



HAL
open science

Diffraction électromagnétique par une couche mince de nanoparticules réparties aléatoirement : développement asymptotique, conditions effectives et simulations.

Amandine Boucart

► **To cite this version:**

Amandine Boucart. Diffraction électromagnétique par une couche mince de nanoparticules réparties aléatoirement : développement asymptotique, conditions effectives et simulations.. Optimisation et contrôle [math.OC]. Institut Polytechnique de Paris, 2023. Français. NNT : 2023IPPAE006 . tel-04400789

HAL Id: tel-04400789

<https://theses.hal.science/tel-04400789v1>

Submitted on 17 Jan 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2023IPPAE006

Thèse de doctorat



Diffraction électromagnétique par une couche mince de nanoparticules réparties aléatoirement : développement asymptotique, conditions effectives et simulations.

Thèse de doctorat de l'Institut Polytechnique de Paris
préparée à l'École nationale supérieure de techniques avancées

École doctorale n°574 École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH)
Spécialité de doctorat: Mathématiques appliquées

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 4 avril 2023, par

Amandine Boucart

Composition du Jury :

François ALOUGES Professeur, École Polytechnique (CMAP)	Président du Jury
Frédéric LEGOLL Chercheur-Professeur, École des Ponts ParisTech	Rapporteur
Victor PERON Maître de conférences, Université de Pau	Rapporteur
Regis COTTEREAU Chargé de recherche, Laboratoire de Mécanique et Acoustique	Examineur
Bérangère DELOURME Maître de conférences, Université Sorbonne Paris Nord	Examinatrice
Agnès MAUREL Directrice de Recherche CNRS, Institut Langevin	Examinatrice
Sonia FLISS Enseignante-chercheuse, ENSTA-Paris (POEMS)	Directrice de thèse
Laure GIOVANGIGLI Enseignante-chercheuse, ENSTA-Paris (POEMS)	Invitée / Co-encadrante
Bruno Stupfel Ingénieur-Chercheur, CEA-CESTA	Invité / Co-encadrant

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à Sonia Fliss, Laure Giovangigli et Bruno Stupfel mes directeurs de thèses avec qui j'ai vraiment apprécié travailler. Ce fut un réel plaisir de les rencontrer et d'avoir l'honneur de travailler avec eux. Je les remercie sincèrement pour leur patience, leur accompagnement, leur disponibilité et de leur intérêt pour ce travail. Enfin, je les remercie pour leurs encouragements et leur soutien, notamment lors de la rédaction du manuscrit et la préparation de la soutenance.

Je souhaite remercier l'ensemble des membres du jury d'avoir accepté d'assister à ma soutenance de thèse et de faire partie de mon jury. Je les remercie du temps et de l'intérêt qu'ils ont consacré à mon travail. Je remercie particulièrement Frédéric Legoll et Victor Peron qui ont accepté de rapporter sur ma thèse et de leurs commentaires pertinents sur le manuscrit. Je remercie François Alouges d'avoir accepté d'être le président du jury le jour de la soutenance.

Je remercie le CEA CESTA d'avoir financé mon travail et INRIA pour une prolongation de 3 mois qui m'a permis de finir dans de bonnes conditions.

Je remercie chaleureusement Geneviève pour sa disponibilité et sa gentillesse depuis mon arrivée au CEA.

Je garde de ces trois années de thèse riches en mathématiques, beaucoup de souvenirs et de belles rencontres. J'ai évolué dans deux équipes, celle du CEA CESTA et celle de l'UMA à l'ENSTA Paris. Une pensée particulière va vers Justine ma co-bureau, mon acolyte avec qui j'ai beaucoup parlé, rigolé et partagé des pensées mathématiques. Je tiens en particulier à remercier dans l'équipe du CEA les doctorants et post-doctorants : Corentin, Julien, Stéphane, Damien, et tous les autres ; Matthieu et l'équipe d'électromagnétisme ; qui ont fait de cette aventure un plaisir à vivre. Je remercie Adrien qui a permis la réalisation d'un film pédagogique illustrant le contexte et les objectifs de la thèse. Cette collaboration fût très enrichissante et agréable.

Dans l'équipe de l'UMA, je tiens à remercier les doctorants et post-doctorants : Alice, Laura, Quentin, Pierre, Etienne, Farah, Aurélien, Louise, Clara, Amon, Fabien, Cédric, Thibaut et tous les autres avec qui j'ai partagé des moments très agréables ! Je tiens à remercier toute l'équipe POEMS pour leur accueil chaleureux, en particulier la directrice de recherche, Anne-Sophie, qui m'a chaleureusement accueillie au sein de l'équipe et Nicolas pour les installations Xlife++.

Enfin, je remercie chaleureusement ma famille pour leur soutien sans failles ! Mes pensées se tournent vers Samuel et ma maman pour leur soutien quotidien, leur patience et leur compréhension. Mais aussi vers ma sœur Aude et mon oncle qui m'ont permis de me rendre régulièrement à l'ENSTA en me logeant et en me faisant des petits plats.

Je tiens à finir ces remerciements avec une pensée pour ma mamie, qui est partie durant la dernière année de cette aventure, qui était très heureuse de mon parcours.

Résumé de la thèse

Nous considérons le problème de diffraction d'une onde plane harmonique électromagnétique par un objet inhomogène recouvert d'une couche très fine de particules parfaitement conductrices distribuées aléatoirement. Nous cherchons à quantifier l'effet de cette couche sur le coefficient de réflexion. La taille des particules, leur espacement et l'épaisseur de la couche sont du même ordre mais petites par rapport à la longueur d'onde incidente et les dimensions de l'objet. Deux difficultés apparaissent : (1) résoudre numériquement les équations de Maxwell dans ce contexte est extrêmement coûteux en terme de taille mémoire et de temps calcul ; (2) la répartition des particules n'est pas connue pour un objet donné. Nous allons supposer que c'est une réalisation d'une répartition supposée aléatoire.

Pour contourner ces difficultés, nous construisons un modèle effectif, à l'aide d'un développement asymptotique multi-échelle de la solution, où la couche de particules est remplacée par une condition aux bords effective, prescrite sur une surface située au-dessus des particules.

Dans le cas d'une répartition périodique des particules, les coefficients qui apparaissent dans la condition effective sont déterminés à partir de problèmes de type Laplace, dits «de cellule», posés dans une demi-bande périodique contenant des particules de taille unitaire.

Dans le cas d'une répartition aléatoire des particules, si la distribution des particules est stationnaire (la loi de distribution est la même en tout point) et ergodique (le moyennage spatial sur un grand domaine correspond au moyennage par rapport à l'aléatoire), la condition effective fait intervenir des coefficients déterministes qui dépendent également de solutions de problèmes de type Laplace mais dans un demi-espace infini recouvert d'une couche de particules réparties aléatoirement de taille unitaire. Ces problèmes non bornés sont approchés numériquement par des problèmes de cellule périodique de très grande taille et les coefficients sont obtenus à l'aide d'approximation de type Monte-Carlo.

Abstract

We consider the scattering problem of an electromagnetic harmonic plane wave by an inhomogeneous object covered with a very thin layer of perfectly conductive particles distributed randomly. We want to quantify the effect of this layer on the reflection coefficient. The size of the particles, their spacing and the thickness of the layer are of the same order but small compared to the incident wavelength and the dimensions of the object. Two difficulties appear : (1) solving numerically Maxwell's equations in this context is extremely expensive in terms of memory size and computation time ; (2) the particle distribution is not known for a given object. We will assume that it is a realization of a supposedly random distribution.

To overcome these difficulties, we develop an effective model, using an asymptotic multiscale expansion of the solution, where the particle layer is replaced by an effective boundary condition, prescribed on a surface above the particles.

In the case of a periodic particles distribution, the coefficients which appear in the effective condition are given by Laplace type problems, called "cell", posed in a periodic half-band with unit size particles.

In the case of a random particle distribution, if the particle distribution is stationary (the distribution law is the same at all points) and ergodic (the spatial averaging over a large domain corresponds to the averaging with respect to the random), the effective condition involves deterministic coefficients which also depend on solutions of Laplace-type problems but in an infinite half-space covered by a randomly distributed layer of unit size particles. These unbounded problems are approximated numerically by very large periodic cell problems and the coefficients are obtained using Monte-Carlo approximations.

Table des matières

Table des matières	vii
I Introduction générale	1
I	1
1.1 Contexte de la thèse et motivations	1
1.2 Choix de la modélisation	3
1.3 Plan du manuscrit	5
II Cas bi-dimensionnel d'une répartition périodique des particules	9
2 Présentation du modèle	11
Présentation du modèle	11
2.1 Géométrie	11
2.2 Le problème de diffraction	13
2.3 Condition d'onde sortante et opérateur de Dirichlet-to-Neumann	15
3 Développement asymptotique	29
3.1 Ansatz du développement asymptotique	30
3.2 Équations satisfaites par les termes de champ lointain et les termes de champ proche	32
3.3 Comportement à l'infini des termes de champ proche	38
3.4 Étude du cas des conditions de Dirichlet sur les particules	41
3.5 Étude du cas des condition de Neumann sur les particules	71
4 Méthodes numériques et résultats	97
4.1 Calcul de la solution de référence	98
4.2 Calcul numérique du modèle effectif pour une condition de Dirichlet	98
4.3 Calcul numérique du modèle effectif pour une condition de Neumann	105
4.4 Évolution du coefficient de réflexion dans le cas d'une condition de Neumann	113
II Cas bi-dimensionnel d'une répartition aléatoire des particules	119
5 Présentation du modèle	121
5.1 Géométrie	121

5.2	Formulation du problème	122
5.3	Condition d'onde sortante et opérateur de Dirichlet-to-Neumann	124
5.4	Caractère bien posé du problème de diffraction	126
5.5	Cadre aléatoire	129
5.6	Caractère bien posé du problème de diffraction dans le cadre aléatoire	131
6	Développement asymptotique	133
6.1	Ansatz du développement asymptotique	134
6.2	Équations satisfaites par les termes de champ lointain et les termes de champ proche	136
6.3	Comportement à l'infini des termes de champ proche	140
6.4	Étude du cas des conditions de Dirichlet sur les particules	151
6.5	Étude du cas des conditions de Neumann sur les particules	167
7	Méthodes numériques et résultats	179
7.1	Calcul de la solution de référence	180
7.2	Génération du milieu aléatoire	181
7.3	Étude de l'évolution du taux de remplissage ρ	185
7.4	Calcul numérique du modèle effectif pour une condition de Dirichlet	186
7.5	Calcul numérique du modèle effectif pour une condition de Neumann	192
7.6	Réduction de l'erreur de résonance	198
7.7	Technique de réduction de variance	200
7.8	Évolution du coefficient de réflexion dans le cas d'une condition de Neumann	202
III	Cas tri-dimensionnel d'une répartition périodique des particules	207
8	Présentation du modèle	209
8.1	Géométrie	209
8.2	Le problème de diffraction	211
8.3	Condition d'onde sortante et opérateur de Dirichlet-to-Neumann	214
9	Développement asymptotique	223
9.1	Ansatz du développement asymptotique	224
9.2	Équations satisfaites par les termes de champ lointain et les termes de champ proche	226
9.3	Caractère bien posé des problèmes de champ proche	233
9.4	Comportement à l'infini des termes de champ proche	246
9.5	Construction des termes de champ proche	252
9.6	Problèmes vérifiés par les termes de champ lointain	259
9.7	Modèles effectifs proposés	262
10	Résultats numériques	267
10.1	Calcul de la solution de référence	267
10.2	Calcul numérique du modèle effectif	269
10.3	Calcul du coefficient de réflexion	277
10.4	Validations numériques	278
A	Décomposition à l'aide des modes TE et TM	281

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Contexte de la thèse et motivations

Cette thèse s'inscrit dans le contexte de la furtivité électromagnétique. La furtivité électromagnétique d'un objet est caractérisée par sa Surface Equivalente Radar (SER), grandeur quantifiant la proportion d'énergie renvoyée vers le radar. Rendre un objet furtif, c'est diminuer significativement sa SER. Dans ce cadre, le CEA/DAM/CESTA développe des codes de calcul simulant avec précision le comportement électromagnétique d'un objet tridimensionnel situé dans le vide, typiquement un conducteur recouvert d'un empilement de matériaux. En régime harmonique, il est éclairé par une onde plane incidente émise par le radar situé très loin de l'objet. Compte tenu de la faible amplitude de l'onde, les phénomènes physiques mis en jeu sont linéaires. Le calcul du champ diffracté par cet objet nécessite la résolution numérique des équations de Maxwell dans le domaine fréquentiel. Des méthodes de résolution dites exactes : formulations variationnelles volumiques ou surfaciques, sont aujourd'hui bien maîtrisées.

Pour les méthodes de formulations variationnelles volumiques, le domaine de calcul incluant l'objet est borné extérieurement par une surface fermée sur laquelle est implémentée une condition transparente de type représentation intégrale. Le volume intérieur de l'objet est maillé avec des tétraèdres à l'intérieur desquels les champs électromagnétiques sont représentés par des fonctions de base appropriées (discrétisation par des éléments finis volumiques). Pour une fréquence donnée, la résolution des équations de Maxwell est alors ramenée à la résolution d'un système linéaire matriciel où la solution représente les valeurs discrétisées du champ diffracté et le second membre prend en compte le champ incident. Pour les objets tridimensionnels intéressant le CEA/DAM, le système linéaire à résoudre est de l'ordre de plusieurs centaines de millions d'inconnues. La complexité numérique (taille mémoire et temps de calcul) requise pour la résolution précise du système, même si elle est réduite par l'emploi d'une méthode de décomposition de domaines et une parallélisation massive, reste élevée.

Il en est de même pour les méthodes surfaciques faisant intervenir des équations intégrales posés sur la surface de l'objet et sur les interfaces entre les matériaux qui les composent. Après discrétisation par une méthode d'éléments finis de frontière, ce problème se ramène aussi à un système linéaire où l'inconnue représente alors les valeurs discrétisées des composantes tangentielles des champs sur ces surfaces. La taille de la matrice du système linéaire est certes plus petite mais elle est pleine. Donc son inversion même en utilisant des méthodes sophistiquées de compression et d'inversion, reste très coûteuse.

Il est néanmoins possible de calculer la SER d'un objet tridimensionnel recouvert d'un empilement de matériaux et d'optimiser l'empilement et les matériaux pour réduire la SER de l'objet dans une ou plusieurs directions. L'objet peut être recouvert d'une fine couche de très nombreuses particules conductrices qui peut modifier la SER de l'objet. L'objectif de ces travaux est de comprendre si c'est le cas et si oui comment la SER est modifiée.

Même si la répartition des particules est connue, la complexité numérique du problème induite par le maillage volumique de l'empilement et des particules devient rédhibitoire compte tenu de la disparité des échelles spatiales : le mètre pour l'objet, le centimètre pour la longueur d'onde incidente, le millimètre pour l'épaisseur de l'empilement de matériaux qui recouvre l'objet et le nanomètre pour les particules. Il s'avère qu'en plus la répartition de ces particules n'est pas connue ! Nous cherchons à proposer dans cette thèse des modèles effectifs qui permettent de représenter la couche de petites particules sur l'empilement plus simplement.

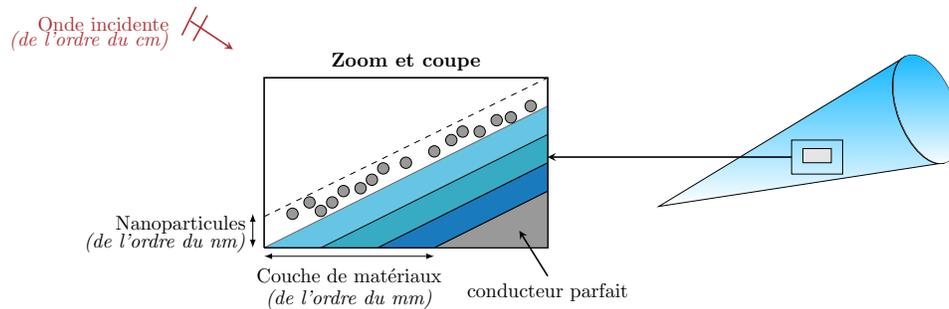


Figure 1.1 – Schéma représentant les différentes échelles

Des simplifications du problème s'imposent. D'une part nous nous affranchissons du maillage des matériaux en modélisant l'empilement multi-couches par une condition d'impédance, dite de Leontovich [Leo48], écrite sur la surface extérieure de l'objet et, d'autre part, nous négligeons les courbures de l'objet en se plaçant dans l'approximation du plan local tangent : en un point quelconque de la surface courbe nous faisons l'approximation que les propriétés radioélectriques sont celles du plan tangent à la surface en ce point. Comme la répartition des particules n'est pas connue, nous allons supposer que c'est une réalisation d'une répartition supposée aléatoire et nous supposons qu'elle vérifie une certaine loi de probabilité qui est stationnaire (la probabilité qu'une particule soit présente est la même en tout point de la couche) et ergodique (la répartition spatiale des particules donne toutes les statistiques de la loi de probabilité).

Il existe deux classes de méthodes pour construire des modèles effectifs : les méthodes basées sur des techniques d'optimisation sous contraintes et les méthodes basées sur des techniques asymptotiques. Pour les méthodes d'optimisation sous contraintes, citons par exemple. [Hop18, SP11, Stu15], il s'agit d'optimiser les coefficients apparaissant dans des conditions aux limites et faisant intervenir des opérateurs différentiels surfaciques pour que les solutions de ce nouveau problème approchent bien une solution de référence. Pour les méthodes asymptotiques, il existe énormément de travaux qui traitent de problèmes de diffraction par des couches minces homogènes [BB02, BL96, HJ02, Via03, PDP⁺08, DPP14, CCDV06, EN93] ou périodiques (distribution périodique dans la direction de l'interface) [AA96, APV98, DDG05, Poi09, Poi12, CJP10, DHJ12, CD13, DHJ13, Del15, MM16, TPM⁺20, Ben21, PSD16].

Nos travaux se situent dans cette deuxième classe de méthode. Ainsi notre étude est basée sur un développement multi-échelle qui permet de représenter à la fois les variations spatiales très rapides proche de la couche de particules, et les variations spatiales plus lentes, comparables à celle de l'onde incidente loin de cette couche. Dans le cas périodique, les résultats obtenus sont assez proches de ceux obtenus dans [Del10]. Néanmoins, nous avons remplacé la méthode des développements asymptotiques dits raccordés que nous ne savons pas étendre au cas aléatoire par une méthode que nous appelons multi-échelle. De plus, notre étude sur les équations de Maxwell présente, du fait

de la présence de particules de type conducteur parfait et de la condition d'impédance, des difficultés spécifiques. Notre cas est donc différent de ce qui est fait dans [DH20, Del15].

Dans le cas aléatoire, les résultats obtenus nous semblent complètement originaux pour les problèmes de diffraction par des couches minces. En effet, il existe énormément de travaux sur l'homogénéisation de volume [GNO21, DG17, DG21a, DG21b, CCDDM09, Hei20, BLBL16] quand le milieu hétérogène a toutes ses dimensions plus grandes que la taille des hétérogénéités. Les travaux qui nous semblent les plus proches de notre étude concernent l'étude des surfaces rugueuses pour la mécanique des fluides [BGV08, GVM10, ABCP11, DGV11, EJ19].

1.2 Choix de la modélisation

La théorie de l'électromagnétisme est régie par les équations de Maxwell qui permettent de représenter mathématiquement la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu. Pour étudier la diffraction de notre structure, nous souhaitons résoudre notre problème dans le domaine fréquentiel. Pour ce faire, nous considérons une dépendance en temps de la forme $e^{i\omega t}$ avec ω la pulsation de l'onde telle que $\omega = 2\pi f$, $f > 0$ la fréquence considérée. Les solutions particulières des équations de Maxwell sont telles que :

$$\begin{cases} \mathcal{E}(t, \mathbf{x}) = \Re e \left(e^{i\omega t} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \right) , \\ \mathcal{H}(t, \mathbf{x}) = \Re e \left(e^{i\omega t} \mathbf{H}(\mathbf{x}) \right) ; \end{cases} \quad (1)$$

avec $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ le champ complexe électrique et $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ le champ complexe magnétique vérifiant les équations de Maxwell harmoniques du premier ordre :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{H} - i\omega \epsilon_0 \mathbf{E} = 0 , \\ \mathbf{rot} \mathbf{E} + i\omega \mu_0 \mathbf{H} = 0 , \\ \mathbf{div}(\epsilon_0 \mathbf{E}) = 0 , \\ \mathbf{div}(\mu_0 \mathbf{H}) = 0 . \end{cases} \quad (2)$$

Ces équations sont vérifiées dans le demi-plan $x_3 > 0$ (nous rappelons que l'objet est supposé être localement plan) privé des particules.

Notons $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ l'impédance caractéristique du vide, $k = \frac{\omega}{c} \in \mathbb{R}$ le nombre d'onde et $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$.

Par conséquent, nous avons $\omega \epsilon_0 = \frac{k}{\eta_0}$ et $\omega \mu_0 = k \eta_0$. De plus, en remplaçant dorénavant $\eta_0 \mathbf{H}$ par \mathbf{H} , nous obtenons :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{H} - ik \mathbf{E} = 0 , \\ \mathbf{rot} \mathbf{E} + ik \mathbf{H} = 0 , \\ \mathbf{div} \mathbf{E} = 0 , \\ \mathbf{div} \mathbf{H} = 0 . \end{cases} \quad (3)$$

Nous pouvons aussi écrire les équations de Maxwell au second ordre

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = 0 & \text{et} & \mathbf{H} = \frac{i}{k} \mathbf{rot} \mathbf{E} , \\ \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{H} - k^2 \mathbf{H} = 0 & \text{et} & \mathbf{E} = -\frac{i}{k} \mathbf{rot} \mathbf{H} . \end{cases} \quad (4)$$

Les nanoparticules sont parfaitement conductrices, les conditions aux bords sont donc de type conducteur parfait :

$$\vec{n} \times \mathbf{E} = 0 , \quad (5)$$

où \vec{n} correspond au vecteur normal unitaire sortant au domaine considéré.

Comme dit précédemment, la couche de matériaux qui recouvre l'objet est modélisée par une condition d'impédance standard de Leontovich sur la surface de l'objet que l'on notera $\Sigma_0 := \{x_3 = 0\}$

$$(\vec{e}_3 \times \mathbf{E}) \times \vec{e}_3 = \mathbf{Z} \vec{e}_3 \times \mathbf{H} , \quad (6)$$

où \mathbf{Z} est le coefficient d'impédance associé à la surface avec $\Re(\mathbf{Z}) > 0$.

Le problème est complété par une condition de radiation. Celle ci sera précisée dans le chapitre 8 pour le cas d'une répartition périodique.

Dans la première partie de cette thèse, le problème est supposé être invariant par translation dans la direction x_2 orthogonale au plan (x_1, x_3) . Les particules sont donc supposées être des cylindres. Si nous considérons des polarisations de l'onde incidente particulière, les équations de Maxwell se ramènent à l'équation de Helmholtz.

En polarisation TE, le champ électrique est donné par $\mathbf{E}^e = (0, E^{(2)}, 0)^t$. Plus précisément, le champ électrique a une seule composante non nulle et tout le champ électromagnétique s'exprime à l'aide de cette composante. Cette composante est celle le long de la direction d'invariance de la surface. Nous notons $u = E^{(2)}$. En remplaçant dans les équations de Maxwell, nous trouvons que u est solution de $-\Delta u - k^2 u = 0$. Sur Σ_0 , la condition d'impédance de Leontovich (6) avec $\mathbf{E} = (0, u, 0)^t$ et $\mathbf{H} = \frac{i}{k}(-\partial_{x_3} u, 0, \partial_{x_1} u)^t$ se réécrit

$$-\partial_{x_3} u + ik\gamma u = 0 , \quad \text{avec } \gamma = \frac{1}{\mathbf{Z}} . \quad (7)$$

La condition d'impédance standard de Leontovich se réduit donc à une condition de Robin sur le bord Σ_0 . Sur les particules, nous avons $\mathbf{E} = (0, u, 0)^t$ et $\vec{n} = (n_1, 0, n_3)^t$ alors $\vec{n} \times \mathbf{E} = 0$ se réécrit

$$u = 0 . \quad (8)$$

Dans ce cas, la condition de conducteur parfait est équivalente à considérer une condition de Dirichlet homogène sur le bord des particules.

En polarisation TM, le champ magnétique est donné par $\mathbf{H}^e = (0, H^{(2)}, 0)^t$. Nous notons $u = H^{(2)}$. En remplaçant dans les équations de Maxwell, nous trouvons que u est solution de $-\Delta u - k^2 u = 0$. Sur Σ_0 , la condition d'impédance de Leontovich (6) avec $\mathbf{H} = (0, u, 0)^t$ et $\mathbf{E} = -\frac{i}{k}(-\partial_{x_3} u, 0, \partial_{x_1} u)^t$ se réécrit

$$-\partial_{x_3} u + ik\gamma u = 0 , \quad \text{avec } \gamma = \mathbf{Z} . \quad (9)$$

La condition d'impédance standard de Leontovich se réduit donc à une condition de Robin sur le bord Σ_0 . Sur les particules, nous avons $\mathbf{H} = (0, u, 0)^t$, $\mathbf{E} = -\frac{i}{k}(-\partial_{x_3} u, 0, \partial_{x_1} u)^t$ et $\vec{n} = (n_1, 0, n_3)^t$ alors $\vec{n} \times \mathbf{E} = 0$ se réécrit

$$\nabla u \cdot \vec{n} = 0 . \quad (10)$$

Dans ce cas, la condition de conducteur parfait est équivalente à considérer une condition de Neumann homogène sur le bord des particules.

1.3 Plan du manuscrit

Cette thèse se décompose en trois parties.

Première Partie

Dans la première partie, nous étudions un problème 2D, où l'objet est plan et où la distribution des particules dans la couche est périodique. Les particules sont vues comme des cylindres et ce problème peut être vu comme une coupe suivant un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre. Les équations de Maxwell se ramènent donc à l'équation de Helmholtz, comme nous l'avons vu précédemment.

Dans le chapitre 2, nous commençons par décrire la géométrie et le problème de diffraction dont nous montrons qu'il est bien posé avec une constante de stabilité indépendante de la taille des particules, quand celle-ci est assez petite (voir le théorème 6).

Pour construire des conditions effectives qui vont remplacer la couche de particules, dans le chapitre 3, nous postulons un développement asymptotique qui fait intervenir des termes de champ proche, qui prennent en compte les variations rapides proches des particules, et des termes de champ lointain, qui représentent les variations lentes de la solution loin des particules. Il faut imposer que les termes de champ proche tendent vers 0 à l'infini pour assurer que la solution a bien un comportement seulement macroscopique loin des particules et est bien représentée par les termes de champ lointain. Nous montrons que les termes de champ proche satisfont des problèmes de type Laplace dans une demi-bande infinie périodique. Dans le cas Dirichlet, ces problèmes sont bien posés dans un cadre fonctionnel variationnel et la solution tend vers 0 à l'infini seulement si une condition dite de compatibilité est satisfaite (théorème 14). C'est cette condition de compatibilité qui nous permet de construire une condition au bord pour les termes de champ lointain (théorème 18). La construction de tous les termes peut être réalisée à tout ordre. Dans un second temps, nous justifions via des estimations d'erreur le développement asymptotique (théorème 28). Enfin, nous proposons un modèle effectif d'ordre 1 (qui ne prend pas en compte la présence de particules) et d'ordre 2 (théorème 35). La même étude est réalisée pour une condition de Neumann sur les particules. Cette fois-ci c'est le caractère bien posé des problèmes de champ proche qui nécessite une condition de compatibilité (théorème 38). Ensuite cette condition de compatibilité permet d'obtenir, comme précédemment, des conditions au bord pour les termes de champ lointain (théorème 44). Une construction à tout ordre, des estimations d'erreur (théorème 52), la construction de modèles effectifs peuvent être réalisées comme dans le cas Dirichlet. Que ce soit pour le cas Dirichlet ou Neumann, les conditions aux bords pour les termes de champ lointain font intervenir des constantes qui sont déterminées à partir de solutions de problèmes de cellule, *i.e.* des problèmes de type Laplace posés dans une demi-bande périodique.

Pour finir cette partie, dans le chapitre 4, afin de valider nos modèles et les estimations d'erreurs, nous calculons, en utilisant la librairie Xlife++, une solution dite de référence à l'aide d'une méthode éléments finis. Nous expliquons comment résoudre les problèmes de type Laplace dans des demi-bandes périodiques, calculer numériquement les constantes intervenant dans les conditions aux bords et calculer les solutions effectives dans les cas Dirichlet et Neumann. Nous effectuons d'une part une validation qualitative en traçant les champs et d'autre part une validation quantitative en traçant l'erreur entre les coefficients de réflexion en fonction de la taille des particules et de différents paramètres de notre modèle. Nous retrouvons bien les ordres théoriques. Une fois les modèles effectifs validés, nous les utilisons pour étudier l'évolution du coefficient de réflexion dans le cas d'une condition de Neumann en fonction de la distance entre les particules afin de mettre en évidence le passage d'un coefficient de réflexion d'une structure transparente à une structure conductrice.

Deuxième partie

Dans la seconde partie, nous nous intéressons au problème où, comme dans la première partie, l'objet est plan mais dans cette partie la distribution des particules dans la couche est aléatoire. Nous étudions l'équation de Helmholtz en 2D et en 3D. Nous considérons dans cette partie un terme source plutôt qu'une onde plane car le cadre fonctionnel et variationnel est plus simple.

Dans le chapitre 5 nous commençons par présenter la géométrie considérée dans cette partie, nous présentons le problème de diffraction et nous montrons qu'il est bien posé, si les tailles des particules et de la couche sont assez petites, avec une constante de stabilité indépendante de la géométrie et donc de la réalisation (théorème 62). Nous finissons ce chapitre par l'introduction du cadre aléatoire : la répartition des particules est supposée stationnaire (la loi de distribution est la même en tout point) et ergodique (le moyennage spatiale sur un grand domaine correspond au moyennage par rapport à l'aléatoire). Nous montrons enfin le caractère bien posé dans un cadre fonctionnel qui prend en compte l'aléa (corollaire 66).

Ensuite, dans le chapitre 6 nous partons d'un développement asymptotique qui ressemble beaucoup à celui du cadre périodique, la stationnarité remplaçant la périodicité. Le développement asymptotique fait intervenir les termes de champ proche, qui sont supposés stationnaires et tendant vers 0 à l'infini, et les termes de champ lointain. Les termes de champ proche sont toujours solutions de problèmes de type Laplace mais ici ils sont posés dans un demi-espace infini privé des particules. Le caractère bien posé de ces problèmes est beaucoup plus délicat à démontrer que dans le cadre périodique. Il faut se placer dans un espace fonctionnel prenant en compte l'aléa pour tirer profit de la stationnarité comme dans le cas de l'homogénéisation stochastique. Comme le milieu est homogène au dessus des particules, nous remplaçons le demi-espace au dessus des particules par une condition transparente de type Dirichlet-to-Neumann (proposition 71). Ensuite pour montrer l'existence et l'unicité des termes de champ proche nous passons par une méthode de régularisation comme dans l'homogénéisation stochastique. Cependant cette approche ne nous a pas permis de déduire le comportement à l'infini de ces termes de champ proche. Nous avons donc choisi de considérer les problèmes de champ proche régularisés pour déterminer les conditions effectives (proposition 75 pour Dirichlet et Proposition 89 pour Neumann). L'avantage est que cela correspond à ce que nous faisons numériquement. L'inconvénient est que la régularisation détériore les estimations d'erreurs. Les estimations d'erreurs ne sont pas optimales mais elles pourraient être améliorées en ajoutant des hypothèses quantitatives sur l'aléa (ce que nous n'avons pas eu le temps de faire pour l'instant). Les modèles effectifs obtenus ressemblent beaucoup à ceux du cas périodique mais les constantes sont calculés différemment (définition 84 pour Dirichlet et définition 94 pour Neumann).

Pour finir cette partie, dans le chapitre 7 même si les résultats ont été obtenus pour un terme source à support compact, nous les supposons vrais pour le problème de diffraction par une onde plane incidente. Nous nous plaçons dans le cas 2D. Nous expliquons la méthode pour générer le milieu aléatoire. Pour calculer la solution de référence, nous tronquons le milieu assez loin dans la direction de la couche et imposons des conditions périodiques. Nous utilisons un opérateur de Dirichlet-to-Neumann pour l'équation de Helmholtz périodique pour restreindre le problème à un domaine borné (comme dans le cas périodique). Pour résoudre numériquement les problèmes de type Laplace dans le demi-espace infini privé des particules, nous tronquons le demi-espace dans la direction de la couche (avec une troncature indépendante de celle utilisée pour la solution de référence pour ne pas biaiser les calculs), imposons des conditions périodiques sur les bords latéraux et nous utilisons un opérateur de Dirichlet-to-Neumann pour le Laplacien périodique pour ramener le problème à un domaine borné. Les coefficients eux sont obtenus à l'aide d'approximations de Monte Carlo. Nous pouvons alors, à partir des coefficients intervenant dans les conditions, calculer les solutions effectives et calculer les coefficients de réflexion effectifs associés. Nous validons ensuite les modèles

avec des validations qualitatives, en traçant les champs, et des validations quantitatives, en traçant l'erreur sur les coefficients de réflexion. Comme dans le cas périodique, nous étudions l'évolution du coefficient de réflexion dans le cas d'une condition de Neumann sur les particules en fonction du taux de remplissage et de la distance entre les particules.

Troisième partie

Dans cette troisième partie, nous nous intéressons au problème 3D avec une onde plane incidente. Dans le chapitre [8](#), nous commençons par présenter la géométrie qui est considérée dans cette partie et nous introduisons le problème de diffraction. Ensuite, nous faisons référence à un certain nombre de travaux qui établissent le caractère bien posé de ce problème. Nous faisons ensuite la conjecture que la constante de stabilité est indépendante de la taille des particules si celle-ci est assez petite (théorème 104). Ceci reste donc à démontrer.

Tout comme dans la partie 1, dans le chapitre [9](#), nous utilisons une méthode de développement asymptotique multi-échelle afin de construire des conditions effectives qui vont nous permettre de remplacer la couche de particules. Le développement fait intervenir des termes de champ proche, qui sont périodiques et supposés tendre vers 0 à l'infini, et des termes dits de champ lointain. L'étude du caractère bien posé des problèmes vérifiés par les termes de champ proche est plus délicate que dans la première partie. Elle nécessite la description précise du noyau de l'opérateur différentiel sous-jacent. Celui-ci contient le gradient d'un certain nombre de fonctions profils, solutions de problèmes de type Laplace dans la demi-bande périodique. La condition de Leontovich sur Σ_0 et la présence de particules rendent la description du noyau non triviale. Le caractère bien posé des problèmes de champ proche est montré dans l'orthogonal du noyau. C'est quand nous imposons que les champs proches doivent tendre vers 0 à l'infini que nous obtenons des conditions de compatibilité sur les données qui dépendent des traces des champs lointains. Nous obtenons ainsi des conditions aux limites pour les champs lointains faisant intervenir des opérateurs différentiels sur le bord et des constantes qui peuvent être calculées à partir des fonctions du noyau (proposition 120). L'existence des termes de champ proche et la caractérisation des limites nous donne une condition de compatibilité (théorème 116). Ceci permet de proposer à partir de ces conditions un modèle effectif. Les estimations d'erreur pour le développement asymptotique et le modèle effectif restent à faire et constituent une des perspectives de ce travail.

Pour finir cette partie, dans le chapitre [10](#), afin de valider nos modèles nous présentons la méthode de calcul d'une solution dite de référence qui est obtenue à partir du code périodique du CEA-CESTA. Il faut calculer les fonctions profils du noyau, pour déterminer les constantes apparaissant dans les conditions effectives. Nous avons ensuite validé le modèle effectif à l'ordre 1 (qui ne prend pas en compte la présence de particules). Malheureusement, il reste un bug, probablement dans le calcul des constantes ou celui des coefficients de réflexion, qui nous a empêché de valider le modèle à l'ordre 2. Là encore c'est une perspective à court terme de ce travail.

Première partie

Cas bi-dimensionnel d'une répartition périodique des particules

Chapitre 2

Présentation du modèle

Sommaire

2.1 Géométrie	11
2.2 Le problème de diffraction	13
2.3 Condition d'onde sortante et opérateur de Dirichlet-to-Neumann	15
2.3.1 Décomposition modale et opérateur DtN	17
2.3.2 Application à notre problème	21

Dans cette partie, nous étudions un problème 2D, où l'objet est plan et où la distribution des particules dans la couche est périodique. Les particules sont vues comme des cylindres et ce problème peut être vu comme une coupe suivant un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre. Les équations de Maxwell se ramènent donc à l'équation de Helmholtz.

Dans ce chapitre, nous commençons par décrire la géométrie que l'on considère et le problème de diffraction par une couche périodique quand l'onde incidente est une onde plane; il est possible d'écrire le problème comme un problème de diffraction posé dans une cellule de périodicité, qui est ici une demi-bande, avec des conditions quasi-périodiques sur les bords. Il est ensuite possible de ramener le problème à un domaine borné en utilisant une condition transparente qui correspond à la condition de rayonnement à distance finie. Nous montrons que ce problème de diffraction est bien posé avec une constante de stabilité indépendante de la taille des particules.

2.1 Géométrie

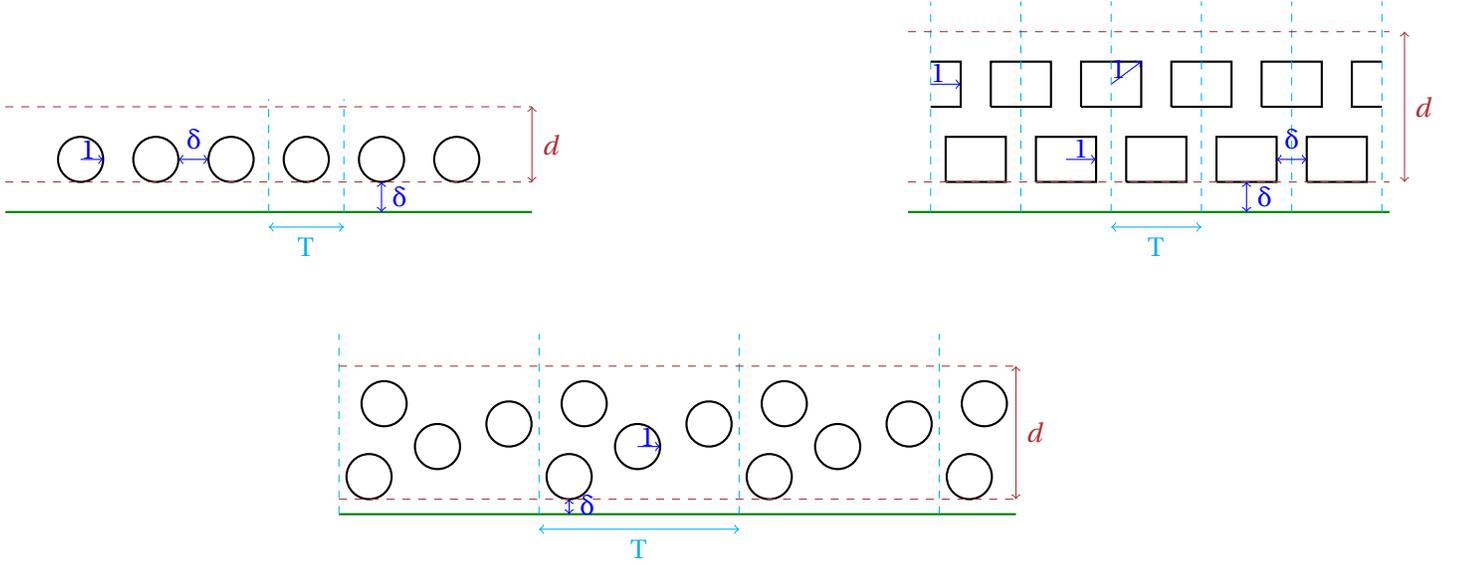
Nous considérons un plan infini, noté $\Sigma_0 := \{x_1 \in \mathbb{R}, x_2 = 0\}$, recouvert d'une couche mince de particules.

Commençons par décrire les particules. Nous supposons qu'une particule est un ouvert borné lipschitz connexe \mathcal{O} de rayon $r_{\mathcal{O}}$ normalisé à 1 où $r_{\mathcal{O}}$ est défini par $r_{\mathcal{O}} := \frac{1}{2} \sup_{x,y \in \mathcal{O}} |x - y|$. Notons que $r_{\mathcal{O}}$ correspond à la définition classique du rayon quand \mathcal{O} est un disque.

Soit $(\mathbf{y}_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ les centres des particules tels que $\forall m \neq m', d(\mathcal{O} + \mathbf{y}_m, \mathcal{O} + \mathbf{y}_{m'}) > \delta$ où δ est la distance minimale entre les particules; cette distance est supposée $\delta > 0$. Nous supposons que l'ensemble des particules $\mathcal{P} \subset \mathbb{R} \times (\delta, d + \delta)$, où d est la taille de la couche. Par conséquent, l'ensemble des particules est inclus dans une couche infinie d'épaisseur

d. De plus, \mathcal{P} est supposé dans cette partie T -périodique dans la direction y_1 :

$$(y_1, y_2) \in \mathcal{P} \iff (y_1 + T, y_2) \in \mathcal{P} .$$

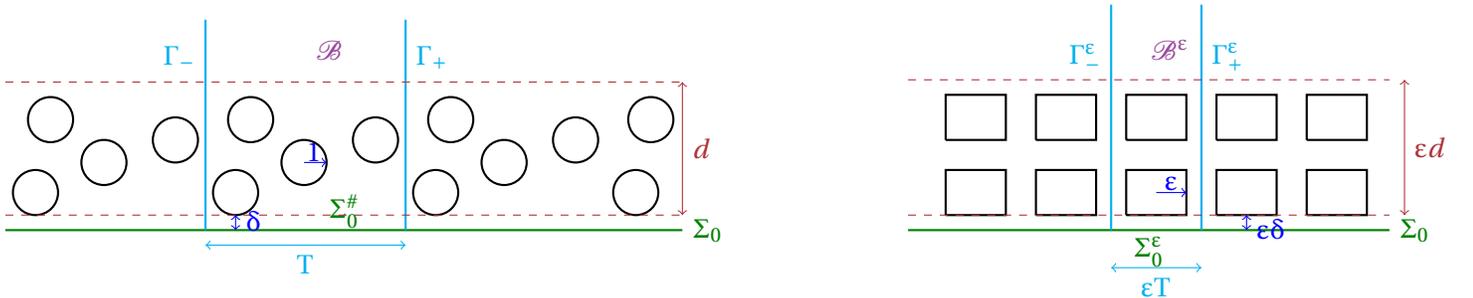


Nous notons $\mathcal{P}_\# := \mathcal{P} \cap (0, T) \times (\delta, d + \delta)$ une période de l'ensemble. Nous avons évidemment $\mathcal{P} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} (\mathcal{P}_\# + Tm\vec{e}_1)$.

Soit ε la taille réelle des particules. L'ensemble des particules à l'échelle ε est noté $\mathcal{P}^\varepsilon := \varepsilon\mathcal{P}$.

On introduit le domaine $\mathcal{D} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \setminus \overline{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{D}^\varepsilon := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \setminus \overline{\mathcal{P}^\varepsilon}$.

Une période de \mathcal{D} , est notée $\mathcal{B} := (0, T) \times \mathbb{R}_+ \setminus \overline{\mathcal{P}_\#}$ avec $\Sigma_0^\# := \{y_1 \in (0, T), y_2 = 0\}$ et on note les bords latéraux du domaine : $\Gamma_+ = \{y_1 = T, y_2 \in \mathbb{R}_+\}$ et $\Gamma_- = \{y_1 = 0, y_2 \in \mathbb{R}_+\}$. Quant au domaine remis à l'échelle ε , une période sera notée $\mathcal{B}^\varepsilon := (0, \varepsilon T) \times \mathbb{R}_+ \setminus \overline{\mathcal{P}_\#^\varepsilon}$ avec $\Sigma_0^\varepsilon := \{x_1 \in (0, \varepsilon T), x_2 = 0\}$ et les bords latéraux $\Gamma_+^\varepsilon = \{x_1 = \varepsilon T, x_2 \in \mathbb{R}_+\}$ et $\Gamma_-^\varepsilon = \{x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}_+\}$.



2.2 Le problème de diffraction

Équation de Helmholtz

On note $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ un point du domaine. Nous considérons une onde plane homogène incidente $U_{inc}(\mathbf{x}, t) = e^{i\omega t} u_{inc}(\mathbf{x})$ où

$$\begin{aligned} u_{inc}(\mathbf{x}) &= e^{ik\Theta \cdot \mathbf{x}} \quad , \text{ avec } \Theta = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad , \theta \in \mathbb{R} \\ &= e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2} \quad , \text{ avec } k_1 = k \sin \theta \quad , \quad k_2 = k \cos \theta > 0 \quad \text{ et } k^2 = k_1^2 + k_2^2 \quad . \end{aligned} \quad (1)$$

$u_{inc}(\mathbf{x})$ est solution de l'équation de Helmholtz dans \mathbb{R}^2 à la pulsation ω avec $k = \frac{2\pi\omega}{c}$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

Dans la suite, nous nous intéressons à la solution de l'équation des ondes harmonique en temps $u^\varepsilon(\mathbf{x})e^{i\omega t}$ où $u^\varepsilon(\mathbf{x})$ est solution de l'équation de Helmholtz

$$-\Delta u^\varepsilon(x_1, x_2) - k^2 u^\varepsilon(x_1, x_2) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}^\varepsilon \quad , \quad (2)$$

où u^ε est dit champ total, $u^\varepsilon := u_{inc} + u_d^\varepsilon$ où u_d^ε est le champ diffracté par les particules et le plan en présence de l'onde incidente u_{inc} .

Condition d'impédance sur Σ_0

Sur Σ_0 , nous considérons une condition de Robin

$$-\partial_{x_2} u^\varepsilon(x_1, x_2) + ik\gamma u^\varepsilon(x_1, x_2) = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0 \quad , \quad (3)$$

où le coefficient $\gamma \in \mathbb{C}$ est tel que

$$\Re(\gamma) > 0 \quad . \quad (4)$$

Notons que si le coefficient d'impédance $\gamma = 1$ et l'incidence est normale ($k_1 = 0$, $k_2 = k$) alors le plan Σ_0 se comporte comme une surface transparente : $-\partial_{x_2} u^\varepsilon + ik u^\varepsilon = 0$ sur Σ_0 . Ainsi, en l'absence de particules, $u^\varepsilon = u_{inc}$ (d'où la dénomination "surface transparente"). Plus généralement, si $\gamma = \cos \theta$ pour un certain $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ alors la surface est transparente pour l'incidence $u_{inc} = e^{ik \sin \theta x_1 + ik \cos \theta x_2}$.

Condition de conducteur parfait sur les particules \mathcal{P}^ε

A la frontière des particules $\partial \mathcal{P}^\varepsilon$, nous imposons au champ soit une condition de Dirichlet homogène

$$u^\varepsilon(x_1, x_2) = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}^\varepsilon \quad ; \quad (5)$$

soit une condition de Neumann homogène

$$\nabla u^\varepsilon(x_1, x_2) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}^\varepsilon \quad , \quad (6)$$

où \vec{n} désigne le vecteur normal à la frontière $\partial \mathcal{P}^\varepsilon$ extérieur à \mathcal{D}^ε .

Nous rappelons que ces conditions correspondent pour l'équation de Maxwell aux polarisations TE et TM respectivement.

Condition de rayonnement ou condition d'onde sortante

Le problème doit être complété par une condition de rayonnement appropriée pour assurer le caractère bien posé du problème. Sans celle-ci, il est impossible de faire la différence entre une onde qui vient de l'infini (onde entrante) et une onde qui va vers l'infini (onde sortante). Ici, l'onde diffractée u_d^ε par notre structure doit se comporter comme une onde sortante et doit être bornée en x_2 , c'est cette condition qui l'assure.

Pour un objet fini dans \mathbb{R}^2 , cette condition de rayonnement s'appelle condition de Sommerfeld. Dans notre cas, la définition d'une telle condition n'est pas simple pour plusieurs raisons : la première est que la solution ne se comporte pas de la même façon dans la direction de la couche et dans la direction orthogonale. La deuxième est que l'onde incidente n'est évidemment pas L^2 dans la direction de la couche, l'onde diffractée ne le sera pas non plus. Ceci rend l'expression de la condition de rayonnement à l'aide d'une transformée de Fourier plus délicate.

Dans le cas où l'onde incidente est plane et la couche est périodique [Kit93, BBS94, ESY03, CWM05, CWR96, CWZ98, CWRZ99, CWE10, CW97], il est souvent admis que l'onde diffractée est $k_1\varepsilon T$ quasi-périodique dans la direction de la couche (c'est-à-dire $e^{-ik_1x_1}u_d^\varepsilon$ est εT périodique, voir Définition 1) comme l'est l'onde incidente. Il suffit ensuite d'imposer une condition de rayonnement dans une bande, ce qui est plus simple. La preuve rigoureuse du caractère $k_1\varepsilon T$ quasi-périodique de l'onde diffractée est étudié pour une surface rugueuse avec condition de Dirichlet dans [CWM05, CWR96, CWZ98, CWRZ99, CWE10] et pour une surface plane avec condition de Robin dans [CW97].

Comme le cas étudié (surface plane avec condition de Robin en présence d'une couche de particules périodique) n'est pas traitée dans la littérature, nous admettons dans cette partie que le champ diffracté est $k_1\varepsilon T$ quasi-périodique. La condition d'onde sortante est explicitée dans la Proposition 7.

Définition 1

Une fonction u est dite $k_1\varepsilon T$ quasi-périodique si elle vérifie :

$$u(x_1 + \varepsilon T, x_2) = e^{ik_1\varepsilon T} u(x_1, x_2) \text{ et } \partial_{x_1} u(x_1 + \varepsilon T, x_2) = e^{ik_1\varepsilon T} \partial_{x_1} u(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}^\varepsilon. \quad (7)$$

En d'autres termes, une fonction u est $k_1\varepsilon T$ quasi-périodique si et seulement si la fonction $(x_1, x_2) \mapsto e^{-ik_1x_1}u(x_1, x_2)$ est périodique de période εT par rapport à x_1 .

Conjecture 1

L'onde plane incidente u_{inc} étant $k_1\varepsilon T$ quasi-périodique, le champ diffracté u_d^ε est $k_1\varepsilon T$ quasi-périodique.

Problème de diffraction

Le problème de diffraction s'écrit finalement :

Trouver $u^\varepsilon(x_1, x_2) \in H_{loc}^1(\mathcal{D}^\varepsilon)$ qui satisfait

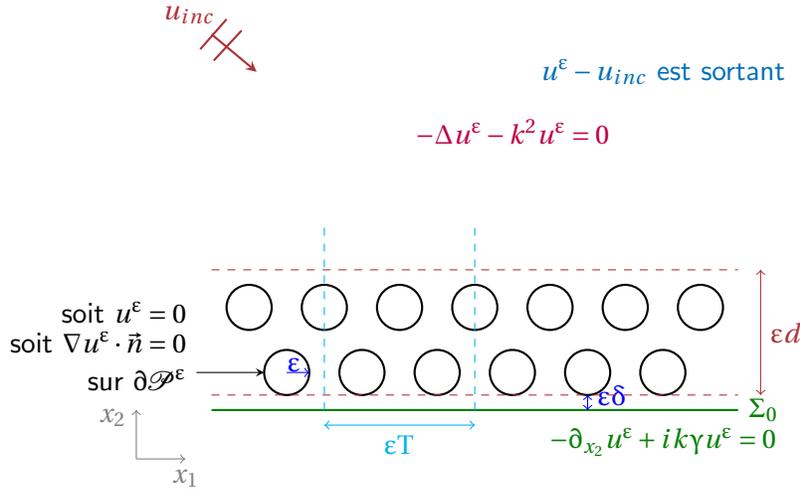
$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon - k^2 u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathcal{D}^\varepsilon, \\ -\partial_{x_2} u^\varepsilon + ik\gamma u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Sigma_0, \\ u^\varepsilon - u_{inc} \text{ est une onde sortante;} & \end{cases} \quad (\text{P}_t^\varepsilon)$$

et soit

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}^\varepsilon; \quad (\text{CD}_t)$$

soit

$$\nabla u^\varepsilon \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}^\varepsilon. \quad (\text{CN}_t)$$



Nous considérons donc les deux problèmes de diffraction suivants : $(\text{P}_t^\varepsilon) + (\text{CN}_t)$ ou $(\text{P}_t^\varepsilon) + (\text{CD}_t)$. Ces problèmes peuvent être réécrits pour que l'inconnue soit l'onde diffractée u_d^ε .

Trouver $u_d^\varepsilon(x_1, x_2) \in H_{loc}^1(\mathcal{D}^\varepsilon)$ qui satisfait

$$\begin{cases} -\Delta u_d^\varepsilon - k^2 u_d^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathcal{D}^\varepsilon, \\ -\partial_{x_2} u_d^\varepsilon + ik\gamma u_d^\varepsilon = \partial_{x_2} u_{inc} - ik\gamma u_{inc} & \text{sur } \Sigma_0, \\ u_d^\varepsilon \text{ vérifie une condition d'onde sortante;} & \end{cases} \quad (\text{P}_d^\varepsilon)$$

avec soit

$$u_d^\varepsilon = -u_{inc} \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}^\varepsilon; \quad (\text{CD}_d)$$

soit

$$\nabla u_d^\varepsilon \cdot \vec{n} = -\nabla u_{inc} \cdot \vec{n} \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}^\varepsilon. \quad (\text{CN}_d)$$

2.3 Condition d'onde sortante et opérateur de Dirichlet-to-Neumann

Nous allons dans cette section rendre plus explicite la notion de condition d'onde sortante pour notre problème. Commençons par introduire quelques notations. Nous introduisons une frontière fictive située au dessus de la couche de particules notée

$$\Sigma_{\varepsilon L} := \{(x_1, x_2) \text{ tel que } x_1 \in (0, \varepsilon T) \text{ et } x_2 = \varepsilon L\}, \quad L > (d + \delta).$$

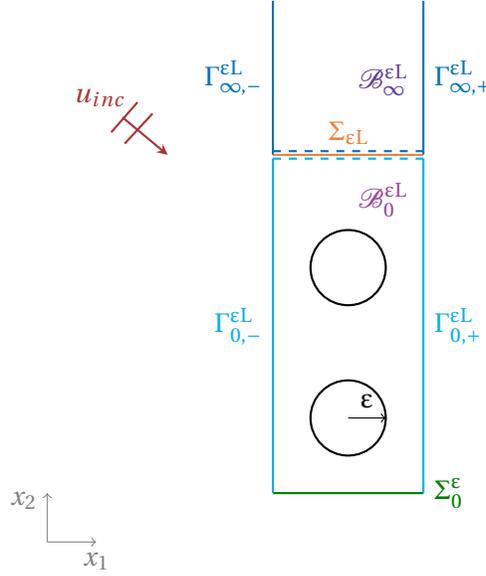
et nous notons

$$\mathcal{B}_0^{\varepsilon L} := (0, \varepsilon T) \times (0, \varepsilon L) \setminus \overline{\mathcal{P}_\#^\varepsilon}$$

le domaine situé en dessous de $\Sigma_{\varepsilon L}$ avec $\Gamma_{0,-}^{\varepsilon L} := \{x_1 = 0, x_2 < \varepsilon L\}$ et $\Gamma_{0,+}^{\varepsilon L} := \{x_1 = \varepsilon T, x_2 < \varepsilon L\}$ les bords latéraux de $\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}$; et

$$\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon L} := (0, \varepsilon T) \times (\varepsilon L, +\infty)$$

le domaine situé au dessus de $\Sigma_{\varepsilon L}$ avec $\Gamma_{\infty,-}^{\varepsilon L} := \{x_1 = 0, x_2 > \varepsilon L\}$ et $\Gamma_{\infty,+}^{\varepsilon L} := \{x_1 = \varepsilon T, x_2 > \varepsilon L\}$ les bords latéraux de $\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon L}$.



Nous introduisons également pour $J \in \{0, \infty\}$

$$H_{k_1}^1(\mathcal{B}_J^{\varepsilon L}) := \left\{ u \in H^1(\mathcal{B}_J^{\varepsilon L}), u \Big|_{\Gamma_{J,+}^{\varepsilon L}} = e^{ik_1 \varepsilon T} u \Big|_{\Gamma_{J,-}^{\varepsilon L}} \right\},$$

et $H_{k_1}^{1/2}(\Sigma_{\varepsilon L})$ l'espace des traces sur $\Sigma_{\varepsilon L}$ des fonctions de $H_{k_1}^1(\mathcal{B}_J^{\varepsilon L})$

$$H_{k_1}^{1/2}(\Sigma_{\varepsilon L}) := \left\{ u \Big|_{\Sigma_{\varepsilon L}}, u \in H_{k_1}^1(\mathcal{B}_J^{\varepsilon L}) \right\}.$$

$H_{k_1}^1$ est un sous-espace fermé de H^1 , que l'on munit de la norme de H^1 .

Nous introduisons aussi, pour $J \in \{0, \infty\}$

$$H_{k_1}^1(\mathcal{B}_J^{\varepsilon L}, \Delta) := \left\{ u \in H^1(\mathcal{B}_J^{\varepsilon L}, \Delta) \cap H_{k_1}^1(\mathcal{B}_J^{\varepsilon L}) \text{ telle que } \nabla u \cdot \vec{e}_1 \Big|_{\Gamma_{J,+}^{\varepsilon L}} = e^{ik_1 \varepsilon T} \nabla u \cdot \vec{e}_1 \Big|_{\Gamma_{J,-}^{\varepsilon L}} \right\},$$

et

$$H_{k_1}^{-1/2}(\Sigma_{\varepsilon L}) = \left\{ \nabla u \cdot \vec{n} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon L}}, u \in H_{k_1}^1(\mathcal{B}_J^{\varepsilon L}, \Delta) \right\}.$$

$H_{k_1}^1(\mathcal{B}_J^{\varepsilon L}, \Delta)$ est un sous-espace fermé de $H^1(\mathcal{B}_J^{\varepsilon L}, \Delta) := \left\{ u \in H^1(\mathcal{B}_J^{\varepsilon L}), \Delta u \in L^2(\mathcal{B}_J^{\varepsilon L}) \right\}$, que l'on munit de la norme de $H^1(\mathcal{B}_J^{\varepsilon L}, \Delta)$.

2.3.1 Décomposition modale et opérateur DtN

Nous nous plaçons dans le domaine extérieur $\mathcal{B}_\infty^{\text{eL}}$ et nous notons $u_{d,\infty}^\varepsilon := u_d^\varepsilon|_{\mathcal{B}_\infty^{\text{eL}}}$. La fonction $u_{d,\infty}^\varepsilon$ satisfait les équations

$$\begin{cases} -\Delta u_{d,\infty}^\varepsilon - k^2 u_{d,\infty}^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^{\text{eL}} \\ u_{d,\infty}^\varepsilon|_{\Gamma_{\infty,+}^{\text{eL}}} = e^{ik_1\varepsilon\Gamma} u_{d,\infty}^\varepsilon|_{\Gamma_{\infty,-}^{\text{eL}}} & \text{et } \partial_{x_1} u_{d,\infty}^\varepsilon|_{\Gamma_{\infty,+}^{\text{eL}}} = e^{ik_1\varepsilon\Gamma} \partial_{x_1} u_{d,\infty}^\varepsilon|_{\Gamma_{\infty,-}^{\text{eL}}} \end{cases} . \quad (8)$$

Comme $u_{d,\infty}^\varepsilon$ est $k_1\varepsilon\Gamma$ quasi-périodique en x_1 , pour presque tout x_2 , nous pouvons décomposer $u_{d,\infty}^\varepsilon(x_1, x_2)$ en une pseudo-série de Fourier

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{B}_\infty^{\text{eL}}; \quad u_{d,\infty}^\varepsilon(x_1, x_2) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_m(x_2) \varphi_m(x_1), \quad (9)$$

avec

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad \varphi_m(x_1) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\Gamma}} \exp\left(i\left(\frac{2m\pi}{\varepsilon\Gamma} + k_1\right)x_1\right) \quad (10)$$

où $(\varphi_m)_m$ forment une base orthonormée de $L^2(\Sigma_{\varepsilon\Gamma})$.

En injectant formellement l'expression de $u_{d,\infty}^\varepsilon(x_1, x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in \mathcal{B}_\infty^{\text{eL}}$ dans l'équation $-\Delta u_{d,\infty}^\varepsilon(x_1, x_2) - k^2 u_{d,\infty}^\varepsilon(x_1, x_2) = 0$, nous obtenons

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[\mathcal{U}_m''(x_2) + \left(k^2 - \left(\frac{2m\pi}{\varepsilon\Gamma} + k_1 \right)^2 \right) \mathcal{U}_m(x_2) \right] \varphi_m(x_1) = 0 .$$

Comme les $\{\varphi_m\}$ forment une base orthonormée

$$\mathcal{U}_m''(x_2) + \beta_m^2 \mathcal{U}_m(x_2) = 0, \quad \text{avec } \beta_m^2 = \left[k^2 - \left(\frac{2m\pi}{\varepsilon\Gamma} + k_1 \right)^2 \right], \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{Z} .$$

Nous distinguons trois situations :

- $k^2 - \left(\frac{2m\pi}{\varepsilon\Gamma} + k_1 \right)^2 > 0$ ce qui arrive quand $E\left(-\frac{\varepsilon\Gamma}{2\pi}(k - k_1)\right) + 1 \leq m \leq E\left(\frac{\varepsilon\Gamma}{2\pi}(k - k_1)\right)$, où $E(\cdot)$ désigne la partie entière, alors $\beta_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2m\pi}{\varepsilon\Gamma} + k_1 \right)^2} > 0$ et $\mathcal{U}_m(x_2)$ est de la forme

$$\mathcal{U}_m(x_2) = A_m e^{-i\beta_m x_2} + B_m e^{i\beta_m x_2} .$$

Comme $u_{d,\infty}^\varepsilon$ est le champ diffracté, il se propage vers les $x_2 > 0$. On impose $B_m = 0$ car $e^{i\beta_m x_2}$ se propage vers les $x_2 < 0$. Nous avons donc

$$\mathcal{U}_m(x_2) = A_m e^{-i\beta_m x_2},$$

qui est une fonction oscillante. Dans ce cas, on appelle $\mathcal{U}_m(x_2)\varphi_m(x_1)$ un mode propagatif.

- $k^2 - \left(\frac{2m\pi}{\varepsilon\Gamma} + k_1 \right)^2 < 0$ ce qui arrive lorsque $m \in \left(-\infty, E\left(-\frac{\varepsilon\Gamma}{2\pi}(k - k_1)\right) - 1\right] \cup \left[E\left(\frac{\varepsilon\Gamma}{2\pi}(k - k_1)\right) + 1, +\infty\right)$. Nous posons $\beta_m = -i\gamma_m$ avec $\gamma_m = \sqrt{\left(\frac{2m\pi}{\varepsilon\Gamma} + k_1 \right)^2 - k^2} > 0$ et $\mathcal{U}_m(x_2)$ est de la forme

$$\mathcal{U}_m(x_2) = A_m e^{-i\beta_m x_2} + B_m e^{i\beta_m x_2} = A_m e^{-\gamma_m x_2} + B_m e^{\gamma_m x_2} .$$

Le champ diffracté est supposé borné à l'infini. Comme $e^{\gamma_m x_2}$ est exponentiellement croissant quand x_2 tend vers $+\infty$, on impose $B_m = 0$. Nous obtenons alors

$$\mathcal{U}_m(x_2) = A_m e^{-\gamma_m x_2},$$

qui est exponentiellement décroissant. Dans ce cas, on appelle $\mathcal{U}_m(x_2)\varphi_m(x_1)$ un mode évanescent.

- Les fréquences k pour lesquelles $k^2 = \left(\frac{2m\pi}{\varepsilon\Gamma} + k_1\right)^2$ sont appelées fréquences de coupure. Dans ce cas,

$$\mathcal{U}_m(x_2) = A_m + B_m x_2,$$

et on impose $B_m = 0$.

Hypothèse 1

A incidence fixée, on exclut les fréquences de coupures. Plus précisément, à k_1 fixé,

$$k^2 \notin \sigma_c(k_1), \quad \text{où } \sigma_c(k_1) = \left\{ \left| \frac{2m\pi}{\varepsilon\Gamma} + k_1 \right|^2, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Nous allons utiliser par la suite la caractérisation suivante des espaces de Sobolev $H_{k_1}^s(\Sigma_{\varepsilon L})$, $\forall s \in \mathbb{R}$

$$H_{k_1}^s(\Sigma_{\varepsilon L}) = \left\{ v \text{ telle que } \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(1 + \left(\frac{2m\pi}{\varepsilon\Gamma} + k_1 \right)^2 \right)^s \left| (v, \varphi_m)_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} \right|^2 < +\infty, u \Big|_{\Gamma_{\infty,+}^{\varepsilon L}} = e^{ik_1 \varepsilon \Gamma} u \Big|_{\Gamma_{\infty,-}^{\varepsilon L}} \right\}$$

avec φ_m donnée par (10) est une base orthonormée.

Théorème 2

Soit $k_1 \in \mathbb{R}$ et $k \notin \sigma_c(k_1)$. Soit $\phi \in H_{k_1}^{1/2}(\Sigma_{\varepsilon L})$, nous définissons

$$v(\phi) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\phi, \varphi_m \right)_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} e^{-i\beta_m(x_2 - \varepsilon L)} \varphi_m(x_1) \quad (11)$$

où β_m est telle que $\beta_m^2 = k^2 - \left(\frac{2m\pi}{\varepsilon\Gamma} + k_1\right)^2$ et φ_m est donnée par (10). Alors la série est convergente dans $H_{k_1}^1(\mathcal{B}_{\infty}^{\varepsilon L}, \Delta)$ et $v(\phi)$ vérifie également

$$\begin{cases} -\Delta v(\phi) - k^2 v(\phi) = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_{\infty}^{\varepsilon L}, \\ v(\phi) \Big|_{\Sigma_{\varepsilon L}} = \phi & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon L}. \end{cases} \quad (12)$$

Remarque 1. On appelle la décomposition (11) une décomposition modale. On remarquera que $v(\phi) \notin L^2(\mathcal{B}_{\infty}^{\varepsilon L})$ à cause des modes propagatifs mais on dit que la série converge au sens où le reste de la série \sum_N^{∞} converge, $\forall N \geq P$

avec $P = E\left(\frac{\varepsilon\Gamma}{2\pi}(k - k_1)\right)$.

Preuve. La preuve de la convergence dans $H_{k_1}^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon L}, \Delta)$ est basée sur la preuve du Théorème 3.6 de [eEL15].

Pour un $N > 0$, nous avons

$$v^N(\phi) = \sum_{m=-N}^N \left(\phi, \varphi_m \right)_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} e^{-i\beta_m(x_2 - \varepsilon L)} \varphi_m(x_1).$$

Nous montrons, dans un premier temps, que la série converge dans $L^2(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon L})$.

$$\begin{aligned} \left\| v^N(\phi) \right\|_{L^2(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon L})}^2 &= \sum_{m=-N, |m| > P}^N \left| \left(\phi, \varphi_m \right)_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} \right|^2 \int_{\varepsilon L}^{+\infty} e^{-2\gamma_m(x_2 - \varepsilon L)} dx_2 \\ &\quad \text{car } \varphi_m \text{ est une base orthonormée et } \beta_m \in \mathbb{R} \text{ pour } m \in [-P, P] \\ &= \sum_{m=-N, |m| > P}^N \frac{\left| \left(\phi, \varphi_m \right)_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} \right|^2}{2\gamma_m} \\ &\leq \frac{1}{2C} \underbrace{\sum_{m=-N, |m| > P}^N \left| \left(\phi, \varphi_m \right)_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} \right|^2}_{\text{est bornée car } \phi \in H_{k_1}^{1/2}(\Sigma_{\varepsilon L}) \subset L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} \quad \text{où } C < \inf \gamma_m \end{aligned}$$

La suite $v^N(\phi)$ converge donc dans $L^2(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon L})$.

Nous montrons, de la même façon, que $\nabla v^N(\phi)$ converge dans $L^2(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon L})$. En vertu du fait que φ_m est une base orthonormée et que $\beta_m \in \mathbb{R}$ pour $m \in [-P, P]$

$$\begin{aligned} \left\| \nabla v^N(\phi) \right\|_{L^2(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon L})}^2 &= \sum_{m=-N, |m| > P}^N \left| \left(\phi, \varphi_m \right)_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} \right|^2 \left[|\gamma_m|^2 + \left(\frac{2m\pi}{\varepsilon T} + k_1 \right)^2 \right] \int_{\varepsilon L}^{+\infty} e^{-2\gamma_m(x_2 - \varepsilon L)} dx_2 \\ &= \sum_{m=-N, |m| > P}^N \frac{\left| \left(\phi, \varphi_m \right)_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} \right|^2}{2\gamma_m} \underbrace{\left[\gamma_m^2 + \left(\frac{2m\pi}{\varepsilon T} + k_1 \right)^2 \right]}_{2\left(\frac{2m\pi}{\varepsilon T} + k_1\right)^2 - k^2} \\ &\leq \sum_{m=-N, |m| > P}^N \frac{\left| \left(\phi, \varphi_m \right)_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} \right|^2}{\gamma_m} \left(\frac{2m\pi}{\varepsilon T} + k_1 \right)^2 \\ &\leq C \underbrace{\sum_{m=-N, |m| > P}^N \sqrt{1 + \left(\frac{2m\pi}{\varepsilon T} + k_1 \right)^2} \left| \left(\phi, \varphi_m \right)_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} \right|^2}_{\text{est bornée car } \phi \in H_{k_1}^{1/2}(\Sigma_{\varepsilon L})} \end{aligned}$$

La suite ∇v^N est donc convergente dans $L^2(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon L})$. La preuve est similaire pour $\Delta v^N(\phi)$ avec $\Delta v^N(\phi) = -k^2 v^N(\phi)$.

La série est donc convergente dans $H_{k_1}^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon L}, \Delta)$, $\Delta v(\phi) = -k^2 v(\phi)$ et $v(\phi) \Big|_{\Sigma_{\varepsilon L}} = \phi$. □

Définition 3

$\forall \phi \in H_{k_1}^{1/2}(\Sigma_{\varepsilon L})$, on appelle solution sortante dans $H_{k_1}^1(\mathcal{B}_\infty, \Delta)$ de

$$\begin{cases} -\Delta v - k^2 v = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^{\varepsilon L} \\ v = \phi & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon L} \end{cases} \quad (13)$$

la fonction $v(\phi)$ donnée par (11) où on a gardé seulement les modes propagatifs "sortants" et les modes évanescents.

On dit donc qu'une onde est sortante si elle admet la décomposition modale (12).

Nous pouvons réinterpréter cette condition maintenant à l'aide d'une condition transparente basée sur un opérateur de Dirichlet-to-Neumann (DtN).

Définition 4

L'opérateur Λ_{k_1} , dit de Dirichlet-to-Neumann, est défini par

$$\Lambda_{k_1} : \begin{cases} H_{k_1}^{1/2}(\Sigma_{\varepsilon L}) \rightarrow H_{k_1}^{-1/2}(\Sigma_{\varepsilon L}) \\ \phi \mapsto \Lambda_{k_1} \phi := -\partial_{x_2} v(\phi) \end{cases} \quad (14)$$

où $v(\phi)$ est la solution sortante de (13).

Proposition 5

$$\forall \phi \in H_{k_1}^{1/2}(\Sigma_{\varepsilon L}), \quad \Lambda_{k_1} \phi = i \sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta_m (\phi, \varphi_m)_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} \varphi_m(x_1)$$

L'opérateur Λ_{k_1} est un opérateur linéaire continu de $H_{k_1}^{1/2}(\Sigma_{\varepsilon L})$ dans $H_{k_1}^{-1/2}(\Sigma_{\varepsilon L})$ et

$$\Re \left[{}_{H^{-1/2}} \langle \Lambda_{k_1} \phi, \phi \rangle_{H^{1/2}} \right] > 0 \quad (15)$$

où ${}_{H^{-1/2}} \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{1/2}}$ désigne le crochet de dualité entre $H_{k_1}^{-1/2}$ et $H_{k_1}^{1/2}$.

Preuve. La preuve de cette proposition est basée sur la démonstration de la proposition 3.8 de [eFL15].

La linéarité est triviale. Montrons la continuité :

$$\begin{aligned}
 \|\Lambda_{k_1} \phi\|_{H_{k_1}^{-1/2}(\Sigma_{\varepsilon L})}^2 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[1 + \left(\frac{2m\pi}{\varepsilon T} + k_1 \right)^2 \right]^{-1/2} \left| (\Lambda_{k_1} \phi, \varphi_m)_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} \right|^2 \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[1 + \left(\frac{2m\pi}{\varepsilon T} + k_1 \right)^2 \right]^{-1/2} |\beta_m|^2 \left| (\phi, \varphi_m)_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} \right|^2 \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[1 + \left(\frac{2m\pi}{\varepsilon T} + k_1 \right)^2 \right]^{-1/2} \left| k^2 - \left(\frac{2m\pi}{\varepsilon T} + k_1 \right)^2 \right| \left| (\phi, \varphi_m)_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} \right|^2 \\
 &\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\left| k^2 - \left(\frac{2m\pi}{\varepsilon T} + k_1 \right)^2 \right|}{1 + \left(\frac{2m\pi}{\varepsilon T} + k_1 \right)^2} \left[1 + \left(\frac{2m\pi}{\varepsilon T} + k_1 \right)^2 \right]^{1/2} \left| (\phi, \varphi_m)_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} \right|^2.
 \end{aligned}$$

Comme $\forall m \in \mathbb{Z}, \exists A > 0, \frac{\left| k^2 - \left(\frac{2m\pi}{\varepsilon T} + k_1 \right)^2 \right|}{1 + \left(\frac{2m\pi}{\varepsilon T} + k_1 \right)^2} \leq A$ et que $\phi \in H_{k_1}^{1/2}(\Sigma_{\varepsilon L})$, nous déduisons que la dernière série est convergente.

Nous avons

$$\begin{aligned}
 \Re_{H^{-1/2}} \langle \Lambda_{k_1} \phi, \phi \rangle_{H^{1/2}} &= \Re \left(i \sum_{m=-P}^P \beta_m \left| (\phi, \varphi_m)_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} \right|^2 + \sum_{|m|>P} \gamma_m \left| (\phi, \varphi_m)_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} \right|^2 \right) \\
 &= \sum_{|m|>P} \underbrace{\gamma_m}_{>0} \underbrace{\left| (\phi, \varphi_m)_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} \right|^2}_{>0} > 0.
 \end{aligned}$$

□

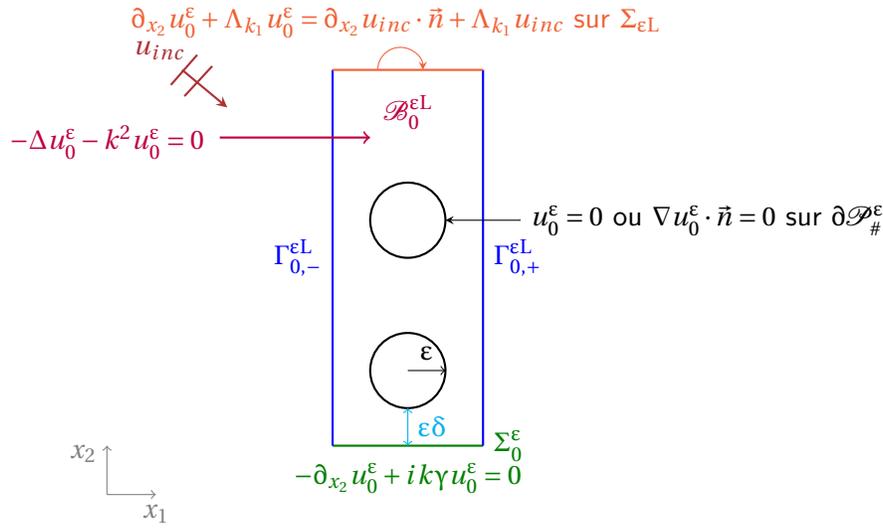
2.3.2 Application à notre problème

Comme u_d^ε est supposée sortante, nous avons $u_{d,\infty}^\varepsilon = u_d^\varepsilon|_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon L}} = v \left(u_d^\varepsilon|_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon L}} \right)$ et $-\partial_{x_2} u_d^\varepsilon|_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon L}} = \Lambda_{k_1} u_{d,\infty}^\varepsilon|_{\Sigma_{\varepsilon L}}$.

Soit $u_{d,0}^\varepsilon := u_d^\varepsilon|_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}}$. Comme $u_{d,0}^\varepsilon$ et $u_{d,\infty}^\varepsilon$ se raccordent en trace et en dérivée normale, on déduit que $u_{d,0}^\varepsilon \in H_{k_1}^1(\mathcal{B}_0, \Delta)$ vérifie dans le domaine borné $\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}$

$$\begin{cases} -\Delta u_{d,0}^\varepsilon - k^2 u_{d,0}^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_0^{\varepsilon L} \\ -\partial_{x_2} u_{d,0}^\varepsilon + ik\gamma u_{d,0}^\varepsilon = \partial_{x_2} u_{inc} - ik\gamma u_{inc} & \text{sur } \Sigma_\varepsilon^\varepsilon \\ \partial_{x_2} u_{d,0}^\varepsilon + \Lambda_{k_1} u_{d,0}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon L} \end{cases} \quad (P_{d,0}^\varepsilon)$$

avec soit (CD_d) , soit (CN_d) .



Ce problème peut également être réécrit pour le champ total $u_0^{\epsilon} := u^{\epsilon}|_{\mathcal{B}_0^{\epsilon L}}$ ou encore $u_0^{\epsilon} = u_{d,0}^{\epsilon} + u_{inc}|_{\mathcal{B}_0^{\epsilon L}}$:

$$\begin{cases} -\Delta u_0^{\epsilon} - k^2 u_0^{\epsilon} = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_0^{\epsilon L} \\ u_0^{\epsilon} \text{ est } k_1 \epsilon T \text{ quasi-périodique} \\ -\partial_{x_2} u_0^{\epsilon} + ik\gamma u_0^{\epsilon} = 0 & \text{sur } \Sigma_0^{\epsilon} \\ \partial_{x_2} u_0^{\epsilon} + \Lambda_{k_1} u_0^{\epsilon} = \partial_{x_2} u_{inc} + \Lambda_{k_1} u_{inc} & \text{sur } \Sigma_{\epsilon L} \end{cases} \quad (\mathbf{P}_{t,0}^{\epsilon})$$

avec soit (\mathbf{CD}_t) , soit (\mathbf{CN}_t) .

Soit $V_N = H_{k_1}^1(\mathcal{B}_0^{\epsilon L})$ si le problème est $(\mathbf{P}_{t,0}^{\epsilon}) + (\mathbf{CN}_t)$ ou $V_D = H_{k_1,0}^1(\mathcal{B}_0^{\epsilon L}) := \{v \in H_{k_1}^1(\mathcal{B}_0^{\epsilon L}), v = 0 \text{ sur } \partial \mathcal{P}_{\#}^{\epsilon}\}$ si le problème est $(\mathbf{P}_{t,0}^{\epsilon}) + (\mathbf{CD}_t)$ l'espace des fonctions tests.

Les formes variationnelles associées aux problèmes $(\mathbf{P}_{t,0}^{\epsilon}) + (\mathbf{CN}_t)$ et $(\mathbf{P}_{t,0}^{\epsilon}) + (\mathbf{CD}_t)$ sont données par :

$$\text{Trouver } u_{0,J}^{\epsilon} \in V_J \text{ telle que } a^{\epsilon}(u_{0,J}^{\epsilon}, v) = l^{\epsilon}(v), \quad \forall v \in V_J \text{ pour } J \in \{D, N\} \quad (16)$$

avec $\forall u, v \in H_{k_1}^1(\mathcal{B}_0^{\epsilon L})$,

$$a^{\epsilon}(u, v) = \int_{\mathcal{B}_0^{\epsilon L}} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\mathbf{x} - k^2 \int_{\mathcal{B}_0^{\epsilon L}} u \bar{v} \, d\mathbf{x} + {}_{H^{-1/2}} \langle \Lambda_{k_1} u, v \rangle_{H^{1/2}} + ik\gamma \int_{\Sigma_0^{\epsilon}} u \bar{v} \, dx_1 \quad (17)$$

et

$$l_{inc}^{\epsilon}(v) = \int_{\Sigma_{\epsilon L}} [\partial_{x_2} u_{inc} + \Lambda_{k_1} u_{inc}] \bar{v} \, dx_1. \quad (18)$$

Nous montrons dans le théorème suivant le caractère bien posé de tels problèmes. Le théorème suivant est même plus général puisque ce résultat plus général est utilisé pour l'analyse d'erreur des modèles asymptotiques approchés obtenus dans le chapitre 3.

Théorème 6

Soit l^ε une forme linéaire continue dans V ($V = V_N$ ou $V = V_D$). Le problème :

$$\text{trouver } u_0^\varepsilon \in V \text{ telle que } a^\varepsilon(u_0^\varepsilon, v) = l^\varepsilon(v), \quad \forall v \in V \quad (19)$$

relève de l'Alternative de Fredholm et il existe une unique solution dans V .

Enfin, il existe des constantes $C > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ indépendantes de ε telles que

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_0, \|u_0^\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{B}_0^{\varepsilon L})} \leq C \|l^\varepsilon\|. \quad (20)$$

Preuve. Nous commençons par montrer que le problème relève de l'alternative de Fredholm. Ainsi existence équivaut à unicité. Nous montrons dans un second temps qu'il y a unicité. Enfin, nous montrons que u_0^ε dépend continûment des données et que la constante de stabilité est indépendante de ε .

• Étape 1 : Alternative de Fredholm

Nous rappelons une des versions de l'alternative de Fredholm : Soit H un espace de Hilbert, $B : H \rightarrow H$ une application inversible et K un opérateur compact sur H . Alors $B + K$ surjectif $\iff B + K$ injectif.

La formulation variationnelle (19) peut se réécrire : Trouver $u_0^\varepsilon \in V$ telle que

$$c^\varepsilon(u_0^\varepsilon, v) + b^\varepsilon(u_0^\varepsilon, v) = l^\varepsilon(v), \quad \forall v \in V$$

avec

$$\forall u, v \in V, \quad c^\varepsilon(u, v) = -(k^2 + 1) \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}} u \bar{v} \, d\mathbf{x} + ik\gamma \int_{\Sigma_0^\varepsilon} u \bar{v} \, dx_1 \quad (21)$$

et

$$\forall u, v \in V, \quad b^\varepsilon(u, v) = \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}} u \bar{v} \, d\mathbf{x} + {}_{H^{-1/2}} \langle \Lambda_{k_1} u_0^\varepsilon, v \rangle_{H^{1/2}}. \quad (22)$$

D'après la Proposition 5, nous avons $\Re {}_{H^{-1/2}} \langle \Lambda_{k_1} u, u \rangle_{H^{1/2}} > 0$ donc $\Re b^\varepsilon(u, u) \geq \|u\|_{H^1}^2$.

D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe $C_\varepsilon(k) : V \rightarrow V$ un opérateur continu tel que $c^\varepsilon(u, v) = (C_\varepsilon(k)u, v)_{H_{k_1}^1(\mathcal{B}_0^{\varepsilon L})}$, il existe $F_\varepsilon \in V$ telle que pour tout $v \in V$, $l^\varepsilon(v) = (F_\varepsilon, v)_V$ et il existe $B_\varepsilon : V \rightarrow V$ telle que $b^\varepsilon(u, v) = (B_\varepsilon u, v)_V$. Comme b^ε est coercive, l'opérateur B_ε est inversible.

La formulation variationnelle est donc équivalente à : Trouver $u_0^\varepsilon \in V$ telle que

$$C_\varepsilon(k)u_0^\varepsilon + B_\varepsilon u_0^\varepsilon = F_\varepsilon.$$

Si $C_\varepsilon(k)$ est un opérateur compact alors le problème relève de l'alternative de Fredholm.

On rappelle que $K \in \mathcal{L}(V)$ est compact si et seulement si pour toute suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ bornée de $H_{k_1}^1(\mathcal{B}_0^{\varepsilon L})$, $(Ku_m)_{m \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.

Soit $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite, nous avons

$$\|C_\varepsilon(k)u_m\|_{H_{k_1}^1(\mathcal{B}_0^{\varepsilon L})}^2 = (C_\varepsilon(k)u_m, C_\varepsilon(k)u_m)_{H_{k_1}^1(\mathcal{B}_0^{\varepsilon L})} = -(k^2 + 1) \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}} u_m \overline{C_\varepsilon(k)u_m} \, d\mathbf{x} + ik\gamma \int_{\Sigma_0^\varepsilon} u_m \overline{C_\varepsilon(k)u_m} \, dx_1 .$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\|C_\varepsilon(k)u_m\|_{H_{k_1}^1(\mathcal{B}_0^{\varepsilon L})}^2 \leq (k^2 + 1) \|u_m\|_{L^2(\mathcal{B}_0^{\varepsilon L})} \|C_\varepsilon(k)u_m\|_{L^2(\mathcal{B}_0^{\varepsilon L})} + k|\gamma| \|u_m\|_{L^2(\Sigma_0^\varepsilon)} \|C_\varepsilon(k)u_m\|_{L^2(\Sigma_0^\varepsilon)} .$$

En utilisant le théorème de trace et en simplifiant nous trouvons

$$\|C_\varepsilon(k)u_m\|_{H_{k_1}^1(\mathcal{B}_0^{\varepsilon L})} \leq (k^2 + 1) \|u_m\|_{L^2(\mathcal{B}_0^{\varepsilon L})} + k|\gamma| \|u_m\|_{L^2(\Sigma_0^\varepsilon)} . \quad (23)$$

Supposons que (u_m) est une suite bornée dans $H_{k_1}^1(\mathcal{B}_0^{\varepsilon L})$. Comme $\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}$ est borné, par le théorème de Rellich, nous pouvons extraire une sous-suite de (u_m) qui converge dans $L^2(\mathcal{B}_0^{\varepsilon L})$. De plus, comme $H_{k_1}^{1/2}(\Sigma_0^\varepsilon)$ s'injecte de manière compacte dans $L^2(\Sigma_0^\varepsilon)$, nous pouvons extraire une sous-suite telle qu'en plus $u_m|_{\Sigma_0^\varepsilon}$ converge dans $L^2(\Sigma_0^\varepsilon)$. On déduit de la précédente inégalité que, on note encore (u_m) cette sous-suite, $(C_\varepsilon(k)u_m)$ est une suite de Cauchy. Cette suite converge et donc $C_\varepsilon(k)$ est un opérateur compact. Ce problème relève donc de l'alternative de Fredholm.

• Étape 2 : Unicité.

Par linéarité, il suffit de montrer que la solution $u_0^\varepsilon \in V$ de

$$\forall v \in V, \quad \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}} \nabla u_0^\varepsilon \cdot \overline{\nabla v} \, d\mathbf{x} - k^2 \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}} u_0^\varepsilon \bar{v} \, d\mathbf{x} + {}_{H^{-1/2}} \langle \Lambda_{k_1} u_0^\varepsilon, v \rangle_{H^{1/2}} + ik\gamma \int_{\Sigma_0^\varepsilon} u_0^\varepsilon \bar{v} \, dx_1 = 0 .$$

est nulle.

En prenant $v = u_0^\varepsilon$, nous obtenons alors

$$\int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}} |\nabla u_0^\varepsilon|^2 \, d\mathbf{x} - k^2 \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}} |u_0^\varepsilon|^2 \, d\mathbf{x} + {}_{H^{-1/2}} \langle \Lambda_{k_1} u_0^\varepsilon, u_0^\varepsilon \rangle_{H^{1/2}} + ik\gamma \int_{\Sigma_0^\varepsilon} |u_0^\varepsilon|^2 \, dx_1 = 0 , \quad (24)$$

avec :

$${}_{H^{-1/2}} \langle \Lambda_{k_1} u_0^\varepsilon, u_0^\varepsilon \rangle_{H^{1/2}} = i \sum_{m=-P}^P \beta_m \left| (u_0^\varepsilon, \varphi_m)_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} \right|^2 + \sum_{|m| > P} \gamma_m \left| (u_0^\varepsilon, \varphi_m)_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} \right|^2 ,$$

correspondant à la décomposition sur les modes propagatifs ($m \in [-P, P]$) et les modes évanescents ($|m| > P$).

Prenons la partie imaginaire de (24) :

$$\text{Im}(ik\gamma) \int_{\Sigma_0^\varepsilon} |u_0^\varepsilon|^2 \, dx_1 + \sum_{m=-P}^P \beta_m \left| (u_0^\varepsilon, \varphi_m)_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} \right|^2 = 0 .$$

Comme $\Re(\gamma) > 0$ d'après (4), nous avons $\text{Im}(ik\gamma) > 0$ donc $\int_{\Sigma_0^\varepsilon} |u_0^\varepsilon|^2 dx_1 = 0$. On en déduit que $u_0^\varepsilon = 0$ sur Σ_0^ε et la condition de Robin sur Σ_0^ε nous donne que $\partial_{x_2} u_0^\varepsilon = 0$ sur Σ_0^ε . D'après le théorème de prolongement unique, $u_0^\varepsilon = 0$ dans $\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}$.

• Étape 3 : Constante de stabilité.

Nous montrons maintenant que la constante de stabilité est indépendante de ε . $l^\varepsilon(v)$ est \mathcal{C}^0 dans V et on rappelle que F_ε est le représentant de Riesz de l^ε alors $\forall v, (F_\varepsilon, v)_{H^1} = l^\varepsilon(v)$. Nous avons

$$\forall v \in V, \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}} \nabla u_0^\varepsilon \cdot \overline{\nabla v} dx - k^2 \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}} u_0^\varepsilon \bar{v} dx + {}_{H^{-1/2}} \langle \Lambda_{k_1} u_0^\varepsilon, v \rangle_{H^{1/2}} + ik\gamma \int_{\Sigma_0^\varepsilon} u_0^\varepsilon \bar{v} dx_1 = \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}} F_\varepsilon \bar{v} dx + \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}} \nabla F_\varepsilon \cdot \overline{\nabla v} dx.$$

Nous introduisons $\tilde{u}_0(\mathbf{y}) = u_0^\varepsilon(\varepsilon \mathbf{y})$, $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{B}_0^L := (0, T) \times (0, L) \setminus \overline{\mathcal{P}_\#}$ et $\tilde{v}(\mathbf{y}) = v(\varepsilon \mathbf{y})$, $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{B}_0^L$ et nous remplaçons dans l'équation précédente

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}} \frac{1}{\varepsilon^2} [\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{u}_0] \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \cdot [\overline{\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{v}}] \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) dx - k^2 \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}} \tilde{u}_0 \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \overline{\tilde{v}} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) dx + {}_{H^{-1/2}} \langle \Lambda_{k_1} \tilde{u}_0 \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right), \tilde{v} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \rangle_{H^{1/2}} + ik\gamma \int_{\Sigma_0^\varepsilon} \tilde{u}_0 \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \overline{\tilde{v}} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) dx_1 \\ = \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}} F_\varepsilon(\mathbf{x}) \overline{\tilde{v}} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) dx + \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}} \nabla F_\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \frac{1}{\varepsilon} \overline{\nabla \tilde{v}} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) dx. \end{aligned}$$

Notons que $\|u_0^\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{B}_0^{\varepsilon L})}^2 = \varepsilon^2 \|\tilde{u}_0\|_{L^2(\mathcal{B}_0^L)}^2$ et $\|\nabla u_0^\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{B}_0^{\varepsilon L})}^2 = \|\nabla \tilde{u}_0\|_{L^2(\mathcal{B}_0^L)}^2$.

Si on note $\tilde{F}(\mathbf{y}) = F_\varepsilon(\varepsilon \mathbf{y})$, $\nabla \tilde{F}(\mathbf{y}) = \varepsilon (\nabla_{\mathbf{x}} F_\varepsilon)(\varepsilon \mathbf{y})$, en effectuant un changement de variable $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \overbrace{\int_{\mathcal{B}_0^L} \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{u}_0(\mathbf{y}) \cdot \overline{\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{v}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - k^2 \varepsilon^2 \int_{\mathcal{B}_0^L} \tilde{u}_0(\mathbf{y}) \overline{\tilde{v}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + {}_{H^{-1/2}} \langle \tilde{\Lambda}_{k_1} \tilde{u}_0(\mathbf{y}), \tilde{v}(\mathbf{y}) \rangle_{H^{1/2}} + ik\gamma \varepsilon \int_{\Sigma_0^\#} \tilde{u}_0(\mathbf{y}) \overline{\tilde{v}}(\mathbf{y}) dy_1}^{\tilde{c}(\tilde{u}_0, \tilde{v})} \\ = \varepsilon^2 \int_{\mathcal{B}_0^L} \tilde{F}(\mathbf{y}) \overline{\tilde{v}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\mathcal{B}_0^L} \nabla \tilde{F}(\mathbf{y}) \cdot \overline{\nabla \tilde{v}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (25) \end{aligned}$$

où $\tilde{\Lambda}_{k_1} \tilde{u}_0 = i \sum_m \tilde{\beta}_m (\tilde{u}_0(\mathbf{y}), \tilde{\varphi}_m)_{L^2(\Sigma_L)} \tilde{\varphi}_m(y_1)$ avec $\tilde{\varphi}_m(y_1) = \frac{1}{\sqrt{T}} \exp[i(\frac{2m\pi}{T} + \varepsilon k_1)y_1]$ et $\tilde{\beta}_m = \sqrt{\varepsilon^2 k^2 - (\frac{2m\pi}{T} + k_1 \varepsilon)^2}$, $\Sigma_L := \{y_1 \in (0, T), y_2 = L\}$.

Prenons la partie réelle de $\tilde{c}(\tilde{u}, \tilde{u}) : \forall \tilde{u} \in H_{k_1}^1(\mathcal{B}_0^L)$

$$\Re[\tilde{c}(\tilde{u}, \tilde{u})] = \int_{\mathcal{B}_0^L} |\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{u}|^2 d\mathbf{y} - k^2 \varepsilon^2 \int_{\mathcal{B}_0^L} |\tilde{u}|^2 d\mathbf{y} + \Re \left[{}_{H^{-1/2}} \langle \tilde{\Lambda}_{k_1} \tilde{u}, \tilde{u} \rangle_{H^{1/2}} \right] - k \text{Im}(\gamma) \varepsilon \int_{\Sigma_0^\#} |\tilde{u}|^2 dy_1. \quad (26)$$

D'après (15), nous rappelons que $\forall \tilde{u} \in H_{k_1}^1(\mathcal{B}_0^L)$, $\Re \left[{}_{H^{-1/2}} \langle \tilde{\Lambda}_{k_1} \tilde{u}, \tilde{u} \rangle_{H^{1/2}} \right] \geq 0$.

▷ Dans le cas d'une condition de Dirichlet et $V = V_D$. Nous avons l'inégalité de Poincaré suivante :

$$\forall \tilde{u} \in V_D, \int_{\mathcal{B}_0^L} |\tilde{u}|^2 d\mathbf{y} \leq C_p \int_{\mathcal{B}_0^L} |\nabla \tilde{u}|^2 d\mathbf{y}, \quad C_p > 0;$$

où la constante C_p est bien entendu indépendante de ε .

★ Si $\text{Im}(\gamma) > 0$, en utilisant l'inégalité de Poincaré et le théorème de trace, nous obtenons

$$\forall \tilde{u} \in V_D, \quad \Re e \left[\tilde{c}(\tilde{u}, \tilde{u}) \right] \geq (1 - k^2 \varepsilon^2 C_p - k \text{Im}(\gamma) \varepsilon C) \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2(\mathcal{O}_0^L)}^2. \quad (27)$$

★ Si $\text{Im}(\gamma) < 0$, en utilisant uniquement l'inégalité de Poincaré, nous obtenons

$$\forall \tilde{u} \in V_D, \quad \Re e \left[\tilde{c}(\tilde{u}, \tilde{u}) \right] \geq (1 - k^2 \varepsilon^2 C_p) \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2(\mathcal{O}_0^L)}^2. \quad (28)$$

En conclusion, dans ces deux cas, nous avons : $\exists \tilde{C} > 0, \exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\varepsilon^2 \|\tilde{u}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2}^2 \leq \tilde{C} \left| \Re e \left[\tilde{c}(\tilde{u}, \tilde{u}) \right] \right| \leq |\tilde{c}(\tilde{u}, \tilde{u})| \leq \varepsilon \|\tilde{F}\|_{L^2} \varepsilon \|\tilde{u}\|_{L^2} + \|\nabla \tilde{F}\|_{L^2} \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2}. \quad (29)$$

Nous obtenons alors

$$\left(\varepsilon^2 \|\tilde{u}_0\|_{L^2(\mathcal{O}_0^L)}^2 + \|\nabla \tilde{u}_0\|_{L^2(\mathcal{O}_0^L)}^2 \right)^{1/2} \leq C \left(\varepsilon \|\tilde{F}\|_{L^2(\mathcal{O}_0^L)} + \|\nabla \tilde{F}\|_{L^2(\mathcal{O}_0^L)} \right). \quad (30)$$

En revenant à u_0^ε , nous trouvons l'inégalité :

$$\|u_0^\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}_0^{\varepsilon L})} \leq C \left(\|F_\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{O}_0^{\varepsilon L})} + \|\nabla F_\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{O}_0^{\varepsilon L})} \right). \quad (31)$$

▷ Dans le cas d'une condition de Neumann et $V = V_N$. Nous allons utiliser l'inégalité de Poincaré généralisée suivante

$$\forall \tilde{u} \in V_N, \quad \int_{\mathcal{O}_0^L} |\tilde{u}|^2 \, d\mathbf{y} \leq C_p \left[\int_{\Sigma_0^\#} |\tilde{u}|^2 \, dy_1 + \int_{\mathcal{O}_0^L} |\nabla \tilde{u}|^2 \, d\mathbf{y} \right], \quad C_p > 0.$$

★ Si $\text{Im}(\gamma) < 0$, en utilisant l'inégalité de Poincaré généralisée, nous obtenons

$$\forall \tilde{u} \in V_N, \quad \Re e \left[\tilde{c}(\tilde{u}, \tilde{u}) \right] \geq (1 + k \text{Im}(\gamma) \varepsilon) \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2(\mathcal{O}_0^L)}^2 + \left(-\frac{\text{Im}(\gamma)}{C_p} - k \varepsilon C_p \right) k \varepsilon \|\tilde{u}\|_{L^2(\mathcal{O}_0^L)}^2. \quad (32)$$

On conclut dans ce cas comme précédemment.

★ Si $\text{Im}(\gamma) > 0$. C'est le cas le plus délicat. Nous commençons par prendre la partie imaginaire de $\tilde{c}(\tilde{u}, \tilde{u})$, nous avons

$$\forall \tilde{u} \in V_N, \quad \text{Im} \left[\tilde{c}(\tilde{u}, \tilde{u}) \right] = \text{Im} \left({}_{H^{-1/2}} \langle \tilde{\Lambda}_{k_1} \tilde{u}, \tilde{u} \rangle_{H^{1/2}} \right) + k \Re e(\gamma) \varepsilon \|\tilde{u}\|_{L^2(\Sigma_0^\#)}^2 \geq k \Re e(\gamma) \varepsilon \|\tilde{u}\|_{L^2(\Sigma_0^\#)}^2$$

alors nous obtenons l'inégalité

$$k \Re e(\gamma) \varepsilon \|\tilde{u}_0\|_{L^2(\Sigma_0^\#)}^2 \leq \left| \tilde{c}(\tilde{u}_0, \tilde{u}_0) \right| \leq \varepsilon^2 \int_{\mathcal{O}_0^L} \tilde{F} \overline{\tilde{u}_0} \, d\mathbf{y} + \int_{\mathcal{O}_0^L} \nabla \tilde{F} \cdot \overline{\nabla \tilde{u}_0} \, d\mathbf{y}. \quad (33)$$

En prenant maintenant la partie réelle de $\tilde{c}(\tilde{u}_0, \tilde{u}_0)$, en utilisant l'inégalité de Poincaré généralisée et en utilisant (33), nous obtenons

$$\begin{aligned} \Re e \left[\tilde{c}(\tilde{u}_0, \tilde{u}_0) \right] &\geq \|\nabla \tilde{u}_0\|_{L^2(\mathcal{O}_0^L)}^2 (1 - k^2 \varepsilon^2 C_N) + \varepsilon \|\tilde{u}_0\|_{L^2(\Sigma_0^\#)}^2 (-k^2 \varepsilon C_N - k \text{Im}(\gamma)) \\ &\geq \|\nabla \tilde{u}_0\|_{L^2(\mathcal{O}_0^L)}^2 (1 - k^2 \varepsilon^2 C_N) + (-k^2 \varepsilon C_N - k \text{Im}(\gamma)) \left(\varepsilon^2 \int_{\mathcal{O}_0^L} \tilde{F} \overline{\tilde{u}_0} \, d\mathbf{y} + \int_{\mathcal{O}_0^L} \nabla \tilde{F} \cdot \overline{\nabla \tilde{u}_0} \, d\mathbf{y} \right). \end{aligned}$$

Alors il est possible d'écrire

$$\|\nabla \tilde{u}_0\|_{L^2(\mathcal{B}_0^L)}^2 (1 - k^2 \varepsilon^2 C_N) + (-k^2 \varepsilon C_N - k \operatorname{Im}(\gamma)) \left(\varepsilon^2 \int_{\mathcal{B}_0^L} \tilde{F} \overline{\tilde{u}_0} \, d\mathbf{y} + \int_{\mathcal{B}_0^L} \nabla \tilde{F} \cdot \overline{\nabla \tilde{u}_0} \, d\mathbf{y} \right) \leq \varepsilon^2 \int_{\mathcal{B}_0^L} \tilde{F} \overline{\tilde{u}_0} \, d\mathbf{y} + \int_{\mathcal{B}_0^L} \nabla \tilde{F} \cdot \overline{\nabla \tilde{u}_0} \, d\mathbf{y}$$

et d'obtenir l'inégalité pour ε assez petit

$$\|\nabla \tilde{u}_0\|_{L^2(\mathcal{B}_0^L)}^2 \leq K \left(\varepsilon^2 \int_{\mathcal{B}_0^L} \tilde{F} \overline{\tilde{u}_0} \, d\mathbf{y} + \int_{\mathcal{B}_0^L} \nabla \tilde{F} \cdot \overline{\nabla \tilde{u}_0} \, d\mathbf{y} \right), \quad K > 0. \quad (34)$$

En utilisant les inégalités (33) et (34), nous avons :

$$\varepsilon^2 \|\tilde{u}_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla \tilde{u}_0\|_{L^2}^2 \leq C \left(\varepsilon^2 \int_{\mathcal{B}_0^L} \tilde{F} \overline{\tilde{u}_0} \, d\mathbf{y} + \int_{\mathcal{B}_0^L} \nabla \tilde{F} \cdot \overline{\nabla \tilde{u}_0} \, d\mathbf{y} \right), \quad C > 0; \quad (35)$$

ce qui nous permet de conclure comme précédemment. □

Pour l^ε donnée par (18), le problème posé dans le domaine borné (16) est bien posé et admet une unique solution. Il est possible de reconstruire une solution en utilisant la décomposition modale.

Proposition 7

Si $u_{0,d}^\varepsilon$ est l'unique solution dans $\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}$ de $(\mathbb{P}_{d,0}^\varepsilon) + (\mathbb{CN}_d)$ ou $(\mathbb{P}_{d,0}^\varepsilon) + (\mathbb{CD}_d)$, la fonction

$$u_d^\varepsilon = \begin{cases} u_{0,d}^\varepsilon & \text{dans } \mathcal{B}_0^{\varepsilon L} \\ u_{d,\infty}^\varepsilon = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (u_d^\varepsilon|_{\Sigma_{\varepsilon L}}, \varphi_m)_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} e^{-i\beta_m(x_2 - \varepsilon L)} \varphi_m(x_1) & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^{\varepsilon L} \end{cases} \quad (36)$$

est la solution sortante de $(\mathbb{P}_d^\varepsilon) + (\mathbb{CN}_d)$ ou $(\mathbb{P}_d^\varepsilon) + (\mathbb{CD}_d)$ dans \mathcal{B}^ε . Il est possible ensuite de construire l'onde diffractée dans tout le demi-espace \mathcal{D}^ε par $k_1 \varepsilon T$ quasi-périodicité

$$u_d^\varepsilon(x_1 + \varepsilon T, x_2) = e^{ik_1 \varepsilon T} u_d^\varepsilon(x_1, x_2). \quad (37)$$

Chapitre 3

Développement asymptotique

Sommaire

3.1 Ansatz du développement asymptotique	30
3.2 Équations satisfaites par les termes de champ lointain et les termes de champ proche	32
3.2.1 Cascade d'équations pour les termes de champ lointain	32
3.2.2 Cascade d'équations pour les termes de champ proche	33
3.3 Comportement à l'infini des termes de champ proche	38
3.4 Étude du cas des conditions de Dirichlet sur les particules	41
3.4.1 Caractère bien posé des problèmes de champ proche	41
3.4.2 Construction des premiers termes de champ proche	46
3.4.3 Caractérisation des termes de champ proche à tout ordre	50
3.4.4 Problèmes vérifiés par les termes de champ lointain	52
3.4.5 Estimations d'erreurs sur le développement asymptotique	56
3.4.6 Modèles effectifs	66
3.4.7 Estimations d'erreurs sur le modèle effectif à l'ordre 2	70
3.5 Étude du cas des condition de Neumann sur les particules	71
3.5.1 Caractère bien posé des problèmes de champ proche	71
3.5.2 Construction des premiers termes de champ proche	75
3.5.3 Caractérisation des termes de champ proche à tout ordre	81
3.5.4 Problèmes vérifiés par les termes de champ lointain	84
3.5.5 Estimations d'erreurs sur le développement asymptotique	87
3.5.6 Modèles effectifs	93
3.5.7 Estimations d'erreurs sur le modèle effectif	94

Pour construire des conditions effectives qui vont remplacer la couche de particules, nous postulons un développement asymptotique qui fait intervenir des termes de champ proche, qui prennent en compte les variations rapides proche des particules, et des termes de champ lointain, qui représentent les variations lentes de la solution loin des particules. Il faut imposer que les termes de champ proche tendent vers 0 à l'infini pour assurer que la solution a bien un comportement seulement macroscopique loin des particules et est bien représentée par les termes de champ lointain. Nous montrons que les termes de champ proche satisfont des problèmes de type Laplace dans une demi-bande infinie périodique. Dans le cas Dirichlet, ces problèmes sont bien posés dans un cadre fonctionnel variationnel et la solution tend vers 0 à l'infini seulement si une condition dite de compatibilité est satisfaite. C'est

cette condition de compatibilité qui nous permet de construire une condition au bord pour les termes de champ lointain. La construction de tous les termes peut être réalisée à tout ordre. Dans un second temps, nous justifions via des estimations d'erreur le développement asymptotique. Enfin, nous proposons à partir du développement asymptotique tronqué un modèle effectif d'ordre 1 (qui ne prend pas en compte la présence de particules) et d'ordre 2. La même étude est réalisée pour une condition de Neumann sur les particules. Cette fois ci c'est le caractère bien posé des problèmes de champ proche qui nécessite une condition de compatibilité. Ensuite cette condition de compatibilité permet d'obtenir, comme précédemment, des conditions au bord pour les termes de champ lointain. Une construction à tout ordre, des estimations d'erreur, la construction de modèles effectifs peuvent être réalisées comme dans le cas Dirichlet. Que ce soit pour le cas Dirichlet ou Neumann, les conditions aux bords pour les termes de champ lointain font intervenir des constantes qui sont déterminées à partir de solutions de problèmes de cellule, *i.e.* des problèmes de type Laplace posés dans une demi-bande périodique.

3.1 Ansatz du développement asymptotique

Les méthodes basées sur des développements asymptotiques reposent sur une séparation d'échelles :

- une échelle microscopique associée à la taille des particules,
- une échelle macroscopique associée à la longueur d'onde.

Proche des particules, la solution varie rapidement, d'où l'utilité de l'échelle microscopique. A contrario, loin des particules, les variations du champ sont plus lentes et seront décrites à l'aide de l'échelle macroscopique.

La méthode que nous proposons se situe entre les développements asymptotiques raccordés [Del10, JJM16, Cla08, Lab19, CD13, Ill'92] et les développements asymptotiques multi-échelles composés [Ben21, BDVV08].

La méthode des développements asymptotiques raccordés consiste à proposer deux développements distincts de la solution. Un premier développement dit externe qui approche la solution dans une zone loin de la couche où la variation spatiale des champs est lente. Un deuxième développement dit interne qui dépend de variables mis à l'échelle dans une zone proche de la couche, où la variation spatiale des champs est rapide. Une zone intermédiaire où coexistent les deux développements permet de raccorder le comportement proche des champs lointains et le comportement lointain des champs proches. Il est alors possible de déduire des conditions au bord pour les champs lointains.

La méthode des développements asymptotiques multi-échelles composés consiste à proposer un développement global de la solution constitué d'une partie externe et d'une correction interne. La correction interne va prendre en compte la variation spatiale très rapide des champs et est appliquée uniquement proche de la couche. Loin de la couche, dans la zone de champ lointain, comme la correction n'intervient pas le développement proposé va correspondre au développement dit externe.

Le développement que nous proposons est un peu différent. Il dépend d'un paramètre noté H dans la suite. En d'autres termes, ce n'est pas un développement que nous proposons mais une famille de développements paramétrés H . Il sera possible de jouer sur ce paramètre dans un second temps.

Nous introduisons le plan $\Sigma_{\varepsilon H} := \{x_1 \in \mathbb{R}, x_2 = \varepsilon H\}$ avec $H > 2(1 + \delta)$ où nous rappelons que δ est la distance minimale entre les particules et $\delta > 0$.

En dessous de $\Sigma_{\varepsilon H}$, c'est-à-dire pour $x_2 < \varepsilon H$, nous supposons que la solution $u^\varepsilon(x_1, x_2)$ se développe en fonction de ε de la façon suivante :

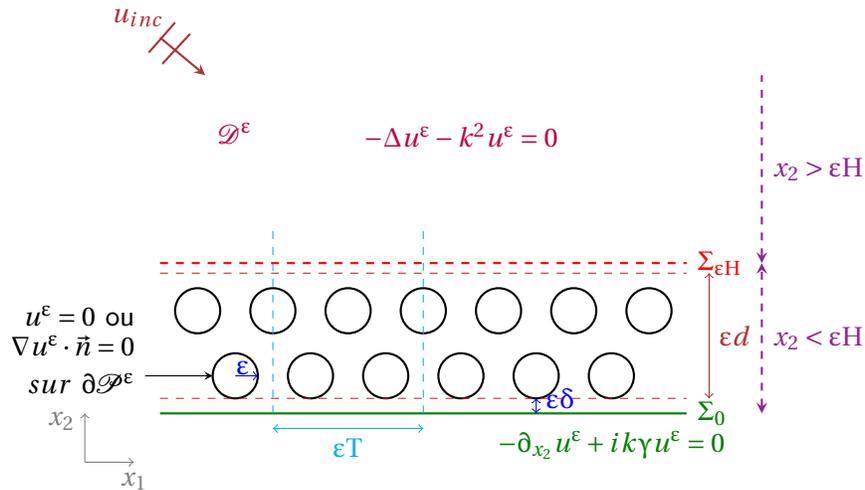
$$u^\varepsilon(x_1, x_2) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_m^{\text{NF}}\left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right), \quad \text{p.p. } x_1 \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. } x_2 \in (0, \varepsilon H). \quad (1)$$

Ce développement dépend des termes U_m^{NF} , dit termes de champ proche, qui dépendent de la variable macroscopique x_1 mais aussi des variables dilatées $\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right)$.

Au dessus de $\Sigma_{\varepsilon H}$, c'est-à-dire pour $x_2 > \varepsilon H$, nous supposons que la solution $u^\varepsilon(x_1, x_2)$ se développe de la façon suivante :

$$u^\varepsilon(x_1, x_2) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m u_m^{\text{FF}}(x_1, x_2) + \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_m^{\text{NF}}\left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right), \quad \text{p.p. } x_1 \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. } x_2 \in (\varepsilon H, +\infty). \quad (2)$$

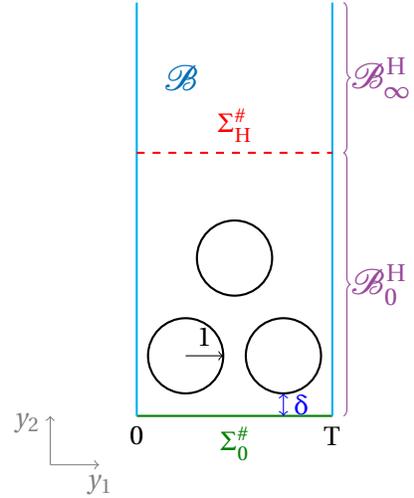
Ce développement dépend des termes de champ proche mais il fait aussi intervenir les termes u_m^{FF} , dit termes de champ lointain, qui ne dépendent que des variables macroscopiques (x_1, x_2) , qui n'ont pas de variations à l'échelle des particules et qui correspondent au comportement de notre solution diffractée loin des particules. Ces termes de champ lointain ne vivent qu'au dessus des particules, plus précisément dans $\mathbb{R} \times (\varepsilon H, +\infty)$. Ce sont les termes de champ proche qui transfèrent les caractéristiques des particules aux termes de champ lointain.



Nous faisons les hypothèses suivantes sur les termes de champ proche $U_m^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2)$:

- comme la couche est périodique, les termes de champ proche $U_m^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2)$ sont supposés T -périodiques par rapport à y_1 , il est donc suffisant de les étudier dans $\mathbb{R} \times \mathcal{B}$ où $\mathcal{B} = (0, T) \times \mathbb{R}_+ \setminus \mathcal{P}_\#$. On notera dans la suite

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0^H &:= (0, T) \times (0, H) \setminus \mathcal{P}_\# ; \\ \mathcal{B}_\infty^H &:= (0, T) \times (H, +\infty) ; \\ \Sigma_H^\# &:= \{y_1 \in (0, T), y_2 = H\} ; \\ \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\# &:= \mathcal{B}_0^H \cup \mathcal{B}_\infty^H . \end{aligned}$$



Pour tout $P \geq 0$, nous notons $\Sigma_P^\# := \{y_1 \in (0, T), y_2 = P\}$.

- loin de la couche de particules, les termes de champ lointain sont censés représenter le comportement macroscopique de la solution. Nous allons donc supposer que les termes de champ proche $U_m^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2)$ disparaissent quand y_2 tend vers $+\infty$ c'est-à-dire

$$U_m^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2) \xrightarrow{y_2 \rightarrow +\infty} 0 . \quad (3)$$

L'idée est de supposer qu'un tel développement existe. Nous insérons alors ce développement dans les équations vérifiées par la solution u^ε et nous déduisons formellement les équations vérifiées par les termes de champ proche et les termes de champ lointain.

3.2 Équations satisfaites par les termes de champ lointain et les termes de champ proche

Nous écrivons les équations données par $(P_t^\varepsilon) + (CN_t)$ ou $(P_t^\varepsilon) + (CD_t)$ en supposant que u^ε est de la forme (1) et (2) respectivement dans $\{x_2 < \varepsilon H\}$ et $\{x_2 > \varepsilon H\}$.

3.2.1 Cascade d'équations pour les termes de champ lointain

Loin des particules, le champ est supposé être bien représenté par le développement en champ lointain, les termes de champ proche étant supposés disparaître d'après l'hypothèse (3) . Pour obtenir l'équation satisfaite par u_m^{FF} , nous remplaçons $u^\varepsilon(x_1, x_2)$ par $\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m u_m^{\text{FF}}(x_1, x_2)$ dans l'équation de Helmholtz du problème (P_t^ε) , nous trouvons

$$\begin{aligned} -\Delta \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m u_m^{\text{FF}}(x_1, x_2) \right) - k^2 \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m u_m^{\text{FF}}(x_1, x_2) \right) &= 0 \quad , \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times (\varepsilon H, +\infty), \\ \iff -\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \Delta u_m^{\text{FF}}(x_1, x_2) - k^2 \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m u_m^{\text{FF}}(x_1, x_2) &= 0 \quad , \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times (\varepsilon H, +\infty) . \end{aligned}$$

En identifiant formellement les puissances de ε , nous obtenons

$$\forall m \in \mathbb{N} , \quad -\Delta u_m^{\text{FF}}(x_1, x_2) - k^2 u_m^{\text{FF}}(x_1, x_2) = 0 \quad , \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times (\varepsilon H, +\infty) . \quad (4)$$

De plus, loin des particules, la condition d'onde sortante appliquée aux termes de champ lointain donne

$$\begin{cases} u_0^{\text{FF}} - u_{\text{inc}} \text{ est sortant ;} \\ u_m^{\text{FF}} \text{ est sortant , pour } m \geq 1 . \end{cases} \quad (5)$$

Les équations (4) et (5) ne permettent pas de caractériser u_m^{FF} de manière unique. Il manque une condition au bord sur $\Sigma_{\varepsilon\text{H}}$; celle-ci sera déterminée à partir des termes de champ proche.

Remarque 2. *Si l'onde incidente est une onde plane, ces équations peuvent être écrites sur une seule période avec conditions de quasi-périodicité sur les bords latéraux.*

3.2.2 Cascade d'équations pour les termes de champ proche

Équation volumique

Comme les termes de champ proche dépendent de plusieurs variables, nous allons utiliser la règle de dérivation suivante :

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{Z}, \quad \partial_{x_1} \left(U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) &= \left[\partial_{x_1} U_m^{\text{NF}} \right] \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \left[\partial_{y_1} U_m^{\text{NF}} \right] \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right), \quad \forall x_1, \forall x_2 . \\ \forall m \in \mathbb{Z}, \quad \partial_{x_2} \left(U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\partial_{y_2} U_m^{\text{NF}} \right] \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right), \quad \forall x_1, \forall x_2 . \end{aligned}$$

Le laplacien de $U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right)$ s'écrit alors

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad \Delta \left(U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) = \partial_{x_1}^2 U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) + \frac{2}{\varepsilon} \partial_{x_1} \partial_{y_1} U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_{\mathbf{y}} U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right), \quad \forall x_1, \forall x_2 .$$

Commençons par regarder ce que l'on obtient lorsque $x_2 < \varepsilon\text{H}$. La solution u^ε se développe uniquement à l'aide des termes de champ proche U_m^{NF} . Nous remplaçons alors $u^\varepsilon(x_1, x_2)$ par $\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right)$ dans l'équation de Helmholtz du problème (P_t^ε), nous obtenons

$$\Delta \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) + k^2 \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) = 0, \quad \forall x_1, \forall x_2 .$$

Si bien qu'en utilisant la décomposition du Laplacien précédente, nous avons pour presque tout $x_1, x_2 \in \mathcal{D}^\varepsilon$

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq 0} \varepsilon^{m-2} \left[\Delta_{\mathbf{y}} U_m^{\text{NF}} \right] \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) + 2 \sum_{m \geq 0} \varepsilon^{m-1} \left[\partial_{x_1} \partial_{y_1} U_m^{\text{NF}} \right] \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) + \sum_{m \geq 0} \varepsilon^m \left[\partial_{x_1}^2 U_m^{\text{NF}} \right] \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \\ + \sum_{m \geq 0} \varepsilon^m k^2 U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) = 0, \quad \forall x_1, \forall x_2 ; \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq -2} \varepsilon^m \left[\Delta_{\mathbf{y}} U_{m+2}^{\text{NF}} \right] \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) = -2 \sum_{m \geq -1} \varepsilon^m \left[\partial_{x_1} \partial_{y_1} U_{m+1}^{\text{NF}} \right] \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) - \sum_{m \geq 0} \varepsilon^m \left[\partial_{x_1}^2 U_m^{\text{NF}} \right] \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \\ + \sum_{m \geq 0} \varepsilon^m k^2 U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right), \quad \forall x_1, \forall x_2 . \quad (6) \end{aligned}$$

Nous identifions formellement les puissances de ε et nous supposons que les équations sont vraies pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, pour tout $(y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times (0, H) \setminus \overline{\mathcal{P}}$. Nous rappelons que $y_1 \mapsto U_m^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2)$ est T -périodique, nous obtenons alors la cascade d'équations

$$\text{p.p. } x_1 \in \mathbb{R}, \quad \Delta_y U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = -2 \partial_{x_1} \partial_{y_1} U_{m-1}^{\text{NF}}(x_1; \cdot) - \partial_{x_1}^2 U_{m-2}^{\text{NF}}(x_1; \cdot) - k^2 U_{m-2}^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \quad \text{dans } \mathcal{B}_0^{\text{H}}, \quad \text{pour } m \geq 0; \quad (7)$$

où par convention $U_{-2}^{\text{NF}} = U_{-1}^{\text{NF}} = 0$.

Regardons maintenant ce que l'on obtient lorsque $x_2 > \varepsilon H$. Nous remplaçons u^ε par le développement (2) dans l'équation de Helmholtz du problème (P_t^ε), nous obtenons

$$\Delta \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) + \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m u_m^{\text{FF}}(x_1, x_2) \right) + k^2 \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) + \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m u_m^{\text{FF}}(x_1, x_2) \right) = 0, \quad \forall x_1, \forall x_2;$$

qui se réécrit

$$\Delta \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) + k^2 \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) + \underbrace{\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \left(\Delta u_m^{\text{FF}}(x_1, x_2) + k^2 u_m^{\text{FF}}(x_1, x_2) \right)}_{=0 \text{ d'après (4)}} = 0, \quad \forall x_1, \forall x_2.$$

Nous retrouvons donc la même cascade d'équations, donnée par (7), pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, $(y_1, y_2) \in \mathcal{B}_\infty^{\text{H}}$.

La cascade d'équations (7) est donc vérifiée dans $\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^\#$.

Cherchons maintenant les conditions sur le bord Σ_0 , les particules \mathcal{P}^ε et l'interface $\Sigma_{\varepsilon H}$. Nous allons utiliser le fait que la variable x_1 est liée aux variations macroscopiques des champs proches. Dans la suite, nous allons donc considérer qu'il joue le rôle d'un paramètre, les conditions aux bords ne seront imposées que sur les variables rapides. Ceci a l'air arbitraire mais c'est justifié a posteriori par des estimations d'erreurs (voir section 3.4.5 pour une condition de Dirichlet et section 3.5.5 pour une condition de Neumann sur les particules).

Conditions aux limites sur les inclusions

Dans le cas où nous avons une condition de Dirichlet sur les particules (CD_t),

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \partial \mathcal{P}^\varepsilon.$$

Les particules étant situées dans l'espace $\mathbb{R} \times (0, H)$, la solution u^ε se développe uniquement à l'aide des termes de champ proche. Nous remplaçons u^ε par $\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_m^{\text{NF}}$, nous identifions les puissances de ε et nous supposons que les équations sont vérifiées pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, $(y_1, y_2) \in \partial \mathcal{P}$. Nous obtenons alors directement

$$\text{p.p. } x_1 \in \mathbb{R}, \quad U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}, \quad \text{pour } m \geq 0.$$

Comme les termes de champ proche sont supposés périodiques par rapport à y_1 , il suffit d'écrire la condition sur une période de l'ensemble, soit

$$\text{p.p. } x_1 \in \mathbb{R}, \quad U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_\#, \quad \text{pour } m \geq 0. \quad (8)$$

Dans le cas où nous avons une condition de Neumann sur les particules (CN_t)

$$\nabla u^\varepsilon \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial \mathcal{P}^\varepsilon ,$$

avec $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ le vecteur normal à $\partial \mathcal{P}^\varepsilon$. Nous remplaçons u^ε par $\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_m^{\text{NF}}$; en utilisant la règle de dérivation nous obtenons

$$\begin{aligned} & \nabla \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) \cdot \vec{n} = 0 , \quad \forall (x_1, x_2) \in \partial \mathcal{P}^\varepsilon \\ \Leftrightarrow & \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \left(\begin{array}{c} \partial_{x_1} U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_1} U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \\ \frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_2} U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \end{array} \right) \cdot \vec{n} = 0 , \quad \forall (x_1, x_2) \in \partial \mathcal{P}^\varepsilon \\ \Leftrightarrow & \sum_{m \geq 0} \varepsilon^m \left(\begin{array}{c} \partial_{x_1} U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \\ 0 \end{array} \right) \cdot \vec{n} + \sum_{m \geq -1} \varepsilon^m \nabla_{\mathbf{y}} U_{m+1}^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \cdot \vec{n} = 0 , \quad \forall (x_1, x_2) \in \partial \mathcal{P}^\varepsilon . \end{aligned}$$

Nous identifions formellement les puissances de ε et nous supposons que les équations sont vérifiées pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$ et $(y_1, y_2) \in \partial \mathcal{P}_\#$. Nous avons alors

$$\text{p.p. } x_1 \in \mathbb{R}, \quad \nabla_{\mathbf{y}} U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \cdot \vec{n} = -\partial_{x_1} U_{m-1}^{\text{NF}}(x_1; \cdot) n_1 \quad \text{sur} \quad \partial \mathcal{P}_\# , \quad \text{pour } m \geq 0 . \quad (9)$$

Conditions aux limites sur Σ_0

La condition aux limites sur Σ_0 est donnée par

$$-\partial_{x_2} u^\varepsilon + ik\gamma u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_0 ,$$

Nous remplaçons u^ε par $\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_m^{\text{NF}}$ et nous obtenons

$$\begin{aligned} & -\partial_{x_2} \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) + ik\gamma \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) = 0 , \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}, x_2 = 0 ; \\ \Leftrightarrow & \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^{m-1} \partial_{y_2} U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) + ik\gamma \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) = 0 , \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}, x_2 = 0 ; \\ \Leftrightarrow & -\sum_{m \geq -1} \varepsilon^m \partial_{y_2} U_{m+1}^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) + ik\gamma \sum_{m \geq 0} \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) = 0 , \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}, x_2 = 0 . \end{aligned}$$

En identifiant formellement les puissances de ε et en supposant que les équations sont vérifiées pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, pour presque tout $(y_1, y_2) \in \Sigma_0^\#$. Nous avons alors

$$\text{p.p. } x_1 \in \mathbb{R}, \quad \partial_{y_2} U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = ik\gamma U_{m-1}^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \quad \text{sur} \quad \Sigma_0^\# , \quad \text{pour } m \geq 0 . \quad (10)$$

Conditions sur $\Sigma_{\varepsilon H}$

Au voisinage de $\Sigma_{\varepsilon H}$, les termes de champ proche présentent des sauts puisque, même si la solution u^ε est bien à trace et à dérivée normale continue au travers de $\Sigma_{\varepsilon H}$, elle possède des développements différents de part et d'autre de $\Sigma_{\varepsilon H}$.

Comme u^ε est continue au travers de $\Sigma_{\varepsilon H} = \{x_2 = \varepsilon H\} : u^\varepsilon|_{\Sigma_{\varepsilon H}^-} = u^\varepsilon|_{\Sigma_{\varepsilon H}^+}$, en remplaçant u^ε par ses développements, nous obtenons

$$\sum_{m \geq 0} \varepsilon^m U_m^{\text{NF}}\left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, H^-\right) = \sum_{m \geq 0} \varepsilon^m U_m^{\text{NF}}\left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, H^+\right) + \sum_{m \geq 0} \varepsilon^m u_m^{\text{FF}}|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1), \quad \forall x_1 \in \mathbb{R};$$

où nous avons identifié la trace de $u_m^{\text{FF}}(x_1, x_2)$ sur $\Sigma_{\varepsilon H}$ à une fonction d'une seule variable, ici x_1 . En identifiant les puissances de ε et en supposant que ces équations sont vraies pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, $(y_1, y_2) \in \Sigma_H^\#$, nous avons

$$\text{p.p. } x_1 \in \mathbb{R}, \quad \left[U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_H = -u_m^{\text{FF}}|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1), \quad \text{pour } m \geq 0; \quad (11)$$

où nous avons utilisé la notation

Notation 1

Le saut d'une fonction $U \in H_{loc}^1(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#) = \left\{ u|_{\mathcal{B}_0^H} \in H^1(\mathcal{B}_0^H) \text{ et } u|_{\mathcal{B}_\infty^H} \in H_{loc}^1(\mathcal{B}_\infty^H) \right\}$ à l'interface $\Sigma_H^\#$ est

$$[U]_H := U|_{\Sigma_H^{\#,+}} - U|_{\Sigma_H^{\#,-}}. \quad (12)$$

D'autre part, comme la dérivée normale de u^ε au travers de $\Sigma_{\varepsilon H}$ est continue, $\partial_{x_2} u^\varepsilon|_{\Sigma_{\varepsilon H}^-} = \partial_{x_2} u^\varepsilon|_{\Sigma_{\varepsilon H}^+}$, en remplaçant u^ε par ses développements, nous en déduisons

$$\sum_{m \geq -1} \varepsilon^m \partial_{y_2} U_{m+1}^{\text{NF}}\left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, H^-\right) = \sum_{m \geq -1} \varepsilon^m \partial_{y_2} U_{m+1}^{\text{NF}}\left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, H^+\right) + \sum_{m \geq 0} \varepsilon^m \partial_{x_2} u_m^{\text{FF}}|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1), \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}.$$

En identifiant les puissances de ε et en supposant que ces équations sont vraies pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$ et $(y_1, y_2) \in \Sigma_H^\#$, nous avons

$$\text{p.p. } x_1 \in \mathbb{R}, \quad \left[-\partial_{y_2} U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_H = \partial_{x_2} u_{m-1}^{\text{FF}}|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1), \quad \text{pour } m \geq 0; \quad (13)$$

où $u_{-1}^{\text{FF}} = 0$.

Conditions de périodicité

Nous rappelons que nous cherchons des champs proches $U_m^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2)$ périodiques par rapport à y_1 . $U_m^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2)$ va donc vérifier les conditions de périodicité suivantes

$$\begin{aligned} \text{p.p. } x_1 \in \mathbb{R}, \quad U_m^{\text{NF}}|_{\Gamma_+}(x_1; \cdot) &= U_m^{\text{NF}}|_{\Gamma_-}(x_1; \cdot), \quad \text{pour } m \geq 0. \\ \text{p.p. } x_1 \in \mathbb{R}, \quad \partial_{y_1} U_m^{\text{NF}}|_{\Gamma_+}(x_1; \cdot) &= \partial_{y_1} U_m^{\text{NF}}|_{\Gamma_-}(x_1; \cdot), \quad \text{pour } m \geq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Nous abrégons ces conditions par la suite en U_m^{NF} est T -périodique.

Problèmes aux limites pour les termes de champ proche

Les termes de champ proche satisfont le système d'équations type : pour tout $m \geq 0$, pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = 2 \partial_{x_1} \partial_{y_1} U_{m-1}^{\text{NF}}(x_1; \cdot) + \partial_{x_1}^2 U_{m-2}^{\text{NF}}(x_1; \cdot) + k^2 U_{m-2}^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#} \\ U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \text{ est } T\text{-périodique} \\ \partial_{y_2} U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = ik\gamma U_{m-1}^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \quad \text{sur } \Sigma_0^{\#} \\ \left[U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_{\text{H}} = -u_m^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \\ \left[-\partial_{y_2} U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_{\text{H}} = \partial_{x_2} u_{m-1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \end{array} \right. , \quad (15)$$

et soit nous imposons des conditions de Dirichlet sur les particules

$$U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_{\#} ; \quad (16)$$

soit nous imposons des conditions de Neumann sur les particules

$$\nabla_{\mathbf{y}} U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \cdot \vec{n} = -\partial_{x_1} U_{m-1}^{\text{NF}}(x_1; \cdot) n_1 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_{\#} ; \quad (17)$$

avec $U_{-1}^{\text{NF}} = U_{-2}^{\text{NF}} = 0$ par convention.

On voit que x_1 joue le rôle d'un paramètre et que pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, les termes de champ proche $U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ sont solutions de problèmes de type Laplace posés dans une bande contenant des particules de taille 1. Ces problèmes font intervenir des conditions de saut en $\Sigma_{\text{H}}^{\#}$ dépendant des termes de champ lointain u_m^{FF} et u_{m-1}^{FF} .

