



HAL
open science

Une approche nouvelle de la modélisation mathématique et numérique en aéroacoustique par les équations de Goldstein : Applications en aéronautique

Antoine Bensalah

► To cite this version:

Antoine Bensalah. Une approche nouvelle de la modélisation mathématique et numérique en aéroacoustique par les équations de Goldstein : Applications en aéronautique. Analyse numérique [cs.NA]. Université Paris Saclay (COMUE), 2018. Français. NNT : 2018SACL008 . tel-04403271

HAL Id: tel-04403271

<https://theses.hal.science/tel-04403271>

Submitted on 18 Jan 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

de

L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH, ED 574)

Établissement d'inscription : ENSTA ParisTech

Laboratoire d'accueil : Unité de Mathématiques Appliquées, ENSTA-CNRS-INRIA

Spécialité de doctorat : Mathématiques Appliquées

Antoine BENSALAH

Une approche nouvelle de la modélisation mathématique et
numérique en aéroacoustique par les équations de Goldstein

—
Applications en aéronautique

Date de soutenance : 6 Juillet 2018

Après avis des rapporteurs : BRUNO DESPRÉS (Lab. Jacques-Louis Lions, UPMC)
ALEXANDRE ERN (CERMICS, École des Ponts ParisTech)

Jury de soutenance

GRÉGOIRE ALLAIRE	(CMAP, École Polytechnique) Examineur et président du jury
ABDERRAHMANE BENDALI	(INSA Toulouse) Examineur
JULIETTE CHABASSIER	(INRIA, UPPA) Examinatrice
BRUNO DESPRÉS	(Lab. Jacques-Louis Lions, UPMC) Rapporteur
ALEXANDRE ERN	(CERMICS, École des Ponts ParisTech) Rapporteur
PATRICK JOLY	(INRIA, ENSTA ParisTech) Directeur de thèse
JEAN-FRANÇOIS MERCIER	(INRIA, ENSTA ParisTech) Codirecteur de thèse
ISABELLE TERRASSE	(AIRBUS GROUP) Examinatrice

À mes parents, à ma famille

À la mémoire de mon grand-père

Remerciements

J'entame les dernières lignes écrites de cette thèse avec le recul de plusieurs mois qui m'ont permis, d'une part, de me reposer, ce qui était nécessaire, et d'autre part de me lancer pleinement dans la vie dirait-on active, après la thèse. C'est avec le regard moins sévère et presque avec plaisir – mais toujours autant de retard – que je retourne à mon manuscrit, pour enfin pouvoir remercier pleinement les gens qui ont contribué, de très près ou de plus loin, à ce travail et à ma vie de thésard centrée sur ce dernier.

Mes premiers remerciements vont naturellement aux membres de mon jury, Isabelle Terrasse, Juliette Chabassier, Abderrahmane Bendali, Grégoire Allaire et, tout particulièrement, aux rapporteurs, Alexandre Ern et Bruno Després. Tous m'ont fait l'honneur de s'intéresser à mon travail et m'ont permis de partager avec eux le plaisir de l'échange scientifique, qui a vu le jour en moi dès que j'ai eu l'impression d'y comprendre enfin un petit peu quelque chose ; et ce, malgré le peu de temps dont chacun a disposé. Je suis même surpris, flatté, ravi, que le sujet et les résultats intéressent certains au-delà du cadre de la soutenance.

Je tiens évidemment à remercier ici chaleureusement mes directeurs de thèse, pour leur grandes qualités humaines et scientifiques. Merci, Patrick, merci, Jean-François, pour toute l'attention portée, pour votre enthousiasme, votre confiance, pour les éclaircissements, les pistes à explorer et les idées à décortiquer chez soi, les calculs à refaire, à pousser, le débogage mathématique même par téléphone ... J'ai beaucoup apprécié et apprécie toujours travailler avec vous. La complémentarité de vos caractères et de vos approches m'a permis de ne jamais lâcher aucune piste et d'y croire, laissant le manque de temps comme seul obstacle.

L'encadrement a été plus riche encore, telle est aussi la saveur d'une thèse CIFRE. Un grand merci à Nolwenn, Isabelle, Pierre et Eric, pour votre approche industrielle éclairante et non précipitée ainsi que la pertinence de votre vision scientifique – vous avez toujours gardé un intérêt curieux pour les tourbillons 2D et les fonctions pas dans H^1 .

Un plus large et non moins chaleureux merci à mes deux structures d'accueil, l'Unité de Mathématiques Appliquées de l'ENSTA ParisTech et l'équipe de Virtual Product Engineering d'Airbus. Les deux m'ont fourni un cadre de travail idéal, avec des gens aussi sympathiques que compétents, avec qui il est agréable d'échanger et d'apprendre. Je suis heureux de poursuivre ce travail chez Airbus et espère le poursuivre également avec l'équipe de POEMS par de futures collaborations. Merci aussi à Corinne, côté ENSTA, et à Julie, son homologue (ex-)airbusienne, pour l'aide administrative et la patience dont il faut parfois faire preuve avec moi ! Merci également à la petite famille des doctorants : vous participez grandement à rendre l'ensemble agréable et je suis sûr d'y avoir trouvé de bons amis.

Je tiens également à remercier ma famille, restée toujours à l'écoute, parfois sans comprendre où étaient les problèmes : « mais tu n'as pas encore fini ta thèse ? », et dont l'intérêt

pour mes histoires ne s'est jamais démenti. Je vous dois beaucoup, notamment mon éducation dont ce travail est une forme d'aboutissement. Merci également à la nouvelle famille dont j'ai fait la connaissance et qu'il me semble déjà connaître depuis toujours, merci pour votre soutien et votre aide infaillible.

Certains amis ont été plongés en même temps que moi dans leur thèse. Nous ne nous sommes jamais quittés, dans tous les cours depuis l'École. Les avoir à mes côtés m'a apporté une aide incroyable : Romain et Pierre ont su m'écouter, m'ont permis de m'évader, mais aussi – et surtout – de geeker et dissenter sur des problèmes de caractère bien posé, de schéma qui diverge et d'algo à recoder. Thibault et Fred n'étant jamais loin pour geeker, je les en remercie également.

D'autres amis se sont peut être impatientés de me voir un peu moins, mais ils m'ont soutenu et poussé jusqu'au bout : merci aux survivants du groupe Hx3, Jean-Noël, Marie-Christine, Michel, Paul et Sufiane.

Mais, pour être fidèle à moi-même, je dois en oublier quelques-uns ... : merci à tous ceux que mes remerciements devraient aussi concerner.

Mes remerciements les plus émus vont à celle dont l'empreinte dans cette thèse est à la fois discrète et forte, diffuse et omniprésente ; bluffée pour un soir par l'acoustique (pourtant sans écoulement) de la salle ou par la chemise (pourtant jamais de mise), et sur un air de jazz (pourtant sage) : merci Aurore.

Table des matières

Introduction générale de la thèse	15
I Introduction à l'aéroacoustique en aéronautique et présentation des équations de Goldstein	19
1 Modélisation de l'aéroacoustique et contexte industriel	21
1.1 La problématique industrielle	21
1.2 Modélisation de l'écoulement	30
1.3 Le problème de la propagation acoustique en écoulement	40
2 Vers une prise en compte des effets de la vorticité de l'écoulement sur la propagation acoustique	47
2.1 Différentes complexités de modélisation de l'écoulement dans la zone de propagation acoustique	48
2.2 Une approche perturbative du modèle potentiel par les équations de Goldstein	57
II Analyse d'une équation de transport en régime harmonique	65
3 Introduction à une équation de transport harmonique vectorielle	67
3.1 Introduction	67
3.2 Cadre fonctionnel et opérateur de transport	69
3.3 Géométries simples : solutions explicites et mise en évidence de résonances .	74
4 Conditions suffisantes au caractère bien posé	79
4.1 Estimation a priori	79
4.2 Fin de la preuve du caractère bien posé	91
5 Étude numérique de l'équation de transport harmonique	95
5.1 Présentation et comparaison des schémas numériques : LS et SUPG	95
5.2 Illustration en écoulements domaine-remplissant	107
III Étude des équations de Goldstein en écoulement domaine - remplissant	123
6 Analyse des équations de Goldstein en écoulement domaine-remplissant	125
6.1 Géométrie et écoulement porteur considérés	127

6.2	Conditions aux limites pour les perturbations acoustiques	128
6.3	Analyse des équations de Goldstein avec conditions aux limites de rayonnement approchées	135
6.4	Discussion des hypothèses concernant la géométrie et l'écoulement porteur	145
7	Étude numérique du couplage de Goldstein en 2D	151
7.1	Approximation FEM-SUPG du couplage de Goldstein avec PML	151
7.2	Cas de validation de la méthode	155
7.3	Illustrations numériques sur divers écoulements	161
7.4	Comparaison avec le modèle potentiel	176
7.5	Conclusions de l'étude numérique des équations de Goldstein	198
IV	Étude des équations de Goldstein en écoulement circulaire	199
8	Le cas de l'équation de transport	201
8.1	Description des écoulements circulaires	202
8.2	Vers la résolution de l'équation de transport : notion de résonance	204
8.3	Description de l'ensemble des résonances \mathcal{K}_{res}	205
8.4	Résolution de l'équation de transport hors résonance et estimation a priori .	208
8.5	Étude de quelques cas d'écoulements particuliers	215
8.6	Résolution dans le cas résonant : lignes résonantes	220
9	Le cas des équations de Goldstein	227
9.1	Écriture des équations dans la couronne	228
9.2	Analyse des équations hors résonances du transport : caractère Fredholm . .	229
9.3	Mise sous forme modale des équations de Goldstein	232
9.4	Retour sur le caractère bien posé hors fréquence de résonance du transport.	233
9.5	Analyse des résonances critiques et du transport par absorption limite . . .	244
	Conclusion	268
	Conclusions et perspectives de la thèse	273
A	Résultats annexes	277
A.1	Transformation de Lorentz	277
A.2	Caractérisation 2D de la propriété Ω -remplissant	279
A.3	Borner le domaine calcul avec des « Perfectly Matched Layers » ?	283
	Références	301

Table des figures

1.1	Échelle des bruits exprimés en décibels. Les exemples et les perceptions sont donnés à titre indicatif.	22
1.2	Schéma représentant le découpage en zones de différentes complexités physiques de l'écoulement d'air; 0 : effets thermiques et mécaniques; 1 : effets mécaniques non linéaires; 2 : effets acoustiques linéaires mais en interaction avec la vorticité; 3 : acoustique linéaire en écoulement potentiel; 4 : simple convection des ondes acoustiques, effet Doppler	25
1.3	Analogie de Lighthill : décomposition du domaine	41
3.1	écoulement cisailé	75
3.2	Illustration numérique de la solution du transport harmonique en écoulement cisailé.	76
3.3	Illustration numérique de la solution du transport harmonique dans une rotation solide.	78
4.1	Exemple d'écoulements porteur : cas directionnel (gauche) et domaine remplissant (droite). les lignes de courant sont représentées par des couleurs. Les lignes noires délimitent le domaine Ω	80
4.2	Cas \mathbf{v}_0 directionnelle – Représentation de $\Omega(x_1^*)$ de $P_{x_1^*}^0$	82
4.3	Paramétrisation du domaine $\Omega \setminus \mathcal{N}$ par Θ suivant le flot de \mathbf{v}_0 . La ligne blanche représente \mathcal{N} , négligeable.	86
5.1	Lignes de courant horizontales de l'écoulement uniforme $\mathbf{v}_0(x, y) = v_\infty \mathbf{e}_x$	98
5.2	Isovaleurs de $(x, y) \mapsto g(x, y)$ telle que la source soit $\mathbf{g} = (g, g)$ soit la source.	99
5.3	Isovaleurs de $\Re(\xi)$ représentés avec le maillage en triangles utilisé	99
5.4	$\Re(\xi_x)$ exacte et $\Re(\xi_x)$ obtenu par la méthode naïve : présence d'oscillations parasites : non-contrôle de $\ \partial_x \xi_{xh} - \partial_x \xi_x\ _L^2$	100
5.5	Zoom sur $\Re(\xi)$ et $\Re(\xi_h)$ obtenus par la méthode naïve : présence d'oscillations parasites légères	100
5.6	Lignes de courant en noir et isovaleurs du temps de parcours le long de ces lignes de courant en partant du bord entrant.	101
5.7	Lignes de courant en noir et isovaleurs du temps de parcours le long de ces lignes de courant en partant du bord entrant.	101
5.8	Isovaleurs de g telle que la source soit $\mathbf{g} = (g, g)$	101
5.9	Comparaison entre la solution exacte projetée sur le maillage et $\Re(\xi_x)$	102
5.10	Isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ et $\Re(\xi_y)$ obtenues avec les schémas, de haut en bas : LS et SUPG : $\delta = 10^{-1}, \delta = 10^{-2}, \delta = 10^{-3}, \delta = 10^{-4}$	105

5.11	$\Re(\xi_x)$ le long de la ligne $y = 0.25$. Comparaison des schémas LS (vert, très dissipé) et SUPG : pour $\delta = 10^{-1}$ (bleu), $\delta = 10^{-2}$ (orange), $\delta = 10^{-3}$ (rose) et $\delta = 10^{-4}$ (rouge).	106
5.12	Ligne de courant (en noir) et isovaleurs du temps de parcours le long de ces lignes de courant, partant du bord entrant.	107
5.13	Source	108
5.14	Isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ et $\Re(\xi_y)$, à la pulsation $\omega = 0.5$	109
5.15	Isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ et $\Re(\xi_y)$, à la pulsation $\omega = 0.25$	110
5.16	Ligne de courant en noir et isovaleurs du temps de parcours de ces lignes de courant en partant du bord entrant (bord vertical à gauche).	112
5.17	Source gaussienne.	112
5.18	Maillage en triangles (P1).	112
5.19	Isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ et de $\Re(\xi_y)$ pour $\omega = 0.5$. Lignes de courant en noir.	113
5.20	Étude de l'influence du paramètre δ sur un cas plus compliqué : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ pour, de haut en bas, $\delta = 10^{-3}$, $\delta = 10^{-4}$ et $\delta = 10^{-5}$	114
5.21	Écoulement potentiel autour d'un cylindre en rotation : isovaleurs du temps de parcours et lignes de courant (en noir) à gauche et source gaussienne à droite.	116
5.22	$\Re(\xi_x)$ et $\Re(\xi_y)$: explosion le long de la ligne partant du point d'arrêt, pour $\omega = 0.5$ et différents niveaux de saturation du jeu de couleurs.	116
5.23	$\Re(\xi_x)$ et $\Re(\xi_y)$: explosion le long de la ligne partant du point d'arrêt, pour $\omega = 0.1$	117
5.24	$\Re(\xi_x)$, pour $\omega = 0.1$ et de gauche à droite : $\delta = 10^{-1}$, $\delta = 10^{-3}$ et $\delta = 10^{-4}$	117
5.25	Source $\mathbf{g} = (g, g)$: isovaleurs de g . Quelques lignes de courant en blanc	118
5.26	Cas $b = 10$. Isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ à gauche et $\Re(\xi_y)$ à droite, à $\omega = 1$	119
5.27	Cas $b = 2.5$: le problème est mal posé, non convergence le long de la ligne $\{(r^* \cos(\theta), r^* \sin(\theta)) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ où $r \approx 2.1$	119
5.28	Isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ et $\Re(\xi_y)$ pour $\omega = 10.5 \notin \mathbb{Z}$ (en haut) et $\omega = 3.5 \notin \mathbb{Z}$ (en bas), l'équation est bien posée.	120
5.29	Isovaleurs de $\Re(\xi_x)$. Caractère mal posé à la fréquence $\omega = 10 \in \mathbb{Z}$. Lorsque le maillage est raffiné, il n'y a pas de convergence : à gauche 15×10^3 degrés de liberté, à droite 44×10^3 degré de liberté	121
6.1	Géométrie schématique pour l'étude théorique des équations de Goldstein	128
6.2	Frontière sortante avec écoulement uniforme à l'extérieur : $M_\infty \mathbf{e}$	133
6.3	Illustration de la perturbation d'une ligne de courant (en rouge) par l'ajout du terme $\eta \mathbf{w}_0$	144
7.1	Domaine intérieur Ω_i entouré de PML de largeur l_x et l_y pour former le domaine de calcul Ω . Dans $\Omega \setminus \Omega_i$, \mathbf{v}_0 est cisailé.	152
7.2	Profil de vitesse $y \mapsto v_0(y)$ du jet gaussien : courbe et isovaleurs.	157
7.3	Isovaleurs de la source dipolaire de Goldstein $f = D_\omega g_d$. Gauche : $\Re(f)$. Droite : $\Im(f)$	158
7.4	Comparaison des isovaleurs de $\Re(v_x)$, obtenus par différents codes : Goldstein (FEM-SUPG), Goldstein (FEM-dG, CERFACS)	159
7.5	Profil de vitesse $y \mapsto v_0(y)$ du jet gaussien : courbe et isovaleurs	159
7.6	Isovaleurs de la partie imaginaire de la source quadrupolaire de Goldstein $f = D_\omega g_q$. La partie réelle n'est pas représentée car négligeable : $\Re(f) \approx 0$	160

7.7	Comparaison des isovaleurs de $\Re(v_x)$ obtenues par résolution : des équations de Goldstein (code FEM-SUPG) en haut à gauche, des équations de Goldstein (code FEM-dG) en haut à droite et des équations de Galbrun (code FEM-dG CERFACS) en bas.	160
7.8	Profil et isovaleurs du jet gaussien utilisé (en haut), et de la source $\Re(f)$ (en bas).	162
7.9	Isovaleurs de $\Re(\varphi_x)$ pour deux pulsations : $\omega = 1$ et $\omega = 5$	163
7.10	Isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ pour deux pulsations : $\omega = 1$ et $\omega = 5$	163
7.11	Isovaleurs de $\Re(\xi_y)$ pour deux pulsations : $\omega = 1$ et $\omega = 5$	164
7.12	Isovaleurs de $\Re(\varphi)$ et de $\Re(\xi_x)$ pour $\omega = 10$ en présence d'un bord rigide (modèle d'aile d'avion).	165
7.13	Cas 1 – En haut, les isovaleurs de la norme de la vitesse $(x, y) \mapsto v_0(x, y) $ et lignes de courant en noir. En bas, les isovaleurs du temps de parcours le long des lignes de courant.	167
7.14	Cas 1 – Isovaleurs de la source f au second membre du couplage de Goldstein et lignes de courant (blancs).	168
7.15	Cas 1 – Isovaleurs du rotationnel de l'écoulement : $(x, y) \mapsto \omega_0(x, y) = \partial_x v_{0,y}(x, y) - \partial_y v_{0,x}(x, y)$	168
7.16	Cas 1 – Isovaleurs de $\Re(\varphi)$ pour plusieurs valeurs de pulsations, de haut en bas : $\omega = 2, 5, 10$	169
7.17	Cas 1 – Isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ (gauche) et de $\Re(\xi_y)$ (droite) pour plusieurs valeurs de pulsations, de haut en bas : $\omega = 2, 5, 10$	170
7.18	Cas 2 – En haut, les isovaleurs de la norme de la vitesse $(x, y) \mapsto v_0(x, y) $ et les lignes de courant en noir. En bas, les isovaleurs du temps de parcours le long des lignes de courant.	171
7.19	Cas 2 – Isovaleurs de la source f au second membre du couplage de Goldstein.	172
7.20	Cas 2 – Isovaleurs du rotationnel de l'écoulement $(x, y) \mapsto \omega_0(x, y) = \partial_x v_{0,y}(x, y) - \partial_y v_{0,x}(x, y)$	172
7.21	Cas 2 – Isovaleurs de $\Re(\varphi)$ pour plusieurs valeurs de pulsations, de haut en bas : $\omega = 2, 5, 10$	173
7.22	Cas 2 – Isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ (gauche) et de $\Re(\xi_y)$ (droite) pour plusieurs valeurs de pulsations, de haut en bas : $\omega = 2, 5, 10$	174
7.23	Cas 2 – Isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ pour $\delta = 10^{-4}$ trop petit : instabilités.	175
7.24	Jet Gaussien 1 : profil de l'écoulement du jet gaussien 1 (à gauche) et isovaleurs de $(x, y) \mapsto v_0(y)$ (à droite).	177
7.25	Jet Gaussien 1 : isovaleurs du rotationnel, $\omega_0(x, y) = v_0'(y)$	177
7.26	Jet Gaussien 1 : comparaison entre la formulation de Goldstein et le modèle potentiel pour $\Re(\varphi)$ à la pulsation : $\omega = 2$	178
7.27	Jet Gaussien 1 : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ et $\Re(\xi_y)$ à la pulsation : $\omega = 2$	179
7.28	Jet Gaussien 1 : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ en haut et courbe $y \mapsto \Re(\xi_x(x, y = 5.3))$, à la pulsation : $\omega = 2$	179
7.29	Jet Gaussien 1 : comparaison entre la formulation de Goldstein et le modèle potentiel pour $\Re(\varphi)$ à la pulsation : $\omega = 5$	180
7.30	Jet Gaussien 1 : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ et $\Re(\xi_y)$ à la pulsation : $\omega = 5$	180
7.31	Jet Gaussien 1 : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ en haut et courbe $y \mapsto \Re(\xi_x(x, y = 5.3))$, à la pulsation : $\omega = 5$	181
7.32	Jet Gaussien 1 : comparaison entre la formulation de Goldstein et le modèle potentiel pour $\Re(\varphi)$ à la pulsation : $\omega = 10$	181

7.33	Jet Gaussien 1 : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ et $\Re(\xi_y)$ à la pulsation : $\omega = 10$	182
7.34	Jet Gaussien 1 : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ en haut et courbe $y \mapsto \Re(\xi_x(x, y = 5.3))$, à la pulsation : $\omega = 10$	183
7.35	Jet Gaussien 1 : résumé des comparaisons entre la formulation de Goldstein et le modèle potentiel pour $\Re(\varphi)$ aux pulsations : $\omega = 2, 5, 10$	184
7.36	Jet Gaussien 1 : résumé des comparaisons de $\Re(\xi_x)$ aux trois pulsations : $\omega = 2, 5, 10$	185
7.37	Jet Gaussien 2 : profil de l'écoulement du jet gaussien 1 (à gauche) et isovaleurs de $(x, y) \mapsto v_0(y)$ (à droite).	186
7.38	Jet Gaussien 2 : isovaleurs du rotationnel, $\omega_0(x, y) = v_0'(y)$	186
7.39	Jet Gaussien 2 : comparaison entre la formulation de Goldstein et le modèle potentiel pour $\Re(\varphi)$ à la pulsation : $\omega = 2$	187
7.40	Jet Gaussien 2 : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ et $\Re(\xi_y)$ à la pulsation : $\omega = 2$	188
7.41	Jet Gaussien 2 : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ en haut et courbe $y \mapsto \Re(\xi_x(x, y = 5.3))$, à la pulsation : $\omega = 2$	188
7.42	Jet Gaussien 2 : comparaison entre la formulation de Goldstein et le modèle potentiel pour $\Re(\varphi)$ à la pulsation : $\omega = 5$	189
7.43	Jet Gaussien 2 : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ et $\Re(\xi_y)$ à la pulsation : $\omega = 5$	190
7.44	Jet Gaussien 2 : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ en haut et courbe $y \mapsto \Re(\xi_x(x, y = 5.3))$, à la pulsation : $\omega = 5$	190
7.45	Jet Gaussien 2 : comparaison entre la formulation de Goldstein et le modèle potentiel pour $\Re(\varphi)$ à la pulsation : $\omega = 10$	191
7.46	Jet Gaussien 2 : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ et $\Re(\xi_y)$ à la pulsation : $\omega = 10$	192
7.47	Jet Gaussien 2 : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ en haut et courbe $y \mapsto \Re(\xi_x(x, y = 5.3))$, à la pulsation : $\omega = 10$	192
7.48	Jet Gaussien 2 : résumé des comparaisons entre la formulation de Goldstein et le modèle potentiel pour $\Re(\varphi)$ aux pulsations : $\omega = 2, 5, 10$	193
7.49	Jet Gaussien 2 : résumé des comparaisons de $\Re(\xi_x)$ aux trois pulsations : $\omega = 2, 5, 10$	194
7.50	Comparaison de l'inconnue pression $\Re(p)$ à la pulsation $\omega = 2$ et pour le cas du jet 2	196
7.51	Comparaison de l'inconnue pression $\Re(p)$ à la pulsation $\omega = 10$ et pour le cas du jet 2	196
7.52	Comparaison de l'inconnue vitesse selon e_x : $\Re(v_x)$, à la pulsation $\omega = 2$, pour le cas du jet 2.	197
7.53	Comparaison de l'inconnue vitesse acoustique selon e_x : $\Re(v_x)$, à la pulsation $\omega = 10$ et pour le cas du jet 2.	197
8.1	Géométrie de la couronne.	202
8.2	Constante $C(v_0, \omega)$ de l'estimation a priori en bleu dans le cas d'un fluide en rotation solide. En rouge, l'ensemble des résonances \mathcal{K}_{res}	216
8.3	Projection des segments $n[a/r_e^2, a/r_i^2]$, $n \in \mathbb{Z}$ pour former l'ensemble des résonances \mathcal{K}_{res} dans le cas d'un écoulement irrotationnel dans la couronne.	218
8.4	Constante $C(v_0, \omega)$ de l'estimation a priori en bleu dans le cas d'un fluide en rotation solide. En rouge, l'ensemble des résonances \mathcal{K}_{res}	218
8.5	Projection des segments $\text{Im}(\pm\Omega_0^* + n\Omega_0)$, pour $n \in \mathbb{Z}$, dans le cas d'un écoulement irrotationnel perturbé, dans une couronne.	219

8.6	Profil de vitesse $v_0(r)$ du tourbillon de Lamb-Oseen en vert et de son rotationnel $\omega_0(r)$ en rouge.	220
8.7	Projection des segments $\text{Im}(\pm\Omega_0^* + n\Omega_0)$, pour $n \in \mathbb{Z}$, dans le cas du tourbillon de Lamb-Oseen.	221
8.8	Intersection de la droite d'équation $x = \omega$, où $\omega = 0.24$, avec les segments $\text{Im}(\pm\Omega_0^* + n\Omega_0)$. À droite : zoom	223
8.9	Pulsation fixée à $\omega = 0.24$. Gauche : en rouge, les lignes résonantes $\{(r^*, \cos \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ correspondantes à $\Delta_\omega(r^*) = 0$. Droite : en bleu, la courbe $r \mapsto \Delta_\omega(r) $, s'annulant aux $r = r^*$, rayons correspondant aux lignes résonantes.	224
8.10	Augmentation du nombre de lignes résonantes lorsque la pulsation augmente. Chaque ligne correspond à une pulsation : $\omega = 0.06, 0.2, 1$. De gauche à droite : 1) lignes résonantes en rouge $\{(r_i^*, \theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}$; 2) courbe $r \mapsto \Delta_\omega(r) $ tracée en bleu et $\{y = 0\}$ en rouge, 3) les $\text{Im}(\pm\Omega_0^* + n\Omega_0)$	225
9.1	Schéma représentant les singularités z_ε^n déplacées dans le plan complexe, selon si elles sont localement de partie imaginaire positive ou négative.	251
9.2	Choix des coupures \mathbb{D}_ε , selon si la singularité déplacée z_ε^n se situe dans $\{z : \Re(z) < 0\}$ (gauche) ou $\{x : \Re(z) > 0\}$ (droite), ne devant pas couper l'intervalle $]r_i, r_e[$. La droite violette intersecte $]r_i, r_e[$ et correspondrait à un mauvais choix de coupure.	255
9.3	Boule $B(r^n, \eta)$ contenue dans toutes les boules $B(z_\varepsilon^n, R_a^n)$ pour ε assez petit	262
9.4	$\Re(\varphi_\varepsilon^n)$ et $\text{Im}(\varphi_\varepsilon^n)$ (haut, zoom en bas) : illustration d'une résonance du transport en $r^n = 2$ obtenue numériquement par résolution d'une équation modale par éléments finis 1D en présence d'absorption pour différents niveaux d'absorption : $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}, 10^{-3}, 5 \times 10^{-4}, 10^{-4}, 5 \times 10^{-5}$	269
9.5	$\Re(\varphi_\varepsilon^n)$ et $\text{Im}(\varphi_\varepsilon^n)$ (haut et bas) : illustration d'une résonance du transport en $r^n = 2$ obtenue numériquement par résolution d'une équation modale par éléments finis 1D en présence d'absorption pour différents niveaux d'absorption : $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$	270
9.6	$\Re(p_\varepsilon^n)$ et $\text{Im}(p_\varepsilon^n)$ (haut et bas) : illustration d'une résonance critique en $r^n = 2$ obtenue numériquement par résolution d'une équation modale par éléments finis 1D en présence d'absorption pour différents niveaux d'absorption : $\varepsilon = 5 \times 10^{-2}, 10^{-2}, 5 \times 10^{-3}, 10^{-3}, 5 \times 10^{-4}$	271
A.1	Paramétrisation locale de Ω au voisinage de $\mathbf{x}_b \in \partial\Omega$	281
A.2	Description du domaine pour l'étude avec PML	284

Introduction générale de la thèse

Ce manuscrit résulte des travaux effectués dans le cadre d'une thèse CIFRE issue de la collaboration entre l'unité de recherche « Propagation des Ondes : Étude Mathématique et Simulation » (POEMS) de l'« Unité de Mathématiques Appliquées » (UMA) de l'ENSTA ParisTech et le service « Virtual Product Engineering » de l'industriel Airbus Group.

La problématique du bruit fait par les avions est un des enjeux majeurs de l'industrie aéronautique, aujourd'hui ainsi que pour les années à venir. L'augmentation du trafic aérien et l'urbanisation croissante des pays poussent les compagnies aériennes et les législateurs à être de plus en plus exigeants à propos de la pollution sonore. C'est dans ce contexte que le département « Virtual Product Engineering » d'Airbus travaille au développement d'outils permettant le calcul du rayonnement acoustique émis par les réacteurs ou diverses sources de nuisances sonores.

Notre travail porte sur l'analyse mathématique et numérique de la résolution du problème de rayonnement acoustique dans un fluide en écoulement. Le but est le calcul efficace et précis du bruit rayonné par un turbo-réacteur en marche alors que l'avion est en phase de vol ou de décollage. Airbus produit déjà un logiciel, Aseris, permettant d'effectuer ces calculs dans un cas simplifié d'écoulement. Nous cherchons à étendre ce code de calculs pour prendre en compte une plus grande catégorie d'écoulements, plus réalistes. Dans Aseris, l'écoulement porteur dans lequel se déplacent les ondes acoustiques est modélisé par un écoulement irrotationnel. Cette modélisation aboutit à résoudre des équations de type Helmholtz convectée portant sur une inconnue scalaire appelée potentiel acoustique. Nous nous intéressons dans cette thèse à la formulation de Goldstein des équations de l'aéroacoustique, qui traite du cas plus général de la propagation en écoulement rotationnel.

Bien qu'équivalente aux équations d'Euler linéarisées, souvent utilisées dans le domaine temporel notamment, cette formulation a l'avantage de pouvoir être plus naturellement considérée comme une perturbation du modèle potentiel, c'est-à-dire de l'équation d'Helmholtz convectée, bien connue d'un point de vue théorique et numérique, à laquelle elle se ramène lorsque l'écoulement porteur est potentiel. Cette perturbation est caractérisée par l'ajout d'une inconnue supplémentaire, dite hydrodynamique, vérifiant une équation de type transport harmonique. Cette inconnue permet de prendre en compte les effets linéaires du couplage entre l'acoustique et les effets hydrodynamiques, présents dès que l'écoulement porteur est rotationnel. Cette inconnue hydrodynamique n'est présente que dans les zones rotationnelles de l'écoulement. Ces zones sont en général restreintes, limitées autour du réacteur de l'avion et dans le jet que provoque ce dernier. C'est pourquoi le modèle potentiel est souvent utilisé, en supposant que l'erreur commise est faible. En particulier, Airbus possède déjà des moyens de calcul pour la résolution de l'équation d'Helmholtz convectée.

Le but de cette thèse est donc l'analyse et la résolution numérique de la formulation de Goldstein en régime harmonique, intégrée dans le code Actipole (Aseris) d'Airbus Group, afin de prendre en compte la partie rotationnelle de l'écoulement jusque là négligée.

Ce travail s'inscrit naturellement dans une activité de recherche autour de l'aéroacoustique. Chez Airbus par exemple, elle fait suite à la thèse de F. Casenave [1] qui étudie en particulier le couplage entre les équations intégrales utilisées pour la propagation acoustique en écoulement uniforme lorsque l'on est suffisamment loin de l'avion avec l'équation d'Helmholtz convectée dans la zone plus proche où l'écoulement est supposé être potentiel. Du côté du laboratoire POEMS, l'étude du modèle de Goldstein s'inscrit dans l'étude de formulations alternatives aux classiques équations d'Euler linéarisées, comme la formulation de Galbrun qui a fait l'objet des thèses de G. Legendre [2] et d'É. Peynaud notamment [3] par exemple.

Ce manuscrit est composé de quatre parties que nous décrivons brièvement.

Introduction à l'aéroacoustique en aéronautique et présentation des équations de Goldstein. Dans cette première partie nous exposerons le contexte et la problématique industriels. Puis, nous nous attacherons à décrire les choix de modélisation physique de l'écoulement autour de l'avion ainsi que le cadre de la propagation acoustique que nous étudions. Nous aboutissons alors aux équations d'Euler linéarisées (LEE), régissant l'évolution des perturbations acoustiques d'un écoulement porteur satisfaisant les équations d'Euler stationnaires.

Nous décrivons ensuite l'approche de modélisation adoptée chez Airbus, qui consiste en un couplage entre zones de différentes complexités de l'écoulement porteur : écoulement uniforme, potentiel, rotationnel, turbulent etc. Cette thèse se focalise sur la modélisation d'une de ces zones, où l'écoulement porteur ne peut pas être supposé irrotationnel. Nous présenterons alors comment aboutir à une formulation équivalente aux équations d'Euler linéarisées, la formulation de Goldstein, dont nous discuterons quelques propriétés qui la rendent attractive dans le cadre industriel décrit ci-avant.

Analyse d'une équation de transport en régime harmonique. Les équations de Goldstein consistent en un couplage entre l'équation d'Helmholtz convectée du modèle potentiel et une équation de transport vectorielle harmonique. Dans cette deuxième partie, nous analysons cette équation de transport vectorielle harmonique. Nous proposons dans un premier temps de nous placer dans le cadre de l'étude d'un écoulement « domaine-remplissant » permettant de garantir le caractère bien posé de cette équation. Nous verrons qu'en effet, pour certaines géométries d'écoulements, l'équation de transport est mal posée.

Étude des équations de Goldstein en écoulement domaine-remplissant. La troisième partie est dédiée à l'étude des équations de Goldstein. Nous appliquerons les résultats obtenus à la partie précédente sur l'équation de transport harmonique au couplage de Goldstein. Notre approche est perturbative : il s'agit de voir les équations de Goldstein comme celle du modèle potentiel perturbée par l'équation de transport harmonique étudiée dans la partie précédente. Nous nous plaçons donc dans le cadre d'un écoulement domaine-remplissant afin de pouvoir résoudre l'équation de transport et d'exprimer l'inconnue hydrodynamique en fonction du potentiel acoustique. Nous verrons alors qu'à faible rotationnel et munies de conditions aux limites absorbantes approchées que nous présenterons, les équations de Goldstein héritent d'une partie des propriétés de l'équation d'Helmholtz convectée, en particulier son caractère Fredholm.

Étude des équations de Goldstein en écoulement circulaire. Pour terminer et pousser plus loin notre étude, nous souhaitons sortir du cadre des écoulements domaine-remplissant présentés à la partie précédente. L'étude de l'équation de transport harmonique ou des équations de Goldstein dans cadre général apparaissant trop difficile, nous nous concentrons sur l'analyse du cas d'une famille d'écoulements particuliers, recirculant dans une couronne, représentant un cas typique où l'hypothèse de l'écoulement domaine-remplissant échoue. Bien que cette géométrie modèle ne soit pas réaliste d'un point de vue industriel, elle nous permet d'investiguer les propriétés de résonances des équations de Goldstein en présence de recirculations. Nous analyserons l'équation de transport harmonique ainsi que le couplage de Goldstein hors résonance dans un premier temps puis nous proposerons une approche par absorption limite dans les cas résonants.

Première partie

Introduction à l'aéroacoustique en aéronautique et présentation des équations de Goldstein

Chapitre 1

Modélisation de l'aéroacoustique et contexte industriel

1.1 La problématique industrielle	21
1.1.1 Un problème d'ingénierie en milieu industriel : « le bruit d'un aéronef »	21
1.1.2 Connaissance <i>a priori</i> des sources de bruit et d'écoulement	24
1.1.3 Quantités d'intérêt et conséquences sur le choix de modèles	27
1.1.4 Modèles de fluides porteurs et critères de sélection	28
1.2 Modélisation de l'écoulement	30
1.2.1 Les équations de la mécanique des fluides	31
1.2.2 Les hypothèses thermodynamiques	33
1.2.3 La vorticité de l'écoulement	35
1.2.4 Résumé des équations	39
1.3 Le problème de la propagation acoustique en écoulement	40
1.3.1 Séparation entre zones turbulentes et zones de propagation acoustique	40
1.3.2 L'aéroacoustique linéaire : linéarisation des équations d'Euler autour d'un écoulement porteur	42

1.1 La problématique industrielle

Commençons par décrire le contexte de la modélisation aéroacoustique dans l'industrie aéronautique.

1.1.1 Un problème d'ingénierie en milieu industriel : « le bruit d'un aéronef »

Au tournant des années 2000, l'aéronautique civile s'est vu fixer des objectifs concernant son impact environnemental, lesquels se déclinent en une série de défis technologiques difficiles à relever. En particulier, celui concernant la contrainte sonore consiste à diminuer de façon très significative le bruit autour des aéroports et, de manière générale, au-dessus des zones habitées.

Du point de vue des ingénieurs, cette contrainte doit être traduite en terme de puissance acoustique reçue par l'oreille humaine et peut rendre imparfaitement compte de la notion réelle de nuisance, qui relève d'un aspect psycho-acoustique, l'oreille ayant un comportement complexe vis-à-vis des fréquences. En effet, la notion de gêne dépend des individus et des fréquences perçues. Cependant, c'est sur des quantités relatives au « niveau moyen » sur une bande de fréquences, mesurées ou calculées à une distance donnée des zones aéroportuaires, que doivent être traduits les concepts de réduction de bruit.

La perception « grand public » du bruit est souvent synthétisée par le graphe de la figure 1.1. En réalité, le niveau de bruit très proche des sources moteur avoisine les 180 dB (A). Fort heureusement, la pression acoustique décroît en fonction de la distance. Malgré cela, cette illustration, qui ne précise ni la distance à l'avion, ni la bande de fréquences utilisée, montre néanmoins que l'aéronef au décollage est un des exemples les plus « bruyants » dans les nomenclatures de seuils de pénibilité au bruit.



FIGURE 1.1 – Échelle des bruits exprimés en décibels. Les exemples et les perceptions sont donnés à titre indicatif.

L'industrie aéronautique a décomposé cette problématique en trois parties, chacune correspondant de facto à un acteur du monde aéronautique :

1. À la charge des fabricant de moteurs. Les moteurs sont les sources de bruit a priori les plus importantes, au moins dans les phases de décollage lorsqu'ils fonctionnent à plein puissance.
2. À la charge du fabricant de l'aéronef. Les formes géométriques de l'aéronef sont également créatrices de sources de bruit, l'optimisation du design est de la responsabilité du fabricant de l'aéronef.
3. À la charge de l'Aviation Civile. Le temps de survol des zones habitées à basse altitude dépend des trajectoires suivies par l'aéronef, tant au décollage qu'à l'atterrissage ainsi que de leur cadence. Ces aspects sont du ressort du domaine du « Air Traffic Management ».

Le travail exposé dans ce document se situe au niveau des besoins en optimisation du design de l'aéronef. Deux solutions principale se présentent à l'ingénieur :

1. Atténuer les ondes produites par les sources de bruits au cours de la propagation. Par exemple, en utilisant des matériaux absorbants et optimiser leur positionnement.
2. Dévier les ondes dans des directions où ne se trouvent pas les riverains. Les possibilités sont par contre très limitées dans ce cas car les seuls « masquages naturels » sont ceux liés à la structure de l'aéronef.

Ces optimisations de design doivent de plus prendre en compte qu'il existe d'autres contraintes d'optimisation. En particulier, les formes géométriques de l'avion sont d'abord optimisée pour les performances aérodynamiques.

En conséquence, Airbus se retrouve confronté au problème pratique suivant : « étant donné un ensemble de sources acoustiques localisées sur et au voisinage de la structure de l'aéronef, existe-t-il un design plus favorable que les autres pour atténuer et dévier les ondes acoustiques? ». Ce travail présente une approche numérique ayant pour but, une fois mise en application, non de calculer le niveau de bruit absolu créé par un avion, mais de calculer celui de la différence relative entre deux designs – et ensemble d'hypothèses associées.

Pourquoi est-il difficile – voire illusoire – de chercher à calculer la valeur absolue du niveau sonore produit par un aéronef? Pour donner des éléments de réponse, tentons de faire la liste des « méconnaissances » que les ingénieurs recensent habituellement :

- la principale quantité présentant des incertitudes importantes est la source du bruit : le bruit de combustion est un challenge scientifique qui occupe des équipes de recherche depuis des dizaines d'années; la prédiction des sources de bruit aérodynamiques est également un challenge non résolu actuellement et que l'on ne pourra certainement pas relever dans les années qui viennent; on devra donc faire des hypothèses à partir des expériences et calculs disponibles;
- l'écoulement fluide autour de la structure est également une donnée très difficile à obtenir avec une précision importante; les détails sur l'avion créent des phénomènes locaux très difficiles à capter; quant aux configurations de type trains d'atterrissage sortis et volets sustentateurs déployés, des hypothèses simplificatrices sont systématiquement utilisées pour pouvoir faire des prédictions;
- les géométries sont elles-mêmes connues avec une certaine précision (elles se déforment significativement en fonction des charges aérodynamiques);
- les régimes des moteurs (qui génèrent les sources de bruit de combustion et celles des parties tournantes) varient en fonction des procédures de l'exploitation, de l'usure du moteur, etc;
- la propagation du bruit dépend des conditions atmosphériques;
- l'atténuation potentielle du bruit dépend de la qualité des matériaux mis sur l'avion analysé, des réparations subies;
-

Pourtant, l'expérience intuitive que l'on peut faire au voisinage de chaque aéroport est qu'une certaine « ressemblance » sonore existe entre les avions d'une même famille et, un amateur d'aviation fera une corrélation facile entre le niveau de bruit qu'il perçoit et la date de conception de l'aéronef (les avions d'avant les années 80, ceux d'entre les années 80 et

2000, et les avions récents ayant des moteurs « à grand taux de dilution », c'est-à-dire de grand diamètre). En revanche, il est impossible de reconnaître un A320 d'Air France ou un A320 d'Easy Jet, s'ils sont de même conception et il faudra être un expert de GE ou de Rolls Royce pour percevoir le type de moteur monté sur l'avion en question.

L'explication est assez simple : un observateur est toujours placé à plusieurs centaines de mètres, voire à des kilomètres de l'avion, et le phénomène de propagation « lisse » les petites différences qui sont produites au niveau du moteur et par des détails de l'aéronef, au fur et à mesure que l'onde se propage. Le besoin industriel normatif est relatif au bruit « en champ lointain » créé par l'avion. Cependant, pour bien comprendre et tirer parti du design de l'avion, il pourra être intéressant de calculer dans une zone proche de celui-ci, dans un endroit où il est très difficile de placer des capteurs pour un essai réel.

En reprenant les sources des principales incertitudes, la méthodologie suivie par les ingénieurs conduit à remarquer :

- Le problème de propagation des sources, mêmes mal connues, reste linéaire par rapport à celles-ci. Pour comparer deux configurations, on pourra donc faire des hypothèses simplificatrices sur ces sources de bruits (position, spectre, intensité, corrélation, etc) à condition de poser exactement les mêmes sur les configurations à analyser.
- La méconnaissance relative à la prise en compte de l'écoulement est bien plus difficile à gérer industriellement et l'essentiel de ce travail de recherche est consacré à proposer une méthodologie (avec le logiciel correspondant) ;
- Les autres sources de méconnaissance ne sont pas réductibles (il faut ajouter des données statistiques si on veut affiner le résultat), et on fera des simulation sur une configuration donnée (géométrie, matériaux, configurations environnementales).

En résumé, c'est le besoin d'optimiser des configurations d'avion, dans le but de sélectionner les designs d'intégration des parties génératrices de bruit (moteurs, carénage de trains d'atterrissage, etc) qui est à l'origine de ce travail de recherche. Or ces configurations sont différenciées par le niveau de pression acoustique rayonnée en champ lointain (plusieurs centaines de mètres). En pratique, on cherche à distinguer de manière « fiable » deux configurations dont le niveau sonore diffère de 1 à 2 dB. On verra que cet objectif est un challenge scientifique et numérique très difficile à relever, au vu de la complexité de la physique et des connaissances approchées dont nous disposons sur plusieurs paramètres.

1.1.2 Connaissance *a priori* des sources de bruit et d'écoulement

Du point de vue acoustique, on peut considérer que le problème se pose de la manière suivante. Des sources acoustiques sont créées, puis se propagent et interagissent avec le voisinage (milieu ambiant, structure de l'aéronef) et enfin, au loin, se reforment en ondes localement planes qui sont perçues par l'oreille ou le capteur de mesure. En réalité, il est nécessaire de regarder plus en détail l'interaction des ondes et du fluide dans lequel elles se propagent. En effet, le fluide est localement en déplacement, ainsi que les sources de bruit et que ce déplacement est susceptible de créer des sources de bruit. La connaissance *a priori* des ingénieurs conduit à proposer un découpage de l'espace autour de l'aéronef en cinq zones traduisant des complexités différentes du comportement du fluide (et des sources qui peuvent y exister).

Sur le schéma de la figure 1.2, on illustre cette décomposition qui reflète que la complexité de l'écoulement varie très fortement selon que l'on soit proche ou pas de l'avion.

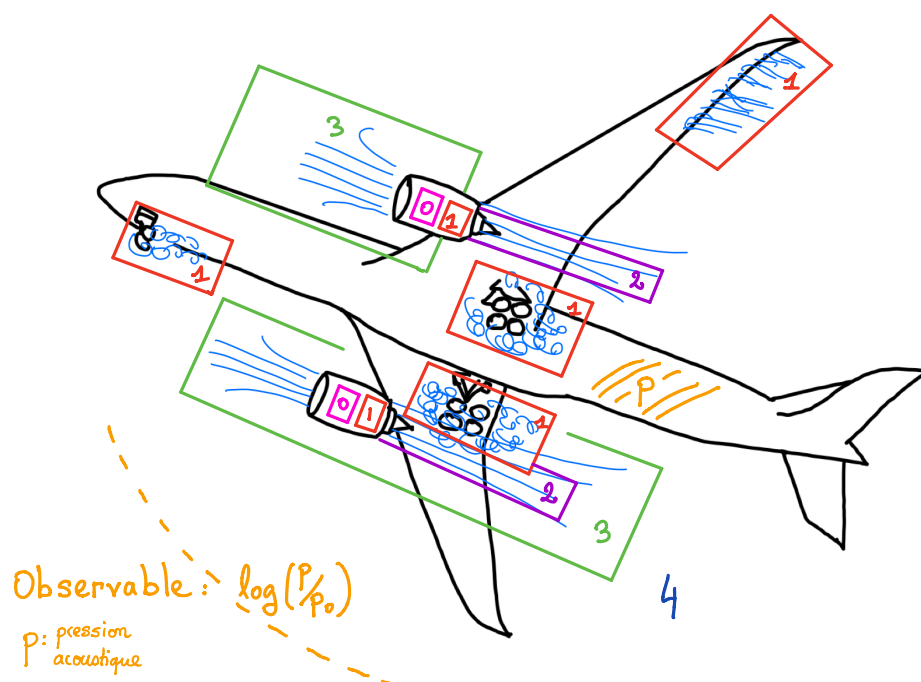


FIGURE 1.2 – Schéma repr esentant le découpage en zones de diff erentes complexit es physiques de l'écoulement d'air ; 0 : effets thermiques et mécaniques ; 1 : effets mécaniques non linéaires ; 2 : effets acoustiques linéaires mais en interaction avec la vorticité ; 3 : acoustique linéaire en écoulement potentiel ; 4 : simple convection des ondes acoustiques, effet Doppler

Zone 0 : création de sources mécaniques et de sources de combustion. Cette situation se retrouve typiquement dans la zone interne des moteurs (moteurs principaux, APU, conditionnement d'air, etc). Dans ces zones très localisées, les pales génèrent un bruit mécanique dans des conditions thermiques qui peuvent être élevées et qui interagissent avec un fluide très inhomogène. La périodicité géométrique des pales et leur rotation vont conduire à observer un bruit de type « modal » et des raies spectrales dont l'étalement dépend d'un grand nombre de paramètres technologiques. À une échelle plus petite encore, dans les chambres de combustion elles-mêmes, le phénomène physico-chimique dégage chaleur et bruit, ce bruit étant de type large bande au sens acoustique. Du point de vue purement acoustique, on peut remplacer ce qui se passe dans cette zone 0 par un ensemble de sources équivalentes – en ne regardant pas l'aspect propagatif séparément et en « homogénéisant » le phénomène de création et d'interaction avec le fluide dans cette zone ; c'est donc un principe d'équivalence si l'on choisit des sources disposées sur la surface du volume englobant cette zone, par exemple.

Zone 1 : création de sources aérodynamiques. Les sources aérodynamiques peuvent être multiples sur l'avion : autour des trains d'atterrissage, en bout d'aile, dans les zones de sustentateur, autour des détails géométriques comme les antennes ... Dans ces zones, le fluide est agité et son comportement est complexe, fortement instationnaire et avec une composante aléatoire probablement importante – il faut penser à ce qui se produit autour d'un train d'atterrissage. Des oscillations locales de la pression se forment, créant ainsi des sources acoustiques a priori large bande du point de vue du contenu spectral. Celles-ci sont, assez difficiles à caractériser, mais très importantes pour prédire le bruit à l'intérieur de la cabine. Néanmoins, elles jouent un rôle non-négligeable en champ lointain et sont même les principales sources de nuisance sonore perçue à l'atterrissage, quand le moteur est à très faible régime. Comme précédemment, on peut réduire cette zone en ne considérant que des sources équivalentes sur son pourtour ou en volume (voir l'approche pionnière de Lighthill décrite pour introduire à l'aéroacoustique au paragraphe 1.3.1)

Dans ce travail, nous ne nous intéressons pas à la caractérisation de ces sources acoustiques : elles sont vues comme des données du problème.

Zone 2 : propagation dans un fluide rotationnel. Regardons, par exemple, la zone avale au moteur, là où l'air comprimé et contenant le résidu de la combustion est expulsé. Le fluide est grossièrement composé de deux jets quasi circulaires avec des températures extrêmement différentes (très chaud pour les gaz issus de la chambre de combustion, plus froid pour le jet entourant le premier, issu uniquement de la partie « dilution ». À la frontière de ces deux jets, une zone de mélange se crée, produisant localement des parties de fluide rotationnelles. Si des sources de bruit étaient également créées, on les ramènerait dans la zone thématique 1. On ne s'intéresse plus ici qu'à la propagation. En traversant ces zones rotationnelles, une onde se propageant est probablement fortement déformée (les gradients de température et de vitesse sont susceptibles de faire de grandes variations de densité et donc de « vitesse du son »); cette déformation très locale a un effet sur le rayonnement acoustique que l'on va chercher à évaluer. Le travail contenu dans ce document traite spécifiquement de ce modèle.

Zone 3 : propagation dans un fluide potentiel. Un peu plus loin des moteurs, le fluide peut probablement être considéré comme proche d'un écoulement potentiel. L'onde acoustique « voit » que le fluide n'est pas homogène et les fronts d'onde se déforment (la dé-

formation n'est pas localisée, elle se propage). Un tel modèle a été largement traité dans la littérature ; il sert de base aux développements et aux points de comparaison du travail réalisé dans ce document.

Zone 4 : propagation dans un fluide uniforme. Encore plus loin de tout obstacle, le fluide présente un comportement probablement très voisin de celui d'un fluide homogène ; la propagation de l'onde est rectiligne dans le cadre « fluide au repos. » Elle reste rectiligne dans le cadre fluide homogène en mouvement rectiligne uniforme moyennant une transformation de Lorentz en espace, qui permet de retrouver le phénomène « Doppler », bien connu d'un observateur au sol écoutant passer un avion en mouvement.

Remarque 1.1.1. *Actuellement, chez Airbus, la modélisation de la zone 3 et 4 est maîtrisée via l'implémentation dans le code de calcul Aseris*

- d'une formulation intégrale dans la zone 4;
- et d'une formulation volumique potentielle couplée à la formulation intégrale pour la zone 3 par l'interface entre ces zones.

En réalité et opérationnellement, si les ingénieurs ont un a priori pour classer les phénomènes en plusieurs zones, comme cela vient d'être décrit, leur connaissance pratique, permettant de définir la taille de chacune de ces zones, est en revanche bien plus faible et les « heuristiques » rencontrées sont bien souvent le résultat des contraintes de puissance de calcul disponibles plutôt que des connaissances établies.

En résumé, les contraintes industrielles imposées à notre travail de recherche vont nous pousser à développer une méthodologie et un logiciel capable de simuler la propagation dans les zones 2, 3 et 4 avec un temps de restitution « raisonnable ». Pour cela, on regardera à quelles conditions on peut considérer la zone 2 soit comme étant petite, soit comme étant une perturbation locale d'une méthode potentielle, comme en zone 3, soit les deux.

1.1.3 Quantités d'intérêt et conséquences sur le choix de modèles

Comme nous l'avons décrit précédemment, le challenge scientifique semble difficile à relever : beaucoup de paramètres sont mal connus et un objectif de précision exigeant est nécessaire afin d'établir une distinction entre des solutions technologiques, quant à leur performance acoustique.

Néanmoins, tous les experts insistent sur le fait que les observables à calculer sont en général des post-traitements de la pression acoustique à évaluer « loin des sources et de l'avion ». Par exemple lorsque l'on considère un diagramme de rayonnement « à l'infini » en fonction de l'angle d'observation, ou la valeur du champs de pression acoustique, en dB, à des points de certifications situés dans une zone où en pratique les ondes peuvent être déjà considérées comme sphériques. Ce constat ouvre la voie à une méthodologie dans laquelle on exploite les faits suivants.

- La principale source de méconnaissance et de difficulté pratique réside dans le « fluide ».
- L'observable étant en champ lointain, on sait qu'une approximation locale sur le fluide, qui conduirait à une petite erreur sur la valeur locale de la pression, aura un impact faible sur la valeur du champ lointain, parce que le passage de champs proches à champs lointains « régularise » la pression acoustique que l'on cherche à calculer ;

- la nature du post-traitement (utilisation d'une échelle logarithmique et moyenne sur des bandes de fréquence) « régularise » la quantité d'intérêt, en gommant les effets locaux en espace en fréquence.

Néanmoins, on sait que négliger le mouvement du fluide conduit à supprimer l'effet Doppler : ce n'est pas une approximation acceptable. On a pu constater également que, sur le rayonnement acoustique de certaines configurations, on est capable de mettre en évidence une différence de quelques dB (environ 2 dB), entre une modélisation du fluide par écoulement moyen, considéré homogène (zone 4 uniquement), et une approximation locale du fluide par écoulement potentiel (zone 3 entourée par une zone 4). Il s'agit d'une différence suffisamment grande (au regard des méconnaissances) pour impacter des décisions de designs, pour qu'on en tienne compte.

En résumé, le choix des observables (lointains, moyennés et logarithmiques), les méconnaissances du problème (sources et fluide), le souhait de faire une modélisation, incluant les trois zones, justifient l'approche de prise en compte d'un écoulement rotationnel par une méthode de perturbation. Elle permettra d'apprécier le niveau de contribution du à ces perturbations et, à terme, permettra de définir la modélisation optimale pour ce type de problème.

1.1.4 Modèles de fluides porteurs et critères de sélection

Lorsque l'on s'intéresse à la propagation de sources acoustiques données, les choix de simplifications possibles dans la modélisation de l'écoulement porteur sont contraints par la puissance de calcul disponible.

Pour comprendre ces difficultés numériques, illustrons les grandeurs acoustiques typiques du problème. La taille des domaines considérés, comprenant l'avion, de quelques dizaines de mètres, ou les moteurs, dont certains détails géométriques sont de l'ordre de la dizaine de centimètres, sont à analyser en fonction des longueurs d'onde acoustiques. Par exemple, autour de 5kHz, la longueur d'onde est décimétrique, impliquant que l'entrée d'air d'un moteur fait déjà plusieurs dizaines de longueurs d'onde. Les jets derrière les moteurs ont également des tailles qui se mesurent en mètres.

Les ordres de grandeurs des fluctuations de vitesse du fluide sont bien plus difficiles à caractériser, mais elles vont de quelques dixièmes de longueur d'onde (imaginons les tourbillons créés derrière un obstacle) à plusieurs longueurs d'onde (imaginons cette fois les volutes loin derrière l'avion). Toutes n'ont pas le même impact sur la propagation acoustique et il convient de faire des approximations sous la contrainte de nos moyen de calcul pour investiguer leur contribution.

Par exemple, si l'on approxime l'écoulement autour de l'avion par un écoulement moyen uniforme (Mach constant correspondant à la vitesse de déplacement de l'avion), on dispose de méthodes numériques efficaces qui prennent en compte l'ensemble des phénomènes de réflexions, diffractions, ondes de surface, ondes guidées et interactions entre ces phénomènes sur de grandes distances au loin de l'avion. Il s'agit par exemple de représentations par équations intégrales, dont la résolution numérique peut être accélérée par des algorithmes rapides, tels que la FMM, voir par exemple [4], ou l'utilisation de \mathcal{H} -matrices, voir [5]. Le calcul de configurations réalistes conduit assez rapidement à des problèmes dont la taille est de plusieurs dizaines de millions (matrices complexes, symétriques mais pleines) : ce qui

constitue déjà un défi de calcul haute performance. Cependant, les coûts de calcul sont compatibles avec les moyens de l'ingénierie d'Airbus et les connaissances produites valent l'investissement fait puisque un calcul prend quelques heures sur quelques dizaines de noeuds de calculateur, moins d'une nuit en tout cas, ce qui est le rythme de restitution acceptable au bureau d'étude).

Pour étudier l'influence de la prise en compte du caractère non uniforme de l'écoulement, par exemple en utilisant une modélisation potentiel de celui-ci, une méthode de couplage peut être mise en oeuvre entre la zone où l'on introduit cette modélisation et la zone où l'on reste avec la modélisation par un écoulement uniforme. Les formulations intégrales ne sont alors plus valables dans la zone d'écoulement potentiel, elle est donc traitée par des méthodes d'éléments finis classiques. Hors de cette zone, l'écoulement redevenant uniforme, les équations intégrales peuvent néanmoins être utilisées pour borner le domaine de calcul et continuer à permettre des calculs de rayonnement en champs lointain. Le système matriciel obtenu est celui d'un couplage FEM/BEM (Finite Elements Method / Boundary Elements Method). Il est creux pour la partie volumique et plein pour la partie surfacique. La performance algorithmique est alors significativement dégradée par rapport à une modélisation en écoulement uniforme et le coût de calcul est très rapidement multiplié par 10, voire 100, sans compter les problèmes de volume mémoire utilisés. En conséquence, ce type de couplage nous est accessible :

- soit quand la fréquence est toute petite (intérêt industriel quasi nul) ;
- soit quand le volume de la partie volumique est petit, ce qui demande de faire une étude paramétrique, car il est assez difficile d'affirmer a priori que l'approximation locale sur l'écoulement porteur est cohérente avec l'observable à calculer et avec les approximations sur les sources, la géométrie, les matériaux, sans oublier l'environnement.

En pratique, on constate qu'on utilise ces approches uniquement avec une analyse a priori, pour évaluer si le surcoût de temps de calcul est compensé par la qualité critique, que l'on peut attendre du résultat. Par exemple : l'intervalle de confiance que ce calcul supplémentaire apportera aux experts permet-il ou non de diminuer le risque sur la décision prise ?

Vu le coût de ces méthodes et la taille « acoustique » des problèmes, il est absolument rédhibitoire de vouloir utiliser à une échelle complète – même d'un composant comme le moteur – des modélisations de fluides allant au delà du modèle potentiel. Mais si l'on poursuit la recherche avec le but de prendre en considération des perturbations locales, il faut alors la diriger vers une famille de modèles qui permette de se coupler « facilement » aux zones 3 puis 4, telles que définies précédemment. Les schémas classiques, permettant de calculer une solution fluide, portent sur des quantités différentes des formulations d'acoustique en propagation. On sélectionnera donc les approches ayant pour caractéristique de permettre un couplage « naturel » – seule possibilité pour construire un code de calcul ayant une performance exploitable, même partiellement. En effet, un changement de méthode numérique ne nous permettra plus de considérer que les autres paramètres sont figés, et le « delta » relatif entre les deux calculs sera considéré comme peu exploitable, puisqu'on ne sait absolument pas quelle est la solution de référence ; on ne peut donc pas dire si l'on s'en approche ou s'en éloigne.

En pratique, les sources ainsi que l'écoulement sont des données calculées. L'écoulement se présente sous la forme d'un champ de vecteur vitesse et un champ de scalaire de température. L'ingénieur d'étude a donc un acte de modélisation à produire qui va lui permettre de fixer :

- un seuil en dessous duquel la zone sera affectée à une modélisation de fluide porteur moyen homogène (zone 4 dans notre nomenclature);
- une échelle qui permettra d'affecter des valeurs constantes par morceaux à une partition de la zone 3 de notre nomenclature;
- un seuil qui permettra de séparer la zone pour laquelle le rotationnel de l'écoulement porteur n'est plus « négligé » (zone 2 dans notre nomenclature).

En résumé, les contraintes de performance de calcul complètent la justification d'une approche par perturbation locale, dans laquelle on va considérer que l'écoulement est une donnée – mal connue – du problème, et l'on procédera à la recherche d'un modèle fluide porteur pour proposer un ansatz. Le travail de recherche consiste alors à montrer à quelles conditions ce choix conduit à un problème bien posé et dont le schéma numérique converge. De plus, l'analyse du couplage avec la zone approchée par un écoulement rotationnel devra permettre de construire une méthode numérique stable et convergente.

Remarque 1.1.2. *On sait d'ores et déjà qu'une telle partition ne vérifie pas les conditions de continuité et conservation d'un fluide.*

Ceci ne nous paraît pas incohérent avec les configurations que nous avons décrites (observables en champ lointains, méconnaissance sur l'écoulement vrai); c'est pour cette raison que les ingénieurs d'Airbus vont travailler en valeurs relatives entre deux simulations puis les critiquer en faisant des analyses paramétriques.

En revanche, il n'est pas certain que cette partition n'induit pas des artefacts, qui polluent le résultat sur le champ de pression que l'on cherche à « faire converger » avec des modélisations de plus en plus riches localement.

Le travail de recherche aura donc également pour objectif de démontrer que tous les artefacts de modélisation, induits par des choix simplificateurs, peuvent être estimés dans un sens à définir. Par exemple, les approximations concernant le fluide porteur homogène (zone 4) et le fluide porteur potentiel (zone 4) ne créent aucun artefact supplémentaire : ils ne font que négliger des phénomènes. Le couplage des deux méthodes numériques ne crée pas non plus d'artefact numérique (l'ordre du schéma global couplé est analysable, voir la thèse de F. Casenave [1]). En revanche, un couplage avec une condition autre qu'une formulation intégrale pour la zone 4 conduit à une approximation de la condition de radiation et crée un artefact qui s'analyse comme une réflexion sur le bord artificiel se propageant dans le domaine de calcul.

1.2 Modélisation de l'écoulement

Dans cette section, nous nous attachons à décrire les hypothèses physiques faites sur l'écoulement qui constitue le milieu de propagation des ondes acoustiques. Un tel écoulement est décrit par diverses quantités telles que sa densité volumique ρ^* , sa pression p^* , sa célérité v^* ou encore sa densité d'énergie interne e^* . En aéroacoustique linéaire, ces quantités sont dites totales, notées avec un astérisque *, car elles seront décomposées sous la forme $q^*(\mathbf{x}, t) = q_0(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}, t)$, où q_0 est une quantité stationnaire et q la contribution acoustique qui nous intéresse. Nous reviendrons sur cette décomposition en détail ultérieurement et ne l'utilisons pas pour le moment.

Nous présentons dans un premier temps les équations de Navier-Stokes régissant la dynamique du fluide, puis nous détaillons les hypothèses thermodynamiques faites, fermant

ainsi le système d'équations. Nous terminons cette section par la présentation de plusieurs hypothèses simplificatrices pour aboutir aux équations d'Euler, qui nous servent de base pour la suite de l'étude.

Cette présentation de la mécanique des fluides compressibles s'inspirent notamment de celles présentées dans la thèse de C. Legendre [6] et dans le livre, dont l'approche est assez mathématique, de A. Novotny et I. Straskraba [7].

1.2.1 Les équations de la mécanique des fluides

Nous décrivons le fluide du point de vue macroscopique et faisons l'hypothèse d'un continuum. Dans ce cadre, les équations de Navier-Stokes régissent la dynamique du fluide en constituant un bilan de masse, de quantité de mouvement ainsi que d'énergie, appliqué à un volume de contrôle de fluide $V(t)$ que nous suivons au cours du temps $t \geq 0$.

Nous utilisons une description eulérienne, c'est-à-dire que le fluide évolue dans une géométrie fixe, repérée par une variable d'espace $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, ($d = 2$ ou 3), et une grandeur physique $q^*(\mathbf{x}, t)$ est exprimée en fonction de cette variable \mathbf{x} et du temps $t \in \mathbb{R}^+$.

Toutes les équations présentées sont obtenues à partir de la relation suivante, qui quantifie la variation d'une grandeur $q^*(\mathbf{x}, t)$ intégrée sur le volume de contrôle $V(t)$ qui suit les particules de fluide dans le temps :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} q^*(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{V(t)} (\partial_t q^* + \nabla \cdot (q^* \mathbf{v}^*))(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (1.1)$$

Lorsque la quantité q^* est créée ou absorbée par la densité g au cours du temps, ce qui correspond à prendre en compte le terme source

$$\int_{V(t)} g(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x},$$

il vient l'équation locale de conservation suivante

$$\partial_t q^* + \nabla \cdot (q^* \mathbf{v}^*) = g,$$

ou encore avec la convention d'Einstein de sommation des indices répétés

$$\partial_t q^* + \partial_{x_i} (q^* v_i^*) = g.$$

Bilan de la masse. Au cours du temps, en présence d'une source volumique de masse q_m , la variation de la masse $\int_{V(t)} \rho^*(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$ contenue dans le volume de contrôle $V(t)$ est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho^* d\mathbf{x} = \int_{V(t)} q_m d\mathbf{x}.$$

En utilisant la relation de transport (1.1), on trouve l'équation de conservation locale suivante :

$$\boxed{\partial_t \rho^* + \nabla \cdot (\rho^* \mathbf{v}^*) = q_m.} \quad (1.2)$$

Cette équation peut être écrite également sous forme non-conservative, en introduisant la dérivée particulaire $D_t^* := \partial_t + \mathbf{v}^* \cdot \nabla$,

$$D_t^* \rho^* + \rho^* \nabla \cdot \mathbf{v}^* = q_m. \quad (1.3)$$

Bilan de quantité de mouvement. D'après le principe fondamental de la dynamique, la variation de la quantité de mouvement $\int_{V(t)} \rho^* \mathbf{v}^* dx$ du volume de contrôle $V(t)$ est donnée par la somme de la densité des forces volumiques \mathbf{f} et des forces surfaciques caractérisées par le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}^*$:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho^* \mathbf{v}^* dx = \int_{V(t)} \rho^* \mathbf{f} dx + \int_{\partial V(t)} \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

De même que pour la conservation de la masse, en appliquant la relation de transport (1.1), puis en intégrant par parties, il vient :

$$\partial_t(\rho^* \mathbf{v}^*) + \nabla \cdot (\rho^* \mathbf{v}^* \mathbf{v}^*) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^* + \rho^* \mathbf{f}, \quad (1.4)$$

ou en notation indicielle

$$\partial_t(\rho^* v_i) + \partial_{x_j}(\rho^* v_i v_j) = \partial_{x_j} \sigma_{ij} + \rho^* f_i.$$

Un exemple typique de force volumique est la force d'attraction gravitationnelle de la terre sur le fluide qui se traduit par $\mathbf{f} = \mathbf{g}$, l'accélération de pesanteur.

Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^*$ se décompose sous la forme

$$\boldsymbol{\sigma}^* = -p^* \text{Id} + \boldsymbol{\tau}^*,$$

où p^* est la pression et $\boldsymbol{\tau}^*$ le tenseur des contraintes visqueuses, ce qui donne, en remplaçant $\boldsymbol{\sigma}^*$ et en utilisant l'équation de conservation de la masse (1.2) :

$$\rho^* \left(\partial_t \mathbf{v}^* + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla) \mathbf{v}^* \right) + \nabla p^* - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^* = \rho^* \mathbf{f} - q_m \mathbf{v}^*. \quad (1.5)$$

Pour un **fluide dit newtonnien**, comme c'est le cas usuel, $\boldsymbol{\tau}^*$ ne dépend que de la vitesse \mathbf{v}^* et de deux constantes propres au fluide, ses viscosités dynamique μ et volumique μ' :

$$\boldsymbol{\tau}^*(\mathbf{v}^*) := \mu \left(\nabla \mathbf{v}^* + (\nabla \mathbf{v}^*)^T \right) + \mu' (\nabla \cdot \mathbf{v}^*) \text{Id}.$$

Dans le cas des gaz peu denses, l'hypothèse de Stokes consistant à prendre $\mu' = -2/3 \mu$, fournit une excellente approximation. Négliger la viscosité de l'air revient alors à prendre $\mu = \mu' = 0$. Même si cette hypothèse sera adoptée par la suite, gardons pour l'instant la viscosité dans les équations pour comprendre où elle intervient. L'équation de la quantité de mouvement se simplifie alors en utilisant l'équation de la conservation de la masse (1.2) :

$$\boxed{\rho^* \left(\partial_t \mathbf{v}^* + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla) \mathbf{v}^* \right) + \nabla p^* - \mu \Delta \mathbf{v}^* - \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}^*) = \rho^* \mathbf{f} - q_m \mathbf{v}^*.} \quad (1.6)$$

Conservation de l'énergie. L'énergie du volume de contrôle $V(t)$ est définie par la somme de son énergie cinétique et de son énergie interne

$$\int_{V(t)} \frac{1}{2} \rho^* |\mathbf{v}^*|^2 + \int_{V(t)} \rho^* e^*,$$

où e^* désigne sa densité d'énergie interne. Le théorème de l'énergie cinétique exprime alors que la variation d'énergie est donnée par la somme du travail des forces volumiques, du travail de déformation de $V(t)$, des éventuelles sources volumiques de chaleur q_e et de la perte de chaleur vers l'extérieur, caractérisée par le flux \mathbf{q} :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \frac{1}{2} \rho^* |\mathbf{v}^*|^2 + \rho^* e^* dx &= \int_{V(t)} \rho^* \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}^* + \int_{\partial V(t)} (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &+ \int_{V(t)} \rho^* q_e dx - \int_{\partial V(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'équation locale suivante de conservation de l'énergie

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho^* |\mathbf{v}^*|^2 + \rho^* e^* \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho^* |\mathbf{v}^*|^2 \mathbf{v}^* + \rho^* e^* \mathbf{v}^* \right) - \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{v}^*) = \rho^* \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}^* + \rho^* q_e - \nabla \cdot \mathbf{q}.$$

De même que précédemment, cette équation peut être simplifiée à l'aide des équations de conservation précédentes et en utilisant l'expression de $\boldsymbol{\sigma}^*$:

$$\boxed{\rho^* \left(\partial_t e^* + \mathbf{v}^* \cdot \nabla e^* \right) + p^* \nabla \cdot \mathbf{v}^* - \boldsymbol{\tau}^*(\mathbf{v}^*) : \nabla \mathbf{v}^* = - \left(e^* - \frac{1}{2} |\mathbf{v}^*|^2 \right) q_m - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho^* q_e.} \quad (1.7)$$

1.2.2 Les hypothèses thermodynamiques

Les équations de la dynamique des fluides que nous avons présentées comportent encore trop d'inconnues pour être résolues. Pour clore ce système, il manque des relations entre les quantités introduites : ρ^* , p^* , \mathbf{v}^* , e^* . Ces relations sont d'origine thermodynamique et font intervenir d'autres grandeurs telles que l'entropie ou la température du fluide. Elles dépendent d'hypothèses que nous détaillons dans cette partie.

Commençons par introduire l'entropie, qui peut être avantageusement choisie pour décrire le fluide.

Introduction de l'entropie. On appelle entropie du système toute grandeur s^* qui satisfait la relation suivante

$$T ds^* = de^* + p^* d \left(\frac{1}{\rho^*} \right). \quad (1.8)$$

Son lien avec l'énergie montre que l'entropie satisfait également une équation de conservation. En effet, en partant de (1.8) et en utilisant (1.7), il vient :

$$\begin{aligned} T^* \rho^* (\partial_t s^* + \mathbf{v}^* \cdot \nabla s^*) &= \rho^* (\partial_t e^* + \mathbf{v}^* \cdot \nabla e^*) + \rho^* p^* \left(\partial_t \left(\frac{1}{\rho^*} \right) + \mathbf{v}^* \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho^*} \right) \right), \\ &= \rho^* (\partial_t e^* + \mathbf{v}^* \cdot \nabla e^*) - \frac{p^*}{\rho^*} (\partial_t \rho^* + \mathbf{v}^* \cdot \nabla \rho^*), \\ &= \boldsymbol{\tau}^* : \nabla \mathbf{v}^* - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho^* q_e - \left(e^* + \frac{p^*}{\rho^*} - \frac{1}{2} |\mathbf{v}^*|^2 \right) q_m. \end{aligned}$$

Il vient ainsi l'équation de conservation de l'entropie

$$\rho^* T^* (\partial_t s^* + \mathbf{v}^* \cdot \nabla s^*) + \rho^* \nabla \cdot \mathbf{v}^* - \boldsymbol{\tau}^* : \nabla \mathbf{v}^* = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho^* q_e - \left(e^* - \frac{1}{2} |\mathbf{v}^*|^2 + \frac{p^*}{\rho^*} \right) q_m. \quad (1.9)$$

Équation d'état. La thermodynamique classique stipule que l'énergie interne e^* , la pression p^* , l'entropie s^* , la température T^* et la densité ρ^* ne sont pas indépendantes et que chacune s'exprime en fonction de deux autres seulement. Nous choisissons de tout exprimer en fonction de la densité ρ^* et de la température T^* . A ce stade, le système est clos mais non explicite. Il faut faire des hypothèses supplémentaires pour expliciter les dépendances que nous venons d'évoquer. Pour cela, nous supposons que l'air est un gaz parfait.

Hypothèse du gaz parfait. L'air en écoulement autour de l'avion est supposé être un gaz parfait, c'est-à-dire qu'il satisfait les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} p^*(\rho^*, T^*) &= r \rho^* T^*, \\ e^*(\rho^*, T^*) &= c_v T^*, \end{aligned}$$

où $r = R/M$ est la constante universelle des gaz parfait R divisée par la masse molaire M du gaz considéré et c_v est une constante caractéristique du gaz, sa capacité thermique molaire à volume constant. Ces relations permettent, en combinaison avec l'équation (1.8), d'établir un lien entre s^* , ρ^* et p^* :

$$s^* = c_v \log(p^*) - c_p \log(\rho^*) = c_v \log \left(\frac{p^*}{(\rho^*)^\gamma} \right), \quad (1.10)$$

où $c_p := r + c_v$ est la capacité thermique molaire à pression constante et $\gamma := c_p/c_v$ est le coefficient de Laplace.

Diffusion de la chaleur : loi de Fourier. L'équation de conservation de l'énergie (1.7) et de l'entropie (1.9) font intervenir le terme $-\nabla \cdot \mathbf{q}$ où \mathbf{q} est le flux de chaleur. Ce flux dépend des quantités thermodynamiques caractéristiques du fluide et la loi empirique de Fourier stipule une relation de proportionnalité entre ce flux thermique et le gradient de température :

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T^*,$$

où λ est appelé coefficient de diffusion de la chaleur. En effet, le terme $-\nabla \cdot \mathbf{q}$ s'exprime alors comme un terme de diffusion :

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T^*).$$

Vitesse du son. La vitesse de propagation du son dans le fluide est définie par

$$c^* := \left(\frac{\partial p^*}{\partial \rho^*} \right)_s^{\frac{1}{2}}.$$

Dans le cas d'un gaz parfait, la vitesse du son relie directement la pression et la densité. En effet, depuis la relation (1.10), il vient aisément

$$(c^*)^2 = \gamma \frac{p^*}{\rho^*} = \gamma r T^*. \quad (1.11)$$

Évolution adiabatique. Mise à part en présence de combustion, ce qui n'entre pas dans le cadre de notre étude, les phénomènes acoustiques sont considérés adiabatiques. La source de chaleur est donc nulle, i.e.

$$q_e = 0.$$

De plus, les fluctuations acoustiques sont rapides devant les phénomènes de conduction de chaleur. Les échanges thermiques n'ont donc pas le temps de s'établir, ce qui revient à négliger le flux de chaleur :

$$\mathbf{q} = \mathbf{0}.$$

Nous nous plaçons également dans le cadre où il n'y a pas d'injection ou d'absorption de masse à l'intérieur du domaine :

$$q_m = 0.$$

L'équation (1.9) de conservation de l'entropie se simplifie alors en

$$\rho^* (\partial_t s^* + \mathbf{v}^* \cdot \nabla s^*) = \frac{1}{T^*} \boldsymbol{\tau}^* : \nabla \mathbf{v}^*.$$

Les variations de l'entropie au cours du temps du volume de contrôle $V(t)$ sont donc uniquement dues à la présence de viscosité. En effet, en appliquant la formule de transport (1.1), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho^* s^* \, d\mathbf{x} &= \int_{V(t)} \partial_t (\rho^* s^*) + \nabla \cdot (\rho^* s^* \mathbf{v}^*) \, d\mathbf{x}, \\ &= \int_{V(t)} \rho^* (\partial_t s^* + \mathbf{v}^* \cdot \nabla s^*) + s^* (\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho^* \mathbf{v}^*)) \, d\mathbf{x}, \\ &= \int_{V(t)} \frac{1}{T^*} \boldsymbol{\tau}^* : \nabla \mathbf{v}^* \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

1.2.3 La vorticité de l'écoulement

Il sera souvent question de la vorticité de l'écoulement dans cette thèse car son effet sur l'acoustique est important. La vorticité de l'écoulement est par définition son rotationnel, que nous noterons :

$$\boldsymbol{\omega}^* := \nabla \times \mathbf{v}^*.$$

Étant donnée une base orthonormée de \mathbb{R}^3 , $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, lorsqu'un écoulement est bi-dimensionnel, en particulier indépendant de la variable z : $\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, alors sa vorticité, donnée par :

$$\boldsymbol{\omega}^* = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix} = \omega^* \mathbf{e}_z,$$

est assimilable la grandeur scalaire $\omega^* := \partial_x v_y - \partial_y v_x$.

La dynamique de la vorticité d'un écoulement est un sujet très étudié en mécanique des fluides. Le but de cette partie est de présenter brièvement les équations qui régissent son transport dans le cadre qui nous intéresse. Ces équations nous seront utiles non seulement pour établir la formulation de Goldstein de la propagation aéroacoustique, mais également pour comprendre où et comment intervient la vorticité dans le fluide, qui joue un rôle central dans cette thèse.

Commentaires et exemples. Deux exemples académiques typiques d'écoulements sont intéressants du point de vue de leur vorticité : les écoulements cisailés, modélisation basique des jets, et les écoulements orthoradiaux, modélisant des tourbillons. Levons d'emblée une confusion parfois faite, un écoulement de vorticité non nulle, bien que dit rotationnel, n'est pas forcément tourbillonnaire, et un écoulement tourbillonnaire peut être irrotationnel, on dit aussi potentiel, dont un exemple typique est celui de l'écoulement d'une baignoire qui se vide ! La vorticité n'est donc pas une mesure de la recirculation du fluide, mais plutôt, pour donner une image, de sa capacité à faire tourner sur place un tout petit objet placé à un endroit donné de l'écoulement. Détaillons ces deux exemples très simples.

