je ne sais pas comment expliquer. Parce que ce n'est pas juste, voilà quoi...
- 293 - Chercheuse : Mais pourquoi tu dois enlever 3 pailles?
- 294 - Élève 4 : Parce que je fais fois 3.
- 295 - Chercheuse : Oui. Oui, je vois ce que tu as fait.
- 296 - Élève 4 : Là, ça serait 96 [modifiant « 98×4 » en « 96×4 »]. En fait, je pense. Mais non, en fait non, parce que vous m'avez dit il était juste, donc sinon, ça change tout [inaudible] calcul.
- 297 - Chercheuse : Mh mh. oui, j'ai dit qu'un des 2 avait un raisonnement correct.
- 298 - Élève 4 : Résultat ou raisonnement?
- 299 - Chercheuse : Raisonnement.
- 300 - Élève 4 : Ba oui, ce n'est pas la même chose.
- 301 - Chercheuse : Non, mais à mon avis, c'est plus important le raisonnement. Qu'est-ce que t'en penses?

- 302 - Élève 4 : Ça veut dire peut-être si je fais ça, le résultat il sera correct [*il calcule « $97 \times 3 = 2912$ »*].
- 303 - Chercheuse : Alors là, tu as fait 3, 7... 1...
- 304 - Élève 4 : Peut-être celui-là qui pourrait être juste. Moi j'aime bien calculer vite.
- 305 - Chercheuse : T'aime bien faire les calculs?
- 306 - Élève 4 : Non, juste calculer vite, comme ça je suis le premier en math.
- 307 - Chercheuse : Ah, c'est vrai, tu es le premier en math de ta classe?
- 308 - Élève 4 : Dans ce groupe-là, oui.
- 309 - Chercheuse : Ça fait plaisir, n'est-ce pas? Qu'est-ce que vous faites maintenant, en maths?
- 310 - Élève 4 : Des trucs que je connais déjà.
- 311 - Chercheuse : Ah oui, tu les as déjà fait?
- 312 - Élève 4 : Alors, c'est des trucs comme ça. Je vais vous donner un calcul au hasard. Genre, à 3 chiffres même j'arrive [*il écrit « 424×343 »*]. Ça commence de ce côté. Côté habitué, ça devient ça [*inaudible*]. Vous voyez ce que je veux dire?
- 313 - Chercheuse : Oui.
- 314 - Élève 4 : Après tu fais fois. Mais c'est long, à 3 chiffres je ne vais pas faire grand.
- 315 - Chercheuse : Oui, je comprends, ce types de choses-là.
- 316 - Élève 4 : Tu te trompes pas... Genre, si je fais une fiche, des fois je n'ai pas de fautes. Genre, j'ai 2 fautes sur une fiche où il y a au moins 16.
- 317 - Chercheuse : Wow! Trop bien!
- 318 - Élève 4 : Fin, 16... J'abuse. 10, plutôt.
- 319 - Chercheuse : C'est qui ton enseignant de math?
- 320 - Élève 4 : Là, c'est qui déjà? C'est [...].
- 321 - Chercheuse : D'accord. Ok. Bon, écoute, merci beaucoup pour aujourd'hui.
- 322 - Élève 4 : C'est quoi le résultat?
- 323 - Chercheuse : Là, je pense qu'on est un peu fatigué, n'est-ce pas?
- 324 - Élève 4 : Mh?
- 325 - Chercheuse : Moi, je suis un peu fatiguée, toi ça va?
- 326 - Élève 4 : Non, moi ça va.
- 327 - Chercheuse : Ça va?
- 328 - Élève 4 : Moi les calculs comme je l'ai fait rapid comme ça, je fais tous tous tous comme ça.
- 329 - Chercheuse : En tout cas, c'était bien ce que tu avais fait-là [*en indiquant « $98 \times 3 = 284$ »*].

- 330 - Élève 4 : Je ne pense pas j'ai trouvé.
- 331 - Chercheuse : Oui, mais tu étais vraiment très proche.
- 332 - Élève 4 : Dommage!
- 333 - Chercheuse : Quoi?
- 334 - Élève 4 : Dommage.
- 335 - Chercheuse : Dommage. Bon, mais t'as déjà beaucoup fait.
- 336 - Élève 4 : Mh?
- 337 - Chercheuse : Tu as déjà beaucoup aujourd'hui.
- 338 - Élève 4 : Je n'ai fait que 2 trucs, quoi!
- 339 - Chercheuse : Je te demandais 3 trucs, donc tu as presque tout fait! Ça va, ça te frustre?
- 340 - Élève 4 : Oui.
- 341 - Chercheuse : Oui? Si tu veux, tu peux continuer à y penser.
- 342 - Élève 4 : J'y pense je ne comprends pas comment je vais trouver, donc...
- 343 - Chercheuse : Mais tu y étais... Tu as fait vraiment très bons raisonnements. Voilà le raisonnement que t'as fait, c'était correct.
- 344 - Élève 4 : Mais alors le résultat non? C'est le résultat qui compte.
- 345 - Chercheuse : Tu te trouves?
- 346 - Élève 4 : Oui.
- 347 - Chercheuse : À mon avis c'est le raisonnement qui compte.
- 348 - Élève 4 : Si le résultat, il est juste ça veut dire que ton raisonnement, même s'il est bizarre il est juste.
- 349 - Chercheuse : Peut-être que tu as fait... Tu as juste de la chance à trouver le bon résultat. Tu sais, ça arrive parfois.
- 350 - Élève 4 : Tu peux faire un bon raisonnement, mais il est faux.
- 351 - Chercheuse : Mais ton raisonnement n'était pas faux.
- 352 - Élève 4 : Ba si, comme comme là [*en indiquant* « $98 \times 3 = 284$ »], vous ne m'avez pas dit, c'est juste, C'est-à-dire c'est pas... Fin, il y a du vrai, mais il y a pas... Vous voyez ce que je veux dire?
- 353 - Chercheuse : Ça veut juste dire que tu as fait un bon raisonnement, tu n'est pas allé jusqu'au bout. Tu vois ce que je veux dire?
- 354 - Élève 4 : Mh.
- 355 - Chercheuse : Bon, si tu veux, tu peux continuer à y penser chez toi. Si tu veux, si ça te fait plaisir, on peut même en parler la prochaine fois. D'accord?
- 356 - Élève 4 : Mh mh.
- 357 - Chercheuse : En tout cas, c'est très bien ce que tu as fait aujourd'hui.
- 358 - Élève 4 : Mh.

359 - Chercheuse : Ça va, t'es pas content ?

360 - Élève 4 : Non.

361 - Chercheuse : Non ? Moi je suis hyper contente déjà.

362 - Élève 4 : Comment, ça ?

363 - Chercheuse : De ce que tu as fait. J'ai trouvé hyper bien.

364 - Élève 4 : Merci.

La suite de carrés : Élève 5

Durée de l'entretien : 20 min 27 s

1 - Chercheuse : Je te donne ça, t'as un stylo, ou si tu peux utiliser le tiens, comme tu veux. T'es pas obligé d'écrire. La feuille est là pour toi, si tu veux ici tu as une autre feuille que tu peux utiliser. Sinon, on va en discuter un peu. Et alors, regarde ces photos. Il y a les 3 premières étapes d'une suite de carrés. Tu vois ces premières première, la deuxième, la troisième. Et la question est : combien faut-il de pailles pour former une suite de 7 carrés ? Alors voilà, tu peux écrire si tu veux. T'es pas obligé. Sinon, on va un peu en discuter et je te propose de dire tout ce que tu penses. D'accord ? M'expliquer un peu ce qui te passe par la tête. Tu peux dessiner si tu veux.

2 - Élève 5 : C'est bon, j'ai trouvé.

3 - Chercheuse : Ah c'est combien alors ?

4 - Élève 5 : 24 pailles.

5 - Chercheuse : Et comment t'as fait ?

6 - Élève 5 : D'abord, j'ai regardé pour cela [*en indiquant les 3 carrés*]. Ça fait 10. Et je me suis dit si c'est pour 7 carrés, je remis 10 ici ça fait 20. J'ai juste rajouté 4.

7 - Chercheuse : Et pourquoi tu as rajouté 4 ?

8 - Élève 5 : Pour que ça fasse au moins 7 carrés.

9 - Chercheuse : D'accord. Est-ce qu'on peut contrôler ? Comment tu pourrais contrôler ?

10 - Élève 5 : Je le dessine.

11 - Chercheuse : Oui, essaie ! T'avais dit combien de carrés ? Combien de pailles déjà ?

12 - Élève 5 : 24.

13 - Chercheuse : 24, d'accord.

14 - Élève 5 : [*L'élève dessine les 7 carrés et compte les côtés*] 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22. Ah. J'ai mal compté.

15 - Chercheuse : Pourquoi tu avais mal compté ?

- 16 - Élève 5 : Il y en avait là [*en indiquant les 3 carrés de la photo*] et un autre ici [*en indiquant en-dessous de la photo des 3 carrés, comme pour aller à la ligne*]. Donc j'avais compté les bords. Si c'était collé et y'en n'aurait pas 2 mais 1 seul. Donc ça fait en fait 21.
- 17 - Chercheuse : D'accord. Super. Je peux passer à la question suivante?
- 18 - Élève 5 : Mh mh.
- 19 - Chercheuse : Alors je peux le prendre? Sinon je te laisse à côté comme ça tu peux te baser sur ça. Alors combien faut-il de pailles pour former une suite de 100 carrés? C'est la même chose, sauf qu'on a beaucoup plus de carrés.
- 20 - Élève 5 : Mh mh. [*L'élève dessine en verticale une suite de carrés*].
- 21 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu essaie de faire, là?
- 22 - Élève 5 : Pour 100 carrés ce que je fais, c'est que je fais une ligne de 10 et je le fais par fois 10.
- 23 - Chercheuse : Donc, là, tu essaies de faire quoi, de dessiner les 100 carrés?
- 24 - Élève 5 : Mh mh. [*L'élève continue sa suite en collant les carrés sur plusieurs côtés*].
- 25 - Chercheuse : Ok, mais il faut continuer la suite, comme là. Tu vois, comme tu l'a fait avant. Donc il faut tous les coller comme si c'était un train.
- 26 - Élève 5 : Ah! [*L'élève efface ce qu'il vient de faire et reprend à dessiner les 100 carrés en horizontale*].
- 27 - Chercheuse : Tu veux m'expliquer qu'est ce que tu veux faire?
- 28 - Élève 5 : En ligne, j'essaie de faire.
- 29 - Chercheuse : De faire les 100 carrés?
- 30 - Élève 5 : Mh mh.
- 31 - Chercheuse : Ça devient un peu long. N'est-ce pas?
- 32 - Élève 5 : Oui.
- 33 - Chercheuse : On peut le faire. Mais est ce qu'on pourrait trouver une manière plus vite, disons, sans les dessiner tous? Est-ce que t'aurais une idée?
- 34 - Élève 5 : Mh mh.
- 35 - Chercheuse : Non? Mais qu'est ce que t'as fait avant en fait, pour les 7 carrés? T'avais déjà trouvé une manière avant de le faire, et après t'as dessiné les 7 carrés pour contrôler. Tu te rappelles qu'est-ce que tu avais fait?
- 36 - Élève 5 : J'avais pris celui là [*en indiquant les 3 carrés*], je l'avais redoublé. Après, j'ai pris juste 1 pour faire 7.
- 37 - Chercheuse : Est-ce que tu arriverais à refaire le calcul pour les 7 carrés.
- 38 - Élève 5 : [*L'élève reste en silence longtemps*].
- 39 - Chercheuse : Ça va?
- 40 - Élève 5 : Eh, oui.

- 41 - **Chercheuse** : Qu'est ce que tu penses? Avant, quand t'as vu ça [*en indiquant la première et la deuxième étape*], avant encore de dessiner là [*en indiquant les 7 carrés*], tu m'avais dit quelque chose de comment trouver les pailles pour 7 carrés. Tu te rappelles? Avant même de dessiner, tu avais dit mais non, mais j'ai trouvé.
- 42 - **Élève 5** : J'avais doublé celui-là [*en indiquant les 3 carrés*].
- 43 - **Chercheuse** : Ouais donc combien ça fait? Combien de pailles il y a, là?
- 44 - **Élève 5** : 10.
- 45 - **Chercheuse** : D'accord. Tu l'avais doublé. Qu'est-ce que tu essaies de faire? Si tu veux, j'ai une calculette et je peux faire des calculs pour toi si c'est ça.
- 46 - **Élève 5** : J'ai trouvé combien il faut de pailles.
- 47 - **Chercheuse** : Combien?
- 48 - **Élève 5** : 25.
- 49 - **Chercheuse** : Pour combien de carrés?
- 50 - **Élève 5** : 100.
- 51 - **Chercheuse** : Comment tu as fait?
- 52 - **Élève 5** : Depuis le début en fait, j'ai essayé de mettre ça [*en indiquant les 3 carrés*] en plusieurs parties, mais c'était trop compliqué.
- 53 - **Chercheuse** : D'accord.
- 54 - **Élève 5** : Donc je me suis juste pris juste un seul carré pour faire 4 [*en indiquant le premier carré et ses 4 pailles*]. Donc j'ai fait 4, 8, 12, etc etc... Jusqu'à arriver à 100.
- 55 - **Élève 5** : Donc, d'accord...
- 56 - **Élève 5** : Il faut 25 pailles... Oui, il faut 25 pailles pour faire 100 carrés.
- 57 - **Chercheuse** : D'accord, mais alors ici, par exemple, combien de pailles pour 1 carré. Tu as dit?
- 58 - **Élève 5** : 4.
- 59 - **Chercheuse** : 4. Et tu te rappelles combien de pailles c'était pour 7 carrés?
- 60 - **Élève 5** : 21.
- 61 - **Chercheuse** : Oui, c'était 22, je pense. Mais, plus ou moins.
- 62 - **Élève 5** : Oui.
- 63 - **Chercheuse** : Donc 22 pour faire 7. Donc... Ici [*en indiquant les 7 carrés dessinés par l'élève*], nous avons 22 pailles. Tu m'as dit 25. 25, ça signifie qu'ici [*en indiquant les 7 carrés*] on en a 22 et on en met encore 1, 2 et 3. 23, 24 et 25. T'es d'accord?
- 64 - **Élève 5** : Oui.
- 65 - **Chercheuse** : Oui? Mais c'était pas mal ce que tu as fait. C'est-à-dire que... Tu

sais qu'est-ce qu'on pourrait faire? On peut essayer avec 10 carrés. Qu'est-ce que tu ferais pour 10 carrés?

66 - Élève 5 : [*L'élève redessine les côtés des carrés qu'il avait dessiné pour les 100 carré et compte les pailles. Après il réfléchit*]. Je crois que j'ai trouvé pour le nombre de pailles.

67 - Chercheuse : Pour combien de carrés?

68 - Élève 5 : Il faut 310 pailles pour 100 carrés.

69 - Chercheuse : Comment tu as fait?

70 - Élève 5 : J'avais vérifié combien de pailles on pouvait mettre pour 10.

71 - Chercheuse : Et comment tu as trouvé pour 10?

72 - Élève 5 : Bah il y en avait 31 et après j'ai fait jusqu'à 10.

73 - Chercheuse : Donc d'accord, ok. Et comment t'as fait le calcul de 31 à 310?

74 - Élève 5 : 31, 92, etc. Etc.

75 - Chercheuse : D'accord. Et oui, d'accord. Super. Et donc, si je te demande; si je connais le nombre de carrés peut-on toujours trouver le nombre de pailles? C'est clair, la question ou pas trop?

76 - Élève 5 : Non.

77 - Chercheuse : Alors, tu vois, avant, nous avons 7 carrés, alors tu as trouvé le nombre de pailles. Après, nous avons dis, j'ai 100 carrés et tu as trouvé le nombre de pailles. La question est : si je connais le nombre des carrés, je peux toujours trouver combien de pailles faut-il pour construire cette suite?

78 - Élève 5 : Oui.

79 - Chercheuse : Oui et comment? Comment on fait?

80 - Élève 5 : Je ne sais pas...

81 - Chercheuse : T'as envie d'y penser un petit peu ou pas trop? Non, c'est bon comme ça. T'es fatigué?

82 - Élève 5 : Non, c'est que pour moi, c'est compliqué.

83 - Chercheuse : Oui, mais ça s'est bien passé, je me trouve. Ok, moi, je te remercie Danny. On arrête, ça va?

84 - Élève 5 : Oui.

85 - Chercheuse : Oui, d'accord.

La suite de carrés : Élève 6

Durée de l'entretien : 16 min 17 s

1 - Chercheuse : Je vais te donner la première tâche. Là, il y a un stylo si tu veux écrire. Il y a des feuilles si tu veux les prendre, sinon tu m'expliques à l'oral. D'accord? C'est comme tu veux.

2 - Élève 6 : D'accord.

3 - Chercheuse : Je te demande juste de me dire tout ce qui passe dans ta tête. Donc tu peux raisonner à voix haute, ok? Regarde ces photos. Il y a 3 premières étapes d'une suite de carrés. Tu vois là il y a la première étape, la deuxième étape, la troisième étape.

4 - Élève 6 : D'accord.

5 - Chercheuse : Et ces carrés sont faits avec des pailles. Tu vois?

6 - Élève 6 : Oui, j'ai vu.

7 - Chercheuse : Et la question est combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés?

8 - Élève 6 : 16.

9 - Chercheuse : Qu'est ce que tu fait?

10 - Élève 6 : 4 fois 4.

11 - Chercheuse : Est-ce que tu veux contrôler?

12 - Élève 6 : Moi je sais que c'est juste 4 fois 4, 16.

13 - Chercheuse : Oui c'est vrai. 4 fois 4 ça fait 13. Euh 16, pardon.

14 - Élève 6 : Bah là il y en a 1, 2, 3, 4 [*en indiquant les 4 pailles du premier carré de la deuxième étape*]. Comme en général c'est plutôt simple à faire, j'ai juste fait, comme il y a 4 carrés, j'ai fait 4. Comme il y a 4 pailles, il faut 4.

15 - Chercheuse : Oui. Est-ce que... Pour la deuxième étape, qu'est-ce que tu ferais donc?

16 - Élève 6 : Ah bah, la deuxième étape, il y en a 8. Il y a 8 pailles. Attendez... 1, 2, 3, 4, 5 [*il compte les pailles pour les 2 carrés*]... Ah! Mais comme elles sont reliées, ça fait qu'il y a 7 pailles. Ah! Je n'avais pas compris. [*Il compte les pailles pour les 3 carrés*] en fait il y en a 10 sur 3. Ah, ça je n'avais pas compris au début.

17 - Chercheuse : Ah non mais c'est pas grave. On est encore au début de toute façon.

18 - Élève 6 : D'accord [*il lit à voix basse la consigne*]. Comme à chaque fois... Ouais, pour une suite de 5, il en faudrait 16 normalement.

19 - Chercheuse : Comment t'as fait?

20 - Élève 6 : En fait, à chaque fois... Par exemple, sur 3, il y en a 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 [*en indiquant les pailles pour les 3 carrés*]. Sur 1 carré quand il y a une suite, il y en a 3.

21 - Chercheuse : D'accord.

22 - Élève 6 : 16, normalement.

23 - Chercheuse : Et alors, c'est toujours la même tâche. Combien faut-il de pailles pour former une suite de 12 carrés?

- 24 - Élève 6 : Je dirais 38.
- 25 - Chercheuse : Comment tu as fait ?
- 26 - Élève 6 : Attendez, non. 38 ou 36, je ne me sais plus. Parce que, en fait, à chaque fois, comme il y en a 3 par suite de 3, ça fait 10 [*en indiquant les 3 carrés*]...
- 27 - Chercheuse : Tu peux écrire si tu veux. Si ça, si ça t'aide. Peut-être, je ferme juste le store parce que...
- 28 - Élève 6 : [*Il écrit « 10+10+10+10 »*] Non, 40.
- 29 - Chercheuse : Qu'est ce que tu fais, là ?
- 30 - Élève 6 : Je me suis dit, à chaque suite de 3 en fait il y en a 10. Et comme 4 suites de 3 pour faire 12 carrés, ça doit faire 40.
- 31 - Chercheuse : D'accord. Et donc par exemple, je ne sais pas... Pour 6 carrés, qu'est-ce que tu ferais ?
- 32 - Élève 6 : Bah 6 carrés je ferais comme ça [*il cache 2 « 10 » de son écriture « 10+10+10+10 »*].
- 33 - Chercheuse : Et est-ce que c'est ce que tu pourrais contrôler ?
- 34 - Élève 6 : Je ne sais pas trop comment contrôler. Car si j'ai... Non, j'allais dire 10 pailles... mais non. Ah bah, je pourrais faire une suite de carrés comme ça [*il dessine une suite de 3 carrés*]. Euh je dois contrôler pour le 6 ou pour les 40 ?
- 35 - Chercheuse : C'est comme tu veux.
- 36 - Élève 6 : Je vais contrôler déjà pour le 6.
- 37 - Chercheuse : D'accord.
- 38 - Élève 6 : [*il complète son dessin pour avoir 6 carrés et compte les pailles*] 19 ! Oulà ! [*Il recompte les pailles*] Ah non 19.
- 39 - Chercheuse : Qu'est ce que tu avais dit avant ?
- 40 - Élève 6 : 20.
- 41 - Chercheuse : Et à ton avis pourquoi 19 et non 20 ?
- 42 - Élève 6 : 6... Je crois qu'il y a un truc 1 sur 2. Un truc comme ça. Je pense que j'ai fait le calcul un poil trop rapide et précipité. Je crois que c'est ça qui m'a fait faire le 19.
- 43 - Chercheuse : Donc tu penses que les 19 est incorrecte ?
- 44 - Élève 6 : Non, il est juste mais ce qui m'a fait faire le 20. Je pense que j'ai fait un calcul un peu trop rapide.
- 45 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu avais fait pour obtenir le 20 ?
- 46 - Élève 6 : J'avais fait 3, 3 fois je ne sais pas 3, 6, 9... En fait, il y en a 4 comme ça. Par exemple au début, ça ça fait 4 [*en comptant les pailles du premier carré*]. Là il y en a 3 [*en comptant les pailles du deuxième carré*]. 1, 2, 3 [*en comptant les pailles du troisième carré*]. Au début il y en a 4. Alors ça fait que ça fait 19.

- 47 - Chercheuse : Ah et donc?
- 48 - Élève 6 : Je me suis trompé.
- 49 - Chercheuse : Et donc, pour 7 combien?
- 50 - Élève 6 : Pour 7? [Il ajoute le septième carré sur le dessin] Bah là ça fait 19. 20, 21, 22. 22,
- 51 - Chercheuse : Et donc, si on revient à 12 carrés?
- 52 - Élève 6 : À 12?
- 53 - Chercheuse : Mh mh.
- 54 - Élève 6 : Là je rajoute [il ajoute les carrés à son dessin jusqu'à 12 carrés]... Peut-être que j'ai mal dessiné une fois, ça peut arriver.
- 55 - Chercheuse : Non, là je pense que c'est correct, non?
- 56 - Élève 6 : Oui. 8, 9, 10, 11, 12. Là ça fait [il compte les pailles] 37.
- 57 - Chercheuse : Avant tu te rappelles ce que tu avais dit?
- 58 - Élève 6 : J'avais dit 36 et 38.
- 59 - Chercheuse : Oui, et après tu avais fait ça [en indiquant « $10+10+10+10$ »].
- 60 - Élève 6 : Ouais, ça faisait 40 et.. Je crois que j'étais trop précipité.
- 61 - Chercheuse : D'accord. Et donc, est-ce que... Okay, je te pose une autre question, d'accord? C'est toujours la même tâche. Cette fois, on se demande combien de pailles pour 100 carrés.
- 62 - Élève 6 : Je peux faire un calcul posé ou je dois répondre de tête.
- 63 - Chercheuse : Non. Tu peux écrire, mais si tu arrives sans dessiner les carrés parce que sinon ça devient un peu long aller jusqu'à 100 n'est-ce pas?
- 64 - Élève 6 : Eh oui! (inaudible).
- 65 - Chercheuse : On risque un peu de se perdre quand on...
- 66 - Élève 6 : Combien faut-il de pailles pour former 100 carrés? 301 je dirais, de tête...
- 67 - Chercheuse : Comment tu as fait?
- 68 - Élève 6 : Le premier il a forcément 4. Après le reste il a que des 3.
- 69 - Chercheuse : D'accord.
- 70 - Élève 6 : Si... J'ai fait de tête... J'ai essayé sans poser.
- 71 - Chercheuse : D'accord. Et donc quelles opérations t'as fait pour obtenir le résultat?
- 72 - Élève 6 : J'ai fait 4 pour le premier et après, j'ai fait 3 fois 99 ça faisait 297 plus 4 ça fait 301.
- 73 - Chercheuse : Et maintenant, en connaissant le nombre de carrés. Pourrais-tu toujours trouver le nombre de pailles?
- 74 - Élève 6 : En connaissant le nombre de carrés, pourrais-tu toujours trouver le

nombre de pailles? Ça dépend quel chiffre! (inaudible) Moi je dirais oui. J'écris ce que je pense ou je le dis, à l'oral.

75 - Chercheuse : Comme tu préfères.

76 - Élève 6 : Moi je pense que oui, tu peux. Parce que, en fait, si je réfléchis bien, normalement, le premier il a 4. Le reste ont 3. Tu fais un calcul normalement tu trouves assez précisément le nombre.

77 - Chercheuse : Et quel calcul?

78 - Élève 6 : Premier tu fais 4 et après plus 3 le reste de carrés par exemple.

79 - Chercheuse : D'accord. Ok, donc, si je prends un nombre quelconque...

80 - Élève 6 : Normalement ouais...?

81 - Chercheuse : Et quel calcul tu fais?

82 - Élève 6 : Un nombre quelconque c'est quoi déjà?

83 - Chercheuse : Un nombre quelconque c'est n'importe quel nombre.

84 - Élève 6 : Par exemple... Je dis n'importe quoi. J'ai le 7. 7 carrés. Donc tu fais 4 et après 6 fois 3 ça fait 18, je dirais que ça fait 22.

85 - Chercheuse : Est-ce que tu arriverais à me l'expliquer sans utiliser des nombres précis? Par exemple là, tu as utilisé le [inaudible].

86 - Élève 6 : Tu fais le premier carré en entier et après les autres, tu comptes une barre en moins.

87 - Chercheuse : D'accord. C'est quoi le calcul que tu fais?

88 - Élève 6 : Tu fais un carré entier plus un carré sans une barre à chaque fois. Voilà. [Inaudible]?

89 - Chercheuse : Non, c'est parfait! T'es prêt encore pour une dernière question? C'est toujours la même tâche okay? Tu a acheté un paquet de 200 pailles. Combien de carrés peux-tu construire? Tu vois, c'est l'inverse. Maintenant, on a les pailles et on veut comprendre combien de carrés.

90 - Élève 6 : Le premier déjà il a 4 de carrés. Et après ça fait 196 qui restent. 3 fois 40, 120. 3 fois 60 ça fait 180. 3 fois 85... Non.

91 - Chercheuse : Tu peux écrire si tu veux.

92 - Élève 6 : [Il écrit les calculs « $3 \times 60 = 180$ », « $3 \times 63 = 189$ », « $64 \times 3 = 192$ », « $3 \times 64 = 192$... »] Ah bah oui, 3 fois 64. 3 fois 64 ça fait 192... Non...

93 - Chercheuse : Si jamais j'ai une calculette, là.

94 - Élève 6 : Non c'est bon. Je me débrouille. C'est... ça fait 180 plus 12 ça fait 192. Et 192... J'y suis toujours pas. Et 3 fois 65 ça fait 195 [il écrit « $3 \times 65 = 195$ »]. Ah non. 195 plus 4 ça fait 199. Alors il restera forcément un carré.

95 - Chercheuse : Un carré?

96 - Élève 6 : Euh, une paille.

97 - Chercheuse : Ok et donc, combien de carrés?

98 - Élève 6 : 66.

99 - Chercheuse : 66 carrés. Voilà. Super, merci beaucoup pour aujourd'hui. C'est ce que je voulais te demander. On va se voir encore 3 fois si c'est bien pour toi, si tu est d'accord.

100 - Élève 6 : [*Inaudible*].

101 - Chercheuse : Tu veux savoir quand?

102 - Élève 6 : Oui, je veux bien.

103 - Chercheuse : Alors, [*prénom de l'élève*]. On va se voir mercredi.

104 - Élève 6 : Ce mercredi?

105 - Chercheuse : Oui, après jeudi et vendredi.

106 - Élève 6 : D'accord.

107 - Chercheuse : Ça va?

108 - Élève 6 : Très bien.

La suite de carrés : Élève 7

Durée de l'entretien : 20 min 55 s

1 - Chercheuse : Regarde là, t'as 3 photos et ces photos sont les premières 3 étapes d'une suite de carrés. Ça cest la première étape, la deuxième et la troisième. Chaque étape est faite par des pailles et donc la question est... La première question est : combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés?

2 - Élève 7 : D'accord. Ok.

3 - Chercheuse : La question est claire?

4 - Élève 7 : Oui. J'ai déjà trouvé.

5 - Chercheuse : Combien?

6 - Élève 7 : Pour avoir 4 pailles? 16 pailles.

7 - Chercheuse : Comment tu as fait?

8 - Élève 7 : Ben vous voyez. Là il y a 1, 2, 3, 4, dans un carré il y a 4 pailles [*en pointant les 4 pailles de la première étape*]. Et si je fais genre 4, 4, 4, carrés avec des pailles, ça me fait 12 pailles. Non, 16 pailles, pardon.

9 - Chercheuse : Et donc, est-ce que la manière de faire marche, par exemple pour les autres étapes que tu as là?

10 - Élève 7 : Oui. Genre, comment? Je n'ai pas très bien compris.

11 - Chercheuse : Oui. Par exemple, comment tu ferais pour trouver les pailles dans la deuxième étape?

12 - Élève 7 : Je les compte comme ça [*en pointant les pailles de la deuxième étape*]. Là il y en a 7. Et dans la troisième je compte, il y en a 10.

- 13 - Chercheuse :** Et pour la quatrième, comment tu avais fait ?
- 14 - Élève 7 :** Je l'ai fait chaque carré, mais j'ajoute pas encore une paille pour chaque carré. Vous voyez, 1, 2, 3, 4 [*en pointant les pailles du premier carré de la troisième étape*]. Et là il y a 2 pailles qui sont dans d'autres carrés, dans les 2 carrés [*en pointant les 2 pailles verticales pas aux extrémités de la troisième étape*]. 1, 2, 3, 4 [*en pointant les 4 pailles du premier carré*]. 2 pailles-là [*en pointant les deux pailles horizontales du deuxième carré*] et 2 pailles-là [*en pointant la dernière paille du deuxième carré et la celle horizontale en bas du troisième carré*], ça fait aussi 4, si on a ça [*en cachant le premier et le troisième carré de la troisième étape*].
- 15 - Chercheuse :** Et donc, tu as dit pour la quatrième étape, combien de pailles tu utilises ?
- 16 - Élève 7 :** J'utilise environ 3. Parce que je rajoute là une là et là [*en faisant le signe des 3 pailles qu'il faut ajouter pour la quatrième étape*].
- 17 - Chercheuse :** Au total ?
- 18 - Élève 7 :** Il y en a 13.
- 19 - Chercheuse :** Ok. Avant tu avais dit une autre chose, avant. Tu te rappelles ce que tu avais dit ?
- 20 - Élève 7 :** J'avais fait 4, 4, 4.
- 21 - Chercheuse :** Oui.
- 22 - Élève 7 :** Je peux aussi faire ça.
- 23 - Chercheuse :** Mais est-ce que tu obtiens la même chose ?
- 24 - Élève 7 :** Non j'obtiens un peu plus, je crois.
- 25 - Chercheuse :** T'avais dit avant, t'avais dit 4 fois 4 qui fait 16. Et là, en fait t'a dit que tu en as combien pour 4 carrés ?
- 26 - Élève 7 :** Ici [*en pointant la troisième étape*] ?
- 27 - Chercheuse :** Pour 4 carrés ?
- 28 - Élève 7 :** 13.
- 29 - Chercheuse :** 13. Donc c'est lequel qui est correct ? 13 ou 16 ?
- 30 - Élève 7 :** 16.
- 31 - Chercheuse :** Tu peux essayer de dessiner si tu veux, pour contrôler.
- 32 - Élève 7 :** [*Il dessine les 4 carrés et compte les pailles*] Il y en a 12.
- 33 - Chercheuse :** Combien de pailles ?
- 34 - Élève 7 :** 13.
- 35 - Chercheuse :** 13. Donc, ce que tu as fait avant, c'est à dire 4 fois 4. Pourquoi ça ne donne pas le même résultat ?
- 36 - Élève 7 :** Parce qu'il y a plus de paille dans un... Ils sont répartis... Au lieu de les coller, les carrés... Au lieu de faire plusieurs pailles en carrés. Genre 4, 4, 4, 4.

En faisant des carrés mais éloignés. Et au lieu de coller. Quand on colle ça fait des carrés mais ça fait moins de pailles.

37 - Chercheuse : Je comprends. Donc comment tu pourrais faire...

38 - Élève 7 : Euhh... Je mets 3 pailles là [*en pointant le premier carré*], je fais un carré normal, 2 là [*en pointant le deuxième et troisième carré de la troisième étape*]... Des trucs comme ça.

39 - Chercheuse : Donc pour 5 carrés, combien de pailles ?

40 - Élève 7 : 16. Parce que je rajoute 3.

41 - Chercheuse : D'accord. Est-ce que, c'est toujours la même tâche mais c'est une autre question. Combien faut-il de pailles pour former une suite de 12 carrés ?

42 - Élève 7 : 36.

43 - Chercheuse : Comment tu as fait ?

44 - Élève 7 : J'ai fait 13 fois 3.

45 - Chercheuse : D'accord. Pourquoi t'as fait 12 fois 3 ?

46 - Élève 7 : Parce que, on rajoute, chaque fois, 3 pailles. Et on fait un carré. Genre là, 3 on rajoute 3 et ainsi de suite.

47 - Chercheuse : On peut dire que t'as trouvé une formule pour trouver les pailles. Est-ce que ta formule marche ? Comment tu la ferais, par exemple, pour les 4 carrés, avec cette formule ? Tu peux écrire comme ça tu ne l'oublie pas, ce que tu as fait.

48 - Élève 7 : Pour les 4 carrés, genre...

49 - Chercheuse : Pour les 12 carrés qu'est-ce que tu as fait ?

50 - Élève 7 : J'ai fait 12 fois 3 [*il pose le calcul « $12 \times 3 = 36$ »*].

51 - Chercheuse : Ouais. On l'écrit comme ça, on a une trace pour après. Et donc pour les 13 carrés qu'est-ce que tu ferais ?

52 - Élève 7 : 13 carrés ? J'aurais presque la même chose, mais moins.

53 - Chercheuse : C'est-à-dire ?

54 - Élève 7 : 6 fois 3... Non... [*L'élève dessine les 4 carrés et il compte les pailles*].

55 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu est entrain de faire, là ?

56 - Élève 7 : Là, je fais 6 fois 2 et je rajoute 1. Plus 1. Et là ça fait 13, ce que je viens de faire [*il compte à nouveau les pailles*].

57 - Chercheuse : D'accord. Donc là, tu as utilisé 13 pailles.

58 - Élève 7 : Mh mh.

59 - Chercheuse : D'accord. Et pour les 13 carrés, combien de pailles ?

60 - Élève 7 : 13 pailles ?

61 - Chercheuse : Non 13 carrés.

62 - Élève 7 : Ah, carrés, carrés. 39.

- 63 - Chercheuse : Comment tu as fait ?
- 64 - Élève 7 : J'ai fait plus 3 sur 36.
- 65 - Chercheuse : D'accord. Et alors pour, je ne sais pas, pour 24 carrés, combien de pailles ?
- 66 - Élève 7 : 24. [*Il pose en colonne « $24 \times 3 = 72$ »*] 72.
- 67 - Chercheuse : D'accord. Et donc cette formule, disons que t'as trouvé, comment tu pourrais l'appliquer à 4 carrés, par exemple ? Qu'est ce que tu ferais ?
- 68 - Élève 7 : J'aurais 4 fois 3.
- 69 - Chercheuse : Ok, 4 fois 3.
- 70 - Élève 7 : C'est égal à 12.
- 71 - Chercheuse : Oui. Est-ce que ça joue avec ce que tu avais trouvé avant ?
- 72 - Élève 7 : Ouais.
- 73 - Chercheuse : Pourquoi ? Combien de pailles tu avais avant, pour les 4 carrés là que tu as dessinés ?
- 74 - Élève 7 : J'avais 4, 4, 4, 4. Et après, j'ai vu que ce n'était pas la même chose que je faisais moi. J'ai reproduit le dessin, mais en plus, des trucs comme ça.
- 75 - Chercheuse : Donc, avec ta formule tu as obtenu 12 pailles pour 4 carrés. Et ici [*en pointant le dessin de l'élève des 4 carrés*], combien de pailles tu as ?
- 76 - Élève 7 : J'en ai 13 [*il compte les pailles*].
- 77 - Chercheuse : Donc là t'as 13 pailles et avec ta formule tu as obtenu 12. Est-ce que c'est la même chose ?
- 78 - Élève 7 : Non. Peut-être que je me suis trompé.
- 79 - Chercheuse : Mais ton raisonnement pour obtenir, pour faire fois 3 avait du sens. Il faut juste l'ajuster un petit peu.
- 80 - Élève 7 : [*Il dessine à nouveau les 4 carrés et compte les pailles à paquets de 3*] Mais ce n'est pas 12 parce que j'ai fait 4 fois 3, ça fait 12. Et pour avoir le nombre de pailles exact ben 3, 3, 3, 3, 3.
- 81 - Chercheuse : Voilà tu fais 3, 3, 3, 3, 3. Et si tu fais 3, 3, 3, 3, 3. Qu'est-ce que tu obtiens, là [*en pointant le dessin des 4 carrés*] ? Tu l'as dessiné.
- 82 - Élève 7 : [*Il compte les pailles*] 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.
- 83 - Chercheuse : Oui, mais qu'est-ce que tu as dû faire ? Parce que là t'as dessiné et tu avais fait juste. Tu avais fait 1-2-3, 1-2-3, 1-2-3 [*en mimant les 3 côtés des carrés*]...Et tu avais une suite ouverte.
- 84 - Élève 7 : Oui oui.
- 85 - Chercheuse : N'est-ce pas ? Qu'est-ce que t'as fait à la fin, quand tu l'as fermée ?
- 86 - Élève 7 : J'ai compté, ça me donnait 12. Je voyais que ce n'est pas le truc qu'il fallait, donc voilà ça fait 13.

- 87 - **Chercheuse** : D'accord. Donc pour les 5 carrés, qu'est-ce que tu ferais?
- 88 - **Élève 7** : J'aurais dessiné comme ça [*il dessine les 5 carrés et compte les pailles*].
Là ça me fait 16.
- 89 - **Chercheuse** : Et donc si tu voulais arriver à 16 avec des calculs?
- 90 - **Élève 7** : J'aurais fait... 3 plus 13. Plus 13.
- 91 - **Chercheuse** : D'accord. Et maintenant, je te pose cette question-là, c'est toujours la même tâche, mais on continue donc combien de te faut-il de pailles pour former une suite de 100 carrés?
- 92 - **Élève 7** : 300 je dirais.
- 93 - **Chercheuse** : Ouais.
- 94 - **Élève 7** : Ou 303, un truc comme ça.
- 95 - **Chercheuse** : Quel est ton raisonnement?
- 96 - **Élève 7** : J'aurais fait 3 fois 100, un truc comme ça.
- 97 - **Chercheuse** : Oui. Pourquoi tu fais 3 fois 100?
- 98 - **Élève 7** : Parce que je pensais faire genre 3, 3, 3 et tout ça. 3 fois 100, 300. Mais je ne crois pas que c'est le même résultat. Soit 303 carrés ou 297 je pense. Je ne suis pas très sûre. Parce que vous voyez ou non... Soit 301 ou 259 comme ça.... Il fallait rajouter un 1 quand on fait des calculs avec des livrets, il nous manque toujours 1. On peut aussi faire avec les livrets. Mais on rejoute 1. Je dirais que c'est 301.
- 99 - **Chercheuse** : D'accord. Et donc, regarde, en connaissant le nombre de carrés. Pourrais-tu toujours trouver le nombre de pailles?
- 100 - **Élève 7** : Oui. En faisant des calculs comme ça. Genre, à chaque fois, il y a 3 pailles en faisant des carrés, on rajoute 1, 1 de plus. Donc 3 fois 4, 12, plus 1.
- 101 - **Chercheuse** : Est-ce que tu arriverais à me l'expliquer sans utiliser des nombres? Sans utiliser 12, par exemple.
- 102 - **Élève 7** : Sans utiliser 12?
- 103 - **Chercheuse** : Comment tu ferais pour trouver les pailles nécessaires pour un nombre de carré quelconque?
- 104 - **Élève 7** : Déjà j'aurais fait 12 carrés, enfin 12 traits. 12... 12 trucs, pailles et si je vois, qui manque un petit trait, je rajoute et ça me fera le nombre exacte de nombre de traits.
- 105 - **Chercheuse** : Et si tu devais l'expliquer à quelqu'un qui n'a pas très bien compris la question, comment faire pour le trouver le nombre de pailles nécessaires pour un nombre... Un nombre de carrés quelconque. Qu'est-ce que tu lui dirais?
- 106 - **Élève 7** : Genre j'aurais fait... Je ne sais pas.

- 107 - **Chercheuse** : Je peux te poser une dernière question?
- 108 - **Élève 7** : Mh mh.
- 109 - **Chercheuse** : C'est toujours sur la même chose, mais maintenant, la question change un peu. C'est-à-dire que maintenant, t'as le nombre de pailles. Tu as acheté 200 pailles.
- 110 - **Élève 7** : Pour 200 pailles? J'aurais fais je crois, 197 carré, je crois. Ou 203, je ne suis pas très sûr. 197 je crois.
- 111 - **Chercheuse** : Quel est ton raisonnement?
- 112 - **Élève 7** : J'ai fait 3, 3, 3, 3, 3. Dans ma tête, j'ai fait 200 moins 3. Ou peut-être c'est plus mais c'est pas très sûr.
- 113 - **Chercheuse** : Tu veux y penser encore un petit moment?
- 114 - **Élève 7** : Mh?
- 115 - **Chercheuse** : Tu veux y penser encore un petit moment?
- 116 - **Élève 7** : Oui. [Il dessine deux carré sans la paille qui ferme] c'est 197 je crois.
- 117 - **Chercheuse** : Comment tu as fait pour arriver à 197?
- 118 - **Élève 7** : J'ai fait moins 3... Ouais moins 3. 200 moins 3.
- 119 - **Chercheuse** : Donc avec 200 pailles, tu peux construire 197 carrés?
- 120 - **Élève 7** : Oui.
- 121 - **Chercheuse** : Ok. C'était les questions que je voulais te poser aujourd'hui. Est-ce que tu as quelques questions, quelques remarques, quelque chose que tu veux ajouter?
- 122 - **Élève 7** : Non.

La suite de carrés : Élève 8

Durée de l'entretien : 52 min 26 s

- 1 - **Chercheuse** : Je vais te donner une première tâche. T'as un stylo peut-être?
- 2 - **Élève 8** : Non.
- 3 - **Chercheuse** : Tu peux écrire si tu veux, tu peux m'expliquer à l'orale. Ici tu as des feuilles, si tu veux en prendre. Et alors je te donne une tâche, tu peux y réfléchir. Et si t'as quelques questions n'hésite pas, je te demande juste de me dire tout ce que tu penses. D'accord?
- 4 - **Élève 8** : Ok.
- 5 - **Chercheuse** : Regarde ces photos, il y a les 3 premières étapes d'une suite de carrés. Première étape, deuxième étape, troisième étape. La question est combien faut-il de pailles, tu vois là c'est constituée par des pailles. Combien faut-il de pailles pour construire une suite de 4 carrés?
- 6 - **Élève 8** : 10.

- 7 - Chercheuse : Comme tu as fait ?
- 8 - Élève 8 : 1, 2, 3. 1, 2, 3. 1, 2, 3. 1, 2, 3. Je sais que 3 plus 3 ça fait 6 et plus 1.
- 9 - Chercheuse : D'accord et ça c'est 10 pailles pour combien de carrés ?
- 10 - Élève 8 : 10 pailles pour 3 carrés.
- 11 - Chercheuse : D'accord. Et donc pour 4 carrés ? Combien de pailles ?
- 12 - Élève 8 : 13.
- 13 - Chercheuse : Qu'est ce que t'as fait ? Comment t'as fait pour obtenir 13 ?
- 14 - Élève 8 : Euh là, une là... J'en ai imaginé une là, une là, une là [*en indiquant les 3 pailles à ajouter pour le quatrième carré*].
- 15 - Chercheuse : Et donc pour 5 carrés.
- 16 - Élève 8 : 16.
- 17 - Chercheuse : Qu'est ce que t'as fait ?
- 18 - Élève 8 : J'ai rajouté 3.
- 19 - Chercheuse : D'accord, alors je te pose une autre question. Combien te faut-il de pailles pour construire une suite comme on l'a vu avant de 12 carrés ? La suite, c'est toujours de ce type-là [*en indiquant les photos*].
- 20 - Élève 8 : [*L'élève compte les pailles pour les 3 carrés*] 120 ?
- 21 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu as fait ?
- 22 - Élève 8 : J'ai fait 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 [*en comptant les pailles pour le 3 carrés*].
Fois 3. Je sais que c'est fois 10. Du coup je fais 12 fois 10.
- 23 - Chercheuse : Pourquoi c'est fois 10, là ?
- 24 - Élève 8 : Parce qu'il y a 10 pailles.
- 25 - Chercheuse : Donc il y a 10 pailles pour combien de carrés ?
- 26 - Élève 8 : Pour 3.
- 27 - Chercheuse : Ouais. T'es en train de réfléchir ?
- 28 - Élève 8 : Oui.
- 29 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu penses ?
- 30 - Élève 8 : Je peux écrire quelque part ?
- 31 - Chercheuse : Oui, là. Soit tu peux prendre une feuille, c'est comme tu veux.
- 32 - Élève 8 : [*Il pose en colonne « 12x4=48 »*] 48 ?
- 33 - Chercheuse : Oui, qu'est-ce que tu as fait ?
- 34 - Élève 8 : J'ai fait 12 fois 4. Parce qu'il y a 4 pailles à chaque fois. Non pas à chaque fois parce que là il y en a que 2 [*en indiquant le carré du milieu des 3 carrés*]. [*Il fait des gestes pour les pailles à rajouter aux 3 carrés pour arriver à 10*] 37 carrés en plus ?
- 35 - Chercheuse : Tu as dis 37 carrés en plus ?
- 36 - Élève 8 : Oui.

37 - Chercheuse : En plus de quoi?

38 - Élève 8 : En plus de ces 3-là.

39 - Chercheuse : D'accord. Donc 37 pailles. Comment tu as fait pour arriver à 37?

40 - Élève 8 : Là déjà il y a 10 pailles [*en indiquant les 3 carrés*]. Je me suis dit ça, il faut que j'en rajoute 9, des carrés. J'ai compté avec mes doigts. J'ai compté 1, 2, 3 [*en indiquant les 3 pailles qu'on ajoute à chaque fois*]. 1, 2, 3. 1, 2, 3. 1, 2, 3. 1, 2, 3. Jusqu'à arriver à 9. Pour avoir 9 carrés.

41 - Chercheuse : D'accord.

42 - Élève 8 : Et j'ai imaginé. Du coup, je comptais les pailles à chaque fois... À chaque fois que j'en comptais 3 je faisais ça comme ça, jusqu'à 9.

43 - Chercheuse : D'accord. Est-ce que... C'est très bien la méthode que tu as utilisé. Est-ce que tu arriverais à le faire avec un calcul comme t'as fait avant? Pas forcément le même calcul.

44 - Élève 8 : Déjà, Je pense qu'il faut imaginer le calcul d'ici [*en indiquant le dessin des 3 carrés*], pour peut être arriver à celui-là là [*en indiquant la feuilles des 12 carrés*]...

45 - Chercheuse : Qu'est ce que tu es en train de penser?

46 - Élève 8 : Une manière de faire, de pouvoir mettre, enfin avoir 12 carrés. Le nombre de pailles, je sais combien il y en a, du coup je sais la réponse. Je dois faire 12 et mettre un plus un moins, un divisés, un fois, quelque chose. J'essaie de trouver quel chiffre c'est.

47 - Chercheuse : Tu as quelques idées?

48 - Élève 8 : Non. Parce que si on prend par exemple que l'étape 1, ce serait plus facile de faire 1, 2, 3, 4 [*en indiquant les 4 pailles du premier carré*] fois 12. Mais je ne pense pas que ça donnerait la bonne réponse.

49 - Chercheuse : Et pourquoi ça ne donne pas la bonne réponse?

50 - Élève 8 : Parce que là il y en a 4 et ben... 12 fois 4 ça fait plus que 37.

51 - Chercheuse : D'accord. Peut-être tu pourrais déjà essayer de trouver une opération pour trouver combien de pailles dans la suite de 4 carrés.

52 - Élève 8 : Comment ça?

53 - Chercheuse : La même chose qu'on est en train de faire, mais sur la suite de 4 carrés. Tu te rappelles combien de pailles on utilise pour faire 4 carrés?

54 - Élève 8 : [*Il compte les pailles*] 13?

55 - Chercheuse : Voilà, exactement. Est-ce que tu arriverais là à trouver des opérations à faire pour trouver les pailles? À quoi tu penses, là?

56 - Élève 8 : De faire euh...Faut que je trouve un calcul à faire, dont la réponse, c'est 13 avec 4 dans ce calcul.

- 57 - Chercheuse : Oui, si on arrive oui.
- 58 - Chercheuse : T'as quelques pistes ou pas?
- 59 - Élève 8 : Non. Ouais, non.
- 60 - Chercheuse : Je t'écris ici, le nombre de l'étape [*elle écrit « 1e », etc.*]. Si tu m'écris à côté combien de pailles tu as besoin.
- 61 - Élève 8 : À chaque fois?
- 62 - Chercheuse : Oui. Ça c'est la première étape. Combien de pailles on a utilisé pour la première étape?
- 63 - Élève 8 : Pour ça?
- 64 - Chercheuse : Oui.
- 65 - Élève 8 : [*L'élève complète correctement la fiche.*]
- 66 - Chercheuse : Comment tu as fait pour remplir les lignes?
- 67 - Élève 8 : J'ai fait plus 3.
- 68 - Chercheuse : Pourquoi tu as rajouté plus 3?
- 69 - Élève 8 : Parce que c'est à chaque fois 3. Tu fais une étape, ça fait 1, 2, 3. Après celui-là il va pour l'autre, 1, 2, 3. 1, 2, 3, après celui-là il va pour l'autre...
- 70 - Chercheuse : D'accord. Donc à chaque étape, on ajoute 3 très bien. Et est-ce que cela te donne quelques pistes pour trouver un calcul à faire?
- 71 - Élève 8 : Ben 4... C'est le quatrième étape. Le résultat est 13.
- 72 - Chercheuse : Tu est entrain de penser à quelque chose?
- 73 - Élève 8 : Oui. Là je dois faire un calcul qui le résultat est 13. Qui doit avoir la logique avec ça?
- 74 - Chercheuse : Mh mh.
- 75 - Élève 8 : [*Il dessine 4 carrés*] Mais du coup, là je ne comprends pas. Comment je sais que j'ai trouvé le chiffre en plus? Ça va être 3. Non ça ne peut pas être 3.
- 76 - Chercheuse : Pourquoi 3?
- 77 - Élève 8 : 1, 2, 3. 1, 2, 3. 1, 2, 3. 1, 2, 3. 1, 2, 3. Là sauf qu'il en reste 1 [*en indiquant la dernière paille des 4 carrés*]. Ce n'est pas logique.
- 78 - Chercheuse : T'es pas obligé de faire un seul calcul.
- 79 - Élève 8 : Comment ça?
- 80 - Chercheuse : C'est à dire, tu peux en faire plus que 1. Pour obtenir 13.
- 81 - Élève 8 : [*Il pose en colonne « 13+3=16 »*].
- 82 - Chercheuse : Oui donc, tu as pris les carrés... Les pailles de 3 carrés et tu as rajouté 3 pailles. C'est juste?
- 83 - Élève 8 : Mh mh. [*Inaudible*] C'est bon, non?
- 84 - Chercheuse : Oui. Et donc pour 5 carrés, qu'est-ce que tu ferais?
- 85 - Élève 8 : Je fais plus 3.

- 86 - Chercheuse : D'accord.
- 87 - Élève 8 : Euh je ferais comme ça [*il dessine le cinquième carré et calcule en colonne « $13+3=16$ »*].
- 88 - Chercheuse : Toujours la même tâche. On fait toujours sur ça et la question est maintenant : combien de pailles pour 100 carrés?
- 89 - Élève 8 : En soit je crois que j'ai compris la méthode, mais c'est... Si je fais trop de carrés, ça va être lent. Je vais essayer de trouver une autre façon.
- 90 - Chercheuse : Mh mh.
- 91 - Élève 8 : [*Il pose en colonne « $25x3$ » et après corrige en « $25x4$ »*].
- 92 - Chercheuse : Pourquoi tu avais mis 3 avant?
- 93 - Élève 8 : Euh parce que c'est 1, 2, 3. 1, 2, 3.
- 94 - Chercheuse : Pourquoi tu as changé à 4 maintenant?
- 95 - Élève 8 : Je me suis dit les 4 côtés. 4. 1, 2, 3, 4. 1, 2, 3, 4. Je ne sais pas.
- 96 - Chercheuse : Ce sera plutôt 4 ou 3?
- 97 - Élève 8 : Ça sera je pense 3. Sauf que ça ne fera pas ça.
- 98 - Chercheuse : Là qu'est-ce que tu fais? Tu essaies pour 25?
- 99 - Élève 8 : Oui.
- 100 - Chercheuse : 25 quoi?
- 101 - Élève 8 : Comment ça?
- 102 - Chercheuse : 25 carrés?
- 103 - Élève 8 : Oui.
- 104 - Chercheuse : Oui, d'accord.
- 105 - Élève 8 : Il y a... Ouais non. Euh... [*il calcule en colonne « $97+3=100$ » et après il dessine une suite de carrés et compte les pailles*].
- 106 - Chercheuse : Combien de carrés tu as dessiné?
- 107 - Élève 8 : 33.
- 108 - Chercheuse : D'accord. Qu'est ce que tu voulais faire avec cette suite de carrés?
- 109 - Élève 8 : Dèjà, s'il doit y avoir 100 pailles, il doit à chaque fois en avoir 3.
- 110 - Chercheuse : Fait attention, regarde, c'est 100 carrés.
- 111 - Élève 8 : [*L'élève compte les carrés qu'il avait dessiné et il en ajoute d'autres*].
- 112 - Chercheuse : À partir du dessin que tu as fait, est-ce que tu arriverais sans les compter?
- 113 - Élève 8 : Comment ça?
- 114 - Chercheuse : À trouver le nombre de pailles.
- 115 - Élève 8 : Ben il y en a 100. Non, il y a 100 carrés, du coup ce ne sera pas égal à 100. Je pense que ça va être 100 plus quelque chose égale aux chiffre de

pailles.

116 - Chercheuse : Mh mh. Pas forcément. On peut avoir même une autre opération si on veut.

117 - Élève 8 : Comment ça?

118 - Chercheuse : Tu as dit 100 plus quelque chose.

119 - Élève 8 : Ou moins ou fois ou...

120 - Chercheuse : Voilà, exactement.

121 - Élève 8 : Oui. *[il écrit un calcul en colonne « à trous ». Il écrit « 100 »]* 100, là il y a réponse *[il laisse un trou]*, là on ne sais pas *[en indiquant l'opération]* là non plus *[en indiquant le deuxième nombre]*. Là au-dessus, c'est le nombre de, mettre le nombre de pailles *[en indiquant la place du deuxième nombre]*. Et vu que ça c'est le nombre de carrés *[en indiquant « 100 »]*. Non, je ne sais pas... Non, ce doit être le nombre de pailles en-dessous et au-dessus le nombre de carrés. *[Il compte les pailles dans son dessin]*.

122 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu as fait, là? Tu m'expliques?

123 - Élève 8 : *[Il écrit « 3 » à la place du deuxième nombre inconnu dans son opération à trous, la multiplication comme opération et 300 comme résultat]*. Il faut 300 pailles pour faire 100 carrés.

124 - Chercheuse : Comment tu as fait?

125 - Élève 8 : Ben j'ai fait, ben 1, 2, 3. 1, 2, 3. 1, 2, 3. On doit faire fois 3. Là on va à 100, faut 100 carrés. Du coup j'ai fait fois, du coup j'ai mis... 300. Parce que 3 fois 100 ça fait 300.

126 - Chercheuse : Oui. Et alors, je te pose encore une question. Comment tu ferais pour utiliser la même formule, la même manière de faire pour les 4 carrés, par exemple?

127 - Élève 8 : Ça là *[en indiquant la première étape]*?

128 - Chercheuse : Pour les 4 carrés, la quatrième étape, celle qu'on a pas dessiné.

129 - Élève 8 : Du coup je fais 4 carrés. On peut mettre 3 où je fais fois.

130 - Chercheuse : Mh mh.

131 - Élève 8 : *[Il pose le calcul « $3 \times 4 = 12$ »]*

132 - Chercheuse : Est-ce que ça joue avec ce qu'on avait trouvé avant?

133 - Élève 8 : Non *[en indiquant la deuxième étape dans la liste à la page 2]*.

134 - Chercheuse : C'est ici, quatrième étape *[en indiquant la quatrième étape]*.

135 - Élève 8 : Non.

136 - Chercheuse : Mais presque.

137 - Élève 8 : C'est parce que... Quand on fait ça, ce n'est pas un carré en entier, là il y en a 2 qui restent *[en indiquant le deuxième carré dans la suite de 3]*, là il y a

encore 1 carré.

138 - Chercheuse : En fait comme ça, tu prends 3 pailles pour chaque carré [*en indiquant le calcul en colonne « $3 \times 4 = 12$ »*].

139 - Élève 8 : Oui.

140 - Chercheuse : C'est correct? C'est ça que tu as dessiné avant. A chaque carré tu as rajouté 3 pailles.

141 - Élève 8 : Oui.

142 - Chercheuse : Oui. Est-ce que c'est comme ça pour tous les carrés?

143 - Élève 8 : Des fois, je ne sais pas si c'est plus. On va faire des rectangles. Peut-être.

144 - Chercheuse : Oui, en fait c'était très bien ce que tu as fait parce que à chaque fois, tu mets 3. 1, 2, 3. 1, 2, 3. 1, 2, 3. Et ainsi de suite 1, 2, 3. 1, 2, 3. Ce que t'as fait là [*en indiquant son dessin de carrés au poin c*]. C'est vrai, il faut faire fois 3 parce qu'il y a 3 pailles par carré. Mais après, il y a plus cette paille là [*en indiquant la première paille*]. Donc plus 1.

145 - Élève 8 : Du coup il faut faire 301 fois 3.

146 - Chercheuse : C'est 3 fois 100. Tu as le résultat [*en indiquant « 300 » dans le calcul en colonne de l'élève*]. Et après, tu ajoutes encore la paille. Ça joue? Regarde, 4 fois 3, 12. Plus 1.

147 - Élève 8 : 13.

148 - Chercheuse : C'est ce que tu avais trouvé avant. Ça joue?

149 - Élève 8 : Chaque fois je dois ajouter 1 du coup?

150 - Chercheuse : Mh mh.

151 - Élève 8 : Oui. 2 fois 3, 6 plus 1, 4 [*en indiquant la liste à la page 2*].

152 - Chercheuse : Plus 1, 7.

153 - Élève 8 : 1 fois 3, 3 plus 1, 4. Là ça doit être pareil. Là ça doit être 15, là ça doit être 18, là ça doit être 21 [*en indiquant « 16 », « 19 », « 22 » à la page 2*].

154 - Chercheuse : Là c'est juste ce que tu as fait. Tu fais 5 fois 3. Ça donne combien?

155 - Élève 8 : 15. Plus 1. Là je dois enlever 1 pour que ça soit juste. Parce que ça fait 18.

156 - Chercheuse : Oui, et 18 plus 1 c'est 19.

157 - Élève 8 : Oui. Et 7 fois 3, 21.

158 - Chercheuse : Oui. Et, en connaissant le nombre de carrés, pourrais-tu toujours trouver le nombre de pailles?

159 - Élève 8 : Oui.

160 - Chercheuse : Oui. Comment tu ferais?

- 161 - Élève 8 : Ben, si j'ai plus cet exemple-là, je vais me le faire. Et j'oublie pas qu'il faut rajouter 1 et je fais fois 3.
- 162 - Chercheuse : D'accord. Donc oui, tu peux me l'expliquer un peu comme si je ne connaissais rien?
- 163 - Élève 8 : Du coup, si vous connaissez rien. J'aurais fait un exemple. Par exemple le 12. Faut obtenir 12 carrés. Et 1 carré ça fait 3 [*il dessine 3 carrés et il biffe les 2 pailles du premier carré*]. Non. Ou alors on oublie celui-la, on compte celui de fin en plus [*le plus 1 est la dernière paille et non la première comme on avait fait jusqu'à maintenant*]. Du coup, on fait 12. Du coup, c'est la quatrième, on fait 12 fois 3 [*il pose en colonne « 12x3=... »*].
- 164 - Chercheuse : Ça fait 36.
- 165 - Élève 8 : 36. Du coup. Le résultat doit être 12.
- 166 - Chercheuse : 12 étaient les carrés, tu avais dit.
- 167 - Élève 8 : Oui. 4 fois 3. Du coup ça fait 12. Plus 1. Ça fait 13 [*il pose les calculs « 4x3=12 » « ..+1 », dessine les 12 carrés*]. Un et du coup. Là il y a 12 carrés. Et il y a... Celui-là, on veut tout le temps rajouter moins 1 [*en indiquant la liste à la page 2*]. Et là on a toujours 3. Ben en fait, on est juste... Ou je suis censé... Si je fais l'exemple de 13 carrés, peut-être que ce sera plus facile.
- 168 - Chercheuse : Mais avant tu l'avais dit. Si le nombre quelconque... Si je connais les nombres de carrés, comment je peux faire pour obtenir le nombre de pailles?
- 169 - Élève 8 : On fait plus 1.
- 170 - Chercheuse : Oui. Mais avant, qu'est ce qu'il faut encore faire?
- 171 - Élève 8 : Euh ben plus 1.
- 172 - Chercheuse : Oui mais avant, qu'est-ce que tu as fait là [*en indiquant son calcul « 3x100=300 »*]?
- 173 - Élève 8 : Fois 3 plus 1.
- 174 - Chercheuse : Fois 3 plus 1. Oui.
- 175 - Élève 8 : C'était là [*en indiquant son calcul « 4x3=2 »*].
- 176 - Chercheuse : Sauf que c'était 12 fois 3 plus 1.
- 177 - Élève 8 : Ok. Et ça, ça dit le nombre de pailles.
- 178 - Chercheuse : Pardon? Oui.
- 179 - Élève 8 : Il y a 37 pailles.
- 180 - Chercheuse : Mh mh. Ça joue pour toi?
- 181 - Élève 8 : Ouais.
- 182 - Chercheuse : Ouais. T'as quelques questions?
- 183 - Élève 8 : Non. Enfin si, ça sert à quoi?

184 - **Chercheuse** : Quoi? Ce qu'on a fait ensemble? C'est à dire à mon travail ou en général?

185 - **Élève 8** : En général.

186 - **Chercheuse** : C'est une tâche qui travaille, comme tu as vu, la multiplication.

187 - **Élève 8** : Oui...

188 - **Chercheuse** : On part d'un problème. On essaie de le résoudre d'une manière mathématique avec des calculs.

189 - **Élève 8** : Ok.

La suite de carrés : Élève 9

Durée de l'entretien : 18 min 27 s

1 - **Chercheuse** : Avec une dizaine d'élèves, ils ont choisi un peu les élèves qui croyaient avoir plus ou moins le niveau adéquat pour les tâches que j'ai choisi. D'accord?

2 - **Élève 9** : Ok.

3 - **Chercheuse** : D'autres questions?

4 - **Élève 9** : Non, c'est tout bon.

5 - **Chercheuse** : Ok, alors je vais te proposer des tâches. Tu peux écrire si tu veux. T'as un crayon, peut-être?

6 - **Élève 9** : Non.

7 - **Chercheuse** : Sinon tu peux utiliser ça. Tu peux écrire si tu veux. T'es pas obligée d'écrire, si t'as des questions, tu me demandes. Si t'as besoin des feuilles, elles sont là et je te demande de me dire tout ce que tu penses. D'accord? On va voir ensemble. Alors regarde ces photos. Il y a les 3 premières étapes d'une suite de carrés. C'est la première étape. La deuxième, la troisième, et ainsi de suite. D'accord? Tu vois, elles sont faites avec des pailles, les carrés. Donc, la question est combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés?

8 - **Élève 9** : Mh mh.

9 - **Chercheuse** : La tâche est claire?

10 - **Élève 9** : Il faut 13 pailles.

11 - **Chercheuse** : Alors, comment tu as fait?

12 - **Élève 9** : J'ai compté ceux-là [*en indiquant les 3 carrés*], il y en a 4 [*en indiquant les pailles du premier carré*]. Après, il y en a 3 [*deuxième carré*], 7 [*deuxième carré*], 8, 9, 10 [*troisième carré*]. Et après encore 11, 12, 13 [*en mimant les pailles du quatrième carré*].

13 - **Chercheuse** : Et donc, pour 5 carrés, comment tu ferais?

14 - **Élève 9** : Pour 100?

- 15 - **Chercheuse** : 5 carrés. La question d'après.
- 16 - **Élève 9** : Bah on fait 13 plus 3.
- 17 - **Chercheuse** : D'accord.
- 18 - **Élève 9** : 16.
- 19 - **Chercheuse** : D'accord. Alors maintenant, je te pose une autre question. C'est toujours la même tâche, ok ? C'est juste la question d'après. Et pour 12 carrés ?
- 20 - **Élève 9** : Je peux écrire, vous avez dit ?
- 21 - **Chercheuse** : Oui, tu peux faire tout ce que tu veux.
- 22 - **Élève 9** : [*Elle dessine 4 carrés et un bout, elle a dessiné les carrés en utilisant 12 pailles*] Il en faut 12.
- 23 - **Chercheuse** : Qu'est-ce que... quel est ton raisonnement ?
- 24 - **Élève 9** : Il manquera une paille du coup il en faut une autre.
- 25 - **Chercheuse** : Qu'est-ce que tu fais là ?
- 26 - **Élève 9** : J'ai fait les carrés. J'en ai fait 12, mais le truc, c'est qu'il en manque un pour faire le douzième.
- 27 - **Chercheuse** : D'accord, mais c'est 12 de quoi, là ?
- 28 - **Élève 9** : 12 pailles.
- 29 - **Chercheuse** : 12 pailles. D'accord. La question est pour 12 carrés.
- 30 - **Élève 9** : Ah bah oui. [*Elle dessine les 12 carrés et compte les pailles*] 37.
- 31 - **Chercheuse** : Alors 37. Il y a bien 12 carrés. Est-ce que tu arriverais peut-être à contrôler. Il y a bien 12 carrés, mais moi j'obtiens un résultat différent. Donc je ne sais pas si je me suis trompée ou si t'as mis calculé. Tu veux compter à voix haute ?
- 32 - **Élève 9** : Bah non, il y en a 12. C'est bon.
- 33 - **Chercheuse** : Oui 12 carrés, mais combien de pailles ?
- 34 - **Élève 9** : Bah il y en a 4. 37.
- 35 - **Chercheuse** : Ah oui, bien sûr. J'ai fait une erreur de calcul. Tu sais que parfois... parfois les calculs sont ... Et est-ce que tu arriverais à le faire d'une autre manière, sans dessiner les carrés ?
- 36 - **Élève 9** : Non, je ne sais pas.
- 37 - **Chercheuse** : Tu veux y penser un moment ?
- 38 - **Élève 9** : Bah là, je ne sais pas.
- 39 - **Chercheuse** : Tu peux te proposer une autre question ?
- 40 - **Élève 9** : Oui.
- 41 - **Chercheuse** : C'est toujours sur la même tâche, toujours ces carrés-là. Donc maintenant, c'est toujours la même question : combien faut-il de pailles pour former une suite de 100 carrés ?

- 42 - Élève 9 : Alors là, franchement, je sais pas.
- 43 - Chercheuse : Qu'est ce que tu ferais?
- 44 - Élève 9 : Je pourrais faire le même dessin, mais ce sera trop long.
- 45 - Chercheuse : D'accord. T'as d'autres pistes?
- 46 - Élève 9 : Non.
- 47 - Chercheuse : On peut peut être revenir sur ce que tu avais fait ici [*en lui montrant la feuille a*)] et là, là tu avais répondu... Comment tu avais fait pour trouver les pailles pour les 4 carrés?
- 48 - Élève 9 : Bah j'en avais rajouté un là.
- 49 - Chercheuse : D'accord. Donc, là tu avais dit, il faut 10 pailles pour 3 carrés et donc pour 4, il faut combien de pailles?
- 50 - Élève 9 : Vous avez dit quoi pour 3 carrés, combien de pailles?
- 51 - Chercheuse : T'avais dit avant.
- 52 - Élève 9 : 10.
- 53 - Chercheuse : Exactement. Pour 3 carrés 10 pailles.
- 54 - Élève 9 : 16.
- 55 - Chercheuse : D'accord. Qu'est-ce que tu as fait, là?
- 56 - Élève 9 : Bah j'ai compté.
- 57 - Chercheuse : T'as compté dans ta tête?
- 58 - Élève 9 : Oui.
- 59 - Chercheuse : Donc, tu as représenté les carrés et tu les a comptés. D'accord. Et sans dessiner, même pas dans ta tête, les 4 carrés. Est-ce que tu aurais une idée ou pas?
- 60 - Élève 9 : Oui.
- 61 - Chercheuse : Laquelle?
- 62 - Élève 9 : Je pourrais imaginer et puis compter dans ma tête.
- 63 - Chercheuse : D'accord. Et sans les imaginer?
- 64 - Élève 9 : Je ne sais pas.
- 65 - Chercheuse : Je peux te poser une autre question, alors?
- 66 - Élève 9 : Quand je viens faire ça avec vous...
- 67 - Chercheuse : Ouais...
- 68 - Élève 9 : C'est tous les lundis où il y a un autre jour?
- 69 - Chercheuse : Tu veux savoir quand?
- 70 - Élève 9 : Oui et de quelle heure à quelle heure.
- 71 - Chercheuse : Aujourd'hui. Et après, ça va être mercredi.
- 72 - Élève 9 : Ok.
- 73 - Chercheuse : À nouveau à cette heure là. Donc, après la récré.

74 - Élève 9 : Ok.

75 - Chercheuse : Et après c'est lundi prochain, même horaire. La dernière fois le jeudi, de la semaine... Prochaine semaine. Mais cette fois là, à 10h55, ça joue pour toi?

76 - Élève 9 : Oui. Et on fait de quelle heure à quelle heure?

77 - Chercheuse : C'est une demi heure.

78 - Élève 9 : Ok. Donc toute la durée de base pour les maths.

79 - Chercheuse : Je ne sais pas. Tu as les maths à ce moment-là?

80 - Élève 9 : Ben là, j'étais en math, d'accord.

81 - Chercheuse : Oui, ça va pour toi? Parce que normalement, on aurait dû faire même la semaine passée, jeudi et vendredi. Mais t'étais malade. Ça va mieux maintenant?

82 - Élève 9 : Un peu, j'ai encore mal.

83 - Chercheuse : Oui, mais c'est dur, n'est-ce pas? Ma soeur aussi l'a fait. Elle a été mal pendant une semaine, puis tu as enlevé les 4 en même temps, n'est-ce pas? On revient à la tâche? Je voulais te poser une question. Celle-là. À ton avis, en connaissant le nombre de carrés, par exemple, tu vois... Avant, c'était 12 et t'as trouvé le nombre de pailles, etc. Peut-on toujours trouver les nombres de pailles? Si on connaît le nombre de carrés.

84 - Élève 9 : Oui, enfin je ne sais pas.

85 - Chercheuse : A quoi tu penses, là?

86 - Élève 9 : Essayer de comprendre la phrase.

87 - Chercheuse : Alors la phrase si je connais le nombre de carrés, est-ce que je peux savoir de combien de pailles j'ai besoin?

88 - Élève 9 : Mh mh.

89 - Chercheuse : C'es un peu plus clair, comme ça?

90 - Élève 9 : Oui. Bah oui.

91 - Chercheuse : Comment?

92 - Élève 9 : Parce qu'à chaque fois qu'on fait ça [*en indiquant les 3 carrés*], par exemple, là encore on compte 1, 2, 3. Il y a 3 carrés. Et après il faudrait compter les pailles. Donc, voilà... Quoi que si, par exemple, là en connaissant le nombre de carrés, il y en a 3. Et pour trouver le nombre de pailles on compte comme ça 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 [*elle compte 3 à 3*].

93 - Chercheuse : D'accord, très bien. C'est toujours la même... La même suite de carrés. Tu as acheté un paquet de 200 pailles. Combien de carrés peux-tu construire, à ton avis?

94 - Élève 9 : Bah je peux... Je peux construire, je ne sais pas, beaucoup? Avec 200

pailles. Je ne sais pas le nombre exact. Le nombre exact je ne sais pas.

95 - **Chercheuse** : Comment tu ferais?

96 - **Élève 9** : Je les placerais tous.

97 - **Chercheuse** : D'accord. Et puis, tu compterais les carrés?

98 - **Élève 9** : Mh.