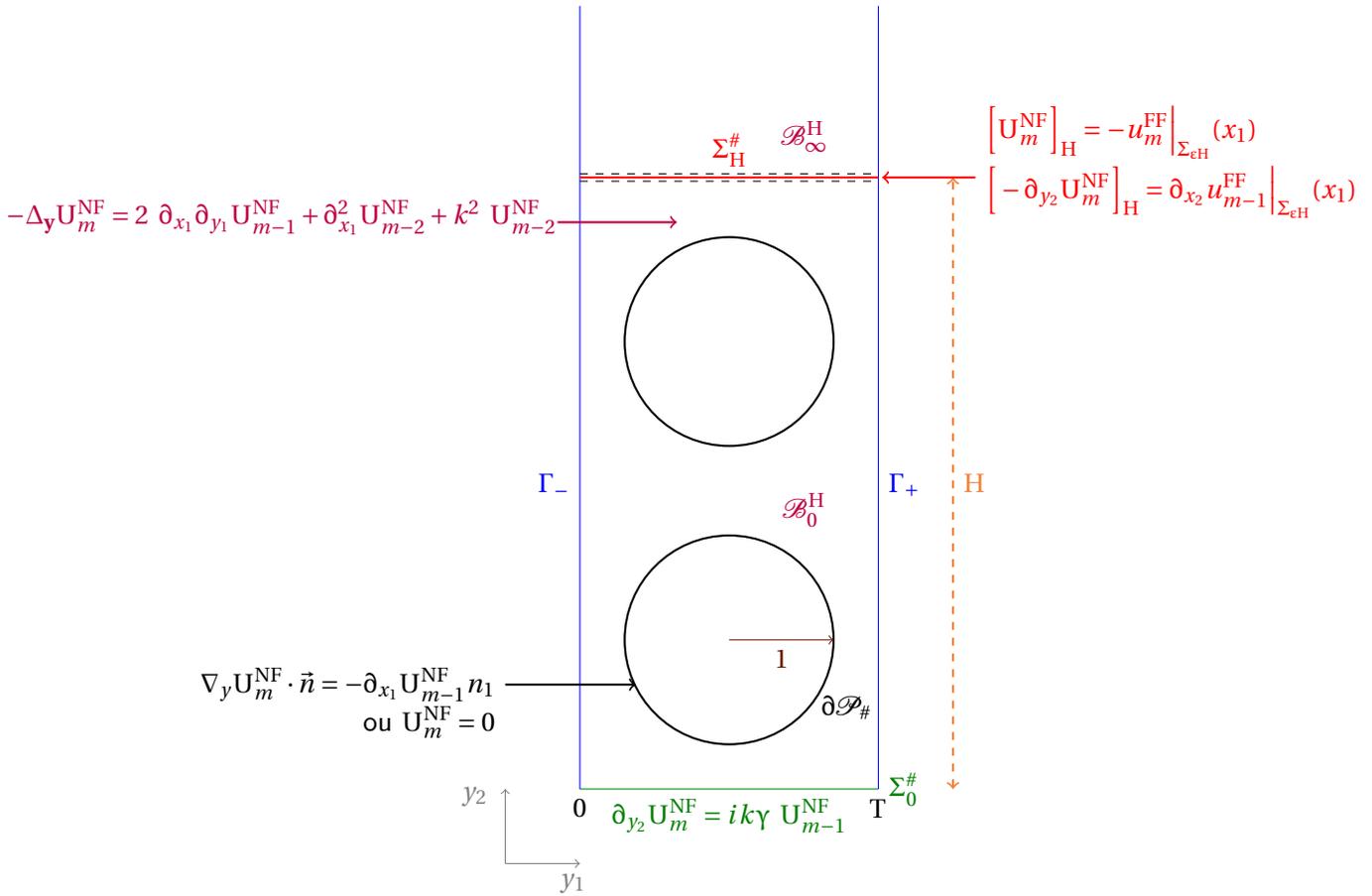


Figure 3.1 – Schéma du système d'équations vérifié par les termes de champ proche

3.3 Comportement à l'infini des termes de champ proche

Que les conditions sur les particules soient de type Dirichlet ou Neumann, loin des particules, les termes de champ proche vérifient

$$\text{p.p. } x_1 \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -\Delta_y U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = 2 \partial_{x_1} \partial_{y_1} U_{m-1}^{\text{NF}}(x_1; \cdot) + \partial_{x_1}^2 U_{m-2}^{\text{NF}}(x_1; \cdot) + k^2 U_{m-2}^{\text{NF}}(x_1; \cdot) & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^L \\ U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \text{ est } T\text{-périodique} \end{cases} \quad (18)$$

où $\mathcal{B}_\infty^L = (0, T) \times (L, +\infty)$ avec $L \geq H$.

L'objectif de cette section est de déterminer le comportement à l'infini des termes de champ proche, si ils existent. Nous allons donc supposer dans cette section qu'ils existent. Commençons par étudier plus généralement les fonctions $U \in H_{loc}^1(\mathcal{B}_\infty^L)$ satisfaisant

$$-\Delta U = F \quad \text{dans } \mathcal{B}_\infty^L \quad (*)$$

avec $F \in L^2(\mathcal{B}_\infty^L)$ et F satisfaisant la propriété (\mathcal{P}_∞) définie comme suit

Définition 8

Une fonction $F \in L^2(\mathcal{B}_\infty^L)$ satisfait la propriété (\mathcal{P}_∞) si et seulement si il existe une suite de polynômes $(p_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ telle que, pour $y_2 > H$,

$$F(y_1, y_2) = \sum_{l \neq 0} p_l(y_2) e^{-\frac{2|l|\pi}{T}(y_2-H)} e^{\frac{2il\pi}{T}y_1}. \quad (\mathcal{P}_\infty)$$

Proposition 9

Si F vérifie la propriété (\mathcal{P}_∞) alors la solution U de $(*)$ s'écrit $U = C_U + \widehat{U}$ avec \widehat{U} vérifie la propriété (\mathcal{P}_∞) . Plus précisément, $U = U_{hom} + U_{part}$ avec

- U_{hom} vérifie $\Delta U_{hom} = 0$ dans \mathcal{B}_∞^L et s'écrit

$$U_{hom}(y_1, y_2) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} C_U^{(l)} e^{-\frac{2|l|\pi}{T}(y_2-H)} e^{\frac{2il\pi}{T}y_1}$$

avec $C_U^{(l)} \in \mathbb{R}$ et $C_U^{(0)} = C_U$.

- $U_{part} \in H_{\#}^1(\mathcal{B}_\infty^L) := \{u \in H_{loc}^1(\mathcal{B}_\infty^L), u \text{ est } T\text{-périodique}\}$ est la seule solution particulière vérifiant $\Delta U_{part} = F$ qui vérifie

$$U_{part} = \sum_{l \neq 0} q_l(y_2) e^{-\frac{2|l|\pi}{T}(y_2-H)} e^{\frac{2il\pi}{T}y_1}$$

avec $q_l(L) = 0$.

Preuve. Soit F vérifiant la propriété (\mathcal{P}_∞) et U la solution de $(*)$. Comme U est T -périodique, il se décompose en série de Fourier

$$U(y_1, y_2) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_l(y_2) e^{\frac{2il\pi}{T}y_1} \quad (19)$$

où la série est convergente dans H^2 (la preuve est similaire à celle du théorème 2 du chapitre 2). Comme $-\Delta U = F$ dans \mathcal{B}_∞^L , on substitue U par son développement en série de Fourier (19) et F par la propriété (\mathcal{P}_∞) , nous obtenons

$$\partial_{y_2}^2 \mathcal{U}_l(y_2) - \left(\frac{2\pi l}{T}\right)^2 \mathcal{U}_l(y_2) = p_l(y_2) e^{-\frac{2|l|\pi}{T}(y_2-H)}. \quad (20)$$

- Si $l = 0$: l'équation dévient $\partial_{y_2}^2 \mathcal{U}_0(y_2) = 0$. Les solutions sont des fonctions affines définies par

$$\mathcal{U}_0(y_2) = D_U y_2 + C_U.$$

Comme U est exponentiellement décroissant à l'infini, nous posons $D_U = 0$.

- $l \neq 0$: nous avons une équation du second ordre non homogène. La solution $\mathcal{U}_l(y_2)$ est alors une combinaison d'une solution homogène $\mathcal{U}_l^{hom}(y_2)$ et d'une solution particulière $\mathcal{U}_l^{part}(y_2)$.

★ La solution de l'équation homogène est de la forme

$$\mathcal{U}_l^{hom}(y_2) = C_U^{(l)} e^{-\frac{2|l|\pi}{T}(y_2-H)}.$$

★ Nous cherchons alors une solution particulière de la forme

$$\mathcal{U}_l^{part}(y_2) = q_l(y_2) e^{-\frac{2il\pi}{T}(y_2-H)},$$

avec $(q_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ une suite de polynôme où $d^\circ q_l = d^\circ p_l + 1$ et $q_l''(y_2) - \frac{4|l|\pi}{T} q_l'(y_2) = p_l(y_2)$

La solution U de (*) est une combinaison de $U_{part} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_l^{part}(y_2) e^{\frac{2il\pi}{T} y_1}$ et $U_{hom} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_l^{hom}(y_2) e^{\frac{2il\pi}{T} y_1}$.

U est alors donnée par

$$U = C_U + \sum_{l \neq 0} \hat{q}_l(y_2) e^{-\frac{2il\pi}{T}(y_2-H)} e^{\frac{2il\pi}{T} y_1}. \quad (21)$$

avec $\hat{U} = \sum_{l \neq 0} \hat{q}_l(y_2) e^{-\frac{2il\pi}{T}(y_2-H)} e^{\frac{2il\pi}{T} y_1}$ qui vérifie la propriété (\mathcal{P}_∞) . \square

Remarque 3. Si F vérifie la propriété (\mathcal{P}_∞) avec $p_l(y_2)$ des polynômes de degré N_l , nous pouvons montrer que U va se décomposer de la même manière avec des polynômes $q_l(y_2)$ de degré $N_l + 1$.

Remarque 4. Nous montrons facilement grâce à la décomposition (21) que

$$C_U = \frac{1}{T} \int_{y_2=a} U(y_1, y_2) dy_1, \quad \forall a \geq H. \quad (22)$$

Remarque 5. Notons que U_{part} ne dépend que de F et on a

$$\int_{\Sigma_L^\#} \partial_{y_2} U_{part} = 0. \quad (**)$$

Dans la section suivante, qui traite des conditions de Dirichlet, nous utiliserons que la première partie de la proposition. Dans le cas des conditions de Neumann, nous utiliserons la deuxième partie de la proposition et il nous faudra remplacer la demi-bande \mathcal{B}_∞^L par une condition transparente.

Nous nous intéressons tout d'abord, $\forall \varphi \in H_\#^{1/2}(\Sigma_L^\#) := \left\{ u \Big|_{\Sigma_L^\#}, u \in H_\#^1(\mathcal{B}_\infty^L) \right\}$, au problème

$$\begin{cases} -\Delta u(\varphi) = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^L; \\ u(\varphi) = \varphi & \text{sur } \Sigma_L^\#; \\ u(\varphi) \text{ est } T\text{-périodique.} \end{cases} \quad (23)$$

Ce problème a une unique solution dans

$$W_\#(\mathcal{B}_\infty^L) = \left\{ u \in H_{loc}^1(\mathcal{B}_\infty^L), \nabla u \in L^2(\mathcal{B}_\infty^L), \frac{u}{\sqrt{1+y_2^2}} \in L^2(\mathcal{B}_\infty^L) \text{ et } u \Big|_{\Gamma_+} = u \Big|_{\Gamma_-} \right\}, \quad (24)$$

en utilisant une inégalité de Hardy et le théorème de Lax-Milgram. De plus, nous montrons que (en utilisant des techniques de séparation de variables comme dans le chapitre 2) :

$$u(\varphi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\varphi, \phi_l \right)_{L^2(\Sigma_L^\#)} e^{-\frac{2il\pi}{T}(y_2-L)} \phi_l(y_1) \quad \text{avec} \quad \phi_l(y_1) = e^{\frac{2il\pi}{T} y_1}. \quad (25)$$

Définition 10

Soit $\Lambda \in \mathcal{L}\left(H_{\#}^{1/2}(\Sigma_L^{\#}), H_{\#}^{-1/2}(\Sigma_L^{\#})\right)$ l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann (DtN) défini par

$$\forall \varphi \in H_{\#}^{1/2}(\Sigma_L^{\#}), \quad \Lambda \varphi = -\partial_{y_2} u(\varphi) \quad \text{sur} \quad \Sigma_L^{\#}. \quad (26)$$

Nous avons alors

$$\forall \varphi \in H_{\#}^{1/2}(\Sigma_L^{\#}), \quad \Lambda \varphi = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\frac{2|l|\pi}{T} \right) (\varphi, \phi_l)_{L^2(\Sigma_L^{\#})} \phi_l(y_1). \quad (27)$$

Nous avons donc par définition

$$\forall \varphi \in H_{\#}^{1/2}(\Sigma_L^{\#}), \quad \Lambda \varphi + \partial_{y_2} u(\varphi) = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_L^{\#}. \quad (28)$$

Revenons à la fonction U vérifiant (*), nous avons :

$$\begin{aligned} \partial_{y_2} U \Big|_{\Sigma_L^{\#}} + \Lambda U \Big|_{\Sigma_L^{\#}} &= \underbrace{\partial_{y_2} U_{hom} \Big|_{\Sigma_L^{\#}} + \Lambda U_{hom} \Big|_{\Sigma_L^{\#}}}_{=0 \text{ car } \Delta U_{hom}=0} + \partial_{y_2} U_{part} \Big|_{\Sigma_L^{\#}} + \underbrace{\Lambda U_{part} \Big|_{\Sigma_L^{\#}}}_{=0 \text{ car } U_{part} \Big|_{\Sigma_L^{\#}}=0} \\ &= \partial_{y_2} U_{part} \Big|_{\Sigma_L^{\#}}. \end{aligned}$$

En utilisant la forme de U_{part} (U_{part} ne dépend que de F), nous trouvons

$$\partial_{y_2} U \Big|_{\Sigma_L^{\#}} + \Lambda U \Big|_{\Sigma_L^{\#}} = \sum_{l \neq 0} q'_l(L) e^{-\frac{2|l|\pi}{T}(L-H)} \phi_l(y_1)$$

où q_l ne dépend que de F .

3.4 Étude du cas des conditions de Dirichlet sur les particules

Cette section est consacrée au problème avec condition de Dirichlet sur le bord des particules. Nous commençons par l'étude du caractère bien posé du problème de demi-bande infinie pour la résolution des problèmes de champ proche. Nous déterminons ensuite une condition garantissant que les termes de champ proche tendent vers 0 quand y_2 tend vers l'infini. Nous pouvons alors caractériser les termes à tout ordre et justifier le développement asymptotique grâce à des estimations d'erreurs. Pour finir cette section, nous proposons un modèle effectif et donnons une estimation d'erreur de ce modèle.

3.4.1 Caractère bien posé des problèmes de champ proche

Les problèmes de champ proche (15)+(16) peuvent s'écrire sous la forme : pour $m \geq 0$,

$$\text{p.p. } x_1 \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -\Delta_y U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = F_{m-1}(x_1; \cdot) & \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^{\#}, \\ U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) & \text{est } T\text{-périodique}, \\ -\partial_{y_2} U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = G_{m-1}(x_1; \cdot) & \text{sur } \Sigma_0^{\#}, \\ U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{D}_{\#}, \\ \left[U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_H = \alpha_m^{\text{D}}(x_1) & \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_H = \alpha_{m-1}^{\text{N}}(x_1), \end{cases} \quad (29)$$

où $F_{m-1}(x_1; \cdot)$ dépend des termes précédents $U_{m-1}^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ et $U_{m-2}^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$. Si $U_{m-1}^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ et $U_{m-2}^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ décroissent quand y_2 tend vers l'infini alors $F_{m-1}(x_1; \cdot)$ aussi. $G_{m-1}(x_1; \cdot)$ dépend de la trace de $U_{m-1}^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ sur $\Sigma_0^\#$, nous avons $G_{m-1}(x_1; \cdot) \in L^2(\Sigma_0^\#)$. Quant à $\alpha_m^{\text{D}}(x_1)$, elle dépend de $u_m^{\text{FF}}(x_1)$ et $\alpha_{m-1}^{\text{N}}(x_1)$ dépend de $\partial_{x_2} u_{m-1}^{\text{FF}}(x_1)$. De plus, $\alpha_m^{\text{D}}(x_1)$ et $\alpha_{m-1}^{\text{N}}(x_1)$ sont des fonctions indépendantes de y_1 .

Dans le système d'équations (29), x_1 joue le rôle d'un paramètre. Dans ce qui suit, nous omettons dans un premier temps la variable x_1 pour simplifier les notations et nous nous intéressons au caractère bien posé des problèmes qui s'écrivent sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta U = F \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^\#, \\ U \text{ est } T\text{-périodique}, \\ -\partial_{y_2} U = G \quad \text{sur } \Sigma_0^\#, \\ U = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{D}_\#, \\ [U]_{\text{H}} = \alpha^{\text{D}} \quad \text{et} \quad [-\partial_{y_2} U]_{\text{H}} = \alpha^{\text{N}}. \end{array} \right. \quad (30)$$

Le problème considéré est de type Laplace posé dans une bande. Nous introduisons d'abord l'espace de Hilbert

$$W_\#(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^\#) = \left\{ u \in H_{\text{loc}}^1(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^\#), \nabla u \in L^2(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^\#), \frac{u}{\sqrt{1+y_2^2}} \in L^2(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^\#) \text{ et } u|_{\Gamma_+} = u|_{\Gamma_-} \right\}, \quad (31)$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W_\#} = \left(\int_{\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^\#} \left(|\nabla u|^2 + \frac{|u|^2}{1+y_2^2} \right) dy \right)^{1/2}; \quad (32)$$

qui est équivalente à la semi-norme

$$|u|_{W_\#} = \left(\int_{\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^\#} |\nabla u|^2 dy \right)^{1/2} = \|\nabla u\|_{L^2} \quad (33)$$

d'après l'inégalité de Hardy [GN77, BCG05, Bre99, SSW03].

Nous notons $H_\#^{1/2}(\Sigma_{\text{P}}^\#)$ l'espace des traces des fonctions de $W_\#(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^\#)$ sur $\Sigma_{\text{P}}^\#$

$$H_\#^{1/2}(\Sigma_{\text{P}}^\#) = \left\{ u|_{\Sigma_{\text{P}}^\#}, u \in W_\#(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^\#) \right\}$$

et $H_\#^{-1/2}(\Sigma_{\text{P}}^\#) = \left(H_\#^{1/2}(\Sigma_{\text{P}}^\#) \right)'$ le dual de $H_\#^{1/2}(\Sigma_{\text{P}}^\#)$. Nous utilisons la notation $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_\#^{1/2}(\Sigma_{\text{P}}^\#)}$ pour le crochet de dualité entre $H_\#^{1/2}(\Sigma_{\text{P}}^\#)$ et $H_\#^{-1/2}(\Sigma_{\text{P}}^\#)$.

Théorème 11

Soient $F \in L^2(\mathcal{B})$ telle que $F\sqrt{1+y_2^2} \in L^2(\mathcal{B})$, $G \in H_\#^{-1/2}(\Sigma_0^\#)$ et $\alpha^{\text{D}}, \alpha^{\text{N}} \in \mathbb{R}$. Alors le problème (30) admet une unique solution dans $W_\#(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^\#)$.

Preuve. Pour appliquer le théorème de Lax-Milgram, nous introduisons $\mathcal{R} \in W^1(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#)$ telle que

$$\mathcal{R} = \begin{cases} \alpha^D & \text{si } y_2 > H \\ 0 & \text{si } y_2 < H \end{cases}$$

qui vérifie $\mathcal{R} \in W_\#(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#)$, $[\mathcal{R}]_H = \alpha^D$ et $[-\partial_{y_2}\mathcal{R}]_H = 0$. Par construction $\tilde{U} = U - \mathcal{R}$, $\tilde{U} \in W_\#(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#)$ avec $[\tilde{U}]_H = 0$ et \tilde{U} satisfait le problème variationnel :

Trouver $\tilde{U} \in W_\#(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#)$ solution de

$$\int_{\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#} \nabla \tilde{U} \cdot \nabla V \, d\mathbf{y} = \int_{\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#} F V \, d\mathbf{y} + \int_{\Sigma_0^\#} G V \, dy_1 + \alpha^N \int_{\Sigma_H^\#} V \, dy_1, \quad \forall V \in W_\#^D(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#). \quad (34)$$

La forme $l(V) = \int_{\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#} F V \, d\mathbf{y} + \int_{\Sigma_0^\#} G V \, dy_1 + \alpha^N \int_{\Sigma_H^\#} V \, dy_1$ est clairement linéaire et continue dans $W_\#(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#)$. D'après

(33), la forme bilinéaire $a(\tilde{U}, V) = \int_{\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#} \nabla \tilde{U} \cdot \nabla V \, d\mathbf{y}$ est continue et coercive.

Le théorème de Lax-Milgram s'applique et donne l'existence et l'unicité d'une solution $\tilde{U} \in W_\#(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#)$ du problème variationnel (34). En conséquence, nous avons existence et unicité d'une solution $U \in W_\#(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#)$. \square

En utilisant la section 3.3, nous avons que si F admet une certaine décomposition alors la solution U de (30) tend exponentiellement vite vers une constante C_U . Nous verrons dans la suite que les termes sources du problème (29) vérifient bien la propriété (\mathcal{P}_∞) . Nous allons maintenant exprimer cette constante à partir des données F , G , α^D et α^N .

Pour exprimer cette relation, nous introduisons une fonction profil \mathcal{N} caractéristique du problème (et des propriétés des particules).

Proposition 12

Il existe une unique fonction \mathcal{N} solution de

$$\begin{cases} -\Delta \mathcal{N} = 0 & \text{dans } \mathcal{B}, \\ \mathcal{N} \text{ est } T\text{-périodique}, \\ -\partial_{y_2} \mathcal{N} = 0 & \text{sur } \Sigma_0^\#, \\ \mathcal{N} = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{P}_\#, \end{cases} \quad (35)$$

telle que $\mathcal{N} = y_2 + \tilde{\mathcal{N}}$ avec $\tilde{\mathcal{N}} \in W_\#(\mathcal{B})$.

Preuve. Si un tel \mathcal{N} existe alors $\tilde{\mathcal{N}}$ satisfait dans $W_\#(\mathcal{B})$

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\mathcal{N}} = 0 & \text{dans } \mathcal{B}, \\ \tilde{\mathcal{N}} \text{ est } T\text{-périodique}, \\ -\partial_{y_2} \tilde{\mathcal{N}} = 1 & \text{sur } \Sigma_0^\#, \\ \tilde{\mathcal{N}} = -y_2 & \text{sur } \partial\mathcal{P}_\#. \end{cases} \quad (36)$$

En utilisant des arguments similaires à la preuve du Théorème 11, on a existence et unicité d'un tel $\tilde{\mathcal{N}}$. On en déduit facilement l'existence et l'unicité de la fonction profil \mathcal{N} . \square

Notons que \mathcal{N} est dans le noyau de l'opérateur associé au problème (30) mais dans un espace à poids puisque \mathcal{N} a un comportement linéaire à l'infini.

D'après la proposition 9, nous savons qu'il existe $C_{\tilde{\mathcal{N}}} \in \mathbb{R}$ telle que $\lim_{y_2 \rightarrow +\infty} \tilde{\mathcal{N}} = C_{\tilde{\mathcal{N}}} \in \mathbb{R}$ et $\tilde{\mathcal{N}} - C_{\tilde{\mathcal{N}}}$ vérifie la propriété (\mathcal{P}_∞) . Nous en déduisons donc que

$$\partial_{y_2} \mathcal{N} \xrightarrow{y_2 \rightarrow +\infty} 1 \quad (37)$$

et comme $\int_{\Sigma_H^\#} \partial_{y_2} \tilde{\mathcal{N}} = 0$, nous avons

$$\int_{\Sigma_H^\#} \partial_{y_2} \mathcal{N} = T. \quad (38)$$

Nous pouvons donc maintenant énoncer la propriété suivante.

Proposition 13

Supposons que les hypothèses de la Proposition 9 sont vérifiées alors la constante C_U est donnée par :

$$C_U = \frac{1}{T} \left(\int_{\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#} F \mathcal{N} \, d\mathbf{y} + \int_{\Sigma_0^\#} G \mathcal{N} \, dy_1 \right) + \alpha^N c_0^{(1)} + \alpha^D; \quad (39)$$

où

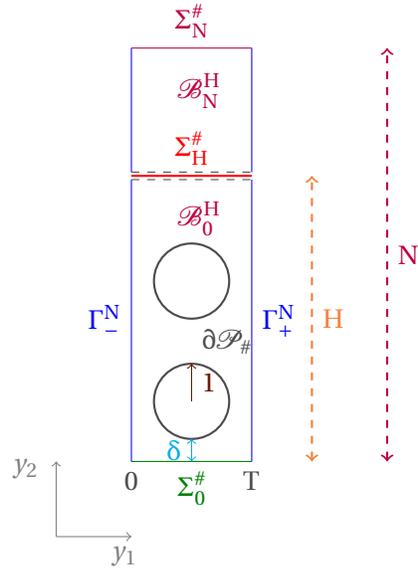
$$c_0^{(1)} := \frac{1}{T} \int_{\Sigma_H^\#} \mathcal{N} \, dy_1. \quad (40)$$

Remarque 6. En utilisant que $\mathcal{N} = y_2 + \tilde{\mathcal{N}}$, $c_0^{(1)}$ peut se réécrire

$$c_0^{(1)} = \frac{1}{T} \int_{\Sigma_H^\#} (y_2 + \tilde{\mathcal{N}}) \, dy_1 = \frac{H}{T} + \frac{1}{T} \int_{\Sigma_H^\#} \tilde{\mathcal{N}} \, dy_1. \quad (41)$$

$c_0^{(1)}$ correspond, à H près, au comportement constant de \mathcal{N} à l'infini. Nous pouvons jouer sur H pour que $c_0^{(1)} > 0$.

Preuve. Nous nous plaçons dans une partie de la bande que l'on note $\mathcal{B}^N \setminus \Sigma_H^\# = \mathcal{B}_0^H \cup \underbrace{(0, T) \times (H, N)}_{\mathcal{B}_N^H}$.



En multipliant par \mathcal{N} le problème vérifié par U (30) et en intégrant sur $\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#$

$$-\int_{\mathcal{B}^N \setminus \Sigma_H^\#} \Delta U \mathcal{N} \, dy = \int_{\mathcal{B}^N \setminus \Sigma_H^\#} F \mathcal{N} \, dy .$$

En appliquant deux fois la formule de Green, nous obtenons

$$\begin{aligned} -\int_{\mathcal{B}^N \setminus \Sigma_H^\#} \underbrace{U \Delta \mathcal{N}}_{=0} \, dy + \int_{\Sigma_N^\#} U \nabla \mathcal{N} \cdot \vec{e}_2 \, dy_1 - \int_{\Sigma_N^\#} \nabla U \cdot \vec{e}_2 \mathcal{N} \, dy_1 + \int_{\Sigma_H^\#} U^- \nabla \mathcal{N} \cdot \vec{e}_2 \, dy_1 - \int_{\Sigma_H^\#} U^+ \nabla \mathcal{N} \cdot \vec{e}_2 \, dy_1 \\ = \int_{\mathcal{B}^N \setminus \Sigma_H^\#} F \mathcal{N} \, dy + \int_{\Sigma_0^\#} G \mathcal{N} \, dy_1 + \alpha^N \int_{\Sigma_H^\#} \mathcal{N} \, dy_1 . \end{aligned}$$

En utilisant que $[U]_H = \alpha^D$, nous trouvons

$$\int_{\Sigma_N^\#} U \nabla \mathcal{N} \cdot \vec{e}_2 \, dy_1 - \int_{\Sigma_N^\#} \nabla U \cdot \vec{e}_2 \mathcal{N} \, dy_1 = \int_{\mathcal{B}^N \setminus \Sigma_H^\#} F \mathcal{N} \, dy + \int_{\Sigma_0^\#} G \mathcal{N} \, dy_1 + \alpha^N \int_{\Sigma_H^\#} \mathcal{N} \, dy_1 + \alpha^D \int_{\Sigma_H^\#} \nabla \mathcal{N} \cdot \vec{e}_2 \, dy_1 .$$

D'après la proposition 9, nous savons qu'il existe $C_U \in \mathbb{R}$ et \tilde{U} vérifiant la propriété (\mathcal{P}_∞) pour $y_2 > H$ telles que $U = C_U + \tilde{U}$ alors $\partial_{y_2} U$ vérifie la propriété (\mathcal{P}_∞) pour $y_2 > H$ et donc $\int_{\Sigma_N^\#} \nabla U \cdot \vec{e}_2 \mathcal{N} \, dy_1 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

De plus, d'après (37), nous avons $\int_{\Sigma_N^\#} U \nabla \mathcal{N} \cdot \vec{e}_2 \, dy_1 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} T C_U$.

D'après (38), nous avons $\int_{\Sigma_H^\#} \nabla \mathcal{N} \cdot \vec{e}_2 \, dy_1 = T$.

Finalement, nous décrivons C_U à l'aide des données F , G , α^D et α^N :

$$C_U = \frac{1}{T} \left(\int_{\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#} F \mathcal{N} \, dy + \int_{\Sigma_0^\#} G \mathcal{N} \, dy_1 + \alpha^N \int_{\Sigma_H^\#} \mathcal{N} \, dy_1 \right) + \alpha^D .$$

□

Nous venons de montrer que pour toute solution U de (30) telle que F vérifie la propriété (\mathcal{P}_∞) , il est possible de décrire son comportement à l'infini, qui est constant, à l'aide des termes sources F , G , α^D , α^N et de la fonction profil \mathcal{N} . Cependant, nous cherchons des termes de champ proche U qui tendent vers 0 à l'infini. Ceci nous donne naturellement une condition dite de compatibilité sur F , G , α^D et α^N .

Théorème 14

Soit U la solution du problème (30). Supposons que $F \in L^2(\mathcal{B})$, $G \in H_{\#}^{-1/2}(\Sigma_0^\#)$, α^D , $\alpha^N \in \mathbb{R}$ et supposons de plus que F vérifie la propriété (\mathcal{P}_∞) alors U tend vers 0 seulement si la condition de compatibilité suivante

$$\frac{1}{T} \left(\int_{\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#} F \mathcal{N} \, d\mathbf{y} + \int_{\Sigma_0^\#} G \mathcal{N} \, dy_1 \right) + \alpha^N c_0^{(1)} + \alpha^D = 0, \quad (42)$$

est satisfaite, avec $c_0^{(1)}$ donnée par (40).

De plus, la convergence est exponentielle.

3.4.2 Construction des premiers termes de champ proche

Nous allons maintenant utiliser les résultats précédents pour construire les termes de champ proche et assurer qu'ils tendent bien vers 0 à l'infini.

Construction de U_0^{NF}

D'après le Théorème 11, pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $U_0^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ dans $W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#)$ de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} U_0^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#, \\ U_0^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \text{ est } T\text{-périodique}, \\ -\partial_{y_2} U_0^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0^\#, \\ U_0^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{P}_{\#}, \\ \left[U_0^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_{\text{H}} = -u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}} (x_1) \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} U_0^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_{\text{H}} = 0. \end{array} \right. \quad (43)$$

D'après le Théorème 14, cette solution tend vers 0 quand y_2 tend vers $+\infty$ si et seulement si la condition de compatibilité (42) est satisfaite. Ceci nous donne une condition de bord pour u_0^{FF} sur $\Sigma_{\varepsilon\text{H}}$

$$u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}} (x_1) = 0. \quad (44)$$

Proposition 15

Pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction $U_0^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \in W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^{\#})$ solution de (43) qui tend vers 0 à l'infini si et seulement si

$$u_0^{\text{FF}} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_{\varepsilon H}. \quad (45)$$

Dans ce cas, pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, $(y_1, y_2) \in \mathcal{B}$,

$$U_0^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2) = 0. \quad (46)$$

Construction de U_1^{NF}

D'après le Théorème 11, pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $U_1^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ dans $W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^{\#})$ de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} U_1^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^{\#}, \\ U_1^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \text{ est } \Gamma\text{-périodique}, \\ -\partial_{y_2} U_1^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_0^{\#}, \\ U_1^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial \mathcal{P}_{\#}, \\ \left[U_1^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_{\text{H}} = -u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} U_1^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_{\text{H}} = \partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1); \end{array} \right. \quad (47)$$

où on a utilisé $U_0^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2) = 0$.

D'après le Théorème 14, cette solution tend vers 0 quand y_2 tend vers $+\infty$ si et seulement si la condition de compatibilité (42) est satisfaite. Cela donne ici

$$\partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) c_0^{(1)} - u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) = 0; \quad (48)$$

où $c_0^{(1)}$ est définie par (40).

Proposition 16

Pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction $U_1^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \in W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#})$ solution de (47) qui tend vers 0 à l'infini si et seulement si

$$u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) = \partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) c_0^{(1)} ; \quad (49)$$

avec $c_0^{(1)}$ donnée par (40).

Dans ce cas, pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, $(y_1, y_2) \in \mathcal{B}$, $U_1^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2)$ s'écrit

$$U_1^{\text{NF}}(x_1, y_1, y_2) = \partial_{x_2} u_0^{\text{FF}}(x_1) \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} \mathcal{W}_0^{(1)}(y_1, y_2) , \quad (50)$$

où $\mathcal{W}_0^{(1)}(y_1, y_2) \in W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#})$ est l'unique solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} \mathcal{W}_0^{(1)} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#} , \\ \mathcal{W}_0^{(1)} \quad \text{est T-périodique} , \\ -\partial_{y_2} \mathcal{W}_0^{(1)} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_0^{\#} , \\ \mathcal{W}_0^{(1)} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial \mathcal{D}_{\#} , \\ \left[\mathcal{W}_0^{(1)} \right]_{\text{H}} = -c_0^{(1)} \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} \mathcal{W}_0^{(1)} \right]_{\text{H}} = 1 ; \end{array} \right. \quad (51)$$

avec $\mathcal{W}_0^{(1)}(y_1, y_2) \xrightarrow{y_2 \rightarrow +\infty} 0$.

Remarque 7. Notons que la fonction profil $\mathcal{W}_0^{(1)}(y_1, y_2)$ tend vers 0 quand y_2 tend vers $+\infty$ car la condition de compatibilité (42) est satisfaite.

Construction de U_2^{NF}

D'après le Théorème 11, pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $U_2^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ dans $W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#})$ de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} U_2^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = 2 \partial_{x_1} \partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \partial_{y_1} \mathcal{W}_0^{(1)}(y_1, y_2) \quad \text{dans} \quad \mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#} , \\ U_2^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \quad \text{est T-périodique} , \\ -\partial_{y_2} U_2^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = -ik\gamma \partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{W}_0^{(1)}(y_1, y_2) \quad \text{sur} \quad \Sigma_0^{\#} , \\ U_2^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial \mathcal{D}_{\#} , \\ \left[U_2^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_{\text{H}} = -u_2^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} U_2^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_{\text{H}} = \partial_{x_2} u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) ; \end{array} \right. \quad (52)$$

où nous avons utilisé le fait que $U_0^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2) = 0$ et $U_1^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2) = \partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{W}_0^{(1)}(y_1, y_2)$.

D'après le Théorème 14, cette solution tend vers 0 quand y_2 tend vers $+\infty$ si et seulement si la condition de compatibilité (42) est satisfaite. Cela donne ici

$$\partial_{x_1} \partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) c_1^{(2)} + \partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) c_0^{(2)} + \partial_{x_2} u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) c_0^{(1)} - u_2^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) = 0 ; \quad (53)$$

avec $c_0^{(1)}$ est donnée dans (40),

$$c_0^{(2)} = \frac{-ik\gamma}{T} \int_{\Sigma_0^\#} \mathcal{W}_0^{(1)} \mathcal{N} dy_1 \quad (54)$$

et

$$c_1^{(2)} = \frac{2}{T} \int_{\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#} \partial_{y_1} \mathcal{W}_0^{(1)} \mathcal{N} dy. \quad (55)$$

Proposition 17

Pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction $U_2^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \in W_\#(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#)$ solution de (52) qui tend vers 0 à l'infini si et seulement si

$$u_2^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) = c_0^{(1)} \partial_{x_2} u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) + c_0^{(2)} \partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) + c_1^{(2)} \partial_{x_1} \partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1); \quad (56)$$

où $c_0^{(1)}$ est donnée dans (40), $c_0^{(2)}$ est définie par (54) et $c_1^{(2)}$ est définie par (55).

Dans ce cas, pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, $(y_1, y_2) \in \mathcal{B}$, $U_2^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2)$ s'écrit

$$U_2^{\text{NF}}(x_1, y_1, y_2) = \partial_{x_2} u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{W}_0^{(1)}(y_1, y_2) + \partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{W}_0^{(2)}(y_1, y_2) + \partial_{x_1} \partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{W}_1^{(2)}(y_1, y_2) \quad (57)$$

où

- $\mathcal{W}_0^{(2)}(y_1, y_2) \in W_\#(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#)$ est l'unique solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} \mathcal{W}_0^{(2)} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#, \\ \mathcal{W}_0^{(2)} \text{ est } T\text{-périodique}, \\ -\partial_{y_2} \mathcal{W}_0^{(2)} = -ik\gamma \mathcal{W}_0^{(1)} \quad \text{sur } \Sigma_0^\#, \\ \mathcal{W}_0^{(2)} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{P}_\#, \\ \left[\mathcal{W}_0^{(2)} \right]_{\text{H}} = -c_0^{(2)} \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} \mathcal{W}_0^{(2)} \right]_{\text{H}} = 0; \end{array} \right. \quad (58)$$

avec $\mathcal{W}_0^{(2)}(y_1, y_2) \xrightarrow{y_2 \rightarrow +\infty} 0$.

- $\mathcal{W}_1^{(2)}(y_1, y_2) \in W_\#(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#)$ est l'unique solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} \mathcal{W}_1^{(2)} = 2\partial_{y_1} \mathcal{W}_0^{(1)} \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#, \\ \mathcal{W}_1^{(2)} \text{ est } T\text{-périodique}, \\ -\partial_{y_2} \mathcal{W}_1^{(2)}(y_1, y_2) = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0^\#, \\ \mathcal{W}_1^{(2)} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{P}_\#, \\ \left[\mathcal{W}_1^{(2)} \right]_{\text{H}} = -c_1^{(2)} \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} \mathcal{W}_1^{(2)} \right]_{\text{H}} = 0; \end{array} \right. \quad (59)$$

avec $\mathcal{W}_1^{(2)}(y_1, y_2) \xrightarrow{y_2 \rightarrow +\infty} 0$.

Remarque 8. La fonction profil $\mathcal{W}_0^{(2)}(y_1, y_2)$ tend vers 0 quand y_2 tend vers $+\infty$ car la condition de compatibilité (42) est satisfaite, voir la définition (54) de $c_0^{(2)}$. De même, pour la fonction profil $\mathcal{W}_1^{(2)}(y_1, y_2)$, avec $c_1^{(2)}$ donnée par (55).

3.4.3 Caractérisation des termes de champ proche à tout ordre

En généralisant la technique de construction précédente, nous pouvons trouver une condition de bord pour les termes de champ lointain jusqu'à un certain ordre m qui garantit l'existence des termes de champ proche qui tendent vers 0 à l'infini jusqu'à l'ordre m . Nous pouvons ensuite obtenir une expression semi-explicite pour les termes de champ proche.

Théorème 18

Soit $m \geq 1$. Pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, il existe une famille $\{U_q^{\text{NF}}, \forall q \leq m\}$, où $U_q^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \in W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#})$ est l'unique solution de (29) qui tend vers 0 à l'infini, si et seulement si

$$\forall q \leq m, \quad u_q^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) = \sum_{p=0}^{q-1} C_{q-p}(\partial_{x_1}) \partial_{x_2} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1); \quad (60)$$

où les $C_{q-p}(\partial_{x_1})$ sont donnés en (63).

Dans ce cas, pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, $U_q^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ s'écrit

$$\forall q \leq m, \quad U_q^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2) = \sum_{p=0}^{q-1} \Theta_{q-p}(\mathbf{y}; \partial_{x_1}) \partial_{x_2} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1); \quad (61)$$

où pour tout $p \in [1, m]$, $\eta \mapsto \Theta_p(\cdot; \eta)$ est un polynôme de degré $p-1$ et $\Theta_p(\cdot; \eta)$ est l'unique solution dans $W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#})$ du problème défini par récurrence

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} \Theta_p(\cdot; \eta) = 2\eta \partial_{y_1} \Theta_{p-1}(\cdot; \eta) + \eta^2 \Theta_{p-2}(\cdot; \eta) + k^2 \Theta_{p-2}(\cdot; \eta) = F_{p-1}(\cdot; \eta) \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#}, \\ \Theta_p(\cdot; \eta) \text{ est } \Gamma\text{-périodique}, \\ -\partial_{y_2} \Theta_p(\cdot; \eta) = -ik\gamma \Theta_{p-1}(\cdot; \eta) \quad \text{sur } \Sigma_0^{\#}, \\ \Theta_p(\cdot; \eta) = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{P}_{\#}, \\ \left[\Theta_p(\cdot; \eta) \right]_{\text{H}} = -C_p(\eta) \text{ et } \left[-\partial_{y_2} \Theta_p(\cdot; \eta) \right]_{\text{H}} = \delta_{p;1}; \end{array} \right. \quad (62)$$

avec $\Theta_0 = \Theta_{-1} = \Theta_{-2} = 0$, $\delta_{p;1} = 1$ si $p = 1$ ou $\delta_{p;1} = 0$ si $p \neq 1$ et

$$C_p(\eta) = \frac{1}{\Gamma} \int_{\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#}} F_{p-1}(\eta) \mathcal{N} \, d\mathbf{y} - \frac{ik\gamma}{\Gamma} \int_{\Sigma_0^{\#}} \Theta_{p-1}(\cdot; \eta) \mathcal{N} \, dy_1 + c_0^{(1)} \delta_{p;1} \quad (63)$$

où $c_0^{(1)}$ est définie par (40) et $C_p(\eta)$ est un polynôme de degré $p-1$. Enfin, $\mathbf{y} \mapsto \Theta_p(\mathbf{y}; \eta)$ vérifie (\mathcal{P}_{∞}) .

Remarque 9. D'après les propositions 16 et 17, nous avons

- $\Theta_1(\mathbf{y}; \eta) = \mathcal{W}_0^{(1)}(y_1, y_2)$ et $c_1(\eta) = c_0^{(1)}$, $\forall \eta$.

- $\Theta_2(\mathbf{y}; \eta) = \eta \mathcal{W}_1^{(2)}(y_1, y_2) + \mathcal{W}_0^{(2)}(y_1, y_2)$.

Preuve. Nous démontrons le résultat par récurrence sur m .

Pour $m = 1$, nous avons vu dans le paragraphe précédent que pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction $U_1^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \in W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#})$ solution de (47) qui tend vers 0 à l'infini si et seulement si

$$u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) = c_0^{(1)} \partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) .$$

et que dans ce cas, $U_1^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2) = \mathcal{W}_0^{(1)}(y_1, y_2) \partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1)$. Nous retrouvons bien (60) pour $m = 1$ avec $C_1(\partial_{x_1}) = c_0^{(1)}$ et (61) avec $\Theta_1(\mathbf{y}; \eta) = \mathcal{W}_0^{(1)}(y_1, y_2)$ qui est de degré 0 en η et qui vérifie (\mathcal{P}_{∞}) .

Nous supposons avoir construit une famille de profil $\{U_q^{\text{NF}}, q \leq m-1\}$. Montrons qu'il existe U_m^{NF} solution de (29) qui tend vers 0 à l'infini. Nous supposons que (60) est satisfaite. Pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, l'équation volumique vérifiée par $U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ dans $\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#}$ peut se réécrire en utilisant (61) à l'ordre $m-1$ et $m-2$:

$$\begin{aligned} -\Delta_y U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) &= 2 \partial_{x_1} \partial_{y_1} U_{m-1}^{\text{NF}}(x_1; \cdot) + \partial_{x_1}^2 U_{m-2}^{\text{NF}}(x_1; \cdot) + k^2 U_{m-2}^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \\ &= \sum_{p=0}^{m-2} 2 \partial_{x_1} \partial_{y_1} \left[\Theta_{m-1-p}(\cdot; \partial_{x_1}) \partial_{x_2} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \right] + \sum_{p=0}^{m-3} \partial_{x_1}^2 \left[\Theta_{m-2-p}(\cdot; \partial_{x_1}) \partial_{x_2} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \right] \\ &\quad + k^2 \Theta_{m-2-p}(\cdot; \partial_{x_1}) \partial_{x_2} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \\ &= \sum_{p=0}^{m-2} F_{m-1-p}(\cdot; \partial_{x_1}) \partial_{x_2} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) . \end{aligned}$$

D'autre part, sur $\Sigma_0^{\#}$, l'équation vérifiée par $U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ peut se réécrire en utilisant (61)

$$-\partial_{y_2} U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = \sum_{p=0}^{m-2} -ik\gamma \Theta_{m-1-p}(\cdot; \partial_{x_1}) \partial_{x_2} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) .$$

Nous pouvons alors réécrire le problème vérifié par U_m^{NF} : pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_y U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = \sum_{p=0}^{m-2} F_{m-1-p}(\cdot; \partial_{x_1}) \partial_{x_2} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#} , \\ U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \text{ est T-périodique} , \\ -\partial_{y_2} U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = \sum_{p=0}^{m-2} -ik\gamma \Theta_{m-1-p}(\cdot; \partial_{x_1}) \partial_{x_2} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \quad \text{sur } \Sigma_0^{\#} , \\ U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_{\#} , \\ \left[U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_{\text{H}} = -u_m^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_{\text{H}} = \partial_{x_2} u_{m-1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) . \end{array} \right. \quad (64)$$

Il existe une unique solution dans $W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#})$ car F_{m-1-p} vérifie la propriété (\mathcal{P}_{∞}) . Pour tout $p \leq m-2$, Θ_p vérifie la propriété (\mathcal{P}_{∞}) . Nous avons donc existence de $U_m^{\text{NF}} \in W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#})$ et il existe $C_{U_m}, \tilde{U}_m^{\text{NF}}$ vérifiant la propriété (\mathcal{P}_{∞}) telles que $U_m^{\text{NF}} = C_{U_m} + \tilde{U}_m^{\text{NF}}$.

Pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, l'unique solution $U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ de (64) tend vers 0 à l'infini si et seulement si la condition de compatibilité (42) est satisfaite

$$u_m^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}} (x_1) = \frac{1}{\text{T}} \int_{\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#}} \left[\sum_{p=0}^{m-2} F_{m-1-p}(\mathbf{y}; \partial_{x_1}) \partial_{x_2} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}} (x_1) \right] \mathcal{N} \, d\mathbf{y} - \frac{ik\gamma}{\text{T}} \int_{\Sigma_0^{\#}} \left[\sum_{p=0}^{m-2} \Theta_{m-1-p}(\mathbf{y}; \partial_{x_1}) \partial_{x_2} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}} (x_1) \right] \mathcal{N} \, d\mathbf{y}_1 + c_0^{(1)} \partial_{x_2} u_{m-1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}} (x_1)$$

ce qui est équivalent à

$$u_m^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}} (x_1) = \sum_{p=0}^{m-1} C_{m-p}(\partial_{x_1}) \partial_{x_2} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}} (x_1)$$

avec $\forall p \leq m$, $C_p(\eta)$ donnée par (63). En particulier pour $p = m$, comme $\Theta_{m-1}(\cdot; \eta)$ est de degré $m-2$, $\Theta_{m-2}(\cdot; \eta)$ est de degré $m-3$ et que $F_{m-1}(\cdot; \eta) = 2\eta \partial_{y_1} \Theta_{m-1}(\cdot; \eta) + \eta^2 \Theta_{m-2}(\cdot; \eta) + k^2 \Theta_{m-2}(\cdot; \eta)$ est de degré $m-1$, nous avons que $\eta \mapsto C_m(\eta)$ est de degré $m-1$.

Nous pouvons alors remplacer $u_m^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}} (x_1)$ dans la condition de saut

$$\left[U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_{\text{H}} = -u_m^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}} (x_1) = - \sum_{p=0}^m C_{m-p}(\partial_{x_1}) \partial_{x_2} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}} (x_1) .$$

Nous retrouvons (61) avec Θ_m défini par (62). Comme dit précédemment, $\eta \mapsto F_{m-1}(\cdot; \eta)$ est de degré $m-1$, $\eta \mapsto C_m(\eta)$ est aussi de degré $m-1$ donc $\eta \mapsto \Theta_m(\cdot; \eta)$ est de degré $m-1$.

Enfin comme la condition de compatibilité est satisfaite. Θ_m vérifie la propriété (\mathcal{P}_{∞}) . □

3.4.4 Problèmes vérifiés par les termes de champ lointain

Les conditions aux bords pour les termes de champ lointain obtenues précédemment, garantissant l'existence des termes de champ proche tendant vers 0 à l'infini, permettent de compléter les équations satisfaites par les termes de champ lointains. Nous obtenons ainsi les problèmes vérifiés par u_0^{FF} (65), par u_1^{FF} (69), par u_2^{FF} (73) et à tout ordre (77).

Nous rappelons que $u_{inc} = e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2}$ est une onde plane incidente $k_1 \varepsilon \text{T}$ quasi-périodique.

Construction de u_0^{FF}

Définition 19

En utilisant (4) et la condition aux limites (44) sur $\Sigma_{\varepsilon\text{H}}$, $u_0^{\text{FF}}(x_1, x_2)$ satisfait les équations

$$\begin{cases} -\Delta u_0^{\text{FF}} - k^2 u_0^{\text{FF}} = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times (\varepsilon\text{H}, +\infty) , \\ u_0^{\text{FF}} = 0 & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon\text{H}} , \\ u_0^{\text{FF}} - u_{inc} & \text{est sortant} . \end{cases} \quad (65)$$

Notons que u_{inc} est une onde plane incidente alors u_0^{FF} est \mathcal{C}^∞ et u_0^{FF} va aussi être une onde plane qui s'écrit sous la forme

$$u_0^{FF}(x_1, x_2) = e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} + A_0 e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2(x_2 - \varepsilon H)} .$$

Étant donné que $u_0^{FF} = 0$ sur $\Sigma_{\varepsilon H}$, nous avons

$$e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 \varepsilon H} + A_0 e^{ik_1 x_1} = 0$$

ce qui nous donne

$$A_0 = - e^{ik_2 \varepsilon H} . \quad (66)$$

Proposition 20

Il existe une unique solution de (65) telle que u_0^{FF} est \mathcal{C}^∞ qui s'écrit

$$u_0^{FF}(x_1, x_2) = u_{inc}(x_1, x_2) + A_0 e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2(x_2 - \varepsilon H)} , \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} , \forall x_2 \geq \varepsilon H \quad (67)$$

où A_0 est donné par (66).

Le coefficient de réflexion associé, pour $x_2 = \varepsilon H$, est défini par

$$r_0 = A_0 e^{ik_1 x_1} . \quad (68)$$

Construction de u_1^{FF}

Définition 21

En utilisant (4) et la condition aux limites (48) sur $\Sigma_{\varepsilon H}$, $u_1^{FF}(x_1, x_2)$ satisfait les équations

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{FF} - k^2 u_1^{FF} = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times (\varepsilon H, +\infty) , \\ u_1^{FF} = c_0^{(1)} \partial_{x_2} u_0^{FF} & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H} , \\ u_1^{FF} \text{ est sortant ;} \end{cases} \quad (69)$$

où $c_0^{(1)}$ est définie par (40).

u_1^{FF} correspond uniquement à la partie diffractée et dépend de u_0^{FF} alors u_1^{FF} est \mathcal{C}^∞ . Puisque u_0^{FF} est une onde plane, u_1^{FF} va l'être aussi. Nous cherchons alors u_1^{FF} sous la forme

$$u_1^{FF}(x_1, x_2) = A_1 e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2(x_2 - \varepsilon H)} .$$

Étant donné que $u_1^{FF} = c_0^{(1)} \partial_{x_2} u_0^{FF}$ sur $\Sigma_{\varepsilon H}$, en remplaçant u_1^{FF} par son expression et u_0^{FF} par l'expression (67), nous avons

$$A_1 e^{ik_1 x_1} = c_0^{(1)} (ik_2 e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 \varepsilon H} - A_0 ik_2 e^{ik_1 x_1})$$

ce qui donne

$$A_1 = c_0^{(1)} ik_2 (e^{ik_2 \varepsilon H} - A_0) = 2 c_0^{(1)} ik_2 e^{ik_2 \varepsilon H} . \quad (70)$$

Proposition 22

Il existe une unique solution de (69) telle que u_1^{FF} est \mathcal{C}^∞ qui s'écrit

$$u_1^{\text{FF}}(x_1, x_2) = A_1 e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2(x_2 - \varepsilon H)} \quad , \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \quad , \quad \forall x_2 \geq \varepsilon H \quad (71)$$

où A_1 est donné par (70).

Le coefficient de réflexion associé, pour $x_2 = \varepsilon H$, est défini par

$$r_1 = A_1 e^{ik_1 x_1} \quad . \quad (72)$$

Construction de u_2^{FF}
Définition 23

En utilisant (4) et la condition aux limites (53) sur $\Sigma_{\varepsilon H}$, $u_2^{\text{FF}}(x_1, x_2)$ satisfait les équations

$$\begin{cases} -\Delta u_2^{\text{FF}} - k^2 u_2^{\text{FF}} = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times (\varepsilon H, +\infty) \quad , \\ u_2^{\text{FF}} = c_0^{(1)} \partial_{x_2} u_1^{\text{FF}} + c_0^{(2)} \partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} + c_1^{(2)} \partial_{x_1} \partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H} \quad , \\ u_2^{\text{FF}} \text{ est sortant} \quad ; \end{cases} \quad (73)$$

où $c_0^{(1)}$ est définie par (40), $c_0^{(2)}$ est donnée par (54) et $c_1^{(2)}$ est donnée par (55).

u_2^{FF} correspond uniquement à la partie diffractée et dépend de u_1^{FF} et u_0^{FF} alors u_2^{FF} est \mathcal{C}^∞ . Puisque u_0^{FF} et u_1^{FF} sont des ondes planes, u_2^{FF} va l'être aussi. Nous cherchons alors u_2^{FF} sous la forme

$$u_2^{\text{FF}}(x_1, x_2) = A_2 e^{-ik_2(x_2 - \varepsilon H)} e^{ik_1 x_1} \quad .$$

Étant donné que $u_2^{\text{FF}} = c_0^{(1)} \partial_{x_2} u_1^{\text{FF}} + c_0^{(2)} \partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} + c_1^{(2)} \partial_{x_1} \partial_{x_2} u_0^{\text{FF}}$ sur $\Sigma_{\varepsilon H}$, en remplaçant u_2^{FF} par son expression, u_1^{FF} par l'expression (71) et u_0^{FF} par l'expression (67), nous avons

$$A_2 e^{ik_1 x_1} = -c_0^{(1)} ik_2 A_1 e^{ik_1 x_1} + c_0^{(2)} \left(ik_2 e^{ik_2 \varepsilon H} - ik_2 A_0 e^{ik_1 x_1} \right) + c_1^{(2)} \left(-k_2 k_1 e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 \varepsilon H} + k_2 k_1 A_0 e^{ik_1 x_1} \right)$$

qui se réécrit

$$A_2 e^{ik_1 x_1} = 2k_2 e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 \varepsilon H} \left(c_0^{(1)} k_2 + ic_0^{(2)} - k_1 c_1^{(2)} \right) \quad .$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} A_2 &= k_2 \left(-ic_0^{(1)} A_1 - ic_0^{(2)} A_0 + k_1 c_1^{(2)} A_0 \right) + e^{ik_2 \varepsilon H} k_2 \left(ic_0^{(2)} - k_1 c_1^{(2)} \right) \\ &= 2 k_2 e^{ik_2 \varepsilon H} \left(c_0^{(1)} k_2 + ic_0^{(2)} - k_1 c_1^{(2)} \right) \quad . \end{aligned} \quad (74)$$

Proposition 24

Il existe une unique solution de (73) telle que u_2^{FF} est \mathcal{C}^∞ qui s'écrit, pour $x_2 \geq \varepsilon H$,

$$u_2^{\text{FF}}(x_1, x_2) = A_2 e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2(x_2 - \varepsilon H)} \quad , \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \quad , \quad \forall x_2 \geq \varepsilon H \quad (75)$$

où A_2 est donné par (74).

Le coefficient de réflexion associé, pour $x_2 = \varepsilon H$, est défini par

$$r_2 = A_2 e^{ik_1 x_1} \quad . \quad (76)$$

Caractérisation à tout ordre

Définition 25

u_0^{FF} satisfait (65) et pour $m \geq 1$, en utilisant (4) et la condition aux limites (60) sur $\Sigma_{\varepsilon H}$, le terme de champ lointain u_m^{FF} satisfait les équations

$$\begin{cases} -\Delta u_m^{\text{FF}} - k^2 u_m^{\text{FF}} = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times (\varepsilon H, +\infty) \quad , \\ u_m^{\text{FF}} = \sum_{p=0}^{m-1} C_{m-p}(\partial_{x_1}) \partial_{x_2} u_p^{\text{FF}} & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H} \quad , \\ u_m^{\text{FF}} \text{ est sortant} \quad ; \end{cases} \quad (77)$$

où les $C_{q-p}(\partial_{x_1})$ sont donnés par (63).

Pour $m \geq 1$, u_m^{FF} correspond uniquement à la partie diffractée et dépend de u_0^{FF} et des termes précédents u_{m-p-1}^{FF} , avec $p \leq m-1$, alors u_m^{FF} est \mathcal{C}^∞ . Puisque, pour $p \leq m-1$, u_{m-1-p}^{FF} sont des ondes planes, u_m^{FF} va l'être aussi. Nous cherchons alors u_m^{FF} sous la forme

$$u_m^{\text{FF}}(x_1, x_2) = A_m e^{-ik_2(x_2 - \varepsilon H)} e^{ik_1 x_1} \quad .$$

Proposition 26

Pour tout $m \geq 1$, il existe une unique solution de (77) telle que u_m^{FF} est \mathcal{C}^∞ qui s'écrit, pour $x_2 \geq \varepsilon H$,

$$u_m^{\text{FF}}(x_1, x_2) = A_m e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2(x_2 - \varepsilon H)} \quad , \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \quad , \quad \forall x_2 \geq \varepsilon H \quad (78)$$

où $A_m \in \mathbb{C}$.

Le coefficient de réflexion associé, pour $x_2 = \varepsilon H$, est défini par

$$r_m = A_m e^{ik_1 x_1} \quad . \quad (79)$$

Remarque 10. Nous pouvons rendre explicite l'expression de A_m mais ce ne sera pas utile par la suite.

3.4.5 Estimations d'erreurs sur le développement asymptotique

Nous allons avoir besoin d'estimations sur les termes de champ proche pour établir les estimations d'erreur pour le développement asymptotique.

Théorème 27

Soit $N \in \mathbb{N}$. Supposons que $\forall q \leq N$, u_q^{FF} vérifie la condition de bord (60) de sorte que nous avons existence de la famille $\{U_q^{\text{NF}}, q \leq N\}$ et des Θ_{q-p} , pour $0 \leq p \leq q-1$, fonctions profils solutions de (62) et

$$U_q^{\text{NF}}\left(x_1; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) = \sum_{p=0}^{q-1} \Theta_{q-p}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}; \partial_{x_1}\right) \partial_{x_2} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}}(x_1),$$

alors il existe $C_{q-1}(k_1, k_2)$, qui dépend linéairement de k_2 et d'une forme polynomiale de degré $q-1$ en k_1 , telle que

$$\left\| U_q^{\text{NF}}\left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon\text{H}}^\#)} \leq \varepsilon C_{q-1}(k_1, k_2). \quad (80)$$

De plus, il existe D qui dépend de k_1, k_2 et q telle que

$$\begin{aligned} & \left\| \left[\nabla_{\mathbf{y}} U_q^{\text{NF}} \right] \left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon\text{H}}^\#)} + \left\| U_q^{\text{NF}}\left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon\text{H}}^\#)} + \left\| \partial_{x_1}^2 U_q^{\text{NF}}\left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon\text{H}}^\#)} \\ & + \left\| \left[\mathbf{div}_{\mathbf{x}_1} \nabla_{\mathbf{y}} U_q^{\text{NF}} \right] \left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon\text{H}}^\#)} \leq \varepsilon (D_{q-1}(k_1, k_2)). \quad (81) \end{aligned}$$

Preuve. Pour $1 \leq p \leq m$, $\Theta_{q-p}(\cdot; \eta)$ est un polynôme de degré $q-p-1$ en η alors il peut s'écrire sous la forme

$$\Theta_{q-p}(\cdot; \eta) = \sum_{l=0}^{q-p-1} \mathcal{W}_l(\cdot) \eta^l.$$

avec $\mathcal{W}_l \in W_\#(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^\#)$, $0 \leq l \leq q-p-1$, des fonctions vérifiant des problèmes de type Laplace dans une cellule et vérifiant la propriété (\mathcal{P}_∞) . En effet :

- ★ en prenant $\eta = 0$, nous avons $\Theta_{q-p}(\cdot, 0) = \mathcal{W}_0(\cdot)$ alors \mathcal{W}_0 vérifie un problème de Laplace défini dans une cellule. Comme $\Theta_{q-p}(\cdot; 0)$ vérifie la propriété (\mathcal{P}_∞) , \mathcal{W}_0 vérifie la propriété (\mathcal{P}_∞) .
- ★ en prenant la dérivée de Θ_{q-p} par rapport à η alors $\Theta'_{q-p}(\cdot; \eta) = \mathcal{W}_1(\cdot) + 2\eta\mathcal{W}_2(\cdot) + \dots + (q-p-1)\eta^{q-p-2}\mathcal{W}_{q-p-1}(\cdot)$ et en prenant $\eta = 0$ nous obtenons $\Theta'_{q-p}(\cdot; \eta) = \mathcal{W}_1(\cdot)$. $\mathcal{W}_1 \in W_\#(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^\#)$ vérifie donc la propriété (\mathcal{P}_∞) .

ainsi de suite.

Nous en déduisons

$$\left\| U_q^{\text{NF}}\left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon\text{H}}^\#)} = \left\| \sum_{p=0}^{q-1} \Theta_{q-p}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}; \partial_{x_1}\right) \partial_{x_2} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}}(x_1) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon\text{H}}^\#)} = \left\| \sum_{p=0}^{q-1} \sum_{l=0}^{q-p-1} \mathcal{W}_l\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1}^l \partial_{x_2} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}}(x_1) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon\text{H}}^\#)} \quad (82)$$

où $\mathcal{W}_l \in W_\#(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#)$, \mathcal{W}_l vérifie la propriété (\mathcal{P}_∞) et u_p^{FF} est \mathcal{C}^∞ .

Étudions d'abord, pour $0 \leq l \leq q-1$, la norme

$$\left\| \mathcal{W}_l \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1}^l \partial_{x_2} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^\#)}$$

avec $\partial_{x_2} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) = -ik_2 A_m e^{ik_1 x_1}$. Comme $\partial_{x_1}^l \partial_{x_2} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) = -ik_2 (ik_1)^l A_m e^{ik_1 x_1}$ et

$$\left\| \mathcal{W}_l \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^\#)} = \varepsilon \|\mathcal{W}_l\|_{L^2(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#)},$$

nous en déduisons

$$\left\| \mathcal{W}_l \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \partial_{x_1}^l \partial_{x_2} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^\#)} \leq \varepsilon k_2 |A_p| k_1^l \|\mathcal{W}_l\|_{L^2(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#)}.$$

En appliquant à (82), nous obtenons le résultat.

$$\left\| U_q^{\text{NF}} \left(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^\#)} \leq C \varepsilon k_2 p_{q-1}(k_1).$$

En utilisant la même méthode, nous obtenons l'autre inégalité. □

Théorème 28

Soit $L > H$ et $\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L} := (0, \varepsilon T) \times (0, L)$. Soit u^ε une solution de notre problème de diffraction qui vérifie les équations $(\mathcal{P}_{t,0}^\varepsilon) + (\mathcal{CD}_t)$ dans le domaine $\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Supposons que, pour $m \leq N$, les termes de champ lointain u_m^{FF} vérifient les conditions de bords (60) alors, pour $m \leq N$, les termes de champ proche U_m^{NF} sont donnés par (61). Alors, nous avons

$$\left\| u^\varepsilon(x_1, x_2) - \left(\sum_{m=0}^N \varepsilon^m u_m^{\text{FF}}(x_1, x_2) \chi_{x_2 > \varepsilon H}(x_1, x_2) + \sum_{m=0}^N \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) \right\|_{H^1(\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L})} = O(\varepsilon^{N+1}). \quad (83)$$

Remarque 11. Notons que l'erreur est dans $H^1(\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L})$ car nous montrons que la fonction n'a pas de saut sur $\Sigma_{\varepsilon H}$.

Preuve. Soient $N \in \mathbb{N}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, posons

$$e^\varepsilon(x_1, x_2) = u^\varepsilon(x_1, x_2) - w^\varepsilon(x_1, x_2) \quad (84)$$

où $u^\varepsilon(x_1, x_2)$ est solution du problème $(\mathcal{P}_{t,0}^\varepsilon) + (\mathcal{CD}_t)$ et

$$\begin{aligned} w^\varepsilon(x_1, x_2) &= \sum_{m=0}^N \varepsilon^m u_m^{\text{FF}}(x_1, x_2) + \sum_{m=0}^N \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \quad \text{si } x_2 > \varepsilon H, \\ &= \sum_{m=0}^N \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \quad \text{si } x_2 < \varepsilon H. \end{aligned}$$

Étape 1 : Nous commençons par écrire l'équation et les conditions aux limites vérifiées par e^ε dans $\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^\#$ où $\Sigma_{\varepsilon H}^\# := \{x_1 \in (0, \varepsilon T), x_2 = \varepsilon H\}$.

* Pour $x_2 > \varepsilon H$:

$$\begin{aligned}
 (\Delta + k^2) w^\varepsilon(x_1, x_2) &= (\Delta + k^2) \underbrace{\left(\sum_{m=0}^N \varepsilon^m u_m^{\text{FF}}(x_1, x_2) \right)}_{=0 \text{ d'après (4)}} + (\Delta + k^2) \left(\sum_{m=0}^N \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) \\
 &= \sum_{m=0}^N \varepsilon^m \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_{\mathbf{y}} U_m^{\text{NF}} + \frac{2}{\varepsilon} \partial_{x_1} \partial_{y_1} U_m^{\text{NF}} + \partial_{x_1}^2 U_m^{\text{NF}} + k^2 U_m^{\text{NF}} \right] \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \\
 &= \sum_{m=0}^N \varepsilon^{m-2} \Delta_{\mathbf{y}} U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) + 2 \sum_{m=0}^{N+1} \varepsilon^{m-2} \partial_{x_1} \partial_{y_1} U_{m-1}^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \\
 &\quad + \sum_{m=0}^{N+2} \varepsilon^{m-2} (\partial_{x_1}^2 + k^2) U_{m-2}^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) .
 \end{aligned}$$

En utilisant que (7) nous donne $\Delta_{\mathbf{y}} U_m^{\text{NF}} + 2\partial_{x_1} \partial_{y_1} U_{m-1}^{\text{NF}} + \partial_{x_1}^2 U_{m-2}^{\text{NF}} + k^2 U_{m-2}^{\text{NF}} = 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$ et que $U_m^{\text{NF}} = 0$ pour $m < 0$, nous avons

$$(\Delta + k^2) w^\varepsilon(x_1, x_2) = \underbrace{2\varepsilon^{N-1} \partial_{x_1} \partial_{y_1} U_N^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^{N-1} (\partial_{x_1}^2 + k^2) U_{N-1}^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right)}_{-\varepsilon^{N-1} \Delta_{\mathbf{y}} U_{N+1}^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right)} + \varepsilon^N (\partial_{x_1}^2 + k^2) U_N^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) .$$

En réécrivant

$$\left[\Delta_{\mathbf{y}} U_{N+1}^{\text{NF}} \right] \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) = \varepsilon \left[\mathbf{div} \left(\nabla_{\mathbf{y}} U_{N+1} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) - \mathbf{div}_{x_1} \left(\nabla_{\mathbf{y}} U_{N+1}^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) \right] ,$$

nous obtenons

$$(\Delta + k^2) w^\varepsilon(x_1, x_2) = \varepsilon^N \left[F_{N+1} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) - \mathbf{div} \left[\tilde{F}_{N+1} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right] \right] \quad \text{pour } x_1 \in (0, \varepsilon T) , x_2 > \varepsilon H ; \quad (85)$$

avec

$$F_{N+1} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) = (\partial_{x_1}^2 + k^2) U_{N+1}^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) + \mathbf{div}_{x_1} \left[\nabla_{\mathbf{y}} U_{N+1}^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right] \quad (86)$$

et

$$\tilde{F}_{N+1} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) = \nabla_{\mathbf{y}} U_{N+1}^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) . \quad (87)$$

Comme $\Delta u^\varepsilon(x_1, x_2) + k^2 u^\varepsilon(x_1, x_2) = 0$ pour $x_1 \in (0, \varepsilon T)$ et $x_2 > \varepsilon H$, nous pouvons alors écrire l'équation vérifiée par e^ε

$$\boxed{(\Delta + k^2) e^\varepsilon(x_1, x_2) = -\varepsilon^N \left[F_{N+1} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) - \mathbf{div} \left[\tilde{F}_{N+1} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right] \right]} \quad \text{pour } x_1 \in (0, \varepsilon T) , x_2 > \varepsilon H . \quad (88)$$

* Pour $x_2 < \varepsilon H$, en reprenant les calculs précédents mais sans les termes de champ lointain, nous obtenons la même équation

$$\boxed{(\Delta + k^2) e^\varepsilon(x_1, x_2) = -\varepsilon^N \left[F_{N+1} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) - \mathbf{div} \left[\tilde{F}_{N+1} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right] \right]} \quad \text{pour } x_1 \in (0, \varepsilon T) , x_2 < \varepsilon H . \quad (89)$$

* Sur le bord $\Sigma_{\varepsilon H}^\#$. Dans un premier temps, nous nous intéressons au saut de la trace de w^ε au travers de $\Sigma_{\varepsilon H}^\#$

$$\begin{aligned}
 [w^\varepsilon(x_1, \varepsilon H)]_{\varepsilon H} &= \sum_{m=0}^N \varepsilon^m u_m^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) + \sum_{m=0}^N \varepsilon^m \underbrace{\left[U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, H \right) \right]_{\text{H}}}_{=-u_m^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) \text{ d'après (11)}} = 0 \quad \text{p.p. } x_1 \in (0, \varepsilon T) .
 \end{aligned}$$

Considérons maintenant le saut de la trace normale de w^ε au travers de $\Sigma_{\varepsilon H}^\#$

$$\begin{aligned} [\partial_{x_2} w^\varepsilon(x_1, \varepsilon H)]_{\varepsilon H} &= \sum_{m=0}^N \varepsilon^m \partial_{x_2} u_m^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}^+}(x_1) + \sum_{m=0}^N \varepsilon^{m-1} \underbrace{\left[\partial_{y_2} U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, H \right) \right]_H}_{= -\partial_{x_2} u_{m-1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) \text{ d'après (13)}} = \varepsilon^N \partial_{x_2} u_N^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) \text{ p.p. } x_1 \in (0, \varepsilon T). \end{aligned}$$

En conclusion, comme $[u^\varepsilon]_{\varepsilon H} = 0$ et $[\partial_{x_2} u^\varepsilon]_{\varepsilon H} = 0$, nous avons

$$\begin{aligned} [e^\varepsilon(x_1, \varepsilon H)]_{\varepsilon H} &= 0 \text{ p.p. } x_1 \in (0, \varepsilon T), \\ [\partial_{x_2} e^\varepsilon(x_1, \varepsilon H)]_{\varepsilon H} &= -\varepsilon^N \partial_{x_2} u_N^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) \text{ p.p. } x_1 \in (0, \varepsilon T). \end{aligned} \quad (90)$$

* Sur le bord des inclusions $\partial \mathcal{D}_\#^\varepsilon$, w^ε vérifie

$$w^\varepsilon(x_1, x_2) = \sum_{m=0}^N \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) = 0 \text{ pour } (x_1, x_2) \in \partial \mathcal{D}_\#^\varepsilon$$

et $u^\varepsilon = 0$ sur $\partial \mathcal{D}_\#^\varepsilon$ alors

$$e^\varepsilon(x_1, x_2) = 0 \text{ pour } (x_1, x_2) \in \partial \mathcal{D}_\#^\varepsilon. \quad (91)$$

* Sur le bord $\Sigma_0^\varepsilon = \{x_1 \in (0, \varepsilon T), x_2 = 0\}$, w^ε vérifie

$$-\partial_{x_2} w^\varepsilon(x_1, 0) + ik\gamma w^\varepsilon(x_1, 0) = -\sum_{m=0}^N \varepsilon^{m-1} \partial_{y_2} U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, 0 \right) + ik\gamma \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, 0 \right), \quad x_1 \in (0, \varepsilon T).$$

D'après (10), $\forall m \partial_{y_2} U_m^{\text{NF}}(x_1; y_1, 0) = ik\gamma U_{m-1}^{\text{NF}}(x_1; y_1, 0)$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$, $y_1 \in (0, T)$ ce qui donne

$$-\partial_{x_2} w^\varepsilon(x_1, 0) + ik\gamma w^\varepsilon(x_1, 0) = \varepsilon^N ik\gamma U_N^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, 0 \right) \text{ p.p. } x_1 \in (0, \varepsilon T).$$

Comme $-\partial_{x_2} u^\varepsilon + ik\gamma u^\varepsilon = 0$ sur Σ_0^ε , nous avons

$$-\partial_{x_2} e^\varepsilon(x_1, 0) + ik\gamma e^\varepsilon(x_1, 0) = -\varepsilon^N ik\gamma U_N^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, 0 \right) \text{ p.p. } x_1 \in (0, \varepsilon T). \quad (92)$$

* Pour la quasi-périodicité. Pour $x_2 < \varepsilon H$, nous avons

$$w^\varepsilon(\varepsilon T, x_2) = \sum_{m=0}^N \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \left(\varepsilon T; T, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) = \sum_{m=0}^N \varepsilon^m \sum_{p=0}^{m-1} \Theta_{m-p} \left(T, \frac{x_2}{\varepsilon}; \partial_{x_1} \right) \partial_{x_2} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\varepsilon T).$$

Comme les termes de champ lointain sont $k_1 \varepsilon T$ quasi-périodiques et les fonctions Θ_{m-p} sont T -périodiques, nous avons

$$w^\varepsilon(\varepsilon T, x_2) = \sum_{m=0}^N \varepsilon^m \sum_{p=0}^{m-1} \Theta_{m-p} \left(0, \frac{x_2}{\varepsilon}; \partial_{x_1} \right) e^{ik_1 \varepsilon T} \partial_{x_2} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(0) = e^{ik_1 \varepsilon T} \sum_{m=0}^N \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \left(0; 0, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) = e^{ik_1 \varepsilon T} w^\varepsilon(0, x_2).$$

De même, nous avons $\partial_{x_1} w^\varepsilon(\varepsilon T, x_2) = e^{ik_1 \varepsilon T} \partial_{x_1} w^\varepsilon(0, x_2)$.

Pour $x_2 > \varepsilon H$, en reprenant les calculs précédents et le fait que les termes de champ lointain sont $k_1 \varepsilon T$ quasi-périodique, nous trouvons $w^\varepsilon(\varepsilon T, x_2) = e^{ik_1 \varepsilon T} w^\varepsilon(0, x_2)$ et $\partial_{x_1} w^\varepsilon(\varepsilon T, x_2) = e^{ik_1 \varepsilon T} \partial_{x_1} w^\varepsilon(0, x_2)$.

Finalement, puisque u^ε et w^ε sont $k_1 \varepsilon T$ quasi-périodique, nous avons que

$$e^\varepsilon \text{ est } k_1 \varepsilon T \text{ quasi-périodique.}$$

Nous trouvons donc que e^ε vérifie les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta e^\varepsilon + k^2 e^\varepsilon = -\varepsilon^N [F_{N+1} - \mathbf{div} \tilde{F}_{N+1}] \quad \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^\#, \\ e^\varepsilon \text{ est } k_1 \varepsilon T \text{ quasi-périodique,} \\ -\partial_{x_2} e^\varepsilon + ik\gamma e^\varepsilon = -\varepsilon^N ik\gamma U_N^{\text{NF}} \quad \text{sur } \Sigma_0^\varepsilon, \\ e^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}_\#^\varepsilon, \\ [e^\varepsilon]_{\varepsilon H} = 0 \text{ et } [\partial_{x_2} e^\varepsilon]_{\varepsilon H} = -\varepsilon^N \partial_{x_2} u_N^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}. \end{array} \right. \quad (93)$$

Étape 2 : Formulation variationnelle de (93) dans $\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L}$.

Prenons une fonction test $v \in V = \left\{ v \in H_{k_1}^1(\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L} \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^\#), v = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{D}_\#^\varepsilon \right\}$. Notre problème fait intervenir $\mathbf{div} \tilde{F}_{N+1}$ avec $\tilde{F}_{N+1} = \nabla_{\mathbf{y}} U_{N+1}^{\text{NF}}$ telle que

$$-\int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L} \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^\#} \mathbf{div} \tilde{F}_{N+1} \bar{v} \, dx = \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L} \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^\#} \tilde{F}_{N+1} \cdot \nabla \bar{v} \, dx + ik\gamma \int_{\Sigma_0^\varepsilon} U_N^{\text{NF}} \bar{v} \, dx_1 - \int_{\Sigma_{\varepsilon H}^\#} \partial_{x_2} u_N^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}^\#} \bar{v} \, dx_1 - {}_{H^{-1/2}} \langle \partial_{y_2} U_{N+1}^{\text{NF}}, v \rangle_{H^{1/2}} ;$$

où ${}_{H^{-1/2}} \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{1/2}}$ désigne le crochet de dualité entre $H_{k_1}^{-1/2}(\Sigma_L^{\varepsilon, \#})$ et $H_{k_1}^{1/2}(\Sigma_L^{\varepsilon, \#})$ avec $\Sigma_L^{\varepsilon, \#} := \{x_1 \in (0, \varepsilon T), x_2 = L\}$.

Il est alors possible d'écrire la formulation variationnelle associée au problème vérifié par e^ε dans $\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L} \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^\#$:

$$\text{Trouver } e^\varepsilon \in V \text{ solution de } a^\varepsilon(e^\varepsilon, v) = \varepsilon^N l^\varepsilon(v), \quad \forall v \in V ; \quad (94)$$

où

$$a^\varepsilon(e^\varepsilon, v) = \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L} \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^\#} \nabla e^\varepsilon \cdot \nabla \bar{v} \, dx - k^2 \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L} \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^\#} e^\varepsilon \bar{v} \, dx - {}_{H^{-1/2}} \langle \partial_{x_2} e^\varepsilon, v \rangle_{H^{1/2}} + ik\gamma \int_{\Sigma_0^\varepsilon} e^\varepsilon \bar{v} \, dx_1 ; \quad (95)$$

$$l^\varepsilon(v) = \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L} \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^\#} F_{N+1} \bar{v} \, dx + \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L} \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^\#} \tilde{F}_{N+1} \cdot \nabla \bar{v} \, dx - {}_{H^{-1/2}} \langle \partial_{y_2} U_{N+1}^{\text{NF}}, v \rangle_{H^{1/2}} . \quad (96)$$

Si nous voulons utiliser l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann du chapitre 2, nous avons

$${}_{H^{-1/2}} \langle \partial_{x_2} e^\varepsilon, v \rangle_{H^{1/2}} = {}_{H^{-1/2}} \langle \Lambda_{k_1} e^\varepsilon, v \rangle_{H^{1/2}} - {}_{H^{-1/2}} \langle \partial_{x_2} \left(\sum_{m=0}^N U_m^{\text{NF}} \right), v \rangle_{H^{1/2}} + {}_{H^{-1/2}} \langle \Lambda_{k_1} \left(\sum_{m=0}^N \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \right), v \rangle_{H^{1/2}} .$$

Les termes faisant intervenir les termes de champ proche pourraient être traités en utilisant que $U_m^{\text{NF}} \Big|_{\Sigma_L^{\varepsilon, \#}} = L^{N-1} e^{-\frac{\alpha L}{T}}$.

Pour L assez grand, ces termes sont exponentiellement décroissants. Nous pouvons choisir L pour que $e^{-\frac{\alpha L}{T}} \leq \varepsilon^N$ soit $L \geq -\frac{T}{\alpha} N \ln \varepsilon$. Mais nous ne sommes pas obligés de prendre L assez grand. Nous pouvons utiliser que $\sum_{m=0}^N \varepsilon^m U_m^{\text{NF}}$ vérifie presque Helmholtz et donc vérifie la condition DtN. C'est ce que nous faisons dans la suite.

Dans les étapes 4 et 5 nous aurons besoin de contrôler $\|F_{N+1}\|_{L^2} + \|\tilde{F}_{N+1}\|_{L^2}$, nous avons d'après le théorème 27

$$\begin{aligned} \|F_{N+1}\|_{L^2} + \|\tilde{F}_{N+1}\|_{L^2} &\leq \|\partial_{x_1}^2 U_{N+1}\|_{L^2} + k^2 \|U_{N+1}\|_{L^2} + \|\mathbf{div}_{x_1} [\nabla_{\mathbf{y}} U_{N+1}^{\text{NF}}]\|_{L^2} + \|\nabla_{\mathbf{y}} U_{N+1}\|_{L^2} \\ &\leq \varepsilon C_N(k_1, k_2) ; \end{aligned}$$

où la constante dépend de k_1 , k_2 et N .

Étape 3 : Problème de demi bande avec terme source à support non compact.

Nous avons restreint le problème précédent (93) à un domaine borné $\mathcal{B}_0^{\varepsilon,L}$. Nous ne pouvons pas utiliser directement la condition transparente introduite au chapitre 2 car dans la demi bande $\mathcal{B}_0^{\varepsilon,L}$, e^ε et $\sum_{m=0}^N \varepsilon^m U_m^{\text{NF}}$ plus précisément vérifient une équation de Helmholtz avec un terme source non nul. Mais ce terme source est exponentiellement décroissant : F_{N+1} et \tilde{F}_{N+1} s'expriment à partir du terme de champ proche U_{N+1}^{NF} qui est exponentiellement décroissant car il vérifie la propriété (\mathcal{P}_∞) :

$$U_{N+1}^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) = \sum_{l \neq 0} p_l(y_2) e^{-\frac{2il\pi}{\varepsilon T} (x_2 - \varepsilon H)} e^{\frac{2il\pi}{\varepsilon T} x_1}.$$

Fixons $0 < \beta < \frac{2l\pi}{\varepsilon T}$, nous avons $e^{\beta x_2} U_{N+1}^{\text{NF}} \in L^2$ donc $e^{\beta x_2} F_{N+1} \in L^2$ et $e^{\beta x_2} \tilde{F}_{N+1} \in L^2$.

Nous allons introduire une fonction auxiliaire V_{N+1} qui satisfait

$$\begin{cases} \Delta V_{N+1} + k^2 V_{N+1} = -F_{N+1} + \mathbf{div} \tilde{F}_{N+1} & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L}, \\ V_{N+1} = 0 & \text{sur } \Sigma_L^{\varepsilon,\#}. \end{cases} \quad (97)$$

Il existe bien une unique solution sortante à ce problème mais la justification ne passe pas par une décomposition modale. Elle passe par des espaces à poids, la transformée de Fourier dans ces espaces et la théorie de Kondratiev appliquée aux problèmes de guides d'ondes ; voir par exemple le chapitre 5 de [NP11]. Nous allons maintenant rappeler ces résultats.

Nous introduisons l'espace à poids

$$W_\beta^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L}) = \left\{ u \in H_{loc}^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L}) \text{ telle que } \|e^{-\beta x_2} u\|_{L^2}^2 + \|e^{-\beta x_2} \partial_{x_1} u\|_{L^2}^2 + \|e^{-\beta x_2} \partial_{x_2} u\|_{L^2}^2 < +\infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W_\beta^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L})}^2 = \|e^{-\beta x_2} u\|_{L^2}^2 + \|e^{-\beta x_2} \partial_{x_1} u\|_{L^2}^2 + \|e^{-\beta x_2} \partial_{x_2} u\|_{L^2}^2 ;$$

et $[W_\beta^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L})]'$ est muni de la norme

$$\|f\|_{W_\beta^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L})}' = \sup_{\substack{v \in W_\beta^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L}) \\ \|v\|_{W_\beta^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L})} \neq 0}} \frac{| \langle f, \bar{v} \rangle |}{\|v\|_{W_\beta^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L})}}.$$

$[W_\beta^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L})]'$ contient typiquement des fonctions H^{-1} qui ont une décroissance exponentielle à l'infini. Ainsi $f \in L^2$, $e^{\beta x} f \in L^2$ donc $f \in [W_\beta^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L})]'$.

Dans [NP11], il est prouvé que si $F \in [W_\beta^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L})]'$ il existe une unique solution V dans $W_\beta^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L})$ de

$$-(\Delta + k^2)V = F \quad (*)$$

qui est sortante et qui s'écrit, en utilisant $P = E \left[\frac{\varepsilon T}{2\pi} (k - k_1) \right]$,

$$V = \sum_{m=-P}^P \alpha_m e^{-i\beta m(x_2-L)} e^{i \left(\frac{2m\pi}{\varepsilon T} + k_1 \right) x_1} + \sum_{\gamma_m < \beta} \alpha_m e^{-\gamma_m(x_2-L)} e^{i \left(\frac{2m\pi}{\varepsilon T} + k_1 \right) x_1} + \tilde{V} ; \quad (**)$$

où $\tilde{V} \in W_{-\beta}^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L})$. Nous avons

$$\left(\sum_{|m| \leq P} |\alpha_m|^2 + \sum_{\gamma_m < \beta} |\alpha_m|^2 + \|\tilde{V}\|_{W_{-\beta}^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L})}^2 \right)^{1/2} \leq C \|F\|_{W_\beta^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L})}. \quad (***)$$

Autrement dit, si F est exponentiellement décroissante alors il existe une solution de (*) qui, à une fonction exponentiellement décroissante près, est combinaison linéaire de modes propagatifs sortants et de modes évanescents. De la décomposition (**) et de (***), on déduit que $\forall \alpha < \beta$

$$\begin{aligned} \|e^{-\alpha x_2} V\|_{L^2}^2 &\leq c_1 \sum_{|m| \leq P} |\alpha_m|^2 + c_2 \sum_{\gamma_m \leq \beta} |\alpha_m|^2 + \|e^{-\alpha x_2} \tilde{V}\|_{L^2}^2 \\ &\leq c_1 \sum_{|m| \leq P} |\alpha_m|^2 + c_2 \sum_{\gamma_m \leq \beta} |\alpha_m|^2 + \|e^{-\alpha x_2} e^{-\beta x_2}\|_{L^\infty}^2 \|e^{\beta x_2} \tilde{V}\|_{L^2}^2 \\ &\leq C \|F\|_{W_\beta^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L})}^2 \end{aligned}$$

donc $\|e^{-\alpha x_2} V\|_{L^2} \leq C \|F\|_{W_\beta^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L})}$ et de même, nous avons $\|e^{-\alpha x_2} V\|_{H^1} \leq C \|F\|_{W_\beta^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L})}$.

Nous appliquons ce résultat à (97). $\forall v \in W_\beta^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L})$, nous avons

$$\begin{aligned} \langle F, v \rangle &= \langle -F_{N+1} + \mathbf{div} \tilde{F}_{N+1}, v \rangle \\ &= \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L}} F_{N+1} v \, dx + \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L}} \tilde{F}_{N+1} \nabla v \, dx \\ &= \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L}} e^{\beta x_2} F_{N+1} e^{-\beta x_2} v \, dx + \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L}} e^{\beta x_2} \tilde{F}_{N+1} e^{-\beta x_2} \nabla v \, dx \end{aligned}$$

alors

$$|\langle F, v \rangle| \leq \|e^{\beta x_2} F_{N+1}\|_{L^2} \|e^{-\beta x_2} v\|_{L^2} + \|e^{\beta x_2} \tilde{F}_{N+1}\|_{L^2} \|e^{-\beta x_2} \nabla v\|_{L^2} \leq \|e^{\beta x_2} F_{N+1}\|_{L^2} \|v\|_{W_\beta^1} + \|e^{\beta x_2} \tilde{F}_{N+1}\|_{L^2} \|v\|_{W_\beta^1}.$$

Nous obtenons donc

$$\|F\|_{W_\beta^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L})} \leq \|e^{\beta x_2} F_{N+1}\|_{L^2} + \|e^{\beta x_2} \tilde{F}_{N+1}\|_{L^2}$$

et il existe une unique solution V_{N+1} sortante telle que

$$\|e^{-\alpha x_2} V\|_{L^2} \leq C \left[\|e^{\beta x_2} F_{N+1}\|_{L^2} + \|e^{\beta x_2} \tilde{F}_{N+1}\|_{L^2} \right]. \quad (98)$$

Étape 4 : Réduction au domaine borné $\mathcal{B}_0^{\varepsilon,L} \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^\#$.

La difficulté est que le terme source $(F_{N+1} - \mathbf{div} \tilde{F}_{N+1})$ n'est pas à support compact. Nous ne pouvons pas utiliser directement la condition DtN.

Dans le domaine $\mathcal{B}_0^{\varepsilon,L} := (0, \varepsilon T) \times (L, +\infty)$ situé au dessus de $\Sigma_L^{\varepsilon,\#} = \{x_1 \in (0, \varepsilon T), x_2 = L\}$, nous avons

$$\Delta e^\varepsilon + k^2 e^\varepsilon = -\varepsilon^N [F_{N+1} - \mathbf{div} \tilde{F}_{N+1}] \quad \text{dans} \quad \mathcal{B}_0^{\varepsilon,L}; \quad (99)$$

avec $F_{N+1}, \tilde{F}_{N+1} \in L^2$ telles que $\forall \beta < \frac{2\pi}{\varepsilon T}$ alors $e^{\beta x_2} F_{N+1} \in L^2$ et $e^{\beta x_2} \tilde{F}_{N+1} \in L^2$.

D'après l'étape 3, il existe une unique solution V_{N+1} sortante de (97) telle que

$$(\Delta + k^2)e^\varepsilon - \varepsilon^N V_{N+1} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B}_\infty^{\varepsilon, L} \quad (100)$$

et nous pouvons écrire l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann associé

$$\boxed{(\partial_{x_2} + \Lambda_{k_1})e^\varepsilon = \varepsilon^N \partial_{x_2} V_{N+1} \quad \text{sur } \Sigma_L^{\varepsilon, \#}} \quad (101)$$

La formulation variationnelle se réécrit alors :

$$\text{Trouver } e^\varepsilon \in V \text{ solution de } b^\varepsilon(e^\varepsilon, v) = \varepsilon^N l_{in}^\varepsilon(v) + \varepsilon^N l_{out}^\varepsilon(v), \quad \forall v \in V; \quad (102)$$

où

$$b^\varepsilon(e^\varepsilon, v) = \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L} \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^\#} \nabla e^\varepsilon \cdot \overline{\nabla v} \, dx - k^2 \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L} \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^\#} e^\varepsilon \bar{v} \, dx - {}_{H^{-1/2}} \langle \Lambda_{k_1} e^\varepsilon, v \rangle_{H^{1/2}} + ik\gamma \int_{\Sigma_0^\varepsilon} e^\varepsilon \bar{v} \, dx_1; \quad (103)$$

$$l_{in}^\varepsilon(v) = \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L} \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^\#} F_{N+1} \bar{v} \, dx + \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L} \setminus \Sigma_H^\#} \tilde{F}_{N+1} \overline{\nabla v} \, dx; \quad (104)$$

et

$$l_{out}^\varepsilon(v) = - {}_{H^{-1/2}} \langle \partial_{y_2} U_{N+1}^{NF}, v \rangle_{H^{1/2}}. \quad (105)$$

D'après le Théorème 6 il existe une constante C indépendante de ε telle que

$$\|e^\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L})} \leq C_1 \varepsilon^N \|l_{in}^\varepsilon\| + C_2 \varepsilon^N \|l_{out}^\varepsilon\|, \quad C_1, C_2 > 0.$$

Étape 5 : Contrôle de la norme de l_{in}^ε .

$$|l_{in}^\varepsilon(v)| = \left| \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L} \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^\#} F_{N+1} \bar{v} \, dx + \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L} \setminus \Sigma_H^\#} \tilde{F}_{N+1} \overline{\nabla v} \, dx \right| \leq \|F_{N+1}\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|\tilde{F}_{N+1}\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2}.$$

Nous obtenons donc

$$|l_{in}^\varepsilon(v)| \leq K \varepsilon C_N(k_1, k_2) \|v\|_{H^1}. \quad (106)$$

Étape 6 : Contrôle de la norme de l_{out}^ε .

Nous introduisons une fonction V vérifiant

$$\begin{cases} -(\Delta + 1)V = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^{\varepsilon, L}, \\ V & \text{est } k_1 \varepsilon T \text{ périodique}, \\ V = v & \text{sur } \Sigma_L^{\varepsilon, \#}. \end{cases} \quad (107)$$

Formellement, nous considérons la solution V_{N+1} du problème (97) et V une fonction test qui vérifie le problème (107) alors nous avons

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon, L}} \Delta V_{N+1} \bar{V} \, dx - k^2 \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon, L}} V_{N+1} \bar{V} \, dx = \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon, L}} F_{N+1} \bar{V} \, dx - \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon, L}} \mathbf{div} \tilde{F}_{N+1} \bar{V} \, dx \\ \Leftrightarrow & {}_{H^{-1/2}} \langle \partial_{x_2} V_{N+1}, V \rangle_{H^{1/2}} + \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon, L}} \nabla V_{N+1} \cdot \overline{\nabla V} \, dx - k^2 \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon, L}} V_{N+1} \bar{V} \, dx = \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon, L}} F_{N+1} \bar{V} \, dx + \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon, L}} \tilde{F}_{N+1} \overline{\nabla V} \, dx + {}_{H^{-1/2}} \langle \partial_{y_2} U_{N+1}^{NF}, V \rangle_{H^{1/2}} \\ \Leftrightarrow & {}_{H^{-1/2}} \langle \partial_{x_2} V_{N+1}, v \rangle_{H^{1/2}} = \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon, L}} F_{N+1} \bar{V} \, dx + \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon, L}} \tilde{F}_{N+1} \overline{\nabla V} \, dx - \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon, L}} \nabla V_{N+1} \cdot \overline{\nabla V} \, dx + k^2 \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon, L}} V_{N+1} \bar{V} \, dx + {}_{H^{-1/2}} \langle \partial_{y_2} U_{N+1}^{NF}, v \rangle_{H^{1/2}} \end{aligned}$$

En réalisant une intégration par partie sur le terme $-\int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L}} \nabla V_{N+1} \cdot \overline{\nabla V} \, d\mathbf{x}$ nous avons

$$-\int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L}} \nabla V_{N+1} \cdot \overline{\nabla V} \, d\mathbf{x} = {}_{H^{-1/2}} \langle V_{N+1}, \partial_{x_2} V \rangle_{H^{1/2}} + \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L}} V_{N+1} \Delta V \, d\mathbf{x} = -\int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L}} V_{N+1} V \, d\mathbf{x} .$$

Nous obtenons donc

$${}_{H^{-1/2}} \langle \partial_{x_2} V_{N+1}, v \rangle_{H^{1/2}} = \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L}} F_{N+1} \overline{V} \, d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L}} \tilde{F}_{N+1} \overline{\nabla V} \, d\mathbf{x} + (k^2 - 1) \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L}} V_{N+1} \overline{V} \, d\mathbf{x} + {}_{H^{-1/2}} \langle \partial_{y_2} U_{N+1}^{\text{NF}}, v \rangle_{H^{1/2}} . \quad (108)$$

Nous remplaçons ensuite ${}_{H^{-1/2}} \langle \partial_{x_2} V_{N+1}, v \rangle_{H^{1/2}}$ par (108) dans I_{out}^ε

$$\begin{aligned} I_{out}^\varepsilon(v) &= {}_{H^{-1/2}} \langle \partial_{x_2} V_{N+1}, v \rangle_{H^{1/2}} - {}_{H^{-1/2}} \langle \partial_{y_2} U_{N+1}^{\text{NF}}, v \rangle_{H^{1/2}} \\ &= \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L}} F_{N+1} \overline{V} \, d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L}} \tilde{F}_{N+1} \overline{\nabla V} \, d\mathbf{x} + (k^2 - 1) \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L}} V_{N+1} \overline{V} \, d\mathbf{x} . \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} |I_{out}^\varepsilon(v)| &\leq \|F_{N+1}\|_{L^2} \|V\|_{L^2} + \|\tilde{F}_{N+1}\|_{L^2} \|\nabla V\|_{L^2} + |k^2 - 1| \|e^{-\alpha_0 x_2} V_{N+1}\|_{L^2} \|e^{\alpha_0 x_2} V\|_{L^2} \\ &\leq K \varepsilon C_N(k_1, k_2) \|V\|_{H^1} + C |k^2 - 1| \left[\|e^{\beta x_2} F_{N+1}\|_{L^2} + \|e^{\beta x_2} \tilde{F}_{N+1}\|_{L^2} \right] \|e^{\alpha_0 x_2} V\|_{L^2} \\ &\leq K' \varepsilon C_N(k_1, k_2) \|V\|_{H^1} . \end{aligned}$$

Comme $\|V\|_{H^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L})} \leq \|v\|_{H^{-1/2}(\Sigma_L^{\varepsilon,\#})}$, nous obtenons

$$|I_{out}^\varepsilon(v)| \leq K_1 \varepsilon C_N(k_1, k_2) \|v\|_{H^1} . \quad (109)$$

Finalement, en regroupant l'étape 5 et l'étape 6, nous avons

$$\|e^\varepsilon\|_{H^1}^\varepsilon \leq \varepsilon^{N+1} C k_2 p_N(k_1) . \quad (110)$$

Étape 7 : Contrôle sur toute la bande \mathcal{B} .

Au dessus de $\Sigma_L^{\varepsilon,\#}$, e^ε vérifie

$$\begin{cases} (\Delta + k^2) e^\varepsilon = -\varepsilon^N (F_{N+1} - \mathbf{div} \tilde{F}_{N+1}) & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L} , \\ e^\varepsilon = \varphi^\varepsilon & \text{sur } \Sigma_L^{\varepsilon,\#} , \end{cases}$$

avec $\varphi^\varepsilon = O(\varepsilon^{N+1})$.

e^ε peut s'écrire $e^\varepsilon = \varepsilon^N V_{N+1} + \mathcal{V}(\varphi^\varepsilon)$ avec $\mathcal{V}(\varphi^\varepsilon)$ une décomposition modale, alors

$$\|e^\varepsilon\|_{H^1} \leq \varepsilon^N \|V_{N+1}\|_{H^1} + O(\varepsilon^{N+1}) \leq \varepsilon^N \left(\|F_{N+1}\|_{L^2} + \|\tilde{F}_{N+1}\|_{L^2} \right) + O(\varepsilon^N) \leq \varepsilon^{N+1} C_N(k_1, k_2) + O(\varepsilon^{N+1}) .$$

Nous obtenons donc

$$\|e^\varepsilon\|_{H^1} = O(\varepsilon^{N+1}) .$$

□

Corollaire 29

Soit u^ε une solution de notre problème de diffraction qui vérifie les équations $(P_{t,0}^\varepsilon) + (CD_t)$ dans le domaine $\mathcal{B}_0^{\varepsilon,L}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Supposons que, pour $m \leq N$, les termes de champ lointain u_m^{FF} vérifient les conditions de bords (60) alors, pour $m \leq N$, les termes de champ proche U_m^{NF} sont donnés par (61). Soit $\varphi_0 = e^{ik_1 x_1}$, alors nous avons

$$\left| \left(u^\varepsilon \Big|_{\Sigma_L^{\varepsilon,\#}}, \varphi_0 \right) \right| = \left| \left(\sum_{m=0}^N u_m^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_L^{\varepsilon,\#}}, \varphi_0 \right) \right| + O(\varepsilon^{N+1}). \quad (111)$$

Pour L assez grand, nous avons

$$\left(u^\varepsilon \Big|_{\Sigma_L^{\varepsilon,\#}}, \varphi_0 \right) = \left(\sum_{m=0}^N u_m^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_L^{\varepsilon,\#}}, \varphi_0 \right) + O(\varepsilon^{N+1}). \quad (112)$$

Preuve. D'après la preuve du Théorème précédent, nous avons pour $x_2 \geq \varepsilon H$

$$\begin{aligned} u^\varepsilon \Big|_{\Sigma_L^{\varepsilon,\#}} - w^\varepsilon \Big|_{\Sigma_L^{\varepsilon,\#}} &= O(\varepsilon^{N+1}) \\ \Leftrightarrow u^\varepsilon \Big|_{\Sigma_L^{\varepsilon,\#}} - \sum_{m=0}^N \varepsilon^m u_m^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_L^{\varepsilon,\#}} - \sum_{m=0}^N \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \Big|_{\Sigma_L^{\varepsilon,\#}} &= O(\varepsilon^{N+1}). \end{aligned}$$

En utilisant la forme explicite de u_m^{FF} donnée par (78) et la forme semi-explicite de U_m^{NF} donnée par (61), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} u^\varepsilon \Big|_{\Sigma_L^{\varepsilon,\#}} - e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 L} - \sum_{m=0}^N \varepsilon^m \left[A_m e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2(L-\varepsilon H)} \right] + \sum_{m=0}^N \varepsilon^m \left[-\Theta_m \left(y_1, \frac{L}{\varepsilon}; \partial_{x_1} \right) ik_2 e^{ik_1 x_1 + ik_2 \varepsilon H} \right. \\ \left. + \sum_{p=0}^{m-1} \Theta_{m-p} \left(y_1, \frac{L}{\varepsilon}; \partial_{x_1} \right) ik_2 A_p e^{ik_1 x_1} \right] &= O(\varepsilon^{N+1}). \end{aligned}$$

Comme $\forall q, \Theta_q$ satisfait la propriété (\mathcal{P}_∞) , nous avons $\Theta_q(y_1, y_2) = \sum_{l \neq 0} p_l(y_2) e^{-\frac{2|l|\pi}{T}(y_2 - \frac{L}{\varepsilon})} e^{\frac{2il\pi}{T} y_1}$.

Revenons à l'équation $u^\varepsilon \Big|_{\Sigma_L^{\varepsilon,\#}} - \sum_{m=0}^N \varepsilon^m u_m^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_L^{\varepsilon,\#}} - \sum_{m=0}^N \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \Big|_{\Sigma_L^{\varepsilon,\#}} = O(\varepsilon^{N+1})$. Nous multiplions par $\overline{\varphi_0}$ et nous intégrons sur $\Sigma_L^{\varepsilon,\#}$:

$$\int_{\Sigma_L^{\varepsilon,\#}} u^\varepsilon \overline{\varphi_0} dx_1 - \int_{\Sigma_L^{\varepsilon,\#}} \left(\sum_{m=0}^N \varepsilon^m u_m^{\text{FF}} \right) \overline{\varphi_0} dx_1 - \int_{\Sigma_L^{\varepsilon,\#}} \left(\sum_{m=0}^N \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \right) \overline{\varphi_0} dx_1 = C_0 O(\varepsilon^{N+1}).$$

Regardons en détail $-\int_{\Sigma_L^{\varepsilon,\#}} \left(\sum_{m=0}^N \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \right) \overline{\varphi_0} dx_1$

$$-\int_{\Sigma_L^{\varepsilon,\#}} \left(\sum_{m=0}^N \varepsilon^m U_m^{\text{NF}} \right) \overline{\varphi_0} dx_1 = \int_{\Sigma_L^{\varepsilon,\#}} \sum_{m=0}^N \varepsilon^m \left[-\Theta_m \left(y_1, \frac{L}{\varepsilon}; \partial_{x_1} \right) ik_2 e^{ik_1 x_1 + ik_2 \varepsilon H} + \sum_{p=0}^{m-1} \Theta_{m-p} \left(y_1, \frac{L}{\varepsilon}; \partial_{x_1} \right) ik_2 A_p e^{ik_1 x_1} \right] \overline{\varphi_0} dx_1.$$

Nous avons d'une part,

$$\begin{aligned} - \int_{\Sigma_L^{\varepsilon, \#}} \sum_{m=0}^N \varepsilon^m \Theta_m(y_1, \frac{L}{\varepsilon}; \partial_{x_1}) i k_2 e^{i k_1 x_1 + i k_2 \varepsilon H} \overline{\varphi_0} dx_1 &= - \int_{\Sigma_L^{\varepsilon, \#}} \sum_{m=0}^N \varepsilon^m \sum_{l \neq 0} p_l \left(\frac{L}{\varepsilon} \right) e^{\frac{2il\pi}{\varepsilon T} x_1} i k_2 e^{i k_2 \varepsilon H} dx_1 \\ &= - i k_2 e^{i k_2 \varepsilon H} \sum_{m=0}^N \varepsilon^m \sum_{l \neq 0} p_l \left(\frac{L}{\varepsilon} \right) \underbrace{\int_{\Sigma_L^{\varepsilon, \#}} e^{\frac{2il\pi}{\varepsilon T} x_1} dx_1}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_L^{\varepsilon, \#}} \sum_{m=0}^N \varepsilon^m \sum_{p=0}^{m-1} \Theta_{m-p}(y_1, \frac{L}{\varepsilon}; \partial_{x_1}) i k_2 A_p e^{i k_1 x_1} \overline{\varphi_0} dx_1 &= \int_{\Sigma_L^{\varepsilon, \#}} \sum_{m=0}^N \varepsilon^m \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{l \neq 0} p_l \left(\frac{L}{\varepsilon} \right) e^{\frac{2il\pi}{\varepsilon T} x_1} i k_2 A_p dx_1 \\ &= i k_2 \sum_{m=0}^N \varepsilon^m \sum_{p=0}^{m-1} A_p \sum_{l \neq 0} p_l \left(\frac{L}{\varepsilon} \right) \underbrace{\int_{\Sigma_L^{\varepsilon, \#}} e^{\frac{2il\pi}{\varepsilon T} x_1} dx_1}_{=0} = 0 . \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\left(u^\varepsilon \Big|_{\Sigma_L^{\varepsilon, \#}}, \varphi_0 \right) - \left(\sum_{m=0}^N u_m^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_L^{\varepsilon, \#}}, \varphi_0 \right) = O(\varepsilon^{N+1}) .$$

□

Corollaire 30

Pour toute bande tronquée $\mathcal{B}_{\varepsilon H}^{\varepsilon, L'} := (0, \varepsilon T) \times (\varepsilon H, L')$ de $(0, \varepsilon T) \times (\varepsilon H, +\infty)$, il existe $C_{L'}$ qui dépend de $\mathcal{B}_{\varepsilon H}^{\varepsilon, L'}$ telle que

$$\left\| u^\varepsilon(x_1, x_2) - \sum_{m=0}^N \varepsilon^m u_m^{\text{FF}}(x_1, x_2) \right\|_{H^1(\mathcal{B}_{\varepsilon H}^{\varepsilon, L'})} \leq C_{L'} \varepsilon^{N+1} . \quad (113)$$

Preuve. En effet, loin des particules, quand x_2 devient de plus en plus grand, les termes de champ lointain sont censés représenter le comportement macroscopique de la solution. Les termes de champ proche sont supposés disparaître quand y_2 tend vers l'infini c'est-à-dire $\lim_{y_2 \rightarrow +\infty} U_m^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2) = 0$. Nous retrouvons alors les mêmes résultats que le Théorème et le Corollaire en utilisant uniquement les termes de champ lointain dans l'espace $\mathcal{B}_{\infty}^{\varepsilon, L}$. □

3.4.6 Modèles effectifs

Soit on construit les termes de champ lointain de façon incrémentable, soit on utilise le modèle qui va approcher la série tronquée de champs lointains. Ceci peut être utile pour l'étude de géométrie plus générale. Le fait de prendre un modèle approché permet d'avoir une approximation directe jusqu'à un certain ordre des coefficients de réflexion.

Plus précisément, le modèle à l'ordre 1 est construit à partir de u_0^{FF} satisfaisant les équations

$$\begin{cases} -\Delta u_0^{\text{FF}} - k^2 u_0^{\text{FF}} = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times (\varepsilon H, +\infty) , \\ u_0^{\text{FF}} = 0 & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H} , \\ u_0^{\text{FF}} - u_{inc} & \text{est sortant .} \end{cases}$$

Les particules et la condition d'impédance posée sur l'objet sont remplacées par un plan conducteur sur $\Sigma_{\varepsilon H}$. Cette condition d'impédance effective ne permet donc pas de prendre en compte les particules.

Nous proposons alors un modèle à l'ordre 2. Ce modèle est construit à partir de u_0^{FF} et u_1^{FF} . Nous souhaitons avoir une approximation de $u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}}$. Pour cela, nous reprenons les conditions de bords vérifiées par u_0^{FF} et u_1^{FF} données par (44) et (48)

$$\begin{cases} u_0^{\text{FF}} = 0 & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H} ; \\ u_1^{\text{FF}} = c_0^{(1)} \partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H} . \end{cases}$$

En prenant une combinaison linéaire des deux conditions, nous avons :

$$(u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}}) = \varepsilon c_0^{(1)} \partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} \quad \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H} . \quad (114)$$

De plus, comme u_0^{FF} et u_1^{FF} vérifient l'équation de Helmholtz, nous avons

$$-\Delta(u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}}) - k^2(u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}}) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \times (\varepsilon H, +\infty) . \quad (115)$$

Définition 31

Soit v_2^ε satisfaisant

$$\begin{cases} -\Delta v_2^\varepsilon - k^2 v_2^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times (\varepsilon H, +\infty) , \\ v_2^\varepsilon = \varepsilon c_0^{(1)} \partial_{x_2} v_2^\varepsilon & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H} , \\ v_2^\varepsilon - u_{inc} & \text{est sortant ;} \end{cases} \quad (116)$$

avec $c_0^{(1)}$ définie dans (40).

Remarque 12. Nous sommes passés d'une condition de Dirichlet pour le modèle à l'ordre 1 à une condition de Robin pour le modèle à l'ordre 2.

Proposition 32

Il existe une unique solution de (116) qui s'écrit

$$v_2^\varepsilon(x_1, x_2) = A_2^\varepsilon e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2(x_2 - \varepsilon H)} + u_{inc}(x_1, x_2) \quad \text{pour } x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \geq \varepsilon H ; \quad (117)$$

avec $A_2^\varepsilon = \frac{ik_2 \varepsilon c_0^{(1)} - 1}{ik_2 \varepsilon c_0^{(1)} + 1} \exp(ik_2 \varepsilon H)$ où $c_0^{(1)}$ est définie dans (40) et

$$\left| A_2^\varepsilon - (A_0 + \varepsilon A_1) \right| \leq C \varepsilon^2 . \quad (118)$$

Le coefficient de réflexion associé, pour $x_2 = \varepsilon H$, est défini par

$$r_2^\varepsilon = A_2^\varepsilon e^{ik_1 x_1} . \quad (119)$$

Preuve. Notons que $u_{inc} = e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2}$ est une onde plane incidente alors v_2^ε va aussi être une onde plane qui s'écrit sous la forme

$$v_2^\varepsilon(x_1, x_2) = e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} + A_2^\varepsilon e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2(x_2 - \varepsilon H)} .$$

Étant donné que $v_2^\varepsilon = \varepsilon c_0^{(1)} \partial_{x_2} v_2^\varepsilon$ sur $\Sigma_{\varepsilon H}$, nous avons

$$e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 \varepsilon H} + A_2^\varepsilon e^{ik_1 x_1} = \varepsilon c_0^{(1)} \left(ik_2 e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 \varepsilon H} - ik_2 A_2^\varepsilon e^{ik_1 x_1} \right)$$

ce qui donne

$$A_2^\varepsilon = \frac{ik_2 \varepsilon c_0^{(1)} - 1}{ik_2 \varepsilon c_0^{(1)} + 1} \exp(ik_2 \varepsilon H) .$$

Regardons $A_2^\varepsilon - (A_0 + \varepsilon A_1)$

$$A_2^\varepsilon - (A_0 + \varepsilon A_1) = \frac{ik_2 \varepsilon c_0^{(1)} - 1}{ik_2 \varepsilon c_0^{(1)} + 1} e^{ik_2 \varepsilon H} - \left(-e^{ik_2 \varepsilon H} + 2\varepsilon c_0^{(1)} ik_2 e^{ik_2 \varepsilon H} \right) = 2\varepsilon^2 (c_0^{(1)})^2 k_2 e^{ik_2 \varepsilon H}$$

nous avons alors

$$\left| A_2^\varepsilon - (A_0 + \varepsilon A_1) \right| \leq C(k_2) \varepsilon^2 .$$

□

Comme nous avons construit u_2^{FF} , nous pouvons aussi proposer un modèle à l'ordre 3. Ce modèle est construit à partir de u_0^{FF} , u_1^{FF} et u_2^{FF} . Nous souhaitons avoir une approximation de $u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}} + \varepsilon^2 u_2^{\text{FF}}$.

Définition 33

Soit v_3^ε satisfaisant

$$\begin{cases} -\Delta v_3^\varepsilon - k^2 v_3^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times (\varepsilon H, +\infty) , \\ v_3^\varepsilon = \varepsilon(c_0^{(1)} + \varepsilon c_0^{(2)}) \partial_{x_2} v_3^\varepsilon + \varepsilon^2 c_1^{(2)} \partial_{x_1} \partial_{x_2} v_3^\varepsilon & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H} , \\ v_3^\varepsilon - u_{inc} & \text{est sortant ;} \end{cases} \quad (120)$$

où $c_0^{(1)}$ est donné par (40), $c_0^{(2)}$ est donné par (54) et $c_1^{(2)}$ est donné par (55).

Proposition 34

Il existe une unique solution de (120), si $ik_2\varepsilon(c_0^{(1)} + \varepsilon c_0^{(2)}) - \varepsilon^2 k_1 k_2 c_1^{(2)} + 1 \neq 0$, qui s'écrit

$$v_3^\varepsilon(x_1, x_2) = A_3^\varepsilon e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2(x_2 - \varepsilon H)} + u_{inc}(x_1, x_2) \quad \text{pour } x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \geq \varepsilon H ; \quad (121)$$

avec $A_3^\varepsilon = \frac{ik_2\varepsilon(c_0^{(1)} + \varepsilon c_0^{(2)}) - \varepsilon^2 k_1 k_2 c_1^{(2)} - 1}{ik_2\varepsilon(c_0^{(1)} + \varepsilon c_0^{(2)}) - \varepsilon^2 k_1 k_2 c_1^{(2)} + 1} \exp(ik_2\varepsilon H)$ où $c_0^{(1)}$ est donnée par (40), $c_0^{(2)}$ est donnée par (54), $c_1^{(2)}$ est donnée par (55) et

$$\left| A_3^\varepsilon - (A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2) \right| \leq C \varepsilon^2 . \quad (122)$$

Le coefficient de réflexion associé, pour $x_2 = \varepsilon H$, est défini par

$$r_3^\varepsilon = A_3^\varepsilon e^{ik_1 x_1} . \quad (123)$$

Preuve. Notons que $u_{inc} = e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2}$ est une onde plane incidente alors v_3^ε va aussi être une onde plane qui s'écrit sous la forme

$$v_3^\varepsilon(x_1, x_2) = e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} + A_3^\varepsilon e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2(x_2 - \varepsilon H)} .$$

Étant donné que $v_3^\varepsilon = \varepsilon(c_0^{(1)} + \varepsilon c_0^{(2)}) \partial_{x_2} v_3^\varepsilon + \varepsilon^2 c_1^{(2)} \partial_{x_1} \partial_{x_2} v_3^\varepsilon$ sur $\Sigma_{\varepsilon H}$, nous avons

$$e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 \varepsilon H} + A_3^\varepsilon e^{ik_1 x_1} = \varepsilon(c_0^{(1)} + \varepsilon c_0^{(2)}) \left(ik_2 e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 \varepsilon H} - ik_2 A_3^\varepsilon e^{ik_1 x_1} \right) + \varepsilon^2 c_1^{(2)} \left(-k_1 k_2 e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 \varepsilon H} + k_1 k_2 A_3^\varepsilon e^{ik_1 x_1} \right)$$

ce qui donne

$$A_3^\varepsilon = \frac{ik_2\varepsilon(c_0^{(1)} + \varepsilon c_0^{(2)}) - \varepsilon^2 k_1 k_2 c_1^{(2)} - 1}{ik_2\varepsilon(c_0^{(1)} + \varepsilon c_0^{(2)}) - \varepsilon^2 k_1 k_2 c_1^{(2)} + 1} \exp(ik_2\varepsilon H) .$$

□

3.4.7 Estimations d'erreurs sur le modèle effectif à l'ordre 2

Théorème 35

Soit u^ε une solution de notre problème de diffraction $(P_{t,0}^\varepsilon) + (CD_t)$. Nous notons $v_2^\varepsilon \approx u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}}$ l'approximation à l'ordre 2 de la solution. Nous avons alors, pour tout ouvert borné \mathcal{O} de $(0, \varepsilon T) \times (\varepsilon H, +\infty)$,

$$\|u^\varepsilon(x_1, x_2) - v_2^\varepsilon(x_1, x_2)\|_{H^1(\mathcal{O})} = O(\varepsilon^2). \quad (124)$$

Preuve. Nous décomposons $\|u^\varepsilon(x_1, x_2) - v_2^\varepsilon(x_1, x_2)\|_{H^1(\mathcal{O})}$ de sorte que

$$\|u^\varepsilon(x_1, x_2) - v_2^\varepsilon(x_1, x_2)\|_{H^1(\mathcal{O})} = \|u^\varepsilon(x_1, x_2) - (u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}})(x_1, x_2)\|_{H^1(\mathcal{O})} + \|(u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}})(x_1, x_2) - v_2^\varepsilon(x_1, x_2)\|_{H^1(\mathcal{O})}.$$

En utilisant les estimations d'erreurs sur le développement asymptotique, nous avons montré que

$$\|u^\varepsilon(x_1, x_2) - (u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}})(x_1, x_2)\|_{H^1(\mathcal{O})} = O(\varepsilon^2).$$

Nous regardons $e_2^\varepsilon = (u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}}) - v_2^\varepsilon$ qui vérifie le problème

$$\begin{cases} -\Delta e_2^\varepsilon - k^2 e_2^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times (\varepsilon H, +\infty), \\ e_2^\varepsilon - \varepsilon c_0^{(1)} \partial_{x_2} e_2^\varepsilon = O(\varepsilon^2) & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H}, \\ e_2^\varepsilon e^{-ik_1 x_1} & \text{est indépendant de } x_1 \\ e_2^\varepsilon & \text{est sortant;} \end{cases} \quad (125)$$

Comme u_0^{FF} , u_1^{FF} et v_2^ε sont des ondes planes, e_2^ε est aussi une onde plane qui s'écrit sous la forme

$$e_2^\varepsilon(x_1, x_2) = \mathcal{A}_e(\varepsilon) e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2(x_2 - \varepsilon H)}. \quad (126)$$

Étant donné que $e_2^\varepsilon - \varepsilon c_0^{(1)} \partial_{x_2} e_2^\varepsilon = O(\varepsilon^2)$ sur $\Sigma_{\varepsilon H}$, nous avons

$$\mathcal{A}_e(\varepsilon) e^{ik_1 x_1} + \varepsilon c_0^{(1)} ik_2 \mathcal{A}_e(\varepsilon) e^{ik_1 x_1} = O(\varepsilon^2)$$

ce qui donne

$$\mathcal{A}_e(\varepsilon) = \frac{1}{1 + \varepsilon ik_2 c_0^{(1)}} e^{-ik_1 x_1} O(\varepsilon^2).$$

Nous obtenons alors

$$|e_2^\varepsilon| \leq |\mathcal{A}_e(\varepsilon)| \leq C \varepsilon^2$$

et donc

$$\|e_2^\varepsilon\|_{H^1} = O(\varepsilon^2).$$

□

Dès l'instant où la solution du modèle effectif est construite, nous pouvons reconstruire le terme de champ proche $U_1^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2) = \partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) \mathcal{W}_0^{(1)}(y_1, y_2)$ en remplaçant $\partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1)$ par $\partial_{x_2} v_2^\varepsilon \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1)$. Nous pouvons alors définir l'estimation d'erreur de la solution reconstruite.

Corollaire 36

Soit u^ε une solution de notre problème de diffraction $(P_{t,0}^\varepsilon) + (CD_t)$. Soit v_2^ε l'approximation à l'ordre 2 de notre solution construite précédemment. Nous avons alors, pour tout ouvert \mathcal{O} de \mathcal{D}^ε ,

$$\left\| u^\varepsilon(x_1, x_2) - v_2^\varepsilon(x_1, x_2) - \varepsilon \partial_{x_2} v_2^\varepsilon \Big|_{\Sigma_{\text{cH}}} (x_1) \mathcal{W}_0^{(1)} \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right\|_{H^1(\mathcal{O})} = O(\varepsilon^2). \quad (127)$$

3.5 Étude du cas des condition de Neumann sur les particules

Cette section est consacrée à la situation où nous imposons une condition de Neumann sur le bord des particules. Comme dans la section précédente, nous commençons par l'étude du caractère bien posé des problèmes de champ proche qui sont des problèmes de type Laplace posés dans une demi-bande infinie. Contrairement au cas Dirichlet, les problèmes ne sont bien posés dans un cadre variationnel que si une condition de compatibilité est satisfaite. Si c'est le cas, la solution est définie à une constante près et la constante est choisie pour que la solution tende vers 0 à l'infini. Nous pouvons ainsi caractériser les termes à tout ordre et justifier le développement asymptotique à l'aide d'estimations d'erreurs. Pour finir cette section, nous proposons un modèle effectif à l'ordre 2 et donnons une estimation d'erreur de ce modèle.

3.5.1 Caractère bien posé des problèmes de champ proche

Les problèmes de champ proche $(15) + (17)$ peuvent s'écrire sous la forme : pour $m \geq 0$

$$\text{p.p. } x_1 \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -\Delta_{\mathbf{y}} U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = F_{m-1}(x_1; \cdot) & \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#}, \\ U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \text{ est T-périodique,} \\ -\partial_{y_2} U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = G_{1,m-1}(x_1; \cdot) & \text{sur } \Sigma_0^{\#}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \cdot \vec{n} = G_{2,m-1}(x_1; \cdot) & \text{sur } \partial \mathcal{P}_{\#}, \\ \left[U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_{\text{H}} = \alpha_m^{\text{D}}(x_1) \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_{\text{H}} = \alpha_{m-1}^{\text{N}}(x_1); \end{cases} \quad (128)$$

où $F_{m-1}(x_1; \cdot)$ dépend des termes précédents $U_{m-1}^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ et $U_{m-2}^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$. Si $U_{m-1}^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ et $U_{m-2}^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ décroissent à l'infini alors $F_{m-1}(x_1; \cdot)$ aussi. $G_{1,m-1}(x_1; \cdot)$ dépend de la trace de $U_{m-1}^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ sur $\Sigma_0^{\#}$, nous avons $G_{1,m-1}(x_1; \cdot) \in L^2(\Sigma_0^{\#})$. $G_{2,m-1}(x_1; \cdot)$ dépend de la dérivée par rapport à x_1 de $U_{m-1}^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ et de la composante n_1 de la normale, nous avons $G_{2,m-1}(x_1; \cdot) \in L^2(\partial \mathcal{P}_{\#})$. Quant à $\alpha_m^{\text{D}}(x_1)$, elle dépend de $u_m^{\text{FF}}(x_1)$ et $\alpha_{m-1}^{\text{D}}(x_1)$ dépend de $\partial_{x_2} u_{m-1}^{\text{FF}}(x_1)$. De plus, $\alpha_m^{\text{D}}(x_1)$ et $\alpha_{m-1}^{\text{N}}(x_1)$ sont des fonctions indépendantes de y_1 .

Dans le système d'équations (128) , x_1 joue le rôle d'un paramètre. Dans ce qui suit, nous omettons dans un premier temps la variable x_1 pour simplifier les notations et nous nous intéressons au caractère bien posé des problèmes qui s'écrivent sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta U = F \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#, \\ U \text{ est } T\text{-périodique}, \\ -\partial_{y_2} U = G_1 \quad \text{sur } \Sigma_0^\#, \\ \nabla U \cdot \vec{n} = G_2 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_\#, \\ [U]_H = \alpha^D \quad \text{et} \quad [-\partial_{y_2} U]_H = \alpha^N. \end{array} \right. \quad (129)$$

Ce problème est de type Laplace dans une demi-bande. Contrairement au cas Dirichlet, ce problème n'est pas toujours bien posé dans $W_\#(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#)$ dont nous rappelons la définition

$$W_\#(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#) = \left\{ u \in H_{loc}^1(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#), \nabla u \in L^2(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#), \frac{u}{\sqrt{1+y_2^2}} \in L^2(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#) \text{ et } u|_{\Gamma_+} = u|_{\Gamma_-} \right\}.$$

En effet, il est évident qu'il n'y a pas toujours unicité (les constantes sont dans le noyau de l'opérateur associé à (129) dans $W_\#(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#)$). Et il n'y a pas toujours existence. Ce problème relève de l'alternative de Fredholm. Pour le démontrer, nous avons besoin de restreindre le problème à un domaine borné. Pour ce faire, nous allons supposer que F vérifie la propriété (\mathcal{P}_∞) (nous démontrerons dans la suite que les termes sources pour nos champs proches vérifient la propriété (\mathcal{P}_∞)) et nous utilisons les résultats de la section 3.3 où nous avons montré que toute fonction vérifiant (129) avec F vérifiant (\mathcal{P}_∞) vérifie

$$\partial_{y_2} U + \Lambda U = \partial_{y_2} U_{part} \quad \text{sur } \Sigma_L^\#; \quad (130)$$

où U_{part} est une fonction qui ne dépend que de $F|_{\mathcal{B}_\infty^L}$ et $\int_{\Sigma_L^\#} \partial_{y_2} U_{part} dy_1 = 0$.

Nous rappelons de plus, que $H_\#^{1/2}(\Sigma_P^\#)$ est l'espace des traces des fonctions de $W_\#(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#)$ sur $\Sigma_P^\#$

$$H_\#^{1/2}(\Sigma_P^\#) = \left\{ u|_{\Sigma_P^\#}, u \in W_\#(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#) \right\}$$

et $H_\#^{-1/2}(\Sigma_P^\#) = \left(H_\#^{1/2}(\Sigma_P^\#) \right)'$ le dual de $H_\#^{1/2}(\Sigma_P^\#)$. Nous utilisons la notation $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_\#^{1/2}(\Sigma_P^\#)}$ pour le crochet de dualité entre $H_\#^{1/2}(\Sigma_P^\#)$ et $H_\#^{-1/2}(\Sigma_P^\#)$.

Proposition 37

Soit $F \in L^2(\mathcal{B})$ vérifiant (\mathcal{P}_∞) , $G_1 \in H_{\#}^{-1/2}(\Sigma_0^{\#})$, $G_2 \in H_{\#}^{-1/2}(\partial\mathcal{P}_{\#})$, $\alpha^D, \alpha^N \in \mathbb{R}$. Si U est solution de (129) dans $W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^{\#})$ alors $U_L := U|_{\mathcal{B}_\infty^L}$ est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta U_L = F \quad \text{dans } \mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^{\#}, \\ U_L \text{ est } T\text{-périodique}, \\ -\partial_{y_2} U_L = G_1 \quad \text{sur } \Sigma_0^{\#}, \\ \nabla U_L \cdot \vec{n} = G_2 \quad \text{sur } \partial\mathcal{P}_{\#}, \\ [U_L]_H = \alpha^D \quad \text{et} \quad [-\partial_{y_2} U_L]_H = \alpha^N, \\ \partial_{y_2} U_L + \Lambda U_L = \partial_{y_2} U_{part} \quad \text{sur } \Sigma_L^{\#}; \end{array} \right. \quad (131)$$

où U_{part} ne dépend que de $F|_{\mathcal{B}_\infty^L}$ et est donnée dans la proposition 9.

Réciproquement, si U_L est solution de (131) alors la fonction U donnée par $U|_{\mathcal{B}_0^L} = U_L$ et $U = u(U_L|_{\Sigma_L^{\#}}) + U_{part}$ où $u(U_L|_{\Sigma_L^{\#}})$ est donnée par (25) et U_{part} est solution de (129).

En utilisant les mêmes arguments que pour la résolution d'un problème de Neumann en domaine borné, nous montrons le résultat suivant

Théorème 38

Il existe une solution $U_L \in W_{\#}(\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^{\#})$ de (131) unique à une constante près si et seulement si F, G_1, G_2, α^N vérifient la condition de compatibilité suivante

$$\int_{\mathcal{B}_0^L} F dy + \int_{\Sigma_0^{\#}} G_1 dy_1 + \int_{\partial\mathcal{P}_{\#}} G_2 dy + \alpha^N T = 0. \quad (132)$$

Il existe une unique solution qui vérifie $\int_{\Sigma_L^{\#}} U_L dy_1 = 0$.

Preuve. Nous commençons par introduire $\mathcal{R} \in W_{\#}(\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^{\#})$ telle que

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 & \text{si } y_2 > H \\ \alpha^D & \text{si } y_2 < H \end{cases},$$

qui vérifie $[\mathcal{R}]_H = -\alpha^D$ et $[-\partial_{y_2} \mathcal{R}]_H = 0$. Par construction $\tilde{U}_L = U_L + \mathcal{R}$, $\tilde{U}_L \in W_{\#}(\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^{\#})$ avec $[\tilde{U}]_H = 0$ et \tilde{U} satisfait le problème variationnel :

Trouver $\tilde{U} \in W_{\#}(\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^{\#})$ solution de

$$\int_{\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^{\#}} \nabla \tilde{U}_L \cdot \nabla \bar{V} \, d\mathbf{y} + \int_{\Sigma_L^{\#}} \Lambda \tilde{U}_L \bar{V} \, dy_1 = \int_{\mathcal{B}_0^L} F \bar{V} \, d\mathbf{y} + \int_{\Sigma_0^{\#}} G_1 \bar{V} \, dy_1 + \int_{\partial \mathcal{P}_{\#}} G_2 \bar{V} \, d\mathbf{y} + \alpha^N \int_{\Sigma_H^{\#}} \bar{V} \, dy_1 + \int_{\Sigma_L^{\#}} \partial_{y_2} U_{part} \bar{V} \, dy_1, \quad \forall V \in W_{\#}(\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^{\#}). \quad (133)$$

- Nous montrons que le problème est de type Fredholm.
 - Le noyau est de dimension 1 (les constantes).
 - Nous avons existence si le second membre est orthogonal au noyau.
- Il est aussi possible d'utiliser la preuve alternative suivante.

Nous définissons le sous-espace fermé de $W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^{\#})$

$$\dot{W}_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^{\#}) = \left\{ v \in W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^{\#}), \int_{\Sigma_L^{\#}} v \, dy_1 = 0 \right\}; \quad (134)$$

et la semi-norme

$$|u|_{\dot{W}_{\#}} = \left(\int_{\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^{\#}} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{y} \right)^{1/2} = \|\nabla u\|_{L^2}, \quad (135)$$

qui est une norme équivalente à la norme (32).

- Nous montrons que l'EDP (131) est équivalente à la formulation variationnelle (133) dans $\dot{W}_{\#}(\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^{\#})$ si et seulement si la condition de compatibilité (132) est satisfaite.
- La formulation variationnelle (133) dans $\dot{W}_{\#}(\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^{\#})$ est bien posée grâce à l'inégalité de Poincaré-Wirtinger. Nous avons alors existence et unicité d'une solution de dans $\dot{W}_{\#}(\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^{\#})$. □

Corollaire 39

Supposons que F vérifie la propriété (\mathcal{P}_{∞}) et que la condition (132) est satisfaite. Soit U_L l'unique solution de (131) qui vérifie $\int_{\Sigma_L^{\#}} U_L \, dy_1 = 0$ alors U définie par $U|_{\mathcal{B}_0^L} = U_L$ et $U|_{\mathcal{B}_{\infty}^L} = u(U_L|_{\Sigma_L^{\#}}) + U_{part}$ est l'unique solution de (129) telle que $U \xrightarrow{y_2 \rightarrow +\infty} 0$.

Preuve. Comme F vérifie la propriété (\mathcal{P}_{∞}) , elle admet une décomposition modale alors, d'après la Proposition 9 il existe $C_U \in \mathbb{R}$ et \tilde{U} vérifiant la propriété (\mathcal{P}_{∞}) , telle que $U = C_U + \tilde{U}$. De plus, U vérifie la contrainte $\int_{\Sigma_L^{\#}} U \, dy_1 = 0$. Quand y_2 tend vers l'infini, la solution U est exponentiellement décroissante vers C_U . La contrainte nous impose que $C_U = 0$.