Pour un écoulement cisailé d'abord, c'est-à-dire dont la vitesse est de la forme, en coordonnées cartésiennes adaptées

$$\mathbf{v}^*(x, y, z) = v^*(x, y) \mathbf{e}_z,$$

la vorticité est simplement donnée par

$$\boldsymbol{\omega}^* = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v^*(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y v^*(x, y) \\ -\partial_x v^*(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} = \nabla^\perp v^*.$$

Ainsi, un écoulement cisailé est nécessairement rotationnel, dès lors qu'il n'est pas constant. En 2D, un écoulement cisailé s'écrit

$$\mathbf{v}^* = v^*(y) \mathbf{e}_x,$$

et alors, sa vorticité (scalaire) est donnée par

$$\omega^* = -\frac{dv^*}{dy},$$

et de nouveau, de même, l'écoulement est rotationnel lorsqu'il n'est pas constant.

Concernant les écoulements orthoradiaux en 2D, la vitesse s'écrit sous la forme, en coordonnées polaires (r, θ) :

$$\mathbf{v}^*(r, \theta) = v^*(r) \mathbf{e}_\theta.$$

La vorticité de un tel écoulement est donnée par :

$$\omega^*(r, \theta) = \left(\frac{1}{r} \partial_r (r v_\theta^*) - \frac{1}{r} \partial_\theta v_r^* \right) \mathbf{e}_z = \left(\frac{v^*(r)}{r} + \frac{dv^*(r)}{dr} \right) \mathbf{e}_z,$$

qui s'exprime aussi en fonction de la vitesse angulaire définie par $\Omega(r) := v^*(r)/r$:

$$\omega^*(r) = 2\Omega(r) + r \frac{d\Omega}{dr}(r).$$

Un tel écoulement tourbillonnaire de la forme :

$$v^*(r) = \frac{a}{r}, \quad a \in \mathbb{R},$$

est irrotationnel :

$$\omega^*(r) = \frac{a/r}{r} + \frac{d}{dr} \left(\frac{a}{r} \right) = 0.$$

Plus généralement, les écoulements tourbillonnaires   vorticité constante s'écrivent comme la somme d'un écoulement irrotationnel et d'une rotation solide, i.e.   vitesse angulaire constante :

$$v^*(r) = \frac{a}{r} + br, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

et alors

$$\omega^*(r) = 2b.$$

 quation de la vorticité. Établissons   présent l'équation de la vorticité, en précisant les diverses simplifications qui nous intéressent résultant de nos hypothèses thermodynamiques ou dans le cas d'un écoulement 2D. Deux identités vectorielles préalables facilitent l'établissement des équations : si \mathbf{a} et \mathbf{b} sont deux fonctions vectorielles suffisamment régulières, alors

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} = \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{a}|^2 \right) + (\nabla \times \mathbf{a}) \times \mathbf{a}, \quad (1.12)$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = ((\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\nabla \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a}) - ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b}). \quad (1.13)$$

En prenant le rotationnel de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.5) divisée par ρ^* , il vient

$$\partial_t \omega^* + \nabla \times ((\mathbf{v}^* \cdot \nabla) \mathbf{v}^*) + \nabla \times \left(\frac{\nabla p^*}{\rho^*} \right) = \nabla \times \left(\frac{1}{\rho^*} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^* \right),$$

or, d'après (1.12) appliquée avec $\mathbf{a} := \mathbf{v}^*$ et (1.13) avec $\mathbf{a} := \boldsymbol{\omega}^*$ et $\mathbf{b} := \mathbf{v}^*$,

$$\begin{aligned} \nabla \times ((\mathbf{v}^* \cdot \nabla) \mathbf{v}^*) &= \nabla \times \left(\nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}^*|^2 \right) + \boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{v}^* \right), \\ &= \underbrace{\nabla \times \left(\nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}^*|^2 \right) \right)}_{=0} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{v}^*), \\ &= (\mathbf{v}^* \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}^* + (\nabla \cdot \mathbf{v}^*) \boldsymbol{\omega}^* - \underbrace{(\boldsymbol{\omega}^* \cdot \nabla) \mathbf{v}^* + (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}^*) \mathbf{v}^*}_{=0}, \end{aligned}$$

et en développant le terme :

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla p^*}{\rho^*} \right) = -\frac{1}{(\rho^*)^2} \nabla \rho^* \times \nabla p^* + \frac{1}{\rho^*} \underbrace{\nabla \times (\nabla p^*)}_{=0},$$

nous trouvons,

$$\partial_t \omega^* + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla) \omega^* + \frac{\nabla p^* \times \nabla \rho^*}{(\rho^*)^2} = (\omega^* \cdot \nabla) \mathbf{v}^* - (\nabla \cdot \mathbf{v}^*) \omega^* + \nabla \times \left(\frac{1}{\rho^*} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^* \right).$$

Le terme faisant intervenir la divergence de la vitesse peut être éliminé en s'intéressant plutôt au transport de la vorticit   sp  cifique ω^*/ρ^* . En effet, il vient, en utilisant l'  quation de conservation de la masse (1.3) :

$$\begin{aligned} D_t \left(\frac{\omega^*}{\rho^*} \right) &= -\frac{1}{(\rho^*)^2} D_t \rho^* + \frac{1}{\rho^*} D_t \omega^*, \\ &= \cancel{\frac{1}{\rho^*} (\nabla \cdot \mathbf{v}^*) \omega^*} + \left(\frac{\omega^*}{\rho^*} \cdot \nabla \right) \mathbf{v}^* - \frac{\nabla p^* \times \nabla \rho^*}{(\rho^*)^3} - \cancel{\frac{1}{\rho^*} (\nabla \cdot \mathbf{v}^*) \omega^*} + \frac{1}{\rho^*} \nabla \times \left(\frac{1}{\rho^*} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^* \right), \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{D_t \left(\frac{\omega^*}{\rho^*} \right) = \left(\frac{\omega^*}{\rho^*} \cdot \nabla \right) \mathbf{v}^* - \frac{\nabla p^* \times \nabla \rho^*}{(\rho^*)^3} + \frac{1}{\rho^*} \nabla \times \left(\frac{1}{\rho^*} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^* \right).}$$

Un   coulement dont la pression n'est fonction que de la densit   est dit **barotropique**. C'est le cas par exemple lorsqu'il s'agit d'un gaz parfait, $p^* = e^{s^*/c_v} (\rho^*)^\gamma$, que l'on suppose de plus **homotropique** ($s^* = \text{cst}$). Dans le cas d'un   coulement barotropique, le gradient de la pression et de la densit   sont donc colin  aires, ce qui donne

$$\frac{\nabla p^* \times \nabla \rho^*}{(\rho^*)^3} = \mathbf{0}.$$

Dans ce cas la variation de vorticit   sp  cifique contenue dans un volume de contr  le qui suit l'  coulement n'est due qu'au jacobien de la vitesse et    la viscosit  . En effet, l'  quation devient alors en l'absence de viscosit  

$$\begin{array}{l} \text{gaz parfait} \\ \text{barotropique} \\ \text{non-visqueux} \end{array} \quad D_t \left(\frac{\omega^*}{\rho^*} \right) = \left(\frac{\omega^*}{\rho^*} \cdot \nabla \right) \mathbf{v}^*. \quad (1.14)$$

Un cas particulier int  ressant est celui d'un   coulement 2D, $\mathbf{v}^*(x, y, z) = (v_x^*(x, y), v_y^*(x, y), 0)$ par exemple. Alors, le terme du membre de droite s'annule :

$$\left(\frac{\omega^*}{\rho^*} \cdot \nabla \right) \mathbf{v}^* = \frac{1}{\rho^*} \omega^* \partial_z \mathbf{v}^* = \mathbf{0},$$

et ω^*/ρ^* se conserve le long des lignes de courant

écoulement 2D gaz parfait barotrope non visqueux	$D_t \left(\frac{\omega^*}{\rho^*} \right) = 0.$
--	---

1.2.4 Résumé des équations

Cette partie vise à récapituler les équations décrivant le fluide compressible ainsi que les différentes hypothèses qui ont été discutées dans les sections précédentes en vue d'une modélisation de la propagation acoustique. Nous présenterons le système d'équations de Navier-Stokes compressible pour un gaz parfait visqueux en écoulement adiabatique. Puis nous négligerons la viscosité de l'écoulement et aboutirons au système d'équations d'Euler compressible pour un gaz parfait isentropique non visqueux.

Les équations de Navier-Stokes. Pour un gaz parfait en écoulement adiabatique sur lequel la seule force volumique s'appliquant est le poids que nous négligeons, alors les inconnues densité, pression, vitesse, température et entropie ($\rho^*, p^*, \mathbf{v}^*, T^*, s^*$) satisfont les équations suivantes :

$$\partial_t \rho^* + \nabla \cdot (\rho^* \mathbf{v}^*) = 0, \quad (1.15a)$$

$$\rho^* (\partial_t \mathbf{v}^* + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla) \mathbf{v}^*) + \nabla p^* = \mu \Delta \mathbf{v}^* + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}^*), \quad (1.15b)$$

$$\rho^* T^* (\partial_t s^* + \mathbf{v}^* \cdot \nabla s^*) = 2\mu \mathbb{S}(\nabla \mathbf{v}^*) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}^*)^2, \quad (1.15c)$$

$$s^* = c_v \log \left(\frac{p^*}{(\rho^*)^\gamma} \right), \quad (1.15d)$$

$$p^* = r \rho^* T^*, \quad (1.15e)$$

où $\mathbb{S}(A) := \frac{1}{2}(A + A^T)$ est la partie symétrique de la matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

Les équations d'Euler. Partant des équations de Navier-Stokes, nous avons vu que négliger la viscosité μ de l'air en écoulement adiabatique implique une évolution isentropique du gaz. Les équations obtenues sont les équations d'Euler compressibles, isentropiques pour un gaz parfait, d'inconnues ($\rho^*, p^*, \mathbf{v}^*, s^*$) :

$$\partial_t \rho^* + \nabla \cdot (\rho^* \mathbf{v}^*) = 0, \quad (1.16a)$$

$$\rho^* (\partial_t \mathbf{v}^* + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla) \mathbf{v}^*) + \nabla p^* = \mathbf{0}, \quad (1.16b)$$

$$\partial_t s^* + \mathbf{v}^* \cdot \nabla s^* = 0, \quad (1.16c)$$

$$p^* = e^{s^*/c_v} (\rho^*)^\gamma. \quad (1.16d)$$

1.3 Le problème de la propagation acoustique en écoulement

Les équations de la mécanique des fluides introduites dans la partie précédente décrivent dans leur globalité les phénomènes de variation de pression, de densité, de vitesse ou de température du fluide.

Les sources de bruit de type aéroacoustique sont créées dans des zones de type « forte turbulence », comme pour le bruit de jet ou lors d'interactions avec un élément structurel, le train d'atterrissage par exemple, puis se propagent sur de grandes distances, y compris dans des zones où l'écoulement est plus calme. Des sources de bruit de nature différente peuvent être également générées, par exemple par les vibrations de structures en interaction avec le fluide environnant comme dans le cas du moteur de l'avion faisant vibrer le fuselage. C'est la propagation de ces perturbations, sous forme d'infimes oscillations des grandeurs caractéristiques du fluide, qui forme les ondes acoustiques que nos oreilles perçoivent lorsque les fréquences se situent dans le domaine de l'audible, entre 20 Hz et 20 kHz.

Bien qu'elles se propagent sur de longues distances, ces ondes acoustiques ne contiennent qu'une toute petite fraction de l'énergie mécanique de l'écoulement. C'est pourquoi, du point de vue du calcul numérique, une résolution complète des équations de Navier-Stokes dans tout le domaine de propagation et à la précision numérique nécessaire pour capter les phénomènes acoustiques est aujourd'hui complètement hors de portée. La non linéarité des équations et leur relativement grand nombre d'inconnues ne permettraient en effet pas la précision nécessaire, les contributions acoustiques seraient alors perdues dans les erreurs numériques.

Le but de cette partie est de présenter l'approche classique d'étude de ces phénomènes de propagation acoustique afin de les rendre accessibles numériquement à grande échelle. Approche consistant à partitionner le domaine en zones, où vont être effectués différents niveaux d'approximations. En particulier, ce que nous appelons acoustique linéaire est valable dans les zones dites de propagation où l'acoustique est régie par les équations d'Euler linéarisées que nous détaillerons.

1.3.1 Séparation entre zones turbulentes et zones de propagation acoustique

Le travail pionnier de Lighthill. Dans ses articles fondateurs de 1952 et 1954 intitulés « On sound generated aerodynamically I. General theory » [8] et « II. Turbulence as a source of sound » [9], Lighthill étudie le bruit rayonné par un écoulement turbulent dans une région restreinte de l'espace puis propagé dans un domaine étendu au repos. Un cas typique est le son généré par un instrument à vent ou celui émit par un jet d'air. Il procède par décomposition du domaine en deux régions, comme sur la figure 1.3, une contenant la turbulence notée Ω_{CFD} et l'autre au repos. Nous allons montrer comment, en réarrangeant les équations de la mécanique des fluides, il identifie un second membre qui sera figé dans la partie au repos, jouant le rôle de source et pré-calculé dans la zone turbulente restreinte.

En prenant la divergence de l'équation de conservation la quantité de mouvement (1.4) et en dérivant celle de la conservation de la masse (1.2) par rapport au temps, il vient :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\partial_t(\rho^* \mathbf{v}^*)) + \partial_{i,j}^2(\rho^* v_i^* v_j^*) &= \partial_{i,j}^2(-p^* \delta_{i,j} + \tau_{i,j}^*(\mathbf{v}^*)) + \partial_i(\rho^* f_i), \\ \partial_t^2 \rho^* + \partial_t \nabla \cdot (\rho^* \mathbf{v}^*) &= 0, \end{aligned}$$

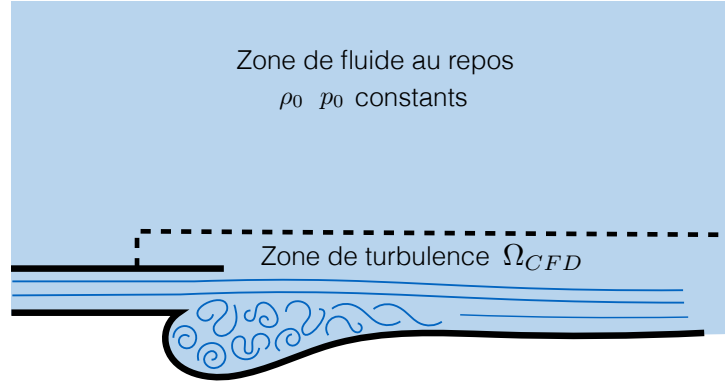


FIGURE 1.3 – Analogie de Lighthill : décomposition du domaine

ce qui donne, en soustrayant les deux équations :

$$\partial_t^2 \rho^* = \partial_{i,j}^2 (\rho^* v_i^* v_j^* - p^* \delta_{i,j} + \tau_{i,j}^*(\mathbf{v}^*)) + \partial_i (\rho^* f_i).$$

En préalable de la linéarisation qui suivra cette introduction à l'analogie de Lighthill, introduisons les grandeurs du fluide dans la zone au repos, sa densité, pression ainsi que la vitesse du son qui en découle : ρ_0 , p_0 et c_0 . La différence entre ρ_0 , p_0 , constantes, et celles totales correspondantes, ρ^* , p^* sont par définition les quantités acoustiques :

$$\begin{aligned} \rho^* &= \rho_0 + \rho, \\ p^* &= p_0 + p. \end{aligned}$$

Afin de former au membre de gauche l'opérateur de propagation des ondes en milieux homogène à vitesse c_0 , soustrayons $c_0^2 \Delta \rho$ de chaque côté de l'équation, il vient en négligeant les forces volumiques (le poids typiquement) :

$$\partial_t^2 \rho - c_0^2 \Delta \rho = \partial_{i,j}^2 T_{i,j}, \quad (1.17)$$

où T est le tenseur de Lighthill, exprimé par

$$T = \rho^* \mathbf{v}^* (\mathbf{v}^*)^T + (p^* - c_0^2 \rho) \text{Id} - \boldsymbol{\tau}^*(\mathbf{v}^*).$$

Jusqu'ici, l'équation (1.17) est exacte. Comme voulu, au membre de gauche apparaît l'opérateur de d'Alembert de propagation des ondes acoustiques dans la zone du fluide au repos tandis que le membre de droite contient des termes non linéaires faisant intervenir le tenseur de viscosité, la pression, la densité et surtout, son terme dominant dans la zone de turbulence $\rho^* \mathbf{v}^* (\mathbf{v}^*)^T$. Il convient de remarquer que dans la zone de fluide au repos, le tenseur de Lighthill s'annule $T = \mathbf{0}$, ainsi, par représentation intégrale à l'aide de la fonction de Green de propagation dans le milieu au repos, étant donné un point $\mathbf{x} \notin \Omega_{CFD}$, la densité s'exprime en fonction du tenseurs de Lighthill :

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_0^2} \partial_{i,j}^2 \int_{\Omega_{CFD}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} T_{i,j} \left(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c_0} \right) d\mathbf{x}'. \quad (1.18)$$

Écrit comme cela, il y a encore des inconnues à droite et à gauche de l'égalité. L'approximation que fait Lighthill est de considérer qu'il n'y a qu'un couplage faible entre la zone où T

n'est pas négligeable et celle au repos où la propagation acoustique a lieu. Autrement dit, il néglige la rétro-action de l'onde acoustique sur le fluide de la région Ω_{CFD} . Numériquement, la résolution procède donc en deux étapes :

1. Résoudre les équations de la mécanique des fluides dans le domaine Ω_{CFD} et en déduire le calcul du tenseur de Lighthill T .
2. Calculer, par la formule (1.18) ou via des méthodes d'équations intégrales sur la frontière fictive $\partial\Omega_{CFD}$ le champ acoustique propagé dans la zone de fluide au repos.

Ainsi, Lighthill a introduit la distinction entre les zones de turbulences, sièges d'instabilités et de fortes fluctuations temporelles, et les zones où se propagent des perturbations oscillant autour de grandeurs moyennes caractérisant le fluide au repos. Ce sont ces perturbations oscillantes et de faible amplitude qui constituent l'acoustique. Il a de plus identifié les termes jouant le rôle de sources situées dans les régions de turbulences. Son travail, connu aujourd'hui sous le nom d'analogie de Lighthill, a été généralisé à des situations plus complexes qui sont regroupées sous le nom d'analogies acoustiques. Par exemple, en présence d'obstacles ou en présence d'un écoulement uniforme dans la zone précédemment supposée au repos, voir les travaux fondateurs de Curle [10], et ceux de Ffowcs-Williams et Hawkings [11]. Pour un exposé récent des avancées sur la génération du son par des écoulements turbulents, on pourra se référer aux ouvrages de Howe [12] et de Crighton [13].

Cadre de la thèse : des zones de propagation plus complexes. Dans cette thèse, nous nous focalisons sur les régions de propagation acoustique. Les phénomènes de génération de sources, qu'elles soient d'origine aérodynamique dans les zones de turbulences ou autres, ne seront pas abordés dans cette thèse. Nous nous intéressons exclusivement aux phénomènes de propagation acoustique, correspondant à la région de fluide au repos dans le cas de l'analogie de Lighthill. Évidemment, nous considérerons des zones de propagation plus complexes, mais où la distinction entre grandeurs moyennes du fluide et perturbations oscillantes acoustiques à un sens : on parle du cadre de l'acoustique linéaire. Ainsi, les sources seront supposées connues et apparaîtront dans ce travail comme fonctions au second membre des équations.

Les régions de propagation peuvent elles-mêmes être décomposées en sous-domaines en fonction de la complexité de l'écoulement qui s'y trouve. Des simplifications supplémentaires au sein de cette zone d'acoustique linéaire peuvent ainsi être faites, ramenant le système d'équations à une équation scalaire par exemple lorsque l'écoulement est supposé potentiel. Nous y reviendrons.

1.3.2 L'aéroacoustique linéaire : linéarisation des équations d'Euler autour d'un écoulement porteur

A présent, nous nous concentrons sur les zones propagatives, où l'acoustique linéaire à un sens. Ainsi nous supposerons que les ondes acoustiques correspondent à la propagation de petites perturbations d'un écoulement, dit écoulement porteur, qui sera une donnée de notre problème. Nous présentons dans cette partie l'établissement des équations d'Euler linéarisées, qui sont les équations les plus utilisées en régime temporel pour modéliser les phénomènes de propagation. On peut citer notamment les travaux de Tam et Webb [14] proposant des schémas aux différences finies d'ordre élevé, qui ont donné suite à une abondante littérature sur la résolution numérique de ces équations, voir par exemple [15] ou [16]

pour deux vue d'ensembles. Plus récemment, même si nous verrons que des formulations alternatives à ces équations existent, les équations d'Euler linéarisées restent très utilisées, notamment grâce au développement des méthodes de Galerkin discontinues [17], qui ont trouvé application également en aéroacoustique [18, 19, 20, 21].

Équations de l'écoulement porteur. Comme expliqué, nous partons de la donnée d'un écoulement porteur, que l'on suppose établi et satisfaisant les équations d'Euler stationnaires (1.19), dont la viscosité a été négligée. Les grandeurs de cet écoulement stationnaire sont notées à l'aide d'un indice 0, il vient :

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0, \quad (1.19a)$$

$$\rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \nabla p_0 = \mathbf{0}, \quad (1.19b)$$

$$(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) s_0 = 0, \quad (1.19c)$$

$$s_0 = c_v \log(p_0) - c_p \log(\rho_0). \quad (1.19d)$$

Intéressons nous à présent à l'équation que satisfait la vorticité de l'écoulement porteur $\boldsymbol{\omega}_0 := \nabla \times \mathbf{v}_0$. Le gaz étant parfait, barotrope et non visqueux, l'équation (1.14) est valable pour l'écoulement porteur, on écrit

$$D_t \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_0}{\rho_0} \right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_0}{\rho_0} \right) \cdot \mathbf{v}_0,$$

qui donne en développant

$$D_t \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_0}{\rho_0} \right) = -\frac{1}{\rho_0^2} D_t \rho_0 \boldsymbol{\omega}_0 + \frac{1}{\rho_0} D_t \boldsymbol{\omega}_0.$$

Elle être simplifiée en utilisant l'équation de conservation de la masse (1.19a),

$$0 = \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \rho_0,$$

et donc,

$$D_t \rho_0 = \cancel{\partial_t \rho_0} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \rho_0 = -\rho_0 (\nabla \cdot \mathbf{v}_0),$$

ce qui donne l'équation de la vorticité de l'écoulement porteur

$$D_t \boldsymbol{\omega}_0 = (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 - (\nabla \cdot \mathbf{v}_0) \boldsymbol{\omega}_0. \quad (1.20)$$

Linéarisation autour de l'écoulement porteur. Conformément à l'approximation de l'acoustique linéaire, nous écrivons les grandeurs totales $\rho^*, p^*, \mathbf{v}^*, s^*$ comme somme de $\rho_0, p_0, \mathbf{v}_0, s_0$

respectivement et d'une perturbation acoustique ρ, p, \mathbf{v}, s :

$$\begin{aligned}\rho^* &= \rho_0 + \rho & \text{avec } \rho &\ll \rho_0, \\ p^* &= p_0 + p & \text{avec } p &\ll p_0, \\ \mathbf{v}^* &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v} & \text{avec } |\mathbf{v}| &\ll |\mathbf{v}_0|, \\ s^* &= s_0 + s & \text{avec } s &\ll s_0.\end{aligned}$$

Nous rappelons que les quantités totales $(\rho^*, p^*, \mathbf{v}^*, s^*)$ sont solutions des équations d'Euler (1.16). Remplaçons alors ces grandeurs par leur décomposition entre parties stationnaire et acoustique. Il vient, pour l'équation de conservation de la masse (1.16a),

$$\partial_t(\rho_0 + \rho) + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0 + \rho_0 \mathbf{v} + \rho \mathbf{v}_0 + \rho \mathbf{v}) = 0,$$

qui donne en réarrangeant les termes :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v} + \rho \mathbf{v}_0) + \underbrace{\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0)}_{=0} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})}_{\text{négligé}} = 0.$$

Ainsi, on obtient l'équation de conservation de la masse linéarisée :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v} + \rho \mathbf{v}_0) = 0.$$

Passons à l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.16b) :

$$(\rho_0 + \rho) \left(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \underbrace{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}}_{\text{négligé}} \right) + \nabla p_0 + \nabla p = \mathbf{0},$$

en développant et réorganisant

$$\begin{aligned}\rho_0 \left(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 \right) + \nabla p + \underbrace{\rho (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \nabla p_0}_{=0} \\ + \underbrace{\rho \left(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 \right)}_{\text{négligé}} = \mathbf{0},\end{aligned}$$

on obtient alors l'équation de la quantité de mouvement linéarisée :

$$\rho_0 \left(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 \right) + \nabla p + \rho (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}.$$

Pour l'équation de conservation de l'entropie (1.16c), on obtient de la même manière

$$\partial_t (s_0 + s) + (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}) \cdot \nabla (s_0 + s) = 0,$$

ainsi,

$$\partial_t s + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla s + \mathbf{v} \cdot \nabla s_0 + \underbrace{\mathbf{v}_0 \cdot \nabla s_0}_{=0} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla s}_{\text{négligé}} = 0,$$

qui donne l'équation de conservation de l'entropie linéarisée :

$$\partial_t s + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla s + \mathbf{v} \cdot \nabla s_0 = 0.$$

Il ne reste que l'équation d'état (1.10) à linéariser :

$$s_0 + s = c_v \log(p_0 + p) - c_p \log(\rho_0 + \rho),$$

en négligeant les termes non linéaires d'ordre 2 ou plus, en utilisant $\log(1 + p/p_0) \approx p/p_0$ et $\log(1 + \rho/\rho_0) \approx \rho/\rho_0$, on a

$$s_0 + s = c_v \left(\log(p_0) + \frac{p}{p_0} \right) - c_p \left(\log(\rho_0) + \frac{\rho}{\rho_0} \right),$$

et donc, en réarrangeant

$$s = c_v \frac{p}{p_0} - c_p \frac{\rho}{\rho_0} - \underbrace{\left(s_0 - c_v \log(p_0) + c_p \log(\rho_0) \right)}_{=0},$$

on trouve ainsi l'équation d'état linéarisée

$$s = c_v \frac{p}{p_0} - c_p \frac{\rho}{\rho_0}.$$

Dans cette approche, l'écoulement porteur $(\rho_0, p_0, \mathbf{v}_0, s_0)$ doit être calculé en préalable par résolution des équations d'Euler stationnaires (1.19). Puis, étant donné cet écoulement, la propagation acoustique des petites perturbations (ρ, p, \mathbf{v}, s) est donnée par la résolution des équations d'Euler linéarisées précédemment établies :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v} + \rho \mathbf{v}_0) = 0, & (1.21a) \\ \rho_0 (\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0) + \nabla p + \rho (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}, & (1.21b) \\ \partial_t s + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla s + \mathbf{v} \cdot \nabla s_0 = 0, & (1.21c) \\ s = c_v \frac{p}{p_0} - c_p \frac{\rho}{\rho_0}. & (1.21d) \end{cases}$$

Chapitre 2

Vers une prise en compte des effets de la vorticité de l'écoulement sur la propagation acoustique

2.1	Différentes complexités de modélisation de l'écoulement dans la zone de propagation acoustique	48
2.1.1	En écoulement uniforme : �quation de Helmholtz et formulation intégrale – BEM	48
2.1.2	En écoulement potentiel : �quation de Helmholtz convectée – FEM	50
2.1.3	En écoulement rotationnel : discussion autour des modèles existants	56
2.2	Une approche perturbative du modèle potentiel par les équations de Goldstein	57
2.2.1	établissement de la formulation de Goldstein	58
2.2.2	Décomposition de l'inconnue hydrodynamique	60
2.2.3	Avantages prospectifs de la formulation de Goldstein dans le contexte industriel d'Airbus et objectifs de la thèse	62

Dans ce chapitre, nous nous focalisons sur le phénomène de propagation aéroacoustique que nous avons décrit précédemment. Le but est de présenter la démarche de modélisation et de simulation numérique utilisée chez Airbus Group Innovations aujourd'hui mise en oeuvre dans le code ACTIPOLE de la suite ASERIS SOFTWARE. Nous verrons que jusqu'à présent, l'écoulement à la sortie du réacteur est supposé potentiel, négligeant les interactions entre la vorticité et la propagation acoustique. Nous présenterons alors la formulation de Goldstein que nous nous proposons d'étudier, équivalente aux équations d'Euler linéarisées présentées au chapitre précédent et permettant la prise en compte de ces interactions. Nous rappellerons l'établissement de la formulation de Goldstein et présenterons les avantages prospectifs dans le contexte de modélisation et de résolution d'Airbus Group qui nous ont amené à choisir ces équations. Nous finirons par définir les objectifs de la thèse et résumerons nos résultats et contributions.

2.1 Différentes complexités de modélisation de l'écoulement dans la zone de propagation acoustique

Commençons par détailler les diverses simplifications des équations d'Euler Linéarisées qui apparaissent lorsque des hypothèses sont faites sur l'écoulement porteur. Loin du jet et de l'avion, où l'écoulement peut être supposé uniforme, les équations se réduisent classiquement par transformation de Lorentz à l'équation des ondes, ou en régime harmonique à l'équation de Helmholtz. Plus prêt du jet du réacteur, l'hypothèse d'un écoulement potentiel permet de conserver le caractère scalaire de l'équation de Helmholtz, mais des termes de convection apparaissent, on parle de l'équation d'Helmholtz convectée. Pour prendre en compte la vorticité de l'écoulement porteur là où le jet est le plus cisailé, plusieurs reformulations des équations d'Euler linéarisées sont possibles, les équations de Galbrun ou de M hring par exemple et nous discuterons de ces différentes possibilités.

2.1.1 En écoulement uniforme :  quation de Helmholtz et formulation intégrale – BEM

Du point de vue de l'avion qui émet les ondes acoustiques, l'air est en écoulement autour de celui-ci. Puisque nous nous intéressons au rayonnement acoustique sur de grandes distances, analysons dans un premier temps ce qui se passe assez loin de l'avion. L'écoulement peut y être supposé uniforme et constant, sa vitesse est celle du déplacement de l'avion. Nous allons voir comment les équations d'Euler linéarisées (1.21) se simplifient en une simple équation scalaire sur la pression acoustique p : l'équation des ondes convectées. En régime harmonique, qui nous intéresse pour nos applications, nous verrons qu'en utilisant la transformée de Prandtl-Glauert, également connue sous le nom de transformée de Lorentz, l'équation d'Helmholtz convectée se ramène à l'équation de Helmholtz. Celle-ci est alors classiquement équivalente à une équation intégrale ramenant les inconnues volumique à des inconnues sur une surface ( ventuellement fictive) et permettant le calcul du champ rayonné à n'importe quelle distance au coût constant d'un produit matrice-vecteur. Le code d'Airbus Group Innovations, ACTIPOLE, résout ces équations intégrales par solveur rapide, utilisant la Méthode Multip le Rapide (*Fast Multiple Method* : FMM) ou les \mathcal{H} -matrices.

 quation des ondes convectées. Supposons que l'écoulement est uniforme et s'écrit

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) := \mathbf{v}_\infty \in \mathbb{R}^d,$$

où l'indice « ∞ » se justifie car il s'agit de l'écoulement uniforme loin de l'avion. Alors, $\rho_0 = \rho_\infty$, $p_0 = p_\infty$ et $s_0 = s_\infty$ pris constants satisfont les équations d'Euler stationnaires (1.19) de l'écoulement porteur. Les équations d'Euler linéarisées se simplifient alors, en notant $D_t := \partial_t + \mathbf{v}_\infty \cdot \nabla$ la dérivée matérielle :

$$D_t \rho + \rho_\infty (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0,$$

$$\rho_\infty D_t \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{0},$$

$$D_t s = 0.$$

Alors, en composant la première équation par D_t , la seconde par $\nabla \cdot$ et en soustrayant les deux, il vient

$$D_t^2 \rho - \Delta p = 0.$$

Remarquons que l'équation qui régit le transport des perturbations entropiques s est dé-couplée des autres. Ainsi, s peut être déterminée séparément et sera supposée connue. Pour aboutir à une équation en ρ uniquement, utilisons l'équation d'état (1.21d) qui permet d'ex-primer Δp en fonction de $\Delta \rho$ de la manière suivante :

$$\Delta p = \frac{c_p p_\infty}{c_v \rho_\infty} \Delta \rho + \frac{p_\infty}{c_v} \Delta s.$$

Le terme $c_p p_\infty / (c_v \rho_\infty)$ s'exprime en fonction de la vitesse du son en vertu de l'équation (1.11) et par définition de $\gamma := c_p / c_v$:

$$\frac{c_p p_\infty}{c_v \rho_\infty} = c_\infty^2.$$

Finalement, ρ vérifie l'équation des ondes convectées à la vitesse \mathbf{v}_∞ :

$$\left(\partial_t + \mathbf{v}_\infty \cdot \nabla \right)^2 \rho - c_\infty^2 \Delta \rho = \frac{p_\infty}{c_v} \Delta s. \quad (2.1)$$

Transformation de Lorentz et équation de Helmholtz. La transformation de Lorentz, ou transformation de Prandtl-Glauert, d'abord introduite dans [22] pour étudier l'influence de la compressibilité de l'air sur la portance des ailes d'avions, puis utilisée dans des appli-cations en aéroacoustique par Amiet et Sears, voir [23], est une transformation de l'espace-temps permettant de passer de l'équation des ondes convectées (2.1) à une équation d'onde standard, sans terme de convection. Pour faciliter la lecture, introduisons les notations sui-vantes :

$$\begin{aligned} v_\infty &:= |\mathbf{v}_\infty|, \\ \gamma_\infty &:= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_\infty}{c_\infty}\right)^2}}, \\ L &:= \text{Id} + \frac{\gamma_\infty - 1}{v_\infty^2} \mathbf{v}_\infty \mathbf{v}_\infty^T. \end{aligned}$$

La transformation de Lorentz revient à appliquer une transformation linéaire sur la coordon-née d'espace, de matrice L^{-1} , et à translater la coordonnée de temps lorsque l'on se déplace dans la direction de \mathbf{v}_∞ . Posons, pour une fonction $\phi(\mathbf{x}, t)$:

$$\mathcal{L}(\phi)(\mathbf{x}, t) := \phi\left(L^{-1} \mathbf{x}, t - \frac{\gamma_\infty}{c_\infty^2} \mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{x}\right). \quad (2.2)$$

On a la propriété suivante, dont les détails calculatoires sont donnés en annexe.

Proposition 2.1.1 (Transformation Lorentz). *La transformation de Lorentz commute avec l'opérateur de propagation des ondes convectées de la façon suivante :*

$$\mathcal{L}\left(\left(\partial_t + \mathbf{v}_\infty \cdot \nabla\right)^2 \phi - c_\infty^2 \Delta \phi\right) = \gamma_\infty^2 \left(\partial_t^2 \mathcal{L}\phi - \left(\frac{c_\infty}{\gamma_\infty}\right)^2 \Delta \mathcal{L}\phi\right).$$

Un conséquence directe est que si ρ satisfait l'équation des ondes convectées (2.1) homogène, alors sa transformée de Lorentz $\hat{\rho} := \mathcal{L}\rho$ satisfait l'équation des ondes dans le milieu transformé, dont la vitesse de propagation modifiée est donnée par $\hat{c}_\infty := c_\infty/\gamma_\infty$:

$$\partial_t^2 \hat{\rho} - \hat{c}_\infty^2 \Delta \hat{\rho} = 0,$$

où le second membre de 2.1 est omis car l'entropie est à présent supposée connue. En régime fréquentiel, en écrivant que, à la pulsation ω , $\hat{\rho}(\mathbf{x}, t) = \Re(\tilde{\rho}(\mathbf{x})e^{-i\omega t})$, alors $\tilde{\rho}$ satisfait l'équation de Helmholtz

$$-\Delta \tilde{\rho} - \hat{k}_\infty^2 \tilde{\rho} = 0, \tag{2.3}$$

où $\hat{k}_\infty = \gamma_\infty k_\infty$, avec $k_\infty = \omega/c_\infty$ le nombre d'onde avant transformation.

Formulation intégrale et solveurs rapides. Lorsque l'on souhaite résoudre l'équation de Helmholtz (2.3) sur de grands domaines au regard de la longueur d'onde, une méthode classique est d'utiliser une formulation équivalente sous forme d'équation intégrale de frontière associée à un solveur rapide utilisant par exemple la Méthode Multip le Rapide (*Fast Multipole Method*) ou les \mathcal{H} -matrices. C'est ce qui est utilisé dans le code ACTIPOLE aujourd'hui pour le calcul du rayonnement lointain, dans le domaine où l'écoulement porteur est supposé uniforme.

2.1.2 En écoulement potentiel :  quation de Helmholtz convectée – FEM

Plus proche du jet du réacteur, l'écoulement ne peut plus raisonnablement être assimilé à un écoulement uniforme. Il est connu que la non uniformité d'un écoulement a des effets importants sur la propagation des ondes acoustiques. Un écoulement uniforme ne prend en compte que l'effet Doppler alors que d'autres phénomènes entrent en jeu dans le cas d'un écoulement non uniforme, tels que la réflexion et la réfraction à travers le jet du réacteur par exemple.

Un niveau de complexité de modélisation supplémentaire peut être alors de considérer la vitesse de l'écoulement irrotationnelle, on parle d'un écoulement potentiel. Ainsi, des écoulements plus compliqués peuvent être pris en compte, tout en gardant une simplification importante : les équations restent scalaires ! Bien que les équations d'Euler linéarisées soient vectorielles dans le cas général, nous avons déjà vu que si l'on suppose la vitesse uniforme par exemple, alors elles se réduisent à une plus simple équation d'ondes convectées sur la pression ou la densité. Nous allons voir que c'est encore valable avec l'hypothèse d'un écoulement potentiel lorsque l'on suppose les sources acoustiques également irrotationnelles.

Nous nous placons dans le cadre de l'écoulement d'un **gaz parfait, non visqueux et homentropique**. Le but de cette section est de rappeler l'établissement de l'équation des ondes convectées sous l'hypothèse d'un écoulement potentiel, c'est-à-dire satisfaisant

$$\nabla \times \mathbf{v}_0 = \mathbf{0},$$

soumis à des sources également potentielles, cette hypothèse apparaîtra plus explicitement dans la suite. En effet, en présence de sources non potentielles, les équations d'Euler linéarisées n'aboutissent pas à l'équation scalaire des ondes convectées.

Pour ce faire, commençons par réécrire les équations d'Euler linéarisées (1.21) sous une forme plus commode. Après division par ρ_0 dans l'équation (1.21b), nous transformons le terme $\rho_0^{-1}((\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\mathbf{v}_0) + \nabla p$ en

$$\frac{\nabla p}{\rho_0} = \nabla \left(\frac{p}{\rho_0} \right) + \frac{p}{\rho_0^2} \nabla \rho_0,$$

puis, en prenant le gradient de l'équation d'état de l'écoulement porteur (1.19d), on obtient

$$\nabla s_0 = c_v \frac{\nabla p_0}{p_0} - c_p \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0},$$

permettant d'exprimer le terme $p \nabla \rho_0 / \rho_0^2$, on a ainsi

$$\frac{\nabla p}{\rho_0} = \nabla \left(\frac{p}{\rho_0} \right) + \frac{c_v p}{c_p \rho_0} \frac{\nabla p_0}{p_0} - \frac{p}{c_p \rho_0} \frac{\nabla s_0}{\rho_0},$$

puis en utilisant l'équation d'état linéarisée (1.21d),

$$\begin{aligned} \frac{\nabla p}{\rho_0} &= \nabla \left(\frac{p}{\rho_0} \right) + \left(\frac{s}{c_p \rho_0} + \frac{\rho}{\rho_0^2} \right) \nabla p_0 - \frac{p}{c_p \rho_0} \frac{\nabla s_0}{\rho_0}, \\ &= \nabla \left(\frac{p}{\rho_0} \right) + \frac{s}{c_p \rho_0} \frac{\nabla p_0}{\rho_0} - \frac{\rho}{\rho_0} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 - \frac{p}{c_p \rho_0} \frac{\nabla s_0}{\rho_0}. \end{aligned}$$

En injectant l'expression trouvée de $\nabla p / \rho_0$ dans l'équation du mouvement linéarisée (1.21b) et en utilisant l'hypothèse d'homotropie de l'écoulement porteur ($\nabla s_0 = \mathbf{0}$), il vient

$$D_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \left(\frac{p}{\rho_0} \right) + \frac{\rho}{\rho_0} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \frac{s}{c_p \rho_0} \frac{\nabla p_0}{\rho_0} - \frac{\rho}{\rho_0} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}.$$

Pour simplifier l'écriture, introduisons une vitesse modifiée par l'entropie

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \frac{s}{2c_p} \mathbf{v}_0,$$

de telle manière qu'en utilisant l'équation d'Euler du mouvement de l'écoulement porteur (1.19b), le terme

$$\frac{s}{c_p} \frac{\nabla p_0}{\rho_0} = \frac{s}{c_p} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0,$$

s'écrit comme une dérivée convective afin d'être combiné à $D_t \mathbf{v}$. En effet,

$$\frac{s}{c_p} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = \frac{s}{2c_p} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \frac{s}{c_p} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = D_t \left(\frac{s}{2c_p} \mathbf{v}_0 \right) - \underbrace{\frac{D_t s}{c_p}}_{=0} \mathbf{v}_0 + \left(\frac{s}{2c_p} \cdot \nabla \right) \mathbf{v}_0 = D_t \tilde{\mathbf{v}}.$$

Finalement, il vient une équation du mouvement linéarisée simplifiée, faisant intervenir la vitesse modifiée $\tilde{\mathbf{v}}$:

$$\boxed{D_t \tilde{\mathbf{v}} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \nabla \left(\frac{p}{\rho_0} \right) = \mathbf{0}.}$$

R -écrivons également l'équation de conservation de la masse linéarisée (1.21a) :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_0 + \rho_0 \mathbf{v}) = 0.$$

En développant, il vient

$$\partial_t \rho + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \rho + (\nabla \cdot \mathbf{v}_0) \rho + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) = 0,$$

et donc :

$$D_t \rho = -(\nabla \cdot \mathbf{v}_0) \rho - \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}).$$

Nous voudrions faire apparaître la quantité p/ρ_0 car elle intervient dans l'équation du mouvement linéarisée que nous avons établie. Pour cela, composons par D_t l'équation d'état linéarisée (1.21d) :

$$0 = D_t s = D_t \left(c_v \frac{p}{p_0} - c_p \frac{\rho}{\rho_0} \right) = D_t \left(c_v \frac{p}{p_0} \right) + c_p \frac{D_t \rho_0}{\rho_0^2} \rho - c_p \frac{D_t \rho}{\rho_0}.$$

Pour passer de p_0   ρ_0 au dénominateur, introduisons la vitesse du son dans l'écoulement porteur, donnée par

$$c_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{c_p p_0}{c_v \rho_0}.$$

Ainsi, il vient

$$D_t \left(\frac{p}{c_0^2 \rho_0} \right) = D_t \left(\frac{c_v p}{c_p p_0} \right) = -\frac{\rho}{\rho_0^2} D_t \rho_0 + \frac{1}{\rho_0} D_t \rho.$$

Enfin, utilisant l'équation de conservation de la masse de l'écoulement porteur $D_t \rho_0 = -(\nabla \cdot \mathbf{v}_0) \rho_0$ et l'équation de conservation de la masse linéarisée, on obtient

$$D_t \left(c_0^{-2} \frac{p}{\rho_0} \right) = -\frac{\rho}{\rho_0^2} (\nabla \cdot \mathbf{v}_0) \rho_0 + \frac{1}{\rho_0} ((\nabla \cdot \mathbf{v}_0) \rho - \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v})) = -\rho_0^{-1} \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}),$$

qui s'écrit

$$\boxed{D_t \left(c_0^{-2} \frac{p}{\rho_0} \right) - \rho_0^{-1} \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) = 0.}$$

Récapitulons : en introduisant des seconds membres aux équations, \mathbf{g} , f et h , modélisant des sources acoustiques, nous avons obtenu les équations simplifiées suivantes :

$$\boxed{D_t \tilde{\mathbf{v}} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \nabla \left(\frac{p}{\rho_0} \right) = \mathbf{g},} \quad (2.4a)$$

$$\boxed{D_t \left(c_0^{-2} \frac{p}{\rho_0} \right) - \rho_0^{-1} \nabla \cdot (\rho_0 \tilde{\mathbf{v}}) - \frac{\mathbf{v}_0 \cdot \nabla s}{2c_p} = -f,} \quad (2.4b)$$

$$\boxed{D_t s = h,} \quad (2.4c)$$

$$\boxed{\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \frac{s}{2c_p} \mathbf{v}_0.} \quad (2.4d)$$

L'hypothèse que les sources acoustiques sont irrotationnelles se traduit par le fait que l'on suppose que :

$$\nabla \times \mathbf{g} = \mathbf{0}.$$

Établissons à présent l'existence d'un potentiel acoustique. Nous n'avons pas encore utilisé l'hypothèse du caractère irrotationnel de la vitesse de l'écoulement porteur. Les perturbations acoustiques de la vitesse \mathbf{v} ne sont pas nécessairement irrotationnelles, c'est la vitesse modifiée $\tilde{\mathbf{v}}$ qui l'est, comme le stipule le lemme suivant :

Lemme 2.1.2 (Équation de vorticité). *Sous l'hypothèse de l'irrotationnalité de la vitesse de l'écoulement porteur :*

$$\omega_0 := \nabla \times \mathbf{v}_0 = \mathbf{0},$$

la quantité $\tilde{\omega} := \nabla \times \tilde{\mathbf{v}}$ vérifie l'équation de vorticité suivante

$$D_t \left(\frac{\tilde{\omega}}{\rho_0} \right) = \left(\frac{\tilde{\omega}}{\rho_0} \cdot \nabla \right) \mathbf{v}_0.$$

Une conséquence de cette équation est que si, à l'instant initial, $\tilde{\omega}(t=0, \cdot) = \mathbf{0}$ et si la source \mathbf{g} est irrotationnelle $\nabla \times \mathbf{g} = \mathbf{0}$ à tout instant, alors

$$\forall t \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \tilde{\omega}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Preuve. Commençons par établir l'équation de vorticité vérifiée par $\tilde{\omega}$. De la même manière que pour établir les équations de vorticité classiques déjà présentées, composons l'équation du mouvement linéarisée par $\nabla \times$. Avant cela, exprimons la quantité $(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0$ à l'aide de l'identité de Leibniz : pour deux champs de vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} suffisamment réguliers :

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}). \quad (2.5)$$

Alors, pour $\mathbf{a} := \tilde{\mathbf{v}}$ et $\mathbf{b} := \mathbf{v}_0$, il vient

$$(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = \nabla(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}_0) - \underbrace{(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\omega} \times \mathbf{v}_0}_{=0}.$$

Ensuite, en utilisant la formule du rotationnel d'un produit vectoriel (1.13) :

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + (\nabla \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a} - ((\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b}),$$

on obtient,

$$\begin{aligned} \nabla \times ((\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0) &= \nabla \times \underbrace{(\nabla(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}_0))}_{=0} - \nabla \times ((\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}}) + \nabla \times (\tilde{\omega} \times \mathbf{v}_0), \\ &= -\nabla \times ((\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}}) + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \tilde{\omega} + (\nabla \cdot \mathbf{v}_0) \tilde{\omega} - \underbrace{(\tilde{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 - (\nabla \cdot \tilde{\omega}) \mathbf{v}_0}_{=0}. \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant le rotationnel de l'équation (2.4a),

$$\nabla \times \left(\partial_t \tilde{\mathbf{v}} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \nabla \left(\frac{p}{\rho_0} \right) \right) = \nabla \times \mathbf{g} = \mathbf{0},$$

ce qui donne en développant

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \nabla \times \left((\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} \right) - \nabla \times \left((\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 \right) + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ + (\nabla \cdot \mathbf{v}_0) \tilde{\boldsymbol{\omega}} - (\tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \nabla \times \left(\nabla \left(\frac{p}{\rho_0} \right) \right) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$

donc,

$$D_t \tilde{\boldsymbol{\omega}} + (\nabla \cdot \mathbf{v}_0) \tilde{\boldsymbol{\omega}} = (\tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0.$$

Puis, l'équation de conservation de la masse pour l'écoulement porteur (1.19a) donne $D_t \rho_0 = -(\nabla \cdot \mathbf{v}_0) \rho_0$, ce qui termine l'établissement de l'équation de vorticité :

$$D_t \left(\frac{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}{\rho_0} \right) = -\frac{D_t \rho_0}{\rho_0^2} \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \frac{1}{\rho_0} D_t \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \frac{(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0}{\rho_0} \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \frac{1}{\rho_0} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \left(\frac{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}{\rho_0} \cdot \nabla \right) \mathbf{v}_0.$$

Montrons à présent que $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ est nul à tout instant. Ceci revient à montrer que le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} D_t \left(\frac{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}{\rho_0} \right) = \left(\frac{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}{\rho_0} \cdot \nabla \right) \tilde{\mathbf{v}}_0, \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t=0, \mathbf{x}) = \mathbf{0}, \end{cases}$$

admet pour seule solution la fonction identiquement nulle. Ceci se traite classiquement par la méthode des caractéristiques. Sous l'hypothèse d'un écoulement porteur suffisamment régulier, par exemple de classe \mathcal{C}^1 et borné : $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{C}_b^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on peut introduire le flot $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \Omega \mapsto \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) \in \Omega$, associé à \mathbf{v}_0 et défini par

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{X}(t, \mathbf{x})), \\ \mathbf{X}(t=0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}. \end{cases}$$

Alors la quantité

$$\mathbf{w}(t, \mathbf{x}) := \frac{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}{\rho_0}(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x})),$$

satisfait le système d'équations différentielles ordinaires suivant, paramétré par $\mathbf{x} \in \Omega$:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 \circ \mathbf{X}, \\ \mathbf{w}(t=0, \mathbf{x}) = \mathbf{0}, \end{cases}$$

qui n'admet bien comme solution que la fonction identiquement nulle. De plus, à $t \in \mathbb{R}^+$ fixé, l'application $\mathbf{X}_t : \mathbf{x} \in \Omega \mapsto \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) \in \Omega$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme. Ce qui termine la preuve :

$$\forall t \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t, \mathbf{x}) = \rho_0(\mathbf{X}_t^{-1}(\mathbf{x})) \mathbf{w}(t, \mathbf{X}_t^{-1}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}.$$

■

Une conséquence directe du lemme 2.1.2 est qu'il existe un potentiel, que nous notons $\tilde{\varphi}$, associé à la vitesse modifiée $\tilde{\mathbf{v}}$:

$$\nabla \tilde{\varphi} = \tilde{\mathbf{v}}.$$

Le potentiel $\tilde{\varphi}$ n'est pas défini de façon unique, par exemple l'ajout d'une constante laisse inchangé son lien avec $\tilde{\mathbf{v}}$, ou bien lorsque le domaine n'est pas simplement connexe par exemple, son choix devient arbitraire. Remplaçons à présent $\tilde{\mathbf{v}} = \nabla \tilde{\varphi}$ dans les équations d'Euler linéarisées réécrites (2.4), il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \nabla \tilde{\varphi} + \nabla (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \tilde{\varphi}) + \nabla \left(\frac{p}{\rho_0} \right) = \mathbf{g}, \end{array} \right. \quad (2.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t \left(\frac{p}{c_0^2 \rho_0} \right) + \rho_0^{-1} \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \tilde{\varphi}) - \frac{\mathbf{v}_0 \cdot \nabla s}{2c_p} = -f, \end{array} \right. \quad (2.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t s = h, \end{array} \right. \quad (2.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} = \nabla \tilde{\varphi} + \frac{s}{2c_p} \mathbf{v}_0. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

En rappelant que nous avons fait l'hypothèse que $\nabla \times \mathbf{g} = \mathbf{0}$, nous pouvons introduire également une fonction potentielle g_1 telle que $\nabla g_1 = \mathbf{g}$. Ainsi, l'équation (2.6) s'écrit

$$\nabla \left(\partial_t \tilde{\varphi} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \tilde{\varphi} + \frac{p}{\rho_0} - g_1 \right) = \mathbf{0}.$$

Il existe alors une fonction $\phi_0(t)$ qui ne dépend que du temps t telle que

$$D_t \tilde{\varphi} + \frac{p}{\rho_0} - g_1 = -\phi_0(t),$$

puis, si $\tilde{\varphi}_0$ est une primitive de ϕ_0 alors

$$D_t (\tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}_0) + \frac{p}{\rho_0} = g_1,$$

et donc, en notant finalement $\varphi = \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}_0$, on garde une relation de la forme $\mathbf{v} = \nabla \varphi$ et les équations s'écrivent

$$c_0^{-2} D_t \varphi + \frac{p}{c_0^2 \rho_0} = \frac{g_1}{c_0^2},$$

$$D_t \left(\frac{p}{c_0^2 \rho_0} \right) - \rho_0^{-1} \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \varphi) - \frac{\mathbf{v}_0 \cdot \nabla s}{2c_p} = -f,$$

$$D_t s = h,$$

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi + \frac{s}{2c_p} \mathbf{v}_0.$$

Finalement, on procède comme pour obtenir l'équation d'onde classique : composons par

D_t la première équation et soustrayons lui la seconde. On obtient ainsi l'équation des ondes convectées, portant sur deux inconnues scalaires, le potentiel de vitesse φ et l'entropie s :

$$D_t \left(c_0^{-2} D_t \varphi \right) - \rho_0^{-1} \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \varphi) = \frac{\mathbf{v}_0 \cdot \nabla s}{2c_p} + f + D_t \left(\frac{g_1}{c_0^2} \right), \quad (2.10a)$$

$$D_t s = h. \quad (2.10b)$$

Les inconnues physiques se retrouvent alors en calculant

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi + \frac{s}{2c_p} \mathbf{v}_0,$$

$$p = -\rho_0 D_t \varphi + \rho_0 g_1,$$

$$\rho = -\rho_0 c_0^{-2} D_t \varphi + \rho_0 c_0^{-2} g_1 - \frac{\rho_0}{c_p} s.$$

Il est intéressant de remarquer que les hypothèses que nous avons faites, à savoir que l'écoulement porteur est homentropique et irrotationnel, découple l'équation de l'entropie de l'équation d'onde. Ainsi, la perturbation de l'entropie peut être calculée au préalable puis le terme $(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla s)/2c_p$ devient un second membre connu de l'équation des ondes convectées (2.10a). Souvent, dans nos applications, l'entropie sera simplement prise égale à zéro, considérant que les perturbations de l'écoulement sont homentropiques également.

2.1.3 En écoulement rotationnel : discussion autour des modèles existants

Le modèle potentiel présenté précédemment ne prend pas en compte les interactions entre le rotationnel de l'écoulement porteur et la propagation acoustique. Pour remédier à cela, les équations les plus couramment utilisées sont sans doute les celles d'Euler linéarisées (LEE) ou plus rarement les équations de Navier-Stokes linéarisées (LNS) que nous avons choisi de ne pas présenter ici, voir par exemple les travaux récents de A. Bissuel, G. Allaire, L. Daumas, S. Barré et F. Rey [24]. Il existe plusieurs reformulations des équations d'Euler linéarisées, obtenues par changements de variables et d'inconnues :  quations de Galbrun, de M hring (que nous avons choisi de ne pas aborder, voir [25, 26]), de Goldstein Ces formulations peuvent s'avérer plus adaptées à certaines applications. C'est donc la formulation de Goldstein qui nous intéressera particulièrement dans cette thèse. Cette section n'a pas vocation à être exhaustive, cependant, nous donnons un aperçu de ces différentes formulations pour expliquer pourquoi celle que nous étudions est plus intéressante dans notre cas d'application. Pour une plus ample étude bibliographique, nous indiquons les références suivante [27, 28] de Nayfeh et Sun.

LEE. Les équations d'Euler linéarisées sont les premières équations auxquelles on aboutit après linéarisation des équations de la mécanique des fluides que nous avons détaillées dans la section 1.3.2. Il s'agit du modèle le plus utilisé en régime temporel et possède l'avantage de fournir directement les quantités physiques intéressantes dans les applications, pression, vitesse, etc ... Cependant, ces équations sont coûteuses en 3D car vectorielles : trois inconnues scalaires pour la vitesse, une pour la pression et éventuellement une autre pour l'entropie. Les premières approches numériques ont été les différences finies, comme par exemple dans

[14, 29] ou plus récemment [30]. Du côté de la discrétisation par éléments finis, constituées de plusieurs équations de transport couplées, elles nécessitent une résolution par une méthode plus sophistiquée, de type Méthodes de Galerkin Discontinues par exemple, [21, 18, 19]. En régime harmonique, la théorie est peu développée, notamment en ce qui concerne le caractère bien posé des équations par exemple. De plus, bien que possible, voir les travaux de G. Gabard [31] dans le cadre de la Méthode de Galerkin Discontinue, la mise en oeuvre de conditions aux limites impédantes ou absorbantes peut être délicate.

De plus, une contrainte venant du contexte industriel de cette thèse vient s'ajouter. Le code actuel ACTIPOLE d'Airbus Group Innovations implémente la version potentielle des équations de propagation acoustique et dans ce cadre, une formulation trop éloignée de ce qui existe ne nous apparaît pas le meilleur choix, notamment en vue d'une implémentation 3D. Nous souhaitons rester proche de la formulation « type onde » du modèle potentiel (2.10) et conserver autant que possible les méthodes de Galerkin classiques qui sont utilisées aujourd'hui.

Formulation de Galbrun. Galbrun, dans son article fondateur [32], propose une formulation alternative des équations d'Euler linéarisées en utilisant une description mixte eulérienne-lagrangienne de l'écoulement et de ses perturbations acoustiques. L'inconnue, notée \mathbf{u} , est la perturbation du déplacement et satisfait une équation vectorielle qui a l'avantage d'être proche d'une équation d'onde. Ces deux dernières décennies, ces équations ont été considérées au laboratoire POEMS pour des applications en aéronautique. Par exemple, dans sa thèse [2], G. Legendre étudie la formulation de Galbrun pour un écoulement uniforme dans un guide. Son travail est généralisé aux écoulements cisailés dans un guide, puis à des écoulements beaucoup plus généraux en espace libre, respectivement par les thèses d'E.-M. Duclairoir [33] et d'E. Peynaud [3].

Bien qu'un traitement direct de l'équation grâce à des éléments finis d'ordre élevé donne des résultats satisfaisant, voir G. Gabard, M. Ben Tahar et al., [34, 35], des problèmes de stabilité apparaissent avec l'approche classique de discrétisation de Galerkin. Ces problèmes sont résolus, par exemple, en utilisant une version équivalente, dites augmentée [2, 36], qui introduit la quantité $\boldsymbol{\psi} := \nabla \times \mathbf{u}$. Alors, les avantages de l'équation de Galbrun pour notre cas d'application ont dû être nuancés. En effet, la version augmentée possède une inconnue vectorielle supplémentaire, ce qui donne le même nombre d'inconnues que pour les équations d'Euler linéarisées en 2D, 4, car $\boldsymbol{\psi}$ est alors un rotationnel 2D assimilable à un scalaire, mais ce nombre d'inconnues passe à 6 en 3D car $\boldsymbol{\psi}$ est alors un vecteur de \mathbb{R}^3 .

2.2 Une approche perturbative du modèle potentiel par les équations de Goldstein

En 1978, Goldstein introduit une formulation des équations de l'aéroacoustique [37], dans le cas d'un écoulement porteur potentiel mais soumis à des sources rotationnelles. Le modèle potentiel décrit précédemment ne s'applique donc plus. Cependant, ces équations sont proches de celle du modèle potentiel, une nouvelle inconnue vectorielle, dite hydrodynamique, est introduite. Cette dernière satisfait une équation de type transport, découplée de l'équation des ondes convectées, pouvant donc être pré-calculée. Il ne reste alors qu'un problème de propagation dans un fluide potentiel où l'inconnue hydrodynamique joue le rôle de sources additionnelles permettant la prise en compte de la vorticité introduite par les sources. Bien que ces équations se soient ensuite avérées utiles en mécanique des fluides pour l'étude

de la stabilité des écoulements tourbillonnaires (*swirling flows*), souvent non-compressibles, par exemple [38], [39] ou [40], elles n'ont pas   notre connaissance été utilisées pour de la propagation aéroacoustique.

Le but de cette partie est de généraliser les équations introduites par Goldstein au cadre d'un écoulement porteur rotationnel en présence de sources quelconques. Dans une approche similaire à celle de Goldstein, une inconnue hydrodynamique est introduite et vérifie une équation de transport. Cependant, en écoulement quelconque, cette équation de transport est couplée à l'équation des ondes convectées et l'inconnue hydrodynamique ne peut pas être déterminée a priori. Les idées sont reprises d'un article de J.-F. Mercier, C. Mietka, F. Millot et V. Pagneux [41] soumis et initiateur de cette thèse ainsi que de l'étude de cette nouvelle formulation au laboratoire POEMS pour des applications en aéronautique. En particulier, un soin important sera pris pour établir le lien entre les nouvelles inconnues et celles des équations d'Euler linéarisées.

2.2.1  tablissement de la formulation de Goldstein

Nous reprenons le cadre d'un écoulement porteur d'un gaz parfait, non visqueux et homentropique. Nous ne supposons plus néanmoins que $\omega_0 = \mathbf{0}$ ni que $\nabla \times \mathbf{g} = \mathbf{0}$. Effectuons au préalable une décomposition de Helmholtz de la source \mathbf{g} . On introduit g_1 et \mathbf{g}_2 telles que :

$$\mathbf{g} = \nabla g_1 + \nabla \times \mathbf{g}_2.$$

Dans cette sous-section, nous prouvons le théorème principal suivant, établissant les équations de Goldstein :

Théorème 2.2.1 (Equations de Goldstein). *Le vecteur (p, \mathbf{v}, s) est solution des équations d'Euler linéarisées (2.4) si et seulement si*

$$\begin{cases} D_t (c_0^{-2} D_t \varphi) - \rho_0^{-1} \nabla \cdot (\rho_0 (\nabla \varphi + \xi)) - \frac{\mathbf{v}_0 \cdot \nabla s}{2c_p} = f + D_t (c_0^{-2} g_1), & (2.11a) \\ D_t \xi + (\xi \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \omega_0 \times \nabla \varphi = \nabla \times \mathbf{g}_2, & (2.11b) \\ D_t s = h, & (2.11c) \end{cases}$$

où (φ, ξ) est l'unique solution de

$$\begin{cases} D_t \varphi = g_1 - \frac{p}{\rho_0}, & (2.12a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi = \mathbf{v} - \frac{s}{2c_p} \mathbf{v}_0 - \nabla \varphi, & (2.12b) \end{cases}$$

Preuve.

1. Prouvons le sens direct. Soit (p, \mathbf{v}, s) solution des équations d'Euler linéarisées écrites sous forme simplifiée (2.4). Soit φ l'unique solution du problème d'évolution (2.12a) et soit ξ défini par l'équation (2.12b). Comme dans la preuve du lemme (2.1.2), l'identité de Leibniz (2.5) permet d'écrire le terme $(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0$ de l'équation (2.4a) en fonction des vorticités

$\omega_0 = \nabla \times \mathbf{v}_0$ et $\tilde{\omega} = \nabla \times \tilde{\mathbf{v}}$:

$$(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = \nabla(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}) + \omega_0 \times \tilde{\mathbf{v}} + \omega \times \mathbf{v}_0.$$

Il vient

$$\partial_t \tilde{\mathbf{v}} + \nabla(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}) + \omega_0 \times \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\omega} \times \mathbf{v}_0 + \nabla \left(\frac{p}{\rho_0} \right) = \nabla g_1 + \nabla \times \mathbf{g}_2.$$

Puis, regroupant les gradients entre eux, en remplaçant $\tilde{\mathbf{v}} = \nabla \varphi + \xi$ et $p/\rho_0 = g_1 - D_t \varphi$ et en remarquant que $\nabla \times \xi = \tilde{\omega}$, l'équation devient :

$$\nabla(\cancel{\partial_t \varphi} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \varphi + \mathbf{v}_0 \cdot \xi + g_1 - \cancel{D_t \varphi}) + \partial_t \xi + \omega_0 \times (\nabla \varphi + \xi) + (\nabla \times \xi) \times \mathbf{v}_0 = \cancel{\nabla g_1} + \nabla \times \mathbf{g}_2.$$

L'identité de Leibniz nous sert encore une fois pour transformer le terme $\nabla(\mathbf{v}_0 \cdot \xi) + \omega_0 \times \xi + (\nabla \times \xi) \times \mathbf{v}_0$:

$$\nabla(\mathbf{v}_0 \cdot \xi) + \omega_0 \times \xi + (\nabla \times \xi) \times \mathbf{v}_0 = (\xi \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \xi,$$

ce qui donne finalement l'équation de transport attendue sur ξ

$$D_t \xi + (\xi \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \omega_0 \times \nabla \varphi = \nabla \times \mathbf{g}_2.$$

L'équation du type ondes convectées vient, comme dans le cas potentiel, de l'équation (2.4b). En effet, en remplaçant simplement p/ρ_0 et $\tilde{\mathbf{v}}$, il vient

$$D_t \left(c_0^{-2} (g_1 - D_t \varphi) \right) - \rho_0^{-1} \nabla \cdot (\rho_0 (\nabla \varphi + \xi)) - \frac{\mathbf{v}_0 \cdot \nabla s}{2c_p} = -f,$$

qui se ré-écrit bien sous la forme voulue (2.11a).

2. La réciproque se fait par un calcul direct que nous ne détaillons pas ici. ■

Régime harmonique. Comme nous l'avons présenté en introduction, les caractéristiques des sources du réacteur nous mènent à faire les calculs en régime harmonique. A la pulsation $\omega > 0$ et en présence de sources harmoniques $f(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ et $\mathbf{g}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$, on cherche $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$ et $\hat{\xi}(\mathbf{x})$ tels que $\varphi(t, \mathbf{x}) = \Re(\hat{\varphi}(\mathbf{x})e^{-i\omega t})$ et $\xi(t, \mathbf{x}) = \Re(\hat{\xi}(\mathbf{x})e^{-i\omega t})$. Par abus de notations, nous continuerons à noter φ et ξ les inconnues harmoniques $\hat{\varphi}$ et $\hat{\xi}$, qui satisfont alors les équations de Goldstein harmoniques :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_\omega \left(c_0^{-2} D_\omega \varphi \right) - \rho_0^{-1} \nabla \cdot (\rho_0 (\nabla \varphi + \xi)) - \frac{\mathbf{v}_0 \cdot \nabla s}{2c_p} = f + D_\omega \left(c_0^{-2} g_1 \right), \end{array} \right. \quad (2.13a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_\omega \xi + (\xi \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \omega_0 \times \nabla \varphi = \nabla \times \mathbf{g}_2, \end{array} \right. \quad (2.13b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_\omega s = h, \end{array} \right. \quad (2.13c)$$

où la dérivée matérielle D_t est transformée en l'opérateur de dérivée convective harmonique D_ω suivant :

$$D_\omega := -i\omega + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla, \quad (2.14)$$

qui est un opérateur ne dérivant qu'en espace.

2.2.2 Décomposition de l'inconnue hydrodynamique

Dans cette section, nous allons voir une propriété très importante de la formulation de Goldstein qui explique en grande partie notre attrait pour celle-ci. Il s'agit de démontrer qu'en l'absence de source de perturbation rotationnelle, l'inconnue hydrodynamique ξ introduite par (2.12b) s'écrit :

$$\xi = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_0, \quad (2.15)$$

où la quantité \mathbf{u} sera précisée ultérieurement. Cette égalité a pour conséquences importantes que la quantité ξ est localisée dans le support du rotationnel de l'écoulement porteur en l'absence de sources rotationnelles et que de plus elle est faible si ce dernier l'est également. Ce constat est primordial à notre approche par perturbation du modèle potentiel. Que ce soit du point de vue de la physique de notre application, de celui du code potentiel déjà existant, ou de celui de l'étude théorique que nous présenterons, il est important de voir ξ comme une inconnue ajoutée au modèle potentiel, une correction, qui se doit d'être petite lorsque l'écoulement est proche d'un écoulement potentiel. Il est à noter néanmoins que la formulation de Goldstein est bien équivalente aux équations d'Euler linéarisées même en cas d'écoulements porteurs fortement rotationnels, et qu'aucune hypothèse de petitesse de ξ par rapport à $\nabla\varphi$ n'a été introduite au préalable dans le modèle.

Commençons par définir la perturbation du déplacement lagrangien \mathbf{u} , apparaissant comme inconnue de l'équation de Galbrun. Plus précisément, pour une vitesse $\tilde{\mathbf{v}}$ donnée, on définit \mathbf{u} comme solution du problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} D_t \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = \tilde{\mathbf{v}}, \\ \mathbf{u}(0, \cdot) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Montrons alors d'abord que la quantité $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_0$ satisfait une équation semblable à l'équation de transport (2.11b) satisfait par ξ . A savoir, nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.2.2. *La quantité*

$$\zeta := \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_0,$$

est solution du problème

$$\begin{cases} D_t \zeta + (\zeta \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + (\zeta - \tilde{\mathbf{v}}) \times \boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}, \\ \zeta(0, \cdot) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (2.17)$$

Preuve. Commençons par exprimer $D_t \zeta$, en utilisant le fait que D_t se comporte comme une dérivation :

$$D_t \zeta = D_t (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_0) = D_t \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{u} \times D_t \boldsymbol{\omega}_0,$$

puis, en utilisant la définition (2.16) de \mathbf{u} et l'équation de la vorticité de l'écoulement porteur (1.20), il vient

$$D_t \zeta = ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \tilde{\mathbf{v}}) \times \boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{u} \times ((\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 - (\nabla \cdot \mathbf{v}_0) \boldsymbol{\omega}_0).$$

Calculons   présent

$$\begin{aligned} D_t \zeta + (\zeta \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + (\zeta - \tilde{\mathbf{v}}) \times \boldsymbol{\omega}_0 &= (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{u} \times (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0, \\ &\quad - (\nabla \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_0 + (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_0) \times \boldsymbol{\omega}_0 + [(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_0) \cdot \nabla] \mathbf{v}_0. \end{aligned}$$

Ensuite, utilisons l'identité vectorielle suivante, pour tout champ de vecteurs \mathbf{a} , \mathbf{b} , suffisamment réguliers,

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} - (\nabla \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \nabla) \times \mathbf{b},$$

avec $\mathbf{a} := \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_0$ et $\mathbf{b} := \mathbf{v}_0$:

$$-(\nabla \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_0 + (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_0) \times \boldsymbol{\omega}_0 + [(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_0) \cdot \nabla] \mathbf{v}_0 = ((\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_0) \times \nabla) \times \mathbf{v}_0,$$

et donc

$$D_t \zeta + (\zeta \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + (\zeta - \tilde{\mathbf{v}}) \times \boldsymbol{\omega}_0 = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{u} \times (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + ((\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_0) \times \nabla) \times \mathbf{v}_0.$$

Ensuite, constatons que l'identité vectorielle pour $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \mathbf{y}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) - \mathbf{x}(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}),$$

permet d'établir, en remplaçant \mathbf{z} par l'opérateur ∇ et en composant par le produit vectoriel, que pour tout champ de vecteurs suffisamment réguliers \mathbf{a} , \mathbf{b} et \mathbf{c} ,

$$\begin{aligned} [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \nabla] \times \mathbf{c} &= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \nabla) \times \mathbf{c} - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \nabla) \times \mathbf{c}, \\ &= \mathbf{b} \times (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{c} - \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{c}. \end{aligned}$$

En substituant $\mathbf{a} := \mathbf{u}$, $\mathbf{b} := \boldsymbol{\omega}_0$ et $\mathbf{c} := \mathbf{v}_0$, il vient

$$((\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_0) \times \nabla) \times \mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 - \mathbf{u} \times (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0,$$

ce qui donne finalement le résultat voulu :

$$D_t \zeta + (\zeta \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + (\zeta - \tilde{\mathbf{v}}) \times \boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}.$$

■

Alors, du lemme 2.2.2, il vient la décomposition suivante de l'inconnue hydrodynamique :

Théorème 2.2.3 (Décomposition de ξ). *Soit ξ^{g_2} l'unique solution du problème de Cauchy suivant, ne dépendant que de \mathbf{g}_2 :*

$$\begin{cases} D_t \xi^{g_2} + (\xi^{g_2} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \xi^{g_2} \times \boldsymbol{\omega}_0 = \nabla \times \mathbf{g}_2, \\ \xi^{g_2}(0, \cdot) = \mathbf{0}, \end{cases}$$

et \mathbf{u} la perturbation du déplacement définie par (2.16), alors, ξ s'écrit

$$\xi = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_0 + \xi^{g_2}.$$

Preuve. La preuve est très simple une fois le lemme 2.2.2 établi. En effet, il suffit de soustraire les équations (2.11b) satisfaites par ξ à celles (2.17) satisfaites par $\zeta := \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_0$, il vient :

$$D_t (\xi - \zeta) + ((\xi - \zeta) \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + (\nabla \varphi - \zeta + \tilde{\mathbf{v}}) \times \boldsymbol{\omega}_0 = \nabla \times \mathbf{g}_2.$$

Ainsi, $\xi - \zeta = \xi^{g_2}$ satisfait bien l'équation recherchée en remarquant que par définition (2.12b), $\xi = -\nabla \varphi + \tilde{\mathbf{v}}$. ■

2.2.3 Avantages prospectifs de la formulation de Goldstein dans le contexte industriel d'Airbus et objectifs de la thèse

La formulation de Goldstein présente ainsi en apparence toutes les qualités que l'industriel Airbus avait posées. Le modèle se comprend naturellement comme une perturbation de l'approximation faite chez Airbus d'une propagation acoustique en écoulement potentiel. Cette perturbation est crée localement, dans les régions de l'espace pour lesquelles nous obtiendrons un rotationnel non nul du fluide : cette propriété est importante car elle ne modifie pas les inconnues du problème initial mais en rajoute simplement. La méthodologie de calcul consistant en la comparaison des deux modèles est immédiatement déployable.

La notion de « seuil » pour décider que le rotationnel est négligeable ou non est donc très facile à réaliser et il faut bien se souvenir que le fluide est une donnée de la simulation, qu'il a été calculé par diverses approximations et que seules ses fluctuations pour le phénomène de propagation sont à retenir pour la simulation du rayonnement acoustique cherché. En particulier, il faudra déterminer par des études paramétriques numériques à partir de quelles valeurs et quelle échelle l'effet est visible pour la propagation à une fréquence donnée : les experts s'attendent à des phénomènes d'homog n sation à de très petites échelles et des phénomènes de transparence à de très faibles valeurs de rotationnel, en faisant une analogie entre fluctuation de vitesse du fluide porteur et fluctuation de la vitesse du son dans le milieu de propagation ; cette analogie n'étant néanmoins pas démontrée. Comme les inconnues supplémentaires sont localisées et normalement en nombre très inférieur aux inconnues de la formulation retenue pour le fluide potentiel, on peut espérer que le surc ot soit faible et qu'en conséquence, les analyses paramétriques qui sont visées soient réalisables en pratique avec les mêmes moyens de calcul et de techniques HPC que pour le code en service actuellement.

Cependant, on peut lister un certain nombre de points à clarifier qui feront en pratique l'ossature du contrat CIFRE   l'origine de ce travail de recherche.

- Concernant l'équation : l'équation de transport a été étudiée en détail dans la littérature scientifique et les schémas numériques associés sont également bien document s ; mais, en revanche, l'équation de transport qui apparaît dans les équations de Goldstein présente un manque de dissipation qui est peu ou moins document  dans cette littérature. En particulier, elle ne rentre pas dans la catégorie des systèmes de Friedrichs sans hypothèses particulières sur l'écoulement. L'étude de cette équation de transport en régime harmonique fait l'objet de la deuxième partie de cette thèse.
- Concernant le système couplé : la formulation de Goldstein se présente comme une perturbation et sur les zones où la contribution du rotationnel de l'écoulement est forte, les inconnues ajoutées se couplent aux inconnues classiques de l'acoustique. Le caractère bien posé de ce système couplé n'a jamais été démontré à notre connaissance et, plus difficile, sachant que la formulation de Goldstein est associée à une modélisation fluide particulière (via les équations d'Euler stationnaires) on peut s'attendre à des difficultés héritées de ce modèle de fluide, en particulier en ce qui concerne le comportement «   l'infini », par manque de viscosité. D'un point de vue pratique, il se pourrait que l'on ne dispose pas des propriétés optimales simplement parce qu'on suppose que l'écoulement vérifie une équation qui a peu de chance d'être réaliste. Néanmoins, en partant de cette équation « modèle » on cherchera les conditions d'existence et d'unicité de la solution du problème couplé « approchant le problème industriel réel ». L'étude du couplage de Goldstein fera l'objet de la troisième partie de cette thèse.

- Concernant le maillage : les inconnues supplémentaires vérifient une équation qui s'apparente au transport dont la nature semble très différente de celle d'une équation de propagation d'onde. On peut donc légitimement se poser la question de savoir si l'ensemble de ces inconnues sont à calculer à la même échelle (c'est-à-dire en pratique sur le même maillage). En effet, à terme, les ingénieurs d'Airbus souhaitent dissocier autant que de possible les deux parties du système couplé et affecter à chaque partie le « meilleur maillage » pour des questions de performance. Même si cette optimisation algorithmique ne fait pas partie du plan de travail, nous devons nous préoccuper de l'analyse des conditions de couplages qui pourraient être écrites de manière faible.
- Concernant les conditions à l'infini : le problème industriel est posé en domaine non borné et la solution retenue a été de prendre la représentation intégrale de l'équation d'onde pour fermer le domaine de calcul. Quand on considère le modèle couplé perturbé de Goldstein, un « raccord » naturel est hérité sur les inconnues acoustiques et aucun travail supplémentaire n'est a priori requis. Ceci à condition que l'inconnue hydrodynamique ne parvienne pas jusqu'au bord du domaine. Nous verrons que le manque de dissipation des équations d'Euler stationnaires par rapport auxquelles on linéarise pour obtenir la formulation de Goldstein ne garantit une décroissance de cette perturbation suffisante pour l'ignorer au bord du domaine de calcul. Il conviendra d'analyser la façon de la prendre en compte dans les conditions de rayonnement.

En résumé, le contenu du travail de thèse couvre :

- L'établissement du modèle de Goldstein et l'identification des hypothèses associées (une difficulté particulière est d'avoir une formulation harmonique avec un écoulement approché)
- L'analyse théorique et l'étude numérique de l'équation de transport harmonique qui présente des difficultés que nous présenterons.
- L'analyse du problème couplé de Goldstein, en adoptant une vision perturbative, en écoulement faiblement rotationnel.

Deuxième partie

Analyse d'une équation de transport en régime harmonique

Chapitre 3

Introduction à une équation de transport harmonique vectorielle

3.1	Introduction	67
3.2	Cadre fonctionnel et opérateur de transport	69
3.3	Géométries simples : solutions explicites et mise en évidence de résonances	74
3.3.1	Écoulement cisailé	74
3.3.2	Écoulement en rotation solide	76

3.1 Introduction

Remarque préliminaire. Cette partie peut être abordée indépendamment du reste de la thèse et a vocation à établir des résultats relatifs à une équation de transport en régime harmonique. Ces résultats nous seront ensuite utiles dans l'étude du couplage de Goldstein, dans lequel cette équation de transport harmonique intervient.