99 - **Chercheuse** : Okay très bien. Est-ce que je peux te proposer, une autre question similaire à celle-ci? [*La chercheuse dessine une suite de triangles*] Alors, t'as à nouveau une suite cette fois, de triangles. C'est la première étape. La deuxième, la troisième, et ainsi de suite. La question est : combien de paille pour faire 4 triangles?

100 - **Élève 9** : 9.

101 - **Chercheuse** : Comment tu as fait?

102 - **Élève 9** : J'ai compté celle-là [*en indiquant les 3 triangles*] et j'en ai rajouté un.

103 - **Chercheuse** : Un triangle tu as rajouté. Donc combien de pailles?

104 - **Élève 9** : 2.

105 - **Chercheuse** : Okay, et 5 carrés. Pardon, 5 triangles?

106 - **Élève 9** : Bah on fait... 11.

107 - **Chercheuse** : Okay. Qu'est-ce que tu as fait?

108 - **Élève 9** : J'ai recompté aussi.

109 - **Chercheuse** : Et pour, par exemple, la vingtième étape?

110 - **Élève 9** : Je ne sais pas.

111 - **Chercheuse** : Tu veux y penser encore un moment? Je te laisse encore un moment.

112 - **Élève 9** : Bah là, je n'ai pas d'idées.

113 - **Chercheuse** : Ok. Alors je te propose une chose, d'accord? Là, j'ai j'écrit le nombre d'étapes [*elle les écrit*]. Okay? Je te demande d'écrire à côté le nombre de pailles dont tu as besoin. Donc par exemple, là, de combien de pailles t'as besoin pour la quatrième étape? Tu l'as dit avant.

114 - **Élève 9** : 9. Je met 9?

115 - **Chercheuse** : Oui, à côté.

116 - **Élève 9** : 11 [*elle écrit le nombre de pailles de la quatrième à la treizième étape*].

117 - **Chercheuse** : Comment tu as fait?

118 - **Élève 9** : J'en ai rajouté toujours 1. Non 2 pailles.

119 - **Chercheuse** : Okay. Très bien, donc tu saurais continuer?

120 - **Élève 9** : Mh mh.

121 - **Chercheuse** : Comment tu ferais?

122 - **Élève 9** : Bah je compterais toujours par 2.

123 - **Chercheuse** : Et donc là, est-ce que tu saurais arriver à 20 triangles? À la vingtième étape?

124 - **Élève 9** : Oui.

125 - **Chercheuse** : Oui, tu veux le faire?

126 - **Élève 9** : Mh mh [*elle continue jusqu'à la vingtième étape*].

127 - **Chercheuse** : Ok, très bien. Est-ce que tu aurais une idées pour comment faire pour, par exemple, 40. La quarantième étape.

128 - **Élève 9** : Non. Je rajoute plus 10? Non ça fait 30. Plus 20? Donc ça arriverait à 61.

129 - **Chercheuse** : Et donc pourquoi tu rajoute 20 pailles?

130 - **Élève 9** : Bah... Parce que, si je veux aller au quarantième. Au lieu de tout tout tout refaire. Je rajoute 20.

131 - **Chercheuse** : Oui et pourquoi 20?

132 - **Élève 9** : Comme ça, ça va plus vite.

133 - **Chercheuse** : Oui. Et pourquoi 20 et pas un autre nombre?

134 - **Élève 9** : Parce que 20 c'est logiquement. Enfin en mode euhh... Si je dis 21 ça fera 62, du coup, ça va pas. À chaque fois que c'est un 0 point, c'est 1 à la fin.

135 - **Chercheuse** : D'accord.

136 - **Élève 9** : Du coup bah.... Voilà.

137 - **Chercheuse** : Donc tu arriverais à 61. Et pourquoi 61 et pas 71, par exemple.

138 - **Élève 9** : Euhh. Parce que j'ai fait plus 20. Et si je vais à 71, je ferai plus 30.

139 - **Chercheuse** : Et pourquoi tu veux faire plus 20?

140 - **Élève 9** : Bah comme ça, ça va plus vite. Au lieu de à chaque fois réécrire.

141 - **Chercheuse** : D'accord. Okay. Il est quelle heure? Je regarde juste quelle heure il est. Nous avons encore 10 minutes, ça te va de faire encore quelque chose ensemble?

142 - **Élève 9** : Oui.

La suite de carrés : Élève 11

Durée de l'entretien : 33 min 06 s

1 - **Chercheuse** : Ça c'était juste pour essayer... Je peux... Peut être que de temps en temps, je vais écrire et prendre des notes parce que si je vois que tu fais des choses intéressantes, je signe à quel point tu le fais, d'accord? Donc, je vais te donner une tâche maths, si t'as quelques questions, n'hésite pas. Tu peux me poser des questions et tu peux écrire si tu veux. Si t'en as besoin après, j'ai des feuilles supplémentaires, regarde, je les ai déjà ici... Une feuille de plus... Et je

te demande juste de me dire ce qui te passe... Ce qui se passe par la tête, de m'expliquer un peu ce que tu fais, ce que tu penses.

2 - Élève 11 : Ok.

3 - Chercheuse : D'accord? Regarde ces photos, il y a les 3 premières étapes d'une suite de carrés. C'est la première étape. La deuxième, la troisième. Et la question est combien faut-il de pailles pour former une suite de 7... Pardon, de 4 carrés?

4 - Élève 11 : [Inaudible] ...

5 - Chercheuse : Qu'est ce que t'as dit, pardon?

6 - Élève 11 : Non, je réfléchis... De 5 pailles non... 20?

7 - Chercheuse : Qu'est ce que tu as fait?

8 - Élève 11 : J'ai compté les pailles qu'il y avaient dans un seul, il y en avait 4. Si on fait plus 4, plus 1, ça fait 8. Encore 1 ça fait 12 et plus 1 ça fait 16 encore 1, ça fait 20.

9 - Chercheuse : Donc là, c'est 20 pailles pour combien de carrés?

10 - Élève 11 : Pour 5? C'est juste?

11 - Chercheuse : Et... Est-ce que ta manière de faire fonctionne pour la troisième étape, par exemple?

12 - Élève 11 : Pour la troisième? Oui.

13 - Chercheuse : Oui, pourquoi?

14 - Élève 11 : Parce que... Ah non... Non... Et je me suis trompé. Ce n'est pas la même chose. Il y a 11 pailles là.

15 - Chercheuse : Où?

16 - Élève 11 : Ba, dans le 13 [ou 3?].

17 - Chercheuse : Et comment t'as fait?

18 - Élève 11 : J'ai compté et ça fait pas la même chose parce qu'ils ne sont pas séparés.

19 - Chercheuse : Donc, combien de pailles là?

20 - Élève 11 : Ça fait 1, 2, 3... 10?

21 - Chercheuse : D'accord. Comment t'as fait pour me dire?

22 - Élève 11 : J'ai compté les pailles.

23 - Chercheuse : D'accord et donc pour 4 carrés?

24 - Élève 11 : Il faut compter pailles... Pour 4 carrés il faut 13 pailles.

25 - Chercheuse : Comment t'as fait?

26 - Élève 11 : J'ai mis encore 3 sur le côté, j'ai fait 1, 2, 3.

27 - Chercheuse : Et donc pour 5.

28 - Élève 11 : Pour 5? Il faut 16. Non, il faut 17. Oui

- 29 - Chercheuse : 16 au 17?
- 30 - Élève 11 : 17.
- 31 - Chercheuse : Pourquoi?
- 32 - Élève 11 : Parce que si on fait la même chose qu'avant. Ça fait 13 si y a 4 carrés. Si on remet encore 3... Ça fait 17.
- 33 - Chercheuse : Peut-être... On fait comme ça, regarde. Là je t'ai écrit... La quatrième étape. Tu peux écrire à côté combien de pailles t'as besoin pour la quatrième étape. Qu'est ce que t'as écrit?
- 34 - Élève 11 : J'ai mis 14 pailles.
- 35 - Chercheuse : Et comment t'as fait pour trouver 14 pailles?
- 36 - Élève 11 : Be j'ai compté, déjà l'étape 3, et j'ai mis la même chose, les 3 pailles.
- 37 - Chercheuse : La troisième étape combien de pailles c'était?
- 38 - Élève 11 : C'était 14.
- 39 - Chercheuse : La troisième étape?
- 40 - Élève 11 : C'était 10.
- 41 - Chercheuse : Oui. On fait comme ça du début, peut-être. J'ai refait un peu un schéma complet à partir de la première étape pour écrire à côté les pailles et tu me racontes ce que tu fais. Qu'est ce que tu as écrit là?
- 42 - Élève 11 : 4.
- 43 - Chercheuse : Oui, comment t'as fait?
- 44 - Élève 11 : Puis... L'étape 1, l'image. J'ai compté les pailles qu'il y avait en bas, à gauche et à droite, il y a 4 [inaudible] le 2 la même chose. Après pour la troisième étape je vais, c'est la même chose. Je vais compter combien de pailles il y a en tout. Et sur la quatrième étape aussi.
- 45 - Chercheuse : Comment t'as fait là du moment que tu n'avais pas les dessins?
- 46 - Élève 11 : Bà... Je me suis mis à l'image 3 dans ma tête et après j'ai mis des pailles à côté, 3 pailles.
- 47 - Chercheuse : Bon, d'accord donc, pour trouver la cinquième étape comment t'as fait?
- 48 - Élève 11 : [Inaudible] j'ai mis 3 parce que que tout le temps à côté il y a 3, si on enlève un carré, il y a tout le temps 3 et si on met tout le temps 3 et 3 et 3... Ça fait la suite.
- 49 - Chercheuse : D'accord. Maintenant, c'est toujours la même tâche d'accord? Donc je te laisse ça à côté. La question est combien de pailles pour 12 carrés. La question est claire?
- 50 - Élève 11 : Oui. J'ai fait un calcul.
- 51 - Chercheuse : Lequel?

- 52 - Élève 11 : Pour savoir combien de carrés il faut... Combien de pailles il faut?
- 53 - Chercheuse : Ouais...
- 54 - Élève 11 : J'en ai mis encore 3, comme ça, ça fait l'étape 6. Parce que dans l'étape 6 il y a 6 carrés et... Merde, j'm suis confondu... J'ai fait l'étape 6, j'ai mis encore 3 ça fait 19... Fois 2, ça fait très 38 et ça fait 38 pailles pour tous.
- 55 - Chercheuse : D'accord, ok, très bien et. Est-ce que tu arriverais peut-être à contrôler ton résultat de quelque manière?
- 56 - Élève 11 : J'ai pas compris la question.
- 57 - Chercheuse : T'as un résultat. Peut-être que c'est correct, peut-être que ce n'est pas correct... On veut trouver une manière pour le contrôler. Est-ce que t'as quelques idées?
- 58 - Élève 11 : Soit je compte tout le temps sur un, mais ça va prend plus de temps. Soit je fais fois quelque chose qui me donne le résultat soit... Je fais un calcul écrit. Je mets... Je fais 19 fois 2 comme ça et après je fais 2 fois 9 fait 18 et un là... Après une fois... Non, 2 fois 1 ça fait 2 plus 1 ça fait 13... 3 pardon.
- 59 - Chercheuse : D'accord, ok, ok et... Donc. D'accord, et alors... Toujours la même tâche...
- 60 - Élève 11 : 100 carrés.
- 61 - Chercheuse : Voilà! Tu rigoles...? T'as quelques idées?.,
- 62 - Élève 11 : Oui. Soit je fais la même chose. Bah là, je sais pas... pour 12 carré il y a 38 pailles... Soit je fais 38... 38... Non, attends... [...il fait des calculs à mi-voix] Je ne peux pas... [il parle à mi-voix. Il calcule en colonne « $100 \times 4 = 400$ » et « $400 - 99 = 301$ pailles pour 100 carrés »] C'est bon.
- 63 - Chercheuse : Tu penses avoir fait? Qu'est ce que t'as fait?
- 64 - Élève 11 : Déjà j'ai pris l'image de l'étape 1. J'ai vu que dans 1 il y a 4 pailles. Je me suis dit 100 fois 4 ça fait 400 et après, comme j'ai vu que quand on met des pailles à côté, bah si on enlève une de ça [en cachant la deuxième paille verticale de l'étape 2] il reste seulement 3 et après j'ai compté tout le temps dans 100... Après. Comment dire? Dans ma tête je me suis dit qu'il n'y a pas 400 les pailles sur 100... parce qu'après il y a... Comment dire? Ben si, si... Si on prend l'étape, mais... Si on prend l'étape 1 et on met encore 1 à côté encore 1... Bah, ça ne fait pas la même chose que l'étape 3. Si on met ça plus ça [en indiquant l'étape 1], ça fait 12. Et si on compte là [en indiquant l'étape 3], il y a 10. Il y a 2 de moins parce qu'il y a 3 tout le temps qui va à côté [en indiquant les pailles du deuxième et troisième carré]. J'ai fait ça pour 100. Et j'ai vu que je vais faire 99 moins 400 pour faire 3... 300 pailles pour 100 carrés...
- 65 - Chercheuse : Pour faire combien de pailles t'as dit?

66 - Élève 11 : 310... 301 pour faire 300 pailles.

67 - Chercheuse : D'accord. Et comment t'as fait à savoir qu'il fallait enlever 99 pailles?

68 - Élève 11 : Ben, tout le temps il y a 3 [en indiquant 3 pailles imaginées du quatrième carré].

69 - Chercheuse : D'accord...

70 - Élève 11 : Mais si on met encore 1 à côté, ça va faire... Comment dire... Ben là [en indiquant la deuxième étape] il y a que 7 pailles. Mais si on compte l'étape un avec la même fermetue [inaudible] à côté, ça va faire 8. Et ça va pas faire 7. Si on met encore 3 et 3... Ça va faire ça [en indiquant son résultat « 301 »]. Mais si on met tout le temps 4 et 4, ça va faire 400. Et si on enlève tout le temps 1 sur chaque carré, ça fait... Ça fait 99 pailles de moins.

71 - Chercheuse : Toujours même tâche. D'accord? T'es prêt?

72 - Élève 11 : Non. [Il lit...]

73 - Chercheuse : Donc oui. En connaissant, le nombre des carrés, pourrais-tu toujours trouver la nombre de pailles? La question est claire?

74 - Élève 11 : Non, pas trop.

75 - Chercheuse : Là tu viens de le faire au point c, tu savais qu'il y avait 100 carrés, la question était combien de pailles. La question d demande si je connais le nombre de carrés, je peux connaître le nombre de pailles?

76 - Élève 11 : Oui.

77 - Chercheuse : Oui, comment?

78 - Élève 11 : Bah, si. Je sais déjà que dans 1 carré, il y a 4... Si on a encore 3 à côté ça fait... Ça fait 2 carrés. Si après, je sais qu'il faut tout le temps mettre 3... Pour faire encore 1 carré de plus. Je sais combien de pailles je dois mettre pour faire les carrés.

79 - Chercheuse : D'accord. Et donc, si j'ai un nombre quelconque de carrés... Tu sais qu'est ce que c'est un nombre quelconque?

80 - Élève 11 : Mmm... Un peu... Comment dire?

81 - Chercheuse : C'est n'importe quel nombre, d'accord? Donc si t'as un nombre quelconque de carrés, quel sera le nombre de pailles?

82 - Élève 11 : Mais ça dépend le chiffre du carré. Si c'est 1 carré, je sais que c'est 4. Après si c'est 4 carrés, je sais que c'est 13, et 5 carrés je sais que c'est 16 parce que si dans 4 carrés, il y a 13 et dans 5 y a 16, bas je sais qu'il faut tout le temps en mettre 3 sur chaque carré.

83 - Chercheuse : Oui, et pour un nombre quelconque?

84 - Élève 11 : Ben... 40 carrés. Ben, si je sais déjà le nombre d'avant, je sais que je

dois mettre encore 3.

85 - Chercheuse : Oui. Et si tu connais pas le nombre d'avant?

86 - Élève 11 : Bah, je dois prendre le nombre que je sais avant tous... Bah là... bah le nombre que je sais du carré, le plus... Bas c'est du 100... Ou du 12 pailles... Ou 12 carrés, je prends 12 carrés. Je prends... Dans 12 carrés il y a 38 pailles. Ainsi, pour 40 il faut que... Je pour 40 je dois faire... Je dois faire 12...

87 - Chercheuse : Qu'est ce que tu essaies de faire, là?

88 - Élève 11 : J'essaie de multiplier le 12 par un nombre. Si on prend 50 carrés, je dois faire 12 fois 5... Ça me donne 50 carrés...

89 - Chercheuse : 12 fois...?

90 - Élève 11 : 12 fois 5.

91 - Chercheuse : Ça fait 50?

92 - Élève 11 : Non, ça fait 60. Je dois faire 12 fois 4.

93 - Chercheuse : T'es sûr? Tu peux écrire si tu veux, tu n'es pas obligé de faire tout à l'oral.

94 - Élève 11 : [*Il pose « $12 \times 4 = 48$ » et « $12 \times 5 = 60$ »*] Là je sais que si je fais 12 fois 5, ça fait 60 pailles... Ça fait 1 carré... De 5. Pour faire 50 je dois faire 12 fois... Fois 5 ça fait 60 moins 10, ça fait 50 pailles... Je ne sais pas comment expliquer...

95 - Chercheuse : Tu veux y penser encore un moment?

96 - Élève 11 : Non, c'est bon.

97 - Chercheuse : D'accord, on peut passer à une autre question?

98 - Élève 11 : Oui.

99 - Chercheuse : C'est toujours sur la même tâche, mais c'est un peu différent.

100 - Élève 11 : Ok.

101 - Chercheuse : Tu as acheté 1 paquet de 200 pailles. Et la question est combien de carrés peux-tu construire? C'est clair, la question?

102 - Élève 11 : Oui, c'est clair.

103 - Chercheuse : Qu'est ce que tu essaies de faire?

104 - Élève 11 : 200 divisés par 3.

105 - Chercheuse : D'accord. Pourquoi divisé par 3?

106 - Élève 11 : Pour savoir combien de carrés il y a.

107 - Chercheuse : Si jamais... J'ai une calculette, je peux faire les calculs avec la calculette.

108 - Élève 11 : Ah, je peux le faire [*en prenant sa calculette*]?

109 - Chercheuse : Oui. Juste ce calcul-là, d'accord?

110 - Élève 11 : Ok.

111 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu obtiens?

- 112 - Élève 11 : Bah, j'obtiens... 50 pailles...
- 113 - Chercheuse : Comment t'as fait ? Pourquoi t'obtiens 50 carrés ?
- 114 - Élève 11 : J'ai fait 200 divisés par 4.
- 115 - Chercheuse : Ok, j'avais mal entendu avant. Donc pourquoi t'as fait divisé par 4 ?
- 116 - Élève 11 : Parce que je sais que dans 1 carré il y a 4 et après si on a encore 3 et 3 il faut... Après, ça fait pas le bon calcul. Il faut faire après moins 10. Ça fait 40.
- 117 - Chercheuse : Pourquoi tu as fait moins 10 ?
- 118 - Élève 11 : Parce que si on met... Tout le temps 4 à côté, ça va faire 100. Je sais que dans 1 il y a 4, si *[inaudible]* encore 4 ça va faire ça *[il dessine la suite : le premier carré composé par 4 pailles, le deuxième composé par 3 pailles et après il ajoute la quatrième à l'horizontale, comme début d'un troisième carré]*.
- 119 - Chercheuse : D'accord, oui.
- 120 - Élève 11 : Bas, si... J'enlève moins 1 *[il efface la dernière paille]*... Ça va faire 4... Eh 2 carrés. Ça va faire 7 pailles.
- 121 - Chercheuse : Oui, très bien. Et donc, comment les calculs sont liés à ce que tu viens de me dire ?
- 122 - Élève 11 : Donc... Attends... *[Il continue sa suite de carrés]* Bah, disons qu'il y a justement... Pailles ici.
- 123 - Chercheuse : Il y a ? Pardon ?
- 124 - Élève 11 : Ba... J'imagine qu'il y a *[inaudible]* paille et je fais déjà 1 carré. Ça fait 4 pailles. Mais si on met encore 3... Ça fait 7, et il faut tout le temps en mettre 3. Après, si je mets 4, ça va faire tout le temps *[inaudible, il dessine une quatrième paille comme à 30:09]*.
- 125 - Chercheuse : Donc, si tu as 200 pailles, comment tu arrives au nombre de carrés ? Je, je peux comprendre ce que tu as fait là.
- 126 - Élève 11 : C'est un peu compliqué à expliquer. Je range ?
- 127 - Chercheuse : T'as quelques idées ou pas ?
- 128 - Élève 11 : Non.
- 129 - Chercheuse : Mais qu'est-ce que tu étais en train de faire, là ?
- 130 - Élève 11 : *[Inaudible]* si le calcul était juste... Moins 10.
- 131 - Chercheuse : Et tu te rappelles pourquoi tu avais fait moins 10 ?
- 132 - Élève 11 : Parce qu'il y a tout le temps 1 qui manque.
- 133 - Chercheuse : Mais pourquoi moins 10 et pas moins un autre nombre ?
- 134 - Élève 11 : Je ne sais pas comment expliquer.

La suite de carrés : Élève 12

Durée de l'entretien : 29 min 28 s

- 1 - **Chercheuse** : C'est parti. Je vais te donner quelques tâches de maths, tu me poses tes questions si ce n'est pas clair. Si t'as besoin de feuilles de plus, tu me les demandes. Et je te demande juste de m'expliquer ce que tu penses, ce qui te passe par la tête, d'accord?
- 2 - **Élève 12** : Mh-mh.
- 3 - **Chercheuse** : Ça, c'est la première tâche. Donc, regarde ces photos-là. Tu as 3 photos et il y a les 3 premières étapes d'une suite de carrés. C'est à dire que ça, c'est la première étape, la deuxième, la troisième [*la chercheuse indique les différentes étapes*]. Et comme tu le vois, les carrés sont faits avec les pailles. La question est combien de pailles faut-il pour former une suite de 4 carrés? La question est-elle claire?
- 4 - **Élève 12** : Ça compte les fautes d'orthographe?
- 5 - **Chercheuse** : Non... De toute façon, même les fautes de maths, c'est pas grave. Je regarde pas si tu fais juste ou pas.
- 6 - **Élève 12** : [*L'élève écrit « Il faut 3 pailles. »*].
- 7 - **Chercheuse** : Qu'est-ce que tu as fait, là?
- 8 - **Élève 12** : J'ai regardé comment ils ont commencé à faire des pailles. Et puis j'ai vu qu'il ne remet pas 1, là [*en indiquant la troisième paille en vertical de l'étape 3*]. Et puis j'ai compté juste celui qui sont en haut, en bas et celui de l'autre côté [*en indiquant la paille en haut, en bas et à côté du quatrième carré imaginaire*].
- 9 - **Chercheuse** : Et donc donc, t'as répondu 3, et pour faire 4 carrés en total, combien faut-il de pailles?
- 10 - **Élève 12** : 4 carrés?
- 11 - **Chercheuse** : Oui, c'est un peu la même question. Mais là, qu'est-ce que tu as répondu? Là, les 3 pailles [*en indiquant la réponse « 3 » de l'élève*], comme tu as dit, c'est les 3 pailles-là [*en indiquant le quatrième carré imaginaire*]. N'est-ce pas? Maintenant, ma question est en total, combien de pailles pour 4 carrés?
- 12 - **Élève 12** : Ah, pour 4 carrés! [*L'élève compte les pailles pour les 3 carrés et elle dessine un quatrième carré. Elle modifie sa réponse écrite en effaçant 3 et en écrivant 12 à la place.*]
- 13 - **Chercheuse** : Qu'est-ce que tu as fait, là?
- 14 - **Élève 12** : J'ai compté toutes les pailles.
- 15 - **Chercheuse** : Et donc combien tu as obtenu?
- 16 - **Élève 12** : J'ai obtenu 12.

- 17 - **Chercheuse** : D'accord, tu me montres juste comment tu as fait ?
- 18 - **Élève 12** : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13! Pardon [*l'élève compte à nouveau les pailles et corrige sa réponse écrite*].
- 19 - **Chercheuse** : D'accord donc pour la deuxième question, et pour 5 carrés ?
- 20 - **Élève 12** : [*L'élève dessine un cinquième carré à côté du quatrième et écrit sa réponse « Il faut 16 pailles pour faire 5 carrés »*].
- 21 - **Chercheuse** : Qu'est-ce que tu as fait, là ?
- 22 - **Élève 12** : J'ai... Parce que je sais jusqu'à là, ça fait 13 [*en indiquant le quatrième carré*]. J'ai ajouté 3 et puis ça fait 16.
- 23 - **Chercheuse** : D'accord. Maintenant, toujours la même tâche, une autre question. Combien faut-il de pailles pour former une suite de 12 carrés ?
- 24 - **Élève 12** : [*L'élève dessine les carrés jusqu'à 12 à côté du cinquième carré et écrit « Il faut 27 pailles pour former une suite de 12 carrés »*].
- 25 - **Chercheuse** : D'accord. Qu'est-ce que tu as fait ?
- 26 - **Élève 12** : J'ai recompté. J'ai imaginé si c'était 12.
- 27 - **Chercheuse** : Tu as imaginé ou tu as dessiné les 12 carrés ?
- 28 - **Élève 12** : J'ai dessiné.
- 29 - **Chercheuse** : D'accord. Comment tu as fait pour compter ?
- 30 - **Élève 12** : Parce que je sais jusqu'à là c'est 16 [*en indiquant le cinquième carré*]. Du coup, j'ai fait un 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31... J'ai commencé à compter depuis où j'étais et puis j'ai continué à compter et puis ça m'a donné 27.
- 31 - **Chercheuse** : Oui! Est-ce qu'on compte ensemble? Donc, à partir de 16. Comme tu l'étais en train de faire.
- 32 - **Élève 12** : 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37... ah, c'était 37.
- 33 - **Chercheuse** : Parfait. On continue sur la même tâche, mais une autre question encore, ça va? Maintenant combien faut-il de pailles pour former une suite de 100 carrés ?
- 34 - **Élève 12** : [*L'élève pose l'addition en colonne « $100+37=137$ »*].
- 35 - **Chercheuse** : Qu'est-ce que tu as fait, là ?
- 36 - **Élève 12** : J'ai fait l'addition. J'ai fait, dès que ça fait 37 et puis je ne peux pas refaire des carrés [*en indiquant sa suite de 12 carrés où il n'y a plus d'espace*]. Bah, j'ai fait 100 plus 37 est égal à 137.
- 37 - **Chercheuse** : Comment tu as fait pour faire cette addition-là ?
- 38 - **Élève 12** : Dès que je ne peux pas faire combien 0 dans 7... 0 plus 7, je ne peux pas. Du coup, je suis allée là [*en indiquant les autres chiffres du nombre 100*]. J'ai

pris des nombres. Là il manqué 0, parce qu'il faut mettre 0. Puis là, il y avait 10. Et puis j'ai tracé encore. J'ai mis 9. Puis là, il y en avait 10. Et puis là, j'ai fait 10 plus 7, ça fait 17, j'ai écrit 7. Et puis j'ai ajouté 1. 9 plus 3 ça fait 12, plus q, ça fait 13. Et puis 1 plus 0, ça fait 1.

39 - Chercheuse : D'accord, je peux te demander comment tu ferais l'addition en 36... Entre 10 et 36.

40 - Élève 12 : [*L'élève pose le calcul en colonne*] Ça fera 34.

41 - Chercheuse : Comment tu as fait?

42 - Élève 12 : On ne peut pas faire 0 moins 6 parce qu'il n'y a rien. Ah, je me suis trompé dans le calcul [*l'élève commence à effacer son calcul*].

43 - Chercheuse : Tu peux le laisser, si jamais tu peux le faire ici comme ça je garde après.

44 - Élève 12 : [*L'élève refait le calcul « 100+37=137 » en colonne.*] Ça fait 137, ça change rien.

45 - Chercheuse : Oui, d'accord, mais, on revient en arrière, peut-être au point c). Alors la question était : pour faire 100 carrés, combien de pailles faut-il utiliser?

46 - Élève 12 : Il faut utiliser 137 pailles.

47 - Chercheuse : Comment tu as fait? Quel a été ton raisonnement?

48 - Élève 12 : Mon raisonnement, c'était je ne peux pas dessiner 100 pailles depuis 12... Depuis 37 pailles jusqu'à 100 pailles. Dès que là [*en indiquant la point b) de la fiche*] c'était 37. Je devrais faire jusqu'à 100, j'ai écrit 37 plus 100.

49 - Chercheuse : D'accord. Fais juste attention, parce qu'ici [*en indiquant le point b) de la fiche*] 37, c'était le nombre de pailles et ici [*en indiquant le point c)*] 100 est le nombre de carrés. T'as compris ce que j'ai dit? Ou pas trop?

50 - Élève 12 : Oui.

51 - Chercheuse : Oui, d'accord.

52 - Élève 12 : Ah, j'ai compris [*l'élève pose en colonne « 100+12=120 »*]. Il faut 120.

53 - Chercheuse : Comment tu as fait? Quel a été ton raisonnement?

54 - Élève 12 : J'ai relu la question b. Et puis, combien faut-il de pailles pour former une suite de 12 carrés? Puis j'ai vu des pailles. Ce n'est pas la même chose comme des carrés. Du coup, j'ai fait 12 plus 100. Ça fait 120.

55 - Chercheuse : D'accord. Et pourquoi t'as fait 12 plus 100?

56 - Élève 12 : Parce que 12 plus 100 c'est des carrés.

57 - Chercheuse : D'accord. Et donc? Comment...? Je reformule ma question. Comment ce calcule-là que tu as fait [*en indiquant le calcul « 100+12 »*], peut t'aider pour répondre à cette question-là, pour comprendre combien de pailles pour

100 carrés?

58 - Élève 12 : Je ne sais pas comment expliquer.

59 - Chercheuse : D'accord. Je peux te poser une autre question?

60 - Speaker 3 : Mh-mh.

61 - Chercheuse : Toujours mêmes tâche, on se pose la question combien de pailles pour 23 carrés? [*La chercheuse lui donne une feuille avec l'écriture « 23 carrés ».*] Comment tu ferais, là?

62 - Élève 12 : Je vais faire 23 plus 4. Parce que dans un carré il y a 4 côtés [*elle pose en colonne le calcul « 23+4=27 »*]. 3... 4 plus 3, ça fait 7. Et puis là, ça fait 2. 27.

63 - Chercheuse : Très, bien. Est-ce que ta manière de raisonner là, est-ce que ça marche, par exemple pour 4 carrés?

64 - Speaker 3 : 4 carrés?

65 - Chercheuse : Oui. Tu vois, là tu as utilisé une certaine manière d'utiliser une certaine manière de penser. Une certaine manière de raisonner. Est-ce que cette manière-là marche pour les 4 carrés?

66 - Élève 12 : Non.

67 - Chercheuse : Pourquoi?

68 - Élève 12 : Il faut... Vous pouvez répéter, s'il vous plaît?

69 - Chercheuse : Oui. Là tu as utilisé une certaine technique, une certaine stratégie ici [*en indiquant son calcul en colonne « 23+4=27 »*] pour trouver combien de pailles pour 23 carrés. Ma question est, est-ce que cette stratégie-là marche pour la suite de 4 carrés? Tu vois que tu avais trouvée avant.

70 - Élève 12 : Oui, j'ai fait 3 plus 4.

71 - Chercheuse : Pourquoi 3 plus 4?

72 - Élève 12 : Parce qu'il y a 3 pas là-dedans [*en indiquant les trois carré de la fiche a*]. Et puis je dois faire plus 4 pour savoir combien il en y a, et puis ça fait... Non, c'est pas possible. Parce que 3 plus 4, ça fait 7. Si je fais 3 plus 4 et 5 [*elle pose en colonne « 3+4+5=12 »*], ça fait 12.

73 - Chercheuse : Pourquoi tu as mis 5?

74 - Élève 12 : Parce que ils ont demandé et de 5 carrés.

75 - Chercheuse : Et alors qu'est-ce que t'es en train de me dire, là?

76 - Élève 12 : Au pire, on a qu'à faire 10 plus 4 [*elle pose en colonne le calcul « 10+4=14 »*].

77 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu as fait, là?

78 - Élève 12 : J'ai fait... Là il y en a 10 [*en indiquant les 3 carrés*], et puis plus 4, ça fait 14... Et puis... J'arrive pas à expliquer.

79 - Chercheuse : Pourquoi tu as ajouté 4?

- 80 - Élève 12 : Parce qu'ils ont demandé combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés. Je ne peux pas parce que ça fait 14. Et puis là, j'avais trouvé 13.
- 81 - Chercheuse : Et, à ton avis, c'est où l'erreur?
- 82 - Élève 12 : Alors, c'est le calcul.
- 83 - Chercheuse : Lequel?
- 84 - Élève 12 : Celui-là [*en indiquant « 10+4 »*].
- 85 - Chercheuse : C'est à dire que t'as fait une erreur dans le calcul ou c'est le calcul qui ne va pas?
- 86 - Élève 12 : J'ai fait une erreur... Non, c'est le calcul qui ne va pas.
- 87 - Chercheuse : Pourquoi?
- 88 - Élève 12 : [*L'élève écrit en colonne « 10-4=6+5=11 »*]
- 89 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu es en train de faire, là?
- 90 - Élève 12 : Je suis en train d'essayer quel calcul.
- 91 - Chercheuse : D'accord. Et comment tu l'essais?
- 92 - Élève 12 : Parce que là c'est 10 [*en indiquant les 3 carrés*]. J'ai fait 10 moins 4, ça peut pas, du coup je suis allée dans a et ça manquait 0, et puis là j'ai mis 10. 10 moins 4, ça fait 6 et 6 plus 5, ça fait 11 et je peux pas arriver jusqu'à 13.
- 93 - Chercheuse : Mais tu te rappelles comment tu avais fait pour arriver à 13?
- 94 - Élève 12 : J'avais compté les carrés.
- 95 - Chercheuse : Oui, les pailles, n'est-ce pas?
- 96 - Élève 12 : Oui. J'avais... Ah, je dois faire... 2 pailles... 3... 3, et puis là 6. J'avais dessiné des carrés, et puis j'ai compté 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. Et là, ça faisait 13 [*en indiquant le quatrième carré*], là ça faisait 16 [*en indiquant le cinquième carré*], jusqu'à là ça faisait 37 [*en indiquant le douzième carré*].
- 97 - Chercheuse : [*La chercheuse propose une feuille avec une liste de la première étale à la trezième étape*] Là tu as plusieurs étapes de carré. Là c'est la première étape, la deuxième étape et ainsi de suite. Je te demande d'écrire à côté de combien de pailles tu as besoin pour chaque étape.
- 98 - Élève 12 : [*L'élève écrit « 4 » et « 4 » à côté de la première et deuxième étape.*]
- 99 - Chercheuse : Alors, comment tu as fait jusqu'à là?
- 100 - Élève 12 : Dans le premier il faut 4. Pour le deuxième, il faut aussi 4.
- 101 - Chercheuse : Au total, la question...
- 102 - Élève 12 : Au total?
- 103 - Chercheuse : Oui.
- 104 - Élève 12 : Ah. Il faut 8.
- 105 - Chercheuse : Comment tu as fait pour obtenir 8?

- 106 - Élève 12 : Le premier c'est 4 et si on reprend, ça fait 1, 2, 3, 4. 4 plus 4 est égal à 8.
- 107 - Chercheuse : Est-ce que dans la deuxième étape il y a 8 pailles ?
- 108 - Élève 12 : Non, il y en a 7.
- 109 - Chercheuse : Quelle erreur tu as faite ?
- 110 - Élève 12 : J'ai compté toutes les pailles.
- 111 - Chercheuse : Oui.
- 112 - Élève 12 : Là ça fait 17 [*elle écrit 17 pour la troisième étape.*].
- 113 - Chercheuse : Comment tu as fait ?
- 114 - Élève 12 : J'ai compté encore les pailles.
- 115 - Chercheuse : Pour les 3 carrés, montre-moi comment tu as fait.
- 116 - Élève 12 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 [*elle corrige en écrivant « 10 » pour la troisième étape.*] Et puis là, il faut 13. Là, c'est...
- 117 - Chercheuse : Si tu veux tu peux écrire juste à côté du nombre-ici comme ça c'est plus facile.
- 118 - Élève 12 : Là, c'est 16. 19 [*l'élève poursuit jusqu'à la fin.*].
- 119 - Chercheuse : Ok, et donc maintenant, par exemple, pour 23 carrés, qu'est-ce que tu ferais ?
- 120 - Élève 12 : 23 ?
- 121 - Chercheuse : Oui.
- 122 - Élève 12 : Je continue à compter 3 fois les pailles. Celles-là qui sont là comme ça [*en coloriant les trois pailles qu'on ajoute pour former le troisième carré.*] Je vais les compter 3 fois. Je continue à compter les pailles, les 3 qui font comme ça.
- 123 - Chercheuse : D'accord. Donc combien de pailles on a besoin pour 23 carrés ?
- 124 - Élève 12 : Il faut 65 [*elle pose en colonne « 40+23=65 »*].
- 125 - Chercheuse : Comment tu as fait ?
- 126 - Élève 12 : J'ai fait 40 plus 23.
- 127 - Chercheuse : D'accord, pourquoi 40 ?
- 128 - Élève 12 : Parce que, c'est où je suis restée [*en indiquant les 40 pailles nécessaires pour former 13 carrés.*].
- 129 - Chercheuse : Et donc, pourquoi plus 23 ?
- 130 - Élève 12 : Parce qu'il faut que j'ajoute.
- 131 - Chercheuse : D'accord. Qu'est-ce que tu as obtenu, tu as dit ?
- 132 - Élève 12 : 65... 63 [*l'élève corrige son résultat sur la feuille.*].
- 133 - Chercheuse : D'accord. Ok, merci beaucoup. Ça c'était ce vous voulez te demander aujourd'hui. Tu as quelques questions ?
- 134 - Élève 12 : Non.

La suite de carrés : Élève 13

Durée de l'entretien : 33 min 28 s

- 1 - **Chercheuse** : Mais ne t'inquiète pas. Ça ne m'intéresse pas si c'est juste ou pas. D'accord? Ce n'est pas ça que je regarde.
- 2 - **Élève 13** : Par exemple, si il y a des exercice que je ne connais pas, je peux vous poser des questions?
- 3 - **Chercheuse** : D'accord? Bien sûr. On en discute. Bon je te donne une une tâche. Tu me poses toutes les questions que tu veux. S'il y a quelque chose que tu ne comprends pas. Après, je te demande juste de me dire que ce qui te passe par la tête. À quoi tu penses. Okay? Tu peux écrire si tu veux. Tu as des stylos, tu peux écrire, si tu as besoin de feuilles supplémentaires je les ai... Quelque part. Voilà, je te les laisse ici.
- 4 - **Élève 13** : Merci.
- 5 - **Chercheuse** : Regarde cette photo, il a 3 photos et il y a les 3 premières étapes d'une suite de carrés. Là, c'est la première étape, la deuxième étape, la troisième étape [*en indiquant les différentes étapes*]. Et ça pourrait continuer. Et la question est : combien de pailles faut-il pour former une suite de 4 carrés? Ça c'est la première question.
- 6 - **Élève 13** : Il faut que je note où? Dessous? Ici?
- 7 - **Chercheuse** : Oui très bien.
- 8 - **Élève 13** : En fait, juste à 1 carré, le suite de carrés. En fait ma question, c'était en fait, c'est juste pour avoir 1 carré ou pour la suite de 4 carrés?
- 9 - **Chercheuse** : Pour la suite de 4 carrés. Combien de pailles pour la suite de 4 carrés.
- 10 - **Élève 13** : D'accord [*l'élève écrit « il faut 14 pailles pour former ! »*].
- 11 - **Chercheuse** : Okay, alors qu'est-ce que tu as fait?
- 12 - **Élève 13** : J'ai calculé là j'ai 10 pailles [*elle compte les pailles pour les 3 carrés*] et en fait j'ai ajouté encore 4, que ça me fait 14.
- 13 - **Chercheuse** : D'accord, est-ce que tu arriverais à dessiner les 4 carrés pour vérifier que ton raisonnement marche bien. Tu peux même le faire là, si tu veux.
- 14 - **Élève 13** : Je ne sais pas si je fais en suite. Peut être je peux. Par exemple je fais un ici un ici, un là et un là [*l'élève dessine un carré entier (de 4 pailles) en le mettant à côté de la suite de 3 carrés*].
- 15 - **Chercheuse** : D'accord. Est ce que je peux... On va le faire avec des vraies pailles. Voir ce qui ce passe.
- 16 - **Élève 13** : Je devrais commencer ou je fais juste ça?

- 17 - **Chercheuse** : C'est comme tu préfère. Comme tu penses que ça te fait comprendre...
- 18 - **Élève 13** : Beaucoup. Si j'aurais assez de place, ça va. Je pense suffir. Je ferais comme ça [*l'élève construit 4 carrés de 4 pailles, l'un à côté de l'autre*].
- 19 - **Chercheuse** : Et donc, là, je déplace juste ça, comme ça on voit mieux [*la chercheuse déplace la trousse de l'élève*]... Tu as fait les 4 carrés. Donc, par exemple pour faire les 3 carrés, qu'est-ce que tu ferais ?
- 20 - **Élève 13** : Bah j'en enlèverai 4.
- 21 - **Chercheuse** : D'accord, donc, tu aurais ces 3 là [*en indiquant les premiers trois carrés*]. Est-ce que ta représentation est la même qu'il y a là ?
- 22 - **Élève 13** : Je ne sais pas, je ne pense pas parce que ce n'est pas la même couleur.
- 23 - **Chercheuse** : Les couleurs ce n'est pas trop important. D'accord ?
- 24 - **Élève 13** : Et ils ne sont pas trop collés entre eux, entre eux. Moi, j'ai mis un peu d'espace entre eux, mais là bas, je pense qu'elle va continuer comme ça. Par exemple tout est décalé [*elle déplace les pailles horizontales en haut et en bas pour coller les carrés et enlever les espaces*]. Mais attendez, je ne sais pas si j'ai raison [*elle hésite à enlever les pailles en vertical qui faisant doublon, et pour finir elle les enlève*]. C'est un truc comme ça je pense [*elle obtient la bonne représentation*].
- 25 - **Chercheuse** : Oui. Donc combien de pailles ?
- 26 - **Élève 13** : Là, c'est [*elle compte les pailles*]... 13. Attendez [*elle recompte les pailles*]. 13. C'est juste.
- 27 - **Chercheuse** : Et donc, qu'est-ce que tu avais dit avant ?
- 28 - **Élève 13** : J'ai dit, 14.
- 29 - **Chercheuse** : 14. Donc c'est 14 ou 13 ?
- 30 - **Élève 13** : 13 j'en ai ajoutées 3.
- 31 - **Chercheuse** : D'accord. Et donc, à ton avis, qu'est ce que ça n'allait pas dans ton raisonnement ?
- 32 - **Élève 13** : Moi, j'ai ajouté des 4 carrés différents. J'ai pas collé. Et si on colle, on a besoin de moins de pailles. Moi, j'ai juste, je fais des carrés pas collés et quand je colle, ils sont plus... En fait ça rassemble vraiment à ça [*en indiquant la fiche*], une paille entre 2 carrés. Don ça, ça compte.
- 33 - **Chercheuse** : Voilà, et donc pour répondre à la réponse... À la question d'après. Et pour 5 carrés, combien de pailles ?
- 34 - **Élève 13** : Si j'ai... Je n'ai pas assez de place. Sinon j'aurais continué comme ça [*en ajoutant 3 pailles à sa construction*]. J'ajoute 3, ce serait 16.
- 35 - **Chercheuse** : Je peux te poser une autre question ?
- 36 - **Élève 13** : Non. Euh, oui oui ! Je pensais que vous aviez dit : est-ce que tu as une

autre question?

37 - Chercheuse : T'as une question?

38 - Élève 13 : Non!

39 - Chercheuse : Regarde, toujours la même tache. Mais la question est combien faut il de pailles pour former une suite de 12 carrés.

40 - Élève 13 : 12?!

41 - Chercheuse : 12.

42 - Élève 13 : Là je fais combien... Je peux avoir ma trousse, s'il vous plait? Là j'avais 16 et il faut avoir 12 carrés [*l'élève réfléchit et voudrait écrire quelque chose*]. Je ne sais pas comment faire. Je suis un peu perdue.

43 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu penses?

44 - Élève 13 : Moi, je pensais de faire, par exemple, une multiplication. Là, j'ai 5 carrés de 6 pailles.

45 - Chercheuse : Tu as 5 carrés de...

46 - Élève 13 : De 6 petits trucs, là...

47 - Chercheuse : C'est où le 6?

48 - Élève 13 : 16 pardon, pas 6.

49 - Chercheuse : Ah, 16, d'accord!

50 - Élève 13 : 16 petits trucs. Je dois faire une multiplication, je pense.

51 - Chercheuse : Tu peux prendre ton temps.

52 - Élève 13 : Attendez.

53 - Chercheuse : Oui oui, on n'est pas pressées.

54 - Élève 13 : Je suis perdue.

55 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu essaies de faire, là?

56 - Élève 13 : En fait, parce que je dis là, j'ai trouvé 12 carré, et là, j'ai 5. Je fais 12 moins 5 ça me fait 7. Il me manque encore 7 carrés. Et pour 7 carrés, il me faut combien de pailles? Là, j'ai 16. Il faut. Attendez. 1 carré il a besoin d'à peu près 3 pailles. Attendez, là j'ai 5 pour 6. Il faut 18. Pour 6 carrés il faut 16 pailles. Pour 7 il faut... Ouais. 21. 21 pailles.

57 - Speaker 3 : Qu'est-ce que tu fais?

58 - Élève 13 : Est-ce qu'on pourrait fermer la fenêtre, j'ai trop froid.

59 - Chercheuse : On n'a le droit de le faire? [*La chercheuse demande à l'élève comment fermer la fenêtre.*]

60 - Élève 13 : En fait, d'abord je fais 12 moins 5. Bah j'ai 12 carrés. Il faut trouver 12 carrés. C'est juste, j'avais 5. J'ajoutais... Par exemple, ça fait 12 moins, ça me fait 7 et j'avais 16 pailles pour 5 carrés. Et bah en fait, j'ajoutais 3... Je ne me souviens pas qu'est-ce que j'ai fait. C'est quoi ce truc difficile?!

61 - **Chercheuse** : Non mais tu te débrouilles très bien, ça va très bien ce que tu fais!

62 - **Élève 13** : Par exemple, là, j'ai 16... Il faut que je... Bah j'ajoute. J'ajoute, euh attendez. Non, je pense j'ai mal fait. 5, ça me fait 16, 7 ça me fait... Ça fait 22, il faut que j'ajoute encore 6. Ça me fait 22. Je ne sais pas si je fais juste... Parce que pour 5 c'est 16 encore... Oui, je pense que je fais juste.

63 - **Chercheuse** : Okay, qu'est-ce que tu as fait?

64 - **Élève 13** : Bah je fais 12 moins 5, ça fait 7. Par exemple, 5 pailles. J'ai déjà, il faut que j'ajoute encore 7. Et encore, j'ai déjà 16 pailles et j'ai ajouté 6. Ça me fait 22.

65 - **Chercheuse** : Pourquoi tu as ajouté 6?

66 - **Élève 13** : Parce que là, au total, j'ai 16 pour 5 carrés. Et j'ai ajouté encore 6 pour avoir 7 carrés.

67 - **Chercheuse** : D'accord, okay. Donc pour 12 carrés combien de pailles as-tu besoin?

68 - **Élève 13** : 22.

69 - **Chercheuse** : Pour 12. Est-ce que tu arriverais à les dessiner pour voir si ça marche?

70 - **Élève 13** : [*L'élève dessine les 12 carrés*] Je pense que c'est faux. Mais je ne sais pas... Attendez [*l'élève compte les côtés des carrés sur son dessin*]. Il me faut 37 pailles.

71 - **Chercheuse** : D'accord, donc, avant, tu avais dit 22. À ton avis, qu'est ce qui s'est passé?

72 - **Élève 13** : En fait j'avais 5. Et il faut que j'ajoutais 7. Bah moi j'ai ajouté 2 pour arriver à 5. En fait, je me suis trompée. Pour 7 carrés, il faut 22, pour 12 carrés il faut 37.

73 - **Chercheuse** : D'accord. Et pour 13 carrés.

74 - **Élève 13** : J'ajoute 3 je pense. J'ajoute 3, ça me fait... Je suis un peu stressée, je n'arrive pas à faire...

75 - **Chercheuse** : Quelle est l'opération? Moi, ce ne sont pas les calculs qui m'intéressent. Si tu me dis l'opération à faire, je la fais, j'ai même une calculette quelque part. Quelle est l'opération que tu veux faire?

76 - **Élève 13** : Bah je dois faire 37 plus 3.

77 - **Chercheuse** : Donc ça fait 40.

78 - **Élève 13** : Je suis un peu stressé, j'ai voilà...

79 - **Chercheuse** : Pas de problème. Donc, pour 13 carrés il faut 40 pailles. Okay et donc pour 14?

80 - **Élève 13** : Bah 43.

- 81 - Chercheuse : D'accord. Et à ton avis pour 30 carrés?
- 82 - Élève 13 : Pour 30 carrés? [*L'élève compte les pailles pour les 10 sur son dessin des 12 carrés*].
- 83 - Élève 13 : Je pense que je dois faire 31 fois 4.
- 84 - Chercheuse : Pourquoi?
- 85 - Élève 13 : Pas parce qu'en fait, j'ai déjà fait, par exemple, je fais 10... Là, j'ai 10 carrés, et après j'ai compté les pailles, c'est 31 pour 10, et après, je fais 31 fois 4 [*l'élève pose le calcul en colonne*], ça va me faire 124.
- 86 - Chercheuse : D'accord, donc 31. Je vois bien d'où ça vient. Et le 4? Pourquoi fois 4?
- 87 - Élève 13 : Parce qu'il faut 40 carrés.
- 88 - Chercheuse : Okay, j'ai bien compris. D'accord. Et... D'accord. Donc là tu as pris 10 carrés. Et là 10 autres ainsi de suite et après tu les colles. Juste? N'est-ce pas? Si j'ai bien compris.
- 89 - Élève 13 : Là, j'ai 30 euh j'ai 10. J'ajoute encore 30, ça me fait 40.
- 90 - Chercheuse : D'accord. Donc, par exemple, en utilisant cette méthode là, comment tu ferais pour les 20 carrés?
- 91 - Élève 13 : Bah je fais moins. Je fais 124 moins 20.
- 92 - Chercheuse : Pourquoi moins 20?
- 93 - Élève 13 : En fait, vous m'avez dit que je dois faire quoi? Est-ce que vous pouvez répéter?
- 94 - Chercheuse : Oui, alors la question maintenant est : combien de pailles pour 20 carrés, si tu utilises cette même méthode-là?
- 95 - Élève 13 : Déjà il faut combien pour avoir... Ça peut faire 62. Je peux faire 62 moins 124. Parce que pour 20 carrés il me faut 30 euh... 62 pailles.
- 96 - Chercheuse : Oui comment tu as fait?
- 97 - Élève 13 : Je fais 31 plus 31 ça me fait 62.
- 98 - Chercheuse : Donc, pour répondre à la question combien de paille pour 20 carrés? Quelle est ta réponse?
- 99 - Élève 13 : Je dois faire 124 moins 62 [*elle pose le calcul en colonne*]. Je pensais que c'était des divisions.
- 100 - Chercheuse : Si tu as un calcul à faire, je peux le faire avec la calculette. Ce que tu fais là... 124...
- 101 - Élève 13 : Je pense que c'est 7, ça va me faire 72.
- 102 - Chercheuse : 124 moins 62, n'est-ce pas, ça donne 62.
- 103 - Élève 13 : 62!
- 104 - Chercheuse : 62 pour 20 carrés. N'est ce pas? Je peux te demander de

contrôler si c'est correct? Tu peux dessiner à nouveau, d'accord?

- 105 - Élève 13 : [*L'élève dessine 20 carrés et après elle compte les pailles*] Ah j'ai 31 jusque là... 32. J'arrive pas!
- 106 - Chercheuse : C'est une bonne méthode celle d'écrire les 31 juste en bas. Tu peux le refaire, tu vois à chaque carrés, ou à chaque 2 carrés, si ça t'aide.
- 107 - Élève 13 : [*L'élève continue à compter les pailles*] 61.
- 108 - Chercheuse : 61. Qu'est ce que tu avais dit avant?
- 109 - Élève 13 : J'ai dit 62.
- 110 - Chercheuse : Et donc c'est 61 ou 62?
- 111 - Élève 13 : Peut-être que j'ai mal compté. Ou peut-être que c'est juste. [*L'élève compte les carrés*] 20 c'est juste on est à 20! Et pourquoi 61? Attendez [*L'élève compte les pailles*]. 31, c'est juste. Ça fait 61.
- 112 - Chercheuse : D'accord et avant, tu avais dit 62. Tu te rappelles, avec l'autre méthode, 62?
- 113 - Élève 13 : Oui, 62. Je ne sais pas pourquoi c'est faux.
- 114 - Chercheuse : Ça va essayer de comprendre pourquoi c'est faux?
- 115 - Élève 13 : On a dit pour 20 euh....
- 116 - Chercheuse : Oui exactement.
- 117 - Élève 13 : Pour 4... Je ne sais pas. Pour 4 il en faut 124. Il faut que je divise par 2? Bah là ça nous donne aussi 62. Je ne sais pas... [*inaudible*] Je ne sais pas.
- 118 - Chercheuse : D'accord, alors regarde ici quand tu as fait pour les 40 carrés. Tu te rappelles que tu as fait?
- 119 - Élève 13 : Pour 40 carrés? Oui j'ai fait 31 fois 4.
- 120 - Chercheuse : Oui, exactement. Donc on a dit, tu le fais pour 10 parce que ça fait 31, c'est bien. Après, on les met ensemble. Le problème est que quand on les met ensemble. Qu'est ce qui se passe? Imagine 10 carrés et les autres 10 carrés.
- 121 - Élève 13 : Je ne comprends pas.
- 122 - Chercheuse : Regarde, là je fais 10 carrés [*la chercheuse dessine 2 blocs de 10 carrés*]. Bon je ne dessine pas tous. D'accord? Ou pardon. Là c'est 10 et après j'en colle...
- 123 - Élève 13 : Ahhh parce qu'ils sont pas collés. Bah là, je pense qu'ils sont... Parce que je pense que là, ils sont collés [*en indiquant sont dessin*]. Et quand je fais ici, ils ne sont pas collés [*en indiquant ses calculs*]. C'est juste? Ah! Moi, je pensais, si on colle tous ensemble, ça va être à 62. Et quand je comptais ça me donnait plus [*inaudible*].
- 124 - Chercheuse : Et c'est donc, c'est quoi, le 1 de plus?

- 125 - Élève 13 :** C'est quand ils sont séparés ils sont 1 de plus pour l'autre. Il faut un de plus pour l'autre, car il fait un carré. Sinon, pour faire un carré il faut 4. Oui, si on ajoute tous ensemble, il n'y a pas besoin parce qu'à chaque fois, on met 3 pour juste compléter l'autre côté.
- 126 - Chercheuse :** D'accord? Très bien, c'est une très bonne observation. Donc maintenant, tu vois comment faire pour 40? Parce que là tu as compris que ce qu'on a fait avant pour 40, il y a quelques petites erreurs. N'est ce pas?
- 127 - Élève 13 :** Oui.
- 128 - Chercheuse :** Donc, comment on pourrait faire pour 40 carrés?
- 129 - Élève 13 :** On fait 123.
- 130 - Chercheuse :** Pourquoi 123?
- 131 - Élève 13 :** Parce que là vous m'avez dit qu'il faut... attendez. Il faut une paille de plus pour 20 carrés qui ne sont pas collés. S'ils sont collés, il faut 124. Et... Oui. Non, j'ai mal dit. S'ils sont collés, il en faut 123 et s'ils sont pas collés, il faut 124, une paille de plus.
- 132 - Chercheuse :** D'accord. Okay. Là, on les fait toujours collés d'accord? Et... Très bien. Et quand tu as 40 carrés, combien de fois, tu vois, tu vas les coller comme ça?
- 133 - Élève 13 :** Bah, encore 2 fois.
- 134 - Chercheuse :** Encore 2 fois. Exactement.
- 135 - Élève 13 :** Si j'ai déjà 20, il faut encore 2 fois des paquets de 10.
- 136 - Chercheuse :** Oui. Et donc, à chaque fois que tu colles, tu as une paille. Tu vois? Donc là, c'était une paille, la paille qu'on avait enlevé pour les 20 carrés. Mais si tu le fais une autre fois, parce que là, jusqu'ici on a 20. Si on le fait une autre fois [*la chercheuse dessine un autre bloc de 10 carrés*].
- 137 - Élève 13 :** Si on colle, il faut 123. Et si on le laisse comme ça chacun 10,10, 10 jusqu'à 40, il nous faut 124. Parce qu'on est obligé d'ajouter un de plus pour faire un carré. Mais là, il n'y a pas besoin parce qu'il a déjà une moitié là, une pailles ici. Mais il faut juste ajouter 3.
- 138 - Chercheuse :** D'accord, merci beaucoup.
- 139 - Élève 13 :** Je vous en prie, je pense que j'ai bien fait.
- 140 - Chercheuse :** Oui, c'était bien, très bien ça. C'était ce que je voulais faire avec toi aujourd'hui. Et après, on va se voir encore 3 fois, ça va pour toi?
- 141 - Élève 13 :** Oui, ça va faire des trucs comme ça?
- 142 - Chercheuse :** Ça va être un peu différent. Ça va être d'autres choses, mais toujours des maths.
- 143 - Élève 13 :** D'accord. Là, en fait, c'était le première jour. J'étais un peu stressée,

je savais pas qu'est ce qu'on va faire? Qu'est ce qu'on va pas faire? C'était trop facile pour moi. En fait, je cherche et je ne peux pas faire par tête tout de suite. Donc je vais, je cherche, je fais des calculs, sinon je ne peux pas. La prochaine fois, je pense, ça va être plus facile parce que je connais déjà.

144 - **Chercheuse** : Tu connais déjà un peu le système. Ouais, c'est bien. C'était très bien aujourd'hui.

145 - **Élève 13** : Merci!

146 - **Chercheuse** : C'était très bien. Merci beaucoup. Et à la semaine prochaine!

147 - **Élève 13** : D'accord, vous allez venir quand?

La suite de carrés : Élève 14

Durée de l'entretien : 43 min 11 s

1 - **Chercheuse** : Alors, l'enregistrement est parti. Là, t'as un stylo si tu veux écrire.

2 - **Élève 14** : Ok.

3 - **Chercheuse** : Et voilà, ce qu'on va faire aujourd'hui. Regarde ici, t'as trois photo. Il y a les trois premières étapes d'une suite de carrés. Ça c'est la première étape, la deuxième, la troisième et c'est des carrés composés par des pailles, tu vois?

4 - **Élève 14** : Oui...

5 - **Chercheuse** : De chaque côté il y a une paille différente. Et la question est combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés?

6 - **Élève 14** : Une suite de 4 carrés, ça serait 4 carrés comme ça?

7 - **Chercheuse** : Comment tu dessinerais déjà une suite de 4 carrés?

8 - **Élève 14** : Bâ, comme ça mais j'en rajouterais un après.

9 - **Chercheuse** : Oui, parfait, vas-y, tu peux écrire ce que tu veux.

10 - **Élève 14** : [*L'élève 14 dessine un quatrième carré*].

11 - **Chercheuse** : Ouais, exactement. Donc, Combien de pailles?

12 - **Élève 14** : Bâ... 1, 2, 3, 4, 5...12, 13... 13! [*Il pointe une paille à la fois en les comptant une à une*].

13 - **Chercheuse** : D'accord, et pour les cinq carrés?

14 - **Élève 14** : Et pour cinq carrés?

15 - **Chercheuse** : Mm-m.

16 - **Élève 14** : Ok... [*Inaudible*] 14, 15, 16... 16!

17 - **Chercheuse** : D'accord. Comment t'as fait?

18 - **Élève 14** : J'ai compté cela [*il indique les 3 carrés*], plus celui-là [*il indique le quatrième carré*] comme ça, ça fait 4 et après j'ai recompté celui-là [*il indique le quatrième carré*], comme si j'en avait rajouté un.

- 19 - **Chercheuse** : D'accord... Même tâche ma une autre question. Combien faut-il de pailles pour former une suite de 12 carrés?
- 20 - **Élève 14** : [*Il dessine 12 carrés en allant à la ligne chaque les 4 carrés. Il compte les pailles une par une*]...13, 14, 15, 16... 39. 39!
- 21 - **Chercheuse** : Comment t'as fait?
- 22 - **Élève 14** : J'ai fait 12 carrés et après j'ai compté les pailles.
- 23 - **Chercheuse** : Oui et comment tu les as dessinés ces 12 carrés?
- 24 - **Élève 14** : Comme ici. J'ai fait... Là il y a une paille, là il y en a une, là il y en a une, là il y en a une [*il dessine le premier carré, une paille pour chaque « là il y en a une »*] et celles-là, elles forment l'autre carrée en dessinant les autres trois pailles], du coup il en y a trois là.
- 25 - **Chercheuse** : Oui, donc, d'accord. Mais la suite de 12 carrés, c'est une suite de carrés où les carrés sont collés l'un après l'autre comme des wagons d'un train, d'accord? Donc, est-ce que là, tu les as collés comme des wagons d'un train?
- 26 - **Élève 14** : Au non... Ils sont à la suite.
- 27 - **Chercheuse** : Oui... Est-ce qu'à ton avis, on aura le même nombre de pailles, ou...
- 28 - **Élève 14** : Ah ben non. On en aura plus parce que du coup, celle-là, on pourrait l'enlever et celle là aussi, on pourrait l'enlever [*en indiquant la première paille de la deuxième et de la troisième ligne*]. Du coup, je vais retrouver 20... 19, 18, du coup ça ferait 18... Oui, ça ferait 18.
- 29 - **Chercheuse** : Comment t'as fait pour trouver 18?
- 30 - **Élève 14** : Parce que là, du coup, s'ils seraient tous collés, je pourrais enlever celle-là parce que celle-là reviendrait là [*il indique la dernière paille de la première ligne et la première de la deuxième*], et là pareil, je pourrais enlever celle-là, parce que celle-là, elle reviendrait là. Et du coup, j'ai fait ce que j'ai trouvé, qui était 20, moins 2.
- 31 - **Chercheuse** : T'es sûr que c'était 20?
- 32 - **Élève 14** : Je sais plus... 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9 10, 12 13, 13 15, [*inaudible*] 39. 39! Du coup, 39 moins 2, ça fait 37.
- 33 - **Chercheuse** : Ok, donc nous avons 37 pailles pour les 12 carrés. T'es prêt? Toujours même tâche, mais la question maintenant est... Sur les 100 carrés! Toujours une suite comme ça, mais composée par 100 carrés.
- 34 - **Élève 14** : [*Il pointe le stylo pour commencer à dessiner*] Mais ça va être trop long tous les écrire.
- 35 - **Chercheuse** : Oui, qu'est-ce que tu voulais faire?
- 36 - **Élève 14** : Je ne sais pas, moi j'aurais pensé à faire... Là vu que sur une, il y en a

4, faire 100 fois 4... 400.

37 - Chercheuse : Est-ce que cette technique marche pour ceux que tu connais déjà?

38 - Élève 14 : Ce que je connais déjà... Oui. Je pense.

39 - Chercheuse : Essaie.

40 - Élève 14 : [*Il écrit $4 \times 100 = 400$*].

41 - Chercheuse : Ça c'est un peu le raisonnement pour... Le calcul réfléchi pour les 100 carrés... Et si tu utilisais cette technique-là, pour, par exemple... Les 4 carrés... Tu sais, avant t'avais calculé combien de pailles.

42 - Élève 14 : Avant... Pour 4... 10, 11, 12, 13. On avait trouvé 13. Du coup... 4 fois 4, donc c'est faux... Ça veut dire que ça aussi [*en indiquant $4 \times 100 = 400$*], c'est faux.

43 - Chercheuse : Pourquoi, à ton avis, c'est faux pour les 4 carrés?

44 - Élève 14 : Parce que là, du coup, vu qu'ils sont collés... Cette paille, on n'y en a pas encore une ici. Du coup ça fait pas exactement 4, mais ce qu'il faudrait faire c'est qu'il faudrait trouver combien y en a que j'ai trop compté là [*en indiquant $4 \times 100 = 400$*], et faire 400 divisés par les paquets... Mais je ne sais pas comment trouver... Quel calcul faire pour trouver combien de pailles.

45 - Chercheuse : Par exemple ici, dans les 4 carrés, comment tu ferais?

46 - Élève 14 : J'aurais compté. Là il y en a une en moins, deux en moins... [*En indiquant la deuxième et la troisième paille en vertical sur les 3 carrés*].

47 - Chercheuse : Deux?

48 - Élève 14 : Du coup, là deux cents.

49 - Chercheuse : Attends, les 4 carrés, c'est juste ici [*en indiquant le quatrième carré*].

50 - Élève 14 : Ah oui, donc un pour celui-là, donc 3 sur 4. [*Inaudible*] je sais pas. Je sais pas là.

51 - Chercheuse : Alors, là [*en indiquant les 4 carrés*] on a dit que pour les 4 carrés... Si on veut faire un petit résumé de ton raisonnement, qu'est-ce que t'as dit?

52 - Élève 14 : Là, j'ai dit que s'il y en a 3 sur 4 carrés qui ont pas de barre.

53 - Chercheuse : D'accord. Et donc quel calcul tu ferais pour trouver les pailles, là?

54 - Élève 14 : Faudrait trouver ce que 3 sur 4 ça donnerait en chiffre normal.

55 - Chercheuse : Quel est le calcul? Si tu veux, regarde ici j'ai une calculatrice, je peux faire quelque chose... Je peux faire des calculs, si tu me dis quel calcul faire, je peux le faire.

56 - Élève 14 : Mon problème c'est ça, justement, je ne sais pas quel calcul faire.

57 - Chercheuse : On peut essayer. On n'est pas obligé de faire tout correct tout de

suite. On peut faire des essais et voir s'il y a quelque chose qui marche ou pas. Je te donne peut-être une feuille juste pour la quatrième étape comme ça tu peux écrire...

58 - Élève 14 : Ok, je crois j'ai compris. Sur 4... Là, sur les 4, il y en a 3 qui n'ont pas de barre... Les carrés... Du coup ça veut dire qu'il faudrait trouver sur les 100... Il y en aurait... Il faut trouver... Sur les 100 combien de barres [*en écrivant 100/?*]... Combien de carrés n'ont pas de barre.

59 - Chercheuse : Oui, très bien.

60 - Élève 14 : Mais je ne sais pas quel calcul faire pour passer des chiffres en fraction à un chiffre... C'est juste que je n'arrive pas...

61 - Chercheuse : D'accord. Et pourquoi tu veux faire une fraction?

62 - Élève 14 : Ben, parce que là, c'est une fraction, donc 3 carrés sur 4 ils n'ont pas de barre. Du coup il faudrait trouver combien de carrés sur 100 ils n'ont pas de barre, et du coup après ce combien-là, je pourrais le faire 400 divisé par ce, ce truc que j'ai trouvé là.

63 - Chercheuse : Oui, d'accord, je vois. Et là tu as trouvé pour les 4 carrés, est-ce que tu arrives à faire le raisonnement pour les 100 carrés, pour voir si cela peut te donner quelques idées.

64 - Élève 14 : Sur les cinq, il y en a quatre sur cinq.

65 - Chercheuse : Pourquoi?

66 - Élève 14 : Parce que cette barre, elle se rajoute... Et du coup... Ah, ça veut dire qu'on en aurait 99 sur 100.

67 - Chercheuse : Comment tu sais?

68 - Élève 14 : Parce que là, à chaque fois, y on a 7, 8, il y en aura de toute façon celle-là [*en indiquant la première paille vertical*]. Et puis là... Et puis du coup, là il manque, là il manque, là il manque, là il manque [*en indiquant les pailles verticales qui suivent*] et on peut faire comme ça longtemps et je pense que jusqu'à 100 du coup.

69 - Chercheuse : D'accord. Donc là, tu viens de découvrir qu'il y a, t'as dit...

70 - Élève 14 : 99 sur 100 pailles. Du coup il faudrait faire 4 fois 99. Ou bien 400 divisé par 99.

71 - Chercheuse : On peut déjà commencer, peut-être à écrire ce qu'on connaît. Ce qu'on sait, comme tu viens de le dire, n'est-ce pas?

72 - Élève 14 : 100 sur 99 pailles. Du coup, il faudrait enlever les... À mais non, parce que les 99 c'est celles qui restent... Ah mais oui, c'est juste. Du coup, il faudrait faire 400 moins 99.

73 - Chercheuse : Tu veux que je fasse quelque calcul?

74 - Élève 14 : Non, c'est bon, merci. Ça fait 301 pailles.

75 - Chercheuse : Ok, tu peux me reexpliquer, ce que tu as fait ?

76 - Élève 14 : Là, du coup, j'ai trouvé que sur 4 pailles il y en avait... Sur 4 carrés de pailles il y en avait 3 où il manquait une paille et du coup, sur 5, c'était pareil. Et ainsi de suite. Et du coup, je me suis dit que sur 100, ça faisait pareil, qu'on pouvait faire comme ça jusqu'à 100. Du coup, ça faisait... Il avait 99 pailles sur 100 qui manquaient dans chaque carré et du coup, j'ai fait 4 fois 100. Ça fait 400. En tout, il y a 4 fois 100 carrés. Et après j'ai fait 400 moins 99 et ça donnait 301 pailles. Et du coup il y aurait 301 pailles.

77 - Chercheuse : Et pourquoi t'as fait cette soustraction-là ?

78 - Élève 14 : Ben pour enlever les pailles qui j'avais en trop en faisant 4 fois 10... Emh, 4 fois 100. Et du coup je les ai enlevés en faisant 400 moins 99.

79 - Chercheuse : Ok, très bien. T'es prêt pour la prochaine ?

80 - Élève 14 : Oui.

81 - Chercheuse : D'accord, je vais alors. Toujours même tâche, mais la question maintenant est : en connaissant les nombre de carrés, pourrais-tu toujours trouver le nombre de pailles ?

82 - Élève 14 : Ah... Ben oui, parce que c'est le calcul que je viens de faire là.

83 - Chercheuse : Et alors comment tu ferais ?

84 - Élève 14 : Ben comme ici. Je prendrais, par exemple 12 pailles... Un carré égal... 4 parties, 4 pailles, et 4 carrés égal... 32 [inaudible] égal 13... Égal 13 pailles. Et du coup, sur les quatre y en a... Du coup, sur les 4 il manque une paille sur trois carrés, à trois sur 4... 3 carrés sur 4. Et du coup... Mais j'aurais dû mettre 12 carrés... Il faudrait faire 12 fois 4 parce que du coup, il y a 4 pailles dans un carré et vu qu'il y a 12 carrés... 12 fois 4 égal 48. Du coup il y en a 3 sur 4... Du coup, il y en aurait 11 sur 12 qui manquent. Et du coup, il faudrait faire 48 moins 11, 7... Du coup ça fait 37, en tout il y aurait 37 pailles dans 12 carrés.

85 - Chercheuse : Oui, très bien, et donc pour... Si, en général, tu connais le nombre de carrés, comment tu fais ?

86 - Élève 14 : En général, si on connaît déjà le nombre de carrés ?

87 - Chercheuse : Oui, si, tu vois, en connaissant le nombre de carrés, comment peux-tu trouver le nombre de pailles ?

88 - Élève 14 : En faisant comme ça [il indique ses calculs avec l'exemple générique du 12], parce que là, je savais qu'il y avait 12 carrés.

89 - Chercheuse : D'accord. Ok, alors... Toujours cette tâche, la question est : tu as acheté un paquet de 200 pailles. Combien de carrés peux-tu construire ?

90 - Élève 14 : Moins de 100, vu que là, avec avec 301 une pailles, je peux construire

100 carrés, du coup ça sera moins de 100, ça je sais déjà. Il faudrait 4 fois quelque chose qu'il fasse 200. [*inaudible*] fait 200... 4 fois 80 [*il écrit le calcul en colonne* $80+80+80+80$]... 16, 16, 10 plus 6... 42. C'est pas possible. Je ne sais pas.

91 - Chercheuse : Oui, regards, t'avais juste fait, tu vois... 2, alors... 6 plus 6 ça fais 12 comme... 2, mais la retenue est de 1. Donc, 1 plus 1 plus 1 trois.

92 - Élève 14 : Ah oui, c'est parce que en fait... Ah, oui, j'ai compris. Du coup ça ferait 320. Du coup c'est pas fois 80. [*il écrit le calcul en colonne* $60+60+60+60$] 6... [*Inaudible*] 4... c'est 24... 240 c'est toujours trop...

93 - Chercheuse : Tu m'expliques un moment ce que t'es en train de faire ?

94 - Élève 14 : Là... Du coup je suis en train d'essayer de faire tous les chiffres que je pense qu'ils peuvent aller à 200 en faisant fois 4. Sauf que vu que j'arrive pas à faire fois 4 de tête, je les mets en 4 et après, j'ai fait une addition.

95 - Chercheuse : Et pourquoi tu fais fois 4 ?

96 - Élève 14 : Ben, parce que dans un seul carré, il y a 4 et après... Vu que 3 sur 4... À chaque fois il en manque un. Et ben, je vais diviser par ce que je trouve, comme j'ai fait là [*il indique ce qu'il a fait à la sous-question d*].

97 - Chercheuse : Oui. Donc là, par exemple, pour 60, tu étais arrivé à 240, n'est-ce pas ?

98 - Élève 14 : Oui. Du coup ça serait... 50 [*il écrit le calcul en colonne* $50+50+50+50$]... Et là, du coup c'est fois 50 égal 200. Donc ça veut dire que je pourrais faire 50 carrés avec 200 pailles. Sauf qu'il faut que je... Ça faut dire que je peux faire 50 carrés avec 200 pailles.