Nous avons donc que U définie par $U|_{\mathcal{B}_0^L} = U_L$ et $U|_{\mathcal{B}_{\infty}^L} = u(U_L|_{\Sigma_L^{\#}}) + U_{part}$ est l'unique solution de (129) telle que $U \xrightarrow{y_2 \rightarrow +\infty} 0$. □

3.5.2 Construction des premiers termes de champ proche

Construction de U_0^{NF}

D'après le Théorème 38, pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $U_0^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ dans $W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#})$ qui vérifie $\int_{\Sigma_{\text{L}}^{\#}} U_0^{\text{NF}}(x_1; y_1, L) dy_1 = 0$ de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} U_0^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#}, \\ U_0^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \text{ est } T\text{-périodique}, \\ -\partial_{y_2} U_0^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0^{\#}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} U_0^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{B}_{\#}, \\ \left[U_0^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_{\text{H}} = -u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} U_0^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_{\text{H}} = 0; \end{array} \right. \quad (136)$$

qui tend vers 0 quand y_2 tend vers l'infini si et seulement si la condition de compatibilité (132) est satisfaite. La condition de compatibilité est bien vérifiée ici. Étant donné que le terme de champ proche $U_0^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ doit tendre vers 0 quand y_2 tend vers l'infini et que $[U_0^{\text{NF}}(x_1; \cdot)]_{\text{H}} = -u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1)$, la solution que nous cherchons est de la forme

$$\begin{cases} U_0^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2) = 0 & \text{si } y_2 > H; \\ U_0^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2) = u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) & \text{si } y_2 < H. \end{cases} \quad (137)$$

Proposition 40

Pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction $U_0^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ dans $W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#})$ de (136) qui vérifie

$\int_{\Sigma_{\text{L}}^{\#}} U_0^{\text{NF}}(x_1; y_1, L) dy_1 = 0$ et qui tend vers 0 à l'infini. Dans ce cas, pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, $(y_1, y_2) \in \mathcal{B}$,

$U_0^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2)$ s'écrit

$$U_0^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2) = \mathcal{U}_0^{(0)}(y_1, y_2) u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1); \quad (138)$$

où

$$\mathcal{U}_0^{(0)}(y_1, y_2) := \chi_{y_2 < H}(y_1, y_2). \quad (139)$$

Construction de U_1^{NF}

D'après le Théorème [38](#), pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $U_1^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ dans $W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^{\#})$ qui vérifie $\int_{\Sigma_L^{\#}} U_1^{\text{NF}}(x_1; y_1, L) dy_1 = 0$ de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} U_1^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^{\#}, \\ U_1^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \text{ est } T\text{-périodique}, \\ -\partial_{y_2} U_1^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = -ik\gamma u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) \quad \text{sur } \Sigma_0^{\#}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} U_1^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \cdot \vec{n} = -\partial_{x_1} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) n_1 \quad \text{sur } \partial\mathcal{P}_{\#}, \\ \left[U_1^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_H = -u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} U_1^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_H = \partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1); \end{array} \right. \quad (140)$$

(où nous avons utilisé $U_0^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2) = u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) \chi_{y_2 < H}(y_1, y_2)$) qui tend vers 0 quand y_2 tend vers l'infini si et seulement si la condition de compatibilité [\(132\)](#) est satisfaite :

$$-ik\gamma u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) \int_{\Sigma_0^{\#}} dy_1 - \partial_{x_1} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) \int_{\partial\mathcal{P}_{\#}} n_1 d\mathbf{y} + \partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) \int_{\Sigma_H^{\#}} dy_1 = 0.$$

Nous avons $\int_{\partial\mathcal{P}_{\#}} n_1 d\mathbf{y} = \int_{\partial\mathcal{P}_{\#}} \nabla(y_1) \cdot \vec{n} = \int_{\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^{\#}} \Delta(y_1) d\mathbf{y} = 0$. Nous obtenons alors la condition de bord vérifiée par u_0^{FF} sur $\Sigma_{\varepsilon H}$

$$-\partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) + ik\gamma u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) = 0.$$

Proposition 41

Pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction $U_1^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \in W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^{\#})$ solution de (140) qui vérifie $\int_{\Sigma_L^{\#}} U_1^{\text{NF}}(x_1; y_1, L) dy_1 = 0$ et qui tend vers 0 à l'infini si et seulement si

$$-\partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) + ik\gamma u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) = 0. \quad (141)$$

Dans ce cas, pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, $(y_1, y_2) \in \mathcal{B}$, $U_1^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2)$ s'écrit

$$U_1^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2) = u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{U}_0^{(0)}(y_1, y_2) + k u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, y_2) + \partial_{x_1} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, y_2); \quad (142)$$

où $\mathcal{U}_0^{(0)}(y_1, y_2)$ est définie par (139), $\mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, y_2) \in W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^{\#})$ est l'unique solution qui vérifie $\int_{\Sigma_L^{\#}} \mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, L) dy_1 = 0$ de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} \mathcal{U}_0^{(1)} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^{\#}, \\ \mathcal{U}_0^{(1)} \text{ est } T\text{-périodique}, \\ -\partial_{y_2} \mathcal{U}_0^{(1)} = -i\gamma \quad \text{sur } \Sigma_0^{\#}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{U}_0^{(1)} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{P}_{\#}, \\ \left[\mathcal{U}_0^{(1)} \right]_{\text{H}} = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} \mathcal{U}_0^{(1)} \right]_{\text{H}} = i\gamma; \end{array} \right. \quad (143)$$

et $\mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, y_2) \in W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^{\#})$ est l'unique solution qui vérifie $\int_{\Sigma_L^{\#}} \mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, L) dy_1 = 0$ de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} \mathcal{U}_1^{(1)} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^{\#}, \\ \mathcal{U}_1^{(1)} \text{ est } T\text{-périodique}, \\ -\partial_{y_2} \mathcal{U}_1^{(1)} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0^{\#}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{U}_1^{(1)} \cdot \vec{n} = -n_1 \quad \text{sur } \partial\mathcal{P}_{\#}, \\ \left[\mathcal{U}_1^{(1)} \right]_{\text{H}} = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} \mathcal{U}_1^{(1)} \right]_{\text{H}} = 0. \end{array} \right. \quad (144)$$

Preuve. En remplaçant la condition $\left[-\partial_{y_2} U_1^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_{\text{H}} = \partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1)$ par $\left[-\partial_{y_2} U_1^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_{\text{H}} = ik\gamma u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1)$ nous obtenons l'écriture de U_1^{NF} (142).

Notons que les problèmes vérifiés par $\mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, y_2)$ et $\mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, y_2)$ vérifient bien la condition de compatibilité (132) et sont bien posés dans $W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^{\#})$. \square

Remarque 13. La fonction profil $\mathcal{U}_1^{(1)}$ est réelle et indépendante de H.

Remarque 14. Pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, $U_1^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2)$ s'écrit aussi sous la forme

$$U_1^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2) = u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{U}_0^{(0)}(y_1, y_2) + ik\gamma u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \widetilde{\mathcal{U}}_0^{(1)}(y_1, y_2) + \partial_{x_1} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, y_2);$$

où $\widetilde{\mathcal{U}}_0^{(1)}(y_1, y_2) = \mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, y_2)/\gamma$.

Cette décomposition de U_1^{NF} permet d'avoir une fonction profil qui ne dépend pas de γ . Mais pour obtenir une décomposition à tout ordre, nous utilisons plutôt l'expression de U_1^{NF} donnée dans la proposition précédente (142).

Construction de U_2^{NF}

D'après le Théorème 38, pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $U_2^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ dans $W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#})$ qui vérifie $\int_{\Sigma_{\text{L}}^{\#}} U_2^{\text{NF}}(x_1; y_1, L) dy_1 = 0$ de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} U_2^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = 2k \partial_{x_1} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \partial_{y_1} \mathcal{U}_0^{(1)}(\cdot) + 2\partial_{x_1}^2 u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \partial_{y_1} \mathcal{U}_1^{(1)}(\cdot) + \partial_{x_1}^2 u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{U}_0^{(0)}(\cdot) \\ \quad + k^2 u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{U}_0^{(0)}(\cdot) \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#}, \\ U_2^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \text{ est T-périodique,} \\ -\partial_{y_2} U_2^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = -ik\gamma \left(u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) + k u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{U}_0^{(1)}(\cdot) + \partial_{x_1} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{U}_1^{(1)}(\cdot) \right) \quad \text{sur } \Sigma_0^{\#}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} U_2^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \cdot \vec{n} = -\partial_{x_1} u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) n_1 - k \partial_{x_1} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{U}_0^{(1)}(\cdot) n_1 - \partial_{x_1}^2 u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{U}_1^{(1)}(\cdot) n_1 \quad \text{sur } \partial\mathcal{P}_{\#}, \\ \left[U_2^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_{\text{H}} = -u_2^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} U_2^{\text{NF}}(y_1, y_2) \right]_{\text{H}} = \partial_{x_2} u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1); \end{array} \right. \quad (145)$$

(où nous avons utilisé $U_0^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2) = u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{U}_0^{(0)}(y_1, y_2)$ et $U_1^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2) = u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{U}_0^{(0)}(y_1, y_2) + k u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, y_2) + \partial_{x_1} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, y_2)$) qui tend vers 0 quand y_2 tend vers l'infini si et seulement si la condition de compatibilité (132) est satisfaite :

$$\begin{aligned} & 2k \partial_{x_1} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \int_{\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#}} \partial_{y_1} \mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, y_2) d\mathbf{y} + 2 \partial_{x_1}^2 u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \int_{\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#}} \partial_{y_1} \mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, y_2) d\mathbf{y} - ik\gamma u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \underbrace{\int_{\Sigma_0^{\#}} dy_1}_{=\text{T}} \\ & + \left[\partial_{x_1}^2 u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) + k^2 u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \right] \left| \mathcal{B}_0^{\text{H}} \right| - ik^2 \gamma u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \int_{\Sigma_0^{\#}} \mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, y_2) dy_1 - ik\gamma \partial_{x_1} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \int_{\Sigma_0^{\#}} \mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, y_2) dy_1 \\ & - k \partial_{x_1} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \int_{\partial\mathcal{P}_{\#}} \mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, y_2) n_1 d\mathbf{y} - \partial_{x_1}^2 u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \int_{\partial\mathcal{P}_{\#}} \mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, y_2) n_1 d\mathbf{y} + \partial_{x_2} u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \underbrace{\int_{\Sigma_{\text{H}}^{\#}} dy_1}_{=\text{T}} = 0. \end{aligned}$$

Si bien qu'en regroupant les différents termes, nous obtenons

$$\begin{aligned} & -\partial_{x_2} u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) + ik\gamma \partial_{x_2} u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) = \frac{1}{\text{T}} \left[k^2 \left| \mathcal{B}_0^{\text{H}} \right| - ik^2 \gamma \int_{\Sigma_0^{\#}} \mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, y_2) dy_1 \right] u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \\ & + \frac{1}{\text{T}} \left[2k \int_{\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#}} \partial_{y_1} \mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, y_2) d\mathbf{y} - ik\gamma \int_{\Sigma_0^{\#}} \mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, y_2) dy_1 - k \int_{\partial\mathcal{P}_{\#}} \mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, y_2) n_1 d\mathbf{y} \right] \partial_{x_1} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \\ & + \frac{1}{\text{T}} \left[2 \int_{\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#}} \partial_{y_1} \mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, y_2) d\mathbf{y} + \left| \mathcal{B}_0^{\text{H}} \right| - \int_{\partial\mathcal{P}_{\#}} \mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, y_2) n_1 d\mathbf{y} \right] \partial_{x_1}^2 u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1), \end{aligned}$$

Proposition 42

Pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction $U_2^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \in W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#})$ solution de (145) qui vérifie $\int_{\Sigma_{\text{L}}^{\#}} U_2^{\text{NF}}(x_1; y_1, L) dy_1 = 0$ et qui tend vers 0 à l'infini si et seulement si

$$-\partial_{x_2} u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) + ik\gamma u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) = k^2 a_0^{(2)} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) + k a_1^{(2)} \partial_{x_1} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) + a_2^{(2)} \partial_{x_1}^2 u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) ; \quad (146)$$

avec

$$\begin{cases} a_0^{(2)} = \frac{1}{T} \left[|\mathcal{B}_0^{\text{H}}| - i\gamma \int_{\Sigma_0^{\#}} \mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, y_2) dy_1 \right] ; \end{cases} \quad (147a)$$

$$\begin{cases} a_1^{(2)} = \frac{1}{T} \left[2 \int_{\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#}} \partial_{y_1} \mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, y_2) dy - i\gamma \int_{\Sigma_0^{\#}} \mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, y_2) dy_1 - \int_{\partial \mathcal{D}_{\#}} \mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, y_2) n_1 dy \right] ; \end{cases} \quad (147b)$$

$$\begin{cases} a_2^{(2)} = \frac{1}{T} \left[2 \int_{\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#}} \partial_{y_1} \mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, y_2) dy + |\mathcal{B}_0^{\text{H}}| - \int_{\partial \mathcal{D}_{\#}} \mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, y_2) n_1 dy \right] . \end{cases} \quad (147c)$$

Dans ce cas, pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, $(y_1, y_2) \in \mathcal{B}$, $U_2^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2)$ s'écrit

$$U_2^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2) = u_2^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{U}_0^{(0)}(y_1, y_2) + k u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, y_2) + \partial_{x_1} u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, y_2) + k^2 u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{U}_0^{(2)}(y_1, y_2) + k \partial_{x_1} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{U}_1^{(2)}(y_1, y_2) + \partial_{x_1}^2 u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{U}_2^{(2)}(y_1, y_2) , \quad (148)$$

où $\mathcal{U}_0^{(0)} = \chi_{y_2 < \text{H}}(y_1, y_2)$, $\mathcal{U}_0^{(1)}$ est donnée par (143), $\mathcal{U}_1^{(1)}$ est donnée par (144) et les trois fonctions "profils" notées $\mathcal{U}_0^{(2)}$, $\mathcal{U}_1^{(2)}$ et $\mathcal{U}_2^{(2)}$ sont définies dans la Définition 43.

Remarque 15. Les coefficients dépendent de H. Comme $\mathcal{U}_0^{(1)}$ ne dépend pas de H, il est facile de voir que $a_2^{(2)}$ dépend linéairement de H et pour H assez grand $a_2^{(2)} > 0$. Nous avons de plus

$$\int_{\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#}} |\nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{U}_0^{(1)}|^2 dy + i\gamma \int_{\Sigma_0^{\#}} \mathcal{U}_0^{(1)} dy_1 - i\gamma \underbrace{\int_{\Sigma_{\text{H}}^{\#}} \mathcal{U}_0^{(1)} dy_1}_{=0 \text{ car } \int_{\Sigma_{\text{L}}^{\#}} \mathcal{U}_0^{(1)} dy_1 = 0} = 0 ;$$

alors $\text{Im} \left[\int_{\Sigma_0^{\#}} \mathcal{U}_0^{(1)} dy_1 \right] > 0$ et $\Re e \left[\int_{\Sigma_0^{\#}} \mathcal{U}_0^{(1)} dy_1 \right]$ sont du même signe que $\text{Im}(\gamma)$.

Définition 43

La fonction profil $\mathcal{U}_0^{(2)}(y_1, y_2) \in W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^{\#})$ est l'unique solution qui vérifie $\int_{\Sigma_1^{\#}} \mathcal{U}_0^{(2)}(y_1, L) dy_1 = 0$ de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} \mathcal{U}_0^{(2)} = \mathcal{U}_0^{(0)} \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^{\#}, \\ \mathcal{U}_0^{(2)} \text{ est T-périodique,} \\ -\partial_{y_2} \mathcal{U}_0^{(2)} = -i\Upsilon \mathcal{U}_0^{(1)} \quad \text{sur } \Sigma_0^{\#}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{U}_0^{(2)} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{P}_{\#}, \\ \left[\mathcal{U}_0^{(2)} \right]_H = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} \mathcal{U}_0^{(2)} \right]_H = -a_0^{(2)}; \end{array} \right. \quad (149)$$

où $a_0^{(2)}$ est défini dans (147a).

La fonction profil $\mathcal{U}_1^{(2)}(y_1, y_2) \in W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^{\#})$ est l'unique solution qui vérifie $\int_{\Sigma_1^{\#}} \mathcal{U}_1^{(2)}(y_1, L) dy_1 = 0$ de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} \mathcal{U}_1^{(2)} = 2 \partial_{y_1} \mathcal{U}_0^{(1)} \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^{\#}, \\ \mathcal{U}_1^{(2)} \text{ est T-périodique,} \\ -\partial_{y_2} \mathcal{U}_1^{(2)} = -i\Upsilon \mathcal{U}_1^{(1)} \quad \text{sur } \Sigma_0^{\#}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{U}_1^{(2)} \cdot \vec{n} = -\mathcal{U}_0^{(1)} n_1 \quad \text{sur } \partial\mathcal{P}_{\#}, \\ \left[\mathcal{U}_1^{(2)} \right]_H = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} \mathcal{U}_1^{(2)} \right]_H = -a_1^{(2)}; \end{array} \right. \quad (150)$$

où $a_1^{(2)}$ est défini dans (147b).

La fonction profil $\mathcal{U}_2^{(2)}(y_1, y_2) \in W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^{\#})$ est l'unique solution qui vérifie $\int_{\Sigma_1^{\#}} \mathcal{U}_2^{(2)}(y_1, L) dy_1 = 0$ de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} \mathcal{U}_2^{(2)} = 2 \partial_{y_1} \mathcal{U}_1^{(1)} + \mathcal{U}_0^{(0)} \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^{\#}, \\ \mathcal{U}_2^{(2)} \text{ est T-périodique,} \\ -\partial_{y_2} \mathcal{U}_2^{(2)} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0^{\#}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{U}_2^{(2)} \cdot \vec{n} = -\mathcal{U}_1^{(1)} n_1 \quad \text{sur } \partial\mathcal{P}_{\#}, \\ \left[\mathcal{U}_2^{(2)} \right]_H = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} \mathcal{U}_2^{(2)} \right]_H = -a_2^{(2)}; \end{array} \right. \quad (151)$$

où $a_2^{(2)}$ est donné par (147c).

Notons que les fonctions profils $\mathcal{U}_0^{(2)}(y_1, y_2)$, $\mathcal{U}_1^{(2)}(y_1, y_2)$ et $\mathcal{U}_2^{(2)}(y_1, y_2)$ vérifient bien la condition de compatibilité (132).

3.5.3 Caractérisation des termes de champ proche à tout ordre

En généralisant la technique de construction précédente, nous pouvons trouver une condition de bord pour les termes de champ lointain jusqu'à un certain ordre $m - 1$ qui garantit l'existence des termes de champ proche qui tendent vers 0 à l'infini jusqu'à l'ordre m . Nous pouvons ensuite obtenir une expression semi-explicite pour les termes de champ proche.

Théorème 44

Soit $m \geq 1$. Pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, il existe une famille $\{U_q^{\text{NF}}, \forall q \leq m\}$, où $U_q^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \in W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#})$ est l'unique solution de (128) qui vérifie $\int_{\Sigma_{\text{L}}^{\#}} U_q^{\text{NF}}(x_1; y_1, L) dy_1 = 0$ et qui tend vers 0 à l'infini, si et seulement

$$\forall q \leq m, \quad -\partial_{x_2} u_{q-1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) + ik\gamma u_{q-1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) = \sum_{p=0}^{q-2} C_{q-p}(\partial_{x_1}) u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1); \quad (152)$$

où les $C_{q-p}(\partial_{x_1})$ sont donnés en (156).

Dans ce cas, pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, $U_q^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ s'écrit

$$\forall q \leq m, \quad U_q^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2) = \sum_{p=0}^q \Theta_{q-p}(\mathbf{y}; \partial_{x_1}) u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1), \quad (153)$$

où pour tout $p \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\eta \mapsto \Theta_p(\cdot; \eta)$ est un polynôme de degré p et $\Theta_p(\cdot; \eta)$ est l'unique solution dans $W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#})$ du problème défini par récurrence

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} \Theta_p(\cdot; \eta) = F_{p-1}(\cdot; \eta) \quad \text{dans} \quad \mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#}, \\ \Theta_p(\cdot; \eta) \text{ est } T\text{-périodique}, \\ -\partial_{y_2} \Theta_p(\cdot; \eta) = -ik\gamma \Theta_{p-1}(\cdot; \eta) \quad \text{sur} \quad \Sigma_0^{\#}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \Theta_p(\cdot; \eta) \cdot \vec{n} = -\eta \Theta_{p-1}(\cdot; \eta) n_1 \quad \text{sur} \quad \partial \mathcal{P}_{\#}, \\ \left[\Theta_p(\cdot; \eta) \right]_{\text{H}} = -\delta_{p;0} \text{ et } \left[-\partial_{y_2} \Theta_p(\cdot; \eta) \right]_{\text{H}} = -C_p(\eta), \\ \int_{\Sigma_{\text{L}}^{\#}} \Theta_p(y_1, L; \eta) dy_1 = 0; \end{array} \right. \quad (154)$$

avec

$$F_{p-1}(\cdot; \eta) = 2\eta \partial_{y_1} \Theta_{p-1}(\cdot; \eta) + \eta^2 \Theta_{p-2}(\cdot; \eta) + k^2 \Theta_{p-2}(\cdot; \eta), \quad (155)$$

$\partial_{y_1} \Theta_0(\cdot; \eta) = 0$, $\Theta_{-1} = \Theta_{-2} = 0$, $\delta_{p;0} = 1$ si $p = 0$ ou $\delta_{p;0} = 0$ si $p \neq 0$ et

$$C_p(\eta) = \frac{1}{T} \left[\int_{\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#}} F_{p-1}(\mathbf{y}; \eta) d\mathbf{y} - ik\gamma \int_{\Sigma_0^{\#}} \Theta_{p-1}(\mathbf{y}; \eta) dy_1 - \int_{\partial \mathcal{P}_{\#}} \eta \Theta_{p-1}(\mathbf{y}; \eta) n_1 d\mathbf{y} \right]. \quad (156)$$

$C_p(\eta)$ est un polynôme de degré p . Enfin, $\mathbf{y} \mapsto \Theta_p(\mathbf{y}; \eta)$ vérifie (\mathcal{P}_{∞}) .

Remarque 16. D'après les propositions 40, 41 et 42, nous avons

- $\Theta_0(\mathbf{y}; \eta) = \mathcal{U}_0^{(0)}(y_1, y_2)$ et $C_0(\eta) = 0, \forall \eta$.
- $\Theta_1(\mathbf{y}; \eta) = k\mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, y_2) + \eta\mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, y_2)$ et $C_1(\eta) = -ik\gamma$.
- $\Theta_2(\mathbf{y}; \eta) = k^2\mathcal{U}_0^{(2)}(y_1, y_2) + k\eta\mathcal{U}_1^{(2)}(y_1, y_2) + \eta^2\mathcal{U}_2^{(2)}(y_1, y_2)$.

Preuve. Nous démontrons le résultat par récurrence sur m .

Pour $m = 1$, nous avons vu dans la Proposition 41 que pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction $U_1^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \in W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#})$ solution de (140) qui vérifie $\int_{\Sigma_{\text{L}}^{\#}} U_1^{\text{NF}}(x_1; y_1, L) dy_1 = 0$ et qui tend vers 0 à l'infini si et seulement si

$$-\partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) + ik\gamma u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) = 0$$

et dans ce cas, $U_1^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2) = u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{U}_0^{(0)}(y_1, y_2) + k u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, y_2) + \partial_{x_1} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, y_2)$. Nous retrouvons bien (152) pour $q = 1$ avec $C_1(\partial_{x_1}) = -ik\gamma$ et (153) avec $\Theta_1(\mathbf{y}; \eta) = k\mathcal{U}_0^{(1)} + \eta\mathcal{U}_1^{(1)}$ qui est de degré 1 en η et qui vérifie (\mathcal{P}_{∞}) .

Nous supposons avoir construit une famille $\{U_q^{\text{NF}}; q \leq m-1\}$. Montrons qu'il existe $U_m^{\text{NF}} \in W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#})$ solution de (128) qui vérifie $\int_{\Sigma_{\text{L}}^{\#}} U_m^{\text{NF}}(x_1; y_1, L) dy_1 = 0$ et qui tend vers 0 à l'infini. Nous supposons que (152) est satisfait. Pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, l'équation volumique vérifiée par $U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ dans $\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#}$ peut se réécrire en utilisant (153) à l'ordre $m-1$ et $m-2$:

$$\begin{aligned} -\Delta U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) &= 2\partial_{x_1} \partial_{y_1} U_{m-1}^{\text{NF}}(x_1; \cdot) + \partial_{x_1}^2 U_{m-2}^{\text{NF}}(x_1; \cdot) + k^2 U_{m-2}^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \\ &= \sum_{p=0}^{m-1} 2\partial_{x_1} \partial_{y_1} \left[\Theta_{m-1-p}(\cdot; \partial_{x_1}) u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \right] + \sum_{p=0}^{m-2} \partial_{x_1}^2 \left[\Theta_{m-2-p}(\cdot; \partial_{x_1}) u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \right] \\ &\quad + k^2 \sum_{p=0}^{m-2} \Theta_{m-2-p}(\cdot; \partial_{x_1}) u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \\ &= \sum_{p=0}^{m-1} F_{m-1-p}(\cdot; \partial_{x_1}) u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1). \end{aligned}$$

D'autre part, sur $\Sigma_0^{\#}$, l'équation vérifiée par $U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ peut se réécrire en utilisant (153)

$$-\partial_{y_2} U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \cdot \vec{n} = -ik\gamma \sum_{p=0}^{m-1} \Theta_{m-1-p}(\cdot; \partial_{x_1}) u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1);$$

et sur le bord des particules $\partial\mathcal{P}_{\#}$, l'équation vérifiée par $U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ peut se réécrire en utilisant (153)

$$\nabla_{\mathbf{y}} U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \cdot \vec{n} = - \sum_{p=0}^{m-1} \Theta_{m-1-p}(\cdot; \partial_{x_1}) \partial_{x_1} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) n_1.$$

Nous pouvons alors réécrire le problème vérifié par U_m^{NF} : pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = \sum_{p=0}^{m-1} F_{m-1-p}(\cdot; \partial_{x_1}) u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#}, \\ U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \text{ est } T\text{-périodique}, \\ -\partial_{y_2} U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) = -ik\gamma \sum_{p=0}^{m-1} \Theta_{m-1-p}(\cdot; \partial_{x_1}) u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \quad \text{sur } \Sigma_0^{\#}, \\ \nabla_{\mathbf{y}} U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \cdot \vec{n} = -\sum_{p=0}^{m-1} \Theta_{m-1-p}(\cdot; \partial_{x_1}) \partial_{x_1} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) n_1 \quad \text{sur } \partial\mathcal{P}_{\#}, \\ \left[U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_{\text{H}} = -u_m^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_{\text{H}} = \partial_{x_2} u_{m-1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1), \\ \int_{\Sigma_{\text{L}}^{\#}} U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) dy_1 = 0. \end{array} \right. \quad (157)$$

Il existe une solution dans $W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#})$ car F_{m-1-p} vérifie la propriété (\mathcal{P}_{∞}) . Pour tout $p \leq m-1$, Θ_p vérifie la propriété (\mathcal{P}_{∞}) . Nous avons donc existence de $U_m^{\text{NF}} \in W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#})$ et il existe C_{U_m} , \tilde{U}_m^{NF} vérifiant la propriété (\mathcal{P}_{∞}) telles que $U_m^{\text{NF}} = C_{U_m} + \tilde{U}_m^{\text{NF}}$.

Pour presque tout $x_1 \in \mathbb{R}$, l'unique solution $U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot)$ de (157) qui vérifie $\int_{\Sigma_{\text{L}}^{\#}} U_m^{\text{NF}}(x_1; y_1, L) dy_1 = 0$ tend vers 0 à l'infini si la condition de compatibilité (132) est satisfaite

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{m-1} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \int_{\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^{\#}} F_{m-1-p}(\mathbf{y}; \partial_{x_1}) d\mathbf{y} - ik\gamma \sum_{p=0}^{m-1} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \int_{\Sigma_0^{\#}} \Theta_{m-1-p}(y_1, 0; \partial_{x_1}) dy_1 \\ - \sum_{p=0}^{m-1} \partial_{x_1} u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) \int_{\partial\mathcal{P}_{\#}} \Theta_{m-1-p}(\mathbf{y}; \partial_{x_1}) n_1 d\mathbf{y} + \partial_{x_2} u_{m-1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) T = 0 \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$-\partial_{x_2} u_{m-1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) = \sum_{p=0}^{m-1} C_{m-p}(\partial_{x_1}) u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1),$$

avec $\forall p \leq m$, $C_p(\eta)$ est donné par (156). De plus, comme $F_0 = 0$, $\int_{\Sigma_0^{\#}} \Theta_0(y_1, 0; \eta) dy_1 = T$ et $\int_{\partial\mathcal{P}_{\infty}} \eta \Theta_0(\mathbf{y}; \eta) n_1 d\mathbf{y} = 0$, nous avons

$$-\partial_{x_2} u_{m-1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) + ik\gamma u_{m-1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) = \sum_{p=0}^{m-2} C_{m-p}(\partial_{x_1}) u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1),$$

En particulier pour $p = m$, comme $\Theta_{m-1}(\cdot; \eta)$ est de degré $m-1$, $\Theta_{m-2}(\cdot; \eta)$ est de degré $m-2$ et que $F_{m-1}(\cdot; \eta) = 2\eta \partial_{y_1} \Theta_{m-1}(\cdot; \eta) + \eta^2 \Theta_{m-2}(\cdot; \eta) + k^2 \Theta_{m-2}(\cdot; \eta)$ est de degré m , nous avons que $\eta \mapsto C_m(\eta)$ est de degré m .

Nous pouvons alors remplacer $\partial_{x_2} u_{m-1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1)$ dans la condition de saut

$$\left[-\partial_{y_2} U_m^{\text{NF}}(x_1; \cdot) \right]_{\text{H}} = \partial_{x_2} u_{m-1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1) = \sum_{p=0}^{m-1} C_{m-p}(\partial_{x_1}) u_p^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} (x_1).$$

Nous retrouvons (153) avec Θ_m défini par (154). Comme dit précédemment, $\eta \mapsto F_{m-1}(\cdot, \eta)$ est de degré m , $\eta \mapsto C_m(\eta)$ est aussi de degré m donc $\eta \mapsto \Theta_m(\cdot; \eta)$ est de degré m .

Enfin comme la condition de compatibilité est satisfaite, Θ_m vérifie la propriété (\mathcal{P}_∞) . □

3.5.4 Problèmes vérifiés par les termes de champ lointain

Les conditions aux bords pour les termes de champ lointain obtenues précédemment, garantissant l'existence des termes de champ proche qui tendent vers 0 à l'infini, permettent de compléter les équations satisfaites par les termes de champ lointain. Nous obtenons ainsi les problèmes vérifiés par u_0^{FF} (158), par u_1^{FF} (162) et à tout ordre (166).

Nous rappelons que $u_{inc} = e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2}$ est une onde plane incidente $k_1 \varepsilon T$ quasi-périodique.

Construction de u_0^{FF}

Définition 45

En utilisant (4) et la condition aux limites (141) sur $\Sigma_{\varepsilon H}$, $u_0^{\text{FF}}(x_1, x_2)$ satisfait les équations

$$\begin{cases} -\Delta u_0^{\text{FF}} - k^2 u_0^{\text{FF}} = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times (\varepsilon H, +\infty), \\ -\partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} + ik\gamma u_0^{\text{FF}} = 0 & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H}, \\ u_0^{\text{FF}} - u_{inc} \text{ est sortant.} & \end{cases} \quad (158)$$

Notons que la condition effective sur $\Sigma_{\varepsilon H}$ est identique à la condition de Robin sur Σ_0 , le problème vérifié par u_0^{FF} ne permet donc pas de prendre en compte les particules.

Comme u_{inc} est une onde plane alors u_0^{FF} est \mathcal{C}^∞ et u_0^{FF} va aussi être une onde plane qui s'écrit sous la forme

$$u_0^{\text{FF}}(x_1, x_2) = e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} + A_0 e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2(x_2 - \varepsilon H)}.$$

Étant donné que $-\partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} + ik\gamma u_0^{\text{FF}} = 0$ sur $\Sigma_{\varepsilon H}$, en remplaçant u_0^{FF} par son expression, nous avons

$$(-ik_2 + ik\gamma) e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 \varepsilon H} + A_0 (ik_2 + ik\gamma) e^{ik_1 x_1} = 0$$

ce qui nous donne

$$A_0 = \frac{k_2 - k\gamma}{k_2 + k\gamma} e^{ik_2 \varepsilon H}. \quad (159)$$

Proposition 46

Il existe une unique solution de (158) telle que u_0^{FF} est \mathcal{C}^∞ qui s'écrit

$$u_0^{\text{FF}}(x_1, x_2) = u_{\text{inc}}(x_1, x_2) + A_0 e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2(x_2 - \varepsilon H)} , \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} , \forall x_2 \geq \varepsilon H \quad (160)$$

où A_0 est donnée par (159).

Le coefficient de réflexion associé, pour $x_2 = \varepsilon H$, est défini par

$$r_0 = A_0 e^{ik_1 x_1} . \quad (161)$$

Construction de u_1^{FF}
Définition 47

En utilisant (4) et la condition aux limites (146) sur $\Sigma_{\varepsilon H}$, $u_1^{\text{FF}}(x_1, x_2)$ satisfait les équations

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{\text{FF}} - k^2 u_1^{\text{FF}} = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times (\varepsilon H, +\infty) , \\ -\partial_{x_2} u_1^{\text{FF}} + ik\gamma u_1^{\text{FF}} = k^2 a_0^{(2)} u_0^{\text{FF}} + ka_1^{(2)} \partial_{x_1} u_0^{\text{FF}} + a_2^{(2)} \partial_{x_1}^2 u_0^{\text{FF}} & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H} , \\ u_1^{\text{FF}} \text{ est sortant ;} \end{cases} \quad (162)$$

où $a_0^{(2)}$ est donné par (147a), $a_1^{(2)}$ est donné par (147b) et $a_2^{(2)}$ est donné par (147c).

u_1^{FF} correspond uniquement à la partie diffractée et dépend de u_0^{FF} alors u_1^{FF} est \mathcal{C}^∞ . Puisque u_0^{FF} est une onde plane, u_1^{FF} va l'être aussi. Nous cherchons alors u_1^{FF} sous la forme

$$u_1^{\text{FF}}(x_1, x_2) = A_1 e^{ik_1 x_1} e^{ik_2(x_2 - \varepsilon H)} .$$

Étant donné que $-\partial_{x_2} u_1^{\text{FF}} + ik\gamma u_1^{\text{FF}} = k^2 a_0^{(2)} u_0^{\text{FF}} + ka_1^{(2)} \partial_{x_1} u_0^{\text{FF}} + a_2^{(2)} \partial_{x_1}^2 u_0^{\text{FF}}$ sur $\Sigma_{\varepsilon H}$, en remplaçant u_1^{FF} par son expression et u_0^{FF} par l'expression (160), nous avons

$$iA_1 e^{ik_1 x_1} (k_2 + k\gamma) = e^{ik_1 x_1} \left(k^2 a_0^{(2)} + ikk_1 a_1^{(2)} - a_2^{(2)} k_1^2 \right) \left(A_0 + e^{ik_2 \varepsilon H} \right)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{k^2 a_0^{(2)} + ikk_1 a_1^{(2)} - a_2^{(2)} k_1^2}{i(k_2 + k\gamma)} (A_0 + e^{ik_2 \varepsilon H}) \\ &= \frac{k^2 a_0^{(2)} + ikk_1 a_1^{(2)} - a_2^{(2)} k_1^2}{i(k_2 + k\gamma)} 2k_2 e^{ik_2 \varepsilon H} . \end{aligned} \quad (163)$$

Proposition 48

Il existe une unique solution de (162) telle que u_1^{FF} est \mathcal{C}^∞ qui s'écrit

$$u_1^{\text{FF}}(x_1, x_2) = A_1 e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2(x_2 - \varepsilon H)} , \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} , \forall x_2 \geq \varepsilon H \quad (164)$$

où A_1 est donnée par (163).

Le coefficient de réflexion associé, pour $x_2 = \varepsilon H$, est défini par

$$r_1 = A_1 e^{ik_1 x_1} . \quad (165)$$

Caractérisation à tout ordre
Définition 49

u_0^{FF} satisfait (158) et pour $m \geq 1$, en utilisant (4) et la condition aux limites (152) sur $\Sigma_{\varepsilon H}$, u_m^{FF} satisfait les équations

$$\begin{cases} -\Delta u_m^{\text{FF}} - k^2 u_m^{\text{FF}} = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times (\varepsilon H, +\infty) , \\ -\partial_{x_2} u_{m-1}^{\text{FF}} + ik\gamma u_{m-1}^{\text{FF}} = \sum_{p=0}^{m-2} C_{m-p}(\partial_{x_1}) u_p^{\text{FF}} & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H} , \\ u_m^{\text{FF}} \text{ est sortant ;} \end{cases} \quad (166)$$

où les $C_{m-p}(\partial_{x_1})$ sont donnés par (156).

Pour $m \geq 1$, u_m^{FF} correspond uniquement à la partie diffractée et dépend de u_0^{FF} et des termes précédents u_{m-p-1}^{FF} , avec $p \leq m-1$, alors u_m^{FF} est \mathcal{C}^∞ . Puisque, pour $p \leq m-1$, u_{m-1-p}^{FF} sont des ondes planes, u_m^{FF} va l'être aussi. Nous cherchons alors u_m^{FF} sous la forme

$$u_m^{\text{FF}}(x_1, x_2) = A_m e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2(x_2 - \varepsilon H)} .$$

Proposition 50

Pour tout $m \geq 1$, il existe une unique solution de (166) telle que u_m^{FF} est \mathcal{C}^∞ qui s'écrit

$$u_m^{\text{FF}}(x_1, x_2) = A_m e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2(x_2 - \varepsilon H)} , \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} , \forall x_2 \geq \varepsilon H \quad (167)$$

où $A_m \in \mathbb{C}$.

Le coefficient de réflexion associé, pour $x_2 = \varepsilon H$, est défini par

$$r_m = A_m e^{ik_1 x_1} . \quad (168)$$

Remarque 17. Nous pouvons rendre explicite l'expression des A_m mais ce n'est pas utile pour la suite.

3.5.5 Estimations d'erreurs sur le développement asymptotique

Nous allons avoir besoin d'estimations sur les termes de champ proche afin d'établir les estimations d'erreur pour le développement asymptotique.

Théorème 51

Soit $N \in \mathbb{N}$. Supposons que $\forall q \leq N$, u_{q-1}^{FF} vérifie la condition de bord (152) de sorte que nous avons existence de la famille $\{U_q^{\text{NF}}; q \leq N\}$ et des Θ_{q-p} , pour $0 \leq p \leq q$, fonctions profils solutions de (154) et

$$U_q^{\text{NF}}\left(x_1; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) = \sum_{p=0}^q \Theta_{q-p}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}; \partial_{x_1}\right) u_p^{\text{FF}}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}}(x_1),$$

alors il existe $p_q(k_1)$ une forme polynômiale de degré q en k_1 telle que

$$\left\| U_q^{\text{NF}}\left(\cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon\text{H}}^\#)} \leq \varepsilon p_q(k_1). \quad (169)$$

Nous pouvons aussi écrire l'inégalité suivante : il existe C qui dépend de k_1 et q telle que

$$\begin{aligned} \left\| \left[\nabla_{\mathbf{y}} U_q^{\text{NF}} \right] \left(\cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon\text{H}}^\#)} + \left\| U_q^{\text{NF}}\left(\cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon\text{H}}^\#)} + \left\| \partial_{x_1}^2 U_q^{\text{NF}}\left(\cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon\text{H}}^\#)} \\ + \left\| \mathbf{div}_{x_1} \nabla_{\mathbf{y}} U_q^{\text{NF}}\left(\cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon\text{H}}^\#)} \leq \varepsilon C_q(k_1). \quad (170) \end{aligned}$$

Preuve. La preuve est très semblable au cas Dirichlet.

Pour $1 \leq p \leq m$, $\Theta_{q-p}(\cdot; \eta)$ est un polynôme de degré $q-p$ en η alors il peut s'écrire sous la forme

$$\Theta_{q-p}(\cdot; \eta) = \sum_{l=0}^{q-p} \mathcal{U}_l(\cdot) \eta^l$$

avec $\mathcal{U}_l \in W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^\#)$, $0 \leq l \leq q-p$, des fonctions vérifiant des problèmes de type Laplace. Nous en déduisons

$$\left\| U_q^{\text{NF}}\left(\cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon\text{H}}^\#)} = \left\| \sum_{p=0}^q \Theta_{q-p}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}; \partial_{x_1}\right) u_p^{\text{FF}}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}}(x_1) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon\text{H}}^\#)} = \left\| \sum_{p=0}^q \sum_{l=0}^{q-p} \mathcal{U}_l\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1}^l u_p^{\text{FF}}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}}(x_1) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon\text{H}}^\#)} \quad (171)$$

où $\mathcal{U}_l \in W_{\#}(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^\#)$, \mathcal{U}_l vérifie la propriété (\mathcal{P}_∞) et u_p^{FF} est \mathcal{C}^∞ .

En étudiant, pour $0 \leq l \leq q$, la norme

$$\left\| \mathcal{U}_l\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1}^l u_p^{\text{FF}}\Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}}(x_1) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon\text{H}}^\#)}$$

avec $u_p^{\text{FF}}|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}}(x_1) = A_p e^{ik_1 x_1}$. Comme $\partial_{x_1}^l u_p^{\text{FF}}|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}}(x_1) = (ik_1)^l A_p e^{ik_1 x_1}$ et $\|\mathcal{U}_l(\cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon})\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon\text{H}}^\#)} = \varepsilon \|\mathcal{U}_l\|_{L^2(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^\#)}$, nous obtenons

$$\left\| \mathcal{U}_l\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \partial_{x_1}^l u_p^{\text{FF}}|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}}(x_1) \right\|_{L^2(\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon\text{H}}^\#)} \leq \varepsilon |A_p| k_1^l \|\mathcal{U}_l\|_{L^2(\mathcal{B} \setminus \Sigma_{\text{H}}^\#)}.$$

En appliquant à (171), nous trouvons le résultat. \square

Théorème 52

Soit $L > H$ et $\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L} := (0, \varepsilon T) \times (0, L)$. Soit u^ε une solution de notre problème de diffraction qui vérifie les équations $(\text{P}_{t,0}^\varepsilon) + (\text{CN}_t)$ dans le domaine $\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Supposons que, pour tout $m \leq N$, les termes de champ lointain u_{m-1}^{FF} vérifient la condition de bord (152) alors, pour $m \leq N$, les termes de champ proche U_m^{NF} vérifiant $\int_{\Sigma_L^\#} U_m^{\text{NF}}(x_1; y_1, 0) dy_1 = 0$ sont donnés par (153). Alors, nous avons

$$\left\| u^\varepsilon(x_1, x_2) - \left(\sum_{m=0}^N \varepsilon^m u_m^{\text{FF}}(x_1, x_2) \chi_{y_2 > \varepsilon H}(x_1, x_2) + \sum_{m=0}^N \varepsilon^m U_m^{\text{NF}}\left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \right) \right\|_{H^1(\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L})} = O(\varepsilon^{N+1}). \quad (172)$$

Preuve. La preuve est très semblable à la preuve du Théorème 28.

Soient $N \in \mathbb{N}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, nous posons

$$e^\varepsilon(x_1, x_2) = u^\varepsilon(x_1, x_2) - w^\varepsilon(x_1, x_2) \quad (173)$$

où $u^\varepsilon(x_1, x_2)$ est solution du problème $(\text{P}_{t,0}^\varepsilon) + (\text{CN}_t)$ et

$$\begin{aligned} w^\varepsilon(x_1, x_2) &= \sum_{m=0}^N \varepsilon^m u_m^{\text{FF}}(x_1, x_2) + \sum_{m=0}^N \varepsilon^m U_m^{\text{NF}}\left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \quad \text{si } x_2 > \varepsilon H, \\ &= \sum_{m=0}^N \varepsilon^m U_m^{\text{NF}}\left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \quad \text{si } x_2 < \varepsilon H. \end{aligned}$$

Étape 1 : Nous commençons par écrire l'équation et les conditions aux limites vérifiées par e^ε dans $\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon\text{H}}^\#$ où $\Sigma_{\varepsilon\text{H}}^\# = \{x_1 \in (0, \varepsilon T), x_2 = \varepsilon H\}$.

* Pour $x_2 > \varepsilon H$: en reprenant les calculs de la preuve du théorème 28 nous obtenons

$$\left(\Delta + k^2 \right) e^\varepsilon(x_1, x_2) = -\varepsilon^N \left[F_{N+1}\left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) - \mathbf{div} \left[\tilde{F}_{N+1}\left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \right] \right] \quad \text{pour } x_1 \in (0, \varepsilon T), x_2 > \varepsilon H. \quad (174)$$

avec

$$F_{N+1}\left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) = (\partial_{x_1}^2 + k^2) U_{N+1}^{\text{NF}}\left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) + \mathbf{div}_{x_1} \left[\nabla_{\mathbf{y}} U_{N+1}^{\text{NF}}\left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \right] \quad (175)$$

et

$$\tilde{F}_{N+1}\left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) = \nabla_{\mathbf{y}} U_{N+1}^{\text{NF}}\left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right). \quad (176)$$

* Pour $x_2 < \varepsilon H$, en reprenant les calculs mais sans les termes de champ lointain, nous obtenons la même équation

$$\boxed{(\Delta + k^2) e^\varepsilon(x_1, x_2) = -\varepsilon^N \left[F_{N+1} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) - \mathbf{div} \left[\tilde{F}_{N+1} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right] \right]} \quad \text{pour } x_1 \in (0, \varepsilon T), x_2 < \varepsilon H. \quad (177)$$

* Sur $\Sigma_{\varepsilon H}^\#$: en reprenant les calculs de la preuve du théorème 28, nous avons

$$\boxed{\begin{aligned} [e^\varepsilon(x_1, \varepsilon H)]_{\varepsilon H} &= 0 \quad \text{p.p. } x_1 \in (0, \varepsilon T), \\ [\partial_{x_2} e^\varepsilon(x_1, \varepsilon H)]_{\varepsilon H} &= -\varepsilon^N \partial_{x_2} u_N^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) \quad \text{p.p. } x_1 \in (0, \varepsilon T). \end{aligned}} \quad (178)$$

* Sur le bord des particules $\partial \mathcal{D}_\#^\varepsilon$, w^ε vérifie

$$\nabla w^\varepsilon(x_1, x_2) \cdot \vec{n} = \sum_{m=0}^N \varepsilon^m \left(\partial_{x_1} U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right) \cdot \vec{n} + \varepsilon^{m-1} \nabla_{\mathbf{y}} U_m^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \cdot \vec{n} \quad \text{pour } (x_1, x_2) \in \partial \mathcal{D}_\#^\varepsilon$$

D'après (9), $\forall m, \nabla_{\mathbf{y}} U_m^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2) \cdot \vec{n} = -\partial_{x_1} U_{m-1}^{\text{NF}}(x_1; y_1, y_2) n_1, \forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall (y_1, y_2) \in \partial \mathcal{D}_\#^\varepsilon$ ce qui donne

$$\nabla w^\varepsilon(x_1, x_2) \cdot \vec{n} = -\varepsilon^N \nabla_{\mathbf{y}} U_{N+1}^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \cdot \vec{n} \quad \text{p.p. } (x_1, x_2) \in \partial \mathcal{D}_\#^\varepsilon.$$

Comme $\nabla u^\varepsilon \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial \mathcal{D}_\#^\varepsilon$, nous avons

$$\boxed{\nabla e^\varepsilon(x_1, x_2) \cdot \vec{n} = \varepsilon^N \nabla_{\mathbf{y}} U_{N+1}^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \cdot \vec{n} \quad \text{p.p. } (x_1, x_2) \in \partial \mathcal{D}_\#^\varepsilon.} \quad (179)$$

* Sur le bord $\Sigma_0^\varepsilon = \{x_1 \in (0, \varepsilon T), x_2 = 0\}$, en reprenant les calculs de la preuve du théorème 28, nous avons

$$\boxed{-\partial_{x_2} e^\varepsilon(x_1, 0) + ik\gamma e^\varepsilon(x_1, 0) = -\varepsilon^N ik\gamma U_N^{\text{NF}} \left(x_1; \frac{x_1}{\varepsilon}, 0 \right) \quad \text{p.p. } x_1 \in (0, \varepsilon T).} \quad (180)$$

* Pour la quasi-périodicité. En reprenant l'argument de la preuve de Dirichlet, nous trouvons

$$w^\varepsilon(\varepsilon T, x_2) = e^{ik_1 \varepsilon T} w^\varepsilon(0, x_2);$$

et

$$\partial_{x_1} w^\varepsilon(\varepsilon T, x_2) = e^{ik_1 \varepsilon T} \partial_{x_1} w^\varepsilon(0, x_2).$$

Finalement, puisque u^ε et w^ε sont $k_1 \varepsilon T$ quasi-périodique, nous avons que

$$\boxed{e^\varepsilon \text{ est } k_1 \varepsilon T \text{ quasi-périodique}.}$$

Nous trouvons donc que $e^\varepsilon(x_1, x_2)$ vérifie les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta e^\varepsilon + k^2 e^\varepsilon = -\varepsilon^N [F_{N+1} - \mathbf{div} \tilde{F}_{N+1}] \quad \text{dans } \mathcal{B}^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^\#, \\ e^\varepsilon \text{ est } k_1 \varepsilon T \text{ quasi-périodique,} \\ -\partial_{x_2} e^\varepsilon + ik\gamma e^\varepsilon = -\varepsilon^N ik\gamma U_N^{\text{NF}} \quad \text{sur } \Sigma_0^\varepsilon, \\ \nabla e^\varepsilon \cdot \vec{n} = \varepsilon^N \nabla_{\mathbf{y}} U_{N+1}^{\text{NF}} \cdot \vec{n} \quad \text{sur } \partial \mathcal{D}_\#^\varepsilon, \\ [e^\varepsilon]_{\varepsilon H} = 0 \text{ et } [\partial_{x_2} e^\varepsilon]_{\varepsilon H} = -\varepsilon^N \partial_{x_2} u_N^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}. \end{array} \right. \quad (181)$$

Étape 2 : Problème de demi-bande avec terme source à support compact.

Cette étape est identique à l'étape 3 de la preuve du théorème [28](#).

Étape 3 : Réduction au domaine borné $\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L} \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^{\#}$.

La difficulté est que le terme source $(F_{N+1} - \mathbf{div} \tilde{F}_{N+1})$ n'est pas à support compact. Nous ne pouvons pas utiliser directement la condition DtN.

Dans le domaine $\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon, L} := (0, \varepsilon T) \times (L, +\infty)$ situé au dessus de $\Sigma_L^{\varepsilon, \#} = \{x_1 \in (0, \varepsilon T), x_2 = L\}$, nous avons

$$\Delta e^\varepsilon + k^2 e^\varepsilon = -\varepsilon^N [F_{N+1} - \mathbf{div} \tilde{F}_{N+1}] \quad \text{dans} \quad \mathcal{B}_\infty^{\varepsilon, L}; \quad (182)$$

avec $F_{N+1}, \tilde{F}_{N+1} \in L^2$ telles que $\forall \beta < \frac{2\pi}{\varepsilon T}$ alors $e^{\beta x_2} F_{N+1} \in L^2$ et $e^{\beta x_2} \tilde{F}_{N+1} \in L^2$.

D'après l'étape 2, il existe une unique solution V_{N+1} sortante de [\(97\)](#) telle que

$$(\Delta + k^2)e^\varepsilon - \varepsilon^N V_{N+1} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{B}_\infty^{\varepsilon, L} \quad (183)$$

et nous pouvons écrire l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann associé

$$\boxed{(\partial_{x_2} + \Lambda_{k_1})e^\varepsilon = \varepsilon^N \partial_{x_2} V_{N+1} \quad \text{sur} \quad \Sigma_L^{\varepsilon, \#}}. \quad (184)$$

Prenons une fonction test $v \in V = H_{k_1}^1(\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L} \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^{\#})$. Notre problème fait intervenir $\mathbf{div} \tilde{F}_{N+1}$ avec $\tilde{F}_{N+1} = \nabla_{\mathbf{y}} U_{N+1}^{\text{NF}}$ telle que

$$\begin{aligned} - \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L} \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^{\#}} \mathbf{div} \tilde{F}_{N+1} \bar{v} \, d\mathbf{x} &= \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L} \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^{\#}} \tilde{F}_{N+1} \cdot \overline{\nabla v} \, d\mathbf{x} + ik\gamma \int_{\Sigma_0^\varepsilon} U_N^{\text{NF}} \bar{v} \, dx_1 + \int_{\partial \mathcal{D}_\#^\varepsilon} \partial_{x_1} U_N^{\text{NF}} n_1 \bar{v} \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Sigma_{\varepsilon H}^{\#}} \partial_{x_2} u_N^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}^{\#}} \bar{v} \, dx_1 - {}_{H^{-1/2}} \langle \partial_{y_2} U_{N+1}^{\text{NF}}, v \rangle_{H^{1/2}}; \end{aligned}$$

où ${}_{H^{-1/2}} \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{1/2}}$ désigne le crochet de dualité entre $H_{k_1}^{-1/2}(\Sigma_L^{\varepsilon, \#})$ et $H_{k_1}^{1/2}(\Sigma_L^{\varepsilon, \#})$.

Il est alors possible d'écrire la formulation variationnelle associée au problème vérifié par e^ε dans V :

$$\text{Trouver } e^\varepsilon \in V \text{ solution de } a^\varepsilon(e^\varepsilon, v) = \varepsilon^N l_{in}^\varepsilon(v) + \varepsilon^N l_{out}^\varepsilon(v), \quad \forall v \in V; \quad (185)$$

où

$$a^\varepsilon(e^\varepsilon, v) = \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L} \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^{\#}} \nabla e^\varepsilon \cdot \overline{\nabla v} \, d\mathbf{x} - k^2 \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L} \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^{\#}} e^\varepsilon \bar{v} \, d\mathbf{x} + {}_{H^{-1/2}} \langle \Lambda_{k_1} e^\varepsilon, v \rangle_{H^{1/2}} + ik\gamma \int_{\Sigma_0^\varepsilon} e^\varepsilon \bar{v} \, dx_1; \quad (186)$$

$$l_{in}^\varepsilon(v) = \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L} \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^{\#}} F_{N+1} \bar{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L} \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^{\#}} \tilde{F}_{N+1} \cdot \overline{\nabla v} \, d\mathbf{x}; \quad (187)$$

et

$$l_{out}^\varepsilon(v) = {}_{H^{-1/2}} \langle \partial_{x_2} V_{N+1}, v \rangle_{H^{1/2}} - {}_{H^{-1/2}} \langle \partial_{y_2} U_{N+1}^{\text{NF}}, v \rangle_{H^{1/2}}. \quad (188)$$

D'après le Théorème [6](#) il existe une constante C indépendante de ε telle que

$$\|e^\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{B}_0^{\varepsilon,L})} \leq C_1 \varepsilon^N \|I_{in}^\varepsilon\| + C_2 \varepsilon^N \|I_{out}^\varepsilon\|, \quad C_1, C_2 > 0.$$

Dans étapes 4 et 5 nous aurons besoin de contrôler $\|F_{N+1}\|_{L^2} + \|\tilde{F}_{N+1}\|_{L^2}$, nous avons d'après le théorème [51](#)

$$\begin{aligned} \|F_{N+1}\|_{L^2} + \|\tilde{F}_{N+1}\|_{L^2} &\leq \|\partial_{x_1}^2 U_{N+1}\|_{L^2} + k^2 \|U_{N+1}\|_{L^2} + \|\mathbf{div}_{x_1} [\nabla_y U_{N+1}^{NF}]\|_{L^2} + \|\nabla_y U_{N+1}\|_{L^2} \\ &\leq \varepsilon D_{N+1}(k_1); \end{aligned}$$

où la constante dépend de k_1 et N.

Étape 4 : Contrôle de la norme de I_{in}^ε .

$$\left| I_{in}^\varepsilon(v) \right| = \left| \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon,L} \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^\#} F_{N+1} \bar{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon,L} \setminus \Sigma_{\varepsilon H}^\#} \tilde{F}_{N+1} \overline{\nabla v} \, d\mathbf{x} \right| \leq \|F_{N+1}\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|\tilde{F}_{N+1}\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2}.$$

Nous obtenons donc

$$\left| I_{in}^\varepsilon(v) \right| \leq K \varepsilon p_{N+1}(k_1) \|v\|_{H^1}. \quad (189)$$

Étape 5 : Contrôle de la norme de I_{out}^ε .

En introduisons une fonction V vérifiant

$$\begin{cases} -(\Delta + 1)V = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L}, \\ V \text{ est } k_1 \varepsilon T \text{ périodique}, \\ V = v & \text{sur } \Sigma_L^{\varepsilon,\#} \end{cases} \quad (190)$$

et en reprenant les calculs de la preuve du théorème [28](#) nous obtenons

$$I_{out}^\varepsilon(v) = \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L}} F_{N+1} \bar{V} \, d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L}} \tilde{F}_{N+1} \overline{\nabla V} \, d\mathbf{x} + (k^2 - 1) \int_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L}} V_{N+1} \bar{V} \, d\mathbf{x}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \left| I_{out}^\varepsilon(v) \right| &\leq \|F_{N+1}\|_{L^2} \|V\|_{L^2} + \|\tilde{F}_{N+1}\|_{L^2} \|\nabla V\|_{L^2} + |k^2 - 1| \|e^{-\alpha_0 x_2} V_{N+1}\|_{L^2} \|e^{\alpha_0 x_2} V\|_{L^2} \\ &\leq K \varepsilon p_{N+1}(k_1) \|V\|_{H^1} + C |k^2 - 1| \left[\|e^{\beta x_2} F_{N+1}\|_{L^2} + \|e^{\beta x_2} \tilde{F}_{N+1}\|_{L^2} \right] \|e^{\alpha_0 x_2} V\|_{L^2} \\ &\leq K' \varepsilon p_{N+1}(k_1) \|V\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Comme $\|V\|_{H^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon,L})} \leq \|v\|_{H^{-1/2}(\Sigma_L^{\varepsilon,\#})}$, nous obtenons

$$\left| I_{out}^\varepsilon(v) \right| \leq K_1 \varepsilon p_{N+1}(k_1) \|v\|_{H^1}. \quad (191)$$

Finalement, en regroupant l'étape 4 et l'étape 5, nous avons

$$\|e^\varepsilon\|_{H^1}^\varepsilon \leq \varepsilon^{N+1} C p_{N+1}(k_1). \quad (192)$$

Étape 6 : Contrôle sur toute la bande \mathcal{B} .

Au dessus de $\Sigma_L^{\varepsilon, \#}$, e^ε vérifie

$$\begin{cases} (\Delta + k^2) e^\varepsilon = -\varepsilon^N (F_{N+1} - \mathbf{div} \tilde{F}_{N+1}) & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^{\varepsilon, L}, \\ e^\varepsilon = \varphi^\varepsilon & \text{sur } \Sigma_L^{\varepsilon, \#}, \end{cases}$$

avec $\varphi^\varepsilon = O(\varepsilon^{N+1})$.

e^ε peut s'écrire $e^\varepsilon = \varepsilon^N V_{N+1} + \mathcal{V}(\varphi^\varepsilon)$ avec $\mathcal{V}(\varphi^\varepsilon)$ une décomposition modale, alors

$$\|e^\varepsilon\|_{H^1} \leq \varepsilon^N \|V_{N+1}\|_{H^1} + O(\varepsilon^{N+1}) \leq \varepsilon^N (\|F_{N+1}\|_{L^2} + \|\tilde{F}_{N+1}\|_{L^2}) + O(\varepsilon^N) \leq \varepsilon^{N+1} p_{N+1}(k_1) + O(\varepsilon^{N+1}).$$

Nous obtenons donc

$$\|e^\varepsilon\|_{H^1} = O(\varepsilon^{N+1}).$$

□

Corollaire 53

Soit u^ε une solution de notre problème de diffraction qui vérifie les équations $(P_{t,0}^\varepsilon) + (CN_t)$ dans le domaine $\mathcal{B}_0^{\varepsilon, L}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Supposons que, pour tout $m \leq N$, les termes de champ lointain u_{m-1}^{FF} vérifient les conditions de bord (152) alors, pour tout $m \leq N$, les termes de champ proche U_m^{NF} vérifiant $\int_{\Sigma_L^\#} U_m^{\text{NF}}(x_1; y_1, 0) dy_1 = 0$ sont donnés par (153). Soit $\varphi_0 = e^{ik_1 x_1}$, alors nous avons

$$\left| (u^\varepsilon|_{\Sigma_L^{\varepsilon, \#}}, \varphi_0) \right| = \left| \left(\sum_{m=0}^N u_m^{\text{FF}}|_{\Sigma_L^{\varepsilon, \#}}, \varphi_0 \right) \right| + O(\varepsilon^{N+1}). \quad (193)$$

Pour L assez grand, nous avons

$$(u^\varepsilon|_{\Sigma_L^{\varepsilon, \#}}, \varphi_0) = \left(\sum_{m=0}^N u_m^{\text{FF}}|_{\Sigma_L^{\varepsilon, \#}}, \varphi_0 \right) + O(\varepsilon^{N+1}). \quad (194)$$

Preuve. La preuve est très semblable à celle faite dans le cas d'une condition de Dirichlet. Il faut juste l'appliquer à ce cas. □

Corollaire 54

Pour tout ouvert \mathcal{O} de $(0, \varepsilon T) \times (\varepsilon H, +\infty)$, il existe $C_{\mathcal{O}}$ qui dépend de \mathcal{O} telle que

$$\left\| u^\varepsilon(x_1, x_2) - \sum_{m=0}^N \varepsilon^m u_m^{\text{FF}}(x_1, x_2) \right\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq C_{\mathcal{O}} \varepsilon^{N+1}. \quad (195)$$

3.5.6 Modèles effectifs

Soit nous construisons les termes de champ lointain de façon incrémentable, soit nous utilisons le modèle qui va approcher la série tronquée de champs lointains. Ceci peut être utile pour l'étude de géométrie plus générale. Le fait de prendre un modèle approché permet d'avoir une approximation directe jusqu'à un certain ordre des coefficients de réflexion.

Plus précisément, le modèle à l'ordre 1 est construit à partir de u_0^{FF} satisfaisant les équations

$$\begin{cases} -\Delta u_0^{\text{FF}} - k^2 u_0^{\text{FF}} = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times (\varepsilon H, +\infty), \\ -\partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} + ik\gamma u_0^{\text{FF}} = 0 & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H}, \\ u_0^{\text{FF}} - u_{\text{inc}} & \text{est sortant.} \end{cases}$$

La condition d'impédance effective est identique à la condition de Robin sur Σ_0 mais elle est posée sur $\Sigma_{\varepsilon H}$. Ce modèle ne permet donc pas de prendre en compte les particules. Pour obtenir un modèle prenant en compte les particules, il faut au moins aller à l'ordre supérieur du développement.

Nous proposons alors un modèle à l'ordre 2. Ce modèle est construit à partir de u_0^{FF} et u_1^{FF} . Nous souhaitons avoir une approximation de $u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}}$. Pour cela, nous reprenons les conditions de bords vérifiées par u_0^{FF} et u_1^{FF} données par (141) et (146)

$$\begin{cases} -\partial_{x_2} u_0^{\text{FF}} + ik\gamma u_0^{\text{FF}} = 0 & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H}; \\ -\partial_{x_2} u_1^{\text{FF}} + ik\gamma u_1^{\text{FF}} = k^2 a_0^{(2)} u_0^{\text{FF}} + k a_1^{(2)} \partial_{x_1} u_0^{\text{FF}} + a_2^{(2)} \partial_{x_1}^2 u_0^{\text{FF}} & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H}. \end{cases} \quad (196)$$

En prenant une combinaison linéaire des deux conditions, nous avons :

$$-\partial_{x_2} (u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}}) + (ik\gamma - \varepsilon k^2 a_0^{(2)}) (u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}}) - \varepsilon k a_1^{(2)} \partial_{x_1} (u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}}) - \varepsilon a_2^{(2)} \partial_{x_1}^2 (u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}}) = 0 \quad \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H}. \quad (197)$$

De plus, comme u_0^{FF} et u_1^{FF} vérifient l'équation de Helmholtz, nous avons

$$-\Delta (u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}}) - k^2 (u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}}) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \times (\varepsilon H, +\infty). \quad (198)$$

Définition 55

Soit v_2^ε satisfaisant

$$\begin{cases} -\Delta v_2^\varepsilon - k^2 v_2^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times (\varepsilon H, +\infty), \\ -\partial_{x_2} v_2^\varepsilon + (ik\gamma - \varepsilon k^2 a_0^{(2)}) v_2^\varepsilon - \varepsilon k a_1^{(2)} \partial_{x_1} v_2^\varepsilon - \varepsilon a_2^{(2)} \partial_{x_1}^2 v_2^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H}, \\ v_2^\varepsilon - u_{\text{inc}} & \text{est sortant;} \end{cases} \quad (199)$$

où $a_0^{(2)}$ est donné par (147a), $a_1^{(2)}$ est donné par (147b) et $a_2^{(2)}$ est donné par (147c).

Notons que ce sont les coefficients $a_0^{(2)}$, $a_1^{(2)}$ et $a_2^{(2)}$ qui permettent de prendre en compte les particules.

Proposition 56

Il existe une unique solution de (199), si $ik_2 + (ik\gamma - \varepsilon k^2 a_0^{(2)}) - \varepsilon k_1 (ika_1^{(2)} - a_2^{(2)} k_1) \neq 0$, qui s'écrit

$$v_2^\varepsilon(x_1, x_2) = A_2^\varepsilon e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2(x_2 - \varepsilon H)} + u_{inc}(x_1, x_2) \quad , \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \quad , \quad \forall x_2 \geq \varepsilon H ; \quad (200)$$

avec $a_0^{(2)}$ donné par (147a), $a_1^{(2)}$ donné par (147b), $a_2^{(2)}$ donné par (147c),

$$A_2^\varepsilon = \frac{ik_2 - (ik\gamma - \varepsilon k^2 a_0^{(2)}) + \varepsilon k_1 (ika_1^{(2)} - a_2^{(2)} k_1)}{ik_2 + (ik\gamma - \varepsilon k^2 a_0^{(2)}) - \varepsilon k_1 (ika_1^{(2)} - a_2^{(2)} k_1)} \exp(ik_2 \varepsilon H) ; \quad (201)$$

et nous avons

$$\left| A_2^\varepsilon - (A_0 + \varepsilon A_1) \right| \leq C \varepsilon^2 . \quad (202)$$

Le coefficient de réflexion associé, pour $x_2 = \varepsilon H$, est défini par

$$r_2^\varepsilon = A_2^\varepsilon e^{ik_1 x_1} . \quad (203)$$

Remarque 18. $a_1^{(2)}$ et $a_2^{(2)}$ dépendent de H . Si il existe H tel que $ik_2 + (ik\gamma - \varepsilon k^2 a_0^{(2)}) - \varepsilon k_1 (ika_1^{(2)} - a_2^{(2)} k_1) = 0$, il suffit de jouer sur H pour jouer sur $a_1^{(2)}$ et $a_2^{(2)}$ pour rendre cette quantité non nulle.

Preuve. Notons que $u_{inc} = e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2}$ est une onde plane alors v_2^ε va aussi être une onde plane qui s'écrit sous la forme

$$v_2^\varepsilon(x_1, x_2) = e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} + A_2^\varepsilon e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2(x_2 - \varepsilon H)} .$$

Étant donné que $-\partial_{x_2} v_2^\varepsilon + (ik\gamma - \varepsilon k^2 a_0^{(2)}) v_2^\varepsilon - \varepsilon k a_1^{(2)} \partial_{x_1} v_2^\varepsilon - \varepsilon a_2^{(2)} \partial_{x_1}^2 v_2^\varepsilon = 0$ sur $\Sigma_{\varepsilon H}$, nous avons

$$e^{ik_1 x_1} A_2^\varepsilon \left[ik_2 + (ik\gamma - \varepsilon k^2 a_0^{(2)}) - \varepsilon ik_1 k a_1^{(2)} + \varepsilon k_1^2 a_2^{(2)} \right] = e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 \varepsilon H} \left[ik_2 - (ik\gamma - \varepsilon k^2 a_0^{(2)}) + \varepsilon ik_1 k a_1^{(2)} - \varepsilon k_1^2 a_2^{(2)} \right]$$

ce qui donne

$$A_2^\varepsilon = \frac{ik_2 - (ik\gamma - \varepsilon k^2 a_0^{(2)}) + \varepsilon k_1 (ika_1^{(2)} - a_2^{(2)} k_1)}{ik_2 + (ik\gamma - \varepsilon k^2 a_0^{(2)}) - \varepsilon k_1 (ika_1^{(2)} - a_2^{(2)} k_1)} \exp(ik_2 \varepsilon H) .$$

□

3.5.7 Estimations d'erreurs sur le modèle effectif

Théorème 57

Soit u^ε une solution de notre problème de diffraction $(P_{t,0}^\varepsilon) + (CN_t)$. Nous notons $v_2^\varepsilon \approx u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}}$ l'approximation à l'ordre 2 de la solution. Nous avons alors, pour tout ouvert borné \mathcal{O} de $\mathbb{R} \times (\varepsilon H, +\infty)$,

$$\| u^\varepsilon(x_1, x_2) - v_2^\varepsilon(x_1, x_2) \|_{H^1(\mathcal{O})} = O(\varepsilon^2) . \quad (204)$$

Preuve. Nous décomposons $\|u^\varepsilon(x_1, x_2) - v_2^\varepsilon(x_1, x_2)\|_{H^1(\mathcal{O})}$ de sorte que

$$\|u^\varepsilon(x_1, x_2) - v_2^\varepsilon(x_1, x_2)\|_{H^1(\mathcal{O})} = \left\| u^\varepsilon(x_1, x_2) - \left(u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}} \right)(x_1, x_2) \right\|_{H^1(\mathcal{O})} + \left\| \left(u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}} \right)(x_1, x_2) - v_2^\varepsilon(x_1, x_2) \right\|_{H^1(\mathcal{O})} .$$

En utilisant les estimations d'erreurs sur le développement asymptotique, nous avons montré que

$$\left\| u^\varepsilon(x_1, x_2) - \left(u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}} \right)(x_1, x_2) \right\|_{H^1(\mathcal{O})} = O(\varepsilon^2) .$$

Nous regardons $e_2^\varepsilon = \left(u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}} \right) - v_2^\varepsilon$ qui vérifie le problème

$$\begin{cases} -\Delta e_2^\varepsilon - k^2 e_2^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times (\varepsilon H, +\infty) , \\ -\partial_{x_2} e_2^\varepsilon + \left(ik\gamma - \varepsilon k^2 a_0^{(2)} \right) e_2^\varepsilon - \varepsilon k a_1^{(2)} \partial_{x_1} e_2^\varepsilon - \varepsilon a_2^{(2)} \partial_{x_1}^2 e_2^\varepsilon = O(\varepsilon^2) & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H} , \\ e_2^\varepsilon e^{-ik_1 x_1} \text{ est indépendant de } x_1 , \\ e_2^\varepsilon \text{ est sortant .} \end{cases} \quad (205)$$

Comme u_0^{FF} , u_1^{FF} et v_2^ε sont des ondes planes, e_2^ε va aussi être une onde plane qui s'écrit sous la forme

$$e_2^\varepsilon(x_1, x_2) = \mathcal{A}_e(\varepsilon) e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2(x_2 - \varepsilon H)} . \quad (206)$$

Étant donné que $-\partial_{x_2} e_2^\varepsilon + \left(ik\gamma - \varepsilon k^2 a_0^{(2)} \right) e_2^\varepsilon - \varepsilon k a_1^{(2)} \partial_{x_1} e_2^\varepsilon - \varepsilon a_2^{(2)} \partial_{x_1}^2 e_2^\varepsilon = O(\varepsilon^2)$ sur $\Sigma_{\varepsilon H}$, nous avons

$$e^{ik_1 x_1} \mathcal{A}_e(\varepsilon) \left[ik_2 + \left(ik\gamma - \varepsilon k^2 a_0^{(2)} \right) - \varepsilon ikk_1 a_1^{(2)} + \varepsilon a_2^{(2)} k_1^2 \right] = O(\varepsilon^2)$$

ce qui donne

$$\mathcal{A}_e(\varepsilon) = \frac{1}{ik_2 + \left(ik\gamma - \varepsilon k^2 a_0^{(2)} \right) - \varepsilon k_1 \left(ik a_1^{(2)} - a_2^{(2)} k_1 \right)} e^{-ik_1 x_1} O(\varepsilon^2) . \quad (207)$$

Nous obtenons alors

$$|e_2^\varepsilon| \leq |\mathcal{A}_e(\varepsilon)| \leq C \varepsilon^2$$

et donc

$$\|e_2^\varepsilon\|_{H^1} = O(\varepsilon^2) .$$

□

Dès l'instant où la solution du modèle effectif est construite, nous pouvons approcher $U_0^{\text{NF}} + \varepsilon U_1^{\text{NF}}$ à partir de v_2^ε et les fonctions profils. Nous avons

$$V_2^\varepsilon(x_1, x_2) = v_2^\varepsilon \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) \chi_{x_2 < \varepsilon H}(x_1, x_2) + \varepsilon k v_2^\varepsilon \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) \mathcal{U}_0^{(1)} \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \partial_{x_1} v_2^\varepsilon \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) \mathcal{U}_1^{(1)} \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) . \quad (208)$$

Nous pouvons alors définir l'estimation suivante.

Corollaire 58

Soit u^ε une solution de notre problème de diffraction $(\text{P}_{t,0}^\varepsilon) + (\text{CN}_t)$. Soit v_2^ε l'approximation à l'ordre 2 de notre solution construite précédemment. Nous avons alors, pour tout ouvert \mathcal{O} de \mathcal{D}^ε ,

$$\left\| u^\varepsilon(x_1, x_2) - v_2^\varepsilon(x_1, x_2) - V_2^\varepsilon(x_1, x_2) \right\|_{L^2(\mathcal{O})} = O(\varepsilon^2) \quad (209)$$

Chapitre 4

Méthodes numériques et résultats

Sommaire

4.1 Calcul de la solution de référence	98
4.2 Calcul numérique du modèle effectif pour une condition de Dirichlet	98
4.2.1 Algorithme	98
4.2.2 Calcul de la fonction noyau \mathcal{N} et de la fonction profil $\mathcal{W}_0^{(1)}$	99
4.2.3 Validation qualitative	101
4.2.4 Validation quantitative	102
4.3 Calcul numérique du modèle effectif pour une condition de Neumann	105
4.3.1 Algorithme	105
4.3.2 Calcul des fonctions profils $\mathcal{W}_0^{(1)}$ et $\mathcal{W}_1^{(1)}$	106
4.3.3 Validation qualitative	109
4.3.4 Validation quantitative	110
4.4 Évolution du coefficient de réflexion dans le cas d'une condition de Neumann	113
4.4.1 Impact de la fréquence	114
4.4.2 Influence de la forme de la particule	114
4.4.3 Influence de la hauteur de la couche	115
4.4.4 Influence de la disposition des particules	116
4.4.5 Taux de remplissage	116

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté la construction de modèles effectifs approchant la solution de notre problème donné dans le chapitre 2 dans les cas d'une condition de Dirichlet $(P_{t,0}^e) + (CD_t)$ et d'une condition de Neumann $(P_{t,0}^e) + (CN_t)$ sur les particules. Afin de valider nos modèles et les estimations d'erreurs, nous calculons, en utilisant la librairie Xlife++ développée au sein de l'équipe POEMS (<https://uma.ensta-paris.fr/soft/XLiFE++/>), une solution dite de référence à l'aide d'une méthode éléments finis. Nous expliquons comment résoudre les problèmes de type Laplace dans des demi-bandes périodiques, calculer numériquement les constantes intervenant dans les conditions aux bords et calculer les solutions effectives dans les cas Dirichlet et Neumann. Nous effectuons d'une part une validation qualitative en traçant les champs et d'autre part une validation quantitative en traçant l'erreur entre les coefficients de réflexion en fonction de la taille des particules et de différents paramètres de notre modèle. Nous retrouvons bien les ordres théoriques. Une fois les modèles effectifs validés, nous les utilisons pour étudier l'évolution du coefficient de réflexion dans le cas d'une condition de Neumann en fonction de la distance entre les particules afin de mettre en évidence le passage d'un coefficient de réflexion d'une structure transparente à une structure conductrice.

4.1 Calcul de la solution de référence

Afin de valider nos modèles et les estimations d'erreur, nous calculons une solution dite de référence u^ε dans le domaine $\mathcal{B}_0^{\varepsilon L} = (0, \varepsilon T) \times (0, \varepsilon L) \setminus \overline{\mathcal{P}_\#^\varepsilon}$ vérifiant $(P_{t,0}^\varepsilon) + (CD_t)$ dans le cas de conditions de Dirichlet sur les particules ou $(P_{t,0}^\varepsilon) + (CN_t)$ dans le cas de conditions de Neumann sur les particules :

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon - k^2 u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_0^{\varepsilon L}, \\ u^\varepsilon \text{ est } k_1 \varepsilon T \text{ quasi-périodique}, \\ -\partial_{x_2} u^\varepsilon + ik\gamma u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Sigma_0^\varepsilon, \\ \partial_{x_2} u^\varepsilon + \Lambda_{k_1} u^\varepsilon = \partial_{x_2} u_{inc} + \Lambda_{k_1} u_{inc} & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon L}, \end{cases}$$

avec soit $u^\varepsilon = 0$ sur $\partial \mathcal{P}_\#^\varepsilon$ (CD_t) , soit $\nabla u^\varepsilon \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial \mathcal{P}_\#^\varepsilon$ (CN_t) .

Nous obtenons cette solution à l'aide d'une méthode éléments finis.

Définition 59

Le coefficient de réflexion de la solution dite de référence est noté $r_{ref}(k_1, k_2)$ et est donné par

$$r_{ref} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon T}} \int_{\Sigma_{\varepsilon L}} u_d^\varepsilon(x_1, \varepsilon L) e^{-ik_1 x_1} dy_1 ; \quad (1)$$

où $u_d^\varepsilon(x_1, \varepsilon L) = u^\varepsilon(x_1, \varepsilon L) - u_{inc}(x_1, \varepsilon L)$.

4.2 Calcul numérique du modèle effectif pour une condition de Dirichlet

Dans cette section, nous nous intéressons à la méthode du calcul numérique de notre modèle effectif (116) proposé dans le chapitre 3 et à la détermination du coefficient de réflexion associé.

4.2.1 Algorithme

Étape 1 : Nous résolvons le problème vérifié par la fonction profil noyau \mathcal{N} , donné par (35) dans le chapitre 3, à l'aide d'une méthode éléments finis.

Étape 2 : Après avoir obtenu la fonction \mathcal{N} , nous calculons la constante $c_0^{(1)}$ donnée par

$$c_0^{(1)} = \frac{1}{T} \int_{\Sigma_H^\#} \mathcal{N} dy_1 .$$

Étape 3 : Nous pouvons alors calculer le coefficient de réflexion en $x_2 = \varepsilon H$ pour différents ε , k_2 :

$$r_2^\varepsilon = \frac{ik_2 \varepsilon c_0^{(1)} - 1}{ik_2 \varepsilon c_0^{(1)} + 1} e^{ik_2 \varepsilon H} . \quad (2)$$

Étape 4 : Nous construisons la solution du modèle effectif au dessus de $\Sigma_{\varepsilon H}$ avec son expression explicite

$$v_2^\varepsilon(x_1, x_2) = e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} + r_2^\varepsilon e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2(x_2 - \varepsilon H)}. \quad (3)$$

Étape 5 : Enfin il est possible de construire l'approximation en champ proche avec

$$V_2^\varepsilon(x_1, x_2) = \varepsilon \partial_{x_2} v_2^\varepsilon \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \mathcal{W}_0^{(1)}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \quad (4)$$

où $\mathcal{W}_0^{(1)}(y_1, y_2)$ est solution du problème de type Laplace, donné par (51) dans le chapitre 3, obtenue à l'aide d'une méthode éléments finis.

4.2.2 Calcul de la fonction noyau \mathcal{N} et de la fonction profil $\mathcal{W}_0^{(1)}$

Calcul de la fonction noyau \mathcal{N}

Nous résolvons le problème vérifié par la fonction profil noyau \mathcal{N} qui satisfait le problème

$$\begin{cases} -\Delta \mathcal{N} = 0 & \text{dans } \mathcal{B}, \\ \mathcal{N} & \text{est T-périodique}, \\ -\partial_{y_2} \mathcal{N} = 0 & \text{sur } \Sigma_0^\#, \\ \mathcal{N} = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{P}_\#; \end{cases}$$

avec $\mathcal{N} = y_2 + \tilde{\mathcal{N}}$. En utilisant la section 3.3 du chapitre 3, nous pouvons définir l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann afin de se ramener à un problème en domaine borné

$$\begin{cases} -\Delta \mathcal{N} = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_0^L, \\ \mathcal{N} & \text{est T-périodique}, \\ -\partial_{y_2} \mathcal{N} = 0 & \text{sur } \Sigma_0^\#, \\ \mathcal{N} = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{P}_\#, \\ \partial_{y_2} \mathcal{N} + \Lambda \mathcal{N} = 1 & \text{sur } \Sigma_L^\#; \end{cases}$$

avec l'opérateur $\Lambda \mathcal{N}$ donné par $\Lambda \mathcal{N} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\frac{2|l|\pi}{T} \right) (\mathcal{N}, \phi_l)_{L^2(\Sigma_L^\#)} \phi_l(y_1)$. La série étant infinie, il est nécessaire de

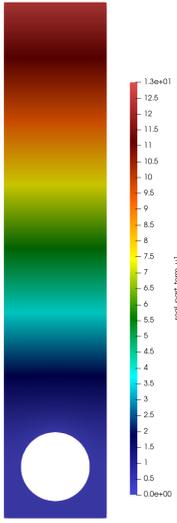
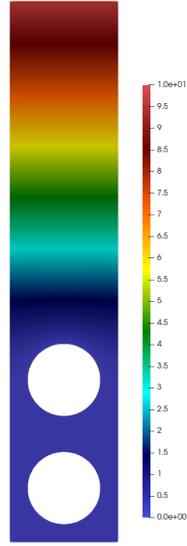
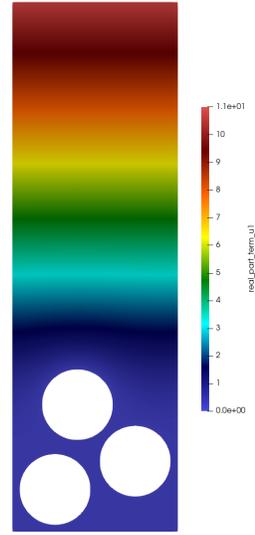
la tronquer, $\sum_{m=-N}^N$ avec $N > 0$, pour obtenir une approximation numérique. Pour la tronquer, nous fixons un seuil noté e_1 et nous choisissons N tel que $e^{-\frac{2N\pi(L-H)}{T}} < e_1$ ce qui nous donne $N > \frac{\ln(e_1)T}{2\pi(L-H)}$.

Nous obtenons la solution \mathcal{N} dans le domaine borné \mathcal{B}_0^L à l'aide d'une méthode éléments finis avec la formulation variationnelle :

Trouver $\mathcal{N} \in V_N = \{v \in W_\#(\mathcal{B}_0^L), v = 0 \text{ sur } \partial \mathcal{P}_\#\}$ telle que

$$\int_{\mathcal{B}_0^L} \nabla \mathcal{N} \cdot \nabla \bar{v} \, dy + \int_{\Sigma_L^\#} \Lambda \mathcal{N} \bar{v} \, dy_1 = \int_{\Sigma_L^\#} \bar{v} \, dy_1, \quad \forall \bar{v} \in V_N.$$

Nous traçons la fonction profil \mathcal{N} pour différentes dispositions de particules (cf. la figure 4.1 pour une particule avec $[\delta = 1, H = 5, L = 15]$, la figure 4.2 pour deux particules avec $[\delta = 1, H = 7, L = 15]$ et la figure 4.3 pour trois particules avec $[\delta = 0.4, H = 7, L = 15]$.


 Figure 4.1 – Solution \mathcal{N} (1)

 Figure 4.2 – Solution \mathcal{N} (2)

 Figure 4.3 – Solution \mathcal{N} (3)

Calcul de la fonction profil $\mathcal{W}_0^{(1)}$

$\mathcal{W}_0^{(1)}(y_1, y_2)$ est solution du problème de type Laplace

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} \mathcal{W}_0^{(1)} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^{\#}, \\ \mathcal{W}_0^{(1)} \text{ est } T\text{-périodique}, \\ -\partial_{y_2} \mathcal{W}_0^{(1)} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0^{\#}, \\ \mathcal{W}_0^{(1)} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}_{\#}, \\ \left[\mathcal{W}_0^{(1)} \right]_H = -c_0^{(1)} \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} \mathcal{W}_0^{(1)} \right]_H = 1. \end{array} \right.$$

Comme pour la fonction profil noyau, pour obtenir $\mathcal{W}_0^{(1)}$ par une méthode éléments finis, il faut borner le domaine. Nous restreignons le domaine en y_2 à l'aide de l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann sur la frontière $\Sigma_L^{\#}$. Nous cherchons alors $\mathcal{W}_0^{(1)}(y_1, y_2)$ solution dans $W_{\#}(\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^{\#})$ de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} \mathcal{W}_0^{(1)} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^{\#}, \\ \mathcal{W}_0^{(1)} \text{ est } T\text{-périodique}, \\ -\partial_{y_2} \mathcal{W}_0^{(1)} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0^{\#}, \\ \mathcal{W}_0^{(1)} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}_{\#}, \\ \left[\mathcal{W}_0^{(1)} \right]_H = -c_0^{(1)} \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} \mathcal{W}_0^{(1)} \right]_H = 1 \\ \partial_{y_2} \mathcal{W}_0^{(1)} + \Lambda \mathcal{W}_0^{(1)} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_L^{\#}. \end{array} \right. \quad (5)$$

Pour écrire la formulation variationnelle associée, nous relevons le problème de sorte qu'il n'y ai plus la condition de saut de la trace avec $\mathcal{W}_0^{(1)} = \widetilde{\mathcal{W}}_0^{(1)} - c_0^{(1)} \chi_{y_2 > H}(\mathbf{y})$. La formulation variationnelle associée est alors donnée par :

Trouver $\widetilde{W}_0^{(1)} \in V_0 = \{v \in W_{\#}(\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^{\#}), v = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{D}_{\#}\}$ telle que

$$\int_{\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^{\#}} \nabla \widetilde{W}_0^{(1)} \cdot \nabla \overline{V} \, dy + \int_{\Sigma_L^{\#}} \Lambda \widetilde{W}_0^{(1)} \overline{V} \, dy_1 = \int_{\Sigma_H^{\#}} \overline{V} \, dy_1, \quad \forall \overline{V} \in V_0.$$

Nous traçons la fonction $\widetilde{W}_0^{(1)}$ pour différentes dispositions de particules (cf. la figure 4.4 pour une particule avec $[\delta = 1, H = 5, L = 15]$, la figure 4.5 pour deux particules avec $[\delta = 1, H = 7, L = 15]$ et la figure 4.6 pour trois particules avec $[\delta = 0.4, H = 7, L = 15]$.

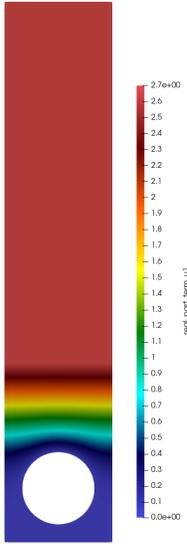


Figure 4.4 – Solution $\widetilde{W}_0^{(1)}$ (1)

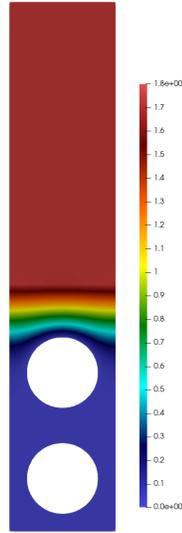


Figure 4.5 – Solution $\widetilde{W}_0^{(1)}$ (2)

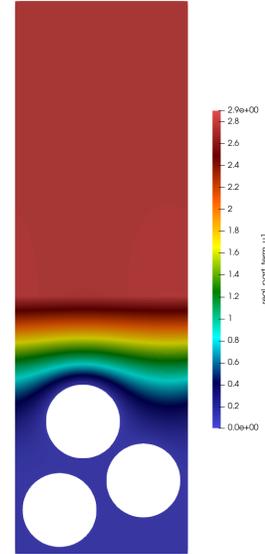


Figure 4.6 – Solution $\widetilde{W}_0^{(1)}$ (3)

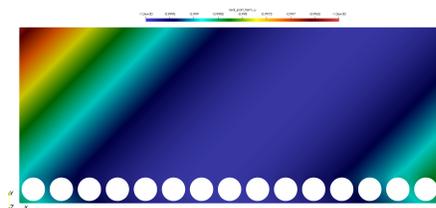
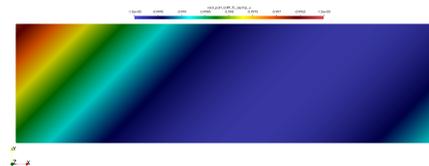
Nous remarquons que ces fonctions profils tendent chacune vers une constante qui est la constante $c_0^{(1)}$.

4.2.3 Validation qualitative

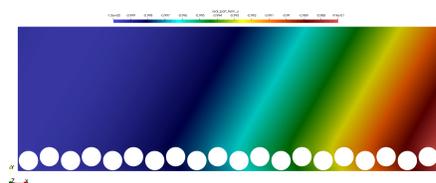
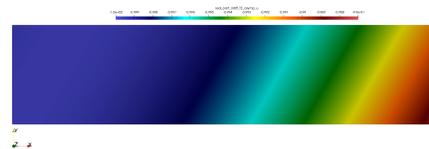
Nous sommes maintenant en mesure de simuler notre modèle effectif. Nous traçons, d'une part, la partie réelle du champ diffracté obtenue avec la solution de référence. En parallèle, nous traçons la solution obtenue au dessus de $\Sigma_{\varepsilon H}$ avec la formule analytique de v_2^{ε} définie par (3).

Pour les Figures 4.7 et 4.8, nous considérons 15 particules alignées de taille $\varepsilon = 10^{-4}m$ espacées les unes des autres d'une distance $\varepsilon\delta$ avec $\delta = 0.4$, une fréquence de 2GHz (longueur d'onde $\lambda = 15cm$), $\gamma = 0.5 - 0.5i$, $\theta = \pi/4$, $H = 5$ et $L = 15$. La Figure 4.7 représente la partie réelle du champ diffracté pour la solution de référence u_d^{ε} , obtenue à l'aide d'une méthode éléments finis. La Figure 4.8 représente la partie réelle du champ diffracté obtenue avec le modèle effectif $v_{2,d}^{\varepsilon}$, calculé à l'aide de la formule analytique. Visuellement, nous avons construit une bonne approximation.

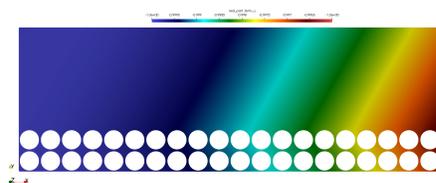
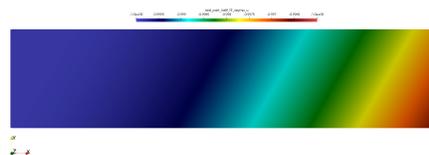
Pour les Figures 4.9 et 4.10, nous considérons 20 particules réparties en sorte de quinconce de taille $\varepsilon = 10^{-4}m$ espacées les unes des autres d'une distance $\varepsilon\delta$ avec $\delta = 0.2$, une fréquence de 2GHz, $\gamma = 0.5 - 0.5i$, $\theta = \pi/3$, $H = 5$


 Figure 4.7 – Solution de référence u_d^ϵ

 Figure 4.8 – Solution approchée $v_{2,d}^\epsilon$

et $L = 15$.


 Figure 4.9 – Solution de référence u_d^ϵ

 Figure 4.10 – Solution approchée $v_{2,d}^\epsilon$

Pour les Figures 4.11 et 4.12 nous considérons 40 particules sur deux lignes de taille $\epsilon = 10^{-4} m$ espacées les unes des autres d'une distance $\epsilon\delta$ avec $\delta = 0.2$, une fréquence de 1GHz, $\gamma = 0.6 - 0.2i$, $\theta = \pi/3$, $H = 5$ et $L = 15$.


 Figure 4.11 – Solution de référence u_d^ϵ

 Figure 4.12 – Solution approchée $v_{2,d}^\epsilon$

4.2.4 Validation quantitative

Pour valider notre modèle, nous souhaitons comparer le coefficient de réflexion de la solution de référence donné par (1) aux coefficients de réflexion des approximations u_0^{FF} donné par $r_1^\epsilon = e^{ik_2\epsilon H}$ et v_2^ϵ donné par (2). Nous étudions la dépendance de l'erreur entre les coefficients de réflexion en fonction de la taille des particules ϵ et de différents paramètres de notre modèle.

Dans les Figures 4.13 et 4.14 nous considérons une particule, $\gamma = 0.5 - 0.5i$, $H = 5$, $L = 5.1$, $\delta = 0.2$, $\theta = \pi/3$ et nous faisons varier ϵ (0.001, 0.0005, 0.0001, 0.00005, 0.00001 et 0.000005) et la longueur d'onde λ (60 cm, 15 cm, 2.9 cm) et nous représentons l'erreur relative pour le modèle d'ordre 1 et le modèle d'ordre 2. Nous retrouvons bien les ordres de convergence théoriques.

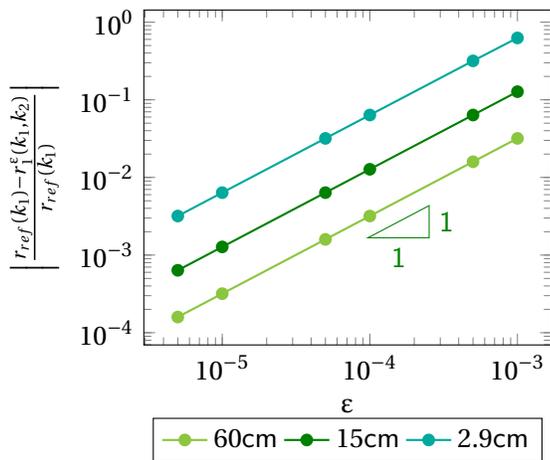


Figure 4.13 – Erreur pour le modèle d'ordre 1 en fonction de λ

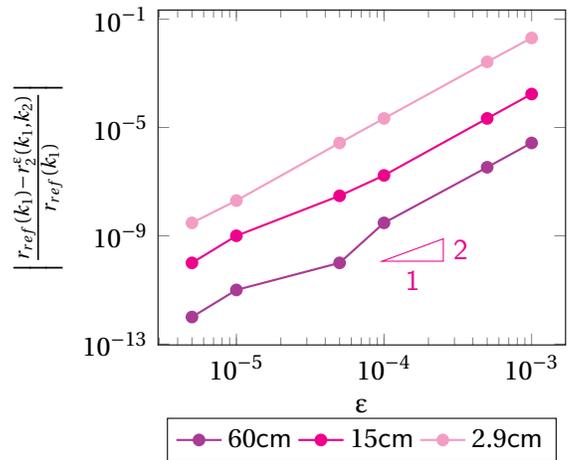


Figure 4.14 – Erreur pour le modèle d'ordre 2 en fonction de λ

Nous observons que plus la longueur d'onde λ est grande, plus petite est l'erreur. Le taux de convergence est par contre le même.

Dans les Figures 4.15 et 4.16, nous considérons une particule, $\gamma = 0.5 - 0.5i$, $H = 5$, $L = 5.1$, $\theta = \pi/3$, une fréquence de 2GHz ($\lambda = 15$ cm) et nous faisons varier ϵ (0.001, 0.0005, 0.0001, 0.00005, 0.00001 et 0.000005) et l'espacement δ entre deux particules (1, 0.2, 0.02, 0.002) et nous représentons l'erreur relative pour le modèle d'ordre 1 et le modèle d'ordre 2. Nous retrouvons bien les ordres de convergence théoriques.

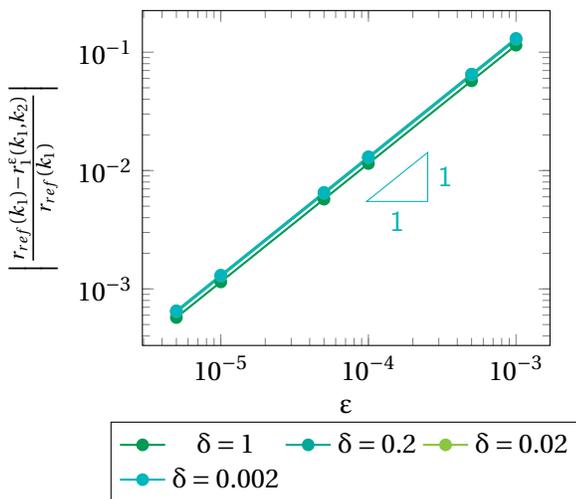


Figure 4.15 – Erreur pour le modèle d'ordre 1 en fonction de δ

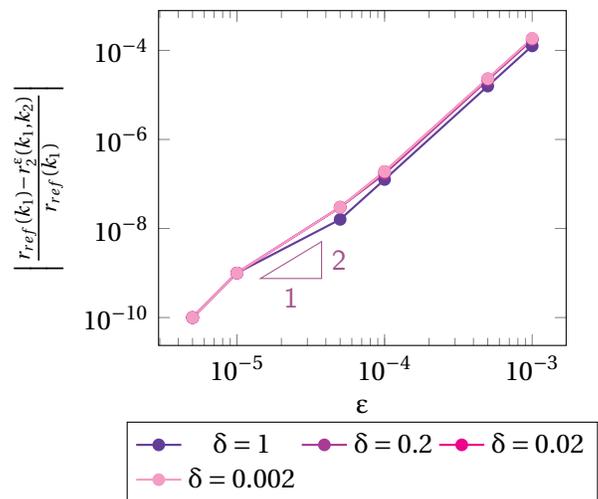


Figure 4.16 – Erreur pour le modèle d'ordre 2 en fonction de δ

Nous observons que dans le cas d'une condition de Dirichlet sur les particules, le coefficient de réflexion est

indépendant de δ .

Dans les Figures 4.17 et 4.18 nous considérons deux particules empilées, $H = 7$, $L = 7.1$, $\theta = \pi/3$, une fréquence de 2GHz ($\lambda = 15$ cm), $\delta = 0.02$ et nous faisons varier ϵ (0.001, 0.0005, 0.0001, 0.00005, 0.00001 et 0.000005) et le coefficient d'impédance γ (1, $0.6 - 0.2i$, $0.17 - 0.05i$) et nous représentons l'erreur relative pour le modèle d'ordre 1 et le modèle d'ordre 2. Nous retrouvons encore une fois les ordres de convergence théoriques.

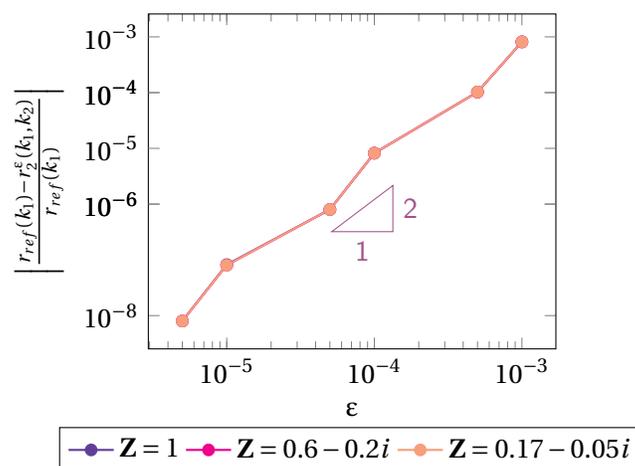
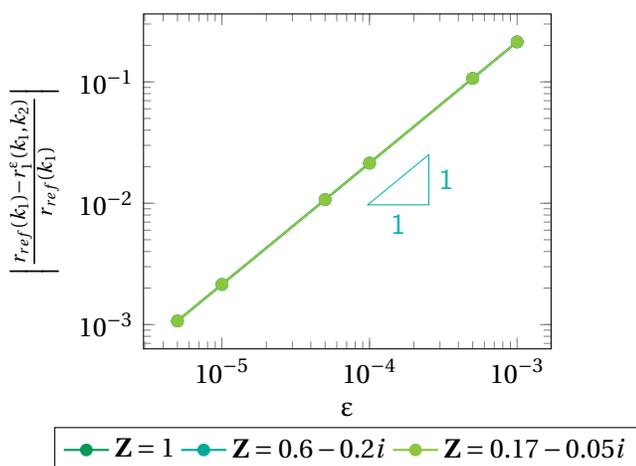


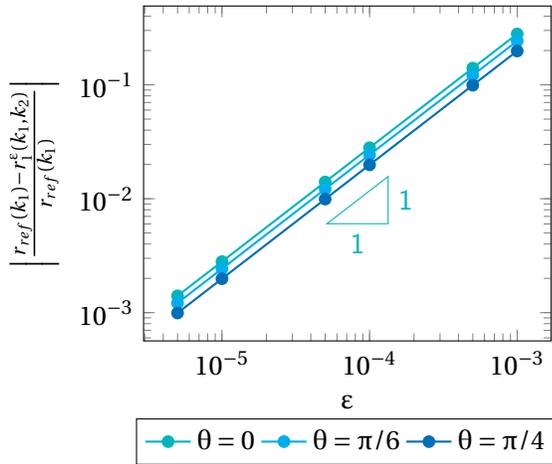
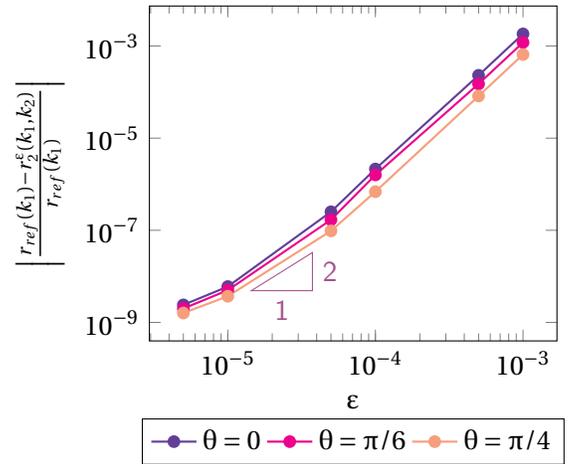
Figure 4.17 – Erreur pour le modèle d'ordre 1 en fonction de γ

Figure 4.18 – Erreur pour le modèle d'ordre 2 en fonction de γ

Nous observons que dans le cas d'une condition de Dirichlet sur les particules, le coefficient de réflexion est indépendant de γ . Ce qui est cohérent avec l'expression du coefficient $c_0^{(1)}$.

Dans les Figures 4.19 et 4.20 nous considérons trois particules, $H = 7$, $L = 7.1$, $\gamma = 0.8 - 0.4i$, $\delta = 0.02$, une fréquence de 2GHz ($\lambda = 15$ cm) et nous faisons varier ϵ (0.001, 0.0005, 0.0001, 0.00005, 0.00001 et 0.000005) et l'angle d'incidence θ (0, $\pi/6$, $\pi/4$) et nous représentons l'erreur relative pour le modèle d'ordre 1 et le modèle d'ordre 2. Nous retrouvons encore une fois les ordres de convergence théoriques.

Dans le cas d'une condition de Dirichlet sur le bord des particules, il n'y a pas de dépendance sur l'évolution des coefficients de réflexion en fonction de ϵ et par rapport à θ .


 Figure 4.19 – Erreur pour le modèle 1 en TE en fonction de θ

 Figure 4.20 – Erreur pour le modèle 2 en TE en fonction de θ

4.3 Calcul numérique du modèle effectif pour une condition de Neumann

Dans cette section, nous nous intéressons à la méthode du calcul numérique de notre modèle effectif (199) proposé dans le chapitre 3 et à la détermination du coefficient de réflexion associé dans le cas d'une condition de Neumann sur les particules.

4.3.1 Algorithme

Étape 1 : Nous commençons par résoudre les problèmes de Laplace vérifiés par les fonctions profils $\mathcal{U}_0^{(1)}$ et $\mathcal{U}_1^{(1)}$ en utilisant une méthode éléments finis.

Étape 2 : Après avoir obtenu les fonctions profils $\mathcal{U}_0^{(1)}$ et $\mathcal{U}_1^{(1)}$, nous calculons les constantes $a_0^{(2)}$, $a_1^{(2)}$ et $a_2^{(2)}$ intervenant dans la condition effective dont nous rappelons la définition

$$a_0^{(2)} = \frac{1}{T} \left[\left| \mathcal{B}_0^H \right| - i\gamma \int_{\Sigma_0^\#} \mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, y_2) dy_1 \right] ;$$

$$a_1^{(2)} = \frac{1}{T} \left[2 \int_{\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#} \partial_{y_1} \mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, y_2) dy - i\gamma \int_{\Sigma_0^\#} \mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, y_2) dy_1 - \int_{\partial \mathcal{P}^\#} \mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, y_2) n_1 dy \right] ;$$

$$a_2^{(2)} = \frac{1}{T} \left[2 \int_{\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#} \partial_{y_1} \mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, y_2) dy + \left| \mathcal{B}_0^H \right| - \int_{\partial \mathcal{P}^\#} \mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, y_2) n_1 dy \right] .$$

Étape 3 : Nous donnons le coefficient de réflexion associé au modèle effectif, en $x_2 = \varepsilon H$, pour différents ε , k_1 , k_2 , γ , k :

$$r_2^\varepsilon = \frac{ik_2 - (ik\gamma - \varepsilon k^2 a_0^{(2)}) + \varepsilon k_1 (ika_1^{(2)} - a_2^{(2)} k_1)}{ik_2 + (ik\gamma - \varepsilon k^2 a_0^{(2)}) - \varepsilon k_1 (ika_1^{(2)} - a_2^{(2)} k_1)} \exp(ik_2 \varepsilon H) . \quad (6)$$

Étape 4 : Nous construisons la solution du modèle effectif au dessus de $\Sigma_{\varepsilon H}$ à l'aide de son expression analytique

$$v_2^\varepsilon(x_1, x_2) = e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} + r_2^\varepsilon e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2(x_2 - \varepsilon H)}. \quad (7)$$

Étape 5 : Enfin, il est possible de construire l'approximation en champ proche avec

$$V_2^\varepsilon(x_1, x_2) = v_2^\varepsilon \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) \chi_{x_2 < \varepsilon H}(x_1, x_2) + \varepsilon k v_2^\varepsilon \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) \mathcal{U}_0^{(1)}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \partial_{x_1} v_2^\varepsilon \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(x_1) \mathcal{U}_1^{(1)}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right). \quad (8)$$

4.3.2 Calcul des fonctions profils $\mathcal{U}_0^{(1)}$ et $\mathcal{U}_1^{(1)}$

Pour obtenir $\mathcal{U}_0^{(1)}$ et $\mathcal{U}_1^{(1)}$ à l'aide d'une méthode éléments finis, il faut d'abord borner le domaine de calcul en utilisant un opérateur de Dirichlet-to-Neumann sur la frontière $\Sigma_L^\#$. Nous cherchons alors $\mathcal{U}_0^{(1)} \Big|_{\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^\#}$ vérifiant

$\int_{\Sigma_L^\#} \mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, L) dy_1 = 0$ solution dans $W_\#(\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^\#)$ de :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} \mathcal{U}_0^{(1)} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^\#, \\ \mathcal{U}_0^{(1)} \text{ est } T\text{-périodique}, \\ -\partial_{y_2} \mathcal{U}_0^{(1)} = -1 \quad \text{sur} \quad \Sigma_0^\#, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{U}_0^{(1)} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial \mathcal{P}_\#, \\ \left[\mathcal{U}_0^{(1)} \right]_H = 0 \text{ et } \left[-\partial_{y_2} \mathcal{U}_0^{(1)} \right]_H = 1, \\ \partial_{y_2} \mathcal{U}_0^{(1)} + \Lambda \mathcal{U}_0^{(1)} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_L^\#; \end{array} \right. \quad (9)$$

et $\mathcal{U}_1^{(1)} \Big|_{\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^\#}$ vérifiant $\int_{\Sigma_L^\#} \mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, L) dy_1 = 0$ solution dans $W_\#(\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^\#)$ de :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} \mathcal{U}_1^{(1)} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^\#, \\ \mathcal{U}_1^{(1)} \text{ est } T\text{-périodique}, \\ -\partial_{y_2} \mathcal{U}_1^{(1)} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_0^\#, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{U}_1^{(1)} \cdot \vec{n} = -n_1 \quad \text{sur} \quad \partial \mathcal{P}_\#, \\ \left[\mathcal{U}_1^{(1)} \right]_H = 0 \text{ et } \left[-\partial_{y_2} \mathcal{U}_1^{(1)} \right]_H = 0, \\ -\partial_{y_2} \mathcal{U}_1^{(1)} + \Lambda \mathcal{U}_1^{(1)} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_L^\#. \end{array} \right. \quad (10)$$

Nous avons besoin de la formulation variationnelle des problèmes (9) et (10) :

Trouver $\mathcal{U}_0^{(1)} \in W_\#(\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^\#)$ vérifiant $\int_{\Sigma_L^\#} \mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, L) dy_1 = 0$ telle que

$$\int_{\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^\#} \nabla \mathcal{U}_0^{(1)} \cdot \nabla \bar{\mathcal{V}} \, d\mathbf{y} + \int_{\Sigma_L^\#} \Lambda \mathcal{U}_0^{(1)} \bar{\mathcal{V}} \, dy_1 = \int_{\Sigma_H^\#} \bar{\mathcal{V}} \, dy_1 - \int_{\Sigma_0^\#} \bar{\mathcal{V}} \, dy_1, \quad \forall \mathcal{V} \in W_\#(\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^\#); \quad (11)$$

et

Trouver $\mathcal{U}_1^{(1)} \in W_\#(\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^\#)$ vérifiant $\int_{\Sigma_L^\#} \mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, L) dy_1 = 0$ telle que

$$\int_{\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^\#} \nabla \mathcal{U}_1^{(1)} \cdot \nabla \bar{\mathcal{V}} \, d\mathbf{y} + \int_{\Sigma_L^\#} \Lambda \mathcal{U}_1^{(1)} \bar{\mathcal{V}} \, dy_1 = - \int_{\partial \mathcal{P}_\#} n_1 \bar{\mathcal{V}} \, d\mathbf{y}, \quad \forall \mathcal{V} \in W_\#(\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^\#). \quad (12)$$

Une façon de prendre en compte les contraintes $\int_{\Sigma_L^\#} \mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, L) dy_1 = 0$ et $\int_{\Sigma_L^\#} \mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, L) dy_1 = 0$ est d'utiliser une méthode de pénalisation. Il s'agit de remplacer la condition $\partial_{y_2} \mathcal{U}_0^{(1)} + \Lambda \mathcal{U}_0^{(1)} = 0$ sur $\Sigma_L^\#$ (resp. $\partial_{y_2} \mathcal{U}_1^{(1)} + \Lambda \mathcal{U}_1^{(1)} = 0$ sur $\Sigma_L^\#$) par la condition

$$\partial_{y_2} \mathcal{U}_0^{(1)} + \Lambda \mathcal{U}_0^{(1)} + \eta \mathcal{U}_0^{(1)} = 0 , \quad (13)$$

(resp.

$$\partial_{y_2} \mathcal{U}_1^{(1)} + \Lambda \mathcal{U}_1^{(1)} + \eta \mathcal{U}_1^{(1)} = 0 ,) \quad (14)$$

où η est un petit paramètre strictement supérieur à 0. La formulation variationnelle pénalisée du problème s'écrit alors :

Trouver $\mathcal{U}_0^{(1)} \in W_\#(\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^\#)$ telle que

$$\int_{\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^\#} \nabla \mathcal{U}_0^{(1)} \cdot \nabla \bar{\mathcal{V}} dy + \int_{\Sigma_L^\#} \Lambda \mathcal{U}_0^{(1)} \bar{\mathcal{V}} dy_1 + \eta \int_{\Sigma_L^\#} \mathcal{U}_0^{(1)} \bar{\mathcal{V}} dy_1 = \int_{\Sigma_H^\#} \bar{\mathcal{V}} dy_1 - \int_{\Sigma_0^\#} \bar{\mathcal{V}} dy_1 , \quad \forall \bar{\mathcal{V}} \in W_\#(\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^\#). \quad (15)$$

(resp. Trouver $\mathcal{U}_1^{(1)} \in W_\#(\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^\#)$ telle que

$$\int_{\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^\#} \nabla \mathcal{U}_1^{(1)} \cdot \nabla \bar{\mathcal{V}} dy + \int_{\Sigma_L^\#} \Lambda \mathcal{U}_1^{(1)} \bar{\mathcal{V}} dy_1 + \eta \int_{\Sigma_H^\#} \mathcal{U}_1^{(1)} \bar{\mathcal{V}} dy_1 = - \int_{\partial \mathcal{P}_\#} n_1 \bar{\mathcal{V}} dy , \quad \forall \bar{\mathcal{V}} \in W_\#(\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^\#).) \quad (16)$$

Nous traçons les fonctions profils $\mathcal{U}_0^{(1)}$ (cf. la Figure 4.21 avec $[\delta = 1, H = 5, L = 8]$, la Figure 4.22 avec $[\delta = 1, H = 6, L = 8]$ et la Figure 4.23 avec $[\delta = 0.4, H = 6, L = 8]$) et $\mathcal{U}_1^{(1)}$ (cf. la Figure 4.24 avec $[\delta = 1, H = 5, L = 8]$, la Figure 4.25 avec $[\delta = 1, H = 6, L = 8]$ et la Figure 4.26 avec $[\delta = 0.4, H = 6, L = 8]$) pour différentes dispositions de particules. Visuellement $\mathcal{U}_0^{(1)}$ et $\mathcal{U}_1^{(1)}$ tendent bien vers 0 quand y_2 devient de plus en plus grand.

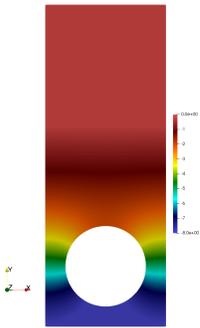


Figure 4.21 – Solution $\mathcal{U}_0^{(1)}$ (1)

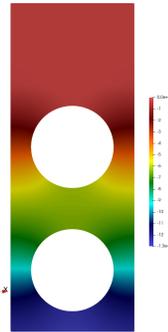


Figure 4.22 – Solution $\mathcal{U}_0^{(1)}$ (2)

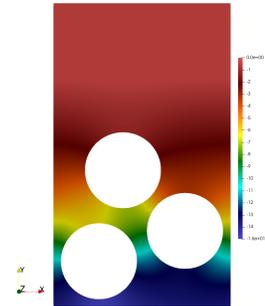


Figure 4.23 – Solution $\mathcal{U}_0^{(1)}$ (3)

Nous pouvons aussi tracer les coupes verticales (sur la partie gauche des graphes précédents) des fonctions profils $\mathcal{U}_0^{(1)}$ (cf. Figure 4.27, 4.28 et Figure 4.29) et $\mathcal{U}_1^{(1)}$ (cf. Figure 4.30, Figure 4.31 et Figure 4.32). Les coupes de $\mathcal{U}_0^{(1)}$ permettent de vérifier la discontinuité de la trace normale de $\mathcal{U}_0^{(1)}$ au point $y_2 = H$. Les coupes de $\mathcal{U}_1^{(1)}$ nous permettent de mettre en avant que la solution du problème varie au bord des inclusions.

Une fois les fonctions profils $\mathcal{U}_0^{(1)}$ et $\mathcal{U}_1^{(1)}$ calculées, nous pouvons calculer les coefficients $a_0^{(2)}$, $a_1^{(2)}$ et $a_2^{(2)}$. Pour rappel,

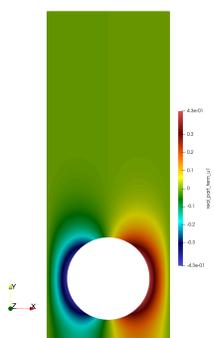


Figure 4.24 – Solution $\mathcal{U}_1^{(1)}$ (1)

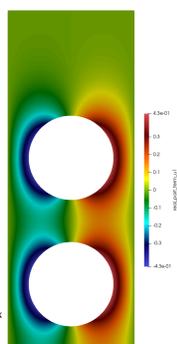


Figure 4.25 – Solution $\mathcal{U}_1^{(1)}$ (2)

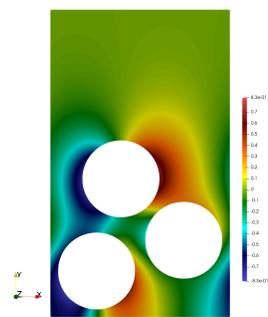


Figure 4.26 – Solution $\mathcal{U}_1^{(1)}$ (3)

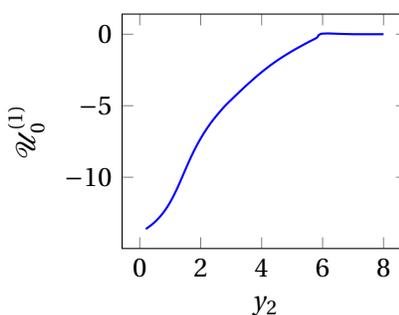
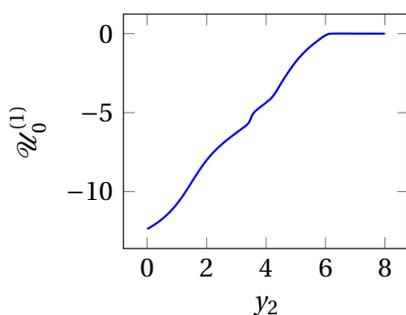
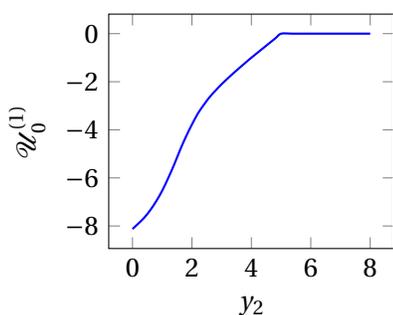


Figure 4.27 – Coupe verticale de $\mathcal{U}_0^{(1)}$

Figure 4.28 – Coupe verticale de $\mathcal{U}_0^{(1)}$

Figure 4.29 – Coupe verticale de $\mathcal{U}_0^{(1)}$

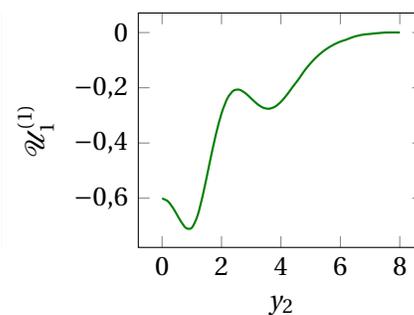
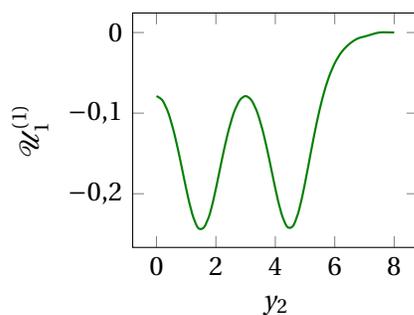
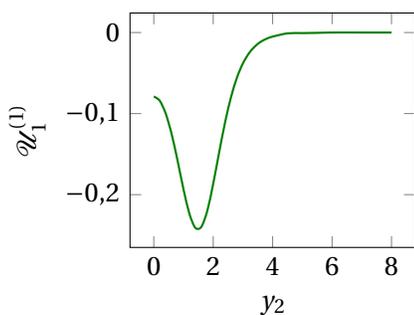


Figure 4.30 – Coupe verticale de $\mathcal{U}_1^{(1)}$

Figure 4.31 – Coupe verticale de $\mathcal{U}_1^{(1)}$

Figure 4.32 – Coupe verticale de $\mathcal{U}_1^{(1)}$

- $a_0^{(2)}$ est donnée par :

$$a_0^{(2)} = \frac{1}{T} \left[|\mathcal{B}_0^H| + \Upsilon^2 \int_{\Sigma_0^\#} \mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, 0) dy_1 \right],$$

avec $\frac{1}{T} |\mathcal{B}_0^H| = \left(H - \frac{\text{Aire}(\text{particules})}{T} \right)$ est réel, positif et affine par rapport à H. Avec les fonctions profils précédentes, dans le cas (1,2) nous avons T = 3 et dans le cas (3) nous avons T = 4.66274, nous obtenons :

$$(1) a_0^{(2)} = 3.9528 - 16.7028i; \quad (2) a_0^{(2)} = 3.9056 - 25.1797i; \quad (3) a_0^{(2)} = 3.9787 - 28.2885i.$$

- $a_1^{(2)}$ est donnée par :

$$a_1^{(2)} = \frac{i\gamma}{T} \left[2 \int_{\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^\#} \partial_{y_1} \mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, y_2) \, dy - \int_{\Sigma_0^\#} \mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, 0) \, dy_1 - \int_{\partial \mathcal{D}_\#} \mathcal{U}_0^{(1)}(y_1, y_2) \, n_1 \, dy \right] .$$

Avec les fonctions profils précédentes, nous obtenons

$$(1) a_1^{(2)} = (-9.7765 + 9.7765i) \times 10^{-9}; \quad (2) a_1^{(2)} = (-6.42317 + 6.42318i) \times 10^{-9}; \quad (3) a_1^{(2)} = (9.43027 - 9.43027i) \times 10^{-4}.$$

- $a_2^{(2)}$ est donnée par :

$$a_2^{(2)} = \frac{1}{T} \left[2 \int_{\mathcal{B}_0^L \setminus \Sigma_H^\#} \partial_{y_1} \mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, y_2) \, dy + |\mathcal{B}_0^H| - \int_{\partial \mathcal{D}_\#} \mathcal{U}_1^{(1)}(y_1, y_2) \, n_1 \, dy \right] .$$

Avec les fonctions profils précédentes, nous obtenons

$$(1) a_2^{(2)} = 3.45325; \quad (2) a_2^{(2)} = 2.89573; \quad (3) a_2^{(2)} = 3.02697.$$

4.3.3 Validation qualitative

Nous sommes désormais en mesure de simuler notre modèle effectif. Nous traçons, d'une part, la partie réelle du champ diffracté obtenue avec la solution de référence. En parallèle, nous traçons la solution obtenue au dessus de $\Sigma_{\varepsilon H}$ avec la formule analytique de v_2^ε définie par (7) et nous reconstruisons le champ proche à l'aide de (8).

Pour les Figures 4.33, 4.34 et 4.35, nous considérons 15 particules alignées de taille $\varepsilon = 10^{-4}m$ espacées les unes des autres d'une distance $\varepsilon\delta$ avec $\delta = 0.4$, une fréquence de 2GHz ($\lambda = 15$ cm), $\gamma = 1 + i$, $\theta = \pi/4$, $H = 5$ et $L = 15$. La Figure 4.33 représente la partie réelle du champ diffracté pour la solution de référence u_d^ε , obtenue à l'aide d'une méthode éléments finis. La Figure 4.34 représente la partie réelle du champ diffracté obtenue avec le modèle effectif $v_{2,d}^\varepsilon$, calculé à l'aide de la formule analytique. La Figure 4.35 représente la reconstruction de la solution à l'aide du modèle proposé. Visuellement, nous avons construit une bonne approximation.

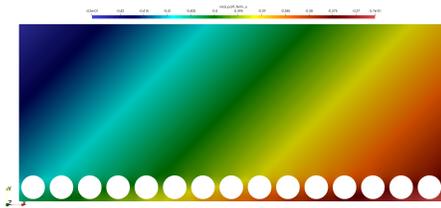


Figure 4.33 – Solution de référence u_d^ε

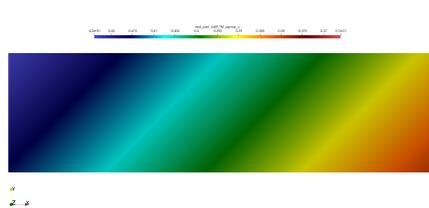


Figure 4.34 – Solution approchée $v_{2,d}^\varepsilon$

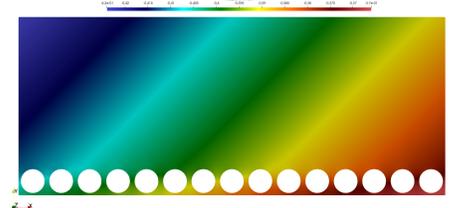
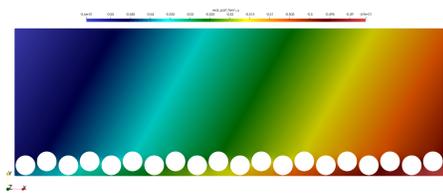
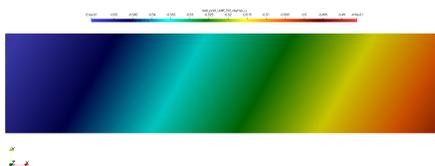
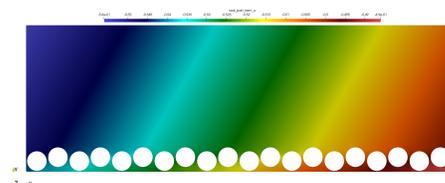
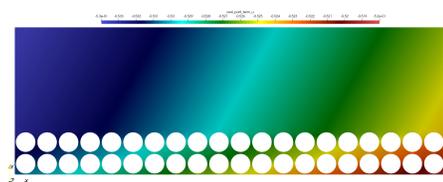
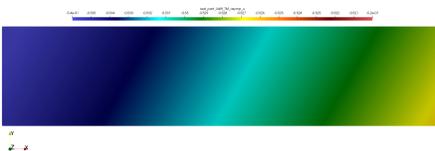
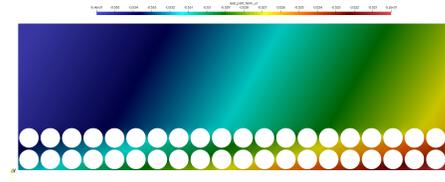


Figure 4.35 – $v_2^\varepsilon + V_2^\varepsilon - u_{inc}$

Pour les Figures 4.36, 4.37 et 4.38, nous considérons 20 particules en sorte de quinconce de taille $\varepsilon = 10^{-4}m$ espacées les unes des autres d'une distance $\varepsilon\delta$ avec $\delta = 0.2$, une fréquence de 2GHz ($\lambda = 15$ cm), $\gamma = 1 + i$, $\theta = \pi/3$, $H = 5$ et $L = 15$. La Figure 4.36 représente la partie réelle du champ diffracté pour la solution de référence u_d^ε . La Figure 4.37 représente la partie réelle du champ diffracté obtenue avec le modèle effectif $v_{2,d}^\varepsilon$. La Figure 4.38 représente la reconstruction de la solution à l'aide du modèle proposé.


 Figure 4.36 – Solution de référence u_d^ϵ

 Figure 4.37 – Solution approchée $v_{2,d}^\epsilon$

 Figure 4.38 – $v_2^\epsilon + V_2^\epsilon - u_{inc}$

Pour les Figures 4.39, 4.40 et 4.41, nous considérons 40 particules sur deux lignes de taille $\epsilon = 10^{-4}$ m espacées les unes des autres d'une distance $\epsilon\delta$ avec $\delta = 0.2$, une fréquence de 1GHz ($\lambda = 30$ cm), $\gamma = 1.5 + 0.5i$, $\theta = \pi/3$, $H = 5$ et $L = 15$. La Figure 4.39 représente la partie réelle du champ diffracté pour la solution de référence u_d^ϵ , obtenue à l'aide d'une méthode éléments finis. La Figure 4.40 représente la partie réelle du champ diffracté obtenue avec le modèle effectif $v_{2,d}^\epsilon$, calculé à l'aide de la formule analytique. La Figure 4.41 représente la reconstruction de la solution à l'aide du modèle proposé.


 Figure 4.39 – Solution de référence u_d^ϵ

 Figure 4.40 – Solution approchée $v_{2,d}^\epsilon$

 Figure 4.41 – $v_2^\epsilon + V_2^\epsilon - u_{inc}$

4.3.4 Validation quantitative

Pour valider notre modèle, nous souhaitons comparer le coefficient de réflexion de la solution de référence donné par (1) aux coefficients de réflexion de l'approximation à l'ordre 1 donné par $r_1^\epsilon = \frac{ik_2 - ik\gamma}{ik_2 + ik\gamma} \exp(ik_2\epsilon H)$ et de l'approximation à l'ordre 2 donné par (6). Nous étudions la dépendance de l'erreur entre les coefficients de réflexion en fonction de la taille des particules ϵ et de différents paramètres de notre modèle.

Dans les Figures 4.42 et 4.43, nous considérons une particule, $\gamma = 1 + i$, $H = 5$, $L = 5.1$, $\delta = 0.2$, $\theta = \pi/3$, nous faisons varier ϵ (0.001, 0.0005, 0.0001, 0.00005, 0.00001 et 0.000005) et la longueur d'onde λ (60 cm, 15 cm et 2.9 cm) et nous représentons l'erreur relative pour le modèle d'ordre 1 et le modèle d'ordre 2. Nous retrouvons bien les ordres de convergence théoriques.

Comme dans le cas Dirichlet, nous observons que plus la longueur d'onde λ est grande, plus petite est l'erreur. Le taux de convergence est par contre le même.

Dans les Figures 4.44 et 4.45, nous considérons une particule, $\gamma = 1 + i$, $H = 5$, $L = 5.1$, $\theta = \pi/3$, une fréquence de 2GHz ($\lambda = 15$ cm), nous faisons varier ϵ (0.001, 0.0005, 0.0001, 0.00005, 0.00001 et 0.000005) et l'espacement δ entre deux particules (1.0, 0.2, 0.02, 0.002, 0.0002, 0.00002) et nous représentons l'erreur relative pour le modèle

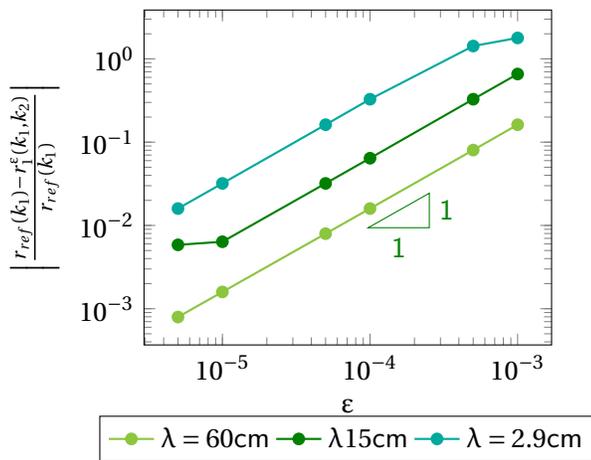


Figure 4.42 – Erreur pour le modèle d'ordre 1 par rapport à ϵ en fonction de λ

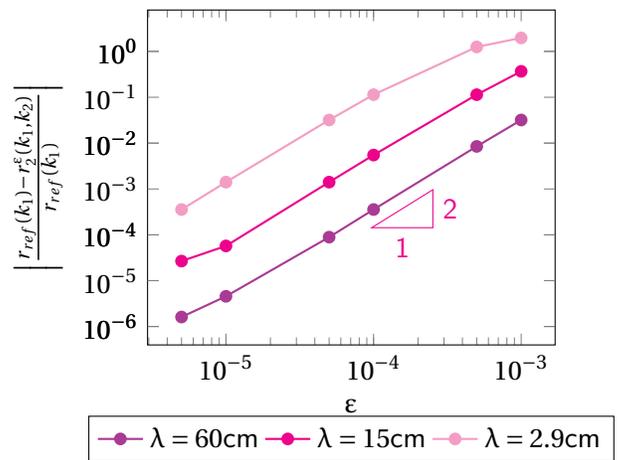


Figure 4.43 – Erreur pour le modèle d'ordre 2 par rapport à ϵ en fonction de λ

d'ordre 1 et le modèle d'ordre 2. Nous retrouvons bien les ordres de convergence théoriques.

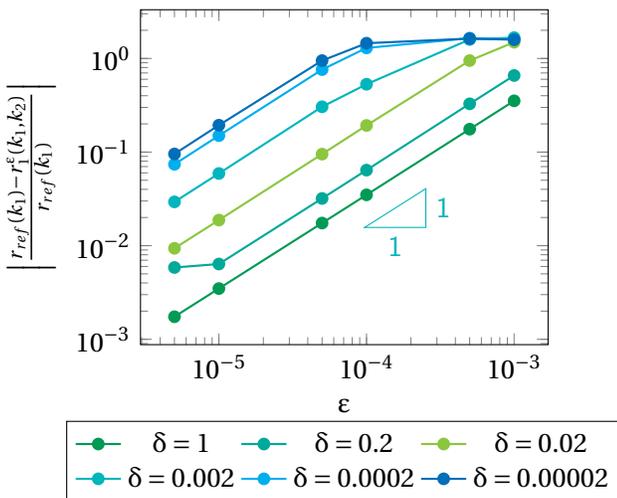


Figure 4.44 – Erreur pour le modèle d'ordre 1 par rapport à ϵ en fonction de δ

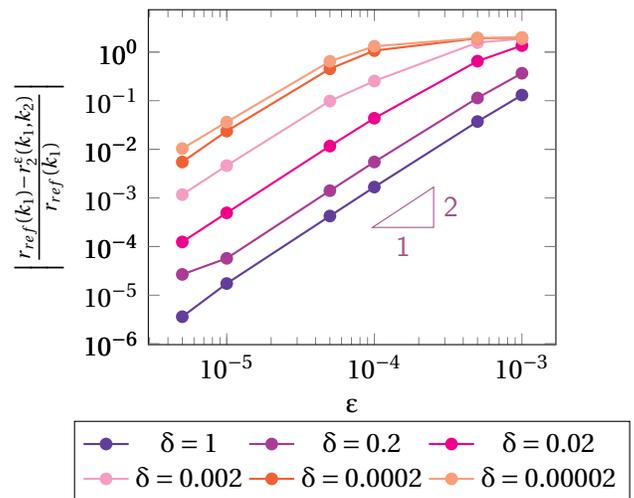


Figure 4.45 – Erreur pour le modèle d'ordre 2 par rapport à ϵ en fonction de δ

Contrairement au cas Dirichlet, le coefficient de réflexion dépend de la distance δ entre les particules. Plus δ est petit, plus grande est l'erreur et moins vite il est possible d'observer la convergence.

Dans les Figures [4.46](#) et [4.47](#), nous considérons deux particules empilées, $H = 7$, $L = 7.1$, $\theta = \pi/3$, une fréquence de 2GHz ($\lambda = 15$ cm), $\delta = 0.02$ et nous faisons varier ϵ (0.001, 0.0005, 0.0001, 0.00005, 0.00001 et 0.000005) et le coefficient d'impédance γ (1, $1.5 + 0.5i$, $5.5 + 0.5i$). Nous représentons l'erreur relative pour le modèle d'ordre 1 et le modèle d'ordre 2. Nous retrouvons encore une fois les ordres de convergence théoriques.