On considère un champ de vecteurs $\mathbf{v}_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, de classe \mathcal{C}^1 , défini sur tout l'espace \mathbb{R}^d . La dimension $d \in \mathbb{N}^*$ de l'espace sera dans nos applications typiquement 2 ou 3, nous laisserons d lorsque qu'elle pourra être prise quelconque et spécifierons lorsqu'il sera important que $d = 2$ ou $d = 3$. Nous nous intéressons à l'équation de transport suivante, posée sur un domaine borné Ω de \mathbb{R}^d à frontière lipschitzienne,

$$-i\omega\xi + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\xi + (\xi \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 = \mathbf{f}, \quad (3.1)$$

où $\xi, \mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^d$, et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ est le paramètre de pulsation. L'équation (3.1) correspond à la recherche d'une solution harmonique $\xi^*(t, \mathbf{x}) := \xi(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ de l'équation de transport en régime temporel suivante,

$$\partial_t \xi^* + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\xi^* + (\xi^* \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 = \mathbf{f}^*, \quad (3.2)$$

soumise au forçage $\mathbf{f}^*(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$. Cette dernière régit le transport de la quantité ξ^* par l'écoulement \mathbf{v}_0 . Les composantes de ξ^* sont couplées, amplifiées ou atténuées par le terme

d'ordre zéro $(\xi^* \cdot \nabla) \mathbf{v}_0$. En aéroacoustique, \mathbf{v}_0 représente l'écoulement porteur de la perturbation acoustique et satisfait, entre autre, l'équation d'Euler de conservation de la masse :

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0,$$

où ρ_0 est la densité volumique du fluide. Pour alléger l'écriture et comme il est coutume en mécanique des fluides, introduisons l'opérateur de dérivée matérielle relatif à l'écoulement \mathbf{v}_0 , défini par $D_t := \partial_t + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla$, puis notons

$$D_\omega \xi := -i\omega \xi + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \xi, \quad (3.3)$$

son pendant en régime harmonique. Nous serons également amené à étudier cette équation sous la forme plus générale suivante :

$$D_\omega \xi + \mathbb{A} \xi = f, \quad (3.4)$$

où $\mathbb{A} : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ est une application à valeurs matricielles que l'on supposera bornée : $\mathbb{A} \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_d(\mathbb{C}))$. L'équation (3.1) en est un cas particulier, lorsque \mathbb{A} est la matrice jacobienne du champ \mathbf{v}_0 ,

$$\mathbb{A} := \nabla \mathbf{v}_0 = \left(\partial_{x_j} v_{0,i} \right)_{i,j}.$$

Bien qu'il existe une très vaste littérature autour des équations de transport, celle-ci, qui est vectorielle, harmonique et à coefficients complexes n'entre pas naturellement dans un cadre garantissant l'existence et l'unicité des solutions. Par exemple, elle ne satisfait pas les conditions pour être un système de Friedrichs à cause d'un manque de dissipation. D'autre part, contrairement à l'équation correspondante en régime temporel, elle ne possède pas a priori de direction de transport privilégiée, ce qui empêche d'appliquer directement la méthode des caractéristiques par exemple.

Dans ce chapitre, nous discutons du caractère bien posé de l'équation de transport (3.1) et plus généralement de l'équation (3.4). Nous rappelons dans un premier temps le cadre fonctionnel standard dans lequel chercher les solutions de ces équations puis montrons qu'il n'est pas toujours possible d'en obtenir l'existence ou l'unicité.

Dans [3], en étudiant la formulation de Galbrun, équivalente à celle de Goldstein que nous étudions, E. Peynaud analyse la version scalaire de l'équation de transport harmonique, de la forme suivante :

$$\alpha \psi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi = f, \quad (3.5)$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$. Cette équation intervient dans la formulation de Galbrun avec $\alpha = -i\omega$. Elle souffre alors également du problème de non dissipation. Il est montré qu'elle peut être mal posée lorsque l'écoulement est recirculant, i.e. lorsqu'il existe des lignes caractéristiques de \mathbf{v}_0 fermées. E. Peynaud adapte l'étude d'Azerad [42] et démontre que sous l'hypothèse que \mathbf{v}_0 est Ω -remplissant, l'équation (3.5), adjointe de conditions aux bords ad hoc, est bien posée. Nous verrons que ces résultats se généralisent à notre équation de transport vectorielle. Lorsque $\mathbb{A} = 0$ dans l'équation (3.4), les composantes de ξ se découplent et vérifient chacune l'équation (3.5) avec $\alpha = -i\omega$.

Nos travaux constituent donc une généralisation de ceux de [3], étendant au cas vectoriel le caractère bien posé de l'équation (3.4) sous l'hypothèse que l'écoulement \mathbf{v}_0 est domaine-remplissant. La principale difficulté provient de l'impossibilité d'obtenir une expression explicite des solutions le long des trajectoires via la méthode des caractéristiques à cause du

couplage des composantes induit par \mathbb{A} . Nous présentons également une preuve nécessitant moins de régularité sur l'écoulement évitant de passer par les lignes caractéristiques, mais sous une hypothèse plus restrictive sur \mathbf{v}_0 : l'existence d'une direction privilégiée de propagation selon laquelle \mathbf{v}_0 ne s'annule pas.

3.2 Cadre fonctionnel et opérateur de transport

Commençons par présenter le cadre fonctionnel et la géométrie que nous considérons pour notre problème de transport.

Géométrie de base. Nous supposons, comme dans tout le manuscrit, que les grandeurs caractéristiques de l'écoulement porteur, sa vitesse \mathbf{v}_0 ou sa densité ρ_0 sont des fonctions suffisamment régulières : nous faisons l'hypothèse que $\mathbf{v}_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est de classe \mathcal{C}^1 et que $\rho_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, comprise entre deux bornes ρ_- et ρ_+ :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < \rho_- \leq \rho_0(\mathbf{x}) \leq \rho_+. \quad (3.6)$$

Nous considérons un domaine (ouvert connexe) borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, à frontière lipschitzienne, notée $\Gamma := \partial\Omega$. Cela permet de définir $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, la normale extérieure à Γ , pour presque tout point $\mathbf{x} \in \Gamma$. Classiquement pour les problèmes du premier ordre, nous avons besoin d'une classification de la frontière pour imposer des conditions aux limites. Ainsi, nous distinguons la frontière entrante Γ_- , sortante Γ_+ et glissante Γ_0 selon que l'écoulement porteur \mathbf{v}_0 entre dans le domaine, en sort ou glisse le long de cette frontière. Plus précisément, nous posons

$$\begin{aligned} \Gamma_{\pm} &:= \left\{ \mathbf{x} \in \partial\Omega, \pm \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) > 0 \right\}, \\ \Gamma_0 &:= \left\{ \mathbf{x} \in \partial\Omega, \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Opérateur de transport et espaces fonctionnels. Bien qu'il soit possible d'envisager l'étude de l'équation de transport harmonique dans un cadre non hilbertien, voir par exemple [43] pour le cas particulier des systèmes de Friedrichs, il s'agit du cadre naturel indiqué par la physique du problème d'aéroacoustique. En effet, dans le cas d'un écoulement \mathbf{v}_0 potentiel et subsonique ($|\mathbf{v}_0/c_0| < 1$), les équations de Goldstein dégénèrent en une équation elliptique sur φ , qui appartient alors naturellement à $H^1(\Omega)$ lorsque le terme source est dans $L^2(\Omega)$. La solution est alors d'énergie finie $E := \int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 < \infty$ puisque \mathbf{v} est donnée par la relation $\mathbf{v} = \nabla\varphi$. Dans le cas général, il reste naturel de chercher une solution pour laquelle $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d$. Ainsi, gardant φ dans $H^1(\Omega)$, nous avons $\xi = \mathbf{v} - \nabla\varphi$ à chercher dans $L^2(\Omega)^d$.

Pour $\xi = (\xi_i)_i \in L^2(\Omega)^d$, définissons $(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\xi$ au sens des distributions par

$$\forall \phi = (\phi_i)_i \in \mathcal{D}(\Omega)^d,$$

$$\langle (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\xi, \phi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)^d, \mathcal{D}(\Omega)^d} := - \left(\xi, \nabla \cdot (\bar{\phi} \otimes \mathbf{v}_0) \right)_{L^2(\Omega)^d} = - \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \xi_i \partial_j (\phi_i v_{0,j}). \quad (3.7)$$

Pour des questions de commodité qui apparaîtront par la suite, nous nous plaçons dans l'espace à poids $L^2(\Omega, \rho_0)^d$. L'hypothèse que ρ_0 est compris entre deux valeurs strictement positives (3.6) entraîne qu'il n'y a pas de différence entre les deux espaces : $L^2(\Omega, \rho_0)^d = L^2(\Omega)^d$.

Introduisons l'opérateur de transport, non borné, défini sur $L^2(\Omega, \rho_0)^d$, intervenant dans l'équation (3.1),

$$\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0} : D(\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}) \subset L^2(\Omega, \rho_0)^d \rightarrow L^2(\Omega, \rho_0)^d,$$

défini par

$$\forall \xi \in L^2(\Omega, \rho_0)^d, \quad \mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0} \xi := (-i\omega \text{Id} + \mathbb{A})\xi + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\xi,$$

dont le domaine $D(\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0})$ est un sous-espace fermé de l'espace du graphe de l'opérateur $\mathbf{v}_0 \cdot \nabla$ que nous préciserons par la suite :

$$D(\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}) \subset H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0) := \left\{ \xi \in L^2(\Omega, \rho_0)^d : (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\xi \in L^2(\Omega, \rho_0)^d \right\}.$$

On peut trouver une preuve dans [44] et [45] que $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$ est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire

$$\forall \xi, \zeta \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0), \quad (\xi, \zeta)_{H(\Omega)} := \int_{\Omega} \rho_0 \xi \cdot \bar{\zeta} + \int_{\Omega} \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\xi \cdot \overline{(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\zeta},$$

associé à la norme notée $\|\xi\|_{H(\Omega)} := \sqrt{(\xi, \xi)_{H(\Omega)}}$. Lorsqu'il n'y a pas ambiguïté sur le domaine d'étude considéré, nous noterons plus simplement $(\cdot, \cdot)_H$ le produit scalaire et $\|\cdot\|_H$ la norme associée.

Densité et traces dans $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$. Pour définir le problème de transport harmonique avec conditions au bord homogènes et non-homogènes, nous avons besoin préalablement de quelques résultats de densité et de trace dans l'espace $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$. Commençons par énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 (Densité). *L'ensemble des applications $C^\infty(\overline{\Omega})^d$ est dense dans $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$, où $C^\infty(\overline{\Omega})^d$ est l'ensemble des restrictions à $\overline{\Omega}$ des applications de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)^d$.*

Preuve. Voir la preuve dans un cadre plus général dans [43]. ■

Afin de définir les conditions aux limites de notre problème, nous avons besoin de donner un sens à la trace des fonctions de $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$. Dans un premier temps, rappelons le cas bien connu de l'espace $H^1(\Omega)$, voir [46] :

Théorème 3.2.2 (trace dans $H^1(\Omega)$). *Comme la frontière Γ de Ω est lipschitzienne, il existe une unique application linéaire continue $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ telle que*

$$\forall \phi \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad \gamma_0(\phi) = \phi|_{\Gamma}.$$

Cette application a pour image l'espace de Sobolev fractionnaire $H^{1/2}(\Gamma)$ et admet un inverse à droite $R : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega)$, bijectif et continu :

$$\forall g \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \gamma_0(Rg) = g.$$

L'espace $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$ est plus riche que $H^1(\Omega)$ et ne permet pas une caractérisation intrinsèque de son espace de trace dans le cas le plus général, voir les discussions dans [43]. On peut néanmoins définir la quantité au bord $\rho_0(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n})\xi$ au sens de $H^{-1/2}(\Gamma)^d$ à partir d'une formule d'intégration par parties comme présentée dans le théorème suivant.

Théorème 3.2.3 (intégration par parties et trace). *Pour deux fonctions lisses $\xi, \zeta \in C^\infty(\overline{\Omega})^d$, nous avons la formule d'intégration par parties suivante :*

$$\int_{\Gamma} \rho_0(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) \xi \cdot \zeta = \int_{\Omega} \rho_0(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \xi \cdot \zeta + \rho_0 \xi \cdot (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \zeta, \quad (3.8)$$

ce qui définit un opérateur continu σ de trace

$$\sigma : \xi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0) \mapsto \rho_0(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) \xi \in H^{-1/2}(\Gamma)^d, \quad (3.9)$$

qui a tout $\xi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$ associe

$$\forall \mathbf{g} \in H^{1/2}(\Gamma)^d, \quad \langle \sigma(\xi), \mathbf{g} \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)^d, H^{1/2}(\Gamma)^d} = \int_{\Omega} \rho_0 \xi \cdot (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) R^d \mathbf{g} + \rho_0 ((\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \xi) \cdot R^d \mathbf{g},$$

où $R^d \mathbf{g} := (Rg_1, \dots, Rg_d) \in H^1(\Omega)^d$.

Preuve. La formule d'intégration par parties s'obtient par application de la formule de Green et un calcul direct. Puis en définissant la forme bilinéaire \mathcal{B} sur $C^\infty(\overline{\Omega})^d \times C^\infty(\overline{\Omega})^d$ par

$$\forall \xi, \zeta \in C^\infty(\overline{\Omega})^d, \quad \mathcal{B}(\xi, \zeta) := \int_{\Omega} \rho_0(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \xi \cdot \zeta + \rho_0 \xi \cdot (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \zeta,$$

on a l'estimation suivante, pour tout $\xi, \zeta \in C^\infty(\overline{\Omega})^d$

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(\xi, \zeta)| &\leq \|(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d} \|\zeta\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d} + \|\xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d} \|(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \zeta\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d} \\ &\leq \|\xi\|_H \left(\|\zeta\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d} + \|(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \zeta\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d} \right) \\ &\leq \rho_+ \left(1 + \|\mathbf{v}_0\|_{L^\infty(\Omega)^d} \right) \|\xi\|_H \|\zeta\|_{H^1(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

Ainsi, par densité de $C^\infty(\overline{\Omega})^d$ dans $H^1(\Omega)^d$ et dans $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$, voir 3.2.1, la forme bilinéaire \mathcal{B} s'étend de façon unique à $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0) \times H^1(\Omega)^d$. Pour passer à un opérateur qui agit sur la frontière, posons, pour $(\xi, \mathbf{g}) \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0) \times H^{1/2}(\Gamma)^d$,

$$\widetilde{\mathcal{B}}(\xi, \mathbf{g}) := \mathcal{B}(\xi, R^d \mathbf{g}). \quad (3.10)$$

Par continuité de l'opérateur de relèvement R^d , il existe une constante $C_{R^d} > 0$ telle que

$$\forall \mathbf{g} \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \|\mathbf{g}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C_{R^d} \|R^d \mathbf{g}\|_{H^1(\Omega)^d},$$

d'où l'on déduit que pour tout $(\xi, \mathbf{g}) \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0) \times H^{1/2}(\Omega)^d$,

$$\begin{aligned} |\widetilde{\mathcal{B}}(\xi, \mathbf{g})| &\leq \rho_+ \left(1 + \|\mathbf{v}_0\|_{L^\infty(\Omega)^d} \right) \|\xi\|_H \|R^d \mathbf{g}\|_{H^1(\Omega)^d} \\ &\leq \rho_+ \left(1 + \|\mathbf{v}_0\|_{L^\infty(\Omega)^d} \right) C_{R^d} \|\xi\|_H \|\mathbf{g}\|_{H^{1/2}(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

Cette inégalité montre que pour tout $\xi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$, l'application $\widetilde{\mathcal{B}}(\xi, \cdot)$ est bien linéaire continue, donc appartient à $H^{-1/2}(\Gamma)^d$ et de norme vérifiant dans $H^{1/2}(\Gamma)' = H^{-1/2}(\Gamma)$:

$$\|\widetilde{\mathcal{B}}(\xi, \cdot)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq \rho_+ \left(1 + \|\mathbf{v}_0\|_{L^\infty(\Omega)^d} \right) C_{R^d} \|\xi\|_H,$$

ce qui montre finalement que l'application $\sigma : \xi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0) \mapsto \widetilde{\mathcal{B}}(\xi, \cdot) \in H^{-1/2}(\Gamma)^d$ est bien linéaire continue. ■

La formule d'intégration par parties (3.8) donne l'espoir de définir la trace d'une fonction $\xi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$ dans l'espace $L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-, \rho_0 |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|)^d$. C'est effectivement possible à la condition nécessaire et suffisante, adoptée désormais dans tout le manuscrit, que les frontières entrante Γ_- et sortante Γ_+ soient séparées :

$$\text{dist}(\Gamma_+, \Gamma_-) := \inf_{(\mathbf{x}_+, \mathbf{x}_-) \in \Gamma_+ \times \Gamma_-} |\mathbf{x}_+ - \mathbf{x}_-| > 0, \quad (3.11)$$

En effet, dans [44] (ou [45]), on peut trouver d'une part un contre-exemple du cas où $\text{dist}(\Gamma_+, \Gamma_-) = 0$; et d'autre part, une preuve du théorème de trace suivant :

Théorème 3.2.4. *Sous la condition de séparation des frontières Γ_+ et Γ_- (3.11) :*

(i) *Il existe une unique application linéaire continue*

$$\gamma : H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0) \longrightarrow L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-, \rho_0 |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|)^d,$$

telle qu'il existe une constante $C_\gamma > 0$, vérifiant pour toute fonction lisse $\xi \in C^\infty(\overline{\Omega})^d$,

$$\gamma(\xi) = \xi|_\Gamma \quad \text{et} \quad \|\gamma(\xi)\|_{L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-, \rho_0 |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|)^d} \leq C_\gamma \|\xi\|_H.$$

(ii) *Relèvement : γ possède un inverse à droite $\mathcal{R} : L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-, \rho_0 |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|)^d \rightarrow H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$ continu :*

$$\forall \xi^b \in L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-, \rho_0 |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|)^d, \quad \gamma(\mathcal{R}\xi^b) = \xi^b.$$

Remarque 3.2.5. *Dans le cas où les frontières Γ_+ et Γ_- peuvent se toucher, on peut trouver dans [47] une analyse complète de l'espace de trace de l'espace :*

$$H(\Omega, \mathbf{e}_x, 1) = \{u \in L^2(\Omega) / \partial_x u \in L^2(\Omega)\}, \quad (3.12)$$

ainsi qu'une généralisation de la formule d'intégration par parties. L'espace de trace est explicité : il s'écrit comme une somme directe d'espaces L^2 à poids qui dégénèrent ou s'annulent aux endroits de Γ où Γ_+ et Γ_- se rejoignent. Et la dégénérescence ou l'annulation des poids à ces endroits dépendent de la vitesse à laquelle Γ_+ et Γ_- se resserrent dans la direction orthogonale à \mathbf{v}_0 , \mathbf{e}_y , ici.

On définit alors à partir de γ deux autres opérateurs de trace γ_+ et γ_- , respectivement sur la frontière entrante Γ_+ et sortante Γ_- , par restriction :

$$\gamma_\pm : \xi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0) \mapsto \gamma(\xi)|_{\Gamma_\pm} \in L^2(\Gamma_\pm, \rho_0 |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|)^d.$$

γ_+ et γ_- sont continues car pour tout $\xi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$:

$$\|\gamma_\pm(\xi)\|_{L^2(\Gamma_\pm, \rho_0 |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|)^d} \leq \|\gamma(\xi)\|_{L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-, \rho_0 |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|)^d} \leq C_\gamma \|\xi\|_H,$$

et héritent de la surjectivité de γ . En effet, pour tout $\mathbf{g} \in L^2(\Gamma_\pm, \rho_0 |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|)^d$, on construit $\widehat{\mathbf{g}} \in L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-, \rho_0 |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|)^d$ en prolongeant \mathbf{g} par $\mathbf{0}$ sur Γ_\mp .

Définissons alors les sous-espaces fermés de $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$ permettant d'appliquer les conditions aux limites homogènes :

$$H^\pm(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0) := \text{Ker}(\sigma_\pm) = \left\{ \xi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0) : \xi = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_\pm \right\}. \quad (3.13)$$

Domaine de l'opérateur de transport A présent, nous sommes à même de choisir le domaine de l'opérateur $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}$. Bien que défini sur $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$ tout entier, on préfère utiliser le sous-espace prenant en compte les conditions aux limites homogènes sur Γ_- :

$$D(\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}) := H^-(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0).$$

Il est alors facile de montrer que l'opérateur $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0} : D(\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}) \subset L^2(\Omega, \rho_0)^d \rightarrow L^2(\Omega, \rho_0)^d$ est continu lorsque $D(\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_H$. En effet,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0} \xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d} &\leq |\omega| \|\xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d} + \|\mathbb{A}\|_\infty \|\xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d} + \|(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d}, \\ &\leq \sqrt{2} \max\{|\omega| + \|\mathbb{A}\|_\infty, 1\} \|\xi\|_H, \end{aligned} \quad (3.14)$$

où la norme utilisée sur $L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_d(\mathbb{C}))$ est :

$$\forall \mathbb{F} \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_d(\mathbb{C})), \quad \|\mathbb{F}\|_\infty := \sup_{x \in \Omega; \xi \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}} \frac{|\mathbb{F}(x)\xi|}{|\xi|} = \sup_{x \in \Omega} \|\mathbb{F}(x)\|,$$

où $\|M\|$ est la norme d'opérateur de $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

Formule de Green. Dans l'étude de l'équation de transport harmonique, nous aurons besoin du corollaire suivant donnant une intégration par parties dans les bons espaces ainsi qu'un cas particulier :

Corollaire 3.2.6 (Formule de Green). *Par densité, la formule d'intégration par parties (3.8) du théorème 3.2 s'étend à tout $(\xi, \zeta) \in H^\pm(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0) \times H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$ par :*

$$\int_{\Omega} (\rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \xi \cdot \bar{\zeta} = - \int_{\Omega} \xi \cdot \overline{(\rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \zeta} + \int_{\Gamma_\mp} \gamma_\mp(\xi) \cdot \overline{\gamma_\mp(\zeta)} (\rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) d\sigma, \quad (3.15)$$

et particulier, on a l'égalité suivante, pour tout $\xi \in H^\pm(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$,

$$\Re \left(\int_{\Omega} (\rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \xi \cdot \bar{\xi} \right) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\mp} |\gamma_\mp(\xi)|^2 (\rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) d\sigma. \quad (3.16)$$

Dans la suite, lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, nous omettrons les opérateurs de trace γ_\pm dans les intégrales telles que (3.15) ou (3.16).

Problèmes de transport harmonique homogène. Le cadre étant posé, le problème de transport harmonique homogène intervenant dans les équations de Goldstein, associé à l'équation (3.1), se formule de la façon suivante :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Pour } f \in L^2(\Omega)^d, \text{ trouver } \xi \in H^-(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0) \text{ tel que :} \\ \mathcal{T}_{\omega, \mathbf{v}_0} \xi = f, \end{array} \right. \quad (3.17)$$

où l'on a noté $\mathcal{T}_{\omega, v_0} := \mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, v_0}$ dans le cas particulier où $\mathbb{A} := \nabla v_0$. Nous serons amenés à nous intéresser également au problème de transport plus général suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Pour } f \in L^2(\Omega)^d, \text{ trouver } \xi \in H^-(\Omega, v_0, \rho_0) \text{ tel que :} \\ \mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, v_0} \xi = f. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Problème de transport harmonique non-homogène. Formulons également le problème de transport harmonique avec conditions au bord non-homogènes :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Pour } f \in L^2(\Omega) \text{ et } g \in L^2(\Gamma_-, \rho_0 |v_0 \cdot \mathbf{n}|)^d, \text{ trouver } \xi \in H(\Omega, v_0, \rho_0) \text{ tel que :} \\ \mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, v_0} \xi = f, \\ \gamma_-(\xi) = g. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

On se ramène au problème homogène en utilisant un relèvement de la donnée au bord entrant g . Par surjectivité de la trace, il existe $\xi^R \in H(\Omega, v_0, \rho_0)$ tel que $\gamma_-(\xi^R) = g$. Alors ξ est solution de (3.19) si et seulement si $\xi^0 = \xi - \xi^R$ est solution du problème homogène (3.18) avec au second membre $\hat{f} := f - \mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, v_0} \xi^R$. Le caractère bien posé de ce problème est alors équivalent à celui homogène (3.18), qui sera discuté dans la deuxième partie de ce manuscrit.

3.3 Géométries simples : solutions explicites et mise en évidence de résonances

Dans cette section, nous souhaitons illustrer dans des cas de géométries 2D très simples le comportement des solutions de l'équation de transport harmonique introduite à la section précédente. Nous présenterons d'une part le cas d'un écoulement cisailé dans une géométrie rectangulaire, puis nous nous intéresserons au cas où l'écoulement est en rotation solide dans un anneau. Ces deux situations, bien que très simplifiées, illustrent des comportements d'écoulements standards intéressants. Ces deux écoulements typiques nous ont d'ailleurs déjà servi comme illustration du rotationnel de l'écoulement porteur. En effet, nous verrons que dans le cas de l'écoulement cisailé, l'équation de transport est toujours bien posée, alors qu'il peut exister des fréquences auxquelles elle est mal posée dans l'écoulement recirculant. Ces deux exemples motivent l'étude particulière faite sur cette équation dans la suite de cette partie.

3.3.1 Écoulement cisailé

Un écoulement cisailé s'écrit, comme illustré sur la figure 3.1, dans le domaine 2D rectangulaire compris entre $x_-, x_+ \in \mathbb{R}$ et $y_-, y_+ \in \mathbb{R}$,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x_- < x < x_+ \text{ et } y_- < y < y_+\},$$

sous la forme

$$\forall (x, y) \in D, \quad v_0(x, y) = v_0(y)e_x,$$

où $v_0 : [y_-, y_+] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une fonction \mathcal{C}^1 représentant le profil de l'écoulement qui ne s'annule pas. Pour un tel écoulement, on montre aisément que les équations d'Euler stationnaires (1.19) imposent une densité ρ_0 constante, nous la prenons égale à 1 ici et l'omettrons dans

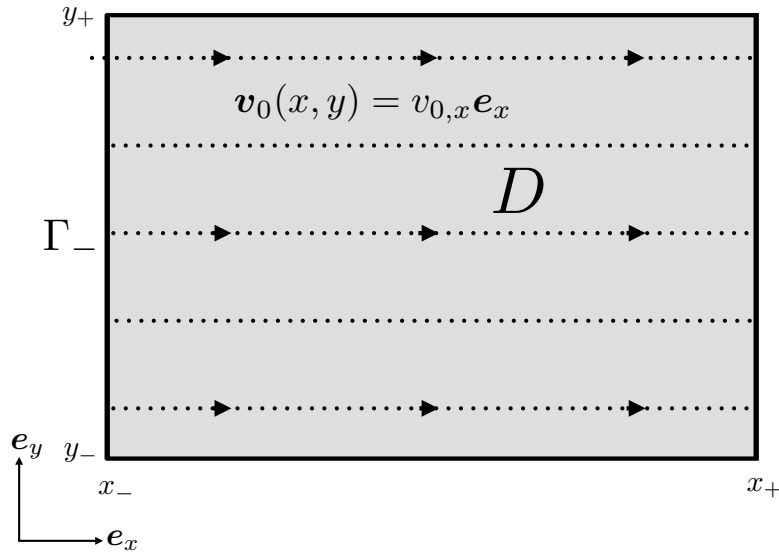


FIGURE 3.1 – Écoulement cisailé

la suite de ce paragraphe, notamment lorsqu'elle apparaît dans la définition des espaces. La dérivée matérielle harmonique (2.14) s'écrit dans ce cas $D_\omega = -i\omega + v_0(y)\partial_x$ et l'opérateur de transport $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, v_0}$ se simplifie alors en :

$$\forall \xi \in H^-(D, v_0), \quad \mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, v_0} \xi = -i\omega \xi + v_0(y)\partial_x \xi + \mathbb{A} \xi.$$

L'espace $H^-(D, v_0)$ est également simple à décrire, en effet, la frontière entrante est $\partial D^- = \{(x_-, y), y_- < y < y_+\}$ et donc :

$$H^-(D, v_0) = \{\xi \in L^2(D)^2, \partial_x \xi \in L^2(D)^2 \text{ et } \xi(x_-, \cdot) = \mathbf{0}\}.$$

Le problème de transport harmonique (3.18) s'écrit alors sous la forme d'une famille d'équations différentielles ordinaires, paramétrées par $y \in]y_-, y_+[$, la condition initiale correspondant à la valeur imposée à ξ sur le bord entrant en (x_-, y) .

$$\begin{cases} \partial_x \xi = -\frac{1}{v_0(y)} (-i\omega \text{Id} + \mathbb{A}(x, y)) \xi, & (3.20) \\ \xi(x_-, y) = \mathbf{0}. & (3.21) \end{cases}$$

Dans le cas général $\mathbb{A}(x, y) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, la solution n'admet pas d'expression explicite. Cependant, dans le cas de l'équation de transport harmonique du couplage de Goldstein (2.13), la matrice \mathbb{A} vaut $\mathbb{A} := \nabla v_0$, qui s'écrit dans le cas d'un écoulement cisailé sous la forme

$$\nabla v_0 = \begin{pmatrix} 0 & v_0'(y) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, dans ce cas particulier $\mathbb{A} = \nabla v_0$ ne dépend pas de la variable x et donc les équations différentielles du système (3.21) sont autonomes et admettent une solution explicite par la formule de Duhamel. En appliquant de plus les conditions sur la frontière entrante $\xi(x_-, y) = \mathbf{0}$, ξ s'écrit :

$$\xi(x, y) = \frac{1}{v_0(y)} \int_{x_-}^x e^{-(x-s) \frac{-i\omega \text{Id} + \nabla v_0(y)}{v_0(y)}} f(s, y) ds.$$

FIGURE 3.2 – Illustration numérique de la solution du transport harmonique en écoulement cisailé.

De plus, l'exponentielle matricielle est facilement explicitable ici, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\exp\left(t \frac{-i\omega \text{Id} + \nabla v_0(y)}{v_0(y)}\right) = e^{-i \frac{\omega t}{v_0(y)}} \exp\begin{pmatrix} 0 & t \frac{v_0'(y)}{v_0(y)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e^{-i \frac{\omega t}{v_0(y)}} \begin{pmatrix} 1 & t \frac{v_0'(y)}{v_0(y)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne l'expression suivante pour ξ :

$$\begin{cases} \xi_x(x, y) = \frac{1}{v_0(y)} \int_{x_-}^x e^{i \frac{\omega}{v_0(y)}(x-s)} \left[f_x(s, y) - (x-s) \frac{v_0'(y)}{v_0(y)} f_y(s, y) \right] ds, \\ \xi_y(x, y) = \frac{1}{v_0(y)} \int_{x_-}^x e^{i \frac{\omega}{v_0(y)}(x-s)} f_y(s, y) ds. \end{cases}$$

Dans le cas d'un écoulement cisailé qui ne s'annule pas, le problème de transport dans le rectangle D est ainsi toujours bien posé et admet une expression simple dans le cas du problème de transport harmonique de Goldstein.

3.3.2 Écoulement en rotation solide

Nous considérons à présent une géométrie en anneau, de rayon intérieur $r_i > 0$ et de rayon extérieur $r_e > r_i$, définie en coordonnées polaires (r, θ) :

$$D := \{(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[, \quad r_i < r < r_e\},$$

dans lequel circule un écoulement porteur orthoradial, de profil $v_0(r) := \Omega_0 r$, où la vitesse angulaire s'écrit $\Omega_0 > 0$:

$$\forall (r, \theta) \in D, \quad v_0(r, \theta) := v_0(r) e_\theta = \Omega_0 r e_\theta.$$

Nous avons vu que dans ce cas particulier d'écoulement, le choix de la vitesse détermine les autres grandeurs caractéristiques telles que ρ_0 ou p_0 . Il est alors aisé de vérifier que ρ_0 satisfait bien les conditions d'être borné inférieurement et supérieurement par deux constantes strictement positives.

La dérivée matérielle s'écrit comme une dérivée suivant θ :

$$D_\omega = -i\omega + v_0 \cdot \nabla = -i\omega + \frac{v_0(r)}{r} \partial_\theta = -i\omega + \Omega_0 \partial_\theta,$$

et l'espace $H(D, v_0, \rho_0)$ s'écrit sous la forme adaptée aux coordonnées polaires en ajoutant une condition de périodicité :

$$H^-(D, v_0, \rho_0) = H(D, v_0, \rho_0) = \left\{ \xi \in L^2(D, \rho_0)^2, \quad \partial_\theta \xi \in L^2(D, \rho_0)^2, \quad \text{et } \xi(\cdot, 0) = \xi(\cdot, 2\pi) \right\}.$$

Alors, l'opérateur de transport $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, v_0}$ s'écrit dans le cas qui intervient dans les équations

de Goldstein, $\mathbb{A} := \nabla v_0$, sous la forme :

$$\forall \xi \in H(D, v_0), \quad \mathcal{T}_{\omega, v_0} \xi = -i\omega \xi + \Omega_0 \partial_\theta \xi + \underbrace{2\Omega_0 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=\nabla v_0} \xi.$$

Notons que comme dans le cas de l'écoulement cisailé, le problème de transport (3.18) s'écrit alors comme une famille d'équations différentielles ordinaires paramétrées ici par $r \in]r_i, r_e[$. A la différence de l'écoulement cisailé dans un rectangle, il n'y a pas de condition initiale correspondant à la condition aux limites sur ξ , mais une condition de périodicité correspondant aux coordonnées polaires utilisées.

Un point de vue intéressant est de changer d'inconnue en effectuant une rotation d'angle 2θ de ξ . Posons R_θ la matrice de rotation d'angle θ :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

et rappelons les propriétés élémentaires suivantes :

$$\frac{d}{d\theta} R_\theta = R_{\theta+\frac{\pi}{2}}, \quad R_{\theta+\theta'} = R_\theta R_{\theta'}, \quad R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons $\hat{\xi}(r, \theta) := R_{2\theta} \xi(r, \theta)$, on a alors :

$$\begin{aligned} \Omega_0 \partial_\theta \hat{\xi} &= 2\Omega_0 R_{2\theta+\frac{\pi}{2}} \xi + R_{2\theta} \Omega_0 \partial_\theta \xi, \\ &= 2\Omega_0 R_{2\theta+\frac{\pi}{2}} \xi + R_{2\theta} \left(i\omega \xi - \underbrace{2\Omega_0 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=R_{\frac{\pi}{2}}} \xi + f \right), \\ &= \cancel{2\Omega_0 R_{2\theta+\frac{\pi}{2}} \xi} + i\omega \hat{\xi} - \cancel{2\Omega_0 R_{2\theta+\frac{\pi}{2}} \xi} + \hat{f}, \end{aligned}$$

où $\hat{f} := R_{2\theta} f$. Ainsi, $\hat{\xi}$ satisfait l'équation découplée et autonome, en utilisant la périodicité de R_θ :

$$\begin{cases} \partial_\theta \hat{\xi} = i \frac{\omega}{\Omega_0} \hat{\xi} + \frac{1}{\Omega_0} \hat{f}, \\ \hat{\xi}(\cdot, 0) = \hat{\xi}(\cdot, 2\pi). \end{cases}$$

Par la formule de Duhamel, il existe donc une constante $\hat{\xi}^0 \in \mathbb{C}^2$ telle que

$$\hat{\xi}(r, \theta) = \frac{1}{\Omega_0} \int_0^\theta e^{i \frac{\omega}{\Omega_0} (\theta-\tau)} \hat{f}(r, \tau) d\tau + e^{i \frac{\omega}{\Omega_0} \theta} \hat{\xi}^0.$$

La condition de périodicité est alors équivalente à

$$\left(1 - e^{2i\pi \frac{\omega}{\Omega_0}} \right) \hat{\xi}^0 = \Omega_0^{-1} \int_0^{2\pi} e^{i \frac{\omega}{\Omega_0} (2\pi-\tau)} \hat{f}(r, \tau) d\tau. \quad (3.22)$$

On constate alors que cette condition de périodicité peut ne pas être satisfaite. Le problème

FIGURE 3.3 – Illustration numérique de la solution du transport harmonique dans une rotation solide.

de transport harmonique de Goldstein est bien posé si et seulement si la constante $\hat{\xi}^0$ est déterminée de façon unique par la relation de périodicité (3.22). Or, si $\omega \in \Omega_0 \mathbb{Z}$, la relation (3.22) ne détermine pas $\hat{\xi}^0$ et donne lieu à un problème mal posé, soit possédant une infinité de solutions, soit aucune. Dans le cas où $\omega \notin \Omega_0 \mathbb{Z}$, alors $\hat{\xi}^0$ se déduit de (3.22) et donne l'expression de $\hat{\xi}$:

$$\hat{\xi}(r, \theta) = \Omega_0^{-1} \int_0^\theta e^{i\frac{\omega}{\Omega_0}(\theta-\tau)} \hat{f}(r, \tau) d\tau + \Omega_0^{-1} \frac{e^{i\frac{\omega}{\Omega_0}\theta}}{e^{-2i\pi\frac{\omega}{\Omega_0}} - 1} \int_0^{2\pi} e^{-i\frac{\omega}{\Omega_0}\tau} \hat{f}(r, \tau) d\tau. \quad (3.23)$$

Cette expression peut se mettre sous une forme plus simple. Effectuons le changement de variable $\tau \leftarrow \theta - \tau$ dans la première intégrale et $\tau \leftarrow 2\pi + \theta - \tau$ dans la seconde, il vient

$$\hat{\xi}(r, \theta) = -\Omega_0^{-1} \int_\theta^0 e^{i\frac{\omega}{\Omega_0}\tau} \hat{f}(r, \theta - \tau) d\tau + \frac{-\Omega_0^{-1}}{1 - e^{2i\pi\frac{\omega}{\Omega_0}}} \int_{2\pi+\theta}^\theta e^{i\frac{\omega}{\Omega_0}\tau} \hat{f}(r, 2\pi + \theta - \tau) d\tau,$$

puis en décomposant la seconde intégrale en trois intégrales, respectivement de θ à 0, puis de 0 à 2π et de 2π à $2\pi + \theta$, il vient :

$$\begin{aligned} \hat{\xi}(r, \theta) &= \cancel{\Omega_0^{-1} \left(1 - \frac{1}{1 - e^{2i\pi\frac{\omega}{\Omega_0}}} \right) \int_0^\theta e^{i\frac{\omega}{\Omega_0}\tau} \hat{f}(r, \theta - \tau) d\tau,} \\ &+ \frac{\Omega_0^{-1}}{1 - e^{2i\pi\frac{\omega}{\Omega_0}}} \left(\int_0^{2\pi} e^{i\frac{\omega}{\Omega_0}\tau} \hat{f}(r, \theta - \tau) d\tau + \underbrace{\int_{2\pi}^{2\pi+\theta} e^{i\frac{\omega}{\Omega_0}\tau} \hat{f}(r, \theta - \tau) d\tau}_{\tau \leftarrow \tau - 2\pi} \right), \\ &= \frac{\Omega_0^{-1}}{1 - e^{2i\pi\frac{\omega}{\Omega_0}}} \int_0^{2\pi} e^{i\frac{\omega}{\Omega_0}\tau} \hat{f}(r, \theta - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient l'expression simplifiée suivante pour ξ :

$$\boxed{\xi(r, \theta) = \frac{\Omega_0^{-1}}{1 - e^{2i\pi\frac{\omega}{\Omega_0}}} \int_0^{2\pi} e^{i\frac{\omega}{\Omega_0}\tau} R_{-2\tau} f(r, \theta - \tau) d\tau.} \quad (3.24)$$

Chapitre 4

Conditions suffisantes au caractère bien posé

4.1	Estimation a priori	79
4.1.1	Cas d'un écoulement directionnel	80
4.1.2	Cas d'un écoulement domaine-remplissant	83
4.2	Fin de la preuve du caractère bien posé	91
4.2.1	Détermination de l'opérateur adjoint de $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, v_0}$	91
4.2.2	Inversibilité de $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, v_0}$	93

Dans ce chapitre, nous présentons deux hypothèses sur l'écoulement et le domaine d'étude sous lesquelles nous montrerons que le problème du transport harmonique intervenant dans le couplage de Goldstein (3.17), et plus généralement le problème (3.18), sont bien posés. La preuve s'organise en deux temps. Le point clef est l'établissement d'une estimation a priori pour l'opérateur de transport. Cette estimation est établie sous deux hypothèses. La première ne nécessite pas de régularité additionnelle sur l'écoulement mais suppose qu'il ne s'annule pas suivant une direction fixe de l'espace. Nous dirons qu'un tel écoulement est directionnel. La seconde nécessitera un écoulement plus régulier de manière à redresser l'écoulement globalement par un changement de variable, suivant la méthode des caractéristiques, mais permettra de traiter des écoulements plus généraux que ceux directionnels. La solution de l'équation de transport est alors estimée le long de chaque ligne de courant et l'hypothèse que l'écoulement est domaine-remplissant permet le passage d'une de ces estimations à une estimation globale sur tout le domaine.

4.1 Estimation a priori

Nous avons déjà montré que l'opérateur $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, v_0}$ est continu de $H^-(\Omega, v_0, \rho_0)$ dans $L^2(\Omega, \rho_0)^d$ (3.14). Nous présentons deux hypothèses sous lesquelles il existe une constante $C(\Omega, \mathbb{A}, v_0) > 0$ telle que :

$$\forall \xi \in H^-(\Omega, v_0, \rho_0), \quad \|\xi\|_H \leq C(\Omega, \mathbb{A}, v_0) \|\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, v_0} \xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d}. \quad (4.1)$$

Remarquons dans un premier temps que pour tout $\xi \in H^-(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$, on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d} &= \|\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}\xi - (-i\omega\xi + \mathbb{A}\xi)\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d} \\ &\leq \|\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}\xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d} + (\omega + \|\mathbb{A}\|_\infty)\|\xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'existence d'une constante $C_1(\Omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0) > 0$ telle que

$$\forall \xi \in H^-(\Omega, \mathbf{v}_0), \quad \|\xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d} \leq C_1(\Omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0)\|\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}\xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d},$$

suffit à obtenir l'estimation souhaitée (4.1) où la constante $C(\Omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0)$ est donnée par

$$C(\Omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0) := \sqrt{C_1(\Omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0)^2 + \left(1 + (\omega + \|\mathbb{A}\|_\infty)C_1(\Omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0)\right)^2}.$$

Nous présentons deux approches. Premièrement, l'écoulement est supposé directionnel, c'est-à-dire que la projection de \mathbf{v}_0 sur une direction fixe de l'espace ne s'annule pas sur le domaine Ω , voir par exemple l'écoulement de gauche de la figure 4.1. Deuxièmement, en demandant un peu plus de régularité sur l'écoulement, nous allons pouvoir dépasser le cadre d'un écoulement directionnel en imposant uniquement la propriété d'être domaine-remplissant, dont l'idée grossière est que les lignes de courant entrent et sortent du domaine Ω en un temps borné. Une illustration d'un tel écoulement est donnée sur le graphique de droite de la figure 4.1.

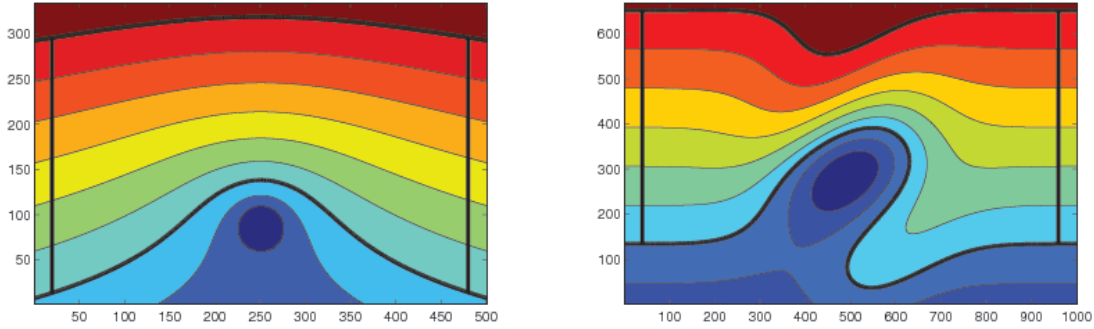


FIGURE 4.1 – Exemple d'écoulements porteur : cas directionnel (gauche) et domaine remplissant (droite). les lignes de courant sont représentées par des couleurs. Les lignes noires délimitent le domaine Ω .

Cas des conditions aux limites non-homogènes Nous aurons également besoin d'une estimation a priori dans le cas de conditions limites non-homogènes, i.e. pour $\xi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$ ne s'annulant pas forcément au bord entrant. Nous établirons l'existence d'une constante $C_b > 0$ telle que

$$\forall \xi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0), \quad \|\xi\|_H \leq C_b \|\gamma_-(\xi)\|_{L^2(\Gamma_-, \rho_0 | \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n})^d} + C(\Omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0) \|\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}\xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d}.$$

4.1.1 Cas d'un écoulement directionnel

Commençons par donner la définition d'un écoulement directionnel :

Définition 4.1.1 (Écoulement directionnel). *L'écoulement \mathbf{v}_0 est dit directionnel sur Ω s'il existe $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^d$, unitaire ($|\mathbf{e}| = 1$), et une constante $v_* > 0$ tels que :*

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e} \geq v_*. \quad (4.2)$$

Nous allons démontrer dans cette section l'estimation suivante :

Lemme 4.1.2. *Pour un écoulement directionnel, i.e. satisfaisant l'inégalité (4.2), alors*

$$\forall \xi \in H^-(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0), \quad \|\xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d} \leq C_1(\Omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0) \|\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0} \xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d}, \quad (4.3)$$

où la constante $C_1(\Omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0)$ est donnée par

$$C_1(\Omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0) := \frac{1}{\|\mathbb{A}\|_\infty} \left[\exp\left(2 \frac{L_e(\Omega)}{v_*} \|\mathbb{A}\|_\infty\right) - 1 \right], \quad (4.4)$$

où $L_e(\Omega) := \sup\{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{e} : \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \Omega\}$ est le diamètre de Ω dans la direction \mathbf{e} .

Preuve. Sans perte de généralité, on considère dans cette section un écoulement directionnel dans la direction $\mathbf{e} := \mathbf{e}_{x_1}$, i.e. :

$$\forall (x_1, \dots, x_d) \in \Omega, \quad v_{0,1}(x_1, \dots, x_d) \geq v_* > 0.$$

Comme Ω est supposé borné, les deux constantes suivantes sont finies :

$$\underline{x}_1 := \inf\{x_1 : (x_1, \dots, x_d) \in \Omega\}, \quad \text{and} \quad \overline{x}_1 := \sup\{x_1 : (x_1, \dots, x_d) \in \Omega\},$$

de telle sorte que Ω soit contenu dans la bande finie dans la direction \mathbf{e}_{x_1} , représentée sur la figure 4.2 :

$$\Omega \subset \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \underline{x}_1 < x_1 < \overline{x}_1\}.$$

L'idée est alors d'estimer la norme L^2 de ξ sur le sous domaine de Ω situé dans le demi-espace $P_{x_1^*}^- := \{(x_1, \dots, x_d) \in \Omega : x_1 < x_1^*\}$, où $x_1^* \in]\underline{x}_1, \overline{x}_1[$, que nous notons :

$$\Omega(x_1^*) := \Omega \cap P_{x_1^*}^-.$$

Nous avons, pour tout $\xi \in H^-(\Omega, \mathbf{v}_0)$,

$$\begin{aligned} \Re \left(\int_{\Omega(x_1^*)} \rho_0 (-i\omega \xi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \xi) \cdot \overline{\xi} \right) &= \Re \left(- \int_{\Omega(x_1^*)} \rho_0 \mathbb{A} \xi \cdot \overline{\xi} + \int_{\Omega(x_1^*)} \rho_0 \mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0} \xi \cdot \overline{\xi} \right), \\ &\leq \|\mathbb{A}\|_\infty \|\xi\|_{L^2(\Omega(x_1^*), \rho_0)^d}^2 + \|\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0} \xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d} \|\xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d}. \end{aligned}$$

Il vient alors,

$$\Re \left(\int_{\Omega(x_1^*)} \rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \xi \cdot \overline{\xi} \right) \leq \|\mathbb{A}\|_\infty \|\xi\|_{L^2(\Omega(x_1^*), \rho_0)^d}^2 + \|\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0} \xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d} \|\xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d}.$$

À présent, minorons le membre de gauche. La formule de Green (3.16) fournit, puisque $\xi \in$

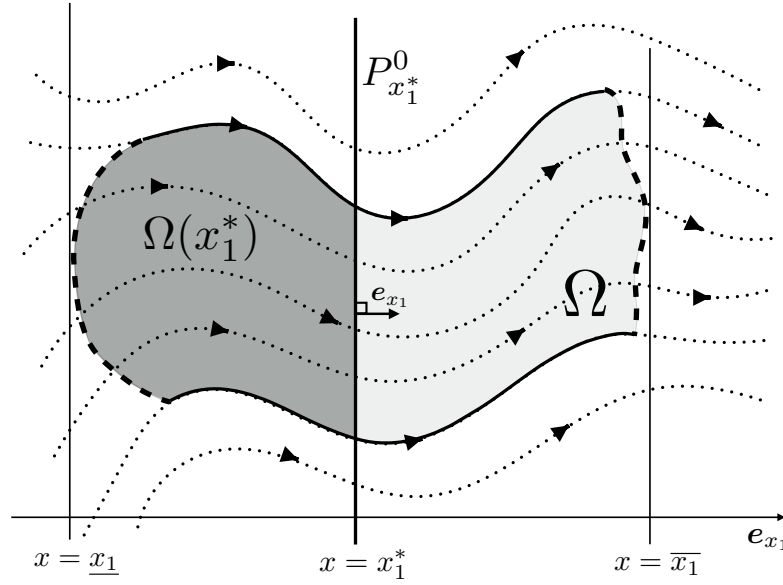


FIGURE 4.2 – Cas v_0 directionnelle – Représentation de $\Omega(x_1^*)$ de $P_{x_1^*}^0$.

$H^-(\Omega(x_1^*), v_0)$:

$$\Re \left(\int_{\Omega(x_1^*)} (\rho_0 v_0 \cdot \nabla) \xi \cdot \bar{\xi} \right) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega(x_1^*)^+} \rho_0 |\xi|^2 v_0 \cdot n.$$

Remarquons alors que la partie de la frontière $\Omega \cap P_{x_1^*}^0 \subset \partial\Omega(x_1^*)$, où $P_{x_1^*}^0 := \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_1 = x_1^*\}$, par définition de $P_{x_1^*}^-$ et de $\Omega(x_1^*)$ a pour normale extérieure le vecteur e_{x_1} et donc :

$$\Omega \cap P_{x_1^*}^0 \subset \partial\Omega(x_1^*)^+.$$

Ce qui fournit alors la minoration :

$$\begin{aligned} \Re \left(\int_{\Omega(x_1^*)} (\rho_0 v_0 \cdot \nabla) \xi \cdot \bar{\xi} \right) &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega(x_1^*)^+} |\xi|^2 (\rho_0 v_0 \cdot n) \, d\sigma \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega \cap P_{x_1^*}^0} |\xi|^2 (\rho_0 v_0 \cdot n) \, d\sigma \\ &\geq \frac{v_*}{2} \int_{\Omega \cap P_{x_1^*}^0} \rho_0 |\xi|^2 \, dx_2 \dots dx_d. \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi,

$$\frac{v_*}{2} \int_{\Omega \cap P_{x_1^*}^0} \rho_0 |\xi|^2 \, dx_2 \dots dx_d \leq \|\mathbb{A}\|_\infty \|\xi\|_{L^2(\Omega(x_1^*), \rho_0)^d}^2 + \|\mathcal{I}_{\omega, \mathbb{A}, v_0} \xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d} \|\xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d}.$$

Avec la notation

$$\forall x_1 \in]\underline{x}_1, \bar{x}_1[, \quad \eta(x_1) := \int_{\Omega \cap P_{x_1}^0} \rho_0(x_1, \dots, x_d) |\xi(x_1, \dots, x_d)|^2 \, dx_2 \dots dx_d,$$

et en remarquant que d'après le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{L^2(\Omega(x_1^*), \rho_0)^d}^2 &= \int_{\underline{x}_1}^{x_1^*} \left(\int_{\Omega(x_1) \cap P_{x_1}^0} \rho_0(x_1, \dots, x_d) |\xi(x_1, \dots, x_d)|^2 dx_2 \dots dx_d \right) dx_1, \\ &= \int_{\underline{x}_1}^{x_1^*} \eta(x_1) dx_1, \end{aligned}$$

on obtient l'inégalité plus claire suivante

$$\forall x_1^* \in]\underline{x}_1, \overline{x}_1[, \quad \frac{v_*}{2} \eta(x_1^*) \leq \|\mathbb{A}\|_\infty \int_{\underline{x}_1}^{x_1^*} \eta(x_1) dx_1 + \|\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, v_0} \xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d} \|\xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d}.$$

Le lemme de Gronwall permet alors de trouver l'estimation a priori annoncée :

$$\|\xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d} \leq C_1(\Omega, \mathbb{A}, v_0) \|\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, v_0} \xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d},$$

où la constante $C_1(\Omega, \mathbb{A}, v_0)$ est celle définie par (4.4) où $L_e(\Omega) = \overline{x}_1 - \underline{x}_1$. ■

4.1.2 Cas d'un écoulement domaine-remplissant

Dans cette section, nous présentons une estimation a priori obtenue lorsque l'écoulement n'est pas directionnel. Nous supposons pour cela plus de régularité sur l'écoulement de manière à pouvoir définir les lignes de courant et effectuer un changement de variables. L'idée est celle de la méthode des caractéristiques, introduite historiquement dans [48]. Il s'agit de résoudre l'équation ligne de courant par ligne de courant, ramenant l'étude de l'équation aux dérivées partielles à une familles d'équations aux dérivées ordinaires. Cependant, le passage rigoureux de l'un à l'autre n'est pas garanti dans le cas le plus général, nous nous placerons dans le cadre d'un écoulement domaine-remplissant, notion introduite par [42] pour l'étude d'une équation du premier ordre réelle et scalaire, dont l'équation de transport harmonique de Goldstein constitue une généralisation. Nous obtenons ainsi une estimation de la solution sur chacune de ces lignes. Ensuite il faut passer de cette estimation ligne par ligne à une estimation sur le domaine entier, c'est ici qu'intervient le changement de variable et l'hypothèse que l'écoulement est domaine-remplissant, notion que nous présenterons.

Sur le domaine. Afin de simplifier la présentation géométrique nous nous plaçons en 2D pour le reste de la section. Cependant, mis à part un résultat spécifique au 2D, le reste est adaptable aux dimensions supérieures, notamment en 3D. En particulier, nous supposons que Ω est un domaine simplement connexe et que $\partial\Omega$ est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Les frontières entrante et sortante Γ_- et Γ_+ ainsi que la frontière glissante Γ_0 sont supposées être des variétés de dimension 1 de classe \mathcal{C}^1 , et donc localement difféomorphe à un intervalle ouvert. Nous supposons de plus que Γ_\pm et Γ_0 ont un nombre fini de composantes connexes, notées $\Gamma_{+,i}$, $\Gamma_{-,j}$, $\Gamma_{-,k}$ pour $i \in \{1, \dots, c_+\}$, $j \in \{1, \dots, c_-\}$ et $k \in \{1, \dots, c_0\}$. Ainsi nous pouvons introduire une paramétrisation globale de ces composantes connexes de la frontière, que nous notons :

- $k \in \{1, \dots, c_0\}$, $\mathbf{b}_{0,k} : I_{0,k} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe \mathcal{C}^1 , qui induit un isomorphisme entre l'intervalle $I_{0,k}$ et $\Gamma_{0,k}$ vérifiant $\forall s_k \in I_{0,k}$, $\mathbf{b}'_{0,k}(s_k) \neq 0$.

- $i \in \{1, \dots, c_{\pm}\}$, $\mathbf{b}_{\pm,i} : I_{\pm,i} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe \mathcal{C}^1 , qui induit un isomorphisme entre l'intervalle $I_{\pm,i}$ et $\Gamma_{\pm,i}$ vérifiant $\forall s_i \in I_{\pm,i}, \mathbf{b}'_{\pm,i}(s_i) \neq 0$.

Nous notons enfin \mathbf{b}_0 et \mathbf{b}_{\pm} les applications définies respectivement sur $I_0 := \bigcup_i I_{0,i}$, en supposant sans perte de généralité que les $I_{0,i}$ ne se recouvrent pas, et de même $I_{\pm} := \bigcup_i I_{\pm,i}$, telles que leurs restrictions à chaque $I_{0,k}$ et $I_{\pm,i}$ soient $\mathbf{b}_{0,k}$ et $\mathbf{b}_{\pm,i}$.

Afin de présenter l'hypothèse « domaine-remplissant », présentons encore quelques notations et définitions concernant la vitesse de l'écoulement. Nous supposons que la vitesse de l'écoulement, \mathbf{v}_0 , est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Le domaine d'étude Ω étant borné, \mathbf{v}_0 est donc lipschitzien sur Ω , puis, quitte à remplacer \mathbf{v}_0 par un champ lipschitzien au voisinage de l'infini, sans perte de généralité, \mathbf{v}_0 peut être supposé globalement lipschitzien. Rappelons alors la définition du flot associé au champ de vecteurs \mathbf{v}_0 :

Définition 4.1.3 (Flot associé à \mathbf{v}_0). *Le champ de vecteurs \mathbf{v}_0 étant globalement lipschitzien, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution maximale $t \mapsto \varphi(t, \mathbf{x})$, définie sur \mathbb{R} et solution du système d'équations différentielles*

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\varphi(t, \mathbf{x})), \\ \varphi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}. \end{cases} \quad (4.5)$$

L'écoulement \mathbf{v}_0 est dit domaine-remplissant, ou Ω -remplissant, si chaque point du domaine est atteint par une ligne de courant partant du bord entrant Γ_- en un temps fini et borné uniformément. Plus précisément, introduisons la définition :

Définition 4.1.4 (Écoulement domaine-remplissant). *le champ de vecteurs \mathbf{v}_0 est dit Ω -remplissant s'il existe $t^* > 0$ tel que*

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{N}, \exists!(t, \mathbf{x}_b) \in [0, t^*] \times \Gamma_- / \quad \begin{cases} \forall \tau \in]0, t], \quad \varphi(\tau, \mathbf{x}_b) \in \Omega, \\ \varphi(t, \mathbf{x}_b) = \mathbf{x}, \end{cases}$$

où \mathcal{N} est l'ensemble négligeable pour la mesure de Lebesgue défini par :

$$\mathcal{N} := \bigcup_{\bar{s} \in \bar{I}_0 \setminus I_0} \{\varphi(t, \mathbf{b}_0(\bar{s})), t \in \mathbb{R}\}$$

Cette définition fait intervenir le flot φ , associé à l'écoulement, qui n'est que rarement explicite. Son caractère difficilement vérifiable est un défaut de cette hypothèse. Remarquons d'abord que la propriété d'être directionnel, sous laquelle nous avons établi la première estimation a priori, implique d'être Ω -remplissant :

Lemme 4.1.5. *Si le champ de vecteurs \mathbf{v}_0 est directionnel, i.e. qu'il existe $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^2$, unitaire $|\mathbf{e}| = 1$ tel que*

$$\inf_{\mathbf{x} \in \Omega} |\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}| > 0,$$

alors, \mathbf{v}_0 est Ω -remplissant.

Le lemme suivant donne deux situations typiques faisant échouer le caractère Ω -remplissant :

Lemme 4.1.6. *Si \mathbf{v}_0 satisfait l'une des propriétés suivantes :*

- (i) Point d'arrêt : $\exists \mathbf{x} \in \overline{\Omega} / \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$,
(ii) Recirculation : il existe une orbite périodique du flot φ contenue dans Ω ,
alors, \mathbf{v}_0 n'est pas Ω -remplissant.

Néanmoins, en 2D, l'existence d'une orbite périodique du flot φ implique l'existence d'un point d'arrêt dans le domaine. Cette particularité du 2D, et sous l'hypothèse \mathbf{v}_0 de classe \mathcal{C}^1 , donne une caractérisation très simple des écoulements Ω -remplissants. Nous avons le lemme suivant :

Lemme 4.1.7 (Caractérisation 2D de Ω -remplissant). *un champ de vecteurs \mathbf{v}_0 de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ est Ω -remplissant si et seulement si*

$$\inf_{\mathbf{x} \in \Omega} |\mathbf{v}_0(\mathbf{x})| > 0.$$

La preuve reposant sur le théorème de Poincaré-Bendixson [49, 50] est donnée en appendice et est spécifique au cas de la dimension deux, voir A.2.

Paramétrisation par le flot et temps de parcours de Ω . Dans la suite, nous introduisons une paramétrisation du domaine Ω induite par le flot φ . La propriété Ω -remplissant garantit que cette application est bijective et la régularité de \mathbf{v}_0 et de la frontière entrante Γ_- en font un changement de variable.

Introduisons une notation qui nous sera utile par la suite, le temps de parcours de Ω , $\tau^*(\mathbf{x}_b)$, correspondant au temps mis par le flot $\varphi(\cdot, \mathbf{x}_b)$, partant de $\mathbf{x}_b \in \Gamma_-$ pour sortir du domaine Ω , plus précisément :

Définition 4.1.8 (temps de parcours de Ω). *Soit $\mathbf{x}_b \in \Gamma_-$ et notons*

$$I_{\mathbf{x}_b} := \left\{ t \in \mathbb{R}_+^* : \forall \tau \in]0, t], \varphi(\tau, \mathbf{x}_b) \in \Omega \right\},$$

alors, le temps de parcours de Ω partant de \mathbf{x}_b est défini par

$$\tau^*(\mathbf{x}_b) := \sup I_{\mathbf{x}_b}.$$

L'idée de la paramétrisation de Ω par le flot φ est de partir d'un point de la frontière entrante $\mathbf{x}_b \in \Gamma_-$, elle-même paramétrée par \mathbf{b}_- , puis de suivre la ligne de courant $\{\varphi(t, \mathbf{x}_b), t > 0\}$ pour atteindre tout point \mathbf{x} du domaine, à l'ensemble négligeable \mathcal{N} près. Pour cela, introduisons le domaine paramétrique Θ :

$$\Theta := \left\{ (t, s) \in \mathbb{R}_+^* \times I_- : 0 < t < \tau^*(\mathbf{b}_-(s)) \right\}$$

ainsi que l'application

$$\begin{aligned} \phi : \quad \Theta &\longrightarrow \Omega \setminus \mathcal{N} \\ (t, s) &\longmapsto \varphi(t, \mathbf{b}_-(s)). \end{aligned}$$

Le fait que ϕ soit une bijection est une conséquence directe de l'hypothèse Ω -remplissant sur \mathbf{v}_0 , puis grâce à la régularité de φ et de \mathbf{b}_- , ϕ est de classe \mathcal{C}^1 . La figure 4.3 illustre ce changement de variable. Rappelons que nous avons alors la formule de changement de variable suivante

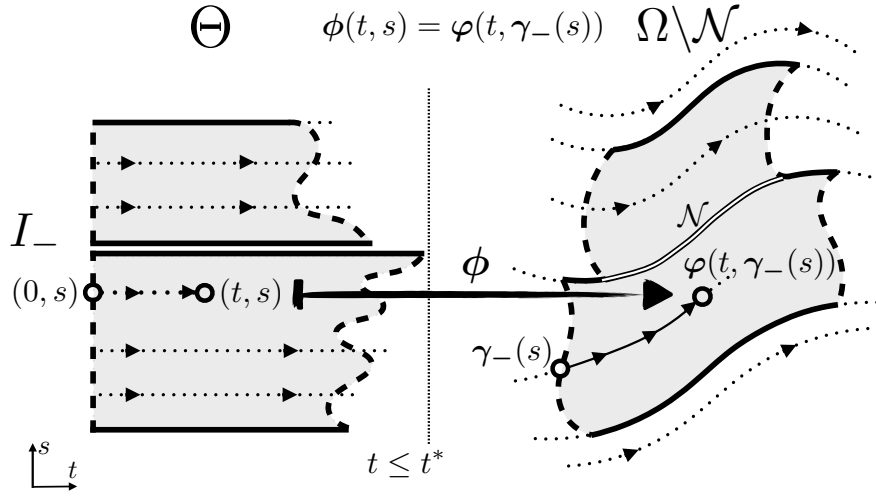


FIGURE 4.3 – Paramétrisation du domaine $\Omega \setminus \mathcal{N}$ par Θ suivant le flot de v_0 . La ligne blanche représente \mathcal{N} , négligeable.

Lemme 4.1.9 (Changement de variable). *Pour tout $f \in L^1(\Omega, \rho_0)$, alors $f \circ \phi \in L^1(\Theta, \mu)$ et la relation suivante est satisfaite*

$$\int_{\Omega} f(x) \rho_0(x) dx = \int_{\Theta} f \circ \phi(t, s) \mu(t, s) dt ds, \quad (4.6)$$

où le poids μ est donné par

$$\mu(t, s) := (\rho_0 \circ \phi) \det Jac(\phi)(t, s). \quad (4.7)$$

Le lemme d'invariance suivant 4.1.10, dont on peut trouver une version orientée mécanique des fluides dans [51], montre que la fonction $\mu(t, s) = (\rho_0 \circ \phi) \det Jac(\phi)(t, s)$ ne dépend pas de t ce qui justifie l'utilisation de la pondération ρ_0 de espace $L^2(\Omega, \rho_0)$.

Lemme 4.1.10 (Invariance de $(\rho_0 \circ \phi) \det Jac(\phi)(t, s)$). *La fonction*

$$(t, s) \mapsto (\rho_0 \circ \phi) \det Jac(\phi)(t, s)$$

ne dépend pas de t .

Principe de la méthode des caractéristiques. Classiquement, l'idée clef de la méthode des caractéristiques est de transformer, pour une fonction lisse $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, le terme convecté $v_0 \cdot \nabla \psi$ en une simple dérivée $\partial_t \tilde{\psi}$ par le changement de variable $\tilde{\psi} := \psi \circ \phi$. Plus précisément, en utilisant la définition du flot (4.5),

$$\forall \psi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}), \quad \frac{\partial}{\partial t} (\psi \circ \phi) = \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot (\nabla \psi \circ \phi) = (v_0 \cdot \nabla \psi) \circ \phi. \quad (4.8)$$

Application : l'équation de transport harmonique le long des lignes de courant. Nous travaillons d'abord avec des fonctions lisses, puis nous raisonnons par densité pour étendre les inégalités trouvées au cadre L^2 . Dans ce but, introduisons les espaces suivants de fonctions lisses :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^-(\Omega) &:= \left\{ \xi \in \mathcal{C}^1(\Omega) : \xi = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_- \right\} \subset H^-(\Omega, \nu_0, \rho_0), \\ \mathcal{D}^-(\Theta) &:= \left\{ \tilde{\xi} \in \mathcal{C}^1(\Theta) : \tilde{\xi}(0, s) = \mathbf{0} \ \forall s \in I_- \right\} \subset H^-(\Theta, \mu), \end{aligned}$$

où $H^-(\Theta, \mu) := \{(t, s) \mapsto \zeta(t, s) \in L^2(\Theta, \mu)^2 : \partial_t \zeta \in L^2(\Theta, \mu)^2\}$. A présent, effectuons le changement de variable et écrivons l'équation de transport harmonique dans les coordonnées des lignes de courant. Une fonction lisse $\xi \in \mathcal{D}^-(\Omega)$ est solution de l'équation $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \nu_0} \xi = f$, avec $f \in L^2(\Omega, \rho_0)^2$ au second membre si et seulement si $\tilde{\xi} := \xi \circ \phi \in \mathcal{D}^-(\Theta)$ satisfait la famille d'équations différentielles suivante, indexées par $s \in I_-$:

$$\forall s \in I_-, \quad \begin{cases} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial t} - i\omega \tilde{\xi}(t, s) + \tilde{\mathbb{A}} \tilde{\xi}(t, s) = \tilde{f}(t, s), & \forall t \in]0, \tau^*(\mathbf{b}_-(s))[, \\ \tilde{\xi}(0, s) = \mathbf{0}, \end{cases}$$

où nous avons noté $\tilde{f} := f \circ \phi$ et $\tilde{\mathbb{A}} := \mathbb{A} \circ \phi$. Ce système d'équations peut être encore simplifié en posant $\hat{\xi} := e^{-i\omega t} \tilde{\xi}$. Plus précisément, nous avons le lemme suivant

Lemme 4.1.11 (Changement de variable isométrique des caractéristiques). *L'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\omega : L^2(\Omega, \rho_0)^2 &\longrightarrow L^2(\Theta, \mu)^2 \\ \xi &\longmapsto \left[\hat{\xi} : (t, s) \mapsto e^{-i\omega t} \xi \circ \phi(t, s) \right] \end{aligned} \quad \text{est une isométrie.} \quad (4.9)$$

De plus, l'opérateur $\mathcal{Q}_{\tilde{\mathbb{A}}}$ de transport dans l'espace paramétrique est tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^-(\Omega) & \xrightarrow{\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \nu_0}} & L^2(\Omega, \rho_0)^2 \\ \mathcal{S}_\omega \downarrow & & \downarrow \mathcal{S}_\omega \\ \mathcal{D}^-(\Theta) & \xrightarrow{\mathcal{Q}_{\tilde{\mathbb{A}}}} & L^2(\Theta, \mu)^2, \end{array}$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{Q}_{\tilde{\mathbb{A}}} := \mathcal{S}_\omega \circ \mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \nu_0} \circ \mathcal{S}_\omega^{-1}, \quad (4.10)$$

est donné par

$$\forall \zeta \in \mathcal{D}^-(\Theta), \quad \mathcal{Q}_{\tilde{\mathbb{A}}} \zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \tilde{\mathbb{A}} \zeta. \quad (4.11)$$

Preuve (du lemme 4.1.11). Le fait que \mathcal{S}_ω soit une isométrie est une conséquence de la formule de changement de variable (4.6), en effet, écrivons pour $\xi \in L^2(\Omega, \rho_0)^2$,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}_\omega \xi\|_{L^2(\Theta, \mu)^2} &= \int_{\Theta} |e^{-i\omega t} \xi \circ \phi(t, s)|^2 \mu(s) \, ds \, dt, \\ &= \int_{\Omega} |\xi(x)|^2 \rho_0(x) \, dx. \end{aligned}$$

Enfin, un calcul direct en s'aidant de (4.8) donne l'expression annoncée pour $\mathcal{Q}_{\tilde{\mathbb{A}}}$. ■ Le

point clef est alors d'obtenir une estimation a priori pour l'opérateur $\mathcal{Q}_{\tilde{\mathbb{A}}}$ sur l'espace $\mathcal{D}^-(\Theta)$. Cette estimation est donnée par le lemme suivant

Théorème 4.1.12 (Estimation L^2 a priori). *Il existe une constante $C_1(\Omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0) > 0$ telle que*

$$\forall \zeta \in \mathcal{D}^-(\Theta), \quad \|\zeta\|_{L^2(\Theta, \mu)^2} \leq C_1(\Omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0) \|\mathcal{Q}_{\tilde{\mathbb{A}}} \zeta\|_{L^2(\Theta, \mu)^2},$$

avec la borne supérieure

$$C_1(\Omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0) \leq C_1^{\text{filling}} := \frac{\sqrt{e^{2t^* \|\mathbb{A}\|_\infty} - 1 - 2t^* \|\mathbb{A}\|_\infty}}{2\|\mathbb{A}\|_\infty},$$

où le temps t^* est celui de la définition de « Ω -remplissant » (4.1.4).

Remarque 4.1.13. *Pour un écoulement directionnel, le temps t^* peut être majoré de la façon suivante :*

$$t^* \leq \frac{L_e(\Omega)}{v_*}.$$

Ainsi,

$$C_1^{\text{filling}}(t^*) \leq C_1^{\text{filling}}\left(\frac{L_e(\Omega)}{v_*}\right) \leq C_1^{\text{sweeping}} := \frac{1}{\|\mathbb{A}\|_\infty} \left[\exp\left(2\|\mathbb{A}\|_\infty \frac{L_e(\Omega)}{v_*}\right) - 1 \right],$$

où C_1^{sweeping} est la constante obtenue dans le cas d'un écoulement directionnel, voir (4.4). La constante obtenue dans le cas Ω -remplissant est donc plus précise, la méthode des caractéristiques permettant d'estimer la solution plus finement. De plus, lorsque $\mathbb{A} \rightarrow 0$, $C_1^{\text{filling}} \sim t^*/\sqrt{2} \leq L_e(\Omega)/\sqrt{2}v_*$ et nous retrouvons la dépendance linéaire obtenue dans le cas $\mathbb{A} = 0$ (équations découplées) dans [3].

De l'estimation L^2 a priori sur l'opérateur $\mathcal{Q}_{\tilde{\mathbb{A}}}$, il vient aisément le corollaire suivant :

Corollaire 4.1.14 (Estimation L^2 a priori pour $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}$). *Il existe une constante $C_1(\Omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0) > 0$ telle que*

$$\forall \xi \in H^-(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0), \quad \|\xi\|_{L^2(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)^2} \leq C_1(\Omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0) \|\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0} \xi\|_{L^2(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)^2}.$$

Prouvons d'abord le corollaire 4.1.14.

Preuve ((du corollaire 4.1.14)). Soit $\xi \in H^-(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$. L'espace $\mathcal{D}^-(\Omega)$ étant dense dans $H^-(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$, il existe une suite $(\zeta_n) \in \mathcal{D}^-(\Omega)^\mathbb{N}$ telle que :

$$\zeta_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_H} \xi.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}_\omega \zeta_n \in \mathcal{D}^-(\Theta)$. D'après le théorème 4.1.12, il existe une constante $C_1(\Omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0) > 0$ telle que

$$\|\mathcal{S}_\omega \zeta_n\|_{L^2(\Theta, \mu)^2} \leq C_1(\Omega, \mathbb{A}, \rho_0) \|\mathcal{Q}_{\tilde{\mathbb{A}}} \mathcal{S}_\omega \zeta_n\|_{L^2(\Theta, \mu)^2}.$$

Par définition de $\mathcal{Q}_{\tilde{\mathbb{A}}}$, voir (4.10), $\mathcal{Q}_{\tilde{\mathbb{A}}} \mathcal{S}_\omega = \mathcal{S}_\omega \mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}$,

$$\|\mathcal{S}_\omega \zeta_n\|_{L^2(\Theta, \mu)^2} \leq C_1(\Omega, \mathbb{A}, \rho_0) \|\mathcal{S}_\omega \mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0} \zeta_n\|_{L^2(\Theta, \mu)^2},$$

puis par isométrie de $\mathcal{S}_\omega : L^2(\Omega, \rho_0)^2 \rightarrow L^2(\Theta, \mu)^2$, il vient

$$\|\zeta_n\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^2} \leq C_1(\Omega, \mathbb{A}, \rho_0) \|\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, v_0} \zeta_n\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^2},$$

Il ne reste qu'à passer à la limite $n \rightarrow +\infty$ en utilisant la continuité de l'opérateur $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, v_0}$:

$$\|\xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^2} \leq C_1(\Omega, \mathbb{A}, \rho_0) \|\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, v_0} \xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^2}.$$

■

Avant de démontrer le théorème 4.1.12, énonçons et démontrons une version du lemme de Gronwall qui nous sera utile :

Lemme 4.1.15 (Un lemme de Gronwall). *Soit $\alpha, \beta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions à valeurs positives. Si une fonction $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait*

$$\forall t \geq 0, \quad u(t) \leq \int_0^t \alpha(\tau) d\tau + \int_0^t \beta(\tau) u(\tau) d\tau, \quad \text{et} \quad u(0) = 0, \quad (4.12)$$

alors on a la majoration suivante

$$\forall t \geq 0, \quad u(t) \leq \int_0^t \alpha(\tau) \exp\left(\int_\tau^t \beta(\tau') d\tau'\right) d\tau.$$

Prouvons brièvement ce lemme

Preuve (du lemme 4.1.15). Notons $b(t) := \exp\left(-\int_0^t \beta(\tau) d\tau\right)$ et multiplions (4.12) par $\beta(\tau)b(\tau)$:

$$\begin{aligned} \forall \tau \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{d}{d\tau} \left(b(\tau) \int_0^\tau \beta(\tau') u(\tau') d\tau' \right) &= \beta(\tau) b(\tau) u(\tau) - \beta(\tau) b(\tau) \int_0^\tau \beta(\tau') u(\tau') d\tau', \\ &\leq \beta(\tau) b(\tau) \int_0^\tau \alpha(\tau') d\tau'. \end{aligned}$$

Puis intégrons entre 0 et $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^t \beta(\tau) u(\tau) d\tau \leq \int_0^t \beta(\tau) b(\tau) / b(t) \int_0^\tau \alpha(\tau') d\tau' d\tau.$$

Pour terminer la preuve, nous remplaçons dans l'inégalité précédente (4.12) et intégrons par parties :

$$\begin{aligned} u(t) &\leq \int_0^t \alpha(\tau) d\tau + \int_0^t \beta(\tau) \exp\left(\int_\tau^t \beta(\tau') d\tau'\right) \left(\int_0^\tau \alpha(\tau') d\tau'\right) d\tau \\ &\leq \underbrace{\int_0^t \alpha(\tau) d\tau + \left[-\exp\left(\int_\tau^t \beta(\tau') d\tau'\right) \int_0^\tau \alpha(\tau') d\tau' \right]_0^t}_{=0} + \int_0^t \alpha(\tau) \exp\left(\int_\tau^t \beta(\tau') d\tau'\right) d\tau. \end{aligned}$$

■

Il nous reste à montrer le théorème 4.1.12.

Preuve (du théorème 4.1.12). L'idée de la preuve est d'utiliser le lemme de Gronwall 4.1.15 pour établir une estimation point par point de ζ , puis d'intégrer cette estimation pour obtenir la norme L^2 sur tout le domaine paramétrique Θ , avec le poids μ défini en (4.7).

Soit $\zeta \in \mathcal{D}^-(\Theta)$ et $(t, s) \in \Theta$, comme $\zeta(0, s) = \mathbf{0}$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} |\zeta(t, s)| &= \left| \int_0^t \frac{\partial \zeta}{\partial t}(\tau, s) d\tau \right|, \\ &\leq \int_0^t \left| (\mathcal{Q}_{\tilde{\mathbb{A}}} \zeta)(\tau, s) - (\tilde{\mathbb{A}} \zeta)(\tau, s) \right| d\tau, && \text{par (4.11)} \\ &\leq \int_0^t \left| (\mathcal{Q}_{\tilde{\mathbb{A}}} \zeta)(\tau, s) \right| d\tau + \int_0^t |\tilde{\mathbb{A}}(\tau, s)| |\zeta(\tau, s)| d\tau. \end{aligned}$$

Ensuite, en appliquant le lemme 4.1.15 aux fonctions $u(t) := |\zeta(t, s)|$, $\alpha(t) := |\mathcal{Q}_{\tilde{\mathbb{A}}}(t, s)|$ et $\beta(t) := |\tilde{\mathbb{A}}(t, s)|$, nous obtenons

$$|\zeta(t, s)| \leq \int_0^t \exp\left(\int_\tau^t |\tilde{\mathbb{A}}(\tau', s)| d\tau'\right) \left| (\mathcal{Q}_{\tilde{\mathbb{A}}} \zeta)(\tau, s) \right| d\tau.$$

Puis, L'inégalité de Cauchy-Schwartz donne

$$|\zeta(t, s)|^2 \leq \mathcal{I}(t, s) \int_0^t \left| (\mathcal{Q}_{\tilde{\mathbb{A}}} \zeta)(\tau, s) \right|^2 d\tau,$$

où nous avons noté $\mathcal{I}(t, s) := \int_0^t \exp\left(2 \int_\tau^t |\tilde{\mathbb{A}}(\tau', s)| d\tau'\right) d\tau$. Utilisons à présent le fait que μ est une fonction de s seulement, voir le lemme 4.1.10 :

$$\|\zeta\|_{L^2(\Theta, \mu)^2}^2 = \int_{\Theta} |\zeta(t, s)|^2 \mu(s) dt ds \leq \int_{\Theta} \left(\mathcal{I}(t, s) \int_0^t |\mathcal{Q}_{\tilde{\mathbb{A}}}(\tau, s)|^2 \mu(s) d\tau \right) dt ds.$$

Par définition, pour tout $(t, s) \in \Theta$, t est majoré par son temps de parcours de Ω partant de $\mathbf{b}_-(s)$, voir définition 4.1.8. Ainsi $t \leq \tau_s^* := \tau^*(\mathbf{b}_-(s))$ et

$$\|\zeta\|_{L^2(\Theta, \mu)^2}^2 \leq \int_{\Theta} \left(\mathcal{I}(t, s) \int_0^{\tau_s^*} |\mathcal{Q}_{\tilde{\mathbb{A}}}(\tau, s)|^2 \mu(s) d\tau \right) dt ds,$$

puis, par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \|\zeta\|_{L^2(\Theta, \mu)^2}^2 &\leq \int_{I^-} \left(\int_0^{\tau_s^*} \mathcal{I}(t, s) dt \right) \left(\int_0^{\tau_s^*} \left| (\mathcal{Q}_{\tilde{\mathbb{A}}} \zeta)(\tau, s) \right|^2 \mu(s) d\tau \right) ds, \\ &\leq \left(\sup_{s \in I^-} \int_0^{\tau_s^*} \mathcal{I}(t, s) dt \right) \|\mathcal{Q}_{\tilde{\mathbb{A}}} \zeta\|_{L^2(\Theta, \mu)^2}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient l'inégalité du théorème 4.1.12, avec

$$C_1(\Omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0) := \sqrt{\sup_{s \in I^-} \int_0^{\tau_s^*} \mathcal{I}(t, s) dt}.$$

Pour terminer la preuve, il reste à montrer que cette constante est finie. C'est le cas par hypothèse. En effet dans la définition du caractère Ω -remplissant 4.1.4, le temps de parcours de Ω est uniformément borné par une constante t^* . Ainsi, pour tout $s \in I_-$, nous avons $\tau_s^* \leq t^*$ et donc

$$C_1(\Omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0) \leq \sqrt{\sup_{s \in I^-} \int_0^{t^*} \int_0^t \exp\left(2 \int_\tau^t |\widetilde{\mathbb{A}}(\tau', s)| d\tau'\right) d\tau dt} < +\infty.$$

■

4.2 Fin de la preuve du caractère bien posé

Dans cette section, nous supposons que le domaine Ω , la fonction \mathbb{A} et le champ \mathbf{v}_0 sont tels qu'il existe une estimation a priori de la forme (4.1). Nous avons déjà présenté deux cas pour lesquels une telle estimation est établie, sous l'hypothèse que l'écoulement est directionnel, puis sous l'hypothèse qu'il est Ω -remplissant. Une telle estimation a priori entraîne classiquement que l'opérateur de transport $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}$ est injectif et d'image fermée [52]. Le but de cette section est de montrer que l'opérateur $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}$ est inversible, ce qui terminera la preuve du caractère bien posée de l'équation de transport harmonique $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0} \xi = f$. Pour ce faire, nous montrerons que son adjoint $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}^*$ est de la même forme de l'opérateur $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}$ et ainsi satisfait également une estimation a priori. L'opérateur adjoint est donc injectif et les hypothèses du théorème de Banach-Nečas-Babuška sont ainsi vérifiées [52].