99 - Chercheuse : Oui, mais si on revient à ce que tu as fait avant, là par exemple, je sais pas... Tu viens de le dire, pour les 12 carrés, t'avais fais.

100 - Élève 14 : Ah, oui ! Là, ça veut dire que je dois faire 50... 49 sur 50 et du coup 200 moins 49. Ça fait 151 pailles... Ça ferait 151 pailles !

101 - Chercheuse : Oui.

102 - Élève 14 : Du coup c'est faux.

103 - Chercheuse : Ba, c'est pas faux ce que tu as fait.

104 - Élève 14 : Oui, mais le résultat est faux, c'es ça que je veux dire.

105 - Chercheuse : Oui, disons que ce n'est pas le maximum. Tu pourrais faire encore des carrés.

106 - Élève 14 : 200... [*inaudible*] Ça faisait 240. Du coup... 200... 240... [*Inaudible*] 199, donc je pourrais encore en faire 9.

107 - Chercheuse : Alors, dis-moi ce que tu as fait là, comme ça je peux comprendre.

- 108 - Élève 14 :** Et j'ai vu que 60 fois 4 ça faisait 240, et du coup je me suis dit que 240 moins 49, ça serait plus près de 200.
- 109 - Chercheuse :** Et pourquoi t'as fait moins 49?
- 110 - Élève 14 :** Parce que... Ah, je viens de comprendre en fait ! Parce que, ça voudrait dire qu'il faudrait avoir 60... 59, il faudrait faire moins 59, du coup ça reviedrait au même que là, parce que il manquerait à chaque fois la même chose, la même chose.
- 111 - Chercheuse :** On peut essayer, si on fait la soustraction.
- 112 - Élève 14 :** 240 moins 59... [*Inaudible*]. Et du coup ça fait 151, et du coup il faudrait que je vais encore plus haut. Je peux essayer avec 420. Ça ferait beaucoup trop... 120... 320 moins 79... [*Inaudible*] 10, 11 12. Dix... C'est trop donc il faut trouver 70 [*il écrit en colonne 70+70+70+7*]. 7 plus 7, 14. 28... 280. 70... 280. 280 moins 69... 211, donc c'est trop haut. Il faudrait trouver 65... 65 c'est vrai. Parce que entre les deux.
- 113 - Chercheuse :** Entre quoi et quoi?
- 114 - Élève 14 :** C'est entre... Bâ, c'est entre... Entre 60 et 70.
- 115 - Chercheuse :** Et pourquoi tu veux...?
- 116 - Élève 14 :** Parce que 80, c'est trop haut. 70 c'est trop haut. Et se 60 c'est trop bas, donc il faudrait trouver au milieu parce que ça soit bien. [*Il écrit en colonne 65+65+65+65*] ..2 plus 2 4... 1 plus 1, 2... 4. 20... 2 plus 2... 44...
- 117 - Chercheuse :** Comment t'as fait cette addition?
- 118 - Élève 14 :** Oui, mais c'est faux en fait, parce que là, j'ai fait 5 plus 5, 10. 5 plus 5, 10. Plus, ça fait 20. Là j'ai fait 6 plus 6, 12; 6 plus 6, 12. Ça fait 24. Et du coup, 20 plus 24, ça fait 44 et après j'ai trouvé, du coup j'ai mis 44 là et j'ai rajouté un [*inaudible*]. Mais c'est faux parce que là, même 80 fois 4, ça fait 240, donc pourquoi 65 fois 4, ça ferait peu... 80.
- 119 - Chercheuse :** Oui, t'as raison. Qu'est-ce qu'il y a qui ne marche pas?
- 120 - Élève 14 :** Justement, c'est ça que je cherche. Je fais autre chose. Là, ça fait 10. Là, ça fait 12. Et 12 plus 10, ça fait 22. Et là, 22 aussi, du coup. 22 plus 22... ça fait 44 aussi. Donc ça veut dire que le 44 c'est juste. Mais si [*inaudible*] jusqu'à 44, ça sera faux aussi puisque de toute façon, il manque un 0.
- 121 - Chercheuse :** Écoute, je te fais une proposition. On peut... Ça on peut le faire avec la calculette. Et puis on y revient ensemble dessous à la fin du cours d'aujourd'hui. Dis-moi ce que je dois faire avec la calculette. Quelle opération?
- 122 - Élève 14 :** 4 fois 65.
- 123 - Chercheuse :** 260.
- 124 - Élève 14 :** 260, ok, merci. Du coup, 4 fois 65 égal 260 pailles. 260 moins 64...

6... 7... 13, 14 [*il bouge les doigts*]... 200 [*inaudible*]... C'est trop haut.

125 - **Chercheuse** : Qu'est-ce que tu as fait ? Tu as fait 260 qui, voilà, c'était le résultat de... 260...

126 - **Élève 14** : Oui.

127 - **Chercheuse** : Et après moins...

128 - **Élève 14** : Moins 64.

129 - **Chercheuse** : D'accord, et comment t'as fait ?

130 - **Élève 14** : Ba, j'ai substrait. Je l'ai fait en colonne.

131 - **Chercheuse** : Oui, on refait ensemble.

132 - **Élève 14** : Là 4 c'est le plus grand que 0, donc on peut pas soustraire. Du coup, j'ai rajouté 10 là et j'ai rajouté 1 là. Du coup... 4, aller à 10 ça fait 6, donc j'ai marqué 6 ici, et après là il est trop grand vu que j'ai rajouté 1. Donc c'est 7, mais 7 on ne peut pas, j'ai rajouté 10. 7, aller aller à 16, ça fait 11. Non, ça fait 10, du coup j'ai marqué 0 et le 1 là, et vu que ça fait 10, j'ai rajouté 1 là. Et du coup, 1 plus 2 ça fait 3, 3 moins 1, ça fait 2. Du coup j'ai trouvé ça.

133 - **Chercheuse** : J'ai compris. Mais 16 et 7... 7 pour aller à 16, c'est 9, ce n'est pas 10. T'es d'accord ? Parce que ça fait 10 pour aller à 17.

134 - **Élève 14** : Ok ! Du coup... Là il y a un 9, 9 il faut enlever, et du coup, là ça fait 196. Donc il faudrait prendre encore plus haut. [*Il écrit 4+67*].

135 - **Chercheuse** : À nouveau, si tu veux, je peux faire des calculs pour toi.

136 - **Élève 14** : Oui, alors volontiers.

137 - **Chercheuse** : Vas-y, dis-moi.

138 - **Élève 14** : 4 fois 67.

139 - **Chercheuse** : 268 [*en lui montrant le résultat*].

140 - **Élève 14** : Mais 268 moins 66... [*Il calcule sur les doigts*] ...2... 0... 202, c'est 2 de trop. Mais si on enlève moins d'aller à 67, ça fait 65, donc...

141 - **Chercheuse** : Si on enlève, pardon ?

142 - **Élève 14** : Là, du moment qu'on en a 2 en trop, on pourrait essayer de faire du coup... Ba, enlever là pour trouver quatre fois combien il faut faire mais ça fait 65, 65 on vient de le faire et c'est faux.

143 - **Chercheuse** : Mais pourquoi tu doit enlever 2 ?

144 - **Élève 14** : Parce que là, il y en a deux en trop, du coup peut-être que...

145 - **Chercheuse** : Ouais, mais là, de 202, c'est quoi ?

146 - **Élève 14** : Ces des pailles.

147 - **Chercheuse** : Oui, très bien. Et 67 ?

148 - **Élève 14** : C'est le carrés.

149 - **Chercheuse** : Oui.

- 150 - Élève 14 : Ah, du coup ce n'est pas de tout la même chose. Inaudible] enlever. 4 fois 68.
- 151 - Chercheuse : Pourquoi tu prends 68?
- 152 - Élève 14 : Ah non, oui, 66.
- 153 - Chercheuse : Pourquoi tu prends 66?
- 154 - Élève 14 : Parce que c'est en dessous... C'est entre 65 et 67. 67 c'est un poil trop haut et 65 c'est un poil trop bas.
- 155 - Chercheuse : D'accord. Alors, dis moi l'opération.
- 156 - Élève 14 : 4 fois 66.
- 157 - Chercheuse : 264.
- 158 - Élève 14 : Merci. 264 moins 65... [Il calcule sur les doigts] 9... [Inaudible]. Ah, c'est 199. Du coup... Pour arriver à plus de 200, il faudrait faire 66,5 fois 4.
- 159 - Chercheuse : Ok. Pour quoi tu veux faire 66,5?
- 160 - Élève 14 : Parce que là, 66, c'est un tout petit peu trop bas et 67, c'est trop haut. Du coup, il faudrait trouver encore ce qu'il y a entre 66 et 67. Ce serait 66,5.
- 161 - Chercheuse : D'accord, tu veux le faire?
- 162 - Élève 14 : Oui.
- 163 - Chercheuse : Tu veux que je te fasse quelque chose?
- 164 - Élève 14 : Oui, volontiers. Faire 4 fois 66,5 [la chercheuse lui montre le résultat]. 266, merci. 266 moins 65. Ça ferait un tout petit trop. ça ferait 200,5. Du coup il est impossible, en fait.
- 165 - Chercheuse : Alors, c'est quoi, ça représente quoi, le 66,5?
- 166 - Élève 14 : C'est les carrés.
- 167 - Chercheuse : Oui. Ça signifie quoi avoir 66,5 carrés?
- 168 - Élève 14 : Il y a 66 carrés et il a genre une moitié de paille qui dépasse.
- 169 - Chercheuse : Oui, je comprends. Et après donc, disons, si on voulait dessiner? On a la suite comme ça et comment tu fais le « virgule 5? ».
- 170 - Élève 14 : Genre, comme ça [il dessine un bout de paille].
- 171 - Chercheuse : Et donc, combien de pailles tu utilises?
- 172 - Élève 14 : 200 sauf qu'il y a pas assez pour finir le dessin.
- 173 - Chercheuse : Je comprends. Oui, c'est une réponse valable. C'est une réponse valable, très bien. J'ai encore une question pour toi, mais on a bientôt fini.
- 174 - Élève 14 : D'accord.
- 175 - Chercheuse : T'es encore en forme?
- 176 - Élève 14 : Oui.

- 177 - **Chercheuse** : Écoute, t'est en quelle classe?
- 178 - **Élève 14** : En 10e.
- 179 - **Chercheuse** : T'as déjà vu un peu d'algèbre?
- 180 - **Élève 14** : Non, pas trop.
- 181 - **Chercheuse** : Pas trop, t'as jamais vu les lettres?
- 182 - **Élève 14** : Non, pas plus que ça.
- 183 - **Chercheuse** : Non, d'accord. Par exemple, t'as jamais vu des choses comme x ou n ...
- 184 - **Élève 14** : Non...
- 185 - **Chercheuse** : Genre $x + 2$ ou $n + 1$? Des trucs comme ça? Non?
- 186 - **Élève 14** : Ouais, x j'ai déjà vu.. Plus ou moins... [*Inaudible*] compris. Mais les n , ça je n'ai jamais...
- 187 - **Chercheuse** : D'accord. Et les équations tu les as déjà faites?
- 188 - **Élève 14** : Non.
- 189 - **Chercheuse** : Jamais? T'as jamais vu des trucs comme $x + 11 = 3$?
- 190 - **Élève 14** : En appui je n'avais rien à faire et il y avait d'autres qui faisaient ça, et du coup la prof d'appui m'a dit de faire avec eux. Et du coup on a fait ça et les x .
- 191 - **Chercheuse** : D'accord, donc ça t'as déjà vu.
- 192 - **Élève 14** : Ouais.
- 193 - **Chercheuse** : Quelques fois. Je te pose une question bonus, d'accord? Si tu arrives à réfléchir un moment, bien. Sinon, ce n'est pas grave. Regarde. Cette questions là [*en pointant la question d*]. Tu te rappelles, la question était « en connaissant le nombre de carrés, pourrait-on toujours trouver le nombre de pailles? » Tu m'avais expliqué que oui et tu m'avais expliqué comment. N'est-ce pas? Tu te rappelles? Si j'ai un nombre x de carrés, comment tu pourrais trouver combien de pailles t'as besoin pour les construire?

La suite de carrés : Élève 15

Durée de l'entretien : 16 min 04 s

- 1 - **Chercheuse** : Ce qu'on va faire aujourd'hui, c'est ça. Là, t'as des photos. Il y a les 3 premières étapes d'une suite de carrés. La première étape, la deuxième et la troisième. La question est combien faut-il de pailles... Donc, tu vois... Chaque côté, là, c'est une paille différente. Combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés? La question est claire? Le problème aussi?
- 2 - **Élève 15** : Oui. Je regarde combien de carrés il y a dans la première étape...
- 3 - **Chercheuse** : Si tu veux [*inaudible*].

- 4 - Élève 15 : Il en y a 4. Après je fais 4 fois 4. Il faut 16 pailles.
- 5 - Chercheuse : Oui...
- 6 - Élève 15 : Et de 5 carrés, je fais la même chose, mais fois 5.
- 7 - Chercheuse : D'accord, donc, si tu devais m'expliquer ta procédure, qu'est-ce que tu me dirais ?
- 8 - Élève 15 : J'ai regardé combien de carrés il y avait dans le 1, il en y a 4. Alors, faire 4 carrés, j'ai fait fois 4.
- 9 - Chercheuse : Donc voilà, pour la deuxième étape pour les 2 carrés, avec cette procédure, comment tu ferais ?
- 10 - Élève 15 : Fois 2. 4 fois 2.
- 11 - Chercheuse : Oui...
- 12 - Élève 15 : Et pour la troisième étape, je ferais 3 fois... 3 fois 4... Non ! Ici je rajouterai juste 4 pour [*inaudible*].
- 13 - Chercheuse : C'est-à-dire ?
- 14 - Élève 15 : Je ferais le nombre de carrés... le nombre de pailles qu'il y a plus 3 pailles.
- 15 - Chercheuse : Pour obtenir quoi ?
- 16 - Élève 15 : Pour obtenir 4 carrés.
- 17 - Chercheuse : D'accord. Donc, qu'est-ce que tu obtiens ?
- 18 - Élève 15 : 13.
- 19 - Chercheuse : Comment t'as fait ?
- 20 - Élève 15 : J'ai compté le nombre de pailles, après j'ai fait plus 3. Ça me donne pas le même résultat.
- 21 - Chercheuse : Quel est le problème à ton avis ?
- 22 - Élève 15 : Parce que j'ai fait fois 4 et que... Pour... Alors ça doit être 4... 4 pailles de chaque côté, et pour rajouter, si on met un carré entier là, il faut juste rajouter 3 pailles et après 3 pailles. Il ne faut pas rajouter 4 pailles de plus.
- 23 - Chercheuse : Oui, je comprends. Et pour les 100 carrés, alors ?
- 24 - Élève 15 : La même chose. Ça serait... Ça serait 16. Alors là c'est 13 et 16.
- 25 - Chercheuse : Alors, je te pose une autre question, qui est dans la suite de ce que tu viens de faire. Combien de pailles pour 12 ?
- 26 - Élève 15 : [*L'élève écrit « 12+12=24 »*] J'ai fait ici le nombre de pailles qu'il va y avoir [*en pointant les pailles horizontales en haut*] plus le nombre de pailles qu'il va y avoir là [*en pointant les pailles horizontales en bas*]. Il va y avoir 12 pailles.
- 27 - Chercheuse : Comme t'as fait ?
- 28 - Élève 15 : S'il y a 12 carrés, beh il y a 12 pailles de chaque côté, en bas et en haut.

29 - Chercheuse : Oui...

30 - Élève 15 : Alors ça va faire... Donc 24... Plus, il faut encore ajouter des pailles qui se trouvent au milieu. Ça fera aussi 12, je crois [*l'élève écrit « 24+12=36 »*]. Ça fait 36 pailles.

31 - Chercheuse : D'accord, très bien. Est-ce que cette technique marche pour les étapes que tu connais déjà?

32 - Élève 15 : Oui. C'est pas 36, c'est 30... C'est 37 [*elle efface « 36 » et obtient « 24+12=37 »*].

33 - Chercheuse : Ça veut dire que 24 plus 12, donne...

34 - Élève 15 : Non, ça fait 37... Ça, ça donne 36, mais le résultat c'est 37.

35 - Chercheuse : Ah, ok, et pourquoi c'est 37?

36 - Élève 15 : Parce que s'il y a 12... S'il y a 12 traits et qu'on met 12 pailles au milieu, il en n'y aura pas assez.

37 - Chercheuse : Et pourquoi t'en rajoute une, alors?

38 - Élève 15 : Pour fermer les carrés.

39 - Chercheuse : D'accord, je comprends.

40 - Élève 15 : Comme ici, il en y a 3 au milieu [*en pointant les pailles verticales des 2 carrés*]...

41 - Chercheuse : Oui, d'accord, ok. Et alors, toujours même exercice... 100 carrés!

42 - Élève 15 : [*L'élève écrit « 301 »*].

43 - Chercheuse : Ha! T'as très vite fait! Qu'est-ce que t'as fait?

44 - Élève 15 : J'ai fait 100 plus 100 plus 100... plus 1.

45 - Chercheuse : D'accors, t'as envie de m'expliquer...?

46 - Élève 15 : Pareil que l'autre. Parce qu'il y a 100 paille en haut, 100 pailles en bas, ça fait 100 plus 100, 200. Et pour... au milieu, il faut mettre une paille de plus que celle qu'on a, que celles d'en haut et d'en bas.

47 - Chercheuse : Ok, je comprends très bien.

48 - Élève 15 : Je m'explique pas très bien mais bon...

49 - Chercheuse : Non, non, je comprends très bien... et alors... T'es prête? Toujours même chose, mais on se demande : si on connaît le nombre de carrés, pourrait-on toujours trouver le nombre de pailles?

50 - Élève 15 : J'ai pas compris.

51 - Chercheuse : Donc, là, on avait des... Des nombres particuliers, on se demandait 3 carrés combien de pailles? 100 carrés, combien de pailles? Après on a fait 12 carrés, combien de pailles? 100 carrés, combien de pailles? Et donc, on se demande pour un nombre quelconque de carrés... Quel est le nombres de pailles?

- 52 - Élève 15 : Ben, on ne peut pas savoir si on n'a pas le nombre de carrés qu'il y a. Mais si on sait le nombre de carrés qu'il y a, on peut savoir combien de pailles il y aura.
- 53 - Chercheuse : D'accord, donc, si on le sait, ce nombre-là... Qu'est-ce que tu ferais avec ce nombre ?
- 54 - Élève 15 : Pareil que les autres, je ferais le nombre qu'ils me donnent... Je calculerais 3 fois. Ça... Je ferais... Si c'est 10, je fais 10 plus 10 plus 10... Ça fait 30 et j'en rajoute 1.
- 55 - Chercheuse : D'accord.
- 56 - Élève 15 : 31.
- 57 - Chercheuse : Ok, et si c'est un autre nombre ?
- 58 - Élève 15 : Je fais pareil.
- 59 - Chercheuse : C'est-à-dire, pareil ?
- 60 - Élève 15 : Ou sinon, on peut faire le nombre fois 2... Non, fois 3. Le nombre fois 3 et après plus 1.
- 61 - Chercheuse : D'accord, je vois. Alors, j'ai encore une petite question. T'achètes un paquet de 200 pailles. Combien de carrés peux-tu construire ?
- 62 - Élève 15 : 60.
- 63 - Chercheuse : Comment t'as fait ?
- 64 - Élève 15 : Je crois... On peut encore faire... On peut encore faire plus, mais...
- 65 - Chercheuse : Oui, on cherche au maximum.
- 66 - Élève 15 : Ça doit être moins de 100 parce que ça fait 301. Mais plus que 50. Parce que ça fait 151.
- 67 - Chercheuse : Ah d'accord, je vois ce que tu fais. Très bien, c'est vrai. Est-ce qu'on arrive à resserrer un peu cet intervalle ?
- 68 - Élève 15 : Ça doit être moins de 70.
- 69 - Chercheuse : Tu peux écrire, si ça t'aide.
- 70 - Élève 15 : 181 pailles, on ne pourrait utiliser pour faire 80 carrés... non pas, 80 carrés, 60 carrés. Mais on peut encore faire plus [elle écrit « $60 \times 3 = 18$; $5 \times 3 = 15$; $18 + 15 = 33$ ». Après elle ajoute des zéros en obtenant « $180 + 15 = 330$ »]. 33... C'est pas 65. 60, je crois !
- 71 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu as fait, là ?
- 72 - Élève 15 : J'ai juste fait 65.
- 73 - Chercheuse : Ouais...
- 74 - Élève 15 : Mais comme 65 fois 3, je sais pas le faire, alors j'ai fait 60 fois 3 et 5 fois 3.
- 75 - Chercheuse : C'est une très bonne technique. Et après qu'est-ce que tu as fait ?

60 fois 3, combien ça donne?

76 - Élève 15 : 18 et 5 fois... Voilà, ça donne 180, 60 fois 3.

77 - Chercheuse : Et après, qu'est-ce que tu fais?

78 - Élève 15 : J'ai fait plus.

79 - Chercheuse : D'accord, et combien ça donne?

80 - Élève 15 : 330.

81 - Chercheuse : Comment t'as fait là, pour obtenir 330?

82 - Élève 15 : J'ai fait plus quand j'ai calculé.

83 - Chercheuse : T'es sûre que c'est le bon résultat?

84 - Élève 15 : Non, mais...

85 - Chercheuse : Là, on peut utiliser... Si tu veux, je peux utiliser la calculette, de toute façon ce n'est pas les calculs qui m'intéressent, d'accord? Si tu me dis ce que je dois faire, je le fais.

86 - Élève 15 : 180 plus 15.

87 - Chercheuse : Alors, 180 plus 15 donne ça, 195.

88 - Élève 15 : On pourrait faire plus que 65 parce que...

89 - Chercheuse : Désolée [*une personne entre dans la salle*]... Tu dois juste prendre quelque chose ou...? Dans 10 minutes on a fini.

90 - Élève 15 : 7 on pourrait essayer. 180 plus 21... 201... 66. On pourrait faire 66 carrés.

91 - Chercheuse : Comment tu as fait, comment tu sais?

92 - Élève 15 : J'ai fait 60 fois 3, ça fait 180. Et j'ai fait 6 fois 3, ça fait 18. Après, j'ai calculé.

93 - Chercheuse : T'as calculé quoi?

94 - Élève 15 : J'ai fait 180 plus 18. Mais j'ai fait faux.

95 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu as obtenu?

96 - Élève 15 : 200 je crois. 200 ou 199, un des 2. On pourrait le faire à la calculette?

97 - Chercheuse : Oui, qu'est-ce que tu veux que je fasse?

98 - Élève 15 : 180 plus 18.

99 - Chercheuse : 198.

100 - Élève 15 : 198.

101 - Chercheuse : Donc tu ne peux pas construire plus de carrés que ça.

102 - Élève 15 : Non. Je crois pas.

103 - Chercheuse : Pourquoi?

104 - Élève 15 : Parce qu'on doit pour faire un carré de plus, on doit rajouter 3 pailles, alors ça ferait 201 comme on a regardé là, pour 67.

105 - Chercheuse : D'accord, alors c'est trop.

106 - Élève 15 : C'est 66 alors.

107 - Chercheuse : Merci beaucoup. Ça c'était ce que je voulais te demander aujourd'hui. T'as quelque question?

108 - Élève 15 : Non.

109 - Chercheuse : Ok, alors j'arrête l'enregistrement, d'accord?

La suite de carrés : Élève 16

Durée de l'entretien : 43 min 21 s

1 - Chercheuse : Là, c'est parti l'enregistrement. On baisse un petit peu [*la caméra*], ça reprend juste tes mains. Ça joue?

2 - Élève 16 : Oui.

3 - Chercheuse : Tu as des questions jusqu'à là, ou ça va?

4 - Élève 16 : Non, ça va.

5 - Chercheuse : Je peux te donner un stylo? Regarde ces photos, les 3 photos-là. Il y a les 3 premières étapes d'une suite de carrés, ici la première étape, la deuxième étape, la troisième étape. Et la question est combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés?

6 - Élève 16 : Chaque trait, c'est une paille.

7 - Chercheuse : Exactement, oui.

8 - Élève 16 : Il faut 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 [*l'élève compte les pailles pour les 3 carrés*]. 4 fois 4 ça fait 16.

9 - Chercheuse : D'accord, donc, comment tu as fait, là?

10 - Élève 16 : Un carré c'est constitué de 4 droites et du coup il faut 4 pailles et il y a 4 carrés, donc il faut faire 4 fois 4.

11 - Chercheuse : Ok. Est-ce que tu pourrais vérifier cette réponse?

12 - Élève 16 : Je peux compter.

13 - Chercheuse : Oui, vas-y.

14 - Élève 16 : Ah non, c'est faux.

15 - Chercheuse : Pourquoi?

16 - Élève 16 : Parce que là, ici [*en pointant les 3 carrés*], les 3 carrés sont collés, du coup le quatrième aussi va être collé. Donc chaque extrémité il y aura une paille pour chaque carrée. Donc ça fait pas 16. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 [*l'élève compte les pailles sur les 3 carrés en mimant les 3 pailles du quatrième*]. Il y aura 13.

17 - Chercheuse : D'accord. Comment tu as fait, là?

18 - Élève 16 : J'ai compté.

- 19 - **Chercheuse** : D'accord, très bien. Et donc, pour la question d'après, pour les 5 carrés?
- 20 - **Élève 16** : 13 plus 3, ça fait 15... non, ça fait 16.
- 21 - **Chercheuse** : Ok, super, alors je te pose la question d'après. C'est toujours la même tâche. Mais cette fois, on veut comprendre combien de pailles pour 12.
- 22 - **Élève 16** : Pour 5 carrés, il y a 16. Du coup on rajoute 5. Ça fait 10. 16 fois 2 ça fait 32. Et 32 on rajoute 2. Du coup, quand on va rajouter ça va faire...
- 23 - **Chercheuse** : Tu peux écrire tout ce que tu veux si ça t'aide.
- 24 - **Élève 16** : 32 plus 3, ça fait 35. Plus 3 encore, 38. Du coup, il faudra 38 pailles.
- 25 - **Élève 16** : Ok, tu peux juste me redire comment tu as fait?
- 26 - **Élève 16** : 5 carrés fois 2 et ça fait 32 pailles. 32 pailles plus 3 pour faire encore un autre carré, ça fait 35, plus 3 encore, ça fait 38.
- 27 - **Chercheuse** : D'accord. Est-ce que tu pourrais vérifier si ça marche ce que tu as fait?
- 28 - **Élève 16** : Il faut que je fasse du coup.
- 29 - **Chercheuse** : Oui si tu veux tu peux.
- 30 - **Élève 16** : [*L'élève dessine les 12 carrés et compte les pailles en écrivant le nombre à côté de chaque paille*] 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. 1, 2, 3... 13, 14... ça fait 37.
- 31 - **Chercheuse** : D'accord, et qu'est-ce que tu avais dit avant, tu te rappelles?
- 32 - **Élève 16** : 38. Il y a une erreur alors. Je ne sais pas...
- 33 - **Chercheuse** : Qu'est-ce que t'as fait avant? Tu te rappelles? Ton raisonnement.
- 34 - **Élève 16** : Oui, j'ai fait 5 carrés fois 2, puisque 5 carrés ça faisait... Je me rappelle plus combien ça faisait mais...
- 35 - **Chercheuse** : Alors t'avais dit... Écoute, à mon avis tu arrives facilement à le retrouver parce que les 3 carrés c'était 10.
- 36 - **Élève 16** : 5 carrés ça faisait 16. 16 fois 2 ça faisait 32. Pour faire 10 carrés... Après, je rajoute 2 fois 3.
- 37 - **Chercheuse** : Oui. Donc, tu pourrais déjà...
- 38 - **Élève 16** : Oui, oui... Après, je rajoute 2 fois 3, après ça arrive à 36. 1, 2... J'arrive tout le temps à 38.
- 39 - **Chercheuse** : Oui, avec cette manière-là. On pourrait contrôler si ton schéma-là... Si ton raisonnement est correct ou pas. Trouver l'erreur. Tu vois ce que je veux dire?
- 40 - **Élève 16** : La bonne réponse, c'est 37.
- 41 - **Chercheuse** : Oui, et à ton avis pourquoi ce que tu avais fait avant ça jouait pas?
- 42 - **Élève 16** : J'avais rajouté une paille en trop.

- 43 - Chercheuse : Où? Et comment?
- 44 - Élève 16 : Ah! J'ai fait une erreur parce que 16 fois 2 ça fait pas 32!
- 45 - Chercheuse : Alors, 16 fois 2, si tu veux, on peut contrôler avec une calculette.
De toute façon, c'est pas les calculs notre but, aujourd'hui. Donc je prends la calculette. Tu me dis...
- 46 - Élève 16 : 16 fois 2.
- 47 - Chercheuse : 16 fois 2 c'est 32 effectivement.
- 48 - Élève 16 : Je ne comprends pas alors. Il fallait pas faire 16 [*inaudible*].
- 49 - Chercheuse : Pourquoi?
- 50 - Élève 16 : Je ne sais pas.
- 51 - Chercheuse : Tu y es presque.
- 52 - Élève 16 : 16 fois 2, ça ne va pas faire 10 carrés.
- 53 - Chercheuse : Pourquoi?
- 54 - Élève 16 : Parce que c'est pas 4, mais ces 3 pailles pour faire un carré. Du coup je me suis trompé.
- 55 - Chercheuse : Et qu'est-ce qu'il faudrait faire alors plutôt pour trouver les 12 carrés?
- 56 - Élève 16 : Ce schéma [*en pointant son dessin des 12 carrés*]. C'est plus facile.
- 57 - Chercheuse : Oui. Mais alors, je te pose une question un peu plus difficile. Toujours la même tâche. Mais ça demande les 100 carrés. Combien de pailles pour 100 carrés?
- 58 - Élève 16 : On fait les 10 carrés et on les fait fois 10.
- 59 - Chercheuse : Est-ce que ça marche?
- 60 - Élève 16 : [*L'élève compte 10 carrés sur son dessin et elle lit le nombre sur la gauche, et pas celui sur la droite dans son schéma des 12 carrés où elle avait numéroté les pailles*] Ça fait 280 pailles.
- 61 - Chercheuse : D'accord, qu'est-ce tu as fait, là?
- 62 - Élève 16 : Bas, j'ai compté les 10 carrés ici [*en pointant les 10 carrés sur on dessin des 12 carrés*], et ça arrive à 28 pailles. Et qu'on doit faire fois 10, ça fait 280.
- 63 - Chercheuse : Donc ça, c'est le résultat qu'on a pour l'instant. 280. Avec le raisonnement que tu m'as dit. Est-ce que ce raisonnement marcherait, par exemple pour les 20 carrés? Ça c'est encore assez petit, on peut le contrôler, n'est-ce pas?
- 64 - Élève 16 : Oui. Les 20 carrés... Du coup il faut faire 28 fois 2 moins 1.
- 65 - Chercheuse : Pourquoi moins 1, tu ne l'avais pas dit avant.
- 66 - Élève 16 : Je ne sais pas. Ça m'est venu à la tête.
- 67 - Chercheuse : Pourquoi? À quoi tu as pensé?

- 68 - Élève 16 : Justement, le truc qu'il n'y a pas 4 mais 3. Du coup 28 fois ça fait 56.
Moins 1, ça fait 55.
- 69 - Chercheuse : D'accord. Donc ça c'est pour 20 pailles... Pardon, pour 20 carrés.
D'accord, et alors pour 100 carrés?
- 70 - Élève 16 : Ça fait 279.
- 71 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu as fait, là?
- 72 - Élève 16 : Moins 1.
- 73 - Chercheuse : Pourquoi, tu as fait moins 1?
- 74 - Élève 16 : Parce qu'il y a 3 pailles pour faire un carré.
- 75 - Chercheuse : Oui, et donc pourquoi tu enlèves une paille?
- 76 - Élève 16 : Ah, il faut enlever une paille de chaque carré, en fait, non?
- 77 - Chercheuse : Et donc, comment tu ferais?
- 78 - Élève 16 : Là il y a 12 carrés, du coup on enlève 12 pailles. Et pour 100 carrés,
on enlève 100 pailles. Du coup, ça fait 180.
- 79 - Chercheuse : Mais tu l'enlève de quoi, en fait?
- 80 - Élève 16 : Je ne sais pas. Parce que là [*en pointant ses 12 carrés*], tous les carrés
sont collés, ils ont chacune une droite en commun. Sauf les 2 extrémités. Du
coup, ils occupent 2 pailles chacune. Du coup il faut faire moins le nombre de
carrés.
- 81 - Chercheuse : D'accord. Très bien, donc. Quel est le calcul que tu ferais ici, par
exemple? Pour la 12 carrés?
- 82 - Élève 16 : Là, j'ai compté 37 pailles, du coup moins 12.
- 83 - Chercheuse : D'accord. Ok, je vois bien ton raisonnement. Mais alors si on es-
saye peut-être d'appliquer ce raisonnement que t'es en train de faire, pour les
3 carrés.
- 84 - Élève 16 : Oui...
- 85 - Chercheuse : Quel est le raisonnement que tu ferais?
- 86 - Élève 16 : Il faut compter les pailles et faire moins 3.
- 87 - Chercheuse : Ok, donc, pourquoi moins 3?
- 88 - Élève 16 : Parce qu'il y a 3 carrés.
- 89 - Chercheuse : Très bien. Et donc, qu'est-ce que tu fais? Tu comptes les pailles,
donc combien de pailles tu as?
- 90 - Élève 16 : 10, moins 3, 7.
- 91 - Chercheuse : D'accord, mais donc la question est toujours combien de pailles
pour construire 3 carrés?
- 92 - Élève 16 : 7.
- 93 - Chercheuse : Est-ce que c'est vrai?

- 94 - Élève 16 : Non [*elle rigole*]. Ba, il faut 10, là.
- 95 - Chercheuse : Oui, il faut 10.
- 96 - Élève 16 : C'est compliqué, einh !
- 97 - Chercheuse : C'est une tâche compliquée. C'est vrai, ce n'est pas une tâche hyper simple. On est d'accord, mais je ne suis pas ici pour voir si tu fais tout juste, d'accord? Je ne juge pas ce que tu fais. Je regarde juste comment tu fais.
- 98 - Élève 16 : Du coup je vais faire les 100 carrés, là parce que... [*elle dessine les 100 carrés*].
- 99 - Chercheuse : Ça devient un peu long comme ça...
- 100 - Élève 16 : Oui.
- 101 - Chercheuse : Á combien t'es?
- 102 - Élève 16 : [*Elle compte les carrés dessinés*] 79, mais pas sûre. [*Elle recompte les carrés*] 79. 80.
- 103 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu as fais, là?
- 104 - Élève 16 : Là il y a 80 carrés [*en pointant la première ligne de carrés*] et ici il y en a 20.
- 105 - Chercheuse : D'accord. Là, quelle serait ta stratégie, maintenant pour comprendre ce que tu ferais?
- 106 - Élève 16 : Ah, mais il faut faire 3 fois le nombre, non?
- 107 - Chercheuse : Comment tu sais?
- 108 - Élève 16 : Parce que chaque carré a 3 pailles. Et là, il y 100 carré, du coup il faut faire 3 fois 100 et ça fait 300.
- 109 - Chercheuse : Est-ce que tu pourrais vérifier cette formule que tu as trouvée pour des cas que tu connais, pas exemple...
- 110 - Élève 16 : Ah, mais il faut pas faire 300 plus 2, parce qu'il y a les 2 extrémités.
- 111 - Chercheuse : Pourquoi pas? Quelle est ta réponse?
- 112 - Élève 16 : Je ne sais pas [*elle commence à compter les pailles*].
- 113 - Chercheuse : Tu veux vraiment tout compter?
- 114 - Élève 16 : Non, mais je ne sais pas comment faire.
- 115 - Chercheuse : Mais c'est une bonne stratégie, celle que tu as dit. Tu pourrais déjà la vérifier dans des petits cas pour voire si ça marche, tu vois?
- 116 - Élève 16 : Mais ça ne marche pas, là!
- 117 - Chercheuse : Pourquoi? Qu'est-ce que tu ferais?
- 118 - Élève 16 : Parce que là il y a 3 carrés [*en pointant les 3 carrés*] et dans chaque carré, il y a 3 pailles, donc il faut faire 3 fois 3. Ça fait 9, ça fait pas 10!
- 119 - Chercheuse : C'est vrai, je vois bien ce que tu veux dire.
- 120 - Élève 16 : Mais là [*en ajoutant le premier carré*], 3 fois 1 ça fait 1... Ah non, ça

fait 3. Et là.... Ah, mais il faut rajouter plus 1.

121 - **Chercheuse** : Pourquoi?

122 - **Élève 16** : Parce que si on fait 3 fois 1 ça fait 3. Il faut faire plus 1. Là [*en pointant les 2 carrés*] si on fait 3 fois 2, ça fait 6. Et là il y a 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Là si on fait 3 fois 3 [*en pointant les 3 carrés*], ça fait 9, mais là il y en a 10. Du coup il faut faire plus 1 à chaque fois.

123 - **Chercheuse** : D'accord, donc, d'où ça vient ce plus 1 que tu as trouvé?

124 - **Élève 16** : Je ne sais pas.

125 - **Chercheuse** : Par exemple déjà, ce fois 3 que tu fais, d'où ça vient?

126 - **Élève 16** : C'est parce qu'il y a 3 pailles dans chaque carré.

127 - **Chercheuse** : Voilà exactement. Donc là [*en pointant sur la figure de 1 carré la paille de bas, de gauche et droite*], par exemple, il y a 3 pailles.

128 - **Élève 16** : Non. Il y en a 2, en fait. Il y a 2 pailles [*en pointant les pailles du haut et du bas d'un carré de son dessin des 100 carrés*] qui appartiennent seulement à 1 carré parce que les 2 autres [*en pointant les 2 pailles verticales*] appartiennent aussi au carré d'à côté... Non, c'est pas juste, c'est galère!

129 - **Chercheuse** : C'est difficile cet exercice, c'est vrai. Ce n'est pas yper simple.

130 - **Élève 16** : Je comprends pas!

131 - **Chercheuse** : Mais t'y es presque.

132 - **Élève 16** : Ça fait 302.

133 - **Chercheuse** : Ok, donc maintenant tu as fait plus 2.

134 - **Élève 16** : En fait, maintenant, j'ai une nouvelle stratégie.

135 - **Chercheuse** : C'est laquelle?

136 - **Élève 16** : C'est que dans chaque carré, il y a que 2 trucs qui appartiennent à un carré seulement. Du coup là il y a 100 carrés. Donc il y a 100 fois 2, ça fait 200. Ah, je me suis perdu. Ça fait 200 plus toutes les barres au milieu, là.

137 - **Chercheuse** : Est-ce que ça marcherait pour les petites étapes?

138 - **Élève 16** : Ça fait... 2 fois 2 ça fait 4, plus 1, 2, 3, ça fait 7. Et oui, ça marche.

139 - **Chercheuse** : Ok, donc, qu'est-ce que tu as fait, là?

140 - **Élève 16** : 2 fois 2 plus 3.

141 - **Chercheuse** : Ok, pourquoi plus 3?

142 - **Élève 16** : Puisque là il y a 3 barres [*en pointant les pailles verticales des 3 carrés*].

143 - **Chercheuse** : D'accord. Et ici qu'est-ce que tu fais, alors?

144 - **Élève 16** : 3 fois 2, plus 4.

145 - **Chercheuse** : Donc, pourquoi plus 4?

146 - **Élève 16** : Parce qu'il y a 4 barres ici [*en pointant les pailles en vertical des 3 carrés*].

- 147 - **Chercheuse** : Et comment tu sais qu'il y a 4 barres?
- 148 - **Élève 16** : Parce qu'il y en a 4.
- 149 - **Chercheuse** : Tu les as comptées.
- 150 - **Élève 16** : Oui.
- 151 - **Chercheuse** : Et ici comment tu ferais [*en pointant les 100 carrés*]?
- 152 - **Élève 16** : Je rajoute 1. Parce que là il y a 4 barres et un 3 carrés. Donc, ici je rajoute 1, ça fait 101, plus 200, c'est 301.
- 153 - **Chercheuse** : Je comprends bien ta stratégie. Ça joue?
- 154 - **Élève 16** : C'est juste?
- 155 - **Chercheuse** : Oui!
- 156 - **Élève 16** : Oh! [*elle rigole*].
- 157 - **Chercheuse** : Bon bien. Merci beaucoup, pour aujourd'hui ça, c'est ce que je voulais te demander.
- 158 - **Chercheuse** : Nous avons encore un petit moment. Je te pose encore une question. Tu te rappelles la première tâche qu'on avait fait ensemble? Celle sur les carrés?
- 159 - **Élève 16** : Oui. [*Elle rit*]
- 160 - **Chercheuse** : Tu rigole déjà? Pourquoi tu rigoles?
- 161 - **Élève 16** : Parce que c'était difficile.
- 162 - **Chercheuse** : C'est vrai. Ce n'est pas une tâche simple, mais tu avais bien travaillé. Je te remets ici juste le schéma, comme ça tu te rappelles de comment il était. On fait un petit résumé de ce qu'on avait fait. La première question est celle-là : combien de carrés dans 4... Pardon, combien de pailles pour construire 4 et 5 carrés. Tu te rappelles ce que tu avais dit?
- 163 - **Élève 16** : Oui, j'avais essayé plusieurs trucs, mais celle qui avait marché, c'était de faire le nombre ici [*en pointant dans la figure des 3 carrés les pailles horizontales en haut*] fois 2, parce qu'il y a aussi en bas, plus le nombre de carrés plus 1 parce qu'il y a une paille en plus. Et du coup, pour 5 carrés, ça faisait 5 fois 2, 10. Plus 6, 16.
- 164 - **Chercheuse** : D'accord. Oui, exactement. Après la question, d'après était pour les 12 carrés. Et la question d'après encore était pour les 100 carrés. Tu te rappelles ce que tu avais fait ici?
- 165 - **Élève 16** : Oui, d'abord, j'avais tout dessiné. Et puis, c'est à ce moment-là que j'ai compris la technique de faire en haut fois en bas plus le nombre de pailles. Et du coup ça fait 301.
- 166 - **Chercheuse** : Oui et maintenant, je voudrais te poser cette question. En connaissant le nombre de carrés, pourrais-tu toujours trouver le nombre de

pailles?

167 - Élève 16 : Oui.

168 - Chercheuse : Oui? Comment?

169 - Élève 16 : En fait, ma technique de bas fois 2 et plus le nombre de carrés plus 1.

170 - Chercheuse : D'accord, je vois bien. Tu as acheté un paquet de 200 pailles. Combien de carrés peut-tu construire?

171 - Élève 16 : Alors... Mais c'est difficile, ça!

172 - Chercheuse : Tu peux prendre ton temps, y réfléchir à un petit moment.

173 - Élève 16 : [*L'élève commence à dessiner une suite de carrés en prenant la feuille à l'horizontale*].

174 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu fais, là?

175 - Élève 16 : Je dessine et je fais un schéma des carrés.

176 - Chercheuse : D'accord, mais qu'est-ce que tu veux dessiner donc? Combien de carrés?

177 - Élève 16 : Je ne sais pas, justement. Je suis en train de compter les pailles.

178 - Chercheuse : D'accord.

179 - Élève 16 : [*L'élève continue dans son dessin*].

180 - Chercheuse : A combien tu es arrivée?

181 - Élève 16 : 25.

182 - Chercheuse : 25. Donc ça va être encore un peu longu, n'est-ce pas?

183 - Élève 16 : Oui.

184 - Chercheuse : Penses-tu que tu vas y arriver en dessinant comme ça?

185 - Élève 16 : Oui... Je sais pas. Mais peut-être que je peux arriver à 50 carrés et faire fois 4.

186 - Chercheuse : Est-ce que ça marche?

187 - Élève 16 : Peut-être. Peut-être pas, mais je pense que je dois tout dessiner [*elle continue dans son dessin*]. C'est impossible.

188 - Chercheuse : Pourquoi c'est impossible?

189 - Élève 16 : Là je suis arrivée à 199 [*en pointant la fin de son dessin*].

190 - Chercheuse : D'accord.

191 - Élève 16 : Et là c'est la dernière paille pour faire un dessin, on ne peut pas faire encore de plus. Du coup on peut faire que 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 [*elle compte les carrés*] 66 carrés.

192 - Chercheuse : D'accord. Et comment tu ferais avec 2000 pailles?

193 - Élève 16 : En rajoutant 0, ça fait 660 carrés.

194 - Chercheuse : Comment t'es sûre?

- 195 - Élève 16 : Parce que 200 carrés... 200 pailles, ça fait 66 carrés. Et 2000 c'est fois 10. Donc, on fait 66 fois 10.
- 196 - Chercheuse : Est-ce que c'est vrai pour les petites figures que tu connais? Pas d'exemple pour un carré est 10 carrés. Est-ce que c'est vrai ce que tu dis?
- 197 - Élève 16 : Je sais pas.
- 198 - Chercheuse : Mais tu sais les trouver, n'est-ce pas?
- 199 - Élève 16 : Oui.
- 200 - Chercheuse : À partir des carrés et des pailles.
- 201 - Élève 16 : Oui.
- 202 - Chercheuse : Donc tu sais si tu peux faire cette chose fois 10. Combien de carrés... Pardon, combien de pailles pour 1 carré?
- 203 - Élève 16 : 4.
- 204 - Chercheuse : Et pour 10?
- 205 - Élève 16 : 31.
- 206 - Chercheuse : Oui.
- 207 - Élève 16 : Du coup ça ne marche pas. Mais peut-être que ça marche ici [*en pointant la feuille des 200 pailles*]. Je sais pas.
- 208 - Chercheuse : Mais si ça marche, ça marche toujours, non?
- 209 - Élève 16 : Oui, c'est vrai. je ne sais pas. Pour 2000?! Ça fait 1965.
- 210 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu as fait?
- 211 - Élève 16 : J'ai fait pour... Ah non, c'est faux? Pour arriver de 66 à 200 pailles, il y a 134 de différence.
- 212 - Chercheuse : D'accord, mais attention parce que les 65 étaient des carrés. Les 200 étaient des pailles. Peut-être que je n'ai pas compris ce que tu as dit, peut-être que c'est correct.
- 213 - Élève 16 : Il y a 66 carrés et 200 pailles et entre 66 et 200, il y a 134. Donc 2000 pailles et on enlève 134, ça fait 1866.
- 214 - Chercheuse : D'accord. Et pourquoi tu fais... Comment...?
- 215 - Élève 16 : Je sais pas. Ça m'est venu à l'esprit, du coup...
- 216 - Chercheuse : Mais peut-être que c'est correct, mais il faudrait expliquer pourquoi, tu vois? Si tu trouves une raison...
- 217 - Élève 16 : Je ne sais pas.
- 218 - Chercheuse : Est-ce que... Tu avais dit ici comment passer des carrés aux pailles. N'est-ce pas? Tu me l'as dit avant, tu te rappelles comment on fait? Ce que tu avais dit?
- 219 - Élève 16 : Non.
- 220 - Chercheuse : Si tu connais le nombre de carrés, comment on fait pour trouver

le nombre de pailles?

221 - Élève 16 : Ah. En haut fois en bas et plus le nombre et plus 1.

222 - Chercheuse : D'accord.

223 - Élève 16 : Le nombre de carrés plus 1.

224 - Chercheuse : Très bien. Donc, si tu as les pailles, comment arriver aux carrés?

225 - Élève 16 : Il faut faire l'inverse. Mais c'est difficile parce qu'il faut calculer et il faut trouver le nombre exact.

226 - Chercheuse : Et déjà qu'est-ce que c'est l'invers?

227 - Élève 16 : Le nombre de pailles... Si c'était 100, on doit faire que ça soit ici la même chose que... En haut c'est la même chose qu'en bas et ceux qui sont comme ça [*en pointant son stylo qui est en vertical*], ça doit être le nombre de carrés plus 1. Et du coup il faut calculer et il faut faire beaucoup de calculs. Et c'est compliqué.

228 - Chercheuse : Mais tu as quelques pistes? Même si tu n'arrives pas à la fin. Comment tu ferais?

229 - Élève 16 : On peut faire 200 divisé 2, ça fait 100. Du coup on peut faire 50 en haut, 50 en bas, comme ça ça fait 100. Mais on ne peut pas parce qu'après il y a 100 pailles ici [*en pointant son stylo qui est en vertical*]. Et c'est pas le bon nombre pour en haut et en bas. Il faut trouver la même chose, sauf au milieu qu'il faut un de plus. Et c'est compliqué. Mais je crois, c'est impossible.

230 - Chercheuse : C'est impossible quoi?

231 - Élève 16 : De faire un nombre de carrés exactes sans qu'il y ait une paille de côté.

232 - Chercheuse : Oui. Parce que là [*en pointant son dessin des 66 carrés*], qu'est-ce que tu avais je trouvé?

233 - Élève 16 : 66 et il restait une paille.

234 - Chercheuse : Oui.

235 - Élève 16 : Donc je pense que c'est impossible.

236 - Chercheuse : D'accord, mais on accepte d'avoir des restes, d'accord?

237 - Élève 16 : Ok. Je sais pas.

238 - Chercheuse : T'es sur la bonne piste, en tout cas.

239 - Élève 16 : Ok. Du coup, on peut faire 50... Puisque 50, ça jouait pas. On peut faire 75 en haut et 75 en bas. Ça fait 150. Donc on a déjà gaspillé 150. On ne peut pas, parce qu'après on a 50 ici et c'est pas assez [*en montrant son stylo vertical*]. Donc on va descendre de 75 on va aller à 60. Donc 60 en haut et 60 en bas. Ça fait 120.

240 - Chercheuse : Mh mh.

241 - Élève 16 : Il reste 80 pour faire... Et du coup il reste beaucoup, on peut faire encore des carrés, donc il aurais fait 65. 65 en haut, 65 en bas, ça fait 130. Il reste 60.

242 - Chercheuse : Combien?

243 - Élève 16 : Non.

244 - Chercheuse : Écris, peut-être, ça peut t'aider.

245 - Élève 16 : 65 comme ça [elle écrit 65 avec un trait qui le souligne], 65 [elle écrit 65 avec une barre en haut]... Et du coup, les 2 ça fait 130 [elle écrit « 130 »]. Donc il reste 70 pour faire ici [elle pointe au milieu entre ses 2 « 65 »]. Il reste 5 pailles. Avec 5 pailles, on peut faire encore un carré. Donc ça fait 65 plus 1, ça fait 66.

246 - Chercheuse : D'accord.

247 - Élève 16 : Du coup, j'avais raison!

248 - Chercheuse : Bravo!

249 - Élève 16 : Merci!

250 - Chercheuse : Super! Ça c'était ce que je voulais te demander aujourd'hui. Quelques questions?

251 - Élève 16 : Non.

La suite de carrés : Élève 17

Durée de l'entretien : 27 min 11 s

1 - Chercheuse : Je peux te donner une tâche. On va la voir un moment ensemble. Si tu as des questions, n'hésites pas de quelconque nature. Je te demande bien sur de la faire. Si tu en as besoin, ici il y a un stylo. De me raconter ce que ton, ta manière de penser, ton raisonnement. Ce qui te passe par la tête.

2 - Élève 17 : D'accord.

3 - Chercheuse : Sur ces photos, il a les 3 premières étapes d'une suite de carrés. Tu vois? Première étape, deuxième étape, troisième étape. Et la question est : combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés?

4 - Élève 17 : Donc ça c'est un carré, ça c'est...

5 - Chercheuse : Voilà. C'est ça. Oui. Là on a 1 carré. Ici on a 2 carrés, ici on a 3 carrés. Et en fait, de chaque côté, c'est une paille différente.

6 - Élève 17 : Donc euh... Euh pour 4 carrés? [L'élève écrit sur la feuille le nombre de pailles de chaque carré « 1=4, 2=3, 3=3, 4=3 » puis en dessous, elle écrit « 4 + 3 + 3 + 3 = 1 »3]. Je pense que ce sera 13 la réponse.

7 - Chercheuse : Comment tu as fait pour arriver à cette réponse?

8 - Élève 17 : Bah j'ai regardé et là, pour 1 carré, ça faisait 4 pailles. 1, 2, 3, 4 [l'élève pointe les pailles que le carré contient]. Et là, en fait, le truc, c'est que pour euh...

pour euh... En fait, il y avait une paille en commun. Donc, en fait comme si lui, il avait seulement 3 pailles et j'ai continué à... À réfléchir comme ça. Et bah du coup, pour le troisième carré, il en fallait quand même... Il en fallait 3, parce que elle, elle ne comptait pas en gros. Et pour le quatrième, il en fallait aussi 3. Donc je pense qu'il en faut 13.

9 - Chercheuse : D'accord, et pour 5 carrés?

10 - Élève 17 : Euh... [*L'élève écrit en dessous de ses précédant calculs : « $13 + 3 = 16$ »*] 16?

11 - Chercheuse : Maintenant, alors... c'est toujours la même tâche. Combien de pailles pour 12 carrés?

12 - Élève 17 : [*L'élève écrit sur la feuille « $16 + 16 = 32$ » et « $32 + 3 + 3 = 38$ »*]. 38?

13 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu as fait là?

14 - Élève 17 : Bah j'ai réfléchi. En fait, pour 5 il en fallait 16. Pour 10, il faut 2 fois 5 donc c'est 16 et 16 ça fait 32. Donc il faut 33 de pailles pour un 10 carrés. Après, j'en ai rajouté 2.

15 - Chercheuse : Bon, d'accord, est-ce que tu pourrais contrôler, vérifier de quelque manière...

16 - Élève 17 : Bah en faisant un croquis, un peu.

17 - Chercheuse : Vas-y.

18 - Élève 17 : Donc... [*L'élève dessine 12 carrés les uns à côté des autres en dessous de ses précédants calculs. Puis elle compte le nombre total des pailles de « dessus » des carrés. Elle marque 12 en dessus de sa chaîne de carrés et 12 en dessous de la chaîne. Puis elle note 24 à côté de la chaîne qui est l'addition des pailles du dessus et du dessous. Finalement, elle compte à voix haute les pailles au centre de la chaîne, qui délimitent les carrés.*] 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36. Ah euh.. 37. [*L'élève recompte le nombre de pailles au centre de sa chaîne de carrés*] 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. [*L'élève note « $24 + 12 = 36$ » sur sa feuille*]. Bah c'est 36.

19 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu as fait donc là?

20 - Élève 17 : J'ai... Là il y a 12 carrés. Il y a 12 pailles. Enfin, il y a 12 carrés, donc il y a forcément 12 pailles ici [*en pointant les pailles horizontales en haut*]. Il y 12 pailles ici [*en pointant les pailles horizontales en bas*]. Donc ça fait 24, [*l'élève compte à voix haute les pailles de centre de la chaîne en les marquant avec son stylo*]. 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37. Bah 37. [*L'élève trace de son calcul « $24 + 12 = 36$ » la réponse « 36 » en la remplaçant par « 37 ». Puis elle trace le « 12 » et le remplace avec un « 13 ».*]

21 - Chercheuse : Ok. Donc pourquoi plus 13?

22 - Élève 17 : Parce qu'il y a 13 côtés.

- 23 - **Chercheuse** : D'accord. Ouais. Et donc quel est le résultat que tu avais obtenu avant?
- 24 - **Élève 17** : Bah 38.
- 25 - **Chercheuse** : Oui.
- 26 - **Élève 17** : Parce que... Je ne sais pas ce que j'ai fait faux... Alors, ça, c'était juste. [L'élève entoure le calcul qu'elle avait écrit $16 + 16 = 32$] Ensuite, 32... Donc j'en avais 10. Je ne sais pas pourquoi. Je n'arrive pas à dire pourquoi j'ai fait faux.
- 27 - **Chercheuse** : Est-ce que ça te dis de chercher encore un moment? À mon avis tu peux y arriver.
- 28 - **Élève 17** : De pourquoi j'ai fait faux?
- 29 - **Chercheuse** : Oui.
- 30 - **Élève 17** : [L'élève dessine un grand carré dans lequel elle note 10 puis 2 petits carrés à côté]. Ah! Parce que j'ai fait 16 des 16 et que c'était 16 et 15. [L'élève corrige son premier calcul " $16 + 16 = 32$ " en écrivant " $16 + 15 = 31$ ".]
- 31 - **Chercheuse** : D'accord. Pourquoi 15?
- 32 - **Élève 17** : Parce qu'il y a une paille à partager, donc forcément, là, il y en aura une de moins pour 1 côté. Donc c'était 16 et 15 égalent du coup 31 et c'est 31 plus 3 plus 3.
- 33 - **Chercheuse** : D'accord. Ok. Je vais avec la question d'après? Toujours même tâche, combien de pailles pour former une suite de 100 carrés?
- 34 - **Élève 17** : [L'élève dessine sur sa feuille un croquis de la suite de 100 pailles. Elle commence avec un rectangle qui représente 12 carrés. Elle note 12 dans le rectangle. Elle écrit quelques calculs sur les marges de la feuille, puis les efface. Elle continue son croquis en ajoutant un rectangle qui représente 7 carrés.]
- 35 - **Chercheuse** : Qu'est-ce que tu fais, là?
- 36 - **Élève 17** : J'ai juste vérifié que c'était bien... Qu'il fallait 21 pailles pour 7 carrés. Parce que...pour ne pas refaire la même erreur qu'avant. Donc là, je pense que c'est juste si j'ai bien recalculé. [L'élève continue son croquis en rajoutant un rectangle qui représente 20 carrés. Elle écrit le calcul « $37 + 21 = 58$ » pour compter combien de pailles 20 carrés nécessitent.] Donc, du coup, pour autre 20 ce sera... Ce sera moins 1 parce qu'il y a déjà 1 côté en commun. Ce sera 58 moins 1.
- 37 - **Chercheuse** : Oui. Attends juste pour comprendre là tu as mis 12 carrés, ça c'est les 12 carrés.
- 38 - **Élève 17** : Et là, c'est le nombre de... Qu'il y en a dedans, de pailles.
- 39 - **Chercheuse** : Et ça, c'est combien de carrés ici [en pointant au deuxième « bloc » rectangle]?
- 40 - **Élève 17** : Là, c'est 20 en tout. Parce que là c'est 7.

41 - Chercheuse : Mais 12 plus 7...

42 - Élève 17 : Ah non je suis bête... Là c'est 8. [*L'élève corrige son calcul. Elle remplace le 21 par 24 et le 58 par 61. $37 + 24 = 61$*] Pour 20, carrés. C'est, c'est 37 plus 24 c'est 61. Donc là, ça va en faire 60. Il y en a 40 carrés. Là ça va me faire 59. Là 60 carrés. Parce que il y en 1 de moins à mettre. Là on sera à 80. 58. Et du coup un dernier... ouais ça sera 57. [*Tout en dictant ce qu'elle dit, l'élève dessine 3 rectangles qui représentent 20 carrés puis note en bas de la page le calcul suivant : $60 + 61 + 59 + 58 + 57$.*]

43 - Chercheuse : Donc juste... Peut-être juste pour comprendre, tu me réexpliques ce que tu as fait ici?

44 - Élève 17 : Bah là j'ai fait... J'ai essayé d'en trouver pour faire 20. Au début, j'ai cru que c'était 7, c'était une petite erreur. Donc, il en fallait 61. Après, j'ai fait la même chose pour 20. Sauf qu'il y avait une paille de moins, parce qu'il y a déjà 1 côté là. Ça fait 60. J'ai fait la même chose il y a une paille encore de moins.

45 - Chercheuse : D'accord, et pourquoi il a une paille encore de moins, ici?

46 - Élève 17 : Parce qu'il y avait elle. [*l'élève marque le côté d'un rectangle pour montrer de quelle paille il s'agit.*]

47 - Chercheuse : Oui, mais avec le 60, regarde... Qu'est ce que tu calcules avec 60 pailles?

48 - Élève 17 : Je calcule pas ce côté.

49 - Chercheuse : Exactement. Donc, 60, tu vois, c'est les pailles sans ce côté-là.

50 - Élève 17 : Donc là, c'est encore 60?

51 - Chercheuse : Qu'est-ce que t'en penses?

52 - Élève 17 : Ben oui! Et du coup, là c'est encore 60. Et là aussi. [*L'élève corrige son croquis. Elle réécrit en dessous de chaque rectangle qui représente 20 carrés, 60 pour montrer que 20 carrés nécessitent 60 pailles. Puis en bas de la feuille, elle écrit le calcul en colonne suivant : « $60 + 61 + 60 + 60$ ».*] Donc il en faudra 241.

53 - Chercheuse : Alors...

54 - Élève 17 : Ah non, bah non, j'ai oublié un 60. [*L'élève écrit le calcul en colonne suivant : $241 + 60 = 301$.*]

55 - Chercheuse : Ok. Très bien et je peux te poser une question un peu plus méchante?

56 - Élève 17 : Oui!

57 - Chercheuse : Je vais bien... te donner une feuille.

58 - Élève 17 : Ah, c'est pas écrit dessus.

59 - Chercheuse : Toujours la même question, mais je veux connaître les pailles pour 5000 carrés.

60 - Élève 17 : 5000?

61 - Chercheuse : Oui.

62 - Élève 17 : Donc, pour 100... [L'élève écrit sur la feuille 301 300 300, puis en dessous de ces chiffres elle écrit 100 200 300].

63 - Chercheuse : Alors, déjà là qu'est-ce que tu fais?

64 - Élève 17 : Ba, là j'ai trouvé 100, c'était 301. Du coup si on garde le même raisonnement pour les coller à la suite, ce sera 300 pour 200. Et vu que j'ai compris mon erreur, là, ce sera 300 pour 300 encore et comme ça jusqu'à 5000, mais j'essaie de comprendre s'il y a une technique plus rapide à faire parce que ça va être un peu long ça.

65 - Chercheuse : Oui, je te laisse réfléchir. [L'élève écrit $5000 - 100 = 4900$ puis en dessous elle note en colonne 4900×300 . Elle note ensuite $4900 / 10 = 490$. Puis elle écrit 5000 et à côté elle fait le calcul en colonne $4\ 999 \times 3 = 14997$. En dessous de son calcul en colonne elle écrit le calcul suivant : $14997 + 4 = 15\ 001$]

66 - Élève 17 : Voilà.

67 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu as fait?

68 - Élève 17 : Ah bah... Je me suis un peu perdue à un moment, parce que, je ne sais pas pourquoi, je voulais diviser par 10. Je... Je comprenais plus ce que je faisais et du coup, j'ai essayé de réfléchir différemment. Et en fait, vu qu'il y a 5000 carrés, il y en a 4999 qui ont 3 pailles enfin... 3 côtés de pailles. Et le dernier, il en a 4.

69 - Chercheuse : D'accord.

70 - Élève 17 : Pour aller jusqu'à 5 000. Donc, si j'ai bien calculé, ça doit être ça, je pense.

71 - Chercheuse : Oui, d'accord, très bien, je comprends ce que tu as fait. Alors je te pose une autre question toujours lié à ce qu'on fait. En connaissant le nombre de carrés. Pourrais-tu toujours trouver le nombre de pailles?

72 - Élève 17 : Pour... Sur 5000 carrés?

73 - Chercheuse : Sur un nombre, disons quelconque. Tu sais ce que c'est un nombre quelconque?

74 - Élève 17 : N'importe lequel. Si je sais qu'il y a par exemple 12. Bah je vais essayer avec un autre [inaudible] bah oui, je pense parce qu'on sait qu'il y en a 11 qui ont 3 carrés, donc 11 fois 3. Et le dernier, il en a 4 de côtés. [l'élève écrit le calcul suivant : $11 \times 3 = 33$ puis en dessous elle note $1 \times 4 = 4$. Elle fait une accolade entre 33 et 4 et écrit 37] En plus, c'est juste parce qu'alors, on avait fait 12 carrés, je viens de me rendre compte, j'ai même pas fait attention. Et c'était 37 de la réponse. Donc oui, on peut connaître.

- 75 - Chercheuse :** D'accord, donc, comment tu ferais pour un nombre quelconque pour le connaître?
- 76 - Élève 17 :** Euh sans que ce soit 12?
- 77 - Chercheuse :** Oui.
- 78 - Élève 17 :** Bah la même technique. En fait, il faut prendre euh... Si c'est 36, par exemple. Faut enlever 1 à 36, donc ça fait 35 parce qu'il y a 1 carré d'autres que c'est 35. [*L'élève écrit sur sa feuille le calcul suivant : « 36 - 1 = 35 »*]. Donc le 36ème qui a 4 côtés, tous les autres il en ont 3 vu qu'ils se partagent une paille. Et du coup, ce sera 35 fois 3, ce qui donne un nombre x. Et ce nombre x plus 4. Bah, ça donnera le nombre pour 36 carrés.
- 79 - Chercheuse :** Oui très bien. Et est-ce que tu arriverais à l'expliquer sans utiliser [*inaudible*], à l'expliquer, à expliquer ce que tu ferais? Cette technique que tu viens utiliser, mais sans utiliser un nombre particulier? Tu vois? Là tu l'as bien fait. Tu as utilisé 12 après tu as utilisé 36...
- 80 - Élève 17 :** Bah il faut en fait enlever 1 à ce nombre parce que ce carré, là bas, il aura quatre côtés et pas les autres. Et le reste de ce qu'on a pas soustrait... Enfin ce qu'on a gardé... qu'on n' a pas soustrait... Enfin... Je n'arrive pas à expliquer le mot. Je cherche un mot et je le trouve pas. Ce qui nous reste quand on n'a pas soustrait enfin quand on a soustrait le 1, on le fait fois 3 et après on obtient euh... quelque chose et ce quelque chose on y rajoute 4, parce qu'il y en a un qui aura 4 côtés et on obtiendra le nombre de pailles.
- 81 - Chercheuse :** Oui, d'accord. Très bien. Merci beaucoup. Et dernière question. Tu as acheté un paquet de 200 pailles. Combien de carrés peux-tu construire?
- 82 - Élève 17 :** [*L'élève écrit sur sa feuille le calcul suivant : « 200 - 4 = 196 »*] 196 ce n'est pas divisible par 3. Du coup, il faut enlever une paille qu'on n'utilisera pas, ça fait 195. Et donc juste, il faut juste que j'écrive un truc... [*L'élève fait la division en colonne suivante : « 195 / 3 = 63 »*]. Puis elle fait un dernier calcul : « 63 + 1 = 64 »] 64 carrés.
- 83 - Chercheuse :** D'accord. Très bien, merci beaucoup. Alors, ça c'était ce que je voulais te demander aujourd'hui. Tu as des questions?
- 84 - Élève 17 :** Est-ce que c'est juste ce que j'ai fait? Je pense que c'est juste mais je ne suis pas sûre.
- 85 - Chercheuse :** Oui, c'est correct. Le raisonnement que tu as fait ici, c'était bien euh... correct. Oui, à la fin tu es arrivée à la bonne méthode.
- 86 - Élève 17 :** Au début, c'était compliqué parce que je n'arrivais pas, je n'arrivais pas à comprendre ce que je faisais de faux... Mais après, j'ai compris.
- 87 - Chercheuse :** Ouais. Mais ce n'est pas un exercice facile.

88 - Élève 17 : Non non ça... Au début, ça avait l'air facile mais en fait ce n'est pas autant facile que ça en a l'air.

La suite de carrés : Élève 18

Durée de l'entretien : 57 min 04 s

1 - Chercheuse : Voilà c'est bon. Voilà la tâche d'aujourd'hui. Regarde ces photos, il y a les 3 premières étapes d'une suite de carrés. Tu vois ça c'est la première étape, la deuxième étape, la troisième étape. Ces carrés sont formés par des pailles. Tu vois? Chaque côté est une paille différente et la demande, la question est combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés?

2 - Elève 18 : Il en faut 20?

3 - Chercheuse : Comment tu as fait?

4 - Elève 18 : Alors, j'ai visionné le carré. Je sais, du coup, que sur les côtés, il y aura 4, ça sera 4 par 4, donc ça fait 16. Et jusqu'au milieu du coup, il va rester une croix de 4 carrés. Du coup, je fais 16 plus 4 ça fait 20.

5 - Chercheuse : Je n'ai pas trop compris. Pardon. Alors tu as dit?

6 - Elève 18 : En fait. Bah, du coup, je regarde le carré qui fait comme ça.

7 - Chercheuse : Ouais.

8 - Elève 18 : Je sais que les côtés, bah, du coup, c'est 4 par 4.

9 - Chercheuse : Ouais.

10 - Elève 18 : Donc, 4, 4, 16 et...

11 - Chercheuse : Oui?

12 - Elève 18 : Oui, et du coup. Et au milieu, je sais qu'il y a qui reste, du coup, juste 4

13 - Chercheuse : Mais, c'est où le milieu? Est-ce que tu arriverais, peut-être à le dessiner? Comme ça je comprends un peu mieux ce que tu... Tu as besoin d'une autre feuille?

14 - Elève 18 : [*L'élève dessine sur la feuille de consigne*].

15 - Chercheuse : Ah d'accord comme ça. Du coup, mais regarde. Les carrés qu'on va regarder sont mis comme un petit train, comme des wagons, d'un train donc en ligne d'accord?

16 - Elève 18 : Ah d'accord ça sera en...

17 - Chercheuse : Oui.

18 - Elève 18 : Je me suis trompé alors. Du coup, ce sera en ligne. Du coup ils seront comme ça. [*L'élève dessine sur la feuille*]

19 - Chercheuse : Oui exactement.

20 - Elève 18 : Du coup il y aura 14 pailles.

21 - Chercheuse : Comment tu as fait?

- 22 - Elève 18 : Du coup, j'ai regardé le carré comment ça sera. Là on sait qu'il y en a 4 [*en pointant les pailles du premier carré*], du coup l'autre bout aussi il y en a 4 [*en pointant les pailles du quatrième carré*]. Du coup, j'ai fait plus 3 [*en pointant les pailles du haut, du bas et de droite du deuxième carré*] plus 2 [*en pointant les pailles du haut et du bas du troisième carré*].
- 23 - Chercheuse : D'accord, donc t'as fait 4 4, 3 et 2. Et combien ça donne?
- 24 - Elève 18 : 14? Attendez...
- 25 - Chercheuse : Tu peux écrire des calculs si tu préfères. [*l'élève calcule*]
- 26 - Elève 18 : 13.
- 27 - Chercheuse : D'accord et maintenant, question d'après; pour 5 carrés.
- 28 - Elève 18 : Du coup, c'est 16 si la dernière fois, j'ai trouvé 16, je fais plus 3.
- 29 - Chercheuse : Pourquoi plus 3?
- 30 - Elève 18 : Parce que du coup, il n'y a que 3 pailles qui s'ajoutent, comme il y en a déjà une qui est de côté.
- 31 - Chercheuse : Ok, donc, si je te demande, par exemple, pour 7 carrés, qu'est-ce que tu ferais?
- 32 - Elève 18 : Je pense que, je pense que je ferais encore de tête; plus 3, plus 2. 16 plus 3, plus 2.
- 33 - Chercheuse : Plus 3 pourquoi?
- 34 - Elève 18 : Non du coup plus 3, plus 3 parce qu'il y a les [*l'élève fait une geste pour pointer les carrés « ouverts » qu'on ajoute après ceux déjà présents*]... Oui, il y a 2 suites de carrés qui partagent une paille en commun.
- 35 - Chercheuse : D'accord. Oui très bien, donc combien tu obtiens? C'était 16 pour 5 carrés.
- 36 - Elève 18 : Euh 21.
- 37 - Chercheuse : Très bien. Question d'après. Toujours cette tâche, d'accord? Il y a toujours une suite de ce type-là de carrés et la question est : combien de pailles pour 12?
- 38 - Elève 18 : [*L'élève réfléchit*] Je ne suis pas du tout sûre mais 40?
- 39 - Chercheuse : Comment tu as fait?
- 40 - Elève 18 : Bah là par exemple, je sais qu'il y en, y'a 3 carrés, je vois que ça fait 10 pailles.
- 41 - Chercheuse : D'accord.
- 42 - Elève 18 : Et du coup, bah si je fais fois 4, ça me donnerait 12 carrés.
- 43 - Chercheuse : D'accord.
- 44 - Elève 18 : Du coup, ça fait 40 pailles.
- 45 - Chercheuse : OK et est-ce que tu arriverais à contrôler si ce que t'as trouvé est

correct.

46 - Elève 18 : Je ne vois pas comment je pourrais faire.

47 - Chercheuse : Par exemple est-ce que ta démarche fonctionne déjà avec, tu te rappelles avant t'avais calculé avec 6. Les pailles pour les 6 carrés. Tu te rappelles? Tu te rappelles combien c'était?

48 - Elève 18 : Non, je ne crois pas.

49 - Chercheuse : Tu peux le retrouver si tu ne te rappelles plus du nombre exact.

50 - Elève 18 : C'était 16?

51 - Chercheuse : Alors comment t'avais fait déjà?

52 - Elève 18 : Alors j'avais pris du coup. J'avais ajouté visuellement les 3 plus 3. Du coup, j'avais pris depuis celui là, je ne sais plus.

53 - Chercheuse : Ouais.

54 - Elève 18 : Du coup, celui-là plus les 6 pailles, je savais que ça 16 et du coup, c'est 6 carrés.

55 - Chercheuse : Pourquoi c'est 6 carrés?

56 - Elève 18 : Parce que visuellement, je sais que ça forme, 6 carrés.

57 - Chercheuse : Mais là, tu as combien de carrés?

58 - Elève 18 : Ah ok, oui je vois, Il y en a 3 du coup, ça fait 5.

59 - Chercheuse : Ouais.

60 - Elève 18 : Du coup pour 6 carrés, il en faut 9 . Du coup, il faut 19 carrés pour...

61 - Chercheuse : D'accord, donc tu as trouvé 19 pailles pour 6 carrés?

62 - Elève 18 : Oui.