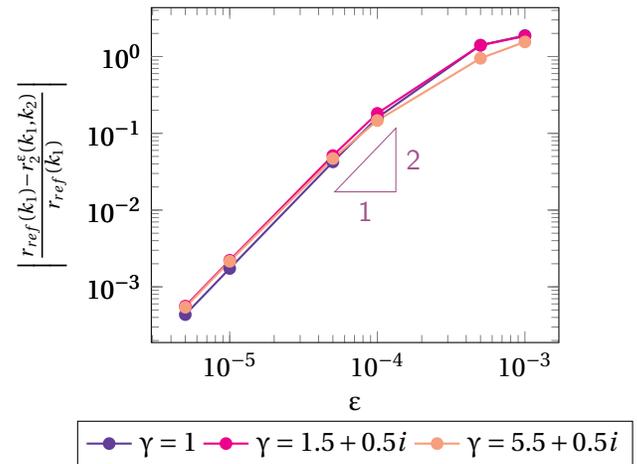
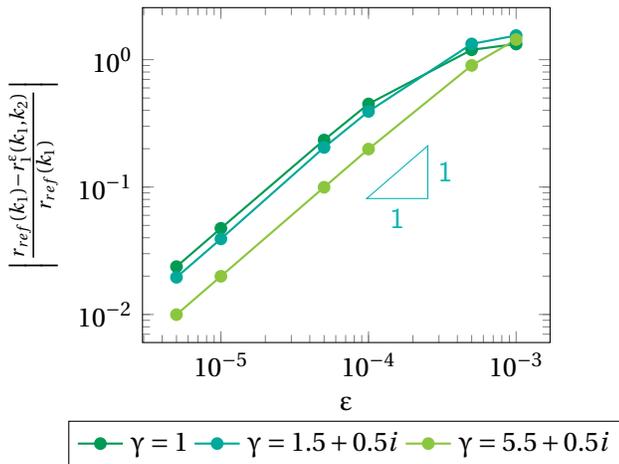


Figure 4.46 – Erreur pour le modèle d'ordre 1 par rapport à ϵ en fonction de γ

Figure 4.47 – Erreur pour le modèle d'ordre 2 par rapport à ϵ en fonction de γ

Nous retrouvons bien la dépendance en γ du coefficient de réflexion pour le modèle à l'ordre 1. Pour le modèle à l'ordre 2, nous n'observons pas de dépendance en γ pour le coefficient de réflexion.

Dans les Figures 4.48 et 4.49, nous considérons trois particules, $H = 7$, $L = 7.1$, $\gamma = 1 + 0.5i$, $\delta = 0.02$, une fréquence de 2GHz ($\lambda = 15$ cm), nous faisons varier ϵ (0.001, 0.0005, 0.0001, 0.00005, 0.00001 et 0.000005) et l'angle d'incidence θ (0, $\pi/6$, $\pi/4$) et nous représentons l'erreur relative pour le modèle d'ordre 1 et le modèle d'ordre 2. Nous retrouvons bien les ordres de convergence théoriques.

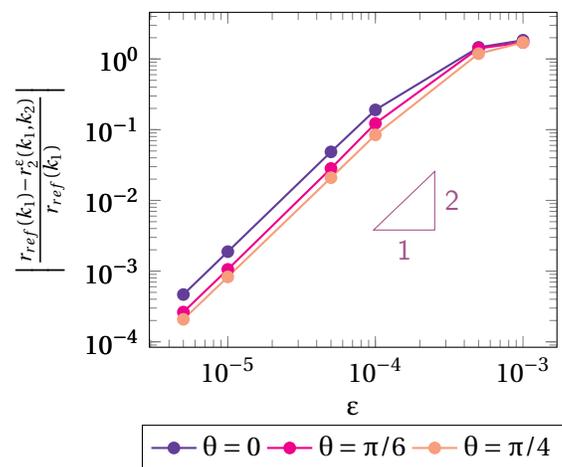
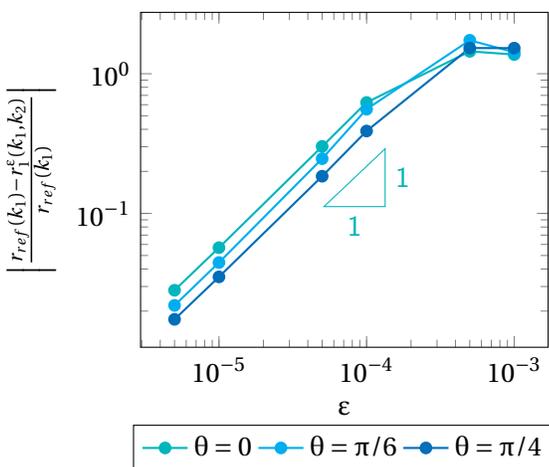


Figure 4.48 – Erreur pour le modèle d'ordre 1 par rapport à ϵ en fonction de θ

Figure 4.49 – Erreur pour le modèle d'ordre 2 par rapport à ϵ en fonction de θ

Nous n'observons pas de dépendance sur l'évolution de coefficient de réflexion en fonction de ϵ par rapport à θ .

4.4 Évolution du coefficient de réflexion dans le cas d'une condition de Neumann

Dans les sections précédentes, nous avons validé notre modèle. Nous allons maintenant effectuer une étude sur l'évolution du coefficient de réflexion quand nous considérons une condition de Neumann sur les particules. Nous n'effectuons pas l'étude dans le cas d'une condition de Dirichlet car quand les particules sont proches, la structure se comporte comme un plan conducteur, il faut beaucoup éloigner les particules pour obtenir un coefficient de réflexion différent de 1.

En l'absence de particules, le coefficient de réflexion est donné par la formule

$$|r(\theta, \mathbf{Z})| = \frac{\cos\theta - \mathbf{Z}}{\cos\theta + \mathbf{Z}}.$$

Dans la Figure 4.50, nous cherchons à mettre en évidence l'influence du coefficient d'impédance \mathbf{Z} sur le coefficient de réflexion $|r|$ en fonction de l'angle d'incidence θ pour une fréquence de 2GHz.

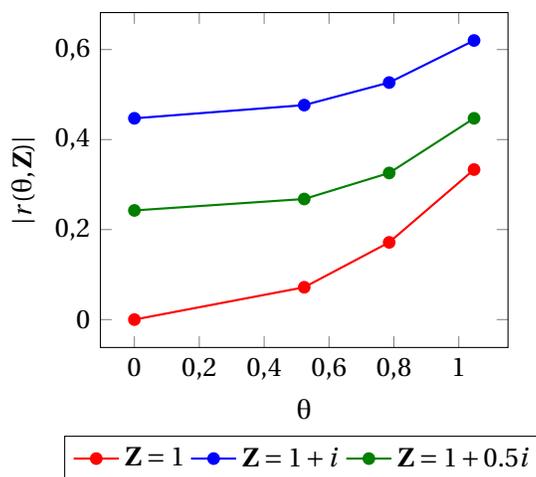


Figure 4.50 – Influence de \mathbf{Z} sur le coefficient de réflexion $|r|$ en fonction de θ

Il faut remarquer que en l'absence de particules pour $\mathbf{Z} = 1$ et $\theta = 0$ (c'est-à-dire en incidence normale), nous avons $|r| = 0$; dans ce cas le plan impédant se comporte comme une structure transparente.

Rajoutons maintenant une couche de particules, nous rappelons la formule pour déterminer le coefficient de réflexion (6)

$$r_2^\epsilon(k_1, k_2) = \frac{ik_2 - (ik\mathbf{Z} - \epsilon k^2 a_0^{(2)}) + \epsilon k_1 (ika_1^{(2)} - a_2^{(2)} k_1)}{ik_2 + (ik\mathbf{Z} - \epsilon k^2 a_0^{(2)}) - \epsilon k_1 (ika_1^{(2)} - a_2^{(2)} k_1)} \exp(ik_2 \epsilon H).$$

Dans les différentes simulations qui vont suivre, nous souhaitons mettre en évidence la transition entre une structure transparente ($|r_2^\epsilon| = 0$) et une structure conductrice ($|r_2^\epsilon| = 1$) en jouant sur différents paramètres : la

fréquence, la forme des particules, la taille et la disposition de la couche. Pour cela, nous nous plaçons dans le cas où $\mathbf{Z} = 1$ et $\theta = 0$. Le coefficient de réflexion se restreint alors à la formule explicite suivante

$$r_2^\varepsilon(0, k_2) = \frac{\varepsilon k_2^2 a_0^{(2)}}{2ik_2 - \varepsilon k_2^2 a_0^{(2)}} \exp(ik_2 \varepsilon H).$$

qui ne dépend que du coefficient $a_0^{(2)}$.

4.4.1 Impact de la fréquence

Commençons par regarder l'impact de la fréquence. Nous considérons une couche périodique de particules circulaires ne contenant qu'une seule particule en hauteur. Nous traçons dans la Figure 4.52 l'évolution du coefficient de réflexion en fonction de la fréquence pour différents espacements δ entre les particules (2δ correspond à la distance entre deux particules). La Figure 4.51 représente une période du milieu considéré. Nous supposons ici que les particules ont pour rayon $\varepsilon = 10^{-4}$ m.

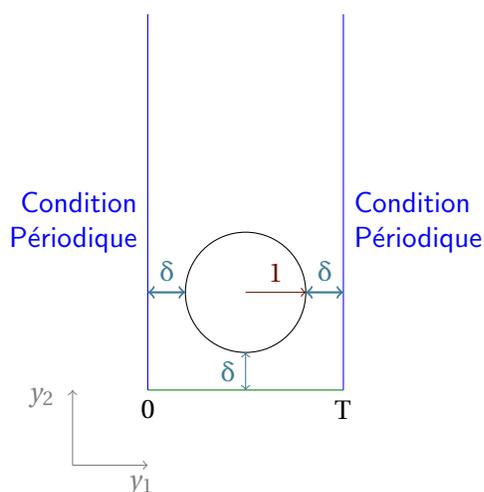


Figure 4.51 – Géométrie pour une particule circulaire

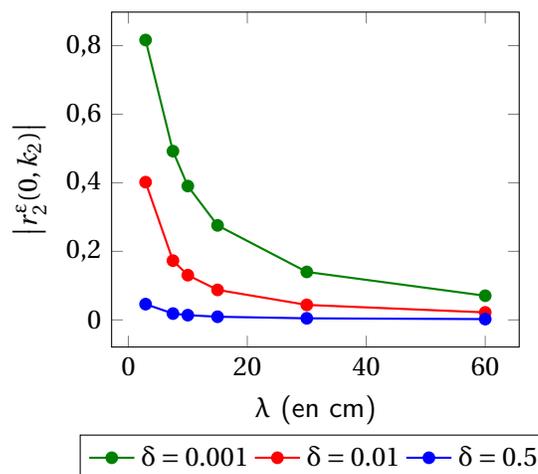


Figure 4.52 – Influence de la fréquence sur le coefficient de réflexion $|r_2^\varepsilon(0, k_2)|$ pour différents δ

La Figure 4.52 met en évidence que plus les particules vont être proches les unes des autres, plus la convergence d'une structure transparente à une structure conductrice avec l'augmentation de la fréquence est rapide.

4.4.2 Influence de la forme de la particule

Poursuivons avec l'impact de la forme de la particule. Nous considérons deux couches périodiques différentes constituées d'une particule circulaire en hauteur et d'une particule rectangulaire de même aire en hauteur. Nous traçons dans la Figure 4.54 l'évolution du coefficient de réflexion en fonction de δ la distance au bord pour les deux formes. Nous fixons la fréquence à 2GHz ($\lambda = 15$ cm) et $\varepsilon = 10^{-4}$ m.

La Figure 4.54 illustre le fait que plus les particules se rapprochent, plus le coefficient de réflexion augmente. Pour une particule rectangulaire nous obtenons la transition d'une structure transparente à conductrice. Pour le

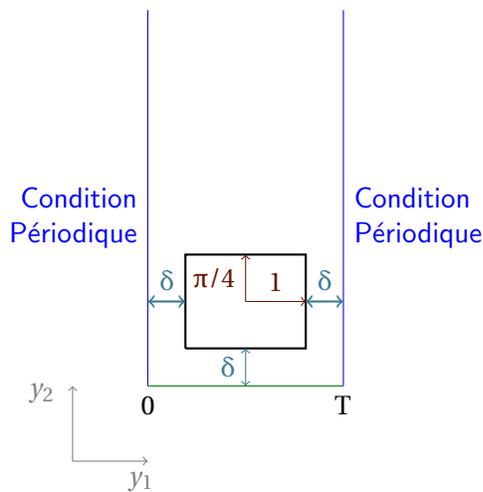


Figure 4.53 – Géométrie pour une particule rectangulaire

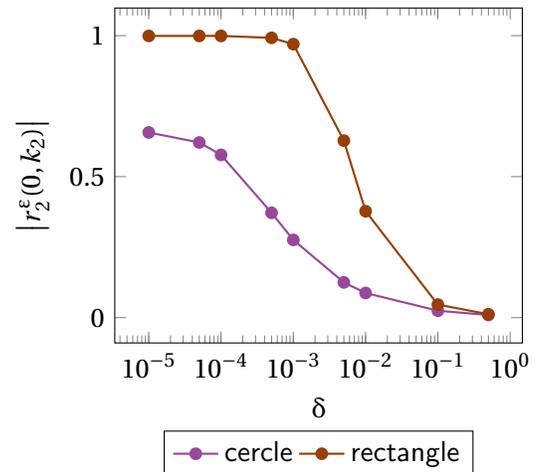


Figure 4.54 – Influence de δ sur le coefficient de réflexion $|r_2^e(0, k_2)|$ pour différentes formes

cercle, la convergence est moins rapide et pour $\delta = 10^{-5}m$ nous n'avons pas encore atteint un coefficient égal à 1. Nous allons regarder ce qui se passe quand nous augmentons la hauteur de la couche.

4.4.3 Influence de la hauteur de la couche

Nous regardons maintenant l'impact de l'épaisseur de la couche. Pour cela, nous empilons plusieurs couches de particules espacées entre elles d'une distance 2δ . Nous traçons dans la Figure 4.56 l'évolution du coefficient de réflexion en fonction de δ . Nous fixons la fréquence à 2GHz et $\epsilon = 10^{-4}m$. Nous considérons dans cette section que les particules sont circulaires.

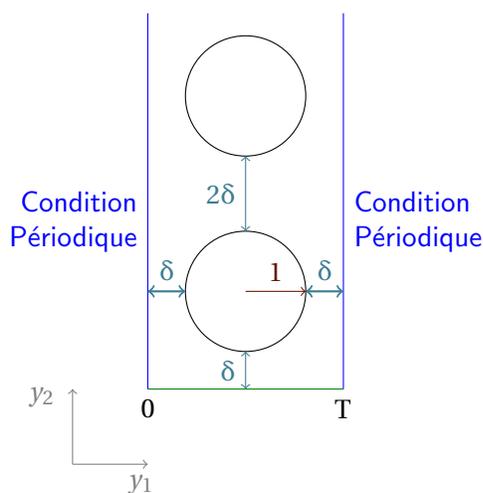


Figure 4.55 – Géométrie pour des couches empilées

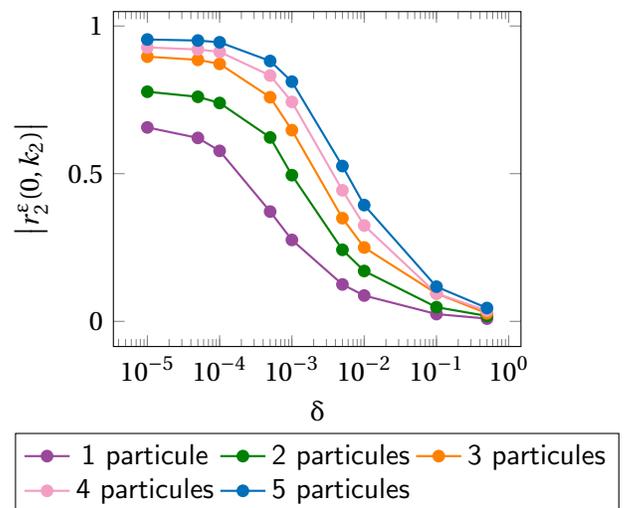


Figure 4.56 – Influence de plusieurs couches empilées sur le coefficient de réflexion $|r_2^e(0, k_2)|$ en fonction de δ

La Figure 4.56 met en exergue que plus le nombre de couches augmente plus la transition se fait rapidement.

4.4.4 Influence de la disposition des particules

Après avoir regardé l'impact de l'épaisseur de la couche, nous nous intéressons à l'influence de la répartition des particules dans la couche. Ainsi, nous comparons les résultats précédents avec une répartition en quinconce. Nous traçons dans la Figure 4.58 l'évolution du coefficient de réflexion en fonction de δ en fixant la fréquence à 2GHz et $\epsilon = 10^{-4}$.

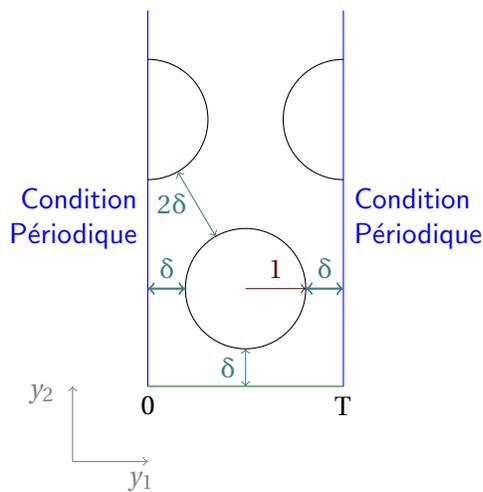


Figure 4.57 – Géométrie pour des couches en quinconce

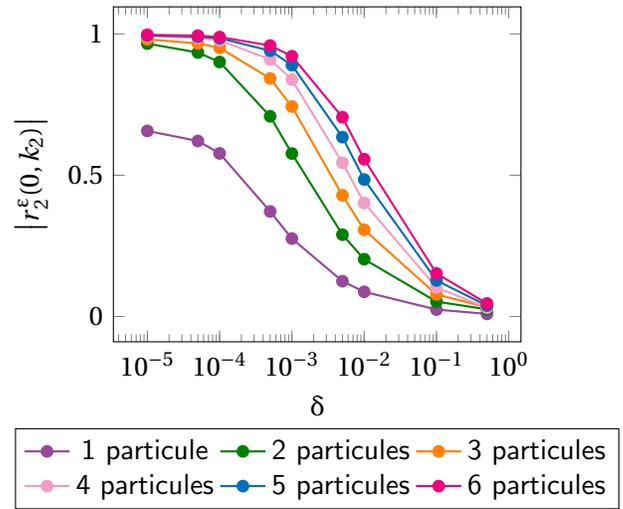


Figure 4.58 – Influence de plusieurs couches en quinconce sur le coefficient de réflexion $|r_2^\epsilon(0, k_2)|$ en fonction de δ

Si nous comparons la Figure 4.56 et la Figure 4.58, nous remarquons que la transition se fait beaucoup plus rapidement pour une répartition en quinconce.

Remarque 19. Notons que la convergence pour un milieu dont la période contient 6 particules en quinconce est presque égal à celle pour un milieu dont la période contient 5 particules empilées. Nous traçons l'évolution du coefficient de réflexion sur le même graphe pour comparer l'évolution (Figure 4.59).

4.4.5 Taux de remplissage

Nous regardons l'impact du taux de remplissage ρ . Le taux de remplissage est donné par $\rho = \frac{\text{Aire(particules)}}{\text{Aire(couche)}}$. Ce paramètre sera intéressant pour pouvoir par la suite comparer ces résultats aux résultats d'une répartition aléatoire des particules.

Pour une particule circulaire, nous avons le tableau suivant qui permet de relier δ à $\rho = \frac{\pi}{4(\delta + 1)^2}$

δ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
ρ	0.649	0.545	0.465	0.401	0.349	0.307	0.272	0.242	0.218	0.196

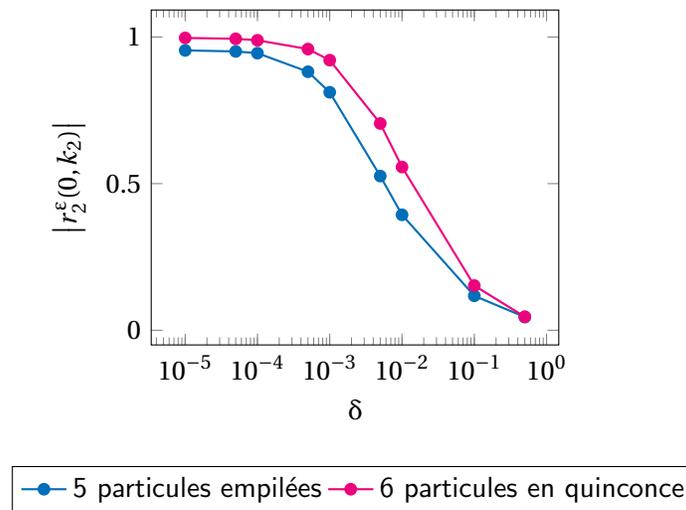


Figure 4.59 – Comparaison entre particules empilées et particules en quinconce pour une hauteur de couche équivalente

δ	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0
ρ	0.126	0.087	0.064	0.049	0.03

Dans la Figure 4.60, nous traçons l'évolution du coefficient de réflexion en fonction du taux de remplissage pour une fréquence de 2GHz, $Z = 1$, $\theta = 0$, des particules de rayon $\epsilon = 10^{-4}$ m. Plus le taux de remplissage augmente, plus le coefficient de réflexion augmente. Notons que pour avoir un passage d'un coefficient égal à 0 à un coefficient égal à 1, il faut un taux de remplissage très élevé ce qui correspond à des particules très très proche $\delta \ll 1$.

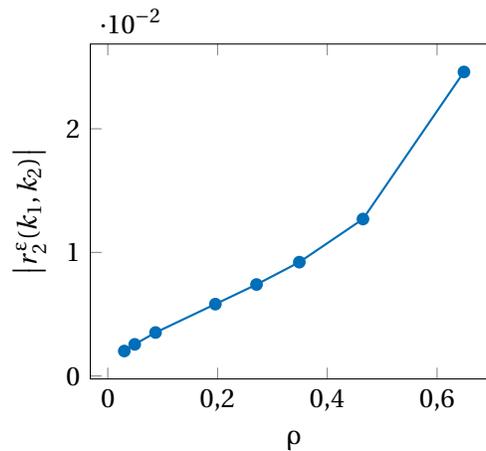


Figure 4.60 – Évolution du coefficient de réflexion en fonction du taux de remplissage

Deuxième partie

Cas bi-dimensionnel d'une répartition aléatoire des particules

Chapitre 5

Présentation du modèle

Sommaire

5.1 Géométrie	121
5.2 Formulation du problème	122
5.3 Condition d'onde sortante et opérateur de Dirichlet-to-Neumann	124
5.4 Caractère bien posé du problème de diffraction	126
5.5 Cadre aléatoire	129
5.6 Caractère bien posé du problème de diffraction dans le cadre aléatoire	131

Dans cette partie, nous nous intéressons au problème où, comme dans la première partie, l'objet est plan mais dans cette partie la distribution des particules dans la couche est aléatoire. Nous étudions l'équation de Helmholtz en 2D et en 3D. Nous considérons dans cette partie un terme source plutôt qu'une onde plane car le cadre fonctionnel et variationnel est plus simple.

Dans ce chapitre, nous commençons par présenter la géométrie considérée, nous présentons le problème de diffraction et nous montrons qu'il est bien posé, si les tailles des particules et de la couche sont assez petites, avec une constante de stabilité indépendante de la géométrie et donc de la réalisation. Après avoir introduit les hypothèses sur la loi de distribution des particules (qui nous permettront de faire le développement asymptotique), nous montrons le caractère bien posé dans un cadre fonctionnel qui prend en compte l'aléa.

5.1 Géométrie

Soit \mathbf{x} un point dans \mathbb{R}^d pour $d = 2$ ou $d = 3$. Nous notons \mathbf{x}_{\parallel} la composante tangentielle de \mathbf{x} , en particulier $\mathbf{x}_{\parallel} = x_1$ pour $d = 2$ et $\mathbf{x}_{\parallel} = (x_1, x_2)$ pour $d = 3$. Nous avons alors $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_{\parallel}, x_d)$.

Nous considérons un plan infini, noté $\Sigma_0 := \{x_d = 0\}$, recouvert d'une couche mince notée \mathcal{L}^ε de hauteur εh_L de particules réparties aléatoirement $\mathcal{P}_\omega^\varepsilon$ de taille ε . Considérons pour cela \mathcal{P}_ω un ensemble de particules d'échelle 1 au dessus de notre plan Σ_0 . Nous obtiendrons notre collection de particules $\mathcal{P}_\omega^\varepsilon$ en mettant les particules à l'échelle ε .

Nous commençons par présenter les différentes hypothèses que nous faisons sur la distribution des particules. Nous supposons qu'une particule est un ouvert borné connexe \mathcal{O} de rayon $r_{\mathcal{O}}$ normalisé à 1 où $r_{\mathcal{O}}$ est défini par

$r_{\mathcal{O}} := \frac{1}{2} \sup_{x,y \in \mathcal{O}} |x - y|$. Notons que $r_{\mathcal{O}}$ correspond à la définition classique du rayon quand \mathcal{O} est un disque.

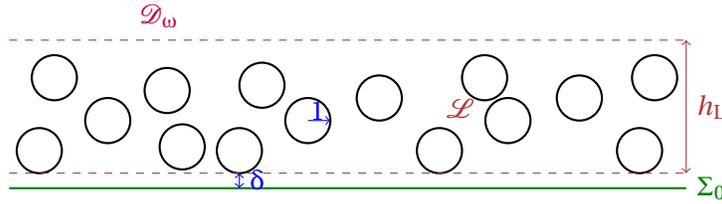
Dans toute la suite de cette partie, l'indice ω indique une dépendance en la distribution aléatoire des particules. Nous détaillerons le cadre aléatoire que nous considérons dans la section [5.5](#).

Soit $\{\mathbf{y}_{\omega}^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ le processus ponctuel correspondant aux centres des particules. Nous supposons que :

- les particules se trouvent au moins à une distance $\delta > 0$ les unes des autres et de Σ_0 .
- l'ensemble des particules \mathcal{P}_{ω} est inclus dans la couche $\mathcal{L} := \mathbb{R}^{d-1} \times (\delta, h_L + \delta)$, où h_L est la taille de la couche.
- $\{\mathbf{y}_{\omega}^m\}_m$ est stationnaire, c'est-à-dire la loi de distribution \mathbb{P} de $\{\mathbf{y}_{\omega}^m\}_m$ est indépendante de la variable spatiale. De ce fait, pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, la probabilité qu'un point \mathbf{y}_{ω}^m se trouve dans un voisinage de \mathbf{x} est la même que la probabilité qu'il existe un point dans un voisinage de $\mathbf{x} + \mathbf{y}$. Ceci sera détaillé dans la section [5.5](#).

Soit $\varepsilon > 0$ la taille réelle des particules. L'ensemble des particules à l'échelle ε contenues dans la couche mince $\mathcal{L}^{\varepsilon} := \mathbb{R}^{d-1} \times (\varepsilon\delta, \varepsilon\delta + \varepsilon h_L)$ de hauteur εh_L est alors notée $\mathcal{P}_{\omega}^{\varepsilon} := \varepsilon \mathcal{P}_{\omega}$.

Nous introduisons le domaine $\mathcal{D}_{\omega} := \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+ \setminus \overline{\mathcal{P}_{\omega}}$ et $\mathcal{D}_{\omega}^{\varepsilon} := \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+ \setminus \overline{\mathcal{P}_{\omega}^{\varepsilon}}$ pour une distribution de particules ω donnée.



5.2 Formulation du problème

Équation de Helmholtz

Pour une fonction source donnée dont le support est éloigné de la couche,

$$f \in L^2(\mathcal{D}_{\omega}^{\varepsilon}) \text{ telle que } \text{Supp}(f) \text{ est compact et inclus dans } \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{\omega}^{\varepsilon}; x_d > \varepsilon h_L\}, \quad (1)$$

nous nous intéressons à la solution u_{ω}^{ε} de l'équation de Helmholtz

$$-\Delta u_{\omega}^{\varepsilon} - k^2 u_{\omega}^{\varepsilon} = f \quad \text{dans } \mathcal{D}_{\omega}^{\varepsilon}, \quad (2)$$

où k est le nombre d'onde.

Remarque 20. *Nous considérons ici le cas d'un terme source plutôt qu'une onde plane car le cadre fonctionnel et variationnel est plus simple. L'extension des résultats théoriques au cas de l'onde plane est une perspective. Cependant, nous supposons pour le numérique que les résultats théoriques obtenus s'étendent au cas de l'onde plane.*

Condition d'impédance sur Σ_0

Sur Σ_0 , nous considérons une condition de Robin

$$-\partial_{x_d} u_\omega^\varepsilon + ik\gamma u_\omega^\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_0, \quad (3)$$

où le coefficient $\gamma \in \mathbb{C}$ est tel que

$$\Re(\gamma) > 0.$$

Condition de conducteur parfait sur les particules $\mathcal{D}_\omega^\varepsilon$

A la frontière des particules $\partial\mathcal{D}_\omega^\varepsilon$, nous imposons au champ soit une condition de Dirichlet homogène

$$u_\omega^\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\mathcal{D}_\omega^\varepsilon; \quad (4)$$

soit une condition de Neumann homogène

$$\nabla u_\omega^\varepsilon \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\mathcal{D}_\omega^\varepsilon; \quad (5)$$

où \vec{n} désigne le vecteur normal à la frontière $\partial\mathcal{D}_\omega^\varepsilon$ extérieur à $\mathcal{D}_\omega^\varepsilon$.

Nous rappelons que ces conditions correspondent pour l'équation de Maxwell aux polarisations TE et TM respectivement.

Condition de radiation

Enfin, la formulation du problème doit être complétée par une condition de radiation. Comme dans [CWM05, CWE10] (où une condition aux limites de Dirichlet sur l'hyperplan infini est considérée) et dans [HLQZ15, BR19] (où une condition aux limites d'impédance est considérée mais sans les particules), nous utilisons la condition de radiation à propagation sortante ("Upward propagating radiation condition (UPRC)" en anglais). Cette condition d'onde sortante est détaillée dans la section suivante.

Problème de diffraction

Finalement, le problème de diffraction s'écrit :

Trouver u_ω^ε telle que

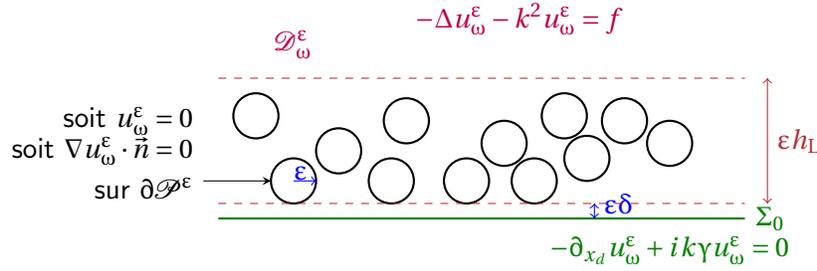
$$\begin{cases} -\Delta u_\omega^\varepsilon - k^2 u_\omega^\varepsilon = f & \text{dans} \quad \mathcal{D}_\omega^\varepsilon, \\ -\partial_{x_d} u_\omega^\varepsilon + ik\gamma u_\omega^\varepsilon = 0 & \text{sur} \quad \Sigma_0, \\ u_\omega^\varepsilon \text{ est une onde sortante;} & \end{cases} \quad (\text{P}_\omega^\varepsilon)$$

et soit

$$u_\omega^\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\mathcal{D}_\omega^\varepsilon; \quad (\text{CD}_\omega)$$

soit

$$\nabla u_\omega^\varepsilon \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\mathcal{D}_\omega^\varepsilon. \quad (\text{CN}_\omega)$$



5.3 Condition d'onde sortante et opérateur de Dirichlet-to-Neumann

Nous allons dans cette section rendre plus explicite la notion de condition d'onde sortante pour notre problème. Comme dans le chapitre 2, nous introduisons l'interface située au dessus des particules

$$\Sigma_{\varepsilon L} := \{x_d = \varepsilon L\} \quad \text{avec} \quad L > (\delta + h_L); \quad (6)$$

et nous notons

$$\mathcal{B}_{\omega,0}^{\varepsilon L} := \mathbb{R}^{d-1} \times (0, \varepsilon L) \setminus \overline{\mathcal{P}_\omega^\varepsilon} \quad (7)$$

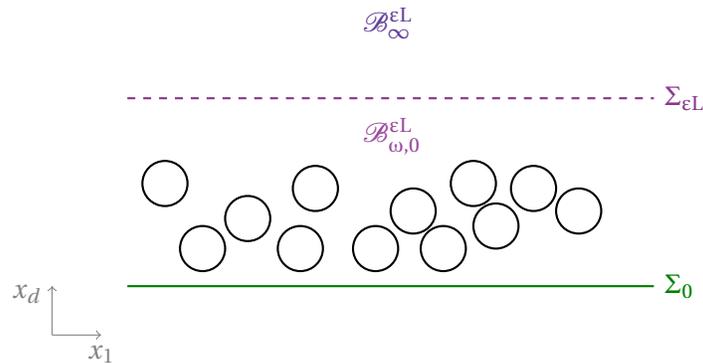
le domaine situé en dessous de $\Sigma_{\varepsilon L}$ et

$$\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon L} := \mathbb{R}^{d-1} \times (\varepsilon L, +\infty) \quad (8)$$

le domaine situé au dessus de $\Sigma_{\varepsilon L}$.

Rappelons que le support de $f \subset \mathcal{B}_\infty^{\varepsilon L}$.

Remarque 21. *Comme pour le cas périodique, nous ne sommes pas obligé d'écrire la condition d'onde sortante sur $\Sigma_{\varepsilon L}$ avec le ε . Elle peut être écrite sur Σ_L avec $L > \varepsilon(\delta + h_L)$.*



Pour définir la condition de radiation à propagation sortante, nous nous reportons aux résultats de [CWRZ99] et [CWM05] qui traitent de la diffraction 2D par une surface rugueuse (définie comme le graphe d'une fonction) avec condition de Dirichlet et [BR20] qui traite le cas de la diffraction 2D et 3D par une surface rugueuse de type Robin.

Pour l'énoncer, nous introduisons la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|), & \text{pour } d = 2 \\ \frac{\exp(ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, & \text{pour } d = 3 \end{cases} \quad \text{pour } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y};$$

où $H_0^{(1)}$ est la fonction de Hankel de première espèce d'ordre 0. La condition de radiation à propagation sortante (UPRC) s'écrit

$$u_\omega^\varepsilon(\mathbf{x}) = -2 \int_{\Sigma_{\varepsilon L}} \partial_{x_d} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_\omega^\varepsilon|_{\Sigma_{\varepsilon L}}(\mathbf{y}_\parallel) d\mathbf{y}_\parallel, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B}_\infty^{\varepsilon L}, \quad (9)$$

où $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_\parallel, y_d)$.

Pour donner un sens à cette équation intégrale, il n'est pas nécessaire que $u|_{\Sigma_{\varepsilon L}}$ soit L^2 (par exemple pour $d = 2$, $u|_{\Sigma_{\varepsilon L}} \in L^\infty$ suffit puisque $\partial_{x_d} \phi = O\left(\frac{1}{y_\parallel^{3/2}}\right)$). Néanmoins, dans le cas où $u|_{\Sigma_{\varepsilon L}} \in L^2(\Sigma_{\varepsilon L})$, cette condition s'écrit à l'aide de la transformée de Fourier, avec $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_\parallel, x_d)$,

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{(d-1)/2}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \widehat{\phi}_L(\zeta) e^{-i(x_d - L)\sqrt{k^2 - |\zeta|^2}} e^{i\mathbf{x}_\parallel \cdot \zeta} d\zeta; \quad (10)$$

où

- $\phi_L = u|_{\Sigma_{\varepsilon L}}, \zeta \in \mathbb{R}^{d-1}, \widehat{\phi}_L(\zeta) = \frac{1}{(2\pi)^{(d-1)/2}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \phi_L(\mathbf{y}_\parallel) e^{-i\mathbf{y}_\parallel \cdot \zeta} d\mathbf{y}_\parallel$ est la transformée de Fourier de ϕ_L où nous avons identifié $\Sigma_{\varepsilon L}$ et \mathbb{R}^{d-1} .
- $\sqrt{k^2 - |\zeta|^2} = -i\sqrt{|\zeta|^2 - k^2}$ quand $k < |\zeta|$.

Cette représentation est à rapprocher de la décomposition modale du théorème 2 du chapitre 2.

Nous allons utiliser la caractérisation suivante des espaces de Sobolev, pour $s > 0$

$$H^s(\Sigma_{\varepsilon L}) = \left\{ \varphi \in L^2(\Sigma_{\varepsilon L}) \text{ telle que } (|\zeta|^2 + 1)^{s/2} \widehat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^{d-1}) \right\} \quad (11)$$

et $H^{-s}(\Sigma_{\varepsilon L}) = (H^s(\Sigma_{\varepsilon L}))'$ qui vérifie $H^{-s}(\Sigma_{\varepsilon L}) = \left\{ \varphi, (|\zeta|^2 + 1)^{-s/2} \widehat{\varphi} \in L^2 \right\}$.

Définition 60

L'opérateur Λ , dit de Dirichlet-to-Neumann (DtN), s'écrit

$$\forall \varphi \in H^{1/2}(\Sigma_{\varepsilon L}), \quad \Lambda \varphi(\mathbf{y}_\parallel) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} i\sqrt{k^2 - |\zeta|^2} \widehat{\varphi}(\zeta) e^{i\mathbf{y}_\parallel \cdot \zeta} d\zeta; \quad (12)$$

où encore $\forall \varphi, \psi \in H^{1/2}(\Sigma_{\varepsilon L}), \quad {}_{H^{-1/2}} \langle \Lambda \varphi, \psi \rangle_{H^{1/2}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} i\sqrt{k^2 - |\zeta|^2} \widehat{\varphi}(\zeta) \overline{\widehat{\psi}(\zeta)} d\zeta$.

Nous pouvons montrer (voir [CWM05]) que Λ vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 61

L'opérateur $\Lambda : H^{1/2}(\Sigma_{\varepsilon L}) \rightarrow H^{-1/2}(\Sigma_{\varepsilon L})$ est un opérateur continu et nous avons évidemment

$$\begin{cases} \Re \langle \Lambda \varphi, \varphi \rangle \geq 0, \\ \Im \langle \Lambda \varphi, \varphi \rangle \geq 0, \end{cases} \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Sigma_{\varepsilon L}). \quad (13)$$

Comme c'est une condition de Robin (avec $\Re \gamma > 0$) qui est imposée sur Σ_0 , et que le terme source est supposé L^2 , quelque soient les conditions qui sont imposées sur les particules (condition de Dirichlet ou de Neumann), nous allons chercher la solution u_ω^ε telle que $u_\omega^\varepsilon|_{\mathcal{B}_{\omega,0}^{\varepsilon L}} \in H^1(\mathcal{B}_{\omega,0}^{\varepsilon L})$ et $\forall (L, L'), L' > L > (h_L + \delta)$, $u|_{\mathcal{D}_{L,L'}^\varepsilon} \in H^1(\mathcal{D}_{L,L'}^\varepsilon)$ avec $\mathcal{D}_{L,L'}^\varepsilon = \mathbb{R}^{d-1} \times (\varepsilon L, \varepsilon L')$, si bien que $u|_{\Sigma_{\varepsilon L}} \in H^{1/2}(\Sigma_{\varepsilon L})$.

5.4 Caractère bien posé du problème de diffraction

Le problème se réécrit :

Trouver u_ω^ε dans $H^1(\mathcal{B}_{\omega,0}^{\varepsilon L})$ telle que u_ω^ε satisfait

$$\begin{cases} -\Delta u_\omega^\varepsilon - k^2 u_\omega^\varepsilon = f & \text{dans } \mathcal{B}_{\omega,0}^{\varepsilon L}, \\ -\partial_{x_d} u_\omega^\varepsilon + ik\gamma u_\omega^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Sigma_0, \\ \partial_{x_d} u_\omega^\varepsilon + \Lambda u_\omega^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon L}, \end{cases} \quad (P_{\omega,0}^\varepsilon)$$

et soit

$$u_\omega^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}_\omega^\varepsilon; \quad (CD_{\omega,0})$$

soit

$$\nabla u_\omega^\varepsilon \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}_\omega^\varepsilon. \quad (CN_{\omega,0})$$

Soit $V_N := H^1(\mathcal{B}_{\omega,0}^{\varepsilon L})$ et $V_D := \{u \in H^1(\mathcal{B}_{\omega,0}^{\varepsilon L}), u|_{\partial\mathcal{D}_\omega^\varepsilon} = 0\}$.

Les formes variationnelles associées aux problèmes $(P_{\omega,0}^\varepsilon) + (CD_{\omega,0})$ ou $(P_{\omega,0}^\varepsilon) + (CN_{\omega,0})$ sont :

$$\text{Trouver } u_{\omega,J}^\varepsilon \in V_J, \quad a(u_{\omega,J}^\varepsilon, v_\omega) = l^\varepsilon(v_\omega), \quad v_\omega \in V_J \quad (FV)$$

avec $\forall u, v \in V_J$

$$a(u, v) = \int_{\mathcal{B}_{\omega,0}^{\varepsilon L}} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, dx - k^2 \int_{\mathcal{B}_{\omega,0}^{\varepsilon L}} u \bar{v} \, dx + {}_{H^{-1/2}} \langle \Lambda u|_{\Sigma_{\varepsilon L}}, v \rangle_{H^{1/2}} + ik\gamma \int_{\Sigma_0} u \bar{v} \, dx_{\parallel}, \quad (14)$$

et

$$l^\varepsilon(v) = \int_{\mathcal{B}_{\omega,0}^{\varepsilon L}} f \bar{v} \, dx. \quad (15)$$

Il est plus délicat de prouver le caractère bien posé de ce problème. Les arguments standards, utilisés dans le chapitre 2, pour prouver le caractère Fredholm, en montrant que l'opérateur intervenant dans la modélisation est

une perturbation compacte d'un opérateur coercif, ne s'appliquent plus car le problème ne peut pas être reformulé en domaine borné. Mentionnons que dans [CW97], l'auteur utilise une formulation du problème à partir d'équations intégrales pour montrer que le problème de diffraction par une surface plane 2D de type Robin (avec $\gamma \in L^\infty$ tel que $\Re e(\gamma) \geq \eta > 0$) est bien posé. Ce résultat a été étendu dans [ZCW03] au cas d'une surface rugueuse $C^{1,1}$.

Dans le cas d'une surface rugueuse de type Lipschitz, le caractère bien posé d'une formulation similaire à (FV) a été démontré dans [BR20]. Une partie des résultats concerne le cas basse fréquence (basse par rapport aux variations de la surface). Nous avons étendu ce résultat à notre cas, où les particules sont petites devant la longueur d'onde (ce qui constitue ici le cas basse fréquence). Dans ce cas, il est possible (comme dans le théorème 6 du chapitre 2) de montrer que le problème est coercif. Nous montrons ce résultat pour une forme linéaire quelconque.

Théorème 62

Soit l^ε une forme linéaire continue dans V_J pour $J \in \{D, N\}$ alors il existe une unique solution $u_\omega^\varepsilon \in V_J$ solution de (FV) et il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $C > 0$ tels que $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\|u_\omega^\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{D}_{\omega,0}^{\varepsilon L})} \leq C \|l^\varepsilon\| ; \quad (16)$$

où ε_0 et C sont indépendantes de ε et de la position des particules donc de ω .

Preuve. Nous utilisons la même démarche que dans la preuve du théorème 6 du chapitre 2.

Comme l^ε est continue dans V_J , il existe $f^\varepsilon \in V_J$ telle que

$$\forall v \in V_J, \quad l^\varepsilon(v) = (f^\varepsilon, v)_{L^2(\mathcal{D}_{\omega,0}^{\varepsilon L})} + (\nabla f^\varepsilon, \nabla v)_{L^2(\mathcal{D}_{\omega,0}^{\varepsilon L})}. \quad (17)$$

Nous introduisons pour tout $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{\omega,0}^L = \mathbf{R}^{d-1} \times (0, L) \setminus \overline{\mathcal{P}_\omega}$, $\widetilde{u}_\omega(\mathbf{y}) = u_\omega^\varepsilon(\varepsilon \mathbf{y})$ et $\widetilde{v}_\omega(\mathbf{y}) = v_\omega(\varepsilon \mathbf{y})$. Nous avons alors

$$\int_{\mathcal{D}_{\omega,0}^{\varepsilon L}} u_\omega^\varepsilon \overline{v_\omega} \, d\mathbf{y} = \varepsilon^d \int_{\mathcal{D}_{\omega,0}^L} \widetilde{u}_\omega \overline{\widetilde{v}_\omega} \, d\mathbf{y} ;$$

et

$$\int_{\mathcal{D}_{\omega,0}^{\varepsilon L}} \nabla u_\omega^\varepsilon \cdot \overline{\nabla v_\omega} \, d\mathbf{y} = \varepsilon^{d-2} \int_{\mathcal{D}_{\omega,0}^L} \nabla \widetilde{u}_\omega \cdot \overline{\nabla \widetilde{v}_\omega} \, d\mathbf{y} .$$

Nous trouvons alors

$$\int_{\mathcal{D}_{\omega,0}^L} \nabla \widetilde{u}_\omega \cdot \overline{\nabla \widetilde{v}_\omega} \, d\mathbf{y} - k^2 \varepsilon^d \int_{\mathcal{D}_{\omega,0}^L} \widetilde{u}_\omega \overline{\widetilde{v}_\omega} \, d\mathbf{y} +_{H^{-1/2}} \langle \widetilde{\Lambda} \widetilde{u}_\omega, \widetilde{v} \rangle_{H^{1/2}} + ik\gamma \varepsilon^{d-1} \int_{\Sigma_0} \widetilde{u}_\omega \overline{\widetilde{v}_\omega} \, d\mathbf{y} = \varepsilon^d \int_{\mathcal{D}_{\omega,0}^L} \widetilde{f} \overline{\widetilde{v}_\omega} \, d\mathbf{y} + \varepsilon^{d-2} \int_{\mathcal{D}_{\omega,0}^L} \nabla \widetilde{f} \cdot \overline{\nabla \widetilde{v}_\omega} \, d\mathbf{y} \quad (18)$$

où $\widetilde{f}(\mathbf{y}) = f(\varepsilon \mathbf{y})$, $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{\omega,0}^L$ et comme $\forall \zeta \in \mathbf{R}^{d-1}$, $\widetilde{u}_\omega(\zeta) = \varepsilon^{d-1} \widehat{u}_\omega(\varepsilon \zeta)$, nous avons

$$_{H^{-1/2}} \langle \widetilde{\Lambda} \widetilde{u}_\omega, \widetilde{v} \rangle_{H^{1/2}} = \int_{\mathbf{R}^{d-1}} i \sqrt{\varepsilon^2 k^2 - |\zeta|^2} \widehat{u}_\omega(\zeta) \overline{\widehat{v}_\omega(\zeta)} \, d\zeta . \quad (19)$$

Nous notons \widetilde{a} la forme bilinéaire intervenant dans (18).

1- La preuve, comme pour le théorème [6](#) du chapitre 2, repose sur une inégalité de type Poincaré généralisée,

$$\exists c > 0, \quad \forall u \in H^1(\mathcal{B}_{\omega,0}^L), \quad \|u\|_{L^2(\mathcal{B}_{\omega,0}^L)}^2 \leq c \left[\|\nabla u\|_{L^2(\mathcal{B}_{\omega,0}^L)}^2 + \|u|_{\Sigma_L}\|_{L^2(\Sigma_L)}^2 \right]. \quad (20)$$

Pour $u \in \mathcal{D}(\overline{B_L})$ avec $B_L = \mathbb{R}^{d-1} \times (0, L)$, nous avons

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d)^2 - u(\mathbf{x}_{\parallel}, 0)^2 &= 2 \int_0^{x_d} u(\mathbf{x}_{\parallel}, s) \partial_{x_d} u(\mathbf{x}_{\parallel}, s) \, ds \\ &\leq 2 \|u(\mathbf{x}_{\parallel}, \cdot)\|_{L^2(0,L)} \|\partial_{x_d} u(\mathbf{x}_{\parallel}, \cdot)\|_{L^2(0,L)} \end{aligned}$$

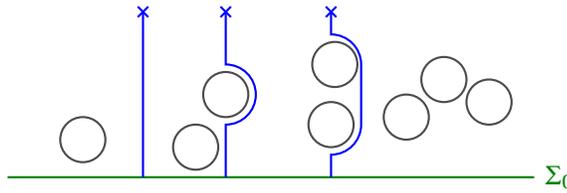
qui peut se réécrire (peut aussi être déduit d'une inégalité de Hardy)

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \|u(\mathbf{x}_{\parallel}, \cdot)\|_{L^2(0,L)}^2 &\leq \eta^2 \|u(\mathbf{x}_{\parallel}, \cdot)\|_{L^2(0,L)}^2 + \frac{1}{\eta^2} \|\partial_{x_d} u(\mathbf{x}_{\parallel}, \cdot)\|_{L^2(0,L)}^2 + u(\mathbf{x}_{\parallel}, 0)^2 \\ \left(\frac{1}{L} - \eta^2\right) \|u(\mathbf{x}_{\parallel}, \cdot)\|_{L^2(0,L)}^2 &\leq \frac{1}{\eta^2} \|\partial_{x_d} u(\mathbf{x}_{\parallel}, \cdot)\|_{L^2(0,L)}^2 + u(\mathbf{x}_{\parallel}, 0)^2 \\ \left(\frac{1}{L} - \eta^2\right) \|u\|_{L^2(B_L)}^2 &\leq \frac{1}{\eta^2} \|\partial_{x_d} u\|_{L^2(B_L)}^2 + \|u|_{\Sigma_0}\|_{L^2(\Sigma_0)}^2 \end{aligned} \quad (21)$$

Par densité de $\mathcal{D}(\overline{B_L})$ dans $H^1(B_L)$, nous en déduisons la même inégalité dans $H^1(B_L)$.

Si $u \in V_D$, nous pouvons prolonger u par 0 à l'intérieur des particules. La fonction prolongée reste dans H^1 et ses normes L^2 et H^1 sont inchangées. L'inégalité [\(21\)](#) reste donc vraie dans V_D .

Si $u \in V_N$. Comme les particules ne se touchent pas, pour tout $(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d)$ dans $\mathcal{B}_{\omega,0}^L$, il existe un chemin $\gamma_{(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d)} : (0, 1) \rightarrow \mathcal{B}_{\omega,0}^L$ tel que $\gamma_{(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d)}(0) = (\mathbf{x}_{\parallel}, x_d)$ et $\gamma_{(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d)}(1) = (\mathbf{x}_{\parallel}, 0)$; $\forall t, \|\gamma'(t)\| \neq 0$ et la longueur de la courbe $\int_0^1 \|\gamma'_{(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d)}(t)\| \, dt \leq C(L)$ est bornée par une constante indépendante de \mathbf{x}_{\parallel} , x_d , de la répartition des particules et donc de l'aléatoire ω . Nous avons également $\|\gamma'\|_{L^\infty} \leq C(L)$.



$$\begin{aligned} [u(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d)]^2 - [u(\mathbf{x}_{\parallel}, 0)]^2 &= 2 \int_0^1 u(\gamma_{(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d)}(t)) \nabla u(\gamma_{(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d)}(t)) \cdot \gamma'_{(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d)}(t) \, dt \\ &\leq 2C(L) \left[\int_0^1 u(\gamma_{(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d)}(t))^2 \, dt \right]^{1/2} \left[\int_0^1 \|\nabla u(\gamma_{(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d)}(t))\|^2 \, dt \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Soit pour tout $(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d) \in \mathcal{B}_{\omega,0}^L$,

$$[u(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d)]^2 \leq \eta^2 C(L) \int_0^1 u(\gamma_{(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d)}(t))^2 \, dt + \frac{C(L)}{\eta^2} \int_0^1 \|\nabla u(\gamma_{(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d)}(t))\|^2 \, dt + u(\mathbf{x}_{\parallel}, 0)^2$$

alors

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\mathcal{B}_{\omega,0}^L)}^2 &\leq \eta^2 C(L) \int_{(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d) \in \mathcal{B}_{\omega,0}^L} \int_0^1 [u(\Upsilon(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d)(t))]^2 dt + \frac{1}{\eta^2} C(L) \int_{(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d) \in \mathcal{B}_{\omega,0}^L} \int_0^1 \|\nabla u(\Upsilon(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d)(t))\|^2 dt \\ &\quad + L \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u(\mathbf{x}_{\parallel}, 0)^2 d\mathbf{x}_{\parallel} . \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d) \in \mathcal{B}_{\omega,0}^L} \int_0^1 f(\Upsilon(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d)(t))^2 dt &= \int_0^1 \int_{(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d) \in \mathcal{B}_{\omega,0}^L} f(\Upsilon(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d)(t))^2 dt \\ &\leq C \int_0^1 \int_{\mathcal{B}_{\omega,0}^L} f(y)^2 dy \quad \text{puisque } \forall t \in (0, 1) \{ \Upsilon(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d)(t), (\mathbf{x}_{\parallel}, x_d) \in \mathcal{B}_{\omega,0}^L \} \subset \mathcal{B}_{\omega,0}^L \\ &\leq C \|f\|_{L^2(\mathcal{B}_{\omega,0}^L)}^2 \quad \text{pour } f = u \text{ et } \|\nabla u\| . \end{aligned}$$

Il suffit ensuite de choisir η assez petit pour obtenir l'inégalité de Poincaré généralisée.

2- Nous en déduisons ensuite le résultat comme dans le chapitre 2.

□

5.5 Cadre aléatoire

Soit Ω l'ensemble des processus ponctuels $\{\mathbf{y}_{\omega}^m\}_m$ dans la bande $\mathbb{R}^{d-1} \times (\delta + 1; h_L + \delta - 1)$. Nous équipons Ω de sa tribu cylindrique \mathcal{F} . La loi \mathbb{P} de distribution des centres des particules constitue une mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) .

Nous introduisons l'opérateur de translation $\tau : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \Omega$

$$\forall (\omega, \mathbf{x}) \in \Omega \times \mathbb{R}^d \text{ tels que } \mathbf{y}_{\omega}^m + \mathbf{x} \in \mathcal{L}, \quad \tau(\omega, \mathbf{x}) = \omega' \text{ avec } \mathbf{y}_{\omega'}^m = \mathbf{y}_{\omega}^m + \mathbf{x} \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}. \quad (22)$$

Dans ce qui suit, nous notons $\tau_x := \tau(\cdot, x)$.

L'action $(\tau_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ du groupe $(\mathbb{R}^d, +)$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vérifie alors :

- $\tau : \begin{cases} \mathbb{R}^d \times \Omega \rightarrow \Omega \\ (x, \omega) \mapsto \tau_x \omega \end{cases}$ est mesurable ;
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \tau_{x+y} = \tau_x \tau_y$;
- τ préserve la mesure \mathbb{P} autrement dit $\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(\tau_x A) = \mathbb{P}(A)$.

Muni de cette action sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, nous pouvons maintenant énoncer la définition d'un processus stationnaire sur $\mathbb{R}^d \times \Omega$ pour notre problème.

Définition 63

Soit $(\tau_y)_{y \in \mathbb{R}^d}$ l'opérateur de translation défini par (22). Un processus $f : \mathbb{R}^d \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ est dit stationnaire par rapport à τ si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \text{p.t. } \omega \in \Omega, \quad f(x + y, \omega) = f(x, \tau_y \omega) .$$

Nous supposons de plus que l'action $(\tau_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ est ergodique.

Définition 64

L'action $(\tau_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ est dite ergodique si tout événement τ -invariant a une probabilité 0 ou 1, autrement dit si

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \left(\forall x \in \mathbb{R}^d, \tau_x A = A \right) \iff \left(\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\} \right).$$

Un processus est dit stationnaire et ergodique si l'action donnée par (22) est ergodique.

Une conséquence de l'ergodicité est le théorème ergodique de Birkhoff que nous rappelons ci-dessous.

Théorème 65

Soit f un processus stationnaire par rapport à l'action ergodique $(\tau_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d, L^1(\Omega))$. Alors presque sûrement et dans $L^1(\Omega)$

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} f(y+x, \omega) \, dy \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(f).$$

Ici, on note B_R la boule centrée en 0 et de rayon R dans \mathbb{R}^d .

Intuitivement si A est ergodique alors la donnée de A sur un grand domaine nous permet de retrouver toutes les statistiques du processus.

Nous nous référons à [Shi84, Reu86] pour la preuve de ce théorème.

Exemple 1

Un exemple d'un processus qui est stationnaire et ergodique est le processus point de Poisson. Un processus point de Poisson homogène d'intensité ν sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$ est un sous ensemble Π vérifiant

- Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)$ borné, le nombre de points du processus contenu dans B noté $N(B)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\nu|B|$.
- Pour tout $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+)$ disjoints, les variables aléatoires $N(B_1), \dots, N(B_n)$ sont indépendantes.

Remarque 22. Il est possible de complexifier la construction du processus en choisissant des rayons indépendants et identiquement distribués, des formes arbitraires.

5.6 Caractère bien posé du problème de diffraction dans le cadre aléatoire

Pour tout espace de Banach V , nous définissons $\mathcal{L}^2(\Omega, V)$ l'espace des applications mesurables $u : \Omega \rightarrow V$ telles que

$$\mathbb{E}[\|u\|_V^2]^{1/2} < +\infty ;$$

muni de la norme

$$\forall u \in \mathcal{L}^2(\Omega, V), \quad \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega, V)} = \mathbb{E}[\|u\|_V^2]^{1/2} .$$

Corollaire 66

Soit l^ε une forme linéaire continue dans $\mathcal{L}^2(\Omega, V_J)$ pour $J \in \{D, N\}$ alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $C > 0$ tels que $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\mathbb{E} \left[\left\| u_\omega^\varepsilon \right\|_{H^1(\mathcal{B}_{\omega,0}^{\varepsilon L})} \right]^{1/2} \leq C \|l^\varepsilon\|_{\mathcal{L}(\mathcal{L}^2(\Omega, V_J))} \quad (23)$$

La constante C ne dépend pas de ε .

Preuve. Comme la constante C qui apparaît dans l'inégalité de Poincaré généralisée (20) est indépendante de ω , nous pouvons prendre l'espérance de part et d'autre de l'égalité. Nous obtenons

$$\|u^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2(\Omega, L^2(\mathcal{B}_{\omega,0}^{\varepsilon L}))} \leq C \left[\|\nabla u^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2(\Omega, L^2(\mathcal{B}_{\omega,0}^{\varepsilon L}))}^2 + \|u^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2(\Omega, L^2(\Sigma_0))}^2 \right]^{1/2} .$$

Nous pouvons alors dérouler la preuve de la même manière que dans le chapitre 2 mais avec les normes appropriées. \square

Chapitre 6

Développement asymptotique

Sommaire

6.1 Ansatz du développement asymptotique	134
6.2 Équations satisfaites par les termes de champ lointain et les termes de champ proche	136
6.2.1 Cascade d'équations pour les termes de champ lointain	136
6.2.2 Cascade d'équations pour les termes de champ proche	136
6.3 Comportement à l'infini des termes de champ proche	140
6.3.1 Étude du problème de demi-espace	140
6.3.2 Comportement à l'infini des termes de champ proche	146
6.3.3 Opérateur de Dirichlet-to-Neumann	148
6.3.4 Problème de demi-espace avec un terme source	150
6.4 Étude du cas des conditions de Dirichlet sur les particules	151
6.4.1 Caractère bien posé des problèmes de champ proche régularisés	151
6.4.2 Existence d'une sous-suite convergente	154
6.4.3 Construction des premiers termes de champ proche	159
6.4.4 Construction des premiers termes de champ lointain	161
6.4.5 Modèle effectif	162
6.4.6 Estimations d'erreurs sur le modèle effectif	163
6.5 Étude du cas des conditions de Neumann sur les particules	167
6.5.1 Caractère bien posé des problèmes de champ proche	168
6.5.1.1 Terme de champ proche $U_{\omega,0}^{NF}$	168
6.5.1.2 Terme de champ proche de premier ordre $U_{\omega,1}^{NF}$	168
6.5.1.3 Terme de champ proche de second ordre $U_{\omega,2}^{NF}$	174
6.5.2 Construction des premiers termes de champ lointain	176
6.5.3 Modèle effectif	177

Dans ce chapitre, pour construire des conditions effectives qui vont remplacer la couche de particules, nous partons d'un développement asymptotique qui ressemble beaucoup à celui du cadre périodique, la stationnarité remplaçant la périodicité. Le développement asymptotique fait intervenir les termes de champ proche, qui sont supposés stationnaires et tendant vers 0 à l'infini, et les termes de champ lointain. Les termes de champ proche sont toujours solutions de problèmes de type Laplace mais ici ils sont posés dans un demi-espace infini privé des

particules. Le caractère bien posé de ces problèmes est beaucoup plus délicat à démontrer que dans le cadre périodique. Il faut se placer dans un espace fonctionnel prenant en compte l'aléa pour tirer profit de la stationnarité comme dans le cas de l'homogénéisation stochastique. Comme le milieu est homogène au dessus des particules, nous remplaçons le demi-espace au dessus des particules par une condition transparente de type Dirichlet-to-Neumann. Ensuite pour montrer l'existence et l'unicité des termes de champ proche nous passons par une méthode de régularisation comme dans l'homogénéisation stochastique. Cependant cette approche ne nous a pas permis de déduire le comportement à l'infini de ces termes de champ proche. Nous avons donc choisi de considérer les problèmes de champ proche régularisés pour déterminer les conditions effectives. L'avantage est que cela correspond à ce que nous faisons numériquement. L'inconvénient est que la régularisation détériore les estimations d'erreurs. Les estimations d'erreurs ne sont pas optimales mais elles pourraient être améliorées en ajoutant des hypothèses quantitatives sur l'aléa (ce que nous n'avons pas eu le temps de faire pour l'instant). Les modèles effectifs obtenus sont déterministes et ressemblent beaucoup à ceux du cas périodique mais les constantes sont calculés différemment. Nous montrons que la solution effective est proche de la solution exacte presque sûrement. Cela signifie que même si la répartition des particules n'est pas connue, il est légitime de remplacer le modèle exact par le modèle effectif. Ce sera une bonne approximation quelque soit la répartition.

6.1 Ansatz du développement asymptotique

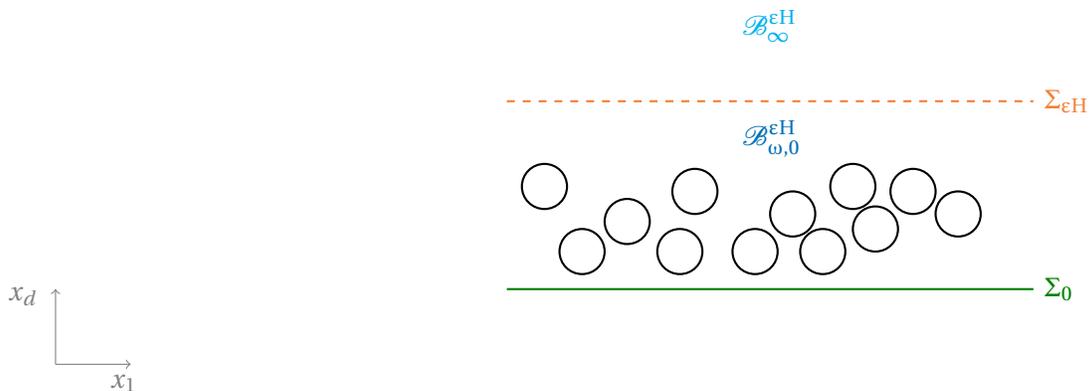
Comme pour le cas 2D périodique, nous proposons un développement asymptotique qui dépend d'un paramètre noté H dans la suite.

Nous notons \mathbf{x}_{\parallel} la composante tangentielle de \mathbf{x} , en particulier $\mathbf{x}_{\parallel} = x_1$ pour $d = 2$ et $\mathbf{x}_{\parallel} = (x_1, x_2)$ pour $d = 3$. Nous avons alors $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_{\parallel}, x_d)$.

Nous introduisons le plan $\Sigma_{\varepsilon H} := \{x_d = \varepsilon H\}$ avec $H > h_L + \delta$ où nous rappelons que $\delta > 0$ est la distance minimale entre les particules.

Pour presque tout $\omega \in \Omega$, nous divisons le demi-espace $\mathcal{B}_{\omega}^{\varepsilon}$ en deux régions :

- le domaine $\mathcal{B}_{\omega,0}^{\varepsilon H} := \mathbb{R}^{d-1} \times (0, \varepsilon H) \setminus \overline{\mathcal{P}_{\omega}^{\varepsilon}}$ situé en dessous de $\Sigma_{\varepsilon H}$;
- le domaine $\mathcal{B}_{\omega,\infty}^{\varepsilon H} := \mathbb{R}^{d-1} \times (\varepsilon H, +\infty)$ situé au dessus de $\Sigma_{\varepsilon H}$.



En dessous de $\Sigma_{\varepsilon H}$, c'est-à-dire pour $x_d < \varepsilon H$, nous supposons que la solution $u_{\omega}^{\varepsilon}(\mathbf{x})$ se développe en fonction de

ε de la façon suivante :

$$u_\omega^\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_{\omega, m}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right), \quad \text{p.p. } \mathbf{x}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \text{p. p. } x_d \in (0, \varepsilon H). \quad (1)$$

Ce développement dépend des termes $U_{\omega, m}^{\text{NF}}$, dits de champ proche, qui dépendent de \mathbf{x}_\parallel mais aussi des variables microscopiques $\mathbf{y} := (\mathbf{y}_\parallel, y_d) = \left(\frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right)$.

Au-dessus de $\Sigma_{\varepsilon H}$, c'est-à-dire pour $x_d > \varepsilon H$, nous supposons que la solution $u_\omega^\varepsilon(\mathbf{x})$ se développe de la façon suivante :

$$u_\omega^\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_{\omega, m}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) + \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m u_{\omega, m}^{\text{FF}}(\mathbf{x}), \quad \text{p.p. } \mathbf{x}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \text{p. p. } x_d \in (\varepsilon H, +\infty). \quad (2)$$

Ce développement dépend des termes de champ proche mais il fait aussi intervenir les termes $u_{\omega, m}^{\text{FF}}$, dit termes de champ lointain, qui ne dépendent que des variables macroscopiques \mathbf{x} , qui n'ont pas de variations à l'échelle des particules et qui correspondent au comportement de notre solution u_ω^ε loin des particules. Ces termes de champ lointain ne vivent qu'au dessus des particules, plus précisément dans $\mathbb{R}^{d-1} \times (\varepsilon H, +\infty)$. Ce sont les termes de champ proche qui transfèrent les caractéristiques des particules aux termes de champ lointain.

Par ailleurs, nous imposons que les termes de champ proche doivent être stationnaires par rapport aux variables microscopiques tangentielles \mathbf{y}_\parallel étant donné la stationnarité de la distribution des particules. Nous faisons ainsi les hypothèses suivantes : pour tout $m \in \mathbb{N}$, le terme de champ proche $U_{\omega, m}^{\text{NF}}$ vérifie

- $\forall \mathbf{x}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}, \forall y_d \in \mathbb{R}_+^*, (\omega, \mathbf{y}_\parallel) \mapsto U_{\omega, m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_\parallel; \mathbf{y}_\parallel, y_d)$ est stationnaire.

-

$$U_{\omega, m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_\parallel; \mathbf{y}_\parallel, y_d) \xrightarrow{y_d \rightarrow +\infty} 0, \quad \text{p.s. } \forall \mathbf{x}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \forall \mathbf{y}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}. \quad (3)$$

En effet, loin de la couche de particules, les termes de champ lointain sont censés représenter le comportement macroscopique de la solution. Nous allons donc supposer que les termes de champ proche $U_{\omega, m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_\parallel; \mathbf{y}_\parallel, y_d)$ disparaissent quand y_d tend vers l'infini.

Nous notons dans la suite :

- $\mathcal{B}_{\omega, 0}^H := \mathbb{R}^{d-1} \times (0, H) \setminus \overline{\mathcal{P}_\omega}$;
- $\mathcal{B}_\infty^H := \mathbb{R}^{d-1} \times (H, +\infty)$;
- $\Sigma_H := \{y_d = H\}$;
- $\mathcal{D}_\omega \setminus \Sigma_H := \mathcal{B}_{\omega, 0}^H \cup \mathcal{B}_\infty^H$.

Pour tout $P \geq 0$, nous notons $\Sigma_P := \{y_d = P\}$.

L'idée est de supposer qu'un tel développement existe. Nous insérons alors ce développement dans les équations vérifiées par la solution u_ω^ε et nous déduisons formellement les équations vérifiées par les termes de champ proche et les termes de champ lointain.

6.2 Équations satisfaites par les termes de champ lointain et les termes de champ proche

Nous écrivons les équations données par $(P_\omega^\varepsilon) + (CD_\omega)$ ou $(P_\omega^\varepsilon) + (CN_\omega)$ en supposant que u_ω^ε est de la forme (1) dans $\mathcal{B}_{\omega,0}^{\varepsilon H}$ et (2) dans $\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon H}$. Nous raisonnons ici p.s. pour une répartition de particules $\omega \in \Omega$ donnée.

6.2.1 Cascade d'équations pour les termes de champ lointain

D'après l'hypothèse (3), la série $\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m u_{\omega,m}^{\text{FF}}(\mathbf{x})$ est solution de l'équation de Helmholtz du problème (P_ω^ε) . En identifiant formellement les puissances de ε , nous obtenons

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad -\Delta u_{\omega,m}^{\text{FF}}(\mathbf{x}) - k^2 u_{\omega,m}^{\text{FF}}(\mathbf{x}) = f \delta_0, \quad \forall \mathbf{x} = (\mathbf{x}_\parallel, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times (\varepsilon H, +\infty); \quad (4)$$

avec $\delta_0 = 1$ si $m = 0$ et $\delta_0 = 0$ sinon.

De même, les termes de champ lointain $u_{\omega,m}^{\text{FF}}$ vérifient la condition d'onde sortante.

L'équation (4) et la condition d'onde sortante ne permettent pas de caractériser $u_{\omega,m}^{\text{FF}}$ de manière unique. Nous devons encore déterminer une condition de bord pour $u_{\omega,m}^{\text{FF}}$ sur $\Sigma_{\varepsilon H}$; celle-ci apparaîtra comme une condition nécessaire à l'existence et à l'unicité des termes de champ proche.

6.2.2 Cascade d'équations pour les termes de champ proche

Équation volumique

Comme les termes de champ proche dépendent de plusieurs variables, nous allons utiliser la règle de dérivation suivante :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \nabla_{\mathbf{x}_\parallel} \left(U_{\omega,m}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) \right) = \left[\nabla_{\mathbf{x}_\parallel} U_{\omega,m}^{\text{NF}} \right] \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \left[\nabla_{\mathbf{y}_\parallel} U_{\omega,m}^{\text{NF}} \right] \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right), \quad \forall \mathbf{x}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \forall x_d \in \mathbb{R}_+^*;$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \partial_{x_d} \left(U_{\omega,m}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) \right) = \frac{1}{\varepsilon} \left[\partial_{y_d} U_{\omega,m}^{\text{NF}} \right] \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right), \quad \forall \mathbf{x}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \forall x_d \in \mathbb{R}_+^*.$$

Le laplacien de $U_{\omega,m}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right)$ s'écrit alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\forall \mathbf{x}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\forall x_d \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\Delta \left(U_{\omega,m}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) \right) = \left[\Delta_{\mathbf{x}_\parallel} U_{\omega,m}^{\text{NF}} \right] \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) + \frac{2}{\varepsilon} \left[\nabla_{\mathbf{x}_\parallel} \cdot \nabla_{\mathbf{y}_\parallel} U_{\omega,m}^{\text{NF}} \right] \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\Delta_{\mathbf{y}} U_{\omega,m}^{\text{NF}} \right] \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right).$$

Commençons par regarder ce que l'on obtient lorsque $x_d < \varepsilon H$. La solution u_ω^ε se développe uniquement à l'aide des termes de champ proche $U_{\omega,m}^{\text{NF}}$. Nous remplaçons alors $u_\omega^\varepsilon(\mathbf{x})$ par $\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_{\omega,m}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right)$ dans l'équation de Helmholtz du problème (P_ω^ε) , nous obtenons

$$\Delta \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_{\omega,m}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) \right) + k^2 \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_{\omega,m}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) \right) = 0, \quad \forall \mathbf{x}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \forall x_d \in \mathbb{R}_+^*.$$

Si bien qu'en utilisant la décomposition du Laplacien précédente, nous avons pour presque tout $(\mathbf{x}_{\parallel}, x_d) \in \mathcal{D}_{\omega}^{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq 0} \varepsilon^{m-2} \left[\Delta_{\mathbf{y}} U_{\omega, m}^{\text{NF}} \right] \left(\mathbf{x}_{\parallel}; \frac{\mathbf{x}_{\parallel}}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) + 2 \sum_{m \geq 0} \varepsilon^{m-1} \left[\nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}_{\parallel}} U_{\omega, m}^{\text{NF}} \right] \left(\mathbf{x}_{\parallel}; \frac{\mathbf{x}_{\parallel}}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) + \sum_{m \geq 0} \varepsilon^m \left[\Delta_{\mathbf{x}_{\parallel}} U_{\omega, m}^{\text{NF}} \right] \left(\mathbf{x}_{\parallel}; \frac{\mathbf{x}_{\parallel}}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) \\ + \sum_{m \geq 0} \varepsilon^m k^2 U_{\omega, m}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_{\parallel}; \frac{\mathbf{x}_{\parallel}}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) = 0, \quad \forall \mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \forall x_d \in \mathbb{R}_+^*. \end{aligned}$$

En identifiant formellement les puissances de ε et en supposant que les équations sont vraies pour presque tout $\mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}$, pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d-1} \times (0, H) \setminus \overline{\mathcal{P}_{\omega}}$, nous obtenons alors

$$\text{p.p. } \mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \Delta_{\mathbf{y}} U_{\omega, m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = -2 \nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}_{\parallel}} U_{\omega, m-1}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) - \left(\Delta_{\mathbf{x}_{\parallel}} + k^2 \right) U_{\omega, m-2}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \quad \text{dans } \mathcal{B}_{\omega, 0}^{\text{H}}, \quad \text{pour } m \geq 0; \quad (5)$$

où par convention $U_{\omega, -2}^{\text{NF}} = U_{\omega, -1}^{\text{NF}} = 0$.

Regardons maintenant ce que l'on obtient lorsque $x_d > \varepsilon H$. Nous remplaçons u_{ω}^{ε} par le développement (2) dans l'équation de Helmholtz du problème (P_{ω}^{ε}), nous obtenons

$$\Delta \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_{\omega, m}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_{\parallel}; \frac{\mathbf{x}_{\parallel}}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) + \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m u_{\omega, m}^{\text{FF}}(\mathbf{x}) \right) + k^2 \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_{\omega, m}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_{\parallel}; \frac{\mathbf{x}_{\parallel}}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) + \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m u_{\omega, m}^{\text{FF}}(\mathbf{x}) \right) = f \delta_0, \quad \forall \mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \forall x_d \in \mathbb{R}_+^*;$$

qui se réécrit

$$\Delta \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_{\omega, m}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_{\parallel}; \frac{\mathbf{x}_{\parallel}}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) \right) + k^2 \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_{\omega, m}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_{\parallel}; \frac{\mathbf{x}_{\parallel}}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) \right) + \underbrace{\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m (\Delta u_{\omega, m}^{\text{FF}}(\mathbf{x}) + k^2 u_{\omega, m}^{\text{FF}}(\mathbf{x}))}_{=-f \delta_0 \text{ d'après (4)}} = -f \delta_0, \quad \forall \mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \forall x_d \in \mathbb{R}_+^*.$$

Nous retrouvons donc la même cascade d'équations, donnée par (5), pour presque tout $\mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}$, $(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) \in \mathcal{B}_{\infty}^{\text{H}}$.

La cascade d'équation (5) est donc vérifiée dans $\mathcal{D}_{\omega} \setminus \Sigma_{\text{H}}$.

Cherchons maintenant les conditions sur le bord Σ_0 , les particules $\mathcal{P}_{\omega}^{\varepsilon}$ et l'interface $\Sigma_{\varepsilon \text{H}}$. Nous allons utiliser le fait que \mathbf{x}_{\parallel} est liée aux variations macroscopiques des champs proches. Dans la suite, nous allons considérer que \mathbf{x}_{\parallel} joue le rôle d'un paramètre, par séparation des échelles les conditions de bords ne seront imposées que sur les variables rapides.

Conditions aux limites sur les particules

Dans le cas où nous avons une condition de Dirichlet sur les particules (CD_{ω})

$$u_{\omega}^{\varepsilon} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial \mathcal{P}_{\omega}^{\varepsilon}.$$

Les particules sont situées dans l'espace $\mathbb{R}^{d-1} \times (0, H)$, la solution u_{ω}^{ε} se développe uniquement à l'aide des termes de champ proche. Nous remplaçons u_{ω}^{ε} par $\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_{\omega, m}^{\text{NF}}$, nous identifions les puissances de ε et nous supposons que les équations sont vérifiées pour presque tout $\mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\mathbf{y} \in \partial \mathcal{P}_{\omega}$. Nous obtenons alors directement

$$\text{p.p. } \mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad U_{\omega, m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial \mathcal{P}_{\omega}, \quad \text{pour } m \geq 0. \quad (6)$$

Dans le cas d'une condition de Neumann sur les particules (CN_ω)

$$\nabla u_\omega^\varepsilon \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{P}_\omega^\varepsilon ;$$

avec $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ le vecteur normal à $\partial\mathcal{P}_\omega^\varepsilon$. Nous remplaçons u_ω^ε par $\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_{\omega,m}^{\text{NF}}$; en utilisant la règle de dérivation nous obtenons

$$\begin{aligned} & \nabla \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_{\omega,m}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) \right) \cdot \vec{n} = 0, \quad \forall (\mathbf{x}_\parallel, x_d) \in \partial\mathcal{P}_\omega \\ \Leftrightarrow & \sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\nabla_{\mathbf{x}_\parallel} U_{\omega,m}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_{\mathbf{y}_\parallel} U_{\omega,m}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_d} U_{\omega,m}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) \right) \cdot \vec{n} = 0, \quad \forall (\mathbf{x}_\parallel, x_d) \in \partial\mathcal{P}_\omega \\ \Leftrightarrow & \sum_{m \geq 0} \varepsilon^m \left(\nabla_{\mathbf{x}_\parallel} U_{\omega,m}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) \right) \cdot \vec{n} + \sum_{m \geq -1} \varepsilon^m \nabla_{\mathbf{y}} U_{\omega,m+1}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) \cdot \vec{n} = 0, \quad \forall (\mathbf{x}_\parallel, x_d) \in \partial\mathcal{P}_\omega. \end{aligned}$$

Nous identifions formellement les puissances de ε et nous supposons que les équations sont vérifiées pour presque tout $\mathbf{x}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}$ et $\mathbf{y} \in \partial\mathcal{P}_\omega$. Nous avons alors

$$\text{p.p. } \mathbf{x}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \nabla_{\mathbf{y}} U_{\omega,m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_\parallel; \cdot) \cdot \vec{n} = -\nabla_{\mathbf{x}_\parallel} U_{\omega,m-1}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_\parallel; \cdot) \cdot \vec{n}_\parallel \quad \text{sur } \partial\mathcal{P}_\omega, \quad \text{pour } m \geq 0. \quad (7)$$

Conditions aux limites sur Σ_0

La condition aux limites sur Σ_0 est donnée par

$$-\partial_{x_d} u_\omega^\varepsilon + ik\gamma u_\omega^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0.$$

Nous remplaçons u_ω^ε par $\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_{\omega,m}^{\text{NF}}$ et nous obtenons

$$\begin{aligned} & -\partial_{x_d} \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_{\omega,m}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) \right) + ik\gamma \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m U_{\omega,m}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) = 0, \quad \forall \mathbf{x}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad x_d = 0; \\ \Leftrightarrow & -\sum_{m \geq -1} \varepsilon^m \partial_{y_d} U_{\omega,m+1}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) + ik\gamma \sum_{m \geq 0} \varepsilon^m U_{\omega,m}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{x_d}{\varepsilon} \right) = 0, \quad \forall \mathbf{x}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad x_d = 0. \end{aligned}$$

En identifiant formellement les puissances de ε et en supposant que les équations sont vérifiées pour presque tout $\mathbf{x}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}$, pour presque tout $(\mathbf{y}_\parallel, y_d) \in \Sigma_0$. Nous avons alors

$$\text{p.p. } \mathbf{x}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \partial_{y_d} U_{\omega,m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_\parallel; \cdot) = ik\gamma U_{\omega,m-1}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_\parallel; \cdot) \quad \text{sur } \Sigma_0, \quad \text{pour } m \geq 0. \quad (8)$$

Conditions sur $\Sigma_{\varepsilon H}$

Au voisinage de $\Sigma_{\varepsilon H}$, les termes de champ proche présentent des sauts pour assurer la continuité de la trace et de la dérivée normale de u_ω^ε .

La continuité de u_ω^ε nous donne

$$\sum_{m \geq 0} \varepsilon^m U_{\omega,m}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, H^- \right) = \sum_{m \geq 0} \varepsilon^m U_{\omega,m}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, H^+ \right) + \sum_{m \geq 0} \varepsilon^m u_{\omega,m}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_\parallel), \quad \forall \mathbf{x}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1};$$

où nous avons identifié la trace $u_{\omega,m}^{\text{FF}}(\mathbf{x})$ sur $\Sigma_{\varepsilon\text{H}}$ à une fonction d'une seule variable, ici \mathbf{x}_{\parallel} . En identifiant les puissances de ε et en supposant que ces équations sont vraies pour presque tout $\mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}$, $(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) \in \Sigma_{\text{H}}$, nous avons

$$\text{p.p. } \mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \left[U_{\omega,m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \right]_{\text{H}} = -u_{\omega,m}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}}(\mathbf{x}_{\parallel}), \quad \text{pour } m \geq 0; \quad (9)$$

où nous avons utilisé la notation de saut d'une fonction : $\left[U \right]_{\text{H}} := U \Big|_{\Sigma_{\text{H}}^+} - U \Big|_{\Sigma_{\text{H}}^-}$.

D'autre part, la continuité de la dérivée normale nous donne

$$\sum_{m \geq -1} \varepsilon^m \partial_{y_d} U_{\omega,m+1}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_{\parallel}; \frac{\mathbf{x}_{\parallel}}{\varepsilon}, \text{H}^- \right) = \sum_{m \geq -1} \varepsilon^m \partial_{y_d} U_{\omega,m+1}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_{\parallel}; \frac{\mathbf{x}_{\parallel}}{\varepsilon}, \text{H}^+ \right) + \sum_{m \geq 0} \varepsilon^m \partial_{x_d} u_{\omega,m}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}}(\mathbf{x}_{\parallel}), \quad \forall \mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

En identifiant les puissances de ε et en supposant que ces équations sont vraies pour presque tout $\mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}$ et $(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) \in \Sigma_{\text{H}}$, nous avons

$$\text{p.p. } \mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \left[-\partial_{y_d} U_{\omega,m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \right]_{\text{H}} = \partial_{x_d} u_{\omega,m-1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}}(\mathbf{x}_{\parallel}), \quad \text{pour } m \geq 0; \quad (10)$$

où $u_{\omega,-1}^{\text{FF}} = 0$.

Problèmes aux limites pour les termes de champ proche

Les termes de champ proche satisfont le système d'équations type : p.s. pour tout $m \geq 0$, pour presque tout $\mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}$,

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbf{y}} U_{\omega,m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = 2\nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}_{\parallel}} U_{\omega,m-1}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) + \Delta_{\mathbf{x}_{\parallel}} U_{\omega,m-2}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) + k^2 U_{\omega,m-2}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) & \text{dans } \mathcal{D}_{\omega} \setminus \Sigma_{\text{H}}, \\ \partial_{y_d} U_{\omega,m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = ik\gamma U_{\omega,m-1}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) & \text{sur } \Sigma_0, \\ \left[U_{\omega,m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \right]_{\text{H}} = -u_{\omega,m}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}}(\mathbf{x}_{\parallel}), \\ \left[-\partial_{y_d} U_{\omega,m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \right]_{\text{H}} = \partial_{x_d} u_{\omega,m-1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}}(\mathbf{x}_{\parallel}); \end{cases} \quad (11)$$

et soit nous imposons des conditions de Dirichlet sur les particules

$$U_{\omega,m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}_{\omega}; \quad (12)$$

soit nous imposons des conditions de Neumann sur les particules

$$\nabla_{\mathbf{y}} U_{\omega,m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \cdot \vec{n} = -\nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} U_{\omega,m-1}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \cdot \vec{n}_{\parallel} \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}_{\omega}; \quad (13)$$

avec $U_{\omega,-1}^{\text{NF}} = U_{\omega,-2}^{\text{NF}} = 0$ par convention.

\mathbf{x}_{\parallel} joue le rôle d'un paramètre et pour presque tout $\mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}$, les termes de champ proche $U_{\omega,m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot)$ sont solutions de problèmes de type Laplace posés dans un demi-espace infini contenant des particules de taille 1 suivant une distribution stationnaire et ergodique. Ces problèmes font intervenir des conditions de saut en Σ_{H} dépendant des termes de champ lointain $u_{\omega,m}^{\text{FF}}$ et $u_{\omega,m-1}^{\text{FF}}$.

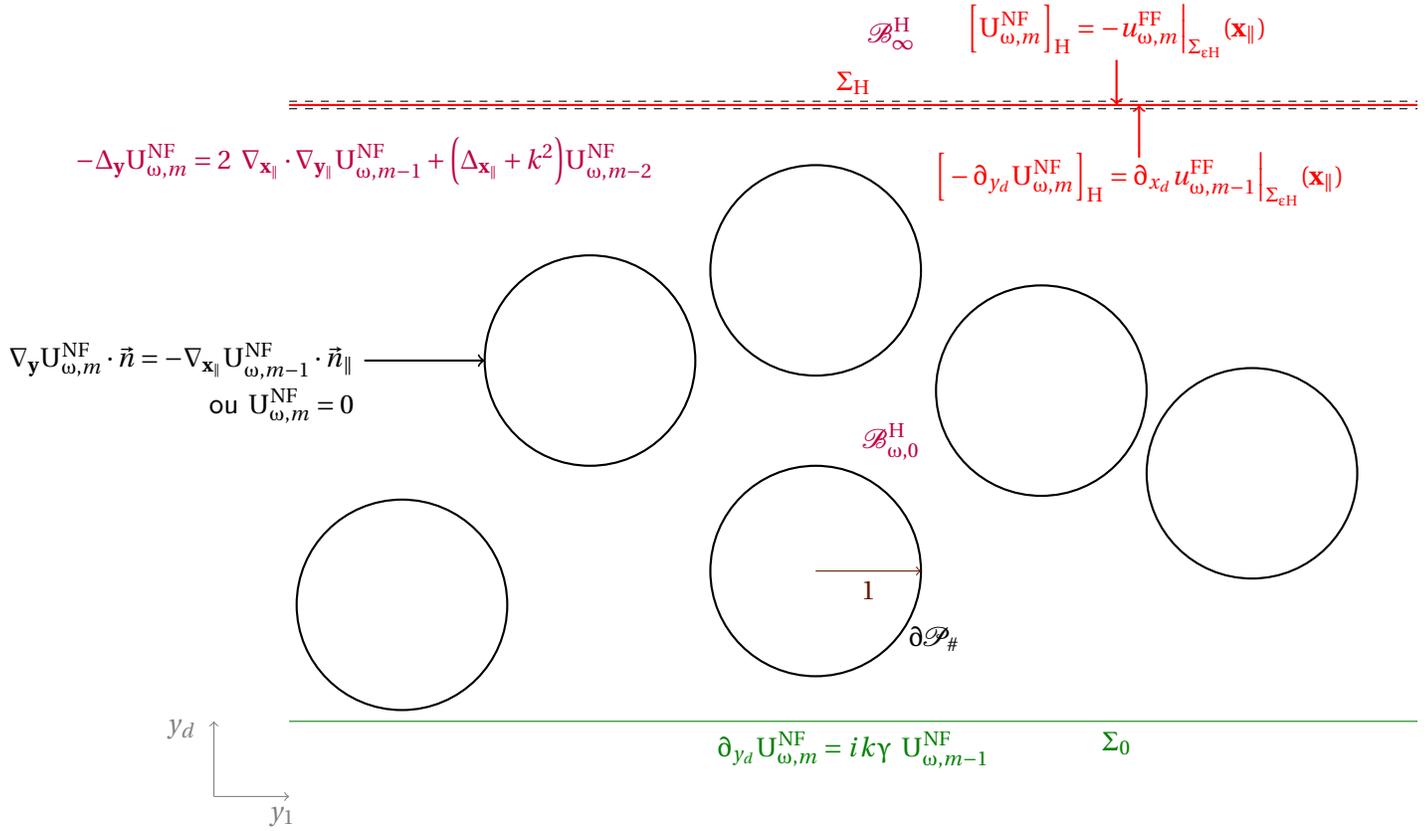


Figure 6.1 – Schéma du système d'équations vérifié par les termes de champ proche

6.3 Comportement à l'infini des termes de champ proche

Que les champs proches vérifient des conditions de Dirichlet ou Neumann sur les particules, ils vérifient un problème de type Laplace dans le demi-espace $\{y_d > L\}$. Nous étudions dans cette section, les problèmes de Laplace de demi-espace avec des données supposées stationnaires.

6.3.1 Étude du problème de demi-espace

Nous introduisons l'espace fonctionnel des traces $H_{loc}^{1/2}$ -stationnaires

$$\mathcal{H}_L^{1/2} := \left\{ \psi \in H_{loc}^{1/2}(\Sigma_L, L^2(\Omega)), (\omega, \mathbf{y}_\parallel) \mapsto \psi_\omega(\mathbf{y}_\parallel, y_d) \text{ stationnaire pour tout } y_d > L, \mathbb{E}[\|\psi\|_{H^{1/2}(\Sigma_L^1)}^2] < +\infty \right\};$$

muni de la norme

$$\forall \psi \in \mathcal{H}_L^{1/2}, \quad \|\psi\|_{\mathcal{H}_L^{1/2}} := \mathbb{E}[\|\psi\|_{H^{1/2}(\Sigma_L^1)}^2]^{1/2}.$$

Ici $\Sigma_L^1 := \{\mathbf{y}_\parallel \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^{d-1}, y_d = L\}$.

$(\mathcal{H}_L^{1/2}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_L^{1/2}})$ est un espace de Hilbert [Neu18].

Nous rappelons que $\mathcal{B}_\infty^L = \mathbb{R}^{d-1} \times (L, +\infty)$. Nous considérons le problème de demi-espace suivant pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_L^{1/2}$ p.s.

$$\begin{cases} -\Delta U_\omega = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^L, \\ U_\omega = \varphi_\omega & \text{sur } \Sigma_L. \end{cases} \quad (14)$$

Construisons un relèvement $H_{loc}^1(\mathcal{B}_\infty^L)$ \mathbf{y}_\parallel -stationnaire. Pour ce faire, nous considérons le problème régularisé pour $T > 0$ p.s.

$$\begin{cases} -\Delta U_\omega + T^{-1}U_\omega = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^L, \\ U_\omega = \varphi_\omega & \text{sur } \Sigma_L. \end{cases} \quad (15)$$

La cadre fonctionnel associé à (15) est le suivant

$$\mathcal{H}_L^1 := \left\{ v \in H_{loc}^1(\mathcal{B}_\infty^L, L^2(\Omega)), (\omega, \mathbf{y}_\parallel) \mapsto v_\omega(\mathbf{y}_\parallel, y_d) \text{ stationnaire pour tout } y_d > L, \mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} |v|^2 + |\nabla v|^2 dy_d \right] < +\infty \right\};$$

muni de la norme

$$\forall v \in \mathcal{H}_L^1, \quad \|v\|_{\mathcal{H}_L^1} := \mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} |v|^2 + |\nabla v|^2 dy_d \right]^{1/2}.$$

Soit $\mathcal{H}_L^{1,D}(\varphi) := \{v \in \mathcal{H}_L^1, v|_{\Sigma_L} = \varphi\}$.

Lemme 67

Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_L^{1/2}$, il existe une unique solution $V_T(\varphi)$ dans $\mathcal{H}_L^{1,D}(\varphi)$ au problème (15).

De plus, p.s. $V_{T,\omega}(\varphi)$ admet la représentation intégrale suivante

$$\text{p.s. } \forall \mathbf{y}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}, \forall y_d > L, \quad V_{T,\omega}(\mathbf{y}_\parallel, y_d) = -2 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \partial_{y_d} G_T(\mathbf{y}_\parallel - \mathbf{z}, y_d - L) \varphi_\omega(\mathbf{z}) d\mathbf{z}; \quad (16)$$

où G_T est la fonction de Green associée à (15) donnée par

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d, \quad G_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(i\sqrt{T}^{-1}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) & \text{pour } d = 2, \\ \frac{e^{-\sqrt{T}^{-1}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} & \text{pour } d = 3. \end{cases} \quad (17)$$

Le résultat de ce lemme et sa démonstration sont très proches du traitement du problème de demi-espace pour l'équation de Stokes avec une trace $H_{uloc}^{1/2}$ par D. Gérard-Varet et N. Masmoudi dans [GVM10].

Preuve. Existence

Soit $\tilde{V}_{T,\omega}(\varphi)(\mathbf{y}_\parallel, y_d) = -2 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \partial_{y_d} G_T(\mathbf{y}_\parallel - \mathbf{z}, y_d - L) \varphi_\omega(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$. Pour tout $\mathbf{y}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}$, $y_d > L$, p.s. $\tilde{V}_{T,\omega}$ est solution de (15) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

De plus, $\tilde{V}_{T,\omega} \in \mathcal{H}_L^1(\varphi)$. En effet, en utilisant la stationnarité de φ , nous avons

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{y}_{\parallel}, \mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}, \forall y_d > L, \quad \tilde{V}_{T,\omega}(\mathbf{y}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\parallel}, y_d) &= -2 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \partial_{y_d} G_{T,\omega}(\mathbf{y}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{z}, y_d - L) \varphi_{\omega}(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \\ &= -2 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \partial_{y_d} G_{T,\omega}(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{z}, y_d - L) \varphi_{\omega}(\mathbf{z} + \mathbf{x}_{\parallel}) \, d\mathbf{z} \\ &= -2 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \partial_{y_d} G_{T,\omega}(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{z}, y_d - L) \varphi_{\tau_{\mathbf{x}_{\parallel}}\omega}(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \\ &= \tilde{V}_{T,\tau_{\mathbf{x}_{\parallel}}\omega}(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d). \end{aligned}$$

De plus, pour $L' > L$, nous avons

$$\mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} |\tilde{V}_{T,\omega}|^2(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) \, dy_d \right] = \mathbb{E} \left[\int_L^{L'} |\tilde{V}_{T,\omega}|^2(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) \, dy_d \right] + \mathbb{E} \left[\int_{L'}^{+\infty} |\tilde{V}_{T,\omega}|^2(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) \, dy_d \right]$$

avec, pour $d = 3$, d'une part

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_{L'}^{+\infty} |\tilde{V}_{T,\omega}|^2(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) \, dy_d \right] &\leq C \mathbb{E} \left[\int_{L'}^{+\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-\sqrt{T}^{-1} \sqrt{|\mathbf{z}|^2 + (y_d - L)^2}} \varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \right|^2 \, dy_d \right] \\ &\leq C \mathbb{E} \left[\int_{L'}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-\sqrt{T}^{-1} \sqrt{|\mathbf{z}|^2 + (y_d - L)^2}} \, d\mathbf{z} \right) \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-\sqrt{T}^{-1} \sqrt{|\mathbf{z}|^2 + (y_d - L)^2}} |\varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{z})|^2 \, d\mathbf{z} \right) \, dy_d \right] \\ &\leq C' \int_{L'}^{+\infty} e^{-\sqrt{T}^{-1} \sqrt{(y_d - L)^2}} (1 + |y_d - L|^2) \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-\sqrt{T}^{-1} \sqrt{|\mathbf{z}|^2 + (y_d - L)^2}} \, d\mathbf{z} \, \mathbb{E} \left[|\varphi_{\omega}|^2 \right] \\ &\leq C'' \|\varphi\|_{\mathcal{H}_L^{1/2}}^2; \end{aligned}$$

et d'autre part, pour $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$ telle que $\chi = 1$ sur $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})^{d-1}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_L^{L'} |\tilde{V}_{T,\omega}|^2(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) \, dy_d \right] &\leq \mathbb{E} \left[\int_L^{L'} \left| \int_{\mathbb{R}^{d-1}} 2\partial_{y_d} G_T(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{z}, y_d - L) \chi \varphi_{\omega}(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \right|^2 \, dy_d \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\int_L^{L'} \left| \int_{\mathbb{R}^{d-1}} 2\partial_{y_d} G_T(\mathbf{z}, y_d - L) (1 - \chi) \varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \right|^2 \, dy_d \right] \end{aligned}$$

avec $\chi\varphi \in H^{1/2}(\Sigma_L, L^2(\Omega))$.

Soit $\tilde{V}_{1,\omega}(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) := -2 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \partial_{y_d} G_T(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{z}, y_d - L) \chi\varphi_{\omega}(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z}$ pour tout $y_d \in (L, L')$, $\mathbf{y}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}$.

Nous pouvons exprimer \tilde{V}_1 à l'aide de la transformée de Fourier de $\chi\varphi$

$$\tilde{V}_{1,\omega}(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \widehat{\chi\varphi_{\omega}}(\zeta) e^{-\sqrt{|\zeta|^2 + T^{-1}(y_d - L)} e^{i\mathbf{y}_{\parallel} \cdot \zeta} \, d\zeta$$

avec $\widehat{\chi\varphi_{\omega}}(\zeta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \chi\varphi_{\omega}(\mathbf{z}) e^{-i\mathbf{z} \cdot \zeta} \, d\mathbf{z}$.

Nous en déduisons que $\mathbb{E} \left[\int_L^{L'} |\tilde{V}_{1,\omega}|^2 + |\nabla \tilde{V}_{1,\omega}|^2 \, dy_d \right] < +\infty$.

De plus, nous avons par stationnarité

$$\mathbb{E} \left[\int_L^{L'} \left| 2 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \partial_{y_d} G_T(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{z}, y_d - L) (1 - \chi) \varphi_{\omega}(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \right|^2 dy_d \right] = \mathbb{E} \left[\int_{\square_1} \int_L^{L'} \left| 2 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \partial_{y_d} G_T(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{z}, y_d - L) (1 - \chi) \varphi_{\omega}(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \right|^2 dy_d d\mathbf{y}_{\parallel} \right].$$

où $\square_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^{d-1}$. Or, pour $(1 - \chi)(\mathbf{z}) \neq 0$, $|\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{z}| \geq |\mathbf{z} - \mathbf{1}| \geq 1$. Nous en déduisons

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\int_{\square_1} \int_L^{L'} \left| 2 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \partial_{y_d} G_T(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{z}, y_d - L) (1 - \chi) \varphi_{\omega}(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \right|^2 dy_d d\mathbf{y}_{\parallel} \right] \\ & \leq C \mathbb{E} \left[\left| \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{1}{|\mathbf{z} - \mathbf{1}|^d} (1 - \chi) \varphi_{\omega}(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \right|^2 \right] \\ & \leq C \mathbb{E} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{1}{|\mathbf{z} - \mathbf{1}|^d} (1 - \chi) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{1}{|\mathbf{z} - \mathbf{1}|^d} (1 - \chi) \varphi_{\omega}^2(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \right) \right] \\ & \leq C' \mathbb{E} [|\varphi|^2] \leq C' \|\varphi\|_{\mathcal{H}_L^{1/2}}^2. \end{aligned}$$

Par le même raisonnement, nous montrons que $\mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} |\nabla \tilde{V}_1|^2 \, d\mathbf{z} \right] < +\infty$.

Nous avons montré que $\tilde{V}_T \in \mathcal{H}_L^1$. Montrons que $\tilde{V}_{T,\omega}|_{\Sigma_L} = \varphi_{\omega}$ p.s. Soit $\mathbf{y} := (\mathbf{y}_{\parallel}, y_d)$ tel que $y_d > L$, $\mathbf{y}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[|\tilde{V}_{T,\omega}(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) - \varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel})|^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left| 2 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \partial_{y_d} G_T(\mathbf{z}, y_d - L) (\varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{z}) - \varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel})) \, d\mathbf{z} \right|^2 \right] \\ &\leq C \mathbb{E} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \partial_{y_d} G_T(\mathbf{z}, y_d - L) \, d\mathbf{z} \right) \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \partial_{y_d} G_T(\mathbf{z}, y_d - L) |\varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{z}) - \varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel})|^2 \, d\mathbf{z} \right) \right] \\ &\leq C' \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \partial_{y_d} G_T(\mathbf{z}, y_d - L) \mathbb{E} \left[|\varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{z}) - \varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel})|^2 \right] \, d\mathbf{z} \\ &\leq C' \left[\int_{|\mathbf{z}| < \delta} \partial_{y_d} G_T(\mathbf{z}, y_d - L) \mathbb{E} \left[|\varphi(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{z}) - \varphi(\mathbf{y}_{\parallel})|^2 \right] \, d\mathbf{z} + 2 \int_{|\mathbf{z}| \geq \delta} \partial_{y_d} G_T(\mathbf{z}, y_d - L) \mathbb{E} [|\varphi|^2] \, d\mathbf{z} \right]. \end{aligned}$$

Quand

$$\begin{aligned} y_d \rightarrow L \text{ nous avons } & \int_{|\mathbf{z}| \geq \delta} \partial_{y_d} G_T(\mathbf{z}, y_d - L) \, d\mathbf{z} \rightarrow 0 \\ \delta \rightarrow 0 \text{ nous avons } & \int_{|\mathbf{z}| < \delta} \partial_{y_d} G_T(\mathbf{z}, y_d - L) \mathbb{E} \left[|\varphi(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{z}) - \varphi(\mathbf{y}_{\parallel})|^2 \right] \, d\mathbf{z} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que $\mathbb{E} \left[|\tilde{V}_T(\cdot, y_d) - \varphi(\cdot)|^2 \right] \xrightarrow{y_d \rightarrow L} 0$ et donc p.s. $\tilde{V}_{T,\omega}|_{\Sigma_L} = \varphi_{\omega}$.

Unicité

Soit $V_L \in \mathcal{H}_L^1(\varphi)$ solution de (14). $W = V_T - V_L \in \mathcal{H}_{L,0}^1 := \mathcal{H}_L^{1,D}(0)$

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1} W_{\omega} - \Delta W_{\omega} &= 0 \quad \text{dans } \mathcal{B}_{\infty}^L, \\ W_{\omega} &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_L. \end{aligned} \tag{18}$$

La formulation variationnelle associée à (18) dans $\mathcal{H}_{L,0}^1$ s'écrit

$$\Gamma^{-1} \mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} W_{\omega} \overline{W'_{\omega}} \, dy_d + \int_L^{+\infty} \nabla W_{\omega} \cdot \overline{\nabla W'_{\omega}} \, dy_d \right] = 0.$$

Nous obtenons alors

$$\|W_\omega\|_{\mathcal{H}_{L,0}^1}^2 = 0 \quad \text{et} \quad W = 0 \text{ p.s. .}$$

□

Considérons maintenant $\tilde{U} = U - V_T$. \tilde{U} vérifie p.s.

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{U} = -T^{-1}V_T & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^L, \\ \tilde{U} = 0 & \text{sur } \Sigma_L. \end{cases} \quad (19)$$

Pour avoir une meilleure intuition de l'espace fonctionnel à considérer pour (19), nous nous référons au cadre périodique. Soit $\square_R := (-\frac{R}{2}, \frac{R}{2})^{d-1}$ pour $R > 0$. Dans le cadre périodique, ce problème est bien posé dans

$$W_\#(\mathcal{B}_T^L) = \left\{ u \in H_{loc}^1(\mathcal{B}_T^L), \nabla u \in L^2(\mathcal{B}_T^L), \frac{u}{\sqrt{1+y_d^2}} \in L^2(\mathcal{B}_T^L) \text{ et } \forall y_d \in \mathbb{R}_+^*, \right. \\ \left. \mathbf{y}_\parallel \mapsto u(\mathbf{y}_\parallel, y_d) \text{ est } T\text{-périodique} \right\},$$

où $\mathcal{B}_T^L := \square_T \times (L, +\infty)$.

Notation 2

Pour tout $K \subset \mathbb{R}^d$ borné et $u \in L^1(K)$, nous définissons

$$\int_K u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} := \frac{1}{K} \int_K u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Pour le cadre aléatoire, nous ne pouvons pas nous limiter à une bande de largeur finie comme dans le cas périodique. Nous introduisons alors l'espace fonctionnel suivant

$$\mathcal{W}_{L,0} := \left\{ \text{p.s. } U_\omega \in H_{loc}^1(\mathcal{B}_\infty^L), (\omega, \mathbf{y}_\parallel) \mapsto U_\omega(\mathbf{y}_\parallel, y_d) \text{ est stationnaire pour tout } y_d > L, \text{ p.s. } U_\omega = 0 \text{ sur } \Sigma_L, \right. \\ \left. \text{p.s. } \sup_{R>0} \int_{\square_R} \int_L^{+\infty} |\nabla U_\omega|^2 \, dy_d \, d\mathbf{y}_\parallel < +\infty \right\}.$$

Par le théorème ergodique de Birkhoff (Théorème 65 du chapitre 5), nous avons que p.s.

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\square_R} \int_L^{+\infty} |\nabla U_\omega|^2 \, dy_d \, d\mathbf{y}_\parallel = \mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} |\nabla U_\omega|^2 \, dy_d \right].$$

Nous équipons $\mathcal{W}_{L,0}$ de la norme

$$\|U\|_{\mathcal{W}_{L,0}}^2 := \mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} |\nabla U_\omega|^2 \, dy_d \right].$$

Notons que par stationnarité, nous avons également pour tout $R > 0$

$$\mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} |\nabla U_\omega|^2 \, dy_d \right] = \mathbb{E} \left[\int_{\square_R} \int_L^{+\infty} |\nabla U_\omega|^2 \, dy_d \, d\mathbf{y}_\parallel \right]. \quad (20)$$

Nous avons p.s.

$$\int_{\square_1} \int_L^{+\infty} \frac{|U_\omega|^2}{1+y_d^2} dy \leq \int_{\square_1} \int_L^{+\infty} |\nabla U_\omega|^2 dy ;$$

en prenant l'espérance et en utilisant la stationnarité, nous obtenons que l'inégalité de Hardy suivante est vérifiée dans $\mathcal{W}_{L,0}$

$$\forall U \in \mathcal{W}_{L,0} , \quad \mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} \frac{|U|^2}{1+y_d^2} dy_d \right] \leq C \|U\|_{\mathcal{W}_{L,0}}^2 . \quad (21)$$

$(\mathcal{W}_{L,0}, \|\cdot\|_{\mathcal{W}_{L,0}})$ constitue alors un espace de Hilbert.

Montrons que (19) est bien posé dans $\mathcal{W}_{L,0}$.

La formulation variationnelle associée à (19) s'écrit

$$\forall V \in \mathcal{W}_{L,0} , \quad \mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} \nabla \tilde{U} \cdot \nabla \bar{V} dy_d \right] = \mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} T^{-1} V_T \bar{V} dy_d \right] .$$

D'après la représentation intégrale de V_T , nous en déduisons que

$$\mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} (1+y_d^2) |V_T|^2 dy_d \right] < +\infty .$$

Nous avons alors par Cauchy-Schwarz puis Hardy

$$\begin{aligned} T^{-1} \mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} V_T \bar{V} dy_d \right] &\leq T^{-1} \mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} (1+y_d^2) |V_T|^2 dy_d \right] \mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} \frac{|V|^2}{1+y_d^2} dy_d \right] \\ &\leq C \|V\|_{\mathcal{W}_{L,0}}^2 . \end{aligned}$$

Nous en déduisons qu'il existe une unique solution $\tilde{U} \in \mathcal{W}_{L,0}$ solution de (19). Par conséquent, U est l'unique solution de (14) dans

$$\mathcal{W}_L := \left\{ \text{p.s. } V_\omega \in H_{loc}^1(\mathcal{B}_\infty^L), (\omega, \mathbf{y}_\parallel) \mapsto V_\omega(\mathbf{y}_\parallel, y_d) \text{ stationnaire pour tout } y_d > L, \mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} |\nabla V|^2 dy_d \right] < +\infty \right\}$$

Proposition 68 (Représentation intégrale pour U)

U admet la représentation intégrale suivante

$$\text{p.s. } \forall \mathbf{y}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}, \forall y_d > L, \quad U_\omega(\mathbf{y}_\parallel, y_d) = -2 \int_L^{+\infty} \partial_{y_d} G(\mathbf{y}_\parallel - \mathbf{z}, y_d - L) \varphi_\omega(\mathbf{z}) d\mathbf{z} , \quad (22)$$

où G est la fonction de Laplace de Green associé à (15) donnée par

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d , \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}| & \text{pour } d = 2 , \\ \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} & \text{pour } d = 3 . \end{cases} \quad (23)$$

Preuve. Nous suivons les mêmes étapes que la preuve du lemme 67 pour montrer que

$$\tilde{U}(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) := -2 \int_L^{+\infty} \partial_{y_d} G(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{z}, y_d - L) \varphi_{\omega}(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z}, \quad \mathbf{y}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad y_d > L$$

est solution de (14) et appartient à \mathcal{W}_L . Le seul point qui diffère de la preuve du lemme 67 est la démonstration de

$$\mathbb{E} \left[\int_{L'}^{+\infty} |\nabla V|^2 \right] < +\infty \quad \text{pour } L' > L.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_{L'}^{+\infty} |\nabla U_{\omega}|^2(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) \, dy_d \right] &\leq C \mathbb{E} \left[\int_{L'}^{+\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{1}{((y_d - L)^2 + |\mathbf{z}|^2)^{d/2}} \varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \right|^2 \, dy_d \right] \\ &\leq C \mathbb{E} \left[\int_{L'}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{1}{((y_d - L)^2 + |\mathbf{z}|^2)^{d/2}} \, d\mathbf{z} \right) \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{1}{((y_d - L)^2 + |\mathbf{z}|^2)^{d/2}} |\varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{z})|^2 \, d\mathbf{z} \right) \, dy_d \right] \\ &\leq C' \int_{L'}^{+\infty} \frac{1}{(y_d - L)} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{1}{((y_d - L)^2 + |\mathbf{z}|^2)^d} \, d\mathbf{z} \, \mathbb{E} [|\varphi_{\omega}|^2] \\ &\leq C'' \|\varphi\|_{\mathcal{H}_L^{1/2}}^2. \end{aligned}$$

□

6.3.2 Comportement à l'infini des termes de champ proche

Revenons à notre problème (14) de demi-espace. Nous caractérisons dans cette section le comportement asymptotique loin de la couche de la solution $U \in \mathcal{W}_L$ du problème (14) pour $\varphi \in \mathcal{H}_L^{1/2}$.

Proposition 69

Soit $\varphi \in \mathcal{H}_L^{1/2}$. L'unique solution $U \in \mathcal{W}_L$ de (14) vérifie

(a) p.s. $\forall \mathbf{y}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}$,

$$\lim_{y_d \rightarrow +\infty} U_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) = \mathbb{E}[\varphi]. \quad (24)$$

De plus, cette limite est localement uniforme en \mathbf{y}_{\parallel} .

(b)

$$\mathbb{E} \left[\left| U(\cdot, y_d) - \mathbb{E}[\varphi] \right|^2 \right] \xrightarrow{y_d \rightarrow +\infty} 0. \quad (25)$$

Notons que la limite est déterministe. Il est impossible d'estimer la vitesse de convergence de $U_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel}, \cdot)$ vers sa limite sans des hypothèses supplémentaires de quantification de l'ergodicité contrairement au cas périodique où nous savons que cela converge exponentiellement vite.

Preuve. La preuve repose comme dans la section 4.6 de [BGV08] sur l'ergodicité du processus ponctuel $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ correspondant aux centres des particules et à la représentation intégrale établie dans la proposition 68

Nous traitons ici le cas $d = 3$, mais le cas bidimensionnel peut être prouvé de la même façon.

(a) p.s. pour tout $\mathbf{y}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}$, $y_d \in (L, +\infty)$

$$\begin{aligned} U_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) - \mathbb{E}[\varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel})] &= -2 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \partial_{y_d} G(\mathbf{z}, y_d - L) (\varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{z}) - \mathbb{E}[\varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel})]) d\mathbf{z} , \\ &= -2 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \partial_{y_d} G(\mathbf{z}, y_d - L) \partial_{z_1} \partial_{z_2} \int_0^{\mathbf{z}} (\varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{w}) - \mathbb{E}[\varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel})]) d\mathbf{w} d\mathbf{z} , \\ &= -2 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \partial_{z_1} \partial_{z_2} \partial_{y_d} G(\mathbf{z}, y_d - L) z_1 z_2 \left[\int_0^{\mathbf{z}} \varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{w}) d\mathbf{w} - \mathbb{E}[\varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel})] \right] d\mathbf{z} \end{aligned}$$

Par le théorème ergodique de Birkhoff (Théorème 65 du chapitre 5), nous savons que p.s. et dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$$\mathbb{E}[\varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel})] = \lim_{R \uparrow +\infty} \int_{\square_R} \varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{z}) d\mathbf{z} .$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ et $M > 0$, il existe $R^{(M)} > 0$ tel que

$$\forall \mathbf{y}_{\parallel} \in \square_R , \quad \left| \int_{\square_R} \varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{w}) d\mathbf{w} - \mathbb{E}[\varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel})] \right| \leq \varepsilon .$$

Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \left| 2 \int_{z_1, z_2 > R} \partial_{z_1} \partial_{z_2} \partial_{y_d} G(\mathbf{z}, y_d - L) z_1 z_2 \left[\int_0^{\mathbf{z}} \varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{w}) d\mathbf{w} - \mathbb{E}[\varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel})] \right] d\mathbf{z} \right| \\ \leq 2\varepsilon \int_{z_1, z_2 > R} |\partial_{z_1} \partial_{z_2} \partial_{y_d} G(\mathbf{z}, y_d - L) z_1 z_2| d\mathbf{z} . \end{aligned}$$

Notons que par un simple calcul direct $\int_{z_1, z_2 > R} |\partial_{z_1} \partial_{z_2} \partial_{y_d} G(\mathbf{z}, y_d - L) z_1 z_2| d\mathbf{z} < +\infty$.

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} \left| 2 \int_{z_1, z_2 < R} \partial_{z_1} \partial_{z_2} \partial_{y_d} G(\mathbf{z}, y_d - L) z_1 z_2 \left[\int_0^{\mathbf{z}} \varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{w}) d\mathbf{w} - \mathbb{E}[\varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel})] \right] d\mathbf{z} \right| \\ \leq 2 \left(\int_{\square_R} |\varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{w})| d\mathbf{w} + R^2 \mathbb{E}[\varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel})] \right) \int_{z_1, z_2 < R} |\partial_{z_1} \partial_{z_2} \partial_{y_d} G(\mathbf{z}, y_d - L)| d\mathbf{z} , \end{aligned}$$

avec $\lim_{y_d \rightarrow +\infty} \int_{z_1, z_2 < R} |\partial_{z_1} \partial_{z_2} \partial_{y_d} G(\mathbf{z}, y_d - L)| d\mathbf{z} = 0$. Ce qui nous permet de conclure.

(b) Montrons désormais la convergence dans $L^2(\Omega)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\int_{\square_1} \varphi(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \in L^2(\Omega)$, d'après le théorème ergodique, il existe $R > 0$ tel que

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_{\square_R} \varphi(\mathbf{z}) d\mathbf{z} - \mathbb{E}[\varphi] \right|^2 \right] \leq \varepsilon . \quad (26)$$

Nous avons alors pour $\mathbf{y}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}$, $y_d > L$,

$$\begin{aligned} |U(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) - \mathbb{E}[\varphi]|^2 &\leq \int_{\square_{\mathbb{R}}} |\partial_{z_1} \partial_{z_2} \partial_{y_d} G(\mathbf{z}, y_d)| \, d\mathbf{z} \int_{\square_{\mathbb{R}}} |\partial_{z_1} \partial_{z_2} \partial_{y_d} G(\mathbf{z}, y_d)| \left| \int_0^{\mathbf{z}} \varphi(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{w}) \, d\mathbf{w} - \mathbb{E}[\varphi] \right|^2 \, d\mathbf{z} \\ &\quad + \int_{z_1, z_2 > R} |\partial_{z_1} \partial_{z_2} \partial_{y_d} G(\mathbf{z}, y_d)| \int_{z_1, z_2 > R} |z_1 z_2 \partial_{z_1} \partial_{z_2} \partial_{y_d} G(\mathbf{z}, y_d)| \left| \int_0^{\mathbf{z}} \varphi(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{w}) \, d\mathbf{w} - \mathbb{E}[\varphi] \right|^2 \, d\mathbf{z} \end{aligned}$$

Nous prenons l'espérance de part et d'autre de l'inégalité et nous bornons chacun des deux termes du membre de droite. Pour borner le premier terme, nous utilisons que

$$\int_{\square_{\mathbb{R}}} |\partial_{z_1} \partial_{z_2} \partial_{y_d} G(\mathbf{z}, y_d)| \, d\mathbf{z} \leq \frac{C}{y_d^{d-1}}$$

et que $\varphi \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^{d-1}, L^2(\Omega))$.

Pour borner le second terme, nous utilisons que

$$\int_{z_1, z_2 > R} |\partial_{z_1} \partial_{z_2} \partial_{y_d} G(\mathbf{z}, y_d)| \, d\mathbf{z} \leq C$$

et (26).

Nous obtenons alors

$$\mathbb{E} \left[|U(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) - \mathbb{E}[\varphi]|^2 \right] \leq \frac{C}{y_d^{d-1}} + C\varepsilon.$$

D'où le résultat. □

Nous avons également ce résultat sur le ∇U .

Proposition 70

$$y_d^2 \mathbb{E} \left[\left| \nabla U(\cdot, y_d) \right|^2 \right] \xrightarrow{y_d \rightarrow +\infty} 0 \quad (27)$$

La preuve se fait de la même manière que celle du point (b) de la proposition précédente en utilisant les propriétés d'intégrabilité de $\nabla \partial_{y_d} G$ et (26).

6.3.3 Opérateur de Dirichlet-to-Neumann

Soit

$$\mathcal{H}_L^{-1/2} := \left\{ \psi \in H_{loc}^{-1/2}(\Sigma_L, L^2(\Omega)), (\omega, \mathbf{y}_{\parallel}) \mapsto \psi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) \text{ stationnaire pour tout } y_d > L, \mathbb{E} \left[\|\psi\|_{H^{-1/2}(\Sigma_L^1)}^2 \right] < +\infty \right\}$$

muni de la norme

$$\forall \psi \in \mathcal{H}_L^{-1/2} \quad \|\psi\|_{\mathcal{H}_L^{-1/2}} := \mathbb{E} \left[\|\psi\|_{H^{-1/2}(\Sigma_L^1)}^2 \right]^{1/2};$$

où $H^{-1/2}(\Sigma_L^1) = [H^{1/2}(\Sigma_L^1)]'$ et $\forall \psi \in H^{-1/2}(\Sigma_L^1)$,

$$\|\psi\|_{H^{-1/2}(\Sigma_L^1)} = \sum_{\varphi \in H^{1/2}(\Sigma_L^1)} \frac{\langle \psi, \varphi \rangle}{\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Sigma_L^1)}}.$$

Nous définissons l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann

$$\begin{cases} \mathcal{H}_L^{1/2} \rightarrow \mathcal{H}_L^{-1/2} \\ \varphi \mapsto \Lambda \varphi ; \end{cases} \quad (28)$$

de la manière suivante

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}_L^{1/2}, \quad \langle \Lambda \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_L^{-1/2}, \mathcal{H}_L^{-1/2}} = \mathbb{E} \left[\langle \Lambda_1 \chi \varphi, \psi \rangle_{H^{1/2}(\Sigma_L^1), H^{-1/2}(\Sigma_L^1)} \right] + \mathbb{E} \left[\langle \Lambda_2 (1 - \chi) \varphi, \psi \rangle_{H^{1/2}(\Sigma_L^1), H^{-1/2}(\Sigma_L^1)} \right] \quad (29)$$

où $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$ telle que $\chi = 1$ sur $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})^{d-1}$, Λ_1 est défini à l'aide de la transformée de Fourier de $\chi \varphi$

$$\Lambda_1 \chi \varphi_\omega(\mathbf{y}_\parallel) = \frac{-1}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \widehat{\chi \varphi}(\zeta) |\zeta| e^{i\mathbf{y}_\parallel \cdot \zeta} d\zeta ; \quad (30)$$

et $\Lambda_2(1 - \chi)\varphi$ est donné par

$$\Lambda_2(1 - \chi)\varphi_\omega(\mathbf{y}_\parallel) = 2 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \partial_{y_d}^2 G(\mathbf{y}_\parallel - \mathbf{z}, 0) (1 - \chi)\varphi_\omega(\mathbf{z}) d\mathbf{z} ; \quad (31)$$

Nous montrons en suivant la preuve de la proposition [61](#) du chapitre 5 que Λ définit ainsi un opérateur continu de $\mathcal{H}_L^{1/2} \rightarrow \mathcal{H}_L^{-1/2}$.

Prouvons que cette définition ne dépend pas du choix de $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$ telle que $\chi = 1$ sur $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})^{d-1}$.

Soient $\chi, \chi' \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$ telles que $\chi = 1$ sur $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})^{d-1}$. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_L^{1/2}$.

$$\langle \Lambda \varphi, \psi \rangle(\chi) - \langle \Lambda \varphi, \psi \rangle(\chi') = \mathbb{E} \left[\langle \Lambda_1 (\chi - \chi') \varphi, \psi \rangle_{H^{1/2}(\Sigma_L^1), H^{-1/2}(\Sigma_L^1)} \right] + \mathbb{E} \left[\langle \Lambda_2 (\chi' - \chi) \varphi, \psi \rangle_{H^{1/2}(\Sigma_L^1), H^{-1/2}(\Sigma_L^1)} \right].$$

$(\chi' - \chi)\varphi \in H^{1/2}(\mathbb{R}^{d-1}, L^2(\Omega))$. Par conséquent, par définition de Λ_1 nous avons pour $\mathbf{y}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}$

$$\begin{aligned} \Lambda_2(\chi' - \chi)\varphi(\mathbf{y}_\parallel) &= 2 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \partial_{y_d}^2 G(\mathbf{y}_\parallel - \mathbf{z}, 0) (\chi' - \chi)\varphi(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \\ &= \Lambda_1(\chi' - \chi)\varphi(\mathbf{y}_\parallel) = -\Lambda_1(\chi - \chi')\varphi(\mathbf{y}_\parallel). \end{aligned}$$

D'où $\langle \Lambda \varphi, \psi \rangle(\chi) = \langle \Lambda \varphi, \psi \rangle(\chi')$.

Nous introduisons

$$\mathcal{C}_c^L := \left\{ \text{p.s. } \zeta \in C^\infty(\mathcal{B}_\infty^L), (\omega, \mathbf{y}_\parallel) \mapsto \zeta_\omega(\mathbf{y}_\parallel, y_d) \text{ stationnaire pour tout } y_d > L, \text{ p.s. } \exists M_\omega > L, \right. \\ \left. \zeta(\cdot, y_d) = 0 \text{ pour tout } y_d > M_\omega, \zeta, \nabla \zeta \in L^\infty(\Omega) \right\}$$

l'espace des fonctions régulières, \mathbf{y}_\parallel -stationnaires et à support compact dans la direction y_d .

En écrivant que U est solution de [\(14\)](#) au sens des distributions, nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 71

Pour $\varphi \in \mathcal{H}_L^{1/2}$, $\psi \in \mathcal{C}_c^L$

$$\text{p.s. } \int_L^{+\infty} \nabla U_\omega \cdot \overline{\nabla \psi_\omega} dy_d = \langle \Lambda \varphi_\omega, \psi_\omega |_{\Sigma_L} \rangle_{\mathcal{H}_L^{1/2}, \mathcal{H}_L^{-1/2}} \quad (32)$$

où U est l'unique solution dans \mathcal{W}_L de (14).

Nous en déduisons par densité la positivité de l'opérateur DtN Λ

Corollaire 72

Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_L^{1/2}$, nous avons

$$\Re \langle \Lambda \varphi, \varphi \rangle \geq 0. \quad (33)$$

6.3.4 Problème de demi-espace avec un terme source

Nous considérons dans cette partie un problème de demi-espace avec un terme source non nul.

Soit

$$\mathcal{L}_L := \left\{ v \in L_{loc}^2(\mathcal{B}_\infty^L, L^2(\Omega)), (\omega, \mathbf{y}_\parallel) \mapsto v_\omega(\mathbf{y}_\parallel, y_d) \text{ stationnaire pour tout } y_d > L, \mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} |v|^2 dy_d \right] < +\infty \right\}$$

muni de la norme

$$\forall v \in \mathcal{L}_L, \quad \|v\|_{\mathcal{L}_L} := \mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} |v|^2 dy_d \right]^{1/2}.$$

Pour $\varphi \in \mathcal{H}_L^{1/2}$, $G \in (\mathcal{L}_L)^d$, $\sqrt{1+y_d^2} F \in \mathcal{L}_L$, nous cherchons $U \in \mathcal{W}_L$ qui vérifie p.s.

$$\begin{cases} -\Delta U_\omega = F_\omega + \nabla \cdot G_\omega & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^L, \\ U_\omega = \varphi_\omega & \text{sur } \Sigma_L. \end{cases} \quad (34)$$

D'après la proposition 69, il existe un unique $U_1 \in \mathcal{W}_L$ solution p.s. de

$$\begin{cases} -\Delta U_{1,\omega} = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^L, \\ U_{1,\omega} = \varphi_\omega & \text{sur } \Sigma_L. \end{cases}$$

Nous cherchons alors $U_2 \in \mathcal{W}_{L,0}$ qui vérifie p.s.

$$\begin{cases} -\Delta U_{2,\omega} = F_\omega + \nabla \cdot G_\omega & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^L, \\ U_{2,\omega} = 0 & \text{sur } \Sigma_L. \end{cases} \quad (35)$$

Montrons que ce problème est bien posé dans $\mathcal{W}_{L,0}$. Soit $V \in \mathcal{W}_{L,0}$. La formulation variationnelle associée à (35) s'écrit

$$\mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} \nabla U_2 \cdot \overline{\nabla V} dy_d \right] = \mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} F \overline{V} dy_d \right] + \mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} G \cdot \overline{\nabla V} dy_d \right]. \quad (36)$$

Nous avons d'une part par Cauchy-Schwarz

$$\left| \mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} G \cdot \overline{\nabla V} dy_d \right] \right| \leq \|G\|_{\mathcal{L}_L} \|V\|_{\mathcal{W}_{L,0}}$$

et d'après l'inégalité de Hardy (21)

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} F \overline{V} dy_d \right] \right| &\leq \left\| \sqrt{1+y_d^2} F \right\|_{\mathcal{L}_L} \mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} \frac{|V|^2}{1+y_d^2} dy_d \right] \\ &\leq \left\| \sqrt{1+y_d^2} F \right\|_{\mathcal{L}_L} \|V\|_{\mathcal{W}_{L,0}}. \end{aligned}$$

Par Lax-Milgram, le problème est bien posé dans $\mathcal{W}_{L,0}$. Il existe donc un unique $U := U_1 + U_2 \in \mathcal{W}_L$ solution de (34).

6.4 Étude du cas des conditions de Dirichlet sur les particules

Cette section est consacrée au problème avec condition de Dirichlet sur le bord des particules. Nous commençons par l'étude du caractère bien posé des problèmes de champ proche. Nous déterminons ensuite une condition garantissant que les termes de champ proche tendent vers 0 quand y_d tend vers l'infini. Nous pouvons ensuite proposer un modèle effectif et donner une estimation d'erreur de ce modèle.

6.4.1 Caractère bien posé des problèmes de champ proche régularisés

Les problèmes de champ proche (11) + (12) peuvent s'écrire sous la forme : pour $m \geq 0$, nous cherchons une solution $U_{\omega,m}^{\text{NF}} \mathbf{y}_{\parallel}$ -stationnaire :

$$\text{p.p. } \mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} U_{\omega,m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = \mathbf{F}_{\omega,m-1}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \quad \text{dans } \mathcal{D}_{\omega} \setminus \Sigma_H, \\ -\partial_{y_d} U_{\omega,m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = \mathbf{G}_{\omega,m-1}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \quad \text{sur } \Sigma_0, \\ U_{\omega,m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{D}_{\omega}; \\ \left[U_{\omega,m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \right]_H = \alpha_{\omega,m}^{\text{D}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_d} U_{\omega,m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \right]_H = \alpha_{\omega,m-1}^{\text{N}}(\mathbf{x}_{\parallel}); \end{array} \right. \quad (37)$$

où $\mathbf{F}_{\omega,m-1}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot, y_d)$ et $\mathbf{G}_{\omega,m-1}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot, y_d)$ sont \mathbf{y}_{\parallel} -stationnaires pour tout $y_d > 0$. $\mathbf{F}_{\omega,m-1}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot)$ dépend des termes précédents $U_{\omega,m-1}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot)$ et $U_{\omega,m-2}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot)$. $\mathbf{G}_{\omega,m-1}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot)$ dépend de la trace de $U_{\omega,m-1}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot)$ sur Σ_0 . Nous avons que $\alpha_{\omega,m}^{\text{D}}(\mathbf{x}_{\parallel})$ dépend du terme de champ lointain $u_{\omega,m}^{\text{FF}}(\mathbf{x}_{\parallel})$ et $\alpha_{\omega,m-1}^{\text{N}}(\mathbf{x}_{\parallel})$ dépend lui de $\partial_{x_d} u_{\omega,m-1}^{\text{FF}}(\mathbf{x}_{\parallel})$. Par ailleurs, $\alpha_{\omega,m}^{\text{D}}(\mathbf{x}_{\parallel})$ et $\alpha_{\omega,m-1}^{\text{FF}}(\mathbf{x}_{\parallel})$ sont des fonctions indépendantes de \mathbf{y}_{\parallel} .

Dans le système (37), \mathbf{x}_{\parallel} joue le rôle d'un paramètre. Dans ce qui suit, nous omettons dans un premier temps la variable \mathbf{x}_{\parallel} pour simplifier les notations et nous relevons le saut en Σ_H . Nous nous intéressons alors au caractère

bien posé des problèmes vérifiés par $\tilde{U}_{\omega,m}^{\text{NF}} := U_{\omega,m}^{\text{NF}} - \alpha_{\omega}^{\text{D}} \chi_{\mathcal{B}_{\infty}^{\text{H}}}$, qui s'écrivent sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} \tilde{U}_{\omega} = F_{\omega} \quad \text{dans } \mathcal{D}_{\omega} \setminus \Sigma_{\text{H}} , \\ -\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega} = G_{\omega} \quad \text{sur } \Sigma_0 , \\ \tilde{U}_{\omega} = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_{\omega} ; \\ \left[\tilde{U}_{\omega} \right]_{\text{H}} = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega} \right]_{\text{H}} = \alpha_{\omega}^{\text{N}} . \end{array} \right. \quad (38)$$

Pour $m = 0$ et $m = 1$, le terme source F est nul. Nous considérons alors le problème (38) avec $F = 0$ et $G \in \mathcal{L}^q$ avec $q > 2$ où

$$\mathcal{L}^q(\Sigma_0) := \left\{ \varphi \in L^q_{loc}(\Sigma_0, L^q(\Omega)), (\omega, \mathbf{y}_{\parallel}) \mapsto \varphi_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel}) \text{ stationnaire, } \mathbb{E}[|\varphi|^q] < +\infty \right\} ;$$

et $\alpha^{\text{N}} \in L^q(\Omega)$. Le cadre L^q et \mathcal{L}^q peut paraître étrange pour l'instant, son utilité sera clair plus tard.

Nous commençons par borner dans la direction y_d notre domaine d'étude. Nous considérons ainsi le problème suivant posé dans $\mathcal{B}_{\omega,0}^L := \mathbb{R}^{d-1} \times (0, L) \setminus \mathcal{P}_{\omega}$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \tilde{U}_{\omega} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B}_{\omega,0}^L \setminus \Sigma_{\text{H}} , \\ -\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega} = G_{\omega} \quad \text{sur } \Sigma_0 , \\ \tilde{U}_{\omega} = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_{\omega} , \\ \left[\tilde{U}_{\omega} \right]_{\text{H}} = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega} \right]_{\text{H}} = \alpha_{\omega}^{\text{N}} , \\ \partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega} + \Lambda \tilde{U}_{\omega} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_L . \end{array} \right. \quad (39)$$

Si (39) admet une solution telle que $\tilde{U}_{\omega}|_{\Sigma_L} \in \mathcal{H}_L^{1/2}$, \tilde{U}_{ω} pour $y_d > L$ est alors donnée par la représentation intégrale

$$\forall \mathbf{y}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \tilde{U}_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) = -2 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \partial_{y_d} G(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{z}, y_d - L) \tilde{U}_{\omega}|_{\Sigma_L}(\mathbf{z}, L) d\mathbf{z} .$$

Une approche standard en homogénéisation stochastique pour étudier le problème du correcteur solution d'une équation de Laplace dans un domaine non borné est d'étudier en premier lieu le problème régularisé avec un terme massique $T^{-1} \tilde{U}_{\omega}$ qui est ajouté à l'équation [Neu18, GO17]. Nous procédons ainsi pour notre problème dans la bande infinie $\mathcal{B}_{\omega,0}^L$. Nous nous intéressons alors à

$$\left\{ \begin{array}{l} T^{-1} \tilde{U}_{\omega,T} - \Delta \tilde{U}_{\omega,T} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B}_{\omega,0}^L \setminus \Sigma_{\text{H}} , \\ -\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,T} = G_{\omega} \quad \text{sur } \Sigma_0 , \\ \tilde{U}_{\omega,T} = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_{\omega} , \\ \left[\tilde{U}_{\omega,T} \right]_{\text{H}} = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,T} \right]_{\text{H}} = \alpha_{\omega}^{\text{N}} , \\ \partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,T} + \Lambda \tilde{U}_{\omega,T} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_L ; \end{array} \right. \quad (40)$$

avec $G \in \mathcal{L}^q(\Sigma_0)$, $q > 2$, $\alpha^{\text{N}} \in L^q(\Omega)$.