4.2.1 Détermination de l'opérateur adjoint de $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}$

Le lemme suivant donne l'opérateur adjoint de l'opérateur de transport :

Lemme 4.2.1. *L'adjoint de $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}$ dans $L^2(\Omega, \rho_0)^d$ est donné par*

$$\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}^* = \mathcal{T}_{-\omega, \mathbb{A}^*, -\mathbf{v}_0}$$

de domaine $H^-(\Omega, -\mathbf{v}_0, \rho_0) = H^+(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$, défini en (3.13).

Donnons en la preuve.

Preuve. L'adjoint de $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}$ est défini sur le sous-domaine $D(\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}^*) \subset L^2(\Omega, \rho_0)^d$ tel que, étant donné ζ dans ce domaine, il existe $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}^* \zeta \in L^2(\Omega, \rho_0)^d$ caractérisé par :

$$\forall \xi \in H^-(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0), \quad (\zeta, \mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0} \xi)_{L^2(\Omega, \rho_0)^d} = (\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}^* \zeta, \xi)_{L^2(\Omega, \rho_0)^d}. \quad (4.13)$$

En particulier, testons cette égalité avec la fonction lisse $\xi := \Phi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H^-(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$.

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\langle \rho_0 \mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}^* \zeta, \overline{\Phi} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} &= \left(\rho_0 \mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}^* \zeta, \Phi \right)_{L^2(\Omega)^d}, \\
&= \left(\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}^* \zeta, \Phi \right)_{L^2(\Omega, \rho_0)^d}, \\
&= \left(\zeta, \mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0} \Phi \right)_{L^2(\Omega, \rho_0)^d}, \\
&= \left(\zeta, -i\omega \rho_0 \Phi + \rho_0 \mathbb{A} \Phi + (\rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \Phi \right)_{L^2(\Omega)^d}, \\
&= \left(i\omega \rho_0 \zeta + \rho_0 \mathbb{A}^* \zeta, \Phi \right)_{L^2(\Omega)^d} + \left(\zeta, (\rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \overline{\Phi} \right)_{L^2(\Omega)^d}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la définition (3.7), combinée avec le fait que $\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0$ montre que

$$\left(\zeta, (\rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \Phi \right)_{L^2(\Omega)^d} = \left\langle (\rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \zeta, \overline{\Phi} \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}},$$

d'où nous déduisons que

$$\rho_0 \mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}^* \zeta = i\omega \rho_0 \zeta + \rho_0 \mathbb{A}^* \zeta - (\rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \zeta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)^d,$$

puis que

$$(\rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \zeta = i\omega \rho_0 \zeta + \rho_0 \mathbb{A}^* \zeta - \rho_0 \mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}^* \zeta \in L^2(\Omega)^d. \quad (4.14)$$

Nous obtenons ainsi $\zeta \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$, puis que $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}^* \zeta = i\omega \zeta + \mathbb{A}^* \zeta - (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \zeta$. Pour finir, il reste à montrer que $\zeta \in H^+(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$. Dans ce but, nous définissons une fonction $\xi \in H^-(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$, de même trace, définie au théorème 3.2, que ζ sur Γ_+ : $\sigma_+(\xi) = \sigma_+(\zeta)$. Une telle fonction est donnée, par exemple, en multipliant ζ par $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ vérifiant :

$$\begin{cases} \eta = 1 \text{ sur } \Gamma_+, \\ \eta = 0 \text{ sur } \Gamma_-. \end{cases}$$

En prenant le produit scalaire de l'équation (4.14) par la fonction $\xi := \eta \zeta$ et en utilisant la formule de Green (3.15), puisque ξ et ζ dans $H^-(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \rho_0 \mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}^* \zeta \cdot \overline{\xi} &= \int_{\Omega} i\omega \rho_0 \zeta \cdot \overline{\xi} + \rho_0 \mathbb{A}^* \zeta \cdot \overline{\xi} - \left((\rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \zeta \right) \cdot \overline{\xi}, \\
&= \int_{\Omega} \rho_0 \left[\zeta \cdot \overline{(-i\omega \xi)} + \zeta \cdot \overline{\mathbb{A} \xi} + \zeta \cdot \overline{(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \xi} \right] - \int_{\Gamma_+} |\zeta|^2 (\rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}), \\
&= \left(\zeta, \mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0} \xi \right)_{L^2(\Omega, \rho_0)^d} - \int_{\Gamma_+} |\zeta|^2 (\rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}).
\end{aligned}$$

A l'aide de la caractérisation de $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}^*$, (4.13), $\zeta = \mathbf{0}$ sur Γ_+ , ce qui montre finalement que $\zeta \in H^+(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$. Remarquons que l'espace $H^+(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0) = H^-(\Omega, -\mathbf{v}_0, \rho_0)$ était attendu car $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}^*$ est de la même forme que l'opérateur direct $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}$ mais associé à l'écoulement opposé $-\mathbf{v}_0$.

Réciproquement, si $\zeta \in H^+(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$, par la formule de Green (3.15),

$$\forall \xi \in H^-(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0), \quad \left(\zeta, \mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0} \xi \right)_{L^2(\Omega, \rho_0)^d} = \left(\mathcal{T}_{-\omega, \mathbb{A}^*, -\mathbf{v}_0} \zeta, \xi \right)_{L^2(\Omega, \rho_0)^d},$$

ce qui implique bien que $\zeta \in D(\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0})$ et termine la preuve. ■

4.2.2 Inversibilité de $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}$

Nous pouvons à présent démontrer que l'opérateur $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}$ est un isomorphisme, ou de manière équivalente, que le problème de transport harmonique

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } \mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d, \text{ trouver } \boldsymbol{\xi} \in H^-(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0) \text{ tel que :} \\ \mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{f}, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.15) \\ (4.16) \end{array}$$

est bien posé. Montrons le théorème suivant :

Théorème 4.2.2.

$$\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0} : H^-(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0) \subset L^2(\Omega, \rho_0)^d \longrightarrow L^2(\Omega, \rho_0)^d,$$

est un isomorphisme. En particulier, pour $\mathbb{A} := \nabla \mathbf{v}_0$, l'opérateur de transport

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_{\omega, \mathbf{v}_0} : & H^-(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0) & \longrightarrow & L^2(\Omega, \rho_0)^d \\ & \boldsymbol{\xi} & \longmapsto & -i\omega \boldsymbol{\xi} + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi}, \end{array}$$

est un isomorphisme.

La preuve suit celle du théorème de Banach-Nečas-Babuška [52], mais puisqu'elle est simple, nous la reprenons rapidement.

Preuve. L'existence d'une estimation a priori pour $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}$, que nous avons supposée dans cette partie, montre que cet opérateur est injectif et d'image fermée. Montrons sa surjectivité. Comme les hypothèses faites sur l'écoulement \mathbf{v}_0 , être directionnelle ou Ω -remplissant, sont aussi valables pour l'écoulement opposé $-\mathbf{v}_0$, alors les similarités entre $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}$ et son adjoint $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}^* = \mathcal{T}_{-\omega, \mathbb{A}^*, -\mathbf{v}_0}$ montrent que les estimations a priori (4.1) sont aussi valables pour l'opérateur adjoint sur l'espace $H^+(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$. Nous en déduisons l'injectivité de l'adjoint. Puis, $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}$ étant d'image fermée, l'égalité

$$\text{Im}(\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}) = \overline{\text{Im}(\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0})} = \text{Ker}(\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}^*)^\perp = L^2(\Omega, \rho_0)^d,$$

conclut à la surjectivité de $\mathcal{T}_{\omega, \mathbb{A}, \mathbf{v}_0}$. ■

Chapitre 5

Étude numérique de l'équation de transport harmonique

5.1	Présentation et comparaison des schémas numériques : LS et SUPG	95
5.1.1	Introduction	95
5.1.2	Discretisation et code éléments finis	97
5.1.3	L'approche naïve : méthode de Galerkin standard	97
5.1.4	Présentation des schémas LS et SUPG	103
5.1.5	Comparaison entre les schémas LS et SUPG	104
5.2	Illustration en écoulements domaine-remplissant	107
5.2.1	Des cas d'écoulements directionnels	107
5.2.2	Un cas plus difficile : \mathbf{v}_0 non directionnelle	111
5.2.3	Sortir du cadre théorique d'un écoulement domaine-remplissant	115

5.1 Présentation et comparaison des schémas numériques : LS et SUPG

5.1.1 Introduction

Dans sa thèse, [3], E. Peynaud a étudié l'équation de transport scalaire suivante :

$$\alpha\psi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla\psi = f, \tag{5.1}$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$. Le cas classique de l'équation d'advection-réaction correspond à

$$\Re(\alpha) > 0.$$

Les principales difficultés auxquelles on doit faire face sont le manque de dissipation et le caractère fortement oscillatoire de la version harmonique de cette équation de transport, correspondant au cas où

$$\alpha = -i\omega \in i\mathbb{R}.$$

L'équation de transport intervenant dans le couplage des équations de Goldstein est une généralisation vectorielle de l'équation de transport scalaire (5.1), que l'on peut mettre sous

la forme

$$\mathbb{A}\xi + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\xi = \mathbf{g}, \quad (5.2)$$

où

$$\mathbb{A} = -i\omega I + \nabla \mathbf{v}_0.$$

Par exemple, lorsque l'écoulement est uniforme, on a $\nabla \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ et l'équation (5.2) se découple en plusieurs équations scalaires de la forme (5.1), si $\xi = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)$ et $\mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z)$ par exemple, on obtient :

$$\begin{cases} -i\omega \xi_x + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \xi_x = g_x, & (5.3a) \\ -i\omega \xi_y + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \xi_y = g_y, & (5.3b) \\ -i\omega \xi_z + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \xi_z = g_z. & (5.3c) \end{cases}$$

Le cas de l'équation d'advection-réaction correspond au cas où la matrice \mathbb{A} possède une partie symétrique définie positive :

$$\frac{1}{2}(\mathbb{A} + \mathbb{A}^*) \geq \mu_0 I, \quad \mu_0 > 0,$$

voir par exemple [45]. Or, ce n'est pas le cas de la matrice \mathbb{A} qui nous intéresse, nous avons

$$\frac{1}{2}(\mathbb{A} + \mathbb{A}^*) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v}_0 + (\nabla \mathbf{v}_0)^T),$$

ce qui donne par exemple dans le cas d'un écoulement cisailé

$$\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v}_0 + (\nabla \mathbf{v}_0)^T) = \begin{pmatrix} 0 & v'_0 \\ v'_0 & 0 \end{pmatrix},$$

ou encore dans le cas d'un écoulement circulaire

$$\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v}_0 + (\nabla \mathbf{v}_0)^T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & r\Omega'_0(r) \\ r\Omega'_0(r) & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ces deux cas particuliers, la matrice $\mathbb{A} + \mathbb{A}^*$ n'est pas définie positive. Nous nous attendons donc dans le cas général à avoir les mêmes principales difficultés que dans le cas scalaire, c'est-à-dire un caractère oscillatoire de la solution ainsi qu'un manque de dissipation.

Nous présentons dans ce chapitre la démarche de discrétisation numérique que nous avons adoptée pour résoudre l'équation de transport harmonique vectorielle intervenant dans les équations de Goldstein. Nous nous appuyerons sur l'étude menée par E. Peynaud sans aller jusqu'à la discrétisation par la méthode de Galerkin discontinue. En effet, à terme, comme nous souhaitons coupler l'équation de transport à un code d'éléments finis classiques, il nous est apparu dans un premier temps souhaitable d'utiliser des éléments finis standards pour notre étude. Nous n'avons pas effectué l'analyse théorique de ces discrétisations, qui sont classiques, utilisées pour notre équation qui est moins classique.

Beaucoup d'explications et de résultats sont donnés dans la thèse d'E. Peynaud, nous en rappelons sans démonstration quelque uns de manière à fournir un exposé didactique.

5.1.2 Discrétisation et code éléments finis

Librairie éléments finis 2D. Tout les résultats numérique 2D présentés sont issus d'un code éléments finis programmé en C++ durant cette thèse s'appuyant sur la librairie d'algèbre linéaire Eigen [53]. Ce code a été pensé pour être relativement générique, permettant de résoudre les problèmes d'équations aux dérivées partielles du premier et second ordre à coefficients variables à l'aide de la méthode des éléments finis sur maillages quadrangulaires ou triangulaires, d'ordre 1, c'est-à-dire les éléments finis habituellement appelés Q1 et P1 respectivement.

Tous les résultats numériques 2D ont été obtenus à l'aide de ce code, que ce soit les résultats de l'équation de transport que nous allons voir dans cette partie ou ceux présentés plus tard dans la partie sur le couplage de Goldstein.

Espaces de discrétisation. On notera V_h l'espace de dimension fini de discrétisation du domaine Ω_h polygonal, approchant le domaine Ω . La quantité $h > 0$ fait référence au plus petit pas du maillage, que l'on note \mathcal{M}_h , du domaine Ω_h , et dont les éléments seront notés $K \in \mathcal{M}_h$. Pour des éléments finis Q1, on a

$$V_h := \left\{ p \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega_h}) / \forall K \in \mathcal{M}_h, (\xi_h)|_K \in \mathbb{Q}_1(K) \right\},$$

et pour des éléments finis P1,

$$V_h := \left\{ p \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega_h}) / \forall K \in \mathcal{M}_h, (\xi_h)|_K \in \mathbb{P}_1(K) \right\},$$

où $\mathbb{Q}_1(K)$ est l'espace des polynômes de degré partiel inférieur à 1 et $\mathbb{P}_1(K)$ l'espace des polynômes de degré total inférieur à 1, tous définis sur la maille $K \in \mathbb{R}^2$.

La condition aux limites homogènes sur le bord entrant du domaine

$$\xi = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega^-,$$

est prise en compte en imposant 0 pour les degré de liberté correspondant à des noeuds du bord. La méthode utilisée pour cela est la mise à 0 des coefficients des lignes correspondantes de la matrice éléments finis assemblée à l'exception du coefficient sur la diagonale qui est pris égale à 1.

Ces approximations sont conformes au sens où dans les deux cas, l'espace V_h est un sous ensemble de l'espace $H(\Omega, \nu_0, \rho_0)$ dans lequel est définie la solution du problème continu. De même, la solution obtenue, prenant en compte les conditions aux limites, est bien dans $H^-(\Omega, \nu_0, \rho_0)$.

5.1.3 L'approche naïve : méthode de Galerkin standard

L'approche de Galerkin classique correspond à prendre comme espace de fonctions tests l'espace V_h lui-même. On obtient une formulation discrète naïve en multipliant par une fonction test l'équation au niveau continu et en intégrant, donnant à résoudre le problème sui-

vant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } \mathbf{g} \in L^2(\Omega), \text{ trouver } \xi_h \in V_h^2 \text{ tel que :} \\ \forall \zeta_h \in V_h, \quad \int_{\Omega_h} (\mathcal{T}_{\omega, v_0} \xi_h) \cdot \overline{\zeta_h} = \int_{\Omega_h} \mathbf{g} \cdot \overline{\zeta_h}, \\ \xi_h = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega_h^-. \end{array} \right.$$

Il est connu, voir l'exemple donné en dimension 1 dans [52], qu'avec cette méthode, bien que le problème continu et discrétisé (pour tout h) soit bien posés, il n'y a pas un contrôle optimal de l'erreur puisque sa constante inf-sup se comporte en $\mathcal{O}(h)$, donnant lieu à une erreur en norme $\|\cdot\|_H$ se comportant en $\mathcal{O}(h^{-1})$. C'est la partie $\|(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\xi_h\|_{L^2(\Omega)^2, \rho_0}$ de la norme $\|\xi\|_H$ qui est mal contrôlée, ce qui autorise en pratique l'apparition d'oscillations parasites.

Cas d'un écoulement uniforme. Pour illustrer ce non-contrôle de l'erreur dans la pratique, nous nous plaçons dans un domaine rectangulaire dans lequel circule un écoulement uniforme, comme montré sur la figure 5.1 :

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega_h =]-L_x, L_x[\times]-L_y, L_y[, \\ \mathbf{v}_0(x, y) = v_\infty \mathbf{e}_x, \quad v_\infty > 0. \end{aligned}$$

Alors, l'équation de transport harmonique devient, pour un second membre $\mathbf{g} \in L^2(\Omega)$,

$$\begin{cases} -i\omega\xi + v_\infty \partial_x \xi = \mathbf{g}, \\ \xi(-L_x, \cdot) = \mathbf{0}, \end{cases}$$

dont la solution admet pour expression la simple convolution suivante :

$$\xi(x, y) = \frac{1}{v_\infty} \int_{-L_x}^x e^{-i\frac{\omega}{v_\infty}(x-s)} \mathbf{g}(s, y) ds.$$

$$\mathbf{v}_0(x, y) = v_\infty \mathbf{e}_x$$

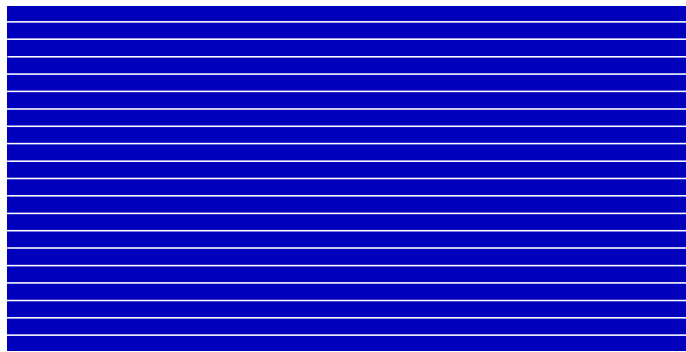


FIGURE 5.1 – Lignes de courant horizontales de l'écoulement uniforme $\mathbf{v}_0(x, y) = v_\infty \mathbf{e}_x$.

Nous choisissons les paramètres suivants :

$$L_x = 10, \quad L_y = 3 \quad \text{et} \quad v_\infty = 1,$$

et utilisons comme source une gaussienne, présentée sur la figure 5.2 plongée dans les lignes de courant représentées en blanc. La solution exacte est représentée sur le maillage en tri-

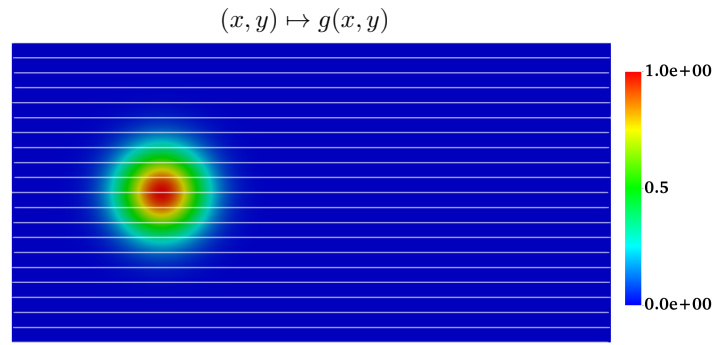


FIGURE 5.2 – Isovaleurs de $(x, y) \mapsto g(x, y)$ telle que la source soit $g = (g, g)$ soit la source.

angles utilisé sur la figure 5.3. Il s'agit du comportement typique du transport harmonique, où la source est convectée le long des lignes de courant de l'écoulement, produisant une solution dont la longueur d'onde est $2\pi/(\omega v_0)$. Afin de présenter le non contrôle de l'approche

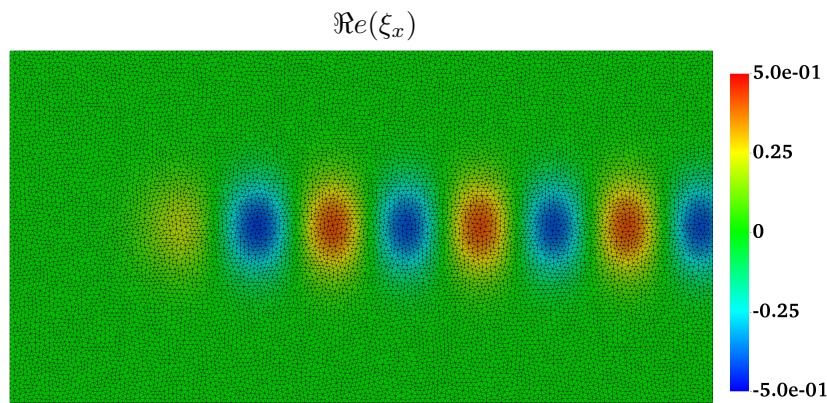


FIGURE 5.3 – Isovaleurs de $\Re(\xi)$ représentés avec le maillage en triangles utilisé

de Galerkin naïve, nous traçons sur la figure 5.4, $\Re(\xi_x)$ obtenu d'une part en calculant explicitement l'intégrale donnée par la formule exacte (à gauche), et obtenu d'autre part par résolution de la formulation de Galerkin naïve (à droite). On constate alors la présence d'oscillations parasites dans la solution, mises en évidence en traçant $\Re(\xi_x)$ le long d'une ligne $y = 5$. Néanmoins, sur ce cas précis, les oscillations parasites sont assez faibles.

La présence de pollution de la solution est plus flagrante dans le cas d'un écoulement cisailé, que nous serons amené à étudier par la suite car il s'agit d'un bon modèle de jet. La vitesse de l'écoulement est de la forme :

$$\mathbf{v}_0(x, y) := v_0(y)\mathbf{e}_x,$$

où v_0 est un profil de vitesse que nous représentons sur la figure 5.6. Pour donner un idée du cisaillement de cet écoulement, nous traçons, sur la figure 5.7 les isovaleurs du temps de parcours le long des lignes de courant en partant du bord rentrant $\partial\Omega^-$. La source est encore prise sous la forme d'une gaussienne, dont les isovaleurs sont présentées sur la figure 5.8. Les résultats comparatifs entre une solution de référence (calculée par la méthode que nous choisirons finalement) et celle obtenue par la méthode de Galerkin naïve est montré sur la figure 5.9, où l'on trace $\Re(\xi_y)$, la solution exacte en haut et celle naïve en bas. Les oscillations parasites sont alors bien plus visibles et il est clair qu'une telle pollution de la solution n'est

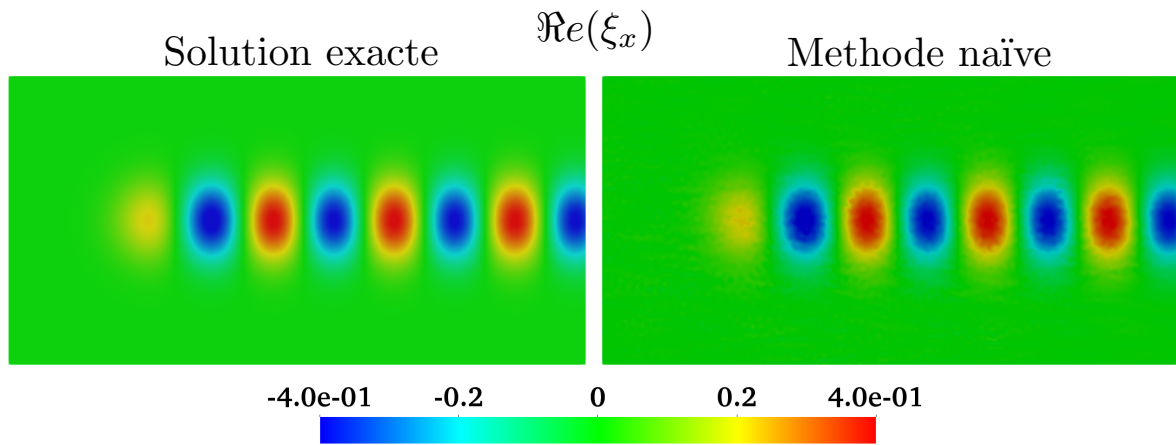


FIGURE 5.4 – $\Re(\xi_x)$ exacte et $\Re(\xi_x)$ obtenu par la méthode naïve : présence d'oscillations parasites : non-contrôle de $\|\partial_x \xi_{xh} - \partial_x \xi_x\|_L^2$

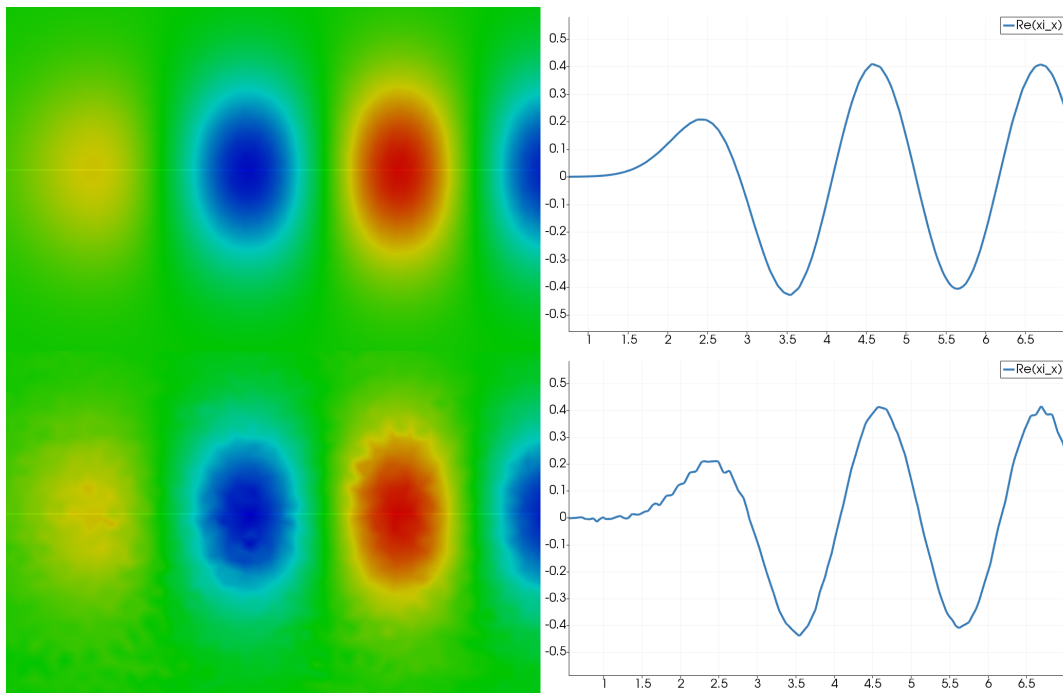


FIGURE 5.5 – Zoom sur $\Re(\xi)$ et $\Re(\xi_h)$ obtenus par la méthode naïve : présence d'oscillations parasites légères

pas acceptable. Nous traçons également sur cette figure les courbes $x \mapsto \Re(\xi_x(x, y = 0.25))$ correspondant à ces deux cas. Les oscillations parasites sont alors bien visibles sur la courbe rouge.

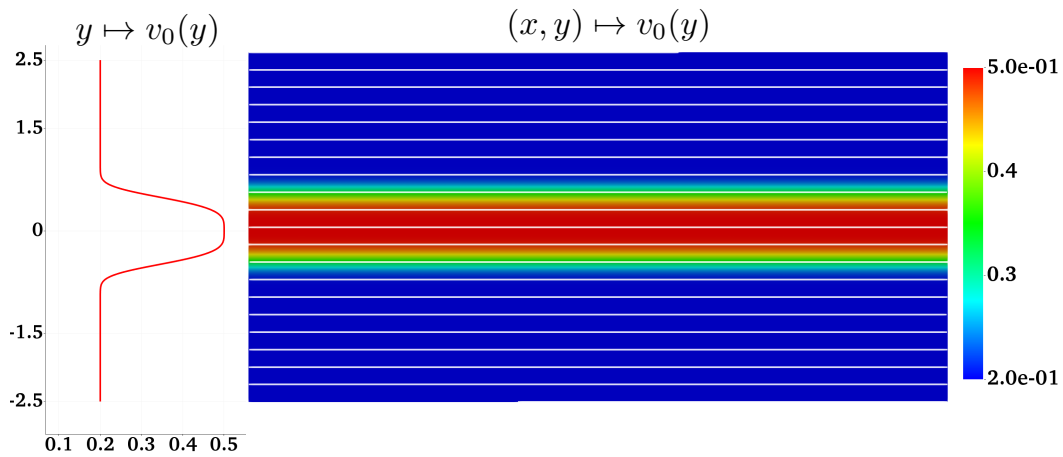


FIGURE 5.6 – Lignes de courant en noir et isovalues du temps de parcours le long de ces lignes de courant en partant du bord entrant.

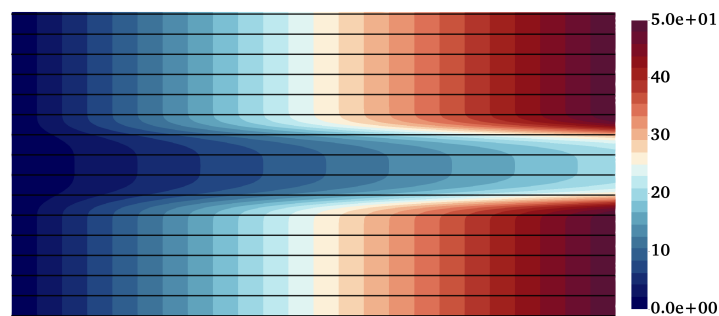


FIGURE 5.7 – Lignes de courant en noir et isovalues du temps de parcours le long de ces lignes de courant en partant du bord entrant.

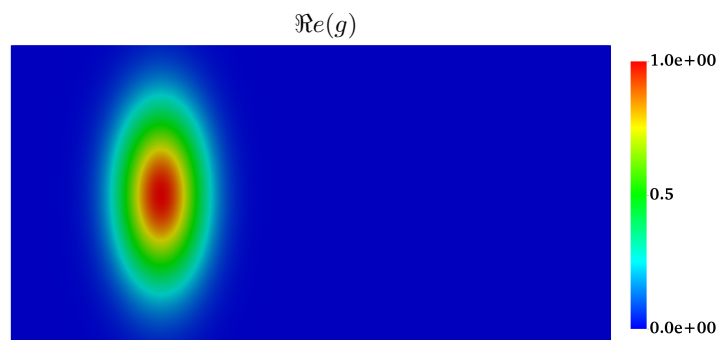


FIGURE 5.8 – Isovalues de g telle que la source soit $\mathbf{g} = (g, g)$.

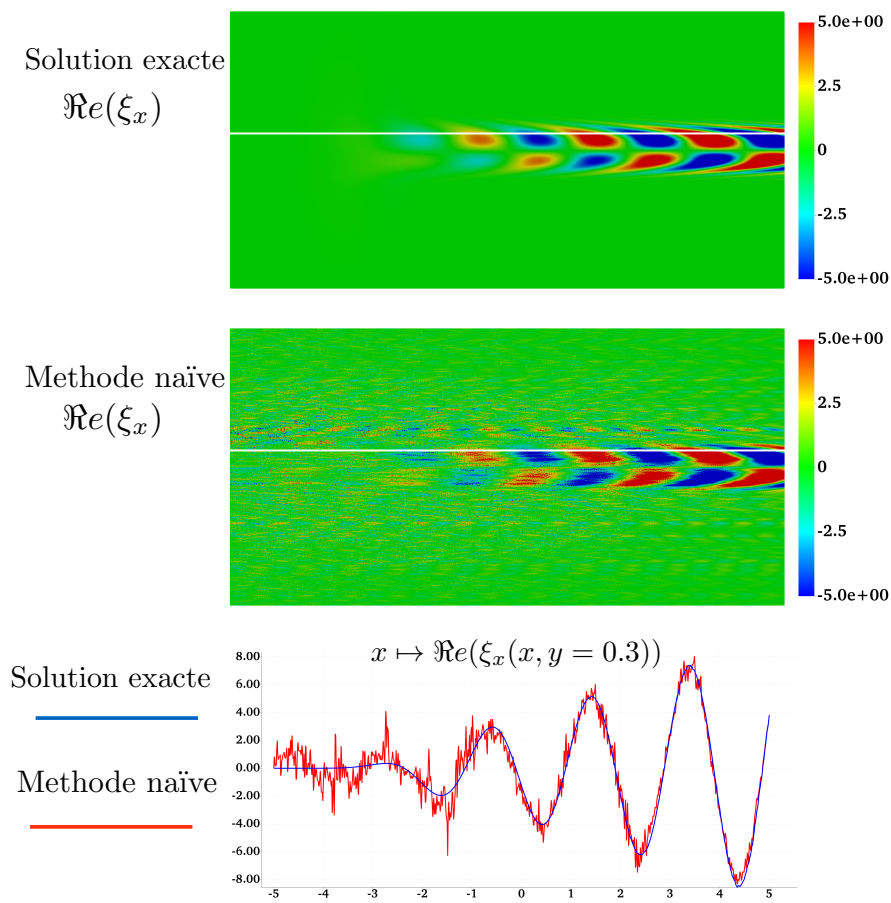


FIGURE 5.9 – Comparaison entre la solution exacte projetée sur le maillage et $\Re(\xi_x)$.

5.1.4 Présentation des schémas LS et SUPG

Nous avons vu que la méthode de Galerkin naïve consistant à simplement multiplier par une fonction test de V_h et intégrer n'étant pas satisfaisante, il convient d'utiliser une méthode de stabilisation.

C'est ce que propose les formulations de type Petrov-Galerkin consistant à changer la façon dont on parcourt l'espace de des fonctions tests. Ces méthodes ont été introduites dans le cadre de la mécanique des fluides pour discrétiser des équations de Navier-Stokes lorsque la viscosité est faible et que les termes dominants sont des termes de transport [54], voir par exemple les estimations optimales obtenues dans [55] et plus largement [56] pour une vue d'ensemble de ce type de méthodes de stabilisation. On ne change pas directement cet espace qui reste $L^2(\Omega, \rho_0)^2$. Par contre, on le parcourt par l'intermédiaire d'un opérateur, dépendant éventuellement du pas de maillage,

$$\mathcal{P}_h : W \rightarrow L^2(\Omega)^2,$$

où W est un espace fonctionnel, qui sera $H^-(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$ pour les deux cas particuliers présentés dans cette partie. La formulation naïve est alors transformée en

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } \mathbf{g} \in L^2(\Omega)^2, \text{ trouver } \boldsymbol{\xi}_h \in V_h^2 \text{ tel que :} \\ \forall \boldsymbol{\zeta}_h \in V_h, \quad \int_{\Omega_h} (\mathcal{I}_{\omega, \mathbf{v}_0} \boldsymbol{\xi}_h) \cdot \overline{\mathcal{P}_h \boldsymbol{\zeta}_h} = \int_{\Omega_h} \mathbf{g} \cdot \overline{\mathcal{P}_h \boldsymbol{\zeta}_h}, \\ \boldsymbol{\xi}_h = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega_h^-. \end{array} \right.$$

Il est nécessaire que l'opérateur \mathcal{P}_h soit un isomorphisme entre l'espace fonctionnel W et $L^2(\Omega, \rho_0)^2$ pour que le problème continu correspondant reste bien posé. Il doit être surjectif pour garantir l'unicité des solutions, et injectif pour en garantir l'existence.

Schéma LS. L'approche des moindres carrés, [57, 58], ou « Least-Squares » (LS) en anglais correspond à choisir l'opérateur

$$\mathcal{P}_h : \boldsymbol{\zeta}_h \in H^-(\Omega, \rho_0) \rightarrow (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\zeta}_h \in L^2(\Omega)^2,$$

ce qui donne à résoudre la formulation variationnelle suivante :

$$\forall \boldsymbol{\zeta} \in L^2(\Omega)^2, \quad \int_{\Omega} (\mathcal{I}_{\omega, \mathbf{v}_0} \boldsymbol{\xi}) \cdot \overline{(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\zeta}} = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \overline{(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\zeta}}$$

Schéma SUPG. La formulation SUPG, introduite pour les équations de Navier-Stokes par Brooks et Hughes [59], pour « Streamline Upwind Petrov-Galerkin method », utilise un paramètre de stabilisation $\delta > 0$ et correspond au choix de l'opérateur

$$\mathcal{P}_h : \boldsymbol{\zeta}_h \in H^-(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0) \rightarrow \boldsymbol{\zeta} + \delta (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\zeta} \in L^2(\Omega, \rho_0)^2,$$

donnant à résoudre la formulation variationnelle suivante :

$$\forall \boldsymbol{\zeta} \in L^2(\Omega)^2, \quad \int_{\Omega} (\mathcal{I}_{\omega, \mathbf{v}_0} \boldsymbol{\xi}) \cdot \overline{(\boldsymbol{\zeta} + \delta (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\zeta})} = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \overline{(\boldsymbol{\zeta} + \delta (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\zeta}).}$$

Cette formulation peut être vue comme une formulation intermédiaire entre la méthode des moindres carrés que l'on pondère par la quantité δ et la méthode naïve.

Équivalence des formulations Au niveau continu, dans le cadre où l'opérateur de transport est un isomorphisme, ces deux formulations sont équivalentes.

5.1.5 Comparaison entre les schémas LS et SUPG

Nous souhaitons dans cette section analyser le comportement de la méthode LS ainsi que celle SUPG à différentes valeurs du paramètre δ . Nous nous plaçons alors dans le même cas d'écoulement que présenté précédemment sur les figures 5.6 et 5.7, alors que la source est choisie égale à 1 dans tout le domaine.

Sur la figure 5.10, nous traçons les isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ (colonne de gauche) et $\Re(\xi_y)$ (colonne de droite), obtenu pour la méthode LS (première ligne), puis chaque autre ligne correspond à la méthode SUPG pour différentes valeurs du paramètre de stabilisation. On remarque un comportement très dissipatif de la méthode LS, comme analysé dans [3] pour l'équation de transport scalaire. La méthode SUPG semble alors mieux adapter à capter le caractère oscillant de la solution, notamment lorsque l'équation ne dissipe que très peu la solution. Le choix du paramètre de stabilisation δ est également très important. En effet, on observe pour les plus petites valeurs de δ , le comportement du schéma tend vers celui de la méthode naïve, correspondant elle-même à prendre $\delta = 0$, en faisant apparaître des oscillations parasites. Pour les plus grandes valeurs de δ , la méthode SUPG tend à se comporter comme le schéma LS et introduit donc de plus en plus de dissipation. Il convient donc de choisir ce paramètre le plus petit possible car l'équation de transport harmonique que nous étudions peut ne pas être dissipative du tout par elle-même, mais suffisamment grand pour ne pas avoir de problème de pollution de la solution.

Il s'agit du point faible de la méthode, en effet, même si des règles empiriques sont connues pour choisir le paramètre de stabilisation, voir [3], en le choisissant proportionnel au pas du maillage et à la fréquence et inversement proportionnel à la vitesse de l'écoulement, le choix optimal reste un problème ouvert.

Nous traçons sur la figure 5.11 les isovaleurs de $\Re(\xi_x)$, en haut, pour le choix de $\delta = 10^{-3}$ qui nous apparaît dans ce cas le meilleur et en bas, la courbe $x \mapsto \Re(\xi_x(x, y = 0.25))$ pour différentes valeurs de δ ainsi que pour la méthode LS. Nous confirmons bien nos observations faites sur la carte des isovaleurs, pour les deux cas extrêmes, la méthode LS (courbe verte) est trop dissipative et la méthode SUPG avec $\delta = 10^{-4}$ (courbe rouge), trop petit, fait apparaître des oscillations parasites dont la taille caractéristique est celle du pas du maillage. Les autres valeurs de δ donnent des résultats assez comparables, ce qui semble indiquer que le choix du paramètre de stabilisation ne nécessite pas non plus une recherche et une optimisation très poussée.

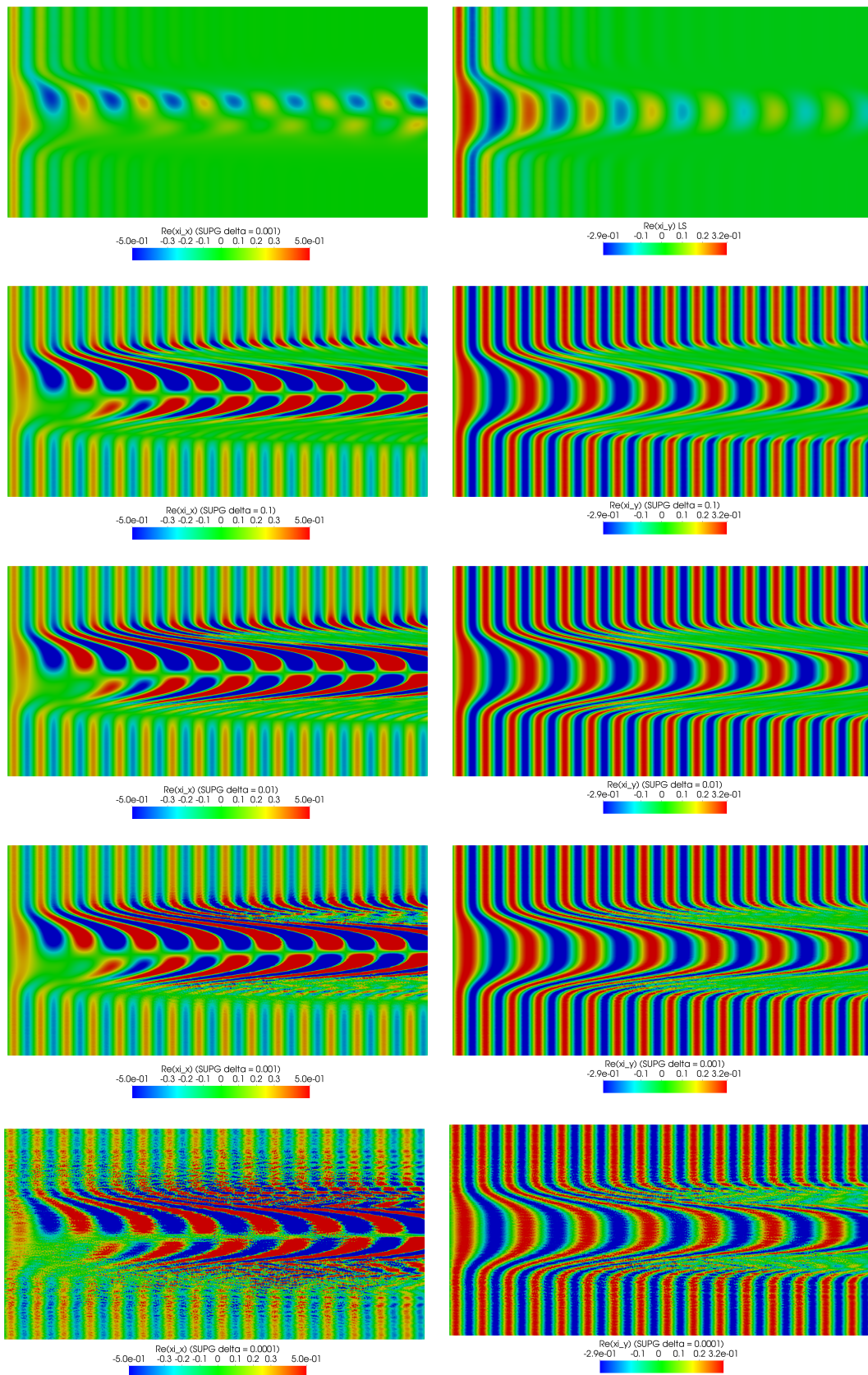


FIGURE 5.10 – Isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ et $\Re(\xi_y)$ obtenues avec les schémas, de haut en bas : LS et SUPG : $\delta = 10^{-1}$, $\delta = 10^{-2}$, $\delta = 10^{-3}$, $\delta = 10^{-4}$.

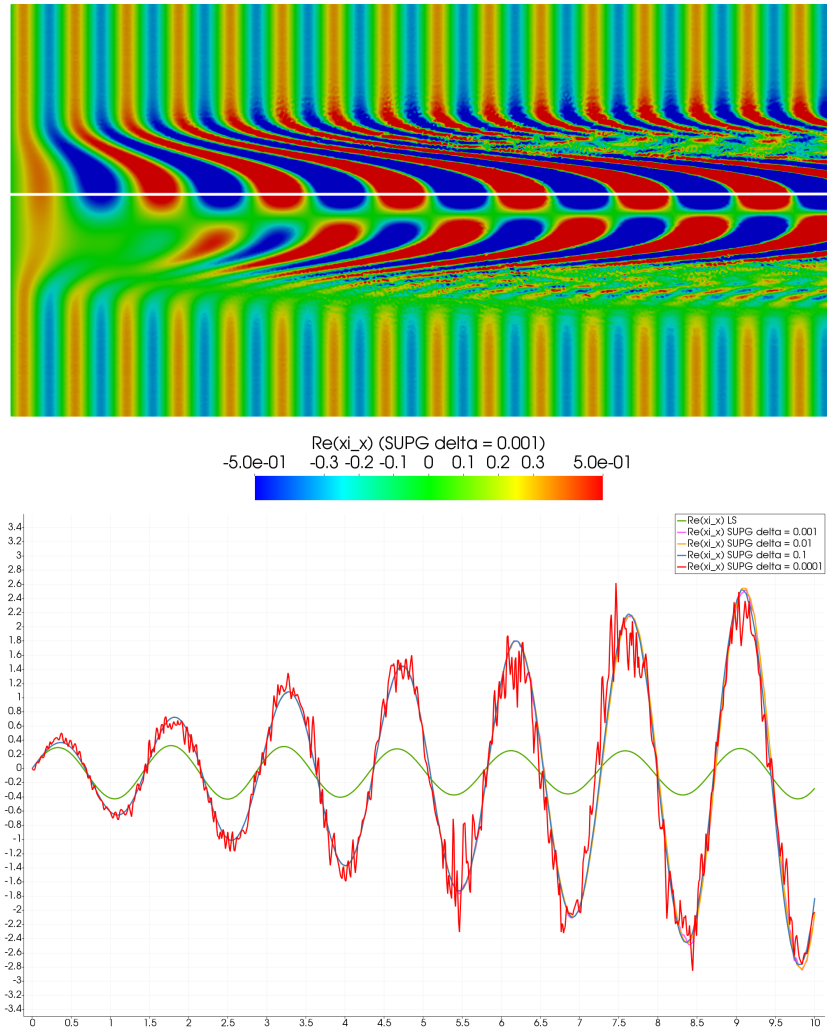


FIGURE 5.11 – $\Re(\xi_x)$ le long de la ligne $y = 0.25$. Comparaison des schémas LS (vert, très dissipé) et SUPG : pour $\delta = 10^{-1}$ (bleu), $\delta = 10^{-2}$ (orange), $\delta = 10^{-3}$ (rose) et $\delta = 10^{-4}$ (rouge).

5.2 Illustration en écoulements domaine-remplissant

La méthode numérique étant fixée, nous passons dans cette section à des illustrations du comportement des solutions de notre équations de transport harmonique vectorielle pour différents écoulements. Nous avons déjà observé la solution dans le cas des jets cisailés, nous proposons ici d'étudier des écoulements qui ne soient pas monodimensionnels.

5.2.1 Des cas d'écoulements directionnels

Nous commençons par un écoulement directionnel, de direction privilégiée e_x , qui est l'écoulement potentiel au dessus d'un cylindre en rotation. En coordonnées polaires, l'écoulement s'écrit

$$v_0(r, \theta) := \begin{pmatrix} U_\infty \left(1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cos(2\theta) \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r} \sin(\theta) \\ -U_\infty \left(\frac{R}{r} \right)^2 \sin(2\theta) - \frac{\Gamma}{2\pi r} \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

où les paramètres sont choisis :

- $U_\infty = 0.2$: vitesse à l'infini de l'écoulement, suivant e_x .
- $R = 1$: rayon du cylindre.
- $\Gamma = 2$, grandeur caractéristique de la rotation du cylindre ($\Gamma = 0$, le cylindre ne bouge pas).

Les lignes de courant de cet écoulement ainsi que les isovaleurs du temps de parcours sont représentées sur la figure 5.12. La partie restée en noire sur la figure n'est pas joint par les lignes de courant partant du bord entrant de gauche, mais de la partie du bord rentrant du côté droit de la frontière supérieure. Il faudra prendre garde à bien imposer les conditions aux limites sur tout le bord entrant $\partial\Omega^-$. La source est choisie sous forme d'une gaussienne,

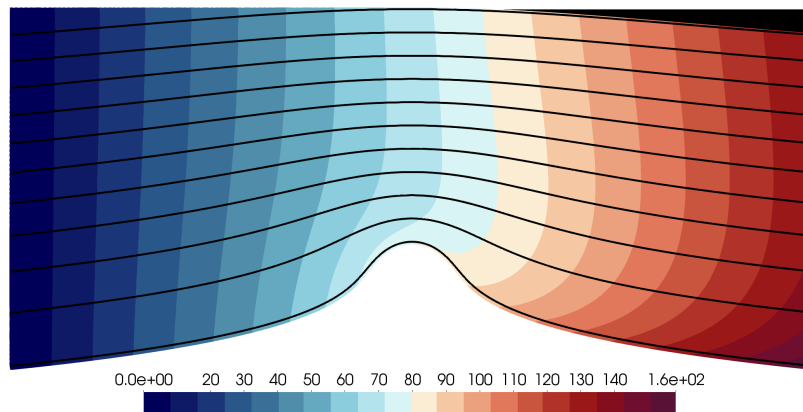


FIGURE 5.12 – Ligne de courant (en noir) et isovaleurs du temps de parcours le long de ces lignes de courant, partant du bord entrant.

représentée sur la figure 5.13.

Nous représentons alors la solution ξ à deux fréquences différentes, pour $\omega = 0.5$ et $\omega = 0.25$. Pour $\omega = 0.5$, les isovaleurs de $\Re\epsilon(\xi_x)$ et de $\Re\epsilon(\xi_y)$ sont représentées sur la figure

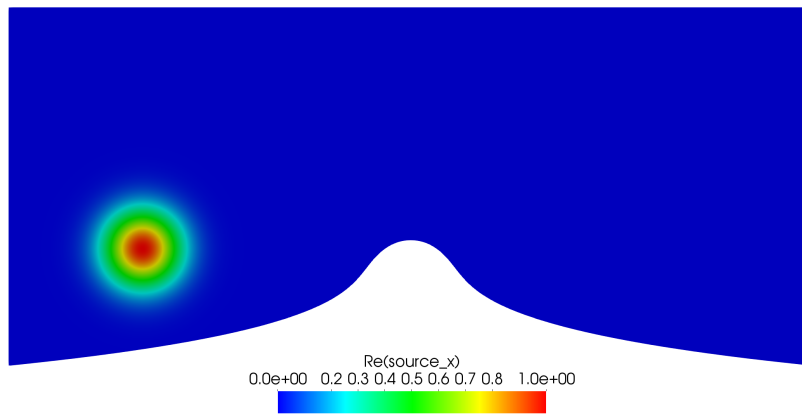


FIGURE 5.13 – Source

5.14 ainsi que quelques lignes de courant en noir. Il apparaît bien que l'inconnue ξ est convectée le long des lignes de courant. Le caractère « harmonique » de l'équation donne l'aspect d'onde à la solution et possède une longueur d'onde caractéristique, au moins localement, car celle-ci dépend de la pulsation de la source, mais également de la vitesse de propagation, on a, localement $\lambda_\xi(\mathbf{x}) = 2\pi/(\omega|v_0(\mathbf{x})|)$. Contrairement à l'équation de transport harmonique scalaire, le terme d'ordre zéro $(\xi \cdot \nabla)v_0$ peut être responsable d'un accroissement ou d'une diminution du module de la solution, comme nous pouvons le voir au dessus de la bosse pour ξ_x ou après avoir passé la bosse pour la seconde composante ξ_y .

Nous représentons sur la figure 5.15 les mêmes isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ et de $\Re(\xi_y)$ à la fréquence moitié, c'est-à-dire pour $\omega = 0.25$. Nous observons alors les mêmes conclusions, que ce soit pour la longueur d'onde caractéristique de l'équation de transport harmonique ou sa propension à augmenter ou diminuer le module de la quantité transportée. Il n'y a donc pas de conservation simple, en norme L^2 par exemple, à attendre d'une telle équation.

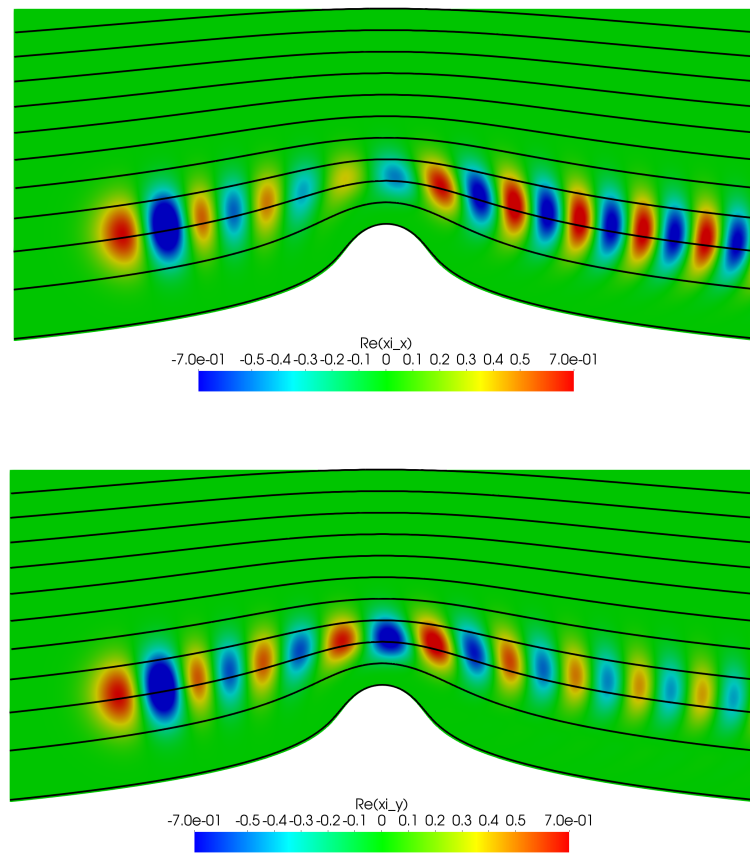


FIGURE 5.14 – Isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ et $\Re(\xi_y)$, à la pulsation $\omega = 0.5$.

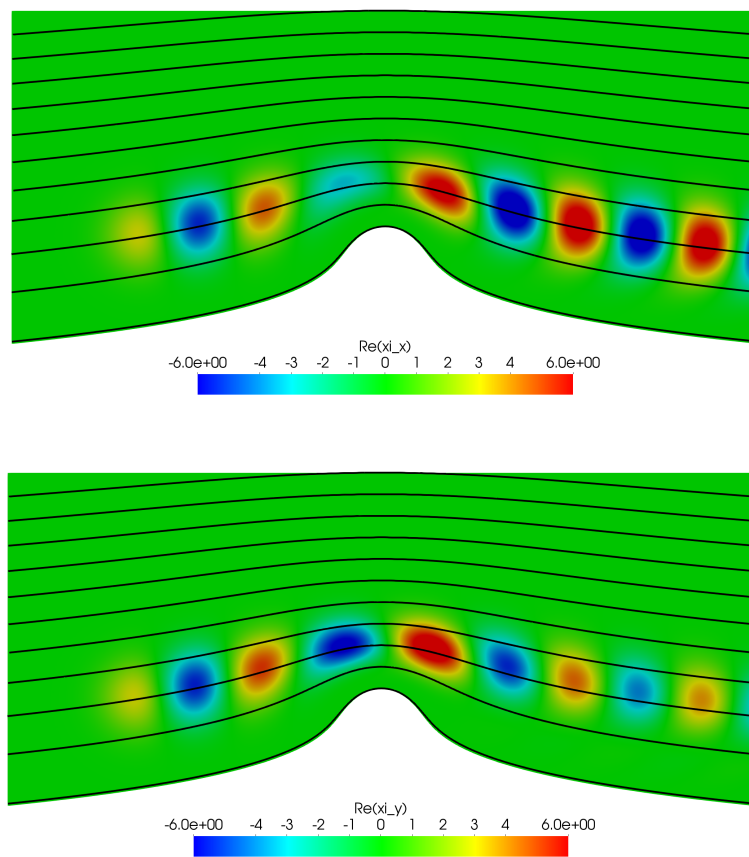


FIGURE 5.15 – Isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ et $\Re(\xi_y)$, à la pulsation $\omega = 0.25$.

5.2.2 Un cas plus difficile : v_0 non directionnelle

Le cas étudié dans cette section est plus compliqué du point de vue de l'équation de transport harmonique. En effet, cet écoulement, bien que toujours domaine-remplissant n'est cependant plus directionnel. Il est défini à l'aide d'une fonction de courant. Une fonction de courant est une fonction scalaire ψ_0 telle que la vitesse de l'écoulement soit donnée par :

$$\mathbf{v}_0 = \text{rot}_{2D}(\psi_0).$$

Une telle construction ne fournit donc que des écoulements non compressibles, car en effet

$$\text{div}(\mathbf{v}_0) = \text{div}(\text{rot}_{2D}(\psi_0)) = 0.$$

Dans cette sous-section, définissons la fonction de courant suivante, en coordonnées cartésiennes :

$$\psi_0(x, y) := U_\infty y - \eta \frac{e^{-x^2}}{1+y^2} \cos(ay - x).$$

La vitesse de l'écoulement associée s'écrit donc :

$$\mathbf{v}_0(x, y) = U_\infty \mathbf{e}_x + \eta \frac{e^{-x^2}}{1+y^2} \begin{pmatrix} a \sin(ay - x) - \frac{2y}{1+y^2} \cos(ay - x) \\ 2x \cos(ay - x) - \sin(ay - x) \end{pmatrix},$$

et peut être interprétée comme une perturbation rotationnelle d'un écoulement uniforme $U_\infty \mathbf{e}_x$. Les paramètres peuvent s'interpréter de la façon suivante :

- U_∞ : vitesse à l'infini.
- η : caractéristique la « taille » de la perturbation.
- a : donne une inclinaison aux lignes de courant, faisant de la vitesse un écoulement non directionnel.

Nous nous plaçons dans un tube de courant de cet écoulement, c'est-à-dire le domaine compris entre les deux droites verticale $\{x = -L_x\}$ et $\{x = L_x\}$ et les lignes de courant correspondant aux isovaleurs de la fonction de courant $\{\psi_0 = \psi_0^-\}$ et $\{\psi_0^+\}$:

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -L_x < x < L_x \text{ et } \psi_0^- < \psi_0(x, y) < \psi_0^+\}.$$

Numériquement, nous choisissons les paramètres suivants :

- $U_\infty = 0.2$
- $a = 1.5$
- $\eta = 0.4$

L'écoulement est représenté sur la figure 5.16, où quelques lignes de courant sont tracées en noir. Les couleurs, du bleu au rouge, représentent les isovaleurs du temps de parcours le long des lignes de courant en partant du bord entrant, bord vertical gauche, puisque l'écoulement va de gauche à droite.

La géométrie des lignes de courant d'un tel écoulement étant compliquée, le maillage utilisé doit être très fin. Nous représentons sur la figure 5.18 le maillage en triangles utilisé pour les simulations présentées.

Nous traçons sur la figure 5.19 les isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ (en haut) et de $\Re(\xi_y)$ (en bas), ainsi que quelques lignes de courant, en noir. Nous remarquons que l'écoulement amplifie

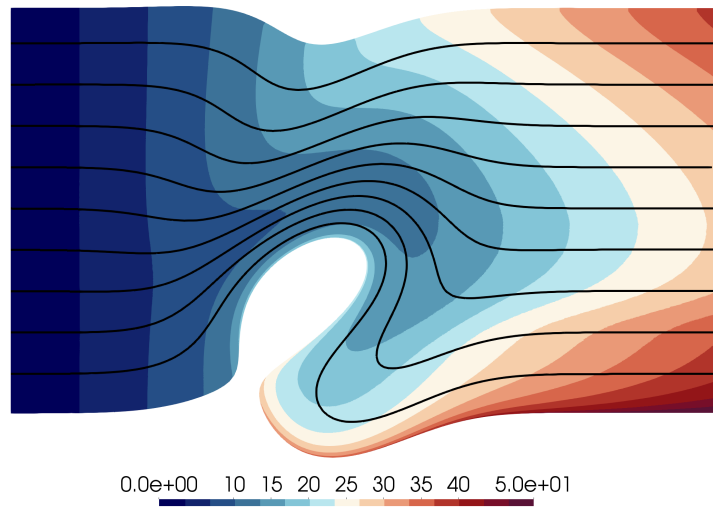


FIGURE 5.16 – Ligne de courant en noir et isovalues du temps de parcours de ces lignes de courant en partant du bord entrant (bord vertical à gauche).

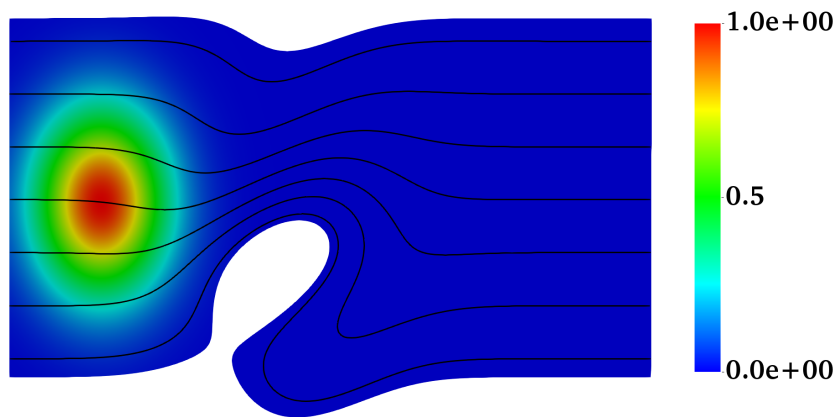


FIGURE 5.17 – Source gaussienne.

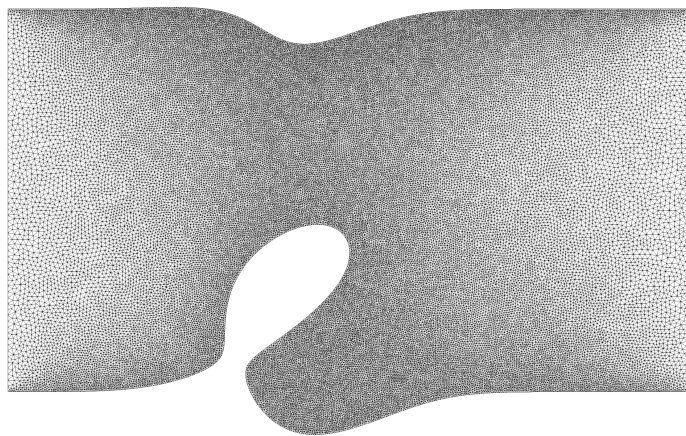


FIGURE 5.18 – Maillage en triangles (P1).

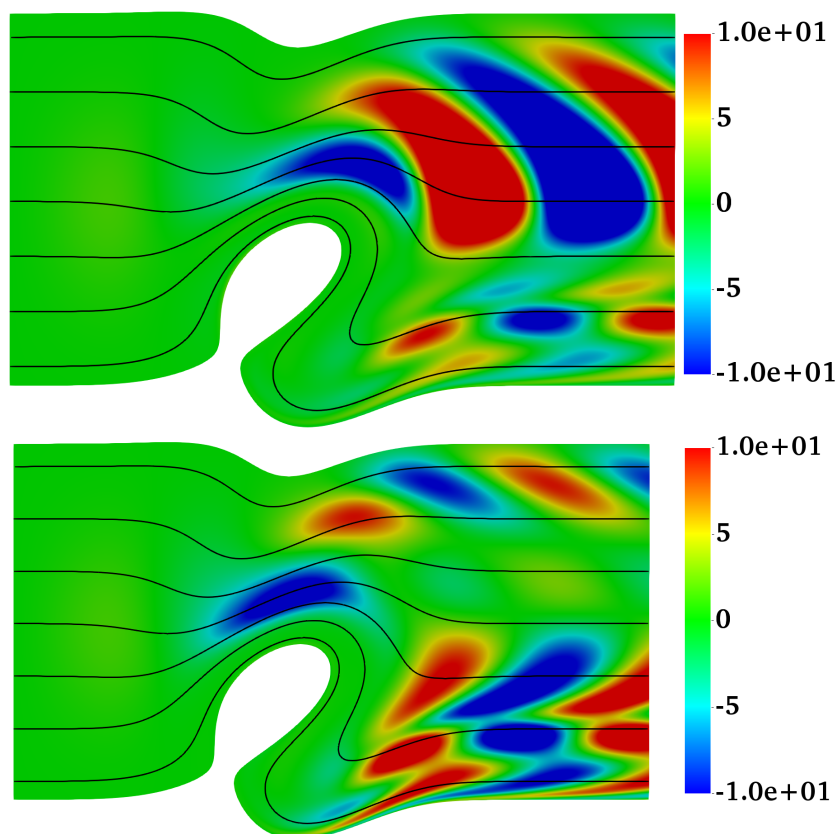


FIGURE 5.19 – Isovaleurs de $\Re\mathcal{E}(\xi_x)$ et de $\Re\mathcal{E}(\xi_y)$ pour $\omega = 0.5$. Lignes de courant en noir.

fortement la source, tout en suivant les lignes de courant. Même des lignes, les plus hautes, qui ne traversaient pas une partie où la source est très importante, sont amplifiée de façon significative. La longueur d'onde observée est bien celle attendu et les résultats numériques convergent.

Pour étudier l'influence du paramètre de stabilisation sur un cas plus compliqué, nous traçons sur la figure 5.20 les isovaleurs de $\Re\mathcal{E}(\xi_x)$ pour différentes valeurs de δ , de haut en bas : 10^{-3} , 10^{-4} et 10^{-5} . La différence observée entre $\delta = 10^{-3}$ et $\delta = 10^{-4}$ est minime, mais nous voyons néanmoins des petites oscillations parasites apparaître. En continuant de diminuer δ , on arrive à une situation où la solution est complètement polluée et ne ressemble plus du tout aux autres. Ce sont ces observations qui nous permettent de régler ce paramètres de stabilisation, tout en gardant la règle pratique de diminuer δ tant que possible, tout en gardant une solution non polluée.

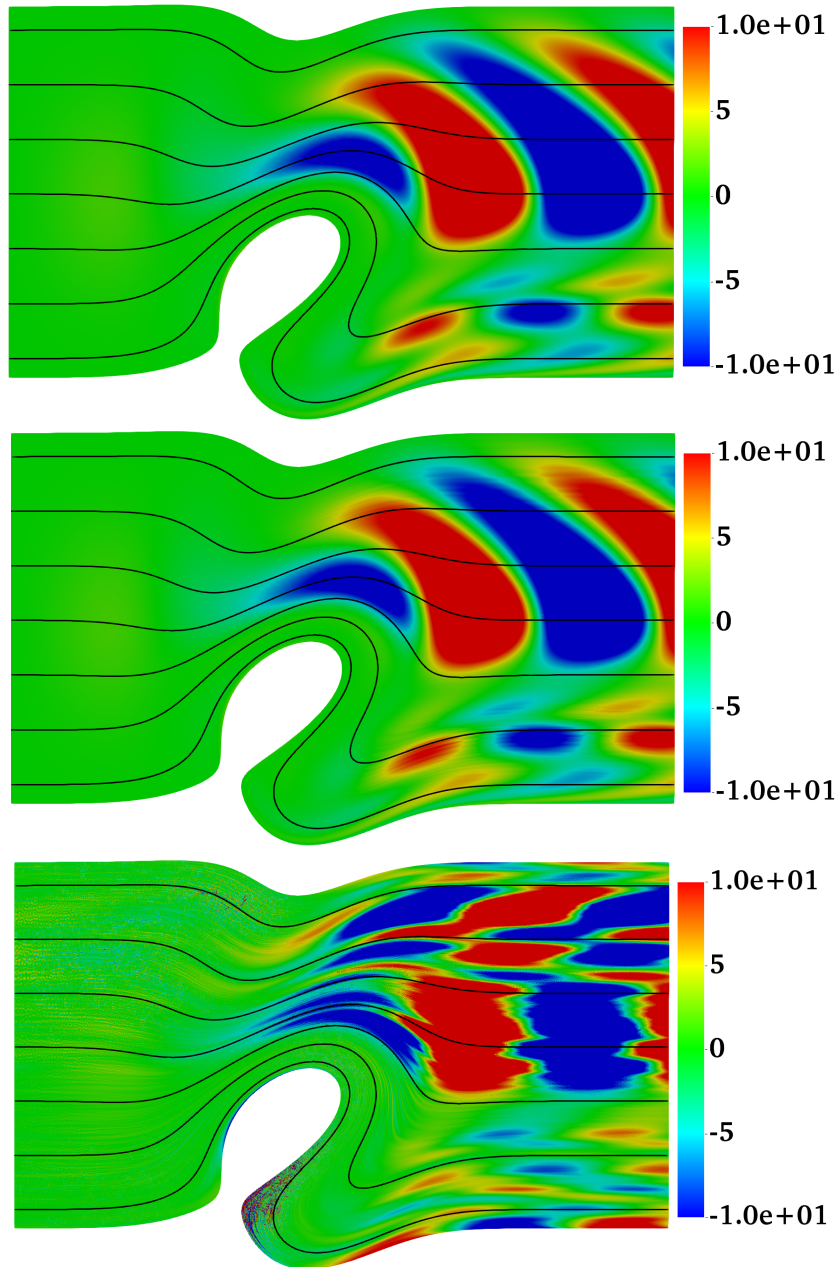


FIGURE 5.20 – Étude de l'influence du paramètre δ sur un cas plus compliqué : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ pour, de haut en bas, $\delta = 10^{-3}$, $\delta = 10^{-4}$ et $\delta = 10^{-5}$.

5.2.3 Sortir du cadre théorique d'un écoulement domaine-remplissant

Le cadre théorique des écoulements domaine-remplissants que nous avons présenté exclu deux cas notables :

- les écoulements avec des points d'arrêt, et
- les écoulements avec des recirculations.

Même si notre approche théorique échoue à décrire ces cas là, nous souhaitons tester la robustesse de la méthode numérique choisie. Pour cela, nous avons sélectionné deux écoulements, l'un ayant respectivement un point d'arrêt et l'autre des lignes de courant fermées.

Exemple d'écoulement avec des points d'arrêt L'existence de point d'arrêt est généralement due à la présence d'obstacles dans le fluide. Nous reprenons l'écoulement que nous avons utilisé dans la section précédente et considérons tout le domaine autour du cylindre en rotation. La vitesse de l'écoulement a toujours la même expression, en coordonnées polaires $((r, \theta))$ hors du disque de rayon 1 et de centre $(0, 0)$, on a :

$$v_0(r, \theta) := \begin{pmatrix} U_\infty \left(1 - \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos(2\theta)\right) + \frac{\Gamma}{2\pi r} \sin(\theta) \\ -U_\infty \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sin(2\theta) - \frac{\Gamma}{2\pi r} \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

et est irrotationnelle. Nous utilisons les mêmes paramètres que précédemment :

- $U_\infty = 0.2$: vitesse à l'infini de l'écoulement, suivant e_x .
- $R = 1$: rayon du cylindre.
- $\Gamma = 2$, grandeur caractéristique de la rotation du cylindre ($\Gamma = 0$, le cylindre ne bouge pas).

Cependant, lorsque l'on considère le domaine faisant tout le tour du cylindre, il apparaît que l'écoulement n'est plus domaine-remplissant et nous sortons du cadre théorique dans lequel nous savons démontrer que l'équation de transport est bien posée. En effet, comme montré sur la figure 5.21, où sont représentés les isovalues du temps de parcours le long des lignes de courant (représentées elles en noir), l'écoulement possède deux points d'arrêt à la surface du disque. Chacun est joint par une ligne de courant, celui de gauche par une ligne qui va vers ce point tandis que celui de droite par une ligne qui fuit ce point.

Nous utilisons une source gaussienne, représentée également sur la figure 5.21, passant par les lignes de courant qui posent problème.

Les résultats numériques obtenus sont présentés sur la figure 5.22, pour différents niveaux de saturation de la couleur. On obtient une explosion de la solution le long de la ligne fuyant le point d'arrêt de droite du cylindre, mais rien d'apparent n'est constaté du côté du point d'arrêt qui est joint par une ligne de courant. En saturant le jeu de couleur, on retrouve hors de la ligne qui pose problème la solution telle qu'on imagine qu'elle devrait être, similaire au cas précédent lorsque nous ne considérons que le domaine au dessus du cylindre. On en déduit que la solution n'est tellement polluée en dehors de la ligne joignant le point d'arrêt, mais reste cependant inacceptable du point de vue numérique, surtout si l'on doit coupler l'équation de transport à une équation qui a tendance à faire « rayonner les problèmes ».

Pour étudier l'influence de la fréquence dans ce cas, nous présentons également les résultats obtenus à plus basse fréquence, pour $\omega = 0.1$, sur la figure 5.23. On constate alors que le

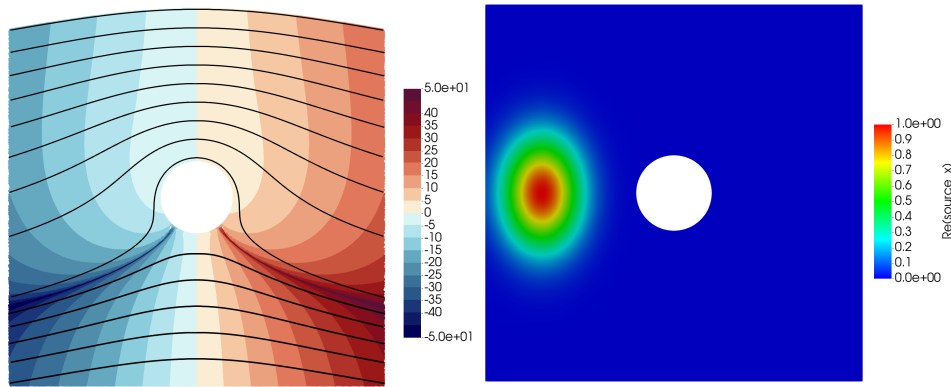


FIGURE 5.21 – Écoulement potentiel autour d'un cylindre en rotation : isocontours du temps de parcours et lignes de courant (en noir) à gauche et source gaussienne à droite.

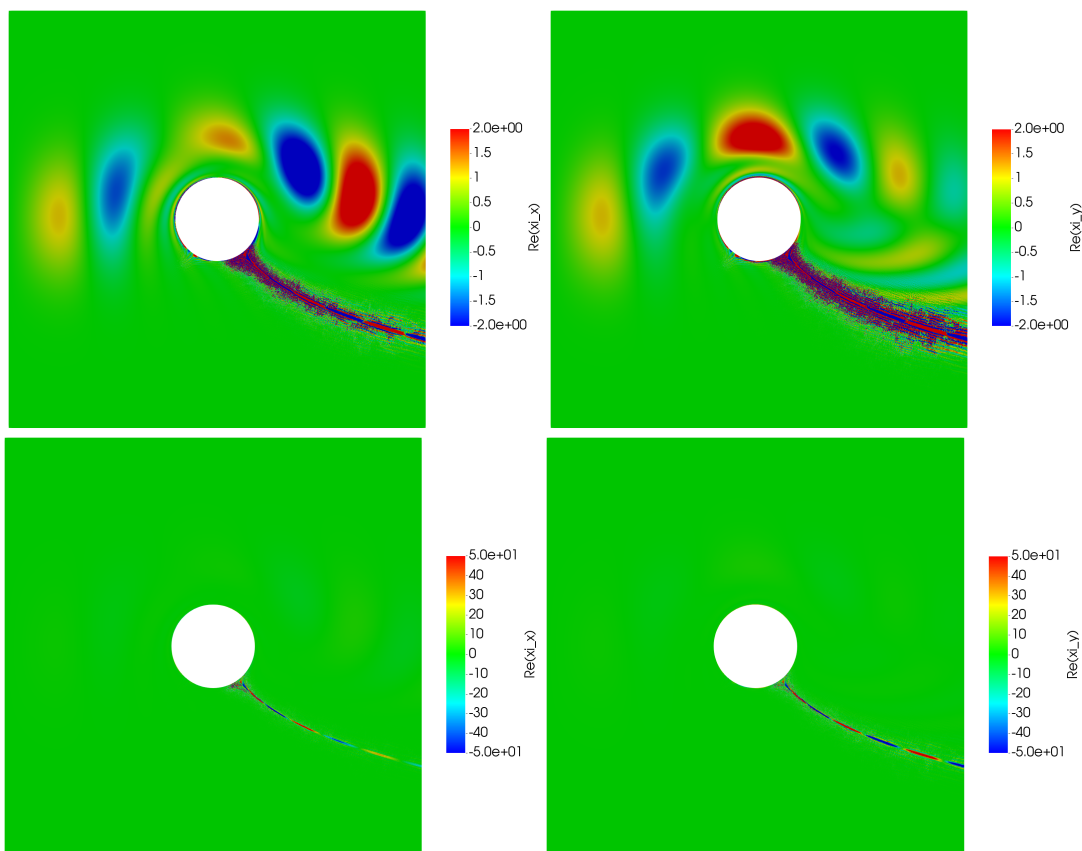


FIGURE 5.22 – $\Re(\xi_x)$ et $\Re(\xi_y)$: explosion le long de la ligne partant du point d'arrêt, pour $\omega = 0.5$ et différents niveaux de saturation du jeu de couleurs.

problème a tendance à empirer. Enfin, sur la figure 5.24, nous traçons $\Re(\xi_x)$, toujours pour $\omega = 0.1$, mais pour différentes valeurs du paramètre de stabilisation, $\delta = 10^{-1}$, $\delta = 10^{-3}$ et $\delta = 10^{-4}$. On remarque alors que le problème est d'autant plus visible que le paramètre de stabilisation est grand, ce qui montre que l'introduction de dissipation n'aide pas à éliminer le problème.

Nous avons deux hypothèses pour expliquer pourquoi le code fait exploser la solution sur cette ligne, et non sur la ligne joignant l'autre point d'arrêt. La première est que l'écoulement est instable sur cette ligne, ce qui fait grandir le module de ξ le long de la ligne en suivant

l'écoulement. Ainsi, puisque l'écoulement est d'autant plus lent qu'on est proche du point d'arrêt, l'instabilité se fait ressentir d'autant plus. La seconde hypothèse, est que la ligne fuyant le point d'arrêt, une fois discrétisée, semblerait venir en un temps fini du bord du cylindre et donc demanderait une condition aux limites au point d'arrêt, mais nous n'avons pas testé cette hypothèse.