63 - Chercheuse : Oui, d'accord.Très bien. Et avec la méthode que tu as utilisée ici. Combien t'obtiendrais?

64 - Elève 18 : 38.

65 - Chercheuse : Pourquoi?

66 - Elève 18 : Bah parce que du coup je fais 19. Si il y a 19 pailles, c'est 6 carrés, je sais que c'est 6 plus 6 ça. fait 12. Du coup, je fais 19 plus 19, et c'est 38 en fait.

67 - Chercheuse : Oui. Et avant tu te rappelles combien tu avais obtenu?

68 - Elève 18 : J'avais eu 40.

69 - Chercheuse : Oui. Donc, il y a 2 résultats différents. Pourquoi à ton avis? Est-ce qu'on arrive à comprendre s'il y a un des 2 qui est faux? Qu'est-ce qui se passe? On y pense un moment ensemble?

70 - Elève 18 : Je pense. J'ai fait une erreur quand j'ai compté le premier, quand j'ai fait 3 fois 4. Je ne sais pas.

71 - Chercheuse : Tu peux écrire tout ce que tu veux et si t'as besoin de faire des calculs, je peux le faire, car de toute façon, ce n'est pas les calculs qui m'inté-

ressent. Donc, s'il y avait quelque chose que tu veux que je fasse, tu peux le faire.

72 - Elève 18 : L'erreur je l'ai faite quand j'ai pensé que 6 carrés, c'était 16 pailles. J'ai dû mal compter. Je ne sais pas.

73 - Chercheuse : Mais avant, tu étais arrivée à dire que pour 6 pailles, pardon pour 6 carrés, on peut utiliser, il faut utiliser 19 pailles.

74 - Elève 18 : Oui, ça, je pense que c'est juste. Du coup, je pense que quand j'ai dit 16, je m'étais trompée en comptant.

75 - Chercheuse : Mais après t'as fait 19 fois 2.

76 - Elève 18 : Oui.

77 - Chercheuse : Qui donne 38, qui est correct. Et avec l'autre méthode tu vois, là, à partir de 3 tu as obtenu 40. Alors comment c'est possible que ces 2 méthodes donnent 2 résultats différents?

78 - Elève 18 : Parce que du coup, il y a 2 pailles en plus parce que visuellement, je ne sais pas comment expliquer, mais c'est comme si je prenais les 3 bouts et que je les collais en faisant fois 4. Du coup, en faisant 3 fois 4 il y a les pailles... Par exemple, là, si je rajoute un bout, c'est comme si elle était à double. Et du coup, c'est... Non, je ne sais pas.

79 - Chercheuse : Mais je vois ce que tu veux dire,

80 - Elève 18 : C'est, du coup il y a des pailles en trop, si je... Dans ce cas, dans ce cas, même en faisant 6 fois 2, il y a 2 pailles en trop. En faisant 6 fois 2. Du coup, en faisant 6 fois 2, il y a 2 pailles en trop, faut en enlever.

81 - Chercheuse : Pourquoi 2 pailles?

82 - Elève 18 : Parce que... [*l'élève compte les pailles*] Les 2 premiers de 3 il y en a une. Non, il y en a 3 en trop. [*l'élève réfléchit*]

83 - Chercheuse : Tu peux prendre ton temps. Y réfléchir un moment, et on en parle.

84 - Elève 18 : [*L'élève réfléchit*] Il y en a 3, il y a 3 pailles en trop.

85 - Chercheuse : Où?

86 - Elève 18 : Entre les plusieurs bouts que j'ai multipliés, je ne sais pas comment expliquer. Du coup, faudrait que je fasse 38 moins 3. Pour avoir le nombre de pailles.

87 - Chercheuse : Ok. Et pourquoi donc exactement : moins 3?

88 - Elève 18 : Parce que bah si on regarde, visuellement, qu'est-ce que ça donne, en mettant les bouts ensemble. Bah du coup il y a les bouts où c'est collé. Enfin ça se rejoint. C'est où il y a les pailles, il faut en enlever, parce que sinon elles sont à côté.

89 - Chercheuse : Oui, d'accord. Et donc, combien de bouts tu es en train de coller ?

90 - Elève 18 : 4.

91 - Chercheuse : 4. OK. 4 bouts. Et ils sont faits comment ?

92 - Elève 18 : Ça fait 2 de 10 pailles chacun.

93 - Chercheuse : D'accord.

94 - Elève 18 : Mais du coup, il faut en enlever pour les mettre ensemble.

95 - Chercheuse : Donc, quel est le calcul que tu ferais à la fin ?

96 - Elève 18 : Moins 3 ? [Hésitante]

97 - Chercheuse : Moins 3 à partir de quoi ?

98 - Elève 18 : A partir de, bah du coup 4 fois 10 40. Qui est le premier résultat que j'ai trouvé. Et moins 3.

99 - Chercheuse : Tu veux que je fasse quelques calculs à la calculatrice ?

100 - Elève 18 : Euh non, je crois que ça va aller, mais j'ai un peu des doutes.

101 - Chercheuse : Ouais ?

102 - Elève 18 : Euhm parce que... Mais du coup... Du coup, faut faire moins 3 et c'est... et du coup. Oui, c'est 40 moins 3. Du coup ça donne 37.

103 - Chercheuse : Oui c'est 37.

104 - Elève 18 : Du coup, je sais pas s'il y a un lien mais c'est pas la réponse que j'avais trouvé d'une autre manière. Ah mais c'est logique.

105 - Chercheuse : Pourquoi ?

106 - Elève 18 : Parce que du coup, si avec l'autre manière, c'était 6 fois 2 et que ça faisait 38 pailles, bah il fallait en enlever une.

107 - Chercheuse : Pourquoi une paille ?

108 - Elève 18 : Parce qu'ils sont à côté.

109 - Chercheuse : D'accord. Ok, très bien. On continue ?

110 - Elève 18 : Bah oui.

111 - Chercheuse : Même tâche...

112 - Elève 18 : D'accord.

113 - Chercheuse : Il faut comprendre combien de pailles pour 100 carrés.

114 - Elève 18 : D'accord, du coup, là je ne peux plus...

115 - Chercheuse : Tu es en train de penser à quelque chose ?

116 - Elève 18 : Oui, je ne sais pas trop comment faire. Du coup... je ne sais pas s'il faut que je divise 100 par un nombre de pailles ou si je dois faire... [l'élève réfléchit]. Je ne sais pas du tout si c'est juste, mais imaginons pour faire la suite. Du coup, il y a toujours le premier carré qui fait 4 pailles. Et après, c'est des bouts de 3 qui s'ajoutent. Du coup pour... [l'élève réfléchit] Je ne sais pas trop, mais en tout cas il y a le premier carré. Du coup il y a 4 pailles, ça fait un carré. Du coup,

les autres il vont être formés de 3 pailles. Et il en faudra 99.

117 - Chercheuse : Oui.

118 - Elève 18 : Je ne vois pas quel lien il y a entre toutes ces informations et comment je peux utiliser un calcul pour faire ça.

119 - Chercheuse : C'est très intéressant. Ce que tu es en train de dire.

120 - Elève 18 : C'est peut-être bizarre, mais si j'essaie de ne pas le voir des carrés, comme des carrés, mais plutôt comme une suite de pailles. Bah, dans ce cas, je pourrais faire 100 divisé par 4... Non...

121 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu voulais faire ?

122 - Elève 18 : Je ne sais pas si je fais, par exemple 100 divisé par 4, mais en soi, je ne vois pas qu'est-ce que je peux faire de ce chiffre après ce n'est pas la réponse, c'est...

123 - Chercheuse : Ce que tu disais avant, si on reprend ce que tu disais avant, tu avais dit le premier carré est composé par 4 pailles et les autres par 3. N'est ce pas ? C'est ça que tu as dit ? Comment pourrait-on trouver le nombre total de pailles, en partant de ces informations-là ?

124 - Elève 18 : Je ne sais pas, en faisant des multiples communs des... Je pourrais faire une addition, mais ça prend trop de temps et c'est ça...

125 - Chercheuse : Quel serait l'addition que tu ferais ?

126 - Elève 18 : 4 plus 3 plus 3 plus 3 [*elle fait un geste avec la main pour pointer que ça continue*]

127 - Chercheuse : Quel est le problème de faire cela ?

128 - Elève 18 : C'est trop long.

129 - Chercheuse : Est-ce qu'il y aurait une manière pour faire cette addition de manière plus rapide ?

130 - Elève 18 : Du coup, je sais que les 3 premiers carrés, ça fait 10. Et...

131 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu voulais dire ? Même si tu n'es pas sûre ce n'est pas grave.

132 - Elève 18 : Bah du coup j'aurais pu faire comme pour les dernières fois, j'aurais pu faire bah 10 fois 10.

133 - Chercheuse : Oui.

134 - Elève 18 : Et bah pour arriver, enfin... Comme je sais... Comme 3 carrés, je sais que ça fait 10 pailles.

135 - Chercheuse : Ouais.

136 - Elève 18 : Bah il faut arriver à 100 carrés par pailles. Euh non du coup... Je pourrais par exemple essayer de voir combien... [*l'élève réfléchit*]

137 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu es en train de penser, là ?

- 138 - Elève 18 :** Je sais pas, je réfléchis s'il y a pas... Bah si je peux pas voir par exemple... Bah si en les additionnant j'arrive pas à tomber, par exemple sur, sur un chiffre assez simple à utiliser. Genre, par exemple 10 carrés, combien ça fait, où...
- 139 - Chercheuse :** Tu peux même dessiner, si tu veux.
- 140 - Elève 18 :** C'est peut-être bête ce que je vais dire, mais ça peut être proportionnel. À part le fait qu'au début ça soit, qu'il y ait 4 pailles. Mais après, par exemple, je pourrais, comme c'est tout le temps plus 3, plus 3, plus 3, c'est quelque chose de constant. Du coup, en soi je pourrais presque faire une règle de 3.
- 141 - Chercheuse :** D'accord, je vois.
- 142 - Elève 18 :** Enfin je ne sais pas.
- 143 - Chercheuse :** Mais qu'est-ce que tu fais alors avec ce premier qui est de 4? C'est ça, non, que tu as dit? C'est presque proportionnel sauf le premier.
- 144 - Elève 18 :** Je l'enlève et du coup, c'est pour trouver 99 carrés.
- 145 - Chercheuse :** D'accord.
- 146 - Elève 18 :** Je ne sais pas du tout, si c'est juste, hyn, mais...
- 147 - Chercheuse :** On essaie!
- 148 - Elève 18 :** Mais, du coup pour trouver 99 carrés. Là, ce sera, en soi proportionnel parce qu'il y a que des carrés de... De 3 pailles.
- 149 - Chercheuse :** Ouais.
- 150 - Elève 18 :** Et du coup. Si une partie se fait à chaque fois 3 pailles. Pour en avoir 100 ça fait 300 pailles? Plus 4, 304 mais ça me paraît vraiment faux.
- 151 - Chercheuse :** Pourquoi? Alors on reprend un moment ton raisonnement. T'as dis, c'est proportionnel sur combien de carrés?
- 152 - Elève 18 :** Pour 99?
- 153 - Chercheuse :** 99 d'accord. Donc quelle est l'opération que tu as faite?
- 154 - Elève 18 :** Du coup, il y a 3 pailles à chaque fois. Et, ah oui, il faudrait que je fasse 3, 3 fois 99?
- 155 - Chercheuse :** Tu veux que je le fasse?
- 156 - Elève 18 :** Euh oui peut-être s'il vous plaît.
- 157 - Chercheuse :** 3 fois 99, voilà
- 158 - Elève 18 :** 297, plus 4, ça fait 301 une pailles.
- 159 - Chercheuse :** Est-ce que ça a l'air...
- 160 - Elève 18 :** Donc, ce serait pour 100 carrés. Il y a 301 pailles.
- 161 - Chercheuse :** Qu'est-ce que tu en penses? Tu est convaincue ou pas?
- 162 - Elève 18 :** Moyennement. Pour 100 carrés il y a 301 pailles. Pour 3 carrés il y

a 10 pailles. Je ne sais pas si ça peut être juste.

163 - Chercheuse : Est-ce que ça marche pour les 3 carrés?

164 - Élève 18 : Mais je sais pas si je peux faire une règle de 3 pour vérifier comme ça, parce que si... Je sais pas. En soi, c'est régulier le nombre de carrés, le nombre de pailles et qu'il y a pour une suite. Du coup, si je. Bah imaginons que là : je sais que 3 carrés il y a 10 pailles. Est-ce qu'en vérifiant, avec une règle de trois, si les 301 pailles pour 100 carrés si c'est juste. Je sais pas.

165 - Chercheuse : Alors là, c'est l'heure d'y aller. Est-ce que ça te vas si on continue la prochaine fois?

166 - Élève 18 : Oui bien sûr.

167 - Chercheuse : Ca joue pour toi? Alors, on se voit dans une semaine.

168 - Chercheuse : Ok, et maintenant, tu te rappelles ce qu'on avait fait la première fois?

169 - Élève 18 : Oui.

170 - Chercheuse : Il y avait cette suite de carrés. La première question était combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés et de 5 carrés? Est-ce que tu te rappelles ce que tu avais fait?

171 - Élève 18 : Plus ou moins, oui.

172 - Chercheuse : T'arriverais à...

173 - Élève 18 : Je me souviens que là je m'étais trompée. J'avais imaginé du coup la suite de carrés comme un carré qui s'agrandissait. Mais du coup, après mais je... Il faut faire en gros 4 parce qu'il y a un carré de base qui a 4... Qui utilise 4 pailles. Et après faire plus 3 parce que c'est le nombre de pailles qui s'ajoutent.

174 - Chercheuse : Donc par exemple, pour les... là c'était les 12 carrés.

175 - Élève 18 : Donc pour 12 carrés il faut... Donc il y a.

176 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu es en train de penser?

177 - Élève 18 : Je me souviens maintenant qu'il y a 3 fois... Donc je sais que c'est des suites de 3 pailles. Donc en fait, si je fais donc 4 plus 3 fois...et c'est juste le nombre de... Donc, si je fais donc 12 divisé par 3 ça fait 4 et dans ce cas, je sais qu'il faut 4 fois 3 pailles.

178 - Chercheuse : Quel est ton raisonnement? Je n'ai pas trop suivi.

179 - Élève 18 : Je ne sais pas trop ça. Je me souviens j'avais eu de la peine avec celui-là, donc pour 12 carrés. Je sais que ça va être des suites de 3 pailles.

180 - Chercheuse : Oui.

181 - Élève 18 : Et du coup... Ah oui, je vois ce que j'ai fait, faux, je m'étais, je ne sais pas si c'est la même erreur que j'avais fait la dernière fois, mais j'essaie de multiplier mes 3 pailles pour arriver à 12. Sauf que 12, ce serait le nombre

de pailles et pas le nombre de carrés.

182 - Chercheuse : 12 c'est le nombre de carrés.

183 - Élève 18 : Et du coup 12 carrés, ça fait... Je ne sais pas combien de pailles ça fait et... Je sais pas. Donc... Et... Je ne sais pas si j'avais fait une règle de 3 ou quelque chose comme ça. Je ne sais pas.

184 - Chercheuse : Sinon, tu te rappelles dans le... il y avait ça, les 100 carrés. Tu te rappelles ce que tu avais fait ?

185 - Élève 18 : Donc... Je sais qu'en soi, c'est une situation proportionnelle parce que... Donc je sais que le premier carré fait 4, mais après, c'est que des suites de 3. Du coup, en soi, je peux faire une règle de 3 et savoir par rapport au nombre de... le nombre de pailles par rapport au nombre de carrés, par exemple je ne suis pas sûre du tout, mais... [*L'élève écrit sur la feuille un tableau de correspondance pailles-carrés*] Et du coup, pour avoir 1 carré, il y a 4 pailles. Et après en avoir 2, il y en a 7. Pour en avoir 3, il y en a 10 et etc... Et du coup, en mettant, par exemple, 100, je pourrais faire 100 fois 10 divisé 3 pour avoir le nombre de pailles. En oubliant les 4 pailles au premier, du coup, je crois, j'aurais besoin de la calculette. Mais imaginons que je fasse 100 fois 10.

186 - Chercheuse : 1000.

187 - Élève 18 : Divisé 3... ça fait un nombre à virgule ?

188 - Chercheuse : Oui

189 - Élève 18 : Et que je fasse ce nombre moins 4. Ça donnerai le nombre de pailles. Non, je ne sais pas. Peut être que ça marche mieux là, 3 fois 7 ça fait 21 divisé... Ah non, ça donne tout le temps un nombre... Du coup. En soi, c'est comme un multiple de 3, si je ne me trompe pas et du coup, comme c'est à chaque fois plus 3, plus 3, plus 3... Si je fais les multiples de 3, c'est assez simple. Parce que du coup... Non, je sais pas...

190 - Chercheuse : Continue sur cette idée !

191 - Élève 18 : Cette idée ? Bah, du coup, en fait, à chaque fois que j'écris genre un multiple, ça fait un carré. Du coup, le truc, c'est qu'après, je fais du coup... Le truc, c'est que 100 c'est pas un multiple de 4... de 3 pardon. Le truc c'est que 100 c'est pas un multiple de 3, donc il faudrait faire le multiple le plus proche de 100 que je trouve plus 4, je ne sais pas...

192 - Chercheuse : Mais fais attention parce que 100 c'est le nombre de carrés.

193 - Élève 18 : Ah, de carrés, oui. Du coup, il faudrait que je trouve le centième multiple de 3.

194 - Chercheuse : Comment tu fais pour trouver le centième multiplie de 3 ?

195 - Élève 18 : 3 fois 100, ça donne 3... Ah, du coup c'est 304 pailles.

- 196 - **Chercheuse** : Pourquoi 304?
- 197 - **Éleve 18** : Parce qu'il y a un carré qui fait 4 pailles au début... Ah non, donc c'est pas 304. Si je trouve, bah, du coup, 3 fois 100, je fais... Je dois trouver juste le multiple d'avant. Parce que ça... il faut trouver 99 carrés...
- 198 - **Chercheuse** : D'accord.
- 199 - **Éleve 18** : Donc je fais 3 fois 99... 3 fois 100 ça fait 300, 3 fois 99, ça fait 297. Et du coup, si je fais 297 plus 4... 301, c'est le nombre de pailles.
- 200 - **Chercheuse** : D'accord, très bien. Ok. T'as bien en tête ce que t'as fait?
- 201 - **Éleve 18** : Oui.
- 202 - **Chercheuse** : Alors maintenant la question est... Regarde... En connaissant le nombre de carrés, pourrais-tu toujours trouver le nombre de pailles?
- 203 - **Éleve 18** : Oui, parce que du coup, si j'utilise cette méthode, qui est probablement pas la meilleure, mais en ayant le nombre de carrés, on sait quel multiple c'est... donc par exemple, si c'est 100, je sais que je dois faire 3 fois 100. Après, juste trouver le multiple d'avant et faire plus 4.
- 204 - **Chercheuse** : D'accord.
- 205 - **Éleve 18** : Et ça marche de n'importe quelle manière.
- 206 - **Chercheuse** : D'accord, et si c'est un nombre quelconque?
- 207 - **Éleve 18** : Si c'est un nombre...
- 208 - **Chercheuse** : C'est-à-dire, je reformule la question en fait... Combien faut-il de pailles pour former une suite de n carrés?
- 209 - **Éleve 18** : 4.
- 210 - **Chercheuse** : De n .
- 211 - **Éleve 18** : De n , pardon, je pensais de 1.
- 212 - **Chercheuse** : Pardon, c'est mon accent. Alors, n carrés, d'accord? [*La chercheuse écrit sur la feuille « n carrés »*].
- 213 - **Éleve 18** : Ah, d'accord, il faudrait que je l'écrive comme une équation. Donc ce serait 3 fois n . 3 fois n ... Moins 3, techniquement. Plus 4 [*L'élève écrit « $3 \cdot n - 3 + 4$ »*].
- 214 - **Chercheuse** : Très bien. Dernière question si t'es encore d'accord. Toujours cette tâche. T'achètes un paquet de 200 pailles. Combien de faut-il...? Pardon. Combien de carrés peux-tu construire?
- 215 - **Éleve 18** : Donc, si là par exemple la dernière fois si n c'était le nombre de carrés. Faut juste que bien du coup, n c'est le nombre de pailles. Donc, si je sais...
- 216 - **Chercheuse** : Ici n , c'est le nombre de carrés ou de pailles?
- 217 - **Éleve 18** : Ici, n c'est les carrés.
- 218 - **Chercheuse** : Oui.

219 - Élève 18 : Du coup, ce serait 3 fois 200. Ou 200 divisé 3, parce que c'est le nombre de pailles. Non... Du coup, 200 c'est le nombre de pailles et... Ce serait 200 divisé 3, moins 3 plus 4. Ou c'est pas forcément, ça n'a pas l'air juste, en tout cas. Je sais pas. Bah, du coup, 200 là, c'est divisé 3 ça donne, un nombre à virgule. Et... Je ne sais pas comment je pourrais faire, par exemple...si 100 carrés c'est 301 pailles. Dans cette situation là, je peux faire une règle de 3 parce que bah si 100 carrés, c'est 301 pailles. Je sais que...Je ne sais pas si le calcul est faisable, mais du coup, là si... Du coup si 100 carrés, ça fait 301 pailles. 200 pailles ça fera 200 fois 100 divisé 301? Je ne sais pas ce que ça donne.

220 - Chercheuse : Tu veux que je fasse quel calcul?

221 - Élève 18 : S'il vous plaît. Du coup, 200 fois 100.

222 - Chercheuse : Alors 200 fois 100, oui?

223 - Élève 18 : Divisé 301.

224 - Chercheuse : Divisé 301, ça fait ce machin là.

225 - Élève 18 : Ah oui, c'est pas ça.

226 - Chercheuse : Comment tu sais que c'est pas ça?

227 - Élève 18 : Ça peut pas être un nombre à virgule.

228 - Chercheuse : Pourquoi?

229 - Élève 18 : Parce que c'est une paille on parle d'une unité, c'est tout le temps la même chose. Il n'y aura pas de demi paille. Donc il y aura un reste.

230 - Chercheuse : Pourquoi?

231 - Élève 18 : Parce qu'il faut que ce soit un multiple de 3 et là, par exemple, 200 c'est pas un multiple de 3. Donc, par exemple, si on fait... si, on enlève... Je ne sais pas quel est le multiple de 3 le plus proche de 200, mais...

232 - Chercheuse : Si tu veux, je peux faire des calculs pour le trouver. Dis-moi quel calcul.

233 - Élève 18 : Par exemple. attendez, je sais que c'est... En soi, c'est comme si, on rajoutait un 0 après le multiple de 3, donc si... Donc, si... 3 fois 5, 15; donc 3 fois 50, ça fait 150. Donc, si je fais 3 fois 6, 18, c'est 180. Mais après, il y a plusieurs possibilités parce que, par exemple, ça pourrait être 81 ou 82 comme ça faut trouver de tête. Parce qu'après... Donc. Je sais que c'est en dessous de 70 parce que 3 fois 70 ça fait 210. Donc ce serait... 3 fois 60 et quelques... Donc 61, ça fait 3 fois 61 ça fait 183. 3 fois 62, 286. 3 fois 63, 289. 3 fois 64, ça fait 192. 3 fois 65, ça fait 295. 3 fois 66 ça fait 298. C'est le maximum que je peux faire. Je sais que 3 fois 66, c'est ça j'ai trouvé? Donc on peut construire 66 carrés et donc plus 4. Euh non, il y a les 4 pailles du début. Donc je sais que j'aurais 298 pailles.

234 - Chercheuse : Pour combien de carrés?

- 235 - **Éleve 18** : Pour... eu pardon 198 pailles pour 66 carrés.
- 236 - **Chercheuse** : Oui.
- 237 - **Éleve 18** : Donc du coup, pour avoir... ah ouais attendez... Donc 198 pailles pour 66 carrés. Juste si je vérifie, ça, j'ai fait 3 fois 66, moins 3 plus 4. Donc 3 fois 66, moins 3 63, plus 4 68. Euh pardon... Donc, 3 fois 66, ça fait 198. Moins 3, 195... Plus 4, 199. Donc, avec 199 pailles, je peux construire 67 carrés.
- 238 - **Chercheuse** : Pourquoi 67?
- 239 - **Éleve 18** : Parce que du coup, le plus 4, c'est les 4 pailles du début.
- 240 - **Chercheuse** : Ouais.
- 241 - **Éleve 18** : Euh ouais ou est-ce que je... Non, c'est ça, je pense. Oui, c'est donc oui, 3 fois 66. Ça fait 198 pailles pour 66 carré. Oui, c'est ça.
- 242 - **Chercheuse** : Et après? Juste pour genre pour bien reprendre et bien comprendre ton raisonnement.
- 243 - **Éleve 18** : Je ne sais pas du tout si c'est juste, mais 3 fois 66 moins 3. Donc c'est 198 moins 3. Plus 4. [*L'élève écrit son calcul sur la feuille « $3 \times 66 - 3 + 4 =$ »*] 199. Et ça fait 60... 199, égal 199. [*L'élève écrit ses calculs en les disant à voix haute « =199 »*] là j'ai 199 qui est le nombre pailles utilisées.
- 244 - **Chercheuse** : Oui.
- 245 - **Éleve 18** : Et juste, il y a plus 4, qui est donc plus 1 carré, ça fait 67. Ça fait 67 carrés.
- 246 - **Chercheuse** : D'accord, mais là t'a enlevé les 3 pailles [*la chercheuse indique le calcul écrit par l'élève*].
- 247 - **Éleve 18** : Ça fait quand même 66 carrés.
- 248 - **Chercheuse** : Pourquoi?
- 249 - **Éleve 18** : Parce que j'en ai enlevé 1 pour en rajouter 1, ça revient au même.
- 250 - **Chercheuse** : Ouais. Si je reprends un peu ce que t'as fait, t'as fait 3 fois 66 signifie qu'à chaque fois, t'as construit des carrés comme ça. N'est ce pas? Tac tac tac... [*la chercheuse dessine ses propos sur la feuille*] 66 fois après t'as enlevé 3. Donc là t'avais 66 t'as fait moins de 3. Donc qu'est ce que t'as fait?
- 251 - **Éleve 18** : 63.
- 252 - **Chercheuse** : Oui, ici... pour le représenter sur le dessin...
- 253 - **Éleve 18** : Ah oui, bah j'ai enlevé 1 comme ça.
- 254 - **Chercheuse** : Oui montre-moi quelles pailles t'as enlevées.
- 255 - **Éleve 18** : Du coup, moins 3 ça a enlevé 1, 2, 3 [*l'élève montre sur le schéma dessiné par la chercheuse*].
- 256 - **Chercheuse** : Donc combien de carrés?
- 257 - **Éleve 18** : Même pas 1 carré parce qu'il n'était pas fini. Bah du coup après, ça

fait plus 4. Du coup, c'est comme si j'en avais mise une là.

258 - Chercheuse : D'accord. Donc tu vois bien que la fin c'est 66.

259 - Éleve 18 : Oui?

260 - Chercheuse : C'est ce que tu avais dit...

261 - Éleve 18 : Ah oui 66 carrés oui, je me suis perdue. Oui, 198 pailles et 66 carrés.

262 - Chercheuse : Oui, t'es d'accord?

263 - Éleve 18 : Oui.

264 - Chercheuse : Oui Super. Très bien! T'as quelques questions?

265 - Éleve 18 : Est-ce que c'est juste?

266 - Chercheuse : Oui, c'est correct. Ça joue? T'as quelques questions?

267 - Éleve 18 : Non, je crois que c'est tout bon.

268 - Chercheuse : Oui c'est tout bon? Juste regarde; tu as fait beaucoup attention vers cette règle de trois. Mais en fait, cette situation est oui, une situation proportionnelle d'une certaine manière, c'est à dire comme quand tu l'as dit à un certain moment. C'est une situation proportionnelle, si on enlève les 4 premières pailles. Si on fait comme ça. Ça, c'est proportionnel parce qu'à chaque fois, c'est 3 pailles.

269 - Éleve 18 : Oui.

270 - Chercheuse : Mais ce n'est pas proportionnel sur le nombre total. Parce qu'il y a, il a les premières 4 pailles qui ne rendent pas la situation proportionnelle. Donc, c'est normal que si tu fais ce truc là t'arrives pas.

271 - Éleve 18 : Oui.

272 - Chercheuse : Je ne sais pas si je me suis...

273 - Éleve 18 : Non, j'ai compris parce que en fait... Oui je vois...

274 - Chercheuse : D'accord. Et... bon écoute. Je ne sais pas, pour moi, ça a été une expérience positive, certainement utile. J'espère pour toi aussi. Si je peux juste me permettre de te donner un conseil. Quelque chose qui, à mon avis, pourrait vraiment t'aider pour les mathématiques. Et peut-être aussi dans d'autres branches. J'en sais rien. Mais déjà, peut-être avoir le courage de poursuivre, de poursuivre tes idées. Parce que parfois, tu ne te donnes pas assez la possibilité de continuer. Tu arrêtes trop, trop tôt, même si t'es sur la bonne route, tu vois.

275 - Éleve 18 : Ah oui, c'est arrivé quand j'étais sur la bonne route aussi que je croyais que quand c'était faux...

276 - Chercheuse : Non. Non. Tu vois, tu dois avoir plus confiance dans tes idées parce que tu vois... Les poursuivre. Et peut-être quelque chose de plus applicable. C'est écris! Ecris ce que tu penses. Parce que parfois, tu t'es perdue dans

les calculs juste parce que t'as pas écrit. Moi, je te jure, j'arrive à rien faire sans écrire. Bon c'est moi qui suis comme ça peut-être d'accord? Mais ça aide d'avoir une trace écrite. Regarde ici. Ça. T'as pas, t'as pas écrit la réponse. Tu vois, c'est pas. Ce n'est pas quelque chose qui ne me va pas. Tu vois parce que tu me l'expliques à l'oral, très bien. Mais pour toi, ça a été difficile après de reprendre ce que tu avais fait. Tes idées que tu avais eues.

277 - Élève 18 : Ah oui mais je ne me souviens plus du coup ce que j'avais fait.

278 - Chercheuse : Oui. Tu vois exactement c'est ça. Chaque fois, tu dois aller reconstruire ta pensée et c'est compliqué. C'est difficile, ça prend du temps, ça prend de l'énergie. Donc, si tu prends des notes. Si tu écrit même pour faire des calculs bêtes entre guillemets... Ecoute, regarde à ce que j'avais fait. Cela à certains moments, tu vois, mais tu m'avais demandé 36 mois 22. Je l'ai écrit. Tu vois, ça t'a pris, je crois 3 minutes pour le faire. Peut-être que l'écrire ça aurait pu t'aider...

279 - Chercheuse : D'accord? Et bon pour moi, c'est ça. Est ce que tu as quelques commentaires?

280 - Élève 18 : Non. Je ne crois pas

281 - Chercheuse : D'accord.

La suite de carrés : Élève 21

Durée de l'entretien : 34 min 26 s

1 - Chercheuse : Pour l'instant, ça bouge, mais tu as déjà fait partir, peut-être l'enregistrement-là?

2 - Élève 21 : Oui.

3 - Chercheuse : Moi je le fais partis aussi de mon natel. J'ai juste... J'ai peur d'avoir pas assez de memoire, mais je le fais partir. On voit la même chose. D'accord? On voir... Cette... Là.

4 - Élève 21 : D'accord.

5 - Chercheuse : Tu as pas besoin d'un stylo?

6 - Élève 21 : Non, c'est bon. J'ai ce qu'il faut.

7 - Chercheuse : Alors, je vais te donner des tâches de math et je te demande de les résoudre et de me dire ce qui se passe dans la tête, de m'expliquer un peu ce qui est... Ce que tu penses, pourquoi, etc.

8 - Élève 21 : D'accord.

9 - Chercheuse : Et si t'as des problèmes, si tu as des questions, n'hésite pas.

10 - Élève 21 : D'accord, oui.

- 11 - **Chercheuse** : Regarde, là, il y a les 3 premières étapes d'une suite de carrés. Ça, c'est la première étape.
- 12 - **Élève 21** : Oui.
- 13 - **Chercheuse** : La deuxième, la troisième. Ok?
- 14 - **Élève 21** : D'accord, oui.
- 15 - **Chercheuse** : La question est de comprendre combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés. D'accord?
- 16 - **Élève 21** : D'accord.
- 17 - **Chercheuse** : Donc, tu vois, là, les carrés sont composés par des pailles.
- 18 - **Élève 21** : Oui.
- 19 - **Chercheuse** : Chaque côté est une paille différente.
- 20 - **Élève 21** : Oui.
- 21 - **Chercheuse** : Ok? Donc. Combien de pailles pour 4 carrés?
- 22 - **Élève 21** : Pour 3... Pour 4 carrés? Ben... Si on dit qu'il faut pour 1 carré en haut [*en pointant les 2 premières pailles en haut de la troisième photo et après la première étape en photo*], il faut... Comment dire? Une paille en haut et que si on a 4 carrés on va avoir... Je peux noter?
- 23 - **Chercheuse** : Bien sûr, tu peux écrire ce que tu veux.
- 24 - **Élève 21** : On a 4 pailles en haut, ensuite 4 pailles en bas [*en notant « 4 » et « 4 » en « colonne »*]. Puis ensuite, on aura dans les intersections et on aura 3 intersections, celles-là, là [*en pointant les pailles verticales de la photo 3, mais la première. Elle écrit « 3 » à côté des « 4 »*].
- 25 - **Chercheuse** : Oui.
- 26 - **Élève 21** : Plus les 2 du bout, donc ça fait plus 2 [*elle écrit « 2 » à côté du « 3 »*].
- 27 - **Chercheuse** : Mh mh.
- 28 - **Élève 21** : Du coup... Du coup, en tout, pour tout, là, c'est égal à 13, donc ça fait 13 pailles [*elle écrit « =13 »*].
- 29 - **Chercheuse** : Parfait. Très bien. Et pour les 5 carrés?
- 30 - **Élève 21** : Pour les?
- 31 - **Chercheuse** : Pour 5 carrés [*en pointant la question sur la feuille*]?
- 32 - **Élève 21** : Ah, pour 5 carrés on fait la même chose, mais pour les 5.
- 33 - **Chercheuse** : Mh mh.
- 34 - **Élève 21** : Du coup, il y en aura 5 en haut, 4 au milieu et toujours 2 sur les côtés [*elle écrit « 5 » et « 5 » en colonne, « 4 » et « 2 » à côté des « 5 »*]. Du coup, ce sera 16 [*elle écrit « =16 »*] pailles.
- 35 - **Chercheuse** : Oui. Parfait. Merci beaucoup. Alors, c'est toujours la même tâche.

36 - Élève 21 : Oui.

37 - Chercheuse : Et combien faut-il de pailles pour former une suite de 12 carrés?

38 - Élève 21 : D'accord. Et il y en aura... Vu qu'il y a 12 carrés il y aura 12 en haut, 12 en bas [elle écrit « 12 » et « 12 » en colonne]. Bah, du coup si dans chaque intersection.... Si j'en ai pris 3, là [en pointant ses calculs pour les 4 carrés]. Pour ce qui est entre 2, il y en a 6 [elle écrit « 6 » à côté des « 12 »]. Et 2 sur le côté du coup, toujours [elle écrit « 2 »]. 22, du coup il y aura 22 pailles [elle écrit « =22 »].

39 - Chercheuse : Mh mh, d'accord. Comment tu as fait pour faire cela [en pointant les calculs de l'élève pour les 12 carrés]?

40 - Élève 21 : J'ai pris... Comment j'ai fait? Pour ce nombre-là [en pointant le « 6 » dans son calcul] j'ai pris 2 fois le 3 vu qu'il y a 12, 12 carrés.

41 - Chercheuse : Oui, il y a 12 carrés. Donc? J'ai juste pas compris, je veux par dire que c'est faux.

42 - Élève 21 : Non, attendez, je cherche juste...

43 - Chercheuse : Oui, prends ton temps.

44 - Élève 21 : [Inaudible].

45 - Chercheuse : Oui, nous avons une heure, tu as tout le temps que tu veux.

46 - Élève 21 : D'accord. Et oui, sur 12 carrés on a juste à diviser par 2 vu qu'il y a, en soi, 1 paille pour 2 carrés.

47 - Chercheuse : D'accord.

48 - Élève 21 : Puis ensuite on rajoute juste les 2 qui manquent aux bouts, voilà.

49 - Chercheuse : D'accord. Et donc, et ici [en pointant les calculs de l'élève pour les 4 et 5 carrés], comment tu avais fait pour trouver...?

50 - Élève 21 : Ben, pour les 4 carrés il y a forcément... Il y en a 4 carrés, du coup, il y a à chaque fois une paille pour chaque palier. Du coup, 4. Puis 2 fois vu qu'il y a aussi en bas et en haut. Ensuite entre chacun pailles il y en a 3. Puis on doit juste finir avec les 2 autres.

51 - Chercheuse : Et pourquoi il y a un 3?

52 - Élève 21 : Parce qu'on doit en mettre une toutes les... [elle dessine les 4 carrés à côté de ses calculs] Comment expliquer? On doit en mettre une toutes les 2 carrés.

53 - Chercheuse : Oui. D'accord, et pour le 5?

54 - Élève 21 : Le 5, en gros, c'est la même chose. Sauf que j'ai fait fois, 2. Fin, une fois de plus. J'ai rajouté un à chaque nombre, à part à la fin où il y en a toujours 2.

55 - Chercheuse : C'est-à-dire tu as rajouté 1 à chaque nombre?

56 - Élève 21 : Vu qu'il y a un carré de plus, à chaque étape de la formation du carré,

j'ai rajouté 1...

57 - Chercheuse : Oui...

58 - Élève 21 : Ce qui fait que ça fait en tout et pour tout 1 carré de plus. Mais on garde quand même les 2 à la fin parce qu'on les a pas comptés. Puis il y en a toujours 2 à la fin.

59 - Chercheuse : D'accord. Et alors ici [*en pointant les calculs pour les 12 de l'élève*]?

60 - Élève 21 : Ici, on prend toujours le nombre en haut de base, qui avant était 4 et 5, mais là, il y en a 12. Et ensuite, du coup, on dit que tous les 2 carrés il faut un bâton. On fait, les 12 pailles divisé par 2 et 6, puis, il y a toujours les 2 qui restent à la fin.

61 - Chercheuse : D'accord. Je n'ai pas compris pourquoi tu prends les 12 divisé par 2.

62 - Élève 21 : Parce que toutes les 2 pailles... Fin, sur 2 pailles... Une toutes les 2 pailles, du coup, il y en a forcément la moitié.

63 - Chercheuse : C'est-à-dire?

64 - Élève 21 : [*Elle dessine les 12 carrés*] Si on prend 12. Ce que j'ai fait, c'est pas juste. Du coup, il y aura plutôt... On ne doit pas faire divisé par 2, mais il y en a 11. Du coup, il y en a 1 de moins à chaque fois. Plus on rajoute ceux du bout. Du coup là, c'est pas 6, mais 11 [*elle efface « 6 » et écrit « 11 »*].

65 - Chercheuse : Et pourquoi il y en a 1 de moins à chaque fois?

66 - Élève 21 : Parce qu'il y aura toujours un bâton de fin et début [*elle souligne sur son dessin les 2 pailles de haut, la première et la dernière*], qu'on ne comptera pas, mais qu'on rajoute ensuite avec les 2 de la fin [*elle fait le geste des 2 pailles verticales des 2 bouts*]. En gros. Je sais pas comment dire ça.

67 - Chercheuse : Oui, je comprends. Ok, merci. Et maintenant... Toujours le même exercice. Je peux te demander peut-être... Parce que je vois ici dans la vidéo que le crayon on ne voit pas très bien. Ça te va? [*La chercheuse lui donne un stylo*].

68 - Élève 21 : Oui, pas de problème. [*L'élève lit la consigne à voix basse*] 100 carrés... Alors, pour 100 carrés on va forcément prendre 100 et 100, logiquement [*elle écrit « 100 » et « 100 » en vertical*]. Ensuite, du coup, vu qu'on dit qu'à chaque fois, il y a 1 carré... Fin, une paille de moins, dans ce cas-là, ça veut dire qu'il faut mettre 99 et toujours plus les 2 autres [*elle écrit « 100 », « 100 », « 99 » et « 2 » avec la position qu'elle a toujours utilisé*] et du coup, ça fait...

69 - Chercheuse : Si tu as besoin. Si jamais je peux faire des calculs à la calculatrice.

70 - Élève 21 : Oui, du coup... Non, mais là c'est bon, du coup, ça fait 301.

71 - Chercheuse : Oui.

72 - Élève 21 : Voilà.

73 - Chercheuse : Parfait. Tu m'expliques à nouveau comment tu as trouvé cela [*en pointant les calculs pour les 100 carrés de l'élève*]?

74 - Élève 21 : Vu qu'il y a 100 carrés, on doit mettre un bâton dans tous les en haut et un bâton dans tous les en bas. Ensuite, il faut mettre 99 bâtons entre chaque 2... Entre chaque 2 carrés, du coup, c'est juste qu'il en y a 1 de moins, du coup, ça fait 99, plus le 2 du bout qu'il faut rajouter, ça fait 301.

75 - Chercheuse : Parfait, c'est très bien. Maintenant, en connaissant le nombre de carrés, pourrais-tu toujours trouver le nombre de pailles?

76 - Élève 21 : Oui, mais il faudrait juste savoir si le carré est constitué toujours du même nombre de pailles. C'est juste ça, mais si on sait...

77 - Chercheuse : C'est toujours des carrés fait comme ça, d'accord?

78 - Élève 21 : D'accord. Du coup, on sait... On peut toujours savoir combien il y a de pailles, oui.

79 - Chercheuse : Et comment?

80 - Élève 21 : Parce qu'à chaque fois, on sait que dans 1 carré, il y a 4 pailles et qu'on peut toujours se dire... N'importe le nombre de carrés on se dit qu'il y a [*elle dessine un carré composé par 4 pailles*]... Pour faire 1 carré on a 4 pailles. Du coup, on a juste à faire ça, les 4 pailles, plusieurs fois.

81 - Chercheuse : C'est-à-dire?

82 - Élève 21 : On sait qu'à chaque fois s'il y a 4 pailles et qu'on nous dit par exemple 2 carrés de pailles, on a juste à rajouter ensuite 3 pour que ça fasse 2 carrés, bien qu'il y a 1 qui au mieux soit 1 pour 2. Puis ensuite c'est un peu ainsi de suite qu'on peut faire ça à l'infini. Mais une fois qu'on sait qu'avec 1 carré, il y en a 4, mais que avec 2 carrés, il y en a [*elle compte les pailles*]... Il y en a 7. Ben, on peut répéter ça à chaque fois.

83 - Chercheuse : Mh mh. Et alors pour les... Par exemple, si t'avais 5000 carrés, comment tu ferais?

84 - Élève 21 : 5000 carrés... Si j'avais 5000 carrés je ferais comme si j'avais 5 carrés. Et puis ensuite juste rajouter 3 zéros pour agrandir le nombre. Comme ça, c'est plus simple.

85 - Chercheuse : D'accord. Est-ce que...

86 - Élève 21 : Du coup, je ferais pour les 5000, là, je fais 5 sur 5, 4 plus 2 [*Elle écrit « 5 » et « 5 » en colonne, après « 4 » et « 2 »*]. 16, puis ensuite, on rajoute 3 zéros [*elle écrit « 16'000 »*]. Voilà.

87 - Chercheuse : Est-ce que cette technique-là que tu as utilisée marche par exemple pour 100 carrés?

88 - Élève 21 : Pour arriver à combien de carrés?

89 - Chercheuse : Là [en pointant les calculs de l'élève pour les 5000 carrés], tu as utilisé une certaine technique, non?

90 - Élève 21 : Mh mh.

91 - Chercheuse : C'est-à-dire tu as pris les 5...

92 - Élève 21 : Oui.

93 - Chercheuse : Et tu as multiplié fois 1000.

94 - Élève 21 : Oui.

95 - Chercheuse : Tu as rajouté 3 zéros, comme tu l'ai dis.

96 - Élève 21 : Oui.

97 - Chercheuse : Là [en pointant les calculs de l'élève pour les 100 carrés], tu avais utilisé une autre technique.

98 - Élève 21 : Oui.

99 - Chercheuse : Tu te rappelles?

100 - Élève 21 : Oui, oui.

101 - Chercheuse : Et je me demande laquelle des 2 techniques est juste, si les 2 sont justes. Si tu peux contrôler que les 2 sont justes ou pas.

102 - Élève 21 : Les 2 peuvent être juste, je crois. Parce que pour les 100, on sait qu'il y a 100 carrés, du coup on met 100 en haut et en bas.

103 - Chercheuse : Ouais.

104 - Élève 21 : Puis là [en pointant ses calculs pour les 5000 carrés], en fait, c'est un peu la même chose. Sauf qu'on fait en plus petit d'abord [en pointant les calculs pour les 5 carrés], puis vu que c'est juste une suite de zéros, on a juste à rajouter les zéros. Mais en soi, le calcul de base est le même. Il faut juste l'agrandir par la suite.

105 - Chercheuse : D'accord, mais alors, est-ce que tu sais combien de pailles il y a pour 1 carré?

106 - Élève 21 : Oui, pour 1 carré il y en a 4.

107 - Chercheuse : Oui, voilà. Et 100, c'est 1 fois 100, c'est-à-dire on ajoute entre guillemets 2 zéros.

108 - Élève 21 : Oui.

109 - Chercheuse : Est-ce que ça marche, ça? Si pour 1 carré, c'est 4 pailles [la chercheuse écrit à la page 1 « 1 carré, 4 pailles -> 100 carrés »]. D'accord?

110 - Élève 21 : Oui.

111 - Chercheuse : 1 carré, 4 pailles. Si tu refais ton raisonnement que tu as fait là [en pointant les calculs pour les 5000 carrés] pour 100 carrés, combien de pailles?

112 - Élève 21 : Si on prend le même raisonnement et que...

- 113 - Chercheuse :** Qu'ici [*en pointant le calcul pour les 5000 carrés*].
- 114 - Élève 21 :** Qu'on prend 1... Oui, ça pourrait... Je le fais juste sur cette feuille, comme ça...
- 115 - Chercheuse :** Oui, bien sûr.
- 116 - Élève 21 :** Si on fait... On dit qu'il y a 1 carré partout. Puis qu'il faut... Il y en a 0 au milieu.
- 117 - Chercheuse :** Très bien.
- 118 - Élève 21 :** Puis qu'il y en a 2 sur les côtés, ça nous fait 4. Et puis qu'ensuite on doit rajouter 2 zéros [*elle écrit « 1 » et « 1 » en colonne et à côté « 0 2 = 400 »*]. Je me suis trompé là haut, je crois. Il ne sont pas la même chose mais...
- 119 - Chercheuse :** On pourrait essayer de comprendre laquelle est juste...
- 120 - Élève 21 :** Oui.
- 121 - Chercheuse :** Et voir si... Voilà, laquelle est juste.
- 122 - Élève 21 :** Théoriquement, par rapport au fonctionnement... Mais si on prend celle-là [*en pointant les 3 carrés*] de technique pour faire ce calcul-là [*en pointant son calcul « 1 1 0 2 = 400 »*], c'est comme si celles qui viennent entre 2 [*en pointant les pailles verticales de la photo de la deuxième étape*], n'existaient pas vu qu'il y en a 0. Du coup ça pourrait nous... C'est plutôt cela qui ne serait pas juste pour ce cas-là, mais peut être utilisé pour d'autres cas dès qu'il y a plus de 1.
- 123 - Chercheuse :** Et si on veut un raisonnement qui marche toujours?
- 124 - Élève 21 :** Ce serait de justement pas simplifier en soi la ligne et dire à chaque fois qu'on va faire ce calculs-là [*en pointant le calcul pour les 5 carrés*] mais ce serait beaucoup plus long.
- 125 - Chercheuse :** Comment tu ferais pour les 5000 per l'exemple? Pour les 5000 carrés?
- 126 - Élève 21 :** Je pourrais faire... 5000?!
- 127 - Chercheuse :** J'ai une calculette, d'accord? Donc il ne faut pas s'inquiéter pour les calculs.
- 128 - Élève 21 :** D'accord. Je vais faire 5000 plus 5000... Du coup, il faudrait 49 plus 2 [*elle écrit « 5000 » et « 5000 » en colonne et à côté « 4999 + 2 »*]. Du coup...
- 129 - Chercheuse :** Je peux... Tu veux que je le fasse?
- 130 - Élève 21 :** Ça fait 5002, non? 5001?
- 131 - Chercheuse :** Le tout?
- 132 - Élève 21 :** Oui.
- 133 - Chercheuse :** Comment tu as fait pour le trouver 5001?
- 134 - Élève 21 :** J'ai fait 5000, puis 5000, ça fait... Non! Ça fait 10000.

- 135 - Chercheuse : Oui.
- 136 - Élève 21 : 10000... J'ai arrondi à 5000, du coup, 15000. Plus le 1 qui reste, ça fait 15001.
- 137 - Chercheuse : Oui, très bien.
- 138 - Élève 21 : Voilà [*elle écrit* « =1501 »].
- 139 - Chercheuse : Ok, 15001. Regarde, ici 15001, il faut encore mettre un zéro.
- 140 - Élève 21 : [*L'élève corrige en* « =15001 »].
- 141 - Chercheuse : Ok. Est-ce que ce que t'as trouvé là [*en pointant* « 15001 »] c'est la même chose que ce que j'avais trouvé avant?
- 142 - Élève 21 : Non. Disons que là [*en pointant* « 15001 »], on s'est compliqué la vie, du coup c'est forcément celui-là [*en pointant* « 15001 »] qui me paraît le plus juste, du coup...
- 143 - Chercheuse : Mh mh.
- 144 - Élève 21 : Mais... Pourquoi l'autre est faux, c'est toujours le même problème.
- 145 - Chercheuse : D'accord, donc...
- 146 - Élève 21 : S'il n'y a pas les 9 [*en pointant* « 4 » dans « $5\ 5\ 4\ 2 = 16000$ »], disons que ce n'est pas 4... 4, tout simplement, sinon c'est comme si c'était 4000...
- 147 - Chercheuse : Mh mh.
- 148 - Élève 21 : Mais c'est 4999, et pas 4000.
- 149 - Chercheuse : Mh mh.
- 150 - Élève 21 : C'est ça qui fausse après tout.
- 151 - Chercheuse : Oui, ouais, parce que 5 [*en pointant le calcul* « $5\ 5\ 4\ 2 = 16000$ »], comme tu l'as dit, on multiplie fois 1000, c'est 5000. Mais tu vois, le 4, si on le multiplie fois 1000, ça ne donne pas ça [*en pointant* « 4999 »]. Même chose pour les 2.
- 152 - Élève 21 : Oui.
- 153 - Chercheuse : Tu vois, si tu fais fois 1000, ça devient 2000, c'est beaucoup trop. En fait, les 2 qui bloquent à la fin, c'est toujours 2. Tu vois?
- 154 - Élève 21 : Oui!
- 155 - Chercheuse : C'est pas 2000 si on fait 1000 fois plus.
- 156 - Élève 21 : Oui, c'est ça, oui.
- 157 - Chercheuse : Ça te paraît clair?
- 158 - Élève 21 : Oui.
- 159 - Chercheuse : Oui, ok, très bien, ok. Et donc, si je te demande, et pour un nombre quelconque...
- 160 - Élève 21 : Oui...
- 161 - Chercheuse : Comment tu ferais pour trouver... Si tu as un nombre quel-

conque de carrés, pour comprendre combien de pailles?

- 162 - Élève 21 : Si on ne sais pas combien de carrés, on ne sais pas combien de pailles.
- 163 - Chercheuse : Mais c'est... C'est en fait. Tu as déjà vu un peu d'algèbre? Oui.
- 164 - Élève 21 : Non, pas encore.
- 165 - Chercheuse : Avec x, y , ce type de choses?
- 166 - Élève 21 : On n'a pas encore vu, mais on m'en a parlé.
- 167 - Chercheuse : Mais vous n'avez pas encore vu. Ok, mais si... Et si on connaissait ce nombre de carrés?
- 168 - Élève 21 : Oui. On pourrait savoir combien de pailles y aurait.
- 169 - Chercheuse : Ah oui? Et comment tu ferais avec ce nombre?
- 170 - Élève 21 : Si on prend le nombre en question... Je ne sais pas, je représente juste le nombre par un rond.
- 171 - Chercheuse : Très bien.
- 172 - Élève 21 : On devra juste faire ce rond en question fois 2, égal un nombre quelconque vu que c'est un nombre qu'on ne connaît pas [*elle écrit « $O \times 2 = OO$ »*], mais, du coup, vu qu'il y a tous ceux d'en haut qui sont... Disons que s'il y a, ce nombre c'est le nombre de fois qu'il y a 1 carré avec un certain nombre de pailles, ça veut dire... De toute façon, on doit faire, vu qu'il a ce nombre de pailles qui sera 2 fois dans le calcul, il sera de toute façon 2 fois [*elle écrit « O » et « O » en colonne*], sinon...
- 173 - Chercheuse : Oui.
- 174 - Élève 21 : Et il y aura, toujours ce nombre moins 1 dans la suite du calcul. Plus, si on part toujours du principe que c'est des carrés, plus 2 par la suite [*elle écrit « $OOO-1+2$ »*].
- 175 - Chercheuse : Mh mh.
- 176 - Élève 21 : Qui resoudra toujours à ta-ta-ta... Fin, ces [*en écrivant « $= OOO$ »*]...
- 177 - Chercheuse : C'est quoi ton ta-ta-ta?
- 178 - Élève 21 : C'est un nombre. Un nombre final. Mais en soi, le but du calcul, c'est de prendre 2 fois le nombre qu'on a...
- 179 - Chercheuse : Oui...
- 180 - Élève 21 : Moins ce nombre... Fin, moins 1 de ce nombre, plus ce qu'on a trouvé là [*en cerclant « $O O$ »*], plus ensuite les 2 qui vont venir par la suite. Et on va trouver le nombre final [*en pointant « OOO »*].
- 181 - Chercheuse : D'accord, ok. Merci beaucoup. Voilà. Dernière question aujourd'hui.
- 182 - Élève 21 : Oui.

- 183 - **Chercheuse** : Tu as acheté un paquet de 200 pailles.
- 184 - **Élève 21** : Oui.
- 185 - **Chercheuse** : Combien de carrés peux-tu construire avec ces 200 pailles?
- 186 - **Élève 21** : Ben, on doit, en soi... Si on part du principe qu'un carré fait 4, on a juste à faire 200 divisé par 4.
- 187 - **Chercheuse** : Mh mh.
- 188 - **Élève 21** : Du coup [*elle pose « $200 : 4 = 50$ »*], ça veut dire que ça fait 50.
- 189 - **Chercheuse** : Mh mh.
- 190 - **Élève 21** : Si on fait 200 divisé par 4.
- 191 - **Chercheuse** : Oui.
- 192 - **Élève 21** : Du coup, on aura 50 carrés de 4.
- 193 - **Chercheuse** : D'accord.
- 194 - **Élève 21** : Mais ça voudrait dire qu'à partir de là, s'ils sont justement collés comme la troisième et deuxième étape, ça veut dire qu'il faudrait qu'en soi... C'est pas totalement juste parce qu'il y en a 1 de moins. Vu à chaque fois, il y a une paille de moins dans le calcul, il faudrait faire du coup 50 moins 1. Du coup, vu que là [*en pointant « $200 : 4 = 50$ »*], c'est comme si on comptait qu'il y avait à chaque fois 4 carrés, sauf qu'il y a une paille entre 2 à chaque fois, mais si on prenait vraiment 4 par 4, par 4, ça veut dire qu'il y aurait 2 pailles, là [*en pointant la troisième paille verticale de la photo de l'étape 3*], à chaque fois.
- 195 - **Chercheuse** : D'accord, mais là, on prend toujours les carrés collés comme ça [*en pointant l'étape 3*]?
- 196 - **Élève 21** : Oui.
- 197 - **Chercheuse** : On veut toujours construire des carrés comme ce type-là.
- 198 - **Élève 21** : Oui. Du coup, il faudrait faire... Si on prend qu'il y en a 200, il faudrait faire 50 divisé encore par 2, du coup. Si on prend toujours qu'il y en a 200 du coup... Oui, c'est logique. Du coup 25 [*elle écrit « $50 : 2 = 25$ »*].
- 199 - **Chercheuse** : D'accord. Donc, pourquoi tu as fait divisé par 2?
- 200 - **Élève 21** : Parce qu'à chaque il faut en enlever 1. Mais vu que c'est sûr, à la base 200, il faut du coup à chaque fois enlever 2.
- 201 - **Chercheuse** : D'accord. Donc tu dis qu'à la fin, on construit 25 carrés?
- 202 - **Élève 21** : Oui.
- 203 - **Chercheuse** : Oui. Alors je te pose la question à l'envers. Si tu as 25 carrés, combien de pailles tu dois utiliser?
- 204 - **Élève 21** : Alors si on prends 25, 25, plus 24, plus 2 [*elle écrit « $25\ 25\ 24 + 2 =$ » avec les 2 « 50 » en colonne*]. Alors 50... 74...
- 205 - **Chercheuse** : Je peux le faire à la calculatrice si tu veux.

- 206 - Élève 21 :** Non, ça va. Du coup, ça fait 76 [elle écrit « 76 »] et ça fait pas 200. Du coup, je pense que ça fait pas divisé par 2... Mais non! En fait, il n'y avait pas vraiment besoin de faire divisé par 2, vu que sur les 200 pailles et qu'à chaque fois, c'est un 4 carré. On peut en prendre 50. Du coup, si on fait pour vérifier justement ça, si on fait 50, 50, 49, 2 [elle écrit « 50 50 49 2 » avec les 2 « 50 » en colonne]... 149 plus 2, 151 [elle écrit « =151 »]. Dans tous les cas, ça ne marche pas.
- 207 - Chercheuse :** Et à ton avis pourquoi? Qu'est-ce qui ne joue pas?
- 208 - Élève 21 :** Dans tous les cas, c'est comme s'il n'y avait pas... Fin, il y a toujours un 3 sur 200. [Inaudible] 50. C'est que si on fait 4 fois 50... Si on fait 4 fois 50, là, ça fait 200.
- 209 - Chercheuse :** Ok. Et pourquoi tu veux faire 4 fois 50?
- 210 - Élève 21 :** C'est juste pour trouver combien, justement de fois de 50, on arrive à 200, pour comprendre qu'en fait, c'est comme si on disait que pour 1 carré, il fallait 50 pailles. Mais c'est pas ça qu'on veut. Du coup, comment on doit faire? Si on veut 40 bâtons... Je ne sais pas comment faire. Clairement ça, ça ne va pas, mais ce n'est en doublant le 4... Fin, en augmentant le 4...
- 211 - Chercheuse :** Et à ton avi c'est où le problème, là [en pointant « $200 : 4 = 50$ »]?
- 212 - Élève 21 :** C'est sûrement le 4, parce qu'on peut faire une division, c'est ce qui paraît le plus simple, sinon je ne sais pas trop comment faire.
- 213 - Chercheuse :** Mh Mh.
- 214 - Élève 21 :** Puis... Le 200 c'est le nombre de base, on n'a pas le choix, c'est de là d'où on part. Du coup, c'est forcément le 4 qui pose problème. Du coup... Puis, on ne peut pas faire 4 divisé par 200, ça n'a aucun sens.
- 215 - Chercheuse :** Mh mh.
- 216 - Élève 21 :** Puis, on ne peut pas faire 40... Fin, 200 divisé par 40, parce que nous on veut 4 pailles, pas 40 pailles dans 1 carré.
- 217 - Chercheuse :** Oui.
- 218 - Élève 21 :** Du coup, je ne sais pas comment m'y prendre.
- 219 - Chercheuse :** Oui. L'heure est terminée, donc je t'explique brièvement, ça te va? Ça t'intéresse?
- 220 - Élève 21 :** Oui oui!
- 221 - Chercheuse :** Regarde. Tu vois, ta formule? Tu fais toujours le nombre, plus le nombre, plus de nombre moins 1, plus 2 [la chercheuse pointe la formule de l'élève « $50 50 49 2 = 151$ »].
- 222 - Élève 21 :** Mh mh.
- 223 - Chercheuse :** Donc tu, toi, tu peux prendre tes pailles et imaginer de les

mettre. Qu'est-ce que tu fais? Tu mets déjà 2 pailles.

224 - Élève 21 : Oui.

225 - Chercheuse : Tu vois là pour...

226 - Élève 21 : Les bouts, oui.

227 - Chercheuse : Les bouts. Donc tu peux faire déjà, par exemple, 200 moins les 2. D'accord?

228 - Élève 21 : Oui.

229 - Chercheuse : Ça fait 198 [*elle écrit « 200-2=198 »*].

230 - Élève 21 : Oui.

231 - Chercheuse : Après, qu'est-ce que tu fais? Tu mets le nombre...

232 - Élève 21 : De carrés en dessous et en bas...

233 - Chercheuse : Et en bas, et après le nombre moins 1 là, en vertical [*en pointant la deuxième paille en vertical dans la photo de la troisième étape*].

234 - Élève 21 : Ouais.

235 - Chercheuse : Donc, tu dois trouver un nombre qu'en gros, si tu lui fais le nombre, plus le nombre, plus le nombre moins 1, donne 198.

236 - Élève 21 : Oui...

237 - Chercheuse : Tu vois, tu veux que le nombre, plus le nombre...

238 - Élève 21 : Oui.

239 - Chercheuse : Plus le nombre moins 1...

240 - Élève 21 : Oui.

241 - Chercheuse : Ça, c'est égal à 198 [*la chercheuse écrit « 0 0 0 - 1 = 198 », avec les premier 2 ronds en colonne*]. Tu es d'accord?

242 - Élève 21 : Oui.

243 - Chercheuse : C'est-à-dire que le nombre plus le nombre, plus le nombre doit être 199 [*la chercheuse écrit « 0 0 0 = 199 » avec les premiers 2 ronds en colonne*].

244 - Élève 21 : Oui.

245 - Chercheuse : Tu es d'accord?

246 - Élève 21 : Mh mh.

247 - Chercheuse : Donc... En fait, moi, je sais la solution, mais sinon, on pourrait essayer. 66 plus 66 si je reprends comme tu l'écrivais avant : 66, 66, 65 et 2 [*elle écrit « 66 66 65 2 » avec les 2 « 66 » en colonne*]. Tu vois?

248 - Élève 21 : Oui.

249 - Chercheuse : Ça fait... Alors je le fais petit à petit le calcul. Ça, c'est ce que tu écrivais avant, tu es d'accord?

250 - Élève 21 : Oui.

251 - Chercheuse : Alors ça, c'est 6 et 6 [*elle calcule en colonne*], ça fait 2, se reporte

une unité, une dizaine. 6 et 6, 12. Donc 132 plus 65, c'est 7, 9. 197 plus 2, c'est 199 et il me reste une paille que je n'utilise pas.

252 - Élève 21 : Oui.

253 - Chercheuse : D'accord?

254 - Élève 21 : D'accord.

255 - Chercheuse : Donc c'est 66 carrés.

256 - Élève 21 : D'accord, oui.

257 - Chercheuse : Oui? Ça va?

258 - Élève 21 : Oui.

259 - Chercheuse : Ok.

La suite de carrés : Élève 22

Durée de l'entretien : 36 min 35 s

1 - Chercheuse : Voilà, c'est parti. Oui, je pense que c'est bon. Si je fais comme ça... Bon, on ne voit pas vraiment tout. Bon, ça devrait aller. Qu'est-ce que tu en penses? Ok. Alors regarde ici, tu as les 3 premières étapes d'une suite de carrés. Ça, c'est la première étape, ça c'est la deuxième et ça c'est la troisième. Tu vois, les carrés sont composés par des pailles. Chaque côté est une paille différente. D'accord? Et la question est combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés?

2 - Élève 22 : Ok.

3 - Chercheuse : C'est clair la question?

4 - Élève 22 : Oui.

5 - Chercheuse : Oui, tu peux écrire et parler. Je te demande vraiment de me raconter un peu ce qui se passe dans ta tête.

6 - Élève 22 : Ba, là vu qu'un carré il y a 4 pailles [*en inquant le premier carré*], pour 2 carrés il y en a 8 du coup. Pour 3, il y en aura... Je sais pas... Il y a un aura 9 du coup.

7 - Chercheuse : Comment tu as fait pour trouver...

8 - Élève 22 : Non, pas 9. Non, du coup il y en a 11. Et du coup...

9 - Chercheuse : Comment tu as fait pour trouver 11 pailles?

10 - Élève 22 : Je les ai comptés.

11 - Chercheuse : D'accord, tu me montres comment?

12 - Élève 22 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 [*en comptant les pailles des 3 carrés*]. Ba!

13 - Chercheuse : Tu es surprise?

14 - Élève 22 : Oui!

15 - Chercheuse : Pourquoi?

- 16 - Élève 22 : Je sais pas... Parce que j'ai mal compté, en fait.
- 17 - Chercheuse : Ok.
- 18 - Élève 22 : Mais du coup, la question, là, c'est si on veut faire encore 4 carrés, combien il faut ?
- 19 - Chercheuse : Oui. C'est-à-dire, là, tu as une suite de... Ici, c'est une suite de 3 carrés, tu es d'accord ? Et pour en construire 4 ?
- 20 - Élève 22 : Je mets encore 4 ici [*en pointant à la droite des 3 carrés*].
- 21 - Chercheuse : Comment ? Tu arriverais à me montrer ?
- 22 - Élève 22 : Du coup 1, 2, 3 et 4 [*en dessinant les 4 pailles du quatrième carré, y compris la première en vertical*].
- 23 - Chercheuse : Donc tu les a mises comment, ces pailles ?
- 24 - Élève 22 : À côté l'une de l'autre.
- 25 - Chercheuse : Ok, comment tu me le remontre ? Je ne suis pas sûre d'avoir compris.
- 26 - Élève 22 : J'ai fait ,1 2, 3, 4 [*en pointant les 4 pailles du quatrième carré*], je fais comme eux [*en pointant les 3 carrés*].
- 27 - Chercheuse : D'accord. Mais alors, est-ce que tu arriverais... Ici, tu as combien de pailles pour la première étape [*en pointant la première étape*] ?
- 28 - Élève 22 : 4.
- 29 - Chercheuse : Oui. Comment... Elles sont où les pailles ?
- 30 - Élève 22 : Là [*en pointant les 4 pailles*].
- 31 - Chercheuse : Oui. Ok. Et ici [*en pointant la deuxième étape*] ?
- 32 - Élève 22 : Ici il y en a 7. Oui. Du coup ici il y en a [*en comptant les pailles pour les 4 carrés*]... Mais ici il y en a 14 avec le cas que j'ai rajouté.
- 33 - Chercheuse : D'accord. Donc ici t'en a rajouté un autre à côté [*en pointant la première paille du quatrième carré*].
- 34 - Élève 22 : Mh mh.
- 35 - Chercheuse : Quand on rajoute... Tu vois, pour passer de 2 à 3 carrés, cette paille-là est en commun.
- 36 - Élève 22 : Mh mh.
- 37 - Chercheuse : Et donc, quand tu passes de 3 à 4...
- 38 - Élève 22 : Oui, du coup on en a rajoutées que 3.
- 39 - Chercheuse : Oui, très bien... Quoi ?
- 40 - Élève 22 : On en a rajoutées que 3.
- 41 - Chercheuse : Oui. Et donc, on a combien de pailles pour les 4 ? Pour les 4 carrés ?
- 42 - Élève 22 : Il y en a 3.
- 43 - Chercheuse : 3 au total ?

- 44 - Élève 22 : Non. S'ils sont à la suite, le premier, non.
- 45 - Chercheuse : C'est-à-dire?
- 46 - Élève 22 : Le premier il a 4 pailles et quand ils sont à la suite, on doit rajouter que 3 vu qu'ils en ont 1 en commun.
- 47 - Chercheuse : D'accord. Et donc pour les 5 carrés?
- 48 - Élève 22 : Du coup, je rajoute encore 3 pour faire encore 1 [*elle dessine le cinquième carré*].
- 49 - Chercheuse : Mh mh. Ok, donc, on fait un petit résumé de ce qu'on a trouvé jusqu'à maintenant? 1 carré, combien de pailles?
- 50 - Élève 22 : 4.
- 51 - Chercheuse : Oui. Et pour les 2 carré?
- 52 - Élève 22 : 8.
- 53 - Chercheuse : Pourquoi tu dis 8? Comment tu as fait pour trouver 8?
- 54 - Élève 22 : J'ai rajouté plus 3.
- 55 - Chercheuse : C'est-à-dire, tu as fait plus 3 quoi?
- 56 - Élève 22 : Plus 3 pailles.
- 57 - Chercheuse : De... Oui, mais à partir quel nombre?
- 58 - Élève 22 : De 4.
- 59 - Chercheuse : Ok.
- 60 - Élève 22 : J'avais 4 plus 3.
- 61 - Chercheuse : Et ça donne?
- 62 - Élève 22 : Ah, mais ça fait 7 en fait. Ça fait 7.
- 63 - Chercheuse : Ça fait dérange? Tu veux que je tourne l'ordinateur?
- 64 - Élève 22 : Oui.
- 65 - Chercheuse : Oui. Peut-être, tu sais quoi? Je peux me mettre en face de toi?
- 66 - Élève 22 : Ok.
- 67 - Chercheuse : Comme ça, je, je vois ce qu'on fait. On fait comme ça, regarde.
- 68 - Chercheuse : Donc, on disait... Tu m'as dit que pour les 2 carrés, tu as 7 pailles.
- 69 - Élève 22 : Oui.
- 70 - Chercheuse : Oui. Et comment tu as trouvé?
- 71 - Élève 22 : Mais en fait du coup, là c'est pas logique.
- 72 - Chercheuse : Pourquoi?
- 73 - Élève 22 : Parce qu'un carré normalement, c'est 4 pailles.
- 74 - Chercheuse : Mh mh.
- 75 - Élève 22 : Et du coup, les 2, normalement, ça doit faire 8.
- 76 - Chercheuse : Pourquoi ça doit faire 8?
- 77 - Élève 22 : Parce que 4 plus 4, ça fait 8.

- 78 - **Chercheuse** : Très bien. Donc, qu'est-ce qu'il y a de bizarre, là?
- 79 - **Élève 22** : Ba, là il y a 7 vu qu'il y a une paille en commun qu'ils ont collés ensemble.
- 80 - **Chercheuse** : Oui, très bien.
- 81 - **Élève 22** : Du coup c'est bizarre un peu.
- 82 - **Chercheuse** : Eh oui, parce qu'ici, c'est... Dans quel cas est-ce que tu arriverais à me dessiner un cas où, en effet, 2 carrés ont 8 pailles?
- 83 - **Élève 22** : Bah, si je les sépare.
- 84 - **Chercheuse** : Par exemple, comment?
- 85 - **Élève 22** : Ba, je fais un comme ça et un comme ça [*elle dessine 2 carrés séparés*].
- 86 - **Chercheuse** : Oui, exactement. Dans ce cas-là...
- 87 - **Élève 22** : Il y en a 8.
- 88 - **Chercheuse** : Très bien. Ok. Et ici, qu'est-ce qu'il y a de différent?
- 89 - **Élève 22** : Ils ont pas la paille en commun.
- 90 - **Chercheuse** : Exactement. Donc, voilà... Donc maintenant c'est un peu plus clair, c'est un peu moins bizarre?
- 91 - **Élève 22** : Oui!
- 92 - **Chercheuse** : Pour les 3 carrés, alors?
- 93 - **Élève 22** : Du coup, mais là c'est pareil vu qu'il y a toujours des pailles un commun. Là, du coup... Si je fais vraiment là [*elle dessine 3 carrés pas collés*]... Du coup là ça fera 12 pailles normalement.
- 94 - **Élève 22** : D'accord, mais dans ce cas-là, dans notre type de... Dans notre dessin...
- 95 - **Élève 22** : [*Inaudible, elle pointe la troisième étape*].
- 96 - **Chercheuse** : Oui.
- 97 - **Élève 22** : Là, du coup, il y en a... Il y en a 10. Parce que normalement il y en a 12.
- 98 - **Chercheuse** : Ok, donc, d'où ça vient? Pourquoi c'est 10 et pas 12?
- 99 - **Élève 22** : À cause des pailles. Qui sont collées ensemble.
- 100 - **Chercheuse** : Très bien. Ok. Et pour les 4, alors?
- 101 - **Élève 22** : Là je fais encore pareil, je me mets... Je rajoute un [*elle dessine un quatrième carré séparé*], coup, ça fera... Il y en aura 16, normalement.
- 102 - **Chercheuse** : Normalement, oui. Mais dans notre type de dessin, comme ça, avec les carrés à petit train? Avec les wagons collés?
- 103 - **Élève 22** : Il y en a 13 [*elle compte les pailles à partir du quatrième carré*].
- 104 - **Chercheuse** : Comment tu as trouvé 13?
- 105 - **Élève 22** : Parce que j'ai rajouté 3... Fin, les 3 pailles qui manquent pour faire

le carré.

106 - **Chercheuse** : Ok, très bien. Et pour les 5 carrés?

107 - **Élève 22** : Je rajoute encore 1. Ça fera 20, normalement, mais ici, ça fera [*elle compte les pailles du cinquième carré*]... 16, je crois.

108 - **Chercheuse** : Comment tu as fait pour trouver 16?

109 - **Élève 22** : Plus 3. Fin, 13 plus 3.

110 - **Chercheuse** : Très bien. Ok. Je te pose une question, toujours un peu sur la même tâche. Donc, tu as toujours cette suite de carrés, faite comme ça, d'accord [*en pointant la troisième étape*]? Et maintenant, il faut comprendre combien faut-il de pailles pour former une suite de 12 carrés. Toujours 12 carrés mis comme ça [*en pointant la troisième étape*].

111 - **Élève 22** : Ok, mais du coup je peux faire un schéma?

112 - **Chercheuse** : Si tu veux, oui.