Soit

$$\mathcal{H}_0 := \left\{ v \in \mathcal{L}^2(\Omega, H^1_{loc}(\mathcal{B}_{\omega,0}^L)), (\omega, \mathbf{y}_{\parallel}) \mapsto \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{\omega,0}^L} v_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) \text{ stationnaire pour tout } y_d \in (0, L), \right. \\ \left. \mathbb{E} \left[\int_0^L \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{\omega,0}^L} (|v|^2 + |\nabla v|^2) dy_d \right] < +\infty, \text{ p.s. } v_{\omega} = 0 \text{ sur } \partial \mathcal{P}_{\omega} \right\} ;$$

muni de la norme

$$\forall v \in \mathcal{H}_0, \quad \|v\|_{\mathcal{H}_0} := \mathbb{E} \left[\int_0^L \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{\omega,0}^L} (|v|^2 + |\nabla v|^2) dy_d \right]^{1/2}.$$

Proposition 73

Le problème (40) est bien posé dans \mathcal{H}_0 .

Preuve. Écrivons la formulation variationnelle de (40) dans \mathcal{H}_0 . Pour tout $V \in \mathcal{H}_0$,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^L \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{\omega,0}^L} \left[T^{-1} \tilde{U}_{\omega,T} \bar{V}_{\omega} + \nabla \tilde{U}_{\omega,T} \cdot \overline{\nabla V_{\omega}} \right] dy_d \right] + \langle \Lambda \tilde{U}_{\omega,T}, V_{\omega}|_{\Sigma_L} \rangle_{\mathcal{H}_L^{1/2}, \mathcal{H}_L^{-1/2}} = \mathbb{E} \left[G_{\omega} \bar{V}_{\omega}(\cdot, 0) + \alpha_{\omega}^N \bar{V}_{\omega}(\cdot, H) \right]. \quad (41)$$

Soit a la forme sesquilinéaire

$$a : \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\tilde{U}_T, V \mapsto \mathbb{E} \left[\int_0^L \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{\omega,0}^L} \left[T^{-1} \tilde{U}_{\omega,T} \bar{V}_{\omega} + \nabla \tilde{U}_{\omega,T} \cdot \overline{\nabla V_{\omega}} \right] dy_d \right] + \langle \Lambda \tilde{U}_{\omega,T}, V_{\omega}|_{\Sigma_L} \rangle_{\mathcal{H}_L^{1/2}, \mathcal{H}_L^{-1/2}}; \quad (42)$$

et l la forme linéaire

$$l : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$V \mapsto \mathbb{E} \left[G_{\omega} \bar{V}_{\omega}(\cdot, 0) + \alpha_{\omega}^N \bar{V}_{\omega}(\cdot, H) \right]. \quad (43)$$

La coercivité de a est assurée par la positivité de l'opérateur DtN. La continuité de a et l se déduit du théorème de trace suivant :

Lemme 74

Pour tout $V \in \mathcal{H}_0$,

$$\mathbb{E} \left[|V(\cdot, 0)|^2 + |V(\cdot, H)|^2 + |V(\cdot, L)|^2 \right] \leq \|V\|_{\mathcal{H}_0}^2. \quad (44)$$

Preuve. Nous raisonnons p.s. pour une distribution de particules donnée. Nous prolongeons V_{ω} par 0 à l'intérieur des particules. Le prolongement \tilde{V}_{ω} reste stationnaire et appartient à $H_{loc}^1(\mathbb{R}^{d-1} \times (0, L), L^2(\Omega))$. Nous appliquons le théorème de trace à \tilde{V}_{ω} dans $\square_1 \times (0, H)$

$$\int_{\square_1} |\tilde{V}(\mathbf{y}_{\parallel}, 0)|^2 + |\tilde{V}(\mathbf{y}_{\parallel}, H)|^2 d\mathbf{y}_{\parallel} \leq C \int_{\square_1} \int_0^H |\tilde{V}(\mathbf{y}_{\parallel}, z)|^2 + |\nabla \tilde{V}(\mathbf{y}_{\parallel}, z)|^2 dz d\mathbf{y}_{\parallel}.$$

C ici ne dépend que de $\square_1 \times (0, H)$. Nous en déduisons que

$$\int_{\square_1} |V(\mathbf{y}_{\parallel}, 0)|^2 + |V(\mathbf{y}_{\parallel}, H)|^2 d\mathbf{y}_{\parallel} \leq C \int_{\square_1} \int_0^H \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{\omega,0}^H} (|V(\mathbf{y}_{\parallel}, z)|^2 + |\nabla V(\mathbf{y}_{\parallel}, z)|^2) d\mathbf{y}_{\parallel} dz.$$

Nous prenons l'espérance et nous utilisons la stationnarité pour conclure. Nous pouvons raisonner de même sur $\square_1 \times (0, L)$ pour borner $\mathbb{E} \left[|V(\cdot, L)|^2 \right]$. □

Notons que $G \in \mathcal{L}^q \subset \mathcal{L}^2$ et $\alpha_\omega^N \in L^2(\Omega)$. Par le théorème de Lax-Milgram le problème est bien posé dans \mathcal{H}_0 . \square

D'après le lemme 67, l'unique solution $\tilde{U}_T \in \mathcal{H}_0$ admet une trace $\tilde{U}_T|_{\Sigma_L}$ sur Σ_L dans $\mathcal{H}_L^{1/2}$.

Pour $y_d > L$, nous avons alors d'après la proposition 68

$$\forall \mathbf{y}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}, \forall y_d > L, \quad \tilde{U}_T(\mathbf{y}_\parallel, y_d) := -2 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \partial_{y_d} G(\mathbf{y}_\parallel - \mathbf{z}, y_d - L) \tilde{U}_T|_{\Sigma_L}(\mathbf{z}, L) d\mathbf{z}. \quad (45)$$

Considérons le problème équivalent à (40) complété par (45). Nous avons montré la proposition suivante :

Proposition 75

Il existe une unique $\tilde{U}_T \in \mathcal{H}_0 \cap \mathcal{W}_L$ solution de

$$\text{p.s.} \quad \begin{cases} T^{-1} \chi_{y_d < L} \tilde{U}_{\omega, T} - \Delta \tilde{U}_{\omega, T} = 0 & \text{dans } \mathcal{D}_\omega \setminus \Sigma_H, \\ -\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega, T} = G_\omega & \text{sur } \Sigma_0, \\ \tilde{U}_{\omega, T} = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{D}_\omega, \\ \left[\tilde{U}_{\omega, T} \right]_H = 0 & \text{et } \left[-\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega, T} \right]_H = \alpha_\omega^N, \\ \left[\tilde{U}_{\omega, T} \right]_L = 0 & \text{et } \left[-\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega, T} \right]_L = 0. \end{cases} \quad (46)$$

De plus, \tilde{U}_T vérifie

$$\forall V \in \mathcal{H}_0 \cap \mathcal{W}_L, \quad \mathbb{E} \left[\int_0^L \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{\omega, 0}^L} (T^{-1} \tilde{U}_T \bar{V} + \nabla \tilde{U}_T \cdot \nabla \bar{V}) dy_d \right] + \mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} \nabla \tilde{U}_T \cdot \nabla \bar{V} dy_d \right] = \mathbb{E} \left[G \bar{V}(\cdot, 0) + \alpha^N \bar{V}(\cdot, H) \right]. \quad (47)$$

6.4.2 Existence d'une sous-suite convergente

Montrons qu'il existe C telle que

$$\forall V \in \mathcal{H}_0, \quad |l(V)| \leq C \|\nabla V\|_{\mathcal{L}}, \quad (48)$$

où

$$\mathcal{L} := \left\{ \text{p.s. } v_\omega \in H_{loc}^1(\mathcal{B}_{\omega, 0}^L), (\omega, \mathbf{y}_\parallel) \mapsto \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{\omega, 0}^L} v_\omega(\mathbf{y}_\parallel, y_d) \text{ stationnaire pour tout } y_d \in (0, L), \mathbb{E} \left[\int_0^L \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{\omega, 0}^L} |v|^2 dy_d \right] < +\infty \right\};$$

muni de la norme

$$\forall v \in \mathcal{L}, \quad \|v\|_{\mathcal{L}} := \mathbb{E} \left[\int_0^L \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{\omega, 0}^L} |v|^2 dy_d \right]^{1/2}.$$

Nous pourrions ainsi grâce à la coercivité de a borner la norme de $\nabla \tilde{U}_T$ indépendamment de T et en extraire une sous-suite convergente. Pour établir (48), il nous faut contrôler la trace de v sur Σ_0 , Σ_H et Σ_L par $\|\nabla v\|_{\mathcal{H}_0}$.

P.s. grâce à l'inégalité de Poincaré, il est facile d'établir un tel contrôle. La constante de Poincaré varie suivant la distance minimale à la frontière sur laquelle la solution est nulle. Nous savons qu'il existe p.s. une boîte assez grande pour qu'une particule soit comprise dans cette boîte. Cependant la largeur de la boîte peut être arbitrairement grande. Nous ne pouvons donc pas espérer pouvoir prendre l'espérance de part et d'autre de l'inégalité de Poincaré p.s. Nous établissons cependant à la place une inégalité pondérée.

Proposition 76

Pour tout $v \in \mathcal{H}_0$, l'inégalité de trace pondérée suivante est vérifiée

$$\forall y_d \in [0, L] \setminus [\delta, h_L + \delta], \quad \mathbb{E} [h_\omega |v_\omega|^2(\cdot, y_d)] \leq C \mathbb{E} \left[\int_0^L \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} |\nabla v_\omega|^2 dy_d \right], \quad (49)$$

où

$$h_\omega^{y_d} : \begin{cases} \left(2 R_\omega^{y_d} \log R_\omega^{y_d}\right)^{-1} & \text{pour } d = 2, \\ \left(2(R_\omega^{y_d})^2\right)^{-1} & \text{pour } d = 3; \end{cases}$$

et $R_\omega^{y_d}(\mathbf{y}_\parallel)$ correspond à la distance du plus proche x_ω^i de $(\mathbf{y}_\parallel, y_d)$:

$$R_\omega^{y_d} : \begin{cases} \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}_+, \\ \mathbf{y}_\parallel \mapsto \min_{i \in \mathbb{N}} |\mathbf{y} - x^i| & \text{où } \mathbf{y} = (\mathbf{y}_\parallel, y_d). \end{cases}$$

Par stationnarité des $\{x_\omega^i\}_{i \in \mathbb{N}}$, R_ω est \mathbf{y}_\parallel -stationnaire.

Preuve. Nous considérons le diagramme de Voronoï $(V_\omega^n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathbb{R}^{d-1} associé au processus ponctuel $\{x_\omega^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ défini par les ensembles,

$$V_\omega^n := \left\{ \mathbf{y}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1} \text{ tel que } |\mathbf{y} - \mathbf{x}_\omega^n| = \min_{j \in \mathbb{N}} |\mathbf{y} - \mathbf{x}_\omega^j| \text{ où } \mathbf{y} := (\mathbf{y}_\parallel, y_d) \right\}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (50)$$

Nous savons par le lemme 3.6 de [BC99] que l'inégalité suivante tient p.s. pour tout $v \in \mathcal{H}_0$, $i \in \mathbb{N}$

$$\forall y_d \in [0, L] \setminus [\delta, h_L + \delta], \quad \int_{V_\omega^i} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} h_\omega^{y_d} |v_\omega|^2(\mathbf{y}_\parallel, y_d) d\mathbf{y}_\parallel \leq C \int_0^L \int_{V_\omega^i} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} |\nabla v_\omega|^2(\mathbf{y}_\parallel, y_{d'}) d\mathbf{y}_\parallel dy_{d'}.$$

Pour tout $A > 0$, nous faisons la somme de toutes les cellules V^i telles que $V^i \cap \square_A \neq \emptyset$. Soit $I_A := \{i \in \mathbb{N} \text{ telle que } V^i \cap \square_A\}$. Nous obtenons alors

$$\sum_{i \in I_A} \int_{V_\omega^i} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} h_\omega^{y_d} |v_\omega|^2(\mathbf{y}_\parallel, y_d) d\mathbf{y}_\parallel \leq C \sum_{i \in I_A} \int_0^L \int_{V_\omega^i} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} |\nabla v_\omega|^2(\mathbf{y}_\parallel, y_{d'}) d\mathbf{y}_\parallel dy_{d'};$$

ce qui permet d'obtenir

$$\int_{\bigcup_{i \in I_A} V_\omega^i} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} h_\omega^{y_d} |v_\omega|^2(\mathbf{y}_\parallel, y_d) d\mathbf{y}_\parallel \leq C \int_0^L \int_{\bigcup_{i \in I_A} V_\omega^i} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} |\nabla v_\omega|^2(\mathbf{y}_\parallel, y_{d'}) d\mathbf{y}_\parallel dy_{d'}.$$

Nous obtenons le résultat en prenant $A \uparrow +\infty$ et en appliquant le théorème ergodique [65] du chapitre précédent. \square

Dans la suite de cette section, nous supposons que la distribution des centres des particules satisfait l'hypothèse suivante

Hypothèse 2

$$\exists m > d-1 \quad \text{tel que} \quad \sup_{y_d \in [0, L]} \mathbb{E} \left[(R_\omega^{y_d})^m \right] < +\infty. \quad (51)$$

Cette hypothèse est vérifiée par la plupart des processus ponctuels hardcore [TBvdB13].

Corollaire 77

Sous l'hypothèse 2 pour $s = 1 + \frac{m-1}{m+1}$ et $v \in \mathcal{H}_0$, l'inégalité suivante est vérifiée

$$\forall y_d \in [0, L] \setminus [\delta, h_L + \delta], \quad \mathbb{E} \left[|v_\omega(\cdot, y_d)|^s \right]^{\frac{1}{s}} \leq C \|\nabla v\|_{\mathcal{L}}. \quad (52)$$

Par conséquent, $v|_{\Sigma_{y_d}} \in \mathcal{L}^s(\Sigma_H)$.

Preuve. Nous appliquons l'inégalité de Hölder avec $\alpha, \beta > 0$ telles que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$

$$\mathbb{E} [|v_\omega|^s(\cdot, y_d)] \leq \mathbb{E} \left[\left((h_\omega^{y_d})^{1/2} |v_\omega| \right)^{s\alpha}(\cdot, y_d) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E} \left[(h_\omega^{y_d})^{-\frac{s\beta}{2}} \right]^{\frac{1}{\beta}}.$$

En prenant $\alpha := \frac{2}{s}$ et $\beta := \frac{2}{2-s}$, nous avons alors

$$\mathbb{E} [|v_\omega|^s(\cdot, y_d)]^{\frac{1}{s}} \leq \mathbb{E} [h_\omega^{y_d} |v_\omega|^2(\cdot, y_d)]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E} \left[(h_\omega^{y_d})^{-\frac{s}{2-s}} \right]^{\frac{2-s}{2s}}.$$

Puisque $\frac{s}{2-s} = m$, nous obtenons le résultat grâce à la proposition 76. □

Nous sommes maintenant en mesure d'établir (48) si $G \in \mathcal{L}^q(\Sigma_0)$ avec $q > 2 + \frac{2}{m-1}$, $\alpha^N \in L^q(\Omega)$ grâce à l'inégalité de Hölder.

Corollaire 78

L'unique solution $\tilde{U}_T \in \mathcal{H}_0 \cap \mathcal{W}_L$ du problème (46) vérifie les estimations suivantes

$$\|\nabla \tilde{U}_T\|_{\mathcal{L}_0} \leq C ; \quad \|\tilde{U}_T\|_{\mathcal{L}} \leq \sqrt{T} C ; \quad (53)$$

où \mathcal{L}_0 est l'espace de Hilbert suivant

$$\mathcal{L}_0 := \left\{ v \in L^2(\Omega, L^2_{loc}(\mathcal{D}_\omega)), (\omega, \mathbf{y}_{\parallel}) \mapsto \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} v_\omega(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) \text{ stationnaire pour tout } y_d > 0, \right. \\ \left. \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} |v|^2 dy_d \right] < +\infty \right\} ;$$

muni de la norme

$$\forall v \in \mathcal{L}_0, \quad \|v\|_{\mathcal{L}_0} = \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} |v|^2 dy_d \right]^{1/2} .$$

Preuve. Nous utilisons la formulation variationnelle (47) et l'inégalité (52). Il vient d'abord

$$\|\nabla \tilde{U}_T\|_{\mathcal{L}_0}^2 \leq l(\tilde{U}_T) \leq C \|\nabla \tilde{U}_T\|_{\mathcal{L}_0} .$$

D'où $\|\nabla \tilde{U}_T\|_{\mathcal{L}_0} \leq C$.

De même, nous obtenons

$$T^{-1} \|\tilde{U}_T\|_{\mathcal{L}}^2 \leq a(\tilde{U}_T, \tilde{U}_T) \leq C \|\nabla \tilde{U}_T\|_{\mathcal{L}_0} \leq C^2 .$$

D'où $\|\tilde{U}_T\|_{\mathcal{L}} \leq \sqrt{T} C$. □

$\nabla \tilde{U}_T$ est borné indépendamment de T dans \mathcal{L}_0 . Par conséquent, il existe une sous-suite qui converge faiblement dans \mathcal{L}_0 . Soit g la limite de cette suite. P.s. il existe $\tilde{U}_\omega \in H^1_{loc}(\mathcal{B}^L_{\omega,0})$ telle que $g_\omega = \nabla \tilde{U}_\omega$.

Grâce au corollaire 78, il est possible de passer à la limite dans la formule (47).

Soit $V \in \mathcal{H}_0 \cap \mathcal{W}_L$. Par convergence faible

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} \nabla \tilde{U}_T \cdot \nabla V dy_d \right] \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} \nabla \tilde{U}_\omega \cdot \nabla V dy_d \right] .$$

De plus, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^L \mathbb{1}_{\mathcal{B}^L_{\omega,0}} T^{-1} \tilde{U}_T \nabla V dy_d \right] \leq \mathbb{E} \left[\int_0^L \mathbb{1}_{\mathcal{B}^L_{\omega,0}} T^{-1} |\tilde{U}_T|^2 dy_d \right]^{1/2} \mathbb{E} \left[\int_0^L \mathbb{1}_{\mathcal{B}^L_{\omega,0}} T^{-1} |\nabla V|^2 dy_d \right]^{1/2}$$

D'où, d'après (53)

$$\mathbb{E} \left[\int_0^L \mathbb{1}_{\mathcal{B}^L_{\omega,0}} T^{-1} \tilde{U}_T \nabla V dy_d \right] \leq C \sqrt{T}^{-1} \|V\|_{\mathcal{L}} .$$

Donc en passant à la limite

$$\mathbb{E} \left[\int_0^L \mathbb{1}_{\mathcal{D}_{\omega,0}^L} T^{-1} \tilde{U}_T \bar{V} dy_d \right] \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0 .$$

\tilde{U} vérifie donc pour tout $V \in \mathcal{H}_0 \cap \mathcal{W}_L$

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} \nabla \tilde{U} \cdot \nabla V dy_d \right] = \mathbb{E} \left[G \bar{V}(\cdot, 0) + \alpha^N \bar{V}(\cdot, H) \right] .$$

\tilde{U}_ω est donc solution p.s. [BFFO17] dans $\mathcal{D}'(\mathcal{D}_\omega)$ du problème

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{U}_\omega = 0 & \text{dans } \mathcal{D}_\omega \setminus \Sigma_H , \\ -\partial_{y_d} \tilde{U}_\omega = G_\omega & \text{sur } \Sigma_0 , \\ \tilde{U}_\omega = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{D}_\omega , \\ \left[\tilde{U}_\omega \right]_H = 0 & \text{et } \left[-\partial_{y_d} \tilde{U}_\omega \right]_H = \alpha^N . \end{cases} \quad (54)$$

Nous avons donc construit une solution \tilde{U} à notre problème initial (38).

Cette solution hérite naturellement d'une propriété de sous-linéarité qui s'écrit sous la forme

$$\lim_{R \uparrow +\infty} \frac{1}{R} \left(\int_{\square_R \times (0,R)} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} |\tilde{U}_\omega|^2 dy \right)^{1/2} = 0 . \quad (55)$$

Grâce à (47), il est possible de montrer que la solution \tilde{U} telle que

- p.s. $\tilde{U}_\omega \in H_{loc}^1(\mathcal{D}_\omega)$ est solution dans $\mathcal{D}'(\mathcal{D}_\omega)$ de (38) telle que $\int_{\square_1} \int_0^L \tilde{U}_\omega dy = 0$;
- $(\omega, \mathbf{y}_\parallel) \mapsto \nabla \tilde{U}_\omega(\mathbf{y}_\parallel, y_d)$ est stationnaire pour tout $y_d > 0$. Pour tout $y_d > 0$, $\mathbb{E}[\nabla_{\mathbf{y}_\parallel} \tilde{U}_\omega(\cdot, y_d)] = 0$ et

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} |\nabla \tilde{U}_\omega|^2 dy_d \right] < +\infty ;$$

est unique [BFFO17, Neu18].

Nous avons ainsi montré

Théorème 79 (d'existence et d'unicité)

Il existe un unique $\tilde{U} : \Omega \rightarrow H_{loc}^1(\mathcal{D}_\omega)$ tel que

- p.s. $\tilde{U}_\omega \in H_{loc}^1(\mathcal{D}_\omega)$ est solution dans $\mathcal{D}'(\mathcal{D}_\omega)$ de (38) telle que $\int_{\square_1} \int_0^L \tilde{U}_\omega dy = 0$;
- $(\omega, \mathbf{y}_\parallel) \mapsto \nabla \tilde{U}_\omega(\mathbf{y}_\parallel, y_d)$ est stationnaire pour tout $y_d > 0$. Pour tout $y_d > 0$, $\mathbb{E}[\nabla_{\mathbf{y}_\parallel} \tilde{U}_\omega(\cdot, y_d)] = 0$ et

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} |\nabla \tilde{U}_\omega|^2 dy_d \right] < +\infty ;$$

Cependant au vu de (52) la trace de \tilde{U} sur Σ_L n'est pas dans $\mathcal{H}_L^{1/2}$. Nous ne pouvons donc pas utiliser pour \tilde{U} les résultats concernant le comportement à l'infini des champs proches obtenus dans la section 6.3.

Il peut être possible d'étendre les résultats de la section 6.3 à des traces plus générales. Nous n'avons pas trouvé de tel résultat. Nous avons plutôt décidé par la suite de considérer les problèmes régularisés (46). Cela correspond de plus aux méthodes numériques que nous avons mises en place. L'inconvénient est que nous commettons une erreur supplémentaire dans notre modèle effectif.

6.4.3 Construction des premiers termes de champ proche

Nous allons maintenant construire les premiers termes de champ proche et assurer qu'ils tendent bien vers 0 à l'infini.

Construction de $U_{\omega,0,T}^{NF}$

D'après la proposition 75, pour presque tout $\mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}$, il existe un unique $\tilde{U}_{0,T}^{NF}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot)$ dans $\mathcal{H}_0 \cap \mathcal{W}_L$ solution p.s. de

$$\left\{ \begin{array}{l} T^{-1} \chi_{y_d < L} \tilde{U}_{\omega,0,T}^{NF}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) - \Delta_{\mathbf{y}} \tilde{U}_{\omega,0,T}^{NF}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}_{\omega} \setminus \Sigma_H, \\ -\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,0,T}^{NF}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0, \\ \tilde{U}_{\omega,0,T}^{NF}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_{\omega}, \\ \left[-\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,0,T}^{NF}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \right]_H = 0, \\ \left[\tilde{U}_{\omega,0,T}^{NF} \right]_L = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,0,T}^{NF} \right]_L = 0. \end{array} \right. \quad (56)$$

Nous en déduisons que $\tilde{U}_{\omega,0}^{NF} = 0$. Par définition, la solution $U_{\omega,0,T}^{NF}$ s'écrit $U_{\omega,0,T}^{NF}(\mathbf{x}_{\parallel}; \mathbf{y}) = -u_{\omega,0}^{FF} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \chi_{\mathcal{B}_{\infty}^H}(\mathbf{y}) + \tilde{U}_{\omega,0,T}^{NF}(\mathbf{x}_{\parallel}; \mathbf{y})$. Comme nous cherchons une solution qui tend vers 0 quand y_d tend vers $+\infty$, nous obtenons une condition de bord pour u_0^{FF} sur $\Sigma_{\varepsilon H}$

$$\text{p.s. } u_{\omega,0}^{FF} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_{\parallel}) = 0.$$

Nous remarquons alors que u_0^{FF} est indépendant de ω .

Proposition 80

Pour presque tout $\mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}$, il existe une unique fonction $U_{0,T}^{NF}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = -u_0^{FF} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \chi_{\mathcal{B}_{\infty}^H}(\cdot) + \tilde{U}_{0,T}^{NF}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot)$, avec $\tilde{U}_{0,T}^{NF}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \in \mathcal{H}_0 \cap \mathcal{W}_L$ solution p.s. de (56), qui tend vers 0 à l'infini si et seulement si

$$u_0^{FF} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H}. \quad (57)$$

Dans ce cas, p.s. pour presque tout $\mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{\omega}$,

$$U_{\omega,0,T}^{NF}(\mathbf{x}_{\parallel}; \mathbf{y}) = 0. \quad (58)$$

Construction de $U_{\omega,1,T}^{\text{NF}}$

D'après la proposition [75](#), pour presque tout $\mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}$, il existe un unique $\tilde{U}_{1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot)$ dans $\mathcal{H}_0 \cap \mathcal{W}_L$ solution p.s. de

$$\left\{ \begin{array}{l} T^{-1} \chi_{y_d < L} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) - \Delta_{\mathbf{y}} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}_{\omega} \setminus \Sigma_H, \\ -\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0, \\ \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_{\omega}, \\ \left[-\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \right]_H = \partial_{x_d} u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_{\parallel}), \\ \left[\tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \right]_L = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \right]_L = 0. \end{array} \right. \quad (59)$$

où nous avons utilisé le fait que $U_{\omega,0,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \mathbf{y}) = 0$.

Par linéarité, $U_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \mathbf{y}) = -u_{\omega,1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \chi_{\mathcal{B}_{\infty}^H}(\mathbf{y}) + \partial_{x_d} u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)}$ où $\mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)}$ est l'unique solution dans $\mathcal{H}_0 \cap \mathcal{W}_L$ de

$$\left\{ \begin{array}{l} T^{-1} \chi_{y_d < L} \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)} - \Delta \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}_{\omega} \setminus \Sigma_H, \\ -\partial_{y_d} \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0, \\ \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)} = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_{\omega}, \\ \left[-\partial_{y_2} \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)} \right]_H = 1, \\ \left[\mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)} \right]_L = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_d} \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)} \right]_L = 0. \end{array} \right. \quad (60)$$

Comme nous cherchons une solution $U_{\omega,1,T}^{\text{NF}}$ qui tend vers 0 quand y_d tend vers $+\infty$, nous obtenons une condition de bord pour $u_{1,T}^{\text{FF}}$ sur $\Sigma_{\varepsilon H}$

$$\text{p.s. } -u_{\omega,1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_{\parallel}) + \partial_{x_d} u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_{\parallel}) c_{0,T}^{(1)} = 0;$$

où $c_{0,T}^{(1)}$ est donné par

$$c_{0,T}^{(1)} := \lim_{y_d \rightarrow +\infty} \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)}(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) = \mathbb{E} \left[\mathcal{W}_{0,T}^{(1)}(\cdot, L) \right]. \quad (61)$$

Nous avons ici utilisé le résultat de la proposition [69](#). Nous remarquons alors que $u_{1,T}^{\text{FF}}$ est indépendant de ω .

Proposition 81

Pour presque tout $\mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}$, il existe une unique fonction $U_{1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = -u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \chi_{\mathcal{B}_{\infty}^{\text{H}}}(\cdot) + \tilde{U}_{1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot)$, avec $\tilde{U}_{1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \in \mathcal{H}_0 \cap \mathcal{W}_L$ solution de (59), qui tend vers 0 à l'infini si et seulement si

$$-u_1^{\text{FF}} + \partial_{x_d} u_0^{\text{FF}} c_{0,T}^{(1)} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_{\varepsilon\text{H}}; \quad (62)$$

où $c_{0,T}^{(1)}$ est donné par (61).

Dans ce cas, p.s. pour presque tout $\mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_{\omega}$, $U_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ s'écrit

$$U_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \mathbf{y}) = -u_{\omega,1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \chi_{\mathcal{B}_{\infty}^{\text{H}}}(\mathbf{y}) + \partial_{x_d} u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)}. \quad (63)$$

où $\mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)}(\mathbf{y})$ est l'unique solution dans $\mathcal{H}_0 \cap \mathcal{W}_L$ de (60).

6.4.4 Construction des premiers termes de champ lointain

Les conditions aux bords pour les termes de champ lointain obtenues précédemment, garantissant l'existence des termes de champ proche tendant vers 0 à l'infini, permettent de compléter les équations satisfaites par les termes de champ lointains. Nous obtenons ainsi les problèmes vérifiés par u_0^{FF} (64) et par u_1^{FF} (65).

Construction de u_0^{FF}

Définition 82

En utilisant (4) et la conditions aux limites (57) sur $\Sigma_{\varepsilon\text{H}}$, nous définissons u_0^{FF} comme l'unique solution déterministe dans $H_{loc}^1(\mathcal{B}_{\infty}^{\varepsilon\text{H}})$ de

$$\begin{cases} -\Delta u_0^{\text{FF}} - k^2 u_0^{\text{FF}} = f & \text{dans} \quad \mathcal{B}_{\infty}^{\varepsilon\text{H}}, \\ u_0^{\text{FF}} = 0 & \text{sur} \quad \Sigma_{\varepsilon\text{H}}; \end{cases} \quad (64)$$

complété par l'UPRC (9) du chapitre 5.

Comme u_0^{FF} est solution de l'équation de Helmholtz dans un demi-espace avec une condition de Dirichlet homogène sur l'hyperplan et un terme source $L^2(\mathcal{B}_{\infty}^{\text{H}})$ à support compact, complétée par la condition d'onde sortante (9) du chapitre 5, nous montrons que le problème (64) est bien posé dans $H_0^1(\mathcal{B}_{\infty}^{\text{H}})$ [CWM05]. Il est alors possible d'exprimer u_0^{FF} à l'aide de sa transformée de Fourier ou de manière équivalente avec la fonction de Green de Dirichlet. Nous pouvons même prouver que $u_0^{\text{FF}} \in H_0^2(\mathcal{B}_{\infty}^{\text{H}})$. Par conséquent $\partial_{x_d} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}} \in L^2(\Sigma_{\varepsilon\text{H}})$.

Construction de u_1^{FF}
Définition 83

En utilisant (4) et les conditions aux limites (62) sur $\Sigma_{\varepsilon\text{H}}$, nous définissons u_1^{FF} comme l'unique solution déterministe dans $H_{loc}^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon\text{H}})$ de

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{\text{FF}} - k^2 u_1^{\text{FF}} = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^{\varepsilon\text{H}}, \\ u_1^{\text{FF}} = c_{0,\text{T}}^{(1)} \partial_{x_d} u_0^{\text{FF}} & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon\text{H}}, \end{cases} \quad (65)$$

complété par l'UPRC (9) du chapitre 5 et où $c_{0,\text{T}}^{(1)}$ est donné par (61).

Il s'agit de l'équation de Helmholtz homogène avec condition de Dirichlet $L^2(\Sigma_{\varepsilon\text{H}})$ complétée par la condition d'onde sortante (9) du chapitre 5. Nous avons alors également que le problème (65) est bien posé et $u_1^{\text{FF}} \in H^2(\mathcal{B}_\infty^{\text{H}})$. Ainsi $\partial_{x_d} u_1^{\text{FF}} \in L^2(\Sigma_{\varepsilon\text{H}})$.

6.4.5 Modèle effectif

Soit nous construisons les termes de champ lointain de façon incrémentable, soit nous utilisons le modèle qui va approcher la série tronquée de champs lointains. Ceci peut être utile pour l'étude de géométries plus générales. Le fait de prendre un modèle approché permet d'avoir une approximation directe jusqu'à un certain ordre.

Le premier modèle que nous proposons est construit à partir de u_0^{FF} satisfaisant les équations (64). Les particules et la condition d'impédance posée sur l'objet sont remplacées par un plan conducteur sur $\Sigma_{\varepsilon\text{H}}$. Cette condition d'impédance effective ne permet donc pas de prendre en compte les particules.

Nous proposons alors un deuxième modèle. Ce modèle est construit à partir de u_0^{FF} et u_1^{FF} . Nous souhaitons avoir une approximation de $u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}}$. Pour cela, nous reprenons les conditions de bords vérifiées par u_0^{FF} et u_1^{FF} données par (57) et (62)

$$\begin{aligned} u_0^{\text{FF}} &= 0 & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon\text{H}}; \\ u_1^{\text{FF}} &= c_{0,\text{T}}^{(1)} \partial_{x_d} u_0^{\text{FF}} & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon\text{H}}. \end{aligned}$$

En prenant une combinaison linéaire des deux conditions, nous avons :

$$(u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}}) = \varepsilon c_{0,\text{T}}^{(1)} \partial_{x_d} u_0^{\text{FF}} \quad \text{sur } \Sigma_{\varepsilon\text{H}}. \quad (66)$$

De plus, comme u_0^{FF} et u_1^{FF} vérifient l'équation de Helmholtz, nous avons

$$-\Delta(u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}}) - k^2 (u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}}) = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^{d-1} \times (\varepsilon\text{H}, +\infty). \quad (67)$$

Définition 84

Soit v_2^ε satisfaisant

$$\begin{cases} -\Delta v_2^\varepsilon - k^2 v_2^\varepsilon = f & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^{\varepsilon H}, \\ -\varepsilon c_{0,T}^{(1)} \partial_{x_d} v_2^\varepsilon + v_2^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H}, \end{cases} \quad (68)$$

complété par l'UPRC (9) du chapitre 5 et où $c_{0,T}^{(1)}$ est donné par (61).

Remarque 23. Nous sommes passés d'une condition de Dirichlet pour le modèle à l'ordre 1 à une condition de Robin pour le modèle à l'ordre 2.

Si $c_{0,T}^{(1)} > 0$ alors d'après [CW97] le problème est bien posé dans $H^1(B_L)$, avec $B_L = \{\varepsilon H < x_d < L\}$, pour toute bande B_L . Attention, si $c_{0,T}^{(1)} < 0$, le problème n'est plus bien posé (il peut exister des modes guidés par la surface).

Dans le cas périodique, nous avons montré (voir remarque 6 du chapitre 3) que pour H assez grand, la constante $c_0^{(1)} > 0$. Ici c'est plus délicat à démontrer.

6.4.6 Estimations d'erreurs sur le modèle effectif

Théorème 85

Soit $L' > H$. Soit u^ε une solution de notre problème de diffraction qui vérifie les équations $(P_\omega^\varepsilon) + (CD_\omega)$.

Supposons que u_0^{FF} vérifie la condition (57) et u_1^{FF} vérifie la condition (62) alors $U_{0,T}^{\text{NF}}$ est donné par (58) et $U_{1,T}^{\text{NF}}$ est donné par (63). Alors, nous avons

$$\left\| u^\varepsilon - \left(u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}} + \varepsilon U_{1,T}^{\text{NF}} \right) \right\|_{\mathcal{L}^2(\Omega, H_0^1(\mathcal{B}_{\omega,0,R}^{L'}))} \leq O\left(2\varepsilon^{d/2+1} \sqrt{T} + \frac{\varepsilon^{d/2-1}}{\sqrt{T}} + \varepsilon^{d/2+1} + \varepsilon \right) + o(\varepsilon + \varepsilon^2). \quad (69)$$

Preuve. Nous allons comparer maintenant u^ε à $w^\varepsilon = u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}} + \varepsilon U_{1,T}^{\text{NF}}$.

Écrivons le problème vérifié par w_ω^ε

•

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2) w_\omega^\varepsilon &= \varepsilon (\Delta + k^2) \left[U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \Delta_{\mathbf{y}} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \nabla_{\mathbf{x}_\parallel} \nabla_{\mathbf{y}} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \varepsilon (\Delta_{\mathbf{x}_\parallel} + k^2) U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon T} \chi_{y_d < L} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \nabla_{\mathbf{x}_\parallel} \nabla_{\mathbf{y}} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \varepsilon (\Delta_{\mathbf{x}_\parallel} + k^2) U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \quad \text{dans } \mathcal{D}_\omega^\varepsilon \setminus \Sigma_{\varepsilon H}. \end{aligned}$$

• $\left[w_\omega^\varepsilon \right]_{\varepsilon H} = 0$ et $\left[\partial_{x_d} w_\omega^\varepsilon \right]_{\varepsilon H} = \varepsilon \partial_{x_d} u_1^{\text{FF}}$;

- $w_\omega^\varepsilon = 0$ sur $\partial\mathcal{P}_\omega$;
- $-\partial_{x_d} w_\omega^\varepsilon + ik\gamma w_\omega^\varepsilon = \varepsilon ik\gamma U_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_\parallel, 0)$ sur Σ_0 .

Nous tronquons le domaine d'étude dans la direction x_d en imposant une condition DtN sur $\Sigma_{L'}$ où $L' > L > H$.

Soit $R > 0$. Nous définissons $\mathcal{B}_{\omega,0,R}^{L'} := \{\square_R \times (0, L') \setminus \overline{\mathcal{P}_\omega}\}$ et pour $M > 0$, $\Sigma_M^R := \Sigma_M \cap \square_R$. Écrivons la formulation variationnelle vérifiée par $e^\varepsilon := u^\varepsilon - w^\varepsilon$ dans $L^2(\Omega, H_0^1(\mathcal{B}_{\omega,0,R}^{L'}))$ et $H_0^1(\mathcal{B}_{\omega,0,R}^{L'}) := \{v \in H^1(\mathcal{B}_{\omega,0,R}^{L'}), v = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{P}_\omega\}$.

$$\forall v \in \mathcal{L}^2(\Omega, H_0^1(\mathcal{B}_{\omega,0}^{L'})),$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\int_0^{L'} \int_{\square_R} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} \nabla e_\omega^\varepsilon \cdot \overline{\nabla v_\omega} - k^2 \int_0^{L'} \int_{\square_R} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} e_\omega^\varepsilon \overline{v_\omega} + \int_{\Sigma_0^R} ik\gamma e_\omega^\varepsilon \overline{v_\omega} + \frac{1}{R^{d-1}} \langle \Lambda^K e_\omega^\varepsilon, v_\omega \rangle_{H^{1/2}(\Sigma_{L'}^R), H^{-1/2}(\Sigma_{L'}^R)} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\varepsilon ik \int_{\Sigma_0^R} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, 0) \overline{v_\omega(\mathbf{x}_\parallel, 0)} d\mathbf{x}_\parallel + \frac{1}{\varepsilon T} \int_0^{L'} \int_{\square_R} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \overline{v_\omega(\mathbf{x})} d\mathbf{x} - \varepsilon \int_0^{L'} \int_{\square_R} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} \nabla_{\mathbf{x}_\parallel} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \cdot \overline{\nabla v_\omega(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \right. \\ &+ \varepsilon k^2 \int_0^{L'} \int_{\square_R} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \overline{v_\omega(\mathbf{x})} d\mathbf{x} + \varepsilon \int_{\Sigma_{\varepsilon H}^R} \partial_{x_d} u_1^{\text{FF}} \overline{v_\omega(\mathbf{x}_\parallel, \varepsilon H)} d\mathbf{x}_\parallel + \varepsilon \int_{\Sigma_{L'}^R} \overline{v_\omega(\mathbf{x}, L')} \left[\partial_{x_d} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{L'}{\varepsilon}) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\varepsilon} [\partial_{y_d} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}}](\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{L'}{\varepsilon}) + \Lambda^K U_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{L'}{\varepsilon}) d\mathbf{x}_\parallel \right] \right] \end{aligned} \quad (70)$$

Ici Λ^K est l'opérateur DtN introduit dans la définition [60](#).

Nous allons contrôler maintenant chacun des termes du membre de droite. Nous rappelons que

$$\forall \mathbf{x}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d-1} \times (0, +\infty), \quad U_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_\parallel; \mathbf{y}) = \partial_{x_d} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_\parallel) \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)}(\mathbf{y}) - u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_\parallel) \chi_{\mathcal{D}_\omega^H}(\mathbf{y})$$

et $\mathcal{W}_{0,T}^{(1)}$ vérifie les estimations suivantes (corollaire [78](#))

$$\mathbb{E} \left[T^{-1} \left\| \mathcal{W}_{0,T}^{(1)} \right\|_{\mathcal{L}}^2 + \left\| \nabla \mathcal{W}_{0,T}^{(1)} \right\|_{\mathcal{L}}^2 \right] \leq C.$$

Après changement de variables, nous en déduisons :

$$\mathbb{E} \left[T^{-1} \int_{\square_R} \int_0^L \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} \left| \mathcal{W}_{0,T}^{(1)} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right|^2 d\mathbf{x} \right] \leq C \varepsilon^d.$$

Comme $\left\| \partial_{x_d} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_\parallel) \right\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$ et $\left\| u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_\parallel) \right\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$, nous avons également

$$\mathbb{E} \left[T^{-1} \int_{\square_R} \int_0^L \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} \left| U_{1,T}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right|^2 d\mathbf{x} \right] \leq C \varepsilon^d \quad (71)$$

Terme 1 : nous utilisons Cauchy-Schwartz puis le théorème de trace (lemme [74](#))

$$\mathbb{E} \left[\int_{\Sigma_0^R} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, 0 \right) \overline{v_\omega(\mathbf{x}_\parallel, 0)} d\mathbf{x}_\parallel \right] \leq \frac{C}{R^{(d-1)/2}} \|v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega, H^1(\mathcal{B}_{\omega,0,R}^{L'}))} \sqrt{T} \varepsilon^{d/2}. \quad (72)$$

Terme 2 : nous utilisons Cauchy-Schwartz puis (71)

$$\mathbb{E} \left[\int_{\square_R} \int_0^L \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \overline{v_\omega} \, d\mathbf{x} \right] \leq \frac{C}{R^{(d-1)/2}} \sqrt{T} \varepsilon^{d/2} \|v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega, H^1(\mathcal{B}'_{\omega,0,R}))}. \quad (73)$$

Terme 3 :

$$\left| \mathbb{E} \left[\int_{\square_R} \int_0^{L'} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} \nabla_{\mathbf{y}} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \cdot \overline{\nabla_{\mathbf{x}_\parallel} v_\omega} \, d\mathbf{x} \right] \right| \leq \frac{C}{R^{(d-1)/2}} \varepsilon^{d/2} \|v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega, H^1(\mathcal{B}'_{\omega,0,R}))}$$

Terme 4 :

$$\mathbb{E} \left[\int_{\square_R} \int_0^{L'} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \overline{v_\omega} \, d\mathbf{x} \right] = \mathbb{E} \left[\int_{\square_R} \int_0^L \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \overline{v_\omega} \, d\mathbf{x} \right] + \mathbb{E} \left[\int_{\square_R} \int_L^{L'} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \overline{v_\omega} \, d\mathbf{x} \right]$$

Pour $y_d > L$, d'après la section 6.3.4, nous pouvons décomposer $\tilde{U}_{1,T}^{\text{NF}}$ selon $\tilde{U}_{1,T}^{\text{NF}} = V_T + \tilde{U}$ avec V_T donnée par la représentation intégrale et $\tilde{U} \in \mathcal{W}_{L,0}$. Nous savons que $\mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} |V_T|^2 \right] \leq C \left\| U_{1,T}^{\text{NF}} \right\|_{\Sigma_L} \left\| \mathcal{A}_L^{1/2} \right\|$. \tilde{U} vérifie en particulier d'après l'inégalité de Hardy

$$\mathbb{E} \left[\int_L^{L'} |\tilde{U}|^2 dy_d \right] \leq C(L') \mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} |\nabla \tilde{U}|^2 dy_d \right].$$

Nous en déduisons après changement de variables que

$$\mathbb{E} \left[\int_{\square_R} \int_L^{L'} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \overline{v_\omega} \, d\mathbf{x} \right] \leq \frac{C}{R^{(d-1)/2}} \|v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega, H^1(\mathcal{B}'_{\omega,0,R}))} \varepsilon^{d/2} \sqrt{T}.$$

Nous obtenons que

$$\mathbb{E} \left[\int_{\square_R} \int_0^{L'} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \overline{v_\omega} \, d\mathbf{x} \right] \leq \frac{C}{R^{(d-1)/2}} \|v\|_{\mathcal{L}^2(\Omega, H^1(\mathcal{B}'_{\omega,0,R}))} \sqrt{T} \varepsilon^{d/2}. \quad (74)$$

Terme 5 :

$$\mathbb{E} \left[\int_{\Sigma_{\varepsilon H}^R} \partial_{x_d} u_1^{\text{FF}} \overline{v_\omega} \right] \leq \frac{1}{R^{d-1}} \left\| \partial_{x_d} u_1^{\text{FF}} \right\|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \left\| v \right\|_{\mathcal{L}^2(\Omega, H^1(\mathcal{B}'_{\omega,0,R}))}. \quad (75)$$

Terme 6 : Montrons que

$$\mathbb{E} \left[\int_{\Sigma_L^R} (\partial_{x_d} + \Lambda^R) U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \overline{v_\omega} \, d\mathbf{x}_\parallel \right] \xrightarrow{L' \rightarrow +\infty} 0.$$

Nous avons $\partial_{x_d} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_\parallel; \mathbf{y}) = \partial_{x_d}^2 u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \mathcal{W}_{\omega,1,T}^{\text{D}}(\mathbf{y})$ avec $\mathcal{W}_{\omega,1,T}^{\text{D}} = \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)} - c_0^{(1)} \chi_{y_d \leq H}$. Nous avons alors d'après la proposition 69 b) pour tout $\mathbf{y}_\parallel \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\left\| \mathcal{W}_{1,T}^{\text{D}}(\cdot, y_d) \right\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$.

$$\left\| \left[\partial_{x_d} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \right] (\mathbf{x}_\parallel; \mathbf{y}_\parallel, y_d) \right\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{y_d \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{d'où} \quad \left\| \partial_{x_d} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \mathbf{y}_\parallel, \frac{L'}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +\infty} 0.$$

Nous en déduisons que

$$\mathbb{E} \left[\int_{\Sigma_{L'}^R} \partial_{x_d} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \mathbf{y}_\parallel, \frac{L'}{\varepsilon} \right) \overline{v_\omega}(\mathbf{x}_\parallel, L') \, d\mathbf{x}_\parallel \right] = \eta(\varepsilon) \|v_\omega\|_{\mathcal{L}^2(\Omega, H^1(\mathcal{B}'_{\omega,0,R}))} \quad \text{avec} \quad \eta(\varepsilon) \rightarrow 0.$$

Puisque Λ^K est continu

$$\left| \mathbb{E} \left[\int_{\Sigma_{L'}^R} \Lambda^K U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \overline{v_\omega} \, d\mathbf{x}_\parallel \right] \right| \leq C \sqrt{\mathbb{E} \left\| U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \left(\cdot; \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{H^{1/2}(\Sigma_{L'}^R)}^2} \|v_\omega\|_{\mathcal{L}^2(\Omega, H^1(\mathcal{B}_{\omega,0,R}^{L'}))}$$

et donc

$$\left| \mathbb{E} \left[\int_{\Sigma_{L'}^R} \Lambda^K U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \overline{v_\omega} \, d\mathbf{x}_\parallel \right] \right| = \eta(\varepsilon) \|v_\omega\|_{\mathcal{L}^2(\Omega, H^1(\mathcal{B}_{\omega,0,R}^{L'}))}$$

pour la même raison.

$$\mathbb{E} \left[\int_{\Sigma_{L'}^R} \partial_{y_d} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{L'}{\varepsilon} \right) v_\omega \right] = \mathbb{E} \left[\partial_{x_d} u \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_\parallel) \int_{\Sigma_{L'}^R} \partial_{y_d} \mathcal{W}_{\omega,1,T}^{\text{D}} \left(\frac{\tilde{\mathbf{x}}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{\tilde{L}}{\varepsilon} \right) v_\omega(\tilde{\mathbf{x}}_\parallel) \, d\tilde{\mathbf{x}}_\parallel \right]$$

D'après la proposition 70, nous savons que $y_d^2 \mathbb{E} \left[\left| \nabla \mathcal{W}_{\omega,1,T}^{\text{D}}(\cdot, y_d) \right|^2 \right] \xrightarrow{y_d \rightarrow +\infty} 0$. Nous en déduisons

$$\left| \mathbb{E} \left[\int_{\Sigma_{L'}^R} \partial_{x_d} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_\parallel) \partial_{y_d} \mathcal{W}_{\omega,1,T}^{\text{T}} \left(\frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{L'}{\varepsilon} \right) v_\omega(\mathbf{x}_\parallel) \, d\mathbf{x}_\parallel \right] \right| = \left\| \partial_{x_d} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \varepsilon \eta(\varepsilon) \|v_\omega\|_{\mathcal{L}^2(\Omega, H_0^1(\mathcal{B}_{\omega,0,R}^L))}$$

avec $\eta(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$.

Par conséquent, nous avons montré que, pour tout $v \in L^2(\Omega, H^1(\mathcal{B}_{\omega,0,R}^{L'}))$

$$|l(v)| \leq \left[O \left(\varepsilon^{d/2+1} \sqrt{T} + \frac{\varepsilon^{d/2-1}}{\sqrt{T}} + \varepsilon^{d/2+1} + \varepsilon^{d/2+1} \sqrt{T} + \varepsilon \right) + o(\varepsilon + \varepsilon^2) \right] \|v\|_{L^2(\Omega, H_0^1(\mathcal{B}_{\omega,0,R}^{L'}))} \quad (76)$$

où l est la forme linéaire sur $L^2(\Omega, H^1(\mathcal{B}_{\omega,0,R}^{L'}))$ définie par

$$\begin{aligned} \forall v \in L^2(\Omega, H^1(\mathcal{B}_{\omega,0,R}^{L'})), \quad l(v) := & \mathbb{E} \left[\varepsilon i k \int_{\Sigma_0^R} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{x_\parallel}{\varepsilon}, 0 \right) \overline{v_\omega}(\mathbf{x}) + \frac{1}{\varepsilon T} \int_0^{L'} \int_{\square_R} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \overline{v_\omega}(\mathbf{x}) \right. \\ & - \varepsilon \int_0^{L'} \int_{\square_R} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} \nabla_{\mathbf{x}_\parallel} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \overline{\nabla v_\omega}(\mathbf{x}) + \varepsilon k^2 \int_0^{L'} \int_{\square_R} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \overline{v_\omega}(\mathbf{x}) \\ & + \varepsilon \int_{\Sigma_{\varepsilon H}^R} \partial_{x_d} u_1^{\text{FF}}(\mathbf{x}_\parallel, \varepsilon H) \overline{v_\omega}(\mathbf{x}_\parallel, \varepsilon H) \, d\mathbf{x}_\parallel + \varepsilon \int_{\Sigma_{L'}^R} \overline{v_\omega}(\mathbf{x}_\parallel, L') \left[\partial_{x_d} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{L'}{\varepsilon} \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\varepsilon} [\partial_{y_d} U_{\omega,1,T}^{\text{NF}}] \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{L'}{\varepsilon} \right) + \Lambda^K U_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \left(\mathbf{x}_\parallel; \frac{\mathbf{x}_\parallel}{\varepsilon}, \frac{L'}{\varepsilon} \right) \right] \, d\mathbf{x}_\parallel \right] \quad (77) \end{aligned}$$

□

Théorème 86

Soit $L' > H$. Soit u^ε une solution de notre problème de diffraction qui vérifie les équations $(P_\omega^\varepsilon) + (CD_\omega)$.

Supposons que u_0^{FF} vérifie la condition (57) et u_1^{FF} vérifie la condition (62) alors $U_{0,T}^{\text{FF}}$ est donné par (58) et $U_{1,T}^{\text{NF}}$ est donné par (63). Alors, nous avons

$$\left\| u^\varepsilon - \left(u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}} + \varepsilon U_{1,T}^{\text{NF}} \right) \right\|_{\mathcal{L}^2(\Omega, H_0^1(\mathcal{B}_{\omega,0,R}^{L'}))} = O(\varepsilon) . \quad (78)$$

Preuve. En évaluant la formulation variationnelle (70) en $v = e^\varepsilon$, nous en déduisons

$$\| e^\varepsilon \|_{\mathcal{L}^2(\Omega, H_0^1(\mathcal{B}_{\omega,0,R}^{L'}))} = O(\varepsilon) .$$

Il suffit en effet de choisir $T \sim \varepsilon^{-2}$. □

Nous pouvons améliorer cette estimation si nous montrons que le problème vérifié par $\tilde{U}_{2,T}^{\text{NF}}$ est bien posé. En procédant de même que ce qui précède nous établissons

$$\| e^\varepsilon \|_{\mathcal{L}^2(\Omega, H_0^1(\mathcal{B}_{\omega,0,R}^{L'}))} = o(\varepsilon) . \quad (79)$$

Le facteur limitant est que contrairement au cas périodique, nous ne pouvons pas sans hypothèse quantitative supplémentaire quantifier les convergences de $U_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\cdot, y_d)$ et $y_d^2 \mathbb{E} \left[|\nabla U_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\cdot, y_d)|^2 \right]$ vers 0. Avec de telles hypothèses [BGV08, GNO21] nous pouvons espérer

$$\begin{aligned} \| e^\varepsilon \| &= O\left(\varepsilon^{3/2} \log^{-1/2} \frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \text{pour } d = 2 \\ &= O\left(\varepsilon^{3/2}\right) \quad \text{pour } d = 3 . \end{aligned} \quad (80)$$

6.5 Étude du cas des conditions de Neumann sur les particules

Cette section est consacrée à la situation où nous imposons une condition de Neumann sur le bord des particules. L'analyse se décompose en parties similaires à celles de la section précédente mais s'appuie sur des arguments différents. Nous commençons par l'étude du caractère bien posé des problèmes de champ proche régularisés puis nous étudions sous quelle condition cette unique solution admet une limite quand le paramètre de régularisation tend vers 0. Nous pouvons ainsi proposer un modèle effectif à l'ordre 2.

6.5.1 Caractère bien posé des problèmes de champ proche

Rappelons les problèmes vérifiés par les termes de champ proche. Pour $m \in \mathbb{N}$, p.s. $\tilde{U}_{\omega,m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \mathbf{y}) := U_{\omega,m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \mathbf{y}) - u_{\omega,m}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \chi_{\mathcal{B}_{\omega,0}^{\text{H}}}(\mathbf{y})$ vérifie

$$\text{p.p. } \mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} \tilde{U}_{\omega,m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = 2\nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}_{\parallel}} \tilde{U}_{\omega,m-1}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) + \Delta_{\mathbf{x}_{\parallel}} \tilde{U}_{\omega,m-2}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) + \Delta_{\mathbf{x}_{\parallel}} u_{\omega,m-2}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \chi_{\mathcal{B}_{\omega,0}^{\text{H}}}(\mathbf{y}) \\ \quad \quad \quad + k^2 \tilde{U}_{\omega,m-2}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) + k^2 u_{\omega,m-2}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \chi_{\mathcal{B}_{\omega,0}^{\text{H}}}(\mathbf{y}) \quad \text{dans } \mathcal{D}_{\omega} \setminus \Sigma_{\text{H}}, \\ -\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = -ik\gamma \tilde{U}_{\omega,m-1}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) - ik\gamma u_{\omega,m-1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \quad \text{sur } \Sigma_0, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{U}_{\omega,m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \cdot \vec{n} = -\nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} \tilde{U}_{\omega,m-1}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \cdot \vec{n}_{\parallel} - \nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} u_{\omega,m-1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \cdot \vec{n}_{\parallel} \quad \text{sur } \partial\mathcal{P}_{\omega} \\ \left[\tilde{U}_{\omega,m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \right]_{\text{H}} = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,m}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \right]_{\text{H}} = \partial_{x_d} u_{\omega,m-1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}). \end{array} \right. \quad (81)$$

Nous étudions dans la suite l'existence et l'unicité de la solution du problème (81) pour $m \leq 2$.

6.5.1.1 Terme de champ proche $U_{\omega,0}^{\text{NF}}$

Pour presque tout $\mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^d$, p.s. $\tilde{U}_{\omega,0}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot)$ vérifie les équations

$$\text{p.p. } \mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} \tilde{U}_{\omega,0}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}_{\omega} \setminus \Sigma_{\text{H}}, \\ -\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,0}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{U}_{\omega,0}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{P}_{\omega} \\ \left[\tilde{U}_{\omega,0}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \right]_{\text{H}} = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,0}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \right]_{\text{H}} = 0. \end{array} \right. \quad (82)$$

Nous avons immédiatement que $\tilde{U}_{\omega,0}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = 0$ et donc

$$\text{p.s. } \forall \mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{\omega}, \quad U_{\omega,0}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \mathbf{y}) = u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \chi_{\mathcal{B}_{\omega,0}^{\text{H}}}(\mathbf{y}). \quad (83)$$

6.5.1.2 Terme de champ proche de premier ordre $U_{\omega,1}^{\text{NF}}$

Nous étudions maintenant le terme de champ proche $\tilde{U}_{\omega,1}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \mathbf{y})$.

Pour presque tout $\mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}$, p.s. $\tilde{U}_{\omega,1}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot)$ vérifie les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} \tilde{U}_{\omega,1}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}_{\omega} \setminus \Sigma_{\text{H}}, \\ -\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,1}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = -ik\gamma u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \quad \text{sur } \Sigma_0, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{U}_{\omega,1}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \cdot \vec{n} = -\nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \cdot \vec{n}_{\parallel} \quad \text{sur } \partial\mathcal{P}_{\omega}, \\ \left[\tilde{U}_{\omega,1}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \right]_{\text{H}} = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,1}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \right]_{\text{H}} = \partial_{x_d} u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}). \end{array} \right. \quad (84)$$

où nous avons utilisé que $\tilde{U}_{\omega,0}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \mathbf{y}) = 0$.

Nous procédons de la même façon que dans le cas Dirichlet et commençons par borner notre domaine d'étude dans la direction y_d à l'aide de l'opérateur DtN Λ . Nous considérons pour tout $\mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}$ le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \tilde{U}_{\omega,1}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}, \cdot) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B}_{\omega,0}^L \setminus \Sigma_H, \\ -\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,1}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = -ik\gamma u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \quad \text{sur } \Sigma_0, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{U}_{\omega,1}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \cdot \vec{n} = -\nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \cdot \vec{n}_{\parallel} \quad \text{sur } \partial\mathcal{P}_{\omega}, \\ \left[\tilde{U}_{\omega,1}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \right]_{\text{H}} = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,1}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \right]_{\text{H}} = \partial_{x_d} u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}), \\ \partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,1}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}, \cdot) + \Lambda \tilde{U}_{\omega,1}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}, \cdot) = 0 \quad \text{sur } \Sigma_L. \end{array} \right. \quad (85)$$

Si (85) admet une solution telle que $\tilde{U}_{\omega,1}^{\text{NF}} \Big|_{\Sigma_L} \in \mathcal{H}_L^{1/2}$, $\tilde{U}_{\omega,1}^{\text{NF}}$ pour $y_d > L$ est alors donnée par la représentation intégrale

$$\forall \mathbf{y}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \tilde{U}_{\omega,1}^{\text{NF}}(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) = -2 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \partial_{y_d} G(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{z}, y_d - L) \tilde{U}_{\omega,1}^{\text{NF}} \Big|_{\Sigma_L}(\mathbf{z}, L) d\mathbf{z}.$$

Dans le cadre périodique, ce problème est bien posé (à une constante près) dans $H_{\#}^1(\mathcal{B}_0^L)$ si et seulement si la condition de compatibilité suivante est vérifiée

$$-\partial_{x_d} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) + ik\gamma u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) = 0.$$

Nous rappelons que $\mathcal{B}_0^L := \square_T \times (0, L) \setminus \overline{\mathcal{P}_{\#}}$. L'existence et l'unicité de la solution sont établies par l'alternative de Fredholm. La preuve repose en particulier sur l'application de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger dans \mathcal{B}_0^L .

Puisque dans le cadre aléatoire, le problème ne peut pas être restreint à un domaine borné, nous ne pouvons pas appliquer les mêmes arguments. Nous utilisons plutôt les techniques de régularisation utilisées en homogénéisation de volume stochastique. Ainsi nous considérons le problème régularisé suivant : pour $T > 0$

$$\text{p.s. , p.p. } \mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) + T^{-1} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B}_{\omega,0}^L \setminus \Sigma_H, \\ -\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = -ik\gamma u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \quad \text{sur } \Sigma_0, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \cdot \vec{n} = -\nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \cdot \vec{n}_{\parallel} \quad \text{sur } \partial\mathcal{P}_{\omega}, \\ \left[\tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \right]_{\text{H}} = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \right]_{\text{H}} = \partial_{x_d} u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}), \\ \partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) + \Lambda \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = 0 \quad \text{sur } \Sigma_L. \end{array} \right. \quad (86)$$

Notons que le DtN correspond à l'opérateur Laplacien de demi-espace et non l'opérateur Laplacien régularisé. Nous introduisons l'espace fonctionnel

$$\mathcal{H} := \left\{ u \in L^2\left(\Omega, H_{loc}^1(\mathcal{B}_{\omega,0}^L)\right), (\omega, \mathbf{y}_{\parallel}) \mapsto \mathbb{1}_{\mathcal{D}_{\omega}}(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) u_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) \text{ est stationnaire pour tout } y_d \in (0, L), \right. \\ \left. \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_{\omega}} (|u_{\omega}|^2 + |\nabla u_{\omega}|^2) dy_d \right] < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{\mathcal{H}}^2 := \mathbb{E} \left[\int_0^L \mathbb{1}_{\mathcal{D}_{\omega}} (|u_{\omega}|^2 + |\nabla u_{\omega}|^2) dy_d \right].$$

$(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ est un espace de Hilbert [Pap79].

Proposition 87

Si $u_0^{\text{FF}}|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}} \in L^2(\Omega)$ et pour $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$ $\partial_{x_j} u_0^{\text{FF}}|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}} \in L^2(\Omega)$ alors il existe une unique solution $\tilde{U}_{1,T}^{\text{NF}} \in \mathcal{H}$ au problème (86).

Preuve. Nous prouvons le caractère bien posé du problème par le théorème Lax-Milgram.

La formulation variationnelle associée à (86) s'écrit pour tout $V \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^L \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{\omega,0}^L} \left(T^{-1} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \overline{V_{\omega}} + \nabla \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \cdot \overline{\nabla V_{\omega}} \right) dy_d \right] + \langle \Lambda \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}, V \rangle_{\mathcal{H}_L^{1/2}, \mathcal{H}_L^{-1/2}} = -\mathbb{E} \left[\nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} u_{\omega,0}^{\text{FF}}|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}} \cdot \int_{\partial \mathcal{D}_{\omega} \cap \square_1 \times (0,L)} \tilde{n}_{\parallel} \overline{V_{\omega}} dy \right] \\ + \mathbb{E} \left[-ik\gamma u_{\omega,0}^{\text{FF}}|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}} \overline{V_{\omega}}(\cdot, 0) + \partial_{x_d} u_{\omega,0}^{\text{FF}}|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}} \overline{V_{\omega}}(\cdot, \text{H}) \right]. \quad (87) \end{aligned}$$

Nous intégrons le premier terme du membre de droite par parties. Nous obtenons grâce à la stationnarité de ∇V

$$-\mathbb{E} \left[\nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} u_{\omega,0}^{\text{FF}}|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}} \cdot \int_{\partial \mathcal{D}_{\omega} \cap \square_1 \times (0,L)} \tilde{n}_{\parallel} \overline{V_{\omega}} dy \right] = \mathbb{E} \left[\nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} u_{\omega,0}^{\text{FF}}|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}} \cdot \int_{\delta}^{\delta+h_L} \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{\omega,0}^L} \overline{\nabla_{\mathbf{y}_{\parallel}} V_{\omega}} dy_d \right]. \quad (88)$$

Par Cauchy-Schwartz, nous montrons alors

$$\mathbb{E} \left[\nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} u_{\omega,0}^{\text{FF}}|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}} \cdot \int_{\delta}^{\delta+h_L} \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{\omega,0}^L} \overline{\nabla_{\mathbf{y}_{\parallel}} V_{\omega}} dy_d \right] \leq \sqrt{h_L} \left\| \nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} u_{\omega,0}^{\text{FF}}|_{\Sigma_{\varepsilon\text{H}}} \right\|_{L^2(\Omega)} \mathbb{E} \left[\int_0^L \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{\omega,0}^L} |\nabla_{\mathbf{y}_{\parallel}} V_{\omega}|^2 dy_d \right]^{1/2} \leq C \|v\|_{\mathcal{H}}.$$

Pour montrer la continuité des autres termes de la forme linéaire et du terme DtN de la forme sesquilinéaire, nous avons besoin du théorème de trace suivant

Lemme 88

Pour tout $v \in \mathcal{H}$,

$$\mathbb{E} \left[\left| v(\cdot, 0) \right|^2 + \left| v(\cdot, \text{H}) \right|^2 + \left| v(\cdot, L) \right|^2 \right] \leq \|v\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (89)$$

Preuve. Comme dans le cas Dirichlet, la preuve repose sur l'existence d'un prolongement stationnaire de $\tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}$ à l'intérieur des particules appartenant à $H_{loc}^1(\mathbb{R}^{d-1} \times (0,L))$. L'existence d'un tel relèvement pour un processus d'inclusions hardcore de frontière Lipschitz et de rayons bornés uniformément a été prouvé dans [GK15].

Remarque 24. En général, si une des hypothèses

- condition de distance minimale;

- frontière Lipschitz ;
- particules de même rayon ;

n'est plus vraie, un tel relèvement n'existe que dans $W^{1,r}(\mathbb{R}^{d-1} \times (0,L))$ pour $r < p = 2$. [Hei20].

La preuve se déroule alors comme dans le cas Dirichlet. □

Nous concluons par Lax-Milgram que le problème (86) est bien posé dans \mathcal{H} . □

D'après le lemme 67, l'unique solution $\tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \in \mathcal{H}$ admet bien une trace $\tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}|_{\Sigma_L}$ sur Σ_L dans $\mathcal{H}_L^{1/2}$.

Pour $y_d > L$, nous avons alors d'après la proposition 68

$$\forall \mathbf{y}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}, \forall y_d > L, \quad \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{y}_{\parallel}, y_d) := -2 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \partial_{y_d} G(\mathbf{y}_{\parallel} - \mathbf{z}, y_d - L) \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}|_{\Sigma_L}(\mathbf{z}, L) d\mathbf{z}. \quad (90)$$

Considérons le problème équivalent à (85) complété par (90). Nous avons montré la proposition suivante :

Proposition 89

Il existe une unique solution $\tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \in \mathcal{H} \cap \mathcal{W}_L$ de

$$\text{p.s.} \left\{ \begin{array}{l} T^{-1} \chi_{y_d < L} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}} - \Delta \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}_{\omega} \setminus \Sigma_H, \\ -\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}} = -ik\gamma u_{\omega,0}^{\text{FF}}|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \quad \text{sur } \Sigma_0, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \cdot \vec{n} = -\nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} u_{\omega,0}^{\text{FF}}|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \cdot \vec{n}_{\parallel} \quad \text{sur } \partial \mathcal{D}_{\omega}, \\ \left[-\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \right]_H = \partial_{x_d} u_{\omega,0}^{\text{FF}}|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_{\parallel}), \\ \left[\tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \right]_L = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \right]_L = 0. \end{array} \right. \quad (91)$$

De plus, $\tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}$ vérifie

$$\begin{aligned} \forall V \in \mathcal{H} \cap \mathcal{W}_L, \quad & \mathbb{E} \left[\int_0^L \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{\omega,0}^L} \left[T^{-1} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \bar{V} + \nabla \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \cdot \overline{\nabla V} \right] dy_d \right] + \mathbb{E} \left[\int_L^{+\infty} \nabla \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \cdot \overline{\nabla V} dy_d \right] \\ & = \mathbb{E} \left[\nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} u_{\omega,0}^{\text{FF}}|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \cdot \int_{\delta}^{h_L + \delta} \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{\omega,0}^L} \overline{\nabla_{\mathbf{y}_{\parallel}} V_{\omega}} dy_d \right] + \mathbb{E} \left[-ik\gamma u_{\omega,0}^{\text{FF}}|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \bar{V}(\cdot, 0) + \partial_{x_d} u_{\omega,0}^{\text{FF}}|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \bar{V}(\cdot, H) \right]. \quad (92) \end{aligned}$$

Existence d'une sous-suite convergente

Contrairement au cas Dirichlet où nous avons prouvé l'existence d'une sous-suite $\nabla \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}$ convergente dans \mathcal{L}_0 dans tous les cas, nous allons établir que pour une condition de Neumann nous ne pouvons extraire une sous-suite convergente seulement si une condition dite de compatibilité est vérifiée. Cette condition va correspondre à notre condition effective.

Nous évaluons (92) pour $V = \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{\omega,0}^L}$. Nous obtenons alors

$$\mathbb{E} \left[\int_0^L \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{\omega,0}^L} T^{-1} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}} dy_d \right] = \mathbb{E} \left[-ik\gamma u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} + \partial_{x_d} u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \right]. \quad (93)$$

S'il existe une sous-suite $\nabla \tilde{U}_{1,T}^{\text{NF}}$ convergente, en passant à la limite dans (93) quand $T \rightarrow +\infty$, nous avons nécessairement

$$\mathbb{E} \left[-ik\gamma u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} + \partial_{x_d} u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \right] = 0.$$

Nous choisissons d'imposer p.s.

$$-ik\gamma u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} + \partial_{x_d} u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} = 0. \quad (94)$$

Notons que ceci implique que $u_{\omega,0}^{\text{FF}}$ est indépendante de ω .

Nous cherchons à établir que sous (94) il existe une unique sous-suite $\nabla \tilde{U}_{1,T}^{\text{NF}}$ convergente dans \mathcal{L}_0 .

Comme dans le cas Dirichlet, nous montrons que sous (94)

$$\forall V \in \mathcal{H}, \quad |l(V)| \leq C \|\nabla V\|_{\mathcal{L}}; \quad (95)$$

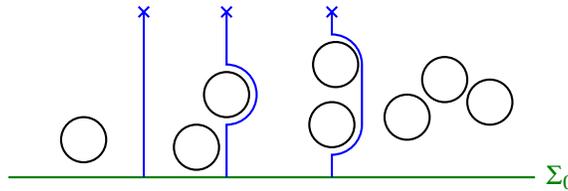
où

$$l(V) := \mathbb{E} \left[\nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \cdot \int_{\delta}^{h_1 + \delta} \mathbb{1}_{\mathcal{B}_{\omega,0}^L} \overline{\nabla_{\mathbf{y}_{\parallel}} V_{\omega}} dy_d \right] + \mathbb{E} \left[-ik\gamma u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \bar{V}(\cdot, 0) + \partial_{x_d} u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \bar{V}(\cdot, H) \right]. \quad (96)$$

Le premier terme se borne facilement par Cauchy-Schwartz. Sous (94), le second terme se réécrit

$$\mathbb{E} \left[-ik\gamma u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \bar{V}(\cdot, 0) + \partial_{x_d} u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \bar{V}(\cdot, H) \right] = ik\gamma u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \mathbb{E} \left[-\bar{V}(\cdot, 0) + \bar{V}(\cdot, H) \right].$$

Comme les particules ne se touchent pas, pour tout $\mathbf{y}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}$, il existe un chemin $\gamma_{\mathbf{y}_{\parallel}} : (0, 1) \rightarrow \mathcal{B}_{\omega,0}^L$ tel que $\gamma_{\mathbf{y}_{\parallel}}(0) = (\mathbf{y}_{\parallel}, 0)$ et $\gamma_{\mathbf{y}_{\parallel}}(1) = (\mathbf{y}_{\parallel}, H)$; $\forall t$, $\|\gamma'_{\mathbf{y}_{\parallel}}(t)\| \neq 0$ et longueur de la courbe $\int_0^1 |\gamma'_{\mathbf{y}_{\parallel}}(t)| dt \leq C(H)$ est bornée par une constante indépendante de \mathbf{y}_{\parallel} . Nous avons également $\|\gamma'_{\mathbf{y}_{\parallel}}\|_{L^\infty} \leq C(H)$. Notons que $C(H)$ peut être choisie indépendamment de la répartition des particules.



Par conséquent,

$$\forall \mathbf{y}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad V_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel}, H) - V_{\omega}(\mathbf{y}_{\parallel}, 0) = \int_0^1 \nabla V_{\omega}(\gamma_{\mathbf{y}_{\parallel}}(t)) \cdot \gamma'_{\mathbf{y}_{\parallel}}(t) dt$$

et

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} \left[\overline{V}_\omega(\cdot, H) - \overline{V}_\omega(\cdot, 0) \right] \right| &\leq C \mathbb{E} \left[\int_{\square_1} \int_0^1 \left| \nabla V_\omega(\gamma_{\mathbf{y}_\parallel}(t)) \right|^2 dt d\mathbf{y}_\parallel \right] \\ &\leq C \mathbb{E} \left[\int_0^H \mathbb{1}_{\mathcal{D}_{\omega,0}^L} \left| \overline{\nabla V}_\omega(\cdot, y_d) \right| dy_d \right] \\ &\leq C \|\nabla V\|_{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

Nous avons alors établi (95).

Pour les mêmes raisons que dans le cas Dirichlet, nous en déduisons les estimations suivantes.

Proposition 90

Si la condition (94) est vérifiée, l'unique solution $\tilde{U}_{1,T}^{\text{NF}} \in \mathcal{H} \cap \mathcal{W}_L$ du problème (91) vérifie les estimations suivantes

$$\|\nabla \tilde{U}_{1,T}^{\text{NF}}\|_{\mathcal{L}_0} \leq C, \quad \|\tilde{U}_{1,T}^{\text{NF}}\|_{\mathcal{L}} \leq \sqrt{T} C. \quad (97)$$

Nous pouvons extraire une sous-suite $\nabla \tilde{U}_{1,T}^{\text{NF}}$ convergente dans \mathcal{L}_0 . Avec les mêmes arguments que dans la partie précédente. Nous établissons le théorème :

Théorème 91

Si la condition (94) est vérifiée alors il existe un unique $\tilde{U}_1^{\text{NF}} : \Omega \rightarrow H_{loc}^1(\mathcal{D}_\omega)$ tel que

- p.s. $\tilde{U}_{\omega,1}^{\text{NF}} \in H_{loc}^1(\mathcal{D}_\omega)$ est solution dans $\mathcal{D}(\mathcal{D}_\omega)$ de (85) telle que $\int_{\square_1} \int_0^L \tilde{U}_{\omega,1} dy = 0$;
- $(\omega, \mathbf{y}_\parallel) \mapsto \nabla \tilde{U}_{\omega,1}(\mathbf{y}_\parallel, y_d)$ est stationnaire pour tout $y_d > 0$. Pour tout $y_d > 0$, $\mathbb{E} \left[\nabla_{\mathbf{y}_\parallel} \tilde{U}_{\omega,1}^{\text{NF}}(\cdot, y_d) \right] = 0$
et

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} \left| \nabla \tilde{U}_{\omega,1}^{\text{NF}} \right|^2 dy_d \right] < +\infty ;$$

De même que dans le cas Dirichlet, nous avons choisi de poursuivre par la suite avec la solution régularisée $\tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}$.

Dans le cas Dirichlet, il est possible de construire la solution \tilde{U} stationnaire grâce au contrôle établie dans le corollaire (77) (trace des \mathcal{L}^s). Seule la régularité des traces nous fait défaut pour prouver que le problème de demi-espace est bien posé.

Dans le cas Neumann, la solution $\tilde{U}_{\omega,1}^{\text{NF}}$ construite dans le théorème 91 n'est pas nécessairement stationnaire contrairement à $\tilde{U}_{1,T}^{\text{NF}}$. Pour espérer construire une solution stationnaire, il faudrait ajouter des hypothèses d'ergodicité quantitative au processus point de distribution des centres des particules.

En imposant par exemple que le processus point des centres des particules vérifie une inégalité de Poincaré telle que celle vérifiée par des processus points hardcore classiques comme Matern ou random parking [Définition

1.2 de [DG17], nous pouvons espérer établir en dimension 3 [GNO21] qu'il existe une unique solution stationnaire $\tilde{U}_1^{\text{NF}} \Big|_{\Sigma_L} \in \mathcal{H}_L^{1/2}$ telle que $\mathbb{E}[\tilde{U}_{\omega,1}^{\text{NF}}(\cdot, L)] = 0$.

Nous n'avons pour le moment pas eu le temps de finir d'explorer cette piste. Nous considérons donc pour la suite $\tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}$.

Par linéarité, $U_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \mathbf{y}) = -u_{\omega,1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \chi_{\mathcal{B}_{\omega,0}^{\text{H}}}(\mathbf{y}) + u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1)}(\mathbf{y}) + \sum_{i=1}^{d-1} \partial_{x_i} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \mathcal{U}_{\omega,i,T}^{(1)}(\mathbf{y})$ où $\mathcal{U}_{0,T}^{(1)}$ et $\mathcal{U}_{i,T}^{(1)}$, avec $i \in \llbracket 1, d-1 \rrbracket$, sont les uniques solutions de $\mathcal{H} \cap \mathcal{W}_L$ de

$$\left\{ \begin{array}{l} T^{-1} \chi_{y_d < L} \mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1)} - \Delta_{\mathbf{y}} \mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1)} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}_{\omega} \setminus \Sigma_{\text{H}}, \\ -\partial_{y_d} \mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1)} = -ik\gamma \quad \text{sur } \Sigma_0, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1)} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_{\omega}, \\ \left[\mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1)} \right]_{\text{H}} = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_d} \mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1)} \right]_{\text{H}} = ik\gamma, \\ \left[\mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1)} \right]_{\text{L}} = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_d} \mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1)} \right]_{\text{L}} = 0; \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} T^{-1} \chi_{y_d < L} \mathcal{U}_{\omega,i,T}^{(1)} - \Delta_{\mathbf{y}} \mathcal{U}_{\omega,i,T}^{(1)} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}_{\omega} \setminus \Sigma_{\text{H}}, \\ -\partial_{y_d} \mathcal{U}_{\omega,i,T}^{(1)} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{U}_{\omega,i,T}^{(1)} \cdot \vec{n} = -n_i \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_{\omega}, \\ \left[\mathcal{U}_{\omega,i,T}^{(1)} \right]_{\text{H}} = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_d} \mathcal{U}_{\omega,i,T}^{(1)} \right]_{\text{H}} = 0, \\ \left[\mathcal{U}_{\omega,i,T}^{(1)} \right]_{\text{L}} = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_d} \mathcal{U}_{\omega,i,T}^{(1)} \right]_{\text{L}} = 0. \end{array} \right.$$

6.5.1.3 Terme de champ proche de second ordre $U_{\omega,2}^{\text{NF}}$

Nous étudions maintenant le terme de champ proche $\tilde{U}_{\omega,2}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \mathbf{y})$.

P.s. pour presque tout $\mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\tilde{U}_{\omega,2}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot)$ vérifie les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} \tilde{U}_{\omega,2}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = 2\nabla_{\mathbf{y}_{\parallel}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) + \left(\Delta_{\mathbf{x}_{\parallel}} u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) + k^2 u_{\omega,0}^{\text{FF}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} \right) \chi_{\mathcal{B}_{\omega,0}^{\text{H}}}(\mathbf{y}) \quad \text{dans } \mathcal{D}_{\omega} \setminus \Sigma_{\text{H}}, \\ -\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,2}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) = -ik\gamma \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) - ik\gamma u_{\omega,1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \quad \text{sur } \Sigma_0, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{U}_{\omega,2}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \cdot \vec{n} = -\nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \cdot \vec{n}_{\parallel} - \nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} u_{\omega,1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \cdot \vec{n}_{\parallel} \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_{\omega}, \\ \left[\tilde{U}_{\omega,2}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \right]_{\text{H}} = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,2}^{\text{NF}}(\mathbf{x}_{\parallel}; \cdot) \right]_{\text{H}} = \partial_{x_d} u_{\omega,1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}), \end{array} \right.$$

Comme précédemment, nous considérons le problème régularisé suivant : pour $T > 0$, p.s. $\tilde{U}_{\omega,2,T}^{\text{NF}}$ vérifie les

équations

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} \tilde{U}_{\omega,2,T}^{\text{NF}} + T^{-1} \chi_{y_d < L} \tilde{U}_{\omega,2,T}^{\text{NF}} = 2 \nabla_{\mathbf{y}_{\parallel}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}} + \left(\Delta_{\mathbf{x}_{\parallel}} u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} + k^2 u_{\omega,0}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} \right) \chi_{\mathcal{B}_{\omega,0}^{\text{H}}} \quad \text{dans } \mathcal{D}_{\omega} \setminus \Sigma_{\text{H}}, \\ -\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,2,T}^{\text{NF}} = -ik\gamma \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}} - ik\gamma u_{\omega,1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) \quad \text{sur } \Sigma_0, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{U}_{\omega,2,T}^{\text{NF}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} = -\nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\parallel} - \nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} u_{\omega,1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\parallel} \quad \text{sur } \partial \mathcal{D}_{\omega}, \\ \left[\tilde{U}_{\omega,2,T}^{\text{NF}} \right]_{\text{H}} = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,2,T}^{\text{NF}} \right]_{\text{H}} = \partial_{x_d} u_{\omega,1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}), \\ \left[\tilde{U}_{\omega,2,T}^{\text{NF}} \right]_{\text{L}} = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_d} \tilde{U}_{\omega,2,T}^{\text{NF}} \right]_{\text{L}} = 0. \end{array} \right.$$

Ce problème possède un terme source qui tend vers 0 p.s. et dans $L^2(\Omega)$. Cependant nous avons besoin de savoir qu'il est dans \mathcal{L}_{L} pour pouvoir construire une solution dans le demi-espace et donc se ramener à un problème dans la bande $\mathcal{B}_{\infty}^{\text{L}}$. Un tel résultat est impossible à établir sans hypothèse quantitative. Nous pouvons tout de même dériver formellement la condition effective.

Pour obtenir la condition limite pour $u_{\omega,1}^{\text{FF}}$ sur Σ_{eH} , nous écrivons ainsi sous quelle condition nous pouvons espérer que $\tilde{U}_{\omega,2,T}^{\text{NF}}$ a une limite quand $T \rightarrow +\infty$.

Soit $\varphi = \chi_{y_d < H} \mathbb{1}_{\mathcal{D}_{\omega}}$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^H \mathbb{1}_{\mathcal{D}_{\omega}} T^{-1} \tilde{U}_{\omega,2,T}^{\text{NF}} dy_d \right] &= \left(\Delta_{\mathbf{x}_{\parallel}} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} + k^2 u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} \right) \mathbb{E} \left[\int_0^H \mathbb{1}_{\mathcal{D}_{\omega}} dy_d \right] - ik\gamma \mathbb{E} \left[u_{\omega,1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} + \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\cdot, 0) \right] \\ &\quad - \mathbb{E} \left[\int_{\partial \mathcal{D}_{\omega} \cap \square_1 \times \{\delta, h_L + \delta\}} \nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\parallel} dy \right] + \mathbb{E} \left[\partial_{x_d} u_{\omega,1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} \right]. \end{aligned}$$

Quant $T \rightarrow +\infty$, nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\Delta_{\mathbf{x}_{\parallel}} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} + k^2 u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} \right) \mathbb{E} \left[\int_0^H \mathbb{1}_{\mathcal{D}_{\omega}} dy_d \right] - ik\gamma \mathbb{E} \left[u_{\omega,1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} + \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\cdot, 0) \right] - \mathbb{E} \left[\int_{\partial \mathcal{D}_{\omega} \cap \square_1 \times \{\delta, h_L + \delta\}} \nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\parallel} dy \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\partial_{x_d} u_{\omega,1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} \right]. \end{aligned}$$

Nous choisissons d'imposer p.s.

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\Delta_{\mathbf{x}_{\parallel}} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} + k^2 u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} \right) \mathbb{E} \left[\int_0^H \mathbb{1}_{\mathcal{D}_{\omega}} dy_d \right] - ik\gamma \left(u_{\omega,1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}} + \mathbb{E} [\tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}}(\cdot, 0)] \right) - \mathbb{E} \left[\int_{\partial \mathcal{D}_{\omega} \cap \square_1 \times \{\delta, h_L + \delta\}} \nabla_{\mathbf{x}_{\parallel}} \tilde{U}_{\omega,1,T}^{\text{NF}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\parallel} dy \right] \\ &\quad + \partial_{x_d} u_{\omega,1}^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}. \quad (98) \end{aligned}$$

Notons que u_1^{FF} est alors indépendante de ω .

Cette condition se réécrit en :

$$-\partial u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) + ik\gamma u_1^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) = a_0^{(2)} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) + \sum_{i=1,2} a_{1,i}^{(2)} \partial_{x_i} u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}) + a_{2,i}^{(2)} \partial_{x_i}^2 u_0^{\text{FF}} \Big|_{\Sigma_{\text{eH}}}(\mathbf{x}_{\parallel}); \quad (99)$$

où les coefficients $a_0^{(2)}$, $a_1^{(2)}$ et $a_2^{(2)}$ sont exprimés comme des moyennes des fonctions profil $\mathcal{U}_{i,T}^{(1)}$, avec $i \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$,

$$a_0^{(2)} = \mathbb{E} \left[k^2 \int_{\square_1} \int_0^H \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} \, dy - ik\gamma \mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1)}(\cdot; 0) \right]; \quad (100)$$

$$a_{1,i}^{(2)} = \mathbb{E} \left[-ik\gamma \mathcal{U}_{\omega,i,T}^{(1)}(\cdot, 0) - \int_{\partial\mathcal{D}_\omega \cap \square_1 \times [\delta, h_L + \delta]} \mathcal{U}_{\omega,i,T}^{(1)} n_i \, dy \right]; \quad (101)$$

$$a_{2,i}^{(2)} = \mathbb{E} \left[\int_{\square_1} \int_0^H \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} \, dy - \int_{\partial\mathcal{D}_\omega \cap \square_1 \times [\delta, h_L + \delta]} \mathcal{U}_{\omega,i,T}^{(1)} n_i \, dy \right]. \quad (102)$$

En particulier dans le cas où $d = 2$, nous avons :

$$a_0^{(2)} = \mathbb{E} \left[k^2 \int_{\square_1} \int_0^H \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} \, dy - ik\gamma \mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1)}(\cdot, 0) \right]; \quad (103)$$

$$a_1^{(2)} = \mathbb{E} \left[-ik\gamma \mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1)}(\cdot, 0) - \int_{\partial\mathcal{D}_\omega \cap \square_1 \times [\delta, h_L + \delta]} \mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1)} n_1 \, dy \right]; \quad (104)$$

$$a_2^{(2)} = \mathbb{E} \left[\int_{\square_1} \int_0^H \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} \, dy - \int_{\partial\mathcal{D}_\omega \cap \square_1 \times [\delta, h_L + \delta]} \mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1)} n_1 \, dy \right]. \quad (105)$$

6.5.2 Construction des premiers termes de champ lointain

Les conditions aux bords pour les termes de champ lointain obtenues précédemment, garantissant l'existence des termes de champ proche qui tendent vers 0 à l'infini, nous permettent de compléter les équations satisfaites par les termes de champ lointain. Nous obtenons ainsi les problèmes vérifiés par $u_{\omega,0}^{\text{FF}}$ et par $u_{\omega,1}^{\text{FF}}$.

Construction de u_0^{FF}

Définition 92

En utilisant (4) et la condition aux limites (94) sur $\Sigma_{\varepsilon\text{H}}$, nous définissons $u_0^{\text{FF}}(\mathbf{x})$ comme l'unique solution déterministe dans $H_{loc}^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon\text{H}})$ de

$$\begin{cases} -\Delta u_0^{\text{FF}} - k^2 u_0^{\text{FF}} = f & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^{\varepsilon\text{H}}, \\ \partial_{x_d} u_0^{\text{FF}} - ik\gamma u_0^{\text{FF}} = 0 & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon\text{H}}. \end{cases} \quad (106)$$

complété par l'UPRC (9) du chapitre 5.

Construction de u_1^{FF}
Définition 93

En utilisant (4) et la condition aux limites (99) sur $\Sigma_{\varepsilon\text{H}}$, nous définissons $u_1^{\text{FF}}(\mathbf{x})$ comme l'unique solution déterministe dans $H_{loc}^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon\text{H}})$ de

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{\text{FF}} - k^2 u_1^{\text{FF}} = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^{\varepsilon\text{H}}, \\ -\partial_{x_d} u_1^{\text{FF}} + ik\gamma u_1^{\text{FF}} = a_0^{(2)} u_0^{\text{FF}} + \sum_{i=1,2} a_{1,i}^{(2)} \partial_{x_i} u_0^{\text{FF}} + a_{2,i}^{(2)} \partial_{x_i}^2 u_0^{\text{FF}} & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon\text{H}}; \end{cases} \quad (107)$$

complété par l'UPRC (9) du chapitre 5 et où $a_0^{(2)}$ est donné par (100), $a_{1,i}^{(2)}$ sont donnés par (101) et $a_{2,i}^{(2)}$ sont donnés par (102).

6.5.3 Modèle effectif

Le premier modèle que nous proposons est construit à partir de u_0^{FF} satisfaisant les équations (106). La condition effective est identique à la condition de Robin sur Σ_0 mais elle est posée sur $\Sigma_{\varepsilon\text{H}}$. Ce modèle ne permet donc pas de prendre en compte les particules. Pour obtenir un modèle prenant en compte les particules, il faut au moins aller à l'ordre supérieur du développement.

Nous proposons alors un deuxième modèle à partir de u_0^{FF} et u_1^{FF} . Pour cela, reprenons les conditions de bords vérifiées par u_0^{FF} et u_1^{FF} données par (94) et (99)

$$\begin{aligned} -\partial_{x_d} u_0^{\text{FF}} + ik\gamma u_0^{\text{FF}} &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_{\varepsilon\text{H}}; \\ -\partial_{x_d} u_1^{\text{FF}} + ik\gamma u_1^{\text{FF}} &= a_0^{(2)} u_0^{\text{FF}} + \sum_{i=1,2} a_{1,i}^{(2)} \partial_{x_i} u_0^{\text{FF}} + a_{2,i}^{(2)} \partial_{x_i}^2 u_0^{\text{FF}} \quad \text{sur } \Sigma_{\varepsilon\text{H}}. \end{aligned}$$

En prenant une combinaison linéaire des deux conditions, nous avons :

$$-\partial_{x_d} (u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}}) + (ik\gamma - a_0^{(2)}) (u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}}) - \varepsilon \sum_{i=1,2} a_{1,i}^{(2)} \partial_{x_i} (u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}}) - \varepsilon \sum_{i=1,2} a_{2,i}^{(2)} \partial_{x_i}^2 (u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}}) = 0 \quad \text{sur } \Sigma_{\varepsilon\text{H}}.$$

De plus, comme u_0^{FF} et u_1^{FF} vérifient l'équation de Helmholtz, nous avons

$$-\Delta (u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}}) - k^2 (u_0^{\text{FF}} + \varepsilon u_1^{\text{FF}}) = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^{d-1} \times (\varepsilon\text{H}, +\infty).$$

Définition 94

Soit v_2^ε satisfaisant

$$\begin{cases} -\Delta v_2^\varepsilon - k^2 v_2^\varepsilon = f & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^{\varepsilon H}, \\ -\partial_{x_d} v_2^\varepsilon + (ik\gamma - \varepsilon a_0^{(2)})v_2^\varepsilon - \varepsilon \sum_{i=1,2} a_{1,i}^{(2)} \partial_{x_i} v_2^\varepsilon + a_{2,i}^{(2)} \partial_{x_i}^2 v_2^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H}; \end{cases} \quad (108)$$

complété par l'UPRC (9) du chapitre 5 et où $a_0^{(2)}$ est donné par (100), $a_{1,i}^{(2)}$ sont donnés par (101) et $a_{2,i}^{(2)}$ sont donnés par (102).

D'après [HLQZ15], ce problème est bien posé si $a_i^{(2)} > 0$ (nous rappelons que $\Re e \gamma > 0$). Comme $\mathcal{U}_{\omega,i,T}^{(1)}$ ne dépend pas de H , d'après la définition (102) de $a_{2,i}^{(2)}$ pour H assez grand $a_{2,i}^{(2)} > 0$ et le problème est bien posé.

Chapitre 7

Méthodes numériques et résultats

Sommaire

7.1 Calcul de la solution de référence	180
7.2 Génération du milieu aléatoire	181
7.3 Étude de l'évolution du taux de remplissage ρ	185
7.4 Calcul numérique du modèle effectif pour une condition de Dirichlet	186
7.4.1 Algorithme	187
7.4.2 Calcul de la fonction profil $\mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)}$	187
7.4.3 Calcul du coefficient du modèle effectif	189
7.4.4 Validation qualitative	191
7.4.5 Validation quantitative	191
7.5 Calcul numérique du modèle effectif pour une condition de Neumann	192
7.5.1 Algorithme	192
7.5.2 Calcul des fonctions profils $\mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1)}$ et $\mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1)}$	192
7.5.3 Calcul des coefficients du modèle effectif	194
7.5.4 Validation qualitative	197
7.5.5 Validation quantitative	198
7.6 Réduction de l'erreur de résonance	198
7.7 Technique de réduction de variance	200
7.8 Évolution du coefficient de réflexion dans le cas d'une condition de Neumann	202
7.8.1 Comparaison avec le périodique	203
7.8.2 Impact de l'épaisseur de la couche	203
7.8.3 Suppression de la contrainte de distance minimale	204

Dans ce chapitre, même si dans le chapitre précédent les résultats ont été obtenus pour un terme source à support compact, nous les supposons vrais pour le problème de diffraction par une onde plane incidente. Nous nous plaçons dans le cas 2D. Pour calculer la solution de référence, nous tronquons le milieu assez loin dans la direction de la couche et imposons des conditions périodiques. Nous utilisons un opérateur de Dirichlet-to-Neumann pour l'équation de Helmholtz périodique pour retreindre le problème à un domaine borné (comme dans le cas périodique). Nous détaillons la méthode pour générer le milieu aléatoire. Pour résoudre numériquement les problèmes de type Laplace dans le demi-espace infini privé des particules, nous tronquons le demi-espace dans la direction de la couche (avec une troncature indépendante de celle utilisée pour la solution de référence pour ne pas biaiser les calculs), nous

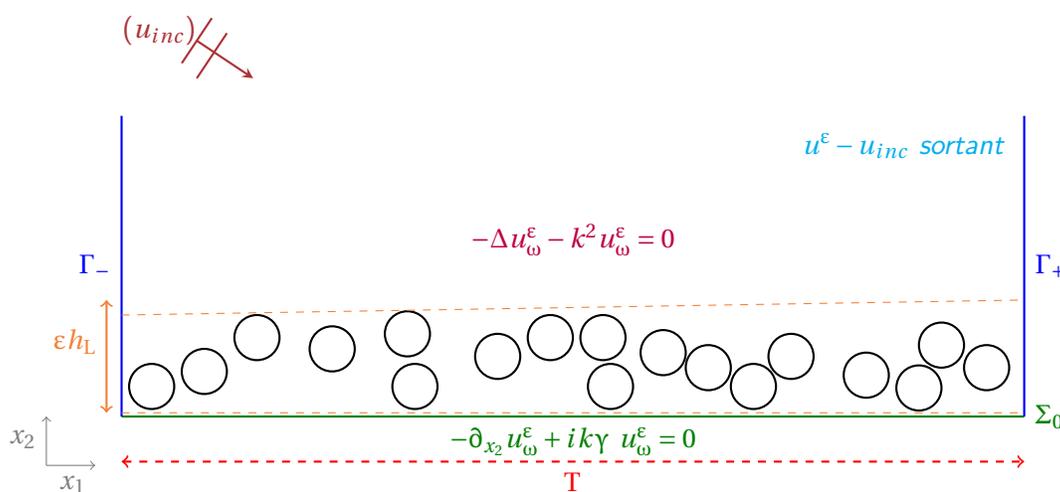
imposons des conditions périodiques sur les bords latéraux et nous utilisons un opérateur de Dirichlet-to-Neumann pour le Laplacien périodique pour ramener le problème à un domaine borné. Les coefficients eux sont obtenus à l'aide d'approximations de Monte Carlo. Nous pouvons alors, à partir des coefficients intervenant dans les conditions, calculer les solutions effectives et calculer les coefficients de réflexion effectifs associés. Nous validons ensuite les modèles avec des validations qualitatives, en traçant les champs, et des validations quantitatives, en traçant l'erreur sur les coefficients de réflexion. Comme dans le cas périodique, nous étudions l'évolution du coefficient de réflexion dans le cas d'une condition de Neumann sur les particules en fonction du taux de remplissage et de la distance entre les particules.

Dans cette section, nous nous plaçons dans le cas $d = 2$ et nous considérons une onde plane incidente $u_{inc}(x_1, x_2) = e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2}$ (nous supposons que les résultats obtenus s'étendent au cas d'une onde plane). Afin de valider nos modèles, nous construisons une solution dite de référence et la comparons aux modèles effectifs ; d'abord qualitativement en traçant les champs puis quantitativement en traçant les courbes de convergence du coefficient de réflexion.

7.1 Calcul de la solution de référence

Pour pouvoir valider par la suite nos modèles, il faut calculer une solution dite de référence u_ω^ε . Comme le domaine est non borné dans la direction de la couche, ceci n'est pas simple. Nous choisissons de limiter le domaine de calcul dans la direction x_1 en supposant que la répartition des particules présente une T périodicité avec T très grand. Ceci ressemble donc au cas périodique sauf que la répartition dans la période T est aléatoire et le modèle effectif sera déterminé sans connaître le tirage utilisé pour calculer la solution de référence. Pour cela, nous considérons un domaine borné en x_1 de grande taille T et nous imposons des conditions de $k_1 T$ quasi-périodiques sur les bords latéraux

$$\Gamma_- := \left\{ x_1 = -\frac{T}{2}, x_2 \in \mathbb{R}_+ \right\} \quad \text{et} \quad \Gamma_+ := \left\{ x_1 = \frac{T}{2}, x_2 \in \mathbb{R}_+ \right\} .$$

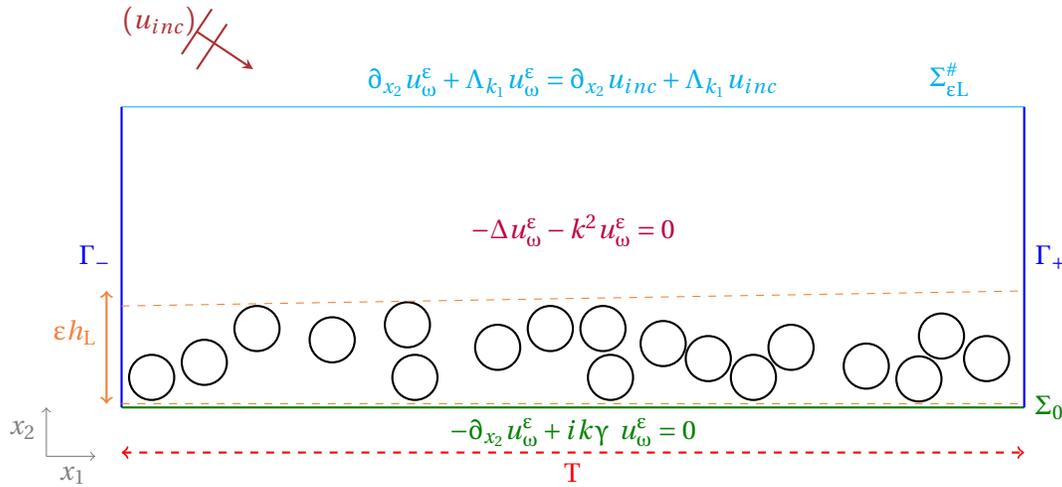


Nous nous sommes donc ramenés à un milieu aléatoire périodisé de période T . En utilisant le chapitre 2, nous pouvons borner le domaine à l'aide d'un opérateur de Dirichlet-To-Neumann sur une frontière fictive notée

$\Sigma_{\varepsilon L}^{\#} := \{x_1 \in (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}), x_2 = \varepsilon L\}$. Nous résolvons alors le problème en domaine borné $\mathcal{B}_{\omega,0}^{\varepsilon L}$

$$\begin{cases} -\Delta u_{\omega}^{\varepsilon} - k^2 u_{\omega}^{\varepsilon} = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_{\omega,0}^{\varepsilon L}, \\ u_{\omega}^{\varepsilon} \text{ est } k_1 T \text{ quasi-périodique} \\ -\partial_{x_2} u_{\omega}^{\varepsilon} + ik\gamma u_{\omega}^{\varepsilon} = 0 & \text{sur } \Sigma_0^{\varepsilon} := \left\{x_1 \in \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right), x_2 = 0\right\} \\ \partial_{x_2} u_{\omega}^{\varepsilon} + \Lambda_{k_1} u_{\omega}^{\varepsilon} = \partial_{x_2} u_{inc} + \Lambda_{k_1} u_{inc} & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon L}^{\#} \end{cases} \quad (1)$$

avec soit $u_{\omega}^{\varepsilon} = 0$ sur $\partial\mathcal{P}_{\omega}^{\varepsilon}$; soit $\nabla u_{\omega}^{\varepsilon} \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial\mathcal{P}_{\omega}^{\varepsilon}$.



Nous obtenons la solution de ce problème à l'aide d'une méthode éléments finis.

Dans la suite, nous nous intéresserons au coefficient de réflexion. Nous introduisons donc la définition du coefficient de réflexion pour la solution dite de référence (pour une répartition ω donnée).

Définition 95

Le coefficient de réflexion de la solution dite de référence est noté $r_{ref}^{\omega}(k_1, k_2)$ et est donné par

$$r_{ref}^{\omega}(k_1, k_2) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{\Sigma_{\varepsilon L}^{\#}} u_{d,\omega}^{\varepsilon}(x_1, \varepsilon L) e^{-ik_1 x_1} dx_1; \quad (2)$$

où $u_{d,\omega}^{\varepsilon}(x_1, \varepsilon L) = u_{\omega}^{\varepsilon}(x_1, \varepsilon L) - u_{inc}(x_1, \varepsilon L)$.

7.2 Génération du milieu aléatoire

Pour effectuer des calculs numériques, il faut générer la répartition aléatoire des particules vérifiant les hypothèses de stationnarité et d'ergodicité. Le processus choisi pour effectuer la répartition des particules est un processus point de Poisson auquel nous allons imposer l'hypothèse de distance minimale. L'algorithme est le suivant :

- Étape 1 : Nous nous donnons une boîte $\mathcal{L}_T^{h_L}$ de longueur T et de hauteur h_L et un taux de remplissage ρ compris entre 0 et 1.

Remarque 25. Notons que nous ne pouvons pas atteindre des taux de remplissage ρ trop grand, il pourra rarement dépasser 0.5. Cela est dû au fait que nous considérons des particules distantes les unes des autres d'au moins une distance $\delta > 0$.

- Étape 2 : Nous pouvons alors définir le nombre moyen de particules ν avec l'expression

$$\nu = \rho \frac{\text{Aire}(\mathcal{L}_T^{h_L})}{\text{Aire(particule)}} .$$

- Étape 3 : A partir du nombre moyen de particules, nous déterminons le nombre de particules, noté N_{part}^ω , contenu dans la bande $\mathcal{L}_T^{h_L}$ à l'aide d'une loi de Poisson de paramètre ν .

Définition 96

La variable aléatoire N_{part}^ω suit une loi de Poisson de paramètre $\nu > 0$, si l'on a pour tout $m \in \mathbb{N}$, la probabilité suivante :

$$\mathbb{P}(N_{part}^\omega = m) = e^{-\nu} \frac{\nu^m}{m!} .$$

La fonction de répartition de la variable aléatoire N_{part}^ω qui suit une loi de Poisson de paramètre ν est donnée par :

$$\text{pout tout } m \in \mathbb{N}, \quad F(m) = \frac{\Gamma(m+1, \nu)}{m!}, \quad (3)$$

avec $\Gamma(x, \nu)$ la fonction gamma incomplète telle que :

$$\Gamma(x, \nu) = \int_{\nu}^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x) - \gamma(x, \nu),$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \text{la fonction gamma qui vérifie, } \forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!,$$

$$\gamma(x, \nu) = \int_0^{\nu} t^{x-1} e^{-t} dt .$$

- Étape 4 : Afin de simuler le tirage de la variable aléatoire N_{part}^ω dont nous connaissons la fonction de répartition F , nous utilisons les résultats suivants : [\[Ros22\]](#)

Définition 97

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0, 1)$. On définit

$$F^{-1}(U) := \inf \{ x \in \mathbb{R}, F(x) \geq U \} . \quad (4)$$

Théorème 98

Soit N_{part}^ω une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F et U une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0, 1)$. Alors N_{part}^ω et $F^{-1}(U)$ ont la même loi.

- Étape 5 : Pour finir de générer notre répartition de particules, nous pouvons utiliser l'une des deux méthodes suivantes.

1^{ère} méthode : nous tirons les centres aléatoirement dans la bande, suivant deux lois uniformes, en vérifiant à chaque tirage $x = (x_1, x_2)$ qu'une distance minimale, notée δ_{min} , avec les centres déjà placés $y = (y_1, y_2)$ est vérifiée :

$$d(x, y) = \min \left\{ \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \sqrt{\left[\min(x_1, y_1) + T - \max(x_1, y_1) \right]^2 + (x_2 - y_2)^2} \right\} > \delta_{min} ; \quad (5)$$

sinon il faut relancer le tirage du centre (x_1, x_2) .

Remarque 26. Le programme contient un test d'arrêt qui permet de le stopper si un point est refusé N_{refus} fois, avec N_{refus} défini au départ.

Nous pouvons tracer la partie réelle du champ diffracté obtenue avec la solution de référence pour différents taux de remplissage. Pour chaque taux de remplissage, nous avons ici représenté deux réalisations et calculé leur taux de remplissage effectif noté ρ_{eff} .

- Nous considérons un taux de remplissage $\rho_0 = 0.1$ pour une couche de taille $T = 100$ et de hauteur $h_L = 10$ avec une fréquence de 2GHz, $\varepsilon = 10^{-4}m$, $\delta_{min} = 10^{-6}$ et $L = 20$.



Figure 7.1 – taux de remplissage effectif $\rho_{eff} = 0.12$ pour la méthode 1



Figure 7.2 – taux de remplissage effectif $\rho_{eff} = 0.08$ pour la méthode 1

- Nous considérons un taux de remplissage $\rho_0 = 0.4$ pour une couche de taille $T = 100$ et de hauteur $h_L = 10$ avec une fréquence de 2GHz, $\varepsilon = 10^{-4}m$, $\delta_{min} = 10^{-6}$ et $L = 20$.



Figure 7.3 – taux de remplissage effectif $\rho_{eff} = 0.36$ pour la méthode 1



Figure 7.4 – taux de remplissage effectif $\rho_{eff} = 0.41$ pour la méthode 1

- Nous considérons un taux de remplissage $\rho_0 = 0.8$ pour une couche de taille $T = 100$ et de hauteur $h_L = 10$ avec une fréquence de 2GHz, $\epsilon = 10^{-4}m$, $\delta_{min} = 10^{-6}$ et $L = 20$.



Figure 7.5 – taux de remplissage effectif $\rho_{eff} = 0.48$ pour la méthode 1



Figure 7.6 – taux de remplissage effectif $\rho_{eff} = 0.47$ pour la méthode 1

2^{eme} méthode : Processus de Matérn hardcore [IPSS08, DG20].

Nous tirons tous les centres aléatoirement dans la bande suivant deux lois uniformes. Une fois les centres tirés :

- Nous associons à chaque centre c_i une valeur aléatoire entre 0 et 1 que l'on note $s(c_i)$;
- Nous gardons un centre c_i s'il vérifie l'hypothèse de distance minimale avec tous les c_j tels que $s(c_j) < s(c_i)$. Sinon le centre est éliminé.

Nous pouvons tracer la partie réelle du champ diffracté obtenue avec la solution de référence pour différents taux de remplissage.

- Nous considérons un taux de remplissage $\rho_0 = 0.1$ pour une couche de taille $T = 100$ et de hauteur $h_L = 10$ avec une fréquence de 2GHz, $\epsilon = 10^{-4}m$, $\delta_{min} = 10^{-6}$ et $L = 20$.



Figure 7.7 – taux de remplissage effectif $\rho_{eff} = 0.09$ pour la méthode 2



Figure 7.8 – taux de remplissage effectif $\rho_{eff} = 0.09$ pour la méthode 2

- Nous considérons un taux de remplissage $\rho_0 = 0.4$ pour une couche de taille $T = 100$ et de hauteur $h_L = 10$ avec une fréquence de 2GHz, $\epsilon = 10^{-4}m$, $\delta_{min} = 10^{-6}$ et $L = 20$.



Figure 7.9 – taux de remplissage effectif $\rho_{eff} = 0.21$ pour la méthode 2



Figure 7.10 – taux de remplissage effectif $\rho_{eff} = 0.20$ pour la méthode 2

- Nous considérons un taux de remplissage $\rho_0 = 0.8$ pour une couche de taille $T = 100$ et de hauteur $h_L = 10$ avec une fréquence de 2GHz, $\epsilon = 10^{-4}m$, $\delta_{min} = 10^{-6}$ et $L = 20$.



Figure 7.11 – taux de remplissage effectif $\rho_{eff} = 0.26$ pour la méthode 2

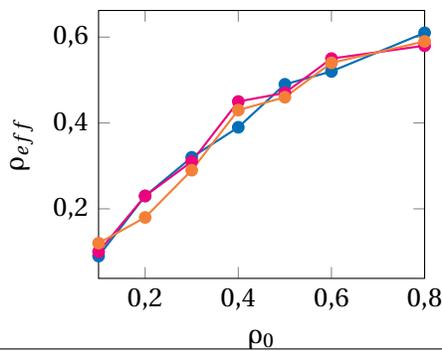


Figure 7.12 – taux de remplissage effectif $\rho_{eff} = 0.25$ pour la méthode 2

Notons que la deuxième méthode ne force pas le remplissage de la bande contrairement à la première méthode et donc pour un taux ρ_0 choisi élevé le taux effectif sera plus faible.

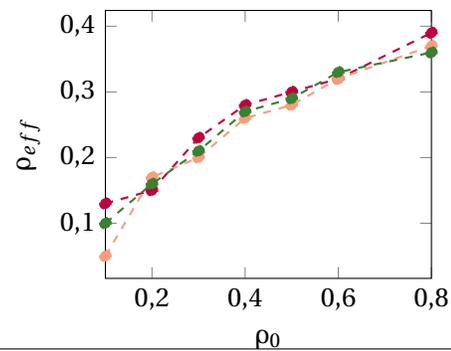
7.3 Étude de l'évolution du taux de remplissage ρ

Nous regardons l'évolution du taux de remplissage pour différentes tailles de couche $h_L = 2, 5, 10$ avec différentes distances minimales $\delta_{min} = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}$ pour les deux méthodes de répartitions précédentes pour 10 réalisations.



— $\delta_{min} = 10^{-2}$ — $\delta_{min} = 10^{-4}$ — $\delta_{min} = 10^{-6}$

Figure 7.13 – Évolution de ρ_{eff} pour $h_L = 2$ avec la méthode de remplissage 1



- - $\delta_{min} = 10^{-2}$ - - $\delta_{min} = 10^{-4}$ - - $\delta_{min} = 10^{-6}$

Figure 7.14 – Évolution de ρ_{eff} pour $h_L = 2$ avec la méthode de remplissage 2

Pour les deux méthodes, notons qu'un ρ_{eff} maximal est atteint. Nous pouvons voir comme attendu que le taux de remplissage effectif est plus élevé pour la méthode 1 que la méthode 2.

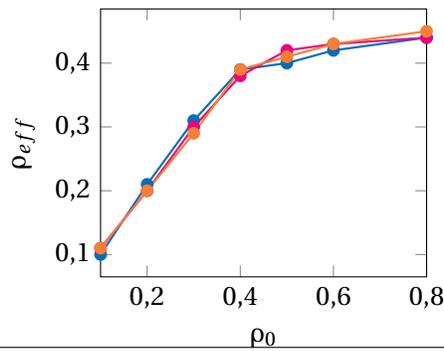


Figure 7.15 – Évolution de ρ_{eff} pour $h_L = 5$ avec la méthode de remplissage 1

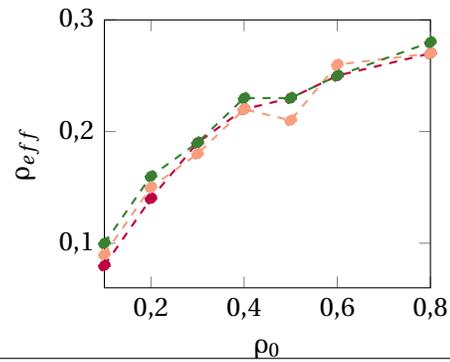


Figure 7.16 – Évolution de ρ_{eff} pour $h_L = 5$ avec la méthode de remplissage 2

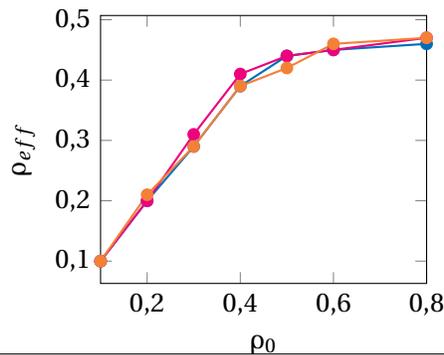


Figure 7.17 – Évolution de ρ_{eff} pour $h_L = 10$ avec la méthode de remplissage 1

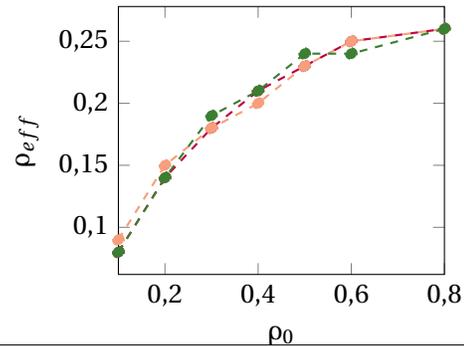


Figure 7.18 – Évolution de ρ_{eff} pour $h_L = 10$ avec la méthode de remplissage 2

Le taux de remplissage effectif maximal est plus élevé pour une couche de taille $h_L = 2$ (c'est-à-dire la couche ne peut contenir qu'une ligne de particules) car comme les particules ne peuvent être que alignées, il y a moins d'espace libre.

7.4 Calcul numérique du modèle effectif pour une condition de Dirichlet

Dans cette section, nous nous intéressons à la méthode de calcul numérique de notre modèle effectif (68) proposé dans le chapitre 6 et à la détermination du coefficient de réflexion associé. Nous utilisons la méthode de remplissage 1. Nous allons supposer que le modèle effectif obtenu pour un terme source est également valide pour une onde incidente plane.

7.4.1 Algorithme

Nous commençons par donner les différentes étapes de l'algorithme avant de les détailler une à une.

Étape 1 : Nous calculons une approximation de la fonction profil $\mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)}$ donnée par (60) dans le chapitre 6, en tronquant le domaine de résolution.

Étape 2 : Après avoir obtenu la fonction profil dans le domaine tronqué, nous calculons une approximation de la constante $c_0^{(1)}$ donnée par

$$c_0^{(1)} := \lim_{y_2 \rightarrow +\infty} \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)}(y_1, y_2) = \mathbb{E} \left[\mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)}(\cdot, H) \right].$$

Étape 3 : Nous pouvons alors calculer le coefficient de réflexion en $x_2 = \varepsilon H$ pour différents ε, k_2 :

$$r_2^\varepsilon(k_2) = \frac{ik_2 \varepsilon c_0^{(1)} - 1}{ik_2 \varepsilon c_0^{(1)} + 1} e^{ik_2 \varepsilon H}. \quad (6)$$

Étape 4 : Il est alors possible de construire la solution du modèle effectif au dessus de $\Sigma_{\varepsilon H}$ avec son expression explicite

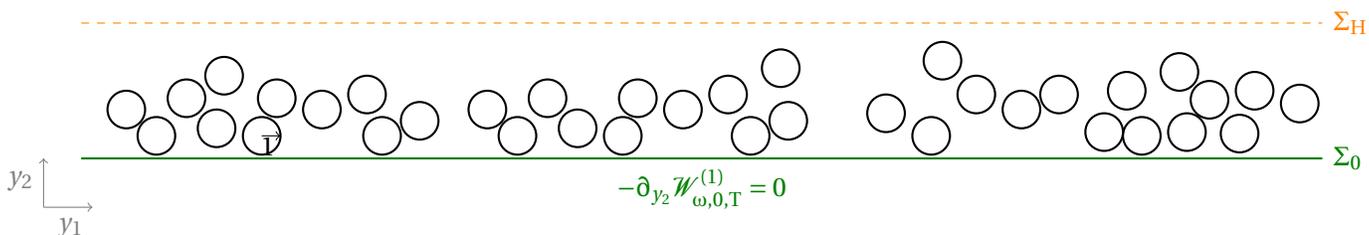
$$v_2^\varepsilon(x_1, x_2) = e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} + r_2^\varepsilon e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2(x_2 - \varepsilon H)}. \quad (7)$$

7.4.2 Calcul de la fonction profil $\mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)}$

Dans le chapitre précédent, nous avons défini une fonction profil $\mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)}$ solution d'un problème de type Laplace dans un domaine infini : soit $L > H$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)} + \frac{1}{T} \chi_{y_2 < L} \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}_\omega \setminus \Sigma_H, \\ -\partial_{y_2} \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0, \\ \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)} = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{D}_\omega, \\ \left[\mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)} \right]_H = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)} \right]_H = 1, \\ \left[\mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)} \right]_L = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)} \right]_L = 0; \end{array} \right.$$

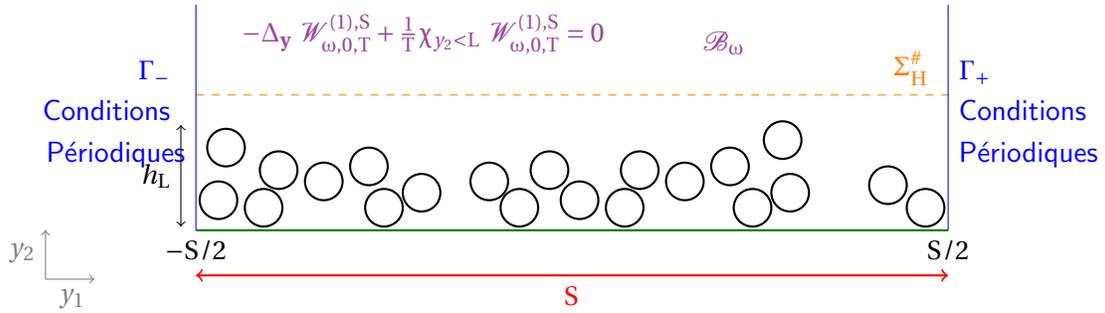
$$-\Delta_{\mathbf{y}} \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)} + \frac{1}{T} \chi_{y_2 < L} \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)} = 0 \quad \mathcal{D}_\omega$$



En pratique pour résoudre numériquement ce problème, nous tronquons le domaine dans la direction y_1 sur $(-\frac{S}{2}, \frac{S}{2})$ et nous prescrivons des conditions de périodicité sur les bords latéraux $\Gamma_- := \{y_1 = -\frac{S}{2}, y_2 \in \mathbb{R}_+\}$ et

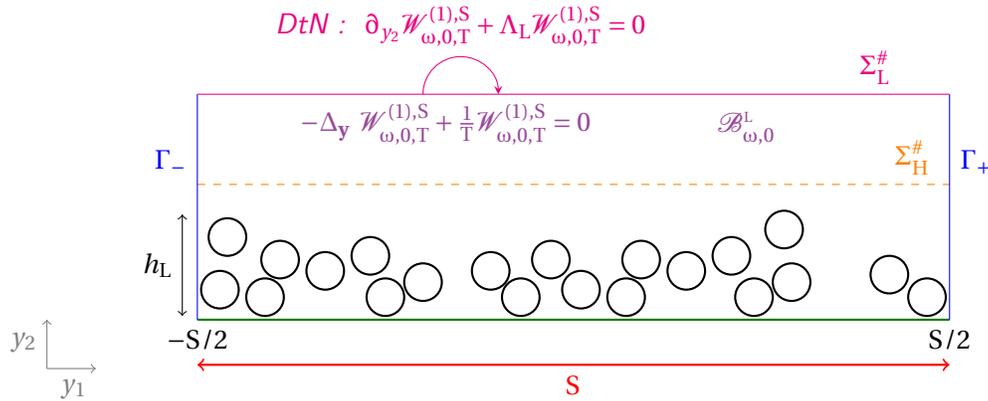
$\Gamma_+ := \{y_1 = \frac{S}{2}, y_2 \in \mathbb{R}_+\}$. Cette méthode est classique en homogénéisation stochastique. Nous aurions également pu choisir d'imposer une condition de Dirichlet, Neumann ou mixte aux bords Γ_+ et Γ_- . Cependant, il est plus courant de se placer dans ce cadre périodique. De nombreux travaux ont été réalisés pour quantifier l'erreur commise en remplaçant $\mathcal{W}_0^{(1)}$ par $\mathcal{W}_{0,T}^{(1),S}$ [BP04, Glo12, BLBL16]. Il est prouvé que pour S et T grand il y a bien convergence de $\mathcal{W}_{0,T}^{(1),S}$ vers $\mathcal{W}_0^{(1)}$. Nous nous sommes donc ramenés à une bande infinie $\mathcal{B}_\omega := (-\frac{S}{2}, \frac{S}{2}) \times \mathbb{R}_+ \setminus \overline{\mathcal{P}_\omega}$ où \mathcal{P}_ω correspond aux particules dans la bande de largeur S .

Nous générons les particules dans ce domaine comme écrit dans la section 7.2



Pour finir, nous bornons le domaine dans la direction y_2 avec un opérateur de Dirichlet-to-Neumann du problème de Laplace dans la bande tronquée sur une frontière fictive en $\{y_2 = L\}$, ,

$$\partial_{y_2} \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1),S} = -\frac{2\pi}{S} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |m| (\mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1),S}, \phi_m)_{L^2(\Sigma_L^{\#})} \phi_m(y_1) = -\Lambda^L \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1),S}, \quad \text{avec } \phi_m(y_1) = \frac{1}{\sqrt{S}} e^{\frac{2im\pi}{S} y_1}. \quad (8)$$



Il est nécessaire de tronquer la série $\sum_{m=-N}^N$, avec $N > 0$, et de considérer suffisamment de termes pour résoudre la fonction profil. Pour cela, nous nous fixons un seuil e_1 et choisissons N tel que

$$e^{-\frac{2N\pi(L-H)}{S}} < e_1 \quad \text{i.e.} \quad N > \frac{\ln(e_1) S}{2\pi(L-H)}. \quad (9)$$

Nous obtenons alors la fonction profil à l'aide d'une méthode éléments finis comme dans le cas périodique (chapitre 4).

Nous traçons différentes réalisations de la fonction profil $\mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1),S}$ pour différents taux de remplissages. Pour les Figures 7.19 et 7.20 nous avons considéré $\rho = 0.1$, $\delta_{min} = 10^{-6}$, $h_L = 10$, $S = 100$, $L = 30$ et $H = 15$. Pour les Figures 7.21 et 7.22 nous avons considéré $\rho = 0.4$, $\delta_{min} = 10^{-6}$, $h_L = 10$, $S = 100$, $L = 30$ et $H = 15$.

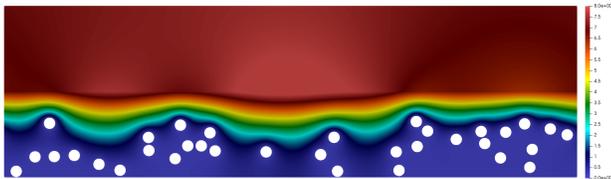


Figure 7.19 – Fonction profil $\mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1),S}$ avec $\rho_{eff} = 0.11$

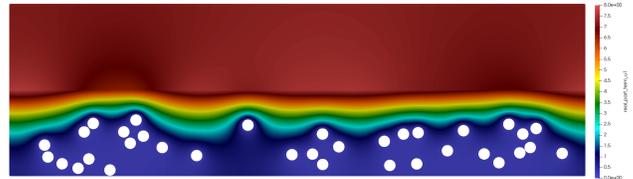


Figure 7.20 – Fonction profil $\mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1),S}$ avec $\rho_{eff} = 0.11$

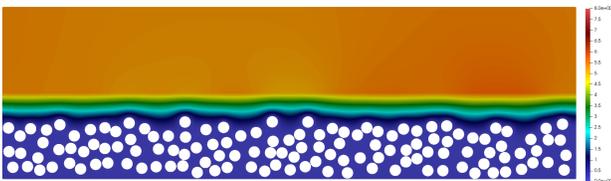


Figure 7.21 – Fonction profil $\mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1),S}$ avec $\rho_{eff} = 0.41$

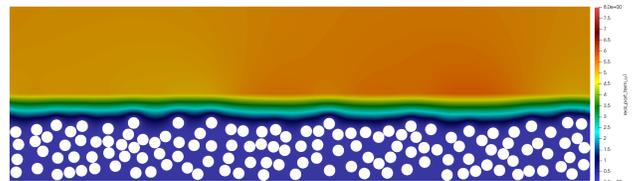


Figure 7.22 – Fonction profil $\mathcal{W}_{\omega,0}^{(1)}$ avec $\rho_{eff} = 0.41$

Nous observons bien que la fonction tend vers une constante quand y_2 devient de plus en plus grand.

7.4.3 Calcul du coefficient du modèle effectif

Une fois la fonction profil $\mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1),S}$ calculée, nous pouvons calculer le coefficient apparaissant dans notre modèle effectif.

Nous rappelons la définition du coefficient :

$$c_0^{(1)} = \lim_{y_2 \rightarrow +\infty} \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1),S}(y_1, y_2) = \mathbb{E} \left[\mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1),S}(\cdot, L) \right].$$

Par stationnarité et ergodicité, le coefficient donné par l'espérance de la fonction profil régularisée sur Σ_L peut s'écrire comme la limite de la moyenne de cette fonction sur un grand segment $\Sigma_{L,S}^\# := \left\{ y_1 \in \left(-\frac{S}{2}, \frac{S}{2}\right), y_2 = L \right\}$. Ainsi en approximant $\mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)}$ par $\mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1),S}$ il vient alors

$$c_0^{(1)} \approx \lim_{S \rightarrow +\infty} \int_{\Sigma_{L,S}^\#} \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1),S} dy_1 \approx \mathbb{E} \left[\int_{\Sigma_{L,S}^\#} \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1)} dy_1 \right].$$

Notons que ceci est cohérent avec la représentation modale de $\mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1),S}(\cdot, y_2)$ pour $y_2 > L$. En effet, pour $y_2 > L$, nous avons

$$\mathcal{W}_{\omega,0}^{(1),R,S}(y_1, y_2) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\mathcal{W}_{\omega,0}^{(1),R,S}, \Phi_m \right)_{L^2(\Sigma_L^\#)} \exp\left(-\frac{2|m|\pi}{T}(y_2 - L)\right) \Phi_m(y_1) \xrightarrow{y_2 \rightarrow +\infty} \int_{\Sigma_{L,S}^\#} \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1),S} dy_1.$$

Il est alors possible d'utiliser l'une des deux méthodes suivantes pour obtenir le coefficient numériquement :

- 1^{ère} méthode : nous considérons une très grande boîte S, un grand T et une réalisation pour calculer le coefficient.

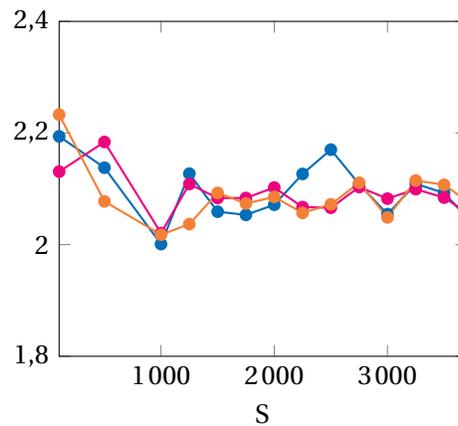
$$c_0^{(1)} \approx \int_{\Sigma_{L,S}^\#} \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1),S} dy_1 \ .$$

- 2^{ème} méthode : nous utilisons l'approximation de Monte Carlo en considérant S grand, T grand et M réalisations indépendantes et identiquement distribuées.

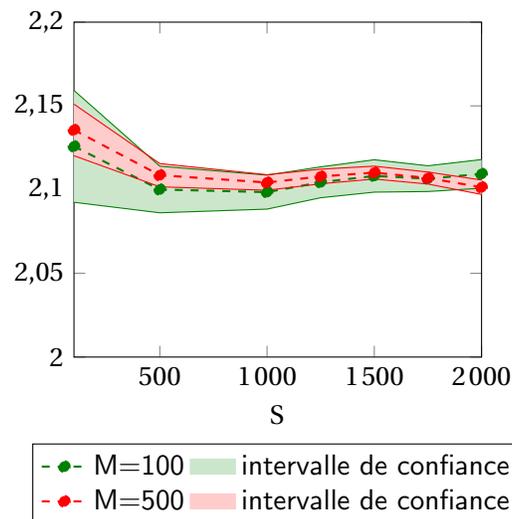
$$c_0^{(1)} \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \int_{\Sigma_{L,S}^\#} \mathcal{W}_{\omega,0,T}^{(1),S} dy_1 \ .$$

Nous vérifions la convergence du coefficient calculé pour les deux méthodes précédentes en utilisant $\gamma = 1$ et $\rho = 0.4$.

- Une réalisation sur une boîte de taille S de plus en plus grande



- Algorithme de Monte Carlo pour plusieurs réalisations.



7.4.4 Validation qualitative

Nous sommes désormais en mesure de simuler le modèle effectif. Nous allons maintenant le valider numériquement.

Nous pouvons commencer par faire une validation qualitative, en traçant d'une part, la partie réelle du champ diffracté pour une solution de référence sur une grande boîte de taille $T = 2000$ avec des conditions $k_1 T$ quasi-périodique sur les bords latéraux et un opérateur de Dirichlet-to-Neumann sur une frontière fictive en $\{x_2 = \epsilon L\}$ avec $L = 20$ (Figure 7.23). Cette solution est obtenue à l'aide d'une méthode éléments finis. D'autre part, nous traçons la partie réelle du champ diffracté pour la solution du modèle effectif v_2^ϵ au dessus de $\Sigma_{\epsilon H}$ avec la formule analytique (7) pour des coefficients qui ont convergé, par exemple pour une boîte de taille $S = 1500$ (Figure 7.24).

Pour les Figures 7.23 et 7.24, nous considérons un taux de remplissage $\rho = 0.4$, une couche de taille $h_L = 10$, des particules de taille $\epsilon = 10^{-4}m$, une longueur d'onde de 15cm (fréquence de 2GHz), $\gamma = 1 + i$, $\theta = \pi/4$, $H = 13$ et $L = 30$. Nous avons effectué un zoom sur une partie de la solution.

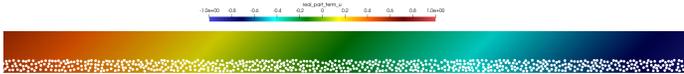


Figure 7.23 – Solution de référence $u_{d,\omega}^\epsilon$

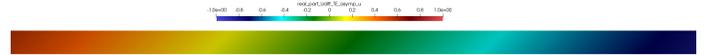


Figure 7.24 – Solution approchée $v_{2,d}^\epsilon$

En comparant la solution de référence et le modèle effectif, nous avons l'impression visuellement d'avoir construit une bonne approximation.

7.4.5 Validation quantitative

Nous pouvons aussi faire une validation quantitative, en comparant le coefficient de réflexion obtenu avec la solution dite de référence donné par (2) au coefficient de réflexion de l'approximation 2 donné par (6), pour un coefficient qui a convergé. Nous traçons l'erreur sur les coefficients de réflexion en fonction de ϵ .

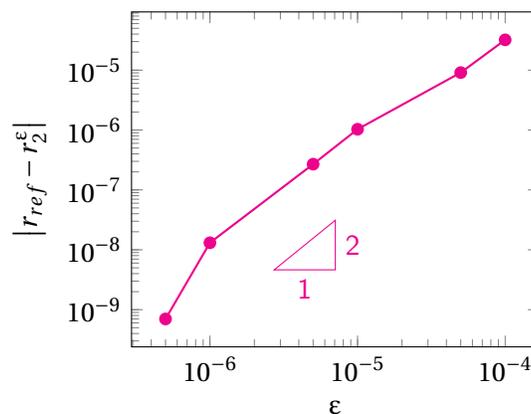


Figure 7.25 – Erreur pour le modèle 2 par rapport à ϵ pour un coefficient $c_0^{(1)}$ convergé.

L'erreur semble, comme dans le cas périodique, converger à l'ordre 2.

7.5 Calcul numérique du modèle effectif pour une condition de Neumann

Dans cette section, nous nous intéressons à la méthode du calcul numérique de notre modèle effectif (108) proposé dans le chapitre 6 et à la détermination du coefficient de réflexion associé dans le cas d'une condition de Neumann sur les particules.

7.5.1 Algorithme

Étape 1 : Nous commençons par calculer une approximation des fonctions profils $\mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1)}$ et $\mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1)}$ en tronquant le domaine de résolution et en prenant $T = \varepsilon^{-2}$.

Étape 2 : Après avoir obtenu les fonctions profils $\mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1)}$ et $\mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1)}$, nous calculons une approximation des constantes $a_0^{(2)}$, $a_1^{(2)}$ et $a_2^{(2)}$ données dans le chapitre 6 par (103), (104) et (105).