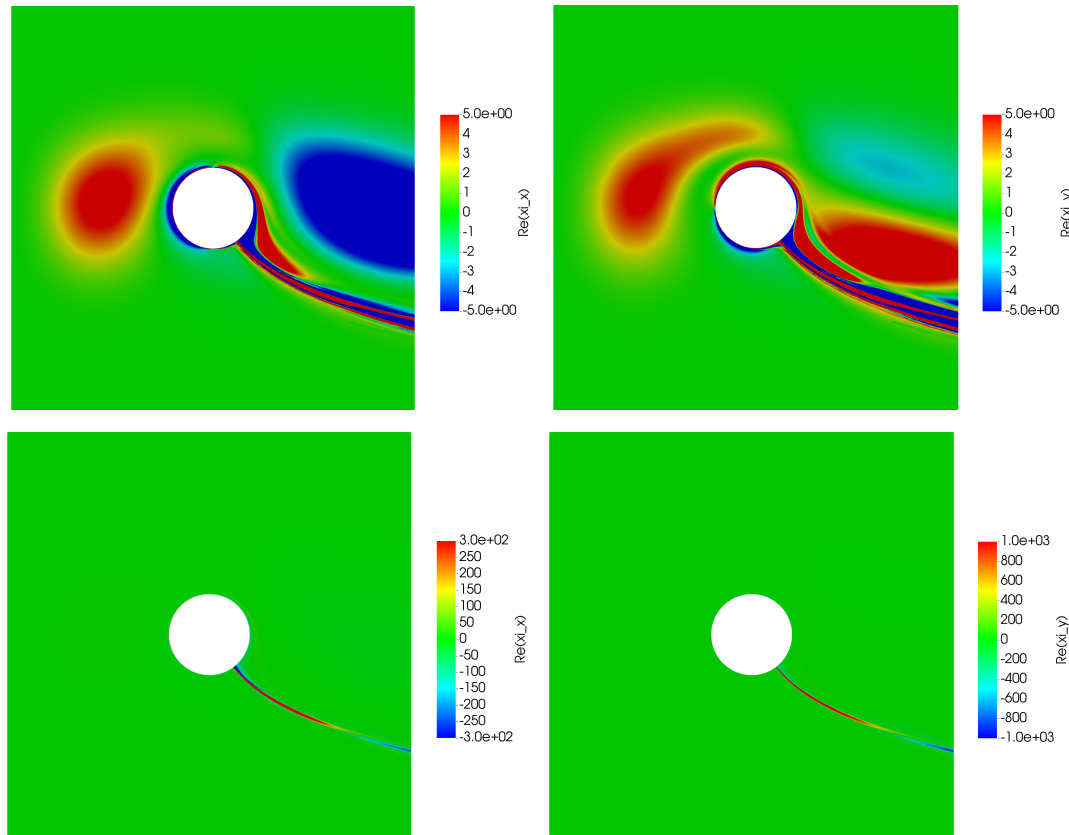


FIGURE 5.23 – $\Re(\xi_x)$ et $\Re(\xi_y)$: explosion le long de la ligne partant du point d'arrêt, pour $\omega = 0.1$

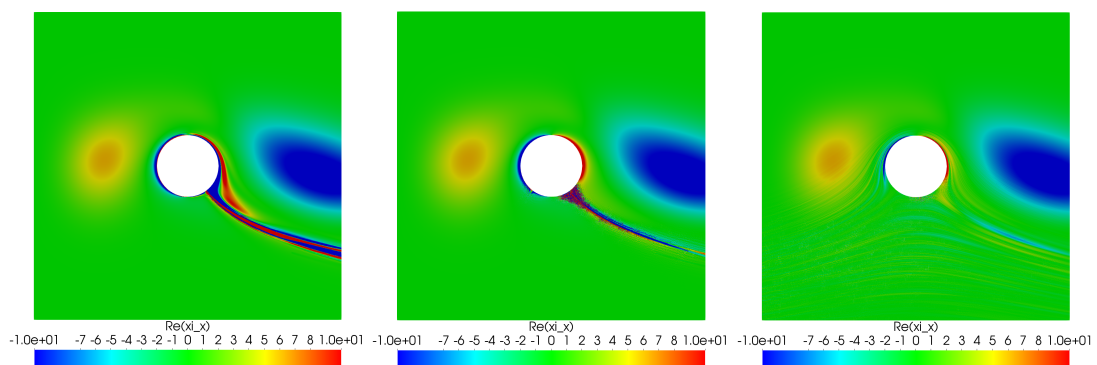


FIGURE 5.24 – $\Re(\xi_x)$, pour $\omega = 0.1$ et de gauche à droite : $\delta = 10^{-1}$, $\delta = 10^{-3}$ et $\delta = 10^{-4}$

Avec recirculations : écoulement irrotationnel perturbé. Passons à un autre cas typique où l'écoulement n'est pas domaine-remplissant, celui d'un écoulement qui possède des recirculations. Pour étudier ce type d'écoulement, nous utilisons le cas jouet d'un écoulement en recirculation dans une couronne. Nous présentons deux cas simples ici, les aspects théoriques seront explorés ultérieurement et font l'objet d'une partie complète.

Considérons la couronne Ω :

$$\Omega := \{(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) : r \in [r_i, r_e], \theta \in [0, 2\pi]\},$$

dans laquelle la vitesse de l'écoulement s'écrit, en coordonnées polaires, sous la forme

$$v_0(r, \theta) = v_0(r)e_\theta \quad \text{où} \quad v_0(r, \theta) := \frac{1}{r} + b,$$

où $b \in \mathbb{R}$. Nous allons voir deux cas typiques selon des exemples de valeurs de b , à la pulsation $\omega = 1$ fixée :

- Pour $b = 10$: comportement oscillant de la solution, l'équation est bien posée.
- Pour $b = 2.5$: l'équation est mal posée et l'on constate que le long d'une ligne de courant de la forme $\{(r^* \cos(\theta), r^* \sin(\theta)) : \theta \in [0, 2\pi]\}$, où $r^* \approx 2.2$, la solution devient très grande et ne converge pas lorsque l'on raffine le maillage.

Nous nous contentons de donner ici un aperçu numérique des problèmes pouvant intervenir lorsque l'écoulement possède des lignes de courant fermées, ce que nous avons exclu jusqu'ici à l'aide de l'hypothèse d'être domaine-remplissant. Nous utilisons une source gaussienne, dont nous traçons les isovaleurs sur la figure 5.25, ainsi que quelques lignes de courant, en blanc, formant des cercles concentriques, montrant bien que l'écoulement est en recirculation.

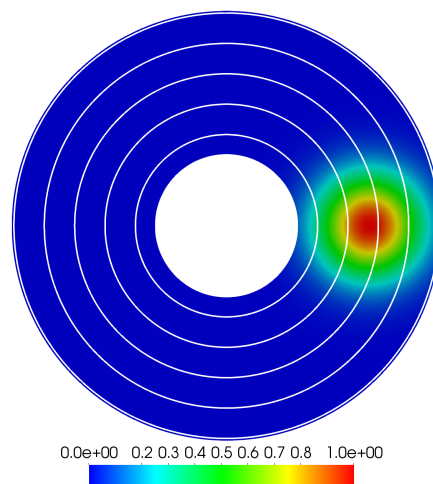


FIGURE 5.25 – Source $g = (g, g)$: isovaleurs de g . Quelques lignes de courant en blanc

Commençons par présenter le cas où l'équation de transport harmonique est bien posée, pour $b = 10$, à la pulsation $\omega = 1$.

Sur la figure 5.26, nous représentons les isovaleurs de $\Re\mathfrak{c}(\xi_x)$ et $\Re\mathfrak{c}(\xi_y)$. Notamment, puisqu'il s'agit du cas où l'équation est bien posée, nous arrivons à faire converger la solution en raffinant le maillage.

Par contre, pour $b = 2.5$, toujours à la pulsation $\omega = 1$, la théorie prédit que l'équation de transport doit être mal posée le long de la ligne de courant $\{r = 2.1\}$. Nous traçons sur la

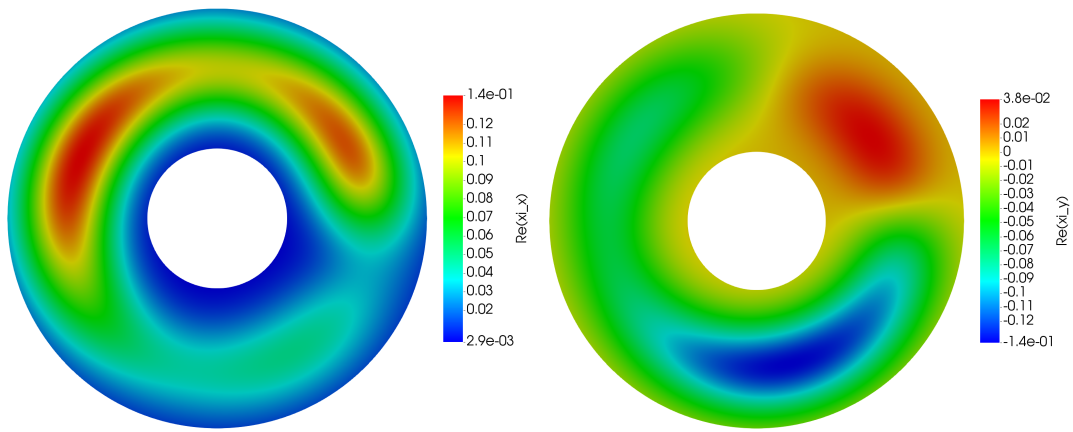


FIGURE 5.26 – Cas $b = 10$. Isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ à gauche et $\Re(\xi_y)$ à droite, à $\omega = 1$.

figure 5.27, pour plusieurs niveaux de raffinement du maillage, à 1.5×10^4 , 4×10^4 et 3×10^5 degrés de liberté, à gauche les isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ et à droite les courbes $r \mapsto \Re(\xi_x(r, \theta = 0))$, permettant de visualiser l'explosion le long de la ligne de résonance. Nous observons alors qu'il n'y a pas convergence de la solution, et que la solution semble de plus en plus singulière le long de cette ligne de résonance au fur et à mesure que l'on raffine le maillage.

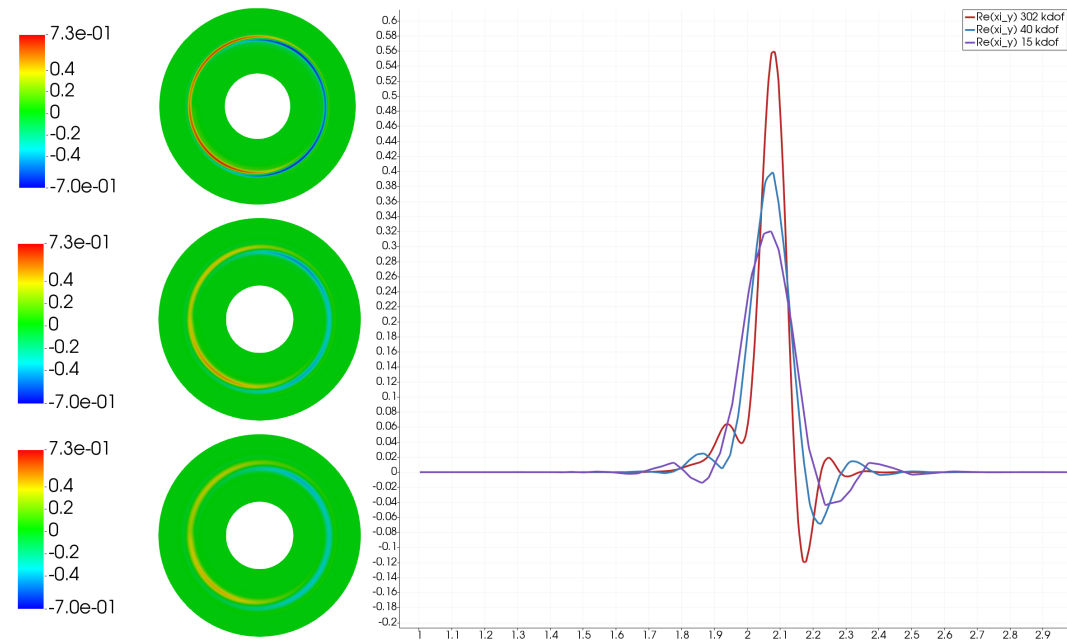


FIGURE 5.27 – Cas $b = 2.5$: le problème est mal posé, non convergence le long de la ligne $\{(r^* \cos(\theta), r^* \sin(\theta)) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ où $r \approx 2.1$.

Avec recirculations : cas de la rotation solide. Nous verrons lors de l'étude spécifique de l'équation de transport harmonique de Goldstein en écoulement circulaire que si l'on augmente la pulsation, il y a de grande chance pour que l'on se retrouve dans la situation où la solution explose sur certaines lignes de courant, pour de plus en plus de lignes de courant au fur et à mesure que la fréquence augmente. L'exception à cette règle est le cas de la rotation solide, pour laquelle nous présentons alors brièvement quelques résultats numériques

à pulsation plus élevée.

Nous avons déjà évoqué le cas de l'équation de transport dans un écoulement en rotation solide. Cela correspond à choisir

$$v_0(r, \theta) = ar e_\theta,$$

où $a \in \mathbb{R}$. Nous posons $a = 1$ et discutons selon la valeur de la pulsation. En effet, nous avons vu que deux cas se présentaient, puisque $a = 1$,

- Soit $\omega \notin \mathbb{Z}$ et l'équation est bien posée.
- Soit $\omega \in \mathbb{Z}$ et l'équation est mal posée.

Nous utilisons la même source gaussienne que précédemment pour les calculs. Commençons par présenter deux cas de fréquence où l'équation de transport est bien posée, pour $\omega = 3.5$ et pour $\omega = 10.5$. Nous représentons les isovaleurs de $\Re\mathcal{E}(\xi_x)$ et de $\Re\mathcal{E}(\xi_y)$ sur la figure 5.28, la première ligne correspondant à la plus haute pulsation $\omega = 10.5$ et celle du bas à la plus basse $\omega = 3.5$. Les solutions obtenues sont stables par raffinement du maillage, nous indiquant que nous avons atteint la convergence.

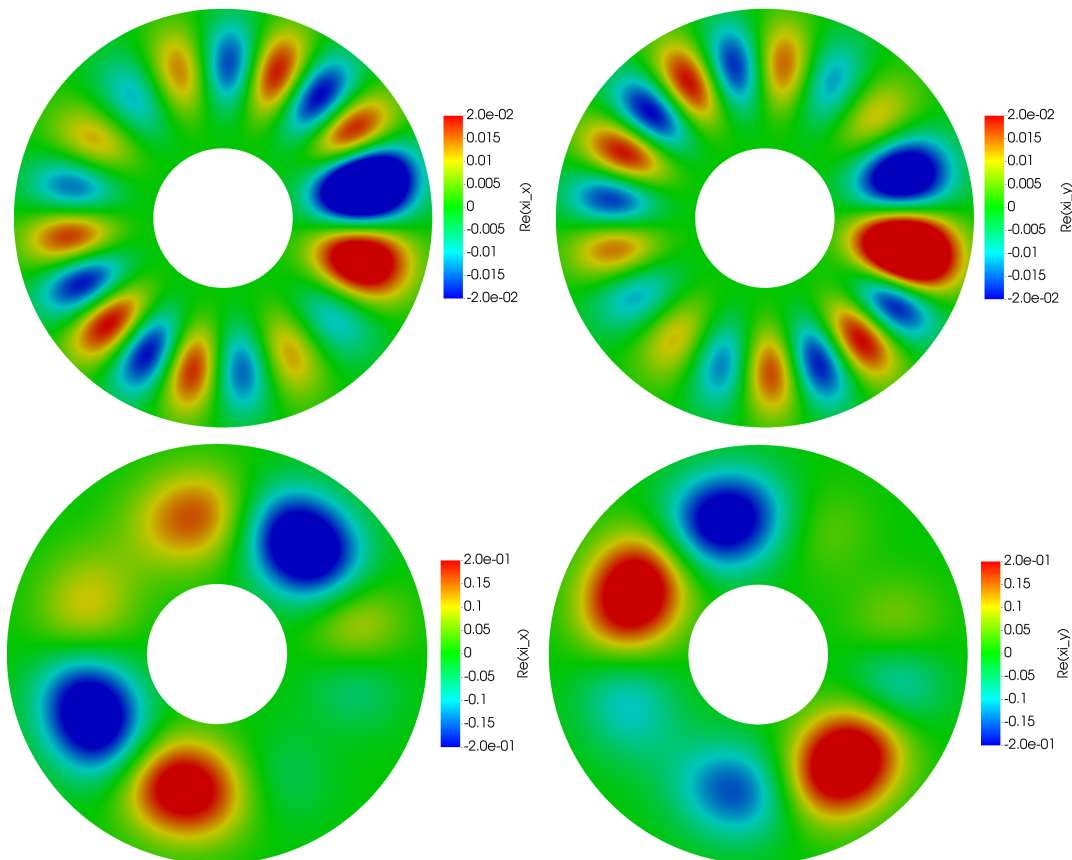


FIGURE 5.28 – Isovaleurs de $\Re\mathcal{E}(\xi_x)$ et $\Re\mathcal{E}(\xi_y)$ pour $\omega = 10.5 \notin \mathbb{Z}$ (en haut) et $\omega = 3.5 \notin \mathbb{Z}$ (en bas), l'équation est bien posée.

Pour illustrer le caractère mal posé, nous choisissons la pulsation entière $\omega = 10$ et nous traçons sur la figure 5.29 $\Re\mathcal{E}(\xi_x)$ pour deux niveaux de raffinement du maillage, 1.5×10^4 degrés de liberté à gauche, et 4.4×10^4 à droite, tout en gardant le même jeu de couleurs. Nous constatons que la solution n'est pas stable par raffinement de maillage, traduisant le caractère mal posé de l'équation. Il ne s'agit plus de l'explosion selon une seule ligne de courant ici, mais toutes les lignes résonnent.

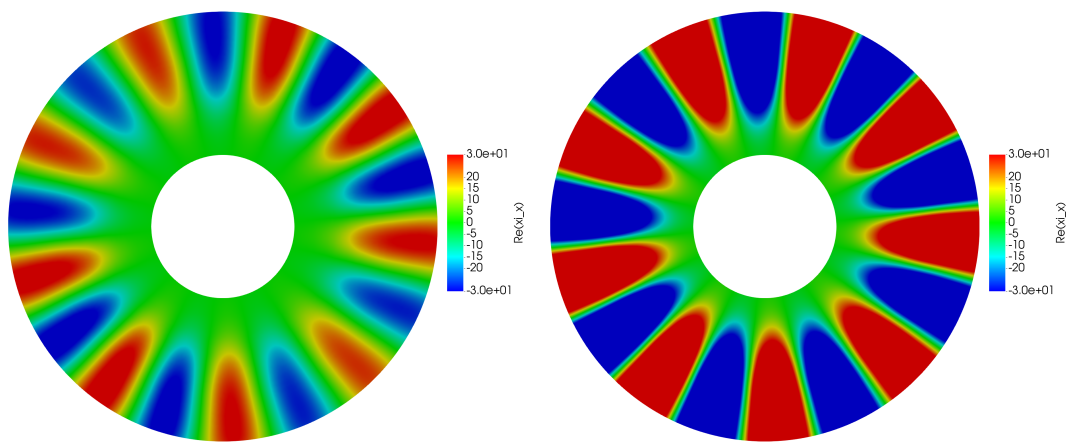


FIGURE 5.29 – Isovaleurs de $\Re(\xi_x)$. Caractère mal posé à la fréquence $\omega = 10 \in \mathbb{Z}$. Lorsque le maillage est raffiné, il n'y a pas de convergence : à gauche 15×10^3 degrés de liberté, à droite 44×10^3 degré de liberté

Troisième partie

Étude des équations de Goldstein en écoulement domaine - remplissant

Chapitre 6

Analyse des équations de Goldstein en écoulement domaine-remplissant

6.1	Géométrie et écoulement porteur considérés	127
6.2	Conditions aux limites pour les perturbations acoustiques	128
6.2.1	Parties rigides : Γ_R .	128
6.2.2	Une famille de conditions de rayonnement sur Γ_∞ .	129
6.2.3	Exemple d'obtention d'une condition aux limites absorbante approchée	131
6.3	Analyse des équations de Goldstein avec conditions aux limites de rayonnement approchées	135
6.3.1	Rappel du cas d'un écoulement potentiel	135
6.3.2	Cas des équations de Goldstein en écoulement rotationnel	138
6.3.3	Famille d'écoulements faiblement rotationnels	141
6.4	Discussion des hypothèses concernant la géométrie et l'écoulement porteur	145
6.4.1	Compatibilité des hypothèses faites sur l'écoulement	146
6.4.2	Affaiblissement et ajout d'hypothèses?	148

Nous nous intéressons dans ce chapitre au couplage de l'équation d'Helmholtz convectée avec l'équation de transport étudiée dans la partie précédente pour former les équations de Goldstein, que nous rappelons ici, pour une source acoustique $f \in L^2(\Omega, \rho_0)$:

$$\begin{cases} \rho_0 D_\omega (c_0^{-2} D_\omega \varphi) - \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \varphi + \rho_0 \xi) = \rho_0 f, \\ D_\omega \xi + (\xi \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = \nabla \varphi \times \boldsymbol{\omega}_0, \end{cases}$$

où $D_\omega := -i\omega + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla$ est l'opérateur de dérivée convective en régime harmonique. Rappelons également que nous adoptons une vision perturbative des équations de Goldstein, l'inconnue hydrodynamique ξ étant la correction apportée au gradient du potentiel acoustique $\nabla \varphi$ pour le calcul de la vitesse acoustique $\mathbf{v} = \nabla \varphi + \xi$. Cette vision perturbative nous a amené à considérer l'approche d'analyse théorique suivante. D'abord, nous résolvons l'équation de transport à φ fixé et exprimons ξ comme un opérateur dépendant de $\nabla \varphi$,

$$\xi = \mathcal{A}_{\omega, \mathbf{v}_0}(\nabla \varphi),$$

ensuite, nous traitons le problème suivant, équivalent aux équations de Goldstein mais ne portant que sur l'inconnue φ :

$$\rho_0 D_\omega \left(c_0^{-2} D_\omega \varphi \right) - \nabla \cdot \left(\rho_0 (\text{Id} + \mathcal{A}_{\omega, v_0}) (\nabla \varphi) \right) = \rho_0 f. \quad (6.1)$$

L'étude de l'équation de transport effectuée dans la partie précédente nous indique qu'une condition suffisante naturelle pour pouvoir résoudre cette équation est de considérer des cas où l'écoulement porteur est domaine-remplissant. Nous renvoyons le lecteur à la partie IV pour une analyse de l'équation de transport et du couplage de Goldstein où des résonances sont mises en évidence dans des cas particuliers d'écoulements ne vérifiant pas cette hypothèse : les écoulements circulaires dans une couronne.

L'inversion de l'opérateur de transport et l'élimination de ξ résultante nous permet ensuite de nous appuyer sur l'analyse de l'équation d'Helmholtz convectée, à condition de considérer que le rotationnel de l'écoulement porteur ω_0 est suffisamment petit. L'analyse de l'équation d'Helmholtz convectée est connue sous diverses conditions aux limites. Par exemple, dans le cas du problème en écoulement uniforme borné à l'aide de Perfectly Matched Layers (PML), on pourra se référer aux travaux de E. Bécache, A-S. Bonnet-Ben Dhia et Legendre [60, 61]. Le problème posé en écoulement localement potentiel avec condition aux limites de Sommerfeld est démontré bien posé dans la thèse de S. Duprey [62]. F. Casenave, A. Ern et G. Sylvand [1, 63] ont également démontré le caractère bien posé, lorsque l'équation d'Helmholtz convectée est couplée à des équations intégrales servant de conditions aux limites. L'analyse que nous présenterons du cas potentiel est une version adaptée aux conditions limites approchées que nous établirons dans le cas non potentiel pour les équations de Goldstein.

Même si l'analyse des équations de Goldstein en tant que telles n'ait, à notre connaissance, pas été faite dans la littérature, des équations équivalentes (sous certaines conditions) ont été étudiées. C'est notamment le cas des équations de Galbrun, établies dans son livre [32] de 1931. Les travaux de A-S. Bonnet-Ben Dhia, Mercier, Millot, Pernet et Peynaud, comme cités ci-avant d'abord en écoulement uniforme, ont été étendus au cas d'écoulements localement non potentiels mais domaine-remplissant. Lorsque le domaine est borné par des PML, le caractère Fredholm a été démontré, [64, 36], sous des hypothèses de contrôle des constantes de continuité de l'inverse d'un opérateur de double transport harmonique scalaire.

Nous proposons un résultat similaire pour les équations de Goldstein. C'est pourquoi la restriction sur la petitesse du rotationnel de l'écoulement porteur était attendue. C'est essentiellement la mesure de ce rotationnel qui quantifie l'aspect perturbatif des équations de Goldstein par rapport au modèle potentiel. En particulier, nous prendrons soin d'analyser nos conditions à la lumière d'une famille d'écoulements $(\rho_0^\eta, \mathbf{v}_0^\eta)_\eta$, dont le rotationnel est contrôlé par le paramètre η : $\|\omega_0^\eta\|_\infty \leq |\eta|$, pour η se rapprochant de 0. Nous prouvons que le problème de Goldstein relève de l'alternative de Fredholm lorsque le rotationnel de l'écoulement porteur n'est pas trop grand, ou autrement dit pour la famille d'écoulements \mathbf{v}_0^η , pour η plus petit qu'un seuil : $|\eta| \leq \eta_0$.

Nous terminerons ce chapitre par une section moins formelle de discussions des hypothèses faites sur la géométrie et l'écoulement porteur jusqu'ici. Nous verrons que ces hypothèses ne sont pas toutes compatibles à strictement parler et nous évaluerons leur éventuel relâchement et leur pertinence de modélisation physique.

6.1 Géométrie et écoulement porteur considérés

Dans cette section, nous précisons dans quelle géométrie nous nous plaçons et rappelons quel type d'écoulements porteurs nous considérerons.

Écoulement porteur. Nous considérons dans $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}_R$, $d = 2$ ou 3 , un écoulement porteur caractérisé par sa densité ρ_0 , sa pression p_0 et son champ de vecteurs vitesse \mathbf{v}_0 . L'ensemble \mathcal{O}_R est une union de domaines de \mathbb{R}^d représentant des obstacles impénétrables, qui correspondent en pratique à des morceaux de l'avion : l'aile, une partie du réacteur, etc.

Nous supposons par soucis de simplicité que ces grandeurs, qui apparaissent en tant que coefficients de l'équation de Goldstein, sont suffisamment régulières, en particulier, lors de l'étude de l'équation de transport nous avons supposé que \mathbf{v}_0 était de classe \mathcal{C}^1 . Nous avons également supposé que la densité de l'air ρ_0 est bornée par deux constantes strictement positives, ρ_+ et ρ_- :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}_R, \quad \rho_- \leq \rho_0(\mathbf{x}) \leq \rho_+.$$

Les espaces fonctionnels qui apparaissent dans cette étude incorporent souvent comme poids la densité ρ_0 de l'écoulement. Par exemple, pour un domaine Ω , nous utilisons $L^2(\Omega, \rho_0)$ ou $H^1(\Omega_0, \rho_0)$. De même nous avons construit l'espace du graphe de l'opérateur de transport, $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$, à partir de l'espace $L^2(\Omega_0, \rho_0)$. Comme nous avons fait la remarque à la partie précédente, compte tenu de l'hypothèse du caractère borné de ρ_0 , tous ces espaces sont les mêmes que leur équivalents sans le poids ρ_0 . L'intérêt de garder ses poids est pratique, cela allège les majorations du type Cauchy-Schwarz en intégrant dans la norme la mesure $\rho_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

On s'intéresse typiquement à un écoulement issu d'un calcul CFD résolvant les équations de Navier-Stokes. Un tel écoulement ressemble à celui présenté très schématiquement en figure 6.1. En particulier, il est uniforme à l'infini. En effet, lorsque l'on est suffisamment loin de l'avion, on considère que l'écoulement devient uniforme et qu'il n'y a plus d'obstacle, c'est-à-dire qu'il existe un domaine borné Ω_∞ et des constantes $\rho_\infty, p_\infty > 0$ et $\mathbf{v}_\infty \in \mathbb{R}^d$ telles que $\mathcal{O}_R \subset \Omega_\infty$ et

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega_\infty, \quad \rho_0(\mathbf{x}) = \rho_\infty, \quad p_0(\mathbf{x}) = p_\infty \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_\infty.$$

Enfin, du point de vue de l'écoulement, les obstacles \mathcal{O}_R sont supposés rigides, c'est-à-dire que la vitesse \mathbf{v}_0 est tangentielle à la frontière de ceux-ci :

$$\forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{O}_R, \quad \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0.$$

Borner le domaine de calcul. Pour procéder à un calcul numérique de type éléments finis, il est nécessaire de borner le domaine de calcul. Nous plaçons la frontière de notre domaine suffisamment loin de la zone de perturbation de l'écoulement, là où l'écoulement est uniforme, comme montré sur la figure 6.1 en pointillés. Cette frontière peut aussi inclure une partie des obstacles rigides. En notant le domaine de calcul Ω , la frontière $\partial \Omega$ se partage donc en deux parties, une rigide Γ_R et une sur laquelle l'écoulement est uniforme Γ_∞ :

$$\partial \Omega = \Gamma_\infty \cup \Gamma_R,$$

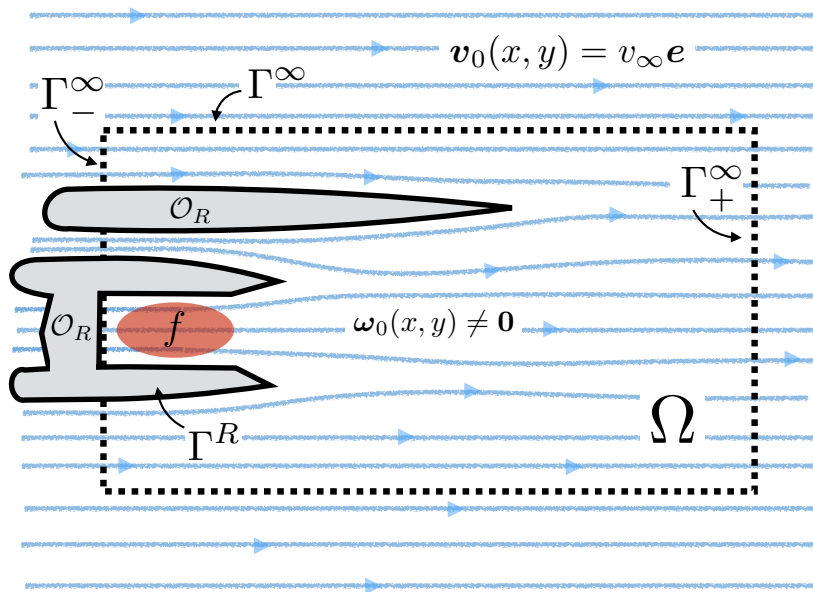


FIGURE 6.1 – Géométrie schématique pour l'étude théorique des équations de Goldstein

telles que

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in \Gamma_\infty, \quad \rho_0(\mathbf{x}) = \rho_\infty, \quad p_0(\mathbf{x}) = p_\infty \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_\infty, \\ \forall \mathbf{x} \in \Gamma_R, \quad \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0. \end{aligned}$$

De plus, nous supposons que la vitesse de l'écoulement satisfait

$$\mathbf{v}_0 \text{ est } \Omega\text{-remplissante,}$$

de manière à pouvoir appliquer les résultats établis pour l'équation de transport harmonique. Nous supposons également que la frontière est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Cette hypothèse de régularité est suffisante pour définir un vecteur normal $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ pour presque tout \mathbf{x} de la frontière $\partial\Omega$.

6.2 Conditions aux limites pour les perturbations acoustiques

Le domaine et sa frontière à présent définis, nous souhaitons établir des conditions aux limites pour les équations de Goldstein.

6.2.1 Parties rigides : Γ_R .

La partie de la frontière la plus simple à traiter est la partie que nous avons considérée rigide du point de vue de l'écoulement, Γ_R . En effet, nous nous contenterons de la considérer également rigide du point de vue acoustique, entraînant le fait que la vitesse acoustique \mathbf{v} est également tangentielle :

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_R, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0.$$

Exprimons alors cette condition à l'aide des inconnues φ et ξ des équations de Goldstein. Puisque nous avons

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi + \xi,$$

il vient simplement que

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_R, \quad (\nabla\varphi + \xi) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0.$$

Il est possible d'utiliser des conditions aux limites plus compliquées sur la frontière des obstacles, par exemple pour prendre en compte de l'absorption acoustique de ceux-ci, particulièrement lorsqu'ils sont traités par de matériaux absorbants par exemple. Nous ne considérons pas cette problématique dans cette thèse et nous restons à la modélisation plus simple d'obstacles purement rigides.

6.2.2 Une famille de conditions de rayonnement sur Γ_∞ .

Il reste à définir les conditions aux limites sur la frontière Γ_∞ sur laquelle nous rappelons que l'écoulement est supposé uniforme.

Dans le code ASERIS d'Airbus, le domaine où est résolu l'équation d'Helmholtz convectée, le modèle potentiel, est borné par des équations intégrales qui permettent d'exprimer la condition de radiation exacte mais ajoute des inconnues surfaciques au problème. Même si l'onde acoustique rayonnée au loin est la principale quantité d'intérêt du problème industriel, nous nous concentrons dans cette thèse sur la partie volumique du couplage FEM/BEM. C'est pourquoi, nous simplifions notre approche en proposant pour l'analyse des équations de Goldstein une famille de conditions absorbantes du premier ordre sur le bord Γ_∞ . Cette famille dépend d'une fonction paramètre λ ne dépendant que de la géométrie de la frontière Γ_∞ et du type d'ondes planes dont on souhaite privilégier l'absorption.

Un autre possibilité qui a fait ses preuves pour l'équation d'Helmholtz notamment est d'utiliser les célèbres « Perfectly Matched Layers » introduites par Bérenger [65] en 1994 et d'abord appliquées à l'électromagnétisme [66]. Ces conditions sont également utilisables pour l'équation d'Helmholtz convectée en écoulement uniforme [60] ou potentiel pour l'équation de Galbrun [61], ainsi que pour les équations d'Euler linéarisées [67].

Néanmoins, l'analyse que nous avons faite des équations de Goldstein dont le domaine de calcul est borné par des PML ne nous satisfait pas complètement. En effet, les conditions obtenues pour aboutir au caractère Fredholm du problème mêlent des conditions sur les paramètres PML aux conditions portant sur l'écoulement porteur. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe A.3 pour les détails de notre approche. Néanmoins, pour son efficacité numérique, c'est l'approche que nous avons choisie pour nos illustrations numériques 2D. Nous y reviendrons donc dans le chapitre 7.

Résolution du transport et intégration par parties. Commençons par la simple remarque que, puisque l'écoulement est uniforme en dehors du domaine Ω et que nous ne considérons pas de source de rotationnel à l'extérieur, il vient que sur le bord entrant Γ_∞^- , le ξ est prescrit à zéro. Ceci donne la condition aux limites suivante :

$$\xi = \mathbf{0}, \quad \text{sur } \Gamma_\infty^-.$$

Ensuite, puisque nous nous sommes placés dans le cadre d'un écoulement dont la vitesse \mathbf{v}_0 est domaine remplissante, l'opérateur de transport de Goldstein $\mathcal{T}_{\omega, \mathbf{v}_0}$ est, d'après

la deuxième partie de ce manuscrit, un isomorphisme de $H^-(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$ dans $L^2(\Omega, \rho_0)^d$ et permet donc d'isoler ξ , pour un $\varphi \in H^1(\Omega, \rho_0)$ donné, dans l'équation

$$\begin{cases} D_\omega \xi + (\xi \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = \nabla \varphi \times \omega_0 & \text{dans } \Omega \\ \xi = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_\infty^- \end{cases}$$

À l'aide de l'opérateur de transport $\mathcal{T}_{\omega, \mathbf{v}_0}$, on définit l'opérateur $\mathcal{A}_{\omega, \mathbf{v}_0}$ qui à $\nabla \varphi$ associe $\xi \in H^-(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$:

$$\xi = \mathcal{A}_{\omega, \mathbf{v}_0}(\nabla \varphi) := \mathcal{T}_{\omega, \mathbf{v}_0}^{-1}(\nabla \varphi \times \omega_0).$$

Ainsi, les équations de Goldstein

$$\begin{cases} \text{Pour } f \in L^2(\Omega, \rho_0), \text{ trouver } (\varphi, \xi) \in H^1(\Omega, \rho_0) \times H^-(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0), \text{ tels que} \\ \rho_0 D_\omega (c_0^{-2} D_\omega \varphi) - \nabla \cdot (\rho_0 (\nabla \varphi + \xi)) = \rho_0 f, \\ D_\omega \xi + (\xi \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = \nabla \varphi \times \omega_0, \\ + \text{Cond. Lim.} \end{cases}$$

s'écrivent de façon équivalente :

$$\begin{cases} \text{Pour } f \in L^2(\Omega, \rho_0), \text{ trouver } \varphi \in H^1(\Omega, \rho_0), \text{ tel que} \\ \rho_0 D_\omega (c_0^{-2} D_\omega \varphi) - \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \varphi + \rho_0 \mathcal{A}_{\omega, \mathbf{v}_0}(\nabla \varphi)) = \rho_0 f \\ + \text{Cond. Lim.} \end{cases} \quad (6.2)$$

Dans un premier temps, présentons les calculs d'intégration par parties liés à l'équation (6.2), en prenant soin d'explicitier les termes de bord. En se donnant des fonctions régulières $\varphi, \psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, et en utilisant l'équation d'Euler stationnaire $\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0$, on obtient :

$$\int_{\Omega} \rho_0 D_\omega (c_0^{-2} D_\omega \varphi) \overline{\psi} = \int_{\Omega} -\rho_0 c_0^{-2} D_\omega \varphi \overline{D_\omega \psi} + \int_{\partial \Omega} \rho_0 c_0^{-2} D_\omega \varphi \overline{\psi} (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n})$$

puis,

$$- \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho_0 (\nabla \varphi + \xi(\varphi))) \overline{\psi} = \int_{\Omega} \rho_0 (\nabla \varphi \cdot \overline{\nabla \psi} + \xi(\varphi) \cdot \overline{\nabla \psi}) - \int_{\partial \Omega} \rho_0 \partial_n \varphi \overline{\psi}.$$

En introduisant les grandeurs adimensionnées usuelles, le nombre d'onde et le Mach de l'écoulement porteur :

$$k_0 := \frac{\omega}{c_0} \quad \text{et} \quad M_0 := \frac{\mathbf{v}_0}{c_0},$$

et en développant les dérivées convectives, on obtient la formule d'intégration par parties

suivante

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \rho_0 \left[D_{\omega} (c_0^{-2} D_{\omega} \varphi) - \nabla \cdot (\rho_0 (\nabla \varphi + \xi(\varphi))) \right] \bar{\psi} \\
&= \int_{\Omega} \rho_0 \left[\nabla \varphi \cdot \nabla \bar{\psi} - (\mathbf{M}_0 \cdot \nabla \varphi) (\mathbf{M}_0 \cdot \nabla \bar{\psi}) - k_0^2 \varphi \bar{\psi} - ik_0 (\mathbf{M}_0 \cdot \nabla \varphi) \bar{\psi} + ik_0 \varphi (\mathbf{M}_0 \cdot \nabla \bar{\psi}) \right] \\
&+ \int_{\Omega} \rho_0 \mathcal{A}_{\omega, v_0} (\nabla \varphi) \cdot \nabla \bar{\psi} \\
&+ \int_{\partial \Omega} \rho_0 \left\{ (\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{n}) (-ik_0 + \mathbf{M}_0 \cdot \nabla) \varphi - \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} - \mathcal{A}_{\omega, v_0} (\nabla \varphi) \cdot \mathbf{n} \right\} \bar{\psi}.
\end{aligned}$$

Déterminer les conditions de radiation revient à exprimer la quantité :

$$\mathcal{B}(\varphi) := c_0^{-1} (\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{n}) D_{\omega} \varphi - ((\text{Id} + \mathcal{A}_{\omega, v_0}) \nabla \varphi) \cdot \mathbf{n},$$

apparaissant sur le bord $\partial \Omega$ du domaine. Remarquons tout de suite que sur la partie Γ_R de la frontière, nous avons supposé que la vitesse, et donc aussi le nombre de Mach \mathbf{M}_0 de l'écoulement porteur y sont tangentiels et qu'il en est de même des perturbations acoustiques. Cela nous amène donc à la simple relation

$$\mathcal{B}(\varphi) = c_0^{-1} (\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{n}) D_{\omega} \varphi - ((\text{Id} + \mathcal{A}_{\omega, v_0}) \nabla \varphi) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_R.$$

Concernant la partie Γ_{∞} de la frontière du domaine, nous avons des simplifications car l'écoulement y est uniforme, notons ses caractéristiques sur Γ_{∞} :

$$\mathbf{M}_0 := \mathbf{M}_{\infty} := M_{\infty} \mathbf{e}, \quad c_{\infty} := c_0, \quad \text{et} \quad k_{\infty} := \frac{\omega}{c_{\infty}}.$$

En utilisant que $\mathcal{A}_{\omega, v_0} (\nabla \varphi) = \mathbf{0}$ sur le bord entrant $\Gamma_{\infty}^{-} := \Gamma_{\infty} \cap \partial \Omega^{-}$, il vient :

$$\begin{cases} \mathcal{B}(\varphi) = (\mathbf{M}_{\infty} \cdot \mathbf{n}) (-ik_{\infty} + \mathbf{M}_{\infty} \cdot \nabla) \varphi - \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} - \mathcal{A}_{\omega, v_0} (\nabla \varphi) \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_{\infty}^{+}, \\ \mathcal{B}(\varphi) = (\mathbf{M}_{\infty} \cdot \mathbf{n}) (-ik_{\infty} + \mathbf{M}_{\infty} \cdot \nabla) \varphi - \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_{\infty}^{-}, \\ \mathcal{B}(\varphi) = -\nabla \varphi \cdot \mathbf{n} - \mathcal{A}_{\omega, v_0} (\nabla \varphi) \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_{\infty}^0. \end{cases}$$

Famille de conditions aux limites absorbantes. Donnons à présent la famille de conditions aux limites que nous allons considérer. Aux paragraphes suivants nous présenterons ensuite un cas entrant dans ce cadre. Soit $\lambda : \Gamma_{\infty} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. Nous considérons la famille de conditions aux limites données par :

$$\mathcal{B}(\varphi) = -ik_{\infty} \lambda \varphi - (\mathbf{M}_{\infty} \cdot \mathbf{n}) \mathcal{A}_{\omega, v_0} (\nabla \varphi) \cdot \mathbf{n}, \quad \text{sur } \Gamma_{\infty}. \quad (6.3)$$

6.2.3 Exemple d'obtention d'une condition aux limites absorbante approchée

Présentons une approche aboutissant à des conditions absorbantes de la famille de celles énoncées à la sous-section précédente (6.3).

Comme nous cherchons des conditions locales en $\mathbf{x} \in \Gamma_{\infty}$, quitte à redresser les coordonnées localement autour de ce point. Après redressement, nous supposons que le domaine est

situé dans le demi-plan $\{x \leq 0\}$ et que la frontière est en $\{x = 0\}$. Trois cas se présentent. Il peut s'agir d'un point x de la frontière sortante Γ_∞^+ , entrante Γ_∞^- ou encore glissante Γ_∞^0 .

Point de la frontière sortante Γ_∞^+ . Commençons par un point de la frontière entrante. Dans le domaine $\{x > 0\}$, on est hors de Ω , l'écoulement y est donc supposé uniforme. Les équations de Goldstein dans le demi-plan $\{x > 0\}$ s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} (-ik_\infty + M_\infty \cdot \nabla)^2 \varphi - \Delta \varphi - \nabla \cdot \xi &= 0, \\ (-ik_\infty + M_\infty \cdot \nabla) \xi &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Supposons que φ et ξ sont connues sur la frontière :

$$\varphi(0, y) = \varphi^0(y) \quad \text{et} \quad \xi(0, y) = \xi^0(y).$$

Nous effectuons une transformée de Fourier dans la direction tangentielle à la frontière, c'est-à-dire selon la variable y , ce qui revient à chercher des solutions φ et ξ sous la forme

$$\varphi(x, y) = \hat{\varphi}(x)e^{i\beta y} \quad \text{et} \quad \xi(x, y) = \hat{\xi}(x)e^{i\beta y},$$

où $\beta \in \mathbb{R}$. Comme les équations de Goldstein en écoulement uniforme se découpent, nous pouvons commencer par résoudre l'équation de transport et exprimer $\hat{\xi}$. En remplaçant ξ par la forme de la solution recherchée $\hat{\xi}(x)e^{i\beta y}$ dans l'équation de transport, on trouve que

$$-ik_\infty \hat{\xi}(x)e^{i\beta y} + \cos(\alpha)M_\infty \frac{d\hat{\xi}}{dx}(x)e^{i\beta y} + \sin(\alpha)M_\infty i\beta \hat{\xi}(x)e^{i\beta y} = 0,$$

où l'on a noté α l'angle que fait le vecteur de direction de l'écoulement extérieur e avec la frontière, comme illustré sur la figure 6.2. L'équation se met alors sous la forme

$$\cos(\alpha)M_\infty \frac{d\hat{\xi}}{dx} + i(-k_\infty + \sin(\alpha)\beta M_\infty) \hat{\xi} = 0$$

et admet donc pour solution

$$\hat{\xi}(x) = \hat{\xi}^0 e^{\frac{ik_\infty x}{\cos(\alpha)M_\infty} - i \tan(\alpha)\beta x}.$$

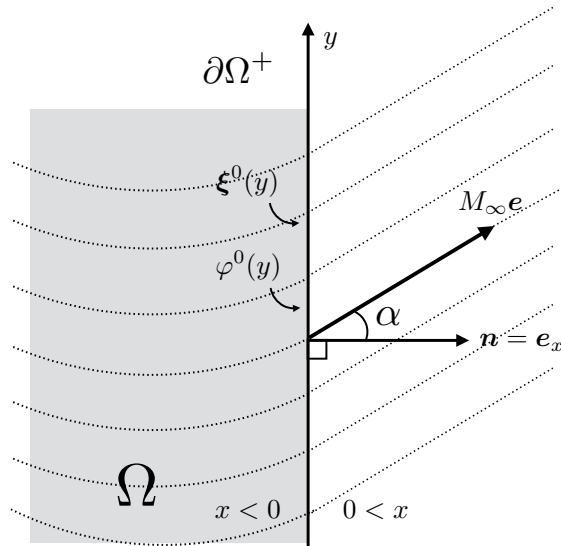
L'équation de Goldstein se réduit donc à une équation en $\hat{\varphi}$, avec pour second membre $\nabla \cdot (\hat{\xi}(x)e^{i\beta y})$ et on trouve

$$\left(-ik_\infty + \cos(\alpha)M_\infty \frac{d}{dx} + i\beta \sin(\alpha)M_\infty \right)^2 \hat{\varphi} - \left(\frac{d^2}{dx^2} - \beta^2 \right) \hat{\varphi} = \frac{d\hat{\xi}_x}{dx} + i\beta \hat{\xi}_y.$$

Le membre de droite de l'équation est connu et vaut

$$\frac{d\hat{\xi}_x}{dx} + i\beta \hat{\xi}_y = \left(\left(\frac{ik_\infty}{\cos(\alpha)M_\infty} - i\beta \tan(\alpha) \right) \hat{\xi}_x^0 + i\beta \hat{\xi}_y^0 \right) e^{\frac{ik_\infty x}{\cos(\alpha)M_\infty} - i \tan(\alpha)\beta x}.$$

Le calcul pour β quelconque peut être mené jusqu'au bout mais conduit à une expression complexe qui de plus n'a pas de transformée de Fourier inverse explicite. Nous obtenons alors une condition approchée en nous intéressons qu'aux ondes qui arrivent localement perpendiculairement à la frontière, ce qui revient à prendre $\beta = 0$.

FIGURE 6.2 – Frontière sortante avec écoulement uniforme à l'extérieur : $M_\infty e$

Ainsi, $\hat{\xi}$ se simplifie en

$$\hat{\xi}(x) = \hat{\xi}^0 e^{\frac{ik_\infty x}{\cos(\alpha)M_\infty}}.$$

Passons à la résolution l'équation homogène en $\hat{\phi}$, où l'on a choisi $\beta = 0$:

$$\left(-ik_\infty + \cos(\alpha)M_\infty \frac{d}{dx}\right)^2 \hat{\phi} - \frac{d^2 \hat{\phi}}{dx^2} = 0.$$

L'équation caractéristique de cette équation se factorise en

$$(-ik_\infty + \cos(\alpha)M_\infty X + X)(-ik_\infty + \cos(\alpha)M_\infty X - X) = 0,$$

et on obtient donc ainsi pour base de solutions

$$x \mapsto e^{ik_\infty^+ x} \quad \text{et} \quad x \mapsto e^{ik_\infty^- x},$$

avec

$$k_\infty^+ := \frac{k_\infty}{1 + \cos(\alpha)M_\infty} \quad \text{et} \quad k_\infty^- := \frac{-k_\infty}{1 - \cos(\alpha)M_\infty}.$$

Seul k_∞^+ correspond à une onde sortante et ceci peut s'obtenir par un raisonnement par absorption, consistant à transformer le nombre d'onde k en un nombre d'onde complexe $k_\infty^\varepsilon = k_\infty + i\varepsilon$ où $\varepsilon > 0$. Cette transformation montre que la solution de la base correspondant au nombre d'onde k_∞^- diverge lorsque (x, y) est dans le demi-espace que nous considérons $\{x > 0\}$, en utilisant que l'écoulement est subsonique $1 - \cos(\alpha)M_\infty > 0$, il vient

$$\left| e^{ik_\infty^- x} \right| = \left| e^{\frac{-ik_\infty + \varepsilon}{1 - \cos(\alpha)M_\infty} x} \right| \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty,$$

alors que la solution correspondant au nombre d'onde k_+ tend vers 0 à l'infini en présence

d'absorption, ce qui est attendu du point de vue de la physique :

$$\left| e^{ik_{\infty}^+ x} \right| = \left| e^{\frac{ik_{\infty} - \varepsilon}{1 + \cos(\alpha)M_{\infty}} x} \right| \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

On ne retient donc que la solution, dite sortante, même lorsque l'on néglige l'absorption ε , correspondant au nombre d'onde k_{∞}^+ . Cherchons à présent une solution particulière à l'équation avec second membre de la forme

$$x \mapsto A e^{\frac{ik_{\infty} x}{\cos(\alpha)M_{\infty}}}.$$

On trouve en remplaçant, que

$$A \left(-ik_{\infty} + \cos(\alpha)M_{\infty} \frac{ik_{\infty}}{\cos(\alpha)M_{\infty}} \right)^2 e^{\frac{ik_{\infty} x}{\cos(\alpha)M_{\infty}}} - A \left(\frac{ik_{\infty}}{\cos(\alpha)M_{\infty}} \right)^2 e^{\frac{ik_{\infty} x}{\cos(\alpha)M_{\infty}}} = \hat{\xi}_x^0 \frac{ik_{\infty} e^{\frac{ik_{\infty} x}{\cos(\alpha)M_{\infty}}}}{\cos(\alpha)M_{\infty}}$$

d'où l'on déduit

$$A = i \frac{\cos(\alpha)M_{\infty}}{k_{\infty}} \hat{\xi}_x^0.$$

Finalement, on a donc obtenu le couple de solutions suivantes dans le demi-plan $\{x > 0\}$, étant données les traces aux bord $\hat{\varphi}^0$ et $\hat{\xi}^0$:

$$\begin{aligned} \xi(x, y) &= \hat{\xi}(x) = \hat{\xi}_x^0 e^{\frac{ik_{\infty} x}{\cos(\alpha)M_{\infty}}} \\ \varphi(x, y) &= \hat{\varphi}(x) = \left(\hat{\varphi}^0 - i \frac{\cos(\alpha)M_{\infty}}{k_{\infty}} \hat{\xi}_x^0 \right) e^{\frac{ik_{\infty} x}{1 + \cos(\alpha)M_{\infty}}} + i \frac{\cos(\alpha)M_{\infty}}{k_{\infty}} \hat{\xi}_x^0 e^{\frac{ik_{\infty} x}{\cos(\alpha)M_{\infty}}}. \end{aligned}$$

Rappelons que nous souhaitons exprimer la quantité suivante en $x = 0$:

$$\mathcal{B}(\varphi) = c_0^{-1} (\mathbf{M}_{\infty} \cdot \mathbf{n}) D_{\omega} \varphi - \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} - \hat{\xi} \cdot \mathbf{n},$$

qui s'écrit pour les expressions de φ et ξ trouvées, car $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$ par :

$$\mathcal{B}(\varphi) = - \left(1 - \cos^2(\alpha)M_{\infty}^2 \right) \frac{d\hat{\varphi}}{dx} - ik_{\infty} \cos(\alpha)M_{\infty} \hat{\varphi} - \hat{\xi}_x.$$

En $x = 0$, comme on a

$$\frac{d\hat{\varphi}}{dx} = \frac{ik_{\infty}}{1 + \cos(\alpha)M_{\infty}} \left(\hat{\varphi}^0 - i \frac{\cos(\alpha)M_{\infty}}{k_{\infty}} \hat{\xi}_x^0 \right) - \hat{\xi}_x^0,$$

il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\varphi) &= - \left(1 - \cos^2(\alpha)M_{\infty}^2 \right) \left[\frac{ik_{\infty}}{1 + \cos(\alpha)M_{\infty}} \left(\hat{\varphi}^0 - i \frac{\cos(\alpha)M_{\infty}}{k_{\infty}} \hat{\xi}_x^0 \right) - \hat{\xi}_x^0 \right] \\ &\quad - ik_{\infty} \cos(\alpha)M_{\infty} \hat{\varphi}^0 - \hat{\xi}_x^0 \\ &= - ik_{\infty} \hat{\varphi}^0 - \cos(\alpha)M_{\infty} \hat{\xi}_x^0. \end{aligned}$$

Cette expression s'interprète de façon plus intrinsèque en utilisant que $\cos(\alpha)M_{\infty} = \mathbf{M}_{\infty} \cdot \mathbf{n}$,

$\xi_x = \xi \cdot \mathbf{n}$, on trouve finalement que :

$$\mathcal{B}(\varphi) = -ik_\infty \varphi - (\mathbf{M}_\infty \cdot \mathbf{n}) \xi \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_\infty^+.$$

Point de la frontière entrante. Nous allons plus vite pour un point de la frontière entrante. Il s'agit d'appliquer la même technique, avec la simplification importante que ξ est nul en amont, ainsi, il n'y a que φ à déterminer, on éliminera de même les ondes qui ne sont pas physiques par introduction de l'absorption, en cherchant φ sous la forme $\varphi = \hat{\varphi}(x)e^{i\beta y}$ et en ne considérant que les ondes horizontale, pour $\beta = 0$. En procédant ainsi, on trouve plus simplement que

$$\mathcal{B}(\varphi) = -ik_\infty \varphi \quad \text{sur } \Gamma_\infty^-.$$

Point de la frontière glissante. Pour ce qui est de la frontière glissante, la quantité que nous devons estimer au bord se simplifie car $\mathbf{M}_\infty \cdot \mathbf{n} = 0$:

$$\mathcal{B}(\varphi) = (\mathbf{M}_\infty \cdot \mathbf{n})(-ik_\infty \varphi + \mathbf{M}_\infty \cdot \nabla \varphi) - \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} - \xi \cdot \mathbf{n} = -\nabla \varphi \cdot \mathbf{n}.$$

Étant convecté par les lignes de courant, ξ ne traverse pas la frontière qui est dans ce cas une ligne de courant. On trouve ainsi,

$$\nabla \varphi \cdot \mathbf{n} = ik_\infty \varphi \quad \text{sur } \Gamma_\infty^0.$$

6.3 Analyse des équations de Goldstein avec conditions aux limites de rayonnement approchées

Dans cette section, nous analysons les équations de Goldstein dans la géométrie et pour l'écoulement porteur présentés dans la section 6.1 et pour les conditions aux limites (6.3) introduites dans 6.2. Résonant par perturbation, notre analyse s'appuie sur les mêmes techniques que l'étude du cas potentiel. Nous commençons donc rappeler cette analyse, pour ensuite passer aux équations de Goldstein.

6.3.1 Rappel du cas d'un écoulement potentiel

Dans le cas d'un écoulement porteur potentiel, i.e. tel que $\omega_0 = \mathbf{0}$, la résolution de l'équation de transport donne $\mathcal{A}_{\omega, v_0} = 0$ et les équations de Goldstein (6.1) se simplifient en

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \varphi \in H^1(\Omega, \rho_0), \text{ tel que} \\ \rho_0 D_\omega (c_0^{-2} D_\omega \varphi) - \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \varphi) = \rho_0 f. \end{array} \right.$$

En adjoignant les conditions aux limites (6.3) proposée sur Γ_∞ , qui se simplifient car $\mathcal{A}_{\omega, v_0} = 0$:

$$\mathcal{B}(\varphi) = -ik_\infty \lambda \varphi - (\mathbf{M}_\infty \cdot \mathbf{n}) \mathcal{A}_{\omega, v_0}(\nabla \varphi) \cdot \mathbf{n} = -ik_\infty \lambda \varphi,$$

et celles sur Γ_R , qui se simplifient également

$$\nabla \varphi \cdot \mathbf{n} + \mathcal{A}_{\omega, v_0}(\nabla \varphi) \cdot \mathbf{n} = \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} = 0,$$

la formulation suivante du problème de Goldstein en écoulement potentiel devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } f \in L^2(\Omega, \rho_0), \text{ trouver } \varphi \in H^1(\Omega, \rho_0), \text{ tel que} \\ \rho_0 D_\omega (c_0^{-2} D_\omega \varphi) - \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \varphi) = \rho_0 f \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (6.4a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} - c_\infty^{-1} (\mathbf{M}_\infty \cdot \mathbf{n}) D_\omega \varphi = ik_\infty \lambda \varphi \quad \text{sur } \Gamma_\infty, \end{array} \right. \quad (6.4b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_R, \end{array} \right. \quad (6.4c)$$

Remarque 6.3.1. Une autre approche peut être envisagée pour trouver une condition aux limites absorbante dans le cas potentiel. La transformation de Lorentz peut être utilisée pour se ramener à l'équation d'Helmholtz dans la zone où l'écoulement est uniforme, puis en appliquant la condition de radiation de Sommerfeld et après un retour à l'espace physique par application de la transformée de Lorentz inverse, on obtient une condition sur Γ_∞ du type

$$\nabla \varphi \cdot \mathbf{n} - c_0^{-1} (\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{n}) D_\omega \varphi = i \lambda k_\infty \varphi \quad \text{sur } \Gamma_\infty,$$

où $\lambda(\mathbf{x})$ est une fonction à valeurs réelles strictement positives qui dépend de la forme de la frontière du domaine considéré et peut être explicitée pour des géométries simples. Par exemple pour un domaine en forme de disque centré en 0 et de rayon $R : \Omega = B(0, R)$, on obtiendrait

$$c_\infty^{-1} (\mathbf{M}_\infty \cdot \mathbf{n}) D_\omega \varphi = ik_\infty \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta) M_\infty^2}} \varphi(R \cos(\theta), R \sin(\theta)).$$

Cette condition s'améliore lorsque la distance aux sources et à la zone où l'écoulement n'est pas uniforme s'accroît.

Nous obtenons alors le problème variationnel donné par la proposition suivante.

Proposition 6.3.2 (Formulation variationnelle). Pour un écoulement potentiel, le problème de Goldstein (6.4) est équivalent au problème variationnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } f \in L^2(\Omega, \rho_0), \text{ trouver } \varphi \in H^1(\Omega, \rho_0) \text{ tel que} \\ \forall \psi \in H^1(\Omega, \rho_0), \quad a_{pot}(\varphi, \psi) + b_{pot}(\varphi, \psi) = \int_\Omega \rho_0 f \bar{\psi}, \end{array} \right. \quad (6.5)$$

où les formes sesquilineaires a_{pot} et b_{pot} sont définies sur $H^1(\Omega, \rho_0)^2$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{pot}(\varphi, \psi) := \int_\Omega \rho_0 [\nabla \varphi \cdot \nabla \bar{\psi} - (\mathbf{M}_0 \cdot \nabla \varphi)(\mathbf{M}_0 \cdot \nabla \bar{\psi}) + \varphi \bar{\psi}] - ik_\infty \int_{\Gamma_\infty} \rho_0 \lambda \varphi \bar{\psi}, \\ b_{pot}(\varphi, \psi) := \int_\Omega \rho_0 [-(1 + k_0^2) \varphi \bar{\psi} - ik_0 (\mathbf{M}_0 \cdot \nabla \varphi) \bar{\psi} + ik_0 \varphi (\mathbf{M}_0 \cdot \nabla \bar{\psi})]. \end{array} \right.$$

Preuve. La preuve est directe en appliquant les théorèmes de densité et la formule d'intégration par parties, [68]. ■

Énonçons présent le résultat principal de cette section qui fournit le caractère bien posé des équations de Goldstein dans le cas d'un écoulement potentiel borné par des conditions de radiation approchées. Pour le caractère bien posé de ce modèle potentiel, lorsque l'on borne

le domaine avec des équations intégrales, on pourra se référer aux travaux de F. Casenave, A. Ern et G. Sylvand [63].

Théorème 6.3.3 (Caractère bien posé : cas potentiel). *Le problème de Goldstein en écoulement potentiel avec les conditions de rayonnement approchées (6.5) est bien posé sous la condition que l'écoulement soit subsonique*

$$1 - \sup_{x \in \Omega} |\mathbf{M}_0(\mathbf{x})|^2 > 0. \quad (6.6)$$

En particulier, on a :

- Le problème relève de l'alternative de Fredholm : a_{pot} est coercive sous la condition (6.6) et b_{pot} est une perturbation compacte.
- Il y a unicité de la solution.

Preuve. Procédons par étapes

- Commençons en montrant que sous la condition (6.6) la forme sesquilinéaire a_{pot} est coercive. Pour $\varphi \in H^1(\Omega, \rho_0)$, on a

$$\begin{aligned} a_{pot}(\varphi, \varphi) &= \int_{\Omega} \rho_0 \left[|\nabla \varphi|^2 - |(\mathbf{M}_0 \cdot \nabla) \varphi|^2 + |\varphi|^2 \right] \\ &\geq \int_{\Omega} \rho_0 \left(1 - \sup_{x \in \Omega} |\mathbf{M}_0(\mathbf{x})|^2 \right) |\nabla \varphi|^2 + \rho_0 |\varphi|^2 \\ &\geq \left(1 - \sup_{x \in \Omega} |\mathbf{M}_0(\mathbf{x})|^2 \right) \|\varphi\|_{H^1(\Omega, \rho_0)}^2. \end{aligned}$$

- Le fait que la forme sesquilinéaire b_{pot} est associée à un opérateur compact est classique et vient de l'injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et du fait que $b_{pot}(\varphi, \psi)$ ne fait intervenir de dérivée que sur une seule des deux fonctions φ et ψ .
- Montrons l'unicité de la solution. Soit $\varphi \in H^1(\Omega, \rho_0)$ satisfaisant l'équation avec un second membre nul $f = 0$:

$$\forall \psi \in H^1(\Omega, \rho_0), \quad a_{pot}(\varphi, \psi) + b_{pot}(\varphi, \psi) = 0.$$

Ainsi, en choisissant classiquement $\psi = \varphi$ comme fonction test et en prenant la partie imaginaire de la formulation variationnelle, on trouve :

$$0 = \text{Im} \left(a_{pot}(\varphi, \varphi) + b_{pot}(\varphi, \varphi) \right) = k_{\infty} \int_{\Gamma_{\infty}} \rho_0 \lambda |\varphi|^2.$$

Ceci montre, car $\rho_0, \lambda > 0$, que $\varphi = 0$ sur Γ_{∞} . On obtient alors que $\nabla \varphi \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$ sur Γ_{∞} où $\boldsymbol{\tau}$ est le vecteur tangent et en utilisant la condition aux limites, on trouve que $\nabla \varphi \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ sur la frontière Γ_{∞} . On conclut par un argument classique de continuation unique pour les équations elliptiques que $\varphi = 0$ concluant la preuve de l'unicité. ■

6.3.2 Cas des équations de Goldstein en écoulement rotationnel

Généralisons à présent une partie des résultats obtenus précédemment pour le cas d'un écoulement potentiel au cas d'un écoulement de rotationnel. Nous verrons que nous pourrions conclure que si la vorticit   est suffisamment faible. Pour pouvoir continuer    utiliser l'op  rateur $\mathcal{A}_{\omega, v_0}$, nous continuons    supposer que l'  coulement est Ω -remplissant. L'  tude des   quations de Goldstein en   coulement quelconque   tant tr  s compliqu  e, nous nous reportons leur analyse    la partie IV pour une classe d'  coulements non Ω -remplissant particuliers : les   coulements circulaires dans une couronne.

La complexit   principale par rapport au cas potentiel est que $\xi \neq \mathbf{0}$. En particulier, rappelons les conditions aux limites choisies pour borner le domaine de calcul en pr  sence de l'inconnue hydrodynamique ξ :

$$\begin{aligned} ((\text{Id} + \mathcal{A}_{\omega, v_0})\nabla\varphi) \cdot \mathbf{n} - c_\infty^{-1}(\mathbf{M}_\infty \cdot \mathbf{n})D_\omega\varphi &= ik_\infty\lambda\varphi + (\mathbf{M}_\infty \cdot \mathbf{n})\mathcal{A}_{\omega, v_0}(\nabla\varphi) \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_\infty, \\ ((\text{Id} + \mathcal{A}_{\omega, v_0})\nabla\varphi) \cdot \mathbf{n} - c_\infty^{-1}(\mathbf{M}_\infty \cdot \mathbf{n})D_\omega\varphi &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_R. \end{aligned}$$

On obtient ainsi la formulation suivante du probl  me de Goldstein :

Pour $f \in L^2(\Omega, \rho_0)$, trouver $\varphi \in H^1(\Omega, \rho_0)$ tel que :

$$\rho_0 D_\omega (c_0^{-2} D_\omega \varphi) - \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \varphi + \rho_0 \mathcal{A}_{\omega, v_0}(\nabla \varphi)) = \rho_0 f \quad \text{dans } \Omega, \quad (6.7a)$$

munie des conditions aux limites :

$$((\text{Id} + \mathcal{A}_{\omega, v_0})\nabla\varphi) \cdot \mathbf{n} - c_\infty^{-1}(\mathbf{M}_\infty \cdot \mathbf{n})D_\omega\varphi = ik_\infty\lambda\varphi + (\mathbf{M}_\infty \cdot \mathbf{n})\mathcal{A}_{\omega, v_0}(\nabla\varphi) \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_\infty, \quad (6.7b)$$

$$((\text{Id} + \mathcal{A}_{\omega, v_0})\nabla\varphi) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_R, \quad (6.7c)$$

Proposition 6.3.4 (Formulation variationnelle). *Le probl  me de Goldstein avec conditions de rayonnement approch  es (6.7) est   quivalent au probl  me variationnel suivant :*

$$\left| \begin{array}{l} \text{Pour } f \in L^2(\Omega, \rho_0), \text{ trouver } \varphi \in H^1(\Omega, \rho_0) \text{ tel que} \\ \forall \psi \in H^1(\Omega, \rho_0), \quad a_{gold}(\varphi, \psi) + b_{gold}(\varphi, \psi) = \int_\Omega \rho_0 f \bar{\psi}, \end{array} \right. \quad (6.8)$$

o   les formes sesquilin  aires a_{gold} et b_{gold} sont d  finies sur $H^1(\Omega, \rho_0)^2$ par :

$$a_{gold}(\varphi, \psi) := a_{pot}(\varphi, \psi) + \int_\Omega \rho_0 \mathcal{A}_{\omega, v_0}(\nabla\varphi) \cdot \nabla\bar{\psi},$$

$$a_{pot} = \int_\Omega \rho_0 [\nabla\varphi \cdot \nabla\bar{\psi} - (\mathbf{M}_0 \cdot \nabla\varphi)(\mathbf{M}_0 \cdot \nabla\bar{\psi}) + \varphi\bar{\psi}] - ik_\infty \int_{\Gamma_\infty} \rho_0 \lambda \varphi \bar{\psi},$$

et

$$b_{gold}(\varphi, \psi) := b_{pot}(\varphi, \psi) - \rho_\infty \langle (\mathbf{M}_\infty \cdot \mathbf{n})\mathcal{A}_{\omega, v_0}(\nabla\varphi) \cdot \mathbf{n}, \psi \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_\infty^+), H^{1/2}(\Gamma_\infty^+)},$$

$$b_{pot} = \int_\Omega \rho_0 \left[-(1 + k_0^2)\varphi\bar{\psi} - ik_0(\mathbf{M}_0 \cdot \nabla\varphi)\bar{\psi} + ik_0\varphi(\mathbf{M}_0 \cdot \nabla\bar{\psi}) \right].$$

Le th  or  me suivant donne le caract  re Fredholm du probl  me de Goldstein pos   en domaine born   par des conditions aux limites rayonnantes approch  es.

Théorème 6.3.5. *Le problème de Goldstein avec condition de radiation approchée (6.7) relève de l'alternative de Fredholm sous la condition :*

$$1 - \sup_{x \in \Omega} |M_0(x)|^2 > \|\omega_0\|_{L^\infty(\Omega)} C(\Omega, \mathbf{v}_0), \quad (6.9)$$

où l'on rappelle l'estimation donnée dans le théorème 4.1 de la constante $C(\Omega, \mathbf{v}_0)$:

$$C(\Omega, \mathbf{v}_0) := \frac{\sqrt{e^{2t^* \|\nabla \mathbf{v}_0\|_\infty} - 1 - 2t^* \|\nabla \mathbf{v}_0\|_\infty}}{\|\nabla \mathbf{v}_0\|_\infty},$$

où t^* est le temps de parcours maximal pour traverser le domaine Ω en suivant une ligne de courant à la vitesse \mathbf{v}_0 .

Nous avons en particulier,

- a_{gold} est coercive sous la condition (6.9)
- b_{gold} est une perturbation compacte

Preuve.

- Coercivité de a_{gold} . Soit $\varphi \in H^1(\Omega, \rho_0)$. Le terme a_{pot} est coercif sous la condition (6.6) obtenue dans le cas potentiel. Le terme additionnel

$$\int_{\Omega} \rho_0 \mathcal{A}_{\omega, \mathbf{v}_0}(\nabla \varphi) \cdot \nabla \bar{\psi},$$

n'étant ni compact, ni coercif, nous le traitons comme un terme continu dégradant la condition de coercivité du cas potentiel, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Re(a_{gold}(\varphi, \varphi)) &= \Re(a_{pot}(\varphi, \varphi)) + \int_{\Omega} \rho_0 \mathcal{A}_{\omega, \mathbf{v}_0}(\nabla \varphi) \cdot \nabla \bar{\psi} \\ &\geq \left(1 - \inf_{x \in \Omega} |M_0(x)|^2\right) \|\varphi\|_{H^1(\Omega, \rho_0)}^2 - \|\mathcal{A}_{\omega, \mathbf{v}_0}(\nabla \varphi)\|_{L^2(\Omega, \rho_0)}^2 \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)}^2. \end{aligned}$$

D'après l'estimation en norme L^2 obtenue dans la partie sur l'étude de l'équation de transport en régime harmonique (II), puisque $\mathcal{T}_{\omega, \mathbf{v}_0} \circ \mathcal{A}_{\omega, \mathbf{v}_0}(\nabla \varphi) = \nabla \varphi \times \omega_0$, il vient :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_{\omega, \mathbf{v}_0}(\nabla \varphi)\|_{L^2(\Omega, \rho_0)} &\leq C(\Omega, \mathbf{v}_0) \|\nabla \varphi \times \omega_0\|_{L^2(\Omega, \rho_0)} \\ &\leq C(\Omega, \mathbf{v}_0) \|\omega_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)} \\ &\leq C(\Omega, \mathbf{v}_0) \|\omega_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega, \rho_0)} \end{aligned}$$

- Compacité de b_{gold} . Montrons à présent que la forme sesquilinéaire est associée à un opérateur compact. Nous avons déjà évoqué le fait que le premier terme b_{pot} de b_{gold} est associé à un opérateur compact, il ne reste qu'à le démontrer pour le second terme :

$$(\varphi, \psi) \longmapsto \langle \rho_\infty(\mathbf{M}_\infty \cdot \mathbf{n}) \mathcal{A}_{\omega, \mathbf{v}_0}(\nabla \varphi) \cdot \mathbf{n}, \psi \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_\infty^+), H^{1/2}(\Gamma_\infty^+)}.$$

À $\varphi \in H^1(\Omega)$ fixé, on associe la forme linéaire l_φ définie sur $H^1(\Omega, \rho_0)$ par :

$$\forall \psi \in H^1(\Omega, \rho_0), \quad l_\varphi(\psi) := \langle \rho_\infty(\mathbf{M}_\infty \cdot \mathbf{n}) \mathcal{A}_{\omega, \mathbf{v}_0}(\nabla \varphi) \cdot \mathbf{n}, \psi \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_\infty^+), H^{1/2}(\Gamma_\infty^+)},$$

qui est bien continue car

$$\forall \psi \in H^1(\Omega, \rho_0), \quad |l_\varphi(\psi)| \leq C_{tr} \left\| \rho_\infty (\mathbf{M}_\infty \cdot \mathbf{n}) \mathcal{A}_{\omega, \mathbf{v}_0}(\nabla \varphi) \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma_\infty^+)} \|\psi\|_{H^1(\Omega, \rho_0)},$$

où $C_{tr} > 0$ est la constante de trace dans $H^1(\Omega, \rho_0)$. Par le théorème de Riesz, on peut donc définir un opérateur continu $B : H^1(\Omega, \rho_0) \rightarrow H^1(\Omega, \rho_0)$ caractérisé par

$$\forall \varphi, \psi \in H^1(\Omega, \rho_0), \quad (B\varphi, \psi)_{H^1(\Omega, \rho_0)} = l_\varphi(\psi).$$

Nous devons montrer que B est un opérateur compact. En appliquant le théorème de trace 3.2.4, $\mathcal{A}_{\omega, \mathbf{v}_0}(\nabla \varphi) \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$ possède en fait une trace dans l'espace $L^2(\Gamma_\infty^0, \rho_0 | \mathbf{M}_\infty \cdot \mathbf{n}|)$ et on a

$$\forall \varphi, \psi \in H^1(\Omega, \rho_0), \quad |(B\varphi, \psi)| \leq \left\| \mathcal{A}_{\omega, \mathbf{v}_0}(\nabla \varphi) \right\|_{L^2(\Gamma_\infty^+, \rho_0 | \mathbf{M}_\infty \cdot \mathbf{n}|)} |\mathbf{M}_\infty|^{1/2} \|\psi\|_{L^2(\Gamma_\infty^+, \rho_0)}.$$

Il existe de plus une constante $C_\gamma > 0$ telle que

$$\left\| \mathcal{A}_{\omega, \mathbf{v}_0}(\nabla \varphi) \right\|_{L^2(\Gamma_\infty^+, \rho_0 | \mathbf{M}_\infty \cdot \mathbf{n}|)} \leq C_\gamma \left\| \mathcal{A}_{\omega, \mathbf{v}_0}(\nabla \varphi) \right\|_{H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)}.$$

Et en vertu de l'estimation a priori (4.1) de l'opérateur de transport trouvée dans le chapitre 4, appliquée au cas de l'équation de transport de Goldstein $\mathbb{A} := \nabla \mathbf{v}_0$, il vient :

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{A}_{\omega, \mathbf{v}_0}(\nabla \varphi) \right\|_{H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)} &\leq C(\Omega, \mathbf{v}_0) \|\omega_0 \times \nabla \varphi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d} \\ &\leq C(\Omega, \mathbf{v}_0) \|\omega_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^d}. \end{aligned}$$

Nous avons donc montré l'existence d'une constante

$$C := |\mathbf{M}_\infty|^{1/2} C_\gamma C(\Omega, \mathbf{v}_0) \|\omega_0\|_{L^\infty(\Omega)} > 0,$$

telle que

$$\forall \varphi, \psi \in H^1(\Omega, \rho_0), \quad |(B\varphi, \psi)_{H^1(\Omega, \rho_0)}| \leq C \|\varphi\|_{H^1(\Omega, \rho_0)} \|\psi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)}.$$

Il est classique qu'une telle inégalité entraîne alors la compacité de l'opérateur B . En effet, si l'on considère par exemple une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée dans $H^1(\Omega, \rho_0)$, alors $(B\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est également bornée dans $H^1(\Omega, \rho_0)$ et quitte à extraire converge dans $L^2(\Omega, \rho_0)$. En particulier, $(B\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans Cauchy dans $L^2(\Omega, \rho_0)$ et l'inégalité trouvée appliquée à $\varphi = \varphi_n - \varphi_m$ et $\psi = B\varphi_n - B\varphi_m$, il vient

$$\begin{aligned} \|B\varphi_n - B\varphi_m\|_{H^1(\Omega, \rho_0)}^2 &= (B\varphi_n - B\varphi_m, B\varphi_n - B\varphi_m)_{H^1(\Omega, \rho_0)} \\ &\leq C \|\varphi_n - \varphi_m\|_{H^1(\Omega, \rho_0)} \|B\varphi_n - B\varphi_m\|_{L^2(\Omega, \rho_0)}. \end{aligned}$$

Comme le terme $\|\varphi_n - \varphi_m\|_{H^1(\Omega, \rho_0)}$ est borné, on en déduit que $(B\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $H^1(\Omega, \rho_0)$ et donc converge, ce qui termine la preuve du caractère compact de B . ■

Nous remarquons que la condition obtenue pour garantir le caractère Fredholm (6.9) est l'analogie de celle (6.6) obtenue dans le cas potentiel qui correspond à imposer que l'écoulement soit subsonique. En effet, lorsque le rotationnel est nul $\omega = \mathbf{0}$, les deux conditions

coïncident. Nous sommes alors tentés de dire que lorsque le rotationnel d'un écoulement subsonique est faible, $\|\omega\|_{L^\infty(\Omega)}$, le caractère Fredholm des équations de Goldstein est garanti. C'est vrai, mais il faut prendre garde au fait que la constante $C(\Omega, v_0)$ dépend également de la vitesse de l'écoulement et également de son gradient. L'interprétation de cette condition comme imposant à un écoulement subsonique d'être à faible rotationnel fait l'objet de la sous-section suivante.

6.3.3 Famille d'écoulements faiblement rotationnels

Nous souhaitons réinterpréter la condition (6.9) comme imposant à l'écoulement porteur le fait d'être d'une part subsonique, comme dans le cas potentiel, mais également d'avoir un faible rotationnel. Nous considérons pour cela une famille d'écoulements paramétrés par un réel $\eta \in \mathbb{R}$, $(\rho_0^\eta, p_0^\eta, v_0^\eta)$ dont la vitesse s'écrit sous la forme :

$$v_0^\eta = \nabla\phi_0 + \eta w_0,$$

où ϕ_0 est un potentiel scalaire de sorte que pour $\eta = 0$, la vitesse de l'écoulement $v_0^{\eta=0} = \nabla\phi_0$ soit potentielle. La fonction vectorielle w_0 est un profil fixé contenant caractère le rotationnel de cet écoulement car

$$\omega_0^\eta := \nabla \times (\nabla\phi_0 + \eta w_0) = \eta \nabla \times w_0.$$

Pour normaliser le rotationnel de v_0^η , nous choisissons la fonction w_0 telle que

$$\|\nabla \times w_0\|_\infty = 1,$$

de sorte que le paramètre η est une mesure du rotationnel de la vitesse v_0^η :

$$\|\omega_0^\eta\|_\infty = \eta.$$

Enfin, en nous choisissons cette perturbation à support compact dans Ω :

$$\text{supp}(w_0) \subset \Omega.$$

Nous verrons à la fin de ce chapitre qu'il est en fait impossible que cela représente un écoulement satisfaisant les équations d'Euler stationnaires exactement, mais choisissons le comme modèle pour les simplicités qu'il apporte. Un tel écoulement conduit à une stabilité des définitions de la partition de la frontière de Ω , indépendant de η : en effet, du fait que pour $x \in \partial\Omega$, $v_0^\eta(x) = v_0(x)$, il vient :

$$\begin{aligned} \{x \in \partial\Omega : \pm v_0^\eta(x) \cdot n(x) > 0\} &= \partial\Omega^\pm, \\ \{x \in \partial\Omega : v_0^\eta(x) \cdot n(x) = 0\} &= \partial\Omega^0. \end{aligned}$$

A la lumière de cette famille d'écoulements, nous nous intéressons à la condition (6.9). Nous allons montrer que pour un rotationnel suffisamment petit, i.e. pour un η suffisamment petit, cette condition est satisfaite. Bien sûr, nous devons considérer que l'écoulement potentiel limite $v_0^{\eta=0}$ satisfait au minimum les conditions suffisantes que nous avons énoncées pour

que le problème potentiel soit bien posé, c'est-à-dire que nous le supposons subsonique,

$$1 - \sup_{x \in \Omega} \left| \frac{v_0^{\eta=0}}{c_0^{\eta=0}} \right|^2 > 0,$$

domaine-remplissant. Nous supposons de plus que la dépendance en η des autres grandeurs caractéristiques de l'écoulement, p_0^η et ρ_0^η , est régulière.

Analysons le comportement de la constante $C(\Omega, v_0^\eta)$ associée à la famille d'écoulements considérée $(v_0^\eta)_\eta$ intervenant dans la condition (6.9) sous laquelle le problème de Goldstein est de Fredholm. Pour cette famille d'écoulement, le lemme suivant montre que cette constante est bornée.

Lemme 6.3.6. *La constante $C(\Omega, v_0^\eta)$ définie par*

$$C(\Omega, v_0^\eta) = \frac{\sqrt{e^{2t_\eta^* \|v_0^\eta\|_\infty} - 1 - 2t_\eta^* \|\nabla v_0^\eta\|_\infty}}{\|\nabla v_0^\eta\|_\infty}$$

est bornée uniformément pour $\eta \in]-\eta_0, \eta_0[$, où $\eta_0 > 0$ est fixé.