113 - **Élève 22** : [*Elle dessine les 12 carrés et compte les pailles*] Il y en a 37 pailles.

114 - **Chercheuse** : Comment tu as fait?

115 - **Élève 22** : J'ai compté tous les côtés qu'il y avait.

116 - **Chercheuse** : D'accord.

117 - **Élève 22** : Et ça m'a fait 37.

118 - **Chercheuse** : Et toujours un peu dans la même tâche... La question est maintenant combien faut-il de pailles pour former une suite de 100 carrés?

119 - **Élève 22** : Dans ma tête, je vais faire 4 fois combien ça fait 100.

120 - **Chercheuse** : Mh mh. Pourquoi tu fais ça?

121 - **Élève 22** : Parce que vu qu'un carré c'est 4, je vais faire 4 fois combien ça fait 100.

122 - **Chercheuse** : D'accord.

123 - **Élève 22** : Du coup... Mais je sais pas. Parce que c'est trop compliqué.

124 - **Chercheuse** : Si jamais après, on peut faire des calculs à la calculatrice, si tu as besoin. C'est pas ça qui est important.

125 - **Élève 22** : Ok. Là, je mets 4 fois combien égal 100 [*elle écrit « $4x?=100$ »*].

126 - **Chercheuse** : Ok, je le fais ici à la calculette, ok?

127 - **Élève 22** : [*L'élève écrit « 25 » en dessous du « ? »*].

128 - **Chercheuse** : Est-ce que tu es sûre de ta réponse?

129 - **Élève 22** : Oui.

130 - **Chercheuse** : Pourquoi? Comment tu l'expliquerais à quelqu'un d'autre?

131 - **Élève 22** : Parce que vu qu'un carré c'est 4 côtés, du coup... Et que je fais 4 fois 25... Fin, 4 fois 25, ça fait 100 carrés. Du coup, il faut 25 pailles.

132 - **Chercheuse** : D'accord. Est-ce que ce raisonnement-là marche pour les

exemples que tu connais déjà?

133 - Élève 22 : Non.

134 - Chercheuse : Pourquoi?

135 - Élève 22 : Parce que là [*en pointant la suite des 3 carrés*], du coup, il y aura des pailles en moins vu qu'ils sont collés. Alors qu'ici [*en pointant la consigne des 100 carrés*], ce sera... ils seront pas collés, ils seront...

136 - Chercheuse : D'accord. Mais ici [*en pointant la consigne pour les 100 carrés*], j'ai à nouveau... Les 100 carrés, la suite elle est toujours faite comme ça [*en pointant les 3 étapes en photo*], d'accord? C'est toujours des petits wagons de train.

137 - Élève 22 : Ah. Je ne sais pas alors.

138 - Chercheuse : On peut y réfléchir un moment ensemble, d'accord?

139 - Élève 22 : Je ne sais pas comment je pourrais faire.

140 - Chercheuse : Alors, est-ce que pour les 12 carrés, ici, tu as trouvé la solution qui est correcte, tu te rappelles, c'était 37. 37 pailles.

141 - Élève 22 : Oui.

142 - Chercheuse : D'accord, est-ce que tu arriverais à trouver la solution d'une autre manière, sans faire le dessin?

143 - Élève 22 : Si c'est toujours avec une lettre comme ça, là [*en indiquant la troisième étape en photo*].

144 - Chercheuse : Oui.

145 - Élève 22 : Non, mais par contre, si c'est séparé, oui.

146 - Chercheuse : Mh mh. Mais on les veut toujours collés.

147 - Élève 22 : Ba, je rajouterai toujours 3 à chaque fois vu qu'il y en aura toujours un de l'autre carré.

148 - Chercheuse : Ouais. C'est bien et donc si t'en rajoute 3 à chaque fois, comme tu l'as dit, comment tu peux trouver combien de pailles tu as besoin pour construire 12 carrés.

149 - Élève 22 : Fois 4.

150 - Chercheuse : Pourquoi fois 4?

151 - Élève 22 : parce que 4 fois 3, ça fait 12.

152 - Chercheuse : D'accord.

153 - Chercheuse : Du coup, voilà.

154 - Chercheuse : Mais 12, c'est le nombre de carrés ou de pailles?

155 - Élève 22 : De carrés.

156 - Chercheuse : Oui. On peut essayer de faire un petit schéma.

157 - Élève 22 : Mh mh.

- 158 - **Chercheuse** : Peut-être ça t'aide. Alors. Je fais un tableau, ok? Ici je mets le nombre de carrés et ici je mets le nombre de pailles.
- 159 - **Élève 22** : Ok.
- 160 - **Chercheuse** : Donc pour un carré, on regarde combien de pailles : 2, 3, 4, 5, 6, 7, et ainsi de suite [*en écrivant le tableau de la page 2*].
- 161 - **Élève 22** : Du coup ça sera 4 et puis 8...
- 162 - **Chercheuse** : Alors, comment tu as trouvé le 4?
- 163 - **Élève 22** : Parce que, du coup, un carré c'est 4 pailles.
- 164 - **Chercheuse** : Oui.
- 165 - **Élève 22** : Ah, mais attendez, parce que du coup, vous la même chose que ça [*en pointant son schéma des 12 carrés*].
- 166 - **Chercheuse** : Oui, c'est toujours les carrés mis comme ça.
- 167 - **Élève 22** : Mais du coup, là je vais faire plus 3, plus 3, plus 3, plus 3. Du coup 4, 5, 6, 7. 7. 10 ici. 13 [*en complétant le tableau avec 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22*].
- 168 - **Chercheuse** : D'accord, 22 pour combien de carrés?
- 169 - **Élève 22** : De quoi?
- 170 - **Chercheuse** : 22 pailles, c'est pour combien de carrés?
- 171 - **Élève 22** : C'est pour 7 carrés.
- 172 - **Chercheuse** : Ok, très bien. Ok. Et pour trouver les 12. Combien de pailles pour 12 carrés? Est-ce que tu arriverais à utiliser encore ce schéma-là?
- 173 - **Élève 22** : Oui [*elle écrit la correspondance jusqu'à 12 -> 37*]. Voilà pour 12 carrés, il faut 37 pailles.
- 174 - **Chercheuse** : Mh mh. Tu es arrivée à la même solution qu'avant. Très bien. Et est-ce que cela te donne une petite idée pour arriver à trouver combien de pailles pour 100 carrés?
- 175 - **Élève 22** : Bon, mais je pourrais faire la même chose jusqu'à 100, mais après ce sera trop long. Du coup, je sais pas comment faire pour les 100 carrés. Pour celui-là, je ne sais pas.
- 176 - **Chercheuse** : Ok. Est-ce que... Parce que, là, quelle opération tu es en train de faire pour trouver toutes les lignes?
- 177 - **Élève 22** : Pour ça je suis en train de faire plus 3 à chaque fois, mais... Ah. Mais du coup, ici, ça va être fois 3 quelque chose.
- 178 - **Chercheuse** : Fois 3 quoi?
- 179 - **Élève 22** : Peut-être 25.
- 180 - **Chercheuse** : Pourquoi 25?
- 181 - **Élève 22** : Vu qu'ici, on n'a trouvé que 4 fois 25, ça faisait 100...
- 182 - **Chercheuse** : Oui.

- 183 - Élève 22 : Peut-être que 25 fois 3 ça trouvera les pailles.
- 184 - Chercheuse : Mais pourquoi alors 3? Explique moi d'où ça vient ce 3.
- 185 - Élève 22 : D'ici [*en pointant la colonne droite de son tableau à la page 2*]. Ici, j'ai toujours rajouté plus 3.
- 186 - Chercheuse : Très bien.
- 187 - Élève 22 : Du coup, ici, je ferais fois 3.
- 188 - Chercheuse : Ok. Fois 3...
- 189 - Élève 22 : 100 pailles.
- 190 - Chercheuse : Ok, très bien. Et fois 3 quoi?
- 191 - Élève 22 : Fois 3... Fin, 25 fois 3.
- 192 - Chercheuse : Et pourquoi 25 et pas un autre nombre?
- 193 - Élève 22 : Parce qu'ici [*en indiquant son écriture « $4 \times 25 = 100$ » à la page 3*] vu qu'on a fait 4 fois 25 pour trouver les 100 carrés... Bas, peut-être je ferais 25 fois 3 pour trouver les pailles qu'il faut pour 100 carrés.
- 194 - Chercheuse : Mh mh. Mais tu te rappelles d'où ça venait ce 25? Quoi ça représentait cette écriture-là [*en pointant « $4 \times 25 = 100$ »*]?
- 195 - Élève 22 : Oui, c'est que c'était des carrés séparés, je crois.
- 196 - Chercheuse : Oui.
- 197 - Élève 22 : Du coup, c'est pas pareil.
- 198 - Chercheuse : Mh mh. Ok, ça, on peut le mettre un moment entre parenthèses, d'accord [*elle met entre parenthèses « $4 \times 25 = 100$ »*]?
- 199 - Élève 22 : Ok. Mais du coup... Déjà, 10 fois 10 ça fait 100.
- 200 - Chercheuse : Mh mh. Ok. Pourquoi tu fais 10 fois 10?
- 201 - Élève 22 : Pour trouver les 100 carrés mais sans faire ça [*en pointant « $4 \times 25 = 100$ »*], mettre les 4, là.
- 202 - Chercheuse : Mais pourquoi tu prends 10 fois 10?
- 203 - Élève 22 : Je sais pas... Parce que... Je ne sais pas.
- 204 - Chercheuse : Alors, là, tu veux faire 100 carrés, faits comme ça, d'accord [*en pointant le dessin des 12 carrés*]?
- 205 - Élève 22 : Mh mh.
- 206 - Chercheuse : À ton avis, t'auras combien de pailles plus que 100 ou moins que 100?
- 207 - Élève 22 : Plus.
- 208 - Chercheuse : Mh mh. Pourquoi?
- 209 - Élève 22 : Parce que là [*en pointant le tableau à la page 2*], par exemple, déjà, pour 12 carrés c'est... En fait, il y en a toujours plus de pailles que de carrés.
- 210 - Chercheuse : Mh mh.

- 211 - Élève 22 : Du coup ça sera pareil pour les 100.
- 212 - Chercheuse : Mh mh. Alors, tu as dit quelque chose qui était très bien, c'est-à-dire que pour aller de là à là [en écrivant ne flèche entre « 4 » et « 7 » dans le tableau], on faisait toujours plus 3.
- 213 - Élève 22 : Mh mh.
- 214 - Chercheuse : C'est-à-dire, on fait toujours plus 3, plus 3, plus 3, plus 3. Donc ça revient à faire une multiplication.
- 215 - Élève 22 : Oui.
- 216 - Chercheuse : 3 fois quelque chose. N'est-ce pas? Et par exemple, si tu es ici [en pointant « 3 » dans le tableau] pour 3 carrés, il faut 10 pailles. Si tu regardes le dessin qu'on avait au début [en pointant la photo de l'étape 3].
- 217 - Élève 22 : Ba, c'est pareil du coup les 2.
- 218 - Chercheuse : C'est-à-dire, c'est pareil?
- 219 - Élève 22 : Là, on a 10 pailles et là aussi [en pointant la photo de l'étape 3 et le tableau].
- 220 - Chercheuse : Oui, très bien. Mais est-ce que tu arriverais à voir où est le fois 3 là, dans cet exemple-là.
- 221 - Élève 22 : Où est le fois 3?
- 222 - Chercheuse : Oui.
- 223 - Élève 22 : Dans cet exemple-là [en pointant la photo de l'étape 3]?
- 224 - Chercheuse : Oui.
- 225 - Élève 22 : Ba, je ne sais pas comment m'expliquer en fait, mais du coup, là [en pointant la photo de l'étape 3] il y a 3 carrés.
- 226 - Chercheuse : Oui.
- 227 - Élève 22 : Du coup, c'est logique, qu'il y en aura fois 3 parce qu'il y a 3 carrés, ici [en pointant l'étape 2 en photo] ça sera fois 2 fois, et ici [en pointant la première étape en photo] fois 1.
- 228 - Chercheuse : Ok, et ici c'est fois 2 quoi?
- 229 - Élève 22 : Fois 2, 2 fois 2.
- 230 - Chercheuse : Pour obtenir quoi?
- 231 - Élève 22 : Le nombre de pailles. Mais du coup, c'est jamais le même résultat!
- 232 - Chercheuse : C'est-à-dire?
- 233 - Élève 22 : Parce que là [en pointant l'étape 2] si je fais 2 fois 2, ça fera 4.
- 234 - Chercheuse : D'accord.
- 235 - Élève 22 : Et là, il y en a 7 [en pointant le tableau].
- 236 - Chercheuse : Et à ton avis alors c'est quoi l'opération correcte à faire? Lequel des 2 est correct? 2 fois 2 ou...?

- 237 - Élève 22 : Non, je crois c'est lui [*en pointant le tableau*].
- 238 - Chercheuse : Mh mh. Donc, peut-être, il y a un problème dans ce que tu viens de dire.
- 239 - Élève 22 : Oui. Bon. Mais du coup, si c'est fois 3, est-ce que ce sera fois 3 partout ou bien juste dans les 3 carrés?
- 240 - Chercheuse : On peut essayer.
- 241 - Élève 22 : Ok.
- 242 - Chercheuse : Est-ce que dans les 3 carrés déjà, est-ce que ça marche?
- 243 - Élève 22 : 3 fois 3, déjà ça fera 9. Et là...
- 244 - Chercheuse : Et là [*en pointant le tableau*] t'en as combien?
- 245 - Élève 22 : Il y en a 10. Du coup déjà là ça ne marche pas.
- 246 - Chercheuse : Ça marche pas. Pourquoi ça ne marche pas à ton avis?
- 247 - Élève 22 : Puisque c'est... je sais pas. Mais pour moi, c'est pas logique en fait, je ne sais pas.
- 248 - Chercheuse : Mh mh. Mais je comprends. C'est un exercice très difficile. C'est normal, si on galère un peu à arriver à la solution. Qu'est-ce qui n'est pas logique, pour toi?
- 249 - Élève 22 : Parce que si c'est vraiment des multiplications, on devra faire fois 3. Je sais pas quoi... Mais quand on les compte, mais du coup, c'est pas des multiplications, ça fait pas le même nombre.
- 250 - Chercheuse : Mh mh. Oui, parce qu'il y a encore un petit bout qui manque. C'est-à-dire que tu es sur la bonne route, mais il y a un petit bout qui manque.
- 251 - Élève 22 : Peut-être on va diviser, je ne sais pas.
- 252 - Chercheuse : Pourquoi diviser?
- 253 - Élève 22 : Parce que c'est la seule solution qui reste.
- 254 - Chercheuse : C'est-à-dire que tu as essayé tout le reste?
- 255 - Élève 22 : Oui, mais même la divisions ça ne marche pas.
- 256 - Chercheuse : Mh.
- 257 - Élève 22 : Je ne sais pas.
- 258 - Chercheuse : Est-ce que arriverais peut-être... Ou sinon, encore, pour des carré faits comme ça [*en pointant différentes étapes de la suite*], en ligne comme ça. Combien de pailles il y a pour chaque carré?
- 259 - Élève 22 : 4. Non, pas pour chaque carré du coup. Pour le premier carré, il y en aura 4, mais pour les autres, il y en aura toujours 3.
- 260 - Chercheuse : Mh, c'est intéressant ça. Ça peut nous aider.
- 261 - Élève 22 : Parce que vu qu'ils sont reliés, le premier y en aura 4.
- 262 - Chercheuse : Oui.

- 263 - Élève 22 : Et dans les autres, vu qu'il y auras, déjà la paille d'avant, on devra toujours rajouter que 3, on ne peut pas en rajouter 4.
- 264 - Chercheuse : Parfait. Très bien. Est-ce que ce que tu viens de dire tu n'arrives à l'utiliser?
- 265 - Élève 22 : Ben non, parce que du coup, si on les multiplie, on ne peut pas parce que là [*en pointant la photo de l'étape 3*] j'aurais pu faire fois 3. Ou bien fois 4, mais vu que le premier en a 4 et l'autre y en a 3, moi je peux pas les multiplier les 2, pour refaire une suite.
- 266 - Chercheuse : Mh mh. Mais si tu n'avais pas le premier, par exemple... Oui, dis-moi, tu étais en train de dire quelque chose.
- 267 - Élève 22 : Du coup... En fait, je pense pour les autres à la suite, on rajoute toujours fois 3 du coup. Vu que le premier a déjà les 4, pour les autres je ferais toujours fois 3.
- 268 - Chercheuse : D'accord. Et donc, comment tu ferais pour trouver le reste? Les autres, pas le premier.
- 269 - Élève 22 : Toujours... Mais plus 3 pailles partout.
- 270 - Chercheuse : Et donc pour les 12, par exemple?
- 271 - Élève 22 : Par exemple là, il y a les 4 premières [*en pointant le premier carré de la suite de 12*]. Moi je mets fois 3, fois 3, fois 3 [*en pointant les 3 pailles du deuxième, troisième et quatrième carré*].
- 272 - Chercheuse : Très bien.
- 273 - Élève 22 : Partout.
- 274 - Chercheuse : Très bien. Et, est-ce que tu arriverais à écrire en calcul, ce que tu viens de dire?
- 275 - Élève 22 : 12 fois 3 peut-être [*Elle écrit « 12x3 »*].
- 276 - Chercheuse : Mh mh. Avec ce calcul qu'est ce que tu as calculé, donc?
- 277 - Élève 22 : Les pailles.
- 278 - Chercheuse : Lesquelles?
- 279 - Élève 22 : Celles-là [*en pointant les carrés à partir du deuxième dans la suite de 12*], mais pas les premières.
- 280 - Chercheuse : Pas lesquelles, alors. Montre-les moi.
- 281 - Élève 22 : Mais du coup pas celle-là [*en rayant le premier carré*], mais celles-là oui [*en pointant les carrés suivants*].
- 282 - Chercheuse : Oui.
- 283 - Élève 22 : Mais du coup, ça fera 11 carrés.
- 284 - Chercheuse : Mh mh.
- 285 - Élève 22 : [*L'élève compte les 11 carrés*] Oui, il y aura 11 carrés. Mais du coup,

ça fera 11 fois 3.

286 - **Chercheuse** : 11 fois 3, très bien. Donc avec 11 fois 3...

287 - **Élève 22** : Ça fait 33 pailles [*en écrivant « 11x3=33 »*].

288 - **Chercheuse** : Très bien. Et donc tu as pris toutes les pailles, sauf lesquelles?
Montre vraiment dans le détail, lesquelles.

289 - **Élève 22** : Lui [*en pointant la deuxième pailles en vertical*].

290 - **Chercheuse** : ok. Juste cette paille en verticale?

291 - **Élève 22** : Mh mh. Et du coup mais toutes les autres aussi, puisque vu qu'elles se suivent.

292 - **Chercheuse** : D'accord, je n'ai pas... Là avec 11 fois 3 [*en indiquant son calcul « 11x3=33 »*], tu as compté quelles pailles? Je ne suis pas sûre de comprendre.

293 - **Élève 22** : Celle-là.

294 - **Chercheuse** : Oui...

295 - **Élève 22** : Celle-là, celle-là, celle-là, celle-là, celle-là [*en pointant toutes les pailles à partir du deuxième carré*]. Partout pareil en fait.

296 - **Chercheuse** : D'accord.

297 - **Élève 22** : Comme ça partout.

298 - **Chercheuse** : Ok, donc ok. Donc t'as pris pour chaque carré 3 pailles, n'est-ce pas?

299 - **Élève 22** : Mh mh. Mais à part le premier du coup.

300 - **Chercheuse** : À part le premier.

301 - **Élève 22** : Mh mh.

302 - **Chercheuse** : Mais, donc, est-ce que tu as vraiment pris cette paille-là en vertical [*en pointant la deuxième paille en vertical*]?

303 - **Élève 22** : Bah oui.

304 - **Chercheuse** : Pourquoi?

305 - **Élève 22** : Vu que sinon sans cette paille, ils manquait un. Une paille, du coup.

306 - **Chercheuse** : Mais donc... On prend peut-être pour essayer l'étape 3 [*en l'pointant*]. D'accord?

307 - **Élève 22** : Mh mh.

308 - **Chercheuse** : Quel serait le calcul à faire, là?

309 - **Élève 22** : Mais le calcul pour quoi? Pour ça ou ça [*en indiquant la troisième et la douzième étape*]?

310 - **Chercheuse** : C'est un peu la même chose, n'est-ce pas? Genre, c'est différent, nous sommes d'accord, parce qu'ici [*en indiquant les 12 carrés*] il y a le 11, 12, il y a le 3 [*en pointant les 3 carrés*]. Mais le raisonnement est similaire.

311 - **Élève 22** : Mais du coup, là [*en indiquant les 3 carrés*], 3 fois.

312 - Chercheuse : 3 fois quoi?

313 - Élève 22 : Je dirais 4, mais je ne sais pas. Je ne suis pas sûre.

314 - Chercheuse : Mh mh. Pourquoi 4?

315 - Élève 22 : Parce que de toute façon, dans un carré, il y en aura 4. 4 pailles. Même s'ils sont reliés. Du coup, peut-être 3 fois 4. Mais je ne suis pas sûre, mais ce n'est pas logique.

316 - Chercheuse : C'est compliqué, einh!

317 - Élève 22 : Oui!

318 - Chercheuse : C'est très compliqué. Mais on essaye de trouver quelque chose de logique. Nous avons commencé à 14 heures 50? Ça signifie qu'on a jusqu'à 15 heure 40, c'est ça? C'est 50 minutes, n'est-ce pas?

319 - Élève 22 : Oui.

320 - Chercheuse : Nous avons encore quelques minutes. Regardons ensemble. Ici [en pointant les 12 carrés] tu l'as très bien dit avant. Tous les carrés ont 3 pailles, sauf le premier qui a les 4 pailles [elle souligne les 4 pailles du premier carré des 12].

321 - Élève 22 : Mh mh.

322 - Chercheuse : N'est-ce pas?

323 - Élève 22 : Oui.

324 - Chercheuse : Le premier à 4 pailles et les autres 1, 2, 3 [en soulignant les 3 pailles du deuxième carré].

325 - Élève 22 : Oui.

326 - Chercheuse : 1, 2, 3. Donc, quand tu fais 11 fois 3, tu comptes les pailles qu'il y a ici 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 [en pointant les 11 carrés, un à la fois]. Tu comptes en gros ces pailles-là [en soulignant les 3 pailles du deuxième au quatrième carré], etc. Toutes, sauf les 4 premiers.

327 - Élève 22 : Ah.

328 - Chercheuse : Tu es d'accord?

329 - Élève 22 : Oui.

330 - Chercheuse : Donc, 33, comme tu l'as dit avant, c'est tout sauf ça [en pointant les 4 premières pailles].

331 - Élève 22 : Mh mh.

332 - Chercheuse : Tu es d'accord?

333 - Élève 22 : Oui.

334 - Chercheuse : Et donc, pour trouver toutes les pailles pour les 12 carrés, qu'est-ce qu'il faut encore faire?

335 - Élève 22 : Il faut en rajouter encore 3 [en mimant de rajouter un trezième carré].

- 336 - **Chercheuse** : Non, ici tu as déjà les 12 carrés [en pointant le dessin], c'est bon. Avec 11 fois 3, tu as tout [en couvrant les 11 carrés à droite], sauf ça [en pointant le premier carré], tu n'as pas compté ça.
- 337 - **Élève 22** : Mais du coup je ferais 33 [en pointant « $11 \times 3 = 33$ »], parce que là c'est pour tout cela [en pointant les 11 carrés à la droite], plus 4.
- 338 - **Chercheuse** : Pourquoi plus 4?
- 339 - **Élève 22** : Pour rajouter le carrés qui manque.
- 340 - **Chercheuse** : Parfait.
- 341 - **Élève 22** : Fin, le 12.
- 342 - **Chercheuse** : Ok.
- 343 - **Élève 22** : Du coup là je mets plus 4 [elle ajoute « +4 » à son écriture « $11 \times 3 = 33 + 4 = 37$ »]. Ça fera 37.
- 344 - **Chercheuse** : D'accord. Ok.
- 345 - **Élève 22** : Du coup là il y a tous les carrés.
- 346 - **Chercheuse** : Très bien.
- 347 - **Élève 22** : Mais du coup, c'est pareil qu'ici [en inidiquant le tableau].
- 348 - **Chercheuse** : Très bien. T'as trouvé une autre manière pour... Avant tu l'avais, disons, dessiné, compté, maintenant tu as trouvé une formule arithmétique pour y arriver [en pointant « $11 \times 3 = 33 + 4 = 37$ »]. Et là [en pointant le tableau], tu avais faits plus 3, plus 3, plus 3. Donc, ça signifie que ce que tu as fait, c'est correct. Parce que tu l'as contrôlé de plusieurs manières. Est-ce que peut-être ça, ce raisonnement qu'on a là peut t'aider pour cette question [en inidiquant la question des 100 carrés]?
- 349 - **Élève 22** : Je ferais 100 fois 3, du coup [en écrivant « 100×3 »]. Oui. Du coup, ça fera 300 pailles et je rajoute les plus 4 du premier [en écrivant « $100 \times 3 = 300 + 4 = 304$ »].
- 350 - **Chercheuse** : Mh mh. Est-ce que tu m'expliques le raisonnement que tu as fait, là?
- 351 - **Élève 22** : Du coup là, vue que j'ai fait 12 fois... 11 fois 3 pour cela [en iniduant les 12 carrés]. Du coup, j'ai fait par ici, du coup, j'ai mis 300.
- 352 - **Chercheuse** : Mh mh. Et pourquoi t'as fait 100 fois 3?
- 353 - **Élève 22** : Parce qu'il faut toujours en rajouter 3. Du coup c'est pour ça que j'ai mis fois 3. Et ensuite j'ai mis plus de 4 pour le premier carré. Mais du coup je dois en enlevez 1 ici, non [en pointant le « 100 » de « 100×3 »]? Et du coup, ça fera 99.
- 354 - **Chercheuse** : Très bien.
- 355 - **Élève 22** : Fois 3.

- 356 - **Chercheuse** : Parfait.
- 357 - **Élève 22** : Je ne sais pas combien ça fait.
- 358 - **Chercheuse** : Ça fait 297. Je l'ai fait à la calculette.
- 359 - **Élève 22** : Merci. Et là j'ajoute les plus 4. Du coup là ça fera les 100 carrés, ça fait 301 [*en écrivant « $99 \times 3 = 297 + 4 = 301$ »*].
- 360 - **Chercheuse** : Parfait. Donc, combien de pailles faut-il pour former 100 carrés?
- 361 - **Élève 22** : 301.
- 362 - **Chercheuse** : Parfait. Ok. Je te pose une question un peu dans la suite. On se demande si en connaissant le nombre de carrés, on peut toujours trouver le nombre de pailles.
- 363 - **Élève 22** : Oui.
- 364 - **Chercheuse** : Comment?
- 365 - **Élève 22** : Parce que si c'est toujours... Vu qu'ils sont toujours à la suite, ça sera toujours fois 3.
- 366 - **Chercheuse** : Mh mh.
- 367 - **Élève 22** : Du coup, c'est avec le nombre de carrés qu'on va pouvoir faire le calcul.
- 368 - **Chercheuse** : Mh mh. Et comment tu le ferais avec le nombre de carrés?
- 369 - **Élève 22** : Je mets le nombre de carrés, fois 3 et après je mettrais plus 4 pour celui du début... Fin, le nombre des carrés, mais moins 1 du coup et ensuite, je mets plus 4 pour le premier carré.
- 370 - **Chercheuse** : Parfait. Très bien. Merci beaucoup, tu es allée très vite pour ça. Alors une dernière question. Toujours la même chose. Tu as acheté un paquet de 200 pailles. Combien de carrés peux-tu construire? Toujours avec des carrés faits comme ça, collés.
- 371 - **Élève 22** : Attendez. Alors... Je pense que je peux faire 200 jeux divisé par 3.
- 372 - **Chercheuse** : Mh mh.
- 373 - **Élève 22** : Et après, ça fera le nombre de carrés.
- 374 - **Chercheuse** : Très bien. Tu veux que je le fasse à la calculette?
- 375 - **Élève 22** : Oui, s'il vous plaît.
- 376 - **Chercheuse** : Alors, 200 divisé par 3, tu as dit.
- 377 - **Élève 22** : Oui.
- 378 - **Chercheuse** : Alors, ça, c'est le résultat [*en lui montrant sur la calculette « $200 : 3 = 66,66666666666666$ »*].
- 379 - **Élève 22** : Ok [*elle écrit le calcul*]. Mais du coup c'est pas possible.
- 380 - **Chercheuse** : Pourquoi c'est pas possible?

- 381 - Élève 22 : Parce que c'est pas un nombre entier. Du coup, ça doit être un autre calcul. Peut-être... Mais du coup... Peut-être déjà je fais 200 moins 4 pour le premier carré, du coup ça fera 196 [elle écrit « $200-4=196$ »].
- 382 - Chercheuse : Parfait.
- 383 - Élève 22 : Et après genre je fais ça divisé par 3.
- 384 - Chercheuse : D'accord. Je te le fais?
- 385 - Élève 22 : Oui.
- 386 - Chercheuse : Alors, 196 divisé [la chercheuse lui montre « $196:3=65,33333333333333$ »].
- 387 - Élève 22 : Bon [elle complète son écriture pour obtenir « $200-4=196:3=65,3$ »]...
- 388 - Chercheuse : Ok, ça signifie quoi, ça?
- 389 - Élève 22 : Je ne sais pas.
- 390 - Chercheuse : Oui! Tu y étais! Tu as fini, donc, à mon avis, t'as vraiment compris. Alors, regardons un moment ensemble, après je te laisse aller?
- 391 - Élève 22 : Oui.
- 392 - Chercheuse : Ici très bien [en pointant « $200-4$ »], tu as enlevé les 4 premières. Après, tu as les pailles qui restent et tu as très bien dit pour chaque carrés j'en utilise 3. Donc je fais divisé par 3 et j'obtiens un peu plus que 65. Ça signifie que tu peux sûrement construire 65 carrés, plus le premier que tu avais déjà enlevé.
- 393 - Élève 22 : Ah du coup je dois mettre encore plus 4.
- 394 - Chercheuse : C'est bien, c'est bien... Parce que maintenant, on fait le processus inverse de ce qu'on faisait avant. Bonjour, on a presque terminé. Vous avez cour tout de suite?
- 395 - Externe : On a cours ici, oui.
- 396 - Chercheuse : Oui, très bien.

D.3 Nombres pairs/impairs

Nombres pairs/impairs : Élève 1

Durée de l'entretien : 9 min 6 s

- 1 - Chercheuse : On continue ce qu'on a fait hier, d'accord? Un peu avec les mêmes modalités. Donc je te donne une feuille avec une tâche et tu peux écrire si tu veux. On peut discuter. Tu me dis ce qui te passe par la tête, d'accord. Alors, on veut comprendre si en additionnant 2 nombres impairs, on obtient toujours un nombre pair.

2 - Élève 1 : Impair c'est...

3 - Chercheuse : Qu'est-ce que c'est un nombre... Tu te rappelles pair-impair qu'est-ce que c'est?

4 - Élève 1 : Pair, c'est par exemple 4 et impair c'est 5.

5 - Chercheuse : Est-ce que t'as d'autres exemples de nombres pairs?

6 - Élève 1 : Nombre pair il y a 6. Et après comme nombre impair il y a 7 et 9. Non il n'y a pas 9.

7 - Chercheuse : 9 est pair ou impair?

8 - Élève 1 : 9 c'est impair.

9 - Chercheuse : D'accord. Comment tu les reconnais les nombres pairs ou les nombres impairs?

10 - Élève 1 : Les nombres pairs ou impairs?

11 - Chercheuse : Oui.

12 - Élève 1 : Impair c'est un nombre qu'on ne peut pas avoir par 2. Par exemple pair, ça va être 2, 4, 6, 8, 10 et impair ça va être 1, 3, 5, 7, 9.

13 - Chercheuse : D'accord. Oui. Très bien. Donc, ça c'est les nombres pairs et impairs. Parfait. Mais après, tu comprends que qu'est ce qui est demandé? Donc, qu'est ce qui est demandé? T'arriverais à me l'expliquer?

14 - Élève 1 : Si on additionne 2 nombres impairs est-ce qu'on obtient un nombre pair? Donc par exemple 5 plus 5 et on l'additionne, du coup... Euh je ne sais pas. Je ne crois pas non.

15 - Chercheuse : Tu peux essayer.

16 - Élève 1 : [Il écrit en colonne « $5 + 5 = 10$ »] 5 plus 5 c'est égal à 10. Du coup, non il ne me semble pas.

17 - Chercheuse : Pourquoi?

18 - Élève 1 : Parce que c'est 2 nombre impairs [il efface son calcul].

19 - Chercheuse : Tu peux laisser, c'était correct.

20 - Élève 1 : Parce que c'est des nombres impairs et à mon avis on ne peut pas (inaudible) En fait, si, on peut parce que 5 plus 5 ça fait 10 et 10 est un nombre pair.

21 - Chercheuse : D'accord. Est-ce que à ton avis, c'est toujours vrai ou juste dans le cas que tu as trouvé?

22 - Élève 1 : Dans le cas que j'ai trouvé. Mais je ne sais pas après si par rapport à d'autres nombres ça peut marcher.

23 - Chercheuse : On peut essayer.

24 - Élève 1 : Ouais. Par exemple. 7 plus 7 ça fait 14 [il pose le calcul en colonne]. Du coup, c'est un nombre pair. Il me semble du coup que oui [il pose en colonne

« $8 + 8 = 16$ »].

25 - **Chercheuse** : Attention, parce que là, on demande en additionnant deux nombres impairs.

26 - **Élève 1** : [Il efface et il pose « $9 + 9 = 18$ »] Donc, il semble que oui, ça donne toujours un nombre... Si on a 2 nombres impairs ça donne toujours un nombre pair.

27 - **Chercheuse** : On peut aussi essayer avec des nombres différents. Là tu as toujours pris 5 et 5. 7 et 7. 9 et 9.

28 - **Élève 1** : [Il écrit « $5 + 7 = 12$ »] Pour l'instant ça donne bien. Donc il me semble du coup aussi.

29 - **Chercheuse** : Et tu as une idée du pourquoi?

30 - **Élève 1** : Non.

31 - **Chercheuse** : T'arriverais à l'expliquer sans donner des nombres?

32 - **Élève 1** : Je ne sais pas. Je n'arriverais pas vraiment à l'expliquer.

33 - **Chercheuse** : Je peux te poser encore quelques questions?

34 - **Élève 1** : Oui.

35 - **Chercheuse** : Alors je te pose la même question, mais avec 2 nombres pairs. Je t'écris la consigne ici d'accord? [Elle écrit la nouvelle consigne]. C'est un peu la même consigne, mais la question est : en additionnant 2 nombres pairs cette fois, le résultat sera pair ou impair?

36 - **Élève 1** : Sera pair il me semble. [Il calcule « $6 + 8 = 14$ »] Du coup ça va donner 2 nombres pairs.

37 - **Chercheuse** : Et à ton avis, c'est toujours comme ça?

38 - **Élève 1** : Oui, à mon avis oui.

39 - **Chercheuse** : Oui, même si on continue après, après, après?

40 - **Élève 1** : Ouais sûrement.

41 - **Chercheuse** : Sûrement? Pourquoi?

42 - **Élève 1** : Je ne sais pas, je n'ai pas testé. Je peux tester si vous voulez. [Il calcule « $8 + 6 + 4 = 18$ »] À mon avis oui.

43 - **Chercheuse** : Okay, et maintenant même question, mais avec un nombre pair et un nombre impair. Pair plus impair.

44 - **Élève 1** : Du coup, ça va donner des nombres impairs [il écrit « $6 + 7 = 13$ », « $5 + 2 = 7$ », « $8 + 9 = 17$ »]. Alors ça donnera toujours des nombres impairs.

45 - **Chercheuse** : Donc c'est quelque chose qui est vrai toujours ou juste dans les calculs que tu as essayés?

46 - **Élève 1** : Toujours.

47 - **Chercheuse** : D'accord. Autre petite question. Maintenant on a fait pair plus

impair. Et si on faisait impair plus pair ?

48 - **Élève 1** : [Il calcule « $7 + 5 = 12$ » et il l'efface et « $9 + 6 = 15$ »] Du coup, ça donnera toujours, du coup des nombres impairs.

49 - **Chercheuse** : Okay. On fait un petit résumé de ce qu'on a fait. Oui, on a dit pair plus impair.

50 - **Élève 1** : C'est du coup des chiffres impairs.

51 - **Chercheuse** : Impair plus pair.

52 - **Élève 1** : Des chiffres impairs.

53 - **Chercheuse** : Est-ce qu'il y a une différence entre ces 2 cas-là ?

54 - **Élève 1** : Non. À part le fait qu'on commence par là un chiffre pair et du coup l'autre exercice par un chiffre impair. En soit, du coup, c'est la même chose juste on change du coup le placement.

55 - **Chercheuse** : Est-ce que ça change quelque chose si on change le placement ?

56 - **Élève 1** : Non. J'ai pas l'impression. C'est toujours le même calcul.

57 - **Chercheuse** : D'accord, après on a dit : pair plus pair.

58 - **Élève 1** : Ça du coup, ça donne un chiffre pair.

59 - **Chercheuse** : D'accord, et après, on avait encore...

60 - **Élève 1** : Du coup 2 chiffres impairs, du coup ça donne aussi un chiffre pair.

Nombres pairs/impairs : Élève 3

Durée de l'entretien : 8 min 23 s

1 - **Chercheuse** : Alors, on fait comme hier. Je te donne des tâches de maths, si t'as des questions, tu me les poses tranquillement, s'il y a des choses que tu comprends pas. Je te demande de dire ce que tu penses. Si tu veux, tu peux écrire, là il y a un stylo. Ok ? Alors... Voici la première tâche. Alors, on veut comprendre si, en additionnant 2 nombres impairs, on obtient un nombre pair. Tu te rappelles ce qu'est un nombre pair, un nombre impair ?

2 - **Élève 3** : Oui.

3 - **Chercheuse** : Donc, là, la question est claire ?

4 - **Élève 3** : En additionnant 2 nombres impar, est-ce qu'on obtiene toujours un nombre pair ? Non.

5 - **Chercheuse** : Pourquoi ?

6 - **Élève 3** : Que ça ne va pas... Parce que ils ont dit, en additionnant 2 nombres impairs, est ce qu'on obtient toujours un nombre impair ?

7 - **Chercheuse** : Un nombre pair.

8 - **Élève 3** : Oui, un nombre pair, pardon. Moi je dis non parce qu'ils ont dit qu'ils obtiennent, du coup s'ils disent ils obtiennent... Ça peut... Ils ont dit que... Je

crois que ça peut remplacer dans un nombre pair. Moi je dit que ce n'est pas possible, donc c'est pour ça que je dit non.

9 - Chercheuse : Mais qu'est ce que tu as fait dans ta tête pour dire cela?

10 - Élève 3 : Ehm... Difficile à dire. J'ai réfléchi, j'ai lu... Après je voyais « obtient », « toujours ». Du coup ça ne va pas additionner par un nombre pair parce qu'on ne peut pas remplacer.

11 - Chercheuse : Qu'est ce qu'on ne peut pas remplacer?

12 - Élève 3 : Dans les nombres impairs... Oui, voilà quoi.

13 - Chercheuse : Est-ce que tu connais le mot « obtient »? C'est clair ce que ça signifie ou pas?

14 - Élève 3 : Obtient ça veut dire ajouter.

15 - Chercheuse : Ok, non. Alors, je reformule la question, d'accord? Ici la question : si on fait l'addition de 2 nombres impairs, est-ce que le résultat est pair?

16 - Élève 3 : Non.

17 - Chercheuse : Pourquoi?

18 - Élève 3 : Parce que. Ce peut pas être... Comment dire? Peut remplacé quoi en fait, je ne sais pas.

19 - Chercheuse : Tu peux essayer avec des exemples si tu veux, avec des vrais nombres, pour commencer.

20 - Élève 3 : Je ne sans pas quoi dire.

21 - Chercheuse : Est-ce que tu saurais me faire un exemple de nombre impair?

22 - Élève 3 : Oui, il y a 1, 3, 6 et 9.

23 - Chercheuse : 1, 3...?

24 - Élève 3 : 1, 3, 6, 9.

25 - Chercheuse : 6 est un nombre pair ou impair?

26 - Élève 3 : Ah non, pardon. 1, 3, 4, 5, 7 et 9.

27 - Chercheuse : D'accord. Est-ce qu'ils se terminent là où après il en y a d'autres?

28 - Élève 3 : Il en y a des autres?

29 - Chercheuse : Par exemple?

30 - Élève 3 : Nombres pairs il y a 0, 2, 4, 6, 8. Puis 10.

31 - Chercheuse : Ouais. Et après le 10, il y a encore des nombres pairs ou pas?

32 - Élève 3 : Euh?

33 - Chercheuse : Après le 10?

34 - Élève 3 : Le 11.

35 - Chercheuse : C'est pair ou impair?

36 - Élève 3 : Impair.

37 - Chercheuse : Est-ce que c'est le dernier ou il y a d'autres, après?

- 38 - Élève 3 : Non, ce n'est pas le dernier.
- 39 - Chercheuse : D'accord. Et donc, est-ce que tu sais faire l'addition entre 2 nombres impairs? Tu peux les choisir, si tu veux.
- 40 - Élève 3 : Non. Non, je ne crois pas.
- 41 - Chercheuse : Pourquoi?
- 42 - Élève 3 : Attendez, vous avez dit quoi?
- 43 - Chercheuse : Si on peut faire l'addition entre 2 nombres impairs?
- 44 - Élève 3 : C'est à dire, comment?
- 45 - Chercheuse : Par exemple, 3 plus 5.
- 46 - Élève 3 : 8.
- 47 - Chercheuse : Ouais. Tu veux l'écrire? 3 plus 5 égal 8.
- 48 - Élève 3 : [Il écrit « $3 + 5 = 8$ »].
- 49 - Chercheuse : Voilà, c'est correct. Regarde, là [en pointant le « 3 »], c'est un nombre impair, plus un nombre pair [en pointant le « 5 »], donc ici, t'as fait l'addition entre 2 nombres impairs. Tu es d'accord?
- 50 - Élève 3 : Mh mh.
- 51 - Chercheuse : Le résultat est-ce que c'est pair ou impair?
- 52 - Élève 3 : Ça dépend les choses.
- 53 - Chercheuse : Oui? Dans cet exemple-là?
- 54 - Élève 3 : Puisque le 3 est impair et le 5 c'est pair. Donc du coup il y a un petit changement entre le 2, du coup moi je dirais, ça dépend.
- 55 - Chercheuse : De quoi, ça dépend?
- 56 - Élève 3 : Ça dépend de quoi les calculs en fait, après le 3 et le 5. Oui.
- 57 - Chercheuse : Et si on prenait d'autres nombre impair?
- 58 - Élève 3 : Si on prend 3 plus 5 plus 7, par exemple?
- 59 - Chercheuse : Non, alors, on a toujours 2 nombre impair. D'accord? Mais tu peux en prendre des autres. Donc ici, tu as pris 3 et 5. Mais t'es pas obligé. Tu peux en choisir des autres. Par exemple, 1 plus 7.
- 60 - Élève 3 : 8.
- 61 - Chercheuse : D'accord. Est-ce que le résultat est pair ou impair?
- 62 - Élève 3 : Pair.
- 63 - Chercheuse : Ok. Et après? Fais d'autres exemples.
- 64 - Élève 3 : Si je fait 5 plus 7 égal 12. C'est pair. Et si c'est impair... Si je dois faire impaur je prend un exemple 3 plus... j'ai fait 3 plus 4 égal 7, donc c'est impair.
- 65 - Chercheuse : Mh mh. Mais rappelle-toi qu'on doit toujours faire l'addition entre 2 nombres impairs. T'as pris 3 et 4. Est-ce que les 2 sont impairs.
- 66 - Élève 3 : Non.

67 - Chercheuse : Pourquoi?

68 - Élève 3 : Parce que le 3 il est impair et que le 4 il est pair. C'est bon?

Nombres pairs/impairs : Élève 4

Durée de l'entretien : 7 min 40 s

1 - Chercheuse : Qu'est-ce que vous étiez en train de faire?

2 - Élève 4 : Un test.

3 - Chercheuse : Oui, ça s'est bien passé?

4 - Élève 4 : Oui.

5 - Chercheuse : C'était quoi, français?

6 - Élève 4 : Du vocabulaire.

7 - Chercheuse : Quoi?

8 - Élève 4 : Vocabulaire.

9 - Chercheuse : Ah, chouette! Trop bien. On fait comme hier? On continue? T'as un stylo ou t'as besoin d'un stylo?

10 - Élève 4 : Non, j'ai pas de stylo.

11 - Chercheuse : C'est tout bon, tiens si t'en as besoin. À nouveau, c'est comme hier. Si tu as envie, tu peux écrire, si c'est pratique pour toi, d'accord? Alors, on veut comprendre si, en additionnant 2 nombres impairs, on obtient un nombre pair.

12 - Élève 4 : Non.

13 - Chercheuse : Ok, alors... Pourquoi?

14 - Élève 4 : Comme si je fais 7 plus 7, ça fait 14.

15 - Chercheuse : Oui...

16 - Élève 4 : Si je fais...

17 - Chercheuse : Donc 14 est pair ou impair?

18 - Élève 4 : Impair.

19 - Chercheuse : 14?

20 - Élève 4 : Non, qu'est-ce que je dis ! 14 cest pair.

21 - Chercheuse : Oui.

22 - Élève 4 : Ah ba, si.

23 - Chercheuse : Oui, voilà.

24 - Élève 4 : Oui.

25 - Chercheuse : Donc, dans ce cas-là, c'est vrai.

26 - Élève 4 : Oui.

27 - Chercheuse : Et après? Est-ce que c'est vrai toujours?

28 - Élève 4 : Attendez. Ah ba si. On obtient toujours des nombres pairs.

- 29 - **Chercheuse** : Qu'est-ce que tu es en train de... Comment tu es en train de faire cela? Qu'est-ce que tu es en train de penser?
- 30 - **Élève 4** : Tout ça fait pair. 3 plus 3, ça fait 6, c'est pair. Attendez. 5 plus 5 ça fait 10, c'est pair.
- 31 - **Chercheuse** : Mh mh.
- 32 - **Élève 4** : Oui.
- 33 - **Chercheuse** : Tu peux aussi prendre des nombres différents, si tu veux.
- 34 - **Élève 4** : Oui, non ça fait toujours.
- 35 - **Chercheuse** : Par exemple, tu vois, là tu es en train de faire 5 plus 5, tu peux même faire 5 plus 3 si tu veux. C'est 2 nombres impairs aussi, non?
- 36 - **Élève 4** : Mh mh.
- 37 - **Chercheuse** : Est-ce que c'est vrai aussi dans ce cas-là?
- 38 - **Élève 4** : Ça fait un nombre pair.
- 39 - **Chercheuse** : Ça fait un nombre pair?
- 40 - **Élève 4** : Comme ça fait 8.
- 41 - **Chercheuse** : Oui. Est-ce que c'est toujours vrai?
- 42 - **Élève 4** : Oui, je crois.
- 43 - **Chercheuse** : Oui? Comment tu pourrais l'expliquer? Comment tu pourrais faire voir que c'est toujours vrai?
- 44 - **Élève 4** : 7 plus 7, ça fait 14. 5 Plus 5, ça fait 10. 5 plus 7, ça fait 12. Ça fait toujours...
- 45 - **Chercheuse** : D'accord. Est-ce que tu arriverais à l'expliquer sans faire des calculs?
- 46 - **Élève 4** : Je ne sais pas, je n'ai pas inventé les maths.
- 47 - **Chercheuse** : Quoi?
- 48 - **Élève 4** : Je n'ai pas inventé les maths.
- 49 - **Chercheuse** : Mais est-ce que tu arriverais à dire quelque chose?
- 50 - **Élève 4** : Comment, ça?
- 51 - **Chercheuse** : Est-ce que tu as une idée du pourquoi cela... Cette phrase est vraie? Est-ce que tu arriverais à l'expliquer, mais sans faire de calculs?
- 52 - **Élève 4** : Parce que c'est comme ça. Je ne sais pas. Ça a été fait comme ça.
- 53 - **Chercheuse** : Donc oui, et alors je peux te poser une autre question?
- 54 - **Élève 4** : Mh mh.
- 55 - **Chercheuse** : Est-ce que ton avis, en additionnant 2 nombres pairs, on obtient toujours un nombre pair?
- 56 - **Élève 4** : Vous avez dit?
- 57 - **Chercheuse** : Si je fais l'addition entre 2 nombres pairs, le résultat est toujours

pair.

58 - Élève 4 : Oui, toujours pair.

59 - Chercheuse : Pourquoi?

60 - Élève 4 : Parce que c'est le résultat?

61 - Chercheuse : Oui.

62 - Élève 4 : Bon, si vous me demandez pourquoi sinon... Comme j'ai pas inventé les maths, je ne sais pas. Je ne sais pas pourquoi 6 plus 6, ça fait 12 ou des trucs comme ça.

63 - Chercheuse : Oui, bon, 6 plus 6... Je prends 3 plus 3, comme ça j'ai les doigts. 3 et 3, c'est juste des mots qu'on donne à la chose. Ça c'est le mot pour 3. Ça c'est le mot pour 3 et 6 est le mot pour les 2 ensembles.

64 - Élève 4 : En fait, on me voit dans la caméra?

65 - Chercheuse : Quoi?

66 - Élève 4 : On me voit dans la caméra?

67 - Chercheuse : Non, on voit jusqu'à... Jusqu'ici. Je ne prend pas les visages. C'est pas... Je le fais exprès en fait de prendre cette caméra-là parce que comme ça on ne vois pas. Tu veux voir? Viens, viens voir.

68 - Élève 4 : Non non, c'est bon.

69 - Chercheuse : Oui? D'accord. Comme ça, c'est plus pratique. De toute façon, je suis intéressé si tu écrit quelque chose, ce qu'on dit. Donc... [*La chercheuse lui montre la ligne des nombres*] Est-ce que je peux te montrer une ligne des nombres? Tu l'as jamais vue?

70 - Élève 4 : Mh?

71 - Chercheuse : Jamais utilisée?

72 - Élève 4 : Je l'ai déjà utilisé une fois.

73 - Chercheuse : Oui?

74 - Élève 4 : Enfin, je ne sais pas. J'ai déjà vu, peut-être.

75 - Chercheuse : Tu te rappelles pourquoi tu l'as utilisée, pour faire quoi?

76 - Élève 4 : Non.

77 - Chercheuse : Là, tu arriverais a m'indiquer les nombres pairs?

78 - Élève 4 : Pairs?

79 - Chercheuse : Oui.

80 - Élève 4 : [*En pointant les nombres suivants*] 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30.

81 - Chercheuse : Oui, super. Et les nombres impairs?

82 - Élève 4 : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29.

83 - Chercheuse : Est-ce que tu as jamais utilisé cette ligne pour faire des additions

de nombres?

84 - Élève 4 : Non, je n'ai pas besoin.

85 - Chercheuse : Tu est trop fort en calcul, c'est ça?

86 - Élève 4 : Non, non, en tout je ne pense pas. Non je n'ai pas utilisé.

87 - Chercheuse : D'accord. Peut-être qu'il y a quelq'un qui utilise mais pas toi. Tu es trop fort en calcul, Élève 4. Bon, ok, donc, si on résume ce qu'on a fait, on a découvert... Tu as découvert en fait que si on fait l'addition 2 nombres impairs, qu'est-ce qu'on obtient?

88 - Élève 4 : Un nombre [*inaudible*].

89 - Chercheuse : [*Inaudible*].

90 - Élève 4 : Pair.

91 - Chercheuse : Pair, exactement. L'addition entre 2 nombres pairs?

92 - Élève 4 : Impair.

93 - Chercheuse : T'es sûr?

94 - Élève 4 : Attendez, vous avez dit quoi?

95 - Chercheuse : 2 nombres pairs.

96 - Élève 4 : Ah non, pair.

97 - Chercheuse : Oui. Et un pair et un impair?

98 - Élève 4 : 2 nombres pairs, ça fait un nombre pair.

99 - Chercheuse : Oui et un pair.. Donc 2, 4, 6, etc. et un nombre impair?

100 - Élève 4 : Je n'ai pas compris la question, là.

101 - Chercheuse : Oui, je m'excuse c'est difficile. Alors là, c'était 2 nombres impairs [*en pointant la consigne du début*].

102 - Élève 4 : Mh mh.

103 - Chercheuse : Puis on a parlé de 2 nombres pairs. Et maintenant, je te demande qu'est-ce qui se passe si je fais un impair plus un nombre pair [*en écrivant « I + P »*].

104 - Élève 4 : Ça fait un nombre impair.

105 - Chercheuse : Oui? Pourquoi tu dis ça?

106 - Élève 4 : Vous avez dit... Non, non, non... Ba si. Comme un nombre impair, on va dire 3. Fin, c'est un chiffre. Après, plus 2 c'est pair. Ça fait 5. Ça fait un nombre impair.

107 - Chercheuse : Donc le résultat, ça c'est...?

108 - Élève 4 : 5.

109 - Chercheuse : Oui, parfait. Et si on fait le contraire, pair plus impair?

110 - Élève 4 : Mh?

111 - Chercheuse : Si je fais à l'envers, comme ça, pair plus impair? [*En écrivant « P +*

I »].

112 - Élève 4 : Ça fait un nombre impair.

113 - Chercheuse : Quelle est la différence, à ton avis, par rapport à... [en pointant « $I + P$ »].

114 - Élève 4 : Il y en a pas.

115 - Chercheuse : Il y a pas? Pourquoi?

116 - Élève 4 : Je ne sais pas.

117 - Chercheuse : Tu sais pas?

118 - Élève 4 : [Inaudible].

119 - Chercheuse : Et à ton avis pourquoi il n'y a pas de différence?

120 - Élève 4 : Je ne sais pas.

121 - Chercheuse : Oui. Mais c'est vrai, c'est bien, il n'y a pas de différence. Ok, super.

Nombres pairs/impairs : Élève 5

Durée de l'entretien : 15 min 27 s

1 - Chercheuse : On fait comme hier, d'accord? Je te donne une tâche, tu peux parler, tu peux écrire si tu veux. T'es pas obligé. Je te demande de dire tout ce que tu penses. Tu as des questions?

2 - Élève 5 : Non.

3 - Chercheuse : On veut comprendre si en additionnant 2 nombres impairs, on obtient toujours un nombre pair. Est-ce que tu te rappelles ce que c'est un nombre pair, un nombre impair?

4 - Élève 5 : Pair, c'est genre 2, 4 et tout ça, et impair c'est 1, 3 et 5.

5 - Chercheuse : D'accord. Il y a aussi d'autres nombres pairs et impairs ou il y a juste les nombres que tu m'as dit?

6 - Élève 5 : Il y en a d'autres aussi.

7 - Chercheuse : Oui? Par exemple?

8 - Élève 5 : Pair genre 2, 4, 6, 8, 10, 12 ça. Et impair 1, 3, 5, 7, 9, 11.

9 - Chercheuse : Oui et après c'est fini ou il en y a encore d'autres?

10 - Élève 5 : Il y en a encore d'autres.

11 - Chercheuse : Très bien. Donc, est-ce que la consigne est claire?

12 - Élève 5 : Oui. [Inaudible]. Non.

13 - Chercheuse : C'est pas clair la consigne?

14 - Élève 5 : Si c'est clair, mais ce que je veux dire, c'est que ils demandent une addition 2 nombres impairs, est-ce que ce qu'on a toujours un nombre pair? Non.

15 - Chercheuse : Pourquoi?

- 16 - Élève 5 : Parce que les impairs, ça ne se termine jamais par un 0. Alors que les pairs se terminent parfois par des zéros.
- 17 - Chercheuse : D'accord.
- 18 - Élève 5 : Donc, en additionnant 2 nombres impairs on obtient pas un nombre pair.
- 19 - Chercheuse : Tu arriverais à me faire un exemple?
- 20 - Élève 5 : Non, attendez. Je crois que j'ai mal compris. Je crois que j'ai mal compris la consigne.
- 21 - Chercheuse : Là, tu crois de l'avoir comprise?
- 22 - Élève 5 : Non, j'ai mal compris.
- 23 - Chercheuse : Tu arriverais à m'expliquer ce que ça demande, l'exercice?
- 24 - Élève 5 : Je ne sais pas.
- 25 - Chercheuse : Ce que tu as compris que ça demande.
- 26 - Élève 5 : Il demande s'il y avait 2 nombres impairs est-ce qu'on peut avoir un nombre pair? Oui... peut-être...
- 27 - Chercheuse : Si tu veux, tu peux essayer avec des exemples. Qu'est-ce que tu es en train de penser?
- 28 - Élève 5 : Je ne comprends pas la consigne, je suis perdu.
- 29 - Chercheuse : On essaie de comprendre ensemble?
- 30 - Élève 5 : Oui.
- 31 - Chercheuse : Alors on se demande si en additionnant, c'est-à-dire si on fait l'addition, donc l'opération plus.
- 32 - Élève 5 : Oui.
- 33 - Chercheuse : Donc, si on fait l'addition de 2 nombres impairs, cela signifie on prend 2 nombres impairs de quelconques... N'importe quels 2 nombres impairs et on fait l'addition. Est-ce que le résultat est un nombre pair?
- 34 - Élève 5 : Ah! Oui.
- 35 - Chercheuse : C'est clair maintenant?
- 36 - Élève 5 : Oui, c'est clair. Oui, en fait, 2 nombres impairs que ça fasse un nombre pair. Genre 1 plus 1, ça fait 2, qui est un chiffre pair. Et si on prend par exemple 9 plus 9 ça va faire 18, ça va faire un nombre pair.
- 37 - Chercheuse : D'accord, donc, à ton avis, c'est vrai. Cette question là, la réponse est vraie.
- 38 - Élève 5 : Oui, c'est vraie.
- 39 - Chercheuse : D'accord, donc, comment peut-on être sûr que cela est vrai pour tous les nombres impairs?
- 40 - Élève 5 : Il faudrait calculer.

- 41 - **Chercheuse** : Tous?
- 42 - **Élève 5** : Oui, je ne sais pas.
- 43 - **Chercheuse** : On pourrait commencer, mais il y a un peu beaucoup trop de nombres, n'est-ce pas? Mais, est ce qu'à ton avis, c'est vrai, toujours ou pas toujours?
- 44 - **Élève 5** : Pas toujours. Non, pas toujours. Si on prend vers les 100, ça risque de changer.
- 45 - **Chercheuse** : Oui, tu penses?
- 46 - **Élève 5** : Oui.
- 47 - **Chercheuse** : Qu'est-ce que ça change vers les 100?
- 48 - **Élève 5** : C'est que genre, si je additionne genre 60, ça fera 120.
- 49 - **Chercheuse** : Oui, mais là, qu'est-ce tu as pris? Tu as pris 60 comme nombre, qui est un nombre pair ou impair?
- 50 - **Élève 5** : Ah oui. Si on dit juste des nombres où il y a juste un seul chiffre en avant et il y a un autre où il y a rien, genre 90 plus... 93 plus 93 ça va faire 186.
- 51 - **Chercheuse** : Ah, tu es fort en calcul, einh! Oui, et donc dans ce cas là, c'est vrai ou pas?
- 52 - **Élève 5** : Alors, pour quelques uns, c'est vrai, mais après d'autres il faudrait voir.
- 53 - **Chercheuse** : D'accord, et pour cet exemple-là, que tu viens de faire, c'est vrai, ou pas?
- 54 - **Élève 5** : Je dirais que c'est vrai.
- 55 - **Chercheuse** : Pourquoi?
- 56 - **Élève 5** : Parce qu'il y en a qu'on peut additionner pour que ça donne un nombre pair, et puis voilà.
- 57 - **Chercheuse** : Oui, tu te rappelles qu'il faut toujours prendre au début 2 nombres impairs? Comme tu l'as fait, 93 et 93, c'est correct. Et est-ce qu'à ton avis, on a une manière... On pourrait penser à une manière pour être sûr que c'est vrai ou faux dans tous les nombres? Tous les nombres impairs.
- 58 - **Élève 5** : Mmh...
- 59 - **Chercheuse** : Ou comment l'expliquer sans faire des calculs? On arriverait à l'expliquer sans faire des calculs?
- 60 - **Élève 5** : Non, je ne pense pas.
- 61 - **Chercheuse** : D'accord. Tu n'as rien écrit, tu as fait tous les calculs dans ta tête.
- 62 - **Élève 5** : Mh mh.
- 63 - **Chercheuse** : C'est super. Tu n'as pas besoin d'écrire les calculs.
- 64 - **Élève 5** : Non, pas trop, je n'ai pas besoin.
- 65 - **Chercheuse** : Non? C'est quand même remarquable. Moi, j'écris toujours les

calculs, je sais pas trop les faire. Je peux te poser encore une question?

66 - Élève 5 : Oui!

67 - Chercheuse : Oui? Alors, qu'est-ce qui se passe à ton avis, si on fait une addition entre un nombre pair et un nombre pair?

68 - Élève 5 : Ce sera toujours le même, ce sera toujours un nombre pair.

69 - Chercheuse : Le résultat?

70 - Élève 5 : Mh mh.

71 - Chercheuse : Et pourquoi?

72 - Élève 5 : Parce que les chiffres ne changent pas, genre... On va prendre 12 plus 12, ça va faire 24, et 24 c'est un nombre pair.

73 - Chercheuse : D'accord.

74 - Élève 5 : Et si on calcule 34 plus 34, ça va faire 68, un nombre pair aussi.

75 - Chercheuse : Oui. Et dans d'autres cas, car ça marche aussi? Ça marche toujours?

76 - Élève 5 : Après, si on prend 95 plus 95, ça va faire 190. Donc ça risque pas de changer.

77 - Chercheuse : Donc, qu'est-ce que ça signifie que ça risque pas de changer?

78 - Élève 5 : Là, j'ai pris quand même un nombre impair, et à la fin ça fait quand même un nombre pair.

79 - Chercheuse : Oui, d'accord.

80 - Élève 5 : Donc non, ça change pas. Donc, ce sont des nombres pairs.

81 - Chercheuse : D'accord. Donc, tu dis, l'addition entre 2 nombres impairs est pair.

82 - Élève 5 : Mh mh.

83 - Chercheuse : Ok, ok. Oui, d'accord. Est-ce qu'on arriverait à l'expliquer sans faire des calculs?

84 - Élève 5 : Oui, je pense.

85 - Chercheuse : Oui? Tu as quelques traces, quelques pistes?

86 - Élève 5 : Non.

87 - Chercheuse : Non? Tu peux dessiner, si tu veux.

88 - Élève 5 : Je ne sais pas comment expliquer.

89 - Chercheuse : Tu as quelques idées en tête et tu sais pas comment les expliquer ou...?

90 - Élève 5 : J'ai dit ça comme ça, en fait.

91 - Chercheuse : Oui, mais c'était très bien. Est-ce que en regardant les nombres pairs et impairs sur cette ligne [*la chercheuse lui montre la ligne des nombres*], ça te donne des idées? On essaie.

- 92 - Élève 5 : [L'élève regarde en silence la ligne des nombres].
- 93 - Chercheuse : Tu peux me dire oui ou non. Quels sont les nombres pairs sur cette ligne-là?
- 94 - Élève 5 : 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30 [en les pointant].
- 95 - Chercheuse : Oui. Super ! Et les impairs?
- 96 - Élève 5 : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17.
- 97 - Chercheuse : Attention, quel nombre est celui-là?
- 98 - Élève 5 : 17.
- 99 - Chercheuse : 17, très bien.
- 100 - Élève 5 : 19, 21, 23, 25, 27, 29.
- 101 - Chercheuse : Oui, super, d'accord. Et sur cette ligne, tu sais faire, par exemple 3 plus 1?
- 102 - Élève 5 : 4.
- 103 - Chercheuse : Ouais, comment tu as fait?
- 104 - Élève 5 : J'ai juste mis 1 [en pointant « 1 » sur la ligne] dans 3 [en pointant « 3 » sur la ligne].
- 105 - Chercheuse : D'accord, donc 3 [en pointant « 3 » sur la ligne] plus 1, click [en pointant « 4 » sur la ligne].
- 106 - Élève 5 : Mh mh.
- 107 - Chercheuse : D'accord. Est-ce que cette ligne te donne une idée de pourquoi si on fait l'addition entre 2 impairs, on obtient un pair?
- 108 - Élève 5 : [L'élève reste en silence].
- 109 - Chercheuse : Vous l'utilisez en classe parfois cette ligne ou pas trop?
- 110 - Élève 5 : Mh mh.
- 111 - Chercheuse : Non, tu n'as jamais vu? D'accord, ok. En tout cas, aujourd'hui, tu m'as vraiment bien expliqué que si on fait l'addition entre 2 impairs, on obtient un nombre, comment, Danny?
- 112 - Élève 5 : Pair.
- 113 - Chercheuse : Oui, très bien. On s'arrête là?
- 114 - Élève 5 : Si vous voulez.
- 115 - Chercheuse : Oui, pour moi, ça va. Toi, t'es pas trop fatigué, ça va?
- 116 - Élève 5 : Non, ça va.

Nombres pairs/impairs : Élève 6

Durée de l'entretien : 12 min 32 s

- 1 - Chercheuse : Qu'est ce que je te propose aujourd'hui? Alors, je te donne une tâche. Si ce n'est pas clair, tu me demandes. Tu peux écrire si tu veux. Là, tu

as un stylo ou un crayon, si tu préfères avec la gomme. Tu me dis tout ce que tu penses. On essaie de faire quelque chose. Alors on veut comprendre, si en additionnant 2 nombres impairs, on obtient toujours un nombre pair.

2 - Élève 6 : Par exemple... Ben, 1 ça fait 2, 3 ça fait 6... 10... Ben, oui !

3 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu as fait ?

4 - Élève 6 : Chaque fois, enfin 1 plus 1 ça fait 2. Après 3 plus 3, ça fait 6. Après forcément 5 plus 5 10. Après de suite quoi, ça ne va pas changer.

5 - Chercheuse : Et tu peux même additionner 2 nombres impairs qui ne sont pas les mêmes.

6 - Élève 6 : Par exemple 33 et 45 ?

7 - Chercheuse : Par exemple. Oui.

8 - Élève 6 : Euh ça fait 78. Ah ben ouais. C'est vrai.

9 - Chercheuse : Et donc, ta réponse est oui. Est-ce que à ton avis, c'est vrai toujours ou juste pour les exemples que tu as fait ?

10 - Élève 6 : Non, je pense toujours.

11 - Chercheuse : Et comment tu sais ?

12 - Élève 6 : En général, ça change pas. Parce que tu peux faire 1 million plus 1 million ça fait 2 millions. Tu veux 1 moins 1 à chaque fois...

13 - Chercheuse : Est-ce que 1 million est pair ?

14 - Élève 6 : Quoi ?

15 - Chercheuse : 1 million est pair ou impair ?

16 - Élève 6 : Un million c'est pair.

17 - Chercheuse : Donc regarde-là, on veut toujours prendre des nombres impairs.

18 - Élève 6 : Oui je sais. Par exemple 99 plus 99 ça fera forcément 198. Donc ils seront forcément toujours impairs.

19 - Chercheuse : Oui. Et comment l'expliquer à quelqu'un sans faire des calculs ?

20 - Élève 6 : Ah. Par exemple, tu fais plus... Euh non. Oui, tu fais plus chaque fois un chiffre impair, ça fera forcément un chiffre pair. Parce que...

21 - Chercheuse : Tu veux.. Je ne sais pas... je te donne quelques pistes, mais ce n'est pas obligé de me suivre. Est-ce que dessiner pour t'aider de quelques manières ?

22 - Élève 6 : Euh je ne sais pas.

23 - Chercheuse : Okay, alors je te propose cette autre question. Là, on a regardé ce qui se passe si on fait l'addition entre 2 nombres impairs et si on fait ça [en écrivant « $P + P$ »], c'est à dire...

24 - Élève 6 : Pair plus pair ?

25 - Chercheuse : Exactement.

- 26 - Élève 6 : Ben ça fera forcément, 2 plus 2 ça fait 4. Ah ben 4 plus 4 ça fait 8. Et 8 plus 8, 16... Ah ben, forcément ça fera aussi un chiffre pair.
- 27 - Chercheuse : Et comment tu sais ?
- 28 - Élève 6 : Parce que 2 plus 2 ça fait pair, 2 c'est aussi un chiffre pair. Alors ça ne peut pas faire un chiffre impair. Par exemple un chiffre impair, ça serait 1 plus 2, là ça serait 3.
- 29 - Chercheuse : Ouais, d'accord. Et okay. Maintenant, quand tu fais l'addition entre 2 pairs, tu peux même prendre 2 nombres pairs différents. Donc là à nouveau, tu avais fait 2 plus 2, 4 plus 4.
- 30 - Élève 6 : Oui, par exemple 44 plus 46 ça fait 90.
- 31 - Chercheuse : Ça fait ?
- 32 - Élève 6 : 90.
- 33 - Chercheuse : Oui. Comment peut-on être sûr que cela est vrai pour tous les nombres pair ?
- 34 - Élève 6 : On pourrait faire un calcul en colonne qu'avec des chiffres pairs, par exemple.
- 35 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu ferais ?
- 36 - Élève 6 : Je ferais 400... 4044 plus et là euh non, là tu mets [*il écrit en colonne* « $4444 + 1111 + 2222 = 7777$ »]... [*inaudible*] Là ça fait 7...
- 37 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu as fait, là ? Je n'ai pas compris.
- 38 - Élève 6 : [*Inaudible*].
- 39 - Chercheuse : Mais qu'est ce que tu as fait ? Tu m'expliques ?
- 40 - Élève 6 : Là j'ai mis... Ah non, mais je me suis trompé. J'ai mis un chiffre impair ! J'ai fait une boulette, là [*il efface et écrit* « $4444 + 2222 + 2222 = 8888$ »].
- 41 - Chercheuse : C'est pas grave ! La question est toujours : qu'est-ce qui se passe si je fais l'addition entre 2 nombres pairs ?
- 42 - Élève 6 : [*inaudible*] 8, 8 et 8. Que des chiffres pairs.
- 43 - Chercheuse : Mais combien de nombres tu as additionnés, là ?
- 44 - Élève 6 : Ah, 3. Vous en avez demandés 2.
- 45 - Chercheuse : Okay. Et alors, autre question. Qu'est-ce qui se passe si on fait l'addition entre un nombre impair [*en écrivant* « $I + P$ »]...
- 46 - Élève 6 : Et un chiffre pair ?
- 47 - Chercheuse : Oui, et un nombre pair, exactement.
- 48 - Élève 6 : [*Il calcule en colonne* « $1111 + 6648 = 7759$ »].
- 49 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu a fait, là ?
- 50 - Élève 6 : J'ai fait 1 plus 8, ça fait 9. 1 plus 5, ça 5. 1 plus 6, ça fait 7. 1 plus 6, ça fait 7.

- 51 - **Chercheuse** : Donc, si on fait l'addition entre un nombre impair et un nombre pair, à ton avis?
- 52 - **Élève 6** : Ben ça fait... Le chiffre pair se transforme en chiffre impair. Par exemple là [*en pointant les unités « 1 + 8 = 9 »*], c'était 8 mais là avec plus 1, il [*inaudible*] 9, qui est un chiffre impair.
- 53 - **Chercheuse** : Est-ce que tu sais me dire qu'est ce que c'est un nombre impair?
- 54 - **Élève 6** : Ben par exemple, tu ne pourras jamais... Tu ne pourras... J'arrive pas trop.
- 55 - **Chercheuse** : Sinon, un nombre pair. Tu sais ce que c'est un nombre pair?
- 56 - **Élève 6** : Tu peux le multiplier par 2. 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18...
- 57 - **Chercheuse** : D'accord. Et donc, qu'est-ce que c'est un nombre impair?
- 58 - **Élève 6** : Ben, c'est tous les par 3. 1... 1, 3, 6, 9, 12.
- 59 - **Chercheuse** : Tu saurais m'écrire, peut-être dans un côté de la feuille les nombres pairs et de l'autre les nombres impairs? Quelques-uns.
- 60 - **Élève 6** : Ok. [*Il écrit « 1, 3, 6, 9 »*] Non, mais pas 6! [*Il efface tout et reprend « 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 » et « 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 »*]. Voilà.
- 61 - **Chercheuse** : D'accord. Ok. Donc très bien. Avant, tu m'as dit que les nombres...
- 62 - **Élève 6** : Oui, non, mais non je me suis trompé avant.
- 63 - **Chercheuse** : C'est-à-dire?
- 64 - **Élève 6** : C'est parce que, en fait, là si tu fais 1, 3 [*en pointant la liste d'impairs*]... En fait là c'est 1, 3 mais en fait c'est à chaque fois plus 2. Là ça fait 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13. Là ça fait 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 et ainsi de suite.
- 65 - **Chercheuse** : Ok, donc. Maintenant que tu les a écrit, est-ce que tu sais m'expliquer comme si je ne savais pas ce qu'est un nombre pair?
- 66 - **Élève 6** : Euh... 3... Là je n'arrive pas trop... Oui, je crois que j'ai! Par exemple un chiffre pair tu peux le diviser par 2. Ça représente 1, là, 2, là 3, là 4, là 5, là 6 et là 7 [*en pointant sa liste de nombres pairs*]. Par exemple, là ça fera 0,50. Là 1,5. Là 2,5. Là 3,5. Là 4,5. Là 5,5. Et 6,5 [*en pointant sa liste de nombres impairs*].
- 67 - **Chercheuse** : Okay, donc c'est ça un nombre pair et un nombre impair.
- 68 - **Élève 6** : Oui voilà.
- 69 - **Chercheuse** : Voilà. Okay. Donc maintenant je te repose la question que je devais poser avant, d'accord? On va voir si tu as encore la même réponse. Qu'est-ce qui se passe si je fais l'addition entre un nombre pair... Un nombre impair et un nombre pair [*en écrivant « I + P »*]?
- 70 - **Élève 6** : Alors ça fera un chiffre en virgule.
- 71 - **Chercheuse** : Ah okay, C'est-à-dire? Tu arrives à m'expliquer un peu mieux?
- 72 - **Élève 6** : Ah non, attendez, je vais le faire.