Étape 3 : Une fois les coefficients obtenus, nous pouvons calculer le coefficient de réflexion associé en $x_2 = \varepsilon H$, pour différents ε , k_1 , k_2 , γ et k :

$$r_2^\varepsilon = \frac{ik_2 - (ik\gamma - \varepsilon k^2 a_0^{(2)}) + \varepsilon k_1 (ika_1^{(2)} - a_2^{(2)k_1})}{ik_2 + (ik\gamma - \varepsilon k^2 a_0^{(2)}) - \varepsilon k_1 (ika_1^{(2)} - a_2^{(2)k_1})} e^{ik_2 \varepsilon H}. \quad (10)$$

Étape 4 : Il est possible de construire la solution du modèle effectif au dessus de $\Sigma_{\varepsilon H}$ à l'aide d'une expression analytique

$$v_2^\varepsilon = e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} + r_2^\varepsilon e^{ik_1 x_1} e^{-ik_2(x_2 - \varepsilon H)}. \quad (11)$$

7.5.2 Calcul des fonctions profils $\mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1)}$ et $\mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1)}$

Dans le chapitre précédent, nous avons défini deux fonctions profils $\mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1)}$ et $\mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1)}$ solutions de problèmes de type Laplace dans un domaine infini : soit $L > H$

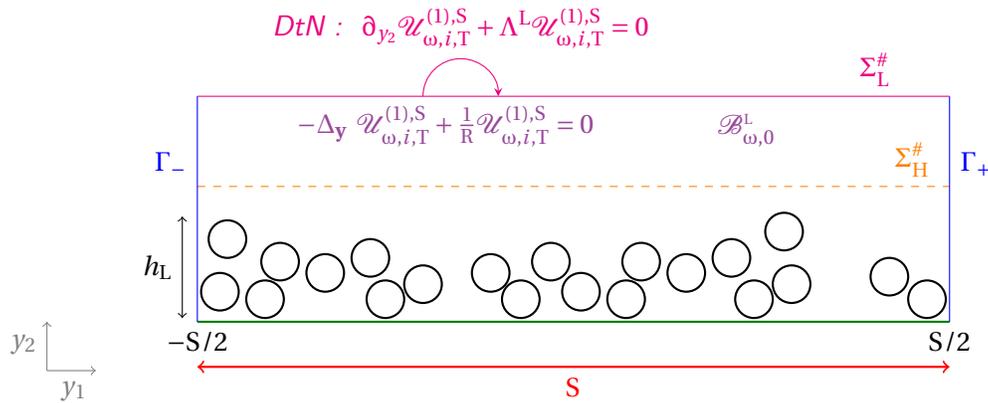
$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} \mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1)} + \frac{1}{T} \chi_{y_2 < L} \mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1)} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}_\omega \setminus \Sigma_H, \\ -\partial_{y_2} \mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1)} = -1 \quad \text{sur} \quad \Sigma_0, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1)} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial \mathcal{P}_\omega, \\ \left[\mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1)} \right]_H = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} \mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1)} \right]_H = 1, \\ \left[\mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1)} \right]_L = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} \mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1)} \right]_L = 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\mathbf{y}} \mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1)} + \frac{1}{T} \chi_{y_2 < L} \mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1)} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}_\omega \setminus \Sigma_H, \\ -\partial_{y_2} \mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1)} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_0, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1)} \cdot \vec{n} = -n_1 \quad \text{sur} \quad \partial \mathcal{P}_\omega, \\ \left[\mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1)} \right]_H = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} \mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1)} \right]_H = 0, \\ \left[\mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1)} \right]_L = 0 \quad \text{et} \quad \left[-\partial_{y_2} \mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1)} \right]_L = 0. \end{array} \right.$$

Comme pour le cas Dirichlet, en pratique pour résoudre numériquement ces fonctions, nous tronquons le domaine dans la direction y_1 sur $(-\frac{S}{2}, \frac{S}{2})$ et nous prescrivons des conditions de périodicité sur les bords latéraux Γ_- et Γ_+ . Nous nous sommes donc ramenés à une bande infini \mathcal{B}_ω .

Nous générons alors les particules dans ce domaine suivant la méthode décrite dans la section 7.2.

Pour finir, nous bornons le domaine dans la direction y_2 avec un opérateur de Dirichlet-to-Neumann sur une frontière fictive en $\{y_2 = L\}$, pour $i = \{0, 1\}$, comme dans le cas Dirichlet

$$\partial_{y_2} \mathcal{U}_{\omega, i, T}^{(1), S} = -\Lambda^L \mathcal{U}_{\omega, i, T}^{(1), S}.$$



Nous tronquons la série $\sum_{m=-N}^N$, avec $N > 0$, en considérant le même critère que dans le cas Dirichlet.

Nous obtenons alors les fonctions profils à l'aide d'une méthode éléments finis comme dans le cas périodique (chapitre 4).

Nous traçons différentes réalisations des fonctions profils $\mathcal{U}_{\omega, 0, T}^{(1), S}$ et $\mathcal{U}_{\omega, 1, T}^{(1), S}$ pour différents taux de remplissages. Pour les figures 7.26, 7.27, 7.28 et 7.29, nous considérons $\rho = 0.1$, $\delta_{min} = 10^{-6}$, $h_L = 10$, $S = 100$, $L = 30$ et $H = 15$. Pour les figures 7.30, 7.31, 7.32 et 7.33 nous considérons $\rho = 0.4$, $\delta_{min} = 10^{-6}$, $h_L = 10$, $S = 100$, $L = 30$ et $H = 15$.

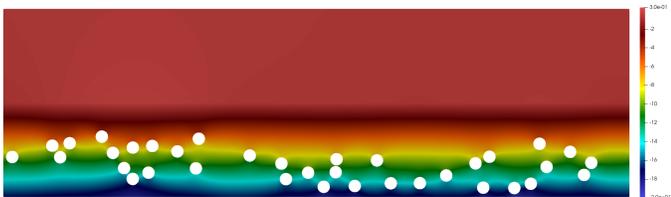


Figure 7.26 – $\mathcal{U}_{\omega, 0, T}^{(1), S}$ pour $\rho = 0.1$

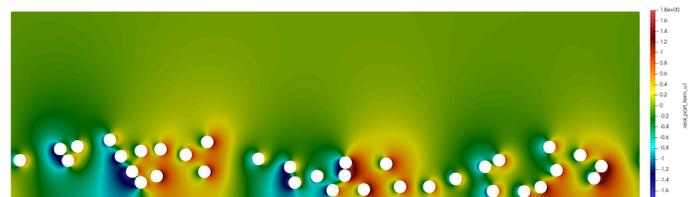


Figure 7.27 – $\mathcal{U}_{\omega, 1, T}^{(1), S}$ pour $\rho = 0.1$

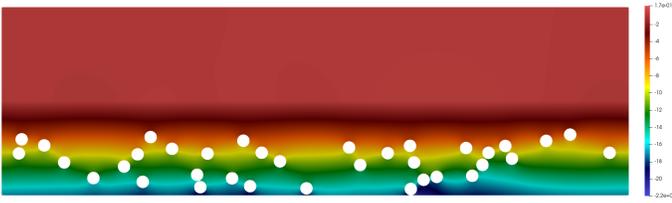


Figure 7.28 – $\mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1),S}$ pour $\rho = 0.1$

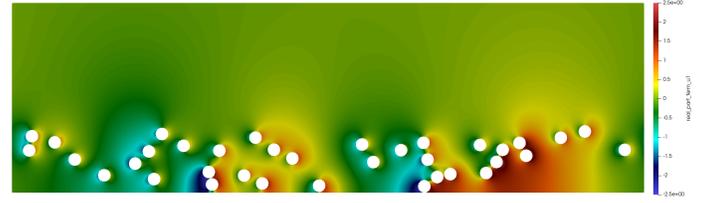


Figure 7.29 – $\mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1),S}$ pour $\rho = 0.1$

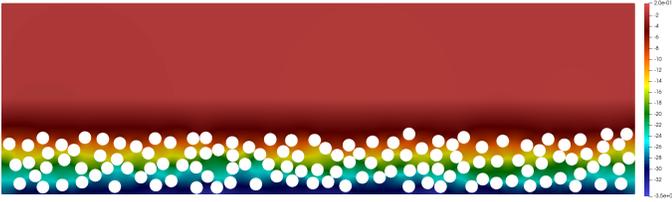


Figure 7.30 – $\mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1),S}$ pour $\rho = 0.4$

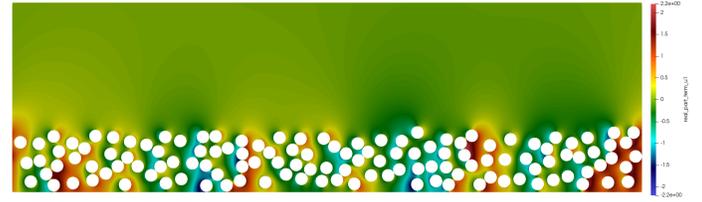


Figure 7.31 – $\mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1),S}$ pour $\rho = 0.4$

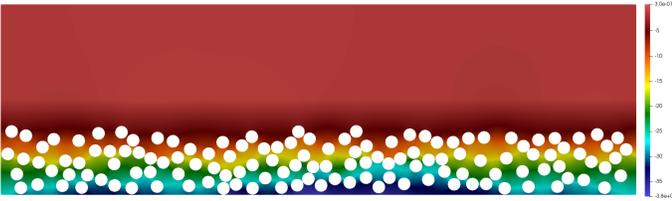


Figure 7.32 – $\mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1),S}$ pour $\rho = 0.4$



Figure 7.33 – $\mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1),S}$ pour $\rho = 0.4$

7.5.3 Calcul des coefficients du modèle effectif

Une fois les fonctions profils $\mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1),S}$ et $\mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1),S}$ calculées, nous pouvons calculer une approximation des coefficients de notre modèle effectif.

De même que dans le cas Dirichlet, nous pouvons approximer les coefficients de notre modèle effectif de la façon suivante :

$$\begin{aligned} a_0^{(2)} &\approx \lim_{S \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[k^2 \int_{\square_S} \int_0^H \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} \, dy - ik\gamma \int_{\Sigma_{0,S}^\#} \mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1),S}(y_1, 0) \, dy_1 \right] \\ &\approx \lim_{S \rightarrow +\infty} \int_{\Sigma_{L,S}^\#} \left(k^2 \int_{\square_S} \int_0^H \mathbb{1}_{\mathcal{D}_\omega} \, dy - ik\gamma \int_{\Sigma_{0,S}^\#} \mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1),S}(y_1, 0) \, dy_1 \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_1^{(2)} &\approx \lim_{S \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[-ik\gamma \int_{\Sigma_{0,S}^\#} \mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1),S}(y_1, 0) dy_1 - \int_{\partial \mathcal{P}_\omega \cap \square_S \times [\delta, h_L + \delta]} \mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1),S} n_1 dy \right] \\
 &\approx \lim_{S \rightarrow +\infty} \int_{\Sigma_{L,S}^\#} \left(-ik\gamma \int_{\Sigma_{0,S}^\#} \mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1),S}(y_1, 0) dy_1 - \int_{\partial \mathcal{P}_\omega \cap \square_S \times [\delta, h_L + \delta]} \mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1),S} n_1 dy \right); \\
 a_2^{(2)} &\approx \lim_{S \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\int_{\square_S} \int_0^H \mathbb{1}_{\mathcal{P}_\omega} dy - \int_{\partial \mathcal{P}_\omega \cap \square_S \times [\delta, h_L + \delta]} \mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1),S} n_1 dy \right] \\
 &\approx \lim_{S \rightarrow +\infty} \int_{\Sigma_{L,S}^\#} \left(\int_{\square_S} \int_0^H \infty_{\mathcal{P}_\omega} dy - \int_{\partial \mathcal{P}_\omega \cap \square_S \times [\delta, h_L + \delta]} \mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1),S} n_1 dy \right);
 \end{aligned}$$

où $\Sigma_{0,S}^\# := \{y_1 \in (-\frac{S}{2}, \frac{S}{2}), y_2 = 0\}$.

Comme dans le cas Dirichlet, il est alors possible d'utiliser l'une des deux méthodes suivantes pour obtenir les coefficients :

- 1^{ère} méthode : nous considérons une très grande boîte S , un grand T et une réalisation pour calculer les coefficients dans ce cas.

$$\begin{aligned}
 a_0^{(2)} &\approx \frac{1}{S} \left[k^2 |\mathcal{B}_{\omega,0,S}^H| - ik\gamma \int_{\Sigma_{0,S}^\#} \mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1),S} dy_1 \right]; \\
 a_1^{(2)} &\approx \frac{1}{S} \left[-ik\gamma \int_{\Sigma_{0,S}^\#} \mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1),S} dy_1 - \int_{\partial \mathcal{P}_\omega \cap \square_S \times [\delta, h_L + \delta]} \mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1),S} n_1 dy \right]; \\
 a_2^{(2)} &\approx \frac{1}{S} \left[|\mathcal{B}_{\omega,0,S}^H| - \int_{\partial \mathcal{P}_\omega \cap \square_S \times [\delta, h_L + \delta]} \mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1),S} n_1 dy \right]
 \end{aligned}$$

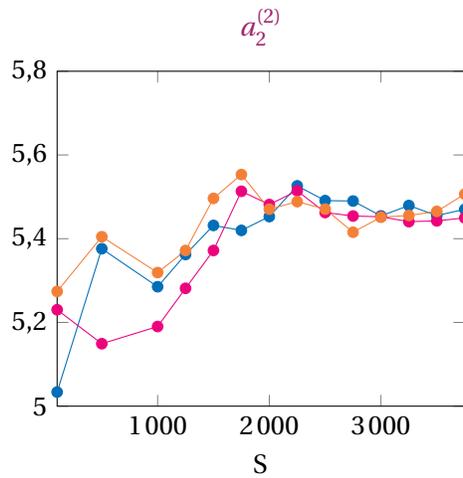
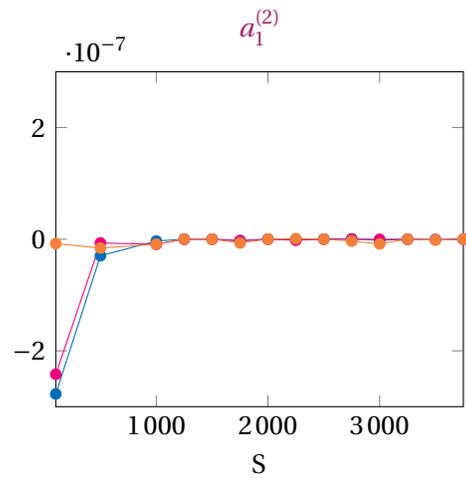
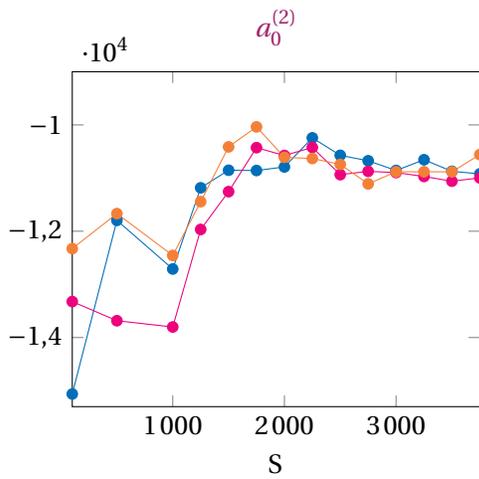
où $\mathcal{B}_{\omega,0,S}^H = (-\frac{S}{2}, \frac{S}{2}) \times (0, H) \setminus \overline{\mathcal{P}_\omega}$.

- 2^{ème} méthode : nous utilisons l'approximation de Monte Carlo en considérant S grand, T grand et M réalisations indépendantes et identiquement distribuées.

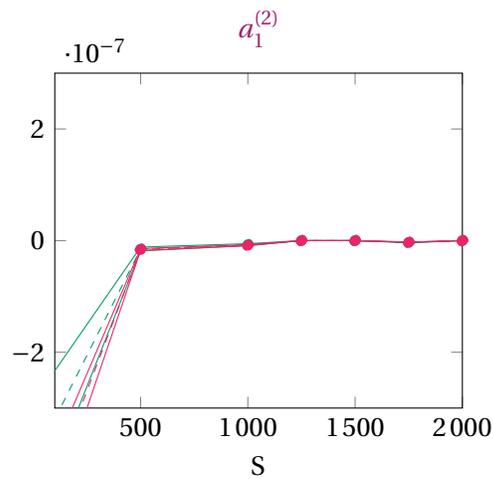
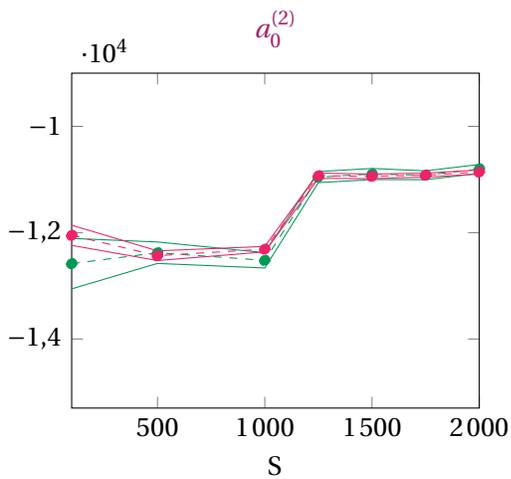
$$\begin{aligned}
 a_0^{(2)} &\approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{S} \left[k^2 |\mathcal{B}_{\omega,0,S}^H| - ik\gamma \int_{\Sigma_{0,S}^\#} \mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1),S} dy_1 \right]; \\
 a_1^{(2)} &\approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{S} \left[-ik\gamma \int_{\Sigma_{0,S}^\#} \mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1),S} dy_1 - \int_{\partial \mathcal{P}_\omega \cap \square_S \times [\delta, h_L + \delta]} \mathcal{U}_{\omega,0,T}^{(1),S} n_1 dy \right]; \\
 a_2^{(2)} &\approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{S} \left[|\mathcal{B}_{\omega,0,S}^H| - \int_{\partial \mathcal{P}_\omega \cap \square_S \times [\delta, h_L + \delta]} \mathcal{U}_{\omega,1,T}^{(1),S} n_1 dy \right]
 \end{aligned}$$

Nous vérifions la convergence des trois coefficients du modèle calculés pour les deux méthodes précédentes en utilisant $\gamma = 1$ et $\rho = 0.4$.

- Une réalisation sur une boîte de taille S de plus en plus grande.

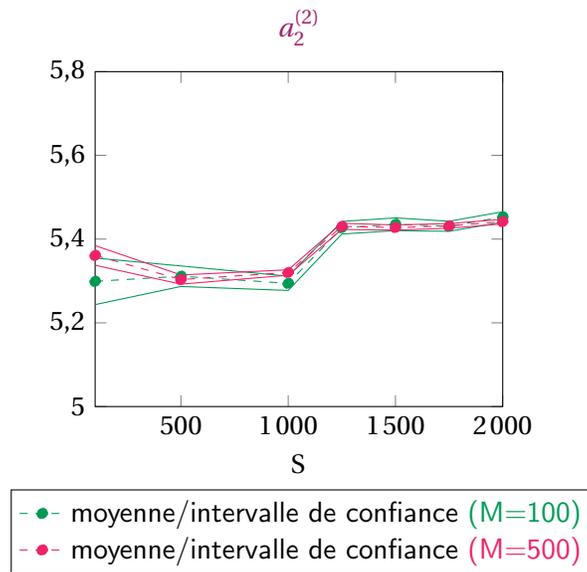


- Algorithme de Monte Carlo pour plusieurs réalisations.



-●- moyenne/intervalle de confiance (M=100)
-●- moyenne/intervalle de confiance (M=500)

-●- moyenne/intervalle de confiance (M=100)
-●- moyenne/intervalle de confiance (M=500)



Pour une réalisation sur une boîte de plus en plus grande les coefficients convergent pour une taille de boîte d'environ $S = 2000$. Pour la méthode de Monte Carlo la convergence est détectée pour une boîte plus petite : pour une boîte d'environ $S = 1250$. Il sera donc intéressant de jouer sur la taille de la boîte S et sur le nombre de réalisations M pour accélérer les convergences.

7.5.4 Validation qualitative

Nous sommes désormais en mesure de simuler le modèle effectif. Nous allons maintenant le valider numériquement.

Nous pouvons commencer par faire une validation qualitative, en traçant d'une part, la partie réelle du champ diffracté pour une solution de référence sur une grande boîte de taille $T = 2000$ avec des conditions $k_1 T$ quasi-périodique sur les bords latéraux et un opérateur de Dirichlet-to-Neumann sur une frontière fictive en $\{x_2 = \epsilon L\}$ avec $L = 20$ (Figure 7.34). Cette solution est obtenue à l'aide d'une méthode éléments finis. D'autre part, nous traçons la partie réelle du champ diffracté pour la solution du modèle effectif v_2^ϵ au dessus de $\Sigma_{\epsilon H}$ avec la formule analytique (11) pour des coefficients qui ont convergé, par exemple pour une boîte de taille $S = 1500$ (Figure 7.35).

Pour les Figures 7.34 et 7.35, nous considérons un taux de remplissage $\rho = 0.4$, une couche de taille $h_L = 10$, des particules de taille $\epsilon = 10^{-4}m$, une longueur d'onde de 15cm (fréquence de 2GHz), $\gamma = 1 + i$, $\theta = \pi/3$, $H = 13$ et $L = 20$. Nous avons effectué un zoom sur une partie de la solution.

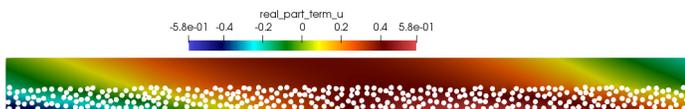


Figure 7.34 – Solution de référence $u_{d,\omega}^\epsilon$

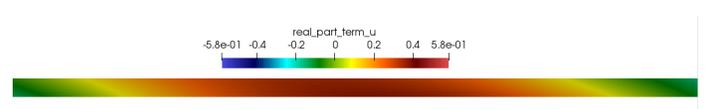


Figure 7.35 – Solution approchée $v_{2,d}^\epsilon$

En comparant la solution de référence et le modèle effectif, nous avons l'impression visuellement d'avoir construit

une bonne approximation.

7.5.5 Validation quantitative

Nous pouvons aussi faire une validation quantitative, en comparant le coefficient de réflexion obtenu avec la solution dite de référence donné par (2) au coefficient de réflexion de l'approximation 2 donné par (10), pour des coefficients qui ont convergés. Nous traçons l'erreur sur les coefficients de réflexion en fonction de ϵ .

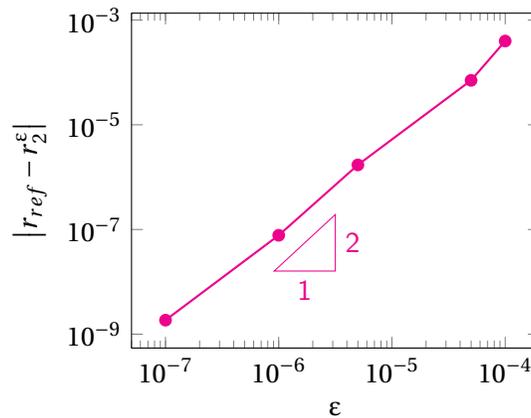


Figure 7.36 – Erreur pour le modèle effectif 2

Là encore la convergence est d'ordre 2.

7.6 Réduction de l'erreur de résonance

Nous reprenons le calcul des coefficients du modèle effectif dans le cas d'une condition de Neumann sur les particules.

Pour réduire l'erreur introduite par les conditions périodiques sur les bords latéraux du domaine de calcul, il est possible de calculer les profils sur des domaines de taille S et calculer les constantes en introduisant une fonction masque μ pour le calcul des intégrales. Nous calculons alors les intégrales sur un domaine de taille $S_m < S$ [Glo12]. Dans les figures 7.37, 7.38 et 7.39, nous regardons les coefficients en utilisant les fonctions masques suivantes :

- Les courbes en **bleu** correspondent aux résultats sans fonction masque.
- Les courbes en **rouge** correspondent aux résultats obtenus avec la fonction masque troncature : nous prenons $x = 3$,

$$\mu = \begin{cases} \frac{x}{2.0} & \text{si } -\frac{S}{x} \leq y_1 \leq \frac{S}{x}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Les courbes en **verte** correspondent aux résultats obtenus à l'aide de la fonction masque avec $x = 3$:

$$\mu = \begin{cases} \frac{x}{2.0} e^{-\frac{1}{(S/x)^2 - y_1^2}} & \text{si } -\frac{S}{x} \leq y_1 \leq \frac{S}{x}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Les courbes en **orange** correspondent aux résultats obtenus à l'aide de la fonction masque avec $x = 3$:

$$\mu = \frac{3x}{4} \begin{cases} 0 & \text{si } y_1 \leq -\frac{S}{x}, \\ \frac{3}{2} + \frac{3x}{2S}y_1 & \text{si } -\frac{S}{x} \leq y_1 \leq -\frac{S}{3x}, \\ 1 & \text{si } -\frac{S}{3x} \leq y_1 \leq \frac{S}{3x}, \\ \frac{3}{2} - \frac{3x}{2S}y_1 & \text{si } \frac{S}{3x} \leq y_1 \leq \frac{S}{x}, \\ 0 & \text{si } \frac{S}{x} \leq y_1. \end{cases}$$

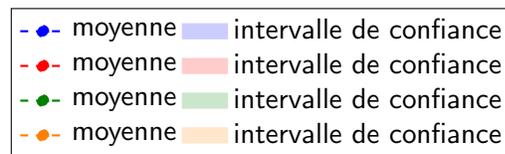
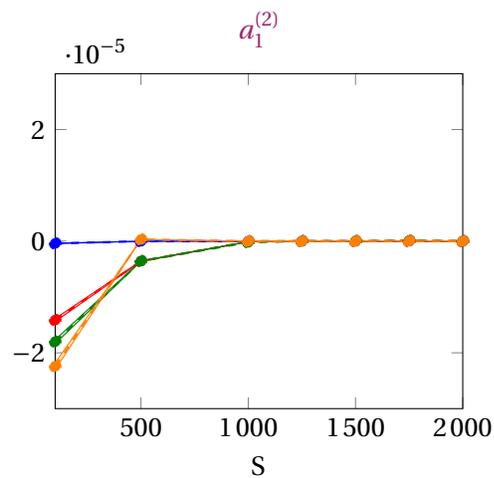
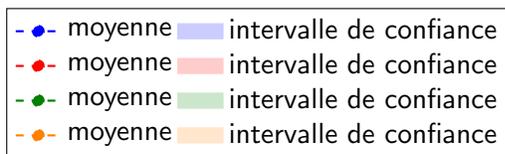
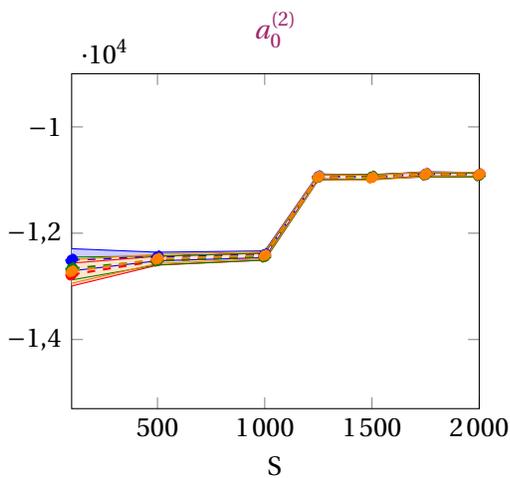
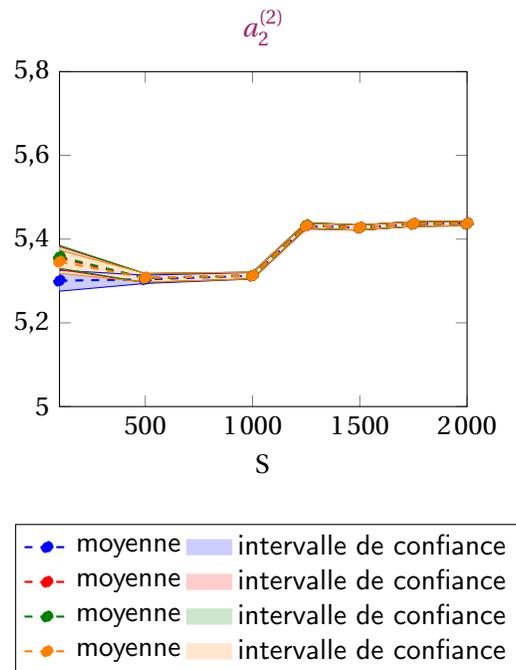


Figure 7.37 – Coefficient $a_0^{(2)}$ avec une fonction masque Figure 7.38 – Coefficient $a_1^{(2)}$ avec une fonction masque

Nous obtenons la même convergence pour toutes les fonctions masques.


 Figure 7.39 – Coefficient $a_2^{(2)}$ avec une fonction masque

7.7 Technique de réduction de variance

Nous reprenons le calcul des coefficients du modèle effectif dans le cas d'une condition de Neumann sur les particules.

Pour accélérer la convergence, nous pouvons essayer des techniques de réduction de variance comme celle de la variable antithétique décrite dans [BLBL16].

Dans notre cas, nous essayons la méthode suivante : nous considérons 1000 réalisations au départ. Puis pour réaliser la réduction de variance, dans les figures 7.40, 7.41 et 7.42 à chaque tirage, nous gardons la répartition seulement si le nombre de particules N_ω^{part} calculé est compris entre $0.95v$ et $1.05v$. En bleu, nous avons les résultats (moyenne et intervalle de confiance) pour 1000 réalisations et en rouge, nous avons les résultats (moyenne et intervalle de confiance) obtenus à l'aide de la méthode de réduction de variance considérée.

Dans les figures 7.43, 7.44 et 7.45 cette fois-ci nous gardons la répartition seulement si le nombre de particules N_ω^{part} calculé est compris entre $0.98v$ et $1.02v$. En vert, nous avons les résultats (moyenne et intervalle de confiance) obtenus à l'aide de la méthode de réduction de variance considérée.

La réduction de variance ne change pas l'intervalle de confiance. Il faudrait trouver une autre façon de procéder. Nous avons aussi essayé la méthode : pour une réalisation donnée, nous créons une autre répartition en bougeant d'une certaine distance les particules mais cela n'aboutit pas non plus.

Remarque 27. Il faudrait comparer 1000 réalisations tirées aléatoirement avec 1000 réalisations de bonne qualité (par exemple les 1000 meilleures parmi un tirage de 10^5 réalisations ; pour ces 10^5 réalisations, on ne résout aucune

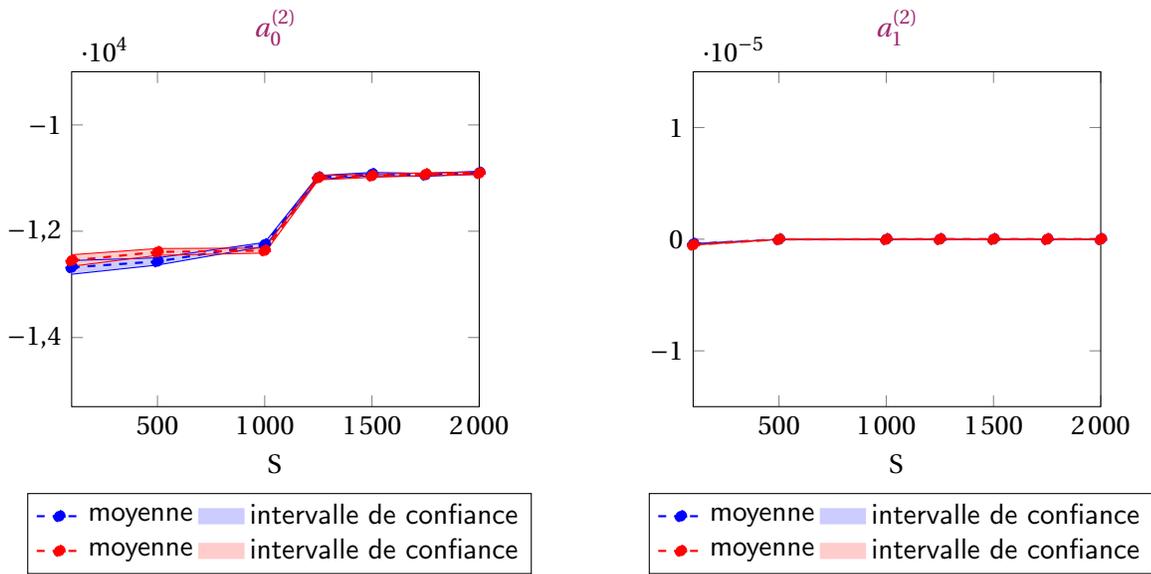


Figure 7.40 – Coefficient $a_0^{(2)}$ avec réduction variance 1 Figure 7.41 – Coefficient $a_1^{(2)}$ avec réduction variance 1

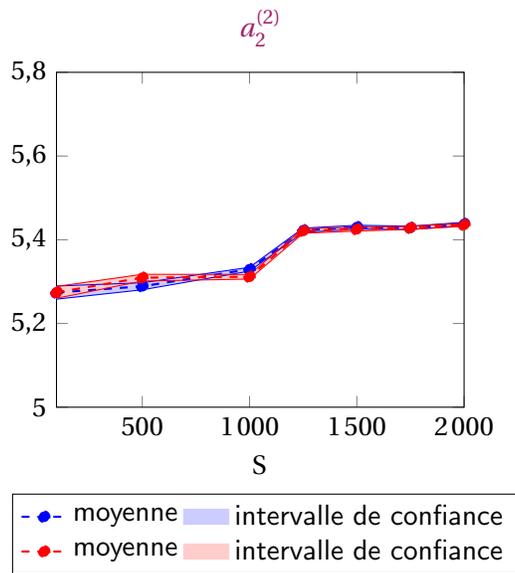
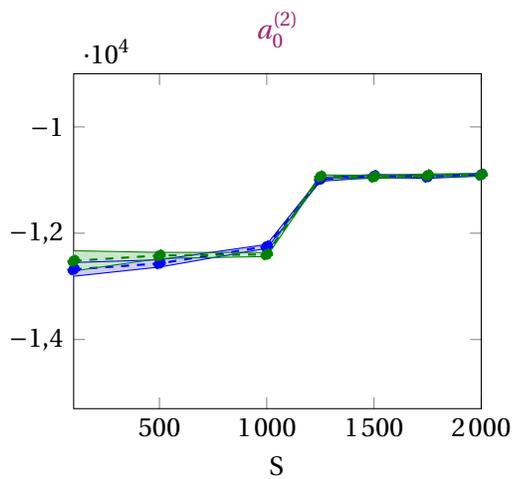
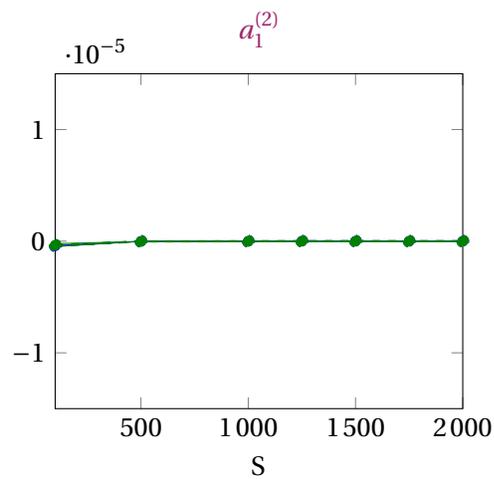


Figure 7.42 – Coefficient $a_2^{(2)}$ avec réduction variance 1

EDP, on les génère et on calcule juste la fraction volumique).

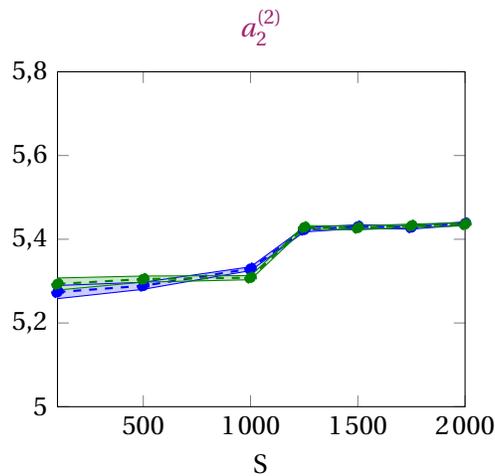


-●- moyenne intervalle de confiance
-●- moyenne intervalle de confiance



-●- moyenne intervalle de confiance
-●- moyenne intervalle de confiance

Figure 7.43 – Coefficient $a_0^{(2)}$ avec réduction variance 2 Figure 7.44 – Coefficient $a_1^{(2)}$ avec réduction variance 2



-●- moyenne intervalle de confiance
-●- moyenne intervalle de confiance

Figure 7.45 – Coefficient $a_2^{(2)}$ avec réduction variance 2

7.8 Évolution du coefficient de réflexion dans le cas d'une condition de Neumann

Dans les sections précédentes, nous avons construit et validé notre modèle. Nous allons maintenant, comme dans le chapitre 4, regarder l'évolution du coefficient de réflexion quand nous considérons une condition de Neumann sur les particules. Nous souhaitons mettre en évidence le passage d'une couche transparente (coefficient de réflexion

qui est égal à 0) à une structure conductrice (coefficient de réflexion qui vaut 1) par la présence de beaucoup de particules.

Dans un premier temps, nous comparons à taux de remplissage équivalent le cas périodique et le cas stationnaire ergodique. Puis nous regardons l'impact de l'épaisseur de la couche sur le coefficient de réflexion.

7.8.1 Comparaison avec le périodique

Nous pouvons, comparer une distribution périodique et une distribution aléatoire stationnaire et ergodique à taux de remplissage équivalent. Nous considérons dans les deux cas des particules de taille $\epsilon = 10^{-4}m$, $\gamma = 1$ et nous nous plaçons en incidence normale avec $\theta = 0$.

Nous nous plaçons dans le cas où le taux de remplissage $\rho = 0.39$ et la hauteur de la couche $h_L = 10$. Nous considérons, d'une part, une répartition en quinconce avec $\delta = 0.5$ et 4 couches. D'autre part, nous considérons une répartition aléatoire dans une boîte de taille $T = 3000$ et une distance minimale $\delta_{min} = 10^{-6}$ entre les particules.

Nous traçons dans les deux cas, l'évolution du coefficient de réflexion en fonction de la longueur d'onde λ .

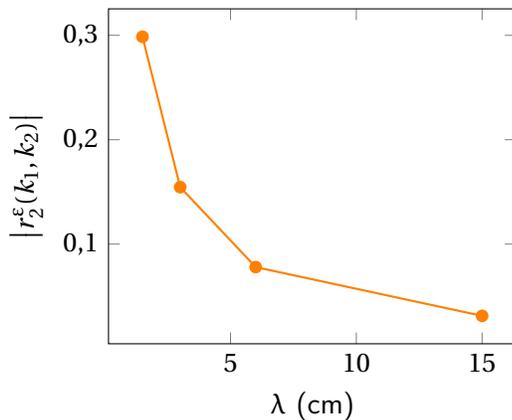


Figure 7.46 – Évolution du coefficient de réflexion en fonction de la longueur d'onde pour une répartition en quinconce

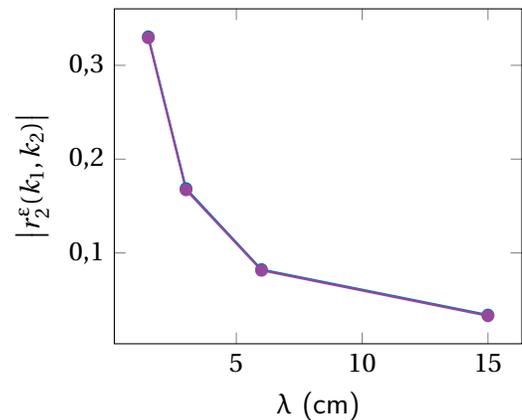


Figure 7.47 – Évolution du coefficient de réflexion en fonction de la longueur d'onde pour une répartition stationnaire ergodique

Nous remarquons que, à taux de remplissage équivalent, les deux répartition sont comparables.

7.8.2 Impact de l'épaisseur de la couche

Nous regardons l'impact de l'épaisseur de la couche h_L . Pour cela, nous traçons l'évolution du coefficient de réflexion en fonction de la taille de la couche h_L pour une longueur d'onde $\lambda = 15cm$ (une fréquence de 2GHz), des particules de taille $\epsilon = 10^{-4}m$, une boîte de taille $T = 3000$, $\gamma = 1$ et $\theta = 0$. Nous avons considéré un taux de remplissage $\rho = 0.4$ et une distance minimale entre les particules $\delta_{min} = 10^{-6} m$.

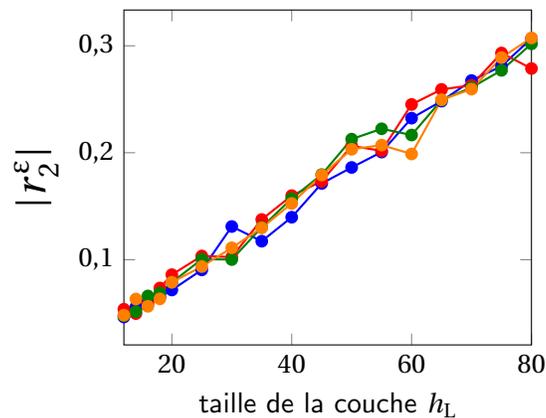


Figure 7.48 – Évolution du coefficient de réflexion en fonction de h_L

Nous observons une augmentation du coefficient de réflexion mais pour observer la transition d'un coefficient de réflexion égal à 0 à un coefficient de 1, il faudrait considérer une très grosse couche ce qui ne correspond pas forcément à la physique considérée.

7.8.3 Suppression de la contrainte de distance minimale

Même si la justification n'est plus possible, nous allons ici supprimer la contrainte de distance minimale entre les particules. L'apparition d'amas est alors autorisé.

Voici deux exemples de ce type de milieu.



Figure 7.49 – Exemple d'amas 1



Figure 7.50 – Exemple d'amas 2

Dans la figure [7.51](#) nous traçons l'évolution du coefficient de réflexion pour la solution de référence en fonction du taux de remplissage. Le taux de remplissage est obtenu à l'aide de la formule

$$\rho_{eff} = \frac{\text{Aire des amas}}{\text{Aire de la bande}}$$

Nous considérons une longueur d'onde de 15cm (fréquence de 2GHz), $\gamma = 1$, $\theta = 0$, des particules de taille $\epsilon = 10^{-4}$ m, une boîte de taille $T = 100\epsilon$ m et la hauteur de la couche $\epsilon h_L = 10\epsilon$ m.

Nous obtenons la transition d'une structure transparente vers une structure conductrice.

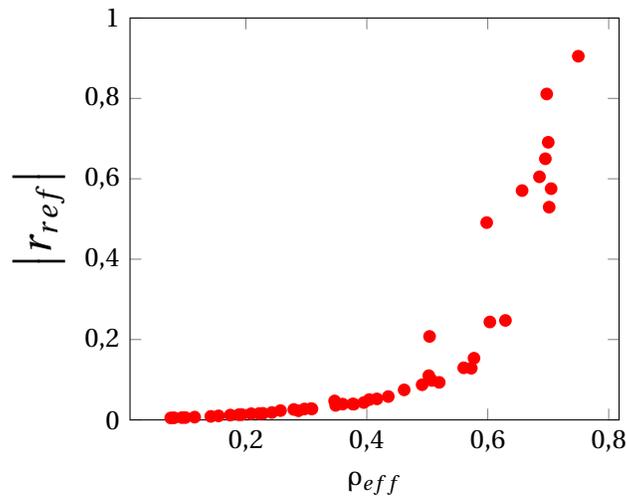


Figure 7.51 – Évolution du coefficient de réflexion en fonction de ρ_{eff} pour des amas

Notons que pour que le modèle soit applicable, les amas doivent être beaucoup plus petit que la longueur d'onde λ .

Dans la figure [7.52](#), nous traçons alors l'erreur sur le coefficient de réflexion entre la solution de référence et notre modèle, pour une répartition, en fonction de la longueur d'onde. Pour réaliser cette courbe, nous considérons une boîte de taille $T = 100$, une taille de couche $h_L = 10$, un taux de remplissage $\rho_{eff} = 0.80475$. Dans cette simulation, la taille de l'amas le plus grand est de 0.83cm.

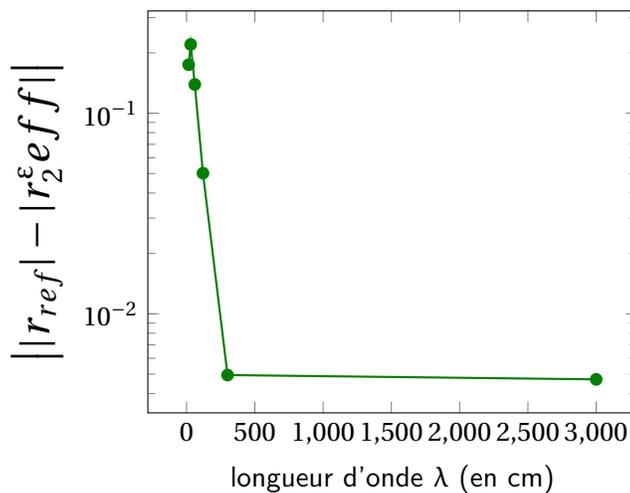


Figure 7.52 – Erreur sur le coefficient de réflexion en fonction de la longueur d'onde

Comme dans ce cas le plus gros amas est de taille 0.83cm de long, plus la longueur d'onde va augmenter, plus le modèle sera précis.

Troisième partie

Cas tri-dimensionnel d'une répartition périodique des particules

Chapitre 8

Présentation du modèle

Sommaire

8.1 Géométrie	209
8.2 Le problème de diffraction	211
8.3 Condition d'onde sortante et opérateur de Dirichlet-to-Neumann	214
8.3.1 Décomposition modale et opérateur DtN	217
8.3.2 Application à notre problème	220

Dans cette partie, nous nous intéressons au problème 3D avec une onde plane incidente et où la couche de particules est périodique.

Dans ce chapitre, nous commençons par présenter la géométrie que l'on considère et nous introduisons le problème de diffraction par une couche périodique formée de nanoparticules de taille supposée petite, notée ε , devant la longueur d'onde quand l'onde incidente est une onde plane. Comme pour l'équation de Helmholtz traitée dans le chapitre 2, il est alors possible de réécrire le problème dans une cellule de périodicité, qui est ici une demi-bande, avec des conditions de quasi-périodicité sur les bords. Il est également possible de restreindre le problème à un domaine borné en utilisant une condition transparente qui correspond à la condition de rayonnement à distance finie. Nous faisons référence à un certain nombre de travaux qui établissent le caractère bien posé de ce problème. Nous faisons ensuite la conjecture que la constante de stabilité est indépendante de la taille des particules.

8.1 Géométrie

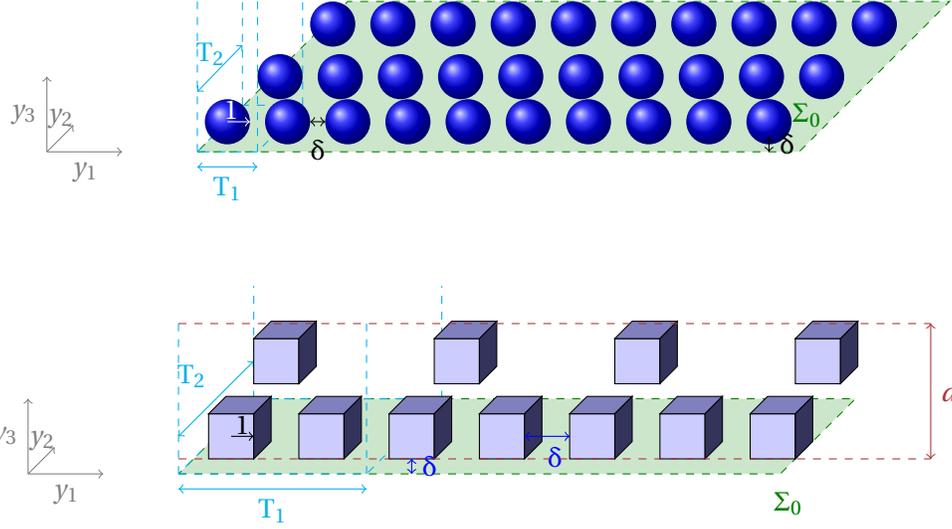
Nous considérons le plan infini, noté $\Sigma_0 := \{x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 = 0\}$, recouvert d'une couche mince de particules.

Commençons par décrire les particules. Nous supposons qu'une particule est un ouvert borné connexe \mathcal{O} de rayon $r_{\mathcal{O}}$ normalisé à 1 où $r_{\mathcal{O}}$ est défini par $r_{\mathcal{O}} := \frac{1}{2} \sup_{x,y \in \mathcal{O}} |x - y|$. Notons que $r_{\mathcal{O}}$ correspond à la définition classique du rayon quand \mathcal{O} est une sphère.

Soit $(\mathbf{y}_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ les centres des particules tels que $\forall m \neq m', d(\mathcal{O} + \mathbf{y}_m, \mathcal{O} + \mathbf{y}_{m'}) > \delta$ où δ est la distance minimale entre les particules ; cette distance est supposée $\delta > 0$. Nous supposons que l'ensemble des particules $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2 \times (\delta, d + \delta)$, où d est la taille de la couche. Par conséquent, l'ensemble des particules est inclus dans une couche infinie d'épaisseur

d. De plus, \mathcal{P} est supposé dans cette partie T_1 -périodique dans la direction y_1 et T_2 -périodique dans la direction y_2 :

$$(y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{P} \iff (y_1 + T_1, y_2 + T_2, y_3) \in \mathcal{P} .$$



Nous notons $\mathcal{P}_\# := \mathcal{P} \cap (0, T_1) \times (0, T_2) \times (\delta, d + \delta)$ une période de l'ensemble. Nous avons évidemment

$$\mathcal{P} = \bigcup_{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2} (\mathcal{P}_\# + T_1 m_1 \vec{e}_1 + T_2 m_2 \vec{e}_2) .$$

Soit ε la taille réelle des particules. L'ensemble des particules à l'échelle ε est noté $\mathcal{P}^\varepsilon := \varepsilon \mathcal{P}$.

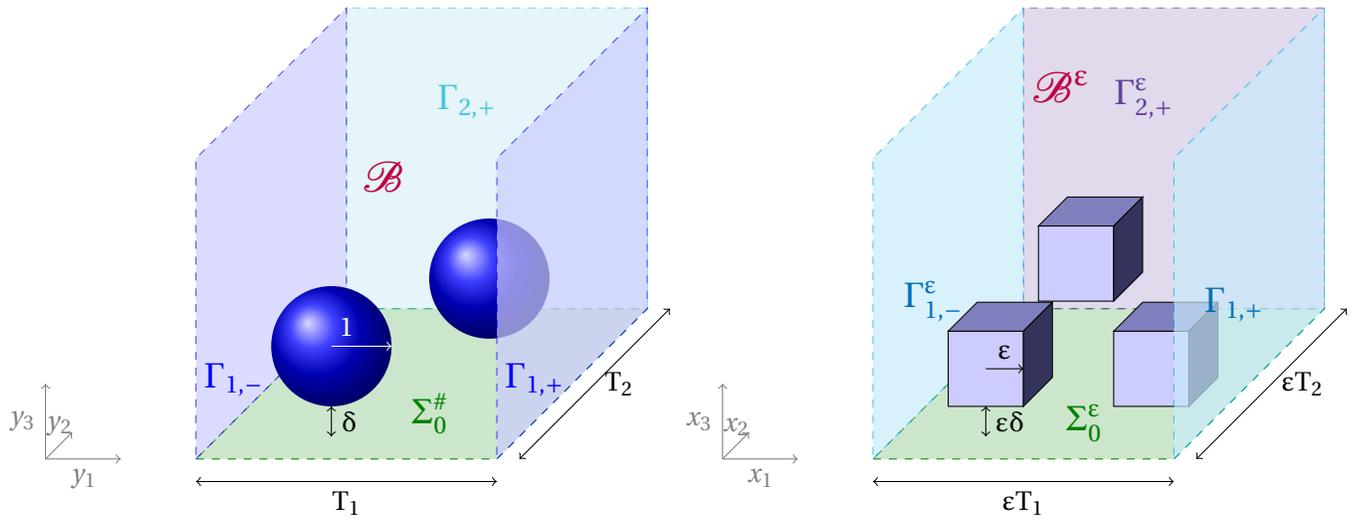
On introduit le domaine $\mathcal{D} := \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \setminus \overline{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{D}^\varepsilon := \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \setminus \overline{\mathcal{P}^\varepsilon}$.

Une période de \mathcal{D} , est notée $\mathcal{B} := (0, T_1) \times (0, T_2) \times \mathbb{R}_+ \setminus \overline{\mathcal{P}_\#}$ avec $\Sigma_0^\# := \{y_1 \in (0, T_1), y_2 \in (0, T_2), y_3 = 0\}$ et on note les bords latéraux du domaine :

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,+} &= \{y_1 = T_1, y_2 \in (0, T_2), y_3 \in \mathbb{R}_+\} & \text{et} & & \Gamma_{1,-} &= \{y_1 = 0, y_2 \in (0, T_2), y_3 \in \mathbb{R}_+\} \\ \Gamma_{2,+} &= \{y_1 \in (0, T_1), y_2 = T_2, y_3 \in \mathbb{R}_+\} & \text{et} & & \Gamma_{2,-} &= \{y_1 \in (0, T_1), y_2 = 0, y_3 \in \mathbb{R}_+\} . \end{aligned}$$

Quant au domaine remis à l'échelle ε , une période sera notée $\mathcal{B}^\varepsilon := (0, \varepsilon T_1) \times (0, \varepsilon T_2) \times \mathbb{R}_+ \setminus \overline{\mathcal{P}_\#^\varepsilon}$ avec $\Sigma_0^\varepsilon := \{x_1 \in (0, \varepsilon T_1), x_2 \in (0, \varepsilon T_2), x_3 = 0\}$ et les bords latéraux

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,+}^\varepsilon &= \{x_1 = \varepsilon T_1, x_2 \in (0, \varepsilon T_2), x_3 \in \mathbb{R}_+\} & \text{et} & & \Gamma_{1,-}^\varepsilon &= \{x_1 = 0, x_2 \in (0, \varepsilon T_2), x_3 \in \mathbb{R}_+\} \\ \Gamma_{2,+}^\varepsilon &= \{x_1 \in (0, \varepsilon T_1), y_2 = \varepsilon T_2, x_3 \in \mathbb{R}_+\} & \text{et} & & \Gamma_{2,-}^\varepsilon &= \{x_1 \in (0, \varepsilon T_1), x_2 = 0, x_3 \in \mathbb{R}_+\} . \end{aligned}$$



8.2 Le problème de diffraction

Équations de Maxwell

On note $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un point du domaine. Le milieu est éclairé par une source harmonique qui génère des champs électromagnétiques, notés $\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{H}_{inc}(\mathbf{x})$, appelés champs incidents. Ces champs incidents vérifient les équations de Maxwell en l'absence de particules

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{H}_{inc} - ik\mathbf{E}_{inc} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{rot} \mathbf{E}_{inc} + ik\mathbf{H}_{inc} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{div} \mathbf{E}_{inc} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{div} \mathbf{H}_{inc} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (1)$$

et sont donnés par

$$\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}_{inc}\cdot\mathbf{x}} \hat{\mathbf{e}} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_{inc}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{e}} \times \frac{\mathbf{k}_{inc}}{k} e^{i\mathbf{k}_{inc}\cdot\mathbf{x}} \quad (2)$$

dont le vecteur d'onde s'écrit $\mathbf{k}_{inc} = k(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) = (k_1, k_2, k_3) = k(\hat{k}_1, \hat{k}_2, \hat{k}_3)$ avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ et $k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$. $\theta \in \mathbb{R}$ correspond à l'angle d'incidence et φ l'angle azimutal repérant le plan d'incidence par rapport à l'axe x_1 .

En polarisation TM, $\hat{\mathbf{e}}$ est défini par $\hat{\mathbf{e}} = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta)$ et nous avons $\hat{\mathbf{e}} \times \frac{\mathbf{k}_{inc}}{k} = (\sin\varphi, -\cos\varphi, 0)$.

En polarisation TE, $\hat{\mathbf{e}}$ est défini par $\hat{\mathbf{e}} = (\sin\varphi, -\cos\varphi, 0)$ et nous avons $\hat{\mathbf{e}} \times \frac{\mathbf{k}_{inc}}{k} = (-\cos\theta\cos\varphi, -\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$.

Dans la suite, nous nous intéressons à la solution des équations de Maxwell harmonique en temps $\mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x})e^{i\omega t}$ et

$\mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{x})e^{i\omega t}$ où $\mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x})$ et $\mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{x})$ sont solutions des équations de Maxwell ($\mathbf{H}^\varepsilon = \eta_0 \mathbf{H}^\varepsilon$ avec η_0 l'impédance relative)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot} \mathbf{H}^\varepsilon - ik\mathbf{E}^\varepsilon = f & \text{dans } \mathcal{D}^\varepsilon \\ \mathbf{rot} \mathbf{E}^\varepsilon + ik\mathbf{H}^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathcal{D}^\varepsilon \\ \mathbf{div} \mathbf{E}^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathcal{D}^\varepsilon \\ \mathbf{div} \mathbf{H}^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathcal{D}^\varepsilon \end{array} \right. \quad (3)$$

avec $f \in L^2(\mathcal{D}^\varepsilon)$ est une fonction source donnée dont le support est éloigné de la couche de particules et $\mathbf{div} f = 0$. \mathbf{E}^ε est dit champ total et se décompose $\mathbf{E}^\varepsilon = \mathbf{E}_{inc} + \mathbf{E}_d^\varepsilon$ où \mathbf{E}_d^ε est le champ diffracté par les particules et le plan Σ_0 en présence de l'onde incidente \mathbf{E}_{inc} . De même, \mathbf{H}^ε est dit champ total et se décompose $\mathbf{H}^\varepsilon = \mathbf{H}_{inc} + \mathbf{H}_d^\varepsilon$ où \mathbf{H}_d^ε est le champ diffracté par les particules et le plan Σ_0 en présence de l'onde incidente \mathbf{H}_{inc} .

Explicitons maintenant les conditions aux bords.

Condition de frontière d'impédance sur Σ_0

Sur le bord Σ_0 , nous considérons une condition de Leontovitch standard

$$(\vec{e}_3 \times \mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x})) \times \vec{e}_3 = \mathbf{Z} \vec{e}_3 \times \mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \Sigma_0, \quad (4)$$

où $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z^{(1)} & 0 \\ 0 & Z^{(2)} \end{pmatrix}$ désigne la matrice d'impédance associée à la surface avec $(Z^{(1)}, Z^{(2)}) \in \mathbb{C}$, $\Re(Z^{(1)}) > 0$ et $\Re(Z^{(2)}) > 0$.

Nous notons dans la suite $\mathbf{E}_T^\varepsilon(\mathbf{x}) = (\vec{e}_3 \times \mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x})) \times \vec{e}_3$.

Condition de conducteur parfait sur les particules \mathcal{D}^ε

A la frontière des particules $\partial\mathcal{D}^\varepsilon$, nous considérons des conditions de frontières parfaitement conductrices

$$\vec{n} \times \mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}^\varepsilon \quad (5)$$

où \vec{n} désigne le vecteur normal à la frontière $\partial\mathcal{D}^\varepsilon$ extérieur à \mathcal{D}^ε . Nous déduisons [\[ACL18\]](#)

$$\vec{n} \cdot \mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}^\varepsilon \quad (6)$$

Condition de rayonnement ou condition d'onde sortante

Le problème doit être complété d'une condition de rayonnement appropriée pour assurer le caractère bien posé du problème. Sans celle-ci, il est impossible de faire la différence entre une onde qui vient de l'infini (onde entrante) et une onde qui va vers l'infini (onde sortante). Ici, l'onde diffractée $(\mathbf{E}_d^\varepsilon, \mathbf{H}_d^\varepsilon)$ avec $\mathbf{E}_d^\varepsilon := \mathbf{E}^\varepsilon - \mathbf{E}_{inc}$ et $\mathbf{H}_d^\varepsilon := \mathbf{H}^\varepsilon - \mathbf{H}_{inc}$ par notre structure doit se comporter comme une onde sortante et doit être bornée en x_3 . C'est cette condition qui l'assure.

Pour un objet fini dans \mathbb{R}^3 , cette condition de rayonnement s'appelle condition de Silver-Müller. Dans notre cas, la définition d'une telle condition n'est pas simple pour plusieurs raisons : la première est que la solution ne se

comporte pas de la même façon dans la direction de la couche et dans la direction orthogonale. La deuxième est que l'onde incidente n'est évidemment pas L^2 dans la direction de la couche, l'onde diffractée ne le sera pas non plus. Ceci rend l'expression de la condition de rayonnement à l'aide d'une transformée de Fourier plus délicate.

Dans le cas où l'onde incidente est plane et la couche périodique, il est souvent admis que l'onde diffractée \mathbf{E}_d^ε (resp. \mathbf{H}_d^ε) est $(k_1\varepsilon T_1, k_2\varepsilon T_2)$ quasi-périodique dans la direction de la couche (c'est-à-dire $e^{-ik_1x_1}\mathbf{E}_d^\varepsilon(\mathbf{x})$ est εT_1 périodique et $e^{-ik_2x_2}\mathbf{E}_d^\varepsilon(\mathbf{x})$ est εT_2 périodique, voir Définition 99) comme l'est l'onde incidente. Il suffit ensuite d'imposer une condition de rayonnement dans une bande, ce qui est plus simple [Bao97, JLL⁺22, Dob94, Abb93, Kim17].

Nous admettons dans cette partie que le champ diffracté est $(k_1\varepsilon T_1, k_2\varepsilon T_2)$ quasi-périodique. La condition d'onde sortante est explicitée dans la suite.

Définition 99

Une fonction \mathbf{u} est dite $(k_1\varepsilon T_1, k_2\varepsilon T_2)$ quasi-périodique si \mathbf{u} est $k_1\varepsilon T_1$ quasi-périodique par rapport à $x_1 : \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{D}^\varepsilon$

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x_1 + \varepsilon T_1, x_2, x_3) = e^{ik_1\varepsilon T_1} \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) \\ \partial_{x_1} \mathbf{u}(x_1 + \varepsilon T_1, x_2, x_3) = e^{ik_1\varepsilon T_1} \partial_{x_1} \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (7)$$

et \mathbf{u} est $k_2\varepsilon T_2$ quasi-périodique par rapport à $x_2 : \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{D}^\varepsilon$

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x_1, x_2 + \varepsilon T_2, x_3) = e^{ik_2\varepsilon T_2} \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) ; \\ \partial_{x_2} \mathbf{u}(x_1, x_2 + \varepsilon T_2, x_3) = e^{ik_2\varepsilon T_2} \partial_{x_2} \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) . \end{cases} \quad (8)$$

Conjecture 2

L'onde plane incidente \mathbf{E}_{inc} étant $(k_1\varepsilon T_1, k_2\varepsilon T_2)$ quasi-périodique, le champ diffracté \mathbf{E}_d^ε est $(k_1\varepsilon T_1, k_2\varepsilon T_2)$ quasi-périodique.

Problème de diffraction

Le problème de diffraction s'écrit finalement :

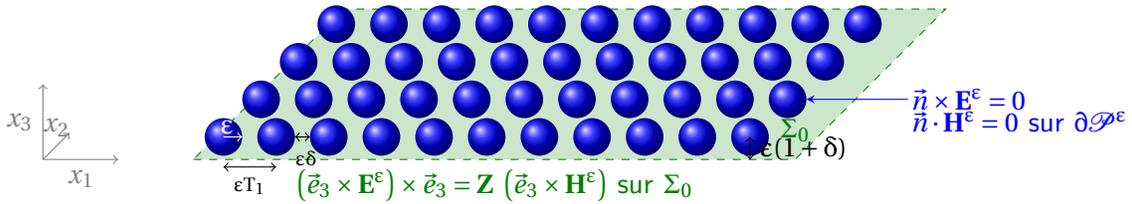
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{H}^\varepsilon - ik\mathbf{E}^\varepsilon = f \quad \text{dans } \mathcal{D}^\varepsilon , \\ \mathbf{rot} \mathbf{E}^\varepsilon + ik\mathbf{H}^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}^\varepsilon , \\ \mathbf{div} \mathbf{E}^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}^\varepsilon , \\ \mathbf{div} \mathbf{H}^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}^\varepsilon , \\ \vec{n} \times \mathbf{E}^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}^\varepsilon , \\ \vec{n} \cdot \mathbf{H}^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}^\varepsilon , \\ (\vec{e}_3 \times \mathbf{E}^\varepsilon) \times \vec{e}_3 = \mathbf{Z} \vec{e}_3 \times \mathbf{H}^\varepsilon \quad \text{sur } \Sigma_0 , \\ \mathbf{E}^\varepsilon - \mathbf{E}_{inc} \text{ est une onde sortante } , \\ \mathbf{H}^\varepsilon - \mathbf{H}_{inc} \text{ est une onde sortante } . \end{array} \right. \quad (\text{PEH}_t^\varepsilon)$$

Cette formulation au premier ordre n'est pas toujours adaptée à l'analyse. Nous introduisons la formulation équivalente au second ordre en champ électrique \mathbf{E}^ε

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot rot E}^\varepsilon - k^2 \mathbf{E}^\varepsilon = f \quad \text{dans } \mathcal{D}^\varepsilon, \\ \mathbf{div E}^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}^\varepsilon, \\ \vec{n} \times \mathbf{E}^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{D}^\varepsilon, \\ -\vec{e}_3 \times \mathbf{rot E}^\varepsilon = ik\mathbf{Z}^{-1} (\vec{e}_3 \times \mathbf{E}^\varepsilon) \times \vec{e}_3 \quad \text{sur } \Sigma_0 \\ \mathbf{E}^\varepsilon - \mathbf{E}_{inc} \text{ est sortant} \end{array} \right. . \quad (\text{PE}_t^\varepsilon)$$



$$\begin{aligned} \mathbf{rot H}^\varepsilon - ik\mathbf{E}^\varepsilon &= f \\ \mathbf{rot E}^\varepsilon + ik\mathbf{H}^\varepsilon &= 0 \end{aligned}$$



8.3 Condition d'onde sortante et opérateur de Dirichlet-to-Neumann

Nous allons dans cette section rendre plus explicite la notion d'onde sortante pour notre problème. Commençons par introduire quelques notations.

Par quasi-périodicité, nous pouvons nous ramener à un problème posé dans la bande

$$\mathcal{B}^\varepsilon = (0, \varepsilon T_1) \times (0, \varepsilon T_2) \times \mathbb{R}_+ \setminus \overline{\mathcal{P}_\#^\varepsilon}.$$

Nous introduisons une frontière fictive située au dessus de la couche de particules notée

$$\Sigma_{\varepsilon L} := \{(x_1, x_2, x_3) \text{ tel que } x_1 \in (0, \varepsilon T_1), x_2 \in (0, \varepsilon T_2) \text{ et } x_3 = \varepsilon L\}, \quad L > (d + \delta).$$

et nous notons

$$\mathcal{B}_0^{\varepsilon L} := (0, \varepsilon T_1) \times (0, \varepsilon T_2) \times (0, \varepsilon L) \setminus \overline{\mathcal{P}_\#^\varepsilon}$$

le domaine situé en dessous de $\Sigma_{\varepsilon L}$ avec

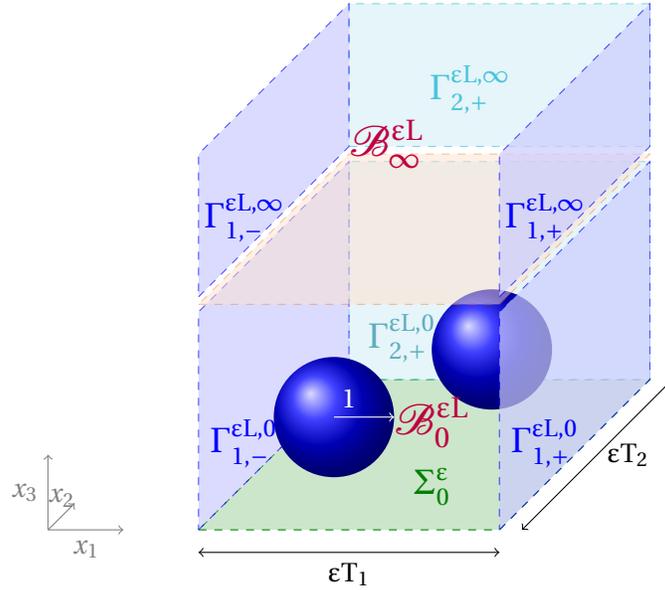
$$\begin{aligned} \Gamma_{1,-}^{\varepsilon L,0} &:= \{x_1 = 0, x_2 \in (0, \varepsilon T_2), x_3 \leq \varepsilon L\} & \text{et} & \quad \Gamma_{1,+}^{\varepsilon L,0} := \{x_1 = \varepsilon T_1, x_2 \in (0, \varepsilon T_2), x_3 \leq \varepsilon L\}, \\ \Gamma_{2,-}^{\varepsilon L,0} &:= \{x_1 \in (0, \varepsilon T_1), x_2 = 0, x_3 \leq \varepsilon L\} & \text{et} & \quad \Gamma_{2,+}^{\varepsilon L,0} := \{x_1 \in (0, \varepsilon T_1), x_2 = \varepsilon T_2, x_3 \leq \varepsilon L\}; \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon L} := (0, \varepsilon T_1) \times (0, \varepsilon T_2) \times (\varepsilon L, +\infty)$$

le domaine situé au dessus de $\Sigma_{\varepsilon L}$ avec

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,-}^{\varepsilon L, \infty} &:= \{x_1 = 0, x_2 \in (0, \varepsilon T_2), x_3 \geq \varepsilon L\} & \text{et} & \quad \Gamma_{1,+}^{\varepsilon L, \infty} := \{x_1 = \varepsilon T_1, x_2 \in (0, \varepsilon T_2), x_3 \geq \varepsilon L\}, \\ \Gamma_{2,-}^{\varepsilon L, \infty} &:= \{x_1 \in (0, \varepsilon T_1), x_2 = 0, x_3 \geq \varepsilon L\} & \text{et} & \quad \Gamma_{2,+}^{\varepsilon L, \infty} := \{x_1 \in (0, \varepsilon T_1), x_2 = \varepsilon T_2, x_3 \geq \varepsilon L\}. \end{aligned}$$



Nous notons dans la suite $\vec{k} = (k_1, k_2)$.

Nous introduisons également, pour $J \in \{0, \infty\}$

$$\begin{aligned} H_{\vec{k}}^1(\mathcal{B}_J^{\varepsilon L}) &:= \left\{ \mathbf{U} \in H^1(\mathcal{B}_J^{\varepsilon L}) \text{ telle que pour } j = 1, 2, \mathbf{U}|_{\Gamma_{j,+}^{\varepsilon L, J}} = \exp(ik_j \varepsilon T_j) \mathbf{U}|_{\Gamma_{j,-}^{\varepsilon L, J}} \right\}; \\ H(\mathbf{rot}, \mathcal{B}_J^{\varepsilon L}) &:= \left\{ \mathbf{U} \in L^2(\mathcal{B}_J^{\varepsilon L}), \mathbf{rot} \mathbf{U} \in L^2(\mathcal{B}_J^{\varepsilon L}) \right\}; \\ H(\mathbf{div}, \mathcal{B}_J^{\varepsilon L}) &:= \left\{ \mathbf{U} \in L^2(\mathcal{B}_J^{\varepsilon L}), \mathbf{div} \mathbf{U} \in L^2(\mathcal{B}_J^{\varepsilon L}) \right\}; \\ H_{\vec{k}}(\mathbf{rot}, \mathcal{B}_J^{\varepsilon L}) &:= \left\{ \mathbf{U} \in H(\mathbf{rot}, \mathcal{B}_J^{\varepsilon L}) \text{ telle que pour } j = 1, 2, \mathbf{U}|_{\Gamma_{j,+}^{\varepsilon L, J}} = \exp(ik_j \varepsilon T_j) \mathbf{U}|_{\Gamma_{j,-}^{\varepsilon L, J}} \right\}; \\ H_{\vec{k}}(\mathbf{div}, \mathcal{B}_J^{\varepsilon L}) &:= \left\{ \mathbf{U} \in H(\mathbf{div}, \mathcal{B}_J^{\varepsilon L}) \text{ telle que pour } j = 1, 2, \mathbf{U}|_{\Gamma_{j,+}^{\varepsilon L, J}} = \exp(ik_j \varepsilon T_j) \mathbf{U}|_{\Gamma_{j,-}^{\varepsilon L, J}} \right\}; \end{aligned}$$

Il est utile pour la suite d'introduire les composantes transverses d'une fonction vectorielle \mathbf{U} notée \mathbf{U}_T :

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = (U^{(1)}, U^{(2)}, U^{(3)})^t(\mathbf{x}) = (\mathbf{U}_T^t, U^{(3)})^t(\mathbf{x}).$$

et les notations :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_T &= (U^{(1)}, U^{(2)})^t \quad \text{et} \quad \mathbf{U}_T^\perp = (U^{(2)}, -U^{(1)})^t; \\ \nabla_T U^{(3)} &= (\partial_{x_1} U^{(3)}, \partial_{x_2} U^{(3)})^t \quad \text{et} \quad \nabla_T^\perp U^{(3)} = (\partial_{x_2} U^{(3)}, -\partial_{x_1} U^{(3)})^t; \\ \nabla_T \cdot \mathbf{U}_T &= \partial_{x_1} U^{(1)} + \partial_{x_2} U^{(2)}; \\ \Delta_T U^{(3)} &= \partial_{x_1}^2 U^{(3)} + \partial_{x_2}^2 U^{(3)}; \\ \mathbf{rot}_T \mathbf{U}_T &= \partial_{x_1} U^{(2)} - \partial_{x_2} U^{(1)}. \end{aligned}$$

Nous énonçons maintenant des résultats sur les applications traces des éléments de $H(\mathbf{rot})$ qui peuvent être trouvés dans le livre [ACL18], résultats que nous avons étendus au cadre quasi-périodique.

Nous notons

- γ_T l'opérateur de trace tangentielle

$$\begin{aligned} \gamma_T : H_{\vec{k}}^1(\mathcal{B}_j^{\varepsilon L}) &\rightarrow L^2(\mathcal{B}_j^{\varepsilon L}) \\ \mathbf{f} &\mapsto \mathbf{f} \times \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} f^{(2)} \\ -f^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec $H_{\perp, \vec{k}}^{1/2} = \gamma_T(H_{\vec{k}}^1(\mathcal{B}_j^{\varepsilon L}))$;

- Π_T l'opérateur de trace tangentielle tournée

$$\begin{aligned} \Pi_T : H_{\vec{k}}^1(\mathcal{B}_j^{\varepsilon L}) &\rightarrow L^2(\mathcal{B}_j^{\varepsilon L}) \\ \mathbf{f} &\mapsto \vec{e}_3 \times (\mathbf{f} \times \vec{e}_3) = \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec $H_{\parallel, \vec{k}}^{1/2} = \Pi_T(H_{\vec{k}}^1(\mathcal{B}_j^{\varepsilon L}))$.

De plus $H_{\perp, \vec{k}}^{-1/2} = (H_{\perp, \vec{k}}^{1/2})'$ et $H_{\parallel, \vec{k}}^{-1/2} = (H_{\parallel, \vec{k}}^{1/2})'$.

Comme les champs ne sont pas H^1 , il est essentiel de définir

$$H_{\parallel, \vec{k}}^{-1/2}(\mathbf{div}_T, \Sigma_{\varepsilon L}) = \gamma_T(H_{\vec{k}}(\mathbf{rot}, \mathcal{B}_j^{\varepsilon L}))$$

et

$$H_{\perp, \vec{k}}^{-1/2}(\mathbf{rot}_T, \Sigma_{\varepsilon L}) = \Pi_T(H_{\vec{k}}(\mathbf{rot}, \mathcal{B}_j^{\varepsilon L})).$$

Le nom étrange donné à ces espaces vient de la caractérisation suivante

$$H_{\parallel, \vec{k}}^{-1/2}(\mathbf{div}_T, \Sigma_{\varepsilon L}) = \left\{ \mathbf{f} \in H_{\parallel, \vec{k}}^{-1/2}(\Sigma_{\varepsilon L}), \mathbf{div}_T \mathbf{f}_T \in H^{-1/2}(\Sigma_{\varepsilon L}) \right\};$$

et

$$H_{\perp, \vec{k}}^{-1/2}(\mathbf{rot}_T, \Sigma_{\varepsilon L}) = \left\{ \mathbf{f} \in H_{\perp, \vec{k}}^{-1/2}(\Sigma_{\varepsilon L}), \mathbf{rot}_T \mathbf{f}_T \in H^{-1/2}(\Sigma_{\varepsilon L}) \right\}.$$

Dans ces dernières égalités, comme $\mathbf{f} \in H_{\parallel, \vec{k}}^{-1/2}(\Sigma_{\varepsilon L})$ ou $\mathbf{f} \in H_{\perp, \vec{k}}^{-1/2}(\Sigma_{\varepsilon L})$ alors $f^{(3)} = 0$ et $\mathbf{div}_T \mathbf{f} = \mathbf{div}_T \mathbf{f}_T$ et $\mathbf{rot}_T \mathbf{f} = \mathbf{rot}_T \mathbf{f}_T$. Nous montrons enfin que

$$H_{\parallel, \vec{k}}^{-1/2}(\mathbf{div}_T, \Sigma_{\varepsilon L}) = \left[H_{\perp, \vec{k}}^{-1/2}(\mathbf{rot}_T, \Sigma_{\varepsilon L}) \right]'$$

Nous écrivons dans la suite $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma_{\varepsilon L}}$ le crochet de dualité.

8.3.1 Décomposition modale et opérateur DtN

Nous nous plaçons dans le domaine extérieur $\mathcal{B}_\infty^{\text{EL}}$ et nous notons $\mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon := \mathbf{E}_d^\varepsilon|_{\mathcal{B}_\infty^{\text{EL}}}$. Le champ électrique $\mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon(\mathbf{x})$ satisfait les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon - k^2 \mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B}_\infty^{\text{EL}}, \\ \mathbf{div} \mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B}_\infty^{\text{EL}}, \\ \mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon \text{ est } (k_1 \varepsilon T_1, k_2 \varepsilon T_2) \text{ quasi-périodique ;} \end{array} \right. \quad (9)$$

et $\mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon \in H_{\vec{k}}(\mathbf{rot}, \mathcal{B}_\infty^{\text{EL}}) \cap H_{\vec{k}}(\mathbf{div}, \mathcal{B}_\infty^{\text{EL}})$.

En utilisant la quasi-périodicité, nous montrons que $\mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon \in H_k^1(\mathcal{B}_\infty^{\text{EL}})$ et $\mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon - k^2 \mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B}_\infty^{\text{EL}}, \\ \mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon \text{ est } (k_1 \varepsilon T_1, k_2 \varepsilon T_2) \text{ quasi-périodique .} \end{array} \right. \quad (10)$$

Nous étendons les résultats obtenus en 2D basés sur la séparation de variables.

Comme $\mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon$ est $(k_1 \varepsilon T_1, k_2 \varepsilon T_2)$ quasi-périodique en (x_1, x_2) , pour presque tout x_3 , nous pouvons décomposer $\mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon(\mathbf{x})$ en pseudo-série de Fourier

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{B}_\infty^{\text{EL}} ; \quad \mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{m,n} \mathcal{U}_{m,n}(x_3) \varphi_{m,n}(x_1, x_2), \quad (11)$$

avec

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \quad \varphi_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon T_1 \varepsilon T_2}} e^{i\alpha_m x_1 + i\beta_n x_2} \quad (12)$$

où

$$\alpha_m = \frac{2\pi m}{\varepsilon T_1} + k_1 \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{2\pi n}{\varepsilon T_2} + k_2. \quad (13)$$

$(\varphi_{m,n})_{m,n}$ forment une base orthonormée de $L^2(\Sigma_{\varepsilon L})$.

En injectant formellement l'expression de $\mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon(\mathbf{x})$ pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{B}_\infty^{\text{EL}}$ dans l'équation $-\Delta \mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon(\mathbf{x}) - k^2 \mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon(\mathbf{x}) = 0$, nous obtenons

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left[\mathcal{U}_{m,n}''(x_3) + (k^2 - \chi_{m,n}^2) \mathcal{U}_{m,n}(x_3) \right] \varphi_{m,n}(x_1, x_2) = 0 ;$$

où

$$\chi_{m,n}^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2. \quad (14)$$

Comme les $\{\varphi_{m,n}\}$ forment une base orthonormée,

$$\mathcal{U}_{m,n}''(x_3) + \gamma_{m,n}^2 \mathcal{U}_{m,n}(x_3) = 0, \quad \gamma_{m,n}^2 = k^2 - \chi_{m,n}^2, \quad \text{pour tout } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Nous distinguons trois situations :

- Si $\gamma_{m,n}^2 > 0$ alors $\gamma_{m,n} = \sqrt{k^2 - \chi_{m,n}^2} > 0$ et $\mathcal{U}_m(x_3)$ est de la forme

$$\mathcal{U}_{m,n}(x_3) = \mathbf{A}_{m,n} e^{-i\gamma_{m,n}x_3} + \mathbf{B}_{m,n} e^{i\gamma_{m,n}x_3} .$$

Comme $\mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon$ est le champ électrique diffracté, il se propage vers les $x_3 > 0$. On impose $\mathbf{B}_{m,n} = 0$ car $e^{i\gamma_{m,n}x_3}$ se propage vers les $x_3 < 0$. Nous avons donc

$$\mathcal{U}_{m,n}(x_3) = \mathbf{A}_{m,n} e^{-i\gamma_{m,n}x_3}$$

qui est une fonction oscillante. Dans ce cas, on appelle $\mathcal{U}_{m,n}(x_3)\varphi_{m,n}(x_1, x_2)$ un mode propagatif.

- Si $\gamma_{m,n}^2 = k^2 - \chi_{m,n}^2 < 0$, nous posons $\gamma_{m,n} = -i\Gamma_{m,n}$ avec $\Gamma_{m,n} = \sqrt{\chi_{m,n}^2 - k^2} > 0$ et $\mathcal{U}_{m,n}(x_3)$ est de la forme

$$\mathcal{U}_{m,n}(x_3) = \mathbf{A}_{m,n} e^{-i\gamma_{m,n}x_3} + \mathbf{B}_{m,n} e^{i\gamma_{m,n}x_3} = \mathbf{A}_{m,n} e^{-\Gamma_{m,n}x_3} + \mathbf{B}_{m,n} e^{\Gamma_{m,n}x_3} .$$

Le champ diffracté est supposé borné à l'infini. Comme $e^{\Gamma_{m,n}x_3}$ est exponentiellement croissant quand x_3 tend vers $+\infty$, on impose $\mathbf{B}_{m,n} = 0$. Nous obtenons alors

$$\mathcal{U}_{m,n}(x_3) = \mathbf{A}_{m,n} e^{-\Gamma_{m,n}x_3} ,$$

qui est exponentiellement décroissant. Dans ce cas, on appelle $\mathcal{U}_{m,n}(x_3)\varphi_{m,n}(x_1, x_2)$ un mode évanescent.

- Les fréquences pour lesquelles $k^2 = \chi_{m,n}^2$ sont appelées fréquences de coupures.

Hypothèse 3

A incidence fixée, on exclut les fréquences de coupures. Plus précisément, à (k_1, k_2) fixés,

$$k^2 \notin \sigma_c(k_1, k_2) , \quad \sigma_c(k_1, k_2) = \left\{ \sqrt{\left(\frac{2m\pi}{\varepsilon_{T_1}} + k_1\right)^2 + \left(\frac{2n\pi}{\varepsilon_{T_2}} + k_2\right)^2} , m, n \in \mathbb{Z} \right\} .$$

Nous allons utiliser par la suite la caractérisation des espaces de Sobolev $H^s(\Sigma_{\varepsilon L})$, $\forall s \in \mathbb{R}$

$$H_k^s(\Sigma_{\varepsilon L}) = \left\{ \mathbf{V} \text{ telle que } \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} (1 + \chi_{m,n}^2)^s \left| (\mathbf{V}, \varphi_{m,n})_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} \right|^2 < +\infty , \mathbf{V} \text{ est } (k_1\varepsilon_{T_1}, k_2\varepsilon_{T_2}) \text{ quasi-périodique} \right\}$$

où $\varphi_{m,n}$ donnée par (12) est une base orthonormée et $\chi_{m,n}$ est donnée par (14).

Théorème 100

Soit $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ et $k \neq \sigma_c(k_1, k_2)$. Soit $\Phi \in H_{\|\vec{k}\|}^{-1/2}(\mathbf{div}_T, \Sigma_{\varepsilon L})$, nous définissons

$$\mathbf{V}(\Phi) := \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left(\Phi, \varphi_{m,n} \right)_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} e^{-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)} \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \quad (15)$$

où $\gamma_{m,n}$ est telle que $\gamma_{m,n}^2 = k^2 - \chi_{m,n}^2$ avec $\chi_{m,n}$ donnée par (14) et $\varphi_{m,n}$ est donnée par (12). Alors la série est convergente dans $H_k^1(\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon L})$ et $\mathbf{V}(\Phi)$ vérifie également

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{V}(\Phi) - k^2 \mathbf{V}(\Phi) = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^{\varepsilon L} , \\ \vec{e}_3 \times \mathbf{V}(\Phi) \Big|_{\Sigma_{\varepsilon L}} = \Phi & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon L} . \end{cases} \quad (16)$$

Définition 101

$\forall \Phi \in H_{\parallel, \vec{k}}^{-1/2}(\mathbf{div}, \Sigma_{\varepsilon L})$, on appelle solution sortante dans $H_{\vec{k}}^1(\mathcal{B}_{\infty}^{\varepsilon L}, \Delta)$ de

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{V} - k^2 \mathbf{V} = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_{\infty}^{\varepsilon L}, \\ \vec{e}_3 \times \mathbf{V} = \Phi & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon L}; \end{cases} \quad (17)$$

la fonction $\mathbf{V}(\Phi)$ donnée par (15) où nous avons gardé uniquement les modes propagatifs "sortants" et les modes évanescents.

On dit donc qu'une onde est sortante si elle admet la décomposition modale (15).

Nous pouvons réinterpréter cette condition maintenant à l'aide d'une condition transparente basée sur un opérateur de Dirichlet-to-Neumann (DtN).

Définition 102

L'opérateur $\Lambda_{\vec{k}}$, dit de Dirichlet-to-Neumann, est défini par

$$\Lambda_{\vec{k}} : \begin{cases} H_{\parallel, \vec{k}}^{-1/2}(\mathbf{div}, \Sigma_{\varepsilon L}) \rightarrow H_{\perp, \vec{k}}^{-1/2}(\mathbf{rot}, \Sigma_{\varepsilon L}) \\ \Phi \mapsto \Lambda_{\vec{k}} \Phi := -\frac{i}{k} \vec{e}_3 \times \mathbf{rot} \mathbf{V}(\Phi) \end{cases} \quad (18)$$

où $\mathbf{V}(\Phi)$ est la solution sortante de (17).

Proposition 103

Pour tout $\Phi \in H_{\parallel, \vec{k}}^{-1/2}(\mathbf{div}, \Sigma_{\varepsilon L})$,

$$\Lambda_{\vec{k}} \Phi = \frac{1}{k} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \left(\begin{bmatrix} \alpha_m \\ \beta_n \\ 0 \end{bmatrix} (\Phi^{(3)}, \varphi_{m, n})_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} \varphi_{m, n}(x_1, x_2) - \gamma_{m, n} (\Phi_T, \varphi_{m, n})_{L^2(\Sigma_{\varepsilon L})} \varphi_{m, n}(x_1, x_2) \right).$$

L'opérateur $\Lambda_{\vec{k}}$ est un opérateur linéaire continu de $H_{\parallel, \vec{k}}^{-1/2}(\mathbf{div}, \Sigma_{\varepsilon L})$ dans $H_{\perp, \vec{k}}^{-1/2}(\mathbf{rot}, \Sigma_{\varepsilon L})$ et

$$\forall \zeta \in H_{\parallel, \vec{k}}^{-1/2}(\mathbf{div}_0, \Sigma_{\varepsilon L}), \quad \text{Im} \langle \Lambda_{\vec{k}} \zeta, \zeta^t \rangle_{\Sigma_{\varepsilon L}} \geq 0; \quad (19)$$

où $H_{\parallel, \vec{k}}^{-1/2}(\mathbf{div}_0, \Sigma_{\varepsilon L}) = \left\{ \zeta \in H_{\parallel, \vec{k}}^{-1/2}(\mathbf{div}, \Sigma_{\varepsilon L}), \mathbf{div}_T \zeta_T = 0 \right\}$.

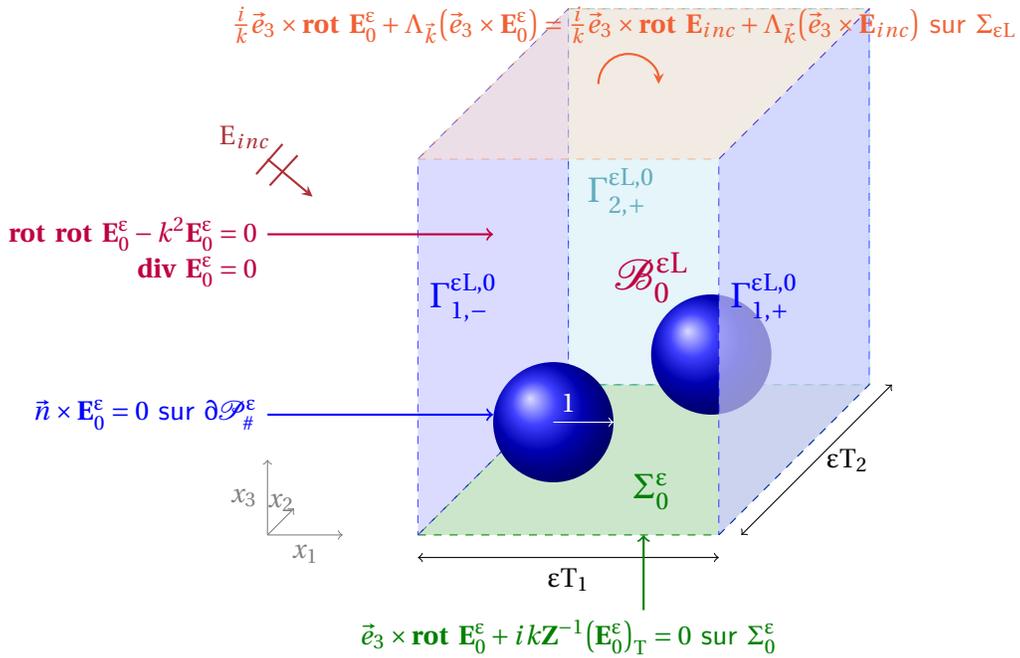
8.3.2 Application à notre problème

Comme \mathbf{E}_d^ε est supposée sortant, nous avons $\mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon = \mathbf{E}_d^\varepsilon|_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon L}} = \mathbf{V}(\mathbf{E}_d^\varepsilon|_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon L}})$ et $-\frac{i}{k} \vec{e}_3 \times \mathbf{rot} \mathbf{E}_d^\varepsilon|_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon L}} = \Lambda_{\vec{k}} \mathbf{E}_d^\varepsilon|_{\mathcal{B}_\infty^{\varepsilon L}}$.

Soit $\mathbf{E}_{d,0}^\varepsilon := \mathbf{E}_d^\varepsilon|_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}}$. Comme $\mathbf{E}_{d,0}^\varepsilon$ et $\mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon$ se raccordent en trace tangentielle et en trace tangentielle du rotationnel, nous pouvons réécrire le problème de diffraction dans le domaine borné $\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}$:

$\mathbf{E}_{d,0}^\varepsilon$ est solution dans $H_{\vec{k}}(\mathbf{rot}, \mathcal{B}_0^{\varepsilon L}) \cap H_{\vec{k}}(\mathbf{div}, \mathcal{B}_0^{\varepsilon L})$ de

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E}_{d,0}^\varepsilon - k^2 \mathbf{E}_{d,0}^\varepsilon = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{B}_0^{\varepsilon L} \\ \mathbf{div} \mathbf{E}_{d,0}^\varepsilon = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{B}_0^{\varepsilon L} \\ \mathbf{E}_{d,0}^\varepsilon \text{ est } (k_1 \varepsilon T_1, k_2 \varepsilon T_2) \text{ quasi-périodique} \\ \vec{n} \times \mathbf{E}_{d,0}^\varepsilon = -\vec{n} \times \mathbf{E}_{inc} \quad \text{sur} \quad \partial \mathcal{D}_\#^\varepsilon \\ \vec{e}_3 \times \mathbf{rot} \mathbf{E}_{d,0}^\varepsilon + ikZ^{-1}(\mathbf{E}_{d,0}^\varepsilon)_T = -\vec{e}_3 \times \mathbf{rot} \mathbf{E}_{inc} - ikZ^{-1}(\mathbf{E}_{inc})_T \quad \text{sur} \quad \Sigma_0^\varepsilon \\ \frac{i}{k} \vec{e}_3 \times \mathbf{rot} \mathbf{E}_{d,0}^\varepsilon + \Lambda_{\vec{k}}(\vec{e}_3 \times \mathbf{E}_{d,0}^\varepsilon) = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_{\varepsilon L} \end{array} \right. \quad (20)$$



Ce problème peut également être réécrit pour le champ total $\mathbf{E}_0^\varepsilon := \mathbf{E}^\varepsilon \Big|_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}}$ ou encore $\mathbf{E}_0^\varepsilon = \mathbf{E}_{d,0}^\varepsilon + \mathbf{E}_{inc} \Big|_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot rot} \mathbf{E}_0^\varepsilon - k^2 \mathbf{E}_0^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B}_0^{\varepsilon L} \\ \mathbf{div} \mathbf{E}_0^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B}_0^{\varepsilon L} \\ \mathbf{E}_0^\varepsilon \text{ est } (k_1 \varepsilon T_1, k_2 \varepsilon T_2) \text{ quasi-périodique} \\ \vec{n} \times \mathbf{E}_0^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_\#^\varepsilon \\ \vec{e}_3 \times \mathbf{rot} \mathbf{E}_0^\varepsilon + ikZ^{-1}(\mathbf{E}_0^\varepsilon)_T = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0^\varepsilon \\ \frac{i}{k} \vec{e}_3 \times \mathbf{rot} \mathbf{E}_0^\varepsilon + \Lambda_{\vec{k}}(\vec{e}_3 \times \mathbf{E}_0^\varepsilon) = \frac{i}{k} \vec{e}_3 \times \mathbf{rot} \mathbf{E}_{inc} + \Lambda_{\vec{k}}(\vec{e}_3 \times \mathbf{E}_{inc}) \quad \text{sur } \Sigma_{\varepsilon L} \end{array} \right. \quad (21)$$

Soit $H_{\vec{k},0}(\mathbf{rot}, \mathcal{B}_0^{\varepsilon L}) := \{ \mathbf{E} \in H_{\vec{k}}(\mathbf{rot}, \mathcal{B}_0^{\varepsilon L}), \vec{n} \times \mathbf{E} = 0 \text{ sur } \partial \mathcal{P}_\#^\varepsilon \}$ l'espace des fonctions tests. La forme variationnelle associée est donnée par :

$$\text{Trouver } \mathbf{E}_0^\varepsilon \in H_{\vec{k},0}(\mathbf{rot}, \mathcal{B}_0^{\varepsilon L}), \mathbf{a}^\varepsilon(\mathbf{E}_0^\varepsilon, \Phi) = \mathbf{I}_{inc}^\varepsilon(\Phi), \quad \forall \Phi \in H_{\vec{k},0}(\mathbf{rot}, \mathcal{B}_0^{\varepsilon L}); \quad (22)$$

avec $\forall \mathbf{U}, \Phi \in H_{\vec{k},0}(\mathbf{rot}, \mathcal{B}_0^{\varepsilon L})$

$$\mathbf{a}^\varepsilon(\mathbf{U}, \Phi) = \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}} \mathbf{rot} \mathbf{U} \overline{\mathbf{rot} \Phi} dx - k^2 \int_{\mathcal{B}_0^{\varepsilon L}} \mathbf{U} \overline{\Phi} dx + ikZ^{-1} \int_{\Sigma_0^\varepsilon} \mathbf{U}_T \overline{\Phi} dx_1 dx_2 + ik \langle \Lambda_{\vec{k}}(\vec{e}_3 \times \mathbf{U}), \overline{\Phi}_T \rangle_{\Sigma_{\varepsilon L}}; \quad (23)$$

et

$$\mathbf{I}_{inc}^\varepsilon(\Phi) = -\langle \vec{e}_3 \times \mathbf{rot} \mathbf{E}_{inc}, \overline{\Phi}_T \rangle_{\Sigma_{\varepsilon L}} + ik \langle \Lambda_{\vec{k}}(\vec{e}_3 \times \mathbf{E}_{inc}), \overline{\Phi}_T \rangle_{\Sigma_{\varepsilon L}}. \quad (24)$$

Nous pouvons montrer que ce problème relève de l'alternative de Fredholm. Nous avons besoin d'un résultat de compacité, or l'injection de $H(\mathbf{rot})$ dans L^2 n'est pas compacte. Il faut avoir un contrôle de la divergence et de certaines conditions au bord du domaine. L'idée est d'écrire le problème dans un espace plus petit qui s'injecte de manière compacte dans L^2 . Cette approche est développée dans [Kim17] et dans le rapport de stage de Aurélien Parigaux. Nous ne répétons pas la preuve ici qui est très technique.

Nous supposons maintenant que

Théorème 104

Soit \mathbf{I}^ε une forme linéaire continue dans $H_{\vec{k},0}(\mathbf{rot}, \mathcal{B}_0^{\varepsilon L})$. Le problème :

$$\text{Trouver } \mathbf{E}_0^\varepsilon \in H_{\vec{k},0}(\mathbf{rot}, \mathcal{B}_0^{\varepsilon L}) \text{ telle que } \mathbf{a}^\varepsilon(\mathbf{E}_0^\varepsilon, \Phi) = \mathbf{I}^\varepsilon(\Phi), \quad \forall \Phi \in H_{\vec{k},0}(\mathbf{rot}, \mathcal{B}_0^{\varepsilon L}) \quad (25)$$

relève de l'alternative de Fredholm et il existe une unique solution dans $H_{\vec{k},0}(\mathbf{rot}, \mathcal{B}_0^{\varepsilon L})$.

Enfin, il existe des constantes $C > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ indépendantes de ε telles que

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_0, \quad \|\mathbf{E}_0^\varepsilon\|_{H_{\vec{k},0}(\mathbf{rot})} \leq C \|\mathbf{I}^\varepsilon\|. \quad (26)$$

Il faudrait comme dans la preuve du théorème 6 appliquer un changement de variables pour écrire explicitement la dépendance en ε et réécrire la preuve technique évoquée ci-dessus pour ce problème "remis à l'échelle".

Nous n'avons pas réalisé cette preuve faute de temps. C'est un travail qui reste à faire.

Chapitre 9

Développement asymptotique

Sommaire

9.1 Ansatz du développement asymptotique	224
9.2 Équations satisfaites par les termes de champ lointain et les termes de champ proche	226
9.2.1 Cascade d'équations pour les termes de champ lointain	226
9.2.2 Cascade d'équations pour les termes de champ proche	227
9.3 Caractère bien posé des problèmes de champ proche	233
9.3.1 Quelques résultats préliminaires	234
9.3.2 Caractérisation du noyau	236
9.3.3 Résultat d'existence et d'unicité	243
9.4 Comportement à l'infini des termes de champ proche	246
9.4.1 Forme générale du comportement à l'infini	246
9.4.2 Caractérisation des limites pour les termes de champ proche	248
9.5 Construction des termes de champ proche	252
9.5.1 Construction des premiers termes de champ proche	252
9.5.2 Caractérisation des termes de champ proche à tout ordre	258
9.6 Problèmes vérifiés par les termes de champ lointain	259
9.7 Modèles effectifs proposés	262

Tout comme dans la partie 1, dans ce chapitre, nous utilisons une méthode de développement asymptotique multi-échelle afin de construire des conditions effectives qui vont nous permettre de remplacer la couche de particules. Le développement fait intervenir des termes de champ proche, qui sont périodiques et supposés tendre vers 0 à l'infini, et des termes dits de champ lointain. L'étude du caractère bien posé des problèmes vérifiés par les termes de champ proche est plus délicate que dans le cas scalaire. Elle nécessite la description précise du noyau de l'opérateur différentiel sous-jacent. Celui-ci contient le gradient d'un certain nombre de fonctions profils, solutions de problèmes de type Laplace dans la demi-bande périodique. La condition de Leontovich sur Σ_0 et la présence de particules rendent la description du noyau non triviale. Le caractère bien posé des problèmes de champ proche est montré dans l'orthogonal du noyau. C'est quand nous imposons que les champs proches doivent tendre vers 0 à l'infini que nous obtenons des conditions de compatibilité sur les données qui dépendent des traces des champs lointains. Nous obtenons ainsi des conditions aux limites pour les champs lointains faisant intervenir des opérateurs différentiels sur le bord et des constantes qui peuvent être calculées à partir des fonctions du noyau. L'existence des termes de champ proche et la caractérisation des limites nous donne une condition de compatibilité. Ceci permet de proposer à partir de ces conditions un modèle effectif.

9.1 Ansatz du développement asymptotique

Dans ce chapitre, nous considérons que les particules sont des ouverts dont la frontière est connexe et les ouverts doivent être topologiquement trivial. Disons que physiquement, les particules sont des sphères.

Nous proposons un développement asymptotique multi-échelle de la solution $(\mathbf{E}^\varepsilon, \mathbf{H}^\varepsilon)$ du problème $(\text{PEH}_I^\varepsilon)$ qui dépend d'un paramètre noté H dans la suite. En d'autres termes, ce n'est pas un développement que nous proposons mais une famille de développements paramétrés par $H > 2(1 + \delta)$. Si nécessaire, il est possible de jouer sur ce paramètre.

Nous introduisons le plan $\Sigma_{\varepsilon H} := \{x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 = \varepsilon H\}$. Ce plan se situe au dessus des particules.

En dessous du plan $\Sigma_{\varepsilon H}$, autrement dit pour $x_3 < \varepsilon H$, nous supposons que $\mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x})$ et $\mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{x})$, avec $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, se développent en fonction de ε de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{H}_m \left(x_1, x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right); \\ \mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{E}_m \left(x_1, x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right). \end{cases} \quad (1)$$

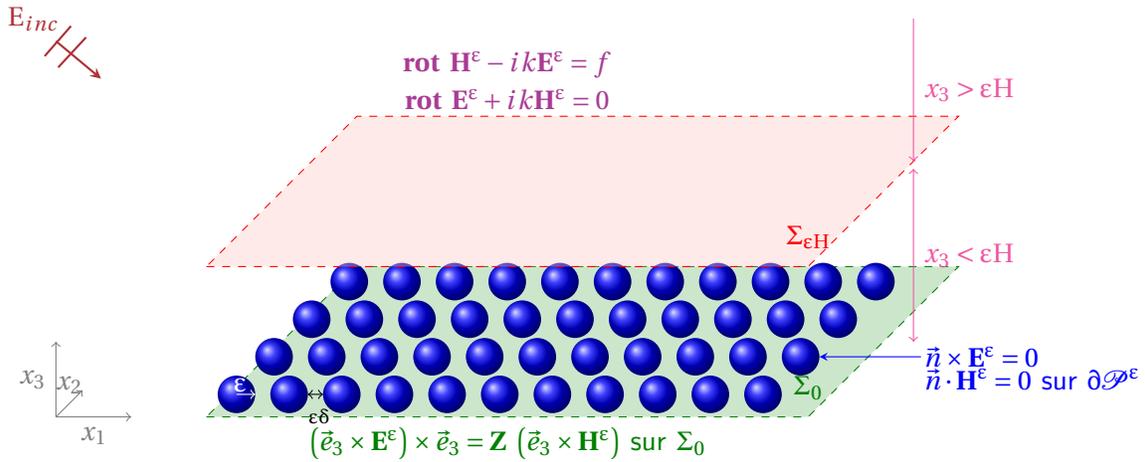
Ce développement dépend des termes \mathbf{H}_m et \mathbf{E}_m , dits termes de champ proche, qui vivent proche des particules, qui dépendent des variables macroscopiques (x_1, x_2) mais aussi des variables dilatées $(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon}) = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$.

Au dessus du plan $\Sigma_{\varepsilon H}$, autrement dit pour $x_3 > \varepsilon H$, nous supposons que $\mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x})$ et $\mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{x})$ se développent en fonction de ε de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{h}_m(\mathbf{x}) + \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{H}_m \left(x_1, x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right); \\ \mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{e}_m(\mathbf{x}) + \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{E}_m \left(x_1, x_2; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right). \end{cases} \quad (2)$$

Ce développement dépend des termes de champ proche \mathbf{E}_m et \mathbf{H}_m mais il fait aussi intervenir les termes \mathbf{e}_m et \mathbf{h}_m , dits termes de champ lointain, qui ne dépendent que des variables macroscopiques (x_1, x_2, x_3) , qui n'ont pas de variations à l'échelle des particules et qui représentent le comportement des solutions diffractées \mathbf{E}_d^ε et \mathbf{H}_d^ε loin des particules. Ces termes de champ lointain ne vivent qu'au dessus de $\Sigma_{\varepsilon H}$, c'est-à-dire au dessus des particules, plus précisément dans $\mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty)$. Ce sont les termes de champ proche qui transfèrent les caractéristiques des particules aux termes de champ lointain.

Dans la suite, nous utilisons la convention $\mathbf{E}_{-1} = \mathbf{H}_{-1} = 0$.



Plus précisément, nous supposons que $\mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x})$ s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{e}_m(\mathbf{x}) + \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{E}_m\left(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) & \text{si } x_3 > \varepsilon H ; \\ \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{E}_m\left(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) & \text{si } x_3 < \varepsilon H ; \end{cases} \quad (3)$$

où $\mathbf{x}_T = (x_1, x_2)$ et de même $\mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{x})$ s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{h}_m(\mathbf{x}) + \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{H}_m\left(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) & \text{si } x_3 > \varepsilon H ; \\ \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{H}_m\left(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) & \text{si } x_3 < \varepsilon H . \end{cases} \quad (4)$$

Nous faisons les hypothèses suivantes sur les termes de champ proche $\mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \mathbf{y})$ et $\mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \mathbf{y})$:

- comme la couche est périodique, les termes de champ proche \mathbf{E}_m et \mathbf{H}_m sont supposés T_1 -périodiques par rapport à y_1 et T_2 -périodiques par rapport à y_2 . Il est donc suffisant de les étudier dans $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{B}$ où $\mathcal{B} = (0, T_1) \times (0, T_2) \times \mathbb{R}_+ \setminus \mathcal{P}_\#$. On notera dans la suite

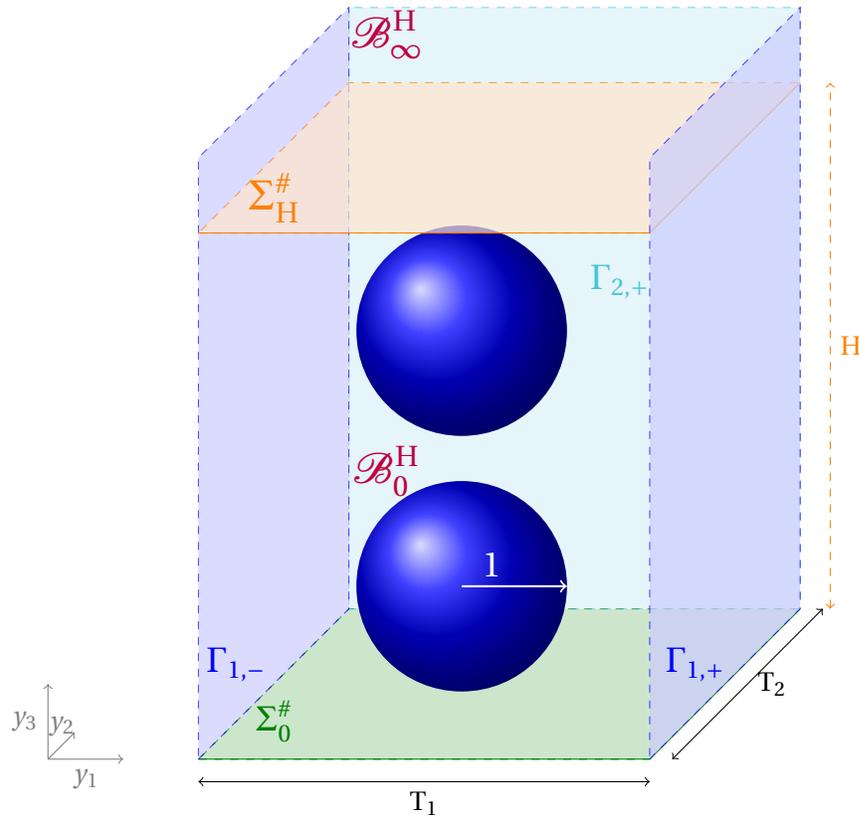
$$\mathcal{B}_0^H = (0, T_1) \times (0, T_2) \times (0, H) \setminus \partial \mathcal{P}_\#$$

$$\mathcal{B}_\infty^H = (0, T_1) \times (0, T_2) \times (H, +\infty)$$

$$\Sigma_H^\# := \{y_1 \in (0, T_1), y_2 \in (0, T_2), y_3 = H\}$$

$$\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\# := \mathcal{B}_0^H \cup \mathcal{B}_\infty^H .$$

Pour tout $P \geq 0$, nous notons $\Sigma_P^\# := \{y_1 \in (0, T_1), y_2 \in (0, T_2), y_3 = P\}$.



- loin de la couche de particules, les termes de champ lointain sont censés représenter le comportement macroscopique des solutions \mathbf{E}^ε et \mathbf{H}^ε . Nous allons donc supposer que les termes de champ proche $\mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \mathbf{y})$ et $\mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \mathbf{y})$ disparaissent quand y_3 tend vers $+\infty$ c'est-à-dire

$$\lim_{y_3 \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{y_3 \rightarrow +\infty} \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) = 0 \quad . \quad (5)$$

L'idée est de supposer qu'un tel développement existe. Nous insérons alors ce développement dans les équations vérifiées par \mathbf{H}^ε et \mathbf{E}^ε (PEH_i^ε) données dans le chapitre 8 et nous déduisons formellement les équations vérifiées par les termes de champ proche et les termes de champ lointain.

9.2 Équations satisfaites par les termes de champ lointain et les termes de champ proche

Nous écrivons les équations du problème données par (PEH_i^ε) en supposant que \mathbf{E}^ε est de la forme (3) et \mathbf{H}^ε est de la forme (4).

9.2.1 Cascade d'équations pour les termes de champ lointain

Loin des particules, les champs sont supposés être bien représentés par les développements en champ lointain. Les termes de champ proche étant supposés disparaître d'après l'hypothèse 5, pour obtenir l'équation satisfaite par

\mathbf{e}_m , nous remplaçons $\mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x})$ par $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon^n \mathbf{e}_m(\mathbf{x})$ dans les équations $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x}) - k^2 \mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ et $\mathbf{div} \mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x}) = 0$ pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty)$. En identifiant formellement les puissances de ε , nous obtenons

$$\forall m \geq 0, \quad \begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{e}_m(\mathbf{x}) - k^2 \mathbf{e}_m(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \delta_0(\mathbf{x}) \\ \mathbf{div} \mathbf{e}_m(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty). \quad (6)$$

De même, pour obtenir l'équation satisfaite par \mathbf{h}_m , nous remplaçons $\mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{x})$ par $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon^n \mathbf{h}_m(\mathbf{x})$ dans l'équation $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{x}) - k^2 \mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{x}) = 0$ et $\mathbf{div} \mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{x}) = 0$ pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty)$. En identifiant formellement les puissances de ε , nous trouvons

$$\forall m \geq 0, \quad \begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{h}_m(\mathbf{x}) - k^2 \mathbf{h}_m(\mathbf{x}) = 0 \\ \mathbf{div} \mathbf{h}_m(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty). \quad (7)$$

De plus, la condition d'onde sortante donne

$$\begin{cases} \mathbf{e}_0 - \mathbf{E}_{inc} \text{ est sortant ;} \\ \mathbf{e}_m \text{ est sortant , pour } m \geq 1 ; \end{cases} \quad (8)$$

et

$$\begin{cases} \mathbf{h}_0 - \mathbf{H}_{inc} \text{ est sortant ;} \\ \mathbf{h}_m \text{ est sortant , pour } m \geq 1 . \end{cases} \quad (9)$$

Les équations (6)+(8) et (7)+(9) ne permettent pas de caractériser \mathbf{e}_m et \mathbf{h}_m de manière unique. Il manque des conditions aux limites sur $\Sigma_{\varepsilon H}$; celles-ci seront déterminées à l'aide des termes de champ proche et permettront de prendre en compte les particules.

Remarque 28. Si l'onde incidente est une onde plane, ce qui est le cas ici, ces équations peuvent être écrites sur une seule période avec conditions de quasi-périodicité sur les bords latéraux.

9.2.2 Cascade d'équations pour les termes de champ proche

Équations Volumiques

Comme les termes de champ proche sont vectoriels et dépendent de plusieurs variables, nous allons utiliser les règles de dérivation : pour toute fonction

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) = U^{(1)}\left(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \vec{e}_1 + U^{(2)}\left(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \vec{e}_2 + U^{(3)}\left(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \vec{e}_3,$$

nous avons

$$\mathbf{rot} \mathbf{U}\left(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) = \mathbf{rot}_{\mathbf{x}_T} \mathbf{U}\left(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{rot}_{\mathbf{y}} \mathbf{U}\left(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \quad (10)$$

avec $\mathbf{rot}_{\mathbf{x}_T} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} U^{(3)} \\ -\partial_{x_1} U^{(3)} \\ \partial_{x_1} U^{(2)} - \partial_{x_2} U^{(1)} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{rot}_{\mathbf{y}} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \partial_{y_2} U^{(3)} - \partial_{y_3} U^{(2)} \\ \partial_{y_3} U^{(1)} - \partial_{y_1} U^{(3)} \\ \partial_{y_1} U^{(2)} - \partial_{y_2} U^{(1)} \end{pmatrix}$. De même, nous définissons

$$\mathbf{div} \mathbf{U}\left(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) = \mathbf{div}_{\mathbf{x}_T} \mathbf{U}\left(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{U}\left(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right),$$

avec $\mathbf{div}_{\mathbf{x}_T} \mathbf{U} = \partial_{x_1} U^{(1)} + \partial_{x_2} U^{(2)}$ et $\mathbf{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{U} = \partial_{y_1} U^{(1)} + \partial_{y_2} U^{(2)} + \partial_{y_3} U^{(3)}$.

Commençons par regarder ce que l'on obtient lorsque $x_3 < \varepsilon H$. Les solutions \mathbf{E}^ε et \mathbf{H}^ε se développent uniquement à l'aide des termes de champ proche \mathbf{E}_m et \mathbf{H}_m . Nous remplaçons alors $\mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x})$ par $\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$ et $\mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{x})$ par $\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$ dans les équations de Maxwell données par (3) dans le Chapitre 8, nous obtenons, pour $\mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2$, $x_3 < \varepsilon H$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \left[\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \right] = -ik \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}), \\ \mathbf{div} \left[\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \right] = 0; \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \left[\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \right] = ik \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}), \\ \mathbf{div} \left[\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \right] = 0. \end{array} \right.$$

Si bien qu'en utilisant les règles de dérivations précédentes, nous avons, pour $\mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2$, $x_3 < \varepsilon H$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^{m-1} \mathbf{rot}_y \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) = - \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{rot}_{x_t} \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \\ \quad - ik \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}), \\ \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^{m-1} \mathbf{div}_y \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) = - \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{div}_{x_t} \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}); \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^{m-1} \mathbf{div}_y \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) = - \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{rot}_{x_t} \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \\ \quad + ik \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}), \\ \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^{m-1} \mathbf{div}_y \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) = - \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{div}_{x_t} \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}). \end{array} \right.$$

Nous identifions formellement les puissances de ε et nous supposons que les équations sont vraies pour presque tout $\mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2$, pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \times (0, H) \setminus \overline{\mathcal{P}}$. Nous rappelons que $(y_1, y_2) \mapsto \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \mathbf{y})$ et $(y_1, y_2) \mapsto \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \mathbf{y})$ sont (T_1, T_2) -périodiques par rapport à (y_1, y_2) . Nous obtenons alors la cascade d'équations, pour $m \geq 0$,

$$\text{p.p. } \mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2, \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot}_y \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) = - \mathbf{rot}_{x_t} \mathbf{E}_{m-1}(\mathbf{x}_T; \cdot) \\ \quad - ik \mathbf{H}_{m-1}(\mathbf{x}_T; \cdot), \\ \mathbf{div}_y \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) = - \mathbf{div}_{x_t} \mathbf{E}_{m-1}(\mathbf{x}_T; \cdot); \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot}_y \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) = - \mathbf{rot}_{x_t} \mathbf{H}_{m-1}(\mathbf{x}_T; \cdot) \\ \quad + ik \mathbf{E}_{m-1}(\mathbf{x}_T; \cdot), \\ \mathbf{div}_y \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) = - \mathbf{div}_{x_t} \mathbf{H}_{m-1}(\mathbf{x}_T; \cdot); \end{array} \right. \quad \text{dans } \mathcal{B}_0^H; \quad (11) \quad (12)$$

où par convention $\mathbf{E}_{-1} = 0$ et $\mathbf{H}_{-1} = 0$.

Regardons maintenant ce que l'on obtient lorsque $x_3 > \varepsilon H$. Nous remplaçons \mathbf{E}^ε et \mathbf{H}^ε par les développements (2) dans les équations de Maxwell, nous obtenons, pour $\mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2$ et $x_3 > \varepsilon H$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\mathbf{rot} \left[\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \right] + ik \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \right] + \underbrace{\left[\mathbf{rot} \left[\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{e}_m(\mathbf{x}) \right] + ik \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{h}_m(\mathbf{x}) \right]}_{=0} = 0, \\ \mathbf{div} \left[\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \right] + \underbrace{\mathbf{div} \left[\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{e}_m(\mathbf{x}) \right]}_{=0} = 0; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\mathbf{rot} \left[\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{H}_m \left(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right] - ik \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{E}_m \left(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right] + \underbrace{\left[\mathbf{rot} \left[\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{h}_m(\mathbf{x}) \right] - ik \sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{e}_m(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \right]}_{=0} = 0, \\ \mathbf{div} \left[\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{H}_m \left(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right] + \underbrace{\mathbf{div} \left[\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{h}_m(\mathbf{x}) \right]}_{=0} = 0. \end{array} \right.$$

Les termes faisant intervenir les champs lointains s'annulent car ces derniers vérifient (6) et (7). Nous retrouvons donc la même cascade d'équations, donnée par (11) et (12), pour presque tout $\mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y} \in \mathcal{B}_\infty^H$.

La cascade d'équations (11) et (12) est donc vérifiée dans $\mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#$.

Cherchons maintenant les conditions sur le bord Σ_0 , les particules \mathcal{P}^ε et l'interface $\Sigma_{\varepsilon H}$. Nous allons utiliser le fait que les variations des champs proches par rapport à (x_1, x_2) sont liées aux variations macroscopiques des champs proches. Dans la suite, nous allons donc considérer qu'elles jouent le rôle de paramètres, les conditions aux bords ne seront imposées que sur les variables rapides. Ceci a l'air arbitraire mais c'est justifié a posteriori par des estimations d'erreurs.

Conditions aux limites sur les inclusions

Les conditions de frontières parfaitement conductrices des particules sont données par

$$\vec{n} \times \mathbf{E}^\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \partial \mathcal{P}^\varepsilon, \quad \vec{n} \cdot \mathbf{H}^\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \partial \mathcal{P}^\varepsilon.$$

Nous remplaçons $\mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x})$ par $\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{E}_m \left(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right)$ et $\mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{x})$ par $\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{H}_m \left(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right)$ dans les conditions, nous identifions les puissances de ε et nous supposons que les équations sont vérifiées pour presque tout $\mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y} \in \partial \mathcal{P}$. Nous obtenons alors

$$\text{p.p. } \mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2, \quad \vec{n} \times \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial \mathcal{P}, \quad (13) \quad \vec{n} \cdot \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial \mathcal{P}, \quad \text{pour } m \geq 0. \quad (14)$$

Comme les termes de champ proche sont supposés périodiques par rapport à (y_1, y_2) , il suffit d'écrire la condition sur une période de l'ensemble, soit

$$\text{p.p. } \mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2, \quad \vec{n} \times \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial \mathcal{P}_\#, \quad (15) \quad \vec{n} \cdot \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial \mathcal{P}_\#, \quad \text{pour } m \geq 0. \quad (16)$$

Conditions aux limites sur Σ_0

La condition sur Σ_0 est donnée par

$$(\vec{e}_3 \times \mathbf{E}^\varepsilon) \times \vec{e}_3 = \mathbf{Z} (\vec{e}_3 \times \mathbf{H}^\varepsilon) \quad \text{sur} \quad \Sigma_0.$$

Nous remplaçons $\mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x})$ par $\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{E}_m \left(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right)$ et $\mathbf{H}^\varepsilon(\mathbf{x})$ par $\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{H}_m \left(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right)$ et nous obtenons

$$\left(\vec{e}_3 \times \left[\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{E}_m \left(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right] \right) \times \vec{e}_3 = \mathbf{Z} \left(\vec{e}_3 \times \left[\sum_{m \in \mathbb{N}} \varepsilon^m \mathbf{H}_m \left(\mathbf{x}_T; \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right] \right) \quad \text{pour } \mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2, \quad x_3 = 0.$$

En identifiant formellement les puissances de ε et en supposant que les équations sont vraies pour presque tout $\mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2$, pour presque tout $\mathbf{y} \in \Sigma_0^\#$, nous avons alors

$$\text{p.p. } \mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2, \quad (\vec{e}_3 \times \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \cdot)) \times \vec{e}_3 = \mathbf{Z} (\vec{e}_3 \times \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \cdot)) \quad \text{sur } \Sigma_0^\#, \quad \text{pour } m \geq 0. \quad (17)$$

Conditions sur $\Sigma_{\varepsilon H}$

Au voisinage de $\Sigma_{\varepsilon H}$, les termes de champ proche $(\mathbf{E}_m, \mathbf{H}_m)$ présentent des sauts puisque, même si la solution $(\mathbf{E}^\varepsilon, \mathbf{H}^\varepsilon)$ est bien à trace tangentielle et à trace normale continue au travers de $\Sigma_{\varepsilon H}$, elle possède des développements différents de part et d'autre de $\Sigma_{\varepsilon H}$.

Comme $(\mathbf{E}^\varepsilon, \mathbf{H}^\varepsilon)$ est à trace tangentielle continue au travers de $\Sigma_{\varepsilon H} = \{x_3 = \varepsilon H\}$: $\vec{e}_3 \times \mathbf{E}^\varepsilon \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}^-} = \vec{e}_3 \times \mathbf{E}^\varepsilon \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}^+}$ et $\vec{e}_3 \times \mathbf{H}^\varepsilon \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}^-} = \vec{e}_3 \times \mathbf{H}^\varepsilon \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}^+}$, en remplaçant $(\mathbf{E}^\varepsilon, \mathbf{H}^\varepsilon)$ par ses développements (1) et (2), nous obtenons

$$\begin{cases} \vec{e}_3 \times \left(\sum_{m \geq 0} \varepsilon^m \mathbf{E}_m \left(\mathbf{x}_T; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, H^- \right) \right) = \vec{e}_3 \times \left(\sum_{m \geq 0} \varepsilon^m \mathbf{E}_m \left(\mathbf{x}_T; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, H^+ \right) \right) + \sum_{m \geq 0} \varepsilon^m \mathbf{e}_m \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} (\mathbf{x}_T) \\ \vec{e}_3 \times \left(\sum_{m \geq 0} \varepsilon^m \mathbf{H}_m \left(\mathbf{x}_T; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, H^- \right) \right) = \vec{e}_3 \times \left(\sum_{m \geq 0} \varepsilon^m \mathbf{H}_m \left(\mathbf{x}_T; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, H^+ \right) \right) + \sum_{m \geq 0} \varepsilon^m \mathbf{h}_m \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} (\mathbf{x}_T) \end{cases} \quad \text{p.p. } \mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2;$$

où nous avons identifié les traces de \mathbf{e}_m et \mathbf{h}_m sur $\Sigma_{\varepsilon H}$ à une fonction de deux variables, ici \mathbf{x}_T . En identifiant les puissances de ε et en supposant que ces équations sont vraies pour presque tout $\mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y} \in \Sigma_H^\#$, nous trouvons

$$\text{p.p. } \mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \left[\vec{e}_3 \times \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) \right]_H = - \vec{e}_3 \times \mathbf{e}_m \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} (\mathbf{x}_T) \\ \left[\vec{e}_3 \times \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) \right]_H = - \vec{e}_3 \times \mathbf{h}_m \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} (\mathbf{x}_T) \end{cases}, \quad \text{pour } m \geq 0; \quad (18)$$

où nous avons utilisé la notation

Notation 3

Le saut d'une fonction \mathbf{U} à l'interface $\Sigma_H^\#$ est

$$[\mathbf{U}]_H := \mathbf{U} \Big|_{\Sigma_H^+} - \mathbf{U} \Big|_{\Sigma_H^-}. \quad (19)$$

D'autre part, comme $(\mathbf{E}^\varepsilon, \mathbf{H}^\varepsilon)$ est à trace normale continue au travers de $\Sigma_{\varepsilon H}$: $\vec{e}_3 \cdot \mathbf{E}^\varepsilon \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}^-} = \vec{e}_3 \cdot \mathbf{E}^\varepsilon \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}^+}$ et $\vec{e}_3 \cdot \mathbf{H}^\varepsilon \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}^-} = \vec{e}_3 \cdot \mathbf{H}^\varepsilon \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}^+}$, en remplaçant $(\mathbf{E}^\varepsilon, \mathbf{H}^\varepsilon)$ par ses développements (1) et (2), nous en déduisons

$$\begin{cases} \vec{e}_3 \cdot \left[\sum_{m \geq 0} \varepsilon^m \mathbf{E}_m \left(\mathbf{x}_T; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_1}{\varepsilon}, H^- \right) \right] = \vec{e}_3 \cdot \left[\sum_{m \geq 0} \varepsilon^m \mathbf{E}_m \left(\mathbf{x}_T; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, H^+ \right) \right] + \sum_{m \geq 0} \varepsilon^m \mathbf{e}_m \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} (\mathbf{x}_T) \\ \vec{e}_3 \cdot \left[\sum_{m \geq 0} \varepsilon^m \mathbf{H}_m \left(\mathbf{x}_T; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, H^- \right) \right] = \vec{e}_3 \cdot \left[\sum_{m \geq 0} \varepsilon^m \mathbf{H}_m \left(\mathbf{x}_T; \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, H^+ \right) \right] + \sum_{m \geq 0} \varepsilon^m \mathbf{h}_m \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} (\mathbf{x}_T) \end{cases} \quad \text{p.p. } \mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2.$$

En identifiant les puissances de ε et en supposant que ces équations sont vraies pour presque tout $\mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{y} \in \Sigma_H^\#$, nous avons

$$\text{p.p. } \mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \left[\vec{e}_3 \cdot \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) \right]_H = - \vec{e}_3 \cdot \mathbf{e}_m \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} (\mathbf{x}_T) \\ \left[\vec{e}_3 \cdot \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) \right]_H = - \vec{e}_3 \cdot \mathbf{h}_m \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} (\mathbf{x}_T) \end{cases}, \quad \text{pour } m \geq 0. \quad (20)$$

Conditions de périodicité

Nous rappelons que nous cherchons des champs proches $\mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \mathbf{y})$ et $\mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \mathbf{y})$ périodiques par rapport à y_1 et y_2 . $(\mathbf{E}_m, \mathbf{H}_m)$ va donc vérifier les conditions de périodicité suivantes

$$\text{p.p. } \mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \vec{e}_1 \times \mathbf{E}_m \Big|_{\Gamma_{1,+}}(\mathbf{x}_T; \cdot) = \vec{e}_1 \times \mathbf{E}_m \Big|_{\Gamma_{1,-}}(\mathbf{x}_T; \cdot) \\ \vec{e}_2 \times \mathbf{E}_m \Big|_{\Gamma_{2,+}}(\mathbf{x}_T; \cdot) = \vec{e}_2 \times \mathbf{E}_m \Big|_{\Gamma_{2,-}}(\mathbf{x}_T; \cdot) \end{cases}, \quad \text{pour } m \geq 0. \quad (21)$$

$$\text{p.p. } \mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \vec{e}_1 \times \mathbf{H}_m \Big|_{\Gamma_{1,+}}(\mathbf{x}_T; \cdot) = \vec{e}_1 \times \mathbf{H}_m \Big|_{\Gamma_{1,-}}(\mathbf{x}_T; \cdot) \\ \vec{e}_2 \times \mathbf{H}_m \Big|_{\Gamma_{2,+}}(\mathbf{x}_T; \cdot) = \vec{e}_2 \times \mathbf{H}_m \Big|_{\Gamma_{2,-}}(\mathbf{x}_T; \cdot) \end{cases}, \quad \text{pour } m \geq 0. \quad (22)$$

Nous abrégeons ces conditions par la suite en $(\mathbf{E}_m, \mathbf{H}_m)$ est (T_1, T_2) -périodique.

Problèmes aux limites pour les termes de champ proche

Les termes de champ proche $(\mathbf{E}_m, \mathbf{H}_m)$ satisfont le système d'équations type : pour tout $m \geq 0$, pour presque tout $\mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2$,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot}_y \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) = - \mathbf{rot}_{\mathbf{x}_t} \mathbf{E}_{m-1}(\mathbf{x}_T; \cdot) & ; \quad \mathbf{rot}_y \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) = - \mathbf{rot}_{\mathbf{x}_t} \mathbf{H}_{m-1}(\mathbf{x}_T; \cdot) \\ \quad - ik \mathbf{H}_{m-1}(\mathbf{x}_T; \cdot) \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\# & ; \quad \quad \quad + ik \mathbf{E}_{m-1}(\mathbf{x}_T; \cdot) \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#, \\ \mathbf{div}_y \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) = - \mathbf{div}_{\mathbf{x}_t} \mathbf{E}_{m-1}(\mathbf{x}_T; \cdot) \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\# & ; \quad \mathbf{div}_y \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) = - \mathbf{div}_{\mathbf{x}_t} \mathbf{H}_{m-1}(\mathbf{x}_T; \cdot) \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\#, \\ \quad (\mathbf{E}_m, \mathbf{H}_m)(\mathbf{x}_T; \cdot) \quad \text{est } (T_1, T_2)\text{-périodique}, & \\ \vec{n} \times \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_\# & ; \quad \vec{n} \cdot \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_\#, \\ \quad (\vec{e}_3 \times \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \cdot)) \times \vec{e}_3 & = \mathbf{Z} (\vec{e}_3 \times \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \cdot)) \quad \text{sur } \Sigma_0^\#, \\ \left[\vec{e}_3 \times \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) \right]_H = - \vec{e}_3 \times \mathbf{e}_m \Big|_{\Sigma_{eH}}(\mathbf{x}_T) & ; \quad \left[\vec{e}_3 \times \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) \right]_H = - \vec{e}_3 \times \mathbf{h}_m \Big|_{\Sigma_{eH}}(\mathbf{x}_T), \\ \left[\vec{e}_3 \cdot \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) \right]_H = - \vec{e}_3 \cdot \mathbf{e}_m \Big|_{\Sigma_{eH}}(\mathbf{x}_T) & ; \quad \left[\vec{e}_3 \cdot \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) \right]_H = - \vec{e}_3 \cdot \mathbf{h}_m \Big|_{\Sigma_{eH}}(\mathbf{x}_T); \end{array} \right. \quad (23)$$

avec $\mathbf{E}_{-1} = \mathbf{H}_{-1} = 0$ par convention.

On voit que \mathbf{x}_T joue le rôle de paramètre et que pour presque tout $\mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2$, les termes de champ proche $\mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \cdot)$ et $\mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \cdot)$ sont solutions d'un système d'équations couplées posé dans une bande, contenant des particules de taille 1, avec des conditions de saut en $\Sigma_H^\#$ dépendant des termes de champ lointain \mathbf{e}_m et \mathbf{h}_m .