Preuve. Pour simplifier la preuve, nous nous contentons de la faire en 2D, ce qui permet de s'appuyer sur la caractérisation du caractère Ω -remplissant que nous avons établi, voir le lemme 4.1.7. La convergence de $\|v_0^\eta\|_\infty$ et de la norme infinie du gradient de l'écoulement

$$\nabla v_0^\eta = \text{Hess}(\phi_0) + \eta \nabla w_0,$$

est immédiate.

Remarquons dans un premier temps que pour η suffisamment petit, la vitesse de l'écoulement v_0^η est également Ω -remplissante. En effet, la caractérisation 2D du caractère Ω -remplissant pour la vitesse v_0 est

$$\inf_{x \in \Omega} |v_0(x)| > 0.$$

Par continuité, pour η suffisamment petit, il vient pour la vitesse v_0^η :

$$\inf_{x \in \Omega} |v_0^\eta(x)| > 0,$$

qui est donc bien Ω -remplissante.

Le point clef de la démonstration est alors de borner, uniformément pour η petit, le temps maximal de parcours t_η^* du domaine en suivant les lignes de courant de l'écoulement v_0^η . Introduisons pour cela le flot de l'écoulement v_0^η , défini en tant que solution globale (quitte à prolonger l'écoulement par une fonction uniformément lipschitzienne en dehors du domaine Ω) du système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \varphi^\eta(t, x) = v_0^\eta(\varphi^\eta(t, x)) & \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \\ \varphi^\eta(0, x) = x. \end{cases}$$

Alors, comme $\eta \mapsto v_0^\eta$ est de classe C^1 (et même bien plus), les théorèmes généraux de la théorie des équations différentielles, voir par exemple dans [50], donnent que l'application $\eta \mapsto \varphi^\eta \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ est une application continue. Ici, la dépendance en η est suffisamment simple pour écrire cette continuité sous forme d'une borne sur l'erreur, notée e , partant du point \mathbf{x} et au temps t , définie par :

$$\forall \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}, \quad e(\eta_1, \eta_2, t, \mathbf{x}) := \varphi^{\eta_1}(t, \mathbf{x}) - \varphi^{\eta_2}(t, \mathbf{x}).$$

En effet, on part de

$$\begin{aligned} \partial_t e(\eta_1, \eta_2, t, \mathbf{x}) &= v_0^{\eta_1}(\varphi^{\eta_1}(t, \mathbf{x})) - v_0^{\eta_2}(\varphi^{\eta_2}(t, \mathbf{x})) \\ &= \left(v_0^{\eta_1}(\varphi^{\eta_1}(t, \mathbf{x})) - v_0^{\eta_1}(\varphi^{\eta_2}(t, \mathbf{x})) \right) + \left(v_0^{\eta_1}(\varphi^{\eta_2}(t, \mathbf{x})) - v_0^{\eta_2}(\varphi^{\eta_2}(t, \mathbf{x})) \right), \\ &= \left(v_0^{\eta_1}(\varphi^{\eta_1}(t, \mathbf{x})) - v_0^{\eta_1}(\varphi^{\eta_2}(t, \mathbf{x})) \right) + (\eta_1 - \eta_2) w_0(\varphi^{\eta_2}(t, \mathbf{x})). \end{aligned}$$

Puis, en utilisant que $\varphi^{\eta_1}(t=0, \mathbf{x}) = \varphi^{\eta_2}(t=0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$, et en intégrant sur le temps entre 0 et t , il vient la majoration

$$|e(\eta_1, \eta_2, t, \mathbf{x})| \leq \int_0^t |v_0^{\eta_1}(\varphi^{\eta_1}(s, \mathbf{x})) - v_0^{\eta_1}(\varphi^{\eta_2}(s, \mathbf{x}))| ds + t |\eta_1 - \eta_2| \|w_0\|_\infty.$$

Le champ de vecteurs v_0^η étant lipschitzien uniformément pour des η petits, il existe une constante $C > 0$ telle que ; pour η_1, η_2 suffisamment petits :

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^2, \quad |v_0^{\eta_1}(\mathbf{x}) - v_0^{\eta_1}(\mathbf{x}')| \leq C|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|,$$

et donc

$$|e(\eta_1, \eta_2, t, \mathbf{x})| \leq C \int_0^t |e(\eta_1, \eta_2, s, \mathbf{x})| ds + t |\eta_1 - \eta_2| \|w_0\|_\infty.$$

Ainsi, en appliquant le lemme de Gronwall, on trouve

$$|e(\eta_1, \eta_2, t, \mathbf{x})| \leq t |\eta_1 - \eta_2| \|w_0\|_\infty + C |\eta_1 - \eta_2| \|w_0\|_\infty \int_0^t s e^{C(t-s)} ds,$$

ce qui finalement nous donne l'estimation d'erreur suivante :

$$|\varphi^{\eta_1}(t, \mathbf{x}) - \varphi^{\eta_2}(t, \mathbf{x})| \leq |\eta_1 - \eta_2| \left(t + C t^2 e^{Ct} \right) \|w_0\|_\infty,$$

et permet d'affirmer que $((t, \mathbf{x}) \mapsto \varphi^\eta(t, \mathbf{x}))_\eta$ converge uniformément sur tout compact.

Pour $\varepsilon > 0$, on note

$$\Omega^\varepsilon := B(0, \varepsilon) + \overline{\Omega} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(\mathbf{x}, \Omega) \leq \varepsilon \}.$$

Par continuité du champ $v_0^{\eta=0}$, ε peut être choisi suffisamment petit pour garantir que l'on a toujours

$$\inf_{\mathbf{x} \in \Omega^\varepsilon} |v_0^{\eta=0}(\mathbf{x})| > 0.$$

D'après le lemme A.2.3, pour tout point $\mathbf{x} \in \Omega \subset \Omega^\varepsilon$, le temps de sortie du domaine Ω^ε est

fini, c'est-à-dire que

$$t^\varepsilon(\mathbf{x}) := \sup \left\{ t \in \mathbb{R}_+^* : \forall \tau \in [0, t], \varphi^{\eta=0}(\tau, \mathbf{x}) \in \Omega^\varepsilon \right\} < \infty.$$

De plus, de façon similaire au point 4. de la démonstration du lemme de caractérisation 4.1.7, on montre que $t^\varepsilon(\mathbf{x})$ est borné uniformément pour $\mathbf{x} \in \Omega^\varepsilon$, notons t^ε cette borne : $t^\varepsilon(\mathbf{x}) \leq t^\varepsilon$.

Pour $\eta \in \mathbb{R}$ suffisamment petit et $\mathbf{x} \in \Omega$, on a que

$$\left| \varphi^\eta(t^\varepsilon(\mathbf{x}), \mathbf{x}) - \varphi^{\eta=0}(t^\varepsilon(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \right| \leq |\eta| C t^\varepsilon(\mathbf{x})^2 e^{C t^\varepsilon(\mathbf{x})} \|w_0\|_\infty \leq |\eta| C (t^\varepsilon)^2 e^{C t^\varepsilon} \|w_0\|_\infty.$$

A ε fixé, il existe donc $\eta_0 > 0$ tel que pour tout $\eta \in]-\eta_0, \eta_0[$, on a

$$\left| \varphi^\eta(t^\varepsilon(\mathbf{x}), \mathbf{x}) - \varphi^{\eta=0}(t^\varepsilon(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui montre, comme illustré sur la figure 6.3, que $\varphi^\eta(t^\varepsilon(\mathbf{x}), \mathbf{x})$ est proche de $\varepsilon/2$ du point $\varphi^{\eta=0}(t^\varepsilon(\mathbf{x}), \mathbf{x})$ qui est sur $\partial\Omega^\varepsilon$, et donc $\varphi^\eta(t^\varepsilon(\mathbf{x}), \mathbf{x})$ n'appartient pas $\overline{\Omega}$. Le temps de sortie

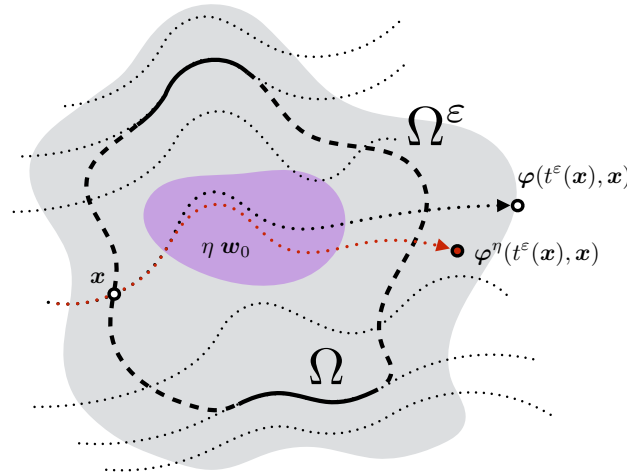


FIGURE 6.3 – Illustration de la perturbation d'une ligne de courant (en rouge) par l'ajout du terme ηw_0

du domaine $\overline{\Omega}$ par le flot φ^η en partant du point \mathbf{x} est donc inférieur à $t^\varepsilon(\mathbf{x})$, lui-même borné $t^\varepsilon(\mathbf{x}) \leq t^\varepsilon$. Nous avons ainsi borné uniformément en \mathbf{x} et en $\eta \in]-\eta_0, \eta_0[$ le temps de sortie de $\overline{\Omega}$ par t^ε , d'où

$$t_\eta^* \leq t^\varepsilon,$$

ce qui termine la preuve du caractère borné de la constante $C(\Omega, v_0^\eta)$, pour les η petits. ■

Remarque 6.3.7. Nous aurions pu considérer une suite d'écoulements $(v_0^\eta)_\eta$ plus généraux avec comme seules conditions les convergences uniformes de $(v_0^\eta)_\eta$ et de son gradient $(\nabla v_0^\eta)_\eta$. Sous ces hypothèses, nous pouvons également borner le temps maximal de parcours t_η^* uniformément en η petit.

Le caractère Fredholm du problème de Goldstein 6.8 peut ainsi être assuré pour tous les écoulements de cette famille qui sont faiblement rotationnels. On a le corollaire suivant

Corollaire 6.3.8. *Il existe un seuil $\eta_0 > 0$ tel que pour tout η tel que $\eta \in]-\eta_0, \eta_0[$, le problème de Goldstein 6.8 associé à l'écoulement $(\rho_0^\eta, p_0^\eta, \mathbf{v}_0^\eta)$, relève de l'alternative de Fredholm.*

Preuve. La preuve est immédiate, car en appliquant le lemme 6.3.6, on sait que $C(\Omega, \mathbf{v}_0^\eta)$ est bornée lorsque η se rapproche de 0, et puisque

$$\|\omega_0^\eta\|_\infty = |\eta| \|\mathbf{w}_0\|_\infty \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0,$$

il vient que

$$1 - \sup_{x \in \Omega} \left| \frac{\mathbf{v}_0^\eta(x)}{c_0^\eta(x)} \right|^2 - \|\omega_0^\eta\|_\infty C(\Omega, \mathbf{v}_0^\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 1 - \sup_{x \in \Omega} \left| \frac{\mathbf{v}_0^{\eta=0}(x)}{c_0^{\eta=0}(x)} \right|^2 > 0,$$

ce qui montre que la condition 6.9 est bien vérifiée pour l'écoulement $(\rho_0^\eta, p_0^\eta, \mathbf{v}_0^\eta)$ tout pour η suffisamment petit. ■

6.4 Discussion des hypothèses concernant la géométrie et l'écoulement porteur

Dans cette section, nous souhaitons discuter des hypothèses que nous avons faites sur l'écoulement porteur et sur la géométrie à la section précédente. L'approche de cette section est plus informelle, le but est de donner les pistes de réflexions que nous avons eu au cours de cette thèse.

Une approche naïve concernant les conditions aux limites pour l'inconnue hydrodynamique ξ serait d'imposer $\xi = \mathbf{0}$ sur Γ_∞ . En effet, puisque l'écoulement est uniforme au voisinage de Γ_∞ , l'écoulement est irrotationnel dans un voisinage de Γ_∞ :

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_\infty, \quad \omega_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Puis, d'après la propriété de décomposition de l'inconnue hydrodynamique (2.15) démontrée dans la partie I, en l'absence de source rotationnelle, on a

$$\xi = \mathbf{u} \times \omega_0,$$

ce qui semble montrer que ξ doit s'annuler sur Γ_∞ :

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_\infty, \quad \xi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Autrement dit, nous aimerions utiliser que puisque le support du rotationnel ω_0 de l'écoulement porteur est borné, c'est également le cas du support de l'inconnue ξ . Dans ce cas, les conditions aux limites sur Γ_∞ ne feraient pas intervenir ξ , puisque nulle, et nous pourrions utiliser les conditions de rayonnement classiquement utilisées pour le modèle potentiel, comme par exemple les équations intégrales, les PML ou la simple condition absorbante d'ordre 1 que nous avons présentée.

Les choses sont en pratique plus compliquées. La sous-section suivante fait l'objet de discussions autour de la possibilité d'adopter toutes les hypothèses sur l'écoulement récapitulées dans le prochain paragraphe.

Par exemple, la première remarque que nous pouvons faire est qu'un écoulement qui ne satisfait pas les équations d'Euler stationnaires ne garantit plus la relation suivante

$$\xi = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_0.$$

6.4.1 Compatibilité des hypothèses faites sur l'écoulement

Nous nous intéressons à la compatibilité des principales hypothèses faites sur l'écoulement porteur et leurs conséquences, à savoir :

- (i) L'écoulement porteur satisfait les équations d'Euler stationnaires : donc $\xi = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_0$.
- (ii) Le rotationnel est à support dans $\Omega \cup \Gamma_R$: donc $\text{supp}(\boldsymbol{\omega}_0) \subset \Omega \cup \Gamma_R$, puis $\xi = \mathbf{0}$ sur Γ_∞ .
- (iii) L'écoulement porteur est Ω -remplissant : on peut donc inverser l'équation de transport.

Éléments de réponse en 2D. Nous proposons quelques éléments d'analyse pour mieux comprendre les relations entre ces hypothèses. Commençons par le cas 2D, qui est plus simple à traiter car les propriétés topologiques des lignes de courant, i.e. du flot d'un champ de vecteurs régulier, sont beaucoup plus simples à décrire, et il en est de même des propriétés de transport du rotationnel de l'écoulement porteur. Nous avons par exemple la proposition bien connue suivante.

Proposition 6.4.1. *Soit un écoulement 2D $(\rho_0, p_0, \mathbf{v}_0)$ qui satisfait les équations d'Euler stationnaires. Alors $\boldsymbol{\omega}_0/\rho_0$ est constant le long des lignes de courant de \mathbf{v}_0 .*

Preuve. Cette propriété est une conséquence directe de l'équation de conservation du rotationnel :

$$D_t \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_0}{\rho_0} \right) = (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_0}{\rho_0} \right) = \mathbf{0},$$

exprimée le long des lignes de courant. ■

Nous en déduisons la conséquence simple suivante.

Corollaire 6.4.2. *Soit un écoulement 2D $(\rho_0, p_0, \mathbf{v}_0)$ Ω -remplissant. On a l'alternative :*

- Soit l'écoulement est irrotationnel : $\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}$.
- Soit $\boldsymbol{\omega}_0$ n'est pas nul sur $\partial\Omega^\pm$.

Preuve. En effet, pour un écoulement Ω -remplissant, les lignes de courant sortent du domaine, par les deux bouts $\partial\Omega^+$ et $\partial\Omega^-$. Ainsi, pour tout point du support de $\boldsymbol{\omega}_0$, s'il est non vide, on peut considérer la ligne de courant qui passe par ce point, et puisque $\boldsymbol{\omega}_0$ est constant le long des lignes de courant, au point d'entrée, sur $\partial\Omega^-$ et de sortie, sur $\partial\Omega^+$, du domaine de cette ligne, $\boldsymbol{\omega}_0$ est non nul. ■

La caractérisation du caractère Ω -remplissant en 2D que nous avons présentée simplifie le corollaire en :

Corollaire 6.4.3. *En 2D. Soit un domaine borné Ω et un écoulement $(\rho_0, p_0, \mathbf{v}_0)$ tel que*

$$\inf_{\mathbf{x} \in \Omega} |\mathbf{v}_0(\mathbf{x})| > 0,$$

alors on a l'alternative :

- Soit l'écoulement est irrotationnel : $\omega_0 = \mathbf{0}$.
- Soit ω_0 n'est pas nul sur $\partial\Omega^\pm$.

Preuve. Utilise qu'en 2D, ne pas avoir de point d'arrêt implique d'être domaine-remplissant pour tout domaine borné. ■

Cette proposition et ses corollaires montrent donc que pour un écoulement 2D, les hypothèses (i) satisfaire les équations d'Euler stationnaires, (ii) être de rotationnel à support borné et (iii) être domaine-remplissant sont incompatibles.

Éléments de réponses en 3D. L'équation de conservation du rotationnel s'écrit

$$\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \left(\frac{\omega_0}{\rho_0} \right) = \left(\frac{\omega_0}{\rho_0} \cdot \nabla \right) \mathbf{v}_0.$$

Cette équation permet à ω_0/ρ_0 de décroître le long des lignes de courant de \mathbf{v}_0 . Si l'on note

$$\mathbf{w}(s, \mathbf{x}) := \frac{\omega_0}{\rho_0} \circ \phi(s, \mathbf{x}),$$

où ϕ est le flot de \mathbf{v}_0 , alors

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial s}(s, \mathbf{x}) = J_0(s, \mathbf{x}) \mathbf{w}(s, \mathbf{x}), \\ \mathbf{w}(0, \mathbf{x}) = \frac{\omega_0(\mathbf{x})}{\rho_0(\mathbf{x})}, \end{cases}$$

où

$$J_0(s, \mathbf{x}) = \text{Jac}(\mathbf{v}_0) \circ \phi(s, \mathbf{x}).$$

Proposition 6.4.4. *En dimension quelconque, soit $(\rho_0, p_0, \mathbf{v}_0)$ un écoulement satisfaisant les équations d'Euler stationnaires. Si ω_0/ρ_0 s'annule en \mathbf{x} , alors*

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \frac{\omega_0}{\rho_0} \circ \phi(s, \mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

C'est-à-dire que ω_0/ρ_0 s'annule sur toute la ligne de courant de \mathbf{v}_0 passant par \mathbf{x} .

Corollaire 6.4.5. *Soit $(\rho_0, p_0, \mathbf{v}_0)$ un écoulement Ω -remplissant satisfaisant les équations d'Euler stationnaires, alors on a toujours l'alternative :*

- Soit l'écoulement est irrotationnel : $\omega_0 = \mathbf{0}$.
- Soit ω_0 n'est pas nul sur $\partial\Omega^\pm$.

Remarque 6.4.6. *Une première différence avec le cas 2D est que nous n'avons pas de caractérisation simple des écoulements Ω -remplissant comme le fait que la vitesse de s'annule pas en 2D.*

Une conséquence plus importante encore est que la vorticité peut s'accroître ou décroître le long des lignes de courant, alors qu'en 2D, elle est constante le long de ces lignes. Ainsi, le fait que ω_0 n'est pas nul sur le bord Γ_∞ peut être moins faux, dans le sens où ω_0 pourrait être petit.

Conclusion sur la compatibilité des hypothèses. Finalement, quelque soit la dimension, nous avons obtenu que : les trois hypothèses

- i) $(\rho_0, p_0, \mathbf{v}_0)$ satisfait les équations d'Euler stationnaires.
- ii) $\text{supp}(\boldsymbol{\omega}_0)$ est borné.
- iii) \mathbf{v}_0 est Ω -remplissant.

Sont incompatibles !

Ainsi,

- Un écoulement Ω -remplissant dont le rotationnel est à support borné ne peut pas satisfaire les équations d'Euler stationnaires.
- Un écoulement Ω -remplissant satisfaisant les équations d'Euler stationnaires ne peut pas avoir un rotationnel à support borné.
- Un écoulement satisfaisant les équations d'Euler stationnaires dont le rotationnel est à support borné ne peut pas être Ω -remplissant.

Il faut donc abandonner l'une de ces hypothèses, ou du moins la relâcher. C'est l'objet de discussion de la section suivante.

6.4.2 Affaiblissement et ajout d'hypothèses ?

Nous avons vu qu'imposer un écoulement satisfaisant les équations d'Euler stationnaires, de manière à avoir $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}_0$, d'imposer que $\text{supp}(\boldsymbol{\omega}_0)$ est borné, qui permet de placer la frontière Γ_∞ assez loin pour avoir que $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ sur Γ_∞ et a fortiori à l'infini et donc d'utiliser les conditions de radiation du cas potentiel et enfin d'imposer que l'écoulement soit Ω -remplissant pour résoudre l'équation de transport d'abord n'est pas possible car ces trois conditions sont incompatibles. Discutons de la pertinence de ces différentes hypothèses et des conséquences de leur éventuel abandon.

Abandon de l'hypothèse Ω -remplissant. Pour ce qui est de l'hypothèse que la vitesse soit Ω -remplissante, plusieurs objections peuvent être faites. Pour un écoulement Ω -remplissant, nous avons vu que :

- il n'existe pas de point d'arrêt, i.e. de point $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ tel que $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, et donc il ne peut pas exister d'obstacle plongé dans le domaine (domaine simplement connexe en 2D),
- il n'existe pas non plus de recirculation, i.e. des lignes de courant qui soient fermées, cette contrainte étant moins gênante pour notre application.

Ainsi, abandonner cette hypothèse autorise en particulier la présence de recirculations, et nous avons vu que dans ce cas, nous n'avons pas de garanties sur l'inversibilité de l'équation de transport harmonique. Cependant, cela ne nous dit rien sur le couplage, seule notre approche d'analyse par résolution de l'équation de transport est mise à mal. C'est pourquoi, l'étude d'une classe particulière d'écoulements, recirculant dans une couronne, fera l'objet d'une analyse dans la partie IV.

Ajout de la viscosité ? Nous pouvons soupçonner que l'incompatibilité entre les hypothèses serait levée si nous prenions en compte la viscosité de l'écoulement porteur dans notre modèle. Avec la viscosité, l'équation de conservation du rotationnel de l'écoulement s'écrit

$$\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_0}{\rho_0} \right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_0}{\rho_0} \cdot \nabla \right) \mathbf{v}_0 + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla \times \left(\frac{1}{\rho_0} \Delta \mathbf{v}_0 + \frac{1}{3\rho_0} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}_0) \right).$$

La viscosité joue donc un rôle dans l'atténuation par diffusion de la vorticité. Cependant, même si la vorticité est atténuée par la présence de viscosité, prendre en compte ce phénomène nous amène à l'introduire également dans le modèle de Goldstein, sinon il semblerait qu'il n'y ait pas de raison que la variable ξ soit elle aussi atténuée en sortie de domaine. Nous souhaitons rester avec le modèle de Goldstein sans ajouter de difficulté supplémentaire. Sans rentrer dans les détails, remarquons que dans les cas industriels, les écoulements porteurs sont obtenus par calcul CFD qui introduisent effectivement de la viscosité, au moins de façon numérique.

 coulement uniforme au loin que façon approché. Nous souhaitons relâcher l'hypothèse d'un écoulement purement uniforme à la frontière Γ_∞ . L'hypothèse d'un écoulement purement uniforme sur la frontière Γ_∞ ne semble donc pouvoir être vérifiée que de façon approchée.

Bien que la géométrie des écoulements satisfaisant les équations d'Euler stationnaires compressibles soit un sujet très difficile, à la lumière de résultats obtenus en 2D sur les équations d'Euler incompressibles comme celui démontré dans [69] qui dit qu'un écoulement satisfaisant les équations d'Euler stationnaires incompressibles dont la vitesse est bornée dans le plan est nécessairement un écoulement cisailé, nous pouvons nous demander si, dans le cas compressible, un écoulement dont la vitesse est uniforme à l'infini n'est pas uniforme partout.

De plus, ajoutons que dans la pratique, il est très difficile car coûteux de considérer un domaine de calcul assez grand pour que le jet du réacteur puisse être considéré comme uniforme en sortie.

Conclusion des discussions. Dans notre étude, nous avons donc dû prendre en compte l'inconnue hydrodynamique dans les conditions aux limites. L'hypothèse que l'écoulement soit uniforme à la frontière ne peut être vrai qu'approximativement, elle ne remet pas en cause la validité de notre analyse. Par contre, nous nous sommes pour l'instant fortement appuyés sur le fait que l'écoulement soit domaine-remplissant, pour inverser l'équation de transport et contrôler la constante de continuité de cette inversion. Le fait que l'écoulement vérifie les équations d'Euler stationnaires n'intervient que sous l'hypothèse $\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0$ que nous avons utilisé lors de l'établissement de la formulation variationnelle. Ainsi, même si les équations de Goldstein sont dérivées par linéarisation autour d'un écoulement théorique satisfaisant ces équations d'Euler, cette hypothèse peut être relâchée et c'est ce qui sera fait, notamment dans la pratique industrielle où les écoulements sont issus de calculs CFD introduisant de la viscosité et sont de plus possiblement entachés d'erreurs numériques.

Chapitre 7

Étude numérique du couplage de Goldstein en 2D

7.1	Approximation FEM-SUPG du couplage de Goldstein avec PML . . .	151
7.1.1	Géométries	151
7.1.2	Formulation variationnelle continue	153
7.1.3	Approximation de Galerkin	154
7.2	Cas de validation de la méthode	155
7.3	Illustrations numériques sur divers écoulements	161
7.3.1	Retour sur les jets gaussien	161
7.3.2	Écoulement localement rotationnel dans un guide	166
7.4	Comparaison avec le modèle potentiel	176
	Cas du jet 1 : faible rotationnel	177
	Cas du jet 2 : fort rotationnel	186
7.5	Conclusions de l'étude numérique des équations de Goldstein . . .	198

7.1 Approximation FEM-SUPG du couplage de Goldstein avec PML

7.1.1 Géométries

Toutes les simulations numériques présentées entrent dans le cadre d'un écoulement que l'on peut considérer uniforme ou cisailé à l'infini. Comme nous l'avons expliqué au chapitre 6, dans la section consacrée aux conditions aux limites pour les perturbations acoustiques, et bien que l'analyse théorique que nous en donnons en annexe n'est pas complètement satisfaisante, nous choisissons d'utiliser des PML pour borner le domaine de calcul dans nos applications numériques.

Nous considérons un domaine rectangulaire en 2D noté Ω dont nous consacrons des bandes de largeurs l_x et l_y pour appliquer les PML, comme représenté sur la figure 7.1. Cela délimite le domaine d'intérêt, noté Ω_i , dans lequel la solution a un sens physique, tandis

que $\Omega \setminus \Omega_i$ est le domaine dit « PML » dans lequel les ondes acoustiques sont artificiellement amorties. On a :

$$\Omega_i :=]x_{min}, x_{max}[\times]y_{min}, y_{max}[\quad \text{et} \quad \Omega :=]x_{min} - l_x, x_{max} + l_x[\times]y_{min} - l_y, y_{max} + l_y[.$$

Les PML sont paramétrées par un nombre complexe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

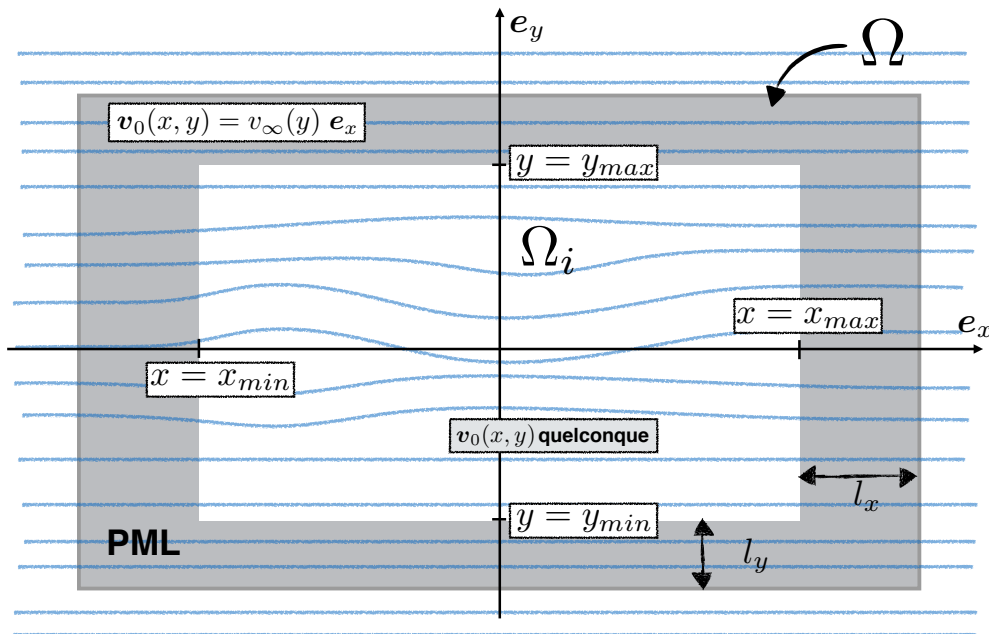


FIGURE 7.1 – Domaine intérieur Ω_i entouré de PML de largeur l_x et l_y pour former le domaine de calcul Ω . Dans $\Omega \setminus \Omega_i$, v_0 est cisailé.

$$\Re(\alpha) > 0 \quad \text{et} \quad \Im(\alpha) < 0,$$

et on définit la fonction vectorielle $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y)$ par ses composantes :

$$\alpha_x : \Omega \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C}$$

$$\mathbf{x} = (x, y) \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } O_x + l_x < x < O_x + L_x - l_x, \\ \alpha & \text{sinon,} \end{cases}$$

et de la même façon :

$$\alpha_y : \Omega \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C}$$

$$\mathbf{x} = (x, y) \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } O_y + l_y < y < O_y + L_y - l_y, \\ \alpha & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour ce qui est de l'écoulement porteur $(\rho_0, p_0, \mathbf{v}_0)$, nous supposons qu'il peut être considéré comme uniforme ou au plus cisailé à l'extérieur du domaine d'intérêt Ω_i . C'est-à-dire, que

la vitesse \mathbf{v}_0 s'écrit en fonction d'un profil $v_\infty(y)$ à l'extérieur de Ω_i de la façon suivante :

$$\forall (x, y) \in \Omega \setminus \Omega_i, \quad \mathbf{v}_0(x, y) = v_\infty(y) \mathbf{e}_x.$$

Les équations d'Euler stationnaires imposent alors que la densité et la pression de l'écoulement porteur dans la zone extérieur Ω_∞ sont constantes :

$$\forall (x, y) \in \Omega \setminus \Omega_i, \quad \rho_0(x, y) = \rho_\infty \text{ et } p_\infty(x, y) = p_\infty.$$

Les équations de Goldstein avec PML s'écrivent alors sous la forme

$$\begin{aligned} \rho_0 D_{\omega, \alpha} (c_0^{-2} D_{\omega, \alpha} \varphi) - \nabla_\alpha \cdot (\rho_0 \nabla_\alpha \varphi + \rho_0 \boldsymbol{\xi}) &= \rho_0 f, \\ \mathcal{T}_{\omega, \mathbf{v}_0, \alpha} \boldsymbol{\xi} &= \nabla_\alpha \varphi \times \boldsymbol{\omega}_0, \end{aligned}$$

où les opérateurs ∇_α , $D_{\omega, \alpha}$ et $\mathcal{T}_{\omega, \mathbf{v}_0, \alpha}$ sont des versions avec PML des opérateurs ∇ , D_ω et $\mathcal{T}_{\omega, \mathbf{v}_0}$, définis par

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha &:= \begin{pmatrix} \alpha_x \partial_x \\ \alpha_y \partial_y \end{pmatrix}, \\ D_{\omega, \alpha} &:= -i\omega + \nabla_\alpha, \\ \mathcal{T}_{\omega, \mathbf{v}_0, \alpha} &:= D_{\omega, \alpha} + \nabla \mathbf{v}_0. \end{aligned}$$

Les PML sont conçues pour absorber et faire tendre φ vers zéro, par conséquent, pour des largeurs de bandes PML, l_x et l_y , suffisamment grandes, on fait l'approximation d'imposer $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$. Pour ce qui est de $\boldsymbol{\xi}$, les PML jouent également le rôle d'absorption, cependant, seule une condition sur le bord entrant $\partial\Omega^-$ est nécessaire pour cet inconnue. Même si l'écoulement est cisailé en amont du domaine, on fait l'approximation que $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ sur ce bord entrant. On obtient ainsi les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi &= 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \boldsymbol{\xi} &= \mathbf{0}, \quad \text{sur } \partial\Omega^-. \end{aligned}$$

Finalement, le problème de Goldstein avec PML s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } f \in L^2(\Omega, \rho_0), \text{ trouver } \varphi \in H_0^1(\Omega, \rho_0), \boldsymbol{\xi} \in H^-(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0), \text{ tels que :} \\ \rho_0 D_{\omega, \alpha} (c_0^{-2} D_{\omega, \alpha} \varphi) - \nabla_\alpha \cdot (\rho_0 \nabla_\alpha \varphi + \rho_0 \boldsymbol{\xi}) = \rho_0 f, \quad \text{dans } \Omega \\ \mathcal{T}_{\omega, \mathbf{v}_0, \alpha} \boldsymbol{\xi} = \nabla_\alpha \varphi \times \boldsymbol{\omega}_0, \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (7.1a) \\ (7.1b) \end{array}$$

7.1.2 Formulation variationnelle continue

Afin d'utiliser une méthode de résolution par éléments finis, nous cherchons une formulation variationnelle au problème de Goldstein avec PML (7.1). La formulation variationnelle utilisée pour l'analyse théorique ne peut pas convenir car elle fait apparaître l'opérateur de résolution de l'équation de transport harmonique, que nous ne connaissons pas explicitement, il convient de résoudre numériquement le problème couplé. Dans la partie II qui étudie l'équation de transport harmonique, nous avons choisi une approche variationnelle de celle-ci en utilisant la méthode SUPG faisant intervenir un paramètre δ de stabilisation.

Nous nous en inspirons pour proposer une formulation mixte, type SUPG pour la partie transport et standard pour la partie Helmholtz convectée. On obtient ainsi la formulation variationnelle suivante :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Pour } f \in L^2(\Omega, \rho_0), \text{ trouver } \varphi \in H_0^1(\Omega, \rho_0) \text{ et } \xi \in H^-(\Omega, v_0, \rho_0) \text{ tels que :} \\ \forall (\psi, \zeta) \in H_0^1(\Omega, \rho_0) \times H(\Omega, v_0, \rho_0), \quad \begin{cases} a_\alpha(\varphi, \psi) + b_\alpha(\xi, \psi) = l_\alpha(f, \psi) \\ c_\alpha(\varphi, \zeta) + d_\alpha(\xi, \zeta) = 0, \end{cases} \end{array} \right.$$

où les formes sesquilinéaires du système sont définies par

$$a_\alpha(\varphi, \psi) := \int_{\Omega} \frac{\rho_0}{\alpha_x \alpha_y} \{ \nabla_\alpha \varphi \cdot \overline{\nabla_\alpha \psi} - c_0^{-2} D_{\alpha, \omega} \varphi \overline{D_{\alpha, \omega} \psi} \}, \quad (7.2a)$$

$$b_\alpha(\xi, \psi) := \int_{\Omega} \frac{\rho_0}{\alpha_x \alpha_y} \xi \cdot \overline{\nabla_\alpha \psi}, \quad (7.2b)$$

$$c_\alpha(\varphi, \zeta) := \int_{\Omega} \frac{1}{\alpha_x \alpha_y} (\omega_0 \times \nabla_\alpha \varphi) \cdot \overline{(\zeta + \delta \mathcal{T}_{\alpha, \omega, v_0} \zeta)}, \quad (7.2c)$$

$$d_\alpha(\xi, \zeta) := \int_{\Omega} \frac{1}{\alpha_x \alpha_y} (\mathcal{T}_{\alpha, \omega, v_0} \xi) \cdot \overline{(\zeta + \delta \mathcal{T}_{\alpha, \omega, v_0} \zeta)}, \quad (7.2d)$$

et

$$l_\alpha(f, \psi) := \int_{\Omega} \frac{\rho_0}{\alpha_x \alpha_y} f \overline{\psi}.$$

Le réel $\delta > 0$ est le paramètre de stabilisation de la méthode et devra être choisi, comme pour l'équation de transport seule, en fonction du pas de maillage et de la vitesse de l'écoulement porteur.

7.1.3 Approximation de Galerkin

De même que pour la discrétisation de l'équation de transport harmonique seule, les résultats numériques présentés sont issus d'un code éléments finis 2D programmé pendant de cette thèse en C++ et s'appuyant sur la librairie d'algèbre linéaire générique Eigen [53]. Ce code implémente les routines d'assemblage pour les éléments finis standards P1 et Q1 sur des maillages triangulaires et quadrangulaires respectivement. Dans le rectangle Ω , nous utiliserons toujours l'espace d'approximation Q1 sur un maillage régulier, pour l'inconnue φ mais également pour ξ_x et ξ_y , c'est-à-dire

$$V_h := \{ p \in C^0(\overline{\Omega}) / \forall K \in \mathcal{M}_h, p|_K \in \mathbb{Q}_1(K) \},$$

où \mathcal{M}_h est le maillage de Ω en rectangles K , identiques à translation près, de taille proportionnelle à $h > 0$, et $\mathbb{Q}_1(K)$ est l'espace des polynômes de degré partiel inférieur à 1. Lorsque nous étudierons le couplage de Goldstein dans un guide déformé ou dans la couronne, l'espace d'approximation utilisé est

$$V_h := \{ p \in C^0(\overline{\Omega}) / \forall K \in \mathcal{M}_h, p|_K \in \mathbb{P}_1(K) \},$$

où l'espace $\mathbb{P}_1(K)$ est l'espace des polynômes de degré total inférieur à 1 définis sur l'élément K du maillage \mathcal{M}_h de Ω en triangles. Les conditions aux limites

$$\begin{aligned}\varphi &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \xi &= \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega^-, \end{aligned}$$

sont appliquées de manière forte en imposant 0 sur les lignes correspondant aux degrés de liberté du bord $\partial\Omega$ pour φ et $\partial\Omega^-$ pour ξ_x et ξ_y , à l'exception de la diagonale où le coefficient est imposé égale à 1.

Nous aboutissons ainsi au problème discrétisé suivant,

$$\left| \begin{array}{l} \text{Pour } f \in L^2(\Omega, \rho_0), \text{ trouver } \varphi_h \in V_h \text{ et } \xi \in V_h^2 \text{ tels que :} \\ \forall \psi_h \in V_h, \forall \zeta_h \in V_h^2, \quad \begin{cases} a_{\alpha,h}(\varphi_h, \psi_h) + b_{\alpha,h}(\xi_h, \psi_h) = l_{\alpha,h}(f, \psi) \\ c_{\alpha,h}(\varphi_h, \zeta_h) + d_{\alpha,h}(\xi_h, \zeta_h) = 0, \end{cases} \\ \text{et } \varphi_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ ainsi que } \xi_h = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega^-, \end{array} \right.$$

où $a_{\alpha,h}$, $b_{\alpha,h}$, $c_{\alpha,h}$, $d_{\alpha,h}$ et $l_{\alpha,h}$ correspondent au calcul par quadratures des formes sesquili-néaires a_α , b_α , c_α , d_α et l_α , définies en (7.2).

7.2 Cas de validation de la méthode

Nous cherchons dans un premier temps à valider les résultats obtenus, pour cela, nous avons utilisé deux approches.

Nous avons d'abord procédé par comparaison à une solution analytique artificiellement choisie d'où nous déduisons le second membre qu'il faut utiliser pour la retrouver. Nous ne présentons pas ces résultats ici car ils ne présentent aucun intérêt physique.

Notre seconde approche de validation est de procéder par comparaison avec des résultats obtenus au CERFACS pendant le stage de fin d'étude de C. Mietka faisant suite à la thèse d'É. Peynaud [3]. En adaptant le code développé pour résoudre les équations de Galbrun, dont les résultats sont présentés dans [3], C. Mietka a proposé une méthode de résolution numérique par éléments finis mixtes des équations de Goldstein. Des éléments finis classiques sont utilisés pour résoudre l'équation d'Helmholtz convectée alors que l'équation de transport est résolue par une méthode de type Galerkin discontinue, les deux équations étant couplées pour former le système de Goldstein. Nous avons à notre disposition des résultats concernant la vitesse acoustique v obtenus avec ce code par résolution des équations de Galbrun d'une part et de celles de Goldstein d'autre part, dans le cas du rayonnement d'un dipôle ou d'un quadripôle dans un jet gaussien.

Rappelons que la formulation de Galbrun est équivalente à celle de Goldstein, toutes deux équivalentes aux équations d'Euler linéarisées, via des changements d'inconnues.

Géométrie et écoulement porteur. Commençons par présenter le cas d'étude. Le domaine d'intérêt Ω_i est un rectangle auquel on adjoint des PML de largeurs l_x et l_y pour former le domaine de calcul Ω . L'écoulement porteur est un écoulement cisailé, c'est-à-dire que la vitesse v_0 est suivant e_x et ne dépend que de la variable y :

$$\mathbf{v}_0(x, y) := v_0(y) \mathbf{e}_x,$$

où le profil $v_0(y)$, dans le cas d'un jet gaussien, est choisi de la forme

$$v_0(y) := v_\infty + \mu e^{-\frac{(y-y_m)^2}{R^2}}.$$

où les paramètres s'interprètent ainsi

- y_m : centre du jet,
- R : taille typique de la largeur du jet,
- v_∞ : vitesse de l'écoulement hors du jet,
- $v_\infty + \mu$: vitesse de l'écoulement au centre du jet, là où il est le plus fort.

La vorticité $\omega_0 = \omega_0 \mathbf{e}_z$ d'un tel écoulement est donnée par

$$\omega_0(y) = v_0'(y) = -2 \frac{y - y_m}{R^2} \mu e^{-\frac{(y-y_m)^2}{R^2}},$$

et est donc localisée dans le jet. La densité ρ_0 et la vitesse du son c_0 sont toutes les deux choisies égales à 1. Ainsi, le Mach M_0 et la vitesse de l'écoulement v_0 coïncident.

 quivalence des sources. Pour effectuer les comparaisons entre la formulation de Galbrun et celle de Goldstein, il convient d'utiliser des sources équivalentes. Nous choisissons une source acoustique, qui ne génère pas de vorticité de façon directe, c'est-à-dire une source f telle que les équations de Goldstein s'écrivent, dans le cas particulier d'un écoulement ci-saill , sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} D_\omega^2 \varphi - \Delta \varphi - \nabla \cdot \xi &= f, \\ D_\omega \xi + (\xi \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 &= \nabla \varphi \times \omega_0. \end{aligned}$$

L'inconnue ξ est donc crée par interaction avec l'onde φ dans les zones où ω_0 est non nul. Pour un tel écoulement, les équations Galbrun se simplifient, voir [3], en :

$$D_\omega^2 \mathbf{u} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{g}.$$

Choisir une source acoustique revient à choisir le second membre \mathbf{g} sous la forme d'un gradient d'une fonction. Pour respecter l'équivalence entre les équations de Goldstein et de Galbrun, étant donnée une fonction g , nous posons :

$$f := D_\omega g \quad \text{et} \quad \mathbf{g} := \nabla g.$$

Deux cas de sources sont considérés : le cas du dipôle $g := g_d$ et le cas du quadrupôle $g := g_q$, définis par :

$$g_d(x, y) := e^{-\frac{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2}{r_s^2}} \quad \text{ou} \quad g_q(x, y) := \frac{(x-x_s)(y-y_s)}{r_s^2} e^{-\frac{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2}{r_s^2}},$$

où (x_s, y_s) est le centre de la source et r_s est la taille caractéristique de celle-ci.

Rayonnement d'un dipôle dans un jet gaussien. Le premier cas présenté correspond au choix des paramètres suivants :

- Pulsation : $\omega = 8$.

- Domaine d'intérêt : $\Omega_i =]0, 3[\times] - 1, 1[$.
- PML : $l_x = l_y = 1$ et $\alpha_x = \alpha_y = 2 - 2i$.
- Paramètre SUPG : $\delta = 10^{-3}$.
- Source dipolaire $g = g_d : (x_s, y_s) = (1, 0)$ et $r_s = 0.05$.
- Jet gaussien : $v_\infty = 0.1$, $\mu = 0.2$ et $R = 0.1$.

Indiquons également les paramètres de discrétisation utilisés. Le domaine Ω est discrétisé en utilisant un maillage en grille régulière contenant $n_x = 800$ points suivant la direction \mathbf{e}_x de l'écoulement et $n_y = 1000$ points dans la direction \mathbf{e}_y transverse. On obtient donc un problème à résoudre de $3 \times n_x \times n_y = 2.4 \times 10^6$ degrés de liberté. Nous utilisons une résolution itérative du système linéaire non symétrique assemblé par BiCGSTAB (Stabilized Bi-Conjugate Gradient), voir [70, 71], fourni par la librairie Eigen [53], que l'on préconditionne par une décomposition LU incomplète [72]. Pour donner un ordre de grandeur, le temps de résolution est alors de moins d'une heure sur un ordinateur portable moyen, la convergence a lieu en environ 800 itérations pour une tolérance d'erreur relative de 10^{-7} .

Nous représentons le profil de vitesse $y \mapsto v_0(y)$ correspondant à notre cas de calcul sur la figure 7.2. L'écoulement à l'extérieur du jet est uniforme et son Mach vaut 0.1 et au plus fort de l'écoulement, au centre du jet, il atteint 0.3. Sur la figure 7.3, nous représentons la

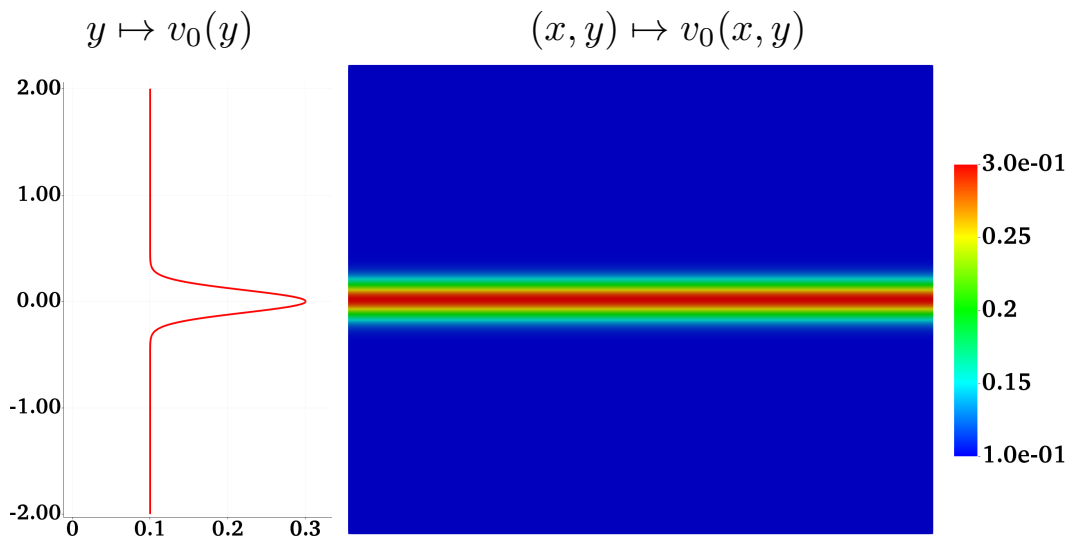


FIGURE 7.2 – Profil de vitesse $y \mapsto v_0(y)$ du jet gaussien : courbe et isovaleurs.

partie réelle et imaginaire de la source f , associée à g_d , et utilisée comme second membre des équations de Goldstein : $f = D_\omega g_d$. La source est donc placée dans ce cas au plus fort du jet.

Sur la figure 7.4, on compare la composante suivant \mathbf{e}_x de la vitesse acoustique \mathbf{v} , dont on rappelle le lien avec les inconnues de Goldstein

$$v_x = \partial_x \varphi + \xi_x,$$

obtenue par notre code (en haut) et obtenue par le code du CERFACS (en bas). L'accord est bon visuellement, malheureusement, nous manquons de données pour pousser plus loin cette comparaison. Les « stries » visibles (assez peu) dans le jet sont la manifestation de

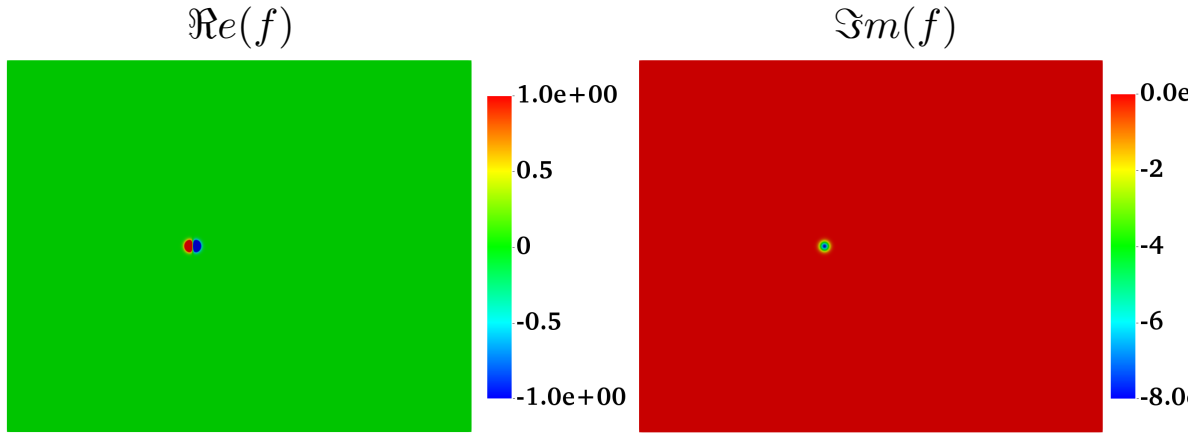


FIGURE 7.3 – Isovaleurs de la source dipolaire de Goldstein $f = D_\omega g_d$. Gauche : $\Re(f)$. Droite : $\Im(f)$.

l'inconnue hydrodynamique ξ_x , et leur calcul nécessite un maillage très fin. Il s'agit donc des motifs les plus compliqués à calculer, d'autant qu'ils n'impactent pas de façon significative la norme L^2 de la vitesse, nous y reviendrons lorsque nous comparerons les équations de Goldstein à des modèles approchées, au cas du modèle potentiel par exemple. Notons que la solution est représentée dans le domaine d'intérêt Ω_i seulement, car la comparaison dans le domaine PML $\Omega \setminus \Omega_i$ n'a pas de sens.

Rayonnement d'un quadrupôle à travers un jet gaussien. Pour le second cas de validation que nous avons à notre disposition, nous étudions le rayonnement d'une source quadrupolaire, également dans un jet gaussien. Les paramètres utilisés sont :

- Pulsation : $\omega = 12$.
- Domaine d'intérêt : $\Omega_i =]-3, 3[\times]-3, 3[$.
- Paramètre SUPG : $\delta = 10^{-3}$.
- PML : $l_x = l_y = 1$ et $\alpha_x = \alpha_y = 2 - 2i$.
- Source quadrupolaire $g = g_q : (x_s, y_s) = (-1, 1.5)$ et $r_s = 0.1$.
- Jet gaussien : $v_\infty = 0$, $\mu = 0.3$ et $R = 0.1$.

Par rapport au cas précédent, relativement à la taille du domaine, le jet considéré est plus fin et la différence entre v_∞ et la vitesse dans le jet $v_\infty + \mu$ est plus importante, ce qui implique que le rotationnel de l'écoulement est plus fort dans ce cas. L'écoulement en dehors du jet est au repos et le nombre de Mach atteint au plus fort du jet 0.3. Le profil de vitesse de ce jet est représenté sur la figure 7.5. La pulsation est également prise plus élevée. La source quadrupolaire est représentée sur la figure 7.6.

Le domaine de calcul Ω est toujours maillé en grille régulière avec $n_x = n_y = 400$ points et le système linéaire assemblé est alors résolu de façon directe par une décomposition LU creuse (toujours fournie par la librairie Eigen) et le calcul tourne en moins d'une demi-heure sans optimisation particulière. Sur la figure 7.7, nous comparons les différents résultats obtenus sur la composante suivant e_x de la vitesse acoustique, par résolution des équations de Goldstein ou de Galbrun avec le code du CERFACS et par la résolution des équations de Goldstein par notre code. Encore une fois, les résultats sont très similaires visuellement, mais nous n'avons pas les données pour pousser plus loin la comparaison.

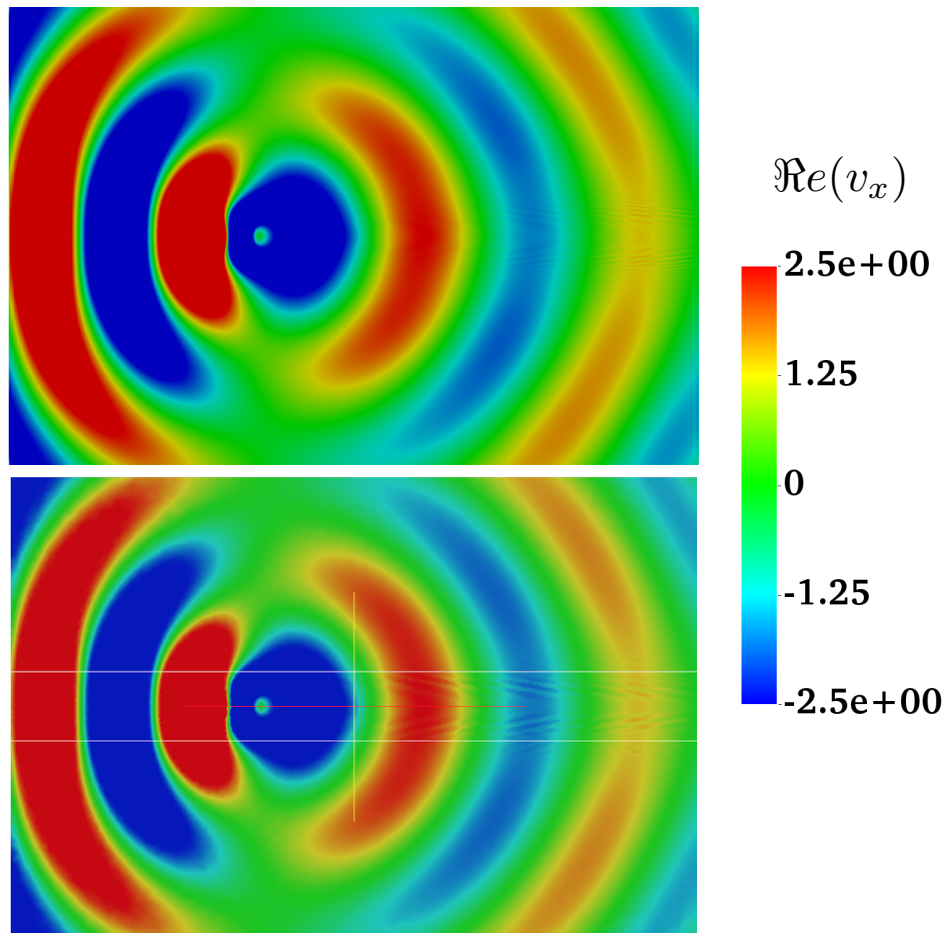


FIGURE 7.4 – Comparaison des isovalues de $\Re(v_x)$, obtenus par différents codes : Goldstein (FEM-SUPG), Goldstein (FEM-dG, CERFACS)

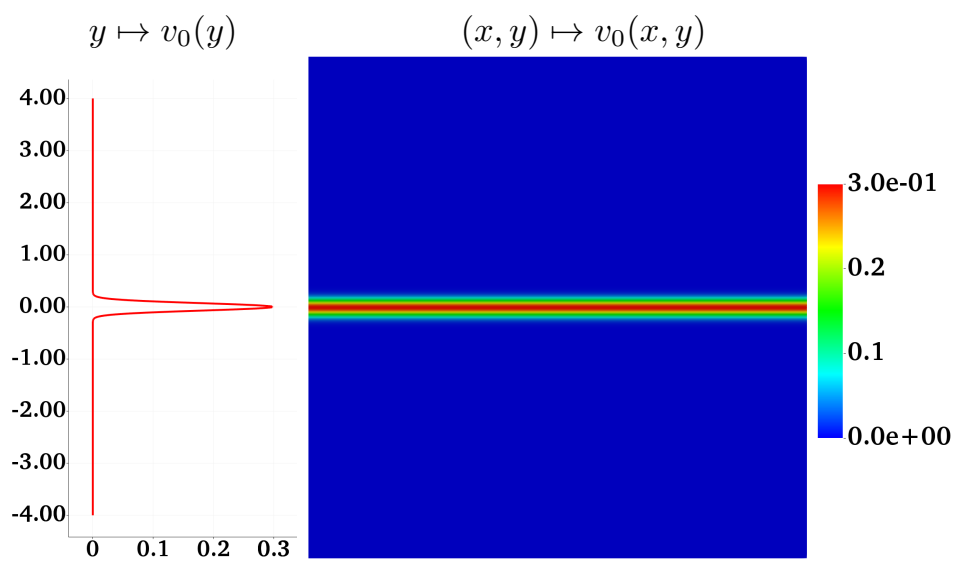


FIGURE 7.5 – Profil de vitesse $y \mapsto v_0(y)$ du jet gaussien : courbe et isovalues

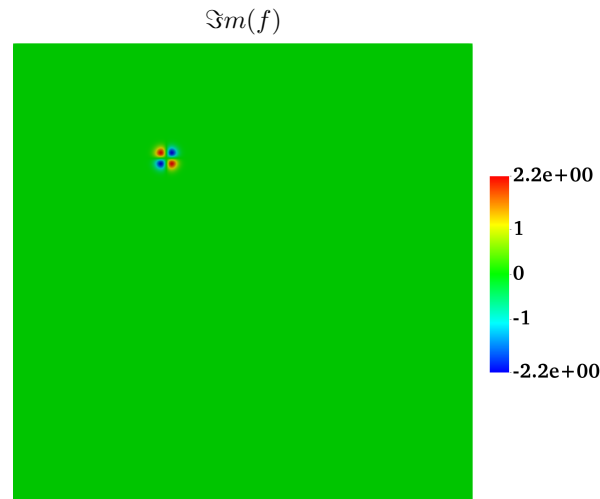


FIGURE 7.6 – Isovaleurs de la partie imaginaire de la source quadrupolaire de Goldstein $f = D_\omega g_q$. La partie réelle n'est pas représentée car négligeable : $\Re \mathfrak{c}(f) \approx 0$.

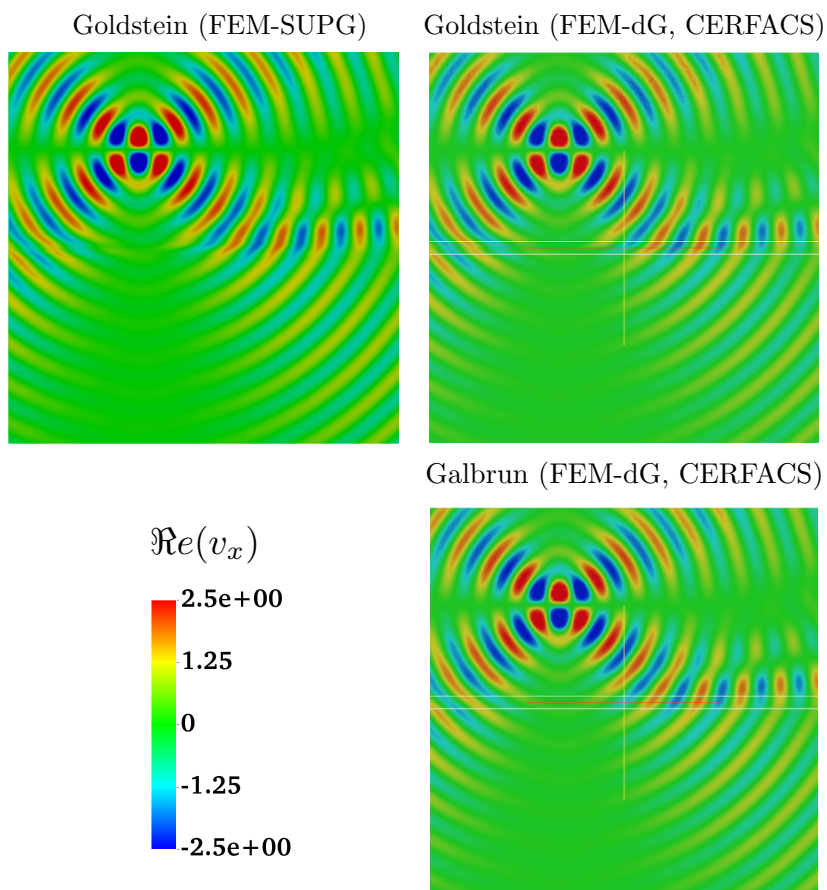


FIGURE 7.7 – Comparaison des isovaleurs de $\Re \mathfrak{c}(v_x)$ obtenues par résolution : des équations de Goldstein (code FEM-SUPG) en haut à gauche, des équations de Goldstein (code FEM-dG) en haut à droite et des équations de Galbrun (code FEM-dG CERFACS) en bas.

7.3 Illustrations numériques sur divers écoulements

Après cette validation, nous allons entrer un peu plus en détails dans les commentaires et présenter des cas d'écoulements qui ne soient pas monodimensionnels.

7.3.1 Retour sur les jets gaussien

Revenons d'abord sur les cas des jets gaussiens. Nous reprenons les notations et l'écoulement introduits dans la section 7.2. N'ayant plus besoin d'avoir des sources équivalentes à celles des équations de Galbrun, nous utilisons plus simplement la source suivante au second membre des équations de Goldstein, qui peut être vu comme un monopole :

$$f(x, y) = e^{-\frac{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2}{r_s^2}}.$$

Nous souhaitons dans un premier temps montrer l'influence de la fréquence sur l'inconnue hydrodynamique. Nous utilisons les paramètres suivant pour les simulations, tous sont fixes, seule la pulsation varie et prend trois valeurs, une « basse fréquence », une intermédiaire et une « haute fréquence » :

- Pulsation : basse $\omega = 1$, intermédiaire $\omega = 5$ et haute $\omega = 10$.
- Domaine d'intérêt : $\Omega =]0, 20[\times]0, 10[$.
- PML : $l_x = l_y = 2$ et $\alpha_x = \alpha_y = 1 - i$.
- Paramètre SUPG : $\delta = 10^{-3}$.
- Jet gaussien : $v_\infty = 0.3$, $\mu = 0.3$, et $R = 1$.
- Source : $(x_s, y_s) = (5, 7.5)$ et $r_s = 0.2$.

Il s'agit d'un jet assez large et rapide, l'écoulement à l'infini est à Mach $v_\infty = 0.3$ et au plus fort du jet atteint $v_\infty + \mu = 0.6$. Sur la figure 7.8, nous représentons en haut le profil du jet, ses isovalues dans le domaine d'intérêt et en bas, ainsi que la source utilisée, localisée au dessus du jet. Le cadre PML est également représenté sur cette figure, mais ne le sera plus par la suite, car la solution dans cette zone n'est pas physique.

Nous représentons sur la figure 7.9 les isovalues de $\Re(\varphi)$ et sur la figure 7.10 celles de $\Re(\xi_x)$, pour les deux pulsations $\omega = 1$ (en haut) et $\omega = 5$ (en bas). En ce qui concerne l'inconnue φ , nous constatons des stries visibles dans le jet pour la fréquence la plus basse ($\omega = 1$), alors qu'elles ne sont plus visibles pour la fréquence intermédiaire ($\omega = 5$). L'effet Doppler est bien visible sur φ , la longueur d'onde avale est plus importante que la longueur d'onde amont, celle de l'onde qui remonte l'écoulement. À la pulsation $\omega = 5$, on voit la réflexion de l'onde acoustique φ sur le jet. Le cas $\omega = 1$ est trop basse fréquence pour voir cette réflexion, le domaine étant trop petit par rapport à la longueur d'onde.

Concernant l'inconnue ξ , on constate un changement de comportement assez net entre les deux pulsations $\omega = 1$ et $\omega = 5$. En effet, à la plus basse pulsation, les stries hydrodynamiques sont très visibles. Elles sont penchées dans le sens de l'écoulement, et leur inclinaison s'accroît au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la source, car deux points voisins ne sont pas transportés à la même vitesse. Ce cisaillement crée des grandeurs typiques de variations spatiales très petites dans la direction transverse à l'écoulement (selon e_y), bien inférieures à la longueur d'onde de ξ , qui est $\lambda_\xi(y) = 2\pi/(\omega v_0(y))$ alors que celle de φ est, en aval, $\lambda_\varphi(y) = 2\pi/(\omega c_0(y))$, d'où $\lambda_\xi = M_0 \lambda_\varphi$. À la pulsation plus élevée $\omega = 5$, ces stries sont

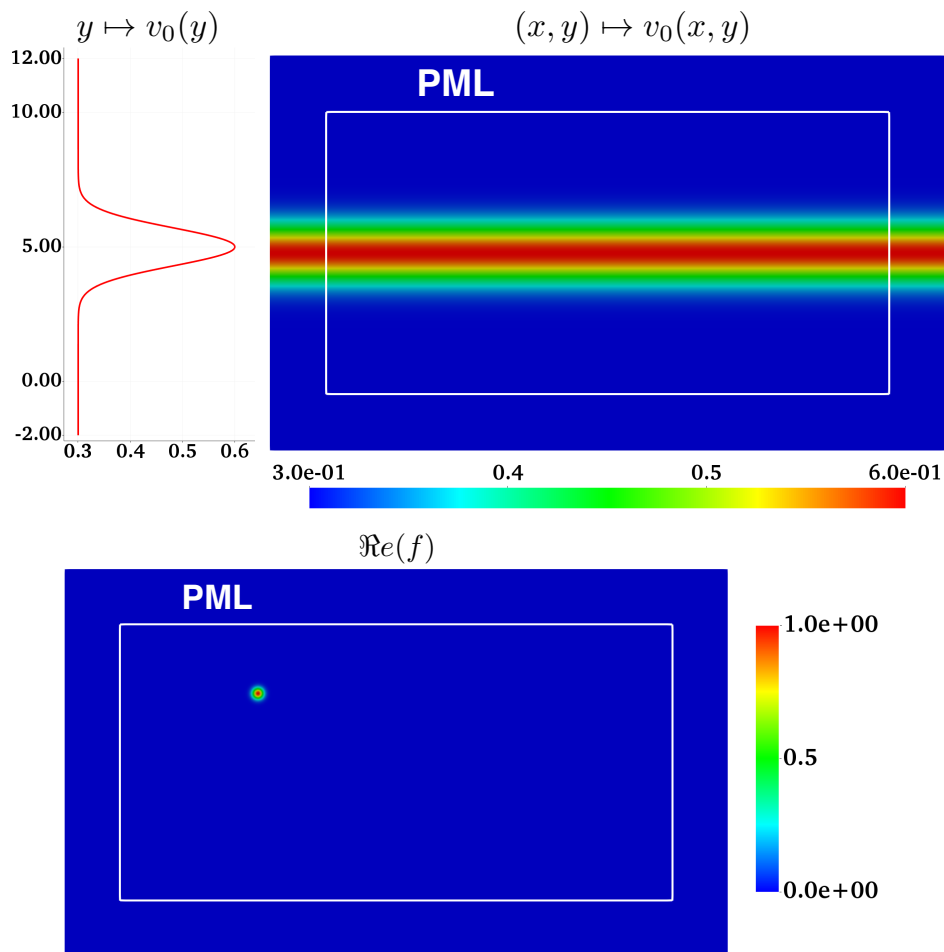
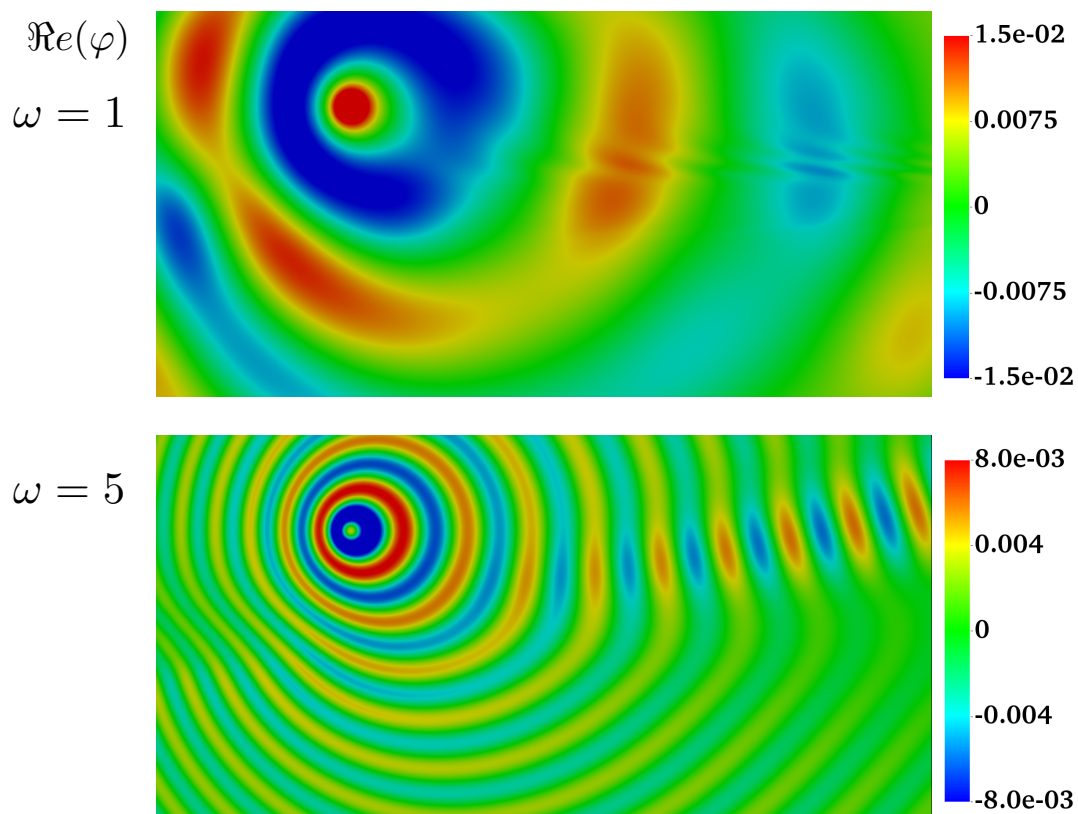
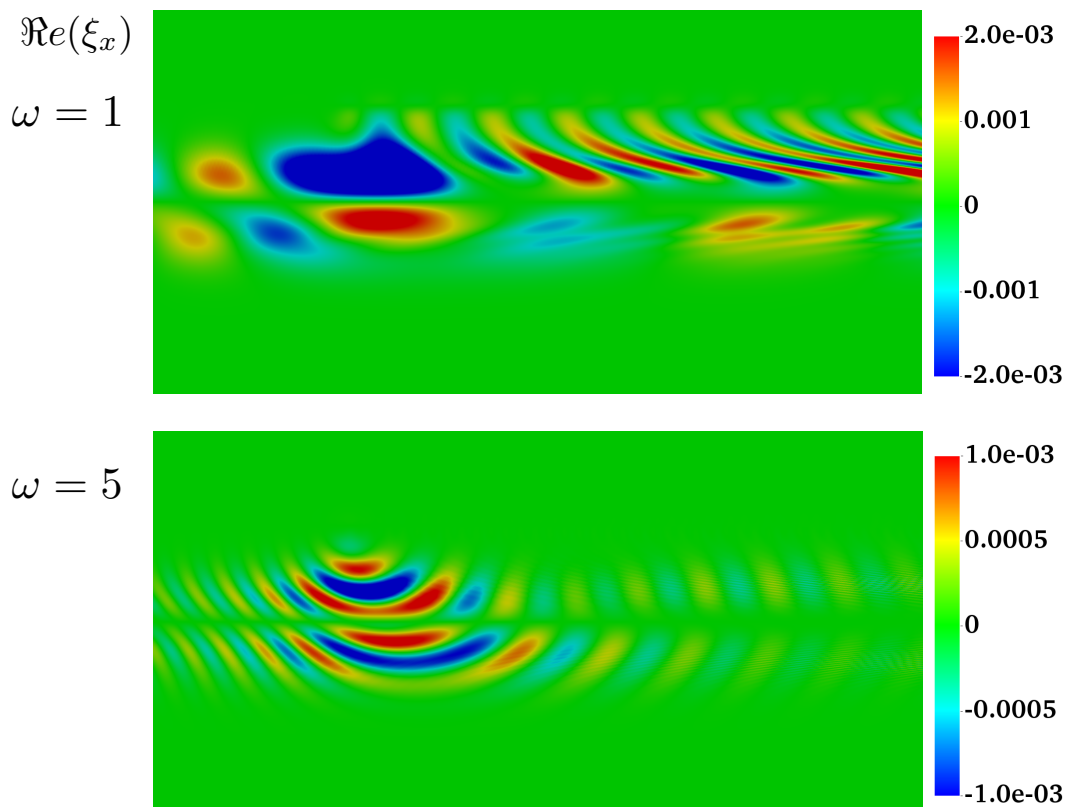


FIGURE 7.8 – Profil et isovalues du jet gaussien utilisé (en haut), et de la source $\Re(f)$ (en bas).

de très faible amplitude et ne sont plus visibles. La longueur d'onde caractéristique de ξ est alors la même que celle de φ . Au fur et à mesure que la fréquence augmente, les stries hydrodynamiques sont de plus en plus faible amplitude, tout en oscillant de plus en plus, ce qui les rend très compliquées à calculer numériquement, c'est pourquoi le paramètres de stabilisation SUPG δ doit être pris le plus petit possible tant que l'on ne voit pas apparaître d'oscillations parasites polluant la solution.

FIGURE 7.9 – Isovaleurs de $\Re(\varphi_x)$ pour deux pulsations : $\omega = 1$ et $\omega = 5$.FIGURE 7.10 – Isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ pour deux pulsations : $\omega = 1$ et $\omega = 5$.

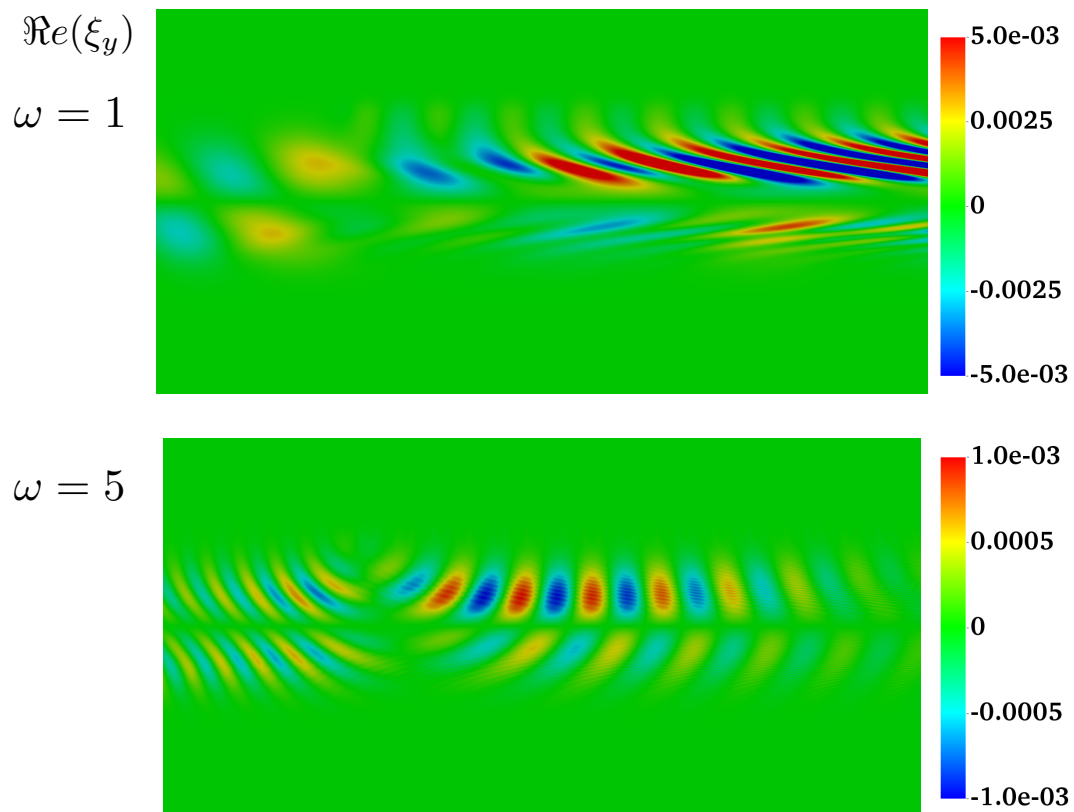


FIGURE 7.11 – Isovaleurs de $\Re(\xi_y)$ pour deux pulsations : $\omega = 1$ et $\omega = 5$.

Pour le cas de plus haute fréquence, à $\omega = 10$, les conclusions précédentes sont toujours valables, c'est pourquoi l'on souhaite présenter une petite variation dans le cas de calcul. Nous ajoutons une paroi rigide sur le bord supérieur du domaine, mimant la présence d'un obstacle comme l'aile de l'avion par exemple. Nous représentons sur la figure 7.12 les isovaleurs de $\Re(\varphi)$ (en haut) et de $\Re(\xi_x)$ (en bas), et nous matérialisons le jet par deux lignes bleues horizontales. On constate ainsi une réflexion sur le bord rigide de l'onde acoustique φ . L'inconnue ξ est bien localisée dans le jet comme attendu, là où le rotationnel de l'écoulement n'est pas négligeable, et le cas est trop haute fréquence pour que les stries hydrodynamiques soient visibles. On remarque également que l'inconnue ξ est un ordre de grandeur inférieur à φ . En effet, nous verrons également sur d'autres exemples, que ξ a tendance à décroître lorsque la fréquence augmente.

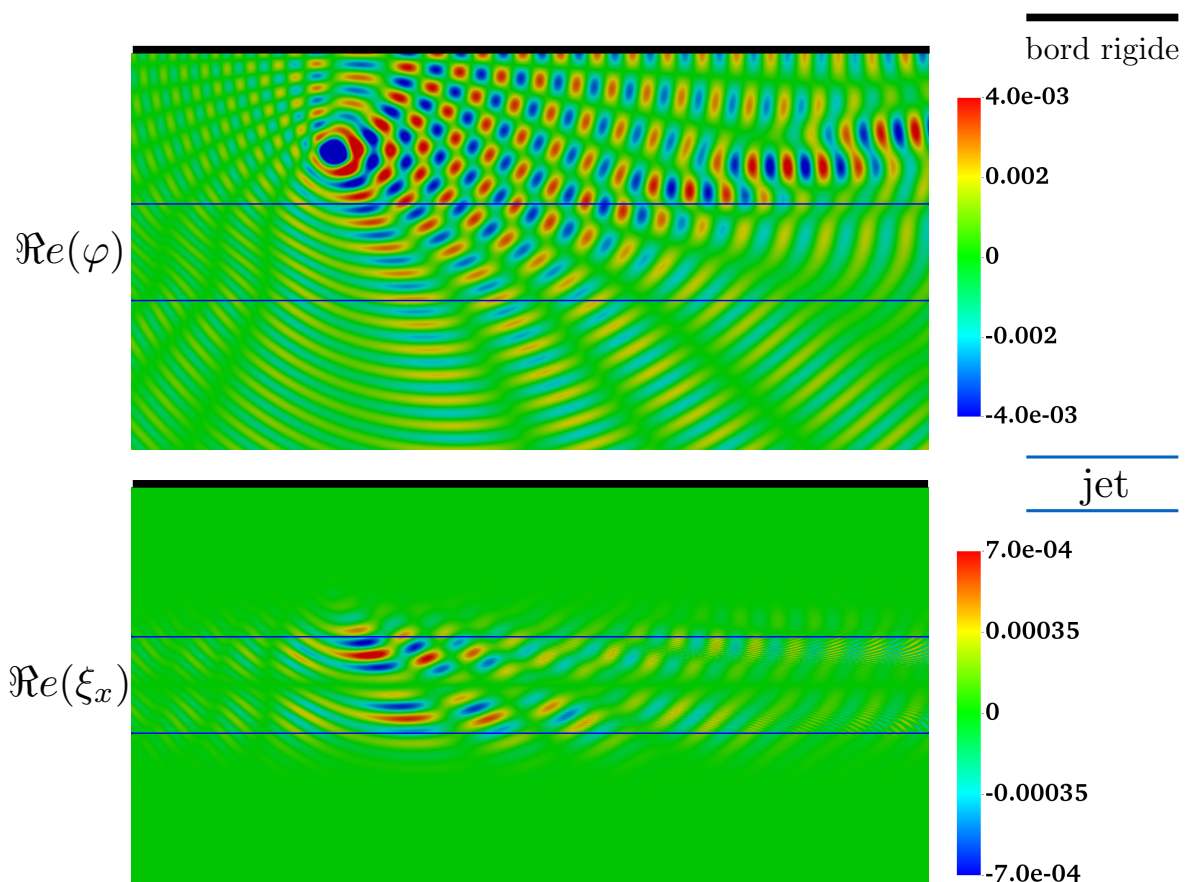


FIGURE 7.12 – Isovaleurs de $\Re(\varphi)$ et de $\Re(\xi_x)$ pour $\omega = 10$ en présence d'un bord rigide (modèle d'aile d'avion).