73 - Chercheuse : Oui, vas-y.

74 - Élève 6 : [inaudible] [Il calcule en colonne « $111 + 222 = 333$ »] Ça fait 333. Mais je ne sais pas trop... Moi j'ai toujours la même réponse puisque 1. Ben, non. 2 c'est le chiffres pair, je fais plus 1 ça fait un chiffre impair [en pointant son calcul « $111 + 222 = 333$ »].

75 - Chercheuse : D'accord, mais c'est correct. Je voulais juste voir, si tu arrivais à me dire quelque chose d'autre.

76 - Élève 6 : Ok.

77 - Chercheuse : Je te pose encore une question. Si je fais pair plus impair [en lui donnant « $P + I$ »]? Est-ce que ça change quelque chose? Avant, on avait fait impair plus pair.

78 - Élève 6 : [Il pose en colonne « $446 + 331 = 777$ »] Euh ça ne change rien.

79 - Chercheuse : Comment tu sais?

80 - Élève 6 : Parce qu'en fait toujours le chiffre pair, va forcément se transformer en chiffre impair.

Nombres pairs/impairs : Élève 7

Durée de l'entretien : 10 min 40 s

1 - Chercheuse : On fait comme la dernière fois, c'est-à-dire que je te donne une tâche, si tu veux écrire tu peux, je te donne un stylo. Et je te demande de me dire tout ce qui te passe par la tête, D'acc?

2 - Élève 7 : D'accord.

3 - Chercheuse : Alors là, regarde, on veut comprendre si, en additionnant 2 nombres impairs, on obtient toujours un nombre pair.

4 - Élève 7 : 2 nombres impairs... Pairs?

5 - Chercheuse : Tu te rappelles qu'est ce que c'est un nombre pair ou un nombre impair?

6 - Élève 7 : Oui, oui, bien sûr. Genre 4.

7 - Chercheuse : Qu'est-ce que c'est 4?

8 - Élève 7 : 4 un nombre impair.

9 - Chercheuse : Un nombre?

10 - Élève 7 : Euh nombre pair, pair, pair !

11 - Chercheuse : Oui très bien.

12 - Élève 7 : Eh?

13 - Chercheuse : Oui.

14 - Élève 7 : Et un nombre impair, genre 3. Oui 3, 3, 3. La dernière fois que on faisait les carrés, tout ça avec les pailles. Et, genre 3, 3, 3 [il dessine les 3 carrés] etc...

- 15 - Chercheuse : Oui. Et là, la question du texte, de cet exercice-là. Oui, si on prend 2 nombres impairs et on fait l'addition, le résultat...?
- 16 - Élève 7 : Est-ce que'on obtient toujours un nombre pair? Emh... [*Inaudible*].
- 17 - Chercheuse : Qu'est ce que t'as fait là? Tu as fait des calculs?
- 18 - Élève 7 : Oui.
- 19 - Chercheuse : Lesquels?
- 20 - Élève 7 : 3 plus 4.
- 21 - Chercheuse : Oui, mais 3 et 4 sont des nombres impairs?
- 22 - Élève 7 : Non il y a le 3 qui est un nombre impair et l'autre euh... Pair. Mais oui, j'ai compris, 3 plus 3 par exemple, 6. C'est un nombre pair.
- 23 - Chercheuse : Est-ce que c'est toujours comme ça? C'est-à-dire, à chaque fois que je prends 2 nombres impairs, je fais l'addition, est-ce que j'obtiens toujours un nombre pair?
- 24 - Élève 7 : Oui, si tu fais 3 plus 3, 6 ouais ça fait pair.
- 25 - Chercheuse : C'est toujours comme ça ou juste dans cet exemple-là?
- 26 - Élève 7 : Comme ça...
- 27 - Chercheuse : Mais comment tu dis ça? Comment tu sais ça?
- 28 - Élève 7 : J'ai pris 3 plus 3. Qui sont des nombres impairs. Et ça fait 6 et 6 [*inaudible*] ça fait des carrés.
- 29 - Chercheuse : Oui, mais par exemple, si je prends d'autres nombreux impairs. Par exemple, 7 ou par exemple 9 ou 13.
- 30 - Élève 7 : Aussi 2... 2.. Non... Aussi, je crois.
- 31 - Chercheuse : C'est-à-dire, qu'est-ce que tu as fait?
- 32 - Élève 7 : Genre 11 plus 11, 22 et avec ces 22 tu peux faire des carrés et des trucs comme ça. Et genre... voilà.
- 33 - Chercheuse : Oui, mais pourquoi tu parles de carrés là?
- 34 - Élève 7 : Parce que j'ai l'idée des carrés et c'est comme ça dans ma tête.
- 35 - Chercheuse : D'accord, mais tu penses à des carrés, là?
- 36 - Élève 7 : Ouais je pense à des carrés.
- 37 - Chercheuse : Pourquoi?
- 38 - Élève 7 : Parce que je pense à des carrés comme ça.
- 39 - Chercheuse : D'accord. Okay. Et donc, par exemple, tu peux même faire l'addition entre 2 nombres qui ne sont pas le même.
- 40 - Élève 7 : Oui.
- 41 - Chercheuse : Entre 2 nombres impairs qui ne sont pas le même.
- 42 - Élève 7 : Genre.... 3 plus 7. 10. Genre. des truc comme ça. 10... et.... 1 plus 3, 4. Non, 5, 7, 9, 13... Des trucs comme ça.

- 43 - **Chercheuse** : Et donc, si tu fais l'addition entre ces nombres impairs-là, le résultat est pair ou impair ?
- 44 - **Élève 7** : Ça dépend des calculs qu'on fait, ça dépend les chiffres qu'on prend. Les chiffres impairs. Genre si tu fais... 11 plus 11, ça fait 22, c'est un nombre pair. Ou par exemple, si tu prends... 3 plus... Ah non, ça dépend. Si tu prends un nombre pair et un nombre impair, genre 2 plus 3, bah ça va former un nombre impair, mais ça dépend des calculs que tu fais.
- 45 - **Chercheuse** : Et si on prend 2 nombres impairs ?
- 46 - **Élève 7** : 5 plus 3. Des trucs comme ça, ça va nous faire des nombres impairs. 8.
- 47 - **Chercheuse** : Oui. À ton avis, c'est toujours vrai que si je prends 2 nombres impairs, on obtient toujours un nombre pair ?
- 48 - **Élève 7** : Mouais, ça dépend des calculs, mais... Ça dépend des calculs.
- 49 - **Chercheuse** : Pourquoi tu dis ça ?
- 50 - **Élève 7** : Parce que, imaginons, si je prends 3 plus 3 ça va me former un nombre impair et tout ça, si je prends par exemple 1 plus 5, des trucs comme ça.
- 51 - **Chercheuse** : Tu peux écrire, les calculs si tu préfères.
- 52 - **Élève 7** : Non, c'est bon.
- 53 - **Chercheuse** : C'est bon, d'accord. Okay. Et là, on a pris 2 impairs et on a regardé l'addition et donc maintenant, si je prends 2 nombres pairs et je fais l'addition. Tu vois j'écris P plus P pour pair plus pair.
- 54 - **Élève 7** : Genre 2 plus 2 ça va aussi nous former un nombre pair. Et si tu prends toujours les nombres pairs, ça va toujours nous former un nombre pair.
- 55 - **Chercheuse** : Comment tu sais ça ?
- 56 - **Élève 7** : Parce que si tu prends les mêmes nombres, si tu prends les mêmes chiffres pairs 2 plus 2, 4, 8, des trucs comme ça, alors si tu faisais, alors si tu prends, si toi tu prends que des nombres impairs, mais les mêmes chiffres impairs ça va te former des chiffres impairs. Genre 0, 1, 3, 5, 7, etc. Des trucs comme ça. Mais sauf le 1 plus 1.
- 57 - **Chercheuse** : Pourquoi ?
- 58 - **Élève 7** : Parce que 1 plus 1 ça va te former un nombre pair.
- 59 - **Chercheuse** : Oui. Et pour les autres ?
- 60 - **Élève 7** : Aussi, je crois. Pas sûr.
- 61 - **Chercheuse** : On va essayer de voir si on arrive à toujours trouver quelque chose qui est toujours vrai ?
- 62 - **Élève 7** : Comment ?
- 63 - **Chercheuse** : On veut essayer de voir si on arrive à trouver quelque chose qui

est toujours vraie, c'es-à-dire si le résultat est toujours pair ou toujours impairs.

64 - Élève 7 : Ça dépend, mais...

65 - Chercheuse : À ton avis, si je prends 2 nombres qui sont...

66 - Élève 7 : Impair et pair ?

67 - Chercheuse : Exactement...

68 - Élève 7 : Genre... Euh. Je crois que ça va nous former un nombre... Ah non, les nombres impairs ? Ça va nous donner plus de nombres impairs que de pairs. Parce que si tu fais 2 plus 3, 5. 2 plus 1, 3. Ouais. ça va quand même former des nombres impairs.

69 - Chercheuse : Et c'est toujours comme ça ?

70 - Élève 7 : Je pense... Genre... 3 plus 4... Ouais toujours ça.

71 - Chercheuse : Comment tu sais ?

72 - Élève 7 : Parce que j'ai calculé. J'ai fait que des calculs genre 1 plus 2, 3 et des trucs comme ça. [Inaudible]. 2 plus 3, 5.

73 - Chercheuse : Et maintenant, si je prends un nombre impair plus pair. Est-ce que ça change quelque chose ?

74 - Élève 7 : Non, c'est la même chose.

75 - Chercheuse : Pourquoi ?

76 - Élève 7 : C'est la même chose ici [en pointant « $I + P$ » et « $P + I$ »].

77 - Chercheuse : Et pourquoi c'est la même chose ?

78 - Élève 7 : Parce que c'est le même truc. C'est pair et impairs. C'est la même chose.

Nombres pairs/impairs : Élève 8

Durée de l'entretien : 18 min 05 s

1 - Chercheuse : Je te demande de dire tout ce qui te passe par la tête.

2 - Élève 8 : D'accord.

3 - Chercheuse : Si tu veux là il y a un stylo, si tu veux écrire. Et si jamais je vais prendre d'autres feuilles, si tu veux écrire un peu plus. Je te les laisse ici d'acc ? On veut comprendre, si, en additionnant 2 nombres impairs, on obtient toujours un nombre pair. Est-ce que c'est clair la question ?

4 - Élève 8 : Oui. Les nombres impairs c'est les nombres qu'on ne peut diviser par 2 ?

5 - Chercheuse : Mh mh.

6 - Élève 8 : Ok.

7 - Chercheuse : Et un nombre pair ?

- 8 - Élève 8 : C'est un nombre qu'on peut diviser par 2. Oui je pense.
- 9 - Chercheuse : Comment tu as fait pour..
- 10 - Élève 8 : Bah je fais 7, un nombre pair...
- 11 - Chercheuse : Quoi? Je n'ai pas compris...
- 12 - Élève 8 : 7 un nombre pair, 7 plus 7 c'est 14, lui il peut se diviser, mais 7 ça ne se divise pas.
- 13 - Chercheuse : D'accord.
- 14 - Élève 8 : Enfin après, à part si il y a des virgules et tout ça. Mais sinon non.
- 15 - Chercheuse : Est-ce que c'est toujours comme ça ou seulement pour 7 plus 7?
- 16 - Élève 8 : Il doit y en avoir d'autres, je pense. 35 plus 35 ça fait 70. Et du coup 70 on ne peut pas... Non du coup on peut. 35, je ne pense qu'on ne peut pas.
- 17 - Chercheuse : Tu peux aussi faire des additions entre 2 nombres qui ne sont pas les mêmes. Là, tu as fait 7 plus 7, après 35 plus 35. Ça... Tu peux faire l'addition entre 2 nombres impairs quelconques.
- 18 - Élève 8 : Ok. Je dois faire?
- 19 - Chercheuse : La question est juste est-ce que tu penses que c'est toujours comme ça?
- 20 - Élève 8 : Comment ça, c'est que les 2 mêmes nombres?
- 21 - Chercheuse : Non, est-ce que tu penses que quand on fait l'addition entre 2 nombres impairs, on obtient toujours un nombre pair?
- 22 - Élève 8 : Je pense. C'est pas le cas?
- 23 - Chercheuse : Je ne dis pas que ce n'est pas le cas.
- 24 - Élève 8 : Mais du coup là je dois trouver, je dois essayer de trouver un truc qui...
- 25 - Chercheuse : Je voudrais juste que tu sois sûr de ta réponse. Et que tu m'expliques un peu pourquoi tu as dit oui.
- 26 - Élève 8 : Oui, je pense. Je fais des trucs comme 3 plus 7. Des trucs comme ça. Du coup 3 plus 7, 10 ça peut être divisé par 2.
- 27 - Chercheuse : Donc ça va être toujours comme ça?
- 28 - Élève 8 : Je pense oui.
- 29 - Chercheuse : Et comment peut-on être sûr que cela marche, que cela est vrai pour tous les nombres impairs?
- 30 - Élève 8 : En faisant toutes les possibilités?
- 31 - Chercheuse : Et comment pourrait-on l'expliquer sans faire des calculs?
- 32 - Élève 8 : Expliquer quoi? Les nombres impairs?
- 33 - Chercheuse : Le fait que si on fait l'addition de 2 nombres impairs on obtient un nombre pair.
- 34 - Élève 8 : Ce que... Il y a 2 nombres, non, 2 chiffres, à la base, bon, ça peut obtenir

un autre chiffre mais la plupart ça va être des nombres. Il y a 2 chiffres qui sont impair et qui vont s'additionner du coup ça va donner quelque chose de pair.

35 - Chercheuse : Qu'est-ce qui se passe si on fait l'addition entre 2 pairs?

36 - Élève 8 : 2 pairs? Ça va donner les 2, je pense.

37 - Chercheuse : Tu peux écrire si tu veux.

38 - Élève 8 : Oui.

39 - Chercheuse : Si ça t'aide. Maintenant on essaie de comprendre ce qui se passe avec pair plus pair.

40 - Élève 8 : Ok. 6 plus 4 [*il écrit « 6 + 4 » et « 10 + 16 = 13 »*]... Bon ça fait 26, mais...

41 - Chercheuse : Tu peux l'écrire.

42 - Élève 8 : Si on divise 26...

43 - Chercheuse : Ah d'accord je vois ce que tu as fait.

44 - Élève 8 : Bah ouais ça peut obtenir les 2.

45 - Chercheuse : C'est à dire on peut obtenir les 2?

46 - Élève 8 : C'est que 16 ça peut se diviser par 8. 10 ça peut se diviser par 5. Le total c'est 26 et 26 si on divise ça fait 13. Et 13 ce n'est pas un nombre pair. C'est un nombre impair.

47 - Chercheuse : Oui, mais peut-être réécrit bien cette égalité [*en pointant « 10 + 16 = 26 »*].

48 - Élève 8 : Oui, ok [*Il corrige en « 10 + 16 = 26 »*] Je fais comment? Le signe de pair? Je mets le 13 en dessous?

49 - Chercheuse : Si tu veux faire, euhhh oui, si tu veux, c'est très bien. Et donc là, c'est vrai ou pas? On veut voir si on fait l'addition entre 2 pairs, si le résultat est pair ou impair. Là 10 plus 16, qu'est-ce que tu as fait? Expliques-moi.

50 - Élève 8 : Bah, 10 plus 16 ça fait 26. Je les ai additionnées. Et le 26 j'ai fait la moitié de 6 c'est 3. La moitié de 2 c'est 1. Ça fait 13. Et 13 je ne pense pas que ça soit pair.

51 - Chercheuse : Oui, c'est vrai, t'as raison, mais ce que qu'on doit regarder, c'est le 26, tu fais une étape de plus.

52 - Élève 8 : On peut faire 13 plus 13 est égal 26 et on peut le diviser.

53 - Chercheuse : Alors là, tu vois. Si on fait l'addition entre pair plus pair. Ce qu'il faut regarder c'est le résultat [*en pointant « 26 »*]. 26, c'était bien. C'est pair. Et puis, si tu veux, tu peux les diviser par 2, comme tu as fait. Juste pour vérifier effectivement que le résultat est entier. Et donc 26 est pair.

54 - Élève 8 : Oui. Du coup le 13 il nous sert à rien.

55 - Chercheuse : Non.

56 - Élève 8 : Sans les 2 mêmes chiffres ou je peux mettre aussi les même chiffres?

- 57 - Chercheuse : Tu peux aussi mettre les 2 mêmes chiffres.
- 58 - Élève 8 : Euh. C'est... Je pense que ça fera toujours un truc pair.
- 59 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu as pensé?
- 60 - Élève 8 : J'ai fait plusieurs calculs et j'ai tout le temps, j'ai tout le temps fait divisé par 2.
- 61 - Chercheuse : Quel type de calculs tu as fait?
- 62 - Élève 8 : 6 plus 6, des trucs comme ça.
- 63 - Chercheuse : D'accord. Comment peut-on être sûr que cela est vrai pour tous les nombres pairs?
- 64 - Élève 8 : Parce que je fais avec tous les chiffres de 0 à 9.
- 65 - Chercheuse : Oui. Et après, pour les nombres plus grands que 9?
- 66 - Élève 8 : On peut faire avec des nombres... Comment ça avec des nombres plus grands que 9?
- 67 - Chercheuse : Je suis juste ton raisonnement, tu m'as dit que tu peux faire avec les chiffres de 0 à 9 et je me demandais après?
- 68 - Élève 8 : Ce serait un peu plus compliqué c'est tout.
- 69 - Chercheuse : Et si on fait impair plus pair?
- 70 - Élève 8 : Bah ça fait 10. C'est un 9 non [*en pointant mon « P »*]?
- 71 - Chercheuse : Ah pardon, j'ai mal écrit. Je voulais écrire impair l de impair et P de pair.
- 72 - Élève 8 : Ah, ok!
- 73 - Chercheuse : C'est vrai que ç'aurait pu être...
- 74 - Élève 8 : Mais j'ai une question. De tous les chiffres il y a des impairs et il y a des pairs. Mais par exemple, 16 c'est un chiffre pair parce que derrière, il y a 6?
- 75 - Chercheuse : À ton avis, qu'est-ce que c'est un nombre pair? Tu me l'avais dit au début.
- 76 - Élève 8 : C'est un nombre qu'on peut diviser par 2.
- 77 - Chercheuse : Voilà.
- 78 - Élève 8 : Du coup, 19, c'est pas pair et le 9 non plus. Du coup je me dis, s'il y a un 9 derrière est-ce que ça sera pair, ou pas?
- 79 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu en penses?
- 80 - Élève 8 : Que ça peut... Ça dépend du chiffre derrière. En tout cas pour les dizaines, après pour les centaines et tout je ne sais pas.
- 81 - Chercheuse : À ton avis après les centaine, comment ça, comment ça marche?
- 82 - Élève 8 : Je ne sais pas ça doit être avec euh...Je pense que ça dépend des nombres de derrière. Ou des nombres totaux qu'il y a dans le nombre. Ou sinon impair quoi.

- 83 - **Chercheuse** : C'est une observation intéressante.
- 84 - **Élève 8** : [Il écrit « $9 + 4 = 13$ »] Divisé par 2, ça doit être égal à quoi?
- 85 - **Chercheuse** : On se demande juste si la... Si, quand je fais l'addition, le résultat est pair ou impair et s'il est toujours pair ou toujours impair.
- 86 - **Élève 8** : Okay, ça peut pas être les 2?
- 87 - **Chercheuse** : Je ne sais pas. Peut-être. On va regarder.
- 88 - **Élève 8** : [Il écrit « $19 + 10 = 29$ », « $18 + 10 = 28$ »].
- 89 - **Chercheuse** : Tu as envie de m'expliquer un moment ce que tu fais?
- 90 - **Élève 8** : Je fais des calculs plus ou moins au hasard. Pour voir si c'est... enfin avec des nombres impairs là [en pointant le « 19 »] et des nombres pairs et pairs [en pointant « 18 » et « 10 »]. Comme ça je me demande... Pour les comparer.
- 91 - **Chercheuse** : D'accord. Et à quelle question tu es en train de répondre, là?
- 92 - **Élève 8** : Celle si les chiffres impairs plus pairs font des chiffres impairs ou pairs.
- 93 - **Chercheuse** : Juste une petite question, alors, pourquoi tu as écrit 18 plus 10?
- 94 - **Élève 8** : Pour pouvoir les comparer.
- 95 - **Chercheuse** : C'est-à-dire?
- 96 - **Élève 8** : Voir qu'est ce qui change entre les 2. Je pense que ce sera des chiffres tout le temps impairs.
- 97 - **Chercheuse** : Comment tu as fait pour dire cela?
- 98 - **Élève 8** : À chaque fois ce sont des chiffre avec des 7, des 9, des 5. Des trucs qu'on ne peut pas diviser. Je pense que ouais.
- 99 - **Chercheuse** : Ça va être toujours comme ça?
- 100 - **Élève 8** : Je pense.
- 101 - **Chercheuse** : Et comment l'expliquer à quelqu'un sans faire de calculs?
- 102 - **Élève 8** : En disant, sans faire de calculs? Je lui pose une question?
- 103 - **Chercheuse** : Oui.
- 104 - **Élève 8** : Ou je lui dis que je lui dis quelque chose?
- 105 - **Chercheuse** : Tu peux lui dire quelque chose.
- 106 - **Élève 8** : Je dirais que les chiffres impairs plus des chiffres pairs ça fera toujours des chiffres impairs.
- 107 - **Chercheuse** : Ouais, c'est vrai, c'est bien. Est-ce que tu aurais une raison à lui donner pour lui expliquer le pourquoi?
- 108 - **Élève 8** : Parce que on ne peut pas... Le nombre de derrière [en pointant les 3 résultats « 13 », « 29 » et « 28 »], après je suis pas sûr pour tout, mais le nombre de derrière implique que si c'est un 5 comme on ne peut pas le diviser, ça sera pas forcément impair. Et si c'est des chiffres qu'on pourrait diviser derrière

bah ça ferait un pair.

109 - Chercheuse : Alors je te pose encore une question. Qu'est-ce qui se passe, si on fait pair plus impair. Est-ce qu'il y a quelque chose qui a change [en pointant « $P + I$ » et « $I + P$ »]?

110 - Élève 8 : Non.

111 - Chercheuse : Pourquoi?

112 - Élève 8 : Parce qu'on va juste inverser les chiffres.

Nombres pairs/impairs : Élève 9

Durée de l'entretien : 13 min 14 s

1 - Chercheuse : On commence?

2 - Élève 9 : Mh mh.

3 - Chercheuse : Il te dérange ton masque? T'arrives à le mettre sur le nez? C'est un peu embêtant n'est-ce pas? Regarde. Alors on veut comprendre si en additionnant 2 nombres impairs on obtient comme résultat toujours un nombre pair.

4 - Élève 9 : C'est plus?

5 - Chercheuse : L'addition c'est plus, exactement.

6 - Élève 9 : Oui.

7 - Chercheuse : Pourquoi? Qu'est-ce que tu as fait pour le dire?

8 - Élève 9 : Ah non impair. Non, en fait non.

9 - Chercheuse : Pourquoi non?

10 - Élève 9 : En fait les 2. Parce qu'on peut très bien, par exemple, mettre 9 plus 1 ça va faire 10.

11 - Chercheuse : Donc, dans ce cas-là, c'est vrai ou pas?

12 - Élève 9 : Bah oui.

13 - Chercheuse : D'accord. Donc, tu as dit que c'est possible les 2?

14 - Élève 9 : Mh mh.

15 - Chercheuse : Et donc, quel est un autre exemple que tu as pensé?

16 - Élève 9 : Je n'en ai pas d'autre.

17 - Chercheuse : Tu te rappelles, n'est-ce pas, ce qu'est un nombre pair et impair?

18 - Élève 9 : Mh mh.

19 - Chercheuse : D'accord. Et donc, comment pourrait-on faire? Tu pourrais prendre des exemples avec des vrais nombres, l'addition entre 2 impairs. 2 nombres impairs.

20 - Élève 9 : Bah oui, on arrive toujours à nombre pair. Par exemple 5 plus 5 ça fait 10 et 10 c'est un nombre pair. Donc bah voilà.

- 21 - **Chercheuse** : Ouais, est-ce que c'est vrai, toujours ou juste dans cet exemple là?
- 22 - **Élève 9** : En tout cas, dans cet exemple, je pense toujours aussi.
- 23 - **Chercheuse** : Comment tu fais pour dire ça?
- 24 - **Élève 9** : Bah... Ah bah non pas toujours.
- 25 - **Chercheuse** : Pourquoi?
- 26 - **Élève 9** : 3 plus 3, ça fait 6.
- 27 - **Chercheuse** : Oui.
- 28 - **Élève 9** : 2, 4... Ah bah si en fait ça fait 6 aussi.
- 29 - **Chercheuse** : Oui.
- 30 - **Élève 9** : 4 plus 9. Non 5 plus 4. Vous avez dit 5... si, 5 plus 4 ça fait 9. Mais 9 c'est un nombre impair.
- 31 - **Chercheuse** : Ouais, mais là, on doit additionner 2 nombres impairs. Donc est-ce que 4 et 5 sont des nombres impairs?
- 32 - **Élève 9** : Ah bah non. Alors oui, toujours. On met toujours un nombre pair.
- 33 - **Chercheuse** : Quel est ton raisonnement pour le dire?
- 34 - **Élève 9** : Parce qu'à chaque fois qu'on prend un nombre, avec un autre nombre, du nombre impair, ça fait un nombre pair.
- 35 - **Chercheuse** : Tu le dis parce que tu as fait quelques exemples dans ta tête?
- 36 - **Élève 9** : Oui.
- 37 - **Chercheuse** : D'accord, et comment peut-on être sûr que cela est vrai pour tous les nombres impairs?
- 38 - **Élève 9** : Il faudrait essayer.
- 39 - **Chercheuse** : Donc, tu ne peux pas le dire, comme ça. T'as une idée de comment ça continue? Si ça continue à être vrai ou pas avec d'autres nombres, impairs toujours.
- 40 - **Élève 9** : Euh je ne sais pas.
- 41 - **Chercheuse** : T'as envie d'essayer encore un petit moment? Peut être avec quelques exemples?
- 42 - **Élève 9** : Si j'arrive à obtenir un truc pair? Bah j'ai... 1 [*elle liste des nombres pairs et impairs. Elle fait les additions : « 1 + 5 = 6 », « 7 + 3 = 10 », « 9 + 7 = 16 »*]. Vous voyez, à chaque fois qu'on met 2 nombres pairs.
- 43 - **Chercheuse** : Des nombres impairs.
- 44 - **Élève 9** : Oui impairs, pardon. Ça fait toujours, un est égal avec un nombre pair.
- 45 - **Chercheuse** : Est-ce que ce qu'on arriverait à l'expliquer à quelqu'un sans utiliser des calculs, sans faire de calculs?
- 46 - **Élève 9** : Je dirais à une personne, par exemple, de prendre que les nombres

entre 1 et 11. D'abord, pour commencer. À écrire 2 fois un nombre n'importe. Par exemple 3 plus 5 tout et qu'il voit combien ça fait. Si ce sera égal à ces nombres là [*en pointant sa liste de nombres pair*].

47 - Chercheuse : Oui. Et là, là, on utilise à nouveau des calculs. N'est-ce pas?

48 - Élève 9 : Non.

49 - Chercheuse : Non?

50 - Élève 9 : Non.

51 - Chercheuse : Pourquoi?

52 - Élève 9 : Parce que j'ai expliqué sans calcul.

53 - Chercheuse : Ah d'accord, c'est la personne qui doit faire le calcul. Oui, je comprends. Est-ce que tu as d'autres pistes?

54 - Élève 9 : Non.

55 - Chercheuse : Ok, je peux te poser une autre question?

56 - Élève 9 : Mh mh.

57 - Chercheuse : Qu'est-ce qui se passe si je fais l'addition entre 2 nombres pairs? Donc si je fais un nombre pair plus un nombre pair [*en écrivant « P + P »*].

58 - Élève 9 : Bah, c'est comme là [*en pointant « 1 + 5 = 6 »*]. J'ai fait un nombre pair plus un nombre pair. Un chiffre pair, plus un chiffre pair.

59 - Chercheuse : Oui, ici, il fallait faire impair plus impair. C'est ça que t'as fait. Impair impair [*en pointant « 1 » et « 5 »*].

60 - Élève 9 : Là c'est pair plus pair?

61 - Chercheuse : Oui.

62 - Élève 9 : Mais ça doit faire pair ou impair après?

63 - Chercheuse : Je ne sais pas. On va voir.

64 - Élève 9 : Par exemple je prends 4 plus 8. Cela fait 12. Bah 12 c'est pair. Et ... Si on prend pair plus pair, ça ne fera jamais impair.

65 - Chercheuse : Comment tu es arrivée à ce résultat-là?

66 - Élève 9 : J'ai compté.

67 - Chercheuse : Oui d'accord. Et donc, c'est toujours comme ça?

68 - Élève 9 : Oui.

69 - Chercheuse : Comment tu es sûre que c'est toujours comme ça?

70 - Élève 9 : Parce que j'ai compté et j'ai vérifié.

71 - Chercheuse : Mais tu as compté dans ce cas-là, 4 plus 8?

72 - Élève 9 : Oui, et j'ai dit par exemple 10 plus tout ça [*en pointant sa liste de nombres pairs*], là ça fera 18, 16, 14, 12. C'est toujours pair. Donc il n'y en a jamais un qui fait ça [*en pointant sa liste de nombres impairs*] par exemple. 8... Ouais... Non.

- 73 - Chercheuse : Non. Donc le résultat est pair. Ok. Alors. Et si je faisais impair plus pair [en écrivant « $I + P$ »]?
- 74 - Élève 9 : On peut prendre 3 [elle écrit « $3 + 4$ »]. Ça fait 5. C'est un pair. Et si on veut faire euh... Par exemple [elle écrit « $8 + 5 = 13$ »]... Là, j'ai un nombre impair [en pointant le « 13 »] et là pair [en pointant le « 5 »], on peut faire les 2 pour ça.
- 75 - Chercheuse : C'est quoi le nombre pair?
- 76 - Élève 9 : [Elle pointe le « 5 » de « $3 + 4 = 5$ »].
- 77 - Chercheuse : 5?
- 78 - Élève 9 : Ah bah non j'ai fait faux là [elle efface « $8 + 5 = 13$ » et le remplace avec « $5 + 10 = 15$ »]. Voilà.
- 79 - Chercheuse : Okay, donc qu'est-ce qu'on obtient?
- 80 - Élève 9 : Un nombre pair.
- 81 - Chercheuse : 15 est pair ou impair?
- 82 - Élève 9 : Pair.
- 83 - Chercheuse : Tu es sûre?
- 84 - Élève 9 : Oui.
- 85 - Chercheuse : Pourquoi?
- 86 - Élève 9 : 2, 4, 6, 8, 10, 12, 15.
- 87 - Chercheuse : 12...?
- 88 - Élève 9 : Ah non 14. Alors, on ne peut pas [elle efface « $5 + 10 = 15$ »].
- 89 - Chercheuse : Alors là, c'était pas incorrect ce que tu as écrit [en pointant ce que l'élève vient d'effacer]. C'est-à-dire qu'impair tu avais mis 5. N'est-ce pas? Plus pair, tu avais mis 10, ça donnait 15.
- 90 - Élève 9 : Oui.
- 91 - Chercheuse : Le calcul était correct, ce qui n'était pas correct c'était juste que 15 était impair.
- 92 - Élève 9 : Mh mh.
- 93 - Chercheuse : Et 5?
- 94 - Élève 9 : Impair aussi.
- 95 - Chercheuse : Tu as vu que impair plus pair...
- 96 - Élève 9 : Est égal à impair.
- 97 - Chercheuse : Oui. Est-ce que à ton avis, ça continue comme ou ça changera?
- 98 - Élève 9 : Continue ça comme ça.
- 99 - Chercheuse : Tu as une idée du pourquoi?
- 100 - Élève 9 : Bah non.
- 101 - Chercheuse : Okay. J'ai encore une petite question sur ça. Si je fais pair plus impair [en écrivant « $P + I$ »]. Est-ce qu'il y a quelque chose qui change par rap-

port à ça [en pointant « $I + P$ »]?

102 - Élève 9 : Non. C'est la même chose.

103 - Chercheuse : Comment tu sais ?

104 - Élève 9 : Bah, c'est juste... vous avez inversé. Mais ça reste toujours la même chose.

Nombres pairs/impairs : Élève 11

Durée de l'entretien : 11 min 42 s

1 - Chercheuse : L'enregistrement est parti. On veut comprendre si en additionnant 2 nombres impairs, on obtient toujours un nombre pair. Tu te rappelles ce qu'est un nombre pair et un nombre impair ?

2 - Élève 11 : Je ne me rappelles pas trop.

3 - Chercheuse : Alors, tu sais faire des exemples de nombres pairs ou impairs ?

4 - Élève 11 : C'était quoi les nombres impairs et pairs ?

5 - Chercheuse : D'accord. Alors, les nombres pairs sont des nombres qui sont multiples de 2, des nombre qui peuvent être divisés par 2.

6 - Élève 11 : 4.

7 - Chercheuse : Voilà, par exemple 4 est un nombre pair.

8 - Élève 11 : 6, 8, 10, 12, 14... C'est tout. Il peut y avoir encore, mais...

9 - Chercheuse : D'accord. Et un nombre impair c'est un nombre...

10 - Élève 11 : Qu'on peut pas diviser ?

11 - Chercheuse : Oui, qui ne peut pas être divisé par 2, qui n'est pas multiple de 2.

12 - Élève 11 : On ne peut pas faire du chiffre pair et impair, que ça donne pair...

13 - Chercheuse : C'est-à-dire ?

14 - Élève 11 : Si on met 3 sur le 6. Ça fait 9 et la moitié de 9, il n'y a pas.

15 - Chercheuse : D'accord, donc qu'est-ce que tu es en train de me dire là ?

16 - Élève 11 : Qu'on ne peut pas mettre un nombre pair et impair ensemble pour que ça fasse pair.

17 - Chercheuse : D'accord. Et alors, la question qu'on a là, qu'est-ce qu'elle demande ?

18 - Élève 11 : Elle demande de mettre un nombre pair avec un nombre pair pour quoi ça fasse pair... Puis je l'additionne...

19 - Chercheuse : Oui, ça demande de prendre...

20 - Élève 11 : Des multiples de 2.

21 - Chercheuse : 2 nombres impairs. Si je prends 2 nombres impairs, et si je fais l'addition de ces 2 nombres impairs, est-ce qu'on obtient un pair ou un impair ?

22 - Élève 11 : Oui... Pair... On peut... Si on fait 3 plus 3 ça fait 6.

- 23 - **Chercheuse** : Et à ton avis, c'est quelque chose qui est vrai toujours et qui marche pour tous les nombres impairs?
- 24 - **Élève 11** : Pas tous. Ça dépend les nombres que tu mets? Si on fait... Je n'ai pas d'idées.
- 25 - **Chercheuse** : Mais tu peux le faire encore quelques exemples pour voir comment ça va.
- 26 - **Élève 11** : Comme quoi je peux faire..?
- 27 - **Chercheuse** : C'est-à-dire, maintenant on essaie de comprendre si en additionnant, quand on fait l'addition entre 2 nombres impairs. Si le résultat est pair ou impair. Donc là tu m'as fait l'exemple de 3 plus 3, t'as dit 3 plus 3 égal 6 et 6 est un nombre pair. On se pose la question est-ce que ça continue à être comme ça? Ou est ce que ça change?
- 28 - **Élève 11** : On peut... Faire par 2, 1 plus 1 ça fait 2... Et c'est un nombre pair.
- 29 - **Chercheuse** : D'accord. Pour l'instant, t'as utilisé toujours des nombres qui sont le même, c'est-à-dire que tu fais 1 plus 1, 3 plus 3. Qu'est-ce qui se passe quand les nombres ne sont pas, les 2 nombres ne sont pas égaux?
- 30 - **Élève 11** : C'est pas pair?
- 31 - **Chercheuse** : C'est pas pair? Par exemple?
- 32 - **Élève 11** : Si on fait... Je ne sais pas... Je n'ai pas d'idées
- 33 - **Chercheuse** : Mais qu'est ce que tu es en train de penser?
- 34 - **Élève 11** : De trouver un nombre avec un nombre que ça fasse pair.
- 35 - **Chercheuse** : Et comment tu cherches cela dans ta tête?
- 36 - **Élève 11** : J'essaie de trouver après le 6?
- 37 - **Chercheuse** : Après?
- 38 - **Élève 11** : Après le 6 un nombre que ça sera impair... Le 7 plus 7 ça fait 14, non?
- 39 - **Chercheuse** : Ouais.
- 40 - **Élève 11** : Ça fait pair. Et 8 plus 8, ça fait 16.
- 41 - **Chercheuse** : Le 8, c'est un nombre pair ou impair?
- 42 - **Élève 11** : Pair.
- 43 - **Chercheuse** : Ouais.
- 44 - **Élève 11** : Il faut trouver un nombre pair que ça fasse pair?
- 45 - **Chercheuse** : D'accord, je peux te poser une autre question? Alors... À ton avis, si je fais un nombre pair plus un autre nombre pair? Le résultat, comment il sera?
- 46 - **Élève 11** : Pair.
- 47 - **Chercheuse** : Comment tu sais?
- 48 - **Élève 11** : Ba, si on met 12 plus 12 ça fait 24 et si on met 14 plus 14 ça fait 28 et

c'est tout le temps pair, sinon 4 plus 4 ça fait 8, 6 plus 6 ça fait 12, 8 plus 8 ça fait 16, c'est tout le temps pair.

49 - Chercheuse : Et cela est vrai pour tous les nombres pairs?

50 - Élève 11 : Oui.

51 - Chercheuse : Comment tu sais?

52 - Élève 11 : Si on continue après... Si on fait 2 [sic] plus 2 [sic] ça fait 24 et si on fait 24 plus 24 ça fait 48 et c'est tout le temps pair.

53 - Chercheuse : Comment peut-on être sûr que cela est vrai pour tous les nombres pairs?.

54 - Élève 11 : Parce que la moitié d'un nombre pair on peut le faire encore en moitié...

55 - Chercheuse : Je n'ai pas compris, pardon.

56 - Élève 11 : La moitié de 12 c'est 6 et la moitié de 6 est 3. C'est tout le temps pair parce que si c'est nombre pair avec un nombre pair c'est pair.

57 - Chercheuse : T'as dit, si on a un nombre pair et on le met...

58 - Élève 11 : Avec un nombre encore pair, ça donne pair.

59 - Chercheuse : D'accord, et si on prend un nombre impair et on fait l'addition avec un nombre pair?

60 - Élève 11 : Ça fait impair.

61 - Chercheuse : Comment tu sais?

62 - Élève 11 : Le 3 c'est impair, si on le met avec le 12 ça fait 3 plus 12 ça fait 15 et la moitié de 15 il n'y a pas.

63 - Chercheuse : À ton avis, cela est vrai pour tous?

64 - Chercheuse : A chaque fois que tu fais un impair plus un pair?

65 - Élève 11 : Oui.

66 - Chercheuse : Et comment tu sais que c'est vrai toujours?

67 - Élève 11 : Parce que je le sais. Parce que si on fait des calculs, on sait que c'est tout le temps impair.

68 - Chercheuse : Et maintenant, si je fais un nombre pair plus un nombre impair?

69 - Élève 11 : Ça fait impair.

70 - Chercheuse : Ok, comment tu sais?

71 - Élève 11 : C'est la même chose que ça.

72 - Chercheuse : D'accord, pourquoi c'est la même chose?

73 - Élève 11 : Parce qu'on fait la même chose qu'avant. Avec un autre chiffre. Ça fait 14 plus 3, ça fait 17... La moitié... Non... Ah oui, la moitié de 17 y'a pas.

74 - Chercheuse : Et donc si on revient à la question du début, si on fait l'addition entre 2 nombres impairs, le résultat comment il sera?

75 - Élève 11 : Pair.

76 - Chercheuse : Ok, comment t'es arrivé à ce résultat ?

77 - Élève 11 : Je sais déjà que si on met pair plus pair ça fait pair, si on met impair plus pair ça fait impair, si on met pair plus impair ça fait pair... Impair, pardon. Si on met impair plus impair ça fait pair. Parce que le nombre 3 c'est impair. Si on met 3 plus 3 ça fait 6.

Nombres pairs/impairs : Élève 12

Durée de l'entretien : 17 min 36 s

1 - Chercheuse : On fait comme la dernière fois, je te donne une tâche, si tu as quelques questions, n'hésite pas à me dire. S'il y a quelque chose qui n'est pas clair, etc. Je te demande juste de me dire ce qui te passe par la tête, à quoi tu penses. D'acc? Regarde, on veut comprendre si, en additionnant 2 nombres impairs, on obtient toujours un nombre pair. Est-ce que tu sais ce que c'est un nombre pair, un nombre impair ?

2 - Élève 12 : Un nombre pair c'est un nombre qui peut être divisé par tous les chiffres, par exemple 2. On doit trouver si ça peut être divisé par les autres. Et des nombres impairs c'est des nombres qu'on ne peut pas diviser par un autre nombre. Par exemple avec un nombre de pair.

3 - Chercheuse : D'accord. Et donc, par exemple, est-ce que tu peux me faire des exemples de nombre pair ou impair ?

4 - Élève 12 : De nombre pair, il y a 0, 2, 4... Je me rappelle plus trop parce que ça fait longtemps que je les ai pas vu.

5 - Chercheuse : Oui, d'accord, et les nombres impairs ?

6 - Élève 12 : De nombres impairs il y a 0, 3... 0, 3, 8.

7 - Chercheuse : Alors je peux te faire... Je te fais un petit rappel de ce que c'est un nombre pair, un nombre impair, ça joue ? Comme ça, juste pour se rappeler avant de commencer l'exercice ensemble. Alors, un nombre pair est un nombre qui est multiple de 2. Ça, c'est un nombre pair. C'est à dire qu'un nombre pair est un nombre qui est peut être divisé par 2. Un nombre entier, qui peut être divisé par 2. Donc, on reprend les exemples que t'as fait avant. 2, par exemple, est un nombre pair.

8 - Élève 12 : 3.

9 - Chercheuse : Pourquoi 3 est un nombre pair ?

10 - Élève 12 : Parce qu'on peut faire... Parce que c'est divisible par 2.

11 - Chercheuse : Pourquoi c'est divisible par 2, 3 ?

12 - Élève 12 : Parce que 2 fois 3 est égal à 6. Et puis, 6 c'est un nombre pair.

- 13 - Chercheuse : D'accord, alors tu peux écrire ce que tu viens de dire? Comme ça, juste pour s'en rappeler. Tu as dit que 2 fois 3 égal 6. N'est-ce pas?
- 14 - Élève 12 : Oui [*l'élève écrit « $2 \times 3 = 6$ »*].
- 15 - Chercheuse : D'accord. Et on se posait la question, est-ce que 3 est un nombre pair?
- 16 - Élève 12 : Oui.
- 17 - Chercheuse : Pourquoi?
- 18 - Élève 12 : Ah non, ce n'est pas un nombre pair. Parce qu'il n'y a aucun qui fait 2 fois quoi égal à 3.
- 19 - Chercheuse : Très bien, d'accord. Ok, donc, 3 est un nombre impair. Et 4 par exemple?
- 20 - Élève 12 : C'est un nombre pair parce que quand on fait 2 fois 2, égal à 4 [*l'élève écrit « $2 \times 2 = 4$ »*].
- 21 - Chercheuse : D'accord. Et 5, par exemple?
- 22 - Élève 12 : C'est un nombre impair.
- 23 - Chercheuse : D'accords. Et après... Est-ce qu'il y a d'autres nombre impair?
- 24 - Élève 12 : Il y a 8.
- 25 - Chercheuse : C'est impair 8?
- 26 - Élève 12 : Parce que 2 fois 5 égal à 8 [*l'élève écrit « $2 \times 5 = 8$ »*].
- 27 - Chercheuse : Tu es sûre de cette multiplication?
- 28 - Élève 12 : Non, il faut 4 [*l'élève corrige le 5 en 4*].
- 29 - Chercheuse : Très bien. Et donc, 8 est un nombre pair ou impair?
- 30 - Élève 12 : Pair.
- 31 - Chercheuse : Très bien, d'accord. Ok, est-ce qu'il y a d'autres nombres pairs? Est-ce qu'il y a d'autres nombres pairs qui te viennent à l'esprit?
- 32 - Élève 12 : Il y a 10. 2 fois 5 égale à 10 [*l'élève écrit « $2 \times 5 = 10$ »*]. Et 2 fois 6 égal à 12. Il y a 14. Il y a 16. Il y a 18 et il y a 20 [*l'élève écrit la liste de « $2 \times n = 2n$ »*].
- 33 - Chercheuse : Et les nombres impairs?
- 34 - Élève 12 : Les nombres impairs, c'est... Il y a 7 [*l'élève écrit « 7 » à côté du « 6 »*].
- 35 - Chercheuse : Comment tu as fait à...?
- 36 - Élève 12 : J'ai regardé les chiffre-là [*en pointant « 6 »*]. Puis, je me suis dit si 6 pair, le chiffre qui vient avant, c'est impair.
- 37 - Speaker 3 : D'accord.
- 38 - Élève 12 : Il y a 3 [*elle écrit « 4 » à côté de « 3 »*]. C'est 5. Il y a 5, 3, là il y a 7. Là il y a 9. Il y a 11. Il y a 13. Il y a 15. Il y a 17. Il y a 19 [*l'élève écrit les différents nombres impairs à côté des pairs*].
- 39 - Chercheuse : D'accord. Est-ce qu'après il y en a d'autres, ou ils sont finis?

- 40 - Élève 12 : Il y en a encore.
- 41 - Chercheuse : D'accord. Maintenant, qu'on a fait un petit rappel, est ce qu'on revient à la question du départ?
- 42 - Élève 12 : Oui.
- 43 - Chercheuse : C'est clair, la question? C'est clair ce qui est demandé ou pas trop? On demande si quand on fait l'addition entre deux nombres impairs, on obtient toujours un nombre pair.
- 44 - Élève 12 : Non.
- 45 - Chercheuse : Comment tu sais?
- 46 - Élève 12 : Parce que si on fait impair et impair, ça ne peut pas aller sur pair, parce que ça ajoute plus de chiffres.
- 47 - Chercheuse : D'accord. Mais pourquoi? Je n'ai pas trop compris ton raisonnement.
- 48 - Élève 12 : On ne peut pas faire par exemple 11 plus 13. Ça peut pas donner un nombre pair.
- 49 - Chercheuse : Comment t'es sûre?
- 50 - Élève 12 : Parce que 3 plus 1 est égal à 4 [*l'élève pose et résoudre le calcul « 11 + 13 » en colonne*]. Et puis 1 plus 1 est égal à 2. Ça fait 24, il a aucun.
- 51 - Chercheuse : Aucun quoi? Le calcul est correct, c'est bien ce que t'as fait.
- 52 - Élève 12 : Si, ça donne un nombre pair.
- 53 - Chercheuse : Oui. Tu est surprise?
- 54 - Élève 12 : Oui!
- 55 - Chercheuse : Pourquoi? Qu'est-ce que tu pensais avant?
- 56 - Élève 12 : C'est juste que normalement, dans la multiplication, on va jusqu'à 10 [*elle pointe dans sa liste des nombres pairs le « 10 » de « $2 \times 10 = 20$ »*].
- 57 - Chercheuse : D'accord, vous faites pas... Mais là c'est une addition, par contre.
- 58 - Élève 12 : Oui, et puis j'ai remarqué le chiffre [*elle pointe le « 24 »*] est puis j'ai fait 2 fois 10 égal à 20, 2 fois 11 égal à 22, 2 fois 12 égal à 24 [*elle continue dans sa liste de « $2 \times n = 2n$ » jusqu'à 24*]. Et puis j'étais choquée.
- 59 - Chercheuse : Oui, je comprends. Et pourquoi tu t'attendais à voir un résultat impair?
- 60 - Élève 12 : Parce que dans les multiplications, je ne vais pas trop loin, jusqu'à 10, on a fait jusqu'à 10. On ne va pas jusqu'à 12.
- 61 - Chercheuse : D'accord. OK, alors si tu veux, tu peux essayer avec des nombres plus petits si c'est mieux pour toi. D'accord?
- 62 - Élève 12 : Oui.
- 63 - Chercheuse : Donc, à ton avis, quand on fait l'addition entre 2 nombres im-

pairs.

64 - Élève 12 : Ça devient pair.

65 - Chercheuse : Comment tu sais?

66 - Élève 12 : Parce que si on ajoute tout [*elle cherche sa liste de nombres pairs et impairs*] et puis on prend les chiffres qui sont pair dans le deux, ça va donner le même résultat. Par exemple 5 plus 3 est égal à 4.

67 - Chercheuse : 5?

68 - Élève 12 : 5 plus 3 est égal à 8.

69 - Chercheuse : Oui.

70 - Élève 12 : Et puis si on fait 7 plus 9 égal à 16. Ça donne 2 fois 8 [*l'élève écrit « Oui » comme réponse à la question de la tâche*].

71 - Chercheuse : Je te pose une autre question, ça joue? C'est toujours un peu similaire. La question est qu'est-ce qui se passe si je fais un nombre pair plus un autre nombre pair [*la chercheuse donne à l'élève une feuille où il y a écrit « Pair+Pair »*].

72 - Élève 12 : Ça donne impair.

73 - Chercheuse : Comment tu sais?

74 - Élève 12 : 6 plus 4, ça fait 10 [*elle pose le calcul en colonne et le résout*]. Ça peut donner pair et aussi impair.

75 - Chercheuse : OK, pourquoi tu dis que ça peut donner aussi impair?

76 - Élève 12 : Parce que... Non, ça donne pair. Ça dépend quel calcul tu prends.

77 - Chercheuse : De quelle manière, ça dépend du calcul?

78 - Élève 12 : Quand tu prends les plus petits [*elle entoure « 6 + 4 »*], tu peux trouver un nombre pair.

79 - Chercheuse : Ouais, d'accord.

80 - Élève 12 : Et puis, si tu prends des plus grands chiffres, ça te donne impair [*l'élève entoure « 14 » et « 16 » dans sa liste des pairs*].

81 - Chercheuse : Pourquoi ça te donne impair, là, ce que tu as entouré?

82 - Élève 12 : [*L'élève calcule en colonne « 16 + 14 = 30 »*] Ça fait 30.

83 - Chercheuse : Et 30 est pair ou impair?

84 - Élève 12 : Est impair.

85 - Chercheuse : Pourquoi?

86 - Élève 12 : Parce que 3 fois 10 égal à 30.

87 - Chercheuse : Oui, ça c'est vrai. Tu te rappelles qu'est ce que c'est un nombre pair?

88 - Élève 12 : Un nombre pair c'est un chiffre qui peut être divisé par 2.

89 - Chercheuse : Très bien. Donc la question est est-ce que 30 est divisible par 2?

- 90 - Élève 12 : Non.
- 91 - Chercheuse : Pourquoi tu dis non ?
- 92 - Élève 12 : Si, c'est divisible par 2.
- 93 - Chercheuse : Pourquoi ?
- 94 - Élève 12 : Parce que si on continue avec les multiplication, on pourrait y aller [inaudible] et puis on peut quand même trouver 30.
- 95 - Chercheuse : Oui. Comment, avec quel calcul ? Tu peux écrire si tu veux. Si tu veux pas faire tout [inaudible].
- 96 - Élève 12 : 2 fois 15 égal à 9 [l'élève écrit en colonne des calculs]. Ça fait 5...
- 97 - Chercheuse : Je peux t'aider, avec les calculs. On fait ensemble ?
- 98 - Élève 12 : Oui.
- 99 - Chercheuse : Dis-moi quel calcul tu veux faire.
- 100 - Élève 12 : 2 fois... 2 fois 15.
- 101 - Chercheuse : Tu veux que je calcule ça ?
- 102 - Élève 12 : Oui.
- 103 - Chercheuse : Ça fait 30. Comment tu savais que c'était 15 ?
- 104 - Élève 12 : J'ai regardé le chiffre, le dernier chiffre dans 2 fois 12 [elle entoure 24] et j'ai fait... J'ai fait 12, 13, 14 et 15, puis comme j'ai fait 2 fois, j'ai trouvé que là, c'était 26. Là, c'était 28. Et puis là c'était 30. Et puis j'ci compté combien de fois j'ai loupé... Je n'ai pas trouvé 30. C'était le dernier que j'ai trouvé 30, et puis c'était 2 fois 15.

Nombres pairs/impairs : Élève 13

Durée de l'entretien : 10 min 39 s

- 1 - Chercheuse : Alors comme je le disais. On fait comme la dernière fois. Je te donne quelques taches. Si tu as des question tu poses tes questions sans problème. S'il y a quelque chose que te comprends pas. Je te demande juste de me dire tout ce qui te passe par la tête. D'accord ? Tu as des stylos ?
- 2 - Élève 13 : Là, oui.
- 3 - Chercheuse : Donc après, si tu veux. Je te laisse les feuilles si tu en as besoin.
- 4 - Élève 13 : D'accord, merci
- 5 - Chercheuse : Alors on commence. On veut comprendre si, en additionnant 2 nombres impairs on obtient toujours un nombre pair. La question est claire ?
- 6 - Élève 13 : Oui.
- 7 - Chercheuse : Tu te rappelles ce que c'est un nombre pair ou impair ?
- 8 - Élève 13 : Oui. Pair c'est quand ils sont par exemple 1, 3. C'est juste ? 7, tout ça, c'est juste ?

9 - Chercheuse : Mh mh.

10 - Élève 13 : Bah, on peut faire par exemple 3 plus 3, ça fait 6. Et 6 c'est un nombre... Non non... 6 c'est un nombre pair. Impair c'est.... On peut faire 1 plus 2, ça fait, 3, c'est nombre impair.

11 - Chercheuse : Ok. Qu'est ce que tu as fait là?

12 - Élève 13 : Je fais 1 plus 2 ça fait un nombre impair. Parce que moi, je travaille plutôt des nombres pairs, parce que tous mes exercices, sont vraiment pairs, pairs, pairs. C'est pour ça que là je me dis il ne faut pas chercher loin, je suis tout près. En plus, ça fait 3.

13 - Chercheuse : Mais et donc, pourquoi tu as pris 1 et 2?

14 - Élève 13 : Parce que 1 et 2 ça fait 3 et 3 c'est un nombre impair. Par exemple, si je faisais 2 plus 2, ça me fait 4. 4 c'est pas un nombre impair, c'est un nombre pair.

15 - Chercheuse : Oui d'accord. Et donc, comment cet exemple t'aide à répondre à la question?

16 - Élève 13 : En addition des nombres. Un pair [*inaudible*]. Non non! Qu'est-ce que je fais là c'est faux. Voilà, là c'est bon. Parce qu'il a dit qu'il obtient 2 nombres impairs et en fait il additionne 2 nombres impairs. 3 et 7 sont des nombres impairs et en fait on obtient un nombre pair. 10 est un nombre pair.

17 - Chercheuse : Et donc, pourquoi tu avais effacé ce que tu avais écrit avant?

18 - Élève 13 : Parce que, en fait. J'ai pas bien compris tout d'abord, et là, j'ai compris. Je pensais que de 2 nombres impairs on obtenait encore un nombre impair.

19 - Chercheuse : Et donc. Comment peut-on être sûr que cela est vrai pour tous les nombres impairs?

20 - Élève 13 : Euh, ça n'existe pas. C'est pas que 3 plus 7 ça fait... On peut faire aussi 5 plus 7. Il y a plein de nombre impairs qu'on peut faire pair avec.

21 - Chercheuse : D'accord. Est-ce qu'on arrive à comprendre si c'est toujours comme ça? Si je prends 2 nombres impairs, et je les additionne. Est-ce que j'obtiens toujours un nombre pair ou pas?

22 - Élève 13 : Je ne sais pas.

23 - Chercheuse : Tu essaies d'y réfléchir un moment?

24 - Élève 13 : Oui, j'ai bien compris la question, mais je pense... ça dépend les nombres peut-être...

25 - Chercheuse : Pourquoi?

26 - Élève 13 : Parce que tous les nombres ne sont pas pairs. Et tous les nombres ne sont pas impairs, ça dépend vraiment des chiffres parce que si je prends 3

plus 3, ça me fait 6. Je ne sais pas. Je ne pensais jamais à ça.

27 - Chercheuse : On va y penser un moment maintenant.

28 - Élève 13 : Il faut par exemple. Je ne sais pas. Il faut avoir des nombres avec moi pour que je les calcule. Pour que je voie le nombre.

29 - Chercheuse : Je te pose une autre question. D'accord? C'est-à-dire, si je prends deux nombre pairs et si je fais l'addition entre deux nombres pairs.

30 - Élève 13 : J'ai pas compris.

31 - Chercheuse : Tu vois là j'ai écrit P plus P. Juste pour avoir pair plus pair. Ici, on a additionne deux nombres impairs pour regarder le résultat. D'accord? Si c'était pair ou impair. La question maintenant est si je prends deux nombres pairs. Qu'est ce qu'on peut dire du résultat?

32 - Élève 13 : Je pense que c'est pair plutôt.

33 - Chercheuse : Comment tu sais?

34 - Élève 13 : Si je fais 2 plus 2. Ça me fait pair... Je fais 4 plus 4 ça me fait aussi pair, ça me fait 8. Je pense que c'est toujours comme ça, toujours.

35 - Chercheuse : Comment peut-on être sûr que c'est vrai pour tous les nombres?

36 - Élève 13 : Aucune idée. Moi, je pense que ça va être possible pour tous les nombres. Parce que si on prend 2... Ouais. Je pense. Parce que si on prend tout le temps des nombres pairs et on les additionne, ça va faire aussi des nombres pairs. Je ne pense pas que ça peut faire des nombres impairs. Je n'ai pas encore vu. Je sais pas, j'ai jamais vu.

37 - Chercheuse : D'accord. Et alors? Si maintenant, je fais l'addition entre un nombre impair et un nombre pair.

38 - Élève 13 : Par exemple si je fais... Ah j'ai mal pris les deux. Si je prends 3 c'est impair et si je prends quelque qui est pair comme 4, ça me donne 7. Ce n'est pas pair.

39 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu avais écrit avant d'effacer?

40 - Élève 13 : Avant, j'avais 3 plus 5, 2 nombres impairs.

41 - Chercheuse : Pourquoi tu as effacé?

42 - Élève 13 : Parce que deux nombres impairs il donne un nombre pair. Et deux nombres impairs et pair, ça donne impair. C'est comme plus et plus, ça fait plus. Moins et plus, ça fait plus et moins plus, ça fait moins. Un truc comme ça, je pense.

43 - Chercheuse : D'accord, tu penses que c'est toujours comme ça. C'est à dire que quand on a un nombre impair et un nombre pair, Le résultat est toujours un nombre impair?

44 - Élève 13 : On ne sait pas parce que ça dépend les chiffres. Je ne peux pas dire

100% parce que je n'ai jamais essayé d'avoir tous les nombres avec moi, mais des calculs peut-être seront pairs et impairs. Donc des fois pairs et des fois impairs, ça dépend vraiment des calculs.

45 - **Chercheuse** : Si on a ça : pair plus impair ?

46 - **Élève 13** : Cela nous fait aussi un nombre pair, euh... Impair.

47 - **Chercheuse** : Comment tu sais ça ?

48 - **Élève 13** : Parce que je viens d'essayer ici. Ça me fait vraiment... J'ai juste inversé les lettres, ça me fait vraiment pareil. Je fais aussi 4 plus 3, ça me fait aussi 7, c'est aussi impair. Si j'avais l plus l, impair plus impair, ça me ferait vraiment un chiffre de pair.

49 - **Chercheuse** : Comment tu sais ça ?

50 - **Élève 13** : Bah je ne sais pas. Je pense.

51 - **Chercheuse** : Et pourquoi tu penses ? Qu'est-ce que c'est qui t'as fait penser que c'est comme ça ?

52 - **Élève 13** : Parce que j'ai des calculs. Je fais des calculs comme ça avec les nombres relatifs. Par exemple négatifs plus négatifs. Ça fait vraiment négatif. Là, je vais vraiment très positif et positif ça fait vraiment positif. C'est pour ça. J'ai vraiment pensé à ça. Je fais pair plus pair, ça fait vraiment impair. Je ne sais pas pourquoi.

53 - **Chercheuse** : Okay, tu as encore quelques idées ou on continue ?

54 - **Élève 13** : Non.

Nombres pairs/impairs : Élève 14

Durée de l'entretien : 19 min 04 s

1 - **Chercheuse** : Maintenant, on veut comprendre si, en additionnant 2 nombres impairs, on obtient toujours un nombre pair. La question est claire ?

2 - **Élève 14** : En additionnant 2 nombres impairs... Je ne sais pas. Fin j'ai compris, mais je ne sais pas si c'est vrai.

3 - **Chercheuse** : Mais déjà, tu sais ce qu'est un nombre pair et un nombre impair ?

4 - **Élève 14** : Un nombre pair, c'est quand on peut le diviser par 2.

5 - **Chercheuse** : D'accord, et un nombre impair ?

6 - **Élève 14** : On ne peut pas le diviser par 2.

7 - **Chercheuse** : D'accord, donc la question, là... Demande si quand on fait l'addition entre 2 nombres qui sont impairs, on se demande si le résultat est pair ou impair.

8 - **Élève 14** : Oui, ok.

9 - **Chercheuse** : T'as quelques pistes ?

- 10 - Élève 14 :** Du coup, je pourrais prendre, par exemple 3 qui est impair plus 3. Ça fait 6, qui est pair parce que si on fait 6 divisé par 2, ça fait 3. Après si je prends 5 plus 5 qui est impair, ça fait 10. Qui se divise aussi par 2. 7 plus 7, 14, qui se divise aussi par 2. Ba, oui, parce que du coup, à chaque fois qu'on fait un nombre impair plus un autre nombre impair, le même [*en pointant 7 sur son exemple*], ça donne ce chiffre [*en pointant 14*] et ce chiffre, il est pair parce que du coup, à chaque fois, on peut le diviser par 2 pour que ça donne 7... Fin, pour que ça donne le... [*En pointant 7*]
- 11 - Chercheuse :** Ouais, ouais, c'est vrai. Très bonne observation. Et si les 2 nombres de départ ne sont pas le même?
- 12 - Élève 14 :** Donc ça voudrait dire que je prend 3 plus 5, ça fait 8 [*en écrivant le calcul*]. Donc, si je fais 3 plus 5, ça donne un chiffre pair [*il écrit un autre calcul 5+7*]. Ouais, du coup ça marche.
- 13 - Chercheuse :** Qu'est-ce que tu as fait. ici?
- 14 - Élève 14 :** Là, j'ai fait 3, qui est un chiffre impair plus 5 qui est un chiffre impair, ça donne 8 et 8 si on le divise par 2, ça fait 4. Et puis là, j'ai fait pareil. J'ai fait 5 plus 7, ça fait 12. Et 12 divisé par 2, ça fait 6 et du coup, c'est divisible par deux. Donc, ça donne à chaque fois un chiffre pair.
- 15 - Chercheuse :** Et à ton avis, c'est toujours comme ça?
- 16 - Élève 14 :** Et je sais pas [*il pose le calcul 3 + 7*]. Oui, je pense. Oui, je pense que c'est toujours comme ça.
- 17 - Chercheuse :** Pourquoi?
- 18 - Élève 14 :** Parce que là, du coup, tous ceux que j'ai essayé, 3 qui est impair plus 5 qui est impair, ça fait 8. Divisé par... Il est divisible par 2, donc c'est un chiffre pair. Après, 5 plus 7 qui sont les 2 impairs, ça fait 12. 12 divisé par 2, ça fait 6 donc il est pair. 3 plus 7, égal 10 et 10 divisé par 2 ça fait 5, donc c'est divisible par 2, donc il est pair. Du coup, je pense qu'à chaque fois, ça marche.
- 19 - Chercheuse :** Mais comment peut-on être sûr que ça marche toujours et pas juste dans les cas que tu as écrit là?
- 20 - Élève 14 :** Il faudrait essayer avec tous les chiffres impairs.. Non, mais... Je ne sais pas comment on pourrait faire.
- 21 - Chercheuse :** Pourrait-on essayer avec tous les nombres impairs?
- 22 - Élève 14 :** On peut, mais ça va être très long. Du coup, je ne sais pas comment on va faire.
- 23 - Chercheuse :** Et si on fait... Si on fait l'addition entre un nombre... J'ai écrit P de pair, d'accord? Un pair, plus un nombre pair.
- 24 - Élève 14 :** Ça donnera toujours un nombre pair.

- 25 - **Chercheuse** : Comment tu sais?
- 26 - **Élève 14** : Parce que, du coup, si on met 2 chiffres pairs qui sont les mêmes... 5 plus 5 [*sic*] égal 10 [*il pose le calcul*], on peut toujours les diviser par 2 parce que de toute façon, ça donnera les 2 qu'on a fait plus.
- 27 - **Chercheuse** : Oui, mais ici on prend en considération un nombre pair. Tu as pris 5. 5 est pair ou impair?
- 28 - **Élève 14** : Ah, mais impair en fait.
- 29 - **Chercheuse** : Oui.
- 30 - **Élève 14** : Oui, du coup [*il écrit* « $4 + 4 = 8 : 2 = 4$ »]... Du coup là ça marche parce que 4 s'est divisible par 2, donc c'est pair. Du coup, ça donne 8, et 8 divisé par 2, ça donne forcément 4 parce qu'on fait 4 plus 4, donc ça donne 8.
- 31 - **Chercheuse** : Oui, très bien. Et si les 2 nombres-là [*en pointant sur son exemple 4 et 4*] sont différents l'un de l'autre?
- 32 - **Élève 14** : Genre le 4 et quelque chose d'autre?
- 33 - **Chercheuse** : Oui, par exemple.
- 34 - **Élève 14** : [*Il calcule* « $4 + 8$ »] Là, du coup, j'ai fait 4 plus 8, ça fait 12. Et 12 il est divisible par 2, donc pair.
- 35 - **Chercheuse** : Et donc, si on a l'addition entre 2 nombres pairs, à ton avis le résultat...
- 36 - **Élève 14** : Il sera toujours pair aussi.
- 37 - **Chercheuse** : Toujours toujours?
- 38 - **Élève 14** : Ouais, je pense.
- 39 - **Chercheuse** : Oui, pourquoi?
- 40 - **Élève 14** : Parce que c'est comme ici quand on a 2 chiffres pairs [*en pointant* « $4 + 4$ »] du coup, si sont les 2 divisés par 2, il sera aussi divisé par 2.
- 41 - **Chercheuse** : Ouais, et pourquoi?
- 42 - **Élève 14** : Je ne sais pas comment expliquer. Je ne sais pas pourquoi.
- 43 - **Chercheuse** : Mais t'as quelques idées du pourquoi?
- 44 - **Élève 14** : Non.
- 45 - **Chercheuse** : Non? Mais c'était intéressant, ce que tu était en train de dire. T'as dit : si le premier nombre est divisible par 2, et si le deuxième nombre est divisible par 2 [*en pointant* « 4 » et « 8 » *sur son exemple*], alors ça sera aussi divisible par 2 [*en pointant* « 12 » *sur son exemple*]. T'as dit ça, n'est-ce pas?
- 46 - **Élève 14** : Oui. Je ne sais pas comment prouver que ce que je viens de dire c'est vrai.
- 47 - **Chercheuse** : Et si on a, par contre, un impair plus un pair [*en lui montrant ce qu'elle vient d'écrire, I+P*]? I d'impair, d'accord?

- 48 - Élève 14 : 5 plus... 13... [*il pose le calcul $5+8=13$*]. 13 c'est pas divisible par 2, donc c'est impair. 3 plus 4... [*il pose le calcul $3+4$*]... Donc ça ne marche pas non plus. Donc si on fait un chiffre pair plus un pair, ça donne un chiffre impair.
- 49 - Chercheuse : Et ça sera toujours comme ça ?
- 50 - Élève 14 : Oui, je pense.
- 51 - Chercheuse : T'as une idée du pourquoi ?
- 52 - Élève 14 : Non.
- 53 - Chercheuse : Et comment peut-on être sûr que ça marche toujours, toujours, toujours ?
- 54 - Élève 14 : En fait, je pense, ça ne marche pas si on met une virgule derrière [*il pose le calcul « $5, 5 + 4, 5$ »*]. Du coup, ça fait 10, divisé par deux, ça donne 5.
- 55 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu as fait, là ?
- 56 - Élève 14 : Là j'ai fait... J'ai fait 5 plus 4, ça donne 9 et 0,5 plus 0,5 ça donne 1. Du coup, j'ai fait 9 plus un ça donne 10 et 10 divisé par 2, ça donne 5.
- 57 - Chercheuse : D'accord, et comment t'as choisi ces de nombre de départ ?
- 58 - Élève 14 : Les deux virgules ?
- 59 - Chercheuse : Oui, 5,5 et 4,5.
- 60 - Élève 14 : Je sais pas, je les ai pris au hasard.
- 61 - Chercheuse : Oui, d'accord, mais là, on essaie de voir l'addition entre un nombre impair et un nombre pair.
- 62 - Élève 14 : Oui.
- 63 - Chercheuse : Ça, 5,5, c'est un nombre pair ou impair ?
- 64 - Élève 14 : Impair.
- 65 - Chercheuse : Pourquoi ?
- 66 - Élève 14 : Parce que 5 c'est impair, du coup...
- 67 - Chercheuse : D'accord, et 4,5 ?
- 68 - Élève 14 : C'est pair parce que 4 c'est pair.
- 69 - Chercheuse : Ok, alors je te pose encore une question [*elle l'écrit et la lui montre*]. En additionnant 2 multiples de 3, est-ce qu'on obtient toujours un multiple de 3 ? Donc on prend 2 nombres qui sont multiples de 3 et on va voir si le résultat est encore et un multiple de 3.
- 70 - Élève 14 : Ok [*il pose les calculs « $3 + 6$ », « $3 + 3$ », « $3 + 9$ », « $6 + 9$ »*]... divisé par 3, ça fait 3. 3... 6... divisé par 3. Donc là ça fait 4. Oui, Je pense on obtient toujours un multiple de 3.
- 71 - Chercheuse : Comment tu sais ?
- 72 - Élève 14 : Parce que là, du coup, j'ai fait 3 plus 6 qui les deux sont des multiples

de 3. Ça fait 9. 9 s'est divisible par 3, donc c'est un multiple de 3. Après, j'ai fait 3 plus 3, ça fait 6, 6 divisé par 3, ça marche. Du coup c'est un multiple de 3. Après, j'ai fait 3 plus 9, ça fait 12. Et 12 divisé par 3, ça fait 4. Après, j'ai fait 6 plus 9, ça fait 15. Et 15 divisé par 3, ça fait 5 et donc c'est tous des multiples de 3.

73 - Chercheuse : Oui, et t'es sûr que ça marche même avec d'autres nombres, que ça marche toujours?

74 - Élève 14 : Je ne sais pas. Il faudrait réussir à faire un calcul pour trouver mais... Je sais pas quel calcul faire pour trouver, du coup [*il pose le calcul « 15 + 9 »*]. Oui, je pense parce que là j'ai pris 15, qui est un multiple de 3, plus 9, ça fait 24 et 24, c'est divisible par 3 parce que ça fait 8, donc c'est un multiple de 3.

75 - Chercheuse : Et si, par exemple, si je fais l'addition entre 2 multiples de 4?

76 - Élève 14 : [*Il pose les calculs « 4 + 4 » et « 4 + 8 »*] Oui, je pense, ça marche, quand on fait chaque multiple plus le... Par exemple, si on prend un multiple de 5 plus un autre multiple de 5, ça donnera tous... Ça donnera de toute façon un multiple de 5. Si on prend un multiple de 7, et on fait plus un autre multiple de 7, ça donnera toujours un multiple de 7. Je pense, ça marche pour tous les multiples.

77 - Chercheuse : Et pourquoi?

78 - Élève 14 : Parce que c'est comme ça qu'on a fait où il y avait... Je crois que c'était... Oui, c'est possible que ça soit là. Avec les chiffres pairs, c'est pareil. Quand on fait 4 plus 4, ça fera forcément 8, qui est pair parce que du coup, 4 et 4, c'est pair. Et si on fait 2 chiffres pairs, c'est obligé que ça donne un nombre pair. Donc si on fait 2 chiffres d'un même multiple, c'est pareil. C'est presque... C'est obligé que ça fasse un chiffre du même multiple.

79 - Chercheuse : Oui, très bien. Ça c'était ce que je voulais te demander aujourd'hui.

80 - Élève 14 : Ok.

Nombres pairs/impairs : Élève 15

Durée de l'entretien : 11 min 31 s

1 - Chercheuse : Je te pose encore une question, ça joue? Alors, on veut comprendre si, en additionnant 2 nombres impairs, on obtient toujours un nombre pair.

2 - Élève 15 : Je ne sais pas...

3 - Chercheuse : Tu sais ce que...

4 - Élève 15 : Le nombre impair, ça doit être le même chiffre impair?

5 - Chercheuse : Pas forcément.

6 - Élève 15 : [Elle écrit « $9 + 11 = 20$ » et « $1 + 3 = 4$ »] Ça marche. Ça donne tout le temps un nombre pair.

7 - Chercheuse : Et à ton avis, ça marche toujours ?

8 - Élève 15 : Oui.

9 - Chercheuse : Pour tous les nombres ?

10 - Élève 15 : Oui.