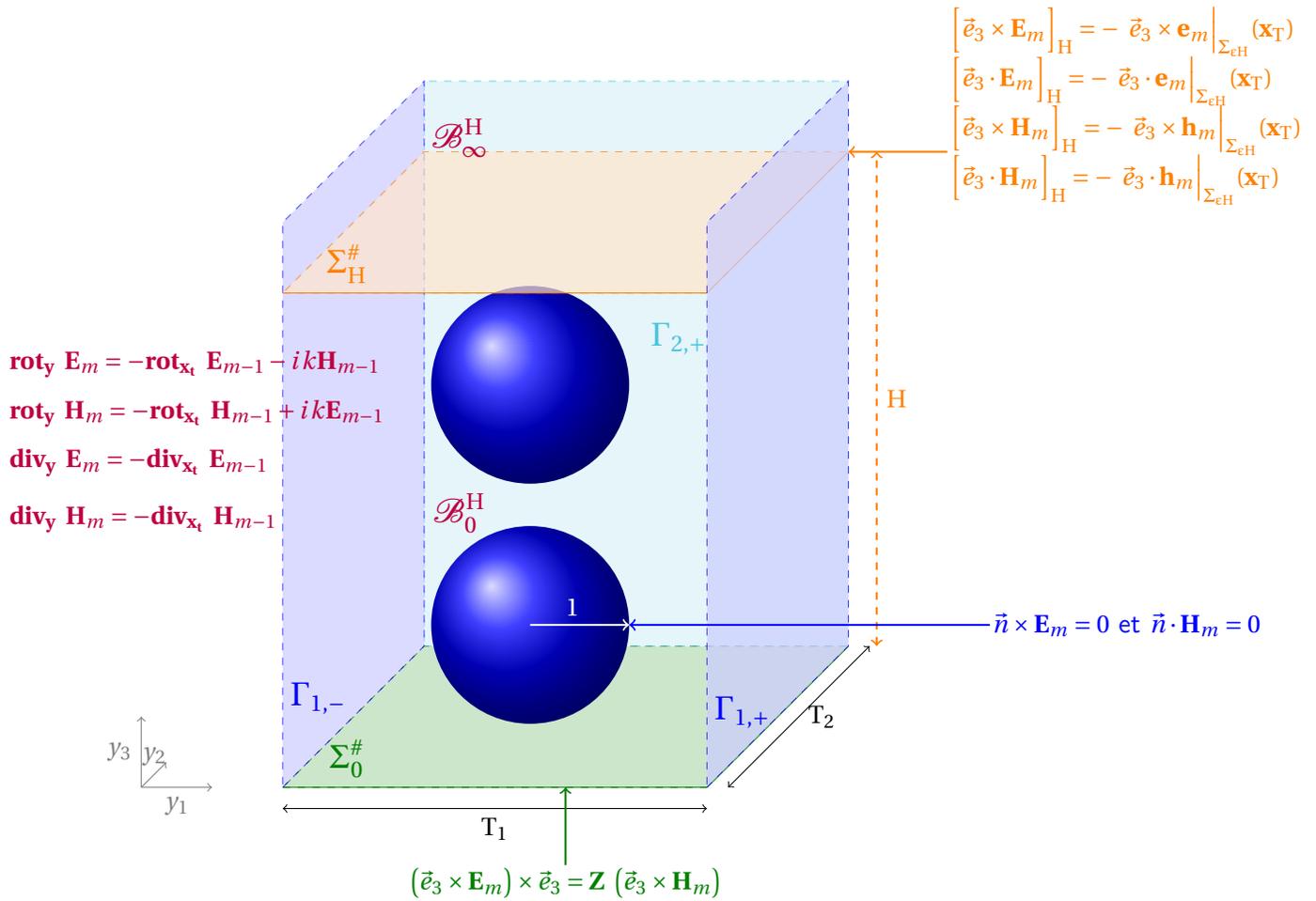


Figure 9.1 – Schéma du système d'équations vérifié par les termes de champ proche

9.3 Caractère bien posé des problèmes de champ proche

Les problèmes de champ proche (23) peuvent se réécrire sous la forme : pour $m \geq 0$

$$\text{p.p. } \mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2, \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot}_y \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) = \mathbf{F}_{m-1}^E(\mathbf{x}_T; \cdot) \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\# \quad ; \quad \mathbf{rot}_y \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) = \mathbf{F}_{m-1}^H(\mathbf{x}_T; \cdot) \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\# ; \\ \mathbf{div}_y \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) = \mathbf{G}_{m-1}^E(\mathbf{x}_T; \cdot) \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\# \quad ; \quad \mathbf{div}_y \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) = \mathbf{G}_{m-1}^H(\mathbf{x}_T; \cdot) \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\# ; \\ \quad \quad \quad (\mathbf{E}_m, \mathbf{H}_m)(\mathbf{x}_T; \cdot) \quad \text{est } (T_1, T_2)\text{-périodique} ; \\ \quad \quad \quad \vec{n} \times \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_\# \quad ; \quad \vec{n} \cdot \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_\# ; \\ \quad \quad \quad (\vec{e}_3 \times \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \cdot)) \times \vec{e}_3 = \mathbf{Z} (\vec{e}_3 \times \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \cdot)) \quad \text{sur } \Sigma_0^\# ; \\ \left[\vec{e}_3 \times \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) \right]_H = \vec{e}_3 \times \alpha_m^E(\mathbf{x}_T) \quad ; \quad \left[\vec{e}_3 \times \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) \right]_H = \vec{e}_3 \times \alpha_m^H(\mathbf{x}_T) ; \\ \left[\vec{e}_3 \cdot \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) \right]_H = \vec{e}_3 \cdot \alpha_m^E(\mathbf{x}_T) \quad ; \quad \left[\vec{e}_3 \cdot \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) \right]_H = \vec{e}_3 \cdot \alpha_m^H(\mathbf{x}_T) ; \end{array} \right. \quad (24)$$

où $\mathbf{F}_{m-1}^E(\mathbf{x}_T; \cdot)$, $\mathbf{F}_{m-1}^H(\mathbf{x}_T; \cdot)$ dépendent des termes précédents $\mathbf{E}_{m-1}(\mathbf{x}_T; \cdot)$ et $\mathbf{H}_{m-1}(\mathbf{x}_T; \cdot)$ et sont telles que $\mathbf{div}_y \mathbf{F}_{m-1}^E(\mathbf{x}_T; \cdot) = 0$ et $\mathbf{div}_y \mathbf{F}_{m-1}^H(\mathbf{x}_T; \cdot) = 0$. Si $\mathbf{E}_{m-1}(\mathbf{x}_T; \cdot)$ et $\mathbf{H}_{m-1}(\mathbf{x}_T; \cdot)$ décroissent quand y_2 tend vers l'infini alors $\mathbf{F}_{m-1}^E(\mathbf{x}_T; \cdot)$, $\mathbf{F}_{m-1}^H(\mathbf{x}_T; \cdot)$ aussi. $\mathbf{G}_{m-1}^E(\mathbf{x}_T; \cdot)$ dépend de $\mathbf{E}_{m-1}(\mathbf{x}_T; \cdot)$ et $\mathbf{G}_{m-1}^H(\mathbf{x}_T; \cdot)$ dépend de $\mathbf{H}_{m-1}(\mathbf{x}_T; \cdot)$. Quant à $\alpha_m^E(\mathbf{x}_T)$, elle dépend de $\mathbf{e}_m|_{\Sigma_{\epsilon H}}(\mathbf{x}_T)$ et $\alpha_m^H(\mathbf{x}_T)$ dépend de $\mathbf{h}_m|_{\Sigma_{\epsilon H}}(\mathbf{x}_T)$. De plus, $\alpha_m^E(\mathbf{x}_T)$ et $\alpha_m^H(\mathbf{x}_T)$ sont des fonctions indépendantes de y_1 et y_2 .

Dans le système d'équations (24), \mathbf{x}_T joue le rôle de paramètre. Dans ce qui suit, nous omettons dans un premier temps les variables (x_1, x_2) pour simplifier les notations et nous nous intéressons au caractère bien posé des problèmes qui s'écrivent sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot}_y \mathbf{E} = \mathbf{F}^E \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\# \quad ; \quad \mathbf{rot}_y \mathbf{H} = \mathbf{F}^H \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\# ; \\ \mathbf{div}_y \mathbf{E} = \mathbf{G}^E \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\# \quad ; \quad \mathbf{div}_y \mathbf{H} = \mathbf{G}^H \quad \text{dans } \mathcal{B} \setminus \Sigma_H^\# ; \\ \quad \quad \quad (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \quad \text{est } (T_1, T_2)\text{-périodique} , \\ \quad \quad \quad \vec{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_\# \quad ; \quad \vec{n} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_\# ; \\ \quad \quad \quad (\vec{e}_3 \times \mathbf{E}) \times \vec{e}_3 = \mathbf{Z} (\vec{e}_3 \times \mathbf{H}) \quad \text{sur } \Sigma_0^\# ; \\ \left[\vec{e}_3 \times \mathbf{E} \right]_H = \vec{e}_3 \times \alpha^E \quad ; \quad \left[\vec{e}_3 \times \mathbf{H} \right]_H = \vec{e}_3 \times \alpha^H ; \\ \left[\vec{e}_3 \cdot \mathbf{E} \right]_H = \vec{e}_3 \cdot \alpha^E \quad ; \quad \left[\vec{e}_3 \cdot \mathbf{H} \right]_H = \vec{e}_3 \cdot \alpha^H . \end{array} \right. \quad (25)$$

Il est assez facile de voir que $\mathbf{E} = \chi_{y_3 > H} \alpha^E + \mathbf{E}_C$ et $\mathbf{H} = \chi_{y_3 > H} \alpha^H + \mathbf{H}_C$ avec \mathbf{E}_C et \mathbf{H}_C qui vérifient (25) avec des sauts de dérivée normale et de trace tangentielle nuls :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot}_y \mathbf{E}_C = \mathbf{F}^E \quad \text{dans } \mathcal{B} \quad ; \quad \mathbf{rot}_y \mathbf{H}_C = \mathbf{F}^H \quad \text{dans } \mathcal{B} ; \\ \mathbf{div}_y \mathbf{E}_C = \mathbf{G}^E \quad \text{dans } \mathcal{B} \quad ; \quad \mathbf{div}_y \mathbf{H}_C = \mathbf{G}^H \quad \text{dans } \mathcal{B} ; \\ \quad \quad \quad (\mathbf{E}_C, \mathbf{H}_C) \quad \text{est } (T_1, T_2)\text{-périodique} , \quad (25\text{bis}) \\ \quad \quad \quad \vec{n} \times \mathbf{E}_C = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_\# \quad ; \quad \vec{n} \cdot \mathbf{H}_C = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_\# ; \\ \quad \quad \quad (\vec{e}_3 \times \mathbf{E}_C) \times \vec{e}_3 = \mathbf{Z} (\vec{e}_3 \times \mathbf{H}_C) \quad \text{sur } \Sigma_0^\# . \end{array} \right.$$

Nous introduisons donc l'espace

$$\mathbf{W}_\# := \left\{ \mathbf{U} \in \left(L^2_{loc}(\mathcal{B}) \right)^3 ; \mathbf{rot}_y \mathbf{U} \in \left(L^2(\mathcal{B}) \right)^3 ; \mathbf{div}_y \mathbf{U} \in L^2(\mathcal{B}) ; \frac{\mathbf{U}}{\sqrt{1 + (y_3)^2}} \in \left(L^2(\mathcal{B}) \right)^3 ; \mathbf{U} \text{ est } (T_1, T_2)\text{-périodique} \right\}$$

muni du produit scalaire

$$\forall \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbf{W}_\# , \quad (\mathbf{U}, \mathbf{V})_{\mathbf{W}_\#} = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{rot}_y \mathbf{U} \cdot \overline{\mathbf{rot}_y \mathbf{V}} dy + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{div}_y \mathbf{U} \cdot \overline{\mathbf{div}_y \mathbf{V}} dy + \int_{\mathcal{B}} \frac{\mathbf{U} \cdot \overline{\mathbf{V}}}{1 + (y_3)^2} dy ;$$

$\|\cdot\|_{\mathbf{W}_\#}$ étant la norme associée ; et l'espace

$$\mathcal{H}_\#(\mathcal{B}) := \{(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in \mathbf{W}_\# \times \mathbf{W}_\# \text{ tel que } \vec{n} \times \mathbf{E} = 0 \text{ sur } \mathcal{P}_\#; \vec{n} \cdot \mathbf{H} = 0 \text{ sur } \partial \mathcal{P}_\#; (\vec{e}_3 \times \mathbf{E}) \times \vec{e}_3 = \mathbf{Z}(\vec{e}_3 \times \mathbf{H}) \text{ sur } \Sigma_0^\#\}$$

muni du produit scalaire

$$\forall (\mathbf{E}, \mathbf{H}), (\mathbf{E}', \mathbf{H}') \in \mathcal{H}_\#(\mathcal{B}) , \quad ((\mathbf{E}, \mathbf{H}), (\mathbf{E}', \mathbf{H}'))_{\mathcal{H}_\#} = (\mathbf{E}, \mathbf{E}')_{\mathbf{W}_\#} + (\mathbf{H}, \mathbf{H}')_{\mathbf{W}_\#} ,$$

et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\#}$ étant la norme associée $\|(\mathbf{E}, \mathbf{H})\|_{\mathcal{H}_\#}^2 = \|\mathbf{E}\|_{\mathbf{W}_\#}^2 + \|\mathbf{H}\|_{\mathbf{W}_\#}^2$.

Nous introduisons aussi l'espace

$$\mathbf{W}_\#^1(\mathcal{B}) = \left\{ p \in \mathbf{H}_{loc}^1(\mathcal{B}); p \text{ est } (T_1, T_2) \text{-périodique; } \nabla p \in \left(\mathbf{L}^2(\mathcal{B}) \right)^3; \frac{p}{\sqrt{1 + (y_3)^2}} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{B}) \right\} . \quad (26)$$

Le problème (25bis) n'est pas bien posé dans $\mathcal{H}_\#(\mathcal{B})$. En effet, nous allons voir que le noyau \mathcal{N} de l'opérateur associé à (25bis) n'est pas vide, où

$$\mathcal{N} := \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in \mathcal{H}_\#(\mathcal{B}) \quad \text{tel que} \\ \mathbf{rot}_y \mathbf{E} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B} \quad ; \quad \mathbf{rot}_y \mathbf{H} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B} \\ \mathbf{div}_y \mathbf{E} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B} \quad ; \quad \mathbf{div}_y \mathbf{H} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B} \end{array} \right\} . \quad (27)$$

Mais nous allons montrer que le problème (25bis) est bien posé dans l'espace $\mathcal{H}_\#^0(\mathcal{B})$ sous-espace de $\mathcal{H}_\#(\mathcal{B})$ orthogonal au noyau \mathcal{N} (par rapport au produit scalaire de $\mathcal{H}_\#(\mathcal{B})$), si les termes sources vérifient certaines conditions. Notons que cette étude a été réalisée dans [Del15] dans le cas d'inclusions pénétrables ou dans [DH20] dans le cas d'inclusions parfaitement conductrices. Nous avons étendu ces résultats à notre cas, les difficultés étant la condition de type Robin $(\vec{e}_3 \times \mathbf{E}) \times \vec{e}_3 = \mathbf{Z}(\vec{e}_3 \times \mathbf{H})$ sur $\Sigma_0^\#$.

9.3.1 Quelques résultats préliminaires

Nous rappelons les définitions suivantes qui peuvent être trouvés dans le livre [ACL18], résultats que nous avons étendus au cadre périodique.

Nous introduisons

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\#^1(\mathcal{B}) &:= \left\{ \mathbf{U} \in \mathbf{H}^1(\mathcal{B}), \text{ telle que pour } j = 1, 2, \mathbf{U} \Big|_{\Gamma_{j,+}} = \mathbf{U} \Big|_{\Gamma_{j,-}} \right\} ; \\ \mathbf{H}_\#(\mathbf{rot}_y, \mathcal{B}) &:= \left\{ \mathbf{U} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}_y, \mathcal{B}), \text{ telle que pour } j = 1, 2, \mathbf{U} \times \vec{e}_j \Big|_{\Gamma_{j,+}} = \mathbf{U} \times \vec{e}_j \Big|_{\Gamma_{j,-}} \right\} ; \\ \mathbf{H}_\#(\mathbf{div}_y, \mathcal{B}) &:= \left\{ \mathbf{U} \in \mathbf{H}(\mathbf{div}_y, \mathcal{B}), \text{ telle que pour } j = 1, 2, \mathbf{U} \cdot \vec{e}_j \Big|_{\Gamma_{j,+}} = \mathbf{U} \cdot \vec{e}_j \Big|_{\Gamma_{j,-}} \right\} . \end{aligned}$$

Nous notons :

- γ_T l'opérateur de trace tangentielle

$$\begin{aligned} \gamma_T : H_{\#}^1(\mathcal{B}) &\rightarrow \left(L^2(\mathcal{B})\right)^3 \\ \mathbf{f} &\mapsto \vec{e}_3 \times \mathbf{f} = \begin{pmatrix} -f^{(2)} \\ f^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on note $H_{\perp, \#}^{1/2}(\Sigma_P^{\#}) := \gamma_T(H_{\#}^1(\mathcal{B}))$;

- Π_T l'opérateur de trace tangentielle tournée

$$\begin{aligned} \Pi_T : H_{\#}^1(\mathcal{B}) &\rightarrow \left(L^2(\mathcal{B})\right)^3 \\ \mathbf{f} &\mapsto \vec{e}_3 \times (\mathbf{f} \times \vec{e}_3) = \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on note $H_{\parallel, \#}^{1/2}(\Sigma_P^{\#}) := \Pi_T(H_{\#}^1(\mathcal{B}))$.

De plus, nous introduisons $H_{\perp, \#}^{-1/2}(\Sigma_P^{\#}) = \left(H_{\perp, \#}^{1/2}(\Sigma_P^{\#})\right)'$ et $H_{\parallel, \#}^{-1/2}(\Sigma_P^{\#}) = \left(H_{\parallel, \#}^{1/2}(\Sigma_P^{\#})\right)'$.

Comme les champs ne sont pas H^1 , nous introduisons également

$$H_{\parallel, \#}^{-1/2}(\mathbf{div}_T, \Sigma_P^{\#}) = \gamma_T(H_{\#}(\mathbf{rot}, \mathcal{B}))$$

et

$$H_{\perp, \#}^{-1/2}(\mathbf{rot}_T, \Sigma_P^{\#}) = \Pi_T(H_{\#}(\mathbf{rot}, \mathcal{B})).$$

Le nom donné à ces espaces vient de la caractérisation suivante

$$H_{\parallel, \#}^{-1/2}(\mathbf{div}_T, \Sigma_P^{\#}) = \left\{ \mathbf{f} \in H_{\parallel, \#}^{-1/2}(\Sigma_P^{\#}), \mathbf{div}_T \mathbf{f}_T \in H^{-1/2}(\Sigma_P^{\#}) \right\};$$

et

$$H_{\perp, \#}^{-1/2}(\mathbf{rot}_T, \Sigma_P^{\#}) = \left\{ \mathbf{f} \in H_{\perp, \#}^{-1/2}(\Sigma_P^{\#}), \mathbf{rot}_T \mathbf{f}_T \in H^{-1/2}(\Sigma_P^{\#}) \right\}.$$

Dans ces dernières égalités, comme $\mathbf{f} \in H_{\parallel, \#}^{-1/2}(\Sigma_P^{\#})$ ou $\mathbf{f} \in H_{\perp, \#}^{-1/2}(\Sigma_P^{\#})$ alors $f^{(3)} = 0$ et $\mathbf{div}_T \mathbf{f} = \mathbf{div}_T \mathbf{f}_T$ et $\mathbf{rot}_T \mathbf{f} = \mathbf{rot}_T \mathbf{f}_T$. Nous montrons enfin que

$$H_{\parallel, \#}^{-1/2}(\mathbf{div}_T, \Sigma_P^{\#}) = \left[H_{\perp, \#}^{-1/2}(\mathbf{rot}_T, \Sigma_P^{\#}) \right]'$$

Nous écrivons dans la suite $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma_P^{\#}}$ le crochet de dualité.

Définition 105

Soit $H_{zmv}^1(\Sigma_P^{\#}) = \left\{ \mathbf{f} \in L_t^2(\Sigma_P^{\#}) : \int_{\Sigma_P^{\#}} \mathbf{f} dy_1 dy_2 = 0 \right\}$ avec $L_t^2(\Sigma_P^{\#}) := \left\{ \mathbf{v} \in \left(L^2(\Sigma_P^{\#})\right)^3 : \mathbf{v} \cdot \vec{e}_3 = 0 \text{ sur } \Sigma_P^{\#} \right\}$ et $\mathcal{K}(\Sigma_P^{\#}) := \left\{ \mathbf{f} \in H_{zmv}^1(\Sigma_P^{\#}), \Delta_T \mathbf{f} \in H_{\#}^{-1/2}(\Sigma_P^{\#}) \right\}$, nous avons les décompositions suivantes :

$$H_{\parallel, \#}^{-1/2}(\mathbf{div}_T, \Sigma_P^{\#}) := \mathbf{rot}_T \left(H_{zmv}^1(\Sigma_P^{\#}) \right) \oplus \nabla_T \left(\mathcal{K}(\Sigma_P^{\#}) \right) \quad (28)$$

et

$$H_{\perp, \#}^{-1/2}(\mathbf{rot}_T, \Sigma_P^{\#}) := \nabla_T \left(H_{zmv}^1(\Sigma_P^{\#}) \right) \oplus \mathbf{rot}_T \left(\mathcal{K}(\Sigma_P^{\#}) \right). \quad (29)$$

Proposition 106

Soit $\mathbf{E} \in H_{\#}(\mathbf{rot}_y, \mathcal{B})$, $\mathbf{H} \in H_{\#}(\mathbf{rot}_y, \mathcal{B})$ tels que

$$\Pi_T \mathbf{E} = \mathbf{Z} \gamma_T \mathbf{H} \quad \text{sur} \quad \Sigma_0^{\#},$$

alors

$$\Pi_T \mathbf{E} \in L_t^2(\Sigma_0^{\#}) \quad \text{et} \quad \gamma_T \mathbf{H} \in L_t^2(\Sigma_0^{\#}).$$

Preuve. Comme

- $\gamma_T(\mathbf{H}) \in H_{\parallel, \#}^{-1/2}(\mathbf{div}_T, \Sigma_0^{\#})$, $\exists \psi_{\mathbf{H}} \in H_{zmv}^{1/2}(\Sigma_0^{\#})$, $\exists \phi_{\mathbf{H}} \in \mathcal{K}(\Sigma_0^{\#}) \subset H_{zmv}^1(\Sigma_0^{\#})$ tels que $\gamma_T(\mathbf{H}) = \mathbf{rot}_T(\psi_{\mathbf{H}}) + \nabla_T(\phi_{\mathbf{H}})$;
- $\pi_T(\mathbf{E}) \in H_{\perp, \#}^{-1/2}(\mathbf{rot}_T, \Sigma_0^{\#})$, $\exists \phi_{\mathbf{E}} \in H_{zmv}^{1/2}(\Sigma_0^{\#})$, $\exists \psi_{\mathbf{E}} \in \mathcal{K}(\Sigma_0^{\#})$ tels que $\pi_T(\mathbf{E}) = \mathbf{rot}_T(\psi_{\mathbf{E}}) + \nabla_T(\phi_{\mathbf{E}})$.

Comme $\Pi_T(\mathbf{E}) = \mathbf{Z} \gamma_T(\mathbf{H})$, nous en déduisons

$$\mathbf{rot}_T(\psi_{\mathbf{E}} - \mathbf{Z}\psi_{\mathbf{H}}) + \nabla_T(\phi_{\mathbf{E}} - \mathbf{Z}\phi_{\mathbf{H}}) = 0. \quad (30)$$

En appliquant \mathbf{div}_T à (30), nous obtenons

$$\Delta_T(\phi_{\mathbf{E}} - \mathbf{Z}\phi_{\mathbf{H}}) = 0.$$

Comme $\phi_{\mathbf{H}} \in \mathcal{K}(\Sigma_0^{\#}) \subset H_{zmv}^1(\Sigma_0^{\#}) \subset H_{\#}^1(\Sigma_0^{\#})$, nous en déduisons que $\phi_{\mathbf{E}} \in H_{\#}^1(\Sigma_0^{\#})$ et $\int_{\Sigma_0^{\#}} |\nabla_T(\phi_{\mathbf{E}} + \mathbf{Z}\phi_{\mathbf{H}})|^2 dy_1 dy_2 = 0$ et $\phi_{\mathbf{E}} - \mathbf{Z}\phi_{\mathbf{H}} = \text{constante}$. Nous avons donc $\Pi_T(\mathbf{E}) = \mathbf{rot}(\psi_{\mathbf{E}}) + \nabla(\phi_{\mathbf{E}})$ avec $\psi_{\mathbf{E}} \in \mathcal{K}(\Sigma_0^{\#})$ et $\phi_{\mathbf{E}} \in H_{\#}^1(\Sigma_0^{\#})$ donc $\Pi_T(\mathbf{E}) \in L_t^2(\Sigma_0^{\#})$ et $\gamma_T(\mathbf{H})$ également. \square

9.3.2 Caractérisation du noyau

Nous commençons par caractériser le noyau \mathcal{N} du problème (25bis).

Introduisons tout d'abord les fonctions profils qui interviendront dans la définition du noyau.

Définition 107

- $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, soit $p_i \in H_{loc}^1(\mathcal{B})$ telle que $p_i = y_i + \tilde{p}_i$ avec $\tilde{p}_i \in W_{\#}^1(\mathcal{B})$ qui satisfait les équations

$$\begin{cases} \Delta \tilde{p}_i = 0 & \text{dans } \mathcal{B}, \\ \tilde{p}_i = -y_i & \text{sur } \partial \mathcal{P}_{\#}, \\ \tilde{p}_i = 0 & \text{sur } \Sigma_0^{\#}. \end{cases} \quad (31)$$

- $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, soit $q_i \in H_{loc}^1(\mathcal{B})$ telle que $q_i = y_i + \tilde{q}_i$ avec $\tilde{q}_i \in W_{\#}^1(\mathcal{B})$ qui satisfait les équations

$$\begin{cases} \Delta \tilde{q}_i = 0 & \text{dans } \mathcal{B}, \\ \nabla \tilde{q}_i \cdot \vec{n} = -\vec{e}_i \cdot \vec{n} & \text{sur } \partial \mathcal{P}_{\#}, \\ \tilde{q}_i = 0 & \text{sur } \Sigma_0^{\#}. \end{cases} \quad (32)$$

- Si $\mathcal{P}_{\#}$ est composé de N particules $\mathcal{P}_{\#} = \bigcup_{J=1}^N B_J$ alors soit $\forall J \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $r_J \in W_{\#}^1(\mathcal{B})$ qui satisfait les équations

$$\begin{cases} \Delta r_J = 0 & \text{dans } \mathcal{B}, \\ r_J = 1 & \text{sur } \partial B_J, \\ r_J = 0 & \text{sur } \Sigma_0^{\#} \cup (\partial \mathcal{P}_{\#} \setminus \partial B_J). \end{cases} \quad (33)$$

En utilisant la proposition [35](#) du chapitre [3](#), nous montrons que les problèmes [\(31\)](#), [\(32\)](#) et [\(33\)](#) sont bien posés. Nous pouvons montrer aussi, d'après la proposition [9](#) du chapitre [3](#), qu'il existe $c_i \in \mathbb{R}$ telle que $\tilde{p}_i - c_i$ vérifie la propriété (\mathcal{P}_{∞}) du chapitre 3. De même pour \tilde{q}_i et les r_J .

Notons que les p_i et les q_i ont une croissance linéaire à l'infini et $\lim_{y_3 \rightarrow +\infty} \nabla p_i = \vec{e}_i$ et $\lim_{y_3 \rightarrow +\infty} \nabla q_i = \vec{e}_i$ alors que les r_J sont telles que $\lim_{y_3 \rightarrow +\infty} \nabla r_J = 0$.

Proposition 108

Supposons que $\mathcal{P}_{\#}$ est composé de N particules alors \mathcal{N} est un espace de dimension $N+4$ donné par

$$\mathcal{N} := \left\{ (\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \left(c_1(\nabla p_1, -\frac{1}{Z(1)}\nabla q_2) + c_2(\nabla p_2, \frac{1}{Z(2)}\nabla q_1) + c_3(\nabla p_3, 0) + d_3(0, \nabla q_3) + \sum_{J=1}^N \alpha_J(\nabla r_J, 0) \right), \right. \\ \left. (c_1, c_2, c_3, d_3) \in \mathbb{C}^4, \forall J \in \llbracket 1, N \rrbracket, \alpha_J \in \mathbb{C} \right\}. \quad (34)$$

Remarque 29. Les fonctions du noyau $(\nabla r_J, 0)$ sont un peu particulière car elles tendent vers 0 à l'infini ce qui n'est pas le cas des 4 premières fonctions du noyau.

Preuve. La preuve se fait en deux étapes. Nous montrons d'abord que les fonctions de la forme

$$(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \left(c_1(\nabla p_1, -\frac{1}{Z^{(1)}}\nabla q_2) + c_2(\nabla p_2, \frac{1}{Z^{(2)}}\nabla q_1) + c_3(\nabla p_3, 0) + d_3(0, \nabla q_3) + \sum_{j=1}^N \alpha_j(\nabla r_j, 0) \right) \quad (35)$$

appartiennent à \mathcal{N} . Puis, nous montrons que si (\mathbf{E}, \mathbf{H}) solution de (25bis) appartient à \mathcal{N} , elle s'écrit sous la forme (35).

Étape 1 : Nous montrons que les fonctions de la forme (35) appartiennent à \mathcal{N} .

Nous avons bien $\mathbf{rot}_y \mathbf{E}, \mathbf{rot}_y \mathbf{H} \in (L^2(\mathcal{B}))^3$, $\mathbf{div}_y \mathbf{E}, \mathbf{div}_y \mathbf{H} \in L^2(\mathcal{B})$ et surtout $\frac{\mathbf{E}}{\sqrt{1+y_3^2}}, \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{1+y_3^2}} \in (L^2(\mathcal{B}))^3$ car $\nabla p_i = \nabla \tilde{p}_i + \tilde{e}_i$ avec $\nabla \tilde{p}_i$ vérifie la propriété (\mathcal{P}_∞) , de même pour ∇q_i et $\nabla r_j \xrightarrow{y_3 \rightarrow +\infty} 0$.

Nous commençons par regarder les équations volumiques :

- équations sur le rotationnel

$$\mathbf{rot}_y \mathbf{E} = \mathbf{rot}_y \left(c_1 \nabla p_1 + c_2 \nabla p_2 + c_3 \nabla p_3 + \sum_{j=1}^N \alpha_j \nabla r_j \right) = 0$$

$$\mathbf{rot}_y \mathbf{H} = \mathbf{rot}_y \left(-c_1 \frac{1}{Z^{(1)}} \nabla q_2 + c_2 \frac{1}{Z^{(2)}} \nabla q_1 + d_3 \nabla q_3 \right) = 0$$

où nous avons utilisé que pour toute fonction \mathbf{U} , $\mathbf{rot}_y(\nabla \mathbf{U}) = 0$.

- équations sur la divergence

$$\mathbf{div}_y \mathbf{E} = \mathbf{div}_y \left(c_1 \nabla p_1 + c_2 \nabla p_2 + c_3 \nabla p_3 + \sum_{j=1}^N \alpha_j \nabla r_j \right) = 0$$

$$\mathbf{div}_y \mathbf{H} = \mathbf{div}_y \left(-c_1 \frac{1}{Z^{(1)}} \nabla q_2 + c_2 \frac{1}{Z^{(2)}} \nabla q_1 + d_3 \nabla q_3 \right) = 0$$

où nous avons utilisé que pour toute fonction \mathbf{U} , $\mathbf{div}_y(\nabla \mathbf{U}) = \Delta \mathbf{U}$ et les p_i, q_i, r_j vérifient $\Delta p_i = 0$, $\Delta q_i = 0$ et $\Delta r_j = 0$.

Regardons maintenant les conditions de bord

- conditions sur $\partial \mathcal{P}_\#$:

$$\tilde{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = c_1 \tilde{\mathbf{n}} \times (\nabla p_1) + c_2 \tilde{\mathbf{n}} \times (\nabla p_2) + c_3 \tilde{\mathbf{n}} \times (\nabla p_3) + \sum_{j=1}^N \alpha_j \tilde{\mathbf{n}} \times \nabla r_j = 0 ;$$

car pour $i = \{1, 2, 3\}$, $p_i = 0$ sur $\partial \mathcal{P}_\#$ et donc $\nabla p_i \times \tilde{\mathbf{n}} = 0$ et comme $r_j = cst$ sur $\partial \mathcal{P}_\#$ alors $\nabla r_j \times \tilde{\mathbf{n}} = 0$.

$$\tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H} = -c_1 \frac{1}{Z^{(1)}} \tilde{\mathbf{n}} \cdot (\nabla q_2) + c_2 \frac{1}{Z^{(2)}} \tilde{\mathbf{n}} \cdot (\nabla q_1) + d_3 \tilde{\mathbf{n}} \cdot (\nabla q_3) = 0 ;$$

où nous avons utilisé que pour $i = \{1, 2, 3\}$, $\tilde{\mathbf{n}} \cdot \nabla q_i = \tilde{\mathbf{n}} \cdot \nabla \tilde{q}_i + \tilde{\mathbf{n}} \cdot \nabla y_i = -\tilde{e}_i \cdot \tilde{\mathbf{n}} + \tilde{\mathbf{n}} \cdot \tilde{e}_1 = 0$.

- condition sur Σ_0 :

$$(\tilde{\mathbf{e}}_3 \times \mathbf{E}) \times \tilde{\mathbf{e}}_3 = \left[\tilde{\mathbf{e}}_3 \times \left(c_1 \nabla p_1 + c_2 \nabla p_2 + c_3 \nabla p_3 + \sum_{j=1}^N \alpha_j \nabla r_j \right) \right] \times \tilde{\mathbf{e}}_3$$

et

$$\vec{e}_3 \times \mathbf{H} = \vec{e}_3 \times \left(-c_1 \frac{1}{Z^{(1)}} \nabla q_2 + c_2 \frac{1}{Z^{(2)}} \nabla q_1 + d_3 \nabla q_3 \right)$$

Nous avons $\vec{e}_3 \times \nabla p_1 = \vec{e}_3 \times \nabla \tilde{p}_1 + \vec{e}_3 \times \nabla y_1 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$ et pour les mêmes raisons $\vec{e}_3 \times \nabla q_1 = \vec{e}_2$. De plus, $\vec{e}_3 \times \nabla p_2 = \vec{e}_3 \times \nabla \tilde{p}_2 + \vec{e}_3 \times \nabla y_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$ et de la même manière $\vec{e}_3 \times \nabla q_2 = -\vec{e}_1$. Enfin, $\vec{e}_3 \times \nabla p_3 = 0$, $\forall j$ $\nabla r_j \times \vec{e}_3 = 0$ et $\vec{e}_3 \times \nabla q_3 = 0$. Ceci nous donne

$$\begin{aligned} (\vec{e}_3 \times \mathbf{E}) \times \vec{e}_3 - \mathbf{Z} (\vec{e}_3 \times \mathbf{H}) &= \left[c_1 \vec{e}_2 - c_2 \vec{e}_1 \right] \times \vec{e}_3 - \mathbf{Z} \left[c_1 \frac{1}{Z^{(1)}} \vec{e}_1 + c_2 \frac{1}{Z^{(2)}} \vec{e}_2 \right] \\ &= c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 - c_1 \vec{e}_1 - c_2 \vec{e}_2 = 0. \end{aligned}$$

Nous venons de montrer que si (\mathbf{E}, \mathbf{H}) s'écrit sous la forme (35) alors (\mathbf{E}, \mathbf{H}) est bien dans \mathcal{N} défini par (27).

Étape 2 : Nous montrons maintenant que si $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in \mathcal{N}$, (\mathbf{E}, \mathbf{H}) s'écrit sous la forme

$$\left\{ c_1 (\nabla p_1, -\frac{1}{Z^{(1)}} \nabla q_2) + c_2 (\nabla p_2, \frac{1}{Z^{(2)}} \nabla q_1) + c_3 (\nabla p_3, 0) + d_3 (0, \nabla q_3) + \sum_{j=1}^N \alpha_j (\nabla r_j, 0) \right\}.$$

- Nous écrivons d'abord le développement modal de (\mathbf{E}, \mathbf{H}) pour $y_3 > L$. Nous regardons en particulier le développement modal de \mathbf{E} . Évidemment, nous avons un développement similaire pour \mathbf{H} . Comme

$$\begin{cases} \mathbf{rot}_y \mathbf{E} = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^H, \\ \mathbf{div}_y \mathbf{E} = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^H, \\ \mathbf{E} \text{ est } (T_1, T_2)\text{-périodique}, \end{cases}$$

alors il est possible d'écrire $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} + \nabla \mathbf{div} \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E} = 0$. En reprenant les calculs de la section "Décomposition modale" du chapitre précédent pour $k=0$ et $(k_1, k_2) = 0$, nous obtenons que \mathbf{E} admet le développement modal

$$\mathbf{E}(y_1, y_2, y_3) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{E}_{\mathbf{m},\mathbf{n}} e^{-2\pi \sqrt{\frac{m^2}{T_1^2} + \frac{n^2}{T_2^2}} (y_3 - L)} e^{2i\pi \left(\frac{m}{T_1} y_1 + \frac{n}{T_2} y_2 \right)}, \quad \mathcal{E}_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \in \mathbb{C}^3. \quad (36)$$

De la même manière, \mathbf{H} admet le développement modal

$$\mathbf{H}(y_1, y_2, y_3) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{H}_{\mathbf{m},\mathbf{n}} e^{-2\pi \sqrt{\frac{m^2}{T_1^2} + \frac{n^2}{T_2^2}} (y_3 - L)} e^{2i\pi \left(\frac{m}{T_1} y_1 + \frac{n}{T_2} y_2 \right)}, \quad \mathcal{H}_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \in \mathbb{C}^3. \quad (37)$$

- Puisque $\mathbf{rot}_y \mathbf{E} = 0$, il existe une fonction $p \in H_{loc}^1(\mathcal{B})$ définie à une constante près telle que $\mathbf{E} = \nabla p$. De même, comme $\mathbf{rot}_y \mathbf{H} = 0$, il existe une fonction $q \in H_{loc}^1(\mathcal{B})$ définie à une constante près telle que $\mathbf{H} = \nabla q$.
- Nous allons maintenant déterminer une expression explicite de p et q . En utilisant le développement modal de \mathbf{E} donné par (36), nous pouvons déterminer le comportement de p pour $y_3 > L$. Dire que $\mathbf{div}_y \mathbf{E} = 0$ nous donne que $\Delta p = 0$ donc p admet une décomposition modale et nous montrons que

$$p(y_1, y_2, y_3) = C + \mathcal{E}_{0,0}^{(1)} y_1 + \mathcal{E}_{0,0}^{(2)} y_2 + \mathcal{E}_{0,0}^{(3)} y_3 + \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} \mathcal{P}_{m,n} e^{-2\pi \sqrt{\frac{m^2}{T_1^2} + \frac{n^2}{T_2^2}} (y_3 - L)} e^{2i\pi \left(\frac{m}{T_1} y_1 + \frac{n}{T_2} y_2 \right)}, \quad (38)$$

où les $\mathcal{P}_{m,n}$ dépendent de $\mathcal{E}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$. Mais la dépendance ne sera pas utilisée dans la suite. De même, en utilisant le développement modal de \mathbf{H} donné par (37), nous montrons que, pour $y_3 > L$:

$$q(y_1, y_2, y_3) = G + \mathcal{H}_{0,0}^{(1)} y_1 + \mathcal{H}_{0,0}^{(2)} y_2 + \mathcal{H}_{0,0}^{(3)} y_3 + \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} \mathcal{Q}_{m,n} e^{-2\pi \sqrt{\frac{m^2}{T_1^2} + \frac{n^2}{T_2^2}} (y_3 - L)} e^{2i\pi \left(\frac{m}{T_1} y_1 + \frac{n}{T_2} y_2 \right)}. \quad (39)$$

Comme \mathbf{E} et \mathbf{H} sont (T_1, T_2) -périodiques alors ∇p et ∇q sont (T_1, T_2) -périodiques.

Lemme 109

Soit p une fonction de $H_{loc}^1(\mathcal{B})$ telle que ∇p est (T_1, T_2) -périodique alors il existe $C_1, C_2 > 0$ telles que $\tilde{p}(y_1, y_2, y_3) = p(y_1, y_2, y_3) - C_1 y_1 - C_2 y_2$ et \tilde{p} est (T_1, T_2) -périodique.

Preuve. Pour $i = \{1, 2\}$, nous notons $\psi_i(\mathbf{y}) = p(\mathbf{y} + T_i \vec{e}_i) - p(\mathbf{y})$. Nous avons $\nabla \psi_i(\mathbf{y}) = \nabla p(\mathbf{y} + T_i \vec{e}_i) - \nabla p(\mathbf{y}) = 0$ par périodicité de ∇p ; alors $\psi_i(\mathbf{y}) = C_i T_i$ avec $C_i > 0$. Pour $i = 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\mathbf{y} + T_1 \vec{e}_1) &= \tilde{p}(y_1 + T_1, y_2, y_3) = p(\mathbf{y} + T_1 \vec{e}_1) - C_1(y_1 + T_1) - C_2 y_2 \\ &= p(\mathbf{y}) + C_1 T_1 - C_1 y_1 - C_1 T_1 - C_2 y_2 \quad \text{car } \psi_1(\mathbf{y}) = p(\mathbf{y} + T_1 \vec{e}_1) - p(\mathbf{y}) = C_1 T_1 \\ &= \tilde{p}(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Nous venons de monter la périodicité en y_1 . Nous montrons la périodicité en y_2 de la même façon. \square

En utilisant le lemme 109 nous savons qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ telles que $\tilde{p}(\mathbf{y}) := p(\mathbf{y}) - C_1 y_1 - C_2 y_2$ est (T_1, T_2) -périodique dans $H_{loc}^1(\mathcal{B})$. D'après la décomposition modale de p donnée par (38), nous trouvons $\mathcal{E}_{0,0}^{(1)} = C_1$ et $\mathcal{E}_{0,0}^{(2)} = C_2$ nécessairement. Par conséquent,

$$\tilde{p}(\mathbf{y}) = p(\mathbf{y}) - \mathcal{E}_{0,0}^{(1)} y_1 - \mathcal{E}_{0,0}^{(2)} y_2 \quad \text{est } (T_1, T_2) \text{-périodique .}$$

De même, il existe $D_1, D_2 > 0$ telles que $\tilde{q}(\mathbf{y}) := q(\mathbf{y}) - D_1 y_1 - D_2 y_2$ est (T_1, T_2) -périodique dans $H_{loc}^1(\mathcal{B})$. D'après la décomposition modale de q donnée par (39), nous trouvons $\mathcal{H}_{0,0}^{(1)} = D_1$ et $\mathcal{H}_{0,0}^{(2)} = D_2$ nécessairement. Par conséquent,

$$\tilde{q}(\mathbf{y}) = q(\mathbf{y}) - \mathcal{H}_{0,0}^{(1)} y_1 - \mathcal{H}_{0,0}^{(2)} y_2 \quad \text{est } (T_1, T_2) \text{-périodique .}$$

- Regardons maintenant les équations vérifiées par (\mathbf{E}, \mathbf{H}) afin d'obtenir celles vérifiées par (\tilde{p}, \tilde{q}) :

$$* \quad \mathbf{div}_y \mathbf{E} = \mathbf{div}_y(\nabla p) = \Delta p = 0 \quad \text{alors } \Delta \tilde{p} = 0.$$

$$* \quad \vec{n} \times \mathbf{E} = \vec{n} \times \nabla p = 0 \quad \text{alors } \forall J, \exists c s t_J \text{ telle que}$$

$$p = c s t_J \text{ sur } \partial B_J$$

$$\text{et } \forall J, \tilde{p} = c s t_J - \mathcal{E}_{0,0}^{(1)} y_1 - \mathcal{E}_{0,0}^{(2)} y_2 \text{ sur } \partial B_J.$$

$$* \quad \mathbf{div}_y \mathbf{H} = \Delta q = 0 \quad \text{alors } \Delta \tilde{q} = 0.$$

$$* \quad \vec{n} \cdot \mathbf{H} = \vec{n} \cdot \nabla q = 0 \quad \text{alors}$$

$$\nabla \tilde{q} \cdot \vec{n} = -\mathcal{H}_{0,0}^{(1)} \vec{e}_1 \cdot \vec{n} - \mathcal{H}_{0,0}^{(2)} \vec{e}_2 \cdot \vec{n} \text{ sur } \partial \mathcal{P}_\#.$$

$$* \quad (\vec{e}_3 \times \mathbf{E}) \times \vec{e}_3 = \mathbf{Z} (\vec{e}_3 \times \mathbf{H}) \text{ sur } \Sigma_0^\# \quad \text{alors } (\vec{e}_3 \times \nabla p) \times \vec{e}_3 = \mathbf{Z} (\vec{e}_3 \times \nabla q) \text{ sur } \Sigma_0^\#$$

\hookrightarrow nous avons $\tilde{p} = p - \mathcal{E}_{0,0}^{(1)} y_1 - \mathcal{E}_{0,0}^{(2)} y_2$ et donc

$$\nabla p = \nabla \tilde{p} + \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{0,0}^{(1)} \\ \mathcal{E}_{0,0}^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

\hookrightarrow nous avons $\tilde{q} = q - \mathcal{H}_{0,0}^{(1)} y_1 - \mathcal{H}_{0,0}^{(2)} y_2$ et donc

$$\nabla q = \nabla \tilde{q} + \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{0,0}^{(1)} \\ \mathcal{H}_{0,0}^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En remplaçant ∇p et ∇q dans l'équation sur $\Sigma_0^\#$, nous obtenons

$$\left[\vec{e}_3 \times \nabla \tilde{p} + \vec{e}_3 \times \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{0,0}^{(1)} \\ \mathcal{E}_{0,0}^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \times \vec{e}_3 = \mathbf{Z} \left[\vec{e}_3 \times \nabla \tilde{q} + \vec{e}_3 \times \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{0,0}^{(1)} \\ \mathcal{H}_{0,0}^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

ce qui nous donne

$$(\vec{e}_3 \times \nabla \tilde{p}) \times \vec{e}_3 = \mathbf{Z} (\vec{e}_3 \times \nabla \tilde{q}) + \left[\mathbf{Z} \left(\vec{e}_3 \times \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{0,0}^{(1)} \\ \mathcal{H}_{0,0}^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} \right) - \left(\vec{e}_3 \times \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{0,0}^{(1)} \\ \mathcal{E}_{0,0}^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \vec{e}_3 \right] \text{ sur } \Sigma_0^\# . \quad (40)$$

En prenant la divergence sur $\Sigma_0^\#$ de (40), nous obtenons

$$\mathbf{div}_T \left[(\vec{e}_3 \times \nabla \tilde{p}) \times \vec{e}_3 \right] = \underbrace{\mathbf{Z} \mathbf{div}_T \left[\vec{e}_3 \times \nabla \tilde{q} \right]}_{\mathbf{div}_T \begin{pmatrix} \partial_{y_2} \tilde{q} \\ -\partial_{y_1} \tilde{q} \\ 0 \end{pmatrix} = 0} + \underbrace{\mathbf{Z} \mathbf{div}_T \left[\vec{n} \times \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{0,0}^{(1)} \\ \mathcal{H}_{0,0}^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} \right]}_{=0} - \underbrace{\mathbf{div}_T \left[\left(\vec{e}_3 \times \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{0,0}^{(1)} \\ \mathcal{E}_{0,0}^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \vec{e}_3 \right]}_{=0}$$

soit

$$\mathbf{div}_T \left[(\vec{e}_3 \times \nabla \tilde{p}) \times \vec{e}_3 \right] = 0 ;$$

avec $\mathbf{div}_T (\nabla_T \tilde{p}) = \Delta_T \tilde{p}$. Comme \tilde{p} est périodique et $\nabla \tilde{p}_T \in (L^2(\Sigma_0^\#))^3$, nous trouvons $\int_{\Sigma_0^\#} \Delta_T \tilde{p} \cdot \tilde{p} \, dy_1 = \int_{\Sigma_0^\#} |\nabla_T \tilde{p}|^2 \, dy_1$.

Donc $\nabla_T \tilde{p} = 0$ et $\tilde{p} = cst_0$ sur $\Sigma_0^\#$.

En prenant maintenant le rotationnel sur $\Sigma_0^\#$ de (40), nous avons

$$\underbrace{\mathbf{rot}_T \left[(\vec{e}_3 \times \nabla \tilde{p}) \times \vec{e}_3 \right]}_{\nabla_T \times \nabla_T \tilde{p} = 0} = \mathbf{Z} \mathbf{rot}_T \left[\vec{e}_3 \times \nabla \tilde{q} \right] + \underbrace{\mathbf{Z} \mathbf{rot}_T \left[\vec{e}_3 \times \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{0,0}^{(1)} \\ \mathcal{H}_{0,0}^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} \right]}_{=0} - \underbrace{\mathbf{rot}_T \left[\left(\vec{e}_3 \times \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{0,0}^{(1)} \\ \mathcal{E}_{0,0}^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \vec{e}_3 \right]}_{=0}$$

soit

$$\mathbf{rot}_T (\vec{e}_3 \times \nabla \tilde{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_{y_1}^2 \tilde{q} + \partial_{y_2}^2 \tilde{q} \end{pmatrix} = 0 ,$$

alors $\Delta_T \tilde{q} = 0$. Nous avons \tilde{q} est périodique et $\nabla \tilde{q} \in (L^2(\Sigma_0^\#))^3$. Nous trouvons $\int_{\Sigma_0^\#} \Delta_T \tilde{q} \cdot \tilde{q} \, dy_1 = \int_{\Sigma_0^\#} |\nabla_T \tilde{q}|^2 \, dy_1$.

Donc $\nabla_{\Sigma_0^\#} \tilde{q} = 0$ et $\tilde{q} = \widetilde{cst}_0$ sur $\Sigma_0^\#$.

↪ Nous avons $\tilde{p} = cst_0$ alors
 $p = cst_0 + \mathcal{E}_{0,0}^{(1)} y_1 + \mathcal{E}_{0,0}^{(2)} y_2$ sur $\Sigma_0^\#$ et nous pouvons écrire $\nabla p = \mathcal{E}_{0,0}^{(1)} \vec{e}_1 + \mathcal{E}_{0,0}^{(2)} \vec{e}_2$ sur $\Sigma_0^\#$.

↪ Nous avons $\tilde{q} = \widetilde{cst}_0$ alors
 $q = \widetilde{cst}_0 + \mathcal{H}_{0,0}^{(1)} y_1 + \mathcal{H}_{0,0}^{(2)} y_2$ sur $\Sigma_0^\#$ et nous pouvons écrire $\nabla q = \mathcal{H}_{0,0}^{(1)} \vec{e}_1 + \mathcal{H}_{0,0}^{(2)} \vec{e}_2$ sur $\Sigma_0^\#$.

En remplaçant ∇p et ∇q dans $(\vec{e}_3 \times \nabla p) \times \vec{e}_3 = \mathbf{Z} (\vec{e}_3 \times \nabla q)$ sur $\Sigma_0^\#$, nous obtenons les conditions de couplages suivantes

$$\begin{cases} \partial_{y_1} p = -Z^{(1)} \partial_{y_2} q & \text{soit } \mathcal{E}_{0,0}^{(1)} = -Z^{(1)} \mathcal{H}_{0,0}^{(2)} \\ \partial_{y_2} p = Z^{(2)} \partial_{y_1} q & \text{soit } \mathcal{E}_{0,0}^{(2)} = Z^{(2)} \mathcal{H}_{0,0}^{(1)} \end{cases} \text{ sur } \Sigma_0^\# . \quad (41)$$

Finalement, nous avons montré que (p, q) satisfait les équations, $\forall J$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B} \\ p = cst_j \quad \text{sur } \partial B_j \\ p = cst_0 + \mathcal{E}_{0,0}^{(1)} y_1 + \mathcal{E}_{0,0}^{(2)} y_2 \quad \text{sur } \Sigma_0^\# \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta q = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B} \\ \nabla q \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_\# \\ q = \widetilde{cst}_0 + \frac{1}{Z^{(2)}} \mathcal{E}_{0,0}^{(2)} y_1 - \frac{1}{Z^{(1)}} \mathcal{E}_{0,0}^{(1)} y_2 \quad \text{sur } \Sigma_0^\# \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{y_1} p = -Z^{(1)} \partial_{y_2} q \quad \text{sur } \Sigma_0^\# , \\ \partial_{y_2} p = Z^{(2)} \partial_{y_1} q \quad \text{sur } \Sigma_0^\# ; \end{array} \right.$$

et $\lim_{y_3 \rightarrow +\infty} \nabla p = \mathcal{E}_{0,0}$; $\lim_{y_3 \rightarrow +\infty} \nabla q = \mathcal{H}_{0,0}$.

p s'écrit sous la forme $p = \mathcal{E}_{0,0}^{(1)} y_1 + \mathcal{E}_{0,0}^{(2)} y_2 + \mathcal{E}_{0,0}^{(3)} y_3 + p_w$ avec $p_w \in W_\#^1(\mathcal{B})$ qui vérifie les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p_w = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B} , \\ p_w = cst_j - \mathcal{E}_{0,0}^{(1)} y_1 - \mathcal{E}_{0,0}^{(2)} y_2 - \mathcal{E}_{0,0}^{(3)} y_3 \quad \text{sur } \partial B_j , \\ p_w = cst_0 \quad \text{sur } \Sigma_0^\# . \end{array} \right.$$

Ce problème est bien posé et par linéarité il s'écrit

$$p_w = cst_0 + \sum_{j=1}^N (cst_j - cst_0) r_j + \mathcal{E}_{0,0}^{(1)} \tilde{p}_1 + \mathcal{E}_{0,0}^{(2)} \tilde{p}_2 + \mathcal{E}_{0,0}^{(3)} \tilde{p}_3 ;$$

avec \tilde{p}_i satisfait les équations (31) et $\forall J$, r_j satisfait les équations (33).

De même, q s'écrit sous la forme $q = \mathcal{H}_{0,0}^{(1)} y_1 + \mathcal{H}_{0,0}^{(2)} y_2 + \mathcal{H}_{0,0}^{(3)} y_3 + q_w$ avec $q_w \in W_\#^1(\mathcal{B})$ qui vérifie les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta q_w = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B} , \\ \nabla q_w \cdot \vec{n} = -\frac{1}{Z^{(2)}} \mathcal{E}_{0,0}^{(2)} \vec{e}_1 \cdot \vec{n} + \frac{1}{Z^{(1)}} \mathcal{E}_{0,0}^{(1)} \vec{e}_2 \cdot \vec{n} - \mathcal{H}_{0,0}^{(3)} \vec{e}_3 \cdot \vec{n} \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_\# , \\ q_w = \widetilde{cst}_0 \quad \text{sur } \Sigma_0^\# . \end{array} \right.$$

Ce problème est bien posé et q_w peut s'écrire

$$q_w = \frac{1}{Z^{(2)}} \mathcal{E}_{0,0}^{(2)} \tilde{q}_1 - \frac{1}{Z^{(1)}} \mathcal{E}_{0,0}^{(1)} \tilde{q}_2 + \mathcal{H}_{0,0}^{(3)} \tilde{q}_3 + \widetilde{cst}_0 ;$$

avec \tilde{q}_i satisfait les équations (32).

Nous obtenons donc pour \mathbf{E} et \mathbf{H} :

$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^N (cst_j - cst_0) \nabla r_j + \mathcal{E}_{0,0}^{(1)} \nabla p_1 + \mathcal{E}_{0,0}^{(2)} \nabla p_2 + \mathcal{E}_{0,0}^{(3)} \nabla p_3 ;$$

et

$$\mathbf{H} = \frac{1}{Z^{(2)}} \mathcal{E}_{0,0}^{(2)} \nabla q_1 - \frac{1}{Z^{(1)}} \mathcal{E}_{0,0}^{(1)} \nabla q_2 + \mathcal{H}_{0,0}^{(3)} \nabla q_3 .$$

D'où le résultat. □

9.3.3 Résultat d'existence et d'unicité

Le problème (25bis) n'a pas une unique solution dans $\mathcal{H}_\#(\mathcal{B})$ et le noyau n'est pas réduit à 0 mais il est possible d'obtenir une unique solution dans $\mathcal{H}_\#^0(\mathcal{B})$ sous-espace de $\mathcal{H}_\#(\mathcal{B})$ orthogonal au noyau \mathcal{N} (par rapport au produit scalaire de $\mathcal{H}_\#$), qui se simplifie ici car $\mathbf{rot} \nabla p = 0$ et $\mathbf{div} \nabla p = \Delta p = 0$

$$\mathcal{H}_\#^0(\mathcal{B}) := \left\{ (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in \mathcal{H}_\#(\mathcal{B}) \text{ telle que } \int_{\mathcal{B}} \frac{\mathbf{E}}{1+(y_3)^2} \cdot \nabla p_i \, dy = 0 \text{ et } \int_{\mathcal{B}} \frac{\mathbf{H}}{1+(y_3)^2} \cdot \nabla q_i \, dy = 0 ; i = \{1, 2, 3\} \right\}. \quad (42)$$

Théorème 110

Soit $\mathbf{F}^E, \mathbf{F}^H \in (L^2(\mathcal{B}))^3$ telles que $\mathbf{div}_y \mathbf{F}^E = 0$ et $\mathbf{div}_y \mathbf{F}^H = 0$; $G^E, G^H \in L^2(\mathcal{B})$. Alors le problème (25bis) admet un unique couple solution $(\mathbf{E}_C, \mathbf{H}_C)$ dans $\mathcal{H}_\#^0(\mathcal{B})$.

Preuve. $(\mathbf{E}_C, \mathbf{H}_C)$ satisfait le problème variationnel : Trouver $(\mathbf{E}_C, \mathbf{H}_C) \in \mathcal{H}_\#^0(\mathcal{B})$ tel que

$$a((\mathbf{E}_C, \mathbf{H}_C), (\mathbf{V}^E, \mathbf{V}^H)) = l((\mathbf{V}^E, \mathbf{V}^H)), \quad \forall (\mathbf{V}^E, \mathbf{V}^H) \in \mathcal{H}_\#^0(\mathcal{B}) \quad (43)$$

où

$$a((\mathbf{E}_C, \mathbf{H}_C), (\mathbf{V}^E, \mathbf{V}^H)) = \left(\int_{\mathcal{B}} \mathbf{rot}_y \mathbf{E}_C \cdot \overline{\mathbf{rot}_y \mathbf{V}^E} \, dy + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{div}_y \mathbf{E}_C \cdot \overline{\mathbf{div}_y \mathbf{V}^H} \, dy, \int_{\mathcal{B}} \mathbf{rot}_y \mathbf{H}_C \cdot \overline{\mathbf{rot}_y \mathbf{V}^H} \, dy + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{div}_y \mathbf{H}_C \cdot \overline{\mathbf{div}_y \mathbf{V}^H} \, dy \right)$$

et

$$l((\mathbf{V}^E, \mathbf{V}^H)) = \left(\int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}^E \cdot \overline{\mathbf{rot}_y \mathbf{V}^E} \, dy + \int_{\mathcal{B}} G^E \cdot \overline{\mathbf{div}_y \mathbf{V}^E} \, dy, \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}^H \cdot \overline{\mathbf{rot}_y \mathbf{V}^H} \, dy + \int_{\mathcal{B}} G^H \cdot \overline{\mathbf{div}_y \mathbf{V}^H} \, dy \right).$$

Étape 1 : Nous regardons les hypothèses pour pouvoir appliquer le théorème de Lax-Milgram.

▷ $l(\cdot)$ est linéaire et continue dans $\mathcal{H}_\#(\mathcal{B})$:

$$\begin{aligned} \left| l((\mathbf{V}^E, \mathbf{V}^H)) \right| &\leq \left(\|\mathbf{F}^E\|_{L^2(\mathcal{B})} \|\mathbf{rot}_y \mathbf{V}^E\|_{L^2(\mathcal{B})} + \|G^E\|_{L^2(\mathcal{B})} \|\mathbf{div}_y \mathbf{V}^E\|_{L^2(\mathcal{B})}, \|\mathbf{F}^H\|_{L^2(\mathcal{B})} \|\mathbf{rot}_y \mathbf{V}^H\|_{L^2(\mathcal{B})} + \|G^H\|_{L^2(\mathcal{B})} \|\mathbf{div}_y \mathbf{V}^H\|_{L^2(\mathcal{B})} \right) \\ &\leq \left(\max \left(\|\mathbf{F}^E\|_{L^2(\mathcal{B})}, \|G^E\|_{L^2(\mathcal{B})} \right) \|\mathbf{V}^E\|_{\mathbf{w}_\#(\mathcal{B})}, \max \left(\|\mathbf{F}^H\|_{L^2(\mathcal{B})}, \|G^H\|_{L^2(\mathcal{B})} \right) \|\mathbf{V}^H\|_{\mathbf{w}_\#(\mathcal{B})} \right). \end{aligned}$$

▷ $a(\cdot, \cdot)$ est bilinéaire continue dans $\mathcal{H}_\#(\mathcal{B})$:

$$\begin{aligned} &\left| a((\mathbf{E}_C, \mathbf{H}_C), (\mathbf{V}^E, \mathbf{V}^H)) \right| \\ &\leq \left(\|\mathbf{rot}_y \mathbf{E}_C\|_{L^2} \|\mathbf{rot}_y \mathbf{V}^E\|_{L^2} + \|\mathbf{div}_y \mathbf{E}_C\|_{L^2} \|\mathbf{div}_y \mathbf{V}^E\|_{L^2}, \|\mathbf{rot}_y \mathbf{H}_C\|_{L^2} \|\mathbf{rot}_y \mathbf{V}^H\|_{L^2} + \|\mathbf{div}_y \mathbf{H}_C\|_{L^2} \|\mathbf{div}_y \mathbf{V}^H\|_{L^2} \right) \\ &\leq C \left(\|\mathbf{E}_C\|_{\mathbf{w}_\#} \|\mathbf{V}^E\|_{\mathbf{w}_\#}, \|\mathbf{H}_C\|_{\mathbf{w}_\#} \|\mathbf{V}^H\|_{\mathbf{w}_\#} \right). \end{aligned}$$

▷ Pour obtenir que $a(\cdot, \cdot)$ est coercive dans $\mathcal{H}_\#^0(\mathcal{B})$, nous utilisons le résultat suivant :

Proposition 111

Il existe $C > 0$ telle que pour tout $(\mathbf{E}_C, \mathbf{H}_C) \in \mathcal{H}_\#^0(\mathcal{B})$

$$\left\| \frac{(\mathbf{E}_C, \mathbf{H}_C)}{\sqrt{1 + (y_3)^2}} \right\|_{L^2} \leq C \left(\|\mathbf{rot}_y \mathbf{E}_C\|_{L^2} + \|\mathbf{div}_y \mathbf{E}_C\|_{L^2}, \|\mathbf{rot}_y \mathbf{H}_C\|_{L^2} + \|\mathbf{div}_y \mathbf{H}_C\|_{L^2} \right). \quad (44)$$

Preuve. Ce résultat est très similaire à l'inégalité de Hardy que l'on a utilisé dans le chapitre 3. Comme souvent pour démontrer ce genre d'inégalité, il faut utiliser une preuve par l'absurde. Ceci a été démontré dans la preuve de la Proposition 7.5.6 de la thèse de B.Delourme [Del10]. Nous ne reprenons pas toute la preuve mais nous donnons les idées.

Supposons qu'il existe une suite $(\mathcal{U}_n, \mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}_\#^0(\mathcal{B})$ telle que

$$(a) : \left\| \frac{(\mathcal{U}_n, \mathcal{V}_n)}{\sqrt{1 + (y_3)^2}} \right\|_{L^2(\mathcal{B})} = 1;$$

$$(b) : \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathbf{div}_y (\mathcal{U}_n, \mathcal{V}_n)\|_{L^2(\mathcal{B})} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathbf{rot}_y (\mathcal{U}_n, \mathcal{V}_n)\|_{L^2(\mathcal{B})} = 0.$$

Il faut commencer par montrer que $\frac{(\mathcal{U}_n, \mathcal{V}_n)}{\sqrt{1 + (y_3)^2}}$ tend faiblement vers 0. En introduisant deux fonctions de troncature χ_1 et χ_2 qui prennent des valeurs entre $[0, 1]$

$$\chi_1(y_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } 3 \leq y_3 \leq 4, \\ 0 & \text{si } y_3 \leq 2 \text{ ou } y_3 \geq 5; \end{cases} \quad (45)$$

$$\chi_2(y_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } y_3 \leq 3, \\ 0 & \text{si } y_3 \geq 4; \end{cases} \quad (46)$$

telles que $(\mathcal{W}_n, \mathcal{Z}_n) = (1 - \chi_2)(\mathcal{U}_n, \mathcal{V}_n)$ et $(\mathcal{E}_n, \mathcal{F}_n) = \chi_2(\mathcal{U}_n, \mathcal{V}_n)$, nous montrons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{(\mathcal{W}_n, \mathcal{Z}_n)}{\sqrt{1 + (y_3)^2}} \right\|_{L^2(\mathcal{B})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{(\mathcal{E}_n, \mathcal{F}_n)}{\sqrt{1 + (y_3)^2}} \right\|_{L^2(\mathcal{B})} = 0$$

ce qui contredit l'hypothèse initiale puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{(\mathcal{U}_n, \mathcal{V}_n)}{\sqrt{1 + (y_3)^2}} \right\|_{L^2(\mathcal{B})} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{(\mathcal{W}_n, \mathcal{Z}_n)}{\sqrt{1 + (y_3)^2}} \right\|_{L^2(\mathcal{B})} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{(\mathcal{E}_n, \mathcal{F}_n)}{\sqrt{1 + (y_3)^2}} \right\|_{L^2(\mathcal{B})}.$$

□

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
 |a((\mathbf{E}_C, \mathbf{H}_C), (\mathbf{E}_C, \mathbf{H}_C))| &= (\|\mathbf{rot}_y \mathbf{E}_C\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{div}_y \mathbf{E}_C\|_{L^2}^2, \|\mathbf{rot}_y \mathbf{H}_C\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{div}_y \mathbf{H}_C\|_{L^2}^2) \\
 &\geq \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{rot}_y \mathbf{E}_C\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{div}_y \mathbf{E}_C\|_{L^2}^2 + C \left\| \frac{\mathbf{E}_C}{\sqrt{1+y_3^2}} \right\|_{L^2}^2, \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{2} \|\mathbf{rot}_y \mathbf{H}_C\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{div}_y \mathbf{H}_C\|_{L^2}^2 + C \left\| \frac{\mathbf{H}_C}{\sqrt{1+y_3^2}} \right\|_{2L^2}^2 \right), \quad C > 0 \\
 &\geq C' (\|\mathbf{E}_C\|_{\mathbf{W}_\#}^2, \|\mathbf{H}_C\|_{\mathbf{W}_\#}^2), \quad C' > 0.
 \end{aligned} \tag{47}$$

Le théorème de Lax-Milgram s'applique et donne existence et unicité d'une solution $(\mathbf{E}_C, \mathbf{H}_C) \in \mathcal{H}_\#^0(\mathcal{B})$ du problème variationnel (43).

Étape 2 : Nous montrons maintenant que le problème variationnel (43) est équivalent au problème de départ (25bis).

Soit $(\mathbf{E}_C, \mathbf{H}_C)$ solution du problème variationnel (43).

▷ Équations sur les divergences :

Soit $(h^E, h^H) \in L^2(\mathcal{B}) \times L^2(\mathcal{B})$. Il existe un couple de fonctions $(\phi^E, \phi^H) \in W^1(\mathcal{B}) \times W^1(\mathcal{B})$ tel que :

$$\begin{cases}
 \mathbf{div}_y(\nabla \phi^E) = h^E & \text{dans } \mathcal{B} & ; & \mathbf{div}_y(\nabla \phi^H) = h^H & \text{dans } \mathcal{B} & , \\
 \nabla \phi^E \text{ est } (T_1, T_2)\text{-périodique} & & ; & \nabla \phi^H \text{ est } (T_1, T_2)\text{-périodique} & & , \\
 \phi^E = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{P}_\# & & ; & \nabla \phi^H \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{P}_\# & , \\
 \phi^E = 1 & \text{sur } \Sigma_0^\# & & ; & \phi^H = 0 & \text{sur } \Sigma_0^\# & .
 \end{cases}$$

Posons $(\mathbf{V}^E, \mathbf{V}^H) = (\nabla \phi^E, \nabla \phi^H)$ dans (43), nous avons alors

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{\mathcal{B}} \mathbf{div}_y \mathbf{E}_C \cdot \overline{h^E} \, dy, \int_{\mathcal{B}} \mathbf{div}_y \mathbf{H}_C \cdot \overline{h^H} \, dy \right) &= \left(\int_{\mathcal{B}} G^E \cdot \overline{h^E} \, dy, \int_{\mathcal{B}} G^H \cdot \overline{h^H} \, dy \right) \\
 \Leftrightarrow \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{div}_y \mathbf{E}_C - G^E) \cdot \overline{h^E} \, dy &= 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{div}_y \mathbf{H}_C - G^H) \cdot \overline{h^H} \, dy = 0.
 \end{aligned}$$

Comme c'est vrai $\forall (h_E, h_H) \in L^2(\mathcal{B})$, nous en déduisons que

$$\mathbf{div}_y \mathbf{E}_C = G^E \text{ dans } \mathcal{B} \quad \text{et} \quad \mathbf{div}_y \mathbf{H}_C = G^H \text{ dans } \mathcal{B}.$$

▷ Équations sur le rotationnel :

D'après ce qui précède, (43) se réduit donc à

$$\left(\int_{\mathcal{B}} \mathbf{rot}_y \mathbf{E}_C \cdot \overline{\mathbf{rot}_y \mathbf{V}^E}, \int_{\mathcal{B}} \mathbf{rot}_y \mathbf{H}_C \cdot \overline{\mathbf{rot}_y \mathbf{V}^H} \right) = \left(\int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}^E \cdot \overline{\mathbf{rot}_y \mathbf{V}^E}, \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}^H \cdot \overline{\mathbf{rot}_y \mathbf{V}^H} \right)$$

Nous utilisons le résultat suivant de la thèse de B.Delourme [Del10].

Lemme 112

Soit $\mathbf{f} \in (L^2(\mathcal{B}))^3$ vérifiant $\mathbf{div}_y \mathbf{f} = 0$. Alors il existe $\mathbf{w} \in \mathcal{H}_\#^0(\mathcal{B})$ telle que

$$\begin{cases} \mathbf{div}_y \mathbf{w} = 0 & \text{dans } \mathcal{B}, \\ \mathbf{rot}_y \mathbf{w} = \mathbf{f} & \text{dans } \mathcal{B}. \end{cases}$$

Remarque 30. Ce qui est important ici c'est que $\mathbf{w} \in \mathcal{H}_\#^0(\mathcal{B})$ c'est-à-dire qu'il est orthogonal au noyau!

Comme $\mathbf{div}_y \mathbf{F}^E = 0$ et $\mathbf{div}_y \mathbf{F}^H = 0$, il existe $(\mathbf{W}^E, \mathbf{W}^H) \in \mathcal{H}_\#^0(\mathcal{B})$ tel que

$$\begin{cases} \mathbf{rot}_y \mathbf{W}^E = \mathbf{F}^E & \text{dans } \mathcal{B} & ; & \mathbf{rot}_y \mathbf{W}^H = \mathbf{F}^H & \text{dans } \mathcal{B} \\ \mathbf{div}_y \mathbf{W}^E = 0 & \text{dans } \mathcal{B} & ; & \mathbf{div}_y \mathbf{W}^H = 0 & \text{dans } \mathcal{B}. \end{cases}$$

Nous trouvons $\forall (\mathbf{V}^E, \mathbf{V}^H) \in \mathcal{H}_\#^0(\mathcal{B})$

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{rot}_y \mathbf{E}_C \cdot \overline{\mathbf{rot}_y \mathbf{V}^E} dy = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{rot}_y \mathbf{W}^E \cdot \overline{\mathbf{rot}_y \mathbf{V}^E} dy ; \int_{\mathcal{B}} \mathbf{rot}_y \mathbf{H}_C \cdot \overline{\mathbf{rot}_y \mathbf{V}^H} dy = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{rot}_y \mathbf{W}^H \cdot \overline{\mathbf{rot}_y \mathbf{V}^H} dy .$$

Comme $(\mathbf{E}_C - \mathbf{W}^E, \mathbf{H}_C - \mathbf{W}^H) \in \mathcal{H}_\#^0(\mathcal{B})$, en faisant la différence et en prenant $(\mathbf{V}^E, \mathbf{V}^H) = (\mathbf{W}^E - \mathbf{E}_C, \mathbf{W}^H - \mathbf{H}_C)$, nous avons :

$$\begin{cases} \int_{\mathcal{B}} |\mathbf{rot}_y (\mathbf{W}^E - \mathbf{E}_C)|^2 dy = 0 ; \\ \int_{\mathcal{B}} |\mathbf{rot}_y (\mathbf{W}^H - \mathbf{H}_C)|^2 dy = 0 ; \end{cases}$$

et donc $\mathbf{rot}_y \mathbf{E}_C = \mathbf{rot}_y \mathbf{W}^E = \mathbf{F}^E$ et $\mathbf{rot}_y \mathbf{H}_C = \mathbf{rot}_y \mathbf{W}^H = \mathbf{F}^H$ dans \mathcal{B} . □

9.4 Comportement à l'infini des termes de champ proche

9.4.1 Forme générale du comportement à l'infini

Loin des particules, les termes de champ proche vérifient, pour $L \geq H$,

$$\begin{cases} \mathbf{rot}_y \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) = -\mathbf{rot}_{\mathbf{x}_t} \mathbf{E}_{m-1}(\mathbf{x}_T; \cdot) & ; & \mathbf{rot}_y \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) = -\mathbf{rot}_{\mathbf{x}_t} \mathbf{H}_{m-1}(\mathbf{x}_T; \cdot) \\ \quad - ik \mathbf{H}_{m-1}(\mathbf{x}_T; \cdot) & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^L & ; & \quad + ik \mathbf{E}_{m-1}(\mathbf{x}_T; \cdot) & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^L \\ \mathbf{div}_y \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) = -\mathbf{div}_{\mathbf{x}_t} \mathbf{E}_{m-1}(\mathbf{x}_T; \cdot) & ; & \mathbf{div}_y \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_T; \cdot) = -\mathbf{div}_{\mathbf{x}_t} \mathbf{H}_{m-1}(\mathbf{x}_T; \cdot) & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^{EL} \\ \quad (\mathbf{E}_m, \mathbf{H}_m)(\mathbf{x}_T; \cdot) & \text{est } (T_1, T_2)\text{-périodique} & & & \end{cases} \quad (48)$$

Commençons par étudier plus généralement les fonctions $\mathbf{U} \in \mathbf{W}_\#(\mathcal{B}_\infty^L)$ satisfaisant :

$$\begin{cases} \mathbf{rot}_y \mathbf{U} = \mathbf{F}^U & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^L, \\ \mathbf{div} \mathbf{U} = \mathbf{G}^U & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^L, \\ \mathbf{U} \text{ est } (T_1, T_2)\text{-périodique} ; \end{cases} \quad (48\text{bis})$$

qui se réécrit en utilisant la formule $\text{rot rot } \mathbf{U} - \nabla[\text{div } \mathbf{U}] = -\Delta \mathbf{U}$

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{U} = \mathbf{F} & \text{dans } \mathcal{B}_\infty^L, \\ \mathbf{U} \text{ est } (T_1, T_2)\text{-périodique,} \end{cases} \quad (49)$$

où $\mathbf{F} = \nabla G^U - \text{rot } \mathbf{F}^U$, $\mathbf{F} \in \left(L^2(\mathcal{B}_\infty^L)\right)^3$. Nous supposons dans la suite que \mathbf{F} vérifie la propriété (\mathcal{P}_∞) (c'est l'équivalent de la propriété (\mathcal{P}_∞) du chapitre 3 mais pour des fonctions vectorielles).

Définition 113

Une fonction $\mathbf{F} \in \left(L^2_{loc}(\mathcal{B})\right)^3$ satisfait la propriété \mathcal{P}_∞ si et seulement si il existe une suite de vecteurs de polynômes $(\mathbf{p}_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$, $\forall m, n$, $\mathbf{p}_{m,n} \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]^3$

$$\mathbf{F}(y_1, y_2, y_3) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \mathbf{p}_{m,n}(y_3) e^{2i\pi\left(\frac{m}{T_1}y_1 + \frac{n}{T_2}y_2\right)} e^{-2\pi\sqrt{\frac{m^2}{T_1^2} + \frac{n^2}{T_2^2}}(y_3-H)}. \quad (\mathcal{P}_\infty)$$

Proposition 114

Supposons que \mathbf{U} est telle que $\frac{\mathbf{U}}{\sqrt{1+y_3^2}} \in \left(L^2(\mathcal{B}_\infty^L)\right)^3$ et vérifie (49) avec \mathbf{F} vérifie la propriété (\mathcal{P}_∞) . Alors il existe $\mathbf{C}_U \in \mathbb{C}^3$ et $\hat{\mathbf{U}}$ vérifiant la propriété (\mathcal{P}_∞) telle que

$$\mathbf{U} = \mathbf{C}_U + \hat{\mathbf{U}}.$$

Preuve. Soit \mathbf{F} vérifiant la propriété (\mathcal{P}_∞) . Comme \mathbf{U} est (T_1, T_2) -périodique, il se décompose en série de Fourier

$$\mathbf{U}(y_1, y_2, y_3) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{U}_{m,n}(y_3) e^{2i\pi\left(\frac{m}{T_1}y_1 + \frac{n}{T_2}y_2\right)}$$

avec $\mathcal{U}_{m,n}(y_3)$ le coefficient de Fourier. Comme $\Delta \mathbf{U} = \mathbf{F}$ dans \mathcal{B}_∞^L , en substituant \mathbf{U} par son développement en série de Fourier et en remplaçant \mathbf{F} par la propriété (\mathcal{P}_∞) , nous obtenons

$$\partial_{y_3}^2 \mathcal{U}_{m,n}(y_3) - \left[\left(\frac{2\pi m}{T_1}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{T_2}\right)^2 \right] \mathcal{U}_{m,n}(y_3) = \mathbf{p}_{m,n}(y_3) e^{-2\pi\sqrt{\frac{m^2}{T_1^2} + \frac{n^2}{T_2^2}}(y_3-H)}. \quad (50)$$

- Pour $(m, n) = (0, 0)$, l'équation (50) devient $\partial_{y_3}^2 \mathcal{U}_{0,0}(y_3) = 0$ et les solutions sont des fonctions affines définies par

$$\mathcal{U}_{0,0}(y_3) = \mathbf{D}_U y_3 + \mathbf{C}_U.$$

Comme \mathbf{U} est telle que $\int_{\mathcal{B}_\infty^L} \frac{|\mathbf{U}|^2}{1+y_3^2} dy < +\infty$ alors $\mathbf{D}_U = 0$.

- Pour $(m, n) \neq (0, 0)$, nous avons une équation du second ordre non homogène. La solution est une combinaison d'une solution homogène $\mathcal{U}_{m,n}^{hom}(y_3)$ et d'une solution particulière $\mathcal{U}_{m,n}^{part}(y_3)$ de l'équation (50). La solution homogène s'écrit

$$\mathcal{U}_{m,n}^{hom}(y_3) = \mathbf{K}_{hom} e^{-2\pi\sqrt{\frac{m^2}{T_1^2} + \frac{n^2}{T_2^2}}(y_3-L)}.$$

Une solution particulière de (50) s'écrit

$$\mathcal{U}_{m,n}^{part}(y_3) = \mathbf{q}_{m,n}(y_3) e^{-2\pi\sqrt{\frac{m^2}{T_1^2} + \frac{n^2}{T_2^2}}(y_3-L)}$$

où $\mathbf{q}_{m,n}''(y_3) - 4\pi\sqrt{\frac{m^2}{T_1^2} + \frac{n^2}{T_2^2}}\mathbf{q}_{m,n}'(y_3) = \mathbf{p}_{m,n}(y_3)$ et $d^\circ\mathbf{q}_{m,n} = d^\circ\mathbf{p}_{m,n} + 1$. $\mathcal{U}_{m,n}(y_3)$ est alors donnée par

$$\mathcal{U}_{m,n}(y_3) = (\mathbf{q}_{m,n}(y_3) + \mathbf{K}_{hom}) e^{-2\pi\sqrt{\frac{m^2}{T_1^2} + \frac{n^2}{T_2^2}}(y_3-L)}.$$

\mathbf{U} s'écrit donc

$$\mathbf{U} = \mathbf{C}_U + \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \tilde{\mathbf{q}}_{m,n}(y_3) e^{-2\pi\sqrt{\frac{m^2}{T_1^2} + \frac{n^2}{T_2^2}}(y_3-L)} e^{2i\pi\left(\frac{m}{T_1}y_1 + \frac{n}{T_2}y_2\right)}$$

avec $\hat{\mathbf{U}} := \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \tilde{\mathbf{q}}_{m,n}(y_3) e^{-2\pi\sqrt{\frac{m^2}{T_1^2} + \frac{n^2}{T_2^2}}(y_3-L)} e^{2i\pi\left(\frac{m}{T_1}y_1 + \frac{n}{T_2}y_2\right)}$ qui vérifie la propriété (\mathcal{P}_∞) . □

9.4.2 Caractérisation des limites pour les termes de champ proche

Soit $(\mathbf{E}_C, \mathbf{H}_C)$ l'unique solution dans $\mathcal{H}_\#^0(\mathcal{B})$ de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot}_y \mathbf{E}_C = \mathbf{F}^E & \text{dans } \mathcal{B} & ; \quad \mathbf{rot}_y \mathbf{H}_C = \mathbf{F}^H & \text{dans } \mathcal{B} , \\ \mathbf{div}_y \mathbf{E}_C = \mathbf{G}^E & \text{dans } \mathcal{B} & ; \quad \mathbf{div}_y \mathbf{H}_C = \mathbf{G}^H & \text{dans } \mathcal{B} , \\ & & (\mathbf{E}_C, \mathbf{H}_C) & \text{est } (T_1, T_2)\text{-périodique} \\ \tilde{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_C = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{P}_\# & ; \quad \tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_C = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{P}_\# , \\ & & (\tilde{\mathbf{e}}_3 \times \mathbf{E}_C) \times \tilde{\mathbf{e}}_3 & = \mathbf{Z} (\tilde{\mathbf{e}}_3 \times \mathbf{H}_C) & \text{sur } \Sigma_0^\# , \end{array} \right.$$

avec $\mathbf{F}^E, \mathbf{F}^H, \mathbf{G}^E$ et \mathbf{G}^H vérifient la propriété (\mathcal{P}_∞) alors il existe \mathbf{C}_E telle que $\mathbf{E}_C = \mathbf{C}_E + \hat{\mathbf{E}}$ et il existe \mathbf{C}_H telle que $\mathbf{H}_C = \mathbf{C}_H + \hat{\mathbf{H}}$ avec $\hat{\mathbf{E}}$ et $\hat{\mathbf{H}}$ vérifient (\mathcal{P}_∞) .

Notation 4

Les notations suivantes sont considérées pour la suite :

- $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ et $\underline{\underline{\nabla}}\mathbf{P} = [\nabla p_1 \quad \nabla p_2 \quad \nabla p_3]$; $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{P}_T = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\underline{\underline{\nabla}}\mathbf{P}_T = [\nabla p_1 \quad \nabla p_2 \quad 0]$.

Nous cherchons maintenant à caractériser le comportement à l'infini de $(\mathbf{E}_C, \mathbf{H}_C)$ à partir des données.

Proposition 115

Supposons que $\mathbf{F}^E, \mathbf{F}^H, G^E$ et G^H vérifient la propriété (\mathcal{P}_∞) . Les termes \mathbf{E}_C et \mathbf{H}_C solutions de (25bis) sont tels que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \widetilde{C}_E^{(1)} + Z^{(1)} \widetilde{C}_H^{(2)} \\ \widetilde{C}_E^{(2)} - Z^{(2)} \widetilde{C}_H^{(1)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{T_1 T_2} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}^E \cdot \overline{\nabla q_2} \, d\mathbf{y} - \frac{Z^{(1)}}{T_1 T_2} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}^H \cdot \overline{\nabla p_1} \, d\mathbf{y} \\ -\frac{1}{T_1 T_2} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}^E \cdot \overline{\nabla q_1} \, d\mathbf{y} - \frac{Z^{(2)}}{T_1 T_2} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}^H \cdot \overline{\nabla p_2} \, d\mathbf{y} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{T_1 T_2} \int_{\mathcal{B}} {}^t [\underline{\nabla}(\mathbf{Q} \times \vec{e}_3)] \mathbf{F}^E \, d\mathbf{y} + \frac{\mathbf{Z}}{T_1 T_2} \int_{\mathcal{B}} {}^t [\underline{\nabla} \mathbf{P}_T] \mathbf{F}^H \, d\mathbf{y}; \end{aligned} \quad (51)$$

où

$$\widetilde{\mathbf{C}}_E := \lim_{y_3 \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_C = \begin{pmatrix} \widetilde{C}_E^{(1)} \\ \widetilde{C}_E^{(2)} \\ \widetilde{C}_E^{(3)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{C}}_H := \lim_{y_3 \rightarrow +\infty} \mathbf{H}_C = \begin{pmatrix} \widetilde{C}_H^{(1)} \\ \widetilde{C}_H^{(2)} \\ \widetilde{C}_H^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Preuve. Nous notons dans la suite $\widetilde{\mathbf{C}}_E = \lim_{y_3 \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_C$ et $\widetilde{\mathbf{C}}_H = \lim_{y_3 \rightarrow +\infty} \mathbf{H}_C$. Nous cherchons à caractériser le comportement à l'infini de $(\mathbf{E}_C, \mathbf{H}_C)$ afin de déterminer le comportement à l'infini de (\mathbf{E}, \mathbf{H}) .

- Commençons par prendre l'équation $\text{rot}_{\mathbf{y}} \mathbf{E}_C = \mathbf{F}^E$ que nous multiplions par un $\mathbf{E}' \in \mathbf{W}_\#(\mathcal{B})$ à déterminer et nous intégrons sur $\mathcal{B}_0^L = (0, T_1) \times (0, T_2) \times (0, L) \setminus \overline{\mathcal{P}_\#}$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_0^L} \text{rot}_{\mathbf{y}} \mathbf{E}_C \cdot \overline{\mathbf{E}'} \, d\mathbf{y} &= \int_{\mathcal{B}_0^L} \mathbf{F}^E \cdot \overline{\mathbf{E}'} \, d\mathbf{y} \\ \Leftrightarrow \int_{\mathcal{B}_0^L} \mathbf{E}_C \cdot \overline{\text{rot}_{\mathbf{y}} \mathbf{E}'} \, d\mathbf{y} + \int_{\Sigma_0^\#} (\vec{n} \times \mathbf{E}_C) \cdot \overline{\mathbf{E}'_T} \, dy_1 + \int_{\partial \mathcal{P}_\#} \underbrace{(\vec{n} \times \mathbf{E}_C) \cdot \overline{\mathbf{E}'_T}}_{=0} \, d\mathbf{y} + \int_{\Sigma_L^\#} (\vec{n} \times \mathbf{E}_C) \cdot \overline{\mathbf{E}'_T} \, dy_1 &= \int_{\mathcal{B}_0^L} \mathbf{F}^E \cdot \overline{\mathbf{E}'} \, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Nous choisissons \mathbf{E}' de sorte que $\text{rot}_{\mathbf{y}} \mathbf{E}' = 0$. Il existe donc ϕ telle que \mathbf{E}' peut s'écrire sous la forme d'un gradient $\mathbf{E}' = \nabla \phi$. Nous obtenons alors

$$\int_{\Sigma_L^\#} (\vec{n} \times \mathbf{E}_C) \cdot \overline{(\nabla \phi)_T} \, dy_1 = \int_{\mathcal{B}_0^L} \mathbf{F}^E \cdot \overline{\nabla \phi} \, d\mathbf{y} - \int_{\Sigma_0^\#} (\vec{n} \times \mathbf{E}_C) \cdot \overline{(\nabla \phi)_T} \, dy_1. \quad (53)$$

- Prenons maintenant l'équation $\text{rot}_{\mathbf{y}} \mathbf{H}_C = \mathbf{F}^H$ que nous multiplions par un $\mathbf{H}' \in \mathbf{W}_\#(\mathcal{B})$ à déterminer et nous intégrons sur \mathcal{B}_0^L :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_0^L} \text{rot}_{\mathbf{y}} \mathbf{H}_C \cdot \overline{\mathbf{H}'} \, d\mathbf{y} &= \int_{\mathcal{B}_0^L} \mathbf{F}^H \cdot \overline{\mathbf{H}'} \, d\mathbf{y} \\ \Leftrightarrow \int_{\mathcal{B}_0^L} \mathbf{H}_C \cdot \overline{\text{rot}_{\mathbf{y}} \mathbf{H}'} \, d\mathbf{y} + \int_{\partial \mathcal{P}_\#} (\vec{n} \times \mathbf{H}_C) \cdot \overline{\mathbf{H}'_T} \, d\mathbf{y} + \int_{\Sigma_0^\#} \underbrace{(\vec{n} \times \mathbf{H}_C) \cdot \overline{\mathbf{H}'_T}}_{-Z^{-1}(\vec{n} \times \mathbf{E}_C) \times \vec{n}} \, dy_1 + \int_{\Sigma_L^\#} (\vec{n} \times \mathbf{H}_C) \cdot \overline{\mathbf{H}'_T} \, dy_1 &= \int_{\mathcal{B}_0^L} \mathbf{F}^H \cdot \overline{\mathbf{H}'} \, d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Nous choisissons \mathbf{H}' de sorte que $\mathbf{rot}_y \mathbf{H}' = 0$. Il existe donc ψ telle que $\mathbf{H}' = \nabla\psi$. Nous obtenons

$$\int_{\partial\mathcal{P}_\#} (\vec{n} \times \mathbf{H}_C) \cdot \overline{\nabla\psi} \, d\mathbf{y} + \int_{\Sigma_L^\#} (\vec{n} \times \mathbf{H}_C) \cdot \overline{(\nabla\psi)_T} \, d\mathbf{y}_1 = \int_{\mathcal{B}_0^\#} \mathbf{F}^H \cdot \overline{\nabla\psi} \, d\mathbf{y} + \int_{\Sigma_0^\#} \mathbf{Z}^{-1} [(\vec{n} \times \mathbf{E}_C) \times \vec{n}] \cdot \overline{(\nabla\psi)_T} \, d\mathbf{y}_1 . \quad (54)$$

- Nous prenons $\psi = p_1$ et $\phi = -\frac{1}{Z^{(1)}} q_2$ dans les équations (53) et (54) et cela donne :

$$-\frac{1}{Z^{(1)}} \int_{\Sigma_L^\#} (\vec{n} \times \mathbf{E}_C) \cdot \overline{(\nabla q_2)_T} \, d\mathbf{y}_1 = -\frac{1}{Z^{(1)}} \int_{\mathcal{B}_0^L} \mathbf{F}^E \cdot \overline{\nabla q_2} \, d\mathbf{y} + \int_{\Sigma_0^\#} (\vec{n} \times \mathbf{E}_C) \cdot \overline{\left(\frac{1}{Z^{(1)}} \nabla q_2\right)_T} \, d\mathbf{y}_1 , \quad (55)$$

$$\int_{\Sigma_L^\#} (\vec{n} \times \mathbf{H}_C) \cdot \overline{(\nabla p_1)_T} \, d\mathbf{y}_1 = \int_{\mathcal{B}_0^L} \mathbf{F}^H \cdot \overline{\nabla p_1} \, d\mathbf{y} + \int_{\Sigma_0^\#} \mathbf{Z}^{-1} [(\vec{n} \times \mathbf{E}_C) \times \vec{n}] \cdot \overline{(\nabla p_1)_T} \, d\mathbf{y}_1 ; \quad (56)$$

car $(\nabla p_1)_T = 0$ sur $\partial\mathcal{P}_\#$ ($p_1 = 0$ sur $\partial\mathcal{P}_\#$).

Comme

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_0^\#} (\vec{n} \times \mathbf{E}_C) \cdot \overline{\left(\frac{1}{Z^{(1)}} \nabla q_2\right)_T} \, d\mathbf{y}_1 + \int_{\Sigma_0^\#} \mathbf{Z}^{-1} [(\vec{n} \times \mathbf{E}_C) \times \vec{n}] \cdot \overline{(\nabla p_1)_T} \, d\mathbf{y}_1 \\ &= \int_{\Sigma_0^\#} [(\vec{n} \times \mathbf{E}_C) \times \vec{n}] \cdot \left[\overline{\left(-\frac{1}{Z^{(1)}} \vec{n} \times \nabla q_2\right)_T} + \overline{(\mathbf{Z}^{-1} \nabla p_1)_T} \right] \, d\mathbf{y}_1 = 0 \end{aligned}$$

en additionnant (55) et (56) et en utilisant ce qui précède, nous trouvons

$$-\frac{1}{Z^{(1)}} \int_{\Sigma_L^\#} (\vec{e}_3 \times \mathbf{E}_C) \cdot \overline{(\nabla q_2)_T} \, d\mathbf{y}_1 + \int_{\Sigma_L^\#} (\vec{e}_3 \times \mathbf{H}_C) \cdot \overline{(\nabla p_1)_T} \, d\mathbf{y}_1 = -\frac{1}{Z^{(1)}} \int_{\mathcal{B}_0^L} \mathbf{F}^E \cdot \overline{\nabla q_2} \, d\mathbf{y} + \int_{\mathcal{B}_0^L} \mathbf{F}^H \cdot \overline{\nabla p_1} \, d\mathbf{y} . \quad (57)$$

En prenant $L \rightarrow +\infty$ dans (57), comme $\nabla q_2 \rightarrow \vec{e}_2$, $\nabla p_1 \rightarrow \vec{e}_1$, \mathbf{F}^E , \mathbf{F}^H vérifient la propriété (\mathcal{P}_∞) et $\mathbf{E}_C = \mathbf{C}_E + \hat{\mathbf{E}}$ et $\mathbf{H}_C = \mathbf{C}_H + \hat{\mathbf{H}}$, nous obtenons

$$\widehat{\mathbf{C}}_E^{(1)} + Z^{(1)} \widehat{\mathbf{C}}_H^{(2)} = \frac{1}{T_1 T_2} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}^E \cdot \overline{\nabla q_2} \, d\mathbf{y} - \frac{Z^{(1)}}{T_1 T_2} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}^H \cdot \overline{\nabla p_1} \, d\mathbf{y} . \quad (58)$$

- En prenant $\psi = p_2$ et $\phi = \frac{1}{Z^{(2)}} q_1$ dans les équations (53) et (54), nous avons

$$\frac{1}{Z^{(2)}} \int_{\Sigma_L^\#} (\vec{e}_3 \times \mathbf{E}_C) \cdot \overline{(\nabla q_1)_T} \, d\mathbf{y}_1 = \frac{1}{Z^{(2)}} \int_{\mathcal{B}_0^L} \mathbf{F}^E \cdot \overline{\nabla q_1} \, d\mathbf{y} - \int_{\Sigma_0^\#} (\vec{n} \times \mathbf{E}_C) \cdot \overline{\left(\frac{1}{Z^{(2)}} \nabla q_1\right)_T} \, d\mathbf{y}_1 , \quad (59)$$

$$\int_{\Sigma_L^\#} (\vec{e}_3 \times \mathbf{H}_C) \cdot \overline{(\nabla p_2)_T} \, d\mathbf{y}_1 = \int_{\mathcal{B}_0^L} \mathbf{F}^H \cdot \overline{\nabla p_2} \, d\mathbf{y} + \int_{\Sigma_0^\#} \mathbf{Z}^{-1} [(\vec{n} \times \mathbf{E}_C) \times \vec{n}] \cdot \overline{(\nabla p_2)_T} \, d\mathbf{y}_1 . \quad (60)$$

car $(\nabla p_2)_T = 0$ sur $\partial\mathcal{P}_\#$ ($p_2 = 0$ sur $\partial\mathcal{P}_\#$).

Comme

$$\begin{aligned} & -\int_{\Sigma_0^\#} (\vec{n} \times \mathbf{E}_C) \cdot \overline{\left(\frac{1}{Z^{(2)}} \nabla q_1\right)_T} \, d\mathbf{y}_1 + \int_{\Sigma_0^\#} \mathbf{Z}^{-1} [(\vec{n} \times \mathbf{E}_C) \times \vec{n}] \cdot \overline{(\nabla p_2)_T} \, d\mathbf{y}_1 \\ &= \int_{\Sigma_0^\#} [(\vec{n} \times \mathbf{E}_C) \times \vec{n}] \cdot \left[\overline{\frac{1}{Z^{(2)}} (\vec{n} \times \nabla q_1)_T} + \overline{(\mathbf{Z}^{-1} \nabla p_2)_T} \right] \, d\mathbf{y}_1 = 0 , \end{aligned}$$

en additionnant (59) et (60), nous obtenons

$$\frac{1}{Z^{(2)}} \int_{\Sigma_L^\#} (\vec{e}_3 \times \mathbf{E}_C) \cdot \overline{(\nabla q_1)_T} dy_1 + \int_{\Sigma_L^\#} (\vec{e}_3 \times \mathbf{H}_C) \cdot \overline{(\nabla p_2)_T} dy_1 = \frac{1}{Z^{(2)}} \int_{\mathcal{B}_0^L} \mathbf{F}^E \cdot \overline{\nabla q_1} dy + \int_{\mathcal{B}_0^L} \mathbf{F}^H \cdot \overline{\nabla p_2} dy. \quad (61)$$

En prenant $L \rightarrow +\infty$ dans (61), comme $\nabla q_1 \rightarrow \vec{e}_1$, $\nabla p_2 \rightarrow \vec{e}_2$, \mathbf{F}^E , \mathbf{F}^H vérifient la propriété (\mathcal{P}_∞) et $\mathbf{E}_C = \mathbf{C}_E + \hat{\mathbf{E}}$ et $\mathbf{H}_C = \mathbf{C}_H + \hat{\mathbf{H}}$, nous avons une deuxième condition

$$-\widetilde{C}_E^{(2)} + Z^{(2)} \widetilde{C}_H^{(1)} = \frac{1}{T_1 T_2} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}^E \cdot \overline{\nabla q_1} dy + \frac{Z^{(2)}}{T_1 T_2} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}^H \cdot \overline{\nabla p_2} dy. \quad (62)$$

□

Nous venons de montrer que si les termes sources vérifient la condition (\mathcal{P}_∞) alors la solution $(\mathbf{E}_C, \mathbf{H}_C)$ dans $\mathcal{H}_\#^0(\mathcal{B})$ solution de (25bis) définie de manière unique est telle que

$$\widetilde{C}_E^{(1)} + Z^{(1)} \widetilde{C}_H^{(2)} \quad \text{et} \quad \widetilde{C}_E^{(2)} - Z^{(2)} \widetilde{C}_H^{(1)}$$

sont données à partir de la formule (51).

Cette solution ne tend donc pas nécessairement vers 0 même si

$$\widetilde{C}_E^{(1)} + Z^{(1)} \widetilde{C}_H^{(2)} = 0 = \widetilde{C}_E^{(2)} - Z^{(2)} \widetilde{C}_H^{(1)}.$$

Pour construire l'unique solution (\mathbf{E}, \mathbf{H}) solution de (25) telle que $(\mathbf{E} - \chi_{y_3 > H} \alpha^E, \mathbf{H} - \chi_{y_3 > H} \alpha^H) \in \mathcal{H}_\#(\mathcal{B})$ et qui tend vers 0 à l'infini, il faut corriger avec des fonctions du noyau.

Théorème 116

Supposons que \mathbf{F}^E , \mathbf{F}^H , G^E et G^H vérifient la propriété (\mathcal{P}_∞) . Il existe une unique solution de (25) telle que $(\mathbf{E} - \chi_{y_3 > H} \alpha^E, \mathbf{H} - \chi_{y_3 > H} \alpha^H) \in \mathcal{H}_\#(\mathcal{B})$ et telle que (\mathbf{E}, \mathbf{H}) tendent vers 0 à l'infini si et seulement si

$$C_E^{(1)} + Z^{(1)} C_H^{(2)} = 0 = C_E^{(2)} - Z^{(2)} C_H^{(1)}. \quad (63)$$

Cette solution est donnée par

$$\mathbf{E} = \chi_{y_3 > H} \alpha^E + \mathbf{E}_C - C_E^{(1)} \nabla p_1 - C_E^{(2)} \nabla p_2 - C_E^{(3)} \nabla p_3; \quad (64)$$

$$\mathbf{H} = \chi_{y_3 > H} \alpha^H + \mathbf{H}_C - \frac{C_E^{(2)}}{Z^{(2)}} \nabla q_1 + \frac{C_E^{(1)}}{Z^{(1)}} \nabla q_2 - C_H^{(3)} \nabla q_3; \quad (65)$$

où $(\mathbf{E}_C, \mathbf{H}_C)$ est l'unique solution dans $\mathcal{H}_\#^0(\mathcal{B})$ de (25bis) avec $\lim_{y_3 \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_C = \begin{pmatrix} \widetilde{C}_E^{(1)} \\ \widetilde{C}_E^{(2)} \\ \widetilde{C}_E^{(3)} \end{pmatrix}$ et $\lim_{y_3 \rightarrow +\infty} \mathbf{H}_C = \begin{pmatrix} \widetilde{C}_H^{(1)} \\ \widetilde{C}_H^{(2)} \\ \widetilde{C}_H^{(3)} \end{pmatrix}$

et où $\forall J = 1, 2, 3$,

$$C_E^{(J)} = \widetilde{C}_E^{(J)} + \alpha^{E,(J)} \quad \text{et} \quad C_H^{(J)} = \widetilde{C}_H^{(J)} + \alpha^{H,(J)}$$

Preuve. Nous montrons que (\mathbf{E}, \mathbf{H}) est solution de (25) car $(\nabla p_1, -\frac{1}{Z^{(1)}} \nabla q_2)$, $(\nabla p_2, \frac{1}{Z^{(2)}} \nabla q_1)$, $(\nabla p_3, 0)$ et $(0, \nabla q_3) \in \mathcal{N}$.

Nous avons $\lim_{y_3 \rightarrow +\infty} \mathbf{E} = 0$ et $\lim_{y_3 \rightarrow +\infty} \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \alpha^{H,(1)} + \tilde{C}_H^{(1)} - \frac{C_E^{(2)}}{Z^{(2)}} \\ \alpha^{H,(2)} + \tilde{C}_H^{(2)} + \frac{C_E^{(1)}}{Z^{(1)}} \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est égal à 0 si et seulement si la condition de

compatibilité est satisfaite.

Il existe qu'une seule fonction qui vérifie cela de manière unique! □

9.5 Construction des termes de champ proche

9.5.1 Construction des premiers termes de champ proche

Nous allons maintenant utiliser les résultats précédents pour construire les termes de champ proche. En assurant qu'ils tendent bien vers 0 à l'infini, nous allons déduire des conditions aux bords sur les termes de champ lointain.

Construction de \mathbf{E}_0 et \mathbf{H}_0

D'après le Théorème 110, pour presque tout $(\mathbf{x}_T) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution $(\tilde{\mathbf{E}}_0, \tilde{\mathbf{H}}_0)(\mathbf{x}_T; \cdot)$ dans $\mathcal{H}_\#^0(\mathcal{B})$ de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot}_y \tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{x}_T; \cdot) = 0 & \text{dans } \mathcal{B} \\ \mathbf{div}_y \tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{x}_T; \cdot) = 0 & \text{dans } \mathcal{B} \\ \tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{x}_T; \cdot) = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{P}_\# \\ \tilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{x}_T; \cdot) = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{P}_\# \\ (\tilde{\mathbf{e}}_3 \times \tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{x}_T; \cdot)) \times \tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{Z} (\tilde{\mathbf{e}}_3 \times \tilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{x}_T; \cdot)) & \text{sur } \Sigma_0^\# \end{array} \right. \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot}_y \tilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{x}_T; \cdot) = 0 & \text{dans } \mathcal{B} \\ \mathbf{div}_y \tilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{x}_T; \cdot) = 0 & \text{dans } \mathcal{B} \\ \tilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{x}_T; \cdot) \text{ est } (T_1, T_2)\text{-périodique} \\ \tilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{x}_T; \cdot) = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{P}_\# \end{array} \right. \quad (66)$$

Cette solution est $(\tilde{\mathbf{E}}_0, \tilde{\mathbf{H}}_0) = (0, 0)$!

D'après le Théorème 116, il existe une unique solution $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$ telle que $(\mathbf{E}_0 + \chi_{y_3 > H} \mathbf{e}_0|_{\Sigma_{eH}}, \mathbf{H}_0 + \chi_{y_3 > H} \mathbf{h}_0|_{\Sigma_{eH}}) \in \mathcal{H}_\#(\mathcal{B})$ et qui tend vers 0 quand y_3 tend vers $+\infty$ seulement si la condition de compatibilité (63) est satisfaite. Ceci nous donne ici

$$\mathbf{e}_{0,T} \Big|_{\Sigma_{eH}} (\mathbf{x}_T) - \mathbf{Z} \tilde{\mathbf{e}}_3 \times \mathbf{h}_0 \Big|_{\Sigma_{eH}} (\mathbf{x}_T) = 0 .$$

Ce couple de fonctions est donnée par

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) = -\chi_{y_3 > H}(\mathbf{y}) \mathbf{e}_0|_{\Sigma_{eH}}(\mathbf{x}_T) + \mathbf{e}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{eH}} (\mathbf{x}_T) \nabla p_1(\mathbf{y}) + \mathbf{e}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{eH}} (\mathbf{x}_T) \nabla p_2(\mathbf{y}) + \mathbf{e}_0^{(3)} \Big|_{\Sigma_{eH}} (\mathbf{x}_T) \nabla p_3(\mathbf{y}) ,$$

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) = -\chi_{y_3 \geq H}(\mathbf{y}) \mathbf{h}_0|_{\Sigma_{eH}}(\mathbf{x}_T) + \mathbf{h}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{eH}} (\mathbf{x}_T) \nabla q_1(\mathbf{y}) + \mathbf{h}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{eH}} (\mathbf{x}_T) \nabla q_2(\mathbf{y}) + \mathbf{h}_0^{(3)} \Big|_{\Sigma_{eH}} (\mathbf{x}_T) \nabla q_3(\mathbf{y}) .$$

Proposition 117

Pour presque tout $\mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique couple de fonctions $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)(\mathbf{x}_T; \cdot)$ tel que $(\mathbf{E}_0 + \chi_{y_3 > H} \mathbf{e}_0|_{\Sigma_{eH}}, \mathbf{H}_0 + \chi_{y_3 > H} \mathbf{h}_0|_{\Sigma_{eH}}) \in \mathcal{H}_\#(\mathcal{B})$ qui tend vers 0 à l'infini seulement si

$$\mathbf{e}_{0,T} - \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{e}}_3 \times \mathbf{h}_0) = 0 \quad \text{sur } \Sigma_{eH}. \quad (67)$$

Dans ce cas, pour presque tout $\mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y} \in \mathcal{B}$,

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) = -\chi_{y_3 > H}(\mathbf{y}) \mathbf{e}_0|_{\Sigma_{eH}}(\mathbf{x}_T) + \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{P}(\mathbf{y}) \mathbf{e}_0|_{\Sigma_{eH}}(\mathbf{x}_T), \quad (68)$$

et

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) = -\chi_{y_3 > H}(\mathbf{y}) \mathbf{h}_0|_{\Sigma_{eH}}(\mathbf{x}_T) + \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{Q}(\mathbf{y}) \mathbf{h}_0|_{\Sigma_{eH}}(\mathbf{x}_T). \quad (69)$$

Construction de \mathbf{E}_1 et \mathbf{H}_1

D'après le Théorème 110, pour presque tout $\mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution $(\widetilde{\mathbf{E}}_1, \widetilde{\mathbf{H}}_1)(\mathbf{x}_T; \cdot)$ dans $\mathcal{H}_\#^0(\mathcal{B})$ de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot}_y \widetilde{\mathbf{E}}_1(\mathbf{x}_T; \cdot) = -\mathbf{rot}_{\mathbf{x}_t} \widetilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{x}_T; \cdot) & ; \quad \mathbf{rot}_y \widetilde{\mathbf{H}}_1(\mathbf{x}_T; \cdot) = -\mathbf{rot}_{\mathbf{x}_t} \widetilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{x}_T; \cdot) \\ \quad - ik \widetilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{x}_T; \cdot) \quad \text{dans } \mathcal{B} & ; \quad \quad \quad + ik \widetilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{x}_T; \cdot) \quad \text{dans } \mathcal{B}, \\ \mathbf{div}_y \widetilde{\mathbf{E}}_1(\mathbf{x}_T; \cdot) = -\mathbf{div}_{\mathbf{x}_t} \widetilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{x}_T; \cdot) \quad \text{dans } \mathcal{B} & ; \quad \mathbf{div}_y \widetilde{\mathbf{H}}_1(\mathbf{x}_T; \cdot) = -\mathbf{div}_{\mathbf{x}_t} \widetilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{x}_T; \cdot) \quad \text{dans } \mathcal{B}, \\ \quad (\widetilde{\mathbf{E}}_1, \widetilde{\mathbf{H}}_1)(\mathbf{x}_T; \cdot) & \text{est } (T_1, T_2)\text{-périodique,} \\ \tilde{\mathbf{n}} \times \widetilde{\mathbf{E}}_1(\mathbf{x}_T; \cdot) = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_\# & ; \quad \tilde{\mathbf{n}} \cdot \widetilde{\mathbf{H}}_1(\mathbf{x}_T; \cdot) = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_\#, \\ \quad (\tilde{\mathbf{e}}_3 \times \widetilde{\mathbf{E}}_1(\mathbf{x}_T; \cdot)) \times \tilde{\mathbf{n}} & = \mathbf{Z}(\tilde{\mathbf{e}}_3 \times \widetilde{\mathbf{H}}_1(\mathbf{x}_T; \cdot)) \quad \text{sur } \Sigma_0^\#. \end{array} \right. \quad (70)$$

D'après le Théorème 116, il existe une unique solution $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ telle que $(\mathbf{E}_1 + \chi_{y_3 > H} \mathbf{e}_1|_{\Sigma_{eH}}, \mathbf{H}_1 + \chi_{y_3 > H} \mathbf{h}_1|_{\Sigma_{eH}}) \in \mathcal{H}_\#(\mathcal{B})$ et qui tend vers 0 quand y_3 tend vers $+\infty$ seulement si la condition de compatibilité (63) est satisfaite. Ceci nous donne ici

$$\left(\mathbf{e}_1|_{\Sigma_{eH}}(\mathbf{x}_T) \right)_T - \mathbf{Z} \tilde{\mathbf{e}}_3 \times \mathbf{h}_1|_{\Sigma_{eH}}(\mathbf{x}_T) = \frac{1}{T_1 T_2} \left(\begin{array}{c} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_0^E(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) \cdot \nabla q_2(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - Z^{(1)} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_0^H(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) \cdot \nabla p_1(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_0^E(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) \cdot \nabla q_1(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - Z^{(2)} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_0^H(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) \cdot \nabla p_2(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ 0 \end{array} \right)$$

avec $\mathbf{F}_0^E(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) = -\mathbf{rot}_{\mathbf{x}_t} \mathbf{E}_0(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) - ik \mathbf{H}_0(\mathbf{x}_T; \mathbf{y})$ et $\mathbf{F}_0^H(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) = -\mathbf{rot}_{\mathbf{x}_t} \mathbf{H}_0(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) + ik \mathbf{E}_0(\mathbf{x}_T; \mathbf{y})$. $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$ données par (68) et (69) se réécrivent $\mathbf{E}_0(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^3 \nabla \hat{p}_i(\mathbf{y}) \mathbf{e}_0^{(i)}|_{\Sigma_{eH}}(\mathbf{x}_T)$ et $\mathbf{H}_0(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^3 \nabla \hat{q}_i(\mathbf{y}) \mathbf{h}_0^{(i)}|_{\Sigma_{eH}}(\mathbf{x}_T)$ où $\nabla \hat{p}_i = \nabla p_i - \chi_{y_3 > H} \tilde{\mathbf{e}}_i$ et $\nabla \hat{q}_i = \nabla q_i - \chi_{y_3 > H} \tilde{\mathbf{e}}_i$.

Remarque 31. Nous rappelons que $\nabla p_i \xrightarrow{y_3 \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{e}}_i$ et $\nabla \hat{p}_i$ vérifie la propriété (\mathcal{P}_∞) . De même pour ∇q_i et $\nabla \hat{q}_i$ respectivement.

Définition 118

Nous donnons la définition des coefficients qui apparaissent dans la condition (81) :

$$\mathbf{A}_0 = \frac{-1}{T_1 T_2} \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_1 \cdot \nabla p_1 \, dy & \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_2 \cdot \nabla p_1 \, dy \\ \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_1 \cdot \nabla p_2 \, dy & \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_2 \cdot \nabla p_2 \, dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^{(1)} & a_0^{(2)} \\ a_0^{(3)} & a_0^{(4)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}; \quad (71)$$

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{T_1 T_2} \begin{bmatrix} - \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_1 \cdot \nabla q_2 \, dy & - \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_2 \cdot \nabla q_2 \, dy \\ \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_1 \cdot \nabla q_1 \, dy & \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_2 \cdot \nabla q_1 \, dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^{(1)} & b_0^{(2)} \\ b_0^{(3)} & b_0^{(4)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}; \quad (72)$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{1}{T_1 T_2} \begin{bmatrix} - \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_3 \cdot \nabla q_2 \, dy \\ \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_3 \cdot \nabla q_1 \, dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2^{(1)} \\ a_2^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2; \quad (73)$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{T_1 T_2} \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_3 \cdot \nabla p_1 \, dy \\ \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_3 \cdot \nabla p_2 \, dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2^{(1)} \\ b_2^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2; \quad (74)$$

$$\mathbf{A}_3 = \frac{1}{T_1 T_2} \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_3 \times \nabla p_1 \, dy \\ \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_3 \times \nabla p_2 \, dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3^{(1)} \\ \mathbf{a}_3^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}; \quad (75)$$

$$\mathbf{B}_3 = \frac{1}{T_1 T_2} \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_3 \times \nabla q_2 \, dy \\ - \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_3 \times \nabla q_1 \, dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_3^{(1)} \\ \mathbf{b}_3^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}; \quad (76)$$

$$\mathbf{A}_4 = \frac{1}{T_1 T_2} \left[- \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_1 \times \nabla q_2 \, dy; - \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_2 \times \nabla q_2 \, dy \right] = \left[\mathbf{a}_4^{(1)}; \mathbf{a}_4^{(2)} \right] \in \mathbb{R}^{3 \times 2}; \quad (77)$$

$$\mathbf{A}_5 = \frac{1}{T_1 T_2} \left[\int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_1 \times \nabla q_1 \, dy; \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_2 \times \nabla q_1 \, dy \right] = \left[\mathbf{a}_5^{(1)}; \mathbf{a}_5^{(2)} \right] \in \mathbb{R}^{3 \times 2}; \quad (78)$$

$$\mathbf{B}_4 = \frac{1}{T_1 T_2} \left[\int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_1 \times \nabla p_1 \, dy; \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_2 \times \nabla p_1 \, dy \right] = \left[\mathbf{b}_4^{(1)}; \mathbf{b}_4^{(2)} \right] \in \mathbb{R}^{3 \times 2}; \quad (79)$$

$$\mathbf{B}_5 = \frac{1}{T_1 T_2} \left[\int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_1 \times \nabla p_2 \, dy; \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_2 \times \nabla p_2 \, dy \right] = \left[\mathbf{b}_5^{(1)}; \mathbf{b}_5^{(2)} \right] \in \mathbb{R}^{3 \times 2}; \quad (80)$$

où pour $i = 1, 2, 3$, nous rappelons que $\nabla \hat{p}_i = \nabla p_i - \chi_{y_3 \geq H} \vec{e}_i$ et $\nabla \hat{q}_i = \nabla q_i - \chi_{y_3 \geq H} \vec{e}_i$.

Remarque 32. Toutes les intégrales ont bien un sens car $\nabla \hat{p}_i$ et $\nabla \hat{q}_i$ vérifient la propriété (\mathcal{P}_∞) du chapitre 3.

Notation 5

Nous introduisons quelques notations :

- $\text{rot}_{x_t} \mathbf{u} = \partial_{x_1} u^{(2)} - \partial_{x_2} u^{(1)}$.
- pour deux matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, on note $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{tr}({}^t \mathbf{A} \mathbf{B})$.
- $\nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{U} = [\nabla_{\mathbf{x}_t} U^{(1)} \quad \nabla_{\mathbf{x}_t} U^{(2)} \quad \nabla_{\mathbf{x}_t} U^{(3)}]$ avec $\nabla_{\mathbf{x}_t} U^{(1)} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} U^{(1)} \\ \partial_{x_2} U^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 119

Pour presque tout $\mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique couple de fonctions $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)(\mathbf{x}_T; \cdot)$ tel que $(\mathbf{E}_1 + \chi_{y_3 > H} \mathbf{e}_0|_{\Sigma_{\varepsilon H}}, \mathbf{H}_1 + \chi_{y_3 > H} \mathbf{h}_0|_{\Sigma_{\varepsilon H}}) \in \mathcal{H}_{\#}(\mathcal{B})$ qui tend vers 0 à l'infini seulement si

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{1,T}(\mathbf{x}) - \mathbf{Z} (\tilde{\mathbf{e}}_3 \times \mathbf{h}_1(\mathbf{x})) = & \mathbf{Z} i k \mathbf{A}_0 \mathbf{e}_{0,T}(\mathbf{x}) + i k \mathbf{B}_0 \mathbf{h}_{0,T}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}_2 \text{rot}_{x_t} \mathbf{e}_0(\mathbf{x}) - \mathbf{Z} \mathbf{b}_2 \text{rot}_{x_t} \mathbf{h}_0(\mathbf{x}) \\ & - \frac{\mathbf{Z}}{i k} \mathbf{A}_3 \nabla_{x_t} (\text{rot}_{x_t} \mathbf{e}_0(\mathbf{x})) - \frac{1}{i k} \mathbf{B}_3 \nabla_{x_t} (\text{rot}_{x_t} \mathbf{h}_0(\mathbf{x})) \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_4 : \nabla_{x_t} \mathbf{e}_{0,T}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{A}_5 : \nabla_{x_t} \mathbf{e}_{0,T}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \mathbf{Z} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_4 : \nabla_{x_t} \mathbf{h}_{0,T}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{B}_5 : \nabla_{x_t} \mathbf{h}_{0,T}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H} ; \end{aligned} \quad (81)$$

où les coefficients sont définis dans la Définition [118](#).

Dans ce cas, pour presque tout $\mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y} \in \mathcal{B}$,

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) = -\chi_{y_3 > H}(\mathbf{y}) \mathbf{e}_1|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_T) + \widetilde{\mathbf{E}}_1(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) - \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{P}(\mathbf{y}) \mathbf{C}_E, \quad (82)$$

avec $\mathbf{C}_E = \begin{pmatrix} C_{E,1}^{(1)} \\ C_{E,1}^{(2)} \\ C_{E,1}^{(3)} \end{pmatrix} = \lim_{y_3 \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_1(\mathbf{y})$ et $C_{E,1}^{(i)} = \widetilde{C}_{E,1}^{(i)} - \mathbf{e}_1^{(i)}|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_T)$ pour $i = 1, 2, 3$. Nous avons aussi

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) = -\chi_{y_3 > H}(\mathbf{y}) \mathbf{h}_1|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_T) + \widetilde{\mathbf{H}}_1(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) - \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{Q}(\mathbf{y}) \mathbf{C}_H, \quad (83)$$

avec $\mathbf{C}_H = \begin{pmatrix} C_{H,1}^{(1)} \\ C_{H,1}^{(2)} \\ C_{H,1}^{(3)} \end{pmatrix} = \lim_{y_3 \rightarrow +\infty} \mathbf{H}_1(\mathbf{y})$ et $C_{H,1}^{(i)} = \widetilde{C}_{H,1}^{(i)} - \mathbf{h}_1^{(i)}|_{\Sigma_{\varepsilon H}}(\mathbf{x}_T)$ pour $i = 1, 2, 3$.

$(\widetilde{\mathbf{E}}_1, \widetilde{\mathbf{H}}_1)$ sont des solutions de problèmes de cellule.

Preuve. Nous cherchons à exprimer
$$\begin{pmatrix} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_0^E(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) \cdot \nabla q_2(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - Z^{(1)} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_0^H(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) \cdot \nabla p_1(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_0^E(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) \cdot \nabla q_1(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - Z^{(2)} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_0^H(x_1, x_2; \mathbf{y}) \cdot \nabla p_2(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0^E &= -\mathbf{rot}_{\mathbf{x}_t} \left[\mathbf{e}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \nabla \hat{p}_1 + \mathbf{e}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \nabla \hat{p}_2 + \mathbf{e}_0^{(3)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \nabla \hat{p}_3 \right] - ik \left[\mathbf{h}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \nabla \hat{q}_1 + \mathbf{h}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \nabla \hat{q}_2 + \mathbf{h}_0^{(3)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \nabla \hat{q}_3 \right] \\ &= -\nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{e}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \times \nabla \hat{p}_1 - \nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{e}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \times \nabla \hat{p}_2 - \nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{e}_0^{(3)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \times \nabla \hat{p}_3 - ik \mathbf{h}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \nabla \hat{q}_1 - ik \mathbf{h}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \nabla \hat{q}_2 - ik \mathbf{h}_0^{(3)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \nabla \hat{q}_3 ; \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0^H &= -\mathbf{rot}_{\mathbf{x}_t} \left[\mathbf{h}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \nabla \hat{q}_1 + \mathbf{h}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \nabla \hat{q}_2 + \mathbf{h}_0^{(3)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \nabla \hat{q}_3 \right] + ik \left[\mathbf{e}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \nabla \hat{p}_1 + \mathbf{e}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \nabla \hat{p}_2 + \mathbf{e}_0^{(3)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \nabla \hat{p}_3 \right] \\ &= -\nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{h}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \times \nabla \hat{q}_1 - \nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{h}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \times \nabla \hat{q}_2 - \nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{h}_0^{(3)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \times \nabla \hat{q}_3 + ik \mathbf{e}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \nabla \hat{p}_1 + ik \mathbf{e}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \nabla \hat{p}_2 + ik \mathbf{e}_0^{(3)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \nabla \hat{p}_3 . \end{aligned}$$

Nous avons d'une part,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_0^E \cdot \nabla q_2 \, \mathbf{dy} - Z^{(1)} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_0^H \cdot \nabla p_1 \, \mathbf{dy} \\ &= \left[-\nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{e}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \cdot \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_1 \times \nabla q_2 \, \mathbf{dy} - \nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{e}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \cdot \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_2 \times \nabla q_2 \, \mathbf{dy} - \nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{e}_0^{(3)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \cdot \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_3 \times \nabla q_2 \, \mathbf{dy} \right. \\ &\quad \left. - ik \mathbf{h}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_1 \cdot \nabla q_2 \, \mathbf{dy} - ik \mathbf{h}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_2 \cdot \nabla q_2 \, \mathbf{dy} - ik \mathbf{h}_0^{(3)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_3 \cdot \nabla q_2 \, \mathbf{dy} \right] \\ &\quad - Z^{(1)} \left[-\nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{h}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \cdot \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_1 \times \nabla p_1 \, \mathbf{dy} - \nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{h}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \cdot \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_2 \times \nabla p_1 \, \mathbf{dy} - \nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{h}_0^{(3)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \cdot \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_3 \times \nabla p_1 \, \mathbf{dy} \right. \\ &\quad \left. + ik \mathbf{e}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_1 \cdot \nabla p_1 \, \mathbf{dy} + ik \mathbf{e}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_2 \cdot \nabla p_1 \, \mathbf{dy} + ik \mathbf{e}_0^{(3)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_3 \cdot \nabla p_1 \, \mathbf{dy} \right] . \end{aligned}$$

En utilisant que :

★ comme $\mathbf{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{F}_0^E = 0$ dans $\mathcal{B}(\Delta p_i = 0, \Delta q_i = 0)$ alors $\mathbf{rot}_{\mathbf{x}_t} \left(\mathbf{e}_0 \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} + ik \mathbf{h}_0 \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \right) = 0$ ce qui donne

$$ik \mathbf{h}_0^{(3)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} = - \left(\partial_{x_1} \mathbf{e}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} - \partial_{x_2} \mathbf{e}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} \right) = -\mathbf{rot}_{x_t} \mathbf{e}_0 \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} ; \quad (84)$$

★ comme $\mathbf{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{F}_0^H = 0$ alors $\mathbf{rot}_{\mathbf{x}_t} \mathbf{h}_0 \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} - ik \mathbf{e}_0 \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} = 0$ ce qui donne

$$ik \mathbf{e}_0^{(3)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} = \partial_{x_1} \mathbf{h}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} - \partial_{x_2} \mathbf{h}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} = \mathbf{rot}_{x_t} \mathbf{h}_0 \Big|_{\Sigma_{\epsilon H}} ; \quad (85)$$

nous trouvons

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_0^E \cdot \nabla q_2 \, \mathbf{dy} - Z^{(1)} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_0^H \cdot \nabla p_1 \, \mathbf{dy} \\
 = & Z^{(1)} \left[-ik \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_1 \cdot \nabla p_1 \, \mathbf{dy} \right] \mathbf{e}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{eH}} + Z^{(1)} \left[-ik \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_2 \cdot \nabla p_1 \, \mathbf{dy} \right] \mathbf{e}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \\
 & + \left[-ik \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_1 \cdot \nabla q_2 \, \mathbf{dy} \right] \mathbf{h}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{eH}} + \left[-ik \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_2 \cdot \nabla q_2 \, \mathbf{dy} \right] \mathbf{h}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \\
 & + \nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{e}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \cdot \left[- \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_1 \times \nabla q_2 \, \mathbf{dy} \right] + \nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{e}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \cdot \left[- \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_2 \times \nabla q_2 \, \mathbf{dy} \right] \\
 & + Z^{(1)} \nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{h}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \cdot \left[\int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_1 \times \nabla p_1 \, \mathbf{dy} \right] + Z^{(1)} \nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{h}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \cdot \left[\int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_2 \times \nabla p_1 \, \mathbf{dy} \right] \\
 & + \left[\int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_3 \cdot \nabla q_2 \, \mathbf{dy} \right] \text{rot}_{x_t} \mathbf{e}_0 \Big|_{\Sigma_{eH}} - Z^{(1)} \left[\int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_3 \cdot \nabla p_1 \, \mathbf{dy} \right] \text{rot}_{x_t} \mathbf{h}_0 \Big|_{\Sigma_{eH}} \\
 & - Z^{(1)} \nabla_{\mathbf{x}_t} \left(\text{rot}_{x_t} \mathbf{e}_0 \Big|_{\Sigma_{eH}} \right) \cdot \left[\frac{1}{ik} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_3 \times \nabla p_1 \, \mathbf{dy} \right] - \nabla_{\mathbf{x}_t} \left(\text{rot}_{x_t} \mathbf{h}_0 \Big|_{\Sigma_{eH}} \right) \cdot \left[\frac{1}{ik} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_3 \times \nabla q_2 \, \mathbf{dy} \right].
 \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_0^E \cdot \nabla q_1 \, \mathbf{dy} - Z^{(2)} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_0^H \cdot \nabla p_2 \, \mathbf{dy} \\
 = & \left[\nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{e}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \cdot \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_1 \times \nabla q_1 \, \mathbf{dy} + \nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{e}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \cdot \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_2 \times \nabla q_1 \, \mathbf{dy} + \nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{e}_0^{(3)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \cdot \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_3 \times \nabla q_1 \, \mathbf{dy} \right. \\
 & \left. + ik \mathbf{h}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_1 \cdot \nabla q_1 \, \mathbf{dy} + ik \mathbf{h}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_2 \cdot \nabla q_1 \, \mathbf{dy} + ik \mathbf{h}_0^{(3)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_3 \cdot \nabla q_1 \, \mathbf{dy} \right] \\
 & + Z^{(2)} \left[\nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{h}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \cdot \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_1 \times \nabla p_2 \, \mathbf{dy} + \nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{h}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \cdot \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_2 \times \nabla p_2 \, \mathbf{dy} + \nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{h}_0^{(3)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \cdot \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_3 \times \nabla p_2 \, \mathbf{dy} \right. \\
 & \left. - ik \mathbf{e}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_1 \cdot \nabla p_2 \, \mathbf{dy} - ik \mathbf{e}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_2 \cdot \nabla p_2 \, \mathbf{dy} - ik \mathbf{e}_0^{(3)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_3 \cdot \nabla p_2 \, \mathbf{dy} \right]
 \end{aligned}$$

En utilisant que $ik \mathbf{h}_0^{(3)} \Big|_{\Sigma_{eH}} = -\text{rot}_{x_t} \mathbf{e}_0 \Big|_{\Sigma_{eH}}$ et $ik \mathbf{e}_0^{(3)} \Big|_{\Sigma_{eH}} = \text{rot}_{x_t} \mathbf{h}_0 \Big|_{\Sigma_{eH}}$, nous trouvons

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_0^E \cdot \nabla q_1 \, \mathbf{dy} - Z^{(2)} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_0^H \cdot \nabla p_2 \, \mathbf{dy} \\
 = & Z^{(2)} \left[-ik \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_1 \cdot \nabla p_2 \, \mathbf{dy} \right] \mathbf{e}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{eH}} + Z^{(2)} \left[-ik \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_2 \cdot \nabla p_2 \, \mathbf{dy} \right] \mathbf{e}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \\
 & + \left[ik \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_1 \cdot \nabla q_1 \, \mathbf{dy} \right] \mathbf{h}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{eH}} + \left[ik \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_2 \cdot \nabla q_1 \, \mathbf{dy} \right] \mathbf{h}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \\
 & + \nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{e}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \cdot \left[\int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_1 \times \nabla q_1 \, \mathbf{dy} \right] + \nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{e}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \cdot \left[\int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_2 \times \nabla q_1 \, \mathbf{dy} \right] \\
 & + Z^{(2)} \nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{h}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \cdot \left[\int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_1 \times \nabla p_2 \, \mathbf{dy} \right] + Z^{(2)} \nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{h}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \cdot \left[\int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_2 \times \nabla p_2 \, \mathbf{dy} \right] \\
 & - \left[\int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_3 \cdot \nabla q_1 \, \mathbf{dy} \right] \text{rot}_{x_t} \mathbf{e}_0 \Big|_{\Sigma_{eH}} - Z^{(2)} \left[\int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_3 \cdot \nabla p_2 \, \mathbf{dy} \right] \text{rot}_{x_t} \mathbf{h}_0 \Big|_{\Sigma_{eH}} \\
 & - Z^{(2)} \nabla_{\mathbf{x}_t} \left(\text{rot}_{x_t} \mathbf{e}_0 \Big|_{\Sigma_{eH}} \right) \cdot \left[\frac{1}{ik} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_3 \times \nabla p_2 \, \mathbf{dy} \right] - \nabla_{\mathbf{x}_t} \left(\text{rot}_{x_t} \mathbf{h}_0 \Big|_{\Sigma_{eH}} \right) \cdot \left[-\frac{1}{ik} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_3 \times \nabla q_1 \, \mathbf{dy} \right].
 \end{aligned}$$

En utilisant les deux expressions donnés précédemment, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_0^E(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) \cdot \nabla q_2(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - Z^{(1)} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_0^H(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) \cdot \nabla p_1(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right) \\
 & \left(- \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_0^E(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) \cdot \nabla q_1(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - Z^{(2)} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_0^H(x_1, x_2; \mathbf{y}) \cdot \nabla p_2(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right) \\
 & = -ikZ \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_1 \cdot \nabla p_1 \, d\mathbf{y} & \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_2 \cdot \nabla p_1 \, d\mathbf{y} \\ \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_1 \cdot \nabla p_2 \, d\mathbf{y} & \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_2 \cdot \nabla p_2 \, d\mathbf{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \\ \mathbf{e}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \end{bmatrix} + ik \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_2 \cdot \nabla q_2 \, d\mathbf{y} & - \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_1 \cdot \nabla q_2 \, d\mathbf{y} \\ - \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_2 \cdot \nabla q_1 \, d\mathbf{y} & \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_1 \cdot \nabla q_1 \, d\mathbf{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{h}_0^{(2)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \\ \mathbf{h}_0^{(1)} \Big|_{\Sigma_{eH}} \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_3 \cdot \nabla q_2 \, d\mathbf{y} \\ - \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_3 \cdot \nabla q_1 \, d\mathbf{y} \end{bmatrix} \text{rot}_{x_t} \mathbf{e}_0 \Big|_{\Sigma_{eH}} - Z \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_3 \cdot \nabla p_1 \, d\mathbf{y} \\ \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_3 \cdot \nabla p_2 \, d\mathbf{y} \end{bmatrix} \text{rot}_{x_t} \mathbf{h}_0 \Big|_{\Sigma_{eH}} \\
 & - \frac{Z}{ik} \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_3 \times \nabla p_1 \, d\mathbf{y} \\ \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_3 \times \nabla p_2 \, d\mathbf{y} \end{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}_t} \left(\text{rot}_{x_t} \mathbf{e}_0 \Big|_{\Sigma_{eH}} \right) + \frac{1}{ik} \begin{bmatrix} - \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_3 \times \nabla q_2 \, d\mathbf{y} \\ \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_3 \times \nabla q_1 \, d\mathbf{y} \end{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}_t} \left(\text{rot}_{x_t} \mathbf{h}_0 \Big|_{\Sigma_{eH}} \right) \\
 & + \begin{bmatrix} - \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_1 \times \nabla q_2 \, d\mathbf{y} ; & - \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_2 \times \nabla q_2 \, d\mathbf{y} \\ \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_1 \times \nabla q_1 \, d\mathbf{y} ; & \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{p}_2 \times \nabla q_1 \, d\mathbf{y} \end{bmatrix} : \nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{e}_{0,T} \Big|_{\Sigma_{eH}} + Z \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_1 \times \nabla p_1 \, d\mathbf{y} ; & \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_2 \times \nabla p_1 \, d\mathbf{y} \\ \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_1 \times \nabla p_2 \, d\mathbf{y} ; & \int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{q}_2 \times \nabla p_2 \, d\mathbf{y} \end{bmatrix} : \nabla_{\mathbf{x}_t} \mathbf{h}_{0,T} \Big|_{\Sigma_{eH}} .
 \end{aligned}$$

□

9.5.2 Caractérisation des termes de champ proche à tout ordre

En généralisant la technique de construction précédente, nous pouvons trouver une condition de bord pour les termes de champ lointain $(\mathbf{e}_m, \mathbf{h}_m)$ jusqu'à un certain ordre m qui garantit l'existence d'un couple de fonctions $(\mathbf{E}_m, \mathbf{H}_m)$ qui tendent vers 0 à l'infini jusqu'à l'ordre m . Nous pouvons ensuite obtenir une expression pour les termes de champ proche.