7.3.2 Écoulement localement rotationnel dans un guide

Le cas que nous présentons dans cette sous-section est un écoulement qui est perturbé localement par une déformation du guide d'onde dans lequel il circule. Il est uniforme avant la déformation, et redevient uniforme après. Nous avons présenté cet écoulement lors de l'illustration numérique de l'équation de transport harmonique, voir 5.2.2. Rappelons ici que la vitesse \mathbf{v}_0 de cet écoulement est obtenue à partir d'une fonction de courant ψ_0 par

$$\mathbf{v}_0 := \text{rot}(\psi_0 \mathbf{e}_z).$$

Cela fournit une vitesse à divergence nulle et nous prenons ρ_0 constant égal à 1 afin de satisfaire au moins l'une des équations d'Euler stationnaire : $\text{div}(\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0$. L'autre équation d'Euler, $\rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_0 = 0$, n'est elle cependant pas satisfaite. Ainsi, contrairement au cas des écoulements cisailés, celui-ci n'est pas une parfaite solution des équations qui normalement régissent l'écoulement porteur, mais cela ne nous empêche pas de nous en servir comme modèle. ψ_0 est choisi ici sous la forme

$$\psi_0(x, y) := U_\infty y - \eta \frac{e^{-x^2}}{1+y^2} \cos(ay - x),$$

d'où non déduisons la vitesse

$$\mathbf{v}_0(x, y) = U_\infty \mathbf{e}_x + \eta \frac{e^{x^2}}{1+y^2} \begin{pmatrix} a \sin(ay - x) + \frac{2y}{1+y^2} \cos(ay - x) \\ -2x \cos(ay - x) + \sin(ay - x) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, cet écoulement s'interprète comme une perturbation de l'écoulement uniforme $U_\infty \mathbf{e}_x$ localement autour de $(0, 0)$. Comme pour l'équation de transport harmonique seule, le domaine est défini comme la troncature d'un tube de courant contenant la zone de perturbation :

$$\Omega := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -L_x < x < L_x \text{ et } \psi_0^- < \psi_0(x, y) < \psi_0^+ \right\},$$

auquel on adjoint des bandes PML en bout de guide, le largeur l_x .

Cas 1. Nous allons dans un premier temps nous placer dans un cas beaucoup moins perturbé que celui utilisé pour l'équation de transport harmonique seule. Nous choisissons le jeu de paramètres suivants :

- $U_\infty = 0.2$,
- $\eta = 0.14$,
- $a = 1$,
- $L_x = 3.5$ et $l_x = 1.5$ (PML).

L'écoulement et le domaine ainsi obtenus sont représentés sur la figure 7.13. Sur la figure du haut, nous traçons le module de la vitesse. On voit alors que l'écoulement entre dans le guide en étant uniforme, accélère avant de passer la bosse, la contourne en ralentissant, pour enfin retrouver sa vitesse uniforme en sortie du guide. Nous avons également représenté les bandes PML, les bords rigides du guide, ainsi que quelques lignes de courant, en noir. Nous présenterons ensuite les résultats de calculs dans la zone d'intérêt seulement. Sur la figure du bas de 7.13, nous traçons les isovalues du temps de parcours depuis le bord entrant en suivant les lignes de courant, pour donner une idée du cisaillement qui se crée dans le

domaine. La source acoustique f utilisée est représentée plongée dans les lignes de courant, en blanc, sur la figure 7.14.

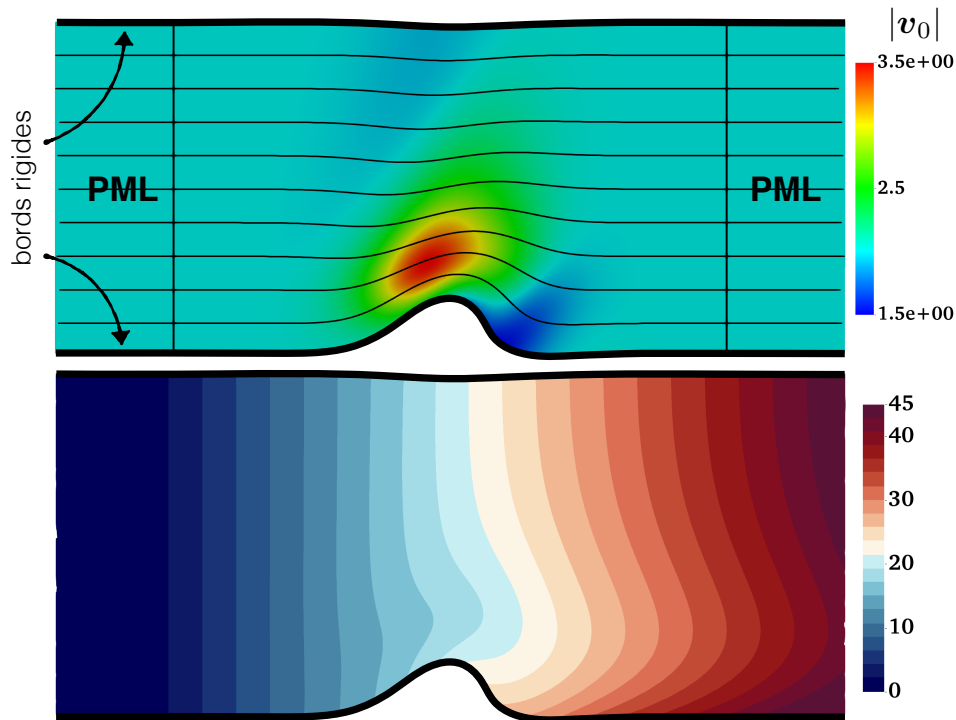


FIGURE 7.13 – Cas 1 – En haut, les isovaleurs de la norme de la vitesse $(x, y) \mapsto |v_0(x, y)|$ et lignes de courant en noir. En bas, les isovaleurs du temps de parcours le long des lignes de courant.

Comme nous savons que l'inconnue hydrodynamique sera créée par interaction entre l'onde acoustique et le rotationnel de l'écoulement, il est intéressant de voir que le rotationnel de cet écoulement est bien localisé au voisinage de la bosse. Nous avons représenté sur la figure 7.15 les isovaleurs du rotationnel.

Nous traçons, pour trois pulsations $\omega = 2$, $\omega = 5$ et $\omega = 10$ les isovaleurs de $\Re\epsilon(\varphi)$ sur la figure 7.16, ainsi que quelques lignes de courant en noir. On observe alors bien les réflexions sur les parois du guide, en particulier sur la bosse, qui renvoie en amont une partie des ondes. Les stries hydrodynamiques ne sont pas visibles ici directement sur φ , très légèrement à la plus basse fréquence $\omega = 1$, et plus du tout pour les fréquences plus élevées. L'effet Doppler est bien sûr très visible dans tous les cas, les ondes remontant l'écoulement voient leur longueur d'onde diminuer.

Sur la figure 7.17, nous traçons les isovaleurs de $\Re\epsilon(\xi_x)$ (colonne de droite) et de $\Re\epsilon(\xi_y)$ (colonne de gauche), aux trois pulsations $\omega = 1$, $\omega = 5$ et $\omega = 10$. On constate ce que nous avons déjà commencé à remarquer dans le cas des jets gaussiens, l'inconnue hydrodynamique ξ diminue en amplitude lorsque la fréquence augmente. Des stries hydrodynamiques sont transportées le long des lignes de courant lorsqu'elles ont été créées en interactions avec φ dans une zone rotationnelle, ici proche de la source. La longueur d'onde de ξ est plus petite que celle de φ , en accord avec ce que prédisent les estimations locales énoncées. Il est notable qu'à la plus haute fréquence, ces stries ne sont plus visibles, bien que présentes, mais de très faible amplitude. Le cisaillement de cet écoulement étant modéré, elles ne sont pas

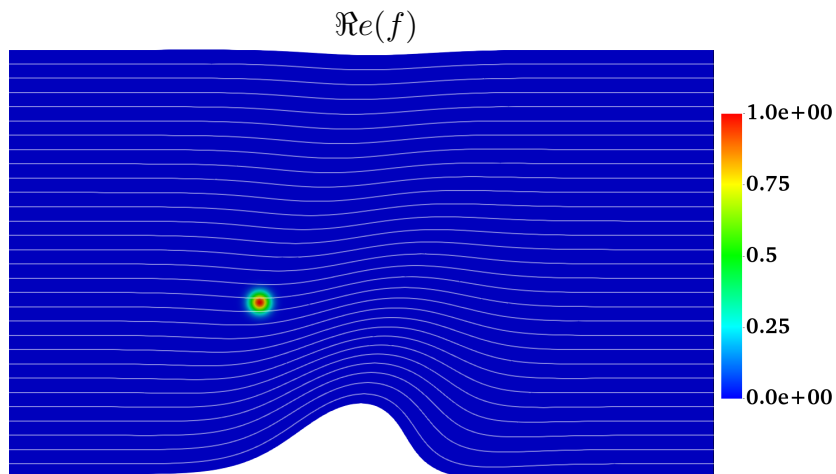


FIGURE 7.14 – Cas 1 – Isovaleurs de la source f au second membre du couplage de Goldstein et lignes de courant (blancs).

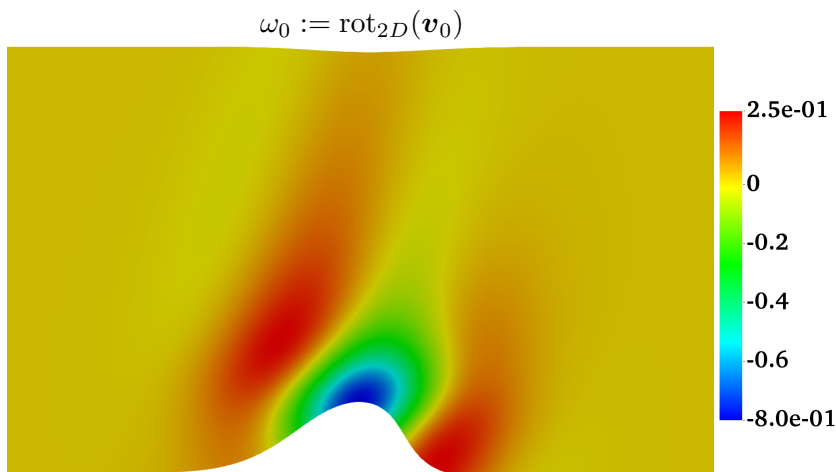


FIGURE 7.15 – Cas 1 – Isovaleurs du rotationnel de l'écoulement : $(x, y) \mapsto \omega_0(x, y) = \partial_x v_{0,x}(x, y) - \partial_y v_{0,x}(x, y)$.

très penchées dans ce cas, et ainsi, la plus petite taille caractéristique de variation spatiale est celle de la longueur d'onde de ξ .

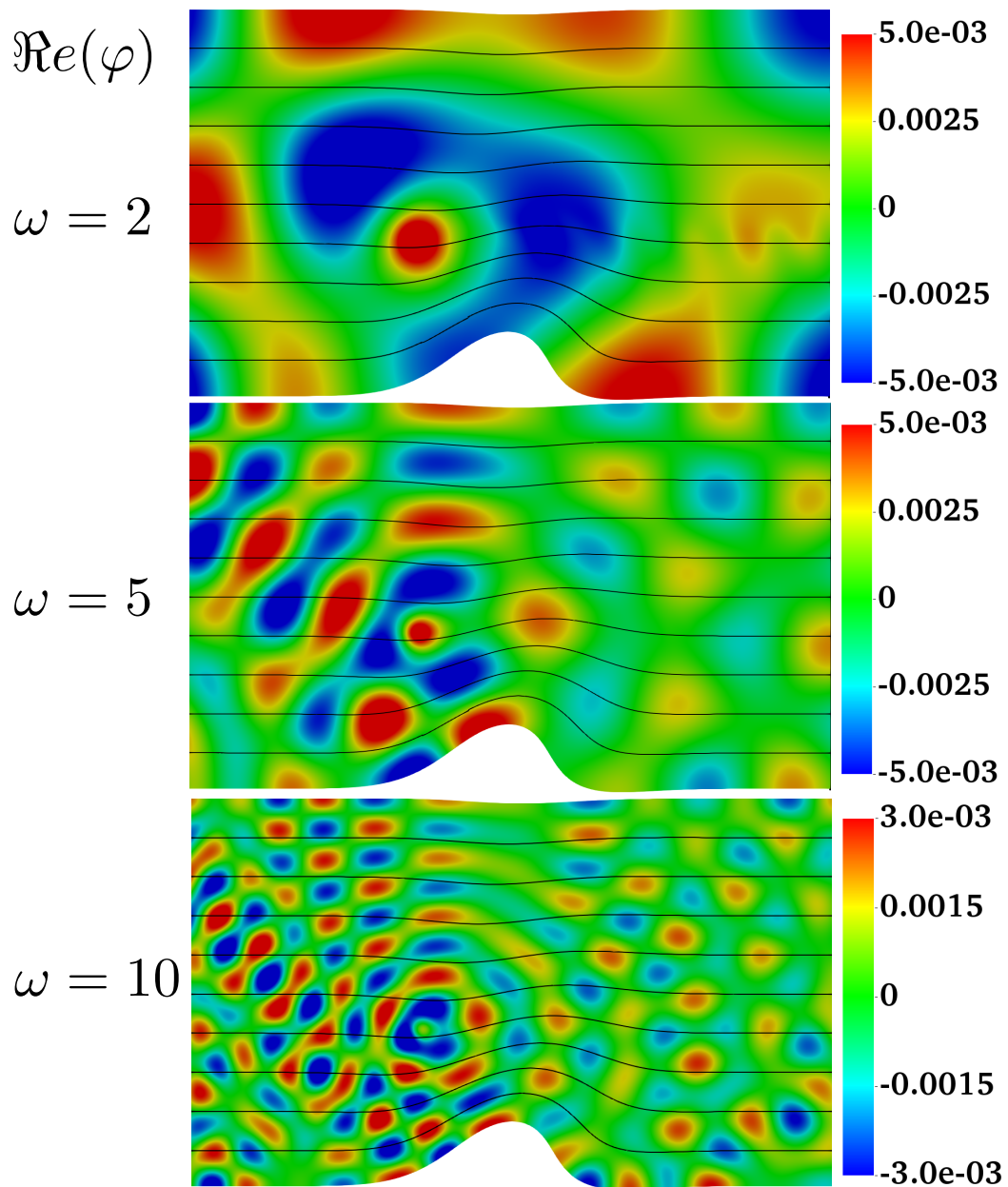


FIGURE 7.16 – Cas 1 – Isovaleurs de $\Re(\varphi)$ pour plusieurs valeurs de pulsations, de haut en bas : $\omega = 2, 5, 10$.

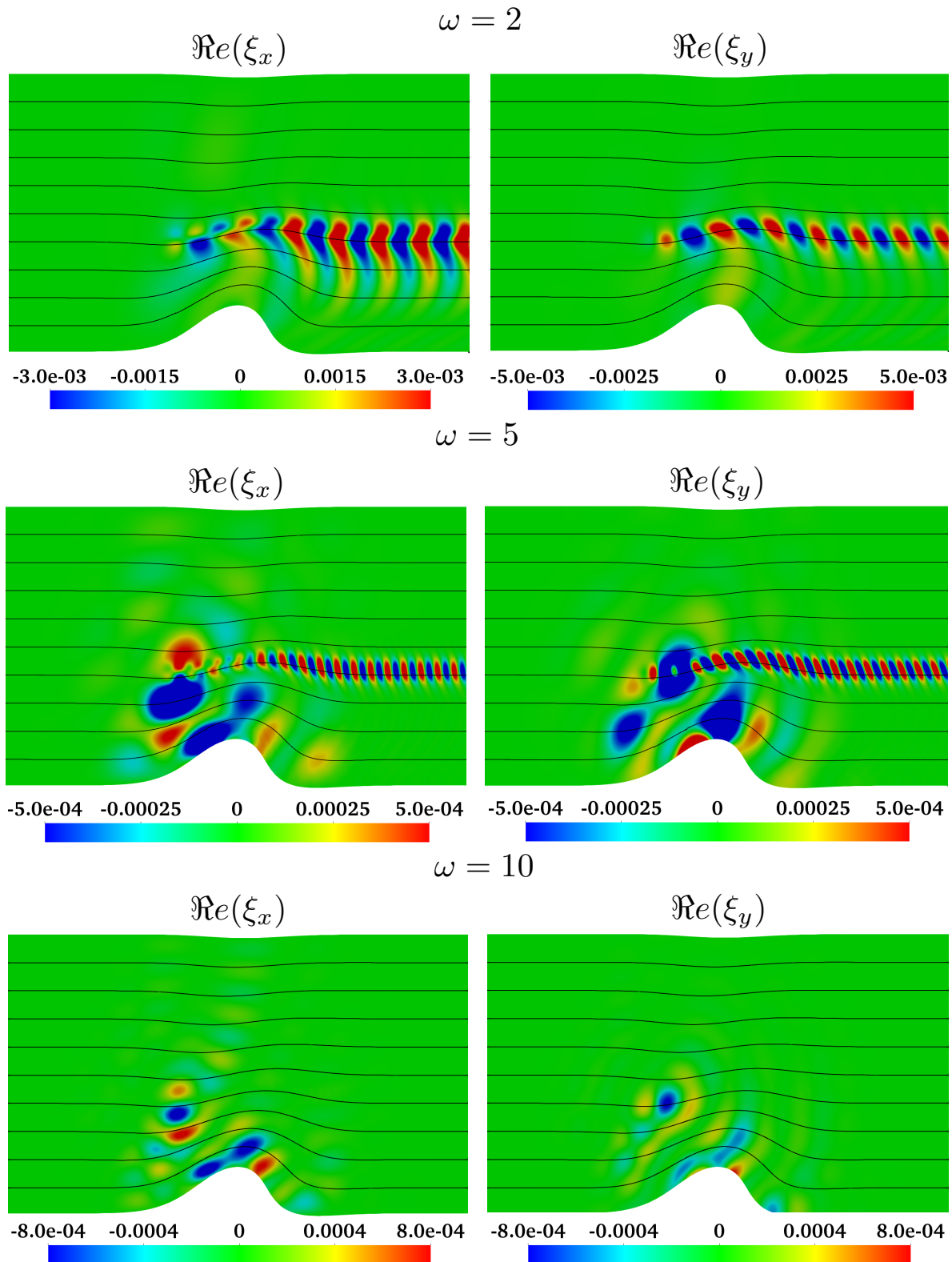


FIGURE 7.17 – Cas 1 – Isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ (gauche) et de $\Re(\xi_y)$ (droite) pour plusieurs valeurs de pulsations, de haut en bas : $\omega = 2, 5, 10$.

Cas 2. Revenons à présent au cas, plus tortueux, que nous avons exposé lors de l'étude numérique de l'équation de transport harmonique. Ce cas correspond au jeu de paramètres suivant :

- $U_\infty = 0.2$,
- $\eta = 0.4$,
- $a = 1.5$,
- $L_x = 3.5$ et $l_x = 1.5$ (PML).

Comme précédemment, nous représentons l'écoulement et le domaine sur la figure 7.18, avec en haut, les isovalues du module de la vitesse v_0 de l'écoulement, les bandes PML en entrée et sortie du guide ainsi que quelques lignes de courant en noir. En bas, nous représentons les isovalues du temps de parcours le long des lignes de courant, en partant du bord entrant. Comme précédemment, on constate bien qu'il s'agit d'un écoulement domaine remplissant, plus cisailé que le cas précédent. Il est intéressant de noter qu'il n'entre pas dans le cadre « directionnel », car l'écoulement revient en arrière après la bosse et n'a donc pas de direction privilégiée. Le maillage doit être choisi très fin pour pouvoir suivre la géométrie de cet écoulement dont les changements de directions sont assez forts. Sur la figure 7.19, nous représentons la source utilisée, encore placée au dessus de la bosse, dans une zone rotationnelle de l'écoulement. Le rotationnel est représenté sur la figure 7.20, toujours localisé autour de la perturbation du guide, il est beaucoup plus intense que dans le cas précédent (cas 1).

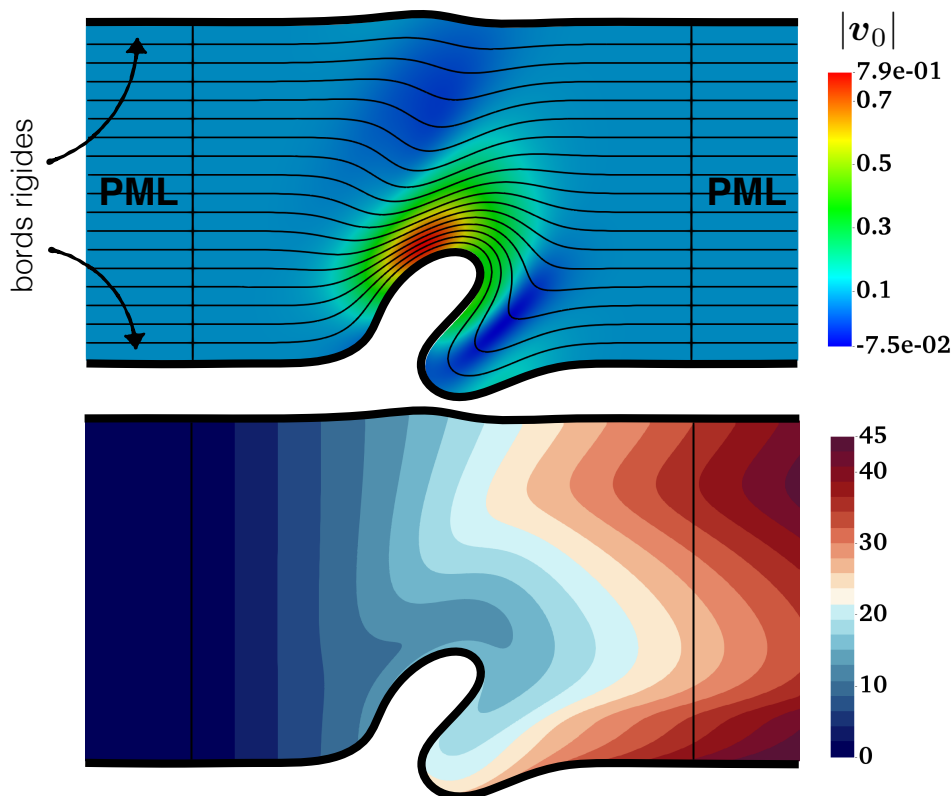


FIGURE 7.18 – Cas 2 – En haut, les isovalues de la norme de la vitesse $(x, y) \mapsto |v_0(x, y)|$ et les lignes de courant en noir. En bas, les isovalues du temps de parcours le long des lignes de courant.

Sur la figure 7.21, nous représentons comme pour le cas précédent, les isovalues de $\Re(\varphi)$ aux différentes pulsations d'étude, $\omega = 2$, $\omega = 5$ et $\omega = 10$. Le rotationnel de ce cas

étant bien plus prononcé, les stries hydrodynamiques sont plus marquées sur φ pour les deux pulsations $\omega = 2$ et $\omega = 5$, mais disparaissent à la plus haute pulsation $\omega = 10$.

Sur la figure 7.22, nous représentons les isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ et $\Re(\xi_y)$ aux trois pulsations d'étude. Nous constatons encore une fois que l'amplitude de ξ diminue lorsque la fréquence augmente. Les stries qui sont convectées le long de l'écoulement sont plus visibles à basse fréquence et disparaissent à la plus haute pulsation. Il est à noter que le paramètres de stabilisation peut être délicat à choisir, trop grand, nous avons vu qu'il peut trop dissiper la solution, mais trop petit, la solution numérique devient instable, comme montré sur la figure 7.23, pour le choix de $\delta = 10^{-4}$.

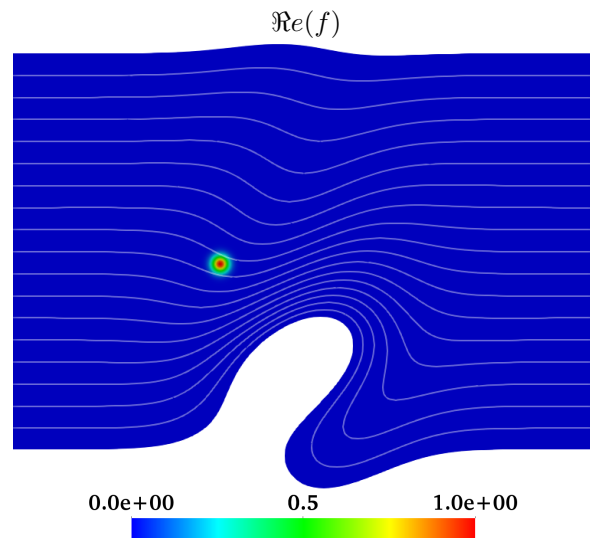


FIGURE 7.19 – Cas 2 – Isovaleurs de la source f au second membre du couplage de Goldstein.

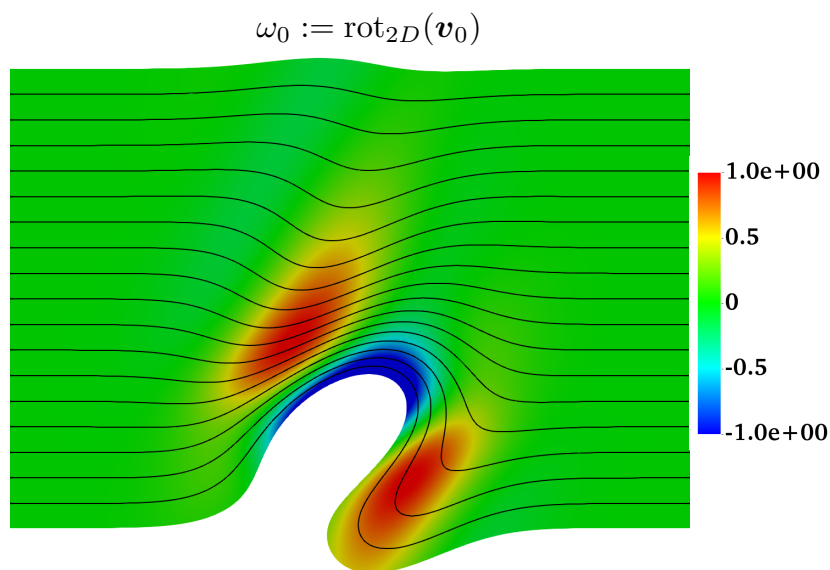


FIGURE 7.20 – Cas 2 – Isovaleurs du rotationnel de l'écoulement $(x, y) \mapsto \omega_0(x, y) = \partial_x v_{0,y}(x, y) - \partial_y v_{0,x}(x, y)$.

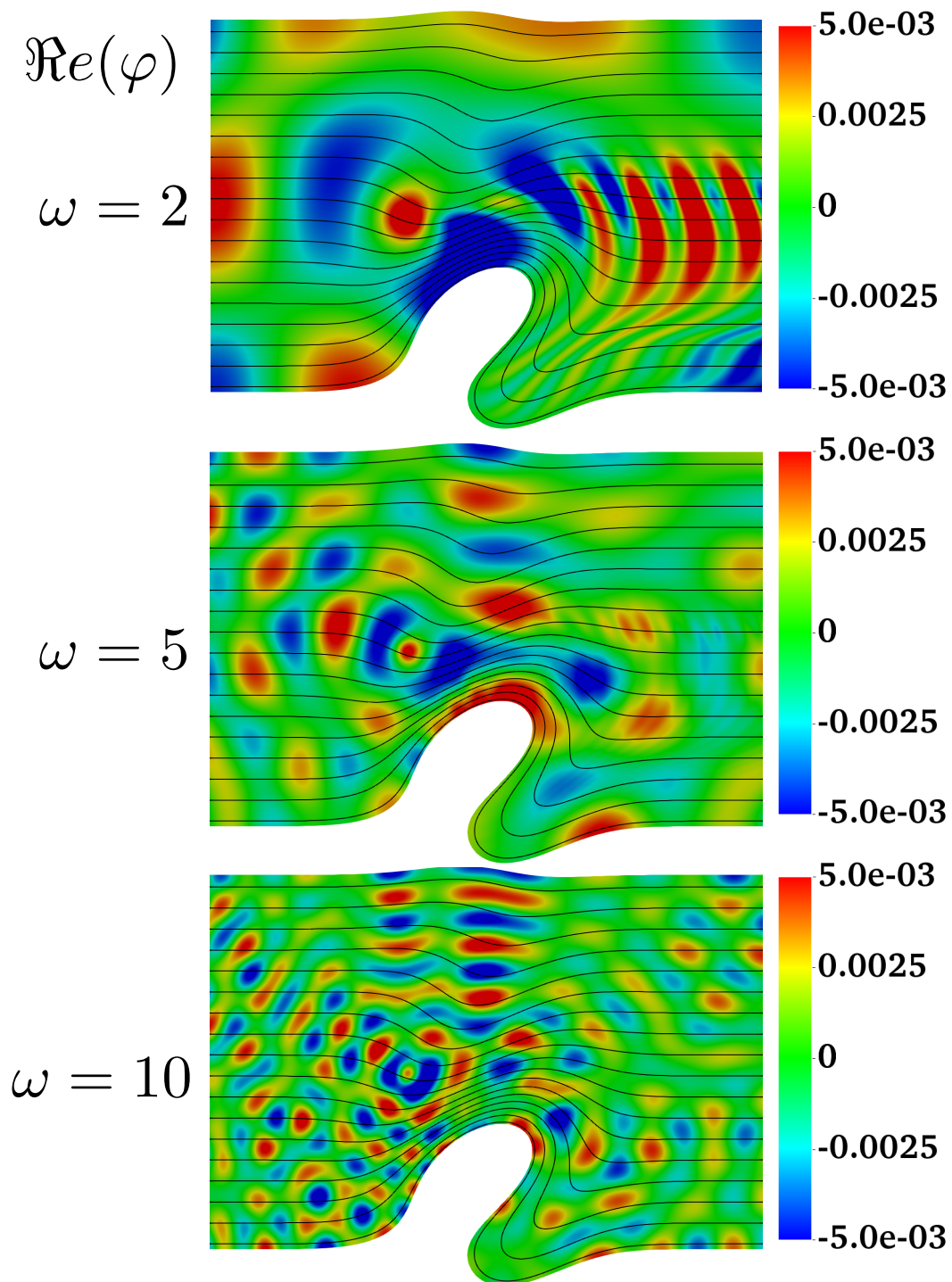


FIGURE 7.21 – Cas 2 – Isovaleurs de $\Re(\varphi)$ pour plusieurs valeurs de pulsations, de haut en bas : $\omega = 2, 5, 10$.

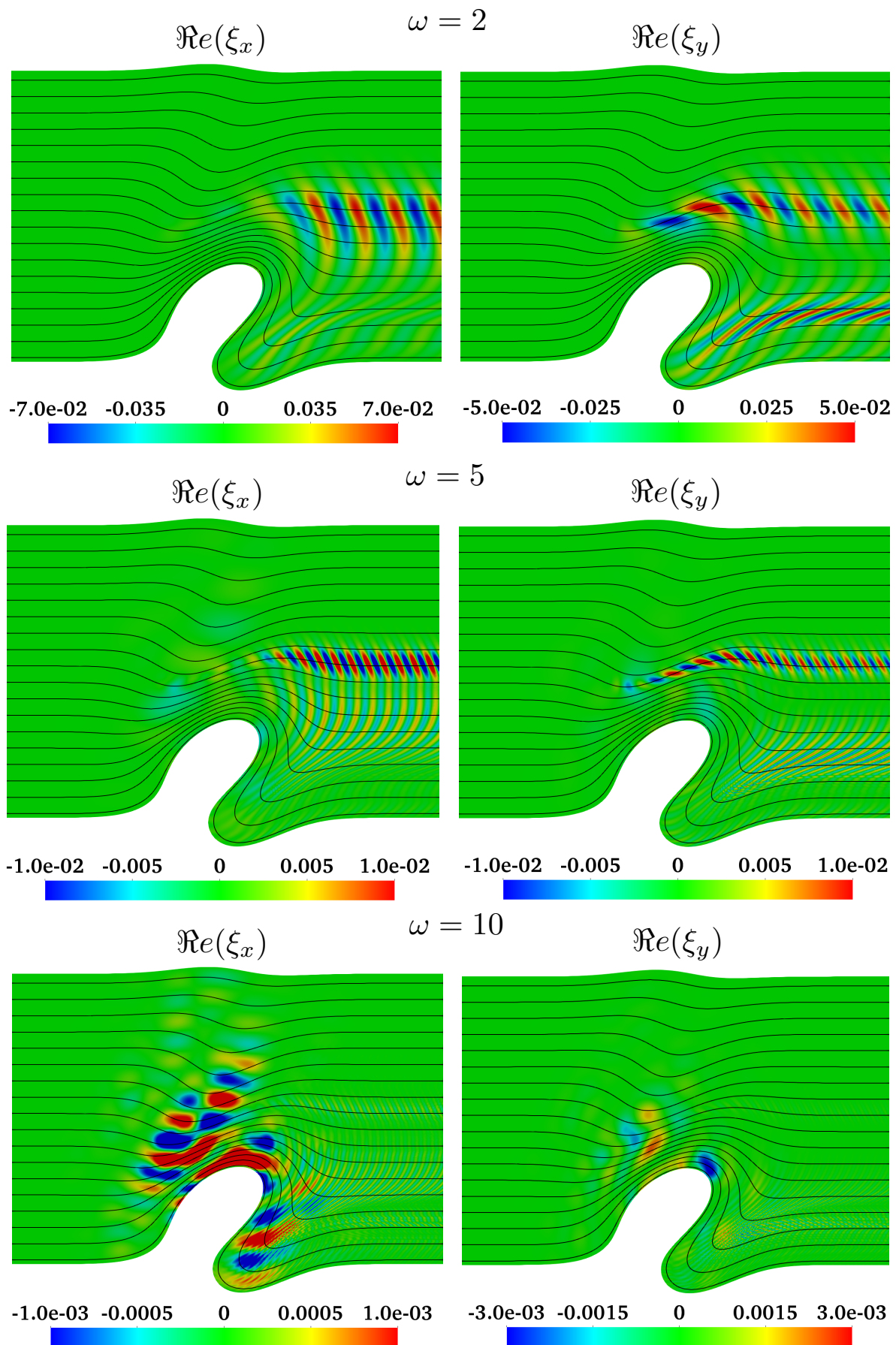


FIGURE 7.22 – Cas 2 – Isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ (gauche) et de $\Re(\xi_y)$ (droite) pour plusieurs valeurs de pulsations, de haut en bas : $\omega = 2, 5, 10$.

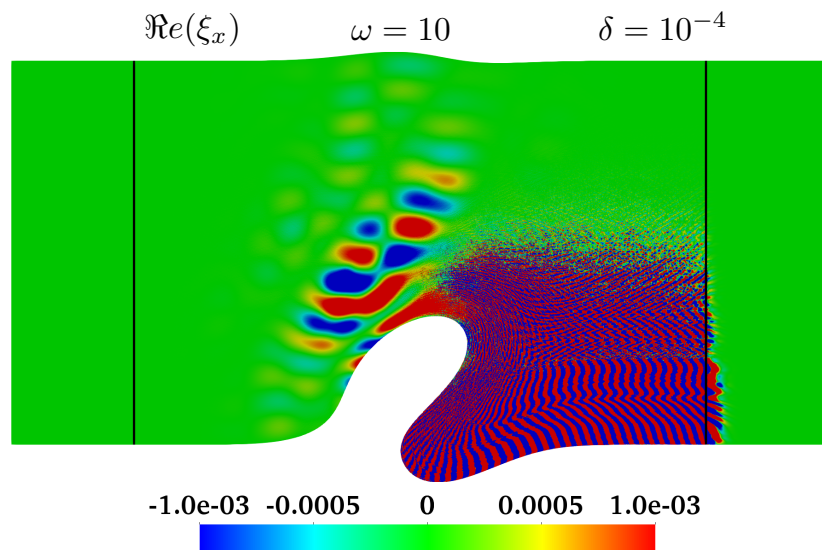


FIGURE 7.23 – Cas 2 – Isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ pour $\delta = 10^{-4}$ trop petit : instabilités.

7.4 Comparaison avec le modèle potentiel

Pour finir ce chapitre d'illustrations numériques, nous souhaitons comparer les résultats obtenus par la résolution des équations de Goldstein à ceux obtenus en utilisant le modèle potentiel. La formulation de Goldstein se réduit à l'équation d'Helmholtz convectée lorsque l'écoulement est potentiel et lorsque qu'il n'y a pas de source de vorticité. Nous comparons dans cette section les équations de Goldstein et d'Helmholtz convectée lorsque l'écoulement est un jet gaussien, comme présenté en à la sous-section 7.3.1 :

$$v_0(x, y) = v_0(y)e_x = v_\infty e_x + \mu e^{-\frac{(y-y_m)^2}{R^2}} e_x.$$

  moins d'être constant, pour $\mu = 0$, cet écoulement ne peut pas être potentiel car rappelons que sa vorticité vaut

$$\omega_0(x, y) = \omega_0(y)e_z = v'_0(y)e_z = -2\frac{y-y_m}{R^2}\mu e^{-\frac{(y-y_m)^2}{R^2}} e_z.$$

Ainsi, pour un tel jet, ou tout autre écoulement cisailé, le modèle potentiel n'est effectivement qu'un « modèle », une approximation des équations de Goldstein (ou d'Euler linéarisées). Nous nous attendons à ce que le modèle potentiel soit proche des équations de Goldstein lorsque l'écoulement n'est pas trop cisailé.

Nous étudierons alors deux cas de jets gaussiens, ne se différenciant que par leur largeur caractéristique, et donc par leur rotationnel. Les paramètres communs des deux cas traités sont les suivants :

- Pulsation : $\omega \in \{2, 5, 10\}$.
- Domaine d'intérêt : $\Omega :=]0, 20[\times]0, 10[$.
- PML : $l_x = l_y = 2$ et $\alpha_x = \alpha_y = 2 - 2i$.
- Paramètre SUPG : $\delta = 10^{-3}$.
- Source : $(x_s, y_s) = (5, 5)$ et $r_s = 0.2$.

Pour les jets, le cas 1 (plus large) est le jet de plus faible rotationnel et le cas 2 (plus resserré) celui de plus fort rotationnel, dont les paramètres sont :

- Cas 1 et 2 : $v_\infty = 0.3$, $\mu = 0.3$
- Cas 1 : $R = 1$.
- Cas 2 : $R = 0.5$.

Pour chacun de ces deux cas, il est intéressant d'analyser l'influence de la fréquence, car nous avons vu qu'elle joue un rôle important dans l'amplitude de l'inconnue ξ ainsi que dans la présence de stries hydrodynamiques, sur l'inconnue ξ d'une part, mais également sur φ à plus basse fréquence. Nous étudierons ainsi trois pulsations, $\omega = 2$, $\omega = 5$ et $\omega = 10$.

Dans un second temps, nous comparerons les équations de Goldstein et le modèle potentiel du point de vu des grandeurs physiques, la pression et la vitesse acoustique, qui sont nos grandeurs d'intérêt.

Cas du jet 1 : faible rotationnel

Le premier cas correspond au jet le moins « resserré », et donc de plus faible rotationnel. Commençons par représenter sur la figure 7.24 le profil de vitesse de l'écoulement ainsi que les isovaleurs de v_0 . La vitesse à l'infini dans la direction e_y vaut bien 0.3, qui est aussi son Mach car $\rho_0 = 1$, et au coeur du jet, la vitesse est de 0.6. Le rotationnel de l'écoulement est représenté sur la figure 7.25. Il est négligeable hors du jet, et passe par un maximum de 0.26 en valeur absolue au plus fort du cisaillement.

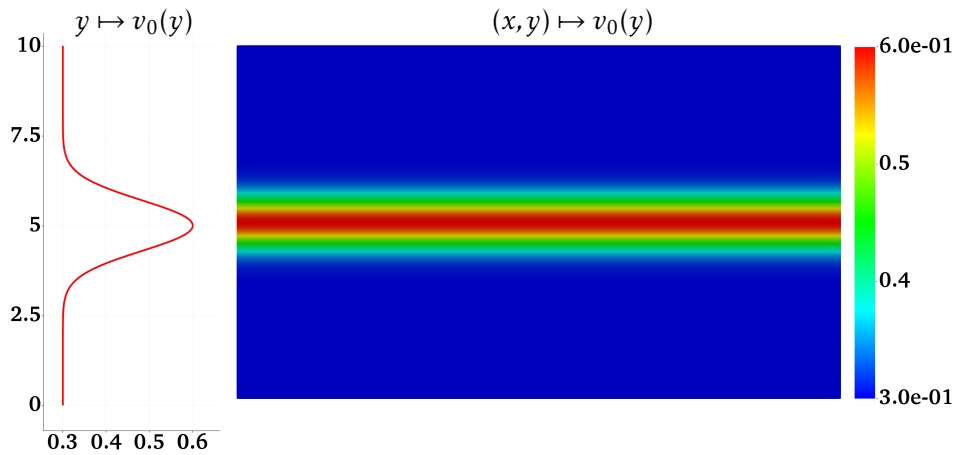


FIGURE 7.24 – Jet Gaussien 1 : profil de l'écoulement du jet gaussien 1 (à gauche) et isovaleurs de $(x, y) \mapsto v_0(y)$ (à droite).

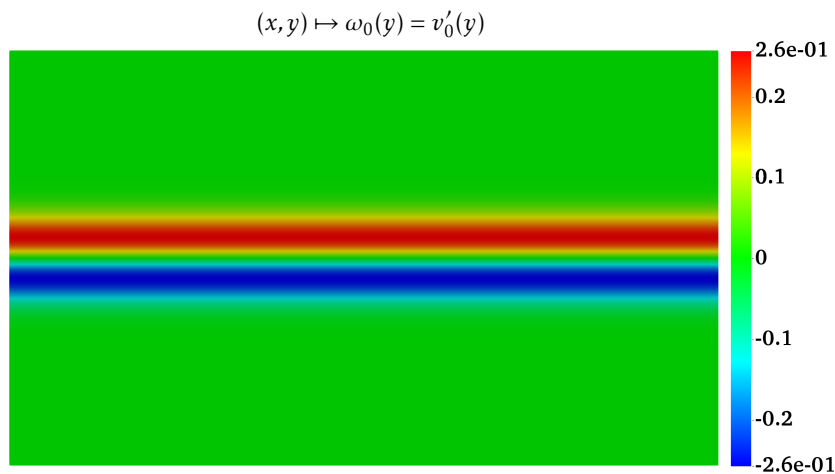


FIGURE 7.25 – Jet Gaussien 1 : isovaleurs du rotationnel, $\omega_0(x, y) = v'_0(y)$.

Commençons par l'analyse de la plus basse pulsation, à $\omega = 2$. Nous traçons sur la figure 7.26 les isovaleurs de $\Re(\varphi)$, obtenu en résolvant les équations de Goldstein (en haut), et par le modèle potentiel (en bas). Avec le couplage de Goldstein, on observe à cette fréquence la présence des stries hydrodynamiques, localisées dans le jet, déjà commentées dans les illustrations numériques précédentes. On constate que ce phénomène n'est pas pris en compte par le modèle potentiel, et c'est d'ailleurs en partie pour cela que nous identifions ces stries comme étant d'origine « hydrodynamiques », en plus de leur longueur d'onde caractéristique due à la présence du couplage avec l'équation de transport harmonique. L'effet Doppler est

quant à lui bien pris en compte par le modèle potentiel et peu de différences sont visibles à l'extérieur du jet, dans la partie rayonnante de l'onde. Les stries hydrodynamiques ne modifient donc pas de façon significative l'onde rayonnée hors du jet dans ce cas là et restent cantonnées à la zone rotationnelle du jet.

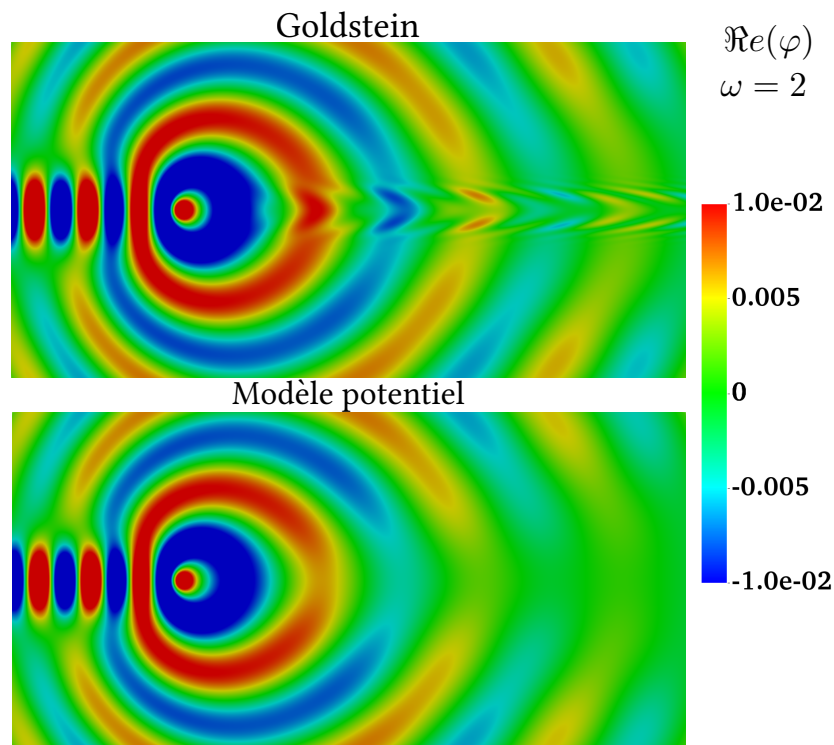


FIGURE 7.26 – Jet Gaussien 1 : comparaison entre la formulation de Goldstein et le modèle potentiel pour $\Re(\varphi)$ à la pulsation : $\omega = 2$.

Il est intéressant de représenter l'inconnue hydrodynamique, ce que nous faisons sur la figure 7.27, avec en haut $\Re(\xi_x)$ et en bas $\Re(\xi_y)$. Nous constatons que l'amplitude de ξ augmente légèrement avec la distance à la source dans la direction aval de l'écoulement. Ce phénomène était déjà observé lors de la résolution de l'équation de transport harmonique seule et est mis en évidence en traçant sur la figure 7.28 la courbe de la fonction $x \mapsto \Re(\xi_x(x, y = 5.3))$ représentant ξ_x le long d'une ligne de courant là où le rotationnel de l'écoulement est au plus fort.

Passons à la pulsation intermédiaire $\omega = 5$ et traçons sur la figure 7.29 les isovaleurs de $\Re(\varphi)$ obtenu par les équations de Goldstein et par le modèle potentiel. À cette pulsation, les stries hydrodynamiques ne sont déjà plus visibles et le modèle potentiel donne une solution très proche de celle de Goldstein. Pour mieux comprendre la contribution de ξ , nous traçons de même que précédemment, sur la figure 7.30, les isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ et de $\Re(\xi_y)$. Nous constatons que l'amplitude de ξ a effectivement diminué, toute chose égale par ailleurs. Nous continuons d'observer le phénomène d'amplification de ξ en aval de la source, en traçant la même courbe de la fonction $x \mapsto \Re(\xi_x(x, y = 5.3))$ sur la figure 7.31

Terminons par la plus haute pulsation, à $\omega = 10$. Comme précédemment, nous commençons par comparer les isovaleurs de $\Re(\varphi)$ pour les équations de Goldstein et le modèle

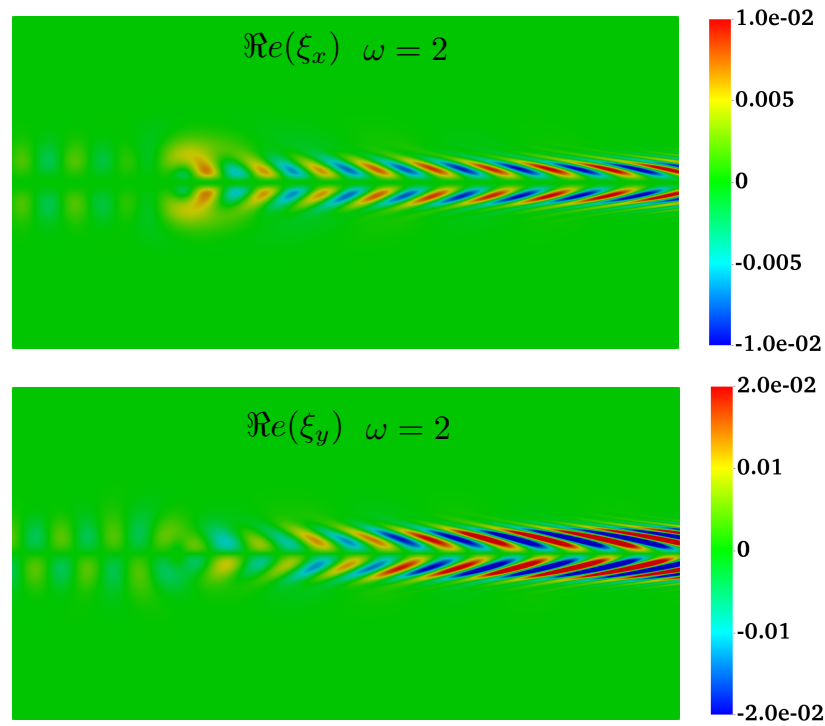


FIGURE 7.27 – Jet Gaussien 1 : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ et $\Re(\xi_y)$ à la pulsation : $\omega = 2$.

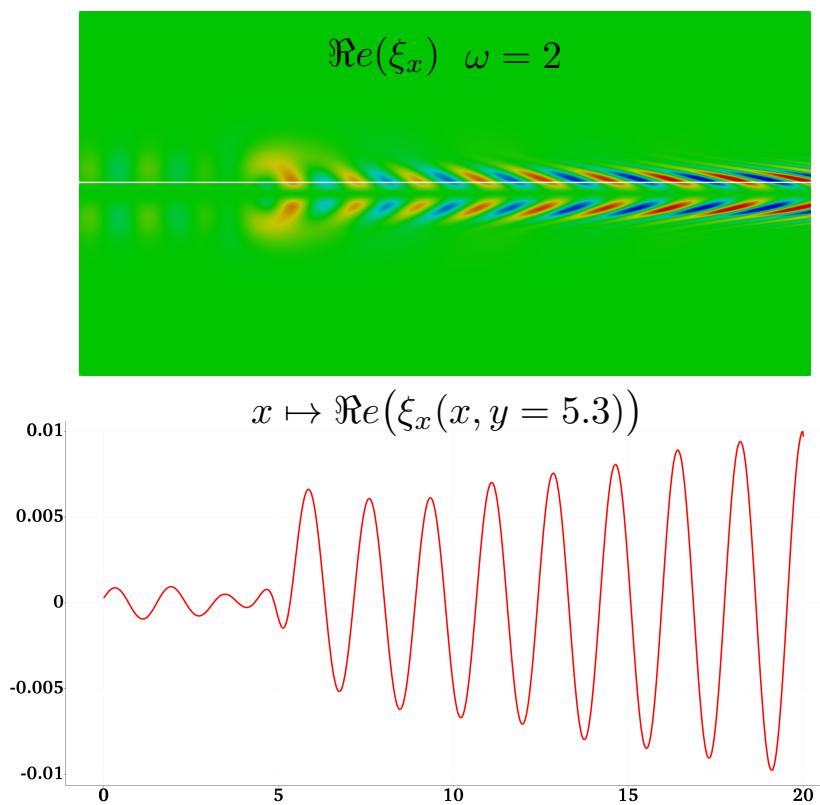


FIGURE 7.28 – Jet Gaussien 1 : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ en haut et courbe $y \mapsto \Re(\xi_x(x, y = 5.3))$, à la pulsation : $\omega = 2$.

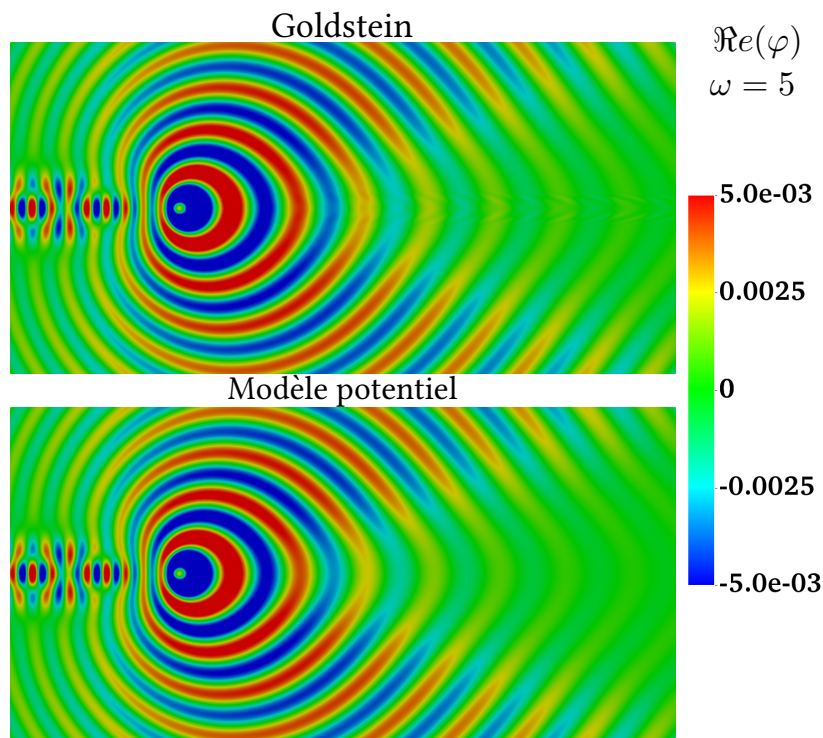


FIGURE 7.29 – Jet Gaussien 1 : comparaison entre la formulation de Goldstein et le modèle potentiel pour $\Re(\varphi)$ à la pulsation : $\omega = 5$.

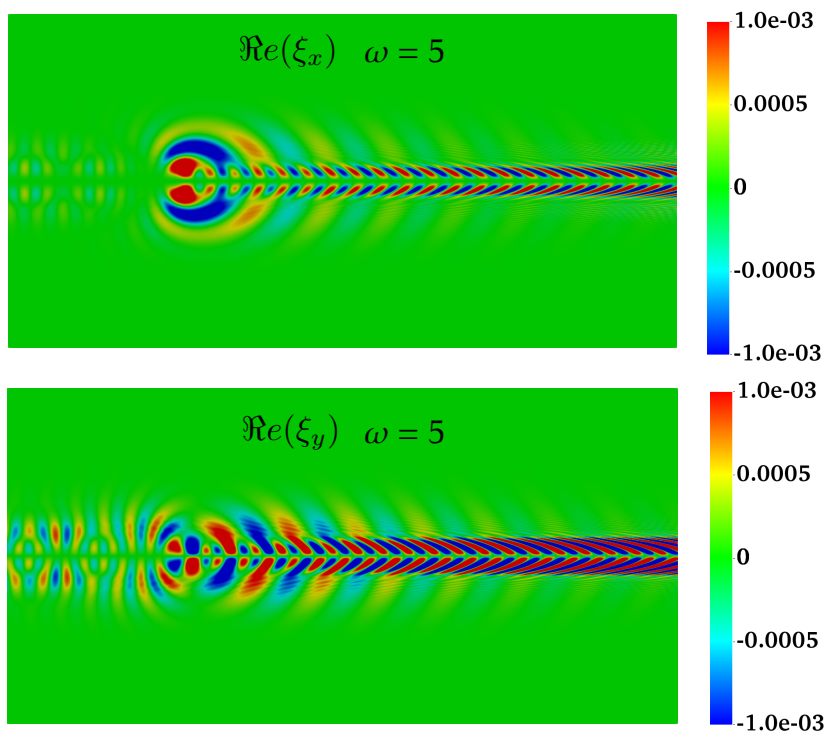


FIGURE 7.30 – Jet Gaussien 1 : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ et $\Re(\xi_y)$ à la pulsation : $\omega = 5$.

potentiel sur la figure 7.32. Tout en gardant le même écoulement, à cette pulsation, les différences entre le modèle potentiel et les équations de Goldstein sont imperceptibles, aucune strie hydrodynamique n'est visible, et les amplitudes rayonnées sont très faibles.

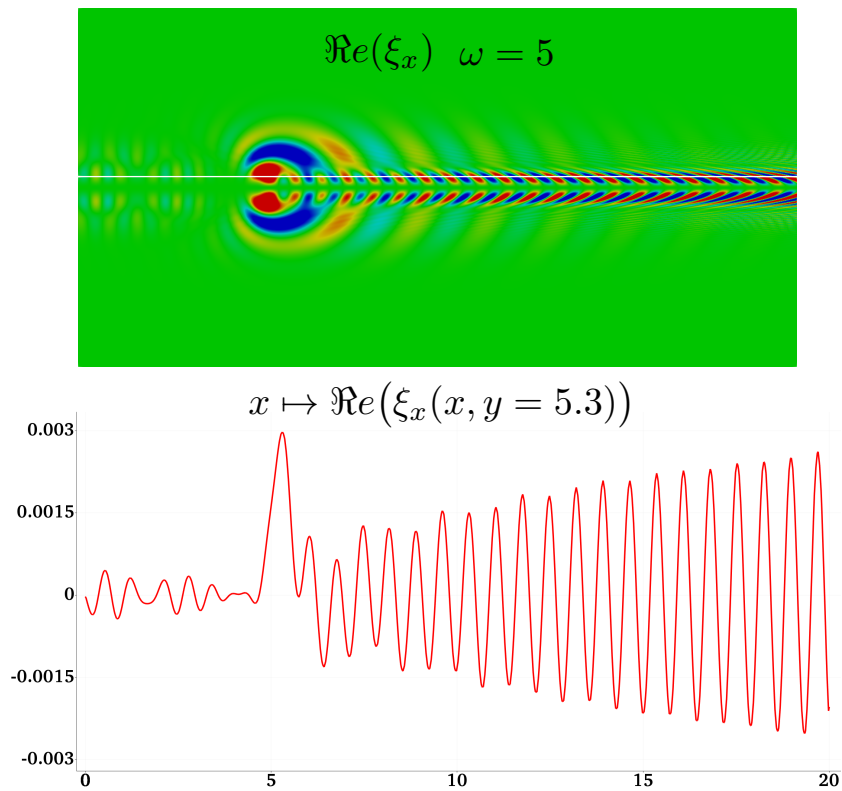


FIGURE 7.31 – Jet Gaussien 1 : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ en haut et courbe $y \mapsto \Re(\xi_x(x, y = 5.3))$, à la pulsation : $\omega = 5$.

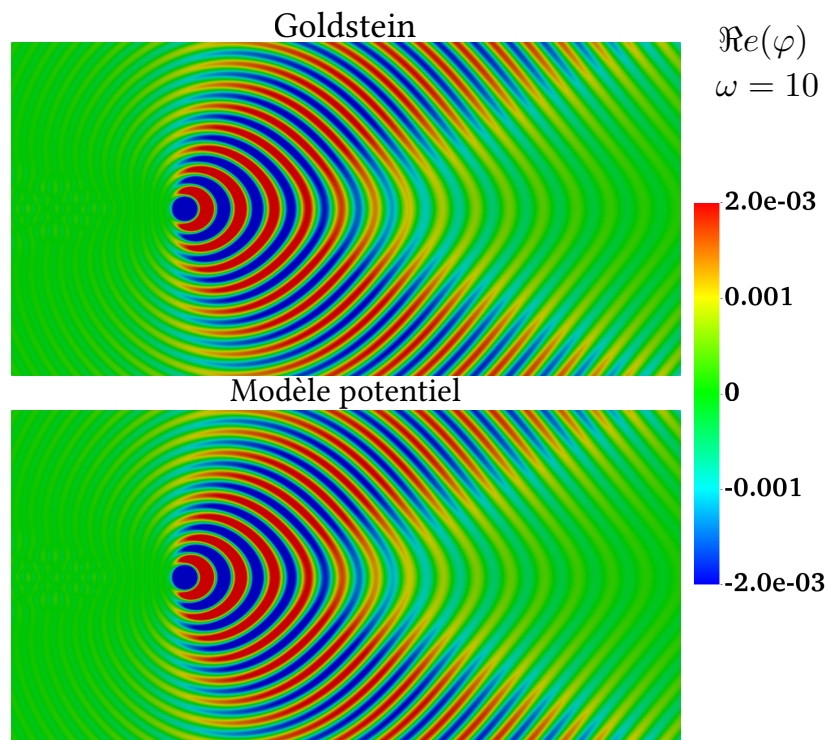


FIGURE 7.32 – Jet Gaussien 1 : comparaison entre la formulation de Goldstein et le modèle potentiel pour $\Re(\varphi)$ à la pulsation : $\omega = 10$.

Il est alors intéressant de tracer l'inconnue ξ , comme fait sur la figure 7.33. On constate alors que les stries hydrodynamiques sont de très faibles amplitudes, et l'on doit saturer le jeu de couleurs pour les voir. L'inconnue ξ est également de plus faible amplitude que dans les cas précédents, confirmant la tendance déjà observée lorsque la pulsation augmente. Négligeant les petites stries hydrodynamiques, la longueur d'onde caractéristique de ξ est alors la même que celle de φ , montrant que les phénomènes de transport sont faibles dans ce cas. Sur la figure 7.34, comme pour les cas précédents, nous traçons la courbe $x \mapsto \Re(\xi_x(x, y = 5.3))$ afin de mieux visualiser les petites oscillations de ξ . Nous observons alors que les phénomènes de transport donnant lieu aux plus petites oscillations sont bien présents, mais de faible amplitude. On remarque également que l'augmentation de cette amplitude au fur et à mesure que l'on s'éloigne en aval de la source est moins marqué que dans les cas précédents.

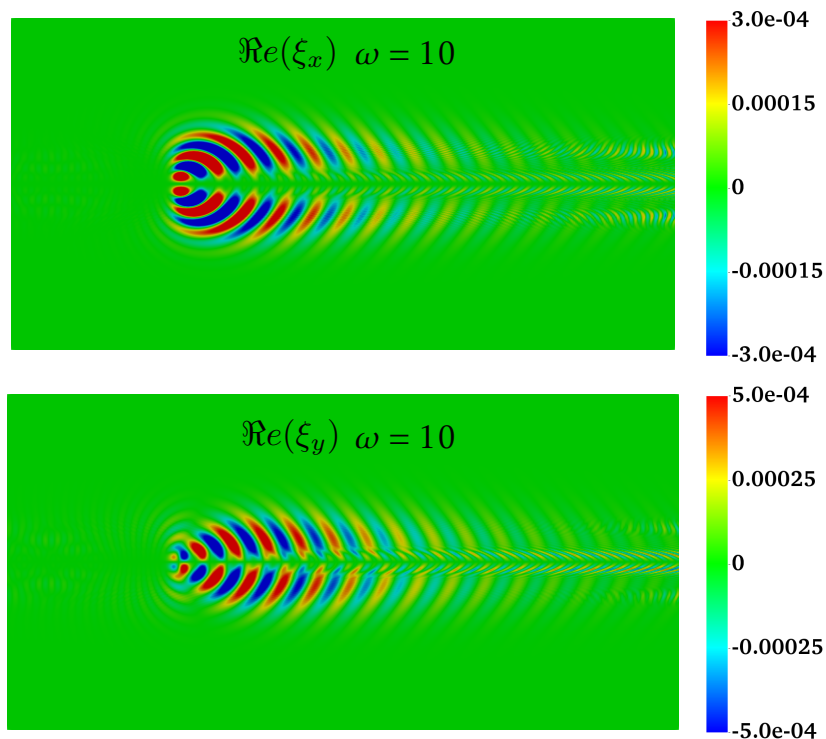


FIGURE 7.33 – Jet Gaussien 1 : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ et $\Re(\xi_y)$ à la pulsation : $\omega = 10$.

Nous traçons sur les figures 7.35 et 7.36 les résumés des résultats, pour $\Re(\varphi)$ et $\Re(\xi_x)$, obtenus aux trois pulsations d'étude, $\omega = 2, 5, 10$.

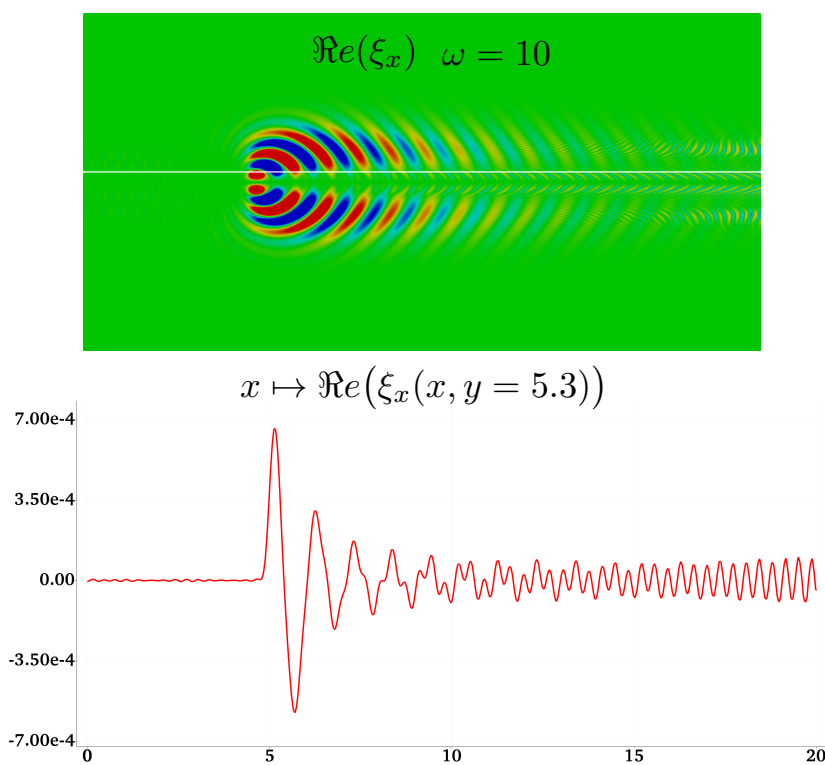


FIGURE 7.34 – Jet Gaussien 1 : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ en haut et courbe $y \mapsto \Re(\xi_x(x, y = 5.3))$, à la pulsation : $\omega = 10$.

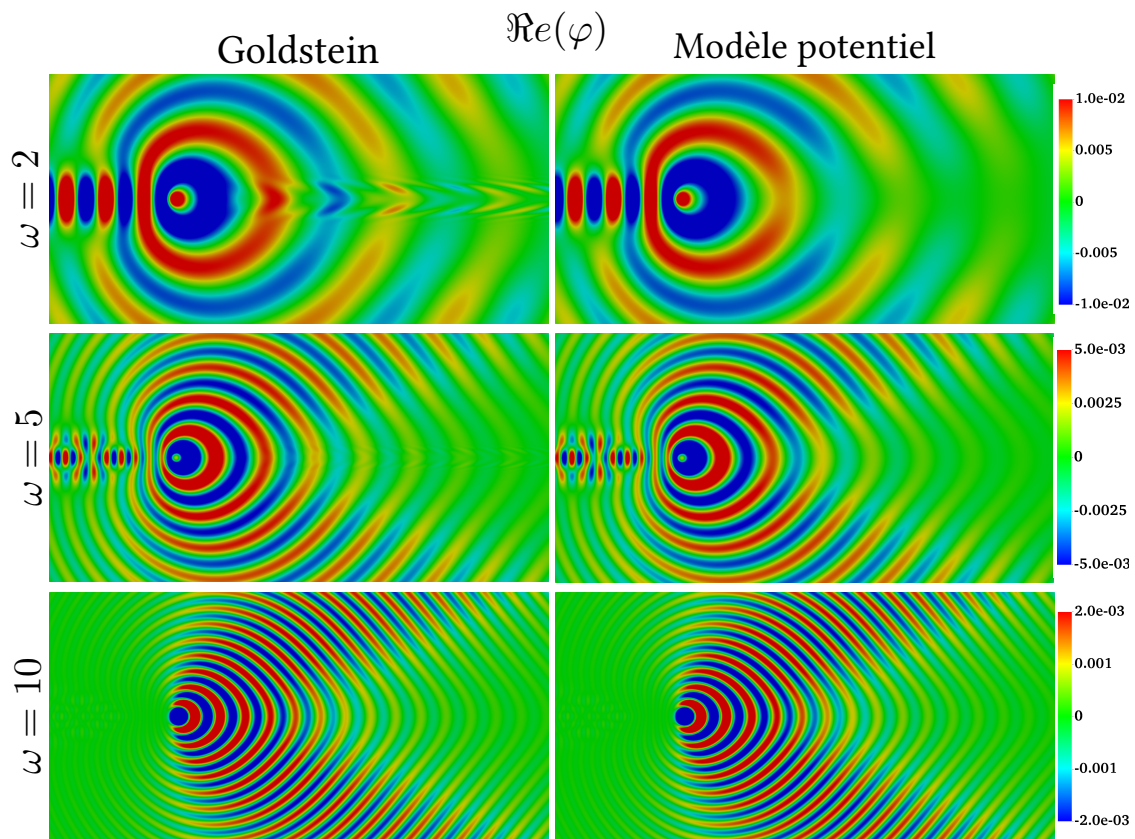


FIGURE 7.35 – Jet Gaussien 1 : résumé des comparaisons entre la formulation de Goldstein et le modèle potentiel pour $\Re(\varphi)$ aux pulsations : $\omega = 2, 5, 10$.

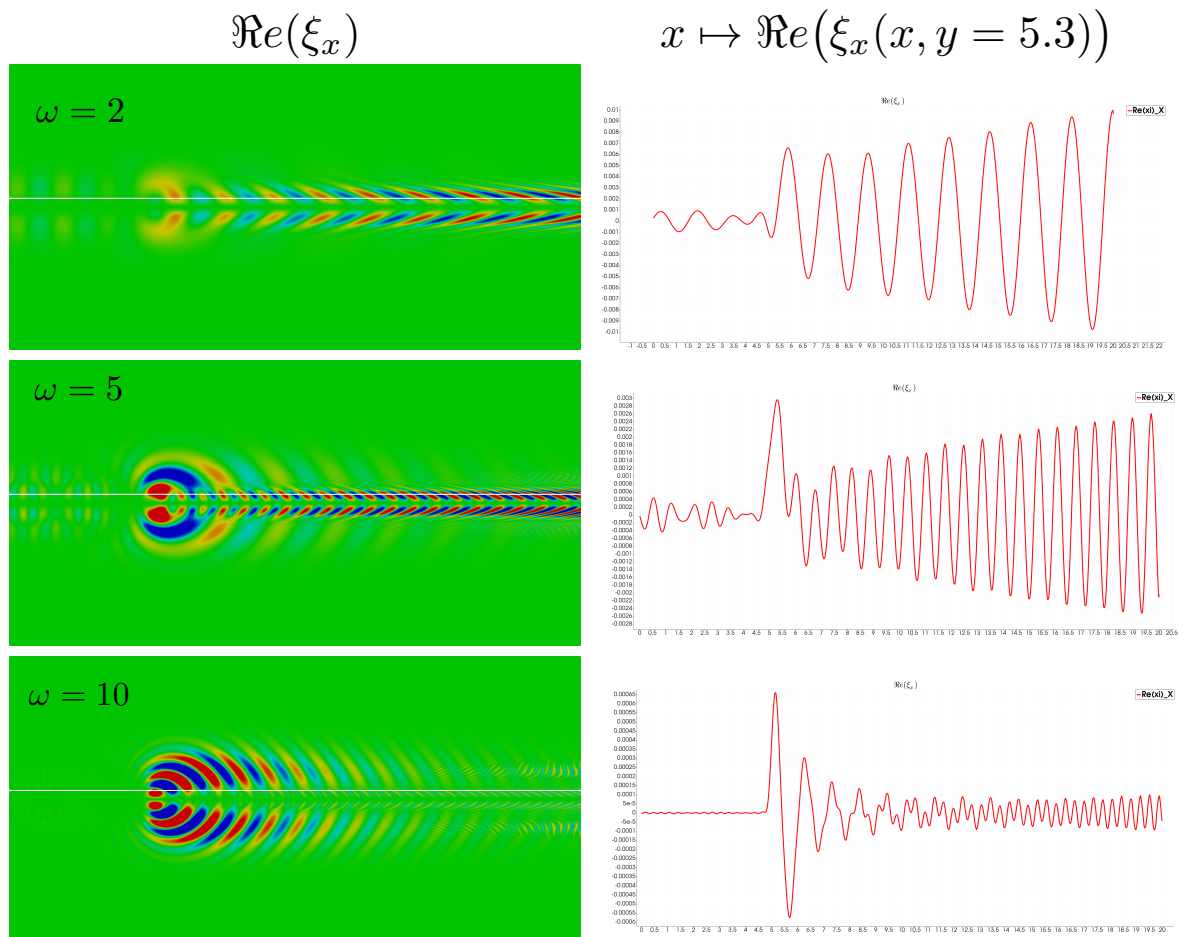


FIGURE 7.36 – Jet Gaussien 1 : résumé des comparaisons de $\Re(\xi_x)$ aux trois pulsations : $\omega = 2, 5, 10$.

Cas du jet 2 : fort rotationnel

Passons à présent au second cas de jet étudié, dont la seule différence avec le précédent est sa largeur caractéristique : il est plus resserré. Son rotationnel est donc plus important, tout en gardant le même nombre de Mach. Nous nous attendons donc à des différences plus significatives avec le modèle potentiel. L'étude porte toujours sur une analyse en montant la fréquence, aux trois pulsations : $\omega = 2, 5, 10$.

Commençons par présenter le jet, sur la figure 7.37 nous traçons le profil $y \mapsto v_0(y)$ ainsi que les isovaleurs de v_0 sur tout le domaine d'intérêt et sur la figure 7.38 nous représentons le rotationnel. Ce dernier est compris entre -0.5 et 0.5 et est donc deux fois plus intense que le cas 1 étudié précédemment, alors que les valeurs de la vitesse, et donc du Mach, restent comprise entre 0.3 à l'extérieur du jet et 0.6 au coeur de celui-ci.

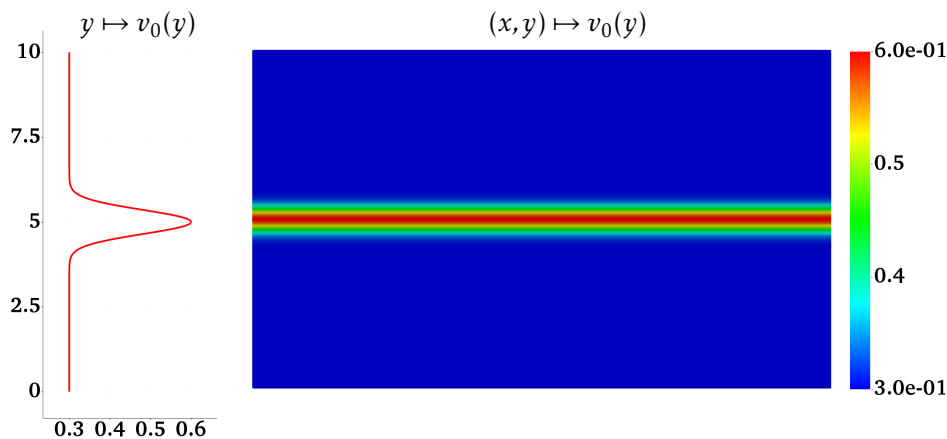


FIGURE 7.37 – Jet Gaussien 2 : profil de l'écoulement du jet gaussien 1 (à gauche) et isovaleurs de $(x, y) \mapsto v_0(y)$ (à droite).

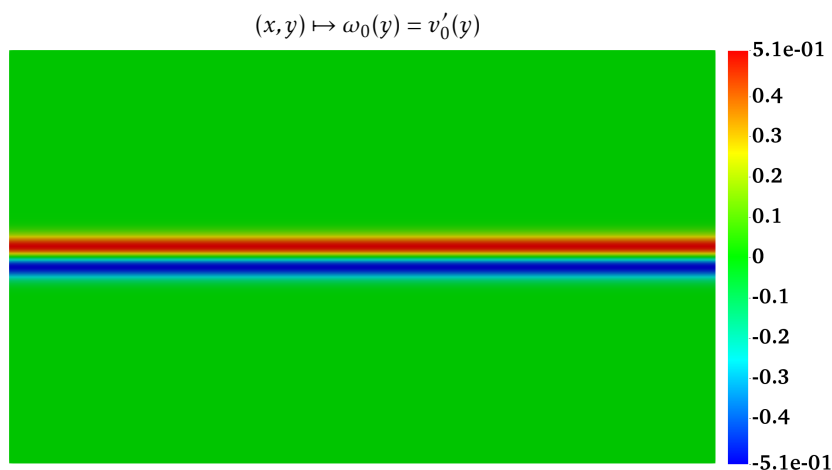


FIGURE 7.38 – Jet Gaussien 2 : isovaleurs du rotationnel, $\omega_0(x, y) = v'_0(y)$.

Commençons par l'observation du cas le plus basse fréquence, à $\omega = 2$. Nous traçons sur la figure 7.39 les isovaleurs de $\Re(\varphi)$, obtenu par les équations de Goldstein (en haut) et par le modèle potentiel (en bas). Nous observons alors encore plus nettement l'influence

du rotationnel sur l'inconnue φ par la présence des stries hydrodynamiques dans le jet. La différence est donc bien plus marquée dans ce deuxième cas, ce que nous attendions. Le rotationnel étant caractéristique ici de la différence de vitesse entre deux points voisins dans le jet (dans la direction transverse, selon e_y), on observe que les stries hydrodynamiques sont plus penchées que précédemment. Cela diminue encore la taille des variations caractéristiques de ces stries selon e_y et demande un maillage adapté en conséquence, c'est-à-dire très fin dans cette direction.

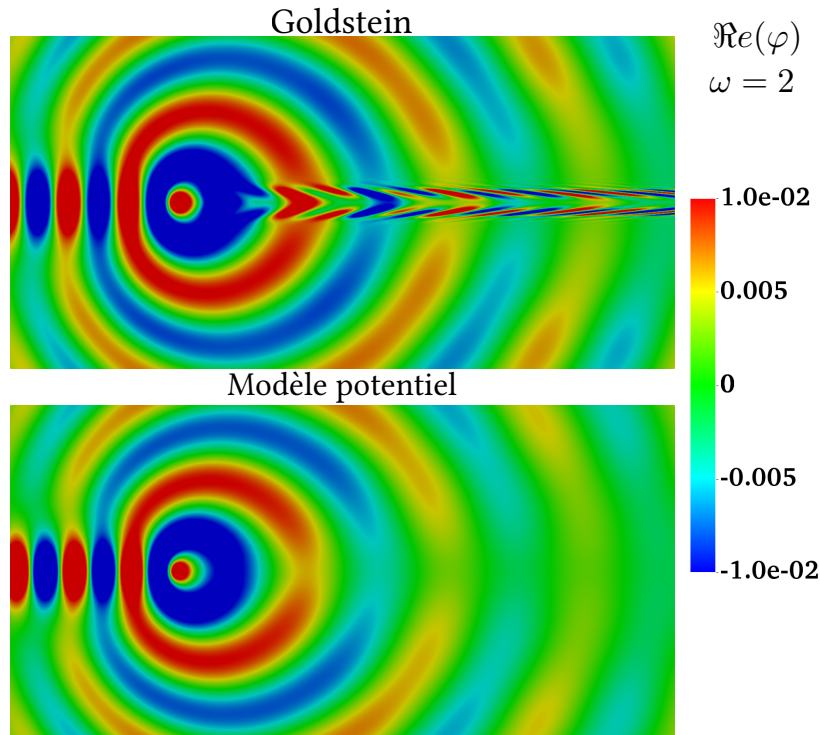


FIGURE 7.39 – Jet Gaussien 2 : comparaison entre la formulation de Goldstein et le modèle potentiel pour $\Re(\varphi)$ à la pulsation : $\omega = 2$.