11 - Chercheuse : Comment tu peux dire cela ?

12 - Élève 15 : Je ne sais pas... je ne sais pas.

13 - Chercheuse : Ça va continuer comme ça, ou à un certain moment on peut avoir l'addition entre 2 nombres impairs qui ne donne pas un pair ?

14 - Élève 15 : Non, ça ne s'arrête jamais.

15 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu as fait pour dire cela ?

16 - Élève 15 : [L'élève écrit « $103 + 111 = 114$ »] J'ai fait 130 [sic] plus 111.

17 - Chercheuse : D'accord. Qu'est-ce que c'est un nombre pair ou un nombre impair ?

18 - Élève 15 : Un nombre pair c'est 2, 4, 6, 8, 10, 12, et encore plus et nombre impair, c'est 1, 3, 5, 7, 9, 11 et encore plus.

19 - Chercheuse : D'accord.

20 - Élève 15 : Le 0, c'est ni pair ni impair, je crois.

21 - Chercheuse : Et, par exemple, je te pose la même question, mais si on fait l'addition entre 2 nombres pair, tu vois ? Je me P plus P pour pair plus pair.

22 - Élève 15 : Ça va donner un nombre pair.

23 - Chercheuse : Comment tu sais cela ?

24 - Élève 15 : Parce que si on fait 4 plus 4, ça donne 8. 10 plus 10, 20. 20 plus 20, 40. 40 plus 40, 80. C'est un peu... Ça donne toujours pareil, ça donne toujours un nombre pair.

25 - Chercheuse : Et comment tu peux être sûre qu'à un certain moment, ne change pas ?

26 - Élève 15 : Je ne sais pas.

27 - Chercheuse : D'accord.

28 - Élève 15 : Parce que si ça s'arrête pas avant, ça peut pas s'arrêter après, je crois. Oui, ça peut mais... Parce qu'il y a tout le temps le 1 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 qui sont devant. Alors, ça ne peut pas être... Si on calcule ça, c'est le dernier chiffre qui compte. Ouais, c'est le dernier chiffre qui compte. Si c'est un chiffre à deux nombres, je crois, alors si on fait ça sur les premiers, sur les 9 premiers ça nous donne ça.

- 29 - **Chercheuse** : Oui, d'accord. Et alors, si on fait impair... c'est un 1 de impair plus pair.
- 30 - **Élève 15** : Ça donne impair ou pair, ça dépend.
- 31 - **Chercheuse** : De quoi?
- 32 - **Élève 15** : Des chiffres? Je crois. 1 plus 3, 4. Mais si on fait 3... Je ne sais plus quel calcul j'ai fait dans ma tête. Non, si on fait 2 plus 3, ça donne 5. 2 plus 1, ça donne 3. Ça dépend. Non, c'est impair tout le temps. Je ne sais pas?
- 33 - **Chercheuse** : C'est impair ou c'est pair ou ça dépend? Essaie, prends ton temps, réfléchis.
- 34 - **Élève 15** : C'est tout le temps impair.
- 35 - **Chercheuse** : Comment t'as choisi cette réponse?
- 36 - **Élève 15** : J'ai fait des calculs dans ma tête.
- 37 - **Chercheuse** : Lequel, tu te rappelles?
- 38 - **Élève 15** : J'ai fait les calculs que j'ai dit, et après j'ai fait 8 plus 9, qui donne 17. En si on fait 7 plus 2, ça donne 9. C'est des calculs, ça donne tout le temps impair.
- 39 - **Chercheuse** : Et si on a pair plus impair.
- 40 - **Élève 15** : C'est pareil qu'impair plus pair.
- 41 - **Chercheuse** : D'accord. Et alors, je te pose encore une question. En additionnant 2 multiples de 3.
- 42 - **Élève 15** : Si c'est 9...
- 43 - **Chercheuse** : Par exemple, oui.
- 44 - **Élève 15** : C'est 15 parce que c'est pair et impair, ça doit être un chiffre impair.
- 45 - **Chercheuse** : Pourquoi ça doit être un chiffre impair?
- 46 - **Élève 15** : J'ai calculé. Et c'est un chiffre impair.
- 47 - **Chercheuse** : D'accord, et c'est toujours comme ça?
- 48 - **Élève 15** : Si on a dit avant, oui.
- 49 - **Chercheuse** : Comment tu sais?
- 50 - **Élève 15** : Parce que si on calcule des chiffres pair et impair ça donne tout le temps un chiffre impair.
- 51 - **Chercheuse** : Mais attention, parce que cette fois, on n'a pas de chiffres pair impair. On a 2 nombres qui sont multiples de 3.
- 52 - **Élève 15** : Oui, mais là j'ai fait 2 chiffres... Un chiffre impair et un chiffre pair. Mais si je fais 6 et 12, ça nous donne...
- 53 - **Chercheuse** : Tu peux écrire si tu veux, tu n'es pas obligé de tout faire à l'orale.
- 54 - **Élève 15** : 18. C'est un chiffre pair, là. Ça dépend pour les multiples.
- 55 - **Chercheuse** : Alors... Je te pose une autre question. Ça va? Pas trop fatiguée?

- 56 - Élève 15 : Non, c'est juste qu'on vient de faire maths.
- 57 - Chercheuse : Ah, c'est vrai?
- 58 - Élève 15 : Deux périodes de maths.
- 59 - Chercheuse : Donc là, journée maths! C'est intens, ein?! Qu'est-ce que vous avez fait ce matin?
- 60 - Élève 15 : On a calculé le périmètre et l'aire de quelques figures.
- 61 - Chercheuse : Lesquelles?
- 62 - Élève 15 : Des triangles, des figures à l'intérieur d'autres figures, des trapèzes. Une figure avec plusieurs figures à l'intérieur, il y avait un trapèze, des triangles...
- 63 - Chercheuse : T'aimes ou pas trop?
- 64 - Élève 15 : Ça va. Il neige!
- 65 - Chercheuse : Il neige!
- 66 - Élève 15 : C'est de la pluie ou de la neige?
- 67 - Chercheuse : Peut-être c'est un peu un mélange des deux. Regarde cette question, en additionnant de 2 multiple de 3, est ce qu'on obtient toujours un multiple de 3?
- 68 - Élève 15 : Oui, oui, je crois, parce que les 2 chiffres qu'on a multiplié ça donnait 15 et 18 et c'est des multiples de 3.
- 69 - Chercheuse : Et tu sais donner une explication à cela?
- 70 - Élève 15 : Non. Non, je ne sais pas.
- 71 - Chercheuse : Et si on fait l'addition entre 2 multiples de 4, par exemple. Le résultat est un multiple de 4 ou pas?
- 72 - Élève 15 : 4 et 8, par exemple. Ça donne 12. Et c'est aussi un multiple de 4, parce que en faisant 3 fois 4, ça donne 12.
- 73 - Chercheuse : D'accord et à ton avis, c'est toujours comme ça quand je fais l'addition entre 2 multiples de 4?
- 74 - Élève 15 : Oui, je crois.
- 75 - Chercheuse : Pourquoi?
- 76 - Élève 15 : Je ne sais pas.
- 77 - Chercheuse : D'accord, voilà, ça c'était ce que je voulais te demander aujourd'hui. T'as quelques questions?
- 78 - Élève 15 : Non.
- 79 - Chercheuse : C'est bon? Alors j'arrête l'enregistrement.

Nombres pairs/impairs : Élève 16

Durée de l'entretien : 11 min 31 s

- 1 - **Chercheuse** : Ok, d'accord. Alors je prends ça. Maintenant, on veut comprendre si, en additionnant 2 nombres impairs, on obtient toujours un nombre pair. Tu sais ce qu'est pair et impair?
- 2 - **Élève 16** : Oui.
- 3 - **Chercheuse** : Qu'est-ce que c'est?
- 4 - **Élève 16** : Impair c'est tout ce qui finit par 1, 3, 5, 7 et 9. Et pair c'est ce qui finit par 0, 2, 4, 6, 8.
- 5 - **Chercheuse** : D'accord.
- 6 - **Élève 16** : Oui, ça fait toujours un nombre pair.
- 7 - **Chercheuse** : Comment tu sais? Qu'est-ce que tu as fait dans ta tête pour dire cela?
- 8 - **Élève 16** : J'ai essayé plusieurs calculs avec deux nombres impairs et ça donnait toujours des nombres pairs. Mais peut-être qu'il y a des exceptions.
- 9 - **Chercheuse** : Comment être sûr qu'il n'y a pas d'exceptions?
- 10 - **Élève 16** : Mettre tous les nombres pairs et tous les nombres impairs et tous les calculer ensemble.
- 11 - **Chercheuse** : Par exemple, comment tu ferais? Vas-y, tu peux écrire!
- 12 - **Élève 16** : [*L'élève écrit une première ligne avec les pairs « 0 2 4 6 8 » et une deuxième ligne « 1 3 5 7 9 »*] Et du coup on les fait tous. Là ça fait [*en reliant « 0 » et « 1 » et après en se rendant compte que c'est 2 impairs qu'elle doit prendre en considération*]... Ben non, en fait. Là ça fait 3 plus [*elle relie le « 1 » avec les autres impairs*]... 1 plus 3 ça fait 4. Là si on fait fait 1 plus 5, ça fait 6. 1 plus 7, ça fait 8. Là ça fait 10 [*en reliant « 1 » et « 9 »*]. Ici [*elle relie le « 3 » avec les autres impairs*], ça fait toujours 4. Là, ça fait 8. Ici ça fait 10. Et là, ça fait 12. Et 5 [*elle relie le « 5 » avec tous les autres*] ici, ça fait 6. Là ça fait 12. Ici, ça fait 14. [*Elle relie le « 7 »*] 7 plus 1 ça fait 8. 7 plus 3 ça fait 10. 7 plus 5, 12. 7 plus 9, 16. Et du coup [*elle passe au « 9 »*] 9 plus 7, 16. 9 plus 5, 14. 9 plus 3, 12. 9 plus 1, 10.
- 13 - **Chercheuse** : Et donc, après avoir fait cela, tu peux conclure que si on fait l'addition entre tous les nombres, entre n'importe quels 2 nombres impairs, on obtient un pair?
- 14 - **Élève 16** : Oui.
- 15 - **Chercheuse** : Pourquoi tu peux le conclure aussi pour des grands nombres, par exemple?
- 16 - **Élève 16** : Parce que les grands nombres, ce qui compte pour que ça soit pair ou impair c'est toujours le dernier chiffre à la fin. Et comme le dernier chiffres à la fin, il est soit pair soit impair. Et c'est un de cela [*en pointant sa ligne des nombres impairs*].

- 17 - **Chercheuse** : Ouais, alors je te pose la question qu'est-ce qui se passe si on a pair plus pair? P plus P, donc pair plus pair.
- 18 - **Élève 16** : On peut faire la même chose ici [*en pointant sa ligne de nombres pairs*]. Là, ça fait 2 [*elle relie le « 0 » aux autres nombres pairs*]. Ici, ça fait 4, là 6 et là 8. Là fait 6 [*elle relie le « 2 » aux autres*] ici, ça fait 8. Ça fait toujours pair.
- 19 - **Chercheuse** : D'accord. Et si j'ai l d'impair avec un pair.
- 20 - **Élève 16** : Ça donne toujours impair.
- 21 - **Chercheuse** : Comment tu sais?
- 22 - **Élève 16** : Parce que quand c'est un chiffre impair, c'est forcément impair.
- 23 - **Chercheuse** : Pardon?
- 24 - **Élève 16** : Si le dernier chiffre, il est un impair... Quand il y a impair et pair ça sera forcément impair parce qu'il y a un nombre impair.
- 25 - **Chercheuse** : Ok, si je fais pair plus impair?
- 26 - **Élève 16** : C'est la même chose.
- 27 - **Chercheuse** : Pourquoi?
- 28 - **Élève 16** : C'est la même chose qu'impair et pairs.
- 29 - **Chercheuse** : D'accord, je vois bien ce que tu veux dire. Alors je te pose une autre question. Ça va?
- 30 - **Élève 16** : Oui.
- 31 - **Chercheuse** : Bien [*elle écrit « en additionnant deux multiples de trois, est-ce qu'on obtient toujours un multiple de trois? »*]. Maintenant la question est en additionnant 2 multiples de 3, est-ce qu'on obtient toujours un multiple de 3?
- 32 - **Élève 16** : Oui.
- 33 - **Chercheuse** : Comment tu sais?
- 34 - **Élève 16** : Parce que... Non, je ne sais pas, attendez.
- 35 - **Chercheuse** : Qu'est-ce que tu viens de faire?
- 36 - **Élève 16** : Je me suis trompée parce que j'ai cru que c'était quelque chose d'autre.
- 37 - **Chercheuse** : Qu'est-ce t'avais cru? Juste pour comprendre...
- 38 - **Élève 16** : En additionnant les nombres d'un multiple de 3, on obtiene toujours un multiple de 3.
- 39 - **Chercheuse** : En additionnant les nombres...?
- 40 - **Élève 16** : D'un multiple de 3. Est-e qu'on obtient toujours un multiple de 3? Mais c'est ça la question?
- 41 - **Chercheuse** : Oui, je crois bien. Si je fais l'addition entre 2 nombres et les 2 nombres sont multiples de 3. Est-ce que le résultat est un multiple de 3? La question est claire ou pas?

- 42 - Élève 16 : Oui oui.
- 43 - Chercheuse : D'accord.
- 44 - Élève 16 : Ben, oui. Je ne sais pas comment, mais oui.
- 45 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu as fait ?
- 46 - Élève 16 : J'ai pris des multiples de 3 au hasard, et je les ai additionnés.
- 47 - Chercheuse : Par exemple, lesquels ?
- 48 - Élève 16 : 9 et 12, Ça fait 21. Et 21 c'est une multiple de 3.
- 49 - Chercheuse : D'accord. Et puis tu as juste fait ce calcul-là ou t'en as fait...
- 50 - Élève 16 : Non, j'en ait fait plus.
- 51 - Chercheuse : Tu te rappelles lesquels ?
- 52 - Élève 16 : J'ai fait 6 plus 33, je crois. Et ça faisait 36... Non...
- 53 - Chercheuse : Tu peux écrire.
- 54 - Élève 16 : 6 et 33 ça fait 39 qui est un multiple de 3.
- 55 - Chercheuse : Oui, mais est-ce qu'on peut être sûr avec ce que t'as fait, que cela marche toujours ?
- 56 - Élève 16 : Avec ce que j'ai fait je vais pas été sûre.
- 57 - Chercheuse : D'accord. Et à ton avis, ça continue comme ça ou pas ?
- 58 - Élève 16 : Ben, je sais pas. Je pense que oui.
- 59 - Chercheuse : Pourquoi tu penses que oui ?
- 60 - Élève 16 : Parce que un nombre, un grand nombre, pour savoir si c'est un multiple de 3, on doit les additionner est voir si c'est un multiple de 3. Donc en additionat un multiple de 3 avec un multiple de 3, j'ai la façons de faire un multiple de 3.
- 61 - Chercheuse : D'accord, ok. Et si je fais l'addition entre 2 multiples de 5 ? Le résultat est un multiple de 5 ou pas ?
- 62 - Élève 16 : Oui.
- 63 - Chercheuse : Comment tu sais ?
- 64 - Élève 16 : Parce que un multiple de 5, ça finit forcément par 0, 5. Et si on addition un multiple de 5, c'est soit 0, soit avec 5.
- 65 - Chercheuse : Oui, je vois bien. Et alors, si je prends 2 multiples de 4 ? Le résultat est un multiples de 4 au pas ?
- 66 - Élève 16 : Oui. Mais je ne suis pas sûre.
- 67 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu as fait en tête ?
- 68 - Élève 16 : J'ai fait 16 plus 4. Ça fait 22. 22 c'est pas un multiple de 4.
- 69 - Chercheuse : 16 plus 4 ?
- 70 - Élève 16 : Ah, ça fait 20 !
- 71 - Chercheuse : Oui.

72 - Élève 16 : Oui, mais oui, c'est un multiple de 4, 20. Je ne sais pas.

73 - Chercheuse : Mais à ton avis on continue comme ça, ou c'est juste pour ce petit exemple que tu as fait ?

74 - Élève 16 : Je ne sais pas

75 - Chercheuse : D'accord, alors ça c'est ce que je voulais te demander aujourd'hui. Tu as quelques questions ?

76 - Élève 16 : Non.

77 - Chercheuse : On arrête, alors ?

78 - Élève 16 : Oui.

Nombres pairs/impairs : Élève 17

Durée de l'entretien : 10 min 04 s

1 - Chercheuse : D'accord. Ok. Je reprends et on change de tâche. On se demande si en additionnant 2 nombres impairs, on obtient toujours un nombre pair.

2 - Élève 17 : Des nombre impair sans virgule ?

3 - Chercheuse : Qu'est ce que c'est un nombre pair ? Ou un nombre impair ?

4 - Élève 17 : Un nombre pair c'est un qui finit par 0, 2, 4, 6 ou 8 [*l'élève écrit ces chiffres tout en les dictant*] et un nombre impair, c'est les autres. Donc 1, 3, 5, 7, 9 [*l'élève écrit ces chiffres tout en les dictant*]. Et donc... Mais des nombres impairs avec virgule ou pas ?

5 - Chercheuse : Est-ce que... Alors quand parle d'un nombre pair ou impair, on se réfère seulement aux nombres entiers.

6 - Élève 17 : Hyn ? Je n'ai pas compris.

7 - Chercheuse : On se réfère seulement aux nombres entiers. Qu'est ce que ça serait pour toi un nombre impair avec virgule ?

8 - Élève 17 : Bah je ne sais pas... 3,5, par exemple.

9 - Chercheuse : D'accord, et 3,6, c'est un nombre pair ou impair ?

10 - Élève 17 : C'est un nombre... Bonne question. C'est un nombre impair, je pense, parce que devant la virgule, il est... Celui qui est avant la virgule, il est plus grand que celui d'après. Donc je me réfère... Je prendrais par rapport à celui-là [*l'élève pointe le chiffre 3*], mais je ne sais pas.

11 - Chercheuse : Alors tu peux répéter juste ? Tu as dis, ça c'est un nombre ?

12 - Élève 17 : Donc moi, je dirais que c'est impair.

13 - Chercheuse : D'accord. Ok.

14 - Élève 17 : Mais... Parce qu'il y a le 3. Non ! Non ! C'est pair ! C'est pair parce que... Non ! Non ! C'es pair ! Parce que ça finit par 6 et il doit finir par ça [*l'élève entoure le chiffre « 6 »*]. Et donc, si on enlève la virgule, ce sera pair.

- 15 - **Chercheuse** : D'accord, ok, je comprends. Donc, est-ce que, quand on fait l'addition... de 2 nombres impairs, on obtient toujours un nombre pair ?
- 16 - **Élève 17** : Avec ceux-là, oui [*en pointant « 1, 3, 5, 7, 9 »*].
- 17 - **Chercheuse** : Comment tu sais ?
- 18 - **Élève 17** : Parce que j'ai essayé !
- 19 - **Chercheuse** : Qu'est-ce que tu as essayé ?
- 20 - **Élève 17** : J'ai essayé bah 1 plus 9, ça fait 10. 3 plus 9, ça fait 12. 5 plus 9, ça fait 14. 7 plus 9 ça fait 16. 1 plus 3, ça fait 4. 1 plus 5 ça fait 6. 1 plus 7, ça fait 8. 1 plus 9, ça fait 10. Après, si on essaye tout, bah ça va tout donner pair. Mais si c'est des nombres avec virgules.... Genre 3,5. Bah pas forcément 3,5 plus 3,5, par exemple, ça va donner 7. [*L'élève écrit un calcul en colonne « $3,5 + 3,5 = 7$ »*] Mais après, 3,5 plus 2,3 ça donne un nombre pair parce que ça finit par 8 [*tout en le dictant, l'élève écrit son calcul en colonne « $3,5 + 2,3 = 5,8$ » puis elle entoure le 8 de sa réponse*].
- 21 - **Chercheuse** : Ouais, ouais.
- 22 - **Élève 17** : Mais si on fait 2,1 plus 2,9, et bah ça va donner nombre impair [*tout en dictant son calcul, l'élève l'écrit en colonne : « $2,1 + 2,9 = 5,0$ »*].
- 23 - **Chercheuse** : Oui, je vois ce que tu fais. Alors peut-être pour répondre à cette question, on essaye juste de prendre en considération seulement des nombres entiers.
- 24 - **Élève 17** : Alors oui, c'est tout le temps des nombres pairs.
- 25 - **Chercheuse** : Comment tu sais que c'est vraiment tout le temps ?
- 26 - **Élève 17** : Bah, parce que j'ai essayé... ?
- 27 - **Chercheuse** : Oui mais tu as essayé juste avec quelques nombres !
- 28 - **Élève 17** : Oui, mais peut essayer toute la fin... Ça, je ne sais pas si je vais essayer le 3. Donc, 3 plus 1 ça fait 4. 3 plus 5 ça fait 8. 3 plus 7 ça fait 10. 3 plus 9 ça fait 12. Ça, c'est bon. 5 plus 1. Bon de toute manière, on a déjà fait. Mais c'est pas grave. 5 plus 1 ça fait 6. 5 plus 3 ça fait 8. 5 plus 7, ça fait 12. Et 5 plus 9, ça fait 14. 7 plus 1 ça fait 8, ça fait 10, ça fait 12 et ça fait 16, donc oui !
- 29 - **Chercheuse** : Est-ce que cela est vrai aussi pour les nombres à deux chiffres, par exemple.
- 30 - **Élève 17** : Ah, ça je n'ai pas essayé. 25 plus 37, au tout hasard, ça donne un nombre pair aussi [*L'élève écrit son calcul en colonne « $25 + 37 = 62$ »*]. Ça donne 62. Mais après si on essaie... Je vais essayer un truc, faut juste que je réfléchisse [*l'élève écrit un début de calcul en colonne : « $13+$ »*]. Oui. ça donnera tout le temps des nombres pairs, parce que ça finira quand même par ces chiffres [*l'élève pointe la suite de chiffre pairs qu'elle avait écrit auparavant, soit : « 0, 2, 4,*

6, 8 »].

31 - Chercheuse : D'accord. Et si j'avais par exemple... Pair plus pair [*la chercheuse tend une nouvelle feuille à l'élève avec noté dessus : « P + P » ?*]

32 - Élève 17 : Là, ça donne... ça donne pair aussi [*l'élève écrit = paire*].

33 - Chercheuse : Comment tu sais ?

34 - Élève 17 : Bah parce que j'ai fait deux exemples. Par exemple, 50 plus 50, ça donne 100 [*l'élève écrit le calcul « 50 + 50 = 100 »*] et c'est pair. Et 24 plus 26, ça donne 48 [*l'élève, tout en dictant son calcul, l'écrit : « 24 + 26 = 48 »*]. Et c'est... Qu'est-ce que raconte ? c'est 50 et c'est pair aussi [*l'élève trace sa réponse 48 et la remplace avec 50*].

35 - Chercheuse : D'accord, alors maintenant, je te pose la question... J'arrive tout de suite, hyn ! En additionnant 2 multiples de 3, qu'est ce qu'on peut dire du résultat ? Est-ce qu'on obtient un multiple de 3 ou pas ?

36 - Élève 17 : Si on obtient un multiple de 3 ? Bah oui, parce que c'était de toute manière 2 multiples de 3. Donc ce sera forcément des multiples de 3.

37 - Chercheuse : Pourquoi ?

38 - Élève 17 : Parce que les deux sont multiples de 3. Si... comment expliquer ? Si on prend un multiple de 3, il sera de toute manière multiple de 3. Donc, si on additionne avec un autre multiple de 3, ce sera aussi un multiple de 3, le deuxième. Donc le résultat, ce sera forcément multiple de 3.

39 - Chercheuse : Mais si tu veux l'expliquer à quelqu'un qui n'a pas compris. Qui ne veut pas y croire. Comment lui expliquer que c'est vrai ?

40 - Élève 17 : Bah je le le prouverai, moi ! Mais...

41 - Chercheuse : Comment ?

42 - Élève 17 : En prenant 2 multiples 3. 9 plus 12, ça donne 21. Et c'est un multiple de 3, 21 [*l'élève écrit son calcul sur la feuille « 9 + 12 = 21 »*].

43 - Chercheuse : Et ? Mais si il te dit oui, d'accord, mais c'est juste un exemple. Comment en être sûr que...

44 - Élève 17 : Bah je ferai d'autres exemples.

45 - Chercheuse : Oui.

46 - Élève 17 : Je ne sais pas comment expliquer, mais c'est assez logique. Parce que si celui-là est multiple de 3 [*l'élève pointe au chiffre « 9 » de son calcul, puis elle note en dessous de son calcul x*], on l'additionne par un autre multiple de 3 [*l'élève écrit « +x = »*], alors ça va forcément faire quelque chose qui serait multiple de 3. Parce qu'il y a plusieurs... Il y a plusieurs fois 3 dedans dedans. [*l'élève entoure le premier x*], là aussi [*l'élève entoure le deuxième x*]. Donc là, il y aura un nombre aussi avec plusieurs fois 3 dedans l'élève écrit « ... » après « X + X = ». Donc,

ce sera forcément aussi un multiple de 3.

47 - Chercheuse : Oui, je vois bien. D'accord, merci beaucoup. C'est ce que je voulais te demander aujourd'hui. T'as quelques questions?

48 - Élève 17 : Non, je ne crois pas.

49 - Chercheuse : C'est bon pour toi?

50 - Élève 17 : Oui.

Nombres pairs/impairs : Élève 18

Durée de l'entretien : 13 min 34 s

1 - Chercheuse : Ça joue? Je peux prendre [*en parlant de la feuille avec la consigne*]? Une petite question pour toi. Alors. On veut comprendre si en additionnant 2 nombres impairs, on obtient toujours un nombre pair. Tu te rappelles ce que c'est un nombre pair, un nombre impair?

2 - Elève 18 : Oui, oui bien sûr. Bah en soi... en faisant des exemples. Par exemple 3 plus 3 ça fait 6. 3 plus 7 ça fait 10. 3 plus 11 ça fait 14. En soi oui, je pense que ça sera toujours comme ça, c'est qu'il y a quelque chose de logique derrière. En tout cas, je n'ai pas d'exemple qui me vient, qui, où ce serait pas possible.

3 - Chercheuse : Et à ton avis, ça marche toujours? Où juste pour les exemples que tu as fait?

4 - Elève 18 : Je pense que ça marche toujours.

5 - Chercheuse : Pourquoi?

6 - Elève 18 : Je pense, c'est quelque chose de logique. Par exemple, je ne sais pas si c'est parce que les nombres impairs en comptant, ils sont toujours à intervalles plus ou moins réguliers. Du coup, ça donnera de toute manière un nombre pair, si on les additionne, je ne sais pas.

7 - Chercheuse : C'est à dire que les nombres...

8 - Elève 18 : Je ne sais pas s'il y a quelque chose par rapport à l'intervalle entre un nombre pair et un nombre impair.

9 - Chercheuse : Quel est l'intervalle entre un nombre pair et impair?

10 - Elève 18 : Entre 0 et 3, c'est 3 et entre 3 et 9 c'est 3 aussi entre... bah du coup après, ça ne marche pas parce qu'il y a. Il y a onze qui est impair... C'est un impair?

11 - Chercheuse : Oui

12 - Elève 18 : Ouais, mais du coup, je sais pas. Je ne sais pas si c'est quelque chose comme ça.

13 - Chercheuse : Qu'est-ce que tu fais là, alors? T'as pris 0 et 3 comme premier exemple et t'as fait l'intervalle, disons... T'as dit que c'était 3. Et pourquoi tu a

pris 0 et 3?

14 - **Elève 18** : C'est les premiers.

15 - **Chercheuse** : Ouais, c'est 3 c'est un nombre impair. Et 0?

16 - **Elève 18** : 0, c'est le premier nombre c'est.. enfin c'est... Quand on commence à compter on commence par 0.

17 - **Chercheuse** : Ouais, mais le nombre pourquoi tu l'as choisi? A quoi...Je n'avais pas compris à quoi te sert cet intervalle? 0-3.

18 - **Elève 18** : Je sais pas non plus. Je ne sais pas trop, j'essaie, mais...

19 - **Chercheuse** : Je ne dis pas que ce n'est pas un correct. J'aimerais comprendre ton raisonnement.

20 - **Elève 18** : En soi, je vois pas comment expliquer pourquoi c'est comme ça, parce que c'est quelque chose de logique. En additionnant 2 nombres pairs, on aura toujours un nombre pair en additionnant de 2 nombres impairs, on aura toujours un nombre pair et en additionnant nombre impair, un nombre pair, c'est... On ne sait pas tout le temps. Du coup, si je fais un lien avec un truc qui n'a aucun sens, mais c'est comme avec les plus et moins. Un plus et un plus, ça fait plus, un moins et un moins, ça fait plus. Et du coup, un plus et un moins ça fait moins.

21 - **Chercheuse** : Ouais. D'accord. Et a ton avis, alors, t'as dis, un nombre pair, plus un nombre pair, ça donne un nombre pair. C'est ça que tu as dis oui? Et? A ton avis pourquoi? Comment... Déjà, comment t'as fait à dire celà?

22 - **Elève 18** : Parce que les nombres pair finissent que par 0, 2, 4, 6 ou 8. Et les possibilités entre ces 4 nombres, c'est forcément les additionnant, ça donne forcément un nombre qui fini par 0, 2, 4, 6 ou 8. *[Une personne externe à l'entretien rentre dans la salle et tient une courte discussion avec la chercheuse].*

23 - **Chercheuse** : Pardon. Qu'est-ce que tu disais?

24 - **Elève 18** : Du coup, c'est toujours pair parce que un nombre pair ne peut finir que par 0, 2, 4, 6, 8 et en additionnant 0, 2, 4, 6, 8 à un nombre qui finit déjà par ces chiffres, bah, ça donnera toujours un autre chiffre qui finit par ces chiffres et du coup, ça sera tout le temps pair.

25 - **Chercheuse** : D'accord, oui. Ok, donc, pour impair plus impair?

26 - **Elève 18** : Du coup là, un nombre impair, il peut se finir que par 3, 7, 9 ou 1. Et du coup, en ajoutant une fin de chiffre qui peut être qu'impair, ça finira de toute manière par être un chiffre pair. Par exemple, en faisant 3 plus 3 ou 3 plus 7 ou 3 plus 9... du coup là fait 11. Mais oui...

27 - **Chercheuse** : Oui, ça fait 11 *[sic]*. Mais le dernier chiffre, c'est à nouveau 1.

28 - **Elève 18** : Oui.

- 29 - Chercheuse :** C'était quoi le calcul? 4 plus 7? Tu as fait quoi comme calcul, tu as dit? 7 plus...?
- 30 - Elève 18 :** 7 plus 3 aussi c'est du coup, ça finit par 0, ça fait quelque chose d'im-pair.
- 31 - Chercheuse :** Ouais. Alors maintenant, je te pose une autre question. On se de-mande si en additionnant 2 nombres qui sont des multiples de 3, on obtient encore un multiple de 3. La question est-elle claire?
- 32 - Elève 18 :** Oui, mais du coup, la réponse peut-être que j'ai mal compris, mais la réponse elle est évidente parce que c'est comme ça que les multiples marchent à chaque fois, on rajoute, du même... Du même... du coup, du même multiple. C'est donc oui. Parce que multiples de 3, ça fait 3, 6, 9, 12, et tout. Donc ça donne... Ah je vois. D'accord, en additionnant par exemple, 3 et 12. Est-ce que ça donne un multiple de 3?
- 33 - Chercheuse :** Oui, exactement.
- 34 - Elève 18 :** En additionnant bah... En soi, oui. Mais là, si je fais avec les exemples que j'ai, genre, 3 plus 3, ça fait 6; 3 plus 9, ça fait 12 ou 12 plus 6, ça fait 18. Et du coup, bah oui, parce que c'est comme si on revenait au calcul qui avait eu au tout début. C'est comme si on rajoutait, genre par exemple... Plus quelque chose fois 3. Je ne sais pas. C'est comme si, du coup, c'est comme si on rajoutait un multiple de 3 fois quelque chose du coup... Ça marchera toujours.
- 35 - Chercheuse :** Ouais, ouais, je vois bien. Et avec les multiples de 4? Si je fais l'ad-dition entre 2 multiples de 4?
- 36 - Elève 18 :** Je dirais aussi ça marche du même principe.
- 37 - Chercheuse :** Ça veut dire que le résultat...
- 38 - Elève 18 :** Le résultat, ça sera toujours un multiple de 4. Je crois bien.
- 39 - Chercheuse :** Oui. Et là... pour quelles raisons?
- 40 - Elève 18 :** Est-ce que du coup, c'est comme si on prenait par exemple...C'est comme si on faisait le calcul du début. Par exemple, 1 fois 4 plus 2 fois 4. C'est rajouter des multiples ça donne, de toute manière, un chiffre qui fait partie des multiples. Je ne sais pas...
- 41 - Chercheuse :** Et cela est vrai aussi pour... pour tous les multiples de 4 ou juste pour les premiers multiples de 4?
- 42 - Elève 18 :** Je pense tous parce qu'après, comme c'est des chiffres pairs, ils fi-nissent tout le temps par le même nombre... Ils ont toujours par exemple 4, 8...
- 43 - Chercheuse :** Oui. Fais attention parce que si on fait.. Essaie d'écrire... J'écris juste ici ce qu'on fait 4. Essaie d'écrire le livret de 4. .

44 - **Elève 18** : [L'élève écrit sur la feuille « 0; 4; 8; 12; 16; 20 »].

45 - **Chercheuse** : Voilà, et ainsi de suite... Là, tu viens de dire qu'il faut regarder le dernier chiffre, n'est-ce pas? Fais attention parce que, tu vois, ici, il y a un 4 comme dernier chiffre mais il n'y a pas le 14.

46 - **Elève 18** : Ah oui, je vois ce que... Dans ce cas, avec 4, je ne sais pas si ça marche. Est-ce que c'est... Du coup, c'est des chiffres pairs mais... Du coup, ça me met en doute. J'y avais pas pensé. Du coup, en additionnant 2 multiples de 4 est-ce que ça reste un... Euh oui. Oui, ça fonctionne de la même manière, même du coup, si on ne regarde pas comme j'avais dit le chiffre à la fin... ça fonctionne de la même manière que si je prenais, du coup les calculs au début, c'est comme si je rajoutais 4 fois quelque chose et du coup, c'est comme rajouter en soi 4 plus 4 plus 4... Et du coup, ça fonctionne comme si je continuais à les écrire comme ça [en pointant sa liste de multiples de 4]. On va de toute manière tomber sur un des chiffres...

47 - **Chercheuse** : Ouais d'accord. Parfait. Bon merci beaucoup. C'est ce que je voulais te demander aujourd'hui. T'as quelques questions?

48 - **Elève 18** : Est-ce que c'est juste ce que j'ai dit? Ou est-ce que j'ai vraiment dit n'importe quoi?

Nombres pairs/impairs : Élève 21

Durée de l'entretien : 12 min 20 s

1 - **Chercheuse** : Alors j'ai une dernière tâche. Si, ça continue, tout va bien. On veut comprendre, là... Si en additionnant 2 nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair? La question est-elle claire?

2 - **Élève 21** : Oui...

3 - **Chercheuse** : Tu te rappelles qu'est-ce que c'est un nombre pair?

4 - **Élève 21** : Les pairs, c'est 2, 4, 6, 8. C'est ça? Et impair, c'est 3... 2... 7... 2, 3, 7 etc...

5 - **Chercheuse** : Alors, tu as dit que les nombres pairs, c'est?

6 - **Élève 21** : C'est 2, 4, 6, 8, etc.

7 - **Chercheuse** : D'accord. Et quand tu dis, et caetera, qu'est-ce que tu entends?

8 - **Élève 21** : Que ça peut aller à l'infini, mais il faut toujours que ça soit par 2. Qu'on puisse les diviser par 2.

9 - **Chercheuse** : Donc, les nombres pairs, c'est des nombres qu'on peut diviser par 2?

10 - **Élève 21** : Oui, on peut toujours les diviser en deux, tandis que les nombres impairs, par exemple 3, ça sera pas égal si on les divise en 2, c'est à dire qu'il y en a 2 et 1. Tandis que si c'était 4, il y a 2 et 2, et c'est des 2 côtés la même chose.

11 - Chercheuse : Et 5 ?

12 - Élève 21 : Et 5 non, justement, il y aurait 3 et 2. Du coup, ça ne marche pas. Du coup c'est les nombres impairs.

13 - Chercheuse : Très bien, oui, c'est ça. Donc, on se demande si en additionnant 2 nombres impairs, on obtient un nombre pair.

14 - Élève 21 : Je dirais que non. Fin... Non, c'est pas vrai, si on fait 3 plus 3, par exemple, ça ferait 6 et 6, ça donne un nombre pair parce que si on prend 3 bâtonnets, plus 3 bâtonnets [*elle dessine 2 groupes de 3 bâtonnets*]... C'est pour dire les 3, il y en avait 2 avant dans une paire, en soi, qui était tout seul [*en entourant l'unité pas « en couple » de chaque groupe de 3*]. Puis du coup, là, ça en fait 1 [*elle dessine les 6 bâtonnets en groupes de 2 et entoure ensemble les 2 unités pas « en couple » précédemment*]. Du coup, on peut en faire un nouveau.

15 - Chercheuse : Ok, ok, et donc ok, très bien. Et donc, est-ce que c'est vrai ou pas ?

16 - Élève 21 : En principe, si on fait à chaque fois on additionne juste 2 nombres, oui, ça marche.

17 - Chercheuse : 2 nombres, comment ?

18 - Élève 21 : 2 nombres communs, oui.

19 - Chercheuse : Non, pardon, pair ou impair ?

20 - Élève 21 : Impairs. Vu qu'il en y a toujours 1 dans les nombres impairs qui est tout seul, mais en mettant 2 ensemble, ce qui est tout seul, il n'est plus tout seul.

21 - Chercheuse : Ok, très bien. Et alors, qu'est-ce qui se passe, par contre, si je fais un nombre pair plus un nombre impair... Non, pardon, j'ai mal dit. Si je fais un nombre pair, plus un nombre pair ? J'ai mis P de pair.

22 - Élève 21 : Ça fait toujours pair parce qu'il n'y a rien qui change. C'est toujours... S'il y a 6 plus 6, ça fait 12. 12 c'est à nouveau un nombre pair parce qu'il n'y en a aucun qui est tout seul qui pourrait se retrouver à 2. Il y a toujours... Ils sont toujours 2 par 2. Même s'ils sont 2 fois plus, ils restent toujours par 2.

23 - Chercheuse : Ok, très bien. Et si je fais impair plus pair ?

24 - Élève 21 : Impair plus pair, ça va donner quelque chose d'impair parce que, même si on fait plus, il restera toujours 1 qui est tout seul du nombre impair parce que le nombre pair, il est toujours complet, il n'en restera pas 1 pour compléter le nombre impair.

25 - Chercheuse : Et si je te demande, pair plus impair ?

26 - Élève 21 : En fait c'est exactement la même chose parce que qu'il soit avant ou après, il y en a toujours un qui est tout seul.

27 - Chercheuse : Très bien. Tu te rappelles comment ça s'appelle cette propriété,

c'est-à-dire de mettre le terme avant ou après l'addition?

28 - Élève 21 : Non.

29 - Chercheuse : Ça s'appelle commutative. Tu sais, tu déplaces...

30 - Élève 21 : Ok...

31 - Chercheuse : Tu as déjà entendu parler de cette propriété?

32 - Élève 21 : Non, je ne crois pas. Ou je ne sais pas, des fois ils utilisent d'autres noms, mais je ne crois pas.

33 - Chercheuse : D'accord, ok. Je te pose alors une question un peu similaire [elle écrit la question]. Regarde. On se demande si, en additionnant 2 multiples de 3, on obtient toujours un multiple de 3.

34 - Élève 21 : C'est-à-dire si on faisait 3 fois 3... Hein, 3 plus 3?

35 - Chercheuse : Par exemple, oui. Tu sais ce qu'est un multiple de 3?

36 - Élève 21 : C'est quelque chose qui est dans le livret 3.

37 - Chercheuse : Oui, ok.

38 - Élève 21 : Logiquement, oui. Vu que 3 plus 3, ça fait 6 et que 6 c'est dans le livret 3. Il est tout le temps constitué de 3, ça peut être un autre livret, mais... Vu qu'à chaque fois, le livret c'est ça, c'est que c'est 4... Pour le livret 2 c'est 4, 6, 8, 10. À chaque fois, c'est à partir de 2 des chiffres. À chaque fois, ça augmente.

39 - Chercheuse : Mh mh.

40 - Élève 21 : Du coup, c'est forcément à nouveau un multiple de 3 si on fait 3 plus 3.

41 - Chercheuse : Ok, et est-ce que cela est vrai juste pour les multiples de 3?

42 - Élève 21 : Non, ça marche pour tous les autres livret.

43 - Chercheuse : D'accord. Et par exemple, dans le livret 4...

44 - Élève 21 : Dans le livre de 4, si on fait 4, plus 4 ça fait 8. Et forcément, on voit dans le livret de 4... C'est 2 fois 4, soit 4 plus 4, ça fait 8 [elle utilise son tableau de nombres].

45 - Chercheuse : D'accord. Et si on prend d'autres nombre? Autres... Genres... Toujours des multiples de 4, d'accord?

46 - Élève 21 : Mh mh.

47 - Chercheuse : Mais pas 4 et 4. Est-ce que ça marche toujours?

48 - Élève 21 : Par exemple, 4 et 16?

49 - Chercheuse : Mh mh.

50 - Élève 21 : 16, 18, 20... Oui, ça marche aussi, du coup. Si on prend un autre exemple 8 et 12. Bon, ça donne aussi 20.

51 - Chercheuse : D'accord. Es-tu sûre que ça marche pour tous les multiples de 4 ou juste les multiples que tu as contrôlés, là?

- 52 - Élève 21 : Vu que je les ai pris au hasard, mais si on prenait d'autres par exemples... Je ne sais pas, si on faisait 40 et 8, ça fait 48, ça fait 12 [*en pointant dans son tableau des multiplications la colonne qui multipliée par 4 donne 48*], du coup je pense que ça marche pour chaque multiple.
- 53 - Chercheuse : D'accord. Et donc ça marche pour chaque multiple de 4. Et comment peux-tu en être vraiment sûre sûre sûre ?
- 54 - Élève 21 : Parce qu'on sait que pour, par exemple, pour prendre l'exemple du livret 4, il y aura toujours dans le 8 ou dans le... Je ne sais pas... 44. Il aura... Ce nombre sera toujours fait à partir que de 4, en fait.
- 55 - Chercheuse : Mh mh.
- 56 - Élève 21 : Du coup, ça fait juste 44 plus 2... Fin, juste 2 fois 4.
- 57 - Chercheuse : D'accord.
- 58 - Élève 21 : C'est juste qu'il y en a plus et du coup le chiffre augmente. Mais en soi c'est toujours des chiffres constitués... Dans les livrets c'est toujours des chiffres qui sont constitués de la base de leur livret [*elle pointe ses tables de multiplications*].
- 59 - Chercheuse : Oui. Et est-ce que peut-être... Tu vois ? Là, tu avais fait des choses comme ça [*en pointant le dessin avec des bâtonnets que l'élève a utilisé dans le cas « 3 + 3 »*], des regroupements... Ça c'était pour les nombres pairs. Est-ce que ça pourrait t'aider dans ce cas-là ? Tu vois, là ? Cette représentation ?
- 60 - Élève 21 : Là c'était les impairs.
- 61 - Chercheuse : Là c'était les impairs, oui, tu avais fait les impairs pour dire que c'était de pair.
- 62 - Élève 21 : Là on cherchait à savoir si c'était pair ou impair et on pouvait avoir tout le temps... Justement, dans les livrets impair, ça ne marche pas comme dans les livrets pairs, du coup. Même si c'est... C'est toujours constitué de 3 pour le livret 3 et c'est un livret qui est impair et des fois pas vu que des fois il y a un 6, il y a un 12, voilà. Mais ça ne marche pas de la même façon qu'avec les livret pairs, même si on fait toujours 3 fois 3, ça sera toujours constitué de 3. Mais il y en a qui seront impairs et d'autres pairs, voilà.
- 63 - Chercheuse : Oui, d'accord, j'ai compris ce que tu dis. Oui, oui, oui. Parfait. Tu as quelques questions ?
- 64 - Élève 21 : Non.
- 65 - Chercheuse : Quelque chose à ajouter ?
- 66 - Élève 21 : Je crois pas.
- 67 - Chercheuse : D'accord. Alors je peux arrêter l'enregistrement.

Nombres pairs/impairs : Élève 22

Durée de l'entretien : 17 min 43 s

- 1 - **Chercheuse** : Et j'ai encore quelques questions pour toi. En additionnant 2 nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair ?
- 2 - **Élève 22** : Non. Parce que par exemple 3 plus 3 ça fait déjà 9.
- 3 - **Chercheuse** : Ok.
- 4 - **Élève 22** : Donc...
- 5 - **Chercheuse** : Si tu peux écrire si tu veux. Tu as dit...
- 6 - **Élève 22** : 3 plus 3, déjà ça fait 9, donc c'est pas toujours, mais la plupart oui [*en écrivant « 3 + 3 = 9 »*].
- 7 - **Chercheuse** : Lais là tu as fait 3 fois 3.
- 8 - **Élève 22** : Ah ouais... Ah ouais! [*Elle efface « 3 + 3 = 9 »*] Bon. Mais du coup. Oui, je crois alors oui. C'est partout un pair si [*inaudible*]. Parce que 3 plus 3, 6. 5 plus 5, 10. 7 plus 7, 14. 9 plus 9, 18 [*en écrivant les différents exemples*]. Donc oui, ça sera toujours la même chose.
- 9 - **Chercheuse** : D'accord. Et est-ce que c'est vrai même si les deux nombres impairs ne sont pas le même ?
- 10 - **Élève 22** : Comment ça ?
- 11 - **Chercheuse** : Tu vois là, tu as pris à chaque fois 3 et 3, sont le même nombre. 5 et 5. 7, 7.
- 12 - **Élève 22** : Ah. Non, je ne crois pas. Je ne sais pas, je vais essayer. Ba, déjà là ça fait 8 [*elle écrit « 5 + 3 = 8 »*], 7 plus 5, 12 [*elle écrit l'exemple*]. 9 plus 7, 16 [*elle écrit l'exemple*]. Oui, ça marche aussi.
- 13 - **Chercheuse** : Et à ton avis pourquoi ça marche ?
- 14 - **Élève 22** : Je ne sais pas. Je sais pas. Je crois que c'est parce que c'est des additions. Mais par contre, si c'est des fois, ça ne marche pas.
- 15 - **Chercheuse** : D'accord. Mais à ton avis, ça marche pour tous les nombre impairs ou juste pour les nombres que tu as essayés, là ?
- 16 - **Élève 22** : Non, je crois pour tous.
- 17 - **Chercheuse** : Et comment peut-on être sûr que ça marche pour tous les nombres ?
- 18 - **Élève 22** : On peut jessayer, mais...
- 19 - **Chercheuse** : Tu veux essayer pour tous les nombres qui existent ?
- 20 - **Élève 22** : Non, mais... Non, je ne sais pas, mais oui, je pense en vrai.
- 21 - **Chercheuse** : Mh mh.
- 22 - **Élève 22** : Je ne sais pas.

- 23 - Chercheuse :** Et qu'est-ce que c'est un nombre pair et un nombre impair ?
- 24 - Élève 22 :** Les nombres pairs, c'est ceux qui finissent par 2, 4, 6, 8, 10, voilà. Et les impairs, c'est 3, 5, 7, 9. C'est pas pareil.
- 25 - Chercheuse :** D'accord. Et alors, qu'est-ce qui se passe si je fais un nombre pair plus un autre pair ? Tu vois, j'ai écrit P et P pour pair plus pair [*en écrivant « P + P »*] ?
- 26 - Élève 22 :** C'est pareil, je crois. Parce que par exemple, 2 plus 2, 4. 10 plus 10, 20. 6 plus 6, 12 [*en écrivant les différents exemples*]. C'est pareil qu'ici. Mais... Oui, c'est bon.
- 27 - Chercheuse :** Qu'est-ce que tu pensais ?
- 28 - Élève 22 :** Du coup, c'est qu'avec les fois que ça ne marche pas, je pense.
- 29 - Chercheuse :** D'accord. Est-ce que ça marche aussi quand les 2 nombres ne sont pas le même ?
- 30 - Élève 22 :** Et oui, bah oui, du coup. Si je mets 10 plus 6, ça fera 16. Si je mets 6 plus 2, ça fera 8. Et si je mets 8 plus 4, ça fera 12 [*en écrivant les différents exemples*]. Du coup là ça marche aussi.
- 31 - Chercheuse :** Et comment peut-on être sûr que ça marche pour toutes les nombres pairs ?
- 32 - Élève 22 :** Parce que de toute façon... Je ne sais pas comment expliquer, mais... Vu que c'est toujours les nombres pairs, ça va toujours finir par les nombres pairs. Du coup, ça, on peut être sûr que ça va se finir avec un nombre pair vu que même si on les additionne avec tous les nombres pairs, ça finira toujours...
- 33 - Chercheuse :** Et pourquoi tu dis ça ? Comment tu le sais ?
- 34 - Élève 22 :** Parce que par exemple, là [*en pointant « 10 + 6 = 16 »*]. Fin... Je ne sais pas comment expliquer.
- 35 - Chercheuse :** C'est difficile à expliquer.
- 36 - Élève 22 :** Oui ! Mais... Toujours quand on les additionnera, au final, ça sera toujours un nombre pair. Même si c'est des petits nombres ou des grands nombres. Parce qu'il n'y a pas de nombre impair qui est dedans, ça sera forcément toujours pair.
- 37 - Chercheuse :** Ok. Et si je fais un nombre impair plus pair ? I de impair et P de pair [*en écrivant « I + P »*].
- 38 - Élève 22 :** En fait c'est comme ici [*en pointant « 9 + 7 = 16 »*], non ?
- 39 - Chercheuse :** C'est-à-dire ?
- 40 - Élève 22 :** Ah non, j'ai rien dit. Si je mets 2 plus 5, là ça fera déjà impairs [*en écrivant « 2 + 5 = 7 »*] donc, voilà. Si je mets 10 plus 3, ce sera impair [*elle écrit « 10 + 3 = 13 »*]. En fait, je pense que les impairs et les pairs, ce sera toujours

impair. Voilà.

41 - Chercheuse : Et pourquoi tu dis ça ?

42 - Élève 22 : Parce que vu qu'il y a... On rajoute un nombre impair au pair, ça va...
Le calcul ce ne sera pas la même chose. Ça va... Ça va rajouter du coup l'impair.
Et du coup ça sera impair.

43 - Chercheuse : D'accord. Et si on fait pair plus impair [en écrivant « $P + I$ »] ?

44 - Élève 22 : C'est aussi, c'est la même chose.

45 - Chercheuse : Mh mh. Pourquoi c'est la même chose ?

46 - Élève 22 : Si on met par exemple un 5 plus 2 ou 2 plus 5, ça sera toujours 7, ça change pas.

47 - Chercheuse : D'accord. Et alors, je te pose encore une question. Ça va ?

48 - Élève 22 : Oui.

49 - Chercheuse : Je prends juste une feuille blanche. Je t'écris la question ici, ok ?

50 - Élève 22 : Mh mh.

51 - Chercheuse : [La chercheuse écrit « En additionnant deux multiples de trois, est-ce qu'on obtient toujours un multiple de trois ? »] En additionnant 2 multiples de 3, est-ce qu'on obtient toujours un multiple de 3 ? Tu sais qu'est un multiple de 3 ?

52 - Élève 22 : Oui, c'est 3, 6, 9, c'est ça.

53 - Chercheuse : Mh mh.

54 - Élève 22 : Ben oui, je pense. Si je fais 3 fois 3, ça fait 9 [elle écrit « $3 \times 3 = 9$ »].

55 - Chercheuse : Fait attention, parce que là, c'est en additionnant.

56 - Élève 22 : Ah, oui [elle efface « $3 \times 3 = 9$ » et écrit « $3 + 3 = 6$ »]. Bah 3 plus 3, ça fait 6. 3 plus... Je ne sais pas, il y a quoi comme multiple ? Plus 6, ça fait 9. Après 9 plus 3... Mais en fait c'est les livrets. C'est pareil que les livrets [elle écrit « $2 + 6 = 9$ » et « $9 + 3 = 12$ »]. Du coup, ça sera toujours un multiple de 3.

57 - Chercheuse : Et si tu fais pas d'exemple... Est-ce que tu as en tête d'autres multiples de 3 ?

58 - Élève 22 : Mh... Il y a 15 aussi, 18.

59 - Chercheuse : Par exemple, si tu fais 15 et 18 qui sont des multiples de 3...

60 - Élève 22 : Si j'additionne les 2 ?

61 - Chercheuse : Oui. Qu'est-ce qui se passe ?

62 - Élève 22 : [Elle pose le calcul « $15 + 18 = 33$ »] C'est quand même un multiple de 3.

63 - Chercheuse : Mh mh. Et ça va être vrai pour tous...

64 - Élève 22 : Oui.

- 65 - Chercheuse : Pour tous les multiples de 3?
- 66 - Élève 22 : Oui.
- 67 - Chercheuse : Et pourquoi?
- 68 - Élève 22 : Vu que c'est comme le livret et que ça sera toujours un nombre qui fait partie des livret, ça fera toujours des multiples de 3.
- 69 - Chercheuse : Et comment tu es sûre que si on fait l'addition entre 2 nombres qui sont dans le livret, on retombe à nouveau dans le livret?
- 70 - Élève 22 : Comment?
- 71 - Chercheuse : Comment tu sais que si tu prends 2 nombres dans le livret...
- 72 - Élève 22 : Dans le livret 3?
- 73 - Chercheuse : Oui.
- 74 - Élève 22 : Bas, par exemple, là on a fait.
- 75 - Chercheuse : Oui.
- 76 - Élève 22 : Ça fait 33. Et 11 fois 3, ça fait 33.
- 77 - Chercheuse : Oui, c'est vrai.
- 78 - Élève 22 : Du coup, c'est un multiple de 3.
- 79 - Chercheuse : Oui, c'est vrai. Mais comment peut-on être sûr que c'est vrai toujours? Et pas juste pour cet exemple-là?? Pour tous les multiples de 3.
- 80 - Élève 22 : On peut essayer avec d'autres nombres. Donc, je ne sais pas... Il y a 23 plus 26, ça fera 49 [elle pose « $23 + 26 = 49$ »]. Et c'est toujours un multiple de 3. Parce qu'en fait les derniers nombres...
- 81 - Chercheuse : Mais attends. 23, est-ce que c'est un multiple de 3?
- 82 - Élève 22 : Ah non! C'est le 24.
- 83 - Chercheuse : 24.
- 84 - Élève 22 : [Elle corrige son écriture en « $24 + 26 = 48$ »] Et du coup, ça fera 48.
- 85 - Chercheuse : Et 26?
- 86 - Élève 22 : Ah ba non [elle corrige son écriture en « $24+27=51$ »]. Ça fera 51. Mais je crois 51 ce n'est pas un multiple de 3. Mais je ne sais pas. Je ne suis pas sûre.
- 87 - Chercheuse : Comment tu peux faire pour le savoir?
- 88 - Élève 22 : 51 fois combien ça fait 3?
- 89 - Chercheuse : D'accord. Là tu es sûre que 24 est un multiple des 3?
- 90 - Élève 22 : Oui.
- 91 - Chercheuse : Et 27?
- 92 - Élève 22 : Non, je ne suis pas sûre.
- 93 - Chercheuse : Peut-être contrôle déjà ça.
- 94 - Élève 22 : Ok [elle efface son calcul « $24 + 27 = 51$ »]. Mai je ne pas, il y a quel autre multiple? À part les petits nombres, mais les petits nombres, on sait que

ça fera toujours comme ça, mais...

- 95 - **Chercheuse** : Tu peux écrire tout ce que tu veux là à côté. Tu peux écrire le livret, ou je ne sais pas.
- 96 - **Élève 22** : 33 plus 36 [*elle écrit « 33 + 36 = 69 »*].
- 97 - **Chercheuse** : Ok.
- 98 - **Élève 22** : Ça marche. Ça reste un multiple de 3. Mais c'est en fait... On regarde toujours le dernier nombre. Et ils sont toujours pareils. Genre, ils sont toujours pareils en fait.
- 99 - **Chercheuse** : Mais par exemple, si tu fais 12 qui est un multiple de 3 plus 15, qui est un multiple de 3.
- 100 - **Élève 22** : [*Elle écrit « 12 + 15 = 27 »*] Ça fera 27. Et je crois, 27 ce n'est pas un multiple de 3.
- 101 - **Chercheuse** : Tu peux contrôler.
- 102 - **Élève 22** : Ah si. Si, je pense en fait que oui. C'est un multiple. C'est 9... 9 fois 3, ça fait 27. Du coup oui, c'est toujours un multiple.
- 103 - **Chercheuse** : Mh. D'accord. Et donc, est-ce que tu disais avant, le dernier chiffre qu'on regarde, est-ce que c'est vraiment le dernier chiffre?
- 104 - **Élève 22** : Non... Fin, en fait si. Parce que dans les premiers nombres, c'est facile de savoir si c'est un multiple de 3 ou pas. Mais quand on va dans les grands nombres, moi, je regarde plus les derniers chiffres. S'ils sont pareils que les premiers.
- 105 - **Chercheuse** : Mais c'est-à-dire? Pour le multiple de 3, le dernier chiffre, il doit être fait comment, alors?
- 106 - **Élève 22** : Il doit être comme les premiers.
- 107 - **Chercheuse** : Oui, ça veut dire?
- 108 - **Élève 22** : Par exemple, ici 9 [*en pointant « 69 »*], ici il y a aussi 9 [*en pointant le « 9 » de « 3 + 6 = 9 »*].
- 109 - **Chercheuse** : Oui.
- 110 - **Élève 22** : Bon, ici il y a pas, mais [*en pointant « 27 » et « 33 »*]... Il y a 15 aussi. 15, après c'est 18. 21. Mais... 24 aussi. Mais du coup 24 c'était aussi un multiple. Mais oui, c'est comme ça que je fais.
- 111 - **Chercheuse** : Mh. Mais donc ce dernier chiffre, j'ai pas compris comment il doit être.
- 112 - **Élève 22** : Ça doit être toujours... Mais je ne peux pas expliquer vraiment.
- 113 - **Chercheuse** : Mais pense vraiment que je suis un enfant.
- 114 - **Élève 22** : Oui, mais je ne sais pas quoi vous dire. Mais pour moi, si le dernier chiffre et les premiers, les premiers nombres des multiples du 3, s'ils sont pa-

reils, c'est que c'est un multiple de 3. Et puis, si vraiment je vois que c'est pas pareil, je calcule, je fais fois combien ça fera ça? Et si c'est juste alors c'est un multiple de 3.

115 - Chercheuse : Alors, si je prends 26.

116 - Élève 22 : Oui.

117 - Chercheuse : 26, tu vois? Ça se termine par 6.

118 - Élève 22 : Mh mh.

119 - Chercheuse : Qui est un multiple de 3.

120 - Élève 22 : Oui.

121 - Chercheuse : Est-ce que 26 est un multiple de 3?

122 - Élève 22 : Non. Non. Bon, mais en vrai, en vrai ma technique elle ne marche pas toujours. Ça sera plus le calcul avec les livret. Combien ça fait tout? Et après, là, on aura les multiples de 3.

123 - Chercheuse : Mh mh. D'accord. Alors je te pose une autre question. Si tu prends des multiples des 2, et tu les additionne. Est-ce que... Qu'est-ce que tu as comme résultat?

124 - Élève 22 : Déjà pour les multiples de 2, ce sera toujours des nombres pairs. Et si c'est des nombres impairs, ce sera pas des multiples de 2.

125 - Chercheuse : Par exemple, si tu prends de multiples de 2.

126 - Élève 22 : Par exemple, si je prends 2 plus 2, ça sera 4. 6 plus 6, ça fera 12. Fin, on aura toujours des nombres pairs... En fait je me souviens que la règle pour les multiples de 2, là, ça doit toujours être des nombres pairs. Et si c'est impair, c'est que ce n'est pas un multiple de 2.

127 - Chercheuse : D'accord. Et donc, si tu fais l'addition entre 2 multiples de 2, le résultat sera un multiple de 2 ou pas?

128 - Élève 22 : Oui.

129 - Chercheuse : Pourquoi?

130 - Élève 22 : Parce que... C'est comme avant, du coup. Vu qu'on calcule 2 nombres pairs, ça sera toujours pair.

131 - Chercheuse : D'accord. Ok. Ok. Alors ça, c'était ce que je voulais te demander aujourd'hui. Et tu as raison quand tu disais que si tu fais l'addition entre 2 pairs, on obtient toujours un pair. Et aussi, que quand tu fais l'addition 2 multiples de 3, tu obtiens toujours un multiple de 3. Je peux juste te montrer pourquoi?

132 - Élève 22 : Ok!

Annexe E

Les productions écrites des élèves

Nous rapportons, dans cette annexe, les productions écrites des élèves, qui complètent la compréhension des transcriptions des entretiens (annexe D). Nous nous limitons aux productions des tâches que nous avons analysées et utilisées pour répondre à la question de recherche Q2 de cette thèse : *La tache bleue, 123, La suite de carrés* et *Nombres pairs/impairs*. Les productions élèves 2, 10, 19 et 20 ne sont pas incluses ici, car ces élèves ont été écartés pour les raisons décrites dans les sections 8.1.2 et 8.1.6.

Parfois, les élèves ont préféré ne rien écrire pendant l'entretien. Dans ces cas, nous avons fait le choix de ne pas rapporter en annexe leur production vide.

Les productions écrites ont été rendues anonymes en couvrant le prénom si celui-ci était présent.

Pour ce chapitre, l'ordre de présentation des tâches correspond à celui de passation avec les élèves lors des entretiens.

E.1 La tache bleue

Un nombre se cache derrière la tâche.

On sait que $\text{tâche} + 4 = 11$.

Il ne faut pas calculer le nombre caché.

Alors alors combien font $\text{tâche} + 5$? 12 .

$\text{33} + 78 = 115$

$\text{33} + 79 = 116$

Figure E.1 - La tache bleue, Élève 1.

Figure E.2 - La tache bleue, Élève 1.

Un nombre se cache derrière la tâche.
 On sait que $\text{🍇} + 78 = 115$.
 Il ne faut pas calculer le nombre caché.
 Alors combien font $\text{🍇} + 79$?

$$\begin{array}{r} 37 \\ + 78 \\ \hline = 115 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 67 \\ + 66 \\ \hline 123 \end{array}$$

Figure E.3 – La tache bleue, Élève 3.

Un nombre se cache derrière la tâche.
 On sait que $\text{🍇} + 78 = 115$.
 Il ne faut pas calculer le nombre caché.
 Alors combien font $\text{🍇} + 79$?

es

$$\begin{array}{r} 1070 \\ 584 \\ - 78 \\ \hline 37 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 79 \\ - 77 \\ \hline 776 \end{array}$$

Figure E.4 – La tache bleue, Élève 4.

Un nombre se cache derrière la tâche.

On sait que $\text{🍇} + 78 = 115$.

Il ne faut pas calculer le nombre caché.

Alors combien font $\text{🍇} + 79$?

$$\begin{array}{r} 9 \cancel{1} 5 \\ - 78 \\ \hline 37 \\ + 79 \\ \hline 116 \end{array}$$

Figure E.5 – La tâche bleue, Élève 5.

Un nombre se cache derrière la tâche.

On sait que $\text{🍇} + 78 = 115$.

Il ne faut pas calculer le nombre caché.

Alors combien font $\text{🍇} + 79$? *116*

Figure E.6 – La tâche bleue, Élève 6.

Un nombre se cache derrière la tâche.

On sait que $\text{tache} + 78 = 115$.

Il ne faut pas calculer le nombre caché.

Alors combien font $\text{tache} + 79$? 116

$$\begin{array}{r} 485 \\ - 78 \\ \hline 377 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 79 \\ + 37 \\ \hline 116 \end{array}$$

Figure E.8 - La tache bleue, Élève 8.

Un nombre se cache derrière la tâche.

On sait que $\text{tache} + 78 = 115$.

Il ne faut pas calculer le nombre caché.

Alors combien font $\text{tache} + 79$?

$$\begin{array}{r} 1870 \\ + \text{tache} \\ \hline 3478 = 5248 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1870 \\ + 3479 = 5339 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1m \\ 3 \\ \hline 4 \\ 78 \end{array}$$

Figure E.7 - La tache bleue, Élève 7.

Un nombre se cache derrière la tache.
 On sait que $\text{tache} + 78 = 115$.
 Il ne faut pas calculer le nombre caché.
 Alors combien font $\text{tache} + 79$?

$$\begin{array}{r} 601 \\ 115 \\ -78 \\ \hline 34 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 115 \\ + 79 \\ \hline 194 \end{array}$$

$$37 + 79 = 116$$

Figure E.9 - La tache bleue, Élève 11.

Un nombre se cache derrière la tache.
 On sait que $\text{tache} + 78 = 115$.
 Il ne faut pas calculer le nombre caché.
 Alors combien font $\text{tache} + 79$?

$$\begin{array}{r} 90 \\ 115 \\ -78 \\ \hline 37 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 407 \\ - 78 \\ \hline 329 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 78 \\ - 78 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \\ - 78 \\ \hline 597 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 407 \\ + 78 \\ \hline 485 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 79 \\ + 78 \\ \hline 157 \end{array}$$

Figure E.10 - La tache bleue, Élève 12.

Un nombre se cache derrière la tâche.

On sait que $\text{tâche} + 78 = 115$.

Il ne faut pas calculer le nombre caché.

Alors combien font $\text{tâche} + 79$?

$$\begin{array}{r} 100 \\ 0015 \\ - 78 \\ \hline 037 \end{array}$$

$$\text{tâche} + 1178 = 5212$$

$$\begin{array}{r} 4034 \\ + 1179 \\ \hline 5213 \end{array}$$

Figure E.11 - La tâche bleue, Élève 13.

Un nombre se cache derrière la tâche.

On sait que $\text{tâche} + 78 = 115$.

Il ne faut pas calculer le nombre caché.

Alors combien font $\text{tâche} + 79$?

$$\begin{array}{r} 100 \\ 0015 \\ - 78 \\ \hline 037 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1000 \\ 0015 \\ - 78 \\ \hline 037 \end{array}$$

Figure E.12 - La tâche bleue, Élève 14.

Un nombre se cache derrière la tache.
 On sait que $\text{tache} + 78 = 115$.
 Il ne faut pas calculer le nombre caché.
 Alors combien font $\text{tache} + 79$?

~~50 + 78 = 128~~
~~38 + 78 =~~
~~115 + 78 = 144 + 13, ...~~
 $\begin{array}{r} 22 \\ 15 \\ \hline 37 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 37 \\ 78 \\ \hline 115 \end{array}$

Figure E.13 - La tache bleue, Élève 15.

Un nombre se cache derrière la tache.
 On sait que $\text{tache} + 78 = 115$.
 Il ne faut pas calculer le nombre caché.
 Alors combien font $\text{tache} + 79$?

$\text{tache} + 79 = 116$

Figure E.14 - La tache bleue, Élève 17.

Un nombre se cache derrière la tache.
 On sait que $\text{tache} + 78 = 115$.
 Il ne faut pas calculer le nombre caché.
 Alors combien font $\text{tache} + 79$?

$115 - 78 = 37$
 $37 + 79 = 116$

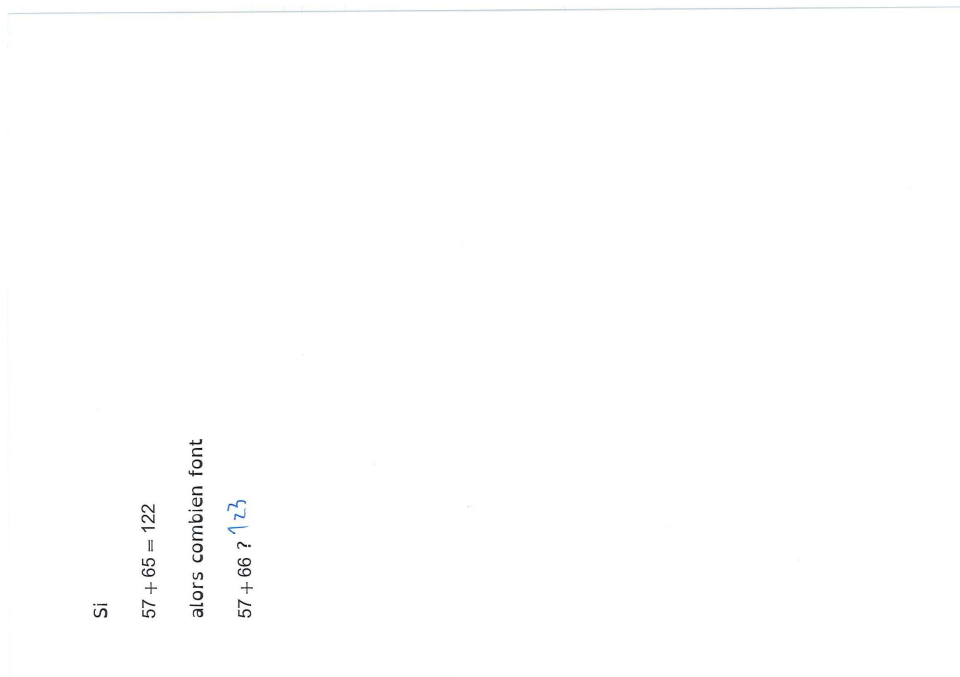
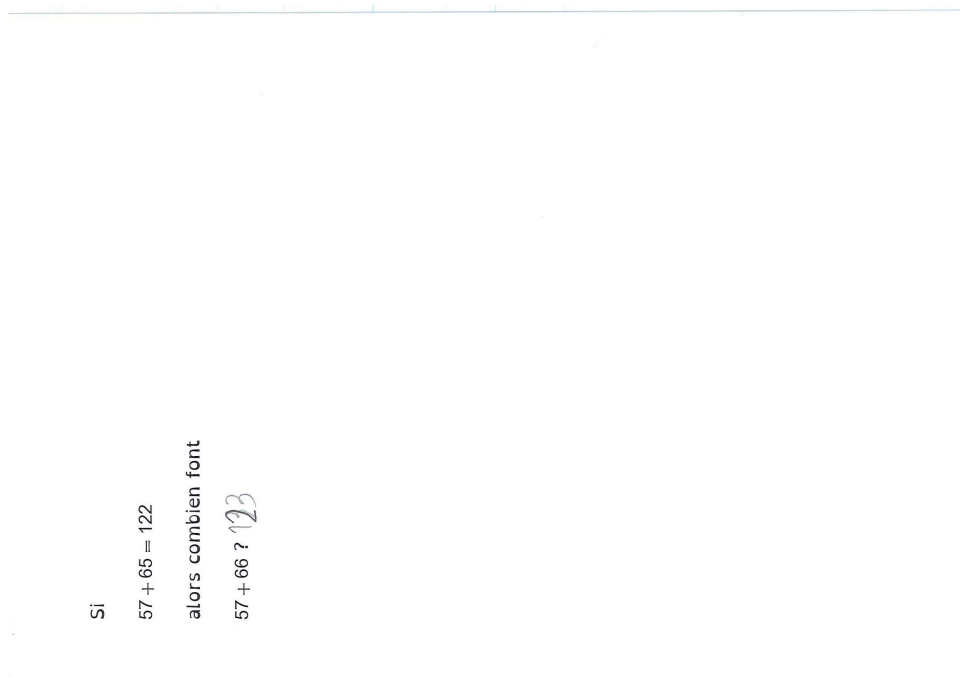
Figure E.15 – La tache bleue, Élève 21.

Un nombre se cache derrière la tache.
 On sait que $\text{tache} + 78 = 115$.
 Il ne faut pas calculer le nombre caché.
 Alors combien font $\text{tache} + 79$?

$$115 - 78 = 37$$

$$79 + 37 = 116$$

Figure E.16 – La tache bleue, Élève 22.

E.2 123**Figure E.17 - 123, Élève 1.****Figure E.18 - 123, Élève 6.**

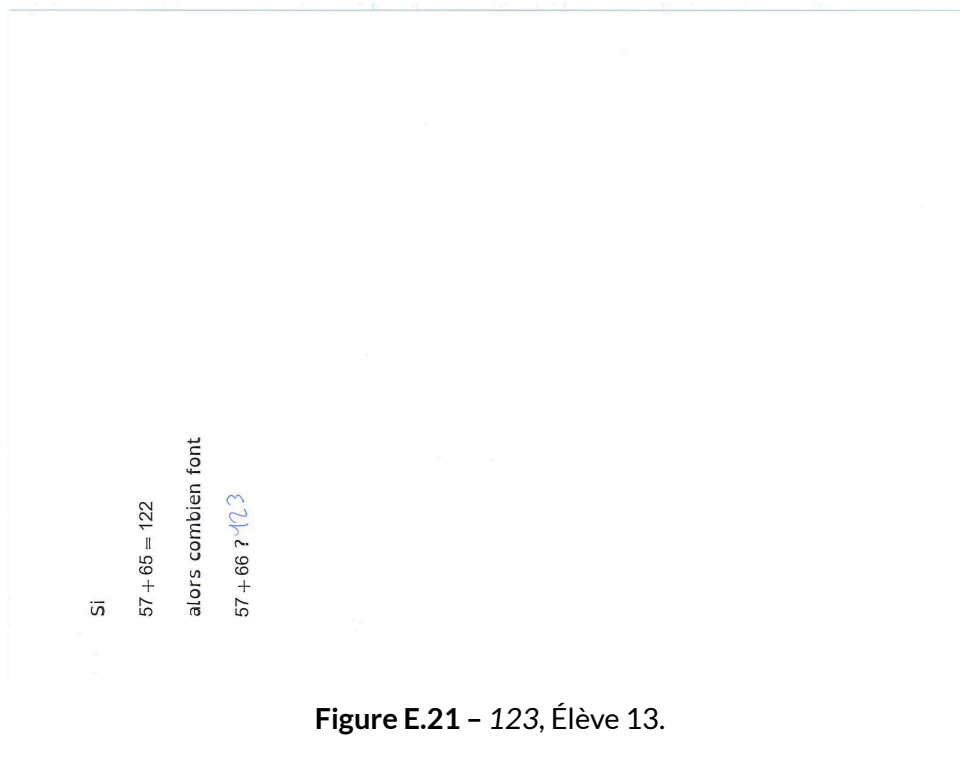
Si
 $57 + 65 = 122$
 alors combien font
 $57 + 66 = 123$

Figure E.19 - 123, Élève 8.