Proposition 120

Soit $m \geq 1$. Pour presque tout $\mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2$, il existe une famille $\{(\mathbf{E}_q, \mathbf{H}_q)(\mathbf{x}_T; \cdot), \forall q \leq m\}$ telle que $(\mathbf{E}_q + \chi_{y_3 > H} \mathbf{e}_q|_{\Sigma_{eH}}, \mathbf{H}_q + \chi_{y_3 > H} \mathbf{h}_q|_{\Sigma_{eH}}) \in \mathcal{H}_\#(\mathcal{B})$ qui tend vers 0 à l'infini seulement si

$$\forall q \leq m, \quad (\mathbf{e}_q|_{\Sigma_{eH}}(\mathbf{x}_T))_T - \mathbf{Z} \vec{e}_3 \times \mathbf{h}_q|_{\Sigma_{eH}}(\mathbf{x}_T) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{E,q}^{(1)} + Z^{(1)} \tilde{\mathbf{C}}_{H,q}^{(2)} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{E,q}^{(2)} - Z^{(2)} \tilde{\mathbf{C}}_{H,q}^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (86)$$

où

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{E,q}^{(1)} + Z^{(1)} \tilde{\mathbf{C}}_{H,q}^{(2)} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{E,q}^{(2)} - Z^{(2)} \tilde{\mathbf{C}}_{H,q}^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{T_1 T_2} \begin{pmatrix} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_{q-1}^E(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) \cdot \nabla q_2(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - Z^{(1)} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_{q-1}^H(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) \cdot \nabla p_1(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_{q-1}^E(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) \cdot \nabla q_1(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - Z^{(2)} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_{q-1}^H(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) \cdot \nabla p_2(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, pour presque tout $\mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y} \in \mathcal{B}$, $\forall q \leq m$

$$\mathbf{E}_q(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) = -\chi_{y_3 > H}(\mathbf{y}) \mathbf{e}_q|_{\Sigma_{eH}}(\mathbf{x}_T) + \widetilde{\mathbf{E}}_q(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) - \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{P}(\mathbf{y}) \mathbf{C}_{E,q}, \quad (87)$$

avec $\mathbf{C}_{E,q} = \begin{pmatrix} C_{E,q}^{(1)} \\ C_{E,q}^{(2)} \\ C_{E,q}^{(3)} \end{pmatrix} = \lim_{y_3 \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_q(\mathbf{y})$ et $C_{E,q}^{(i)} = \tilde{\mathbf{C}}_{E,q}^{(i)} - \mathbf{e}_q^{(i)}|_{\Sigma_{eH}}(\mathbf{x}_T)$ pour $i = 1, 2, 3$. Nous avons aussi

$$\mathbf{H}_q(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) = -\chi_{y_3 > H}(\mathbf{y}) \mathbf{h}_q|_{\Sigma_{eH}}(\mathbf{x}_T) + \widetilde{\mathbf{H}}_q(\mathbf{x}_T; \mathbf{y}) - \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{Q}(\mathbf{y}) \mathbf{C}_{H,q}, \quad (88)$$

avec $\mathbf{C}_{H,q} = \begin{pmatrix} C_{H,q}^{(1)} \\ C_{H,q}^{(2)} \\ C_{H,q}^{(3)} \end{pmatrix} = \lim_{y_3 \rightarrow +\infty} \mathbf{H}_q(\mathbf{y})$ et $C_{H,q}^{(i)} = \tilde{\mathbf{C}}_{H,q}^{(i)} - \mathbf{h}_q^{(i)}|_{\Sigma_{eH}}(\mathbf{x}_T)$ pour $i = 1, 2, 3$. Notons que $(\widetilde{\mathbf{E}}_q, \widetilde{\mathbf{H}}_q)$ sont des solutions de problèmes de cellule type dépendant des fonctions précédentes et des éléments du noyaux.

9.6 Problèmes vérifiés par les termes de champ lointain

Les conditions aux limites pour les termes de champ lointain obtenues précédemment, garantissant l'existence de couples de termes de champ proche qui tendent vers 0 à l'infini, permettent de compléter les équations satisfaites par les termes de champ lointain.

Nous rappelons que $\mathbf{E}_{inc} = \hat{\mathbf{e}} e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2 + ik_3 x_3}$ et $\mathbf{H}_{inc} = \hat{\mathbf{e}} \times \frac{\mathbf{k}_{inc}}{k} e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2 + ik_3 x_3}$ sont des ondes planes incidentes $(k_1 \varepsilon T_1, k_2 \varepsilon T_2)$ quasi-périodiques.

Constuction de \mathbf{e}_0 et \mathbf{h}_0
Définition 121

Les termes de champ lointain \mathbf{e}_0 et \mathbf{h}_0 satisfont la condition (67), les équations de Maxwell et les conditions d'onde sortantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{h}_0 - ik \mathbf{e}_0 = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty) ; \\ \mathbf{rot} \mathbf{e}_0 + ik \mathbf{h}_0 = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty) ; \\ \mathbf{div} \mathbf{e}_0 = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty) ; \\ \mathbf{div} \mathbf{h}_0 = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty) ; \\ \mathbf{e}_{0,T} = \mathbf{Z} (\vec{e}_3 \times \mathbf{h}_0) \quad \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H} ; \\ \mathbf{e}_0 - \mathbf{E}_{inc} \text{ est sortant} ; \\ \mathbf{h}_0 - \mathbf{H}_{inc} \text{ est sortant} . \end{array} \right. \quad (89)$$

En particulier, en utilisant les équations (6) et (8), la condition (67), nous pouvons exprimer le problème uniquement pour \mathbf{e}_0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{e}_0 - k^2 \mathbf{e}_0 = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty) ; \\ \vec{e}_3 \times \mathbf{rot} \mathbf{e}_0(\mathbf{x}) + ik\mathbf{Z}^{-1} \mathbf{e}_{0,T} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H} ; \\ \mathbf{e}_0 - \mathbf{E}_{inc} \text{ est sortant} . \end{array} \right. \quad (90)$$

Notons que \mathbf{E}_{inc} est une plane incidente alors \mathbf{e}_0 est \mathcal{C}^∞ et \mathbf{e}_0 va aussi être une onde plane qui s'écrit sous la forme

$$\mathbf{e}_0(x_1, x_2, x_3) = \hat{\mathbf{e}} e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2} e^{ik_3 x_3} + \mathbf{R}_0 e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2} e^{-ik_3(x_3 - \varepsilon H)} .$$

Étant donné que $\vec{e}_3 \times \mathbf{rot} \mathbf{e}_0 + ik\mathbf{Z}^{-1} \mathbf{e}_{0,T} = 0$ sur $\Sigma_{\varepsilon H}$, en remplaçant avec la formule de \mathbf{e}_0 , nous pouvons exprimer une relation sur \mathbf{R}_0 :

$$\left[ik_3 \mathbf{R}_{0,T} + ik_{\mathbf{T}} \mathbf{R}_0^{(3)} + ik\mathbf{Z}^{-1} \mathbf{R}_{0,T} \right] e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2} = e^{ik_2 \varepsilon H} \left[ik_{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{e}}^{(3)} - ik_3 \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{T}} - ik\mathbf{Z}^{-1} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{T}} \right] e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2} .$$

De plus, comme $\mathbf{div} \mathbf{e}_{0,d} = 0$, nous avons une autre relation :

$$k_1 \mathbf{R}_0^{(1)} + k_2 \mathbf{R}_0^{(2)} - k_3 \mathbf{R}_0^{(3)} = 0 .$$

Pour exprimer explicitement \mathbf{A}_0 , il faut résoudre le système linéaire à trois équations donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} (k_3 + k\mathbf{Z}^{-1}) \mathbf{R}_{0,T} + k_{\mathbf{T}} \mathbf{R}_0^{(3)} = e^{ik_2 \varepsilon H} \left[(k_3 - k\mathbf{Z}^{-1}) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{T}} - k_{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{e}}^{(3)} \right] , \\ k_1 \mathbf{R}_0^{(1)} + k_2 \mathbf{R}_0^{(2)} - k_3 \mathbf{R}_0^{(3)} = 0 . \end{array} \right. \quad (91)$$

Proposition 122

Il existe une unique solution de (90) telle que \mathbf{e}_0 est \mathcal{C}^∞ qui s'écrit, pour $x_3 \geq \varepsilon H$,

$$\mathbf{e}_0(x_1, x_2, x_3) = \hat{\mathbf{e}} e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2} e^{ik_3 x_3} + \mathbf{R}_0 e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2} e^{-ik_3(x_3 - \varepsilon H)}, \quad (92)$$

avec $\mathbf{R}_0 \in \mathbb{C}^3$ est calculé à partir de (91). Le vecteur \mathbf{R}_0 correspond au vecteur de réflexion en $x_3 = \varepsilon H$.

Nous avons évidemment un résultat similaire pour \mathbf{h}_0 .

Construction de \mathbf{e}_1 et \mathbf{h}_1
Définition 123

Les termes de champ lointain \mathbf{e}_1 et \mathbf{h}_1 satisfont la condition (81), les équations de Maxwell et les conditions d'onde sortantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{h}_1 - ik \mathbf{e}_1 = f \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty), \\ \mathbf{rot} \mathbf{e}_1 + ik \mathbf{h}_1 = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty), \\ \mathbf{div} \mathbf{e}_1 = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty), \\ \mathbf{div} \mathbf{h}_1 = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty), \\ \mathbf{e}_{1,T} - \mathbf{Z} (\vec{e}_3 \times \mathbf{h}_1) = \mathbf{Z} ik \mathbf{A}_0 \mathbf{e}_{0,T} + ik \mathbf{B}_0 \mathbf{h}_{0,T} - \mathbf{a}_2 \mathbf{rot}_{x_t} \mathbf{e}_0 - \mathbf{Z} \mathbf{b}_2 \mathbf{rot}_{x_t} \mathbf{h}_0 \\ \quad - \frac{\mathbf{Z}}{ik} \mathbf{A}_3 \nabla_{x_t} (\mathbf{rot}_{x_t} \mathbf{e}_0) - \frac{1}{ik} \mathbf{B}_3 \nabla_{x_t} (\mathbf{rot}_{x_t} \mathbf{h}_0) \\ \quad + \left[\mathbf{A}_4 : \nabla_{x_t} \mathbf{e}_{0,T} \right] + \mathbf{Z} \left[\mathbf{B}_4 : \nabla_{x_t} \mathbf{h}_{0,T} \right] \\ \quad + \left[\mathbf{A}_5 : \nabla_{x_t} \mathbf{e}_{0,T} \right] + \mathbf{Z} \left[\mathbf{B}_5 : \nabla_{x_t} \mathbf{h}_{0,T} \right] \quad \text{sur} \quad \Sigma_{\varepsilon H}, \\ \mathbf{e}_1 \quad \text{est sortant} \quad , \\ \mathbf{h}_1 \quad \text{est sortant} \quad . \end{array} \right. \quad (93)$$

En particulier, en utilisant les équations (6) et (8), la condition (81), nous pouvons exprimer le problème uniquement pour \mathbf{e}_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{e}_1 - k^2 \mathbf{e}_1 = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty), \\ -\frac{\mathbf{Z}i}{k} \vec{e}_3 \times \mathbf{rot} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{1,T} = \mathbf{Z} ik \mathbf{A}_0 \mathbf{e}_{0,T} + ik \mathbf{B}_0 (\mathbf{rot} \mathbf{e}_0)_T - \mathbf{a}_2 \mathbf{rot}_{x_t} \mathbf{e}_0 - \frac{\mathbf{Z}i}{k} \mathbf{b}_2 \mathbf{rot}_{x_t} (\mathbf{rot} \mathbf{e}_0) \\ \quad - \frac{\mathbf{Z}}{ik} \mathbf{A}_3 \nabla_{x_t} (\mathbf{rot}_{x_t} \mathbf{e}_0) - \frac{i}{k^2} \mathbf{B}_3 \nabla_{x_t} (\mathbf{rot}_{x_t} (\mathbf{rot} \mathbf{e}_0)) + \left[\mathbf{A}_4 : \nabla_{x_t} \mathbf{e}_{0,T} \right] \\ \quad + \frac{\mathbf{Z}i}{k} \left[\mathbf{B}_4 : \nabla_{x_t} (\mathbf{rot} \mathbf{e}_0)_T \right] \\ \quad + \frac{\mathbf{Z}i}{k} \left[\mathbf{B}_5 : \nabla_{x_t} (\mathbf{rot} \mathbf{e}_0)_T \right] \quad \text{sur} \quad \Sigma_{\varepsilon H}, \\ \mathbf{e}_1 \quad \text{est sortant} \quad . \end{array} \right. \quad (94)$$

\mathbf{e}_1 correspond uniquement à la partie diffractée et dépend de \mathbf{e}_0 alors \mathbf{e}_1 est \mathcal{C}^∞ . Puisque \mathbf{e}_0 est une onde plane,

\mathbf{e}_1 va l'être aussi. Nous cherchons \mathbf{e}_1 sous la forme

$$\mathbf{e}_1(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{R}_1 e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2} e^{-ik_3(x_3 - \varepsilon H)} .$$

Étant donné que $-\frac{Zi}{k} \vec{e}_3 \times \mathbf{rot} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{1,T} = Z ik \mathbf{A}_0 \mathbf{e}_{0,T} + ik \mathbf{B}_0 (\mathbf{rot} \mathbf{e}_0)_T - \mathbf{a}_2 \mathbf{rot}_{x_t} \mathbf{e}_0 - \frac{Zi}{k} \mathbf{b}_2 \mathbf{rot}_{x_t} (\mathbf{rot} \mathbf{e}_0) - \frac{Z}{ik} \mathbf{A}_3 \nabla_{x_t} (\mathbf{rot}_{x_t} \mathbf{e}_0) - \frac{i}{k^2} \mathbf{B}_3 \nabla_{x_t} (\mathbf{rot}_{x_t} (\mathbf{rot} \mathbf{e}_0)) + \left[\mathbf{A}_4 : \nabla_{x_t} \mathbf{e}_{0,T} \right] + \frac{Zi}{k} \left[\mathbf{B}_4 : \nabla_{x_t} (\mathbf{rot} \mathbf{e}_0)_T \right] + \left[\mathbf{A}_5 : \nabla_{x_t} \mathbf{e}_{0,T} \right] + \frac{Zi}{k} \left[\mathbf{B}_5 : \nabla_{x_t} (\mathbf{rot} \mathbf{e}_0)_T \right]$ sur $\Sigma_{\varepsilon H}$, en remplaçant \mathbf{e}_1 par son expression et \mathbf{e}_0 par l'expression (95), il est possible d'exprimer \mathbf{R}_1 .

Proposition 124

Il existe une unique solution de (94) telle que \mathbf{e}_1 est \mathcal{C}^∞ qui s'écrit, pour $x_3 \geq \varepsilon H$,

$$\mathbf{e}_1(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{R}_1 e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2} e^{-ik_3(x_3 - \varepsilon H)} , \quad (95)$$

avec $\mathbf{R}_1 \in \mathbb{C}^3$. Le vecteur \mathbf{R}_1 correspond au vecteur de réflexion en $x_3 = \varepsilon H$.

Nous avons évidemment un résultat similaire pour \mathbf{h}_1 .

9.7 Modèles effectifs proposés

Nous venons de construire les termes du développement. Nous pourrions, comme dans le chapitre 3 à partir d'estimations sur les termes de champ proche établir des estimations d'erreur pour le développement asymptotique de $(\mathbf{E}^\varepsilon, \mathbf{H}^\varepsilon)$. C'est un travail qui reste à faire. Comme dans la suite nous nous intéressons en priorité aux termes de champ lointain, il serait aussi possible de donner une estimation de l'erreur commise pour les termes de champ lointain.

Soit nous construisons les termes de champ lointain de façon incrémentale, soit nous utilisons le modèle qui va approcher la série tronquée de champs lointains. Ceci peut être utile pour l'étude de géométries plus générales. Le fait de considérer un modèle approché permet d'avoir une approximation directe jusqu'à un certain ordre.

Plus précisément, le modèle à l'ordre 1 est construit à partir de \mathbf{e}_0 et \mathbf{h}_0 satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{h}_0 - ik \mathbf{e}_0 = f \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty) , \\ \mathbf{rot} \mathbf{e}_0 + ik \mathbf{h}_0 = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty) , \\ \mathbf{div} \mathbf{e}_0 = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty) , \\ \mathbf{div} \mathbf{h}_0 = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty) , \\ \mathbf{e}_{0,T}|_{\Sigma_{\varepsilon H}} = Z (\vec{e}_3 \times \mathbf{h}_0|_{\Sigma_{\varepsilon H}}) \quad \text{sur} \quad \Sigma_{\varepsilon H} , \\ \mathbf{e}_0 - \mathbf{E}_{inc} \text{ est sortant} , \\ \mathbf{h}_0 - \mathbf{H}_{inc} \text{ est sortant} . \end{array} \right.$$

Les particules et la condition d'impédance posée sur l'objet sont remplacées par une condition effective qui est identique à la condition d'impédance sur Σ_0 mais elle est posée sur $\Sigma_{\varepsilon H}$. Cette condition d'impédance effective ne permet donc pas de prendre en compte les particules. Pour obtenir une approximation d'ordre plus élevée et obtenir

des résultats prenant en compte les particules, il faut au moins aller à l'ordre supérieur du développement.

Nous proposons alors un modèle à l'ordre 2. Ce modèle est construit à partir de \mathbf{e}_0 , \mathbf{e}_1 , \mathbf{h}_0 et \mathbf{h}_1 . Nous souhaitons définir une approximation de $\mathbf{e}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{e}_1(\mathbf{x})$ et $\mathbf{h}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{h}_1(\mathbf{x})$. Pour cela, nous reprenons les conditions de bords données par (67) et (81)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_{0,T} - \mathbf{Z} (\vec{e}_3 \times \mathbf{h}_0) = 0 \quad \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H} , \\ \mathbf{e}_{1,T} - \mathbf{Z} (\vec{e}_3 \times \mathbf{h}_1) = \mathbf{Z} ik \mathbf{A}_0 \mathbf{e}_{0,T} + ik \mathbf{B}_0 \mathbf{h}_{0,T} - \mathbf{a}_2 \text{rot}_{x_t} \mathbf{e}_0 - \mathbf{Z} \mathbf{b}_2 \text{rot}_{x_t} \mathbf{h}_0 \\ \quad - \frac{\mathbf{Z}}{ik} \mathbf{A}_3 \nabla_{x_t} (\text{rot}_{x_t} \mathbf{e}_0) - \frac{1}{ik} \mathbf{B}_3 \nabla_{x_t} (\text{rot}_{x_t} \mathbf{h}_0) \\ \quad + \left[\mathbf{A}_4 : \nabla_{x_t} \mathbf{e}_{0,T} \right] + \mathbf{Z} \left[\mathbf{B}_4 : \nabla_{x_t} \mathbf{h}_{0,T} \right] \\ \quad + \left[\mathbf{A}_5 : \nabla_{x_t} \mathbf{e}_{0,T} \right] + \mathbf{Z} \left[\mathbf{B}_5 : \nabla_{x_t} \mathbf{h}_{0,T} \right] \quad \text{sur } \Sigma_{\varepsilon H} . \end{array} \right. \quad (96)$$

En prenant une combinaison linéaire des deux conditions et en introduisant les opérateurs

Notation 6

- $L_{vec} \mathbf{V} = \vec{n} \times \mathbf{V}$;
- $L_{rot} \mathbf{V} = \text{rot}_{x_t} \mathbf{V}$;
- $L_{grad} \mathbf{V} = \nabla_{x_t} \mathbf{V}$;

nous pouvons définir la condition effective sur $\Sigma_{\varepsilon H}$

$$\begin{aligned} & \left(\mathbb{I}d - \varepsilon ik \mathbf{Z} \mathbf{A}_0 + \varepsilon \mathbf{a}_2 L_{rot} + \varepsilon \frac{\mathbf{Z}}{ik} \mathbf{A}_3 L_{grad} L_{rot} - \varepsilon \begin{bmatrix} \mathbf{A}_4 : L_{grad} \\ \mathbf{A}_5 : L_{grad} \end{bmatrix} \right) (\mathbf{e}_0 + \varepsilon \mathbf{e}_1) \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \\ & = \left(\mathbf{Z} + \varepsilon ik \mathbf{B}_0 L_{vec} + \varepsilon \mathbf{Z} \mathbf{b}_2 L_{rot} L_{vec} + \varepsilon \frac{1}{k} \mathbf{B}_3 L_{grad} L_{rot} L_{vec} + \varepsilon \mathbf{Z} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_4 : L_{grad} L_{vec} \\ \mathbf{B}_5 : L_{grad} L_{vec} \end{bmatrix} \right) (\vec{e}_3 \times (\mathbf{h}_0 + \varepsilon \mathbf{h}_1)) \Big|_{\Sigma_{\varepsilon H}} . \end{aligned} \quad (97)$$

De plus, comme \mathbf{e}_0 , \mathbf{e}_1 , \mathbf{h}_0 et \mathbf{h}_1 satisfont les équations de Maxwell, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot} (\mathbf{h}_0 + \varepsilon \mathbf{h}_1) - ik(\mathbf{e}_0 + \varepsilon \mathbf{e}_1) = f & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty) , \\ \mathbf{rot} (\mathbf{e}_0 + \varepsilon \mathbf{e}_1) + ik(\mathbf{h}_0 + \varepsilon \mathbf{h}_1) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty) , \\ \mathbf{div} (\mathbf{e}_0 + \varepsilon \mathbf{e}_1) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty) , \\ \mathbf{div} (\mathbf{h}_0 + \varepsilon \mathbf{h}_1) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty) . \end{array} \right.$$

Définition 125

Soit $(\mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon, \mathbf{v}_{H,2}^\varepsilon)$ satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{v}_{H,2}^\varepsilon - ik \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon = f \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty) , \\ \mathbf{rot} \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon + ik \mathbf{v}_{H,2}^\varepsilon = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty) , \\ \mathbf{div} \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty) , \\ \mathbf{div} \mathbf{v}_{H,2}^\varepsilon = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \times (\varepsilon H, +\infty) , \\ \mathbf{v}_{E,2T}^\varepsilon|_{\Sigma_{\varepsilon H}} - \mathbf{Z} (\vec{e}_3 \times \mathbf{v}_{H,2}^\varepsilon|_{\Sigma_{\varepsilon H}}) = \mathbf{Z} \varepsilon ik \mathbf{A}_0 \mathbf{v}_{E,2T}^\varepsilon|_{\Sigma_{\varepsilon H}} + \varepsilon ik \mathbf{B}_0 \mathbf{v}_{H,2T}^\varepsilon|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \\ \quad - \varepsilon \mathbf{a}_2 \mathbf{rot}_{x_t} \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon|_{\Sigma_{\varepsilon H}} - \mathbf{Z} \varepsilon \mathbf{b}_2 \mathbf{rot}_{x_t} \mathbf{v}_{H,2}^\varepsilon|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \\ \quad - \frac{\mathbf{Z}}{ik} \varepsilon \mathbf{A}_3 \nabla_{x_t} (\mathbf{rot}_{x_t} \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon|_{\Sigma_{\varepsilon H}}) - \frac{1}{ik} \varepsilon \mathbf{B}_3 \nabla_{x_t} (\mathbf{rot}_{x_t} (\mathbf{v}_{H,2}^\varepsilon|_{\Sigma_{\varepsilon H}})) \\ \quad + \varepsilon \begin{bmatrix} \mathbf{A}_4 : \nabla_{x_t} \mathbf{v}_{E,2T}^\varepsilon|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \\ \mathbf{A}_5 : \nabla_{x_t} \mathbf{v}_{E,2T}^\varepsilon|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \end{bmatrix} + \mathbf{Z} \varepsilon \begin{bmatrix} \mathbf{B}_4 : \nabla_{x_t} \mathbf{v}_{H,2}^\varepsilon|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \\ \mathbf{B}_5 : \nabla_{x_t} \mathbf{v}_{H,2}^\varepsilon|_{\Sigma_{\varepsilon H}} \end{bmatrix} \quad \text{sur} \quad \Sigma_{\varepsilon H} , \\ \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon - \mathbf{E}_{inc} \quad \text{est sortant} , \\ \mathbf{v}_{H,2}^\varepsilon - \mathbf{H}_{inc} \quad \text{est sortant} \end{array} \right. \quad (98)$$

Nous pouvons aussi écrire la condition uniquement en fonction de $\mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon$. En utilisant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_3 \times \mathbf{rot} \mathbf{e}_0 + ik\mathbf{Z}^{-1} \mathbf{e}_{0,T} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_{\varepsilon H} \\ \vec{e}_3 \times \mathbf{rot} \mathbf{e}_1 + ik\mathbf{Z}^{-1} \mathbf{e}_{1,T} = -k^2 \mathbf{A}_0 \mathbf{e}_{0,T} - k^2 \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{B}_0 (\mathbf{rot} \mathbf{e}_0)_T - ik\mathbf{Z}^{-1} \mathbf{a}_2 \mathbf{rot}_{x_t} \mathbf{e}_0 + \mathbf{b}_2 \mathbf{rot}_{x_t} (\mathbf{rot} \mathbf{e}_0) \\ \quad - \mathbf{A}_3 \nabla_{x_t} (\mathbf{rot}_{x_t} \mathbf{e}_0) + \frac{\mathbf{Z}^{-1}}{k} \mathbf{B}_3 \nabla_{x_t} (\mathbf{rot}_{x_t} (\mathbf{rot} \mathbf{e}_0)) \\ \quad + ik\mathbf{Z}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_4 : \nabla_{x_t} \mathbf{e}_{0,T} \\ \mathbf{A}_5 : \nabla_{x_t} \mathbf{e}_{0,T} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_4 : \nabla_{x_t} (\mathbf{rot} \mathbf{e}_0)_T \\ \mathbf{B}_5 : \nabla_{x_t} (\mathbf{rot} \mathbf{e}_0)_T \end{bmatrix} \quad \text{sur} \quad \Sigma_{\varepsilon H} ; \end{array} \right. \quad (99)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \vec{e}_3 \times \mathbf{rot} \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon + ik\mathbf{Z}^{-1} (\mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon)_T &= -\varepsilon k^2 \mathbf{A}_0 (\mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon)_T - \varepsilon k^2 \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{B}_0 (\mathbf{rot} \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon)_T - \varepsilon ik\mathbf{Z}^{-1} \mathbf{a}_2 \mathbf{rot}_{x_t} \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon + \varepsilon \mathbf{b}_2 \mathbf{rot}_{x_t} (\mathbf{rot} \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon) \\ &\quad - \varepsilon \mathbf{A}_3 \nabla_{x_t} (\mathbf{rot}_{x_t} \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon) + \varepsilon \frac{\mathbf{Z}^{-1}}{k} \mathbf{B}_3 \nabla_{x_t} (\mathbf{rot}_{x_t} (\mathbf{rot} \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon)) + \varepsilon ik\mathbf{Z}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_4 : \nabla_{x_t} (\mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon)_T \\ \mathbf{A}_5 : \nabla_{x_t} (\mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon)_T \end{bmatrix} \\ &\quad - \varepsilon \begin{bmatrix} \mathbf{B}_4 : \nabla_{x_t} (\mathbf{rot} \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon)_T \\ \mathbf{B}_5 : \nabla_{x_t} (\mathbf{rot} \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon)_T \end{bmatrix} \quad \text{sur} \quad \Sigma_{\varepsilon H} . \end{aligned} \quad (100)$$

Nous venons de déterminer la condition effective pour $\mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon$, nous pouvons maintenant expliciter le problème vérifié $\mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon(x_1, x_2, x_3)$.

Définition 126

 Soit $\mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon$ satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon - k^2 \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R} \times (\varepsilon H, +\infty), \\ \vec{e}_3 \times \mathbf{rot} \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon + ikZ^{-1}(\mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon)_T = -\varepsilon k^2 \mathbf{A}_0 (\mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon)_T - \varepsilon k^2 Z^{-1} \mathbf{B}_0 (\mathbf{rot} \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon)_T - \varepsilon ikZ^{-1} \mathbf{a}_2 \mathbf{rot}_{x_t} \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon \\ \quad + \varepsilon \mathbf{b}_2 \mathbf{rot}_{x_t} (\mathbf{rot} \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon) - \varepsilon \mathbf{A}_3 \nabla_{x_t} (\mathbf{rot}_{x_t} \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon) \\ \quad + \varepsilon \frac{Z^{-1}}{k} \mathbf{B}_3 \nabla_{x_t} (\mathbf{rot}_{x_t} (\mathbf{rot} \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon)) + \varepsilon ikZ^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_4 : \nabla_{x_t} (\mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon)_T \\ \mathbf{A}_5 : \nabla_{x_t} (\mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon)_T \end{bmatrix} \\ \quad - \varepsilon \begin{bmatrix} \mathbf{B}_4 : \nabla_{x_t} (\mathbf{rot} \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon)_T \\ \mathbf{B}_5 : \nabla_{x_t} (\mathbf{rot} \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon)_T \end{bmatrix} \quad \text{sur} \quad \Sigma_{\varepsilon H}, \\ \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon - \mathbf{e}_{inc} \text{ est sortant.} \end{array} \right. \quad (101)$$

 Notons que \mathbf{E}_{inc} est une onde plane incidente alors $\mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon$ va aussi être une onde plane qui s'écrit sous la forme

$$\mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = \hat{\mathbf{e}} e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2} e^{ik_3 x_3} + \mathbf{R}_2^\varepsilon e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2} e^{-ik_3(x_3 - \varepsilon H)}.$$

 En utilisant la condition sur $\Sigma_{\varepsilon H}$ et le fait que $\mathbf{div} \mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon = 0$, nous pouvons exprimer le système linéaire afin d'obtenir le vecteur de réflexion \mathbf{R}_2^ε avec

$$\begin{aligned} & ik_3 \mathbf{R}_{2,T}^\varepsilon + i \mathbf{k}_T \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(3)} + ikZ^{-1} \mathbf{R}_{2,T}^\varepsilon + \varepsilon k^2 \mathbf{A}_0 \mathbf{R}_{2,T}^\varepsilon + \varepsilon k^2 Z^{-1} i \mathbf{B}_0 (\mathbf{k}_T^\perp \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(3)} + k_3 \mathbf{R}_{2,T}^{\varepsilon,\perp}) - \varepsilon kZ^{-1} \mathbf{a}_2 (\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{R}_{2,T}^{\varepsilon,\perp}) \\ & - \varepsilon \mathbf{b}_2 \left((\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{R}_{2,T}^\varepsilon) k_3 + \Delta_T \mathbf{k}_T \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(3)} \right) - \varepsilon \mathbf{A}_3 \mathbf{k}_T (\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{R}_{2,T}^{\varepsilon,\perp}) - \varepsilon \frac{Z^{-1}}{k} \mathbf{B}_3 i \left((\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{R}_{2,T}^\varepsilon) k_3 + \Delta_T \mathbf{k}_T \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(3)} \right) \mathbf{k}_T \\ & + \varepsilon kZ^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_4^{(1)} \cdot \mathbf{k}_T \\ \mathbf{a}_5^{(1)} \cdot \mathbf{k}_T \end{pmatrix} \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(1)} + \varepsilon kZ^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_4^{(2)} \cdot \mathbf{k}_T \\ \mathbf{a}_5^{(2)} \cdot \mathbf{k}_T \end{pmatrix} \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(2)} - \varepsilon \begin{pmatrix} \mathbf{b}_4^{(1)} \cdot \mathbf{k}_T \\ \mathbf{b}_5^{(1)} \cdot \mathbf{k}_T \end{pmatrix} (k_2 \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(3)} + k_3 \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(2)}) + \varepsilon \begin{pmatrix} \mathbf{b}_4^{(2)} \cdot \mathbf{k}_T \\ \mathbf{b}_5^{(2)} \cdot \mathbf{k}_T \end{pmatrix} (k_3 \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(1)} + k_1 \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(3)}) \\ & = e^{ik_3 \varepsilon H} \left[i (\hat{\mathbf{e}}_T k_3 - \mathbf{k}_T \hat{e}^{(3)}) - ikZ^{-1} \hat{\mathbf{e}}_T - \varepsilon k^2 \mathbf{A}_0 \hat{\mathbf{e}}_T - \varepsilon k^2 Z^{-1} \mathbf{B}_0 i (\mathbf{k}_T^\perp \hat{e}^{(3)} - \hat{\mathbf{e}}_T^\perp k_3) + \varepsilon kZ^{-1} \mathbf{a}_2 (\mathbf{k}_T \cdot \hat{\mathbf{e}}_T^\perp) + \varepsilon \mathbf{b}_2 (-k_3 \mathbf{k}_T \cdot \hat{\mathbf{e}}_T + \Delta_T \mathbf{k}_T \hat{e}^{(3)}) \right. \\ & \left. + \varepsilon \mathbf{A}_3 \mathbf{k}_T (\mathbf{k}_T \cdot \hat{\mathbf{e}}_T^\perp) + \varepsilon \frac{Z^{-1}}{k} \mathbf{B}_3 i \mathbf{k}_T (-k_3 \mathbf{k}_T \cdot \hat{e}^{(3)} + \Delta_T \mathbf{k}_T \hat{e}^{(3)}) - \varepsilon kZ^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_4^{(1)} \cdot \mathbf{k}_T \\ \mathbf{a}_5^{(1)} \cdot \mathbf{k}_T \end{pmatrix} \hat{e}^{(1)} - \varepsilon kZ^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_4^{(2)} \cdot \mathbf{k}_T \\ \mathbf{a}_5^{(2)} \cdot \mathbf{k}_T \end{pmatrix} \hat{e}^{(2)} \right. \\ & \left. + \varepsilon \begin{pmatrix} \mathbf{b}_4^{(1)} \cdot \mathbf{k}_T \\ \mathbf{b}_5^{(1)} \cdot \mathbf{k}_T \end{pmatrix} (k_2 \hat{e}^{(3)} - k_3 \hat{e}^{(2)}) + \varepsilon \begin{pmatrix} \mathbf{b}_4^{(2)} \cdot \mathbf{k}_T \\ \mathbf{b}_5^{(2)} \cdot \mathbf{k}_T \end{pmatrix} (k_3 \hat{e}^{(1)} - k_1 \hat{e}^{(3)}) \right]; \end{aligned} \quad (102)$$

et

$$k_1 \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(1)} + k_2 \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(2)} - k_3 \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(3)} = 0; \quad (103)$$

 où $\mathbf{U}_T^\perp := (U^{(2)}, -U^{(1)})$ et $\mathbf{k}_T = (k_1, k_2)^t$.

Proposition 127

Il existe une unique solution de (101) qui s'écrit

$$\mathbf{v}_{E,2}^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = \widehat{\mathbf{e}} e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2} e^{ik_3 x_3} + \mathbf{R}_2^\varepsilon e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2} e^{-ik_3(x_3 - \varepsilon H)}. \quad (104)$$

avec $\mathbf{R}_2^\varepsilon \in \mathbb{C}^3$ obtenu à l'aide du système linéaire donné par (102) et (103).

Le vecteur \mathbf{R}_2^ε correspond au vecteur de réflexion en $x_3 = \varepsilon H$.

Nous pourrions comme cela est fait dans le chapitre 3 effectuer les estimations d'erreur pour le modèle effectif. Dès que les estimations d'erreur du développement asymptotique sont établies, il ne serait pas compliqué de définir celles du modèle effectif. Mais faute de temps cela n'a pas été fait.

Chapitre 10

Résultats numériques

Sommaire

10.1 Calcul de la solution de référence	267
10.2 Calcul numérique du modèle effectif	269
10.2.1 Algorithme	269
10.2.2 Calcul des fonctions du noyau	270
10.2.3 Calcul des constantes du modèle effectif	274
10.3 Calcul du coefficient de réflexion	277
10.4 Validations numériques	278

Dans ce chapitre, afin de valider nos modèles donnés dans le chapitre 8, nous présentons la méthode de calcul d'une solution dite de référence qui est obtenue à partir du code périodique du CEA-CESTA. Il a donc fallu apprendre à utiliser ce nouveau code et faire en sorte de comparer les mêmes quantités. Pour obtenir nos modèles effectifs, il faut calculer les fonctions profils du noyau, pour déterminer les constantes apparaissant dans les conditions effectives. Ces fonctions sont solutions de problèmes de type Laplace dans une demi-bande périodique. Nous avons ensuite validé le modèle effectif à l'ordre 1 (qui ne prend pas en compte la présence de particules). Malheureusement, il reste un bug, probablement dans le calcul des constantes ou celui des coefficients de réflexion, qui nous a empêché de valider le modèle à l'ordre 2.

10.1 Calcul de la solution de référence

Afin de valider nos modèles, nous utilisons un code développé au sein du CEA CESTA qui permet d'avoir une solution dite de référence dans le domaine $\mathcal{B}_0^{\varepsilon L} = (0, \varepsilon T_1) \times (0, \varepsilon T_2) \times (0, \varepsilon L) \setminus \overline{\mathcal{P}_\#^\varepsilon}$ vérifiant le problème de Maxwell.

Nous voulons comparer les vecteurs de réflexion de nos modèles et celui du code de référence. Nous allons donc

essayer de le calculer pour la solution de référence. Le champ diffracté \mathbf{E}_d satisfait pour $x_3 > \varepsilon H$

$$\begin{cases} \mathbf{rot rot} \mathbf{E}_d - k^2 \mathbf{E}_d = 0, \\ \mathbf{div} \mathbf{E}_d = 0 \\ \vec{e}_1 \times \mathbf{E}_d|_{\Gamma_1^+} = e^{ik_1 \varepsilon T_1} \vec{e}_1 \times \mathbf{E}_d|_{\Gamma_1^-} & \text{et} & \vec{e}_1 \times \mathbf{rot} \mathbf{E}_d|_{\Gamma_1^+} = e^{ik_1 \varepsilon T_1} \vec{e}_1 \times \mathbf{rot} \mathbf{E}_d|_{\Gamma_1^-}, \\ \vec{e}_2 \times \mathbf{E}_d|_{\Gamma_2^+} = e^{ik_2 \varepsilon T_2} \vec{e}_2 \times \mathbf{E}_d|_{\Gamma_2^-} & \text{et} & \vec{e}_2 \times \mathbf{rot} \mathbf{E}_d|_{\Gamma_2^+} = e^{ik_2 \varepsilon T_2} \vec{e}_2 \times \mathbf{rot} \mathbf{E}_d|_{\Gamma_2^-}, \\ \mathbf{E}_d \text{ est une onde sortante.} \end{cases} \quad (1)$$

Le code de référence utilise une décomposition en modes TE et TM. Exprimons cette décomposition et exprimons le vecteur de réflexion à partir des coefficients donnés par le code de réflexion (voir Annexe).

Pour les modes TE ($\mathbf{H}^{(3)} = 0$), en utilisant les équations de Maxwell, nous pouvons déduire les contributions dans les modes TE

$$\mathbf{H}_d^{\text{TE}}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{l,m} A_{l,m} \begin{pmatrix} \frac{Y_{l,m}}{\chi_{l,m}^2} \nabla_{\Gamma} \left[e^{i(\alpha_l x_1 + \beta_m x_2)} \right] \\ e^{i(\alpha_l x_1 + \beta_m x_2)} \end{pmatrix} e^{-i\gamma_{l,m}(x_3 - \varepsilon H)}, \quad (2)$$

et

$$\mathbf{E}_d^{\text{TE}}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{l,m} A_{l,m} \begin{pmatrix} \frac{k}{\chi_{l,m}^2} \nabla_{\Gamma}^{\perp} \left[e^{i(\alpha_l x_1 + \beta_m x_2)} \right] \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\gamma_{l,m}(x_3 - \varepsilon H)}; \quad (3)$$

où $\nabla_{\Gamma} \mathbf{U} = (\partial_{x_1} \mathbf{U}, \partial_{x_2} \mathbf{U})$ et $\nabla_{\Gamma}^{\perp} \mathbf{U} = (\partial_{x_2} \mathbf{U}, -\partial_{x_1} \mathbf{U})$.

Pour les modes TM ($\mathbf{H}^{(3)} = 0$), en utilisant les équations de Maxwell, nous pouvons déduire les contributions dans les modes TM

$$\mathbf{E}_d^{\text{TM}}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{l,m} B_{l,m} \begin{pmatrix} \frac{Y_{l,m}}{\chi_{l,m}^2} \nabla_{\Gamma} \left[e^{i(\alpha_l x_1 + \beta_m x_2)} \right] \\ e^{i(\alpha_l x_1 + \beta_m x_2)} \end{pmatrix} e^{-i\gamma_{l,m}(x_3 - \varepsilon H)}, \quad (4)$$

et

$$\mathbf{H}_d^{\text{TM}}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{l,m} B_{l,m} \begin{pmatrix} \frac{-k}{\chi_{l,m}^2} \nabla_{\Gamma}^{\perp} \left[e^{i(\alpha_l x_1 + \beta_m x_2)} \right] \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\gamma_{l,m}(x_3 - \varepsilon H)}. \quad (5)$$

Finalement, en prenant les contributions des modes TE et TM, nous obtenons la forme générale de \mathbf{E}_d et \mathbf{H}_d

$$\mathbf{E}_d(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{\sum_{l,m} A_{l,m} \begin{pmatrix} \frac{k}{\chi_{l,m}^2} \nabla_{\Gamma}^{\perp} \left[e^{i(\alpha_l x_1 + \beta_m x_2)} \right] \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}_{l,m}^{\text{TE}}} e^{-i\gamma_{l,m}(x_3 - \varepsilon H)} + \underbrace{\sum_{l,m} B_{l,m} \begin{pmatrix} \frac{Y_{l,m}}{\chi_{l,m}^2} \nabla_{\Gamma} \left[e^{i(\alpha_l x_1 + \beta_m x_2)} \right] \\ e^{i(\alpha_l x_1 + \beta_m x_2)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}_{l,m}^{\text{TM}}} e^{-i\gamma_{l,m}(x_3 - \varepsilon H)}; \quad (6)$$

et

$$\mathbf{H}_d(x_1, x_2, x_3) = \sum_{l,m} A_{l,m} \begin{pmatrix} \frac{Y_{l,m}}{\chi_{l,m}^2} \nabla_{\Gamma} \left[e^{i(\alpha_l x_1 + \beta_m x_2)} \right] \\ e^{i(\alpha_l x_1 + \beta_m x_2)} \end{pmatrix} e^{-i\gamma_{l,m}(x_3 - \varepsilon H)} + \sum_{l,m} B_{l,m} \begin{pmatrix} \frac{-k}{\chi_{l,m}^2} \nabla_{\Gamma}^{\perp} \left[e^{i(\alpha_l x_1 + \beta_m x_2)} \right] \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\gamma_{l,m}(x_3 - \varepsilon H)}. \quad (7)$$

Pour le mode fondamental ($l = m = 0$), la quantité $\chi_{l,m}^2 = 0$ quand l'incidence est normale ($k_1 = k_2 = 0$), nous prendrons

$$\mathbf{E}_{0,0;T}^{\text{TE}} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2} \quad (8)$$

et

$$\mathbf{E}_{0,0;T}^{\text{TM}} = \begin{pmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2} . \quad (9)$$

Le code de référence nous donne les coefficients $A_{0,0}$ et $B_{0,0}$. Exprimons le vecteur de réflexion à partir de ces deux coefficients. D'une part, nous avons que \mathbf{E} est une onde plane donc \mathbf{E}_d s'écrit

$$\mathbf{E}_d(\mathbf{x}) = \mathbf{r} e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2} e^{-ik_3(x_3 - \epsilon H)} .$$

D'autre part, nous avons la décomposition en mode TE et TM

$$\mathbf{E}_d(\mathbf{x}) = A_{0,0} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2} e^{-ik_3 x_3} + B_{0,0} \begin{pmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2} e^{-ik_3(x_3 - \epsilon H)} .$$

Nous obtenons donc le vecteur de réflexion avec

$$\mathbf{r}_T = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{0,0} \\ B_{0,0} \end{pmatrix} \quad (10)$$

et

$$r^{(3)} = B_{0,0} . \quad (11)$$

10.2 Calcul numérique du modèle effectif

Dans cette section, nous nous intéressons à la méthode du calcul numérique de notre modèle effectif (98) proposé dans le chapitre 9 et à la détermination du coefficient de réflexion associé.

10.2.1 Algorithme

Étape 1 : Nous résolvons les problèmes vérifiés par les fonctions du noyau $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2$ et \tilde{q}_3 (données dans la définition 107 du chapitre 9) à l'aide d'une méthode éléments finis.

Étape 2 : Après avoir obtenu les fonctions du noyau, nous calculons les coefficients du modèle donnés dans la définition 118 du chapitre 9.

Étape 3 : Nous pouvons alors calculer le vecteur de réflexion et le coefficient de réflexion.

10.2.2 Calcul des fonctions du noyau

Pour obtenir la solution du modèle effectif, il faut commencer par calculer les fonctions du noyau $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2$ et \tilde{q}_3 . Pour calculer numériquement ces fonctions, il faut borner le domaine afin de calculer des solution dans le domaine $\mathcal{B}_0^L := (0, T_1) \times (0, T_2) \times (0, L) \setminus \overline{\mathcal{P}_\#}$ à l'aide d'une condition de Dirichlet-to-Neumann sur une frontière fictive notée $\Sigma_L^\# = \{y_1 \in (0, T_1), y_2 \in (0, T_2), y_3 = L\}$. Pour tout $j = 1, 2, 3$, \tilde{p}_j admet la décomposition modale, pour $y_3 \geq L$:

$$\tilde{p}_j(y_1, y_2, y_3) = C_j + \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} \mathcal{P}_{m,n} e^{-2\pi \sqrt{\frac{m^2}{T_1^2} + \frac{n^2}{T_2^2}} |y_3 - L|} e^{2i\pi \left(\frac{m}{T_1} y_1 + \frac{n}{T_2} y_2\right)} ; \quad (12)$$

avec $\mathcal{P}_{m,n} \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{P}_{m,n} = \frac{1}{T_1 T_2} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \int_{-T_2/2}^{T_2/2} \tilde{p}_j(y_1, y_2, L) e^{-2i\pi \left(\frac{m}{T_1} y_1 + \frac{n}{T_2} y_2\right)} dy_1 dy_2$.

Nous pouvons alors définir l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann

$$\Lambda_\# \tilde{p}_j = -\partial_{x_3} \tilde{p}_j \Big|_{\Sigma_L^\#} = 2\pi \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} \sqrt{\frac{m^2}{T_1^2} + \frac{n^2}{T_2^2}} \mathcal{P}_{m,n} e^{2i\pi \left(\frac{m}{T_1} y_1 + \frac{n}{T_2} y_2\right)} ; \quad (13)$$

Nous pouvons ainsi ramener les problèmes de type Laplace dans une demi-bande infinie à un problème en domaine borné :

- pour $j = 1, 2, 3$, \tilde{p}_j satisfait le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \tilde{p}_j = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B}_0^L, \\ \tilde{p}_j \text{ est } (T_1, T_2)\text{-périodique} \\ \tilde{p}_j = -y_j \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_\#, \\ \tilde{p}_j = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0^\#, \\ \partial_{x_3} \tilde{p}_j + \Lambda_\# \tilde{p}_j = 0 \quad \text{sur } \Sigma_L^\#. \end{array} \right.$$

- pour $j = 1, 2, 3$, nous avons que \tilde{q}_j satisfait le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \tilde{q}_j = 0 \quad \text{dans } \mathcal{B}_0^L, \\ \tilde{q}_j \text{ est } (T_1, T_2)\text{-périodique} \\ \nabla \tilde{q}_j \cdot \vec{n} = -\vec{e}_j \cdot \vec{n} \quad \text{sur } \partial \mathcal{P}_\#, \\ \tilde{q}_j = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0^\#, \\ \partial_{x_3} \tilde{q}_j + \Lambda_\# \tilde{q}_j = 0 \quad \text{sur } \Sigma_L^\#. \end{array} \right.$$

Dans les figures qui suivent nous traçons les fonctions profils, pour une particule de rayon 1 de centre (1.005, 1.005; 1.005) dans une boîte $2.01 \times 2.01 \times 4.01$.

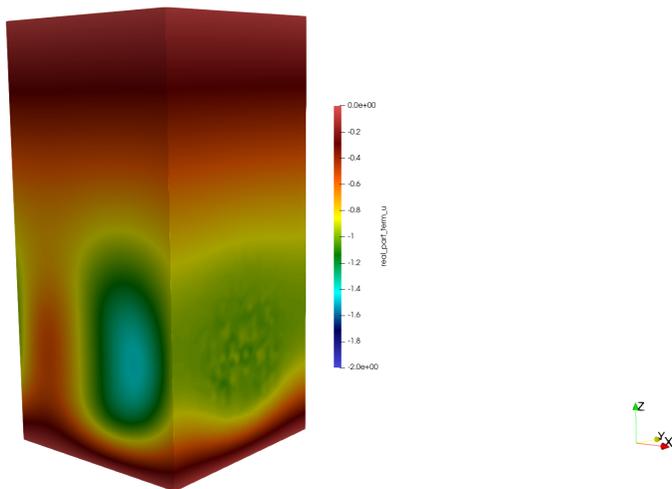


Figure 10.1 – fonction \tilde{p}_1

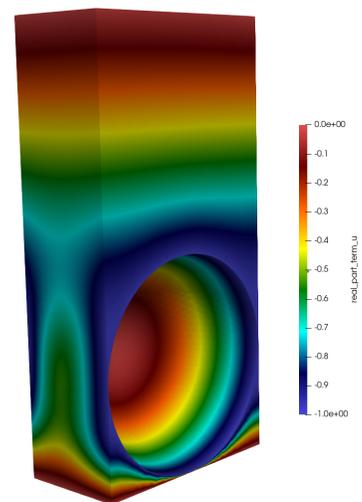


Figure 10.2 – coupe de \tilde{p}_1

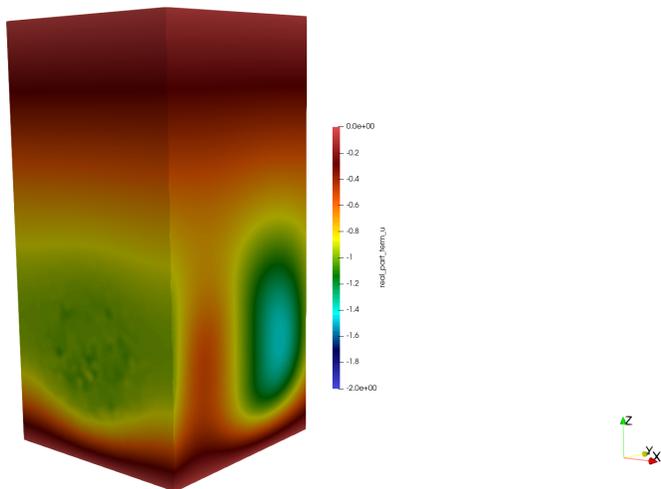


Figure 10.3 – fonction \tilde{p}_2

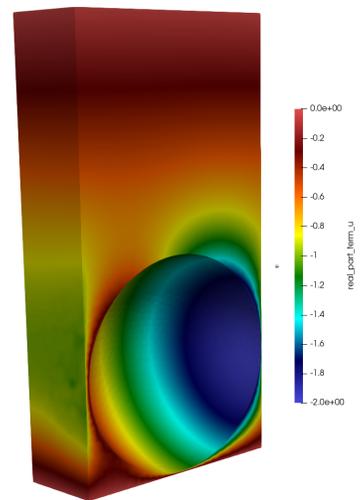


Figure 10.4 – coupe de \tilde{p}_2

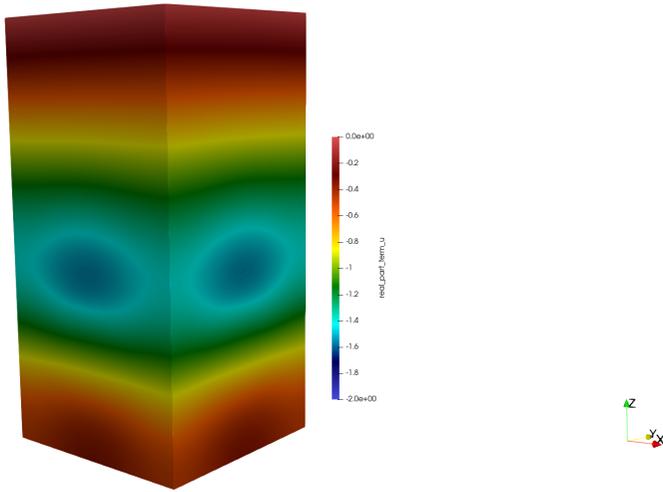


Figure 10.5 – fonction \tilde{p}_3

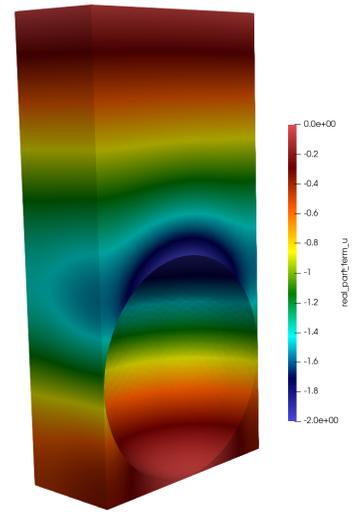


Figure 10.6 – coupe de \tilde{p}_3

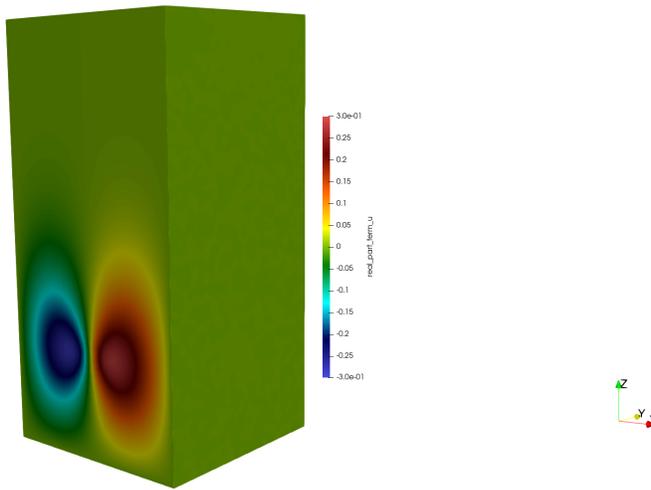


Figure 10.7 – fonction \tilde{q}_1

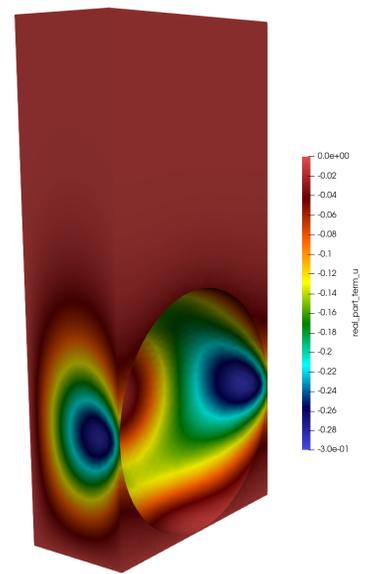


Figure 10.8 – coupe de \tilde{q}_1

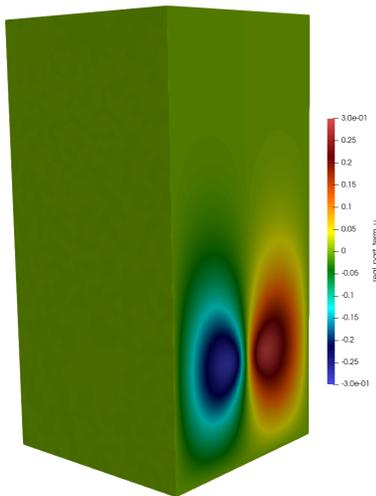


Figure 10.9 – fonction \tilde{q}_2

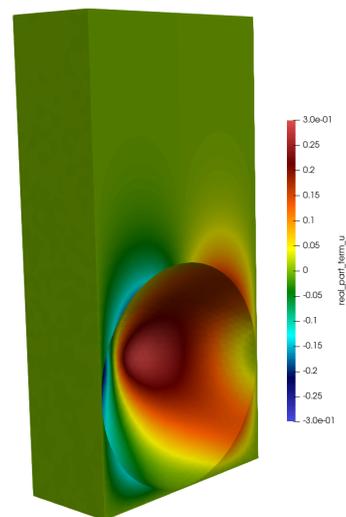


Figure 10.10 – coupe de \tilde{q}_2

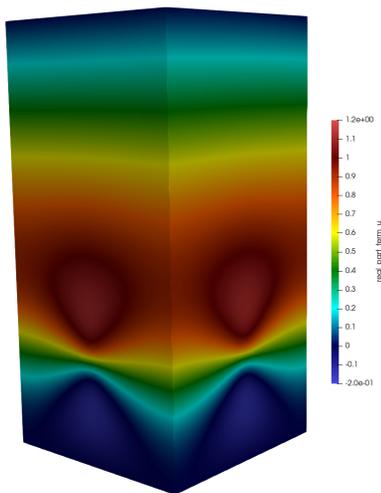


Figure 10.11 – fonction \tilde{q}_3

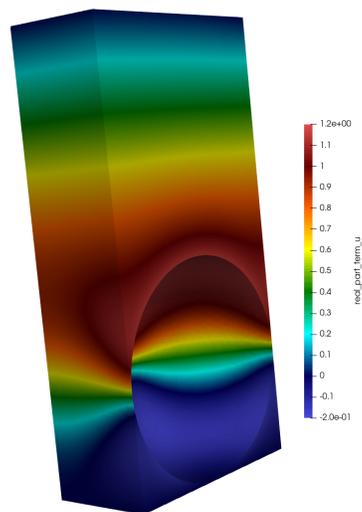
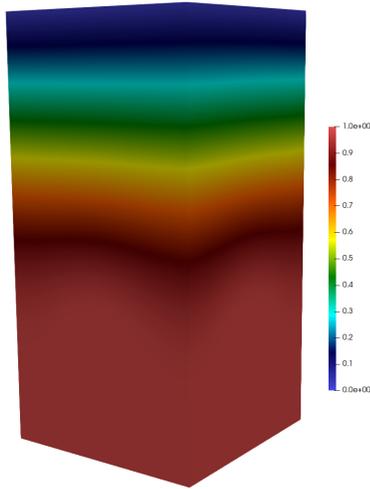
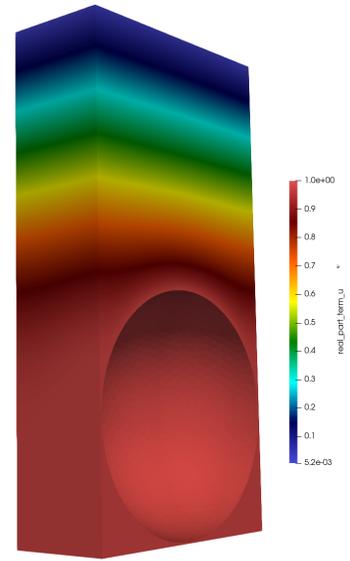


Figure 10.12 – coupe de \tilde{q}_3


 Figure 10.13 – fonction r_1

 Figure 10.14 – coupe de r_1

10.2.3 Calcul des constantes du modèle effectif

Après avoir calculé les différentes fonctions profils, nous pouvons calculer les constantes du modèle effectif. Nous avons besoin de calculer des intégrales sur \mathcal{B} qui est une demi-bande infinie. Pour obtenir ces intégrales, nous décomposons \mathcal{B} de sorte que $\mathcal{B} := \mathcal{B}_0^L \cup \mathcal{B}_\infty^L$ avec $\mathcal{B}_\infty^L := (0, T_1) \times (0, T_2) \times (L, +\infty)$.

Le calcul des coefficients fait intervenir quatre types d'intégrales :

- **1^{er} type d'intégrale** : $\int_{\mathcal{B}} \nabla \hat{l}_i \cdot \nabla \psi_j \, d\mathbf{y} = \int_{\mathcal{B}} (\nabla l_i - \chi_{y_3 \geq H} \vec{e}_i) \cdot \nabla \psi_j \, d\mathbf{y}$ où $\nabla l_i = \nabla \tilde{l}_i + \vec{e}_i$ et $\nabla \psi_j = \nabla \tilde{\psi}_j + \vec{e}_j$ alors nous avons

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathcal{B}} (\nabla l_i - \chi_{y_3 \geq H} \vec{e}_i) \cdot \nabla \psi_j \, d\mathbf{y} \\
 &= \int_{\mathcal{B}_\infty^L} (\nabla l_i - \vec{e}_i) \cdot \nabla \psi_j \, d\mathbf{y} + \int_{\mathcal{B}_0^L} \nabla l_i \cdot \nabla \psi_j \, d\mathbf{y} \\
 &= \int_{\mathcal{B}_\infty^L} \nabla \tilde{l}_i \cdot (\nabla \tilde{\psi}_j + \vec{e}_j) \, d\mathbf{y} + \int_{\mathcal{B}_0^L} (\nabla \tilde{l}_i + \vec{e}_i) \cdot (\nabla \tilde{\psi}_j + \vec{e}_j) \, d\mathbf{y} \\
 &= \int_{\mathcal{B}_\infty^L} \nabla \tilde{l}_i \cdot \nabla \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} + \int_{\mathcal{B}_\infty^L} \cancel{\nabla \tilde{l}_i \cdot \vec{e}_j} \, d\mathbf{y} + \int_{\mathcal{B}_0^L} (\nabla \tilde{l}_i + \vec{e}_i) \cdot (\nabla \tilde{\psi}_j + \vec{e}_j) \, d\mathbf{y} .
 \end{aligned}$$

En effet, en utilisant la décomposition modale nous montrons que

$$\int_{\mathcal{B}_\infty^L} \nabla \tilde{l}_i \cdot \vec{e}_j \, d\mathbf{y} = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \mathbf{C}_{m,n} \cdot \vec{e}_j \mathcal{P}_{m,n} \int_{y_3 > L} e^{-2\pi \sqrt{\frac{m^2}{T_1^2} + \frac{n^2}{T_2^2}} |y_3 - L|} \, dy_3 \int_{[0, T_1] \times [0, T_2]} e^{2i\pi \left(\frac{m}{T_1} y_1 + \frac{n}{T_2} y_2 \right)} \, d\mathbf{y}_T = 0 .$$

En réalisant une intégration par partie, nous utilisons la formule suivante pour déterminer les coefficients

$$\int_{\mathcal{B}} (\nabla l_i - \chi_{y_3 \geq H} \vec{e}_i) \cdot \nabla \psi_j \, d\mathbf{y} = \int_{\Sigma_L^\#} \Lambda_\# \tilde{l}_i \tilde{\psi}_j \, dy_1 + \int_{\mathcal{B}_0^L} (\nabla \tilde{l}_i + \vec{e}_i) \cdot (\nabla \tilde{\psi}_j + \vec{e}_j) \, d\mathbf{y} . \quad (14)$$

- 2^{eme} type d'intégrale : $\int_{\mathcal{B}} \nabla l_i \cdot (\nabla \psi_j - \chi_{y_3 \geq H} \vec{e}_j) \, d\mathbf{y}$ où $\nabla l_i = \nabla \tilde{l}_i + \vec{e}_i$ et $\nabla \psi_j = \nabla \tilde{\psi}_j + \vec{e}_j$. Nous obtenons le même résultat que pour le 1^{er} type d'intégrale :

$$\int_{\mathcal{B}} \nabla l_i \cdot (\nabla \psi_j - \chi_{y_3 \geq H} \vec{e}_j) \, d\mathbf{y} = \int_{\Sigma_L^\#} \Lambda_\# \tilde{l}_i \tilde{\psi}_j \, dy_1 + \int_{\mathcal{B}_0^L} (\nabla \tilde{l}_i + \vec{e}_i) \cdot (\nabla \tilde{\psi}_j + \vec{e}_j) \, d\mathbf{y} . \quad (15)$$

- 3^{eme} type d'intégrale : $\int_{\mathcal{B}} (\nabla l_i - \chi_{y_3 \geq H} \vec{e}_i) \times \nabla \psi_j \, d\mathbf{y}$ avec $\nabla l_i = \nabla \tilde{l}_i + \vec{e}_i$ et $\nabla \psi_j = \nabla \tilde{\psi}_j + \vec{e}_j$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} (\nabla l_i - \chi_{y_3 \geq H} \vec{e}_i) \times \nabla \psi_j \, d\mathbf{y} &= \int_{\mathcal{B}} (\nabla \tilde{l}_i + \vec{e}_i) \times (\nabla \tilde{\psi}_j + \vec{e}_j) \, d\mathbf{y} - \int_{\mathcal{B}} \chi_{y_3 \geq H} \vec{e}_i \times (\nabla \tilde{\psi}_j + \vec{e}_j) \, d\mathbf{y} \\ &= \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \nabla \tilde{l}_i \times \nabla \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y}}_{[1.]} + \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \nabla \tilde{l}_i \times \vec{e}_j \, d\mathbf{y}}_{[2.]} + \underbrace{\int_{\mathcal{B}_0^L} \vec{e}_i \times \nabla \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y}}_{[3.]} + \underbrace{\int_{\mathcal{B}_0^L} \vec{e}_i \times \vec{e}_j \, d\mathbf{y}}_{[4.]} . \end{aligned}$$

avec

[1.]

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \nabla \tilde{l}_i \times \nabla \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} &= \left(\int_{\mathcal{B}} \partial_{y_2} \tilde{l}_i \, \partial_{y_3} \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} - \int_{\mathcal{B}} \partial_{y_3} \tilde{l}_i \, \partial_{y_2} \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} \right) \\ &\quad - \left(\int_{\mathcal{B}} \partial_{y_3} \tilde{l}_i \, \partial_{y_1} \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} - \int_{\mathcal{B}} \partial_{y_1} \tilde{l}_i \, \partial_{y_3} \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} \right) \\ &\quad - \left(\int_{\mathcal{B}} \partial_{y_1} \tilde{l}_i \, \partial_{y_2} \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} - \int_{\mathcal{B}} \partial_{y_2} \tilde{l}_i \, \partial_{y_1} \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} \right) \\ &\stackrel{\text{IPP}}{=} \left(\int_{\partial \mathcal{B}} \partial_{y_2} \tilde{l}_i \, n_3 \, \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} - \int_{\mathcal{B}} \partial_{y_3} \partial_{y_2} \tilde{l}_i \, \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} - \int_{\partial \mathcal{B}} \partial_{y_3} \tilde{l}_i \, n_2 \, \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} + \int_{\mathcal{B}} \partial_{y_2} \partial_{y_3} \tilde{l}_i \, \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} \right) \\ &\quad - \left(\int_{\partial \mathcal{B}} \partial_{y_3} \tilde{l}_i \, n_1 \, \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} - \int_{\mathcal{B}} \partial_{y_1} \partial_{y_3} \tilde{l}_i \, \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} - \int_{\partial \mathcal{B}} \partial_{y_1} \tilde{l}_i \, n_3 \, \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} + \int_{\mathcal{B}} \partial_{y_3} \partial_{y_1} \tilde{l}_i \, \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} \right) \\ &\quad - \left(\int_{\partial \mathcal{B}} \partial_{y_1} \tilde{l}_i \, n_2 \, \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} - \int_{\mathcal{B}} \partial_{y_2} \partial_{y_1} \tilde{l}_i \, \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} - \int_{\partial \mathcal{B}} \partial_{y_2} \tilde{l}_i \, n_1 \, \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} + \int_{\mathcal{B}} \partial_{y_1} \partial_{y_2} \tilde{l}_i \, \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} \right) \\ &= \left(\int_{\partial \mathcal{P}_\#} \partial_{y_2} \tilde{l}_i \, n_3 \, \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} - \int_{\Sigma_0^\#} \partial_{y_2} \tilde{l}_i \, \tilde{\psi}_j \, dy_1 - \int_{\partial \mathcal{P}_\#} \partial_{y_3} \tilde{l}_i \, n_2 \, \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} \right) \\ &\quad - \left(\int_{\partial \mathcal{P}_\#} \partial_{y_3} \tilde{l}_i \, n_1 \, \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} - \int_{\partial \mathcal{P}_\#} \partial_{y_1} \tilde{l}_i \, n_3 \, \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} + \int_{\Sigma_0^\#} \partial_{y_1} \tilde{l}_i \, \tilde{\psi}_j \, dy_1 \right) \\ &\quad - \left(\int_{\partial \mathcal{P}_\#} \partial_{y_1} \tilde{l}_i \, n_2 \, \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} - \int_{\partial \mathcal{P}_\#} \partial_{y_2} \tilde{l}_i \, n_1 \, \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} \right) \\ &= \int_{\partial \mathcal{P}_\#} (\nabla \tilde{l}_i \times \vec{n}) \, \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} - \int_{\Sigma_0^\#} (\nabla \tilde{l}_i \times \vec{e}_3) \, \tilde{\psi}_j \, dy_1 . \end{aligned}$$

[2.]

$$\int_{\mathcal{B}} \nabla \tilde{l}_i \times \vec{e}_1 \, d\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \int_{\mathcal{B}} \partial_{y_3} \tilde{l}_i \\ - \int_{\mathcal{B}} \partial_{y_2} \tilde{l}_i \end{pmatrix} \text{IPP} \begin{pmatrix} 0 \\ \int_{\partial \mathcal{B}} \tilde{l}_i n_3 \\ - \int_{\partial \mathcal{B}} \tilde{l}_i n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \int_{\partial \mathcal{P}_\#} \tilde{l}_i n_3 \, d\mathbf{y} - \int_{\Sigma_0^\#} \tilde{l}_i \, dy_1 \\ - \int_{\partial \mathcal{P}_\#} \tilde{l}_i n_2 \, d\mathbf{y} \end{pmatrix} = \int_{\partial \mathcal{P}_\#} \tilde{l}_i (\vec{n} \times \vec{e}_1) \, d\mathbf{y} - \int_{\Sigma_0^\#} \tilde{l}_i \vec{e}_2 \, dy_1 .$$

De la même façon, nous avons

$$\int_{\mathcal{B}} \nabla \tilde{l}_i \times \vec{e}_2 \, d\mathbf{y} = \int_{\partial \mathcal{P}_\#} \tilde{l}_i (\vec{n} \times \vec{e}_2) \, d\mathbf{y} + \int_{\Sigma_0^\#} \tilde{l}_i \vec{e}_1 \, dy_1 .$$

$$\int_{\mathcal{B}} \nabla \tilde{l}_i \times \vec{e}_3 \, d\mathbf{y} = \int_{\partial \mathcal{P}_\#} \tilde{l}_i (\vec{n} \times \vec{e}_3) \, d\mathbf{y} .$$

[3.]

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_0^L} \vec{e}_1 \times \nabla \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} &= \begin{pmatrix} 0 \\ - \int_{\mathcal{B}_0^L} \partial_{y_3} \tilde{\psi}_j \\ \int_{\mathcal{B}_0^L} \partial_{y_2} \tilde{\psi}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ - \int_{\partial \mathcal{B}_0^L} \tilde{\psi}_j n_3 \\ \int_{\partial \mathcal{B}_0^L} \tilde{\psi}_j n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ - \int_{\partial \mathcal{P}_\#} \tilde{\psi}_j n_3 \, d\mathbf{y} + \int_{\Sigma_0^\#} \tilde{\psi}_j \, dy_1 - \int_{\Sigma_L^\#} \tilde{\psi}_j \, dy_1 \\ \int_{\partial \mathcal{P}_\#} \tilde{\psi}_j n_2 \, d\mathbf{y} \end{pmatrix} \\ &= \int_{\partial \mathcal{P}_\#} \tilde{\psi}_j (\vec{e}_1 \times \vec{n}) \, d\mathbf{y} + \int_{\Sigma_0^\#} \tilde{\psi}_j \vec{e}_2 \, dy_1 - \int_{\Sigma_L^\#} \tilde{\psi}_j \vec{e}_2 \, dy_1 . \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\int_{\mathcal{B}_0^L} \vec{e}_2 \times \nabla \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} = \int_{\partial \mathcal{P}_\#} \tilde{\psi}_j (\vec{e}_2 \times \vec{n}) \, d\mathbf{y} - \int_{\Sigma_0^\#} \tilde{\psi}_j \vec{e}_1 \, dy_1 + \int_{\Sigma_L^\#} \tilde{\psi}_j \vec{e}_1 \, dy_1 .$$

$$\int_{\mathcal{B}_0^L} \vec{e}_3 \times \nabla \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} = \int_{\partial \mathcal{P}_\#} \tilde{\psi}_j (\vec{e}_3 \times \vec{n}) \, d\mathbf{y} .$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} (\nabla l_i - \chi_{y_3 \geq H} \vec{e}_i) \times \nabla \psi_j \, d\mathbf{y} &= \underbrace{\left[\int_{\partial \mathcal{P}_\#} (\nabla \tilde{l}_i \times \vec{n}) \tilde{\psi}_j \, d\mathbf{y} - \int_{\Sigma_0^\#} (\nabla \tilde{l}_i \times \vec{e}_3) \tilde{\psi}_j \, dy_1 \right]}_{[1.]} + \underbrace{\left[\int_{\partial \mathcal{P}_\#} \tilde{l}_i (\vec{n} \times \vec{e}_j) \, d\mathbf{y} + \int_{\Sigma_0^\#} \tilde{l}_i (\vec{n} \times \vec{e}_j) \, dy_1 \right]}_{[2.]} \\ &\quad + \underbrace{\left[\int_{\partial \mathcal{P}_\#} \tilde{\psi}_j (\vec{e}_i \times \vec{n}) \, d\mathbf{y} + \int_{\Sigma_0^\#} \tilde{\psi}_j (\vec{e}_i \times \vec{n}) \, dy_1 + \int_{\Sigma_L^\#} \tilde{\psi}_j (\vec{e}_i \times \vec{n}) \, dy_1 \right]}_{[3.]} + \underbrace{\left[(\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \Big|_{\mathcal{B}_0^L} \right]}_{[4.]} . \end{aligned}$$

(16)

- 4^{eme} type d'intégrale : $\int_{\mathcal{B}} \nabla l_i \times (\nabla \psi_j - \chi_{y_3 \geq H} \vec{e}_j) \, d\mathbf{y}$ avec $\nabla l_i = \nabla \tilde{l}_i + \vec{e}_i$ et $\nabla \psi_j = \nabla \tilde{\psi}_j + \vec{e}_j$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \nabla l_i \times (\nabla \psi_j - \chi_{y_3 \geq H} \bar{e}_j) \, \mathbf{d}\mathbf{y} &= \int_{\mathcal{B}} (\nabla \tilde{l}_i + \bar{e}_i) \times (\nabla \tilde{\psi}_j + \bar{e}_j) \, \mathbf{d}\mathbf{y} - \int_{\mathcal{B}} (\nabla \tilde{l}_i + \bar{e}_i) \times \chi_{y_3 \geq H} \bar{e}_j \, \mathbf{d}\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathcal{B}} \nabla \tilde{l}_i \times \nabla \tilde{\psi}_j \, \mathbf{d}\mathbf{y} + \int_{\mathcal{B}} \bar{e}_i \times \nabla \tilde{\psi}_j \, \mathbf{d}\mathbf{y} + \int_{\mathcal{B}_0^L} \nabla \tilde{l}_i \times \bar{e}_j \, \mathbf{d}\mathbf{y} + \int_{\mathcal{B}_0^L} \bar{e}_i \times \bar{e}_j \, \mathbf{d}\mathbf{y} . \end{aligned}$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \nabla l_i \times \overline{(\nabla \psi_j - \chi_{y_3 \geq H} \bar{e}_j)} \, \mathbf{d}\mathbf{y} &= \left[\int_{\partial \mathcal{P}_\#} (\nabla \tilde{\psi}_j \times \bar{\mathbf{n}}) \tilde{l}_i \, \mathbf{d}\mathbf{y} + \int_{\Sigma_0^\#} (\nabla \tilde{\psi}_j \times \bar{\mathbf{n}}) \tilde{l}_i \, \mathbf{d}y_1 \right] + \left[\int_{\partial \mathcal{P}_\#} \tilde{\psi}_j (\bar{e}_i \times \bar{\mathbf{n}}) \, \mathbf{d}\mathbf{y} + \int_{\Sigma_0^\#} \tilde{\psi}_j (\bar{e}_i \times \bar{\mathbf{n}}) \, \mathbf{d}y_1 \right] \\ &+ \left[\int_{\partial \mathcal{P}_\#} \tilde{l}_i (\bar{\mathbf{n}} \times \bar{e}_j) \, \mathbf{d}\mathbf{y} + \int_{\Sigma_0^\#} \tilde{l}_i (\bar{\mathbf{n}} \times \bar{e}_j) \, \mathbf{d}y_1 + \int_{\Sigma_0^\#} \tilde{l}_i (\bar{\mathbf{n}} \times \bar{e}_j) \, \mathbf{d}y_1 \right] + [(\bar{e}_i \times \bar{e}_j) |\mathcal{B}_0^L|] . \end{aligned} \quad (17)$$

En utilisant les intégrales de type 1 et 2, nous calculons numériquement les matrices \mathbf{A}_0 , \mathbf{B}_0 et les vecteurs \mathbf{a}_2 , \mathbf{b}_2 donnés dans la définition [118](#). En utilisant les intégrales de type 3 et 4, nous calculons numériquement les matrices \mathbf{A}_3 , \mathbf{B}_3 , \mathbf{A}_4 , \mathbf{A}_5 , \mathbf{B}_4 et \mathbf{B}_5 donnés dans la définition [118](#).

10.3 Calcul du coefficient de réflexion

Nous rappelons que nous considérons une onde plane incidente $\mathbf{E}_{inc} = e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{x}} \hat{\mathbf{e}}$ et $\mathbf{H}_{inc} = \hat{\mathbf{e}} \times \frac{\mathbf{k}_{inc}}{k} e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{x}}$ dont le vecteur d'onde s'écrit $\mathbf{k}_{inc} = k(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)^t = (k_1, k_2, k_3) = k(\hat{k}_1, \hat{k}_2, \hat{k}_3)^t$ avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

En polarisation TM, nous prenons $\hat{\mathbf{e}} = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta)$ et $\hat{\mathbf{e}} \times \frac{\mathbf{k}_{inc}}{k} = (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0)$.

En polarisation TE, nous prenons $\hat{\mathbf{e}} = (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0)$ et $\hat{\mathbf{e}} \times \frac{\mathbf{k}_{inc}}{k} = (-\cos \theta \cos \varphi, -\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$.

Nous rappelons que pour le modèle effectif à l'ordre 1, le vecteur de réflexion est obtenu à partir de la résolution du système linéaire donné par [91](#)

$$\begin{cases} (k_3 + k\mathbf{Z}^{-1})\mathbf{A}_{0,T} + \mathbf{k}_T \mathbf{A}_0^{(3)} = e^{ik_2 \varepsilon H} \left[-(k_3 + k\mathbf{Z}^{-1})\hat{\mathbf{e}}_T + \mathbf{k}_T \hat{e}^{(3)} \right] , \\ k_1 \mathbf{A}_0^{(1)} + k_2 \mathbf{A}_0^{(2)} - k_3 \mathbf{A}_0^{(3)} = 0 . \end{cases}$$

Pour le modèle effectif à l'ordre 2, le vecteur de réflexion est obtenu à partir de la résolution du système linéaire

donné par (102) et (103) :

$$\begin{aligned}
 & ik_3 \mathbf{R}_{2,T}^\varepsilon + i \mathbf{k}_T \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(3)} + ik \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{R}_{2,T}^\varepsilon + \varepsilon k_2 \mathbf{A}_0 \mathbf{R}_{2,T}^\varepsilon + \varepsilon k^2 \mathbf{Z}^{-1} i \mathbf{B}_0 \left(\mathbf{k}_T^\perp \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(3)} + k_3 \mathbf{R}_{2,T}^{\varepsilon,\perp} \right) \\
 & + \varepsilon ik \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{a}_2 i \left(k_1 \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(2)} - k_2 \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(1)} \right) - \varepsilon \mathbf{b}_2 \left(\left(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{R}_{2,T}^\varepsilon \right) k_3 + \Delta_T \mathbf{k} \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(3)} \right) + \varepsilon \mathbf{A}_3 \mathbf{k}_T \left(-k_1 \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(2)} + k_2 \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(1)} \right) \\
 & - \varepsilon \frac{\mathbf{Z}^{-1}}{k} \mathbf{B}_3 i \left(\left(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{R}_{2,T}^\varepsilon \right) k_3 + \Delta_T \mathbf{k} \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(3)} \right) \mathbf{k}_T + \varepsilon k \mathbf{Z}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_4^{(1)} \cdot \mathbf{k}_T \\ \mathbf{a}_5^{(1)} \cdot \mathbf{k}_T \end{pmatrix} \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(1)} + \varepsilon k \mathbf{Z}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_4^{(2)} \cdot \mathbf{k}_T \\ \mathbf{a}_5^{(2)} \cdot \mathbf{k}_T \end{pmatrix} \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(2)} - \varepsilon \begin{pmatrix} \mathbf{b}_4^{(1)} \cdot \mathbf{k}_T \\ \mathbf{b}_5^{(1)} \cdot \mathbf{k}_T \end{pmatrix} \left(k_2 \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(3)} + k_3 \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(2)} \right) \\
 & + \varepsilon \begin{pmatrix} \mathbf{b}_4^{(2)} \cdot \mathbf{k}_T \\ \mathbf{b}_5^{(2)} \cdot \mathbf{k}_T \end{pmatrix} \left(k_3 \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(1)} - k_3 \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(3)} \right) = i \left(\widehat{\mathbf{e}}_T k_3 - \mathbf{k}_T \widehat{e}^{(3)} \right) - ik \mathbf{Z}^{-1} \widehat{\mathbf{e}}_T - \varepsilon k^2 \mathbf{A}_0 \widehat{\mathbf{e}}_T - \varepsilon k^2 \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{B}_0 i \left(\mathbf{k}_T \widehat{e}^{(3)} - \widehat{\mathbf{e}}_T k_3 \right) \\
 & - \varepsilon ik \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{a}_2 i \left(k_1 \widehat{e}^{(2)} - k_2 \widehat{e}^{(1)} \right) + \varepsilon \mathbf{b}_2 \left(-k_3 \mathbf{k}_T \cdot \widehat{\mathbf{e}}_T + \Delta_T \widehat{e}^{(3)} \right) - \varepsilon \mathbf{A}_3 \mathbf{k}_T \left(-k_1 \widehat{e}^{(2)} + k_2 \widehat{e}^{(1)} \right) + \varepsilon \frac{\mathbf{Z}^{-1}}{k} \mathbf{B}_3 i \mathbf{k}_T \left(-k_3 \mathbf{k}_T \cdot \widehat{\mathbf{e}}_T + \Delta_T \widehat{e}^{(3)} \right) \\
 & - \varepsilon k \mathbf{Z}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_4^{(1)} \cdot \mathbf{k}_T \\ \mathbf{a}_5^{(1)} \cdot \mathbf{k}_T \end{pmatrix} \widehat{e}^{(1)} - \varepsilon k \mathbf{Z}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_4^{(2)} \cdot \mathbf{k}_T \\ \mathbf{a}_5^{(2)} \cdot \mathbf{k}_T \end{pmatrix} \widehat{e}^{(2)} + \varepsilon \begin{pmatrix} \mathbf{b}_4^{(1)} \cdot \mathbf{k}_T \\ \mathbf{b}_5^{(1)} \cdot \mathbf{k}_T \end{pmatrix} \left(k_2 \widehat{e}^{(3)} - k_3 \widehat{e}^{(2)} \right) + \varepsilon \begin{pmatrix} \mathbf{b}_4^{(2)} \cdot \mathbf{k}_T \\ \mathbf{b}_5^{(2)} \cdot \mathbf{k}_T \end{pmatrix} \left(k_3 \widehat{e}^{(1)} - k_1 \widehat{e}^{(3)} \right) ;
 \end{aligned}$$

et

$$k_1 \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(1)} + k_2 \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(2)} - k_3 \mathbf{R}_2^{\varepsilon,(3)} = 0 ;$$

10.4 Validations numériques

Pour valider notre modèle, nous souhaitons comparer le vecteur de réflexion de la solution de référence et le vecteur de réflexion de nos modèles effectifs. Nous étudions la dépendance de l'erreur entre les vecteurs de réflexion en fonction de la taille des particules ε .

Dans la Figure 10.15, nous considérons une particule, une fréquence de 2GHz ($\lambda = 15\text{cm}$), $\theta = \pi/4$, $\varphi = 0$, $T_1 = T_2 = 2.1$, nous nous plaçons en polarisation TE et nous prenons $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 0.5 + 0.5i & 0 \\ 0 & 0.5 + 0.5i \end{pmatrix}$. Nous représentons l'erreur pour le modèle à l'ordre 1. Nous obtenons une erreur d'ordre 1 en ε .

Dans la Figure 10.16, nous considérons une particules, une fréquence de 2GHz, $\theta = \pi/3$, $\varphi = 0$, $T_1 = T_2 = 2.001$, nous nous plaçons en polarisation TE et nous prenons $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{pmatrix}$. Nous représentons l'erreur pour le modèle à l'ordre 1 en fonction de ε . Nous obtenons encore une erreur d'ordre 1 en ε .

Dans la Figure 10.17, nous considérons une particule, une fréquence de 2GHz ($\lambda = 15\text{cm}$), $\theta = \pi/4$, $\varphi = 0$, $T_1 = T_2 = 2.1$, nous nous plaçons en polarisation TE et nous prenons $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 0.5 + 0.5i & 0 \\ 0 & 0.5 + 0.5i \end{pmatrix}$. Nous représentons l'erreur pour le modèle à l'ordre 2. Nous obtenons une erreur d'ordre 1 en ε . Le modèle n'est pas plus précis que le modèle 1. Le modèle à l'ordre 2 n'est donc pas validé. Il faut débbugger le code. afin de pouvoir valider le modèle.

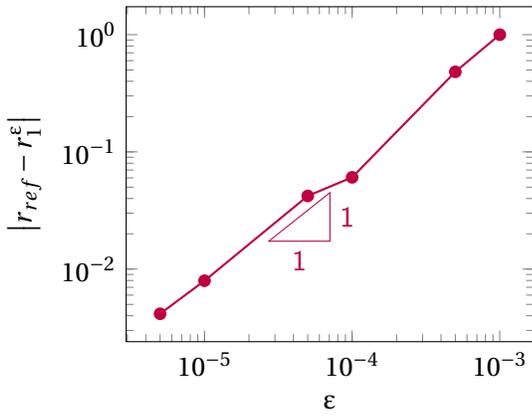


Figure 10.15 – Erreur sur le coefficient de réflexion pour le modèle 1 (cas 1)

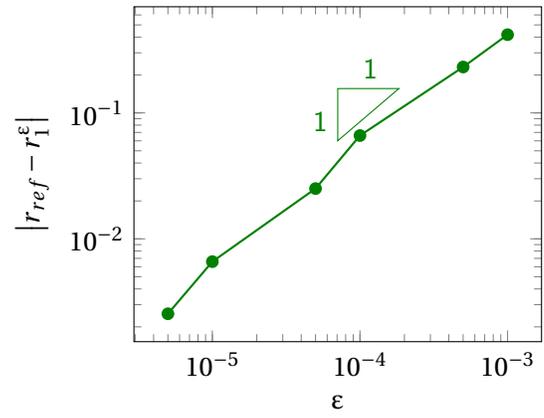


Figure 10.16 – Erreur sur le coefficient de réflexion pour le modèle 1 (cas 2)

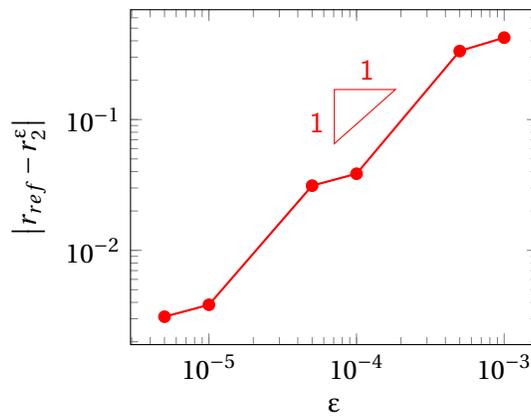


Figure 10.17 – Erreur sur le coefficient de réflexion pour le modèle 2

Annexe A

Décomposition à l'aide des modes TE et TM

Il est aussi possible de donner une décomposition à l'aide des modes TE et les modes TM.

Proposition 128

En utilisant les équations de Maxwell, nous pouvons décomposer $\mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon$ et $\mathbf{H}_{d,\infty}^\varepsilon$ à l'aide des modes TE ($\mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon,(3)} = 0$) et des modes TM ($\mathbf{H}_{d,\infty}^{\varepsilon,(3)} = 0$)

$$\mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} c_{m,n}^{\text{TE}} \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \mathbf{E}_{m,n}^{\text{TE}}(x_1, x_2) + c_{m,n}^{\text{TM}} \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \mathbf{E}_{m,n}^{\text{TM}}(x_1, x_2) \quad (1)$$

avec :

- $c_{m,n}^{\text{TE}} \in \mathbb{C}$ et $c_{m,n}^{\text{TM}} \in \mathbb{C}$;
- $\mathbf{E}_{m,n}^{\text{TE}}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{k}{\chi_{m,n}^2} \nabla_{\text{T}}^\perp \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}$ si $m, n \neq 0$ et $\mathbf{E}_{0,0}^{\text{TE}}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2}$;
- $\mathbf{E}_{m,n}^{\text{TM}}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_{m,n}}{\chi_{m,n}^2} \nabla_{\text{T}} \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \\ \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$ si $m, n \neq 0$ et $\mathbf{E}_{0,0}^{\text{TM}}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2}$;

et

$$\mathbf{H}_{d,\infty}^\varepsilon = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} c_{m,n}^{\text{TE}} \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \mathbf{H}_{m,n}^{\text{TE}}(x_1, x_2) + c_{m,n}^{\text{TM}} \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \mathbf{H}_{m,n}^{\text{TM}}(x_1, x_2) \quad (2)$$

avec :

- $\mathbf{H}_{m,n}^{\text{TE}}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_{m,n}}{\chi_{m,n}^2} \nabla_{\text{T}} \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \\ \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$ si $m, n \neq 0$ et $\mathbf{H}_{0,0}^{\text{TE}}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\cos \theta \cos \varphi \\ -\cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \end{pmatrix} e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2}$;
- $\mathbf{H}_{m,n}^{\text{TM}}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{-k}{\chi_{m,n}^2} \nabla_{\text{T}}^\perp \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}$ si $m, n \neq 0$ et $\mathbf{H}_{0,0}^{\text{TM}}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2}$.

Preuve. D'après la Proposition 100 chaque composante du champ électrique $\mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon$ et chaque composante du champ magnétique $\mathbf{H}_{d,\infty}^\varepsilon$ s'écrit, pour $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} E_{d,\infty}^{\varepsilon,(i)} &= \sum_{m,n} c_{m,n}^{(i)} \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \varphi_{m,n}(x_1, x_2) ; \\ H_{d,\infty}^{\varepsilon,(i)} &= \sum_{m,n} d_{m,n}^{(i)} \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \varphi_{m,n}(x_1, x_2) . \end{aligned}$$

Commençons par regarder les modes TE, nous nous plaçons dans le cas $E_{d,\infty}^{\varepsilon,(3)} = 0$. En utilisant l'équation de Maxwell $\mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon = -\frac{i}{k} \mathbf{rot} \mathbf{H}_{d,\infty}^\varepsilon$, nous avons $E_{d,\infty}^{\varepsilon,(3)} = -\frac{i}{k} (\partial_{x_1} H_{d,\infty}^{\varepsilon,(2)} - \partial_{x_2} H_{d,\infty}^{\varepsilon,(1)}) = 0$ ce qui donne $\partial_{x_1} H_{d,\infty}^{\varepsilon,(2)} - \partial_{x_2} H_{d,\infty}^{\varepsilon,(1)} = 0$. En utilisant la formule de $H_{d,\infty}^{\varepsilon,(i)}$ précédente, nous obtenons $\alpha_m d_{m,n}^{(2)} - \beta_n d_{m,n}^{(1)} = 0$. En notant

$$\begin{cases} d_{m,n}^{(1)} = d_{m,n}^T \alpha_m , \\ d_{m,n}^{(2)} = d_{m,n}^T \beta_n ; \end{cases} \quad \text{avec } d_{m,n}^T \in \mathbb{C} ; \quad (3)$$

Nous écrivons

$$\begin{pmatrix} H_{d,\infty}^{\varepsilon,(1)} \\ H_{d,\infty}^{\varepsilon,(2)} \end{pmatrix} = \sum_{m,n} d_{m,n}^T \nabla_T \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) . \quad (4)$$

Nous décrivons $E_{d,\infty}^{\varepsilon,(1)}$ et $E_{d,\infty}^{\varepsilon,(2)}$ à l'aide de la décomposition modale de $\mathbf{H}_{d,\infty}^\varepsilon$ et des équations de Maxwell :

$$\begin{aligned} ikE_{d,\infty}^{\varepsilon,(1)} &= (\mathbf{rot} \mathbf{H}_{d,\infty}^\varepsilon)^{(1)} = \partial_{x_2} H_{d,\infty}^{\varepsilon,(3)} - \partial_{x_3} H_{d,\infty}^{\varepsilon,(2)} = \sum_{m,n} \left(i\beta_n d_{m,n}^{(3)} + i\gamma_{m,n} d_{m,n}^{(2)} \right) \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \varphi_{m,n}(x_1, x_2) ; \\ ikE_{d,\infty}^{\varepsilon,(2)} &= (\mathbf{rot} \mathbf{H}_{d,\infty}^\varepsilon)^{(2)} = \partial_{x_3} H_{d,\infty}^{\varepsilon,(1)} - \partial_{x_1} H_{d,\infty}^{\varepsilon,(3)} = \sum_{m,n} \left(-i\gamma_{m,n} d_{m,n}^{(1)} - i\alpha_m d_{m,n}^{(3)} \right) \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \varphi_{m,n}(x_1, x_2) . \end{aligned} \quad (5)$$

A l'aide de la définition de $E_{d,\infty}^{\varepsilon,(1)}$, $E_{d,\infty}^{\varepsilon,(2)}$, $d_{m,n}^{(1)}$, $d_{m,n}^{(2)}$ et de la décomposition modale de $H_{d,\infty}^{\varepsilon,(3)}$, nous avons

$$\begin{aligned} ikH_{d,\infty}^{\varepsilon,(3)} &= -(\mathbf{rot} \mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon)^{(3)} = -\partial_{x_1} E_{d,\infty}^{\varepsilon,(2)} + \partial_{x_2} E_{d,\infty}^{\varepsilon,(1)} \\ &= \sum_{m,n} \frac{i}{k} \left[\underbrace{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)}_{\chi_{m,n}^2} \gamma_{m,n} d_{m,n}^T + \underbrace{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)}_{\chi_{m,n}^2} d_{m,n}^{(3)} \right] \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \\ &= ik \sum_{m,n} d_{m,n}^{(3)} \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \varphi_{m,n}(x_1, x_2) . \end{aligned}$$

Nous exprimons alors $d_{m,n}^{(3)} = \frac{\chi_{m,n}^2}{\gamma_{m,n}} d_{m,n}^T$ et nous posons pour la suite

$$c_{m,n}^{\text{TE}} = \frac{\chi_{m,n}^2}{\gamma_{m,n}} d_{m,n}^T . \quad (6)$$

Nous avons alors la décomposition de $\mathbf{H}_{d,\infty}^\varepsilon$ pour les modes TE :

$$\mathbf{H}_{d,\infty}^{\varepsilon,\text{TE}} = \begin{pmatrix} H_{d,\infty}^{\varepsilon,(1)} \\ H_{d,\infty}^{\varepsilon,(2)} \\ H_{d,\infty}^{\varepsilon,(3)} \end{pmatrix}_{\text{TE}} = \sum_{m,n} c_{m,n}^{\text{TE}} \begin{pmatrix} \frac{\gamma_{m,n}}{\chi_{m,n}^2} \nabla_T \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \\ \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \end{pmatrix} \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) . \quad (7)$$

Exprimons maintenant $\mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon$ pour les modes TE. Nous avons

$$\begin{aligned} ik\mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon,(1)} &= ik \sum_{m,n} c_{m,n}^{(1)} \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \\ &= \sum_{m,n} \left(i\beta_n d_{m,n}^{(3)} + i\gamma_{m,n} d_{m,n}^{(2)} \right) \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \varphi_{m,n}(x_1, x_2) ; \end{aligned}$$

en utilisant l'expression de $d_{m,n}^{(2)}$ et $d_{m,n}^{(3)}$, nous obtenons

$$c_{m,n}^{(1)} = \beta_n \frac{k}{\gamma_{m,n}} d_{m,n}^T . \quad (8)$$

De la même façon, nous obtenons

$$c_{m,n}^{(2)} = -\alpha_m \frac{k}{\gamma_{m,n}} d_{m,n}^T . \quad (9)$$

De plus, comme $\mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon,(3)} = 0$, nous exprimons $\mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon$ pour les modes TE :

$$\mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon,TE} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon,(1)} \\ \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon,(2)} \\ \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon,(3)} \end{pmatrix}_{TE} = \sum_{m,n} c_{m,n}^{TE} \begin{pmatrix} \frac{k}{\chi_{m,n}^2} \nabla_T^\perp \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) . \quad (10)$$

Regardons maintenant les modes TM, nous nous plaçons dans le cas $\mathbf{H}_{d,\infty}^{\varepsilon,(3)} = 0$. En utilisant l'équation de Maxwell $ik\mathbf{H}_{d,\infty}^\varepsilon = -\mathbf{rot} \mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon$, nous avons $\mathbf{H}_{d,\infty}^{\varepsilon,(3)} = -\partial_{x_1} \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon,(2)} + \partial_{x_2} \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon,(1)} = 0$. En utilisant la formule de $\mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon,(i)}$ précédente, nous obtenons $-\alpha_m c_{m,n}^{(2)} + \beta_n c_{m,n}^{(1)} = 0$. En notant

$$\begin{cases} c_{m,n}^{(1)} = c_{m,n}^T \alpha_m , \\ c_{m,n}^{(2)} = c_{m,n}^T \beta_n ; \end{cases} , \quad \text{avec } c_{m,n}^T \in \mathbb{C} ; \quad (11)$$

Nous écrivons

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon,(1)} \\ \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon,(2)} \end{pmatrix} = \sum_{m,n} c_{m,n}^T \nabla_T \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) . \quad (12)$$

Nous décrivons $\mathbf{H}_{d,\infty}^{\varepsilon,(1)}$ et $\mathbf{H}_{d,\infty}^{\varepsilon,(2)}$ à l'aide de la décomposition modale de $\mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon$ et des équations de Maxwell :

$$\begin{aligned} ik\mathbf{H}_{d,\infty}^{\varepsilon,(1)} &= -(\mathbf{rot} \mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon)^{(1)} = -\partial_{x_2} \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon,(3)} + \partial_{x_3} \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon,(2)} = \sum_{m,n} \left(-i\beta_n c_{m,n}^{(3)} - i\gamma_{m,n} c_{m,n}^{(2)} \right) \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \varphi_{m,n}(x_1, x_2) ; \\ ik\mathbf{H}_{d,\infty}^{\varepsilon,(2)} &= -(\mathbf{rot} \mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon)^{(2)} = -\partial_{x_3} \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon,(1)} + \partial_{x_1} \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon,(3)} = \sum_{m,n} \left(i\gamma_{m,n} c_{m,n}^{(1)} + i\alpha_m c_{m,n}^{(3)} \right) \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \varphi_{m,n}(x_1, x_2) . \end{aligned} \quad (13)$$

A l'aide de la définition de $\mathbf{H}_{d,\infty}^{\varepsilon,(1)}$, $\mathbf{H}_{d,\infty}^{\varepsilon,(2)}$, $c_{m,n}^{(1)}$, $c_{m,n}^{(2)}$ et de la décomposition modale de $\mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon,(3)}$, nous avons

$$\begin{aligned} ik\mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon,(3)} &= (\mathbf{rot} \mathbf{H}_{d,\infty}^\varepsilon)^{(3)} = \partial_{x_1} \mathbf{H}_{d,\infty}^{\varepsilon,(2)} - \partial_{x_2} \mathbf{H}_{d,\infty}^{\varepsilon,(1)} \\ &= \sum_{m,n} \left[-\frac{1}{ik} \gamma_{m,n} \chi_{m,n}^2 c_{m,n}^T - \frac{1}{ik} \chi_{m,n}^2 c_{m,n}^3 \right] \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \\ &= ik \sum_{m,n} c_{m,n}^{(3)} \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \varphi_{m,n}(x_1, x_2) . \end{aligned}$$

Nous obtenons alors $c_{m,n}^{(3)} = \frac{\chi_{m,n}^2}{\gamma_{m,n}} c_{m,n}^T$ et nous posons pour la suite

$$c_{m,n}^{TM} = \frac{\chi_{m,n}^2}{\gamma_{m,n}} c_{m,n}^T. \quad (14)$$

Nous avons alors la décomposition de $\mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon$ pour les modes TM :

$$\mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon, TM} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon, (1)} \\ \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon, (2)} \\ \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon, (3)} \end{pmatrix}_{TM} = \sum_{m,n} c_{m,n}^{TM} \begin{pmatrix} \frac{\gamma_{m,n}}{\chi_{m,n}^2} \nabla_T \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \\ \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \end{pmatrix} \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)). \quad (15)$$

Exprimons maintenant $\mathbf{H}_{d,\infty}^\varepsilon$ dans les modes TM. Nous avons

$$\begin{aligned} ik\mathbf{H}_{d,\infty}^{\varepsilon, (2)} &= ik \sum_{m,n} d_{m,n}^{(2)} \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \\ &= \sum_{m,n} \left(i\gamma_{m,n} c_{m,n}^{(1)} + i\alpha_m c_{m,n}^{(3)} \right) \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \varphi_{m,n}(x_1, x_2); \end{aligned}$$

en utilisant l'expression de $c_{m,n}^{(1)}$ et $c_{m,n}^{(3)}$, nous obtenons

$$d_{m,n}^{(2)} = \alpha_m \frac{k}{\gamma_{m,n}} c_{m,n}^T. \quad (16)$$

De la même façon, nous obtenons

$$d_{m,n}^{(1)} = -\beta_n \frac{k}{\gamma_{m,n}} c_{m,n}^T. \quad (17)$$

De plus, comme $\mathbf{H}_{d,\infty}^{\varepsilon, (3)} = 0$, nous exprimons $\mathbf{H}_{d,\infty}^\varepsilon$ pour les modes TM :

$$\mathbf{H}_{d,\infty}^{\varepsilon, TM} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{d,\infty}^{\varepsilon, (1)} \\ \mathbf{H}_{d,\infty}^{\varepsilon, (2)} \\ \mathbf{H}_{d,\infty}^{\varepsilon, (3)} \end{pmatrix}_{TM} = \sum_{m,n} c_{m,n}^{TM} \begin{pmatrix} -\frac{k}{\chi_{m,n}^2} \nabla_T^\perp \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)). \quad (18)$$

Finalement, nous pouvons combiner les contributions des modes TE et des modes TM afin d'obtenir la forme générale de $\mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon$ et de $\mathbf{H}_{d,\infty}^\varepsilon$:

$$\mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon = \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon, TE} + \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon, TM} = \sum_{m,n} c_{m,n}^{TE} \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \begin{pmatrix} \frac{k}{\chi_{m,n}^2} \nabla_T^\perp \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix} + c_{m,n}^{TM} \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \begin{pmatrix} \frac{\gamma_{m,n}}{\chi_{m,n}^2} \nabla_T \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \\ \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \end{pmatrix}; \quad (19)$$

et

$$\mathbf{H}_{d,\infty}^\varepsilon = \mathbf{H}_{d,\infty}^{\varepsilon, TE} + \mathbf{H}_{d,\infty}^{\varepsilon, TM} = \sum_{m,n} c_{m,n}^{TE} \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \begin{pmatrix} \frac{\gamma_{m,n}}{\chi_{m,n}^2} \nabla_T \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \\ \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \end{pmatrix} + c_{m,n}^{TM} \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \begin{pmatrix} -\frac{k}{\chi_{m,n}^2} \nabla_T^\perp \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Vérifions que la divergence est nulle.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{div} \mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon &= \partial_{x_1} \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon,(1)} + \partial_{x_2} \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon,(2)} + \partial_{x_3} \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon,(3)} \\
 &= \sum_{m,n} i\alpha_m \left[\frac{k}{\chi_{m,n}^2} c_{m,n}^{\text{TE}} \beta_n + \frac{\gamma_{m,n}}{\chi_{m,n}^2} c_{m,n}^{\text{TM}} \alpha_m \right] \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \\
 &\quad + \sum_{m,n} i\beta_n \left[-\frac{k}{\chi_{m,n}^2} c_{m,n}^{\text{TE}} \alpha_m + \frac{\gamma_{m,n}}{\chi_{m,n}^2} c_{m,n}^{\text{TM}} \beta_n \right] \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \\
 &\quad - \sum_{m,n} i\gamma_{m,n} c_{m,n}^{\text{TM}} \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) = 0, \text{ en utilisant que } \chi_{m,n}^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2.
 \end{aligned}$$

De même, nous avons

$$\begin{aligned}
 \mathbf{div} \mathbf{H}_{d,\infty}^\varepsilon &= \partial_{x_1} \mathbf{H}_{d,\infty}^{\varepsilon,(1)} + \partial_{x_2} \mathbf{H}_{d,\infty}^{\varepsilon,(2)} + \partial_{x_3} \mathbf{H}_{d,\infty}^{\varepsilon,(3)} \\
 &= \sum_{m,n} i\alpha_m \left[\frac{\gamma_{m,n}}{\chi_{m,n}^2} c_{m,n}^{\text{TE}} \alpha_m - \frac{k}{\chi_{m,n}^2} c_{m,n}^{\text{TM}} \beta_n \right] \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \\
 &\quad + \sum_{m,n} i\beta_n \left[\frac{\gamma_{m,n}}{\chi_{m,n}^2} c_{m,n}^{\text{TE}} \beta_n + \frac{k}{\chi_{m,n}^2} c_{m,n}^{\text{TM}} \alpha_m \right] \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - \varepsilon L)) \\
 &\quad - \sum_{m,n} i\gamma_{m,n} c_{m,n}^{\text{TE}} \varphi_{m,n}(x_1, x_2) \exp(-i\gamma_{m,n}(x_3 - L)) = 0, \text{ en utilisant que } \chi_{m,n}^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2.
 \end{aligned}$$

Pour $m, n = 0$ et en incidence normale ($k_1, k_2 = 0$) alors $\chi_{0,0} = 0$. Sachant que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}^\varepsilon \Big|_{\mathcal{D}_{\infty}^{\varepsilon L}} &= \mathbf{E}_{d,\infty}^\varepsilon + \mathbf{E}_{inc} = (\mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon,\text{TE}} + \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon,\text{TM}}) + (\mathbf{E}_{inc}^{\text{TE}} + \mathbf{E}_{inc}^{\text{TM}}) \\
 &= c_{0,0}^{\text{TE}} e^{-ik_3(x_3 - \varepsilon L)} \mathbf{E}_{0,0}^{\text{TE}}(x_1, x_2) + c_{0,0}^{\text{TM}} e^{-ik_3(x_3 - \varepsilon L)} \mathbf{E}_{0,0}^{\text{TM}}(x_1, x_2) + e^{ik_3(x_3 - \varepsilon L)} \mathbf{E}_{0,0}^{\text{TE}}(x_1, x_2) + e^{ik_3(x_3 - \varepsilon L)} \mathbf{E}_{0,0}^{\text{TM}}(x_1, x_2)
 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \mathbf{E}_{0,0}^{\text{TE}}(x_1, x_2) = e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{E}_{0,0}^{\text{TM}}(x_1, x_2) = e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2} \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}. \text{ De même,}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}^\varepsilon \Big|_{\mathcal{D}_{\infty}^{\varepsilon L}} &= \mathbf{H}_{d,\infty}^\varepsilon + \mathbf{H}_{inc} = (\mathbf{H}_{d,\infty}^{\varepsilon,\text{TE}} + \mathbf{H}_{d,\infty}^{\varepsilon,\text{TM}}) + (\mathbf{H}_{inc}^{\text{TE}} + \mathbf{H}_{inc}^{\text{TM}}) \\
 &= c_{0,0}^{\text{TE}} e^{-ik_3(x_3 - \varepsilon L)} \mathbf{H}_{0,0}^{\text{TE}}(x_1, x_2) + c_{0,0}^{\text{TM}} e^{-ik_3(x_3 - \varepsilon L)} \mathbf{H}_{0,0}^{\text{TM}}(x_1, x_2) + e^{ik_3(x_3 - \varepsilon L)} \mathbf{H}_{0,0}^{\text{TE}}(x_1, x_2) + e^{ik_3(x_3 - \varepsilon L)} \mathbf{H}_{0,0}^{\text{TM}}(x_1, x_2)
 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \mathbf{H}_{0,0}^{\text{TE}}(x_1, x_2) = e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2} \begin{pmatrix} -\cos \theta \cos \varphi \\ -\cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{H}_{0,0}^{\text{TM}}(x_1, x_2) = e^{ik_1 x_1 + ik_2 x_2} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

Définition 129

$\forall \Phi \in H^{-1/2}(\mathbf{div}, \Sigma_{\varepsilon L})$, on appelle solution sortante dans $H_{\vec{k}}^1(\mathbf{rot}; \mathcal{B}_{\infty}^{\varepsilon L}) \cap H^1(\mathbf{rot}; \mathcal{B}_{\infty}^{\varepsilon L})$ de

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon} - k^2 \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon} = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_{\infty}^{\varepsilon L}, \\ \mathbf{div} \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon} = 0 & \text{dans } \mathcal{B}_{\infty}^{\varepsilon L}, \\ \vec{e}_3 \times \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon} = \Phi & \text{sur } \Sigma_{\varepsilon L}; \end{cases} \quad (21)$$

où $\mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon}$ correspond à la décomposition modale (1) où on a gardé seulement les modes propagatifs "sortants" et les modes évanescents.

On dit donc qu'une onde est sortante si elle admet la décomposition modale (1).

Nous pouvons réinterpréter cette condition à l'aide d'une condition transparente basée sur un opérateur de Dirichlet-to-Neumann(DtN).

Définition 130

L'opérateur Λ_{k_1, k_2} , dit de Dirichlet-to-Neumann, est défini par

$$\Lambda_{k_1, k_2} : \begin{cases} H_{k_1, k_2}^{-1/2}(\mathbf{div}, \Sigma_{\varepsilon L}) \rightarrow H_{k_1, k_2}^{-1/2}(\mathbf{rot}, \Sigma_{\varepsilon L}) \\ \Phi \mapsto \Lambda_{k_1, k_2} \Phi := -\vec{e}_3 \times \mathbf{rot} \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon} \end{cases} \quad (22)$$

où $\mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon}$ est la solution sortante de (21).

Proposition 131

$$\forall \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon L}} \in H_{k_1, k_2}^{-1/2}(\mathbf{div}, \Sigma_{\varepsilon L}), \quad \Lambda_{k_1, k_2} \mathbf{E}_{d,\infty}^{\varepsilon} \Big|_{\Sigma_{\varepsilon L}} = - \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} i \gamma_{m, n} c_{m, n}^{\text{TE}} (\mathbf{E}_{m, n}^{\text{TE}})_{\text{T}} + \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \frac{k^2}{i \gamma_{m, n}} c_{m, n}^{\text{TM}} (\mathbf{E}_{m, n}^{\text{TM}})_{\text{T}}.$$

L'opérateur Λ_{k_1, k_2} est un opérateur linéaire continu de $H_{k_1, k_2}^{-1/2}(\mathbf{div}, \Sigma_{\varepsilon L})$ dans $H_{k_1, k_2}^{-1/2}(\mathbf{rot}, \Sigma_{\varepsilon L})$ et où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma_{\varepsilon L}}$ désigne le crochet de dualité entre $H^{-1/2}(\mathbf{rot}; \Sigma_{\varepsilon L})$ et $H^{-1/2}(\mathbf{div}; \Sigma_{\varepsilon L})$.

Conclusions et perspectives

Dans la première partie, après avoir proposé des modèles effectifs à l'ordre 1 et 2 dans le cas de conditions de Dirichlet sur les particules et dans le cas de conditions de Neumann pour une répartition périodique (chapitre 3), nous avons dans le chapitre 4 calculé numériquement la solution de ces modèles effectifs et modélisé une solution dite de référence afin de faire des validations qualitatives et quantitatives de nos modèles. Nos modèles ont donc été validés numériquement et sont cohérents avec la théorie. Nous avons aussi effectué une étude sur l'évolution du coefficient de réflexion en fonction de différents paramètres dans le cas d'une condition de Neumann sur les particules afin de mettre en évidence le passage d'un coefficient de réflexion de 0 à un coefficient 1. Nous avons notamment étudié numériquement l'influence de la distance entre les particules sur le coefficient de réflexion. Il serait intéressant de faire l'analyse asymptotique du coefficient de réflexion par rapport à la distance.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous avons proposé des modèles effectifs dans le cas de conditions de Dirichlet et dans le cas de conditions de Neumann sur les particules pour une répartition aléatoire (chapitre 6). Pour pouvoir déterminer le comportement à l'infini des champs proches dans le cas Dirichlet et Neumann et pour pouvoir assurer la stationnarité des champs dans le cas Neumann, nous avons considéré les problèmes de champ proche régularisés autour des particules. Une des questions que nous nous posons est : est-ce qu'il aurait été possible de raisonner directement sur les problèmes non régularisés quitte à rajouter des hypothèses sur l'aléa. Nous avons démontré que le développement asymptotique tronqué à l'ordre 2 est proche de la solution comme $o(\varepsilon)$ alors que dans le cas périodique il se comportait comme $O(\varepsilon^2)$. Pour préciser ces estimations et à l'instar de ce qui est fait dans les travaux de Gérard-Varet [GVM10, DGV11, BGV08] ou de l'homogénéisation volumique [DG17, DG21a, DG21b], il faudrait rajouter des hypothèses sur la loi de probabilité. Il serait peut être possible d'obtenir des estimations en $O(\varepsilon^{3/2})$ comme dans les travaux cités. Dans le chapitre 7, nous avons mis en place les étapes afin de calculer numériquement les solutions des modèles effectifs et une solution dite de référence. Nos modèles ont ensuite été validés numériquement et les vitesses de convergences obtenues des modèles effectifs sont bien meilleurs que ceux donnés par la théorie. Comment l'expliquer ? Toutes les méthodes que nous avons essayé d'étendre afin d'accélérer les calculs des constantes n'ont pas été concluantes. Il faudrait peut-être trouver des adaptations et tester d'autres méthodes comme celle proposée dans [Cot13] dans le cadre de l'homogénéisation stochastique de volume. Pour finir, comme dans la première partie, nous avons regardé l'évolution du coefficient de réflexion dans le cas d'une condition de Neumann sur les particules. Il s'avère que pour obtenir une transition entre une structure transparente et conductrice, il faut considérer des grosses couches de particules, sauf à autoriser des amas. Est-il possible d'étendre les résultats théoriques à la présence d'amas ?

Dans la troisième partie, où sont traitées les équations de Maxwell 3D, nous avons proposé un modèle effectif basé sur un développement asymptotique multi-échelle (chapitre 9). Il s'avère que l'étude dans ce cas est plus délicate et les calculs sont plus techniques que le cas scalaire. Il faudrait compléter cette étude par des estimations d'erreur. Dans le chapitre 10, nous avons présenté la méthode afin de calculer numériquement la solution du modèle effectif proposé mais il reste des bugs dans le code de calcul. Il faut donc déboguer le code Maxwell afin d'avoir

une validation numérique du modèle proposé. Une fois le code débuggé, nous pourrions appliquer le code numérique Maxwell à une répartition aléatoire des particules. Justifier le développement asymptotique dans le cas des équations de Maxwell pour le cas d'une répartition aléatoire est une question très intéressante et encore ouverte.

Évidemment la prise en compte de la géométrie de l'objet sans l'approximation du plan tangent fait aussi partie de la perspective de ce travail.

Bibliographie

- [AA96] Toufic Abboud and Habib Ammari. Diffraction at a curved grating : Tm and te cases, homogenization. *Journal of mathematical analysis and applications*, 202(3) :995–1026, 1996.
- [Abb93] Toufic Abboud. Formulation variationnelle des équations de maxwell dans un réseau bipériodique de r3. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 317(3) :245–248, 1993.
- [ABCP11] Youcef Amirat, Olivier Bodart, Gregory A Chechkin, and Andrey L Piatnitski. Boundary homogenization in domains with randomly oscillating boundary. *Stochastic Processes and their Applications*, 121(1) :1–23, 2011.
- [ACL18] Franck Assous, Patrick Ciarlet, and Simon Labrunie. *Mathematical foundations of computational electromagnetism*. Springer, 2018.
- [APV98] Yves Achdou, Olivier Pironneau, and Frederic Valentin. Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries. *Journal of Computational Physics*, 147(1) :187–218, 1998.
- [Bao97] Gang Bao. Variational approximation of maxwell's equations in biperiodic structures. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 57(2) :364–381, 1997.
- [BB02] Nathalie Bartoli and Abderrahmane Bendali. Robust and high-order effective boundary conditions for perfectly conducting scatterers coated by a thin dielectric layer. *IMA journal of applied mathematics*, 67(5) :479–508, 2002.
- [BBS94] Anne-Sophie Bonnet-Bendhia and Felipe Starling. Guided waves by electromagnetic gratings and non-uniqueness examples for the diffraction problem. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 17(5) :305–338, 1994.
- [BC99] A Yu Belyaev and GA Chechkin. Averaging operators with boundary conditions of fine-scaled structure. *Mathematical Notes*, 65(4) :418–429, 1999.
- [BCG05] Hajer Bahouri, Jean-Yves Chemin, and Isabelle Gallagher. Inégalités de hardy précisées. *Comptes Rendus Mathématique*, 341(2) :89–92, 2005.
- [BDVV08] Delphine Brancherie, Marc Dambrine, Grégory Vial, and Pierre Villon. Effect of surface defects on structure failure : a two-scale approach. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 17(5-7) :613–624, 2008.
- [Ben21] Clément Beneteau. *Modèles homogénéisés enrichis en présence de bords : Analyse et traitement numérique*. PhD thesis, Institut polytechnique de Paris, 2021.

- [BFFO17] Peter Bella, Benjamin Fehrman, Julian Fischer, and Felix Otto. Stochastic homogenization of linear elliptic equations : Higher-order error estimates in weak norms via second-order correctors. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 49(6) :4658–4703, 2017.
- [BGV08] Arnaud Basson and David Gérard-Varet. Wall laws for fluid flows at a boundary with random roughness. *Communications on Pure and Applied Mathematics : A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, 61(7) :941–987, 2008.
- [BL96] Abderrahmane Bendali and Keddour Lemrabet. The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the helmholtz equation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 56(6) :1664–1693, 1996.
- [BLBL16] Xavier Blanc, Claude Le Bris, and Frédéric Legoll. Some variance reduction methods for numerical stochastic homogenization. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 374(2066) :20150168, 2016.
- [BP04] Alain Bourgeat and Andrey Piatnitski. Approximations of effective coefficients in stochastic homogenization. In *Annales de l’IHP Probabilités et statistiques*, volume 40, pages 153–165, 2004.
- [BR19] Thomas Baden-Riess. Phd thesis : Existence, uniqueness & explicit bounds for scattering by rough surfaces. *arXiv preprint arXiv :1904.04011*, 2019.
- [BR20] Thomas Baden-Riess. Existence, uniqueness and explicit bounds for acoustic scattering by an infinite lipschitz boundary with an impedance condition. In *Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Mathematica*, volume 45, 2020.
- [Bre99] Haïm Brezis. *Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications*. Dunod, 1999.
- [CCDDM09] Gregory A Chechkin, Tatiana P Chechkina, Ciro D’Apice, and Umberto De Maio. Homogenization in domains randomly perforated along the boundary. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, 12(4) :713, 2009.
- [CCDV06] Gabriel Caloz, Martin Costabel, Monique Dauge, and Grégory Vial. Asymptotic expansion of the solution of an interface problem in a polygonal domain with thin layer. *Asymptotic Analysis*, 50(1-2) :121–173, 2006.
- [CD13] Xavier Claeys and Bérangère Delourme. High order asymptotics for wave propagation across thin periodic interfaces. *Asymptotic Analysis*, 83(1-2) :35–82, 2013.
- [CJP10] IS Ciuperca, Mohammed Jai, and Clair Poignard. Approximate transmission conditions through a rough thin layer : the case of periodic roughness. *European Journal of Applied Mathematics*, 21(1) :51–75, 2010.
- [Cla08] Xavier Claeys. *Analyse asymptotique et numérique de la diffraction d’ondes par des fils minces*. PhD thesis, Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines, 2008.
- [Cot13] Régis Cottreau. Numerical strategy for unbiased homogenization of random materials. *International journal for numerical methods in engineering*, 95(1) :71–90, 2013.
- [CW97] SN Chandler-Wilde. The impedance boundary value problem for the helmholtz equation in a half-plane. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 20(10) :813–840, 1997.

- [CWE10] Simon N Chandler-Wilde and Johannes Elschner. Variational approach in weighted sobolev spaces to scattering by unbounded rough surfaces. *SIAM journal on mathematical analysis*, 42(6) :2554–2580, 2010.
- [CWM05] Simon N Chandler-Wilde and Peter Monk. Existence, uniqueness, and variational methods for scattering by unbounded rough surfaces. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 37(2) :598–618, 2005.
- [CWR96] Simon N Chandler-Wilde and Christopher R Ross. Scattering by rough surfaces : the dirichlet problem for the helmholtz equation in a non-locally perturbed half-plane. *Mathematical methods in the applied sciences*, 19(12) :959–976, 1996.
- [CWRZ99] Simon N Chandler-Wilde, Chris R Ross, and Bo Zhang. Scattering by infinite one-dimensional rough surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 455(1990) :3767–3787, 1999.
- [CWZ98] Simon N Chandler-Wilde and Bo Zhang. A uniqueness result for scattering by infinite rough surfaces. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 58(6) :1774–1790, 1998.
- [DDG05] AS Bonnet-Ben Dhia, Dora Drissi, and Nabil Gmati. Mathematical analysis of the acoustic diffraction by a muffler containing perforated ducts. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 15(07) :1059–1090, 2005.
- [Del10] Bérangère Delourme. *Modèles et asymptotiques des interfaces fines et périodiques en électromagnétisme*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2010.
- [Del15] Bérangère Delourme. High-order asymptotics for the electromagnetic scattering by thin periodic layers. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 38(5) :811–833, 2015.
- [DG17] Mitia Duerinckx and Antoine Gloria. Multiscale functional inequalities in probability : Concentration properties. *arXiv preprint arXiv :1711.03148*, 2017.
- [DG20] Mitia Duerinckx and Antoine Gloria. Multiscale functional inequalities in probability : Constructive approach. *Annales Henri Lebesgue*, 3 :825–872, 2020.
- [DG21a] Mitia Duerinckx and Antoine Gloria. Corrector equations in fluid mechanics : Effective viscosity of colloidal suspensions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 239(2) :1025–1060, 2021.
- [DG21b] Mitia Duerinckx and Antoine Gloria. Quantitative homogenization theory for random suspensions in steady stokes flow. *arXiv preprint arXiv :2103.06414*, 2021.
- [DGV11] Anne-Laure Dalibard and David Gérard-Varet. Effective boundary condition at a rough surface starting from a slip condition. *Journal of Differential Equations*, 251(12) :3450–3487, 2011.
- [DH20] Bérangère Delourme and David P Hewett. Electromagnetic shielding by thin periodic structures and the faraday cage effect. *Comptes Rendus. Mathématique*, 358(7) :777–784, 2020.
- [DHJ12] Bérangère Delourme, Housseem Haddar, and Patrick Joly. Approximate models for wave propagation across thin periodic interfaces. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 98(1) :28–71, 2012.
- [DHJ13] Bérangère Delourme, Housseem Haddar, and Patrick Joly. On the well-posedness, stability and accuracy of an asymptotic model for thin periodic interfaces in electromagnetic scattering problems. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 23(13) :2433–2464, 2013.

- [Dob94] DC Dobson. A variational method for electromagnetic diffraction in biperiodic structures. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 28(4) :419–439, 1994.
- [DPP14] Marc Duruflé, Victor Péron, and Clair Pognard. Thin layer models for electromagnetism. *Communications in Computational Physics*, 16(1) :213–238, 2014.
- [eEL15] Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Eric Lunéville. Propagation dans les guides d’ondes. 29 octobre 2015.
- [EJ19] Mustapha El Jarroudi. A mathematical model for turbulent transport through thin randomly oscillating layers surrounding a fixed domain. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 520 :178–195, 2019.
- [EN93] Bjorn Engquist and Jean-Claude Nedelec. Effective boundary conditions for electro-magnetic scattering in thin layers. 1993.
- [ESY03] J Elschner, G Schmidt, and M Yamamoto. An inverse problem in periodic diffractive optics : global uniqueness with a single wavenumber. *Inverse problems*, 19(3) :779, 2003.
- [GK15] Nestor Guillen and Inwon Kim. Quasistatic droplets in randomly perforated domains. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 215(1) :211–281, 2015.
- [Glo12] Antoine Gloria. Numerical approximation of effective coefficients in stochastic homogenization of discrete elliptic equations. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 46(1) :1–38, 2012.
- [GN77] J Giroire and JC Nedelec. Potentiel de double couche pour résoudre le problème de Neumann par équation intégrale. *Publications mathématiques et informatique de Rennes*, (S4) :1–10, 1977.
- [GNO21] Antoine Gloria, Stefan Neukamm, and Felix Otto. Quantitative estimates in stochastic homogenization for correlated coefficient fields. *Analysis & PDE*, 14(8) :2497–2537, 2021.
- [GO17] Antoine Gloria and Felix Otto. Quantitative results on the corrector equation in stochastic homogenization. *Journal of the European mathematical society*, 19(11) :3489–3548, 2017.
- [GVM10] David Gérard-Varet and Nader Masmoudi. Relevance of the slip condition for fluid flows near an irregular boundary. *Communications in Mathematical Physics*, 295(1) :99–137, 2010.
- [Hei20] Martin Heida. Stochastic homogenization on randomly perforated domains. *arXiv preprint arXiv :2001.10373*, 2020.
- [HJ02] Housseem Haddar and Patrick Joly. Stability of thin layer approximation of electromagnetic waves scattering by linear and nonlinear coatings. *Journal of computational and applied mathematics*, 143(2) :201–236, 2002.
- [HLQZ15] Guanghui Hu, Xiaodong Liu, Fenglong Qu, and Bo Zhang. Variational approach to scattering by unbounded rough surfaces with Neumann and generalized impedance boundary conditions. *Communications in mathematical sciences*, 13(2) :511–537, 2015.
- [Hop18] Daniel J Hoppe. *Impedance boundary conditions in electromagnetics*. CRC Press, 2018.
- [Il’92] AM Il’in. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*. 1992.

- [IPSS08] Janine Illian, Antti Penttinen, Helga Stoyan, and Dietrich Stoyan. *Statistical analysis and modelling of spatial point patterns*. John Wiley & Sons, 2008.
- [JJM16] Agnès Maurel Jean-Jacques Marigo. Two-scale homogenization to determine effective parameters of thin metallic-structured films. 2016.
- [JLL⁺22] Xue Jiang, Peijun Li, Junliang Lv, Zhoufeng Wang, Haijun Wu, and Weiyang Zheng. An adaptive edge finite element dtn method for maxwell's equations in biperiodic structures. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 42(3) :2794–2828, 2022.
- [Kim17] Seungil Kim. Analysis of the non-reflecting boundary condition for the time-harmonic electromagnetic wave propagation in waveguides. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 453(1) :82–103, 2017.
- [Kit93] Andreas Kitsch. *Diffraction by periodic structures*. 1993.
- [Lab19] Justine Labat. *Modélisation multi-échelle de la diffraction des ondes électromagnétiques par de petits obstacles*. PhD thesis, Pau, 2019.
- [Leo48] MA Leontovich. Investigations of propagation of radiowaves, part ii. moscow. *Russia : Printing House of USSR Academy of Sciences*, page 10, 1948.
- [MM16] Jean-Jacques Marigo and Agnès Maurel. Homogenization models for thin rigid structured surfaces and films. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 140(1) :260–273, 2016.
- [Neu18] Stefan Neukamm. An introduction to the qualitative and quantitative theory of homogenization. *Interdisciplinary Information Sciences*, 24(1) :1–48, 2018.
- [NP11] Sergey Nazarov and Boris A Plamenevsky. Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. In *Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries*. de Gruyter, 2011.
- [Pap79] George C Papanicolaou. Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients. In *Colloquia Math. Soc., Janos Bolyai*, volume 27, pages 853–873, 1979.
- [PDP⁺08] Clair Poignard, Patrick Dular, Ronan Perrussel, Laurent Krahenbuhl, Laurent Nicolas, and Michelle Schatzman. Approximate conditions replacing thin layers. *IEEE transactions on magnetics*, 44(6) :1154–1157, 2008.
- [Poi09] Clair Poignard. Approximate transmission conditions through a weakly oscillating thin layer. *Mathematical methods in the applied sciences*, 32(4) :435–453, 2009.
- [Poi12] Clair Poignard. Boundary layer correctors and generalized polarization tensor for periodic rough thin layers. a review for the conductivity problem. In *ESAIM : Proceedings*, volume 37, pages 136–165. EDP Sciences, 2012.
- [PSD16] Victor Péron, Kersten Schmidt, and Marc Duruflé. Equivalent transmission conditions for the time-harmonic maxwell equations in 3d for a medium with a highly conductive thin sheet. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 76(3) :1031–1052, 2016.
- [Reu86] GE Reuter. U. krengel ergodic theorems (de gruyter studies in mathematics 6, de gruyter, berlin-new york, 1985), viii+ 357 pp.■ 39.40. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 29(2) :287–287, 1986.

- [Ros22] Sheldon M Ross. *Simulation*. academic press, 2022.
- [Shi84] AN Shiryaev. Probability. translated from the russian by rp boas. *Graduate texts in Mathematics*, 95 :336, 1984.
- [SP11] Bruno Stupfel and Dorcas Poget. Sufficient uniqueness conditions for the solution of the time harmonic maxwell's equations associated with surface impedance boundary conditions. *Journal of Computational Physics*, 230(12) :4571–4587, 2011.
- [SSW03] Simone Secchi, Didier Smets, and Michel Willem. Remarks on a hardy–sobolev inequality. *Comptes Rendus Mathématique*, 336(10) :811–815, 2003.
- [Stu15] Bruno Stupfel. Implementation of high-order impedance boundary conditions in some integral equation formulations. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 63(4) :1658–1668, 2015.
- [TBvdB13] Jakob Teichmann, Felix Ballani, and Karl Gerald van den Boogaart. Generalizations of matérn's hard-core point processes. *Spatial Statistics*, 3 :33–53, 2013.
- [TPM⁺20] Marie Touboul, Kim Pham, Agnès Maurel, Jean-Jacques Marigo, Bruno Lombard, and Cédric Bellis. Effective resonant model and simulations in the time-domain of wave scattering from a periodic row of highly-contrasted inclusions. *Journal of Elasticity*, 142(1) :53–82, 2020.
- [Via03] Grégory Vial. Analyse multi-échelle et conditions aux limites approchées pour un probleme avec couche mince dans un domaine a coin. *PhD Thèse, École Normale Supérieure de Cachan, Paris*, 26, 2003.
- [ZCW03] Bo Zhang and Simon N Chandler-Wilde. Integral equation methods for scattering by infinite rough surfaces. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 26(6) :463–488, 2003.

Titre : Diffraction électromagnétique par une couche mince de nanoparticules réparties aléatoirement : développement asymptotique, conditions effectives et simulations.

Mots clés : Équation de Maxwell, Développement asymptotique, Homogénéisation stochastique, Conditions aux limites

Résumé :

Nous considérons le problème de diffraction d'une onde plane harmonique électromagnétique par un objet inhomogène recouvert d'une couche très fine de particules parfaitement conductrices distribuées aléatoirement. Nous cherchons à quantifier l'effet de cette couche sur le coefficient de réflexion. La taille des particules, leur espacement et l'épaisseur de la couche sont du même ordre mais petites par rapport à la longueur d'onde incidente et les dimensions de l'objet. Deux difficultés apparaissent : (1) résoudre numériquement les équations de Maxwell dans ce contexte est extrêmement coûteux en terme de taille mémoire et de temps calcul; (2) la répartition des particules n'est pas connue pour un objet donné.

Nous allons supposer que c'est une réalisation d'une répartition supposée aléatoire.

Pour contourner ces difficultés, nous proposons un modèle effectif déterministe, à l'aide d'un développement asymptotique multi-échelle de la solution, où la couche de particules est remplacée par une condition aux bords effective, prescrite sur une surface située au-dessus des particules. Les coefficients qui interviennent dans la condition nécessite la résolution de problèmes dits de cellule posés dans un demi-espace recouvert d'une couche de particules, de taille unitaire, réparties aléatoirement.

Title : Scattering from a thin layer of randomly distributed nanoparticles: asymptotic expansion, effective boundary conditions and simulations.

Keywords : Maxwell's equation, asymptotic expansion, stochastic homogenization, boundary conditions

Abstract :

We consider the scattering problem of an electromagnetic harmonic plane wave by an inhomogeneous object covered with a very thin layer of perfectly conductive particles distributed randomly. We want to quantify the effect of this layer on the reflection coefficient. The size of the particles, their spacing and the layer thickness are of the same order but small compared to the incident wavelength and the object dimensions. Two difficulties appear: (1) solving numerically Maxwell's equations in this context is extremely expensive in terms of memory size and computation time; (2) the particle distribution is not known for a

given object. We will assume that it is a realization of a supposedly random distribution.

To overcome these difficulties, we propose a deterministic effective model, using a multiscale asymptotic expansion of the solution, where the particle layer is replaced by an effective boundary condition, prescribed on a surface above the particles. The coefficients involved in the condition require the solution of cell problems posed in a half-space covered by a layer of randomly distributed unit-sized particles.