Si
 $57 + 65 = 122$
 alors combien font
 $57 + 66 = 123$

$$\begin{array}{r} 57 \\ + 66 \\ \hline 123 \end{array}$$

Figure E.20 - 123, Élève 12.



Si
 $57 + 65 = 122$
alors combien font
 $57 + 66 ? 123$

Figure E.22 - 123, Élève 22.

E.3 La suite de carrés

4
1^{re} étape

7
2^e étape

10
3^e étape

Voici les trois premières étapes d'une suite de carrés.
a) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 7 carrés?

Figure E.23 - La suite de carrés, Élève 1.

31 (10 carrés)

$$\begin{array}{r} 31 \\ 31 \\ 31 \\ + \\ \hline 154 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 154 \\ 31 \\ \hline 185 \text{ (60 carrés)} \\ + 19 \\ \hline 204 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 185 \\ 154 \\ \hline 339 \text{ (100 carrés)} \end{array}$$

Figure E.24 - La suite de carrés, Élève 1.

b) Combien faut-il de pailles pour former une suite de
12 carrés ?



Figure E.25 – La suite de carrés, Élève 3.

e) Tu as acheté un paquet de 200 pailles. Combien de
carrés peux-tu construire ?

$$\begin{array}{r} 200 \\ \times 10 \\ \hline 2000 \\ 2110 \\ \hline 2112 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ \times 10 \\ \hline 1111 \end{array}$$

Figure E.26 – La suite de carrés, Élève 3.

c) En connaissant le nombre de carrés, pourrais-tu toujours trouver le nombre de pailles ? Si oui, comment ?

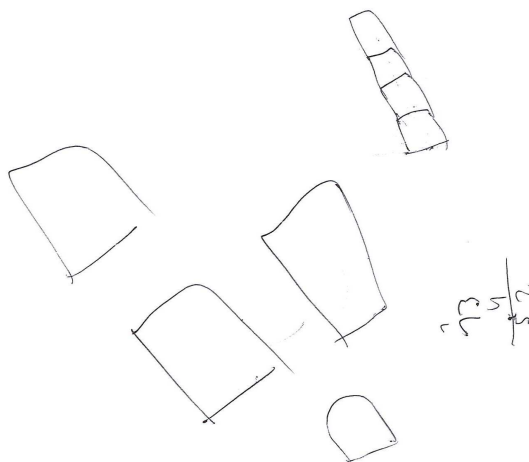
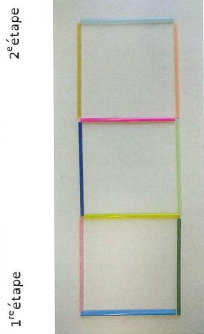
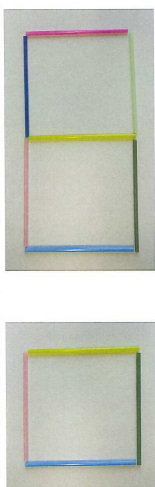


Figure E.29 – La suite de carrés, Élève 4.



Voici les trois premières étapes d'une suite de carrés.

a) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 7 carrés ?



Figure E.30 – La suite de carrés, Élève 5.

b) Combien faut-il de pailles pour former une suite de
100 carrés ?



Figure E.31 - La suite de carrés, Élève 5.

b) Combien faut-il de pailles pour former une suite de
12 carrés ?

$$10 + 10 + 10 + 10$$

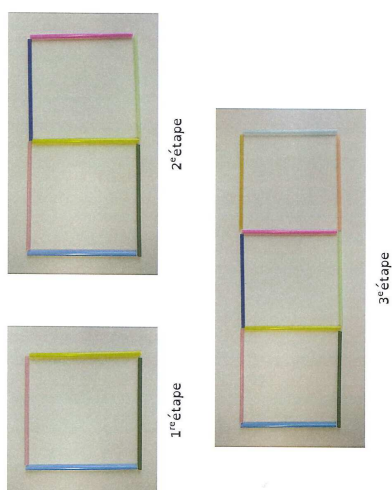


Figure E.32 - La suite de carrés, Élève 6.

e) Tu as acheté un paquet de 200 pailles. Combien de carrés peux-tu construire ?

~~$3 \times 60 = 180$~~ $3 \times 63 = 189$ ~~$3 \times 64 = 192$~~ $3 \times 65 = 195$

Figure E.33 – La suite de carrés, Élève 6.



Voici les trois premières étapes d'une suite de carrés.

a) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés? Et de 5 carrés?

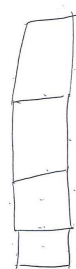


Figure E.34 – La suite de carrés, Élève 7.

b) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 12 carrés? $12 \times 3 = 36$

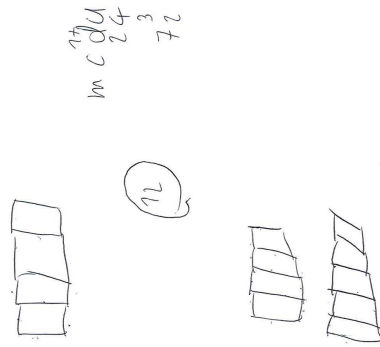
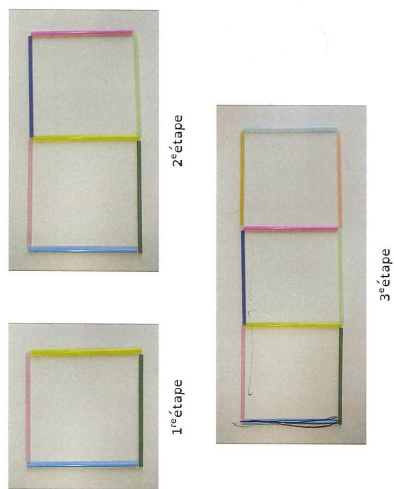


Figure E.35 - La suite de carrés, Élève 7.

e) Tu as acheté un paquet de 200 pailles. Combien de carrés peux-tu construire?



Figure E.36 - La suite de carrés, Élève 7.



Voici les trois premières étapes d'une suite de carrés.

a) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés? Et de 5 carrés?

$$\begin{array}{r} 4^2 \\ \times 12 \\ \hline 48 \end{array}$$

Figure E.37 - La suite de carrés, Élève 8.

b) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 12 carrés?

- 1^e 4
- 2^e 7
- 3^e 10
- 4^e 13
- 5^e 16
- 6^e 19
- 7^e 22

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 13 \\ \hline 52 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ + 3 \\ \hline = 15 \end{array}$$

Figure E.38 - La suite de carrés, Élève 8.

c) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 100 carrés ?

$P=1$

$$\begin{array}{r} 97 \\ + 3 \\ \hline 100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times 100 \\ \hline = 3700 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 4 \\ \hline 12 \end{array}$$

Figure E.39 - La suite de carrés, Élève 8.

d) En connaissant le nombre de carrés, pourrais-tu toujours trouver le nombre de pailles ? Si oui, comment ?

12c

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 3 \\ \hline = 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 3 \\ \hline = 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 3 \\ \hline = 36 \end{array}$$

37p

Figure E.40 - La suite de carrés, Élève 8.

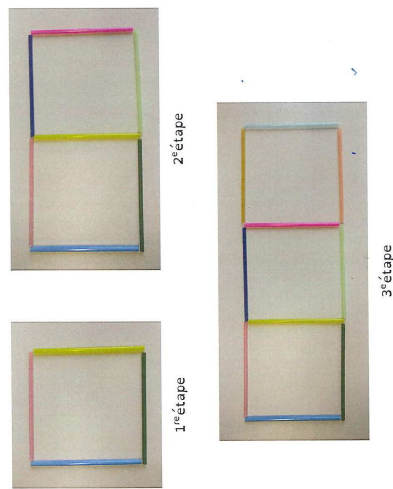


Figure E.41 - La suite de carrés, Élève 9.



- 4^e 9
- 5^e 11
- 6^e 13
- 7^e 15
- 8^e 17
- 9^e 19
- 10^e 21
- 11^e 23
- 12^e 25
- 13^e 27
- 14^e 29
- 15^e 31
- 16^e 33
- 17^e 35
- 18^e 37
- 19^e 39
- 20^e 41

Figure E.42 - La suite de carrés, Élève 9.



Voici les trois premières étapes d'une suite de carrés.

a) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés? Et de 5 carrés?

4^{er} étape 13 pailles
5^{er} étape

Figure E.43 – La suite de carrés, Élève 11.

1^{er} étape 4
2^{er} étape 7
3^{er} étape 10
4^{er} étape 13
5^{er} étape 16

Figure E.44 – La suite de carrés, Élève 11.

b) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 12 carrés? $19 \times 2 = 38$ pailles

$$\begin{array}{r} 100 \\ \times 4 \\ \hline 400 \\ - 99 \\ \hline 301 \text{ pailles pour } 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 2 \\ \hline 38 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 3 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 3 \\ \hline 36 \end{array}$$

Figure E.45 – La suite de carrés, Élève 11.

c) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 100 carrés?

$$\begin{array}{r} 100 \\ \times 4 \\ \hline 400 \\ - 99 \\ \hline 301 \text{ pailles pour } 100 \text{ carrés} \end{array}$$

Figure E.46 – La suite de carrés, Élève 11.

e) Tu as acheté un paquet de 200 pailles. Combien de carrés peux-tu construire?

$$\begin{array}{r} 200 \\ - 40 \\ \hline 160 \end{array}$$

50 carrés
- 10
40 carrés

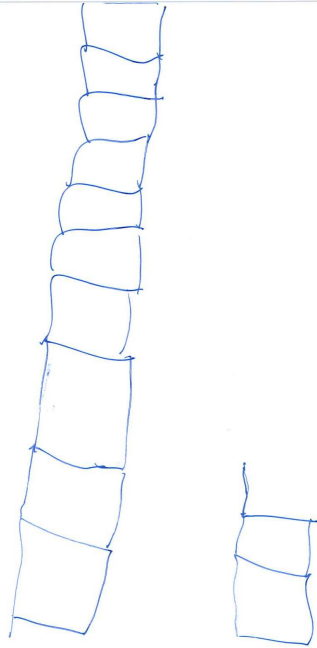
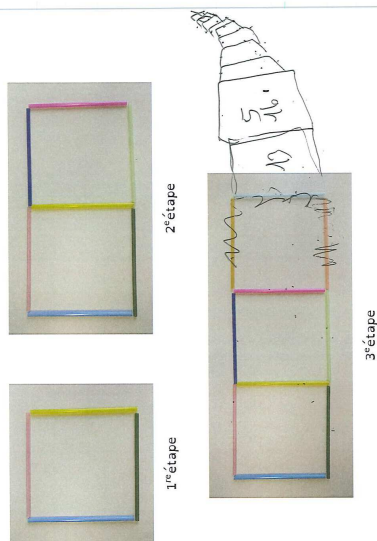


Figure E.47 – La suite de carrés, Élève 11.



Voici les trois premières étapes d'une suite de carrés.

- a) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés? Et de 5 carrés? Il faut 13 pailles.
 Il faut 16 pailles pour faire 5 carrés.

Figure E.48 – La suite de carrés, Élève 12.

b) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 12 carrés? il faut 37 pailles pour former une suite de 12 carrés.

Figure E.49 – La suite de carrés, Élève 12.

c) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 100 carrés?

$$\begin{array}{r} 37 \\ + \\ \hline 437 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ - 36 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ + 37 \\ \hline 137 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ - 12 \\ \hline 88 \end{array}$$

Figure E.50 – La suite de carrés, Élève 12.

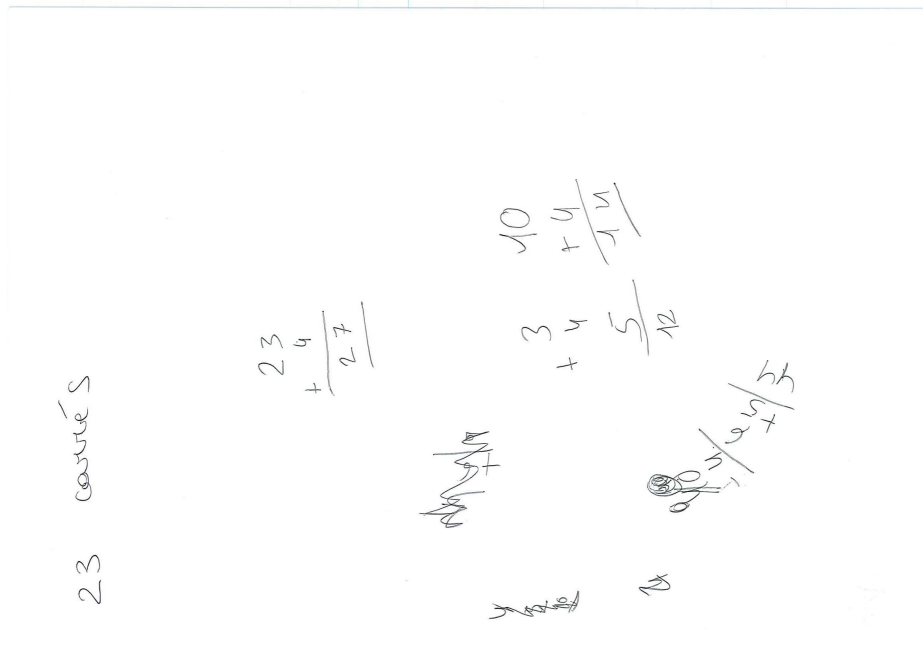


Figure E.51 - La suite de carrés, Élève 12.

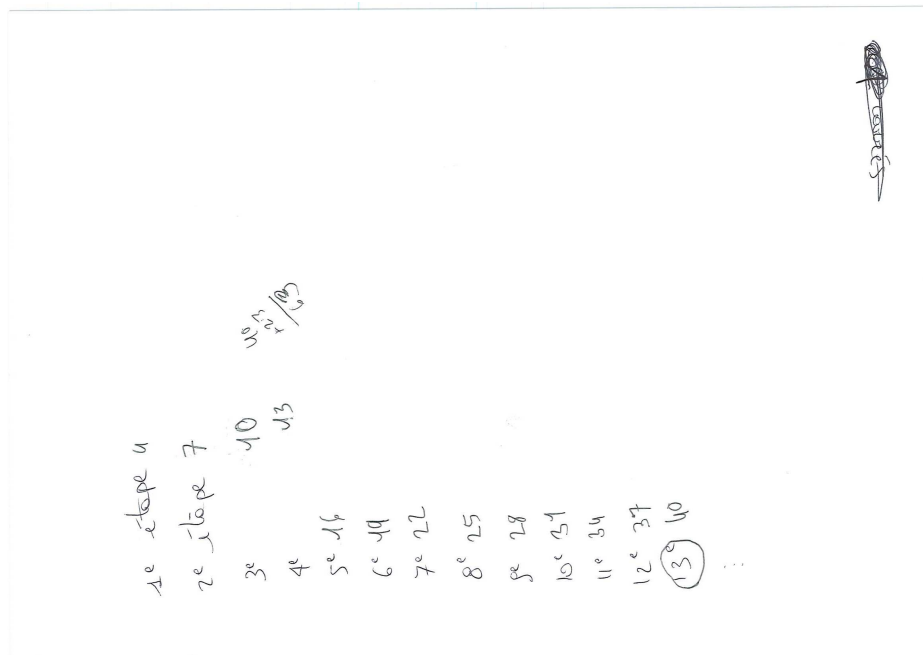


Figure E.52 - La suite de carrés, Élève 12.



Figure E.53 – La suite de carrés, Élève 13.

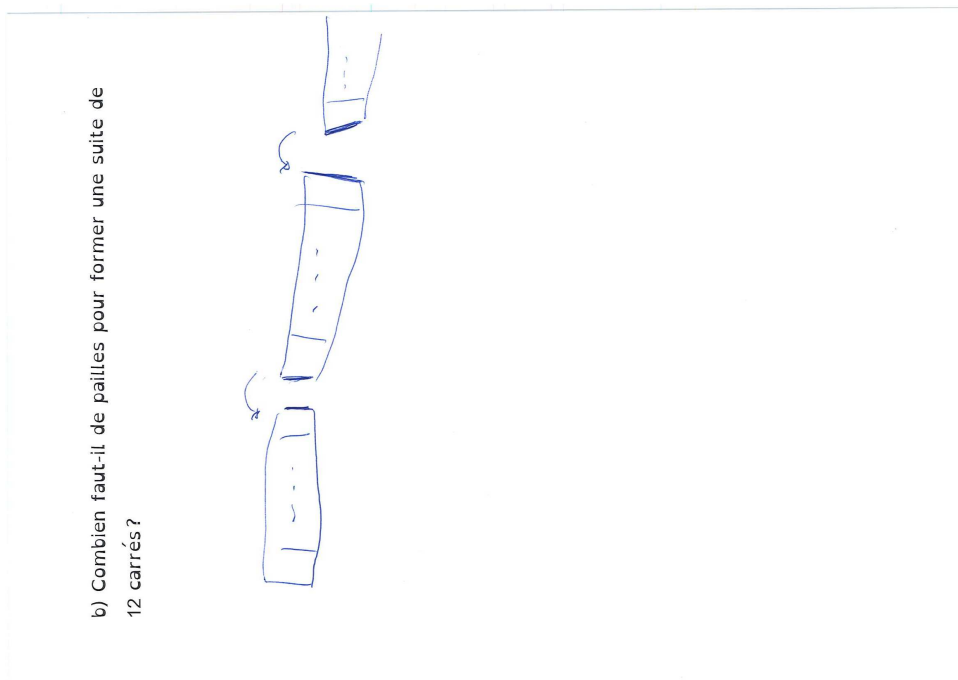


Figure E.54 – La suite de carrés, Élève 13.

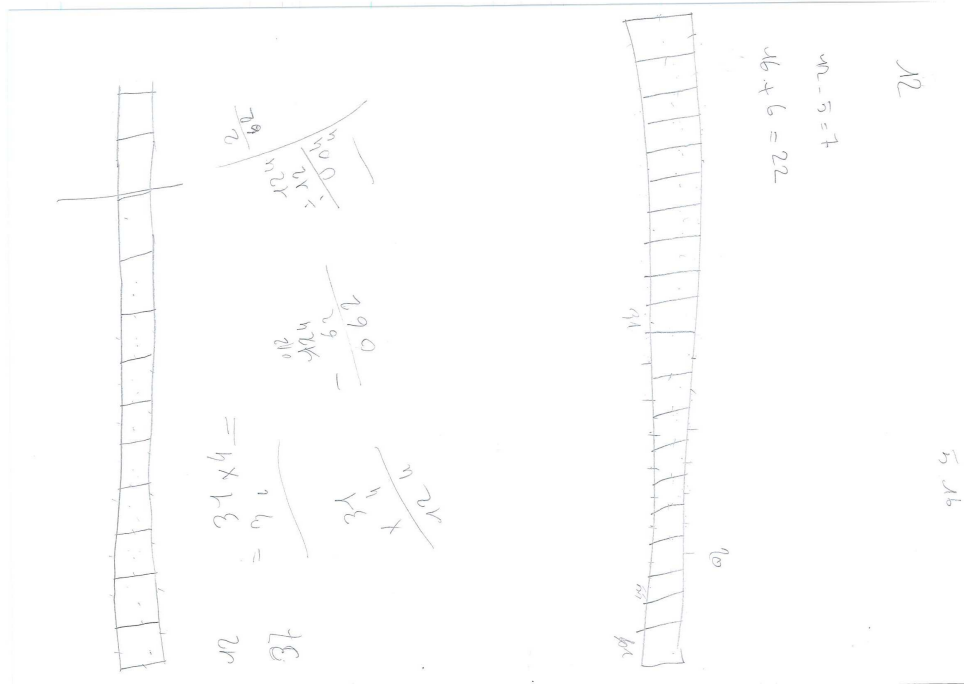
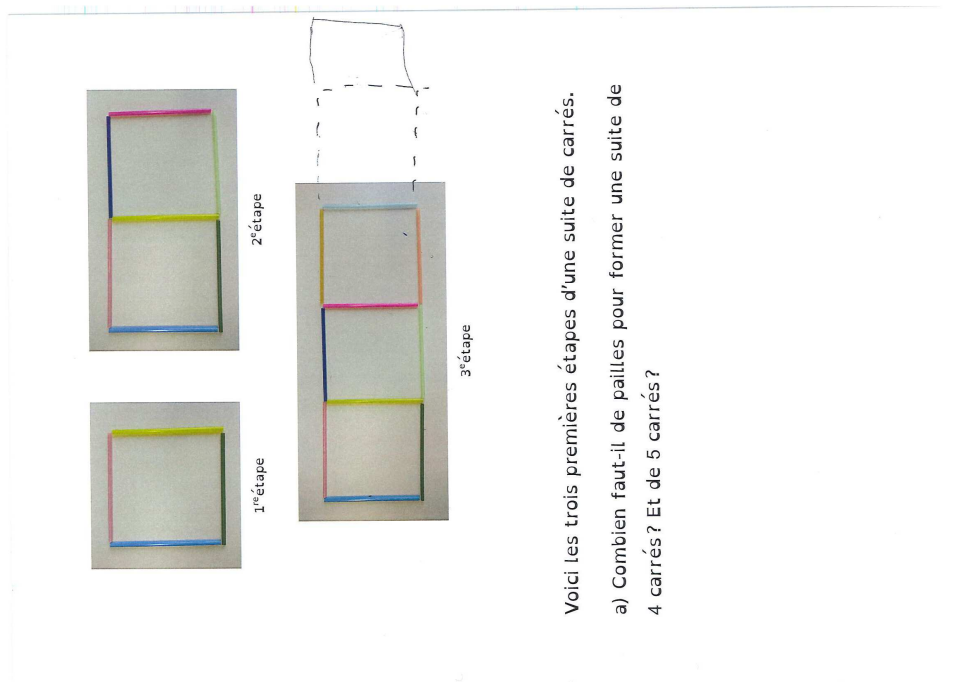


Figure E.55 - La suite de carrés, Élève 13.



Voici les trois premières étapes d'une suite de carrés.

- a) Combien faut-il de bâtonnets pour former une suite de 4 carrés? Et de 5 carrés?

Figure E.56 - La suite de carrés, Élève 14.

b) Combien faut-il de pailles pour former une suite de
12 carrés?

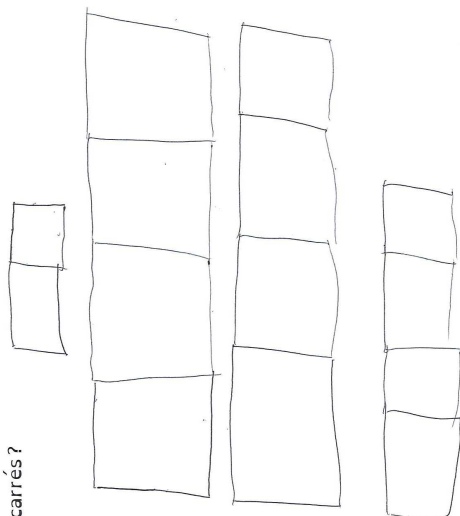


Figure E.57 - La suite de carrés, Élève 14.

c) Combien faut-il de pailles pour former une suite de
100 carrés?

$$4 \times 100 = 400 \text{ pailles}$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ \underline{99} \\ 99 \end{array} \text{ pailles}$$

$$\begin{array}{r} 400 \\ - 99 \\ \hline 301 \end{array} \text{ pailles}$$

Figure E.58 - La suite de carrés, Élève 14.

e) Tu as acheté un paquet de 200 pailles. Combien de carrés peux-tu construire ?

$4 \times 65 = 260$ pailles

$4 \times 50 = 200$ pailles

$4 \times 66,5 = 266$

$4 \times 67 = 268$

$4 \times 68 = 272$

$4 \times 69 = 276$

$4 \times 70 = 280$

$4 \times 71 = 284$

$4 \times 72 = 288$

$4 \times 73 = 292$

$4 \times 74 = 296$

$4 \times 75 = 300$

$4 \times 76 = 304$

$4 \times 77 = 308$

$4 \times 78 = 312$

$4 \times 79 = 316$

$4 \times 80 = 320$

$4 \times 81 = 324$

$4 \times 82 = 328$

$4 \times 83 = 332$

$4 \times 84 = 336$

$4 \times 85 = 340$

$4 \times 86 = 344$

$4 \times 87 = 348$

$4 \times 88 = 352$

$4 \times 89 = 356$

$4 \times 90 = 360$

$4 \times 91 = 364$

$4 \times 92 = 368$

$4 \times 93 = 372$

$4 \times 94 = 376$

$4 \times 95 = 380$

$4 \times 96 = 384$

$4 \times 97 = 388$

$4 \times 98 = 392$

$4 \times 99 = 396$

$4 \times 100 = 400$

$4 \times 101 = 404$

$4 \times 102 = 408$

$4 \times 103 = 412$

$4 \times 104 = 416$

$4 \times 105 = 420$

$4 \times 106 = 424$

$4 \times 107 = 428$

$4 \times 108 = 432$

$4 \times 109 = 436$

$4 \times 110 = 440$

$4 \times 111 = 444$

$4 \times 112 = 448$

$4 \times 113 = 452$

$4 \times 114 = 456$

$4 \times 115 = 460$

$4 \times 116 = 464$

$4 \times 117 = 468$

$4 \times 118 = 472$

$4 \times 119 = 476$

$4 \times 120 = 480$

$4 \times 121 = 484$

$4 \times 122 = 488$

$4 \times 123 = 492$

$4 \times 124 = 496$

$4 \times 125 = 500$

$4 \times 126 = 504$

$4 \times 127 = 508$

$4 \times 128 = 512$

$4 \times 129 = 516$

$4 \times 130 = 520$

$4 \times 131 = 524$

$4 \times 132 = 528$

$4 \times 133 = 532$

$4 \times 134 = 536$

$4 \times 135 = 540$

$4 \times 136 = 544$

$4 \times 137 = 548$

$4 \times 138 = 552$

$4 \times 139 = 556$

$4 \times 140 = 560$

$4 \times 141 = 564$

$4 \times 142 = 568$

$4 \times 143 = 572$

$4 \times 144 = 576$

$4 \times 145 = 580$

$4 \times 146 = 584$

$4 \times 147 = 588$

$4 \times 148 = 592$

$4 \times 149 = 596$

$4 \times 150 = 600$

$4 \times 151 = 604$

$4 \times 152 = 608$

$4 \times 153 = 612$

$4 \times 154 = 616$

$4 \times 155 = 620$

$4 \times 156 = 624$

$4 \times 157 = 628$

$4 \times 158 = 632$

$4 \times 159 = 636$

$4 \times 160 = 640$

$4 \times 161 = 644$

$4 \times 162 = 648$

$4 \times 163 = 652$

$4 \times 164 = 656$

$4 \times 165 = 660$

$4 \times 166 = 664$

$4 \times 167 = 668$

$4 \times 168 = 672$

$4 \times 169 = 676$

$4 \times 170 = 680$

$4 \times 171 = 684$

$4 \times 172 = 688$

$4 \times 173 = 692$

$4 \times 174 = 696$

$4 \times 175 = 700$

$4 \times 176 = 704$

$4 \times 177 = 708$

$4 \times 178 = 712$

$4 \times 179 = 716$

$4 \times 180 = 720$

$4 \times 181 = 724$

$4 \times 182 = 728$

$4 \times 183 = 732$

$4 \times 184 = 736$

$4 \times 185 = 740$

$4 \times 186 = 744$

$4 \times 187 = 748$

$4 \times 188 = 752$

$4 \times 189 = 756$

$4 \times 190 = 760$

$4 \times 191 = 764$

$4 \times 192 = 768$

$4 \times 193 = 772$

$4 \times 194 = 776$

$4 \times 195 = 780$

$4 \times 196 = 784$

$4 \times 197 = 788$

$4 \times 198 = 792$

$4 \times 199 = 796$

$4 \times 200 = 800$

$4 \times 201 = 804$

$4 \times 202 = 808$

$4 \times 203 = 812$

$4 \times 204 = 816$

$4 \times 205 = 820$

$4 \times 206 = 824$

$4 \times 207 = 828$

$4 \times 208 = 832$

$4 \times 209 = 836$

$4 \times 210 = 840$

$4 \times 211 = 844$

$4 \times 212 = 848$

$4 \times 213 = 852$

$4 \times 214 = 856$

$4 \times 215 = 860$

$4 \times 216 = 864$

$4 \times 217 = 868$

$4 \times 218 = 872$

$4 \times 219 = 876$

$4 \times 220 = 880$

$4 \times 221 = 884$

$4 \times 222 = 888$

$4 \times 223 = 892$

$4 \times 224 = 896$

$4 \times 225 = 900$

$4 \times 226 = 904$

$4 \times 227 = 908$

$4 \times 228 = 912$

$4 \times 229 = 916$

$4 \times 230 = 920$

$4 \times 231 = 924$

$4 \times 232 = 928$

$4 \times 233 = 932$

$4 \times 234 = 936$

$4 \times 235 = 940$

$4 \times 236 = 944$

$4 \times 237 = 948$

$4 \times 238 = 952$

$4 \times 239 = 956$

$4 \times 240 = 960$

$4 \times 241 = 964$

$4 \times 242 = 968$

$4 \times 243 = 972$

$4 \times 244 = 976$

$4 \times 245 = 980$

$4 \times 246 = 984$

$4 \times 247 = 988$

$4 \times 248 = 992$

$4 \times 249 = 996$

$4 \times 250 = 1000$

$4 \times 251 = 1004$

$4 \times 252 = 1008$

$4 \times 253 = 1012$

$4 \times 254 = 1016$

$4 \times 255 = 1020$

$4 \times 256 = 1024$

$4 \times 257 = 1028$

$4 \times 258 = 1032$

$4 \times 259 = 1036$

$4 \times 260 = 1040$

$4 \times 261 = 1044$

$4 \times 262 = 1048$

$4 \times 263 = 1052$

$4 \times 264 = 1056$

$4 \times 265 = 1060$

$4 \times 266 = 1064$

$4 \times 267 = 1068$

$4 \times 268 = 1072$

$4 \times 269 = 1076$

$4 \times 270 = 1080$

$4 \times 271 = 1084$

$4 \times 272 = 1088$

$4 \times 273 = 1092$

$4 \times 274 = 1096$

$4 \times 275 = 1100$

$4 \times 276 = 1104$

$4 \times 277 = 1108$

$4 \times 278 = 1112$

$4 \times 279 = 1116$

$4 \times 280 = 1120$

$4 \times 281 = 1124$

$4 \times 282 = 1128$

$4 \times 283 = 1132$

$4 \times 284 = 1136$

$4 \times 285 = 1140$

$4 \times 286 = 1144$

$4 \times 287 = 1148$

$4 \times 288 = 1152$

$4 \times 289 = 1156$

$4 \times 290 = 1160$

$4 \times 291 = 1164$

$4 \times 292 = 1168$

$4 \times 293 = 1172$

$4 \times 294 = 1176$

$4 \times 295 = 1180$

$4 \times 296 = 1184$

$4 \times 297 = 1188$

$4 \times 298 = 1192$

$4 \times 299 = 1196$

$4 \times 300 = 1200$

$4 \times 301 = 1204$

$4 \times 302 = 1208$

$4 \times 303 = 1212$

$4 \times 304 = 1216$

$4 \times 305 = 1220$

$4 \times 306 = 1224$

$4 \times 307 = 1228$

$4 \times 308 = 1232$

$4 \times 309 = 1236$

$4 \times 310 = 1240$

$4 \times 311 = 1244$

$4 \times 312 = 1248$

$4 \times 313 = 1252$

$4 \times 314 = 1256$

$4 \times 315 = 1260$

$4 \times 316 = 1264$

$4 \times 317 = 1268$

$4 \times 318 = 1272$

$4 \times 319 = 1276$

$4 \times 320 = 1280$

$4 \times 321 = 1284$

$4 \times 322 = 1288$

$4 \times 323 = 1292$

$4 \times 324 = 1296$

$4 \times 325 = 1300$

$4 \times 326 = 1304$

$4 \times 327 = 1308$

$4 \times 328 = 1312$

$4 \times 329 = 1316$

$4 \times 330 = 1320$

$4 \times 331 = 1324$

$4 \times 332 = 1328$

$4 \times 333 = 1332$

$4 \times 334 = 1336$

$4 \times 335 = 1340$

$4 \times 336 = 1344$

$4 \times 337 = 1348$

$4 \times 338 = 1352$

$4 \times 339 = 1356$

$4 \times 340 = 1360$

$4 \times 341 = 1364$

$4 \times 342 = 1368$

$4 \times 343 = 1372$

$4 \times 344 = 1376$

$4 \times 345 = 1380$

$4 \times 346 = 1384$

$4 \times 347 = 1388$

$4 \times 348 = 1392$

$4 \times 349 = 1396$

$4 \times 350 = 1400$

$4 \times 351 = 1404$

$4 \times 352 = 1408$

$4 \times 353 = 1412$

$4 \times 354 = 1416$

$4 \times 355 = 1420$

$4 \times 356 = 1424$

$4 \times 357 = 1428$

$4 \times 358 = 1432$

$4 \times 359 = 1436$

$4 \times 360 = 1440$

$4 \times 361 = 1444$

$4 \times 362 = 1448$

$4 \times 363 = 1452$

$4 \times 364 = 1456$

$4 \times 365 = 1460$

$4 \times 366 = 1464$

$4 \times 367 = 1468$

$4 \times 368 = 1472$

$4 \times 369 = 1476$

$4 \times 370 = 1480$

$4 \times 371 = 1484$

$4 \times 372 = 1488$

$4 \times 373 = 1492$

$4 \times 374 = 1496$

$4 \times 375 = 1500$

$4 \times 376 = 1504$

$4 \times 377 = 1508$

$4 \times 378 = 1512$

$4 \times 379 = 1516$

$4 \times 380 = 1520$

$4 \times 381 = 1524$

$4 \times 382 = 1528$

$4 \times 383 = 1532$

$4 \times 384 = 1536$

$4 \times 385 = 1540$

$4 \times 386 = 1544$

$4 \times 387 = 1548$

$4 \times 388 = 1552$

$4 \times 389 = 1556$

$4 \times 390 = 1560$

$4 \times 391 = 1564$

$4 \times 392 = 1568$

$4 \times 393 = 1572$

$4 \times 394 = 1576$

$4 \times 395 = 1580$

$4 \times 396 = 1584$

$4 \times 397 = 1588$

$4 \times 398 = 1592$

$4 \times 399 = 1596$

$4 \times 400 = 1600$

$4 \times 401 = 1604$

$4 \times 402 = 1608$

$4 \times 403 = 1612$

$4 \times 404 = 1616$

$4 \times 405 = 1620$

$4 \times 406 = 1624$

$4 \times 407 = 1628$

$4 \times 408 = 1632$

$4 \times 409 = 1636$

$4 \times 410 = 1640$

$4 \times 411 = 1644$

$4 \times 412 = 1648$

$4 \times 413 = 1652$

$4 \times 414 = 1656$

$4 \times 415 = 1660$

$4 \times 416 = 1664$

$4 \times 417 = 1668$

$4 \times 418 = 1672$

$4 \times 419 = 1676$

$4 \times 420 = 1680$

$4 \times 421 = 1684$

$4 \times 422 = 1688$

$4 \times 423 = 1692$

$4 \times 424 = 1696$

$4 \times 425 = 1700$

$4 \times 426 = 1704$

$4 \times 427 = 1708$

$4 \times 428 = 1712$

$4 \times 429 = 1716$

$4 \times 430 = 1720$

$4 \times 431 = 1724$

$4 \times 432 = 1728$

$4 \times 433 = 1732$

$4 \times 434 = 1736$

$4 \times 435 = 1740$

$4 \times 436 = 1744$

$4 \times 437 = 1748$

$4 \times 438 = 1752$

$4 \times 439 = 1756$

$4 \times 440 = 1760$

$4 \times 441 = 1764$

$4 \times 442 = 1768$

$4 \times 443 = 1772$

$4 \times 444 = 1776$

$4 \times 445 = 1780$

$4 \times 446 = 1784$

$4 \times 447 = 1788$

$4 \times 448 = 1792$

$4 \times 449 = 1796$

$4 \times 450 = 1800$

$4 \times 451 = 1804$

$4 \times 452 = 1808$

$4 \times 453 = 1812$

$4 \times 454 = 1816$

$4 \times 455 = 1820$

$4 \times 456 = 1824$

$4 \times 457 = 1828$

$4 \times 458 = 1832$

$4 \times 459 = 1836$

$4 \times 460 = 1840$

$4 \times 461 = 1844$

$4 \times 462 = 1848$

$4 \times 463 = 1852$

$4 \times 464 = 1856$

$4 \times 465 = 1860$

$4 \times 466 = 1864$

$4 \times 467 = 1868$

$4 \times 468 = 1872$

$4 \times 469 = 1876$

$4 \times 470 = 1880$

$4 \times 471 = 1884$

$4 \times 472 = 1888$

$4 \times 473 = 1892$

$4 \times 474 = 1896$

$4 \times 475 = 1900$

$4 \times 476 = 1904$

$4 \times 477 = 1908$

$4 \times 478 = 1912$

$4 \times 479 = 1916$

$4 \times 480 = 1920$

$4 \times 481 = 1924$

$4 \times 482 = 1928$

$4 \times 483 = 1932$

$4 \times 484 = 1936$

$4 \times 485 = 1940$

$4 \times 486 = 1944$

$4 \times 487 = 1948$

$4 \times 488 = 1952$

$4 \times 489 = 1956$

$4 \times 490 = 1960$

$4 \times 491 = 1964$

$4 \times 492 = 1968$

$4 \times 493 = 1972$

$4 \times 494 = 1976$

$4 \times 495 = 1980$

$4 \times 496 = 1984$

$4 \times 497 = 1988$

$4 \times 498 = 1992$

$4 \times 499 = 1996$

$4 \times 500 = 2000$

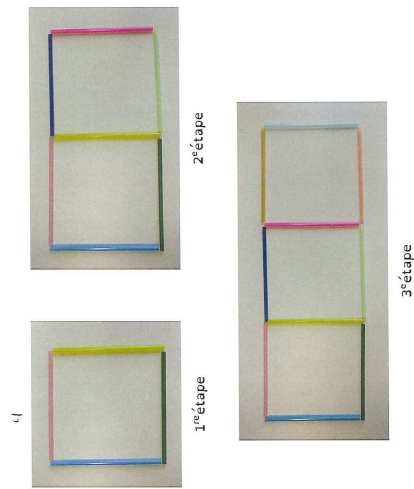
Figure E.61 - La suite de carrés, Élève 14.

$x + 2$

$n + 1$

$x + 1 = 3$

Figure E.62 - La suite de carrés, Élève 14.



Voici les trois premières étapes d'une suite de carrés.
 a) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés? Et de 5 carrés?

$$4 \times 4 = 16$$

(carrés, 16)

$$4 \times 5 = 20$$

(carrés, 20)

b) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 12 carrés?

$$12 \times 4 = 48$$

$$2 \times 4 + 12 = 36$$

36

Figure E.63 – La suite de carrés, Élève 15.

Figure E.64 – La suite de carrés, Élève 15.

c) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 100 carrés ?

301

Figure E.65 – La suite de carrés, Élève 15.

e) Tu as acheté un paquet de 200 pailles. Combien de carrés peux-tu construire ?

$$\begin{array}{r} 60 \times 3 = 180 \\ 5 \times 3 = 15 \\ \hline 195 \end{array}$$

66

$$\begin{array}{r} 60 \times 3 = 180 \\ 6 \times 3 = 18 \\ \hline 198 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \times 3 = 180 \\ 7 \times 3 = 21 \\ \hline 201 \end{array}$$

Figure E.66 – La suite de carrés, Élève 15.

b) Combien faut-il de pailles pour former une suite de
12 carrés ?

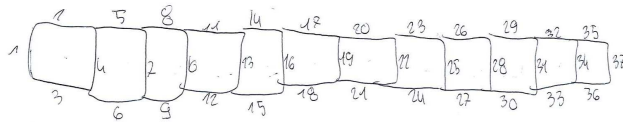


Figure E.67 – La suite de carrés, Élève 16.

c) Combien faut-il de pailles pour former une suite de
100 carrés ?

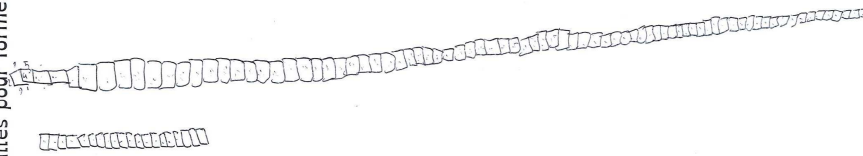


Figure E.68 – La suite de carrés, Élève 16.

e) Tu as acheté un paquet de 200 pailles. Combien de carrés peux-tu construire ?

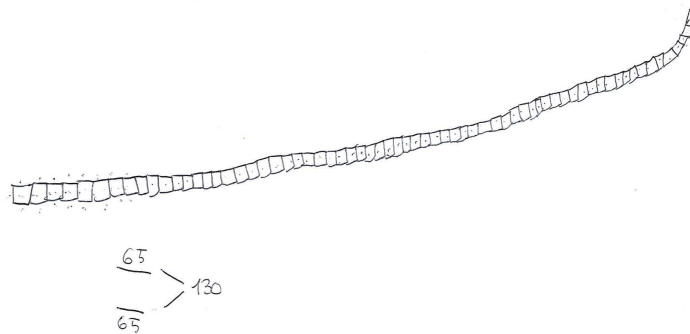
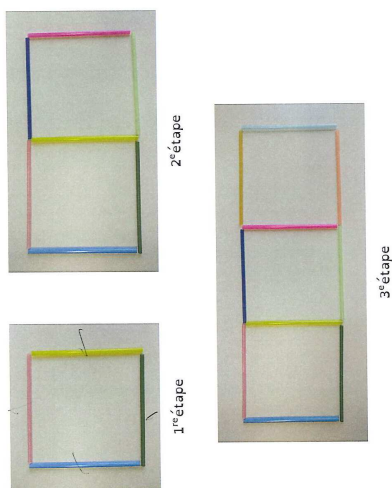


Figure E.69 – La suite de carrés, Élève 16.



Voici les trois premières étapes d'une suite de carrés.

a) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés? Et de 5 carrés?

$$1 = 4 \quad 2 = 3 \quad 3 = 3 \quad 4 = 3$$

$$4 + 3 + 3 = 13$$

$$13 + 3 = 16$$

Figure E.70 – La suite de carrés, Élève 17.

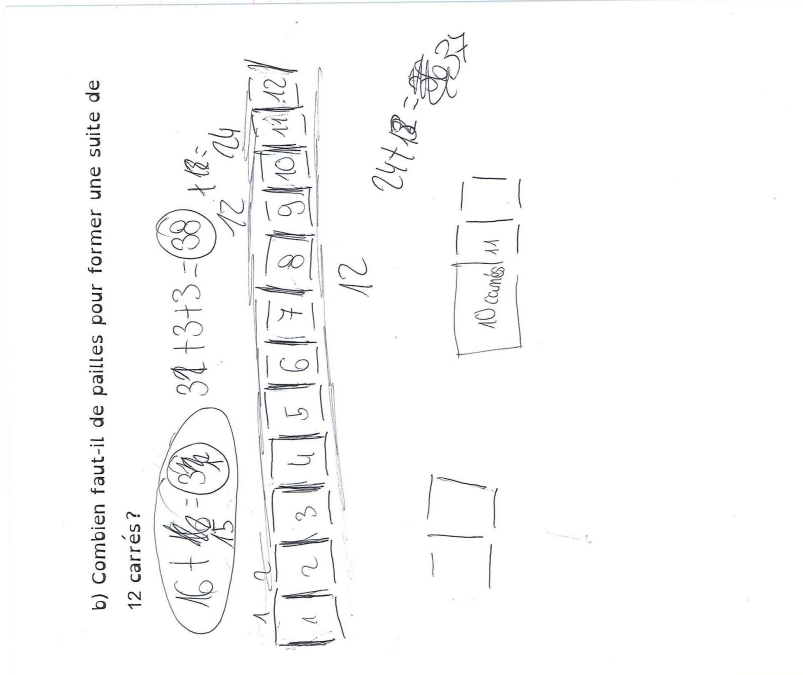


Figure E.71 - La suite de carrés, Élève 17.

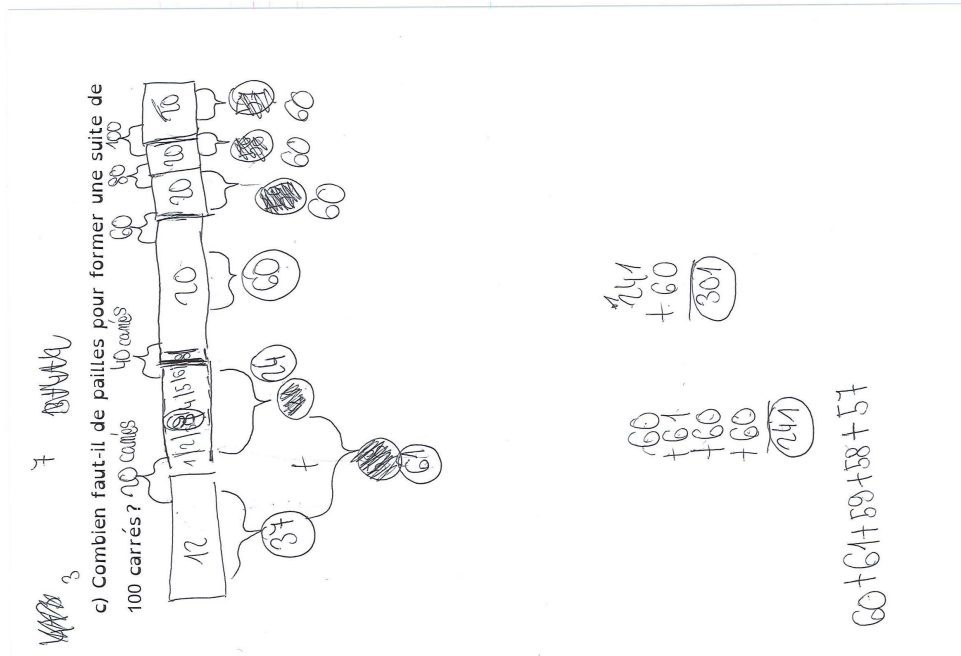


Figure E.72 - La suite de carrés, Élève 17.

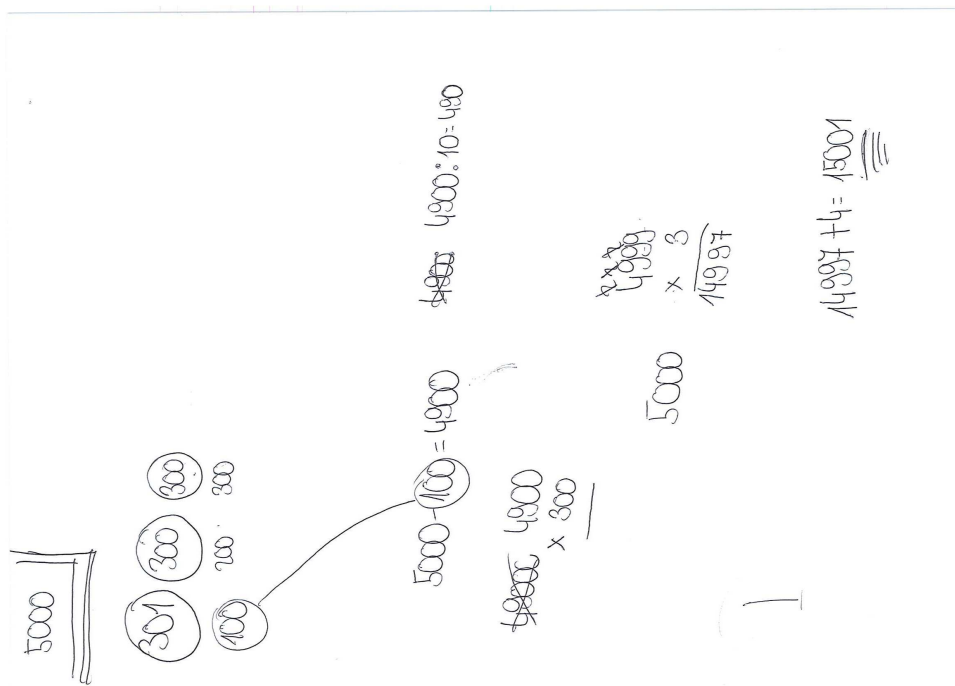


Figure E.73 - La suite de carrés, Élève 17.

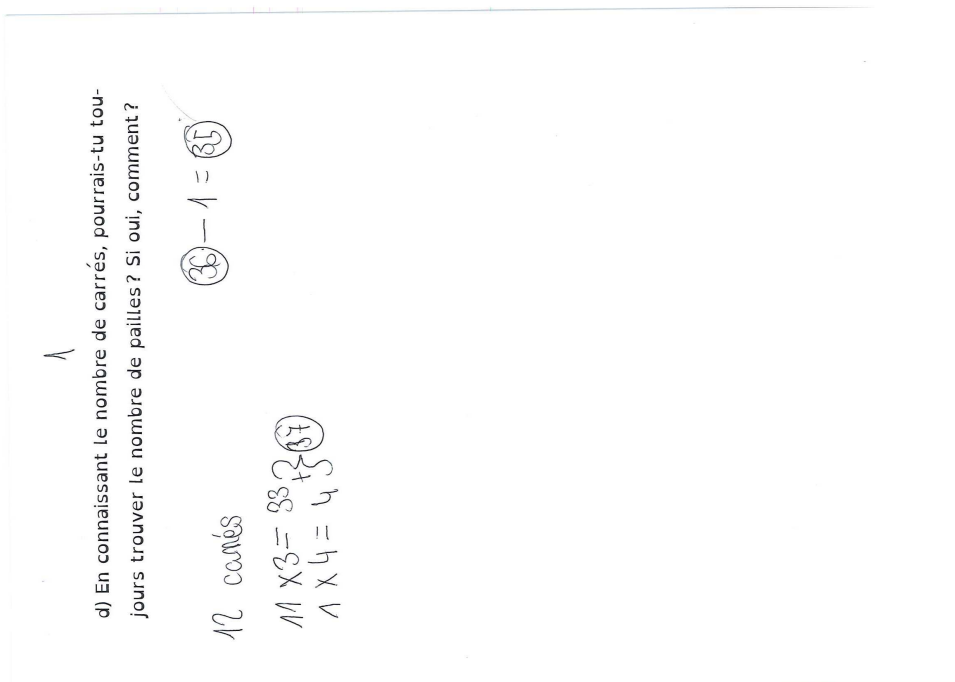


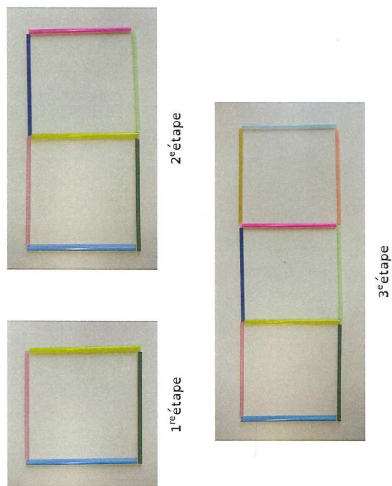
Figure E.74 - La suite de carrés, Élève 17.

e) Tu as acheté un paquet de 200 pailles. Combien de carrés peux-tu construire?

1) $200 - 4 = 196$ $196 - 1 = 195$
 $63 + 1 = 64$

$$\begin{array}{r} 195 \\ 181 \\ \hline -15 \\ \hline 0 \end{array}$$

Figure E.75 – La suite de carrés, Élève 17.



Voici les trois premières étapes d'une suite de carrés.

a) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés? Et de 5 carrés?

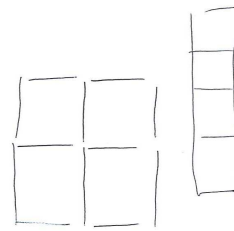


Figure E.76 – La suite de carrés, Élève 18.

c) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 100 carrés ?

$$\begin{array}{r|l} \text{pailles} & \text{carrés} \\ \hline 3 & 1 \\ 7 & 2 \\ 10 & 3 \\ & \vdots \\ & 100 \end{array}$$

Figure E.77 – La suite de carrés, Élève 18.

d) En connaissant le nombre de carrés, pourrais-tu toujours trouver le nombre de pailles ? Si oui, comment ?

$$n \sim \text{carrés}$$

$$3 \cdot n - 3 + 4$$

Figure E.78 – La suite de carrés, Élève 18.

e) Tu as acheté un paquet de 200 pailles. Combien de carrés peux-tu construire?

$$\begin{array}{r} \text{Carrés} \\ 200 \\ \hline 100 \\ 200 \end{array}$$

$$3 \cdot 66 - 3 + 4 = 199$$

Figure E.79 – La suite de carrés, Élève 18.

1^{re} étape 2^e étape 3^e étape

\rightarrow Carrés
 \rightarrow Pailles
 \rightarrow 100 carrés

Voici les trois premières étapes d'une suite de carrés.

a) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés? Et de 5 carrés?

$$\begin{array}{l} 4 \quad 3 \cdot 2 = 13 \\ 4 \\ 5 \quad 4 \cdot 2 = 16 \\ 5 \end{array}$$

Figure E.80 – La suite de carrés, Élève 21.

b) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 12 carrés?



Figure E.81 – La suite de carrés, Élève 21.

c) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 100 carrés?

$100 \times 4 = 301$
 100

Figure E.82 – La suite de carrés, Élève 21.

d) En connaissant le nombre de carrés, pourrais-tu toujours trouver le nombre de pailles? Si oui, comment?



$$\begin{array}{r} 5 \\ 5 \end{array} \quad 4 \cdot 2 = 16 \text{ pailles}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array} \quad 0 \cdot 2 = 400$$

$$\begin{array}{r} 5000 \\ 5000 \end{array} \quad 4999 \cdot 2 = 1564$$

$$0 \times 2 = 0$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ 0 \end{array} \quad 0 - (4 \cdot 2) = 200$$

Figure E.83 – La suite de carrés, Élève 21.

e) Tu as acheté un paquet de 200 pailles. Combien de carrés pourrais-tu construire?

$$200 : 4 = 50$$

$$50 : 2 = 25$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ 25 \end{array} \quad 24 + 2 = 76$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ 50 \end{array} \quad 49 \cdot 2 = 151$$

$$200 - 2 = 198$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ 0 \end{array} \quad 0 - 1 = 198$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ 0 \end{array} \quad 0 = 199$$

$$66 + 6$$

$$\begin{array}{r} (66) \ 65 \ 2 \\ 66 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 137 \\ 65 \\ \hline 199 \end{array}$$

Figure E.84 – La suite de carrés, Élève 21.

1^{re} étape 2^e étape 3^e étape

Voici les trois premières étapes d'une suite de carrés.
 a) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 4 carrés? Et de 5 carrés?

Figure E.85 – La suite de carrés, Élève 22.

b) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 12 carrés?

$12 \times 5 =$
 $\rightarrow 1 \times 3 = 33 + 4 = 37$

Carrés	Pailles
1	4
2	7
3	10
4	13
5	16
6	19
7	22
8	25
9	28
10	31
11	34
12	37

Figure E.86 – La suite de carrés, Élève 22.

c) Combien faut-il de pailles pour former une suite de 100 carrés?

$$\left(4 \times \frac{?}{25} = 100 \right)$$

$$100 \times 3 = 300 + 4 = 304$$

$$99 \times 3 = 297 + 4 = 301$$

Figure E.87 – La suite de carrés, Élève 22.

e) Tu as acheté un paquet de 200 pailles. Combien de carrés peux-tu construire?

$$200 \div 3 = 66,6$$

$$200 - 4 = 196 \div 3 = 65,3$$

Figure E.88 – La suite de carrés, Élève 22.

E.4 Nombres pairs/impairs

En additionnant deux nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair ?

$$\begin{array}{r} 5 \\ 5 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 7 \\ \hline 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ 9 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 7 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 9 \\ \hline 16 \end{array}$$

Figure E.89 – Nombres pairs/impairs, Élève 1.

En additionnant deux nombres PAIRS, le résultat ... ?

$$\begin{array}{r} 6 \\ 8 \\ \hline 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 4 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 6 \\ 4 \\ \hline 18 \end{array}$$

Figure E.90 – Nombres pairs/impairs, Élève 1.

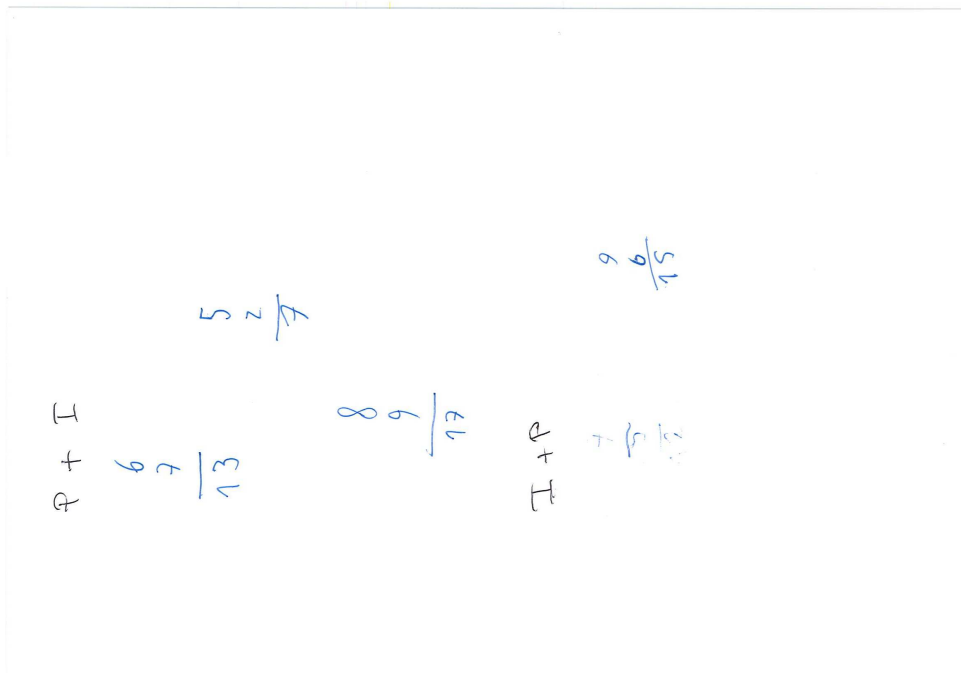


Figure E.91 - Nombres pairs/impairs, Élève 1.

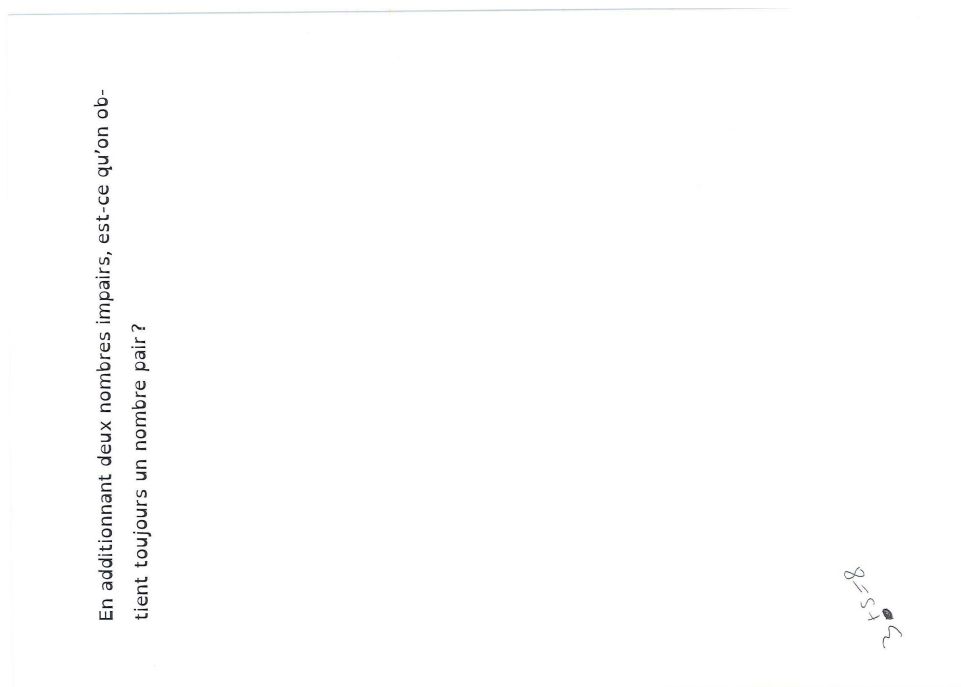


Figure E.92 - Nombres pairs/impairs, Élève 3.

En additionnant deux nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair?

$$I + P$$

$$P + I$$

Figure E.93 - Nombres pairs/impairs, Élève 4.

En additionnant deux nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair? *oui*

$$P + P$$

$$\begin{array}{r} 4444 \\ + 2222 \\ \hline 6666 \end{array}$$

$$I + P$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ 6648 \\ \hline 7759 \end{array}$$

$$I + P$$

$$\begin{array}{r} 135,79,11,13 \\ 2,4,6,8,10,12,14 \\ \hline \end{array}$$

$$P + I$$

$$\begin{array}{r} 446 \\ 331 \\ \hline 777 \end{array}$$

Figure E.94 - Nombres pairs/impairs, Élève 4.

En additionnant deux nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair ?



$$P + P$$

$$I + P$$

$$P + I$$

Figure E.95 - Nombres pairs/impairs, Élève 7.

En additionnant deux nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair ?

$$P + P$$

$$6 + 4$$

$$10 + 16 = 26$$

$$I + P =$$

$$9 + 4 = 13$$

$$19 + 10 = 29$$

$$18 + 10 = 28$$

$$P + I$$

Figure E.96 - Nombres pairs/impairs, Élève 8.

En additionnant deux nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair ?

2, 4, 6, 8, 10 / 1, 3, 5, 7, 9, 11

$1+5=6$

$7+3=10$ $9+7=16$

$\overset{8}{P} + \overset{8}{P} = 16$

$\overset{3}{I} + \overset{4}{P} = 5$

$1+P=$

$P+1$

Figure E.97 - Nombres pairs/impairs, Élève 9.

En additionnant deux nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair ?

Pair:

4, 6, 8, 12, 14,

Pair + Pair

Impair + Pair

Pair + Impair

Figure E.98 - Nombres pairs/impairs, Élève 11.

En additionnant deux nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair? ~~ça donne~~ Ou.

Handwritten student work for Figure E.99:

- Initial scribbles: $2 \times 5 = 10$, $2 \times 3 = 6$
- Equations: $2 \times 2 = 4 / 3$, $2 \times 4 = 8 / 7$, $2 \times 5 = 10 / 9$, $2 \times 6 = 12 / 11$, $2 \times 7 = 14 / 13$, $2 \times 8 = 16 / 15$, $2 \times 9 = 18 / 17$
- Final scribbles: $2 \times 10 = 20 / 19$, $2 \times 11 = 22 / 21$, $2 \times 12 = 24 / 23$
- Other notes: "sit cu", "11", "15", "24", "19", "21", "23", "25", "27", "29", "31", "33", "35", "37", "39", "41", "43", "45", "47", "49", "51", "53", "55", "57", "59", "61", "63", "65", "67", "69", "71", "73", "75", "77", "79", "81", "83", "85", "87", "89", "91", "93", "95", "97", "99"

Figure E.99 - Nombres pairs/impairs, Élève 12.

Pair + Pair

Handwritten student work for Figure E.100:

- Equation: $2 \times 15 = 30$
- Diagram: A circle containing the number 6, with a horizontal line through it, and the number 10 written below it.
- Arithmetic: $2 \times 15 = 30$ (written vertically), $15 + 15 = 30$ (written vertically), $2 \times 15 = 30$ (written vertically)
- Other scribbles: $2 \times 15 = 30$ (written vertically), $2 \times 15 = 30$ (written vertically)

Figure E.100 - Nombres pairs/impairs, Élève 12.

En additionnant deux nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair ?

$$3 + 7 = 10$$

$$P + P = I + I =$$

$$I + P = 3 + 4 = 7$$

$$P + I =$$

Figure E.101 - Nombres pairs/impairs, Élève 13.

En additionnant deux nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair ?

$$3 + 3 = 6$$

$$2 + 2 = 4$$

$$3 + 5 = 8$$

$$5 + 7 = 12$$

$$3 + 7 = 10$$

$$P + P$$

$$I + I = 2 + 2 = 4$$

$$4 + 4 = 8$$

$$4 + 8 = 12$$

Figure E.102 - Nombres pairs/impairs, Élève 14.

1 + P

$5 + 8 = 13$
 $3 + 4 = 7$
 $5,5 + 4,5 = 10 \div 2 = 5$

En additionnant deux multiples de trois, est-ce qu'on obtient toujours un multiple de trois?

$3 + 6 = 9 \div 3 = 3$
 $3 + 3 = 6 \div 3 = 2$
 $3 + 9 = 12 \div 3 = 4$
 $6 + 9 = 15 \div 3 = 5$

$15 + 9 = 24 \div 3 = 8$
 $24 \div 3 = 8$

$12 \div 3 = 4$
 $12 \div 3 = 4$

$11 \div 3 = 3 \text{ r } 2$
 $4 + 8 = 12 \div 3 = 4$

$12 \div 3 = 4$

Figure E.103 - Nombres pairs/impairs, Élève 14.

En additionnant deux nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair?

$9 + 11 = 20$
 $1 + 3 = 4$
 $103 + 111 = 214$

P + P
 I + P ?
 P + I ?

En additionnant deux multiples de trois...?

Figure E.104 - Nombres pairs/impairs, Élève 15.

En additionnant deux nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair ?

2 4 6 8
 1 3 5 7 9

P+P
 I+P
 P+I

En additionnant deux multiples de trois, est-ce qu'on obtient toujours un multiple de trois ?

6 + 3 = 9

Figure E.105 - Nombres pairs/impairs, Élève 16.

Figure E.106 - Nombres pairs/impairs, Élève 16.

En additionnant deux nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair ?

$$\begin{array}{r} 0, 2, 4, 6, 8 \\ 1, 3, 5, 7, 9 \\ \hline \end{array} = \text{Oui}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ + 35 \\ \hline 70 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ + 37 \\ \hline 62 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ + 23 \\ \hline 58 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ + 29 \\ \hline 50 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ + \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 3 \\ \hline \end{array}$$

Figure E.107 - Nombres pairs/impairs, Élève 17.

$$P + P = \text{paire}$$

$$50 + 50 = 100$$

$$24 + 26 = 50$$

En additionnant deux multiples de 3

$$9 + 12 = 21$$

$$\begin{array}{r} \text{X} + \text{X} = \\ \text{X} + \text{X} = \end{array}$$

Figure E.108 - Nombres pairs/impairs, Élève 17.



Figure E.109 – Nombres pairs/impairs, Élève 18.

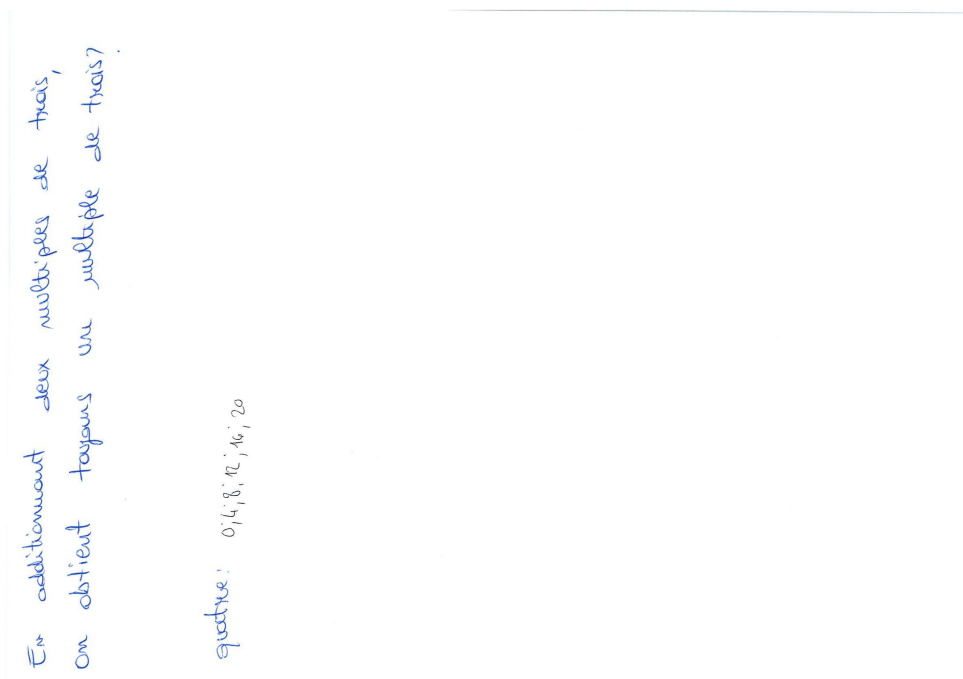


Figure E.110 – Nombres pairs/impairs, Élève 18.

En additionnant deux nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair ?

111 111
111 111
P+P
I+P
P+I

Figure E.111 - Nombres pairs/impairs, Élève 21.

En additionnant deux nombres impairs, est-ce qu'on obtient toujours un nombre pair ?

34829
I+P
3+3=6
5+5=10
7+7=14
9+9=18
P+I
5+3=8
7+5=12
9+7=16

P+P
2+2=4
10+10=20
6+6=12
8+4=12
6+2=8

Figure E.112 - Nombres pairs/impairs, Élève 22.

En additionnant deux multiples de trois,
est-ce qu'on obtient toujours un
multiple de trois ?

$3 \times 3 = 9$
 $3 + 3 = 6$
 $3 + 6 = 9$
 $9 + 3 = 12$
 $15 + 18 = 33$
 ~~$12 + 15 = 27$~~
 $33 + 36 = 69$
 $12 + 15 = 27$
 26

Figure E.113 – Nombres pairs/impairs, Élève 22.

Annexe F

Les questions posées au corps enseignant

Afin de mieux comprendre le contexte scolaire des élèves qui ont participé au recueil de données et d'obtenir davantage des informations sur leurs difficultés ou caractéristiques, nous avons interviewé leurs enseignantes et enseignants de mathématiques. Au total, nous avons recueilli neuf entretiens du corps enseignant : quatre entretiens pour l'établissement A et un pour les établissements B, C, D, E et F respectivement. Ces échanges ont étayé la rédaction des paragraphes du 8.1.2 au 8.1.7 et ont permis de comprendre que les tâches proposées n'étaient pas habituelles pour les élèves.

Voici les questions que nous avons posées :

Questions générales :

1. Pendant vos cours, utilisez-vous le mot nonante-neuf ou quatre-vingt-dix-neuf?
2. Quel symbole utilisez-vous pour la multiplication?
3. Utilisez-vous la calculatrice en classe? Si oui, quand et comment?

Questions sur les tâches. Pour chaque tâche proposée pendant l'entretien avec les élèves :

4. C'est un type de tâche que vos élèves ont l'habitude de faire en classe?
5. Qu'en pensez-vous?

Questions sur les élèves. Pour chaque élève qui a participé au recueil de données :

6. Quel âge a-t-elle-il?
7. Quel est son niveau en mathématiques?

8. L'élève, a-t-elle-il quelques types de diagnostics?
9. Qu'est-ce que pouvez-vous me dire à propos de cet·te élève comme élève en mathématiques?
10. Pourquoi, à votre avis, a-t-elle-il des difficultés (voir a-t-elle-il de bons résultats) en mathématiques?

Les questions de la 1 à la 3 sont des questions générales. Les questions 1 et 2 sont des clarifications linguistiques et sémiotiques pour nous permettre d'interagir avec l'élève en utilisant un vocabulaire et des signes qui ne sont pas un obstacle supplémentaire. La question 1 est nécessaire, car en Suisse, en fonction du canton, il y a différentes traditions en ce qui concerne les mots-nombres et nous voulions nous assurer d'être cohérente avec la terminologie des élèves. La question 2 est nécessaire, car les élèves se trouvent à la transition entre primaire et secondaire et en fonction des établissements il peut y avoir des habitudes différentes en ce qui concerne la représentation de la multiplication. En s'agissant d'élèves en difficulté, nous ne voulions pas ajouter d'autres difficultés pas en lien avec le sujet d'étude. La question 3 nous a donné des informations à propos de l'utilisation de la calculatrice dans les différentes classes vu que cet outil faisait partie des relances pendant les entretiens avec les élèves en cas de difficulté avec les calculs.

Les questions 4 et 5 ont été posées pour chaque tâche afin de savoir s'il s'agissait de tâches habituelles pour les élèves ou pas et de connaître le point de vue du corps enseignant à propos de celles-ci.

Les questions de la 6 à la 10 ont été posées à propos de chaque élève qui a participé au recueil de données. L'objectif était d'avoir davantage d'information sur l'élève : âge, niveau en mathématique (VG1, VG2 ou VP), l'éventuel diagnostic, et la vision que l'enseignant ou l'enseignante avait de l'élève.