Nous traçons sur la figure 7.40 les isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ et de $\Re(\xi_y)$. Nous remarquons que l'inconnue hydrodynamique est à présent de même amplitude que celle de l'onde φ . Les stries sont très resserrées, et ce que nous pourrions interpréter comme étant un problème numérique n'en est en fait pas un. En effet, les résultats présentés sont inchangés par variation de la taille et de la position des PML, ainsi que par raffinement de maillage. Ce qui peut apparaître irrégulier ne l'est en fait pas, et pour illustrer cela, nous traçons comme précédemment la courbe $x \mapsto \Re(\xi_x(x, y = 5.3))$ sur la figure 7.41. On observe alors que les oscillations dans la direction e_x correspondent bien à la longueur d'onde caractéristique de ξ due à l'équation de transport harmonique. Nous observons une croissance de ξ plus importante, exponentielle, en aval de l'écoulement. Nous pourrions être en présence d'une instabilité hydrodynamique, mais les seules conditions (de type critère de Rayleigh) à notre connaissance permettant de statuer sur cette question ne traitent que de l'instabilité des fluides incompressibles, ce qui n'est évidemment pas le cas en aéroacoustique, car cela correspondrait à une vitesse du son infinie ! Pour l'équation de transport seule, la solution explicite nous donne une croissance linéaire en espace des solutions en aval de la source dans le jet. Nous constatons ici une croissance plus que linéaire, ce qui nous fait pencher pour l'hypothèse que l'écoulement est instable.

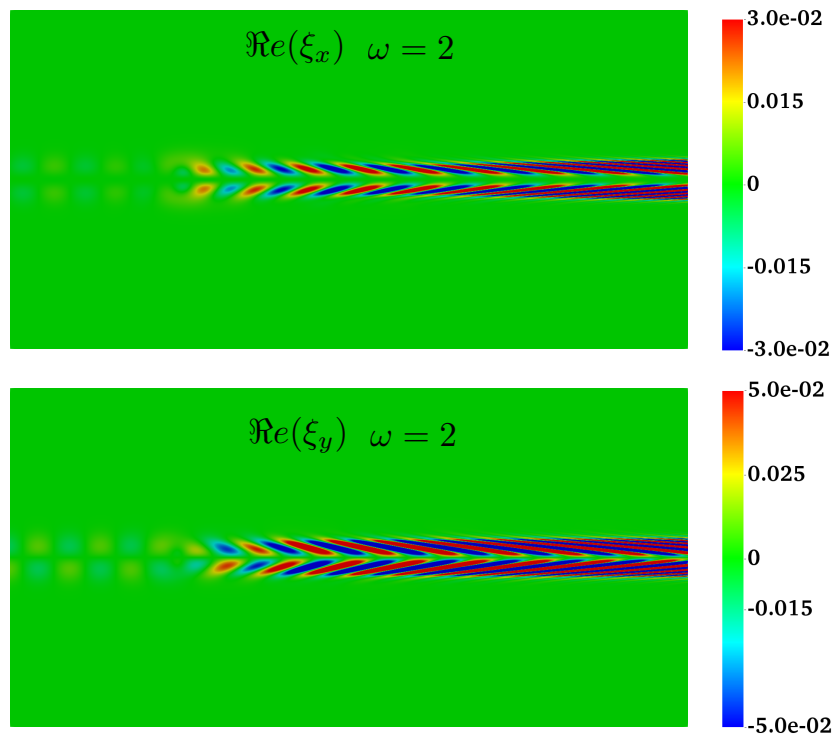


FIGURE 7.40 – Jet Gaussien 2 : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ et $\Re(\xi_y)$ à la pulsation : $\omega = 2$.

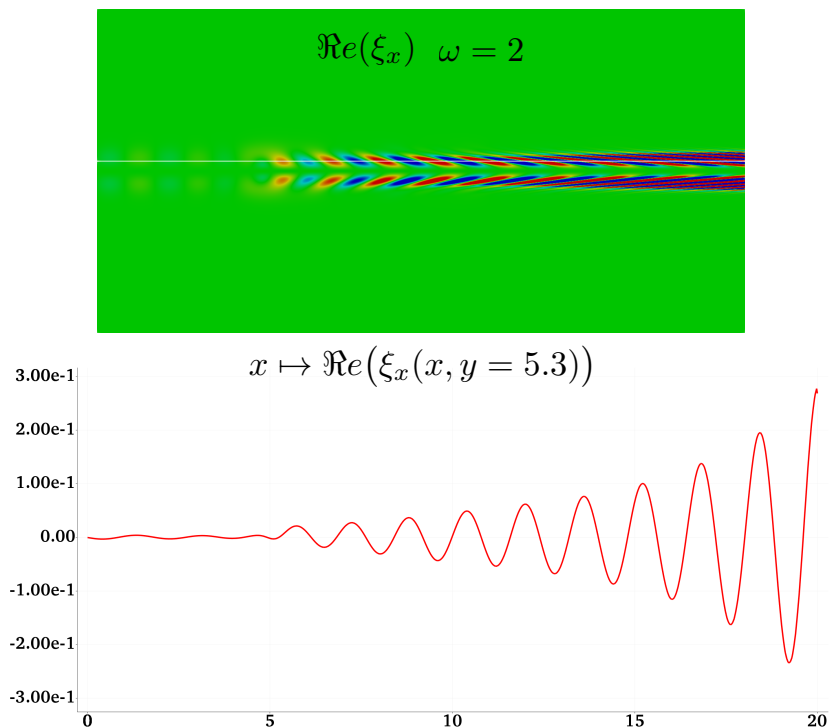


FIGURE 7.41 – Jet Gaussien 2 : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ en haut et courbe $y \mapsto \Re(\xi_x(x, y = 5.3))$, à la pulsation : $\omega = 2$.

Passons à présent à la fréquence intermédiaire, à $\omega = 5$. Nous traçons sur la figure 7.42 les isovaleurs de $\Re(\varphi)$ obtenu par les équations de Goldstein (en haut) et par le modèle potentiel (en bas). Le fait que ce jet ait un rotationnel plus fort implique que les effets hydrodynamiques

sont encore visibles à la fréquence intermédiaire sur l'inconnue φ alors qu'ils avaient déjà disparus pour le jet du cas 1. On observe en effet des petites stries dans le jet, la différence avec le modèle potentiel étant néanmoins beaucoup moins prononcée qu'à la pulsation $\omega = 2$.

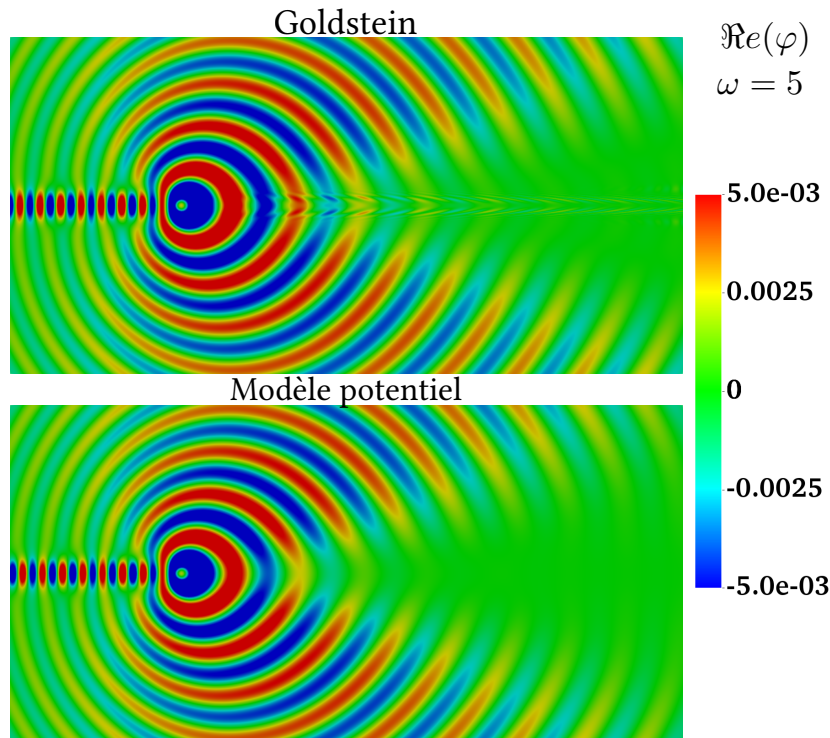


FIGURE 7.42 – Jet Gaussien 2 : comparaison entre la formulation de Goldstein et le modèle potentiel pour $\Re(\varphi)$ à la pulsation : $\omega = 5$.

De même que précédemment, nous traçons l'inconnue ξ sur la figure 7.43. Bien que l'amplitude ait diminué par rapport à la pulsation précédente, la croissance relative des stries semble plus prononcée dans ce cas. En effet, en traçant sur la figure 7.44, la croissance exponentielle peut être confirmée, et en tout cas, il ne peut pas s'agir d'une simple croissance linéaire, allant dans le sens de notre hypothèse que l'écoulement soit instable.

Remarque 7.4.1. *Il peut être délicat de comparer le modèle potentiel et les équations de Goldstein dans le cas d'un écoulement instable. En effet, d'une part, du fait que le rotationnel de l'écoulement soit plus intense dans ce cas, il est attendu que le modèle potentiel soit d'autant plus faux. Néanmoins, d'autre part, les instabilités créent une croissance de l'inconnue hydrodynamique ξ exponentielle (et de l'inconnue φ également) de telle sorte qu'au delà d'une certaine valeur de ξ et φ , les équations d'Euler linéarisées, dont l'établissement suppose que ξ et φ soient d'un ordre inférieur aux grandeurs de l'écoulement porteur, peuvent être remises en question. Dans ce cas, l'endroit où couper le domaine est un problème délicat, couper trop loin amènerait à sur considérer l'inconnue ξ . Finalement, nous pouvons remarquer que les écoulements cisailés, les jets, ne sont pas physiquement acceptables lorsque considérés sur de trop grands domaines, car les effets visqueux, jusqu'ici négligés, finissent par « dé-cisailler » le jet, qui redevient alors un écoulement stable et ne fait qu'ensuite convecter les perturbations, voire les atténuer.*

Terminons par la fréquence la plus haute, à $\omega = 10$. Nous traçons de même les isovaleurs de $\Re(\varphi)$, sur la figure 7.45. Comme pour le cas précédent, malgré un rotationnel plus

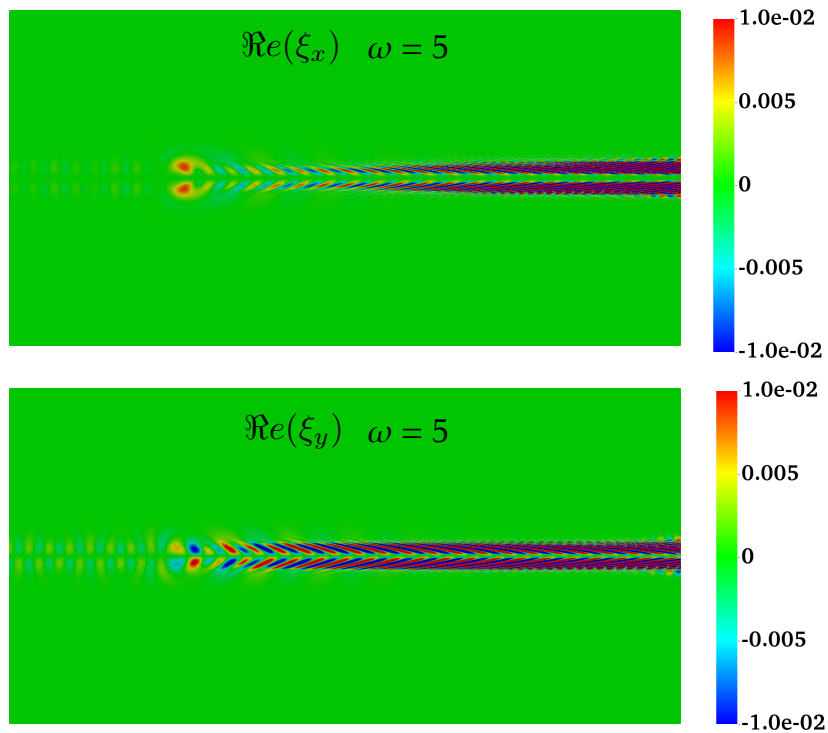


FIGURE 7.43 – Jet Gaussien 2 : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ et $\Re(\xi_y)$ à la pulsation : $\omega = 5$.

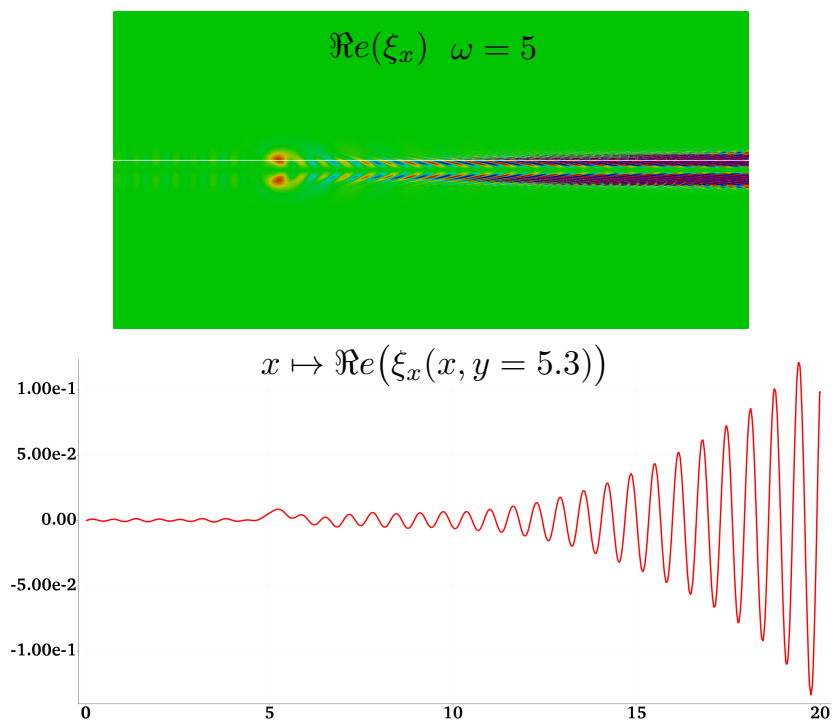


FIGURE 7.44 – Jet Gaussien 2 : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ en haut et courbe $y \mapsto \Re(\xi_x(x, y = 5.3))$, à la pulsation : $\omega = 5$.

fort entraînant vraisemblablement un jet instable, les effets hydrodynamiques ne sont plus visibles sur l'inconnue φ à cette fréquence, ou alors vraiment très peu : on peut remarquer une faible variation dans l'amplitude de l'onde dans le jet.

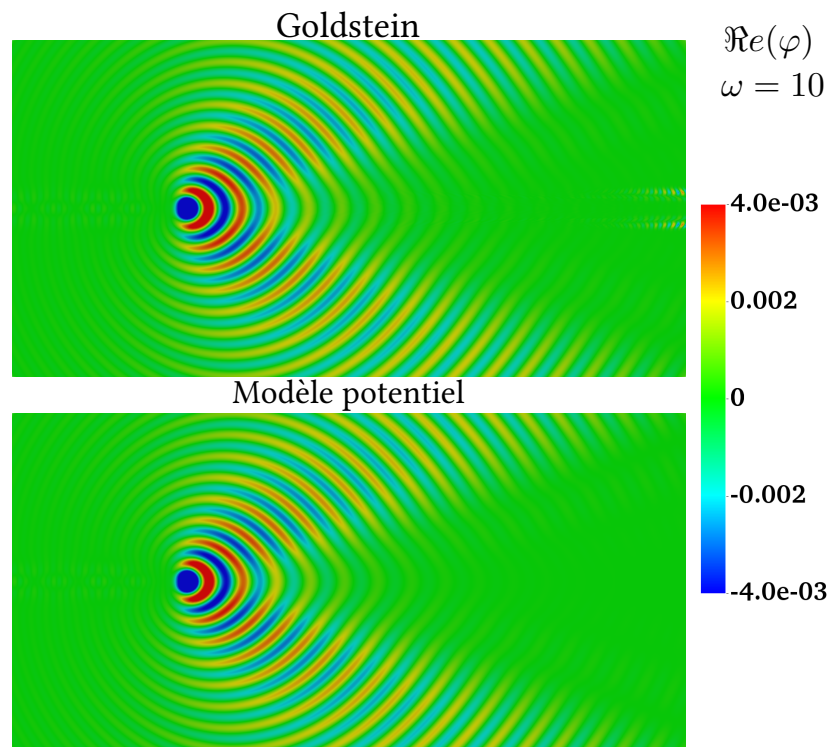


FIGURE 7.45 – Jet Gaussien 2 : comparaison entre la formulation de Goldstein et le modèle potentiel pour $\Re(\varphi)$ à la pulsation : $\omega = 10$.

Pour ce qui est de l'inconnue hydrodynamique, tracée sur la figure 7.46, les variations spatiales transverses au jet sont devenues si petites qu'elles sont à la limite du pas du maillage et ne sont plus discrétisées correctement. Néanmoins, dans le sens de l'écoulement, comme représenté sur la figure 7.47, les oscillations sont encore bien captées et la longueur d'onde est bien celle attendue. Confirmant la tendance, bien que l'amplitude de ξ soit plus petite, la croissance exponentielle de son module semble plus marquée encore.

Terminons par un résumé des figures obtenues concernant φ , figure 7.48 et ξ_x , figure 7.49 pour les trois pulsations d'étude $\omega = 2, 5, 10$, en comparaison avec le modèle potentiel.

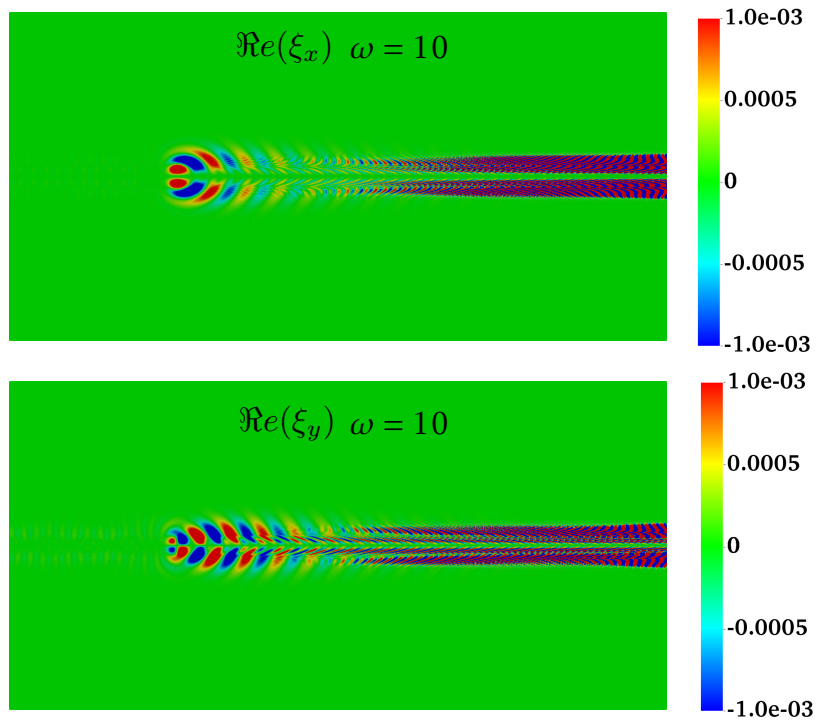


FIGURE 7.46 – Jet Gaussien 2 : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ et $\Re(\xi_y)$ à la pulsation : $\omega = 10$.

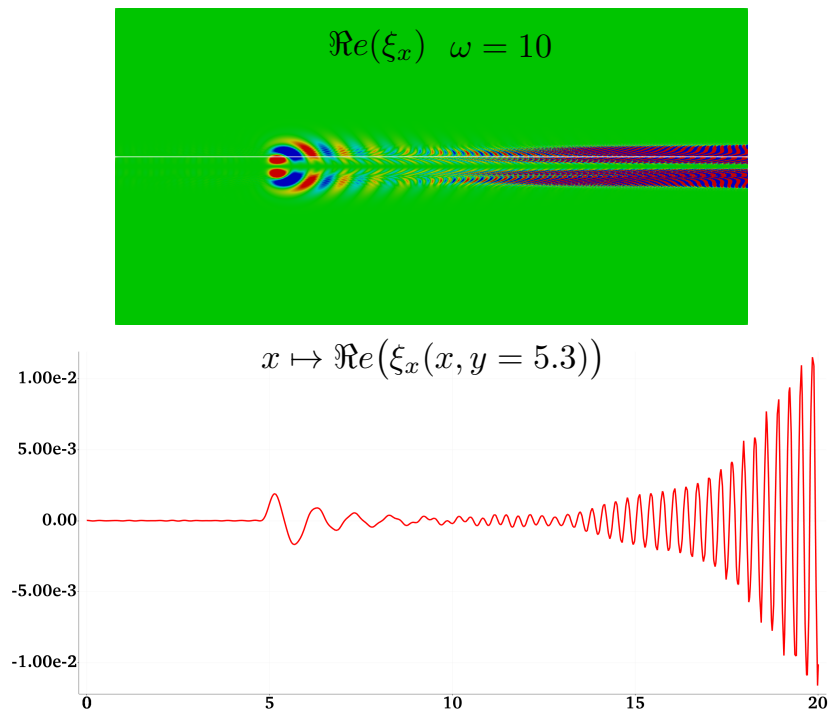


FIGURE 7.47 – Jet Gaussien 2 : isovaleurs de $\Re(\xi_x)$ en haut et courbe $y \mapsto \Re(\xi_x(x, y = 5.3))$, à la pulsation : $\omega = 10$.

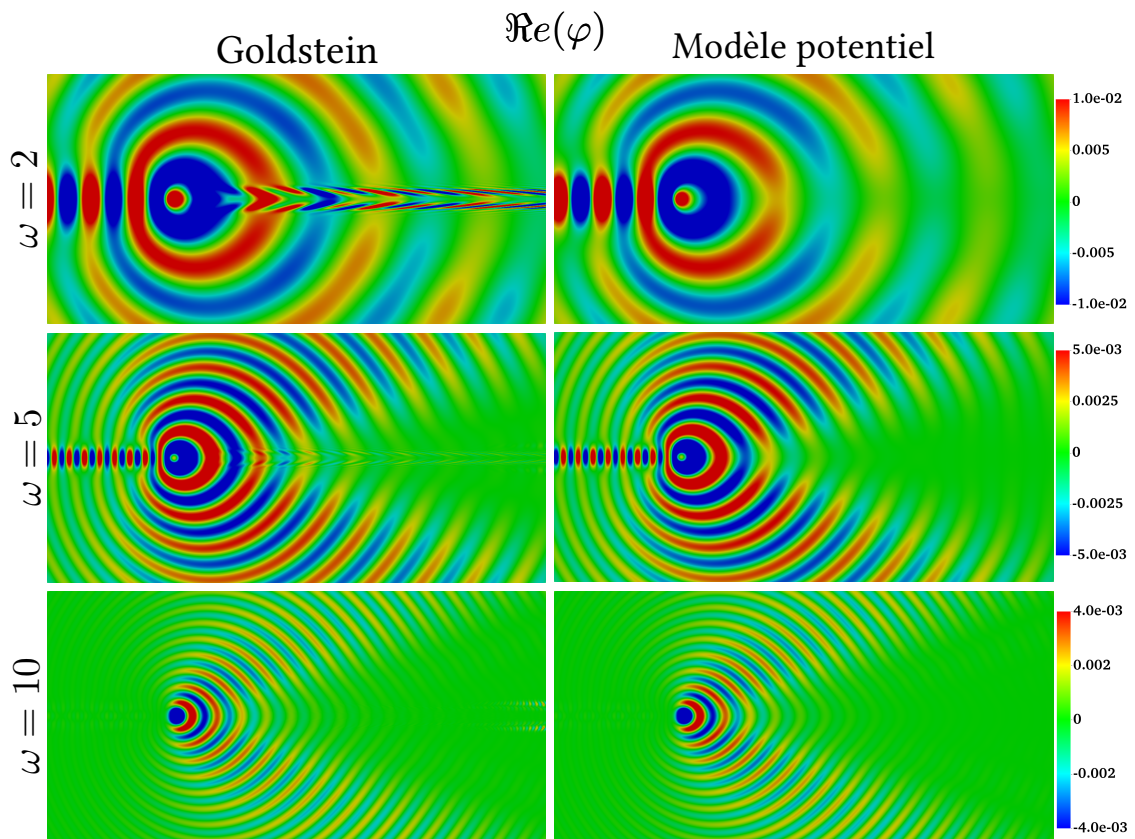


FIGURE 7.48 – Jet Gaussien 2 : résumé des comparaisons entre la formulation de Goldstein et le modèle potentiel pour $\Re(\varphi)$ aux pulsations : $\omega = 2, 5, 10$.

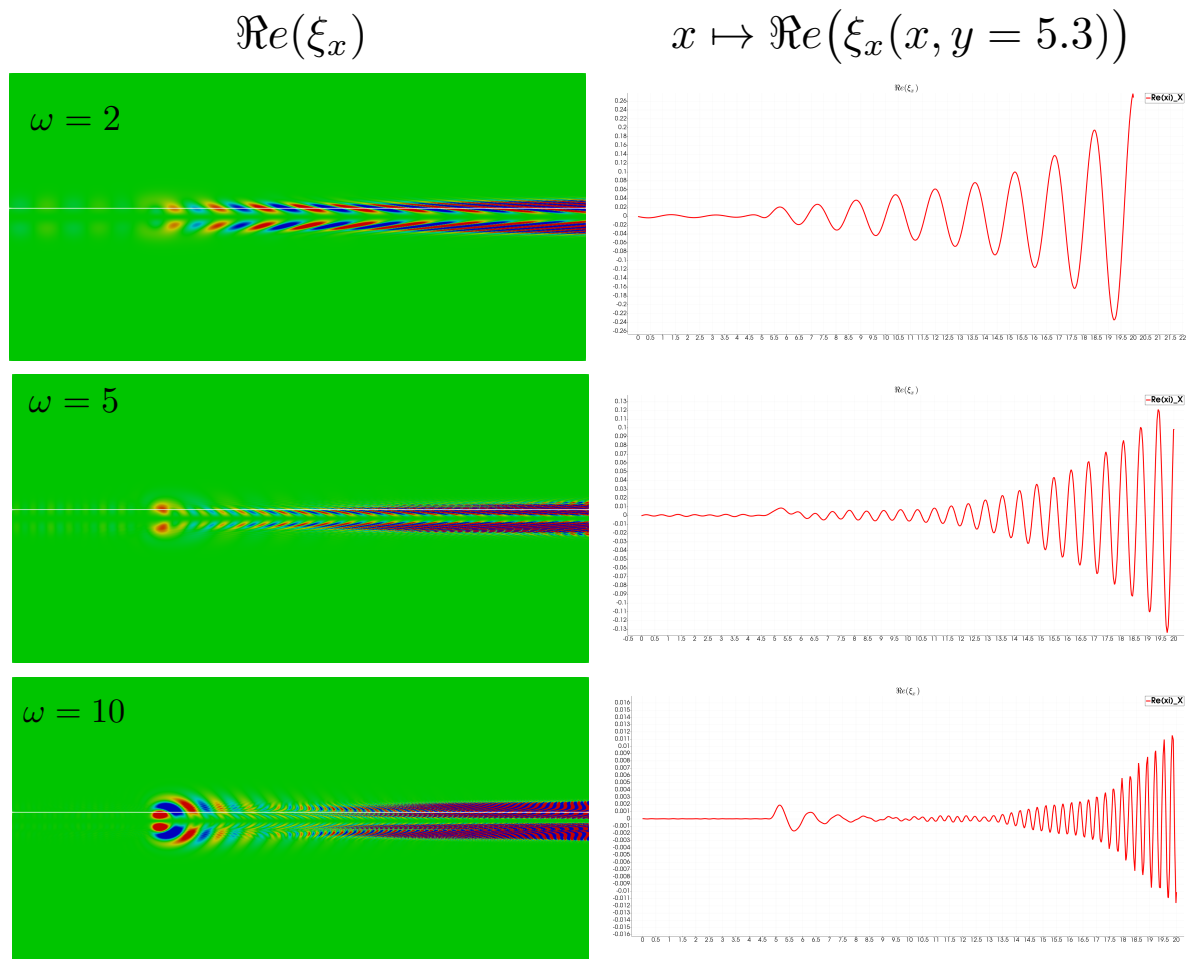


FIGURE 7.49 – Jet Gaussien 2 : résumé des comparaisons de $\Re(\xi_x)$ aux trois pulsations : $\omega = 2, 5, 10$.

Comparaison de la pression et de la vitesse acoustique. Nous souhaitons à présent comparer la formulation de Goldstein au modèle potentiel sur les inconnues physiques du problème, à savoir la pression et la vitesse acoustique, qui est la grandeur d'intérêt principale. Nous utiliserons pour cela les deux cas extrêmes de pulsation précédents, $\omega = 2$ et $\omega = 10$ pour le jet ayant le plus fort rotationnel qui est donc susceptible de donner les différences les plus importantes entre les équations de Goldstein et le modèle potentiel. Rappelons brièvement le lien entre la pression et la vitesse acoustique et les inconnues φ et ξ des équations de Goldstein :

$$\begin{aligned} p &= -\rho_0 D_\omega \varphi, \\ v_x &= \nabla \varphi + \xi. \end{aligned}$$

Et dans le cas potentiel, on a, en fonction du potentiel acoustique φ^{pot} :

$$\begin{aligned} p &= -\rho_0 D_\omega \varphi^{pot}, \\ v &= \nabla \varphi^{pot}. \end{aligned}$$

Commençons par analyser l'influence de l'acoustique avec l'hydrodynamique sur la pression acoustique résultante. Nous traçons $\Re(p)$ sur la figure 7.50 obtenu par les équations de Goldstein, en haut, et par le modèle potentiel, en bas. Nous observons alors une différence légère des amplitudes, que ce soit dans le jet, là où c'est le plus notable, mais également dans la partie hors du jet. Il est notable que les stries hydrodynamiques ont disparu, ceci du fait de l'application de l'opérateur de dérivation convective harmonique D_ω pour calculer la pression. Ainsi, les différences entre les équations de Goldstein et le modèle potentiel sont assez faibles et se caractérisent par une différence d'amplitude de l'onde dans le jet et dans une plus faible mesure rayonnée. Notons également qu'il s'agit de notre cas de jet où la différence est le plus marquée. Nous pourrions descendre encore en fréquence et constater d'avantage de différence, ou alors, en augmentant encore le rotationnel du jet.

Passons à présent à la fréquence la plus haute, à $\omega = 10$, pour laquelle peu de différences avec le modèle potentiel avaient été constatées. En effet, en traçant sur la figure 7.51, $\Re(p)$, obtenu par les équations de Goldstein (en haut) et par le modèle potentiel (en bas), aucune différence n'est visible sur la pression à cette plus haute fréquence, que ce soit dans le jet ou hors du jet dans la partie rayonnée.

Comparons à présent une inconnue physique qui nous intéresse moins pour nos applications mais qu'il est néanmoins intéressant à étudier du point de vu de la modélisation : la vitesse acoustique. La vitesse acoustique s'exprimant par $v = \nabla \varphi + \xi$, nous attendons une influence plus grande des interactions avec l'hydrodynamique, l'opérateur D_ω n'étant pas appliqué.

Pour la fréquence la plus basse, à $\omega = 2$, nous traçons $\Re(v_x)$ sur la figure 7.52, et nous observons en effet une grosse différence entre la solution fournie par les équations de Goldstein et celle obtenue par le modèle potentiel, notamment, les stries hydrodynamiques sont très présentes et influence assez nettement le champ rayonné. À plus haute fréquence, pour $\omega = 10$, nous attendons néanmoins de plus faibles différences entre les deux. Effectivement, comme on peut le constater sur la figure 7.53, le champ rayonné est à présent quasiment identique. Néanmoins, la présence des stries hydrodynamiques dans le jet est visible, d'autant plus que l'on est en aval de la source. Cela est accentué par le fait l'écoulement est vraisemblablement instable, entraînant une croissance exponentielle de ξ en aval le long du jet.

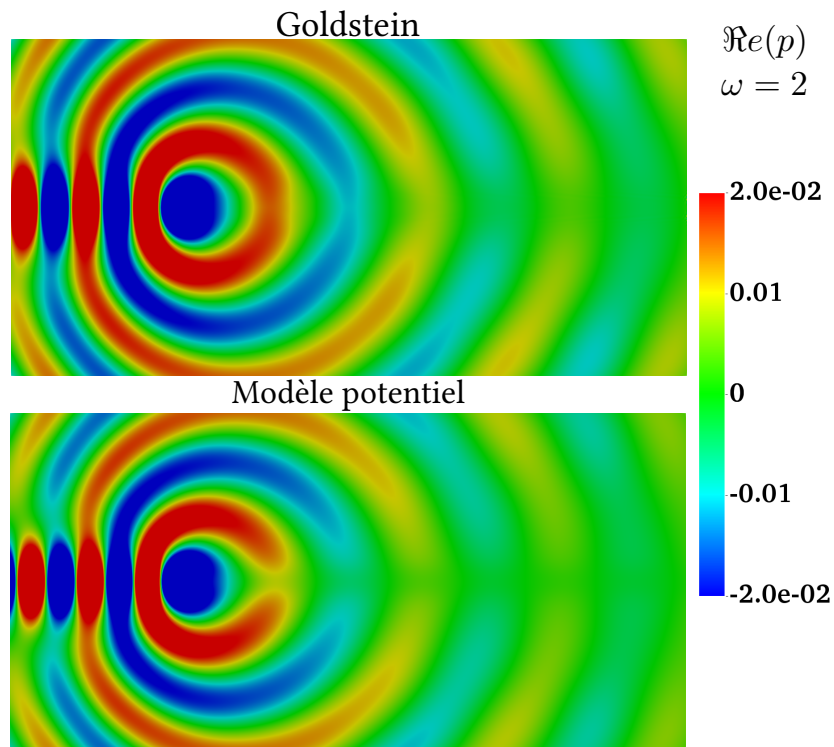


FIGURE 7.50 – Comparaison de l'inconnue pression $\Re(p)$ à la pulsation $\omega = 2$ et pour le cas du jet 2

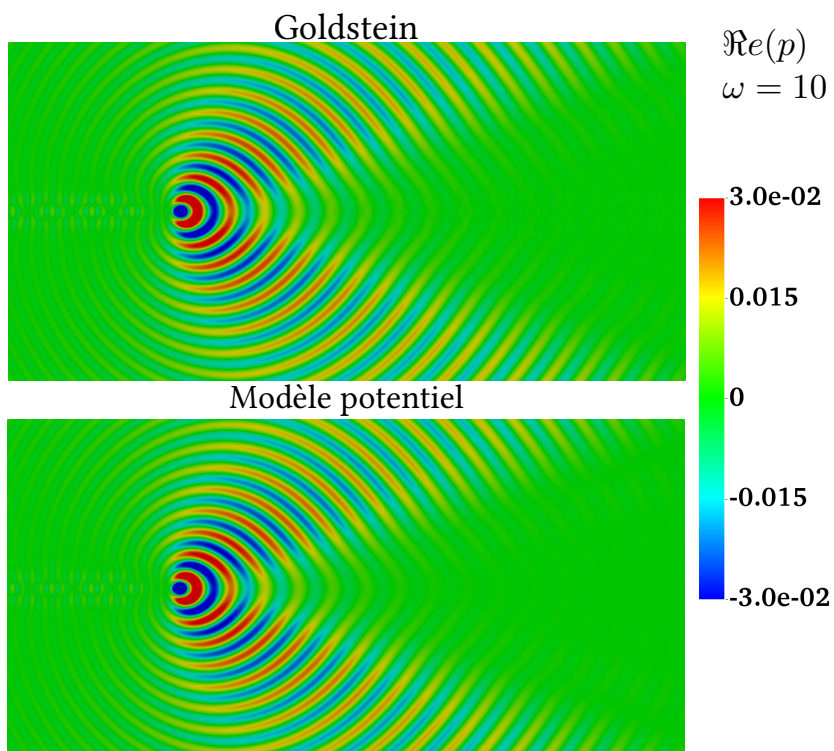


FIGURE 7.51 – Comparaison de l'inconnue pression $\Re(p)$ à la pulsation $\omega = 10$ et pour le cas du jet 2

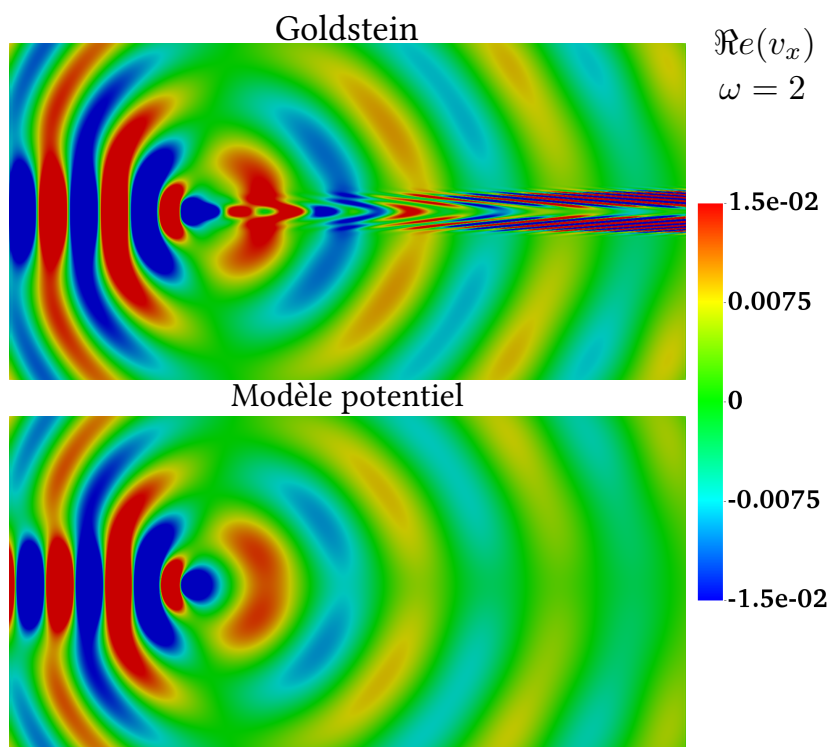


FIGURE 7.52 – Comparaison de l'inconnue vitesse selon e_x : $\Re(v_x)$, à la pulsation $\omega = 2$, pour le cas du jet 2.

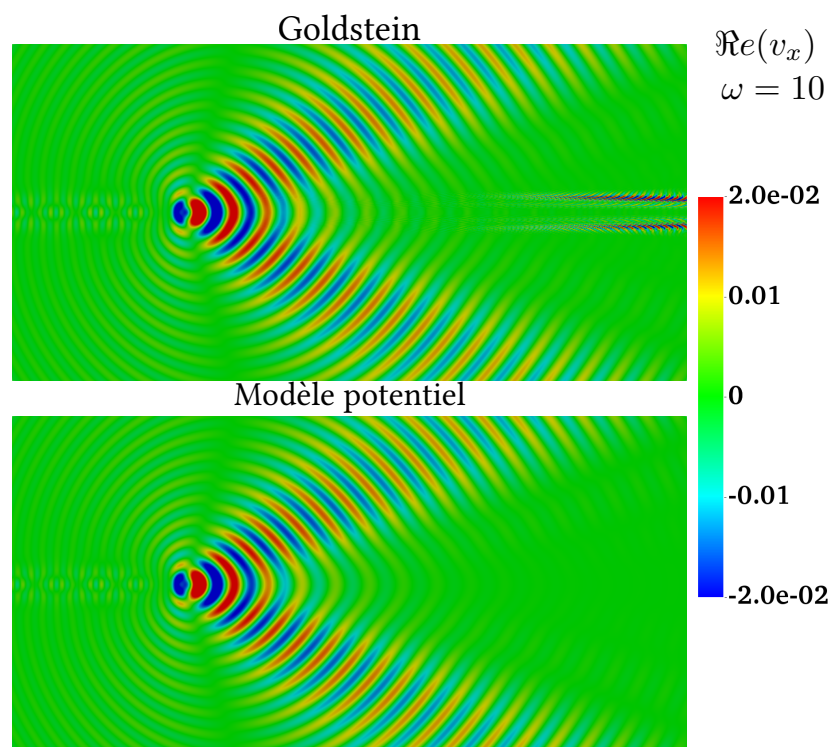


FIGURE 7.53 – Comparaison de l'inconnue vitesse acoustique selon e_x : $\Re(v_x)$, à la pulsation $\omega = 10$ et pour le cas du jet 2.

7.5 Conclusions de l'étude numérique des équations de Goldstein

Pour conclure ce chapitre d'étude numérique des équations de Goldstein, commençons par évoquer les questions relatives à la méthode numérique employée. Nous avons vu qu'il est nécessaire d'avoir un moyen de stabilisation de l'équation de transport et c'est la méthode SUPG, introduisant un paramètre de stabilisation δ , et permettant de conserver des éléments finis classiques, qui a été retenue pour cette étude. Le reproche que l'on peut faire à cette méthode est que ce paramètre doit être adapté au cas par cas et dépend notamment du pas de maillage et de la vitesse de l'écoulement. En pratique, il doit être choisi le plus petit possible, tant qu'il n'apparaît pas d'oscillations parasites partout dans le domaine. Nous avons borné le domaine de calcul avec des PML, qui semblent très bien se comporter dans ce cadre, bien que nous n'avons pas à notre connaissance de cadre théorique complet permettant de le garantir. Nous avons constaté que même en présence d'instabilités, les PML absorbent encore très bien les ondes acoustiques et hydrodynamiques.

Concernant les interprétations de modélisation physique du problème, nous avons étudié le comportement de l'inconnue hydrodynamique en fonction de la fréquence et du cisaillement de l'écoulement. Nous avons observé, notamment par comparaison avec le modèle potentiel qui néglige les interactions entre l'acoustique et l'hydrodynamique, que cette influence diminue lorsque la fréquence augmente. Cette interaction est évidemment d'autant plus importante que le rotationnel est grand. Lorsque le rotationnel augmente trop, dans le cas des jets par exemple, le cisaillement peut créer un phénomène d'instabilité donnant lieu à une croissance exponentielle le long des lignes de courant des inconnues acoustiques. Lorsque l'on s'intéresse aux inconnues physiques du problème, la pression et la vitesse acoustique, il apparaît que l'interaction entre l'acoustique et l'hydrodynamique est plus visible sur la vitesse que sur la pression. En effet, sur la vitesse, on observe la présence de stries hydrodynamiques dont la longueur d'onde est caractéristique de l'équation de transport harmonique. Cette longueur d'onde est reliée localement à la longueur d'onde acoustique par le nombre de Mach, à savoir, on a grossièrement $\lambda_\xi = M_0 \lambda_\phi$. Bien que la longueur d'onde de l'inconnue hydrodynamique est inférieure à celle de l'onde acoustique, ce n'est pas en fonction de cette longueur d'onde qu'il faut établir la règle de maillage. En effet, de bien plus petites longueurs caractéristiques du phénomène apparaissent dans la direction transverse au cisaillement, et lorsque celui-ci est fort, cela peut nécessiter un maillage très fin dans cette direction. L'influence de l'interaction avec la vorticité se fait moins ressentir sur la pression acoustique, en effet, la pression est obtenue en appliquant l'opérateur de dérivée convective harmonique qui a pour effet de supprimer les stries hydrodynamiques. Néanmoins, leurs influences se font sentir sur l'amplitude de la pression, quoique l'effet soit moins important que pour la vitesse.

Finalement, la présence d'instabilités hydrodynamiques pose quelques questions sur les limites de validité des équations de Goldstein. En effet, ces équations étant obtenues par linéarisation autour d'un écoulement porteur, elles n'ont de sens que si les inconnues calculées sont bien d'un ordre de grandeur inférieur aux quantités caractéristiques de l'écoulement porteur. Or, dans le cas d'une instabilité hydrodynamique, il y a croissance exponentielle en espace des inconnues acoustiques. Cela ne peut donc pas être possible sur de trop grandes distances sans remettre en cause la validité des équations de Goldstein ou d'Euler linéarisées. En pratique, les zones d'instabilité sont limitées par la présence de viscosité dans l'écoulement porteur, imposant à un jet par exemple de se dé-cisailler au fur et à mesure que l'on s'éloigne de ce qui a créé le cisaillement.

Quatrième partie

Étude des équations de Goldstein en écoulement circulaire

Chapitre 8

Le cas de l'équation de transport

8.1	Description des écoulements circulaires	202
8.2	Vers la résolution de l'équation de transport : notion de résonance	204
8.3	Description de l'ensemble des résonances \mathcal{K}_{res}	205
8.4	Résolution de l'équation de transport hors résonance et estimation a priori	208
8.5	Étude de quelques cas d'écoulements particuliers	215
8.6	Résolution dans le cas résonant : lignes résonantes	220

Nous terminons cette thèse par l'investigation d'un cas que nous avons exclu en faisant l'hypothèse d'un écoulement porteur domaine-remplissant : celui où des lignes de courant de l'écoulement porteur peuvent être fermées et recirculer. Bien qu'il s'agisse d'une situation peu répandue du point de vue de notre application industrielle, nos écoulements sont le plus souvent des jets, il est intéressant de s'interroger sur la validité du modèle mathématique en présence de tels écoulements porteurs. Par ailleurs, il n'est pas exclu que dans de petites zones, l'écoulement forme approximativement une recirculation. En montrant que des singularités peuvent apparaître, cela nous amènera à nous poser la question de la limite du modèle linéaire et non-visqueux, pour lequel ces phénomènes devraient être contrebalancés.

Nous avons déjà alerté le lecteur sur le fait que l'équation de transport harmonique n'est pas toujours bien posée et nous avons donné l'exemple de la rotation solide qui possède un nombre discret de fréquences de résonance. L'étude du cas général reste une question ouverte et sûrement difficile, nous nous contenterons de généraliser, dans un premier chapitre, le cas de la rotation solide à un écoulement orthoradial dans une couronne dont le profil est a priori quelconque. Nous définirons alors l'ensemble des résonances de l'équation de transport et des lignes résonantes apparaîtront naturellement, lignes selon lesquelles la « solution » serait singulière.

Dans un second chapitre, nous étudierons le couplage de Goldstein. Pour le couplage, une analyse de Fourier fera apparaître de nouvelles fréquences de résonances, dites critiques, qui ont une autre origine physique que la périodicité du phénomène des recirculations de l'écoulement porteur. Hors fréquences de résonance du transport, l'équation de transport est inversible et nous pourrions donc généraliser le résultat donnant le caractère Fredholm des équations, toujours sous hypothèse d'un faible rotationnel, que nous avons vu précédemment en écoulement domaine-remplissants. Puis hors des fréquences de résonance du transport et critiques, nous montrerons le caractère bien posé des équations de Goldstein.

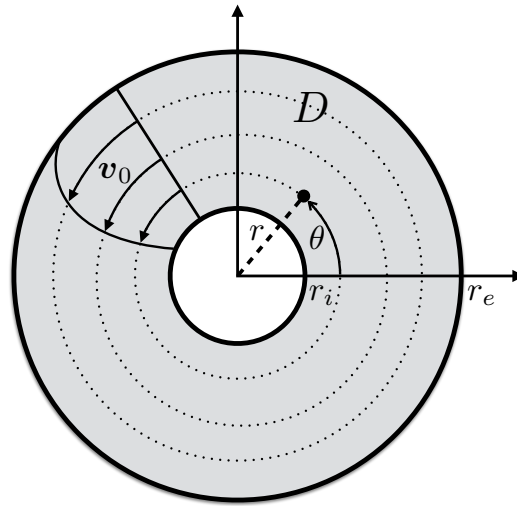


FIGURE 8.1 – Géométrie de la couronne.

Pour aller plus loin et parce que les conditions énoncées ci-avant peuvent être très restrictives voir impossibles à satisfaire pour certains écoulements porteurs, nous nous intéresserons dans un second temps au comportement de solutions définies par absorption limite, lorsque nous sommes en présence d'une ligne résonante du transport ou critique. Cette analyse se fera à l'aide de la méthode de Frobenius, que nous devons mener conjointement du passage à l'absorption nulle. Cette dernière partie a de fortes similarités avec le comportement singulier du champ électromagnétique dans les plasmas, voir [73] pour les aspects physiques, notamment étudié par B. Després, L.M. Imbert-Gérard, M. Campos Pinto, O. Lafitte et A. Nicolopoulos, voir [74], [75], [76] et [77]. Les résultats que nous avons obtenus restent prospectifs et demanderaient une analyse plus poussée afin par exemple de pouvoir prendre en compte numériquement ces phénomènes. Nous verrons notamment qu'en présence de résonances critiques, le cadre fonctionnel classiquement utilisé pour les formulations variationnelles ne convient plus. Nous terminerons par quelques illustrations numériques des singularités qui se forment par absorption limite sur les modes de Fourier.

8.1 Description des écoulements circulaires

Nous nous plaçons dans cette section dans un domaine D annulaire 2D, représenté sur la figure 8.1 et nous utilisons les coordonnées polaires :

$$D := \{(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[: r_i < r < r_e\}, \quad (8.1)$$

où r_i et r_e , tels que $0 < r_i < r_e$, sont les rayons intérieur et extérieur de la couronne. L'écoulement porteur est choisi orthoradial et indépendant de la variable θ , c'est-à-dire qu'étant donné un profil $v_0 : r \in]r_i, r_e[\mapsto v_0(r)$, la vitesse de l'écoulement est donnée par

$$\mathbf{v}_0(r, \theta) := v_0(r) \mathbf{e}_\theta,$$

et un tel écoulement sera dit « circulaire ». Plutôt que la vitesse v_0 , il apparaît naturellement dans les calculs la vitesse angulaire Ω_0 définie par :

$$\Omega_0(r) := \frac{v_0(r)}{r}. \quad (8.2)$$

Nous faisons l'hypothèse que la vitesse de l'écoulement ne s'annule pas, et puisqu'elle garde toujours le même signe par continuité, nous faisons le choix :

$$\forall (r, \theta) \in D, \quad \Omega_0(r) > 0.$$

La vorticité d'un écoulement circulaire est donnée par $\omega_0 := \omega_0 \mathbf{e}_z$ où

$$\omega_0(r) = \frac{v_0(r)}{r} + v_0'(r) = \Omega_0(r) + v_0'(r),$$

Il est aisé de vérifier que la donnée d'un quelconque profil v_0 , suffisamment régulier, suffit à définir un écoulement (ρ_0, p_0, v_0) satisfaisant les équations d'Euler :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0, \\ \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \nabla p_0 = \mathbf{0}. \end{cases}$$

La divergence d'un champ de vecteurs exprimé en coordonnées polaires $\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta$ étant donnée par $\nabla \cdot \mathbf{A} = 1/r \partial_r (r A_r) + 1/r \partial_\theta A_\theta$, l'équation de conservation de la masse,

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = \Omega_0(r) \partial_\theta \rho_0 = 0,$$

montre que ρ_0 ne dépend que de la variable r . Puis de l'équation d'état, $p_0 = \mu \rho_0^\gamma$, on déduit que de même p_0 ne dépend pas de la variable θ . Ainsi, à v_0 fixée, ρ_0 et p_0 vérifient

$$\begin{cases} r \rho_0 \Omega_0(r)^2 = \frac{dp_0}{dr}, \\ p_0 = \mu \rho_0^\gamma, \\ c_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}. \end{cases}$$

Ces équations se réduisent en une simple équation différentielle sur ρ_0

$$\frac{d\rho_0}{dr} - \frac{r}{\mu\gamma} \Omega_0(r)^2 \rho_0^{2-\gamma} = 0,$$

dont la solution est donnée par

$$\rho_0(r) = \left(\rho_0(r_i)^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{\mu\gamma} \int_{r_i}^r \Omega_0(r')^2 r' dr' \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

L'écoulement porteur est ainsi déterminé totalement en fonction de la seule donnée du profil de l'écoulement v_0 . Nous supposons ainsi connu l'écoulement porteur et ne discuterons que des valeurs que peut prendre v_0 .

Hypothèse de régularité supplémentaire. Pour des raisons qui apparaîtront dans la suite, nous choisissons de nous restreindre à des écoulements dont les quantités ρ_0 , p_0 et v_0 s'étendent analytiquement à un voisinage du segment $]r_i, r_e[$ dans le plan complexe.

8.2 Vers la résolution de l'équation de transport : notion de résonance

Exprimons l'équation de transport harmonique pour l'opérateur de dérivée convective harmonique se simplifie en

$$D_\omega = -i\omega + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla = -i\omega + \Omega_0(r)\partial_\theta,$$

et le jacobien de la vitesse s'écrit, en coordonnées polaires

$$\nabla \mathbf{v}_0(r, \theta) = \begin{pmatrix} 0 & -2\frac{v_0(r)}{r} \\ v_0'(r) + \frac{v_0(r)}{r} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega_0(r) \\ \omega_0(r) & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le problème du transport harmonique (3.17), pour une source $f \in L^2(D)^2$ régulière, se ramène à une famille d'équations différentielles paramétrée par le rayon $r \in]r_i, r_e[$, munie de conditions de périodicité, chacune étant :

$$\begin{cases} \left(-i\omega + \Omega_0(r)\partial_\theta \right) \xi + \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega_0(r) \\ \omega_0(r) & 0 \end{pmatrix} \xi = f, & (8.3a) \\ \xi(\cdot, 0) = \xi(\cdot, 2\pi). & (8.3b) \end{cases}$$

En notant

$$A_\omega(r) := i\frac{\omega}{\Omega_0(r)}I - \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 + r\frac{\Omega_0'(r)}{\Omega_0(r)} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),$$

on a l'écriture alternative

$$\begin{cases} \partial_\theta \xi = A_\omega(r)\xi + \Omega_0(r)^{-1}f, & (8.4a) \\ \xi(\cdot, \theta) = \xi(\cdot, 2\pi), & (8.4b) \end{cases}$$

et ainsi l'ensemble des solutions de l'équation (8.3a) est donné par la formule de Duhamel :

$$\xi(r, \theta) = \Omega_0(r)^{-1} \int_0^\theta e^{(\theta-\tau)A_\omega(r)} f(r, \tau) d\tau + e^{\theta A_\omega(r)} \xi^0(r), \quad (8.5)$$

où $\xi^0(r) \in \mathbb{C}^2$ est une fonction de r à déterminer afin de satisfaire les conditions de périodicité (8.3b), ce qui s'écrit :

$$\left(I - e^{2\pi A_\omega(r)} \right) \xi^0(r) = \Omega_0(r)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{(2\pi-\tau)A_\omega(r)} f(r, \tau) d\tau. \quad (8.6)$$

Nous pouvons alors généraliser ce qui a été présenté dans le cas de la rotation solide. Le problème du transport harmonique est bien posé si et seulement si il est possible d'inverser la relation (8.6) permettant de déterminer ξ^0 , c'est-à-dire si et seulement si pour tout $r \in]r_i, r_e[$, la matrice $I - e^{2\pi A_\omega(r)}$ est inversible.

Le caractère « mal posé » du problème de transport harmonique peut donc venir d'une ou plusieurs ligne(s) de courant, $\{(r^*, \theta) : 0 \leq \theta < 2\pi\}$ où $r^* \in [r_i, r_e]$, telle(s) que $I - e^{2\pi A(r^*)} \notin GL_2(\mathbb{C})$, on dit alors que l'équation de transport est mal posée le long de cette ligne. En effet, pour un tel r^* , la constante $\xi^0(r^*)$ n'est soit pas déterminée de façon unique, soit n'existe pas. On pourra se référer aux discussions similaires concernant l'équation de transport harmonique scalaire traitée dans [3].

Entant donnée une ligne de courant $\{(r, \theta) : 0 \leq \theta < 2\pi\}$, les fréquences ω pour lesquelles le transport est mal posé le long de cette ligne sont appelées fréquences de résonance du transport pour cette ligne. Ainsi, pour que l'équation de transport soit bien posée sur l'ensemble de la couronne, il faut et il suffit que la fréquence ω ne soit une fréquence de résonance d'aucune des lignes de courant qui forment le domaine D .

Ces observations nous amènent à introduire les deux notions suivantes. La première revient à s'intéresser aux fréquences pour lesquelles l'inversion du transport se passe mal, le tout à géométrie fixée.

Définition 8.2.1 (Fréquence de résonance). *On appelle ensemble des fréquences de résonance complexes de la ligne $r \in [r_i, r_e]$ l'ensemble suivant :*

$$\mathcal{K}_{res}^{\mathbb{C}}(r) := \left\{ \omega \in \mathbb{C} : I - e^{2\pi A_\omega(r)} \notin GL_2(\mathbb{C}) \right\}. \quad (8.7)$$

Lorsque l'on ne fait pas référence à une ligne en particulier, on parle de l'ensemble des fréquences de résonance complexes, défini par :

$$\mathcal{K}_{res}^{\mathbb{C}} := \bigcup_{r \in [r_i, r_e]} \mathcal{K}_{res}^{\mathbb{C}}(r). \quad (8.8)$$

Enfin, nous définissons l'ensemble des résonances comme étant les fréquences de résonance complexes qui sont sur l'axe réel :

$$\mathcal{K}_{res}(r) := \mathcal{K}_{res}^{\mathbb{C}}(r) \cap \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathcal{K}_{res} := \mathcal{K}_{res}^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}. \quad (8.9)$$

La notion de ligne résonante nous servira quant à elle plutôt lorsque nous fixerons la fréquence et que nous cherchons à discuter des propriétés géométriques, sur l'écoulement porteur et le domaine, pour lesquelles l'équation de transport n'est pas inversible.

Définition 8.2.2 (Ligne résonante). *On appelle ligne résonante à la fréquence $\omega \in \mathbb{C}$ l'ensemble suivant*

$$\mathcal{L}_{res}(\omega) := \left\{ \{(r, \theta) : 0 \leq \theta < 2\pi\} : r \in [r_i, r_e] \text{ et } \omega \in \mathcal{K}_{res}^{\mathbb{C}}(r) \right\}.$$

8.3 Description de l'ensemble des résonances \mathcal{K}_{res}

Dans cette section, nous cherchons à aller plus loin dans la description de l'ensemble des fréquences de résonance, en les reliant à l'écoulement porteur et en donnant quelques propriétés intéressantes.

Étant donnée une ligne de courant $\{(r, \theta) : 0 \leq \theta < 2\pi, r \in]r_i, r_e[$, les fréquences ω telles que la matrice $I - e^{2\pi A_\omega(r)}$ n'est pas inversible sont telles que 1 est valeur propre de $e^{2\pi A_\omega(r)}$. Or, le spectre de $e^{2\pi A_\omega(r)}$ s'exprime en fonction de celui de $A_\omega(r)$ par

$$\text{Sp}\left(e^{2\pi A_\omega(r)}\right) = e^{2\pi \text{Sp}(A_\omega(r))}.$$

Ainsi, on obtient une première description de l'ensemble des résonances complexes

$$\mathcal{K}_{res}^{\mathbb{C}} = \left\{ \omega \in \mathbb{C} : \text{Sp}(A_\omega(r)) \in i\mathbb{Z} \right\}.$$

Poursuivons par le calcul en détaillant le spectre de A_ω :

$$\begin{aligned} \text{Sp}(A_\omega(r)) &= \text{Sp}\left(i \frac{\omega}{\Omega_0(r)} I - \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 + r \frac{\Omega'_0(r)}{\Omega_0(r)} & 0 \end{pmatrix}\right) = i \frac{\omega}{\Omega_0(r)} - \text{Sp}\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 + r \frac{\Omega'_0(r)}{\Omega_0(r)} & 0 \end{pmatrix}\right), \\ &= \left\{ i \frac{\omega}{\Omega_0(r)} \pm 2i \sqrt{1 + \frac{r\Omega'_0(r)}{2\Omega_0(r)}} \right\}, \end{aligned}$$

où $\sqrt{\cdot}$ est une extension de la racine carrée aux valeurs réelles négatives par le choix arbitraire

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad \sqrt{x} = i(-x)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui nous permettra d'éviter de séparer les cas où $1 + r\Omega'_0(r)/\Omega_0(r)$ est négatif ou positif. Ce choix correspond à celui de la détermination continue de la racine carrée complexe où la coupure $-i\mathbb{R}_+$ a été choisie. En définissant la quantité $\Omega_0^*(r)$ par

$$\Omega_0^*(r) := \sqrt{2\Omega_0(r)\omega_0(r)}, \quad (8.10)$$

la racine se simplifie alors, en utilisant que $\omega_0 = 2\Omega_0 + r\Omega'_0$,

$$\pm 2i \sqrt{1 + \frac{r\Omega'_0(r)}{2\Omega_0(r)}} = \pm 2i \sqrt{\frac{2\Omega_0(r)(2\Omega_0(r) + r\Omega'_0(r))}{4\Omega_0(r)^2}} = \pm i \frac{\Omega_0^*(r)}{\Omega_0(r)}.$$

On a finalement trouvé que

$$\text{Sp}\left(e^{2\pi A_\omega(r)}\right) = \left\{ e^{2i\pi \frac{\omega + \Omega_0^*(r)}{\Omega_0(r)}}, e^{2i\pi \frac{\omega - \Omega_0^*(r)}{\Omega_0(r)}} \right\}.$$

Toujours à ligne de courant fixée $\{(r, \theta) : 0 \leq \theta < 2\pi\}$, l'équation de transport harmonique est donc bien posée le long de cette ligne de courant si et seulement si

$$1 \notin \text{Sp}\left(e^{2\pi A_\omega(r)}\right) \Leftrightarrow \frac{\omega \pm \Omega_0^*(r)}{\Omega_0(r)} \notin \mathbb{Z},$$

et on obtient donc l'expression de $\mathcal{K}_{res}^{\mathbb{C}}(r)$ suivante :

$$\mathcal{K}_{res}^{\mathbb{C}}(r) = \left(-\Omega_0^*(r) + \Omega_0(r)\mathbb{Z} \right) \cup \left(\Omega_0^*(r) + \Omega_0(r)\mathbb{Z} \right). \quad (8.11)$$

En définissant la quantité

$$\Phi_0(r) := 2\Omega_0(r)\omega_0(r), \quad (8.12)$$

la proposition évidente suivante montre que les lignes pouvant être résonantes à une fréquence réelle sont à chercher parmi les $r \in [r_i, r_e]$ tels que $\Phi_0(r) \geq 0$.

Proposition 8.3.1. *Pour tout $r \in [r_i, r_e]$, on a*

$$\Phi_0(r) < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K}_{res}(r) = \emptyset.$$

Introduisons alors une partition de l'ensemble des rayons $[r_i, r_e]$ en deux sous-ensembles selon le signe de Φ_0 :

$$I_+ := \{r \in [r_i, r_e] : \Phi_0(r) \geq 0\} \quad \text{et} \quad I_- := \{r \in [r_i, r_e] : \Phi_0(r) < 0\}.$$

Remarque 8.3.2. *Il est intéressant de noter que la quantité Φ_0 , appelée « discriminant de Rayleigh » dans la littérature, a un rapport avec la stabilité des écoulements recirculants incompressibles. Le critère de Rayleigh $\Phi_0 \geq 0$, voir [78], donne une condition nécessaire de stabilité, qui est également une condition suffisante de stabilité pour une perturbation axisymétrique. Néanmoins, ces résultats ne sont valables que pour des perturbations incompressibles, et donc ne concernent pas la propagation acoustique.*

Maintenant que nous avons l'expression de $\mathcal{K}_{res}^{\mathbb{C}}(r)$ pour un r donné, nous pouvons déduire une description plus explicite des résonances complexes $\mathcal{K}_{res}^{\mathbb{C}}$ en prenant l'union sur chaque rayon $r \in [r_i, r_e]$ des $\mathcal{K}_{res}^{\mathbb{C}}$, il vient :

$$\mathcal{K}_{res}^{\mathbb{C}} = \bigcup_{r_i \leq r \leq r_e} \mathcal{K}_{res}^{\mathbb{C}}(r) = \bigcup_{r_i \leq r \leq r_e} \{\pm\Omega_0^*(r) + n\Omega_0(r), \quad n \in \mathbb{Z}\} \quad (8.13)$$

$$= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \text{Im}(\pm\Omega_0^* + n\Omega_0), \quad (8.14)$$

où Im est la notation pour désigner l'image d'une fonction.

Remarquons que si l'ensemble I_+ est d'intérieur non vide, et que l'on exclut le cas dégénéré de l'écoulement en rotation solide, alors les hautes fréquences sont forcément des fréquences de résonances. En effet, nous avons plus précisément la proposition suivante.

Proposition 8.3.3. *S'il existe un intervalle ouvert non vide $I \subset I_+$ tel que Ω_0 ne soit pas constant sur I (l'écoulement n'est pas localement une rotation solide), alors il existe deux pulsations ω^- et ω^+ , telles que*

$$]-\infty, \omega^-] \subset \mathcal{K}_{res} \quad \text{et} \quad [\omega^+, +\infty[\subset \mathcal{K}_{res}.$$

Autrement dit, pour ω suffisamment grand, le problème de transport harmonique pour un tel écoulement circulaire est mal posé.

Preuve. Supposons Ω_0 non constant sur I , alors, par continuité, il existe deux réels $r^\pm \in I$ tels que

$$[\Omega_0^-, \Omega_0^+] \subset \text{Im}(\Omega_0),$$

où $\Omega_0^\pm = \Omega_0(r^\pm)$. Notons, puisque Ω_0^* est à valeurs réelles sur I ,

$$\omega_-^* := \inf_{r \in I} \Omega_0^*(r) \quad \text{et} \quad \omega_+^* := \sup_{r \in I} \Omega_0^*(r).$$

Alors pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, on a $n(\Omega_0^+ - \Omega_0^-) > \omega_+^* - \omega_-^*$, donc l'intervalle

$$I_n^+ := [\omega_+^* + n\Omega_0^-, \omega_-^* + n\Omega_0^+],$$

n'est pas vide et

$$I_n^+ \subset \text{Im}(\Omega_0^* + n\Omega_0) \subset \mathcal{K}_{res}.$$

En effet,

$$\inf_{r_i < r < r_e} (\Omega_0^*(r) + n\Omega_0(r)) \leq \underbrace{\Omega_0^*(r^-) + n\Omega_0(r^-)}_{=\Omega_0^-} \leq \omega_+^* + n\Omega_0^-,$$

et de la même façon,

$$\omega_-^* + n\Omega_0^+ \leq \underbrace{\Omega_0^*(r^+) + n\Omega_0(r^+)}_{=\Omega_0^+} \leq \sup_{r_i < r < r_e} (\Omega_0^*(r) + n\Omega_0(r)).$$

Il reste à remarquer que les intervalles I_n^+ et I_{n+1}^+ se recouvrent ainsi que tous les suivants pour n vérifiant

$$\omega_+^* + (n+1)\Omega_0^- \leq \omega_-^* + n\Omega_0^+ \quad \text{ou encore} \quad \frac{\omega_+^* - \omega_-^* + \Omega_0^-}{\Omega_0^+ - \Omega_0^-} \leq n,$$

ce qui montre qu'il existe ω^+ tel que

$$[\omega^+, +\infty[\subset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n^+ \subset \mathcal{K}_{res}.$$

De même, on prouve l'existence d'un réel ω^- tel que $] -\infty, \omega^-] \subset \mathcal{K}_{res}$. ■

Remarque 8.3.4. *Nous verrons avec des exemples très simples d'écoulements circulaires que lorsque $\Phi_0 \geq 0$, il n'existe pas de résultat général qui affirmerait qu'il existe toujours au moins une pulsation ω pour laquelle le problème est bien posé.*

8.4 Résolution de l'équation de transport hors résonance et estimation a priori

Après avoir mieux décrit l'ensemble des résonances, finissons le calcul de l'expression de la solution de l'équation de transport lorsque ω n'est pas une valeur de résonance. On a la proposition suivante.

Proposition 8.4.1. *Le problème de transport harmonique de Goldstein (8.3a) pour un écoulement circulaire est bien posé si et seulement si la pulsation ω n'est une pulsation de résonance pour aucune ligne de courant, c'est-à-dire si et seulement si, pour $\omega \in \mathbb{R}$,*

$$\omega \notin \mathcal{K}_{res} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \text{Im}(\pm\Omega_0^* + n\Omega_0).$$

Dans ce cas, la solution est donnée par

$$\xi(r, \theta) = \Omega_0^{-1}(r) \left(I - e^{2\pi A_\omega(r)} \right)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{\tau A_\omega(r)} f(r, \theta - \tau) d\tau, \quad (8.15)$$

où l'on peut écrire :

$$A_\omega(r) = i \frac{\omega}{\Omega_0(r)} I + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{\Omega_0'(r)}{2\Omega_0(r)}\right)^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Preuve. En multipliant par $I - e^{2\pi A_\omega(r)}$ l'expression (8.5), et en utilisant que cette matrice commute avec $e^{\theta A_\omega(r)}$, on trouve

$$\begin{aligned} (I - e^{2\pi A_\omega(r)}) \xi(r, \theta) &= \Omega_0^{-1} \left(I - e^{2\pi A_\omega(r)} \right) \int_0^\theta e^{(\theta-\tau)A_\omega(r)} f(r, \tau) d\tau \\ &\quad + e^{\theta A_\omega(r)} \Omega_0^{-1} \int_0^{2\pi} e^{(2\pi-\tau)A_\omega(r)} f(r, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Ensuite, procédant comme pour le passage de l'équation (3.23) à l'équation (3.24), on effectue dans la première intégrale le changement de variable $\tau \leftarrow \theta - \tau$ et dans la seconde $\tau \leftarrow 2\pi + \theta - \tau$, il vient :

$$\begin{aligned} (I - e^{2\pi A_\omega(r)}) \xi(r, \theta) &= \Omega_0^{-1} \left(I - e^{2\pi A_\omega(r)} \right) \int_0^\theta e^{\tau A_\omega(r)} f(r, \theta - \tau) d\tau \\ &\quad + e^{\theta A_\omega(r)} \Omega_0^{-1} \int_\theta^{2\pi+\theta} e^{(\tau-\theta)A_\omega(r)} f(r, 2\pi + \theta - \tau) d\tau \\ &= \Omega_0^{-1} \left(I - e^{2\pi A_\omega(r)} \right) \int_0^\theta e^{\tau A_\omega(r)} f(r, \theta - \tau) d\tau \\ &\quad + \Omega_0^{-1} \int_\theta^{2\pi+\theta} e^{\tau A_\omega(r)} f(r, \theta - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Puis, en découpant la seconde intégrale par la relation de Chasles, entre θ et 0, puis entre 0 et 2π et et enfin entre 2π et $2\pi + \theta$, on trouve

$$\begin{aligned} (I - e^{2\pi A_\omega(r)}) \xi(r, \theta) &= \Omega_0(r)^{-1} \left(I - e^{2\pi A_\omega(r)} \right) \int_0^\theta e^{\tau A_\omega(r)} f(r, \theta - \tau) d\tau \\ &\quad - \Omega_0^{-1}(r) \int_0^\theta e^{\tau A_\omega(r)} f(r, \theta - \tau) d\tau \\ &\quad + \Omega_0^{-1}(r) \int_0^{2\pi} e^{\tau A_\omega(r)} f(r, \theta - \tau) d\tau \\ &\quad + \Omega_0^{-1}(r) \int_{2\pi}^{2\pi+\theta} e^{\tau A_\omega(r)} f(r, \theta - \tau) d\tau \end{aligned}$$

puis,

$$\begin{aligned}
(I - e^{2\pi A_\omega(r)}) \xi(r, \theta) &= -\Omega_0(r)^{-1} e^{2\pi A_\omega(r)} \int_0^\theta e^{\tau A_\omega(r)} f(r, \theta - \tau) d\tau \\
&\quad + \Omega_0^{-1}(r) \int_0^{2\pi} e^{\tau A_\omega(r)} f(r, \theta - \tau) d\tau \\
&\quad + \Omega_0^{-1}(r) \int_0^\theta e^{(\tau+2\pi)A_\omega(r)} f(r, \theta - \tau) d\tau \\
&= \Omega_0^{-1}(r) \int_0^{2\pi} e^{\tau A_\omega(r)} f(r, \theta - \tau) d\tau.
\end{aligned}$$

On a finalement obtenu l'équation

$$(I - e^{2\pi A_\omega(r)}) \xi(r, \theta) = \Omega_0^{-1}(r) \int_0^{2\pi} e^{\tau A_\omega(r)} f(r, \theta - \tau) d\tau, \quad (8.16)$$

qu'il est possible d'inverser car on a supposé que $\omega \notin \mathcal{K}_{res}$. ■

Estimation a priori Comme dans le cas d'un écoulement domaine-remplissant, il nous sera utile d'avoir une estimation a priori, de la forme (4.1), pour étudier le problème couplé de Goldstein. À fréquence ω fixée, s'il existe des lignes résonantes, i.e. si $\omega \in \mathcal{K}_{res}$, alors une telle estimation est impossible. Nous nous plaçons donc le cas où $\omega \notin \mathcal{K}_{res}$.

Comme dans le cas d'un écoulement domaine-remplissant, c'est le fait d'avoir ξ naturellement exprimé le long des lignes de courant de l'écoulement porteur qui nous aide à en donner une estimation. Dans ce cas-ci, l'expression de ξ est plus explicite car les coefficients des équations ne dépendent pas de l'abscisse curviligne le long de ces lignes, ici θ . Cependant, c'est la condition de périodicité induisant de possibles résonances qui complique les choses. Le petit lemme suivant donne l'expression des exponentielles de matrices qui nous serviront pour exprimer plus explicitement ξ .

Lemme 8.4.2. *Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, $r \in [r_i, r_e]$,*

$$\exp(\tau A_\omega(r)) = \exp\left(i \frac{\tau \omega}{\Omega_0(r)} I + \begin{pmatrix} 0 & 2\tau \\ -\tau \frac{\Phi_0(r)}{2\Omega_0(r)^2} & 0 \end{pmatrix}\right) = e^{i \frac{\tau \omega}{\Omega_0(r)}} E(r, \tau),$$

où $E(r, \tau)$ est définie par :

$$\text{si } r \in I_+, \quad E(r, \tau) := \cos\left(\frac{\sqrt{\Phi_0(r)}}{\Omega_0(r)} \tau\right) I + \sin\left(\frac{\sqrt{\Phi_0(r)}}{\Omega_0(r)} \tau\right) \begin{pmatrix} 0 & 2\frac{\Omega_0(r)}{\sqrt{\Phi_0(r)}} \\ -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\Phi_0(r)}}{\Omega_0(r)} & 0 \end{pmatrix}.$$

et

$$\text{si } r \in I_-, \quad E(r, \tau) := \cosh\left(\frac{\sqrt{-\Phi_0(r)}}{\Omega_0(r)} \tau\right) I + \sinh\left(\frac{\sqrt{-\Phi_0(r)}}{\Omega_0(r)} \tau\right) \begin{pmatrix} 0 & 2\frac{\Omega_0(r)}{\sqrt{-\Phi_0(r)}} \\ \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-\Phi_0(r)}}{\Omega_0(r)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Preuve. La preuve est directe par le calcul des puissances. Soient deux réels a et b , alors pour

tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}^{2n} = (ab)^n I \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}^{2n+1} = (ab)^n \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

et donc,

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(ab)^n}{(2n)!} I + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(ab)^n}{(2n+1)!} \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas où $ab < 0$, il vient donc :

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \cos(\sqrt{-ab}) I + \frac{\sin(\sqrt{-ab})}{\sqrt{-ab}} \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

expression qui se prolonge naturellement lorsque a ou b tend vers 0.

Dans le cas où $ab > 0$, il vient

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \cosh(\sqrt{ab}) I + \frac{\sinh(\sqrt{ab})}{\sqrt{ab}} \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste qu'à appliquer ces formules avec $a := 2\tau$ et $b := -\tau\Phi_0(r)/2\Omega_0(r)^2$ selon les cas. Par définition, pour $r \in I_+$, on a $\Phi_0(r) \geq 0$, et donc $ab = -\tau^2\Phi_0(r)/\Omega_0(r)^2 \leq 0$, et pour $r \in I_-$, on a $\Phi_0(r) \leq 0$ et donc $ab = -\tau^2\Phi_0(r)/\Omega_0(r)^2 \geq 0$. ■

De ce calcul, nous déduisons la proposition suivante, donnant l'estimation a priori recherchée.

Proposition 8.4.3. *Lorsque $\omega \notin \mathcal{K}_{res}$, pour tout second membre $f \in L^2(D)^2$, l'unique solution ξ du problème de transport harmonique de Goldstein (8.3a) satisfait l'estimation a priori suivante*

$$\|\xi\|_{L^2(D)^2} \leq C(\mathbf{v}_0, \omega) \|f\|_{L^2(D)^2}. \quad (8.17)$$

La constante $C(\mathbf{v}_0, \omega)$ est donnée par :

$$C(\mathbf{v}_0, \omega) := 4\pi \sup_{r_i < r < r_e} \frac{\max\{4\pi, |\Omega_0^*(r)|/\Omega_0(r)\}}{\Omega_0(r)|\Delta_\omega(r)|} \left| e^{-2i\pi \frac{\Omega_0^*(r)}{\Omega_0(r)}} \right|, \quad (8.18)$$

où

$$\Delta_\omega(r) := \left(1 - e^{2i\pi \frac{\omega + \Omega_0^*(r)}{\Omega_0(r)}} \right) \left(1 - e^{2i\pi \frac{\omega - \Omega_0^*(r)}{\Omega_0(r)}} \right).$$

Preuve. Soit $r \in [r_i, r_e]$, nous cherchons à expliciter la matrice intervenant dans (8.15) :

$$\begin{aligned} (I - e^{2\pi A_\omega(r)})^{-1} e^{\tau A_\omega(r)} &= (e^{-\tau A_\omega(r)} - e^{(2\pi - \tau)A_\omega(r)})^{-1}, \\ &= e^{i \frac{\tau\omega}{\Omega_0(r)}} \left(E(r, -\tau) - e^{\frac{2i\pi\omega}{\Omega_0(r)}} E(r, 2\pi - \tau) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Pour cela, nous commençons par distinguer les cas d'un rayon r qui est dans I_+ , où $\Phi_0(r) \geq 0$ du cas où $r \in I_-$, correspondant à $\Phi_0(r) < 0$.

1. Cas $r \in I_+$. En utilisant comme intermédiaires pour condenser les calculs les notations suivantes

$$\alpha := \frac{\sqrt{\Phi_0(r)}}{\Omega_0(r)} = \frac{\Omega_0^*(r)}{\Omega_0(r)} \quad \text{et} \quad \beta := \frac{\omega}{\Omega_0(r)},$$

la matrice $E(r, -\tau) - e^{\frac{2i\pi\omega}{\Omega_0(r)}} E(r, 2\pi - \tau)$ s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} & E(r, -\tau) - e^{\frac{2i\pi\omega}{\Omega_0(r)}} E(r, 2\pi - \tau) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha\tau) - e^{2i\pi\beta} \cos(\alpha(2\pi - \tau)) & -\frac{2}{\alpha} (\sin(\alpha\tau) + e^{2i\pi\beta} \sin(\alpha(2\pi - \tau))) \\ \frac{\alpha}{2} (\sin(\alpha\tau) + e^{2i\pi\beta} \sin(\alpha(2\pi - \tau))) & \cos(\alpha\tau) - e^{2i\pi\beta} \cos(\alpha(2\pi - \tau)) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et a pour déterminant $\Delta_\omega = \det(E(r, -\tau) - e^{2i\pi\beta} E(r, 2\pi - \tau))$, qui s'exprime par

$$\begin{aligned} \Delta_\omega &= \left\{ \cos(\alpha\tau) - e^{2i\pi\beta} \cos(\alpha(2\pi - \tau)) \right\}^2 + \left\{ \sin(\alpha\tau) + e^{2i\pi\beta} \sin(\alpha(2\pi - \tau)) \right\}^2 \\ &= 1 - 2 \left\{ \cos(\alpha\tau) \cos(\alpha(2\pi - \tau)) - \sin(\alpha\tau) \sin(\alpha(2\pi - \tau)) \right\} e^{2i\pi\beta} + \left(e^{2i\pi\beta} \right)^2 \\ &= 1 - 2 \cos(2\pi\alpha) e^{2i\pi\beta} + \left(e^{2i\pi\beta} \right)^2. \end{aligned}$$

On remarque que Δ_ω ne dépend pas de τ et qu'il se factorise en

$$\Delta_\omega(r) = \left(1 - e^{2i\pi(\alpha+\beta)} \right) \left(1 - e^{2i\pi(\beta-\alpha)} \right) = \left(1 - e^{2i\pi \frac{\omega+\Omega_0^*(r)}{\Omega_0(r)}} \right) \left(1 - e^{2i\pi \frac{\omega-\Omega_0^*(r)}{\Omega_0(r)}} \right).$$

On constate naturellement que ce déterminant s'annule lorsque ω est dans l'ensemble $\mathcal{K}_{res}(r)$ des résonances de la ligne $\{(r, \theta) : 0 \leq \theta < 2\pi\}$. Ainsi, nous obtenons l'expression suivante de l'inverse

$$\left(e^{-\tau A_\omega(r)} - e^{(2\pi-\tau)A_\omega(r)} \right)^{-1} = \frac{e^{i\tau\beta}}{\Delta_\omega(r)} \left(E(r, \tau) - e^{2i\pi\beta} E(r, \tau - 2\pi) \right).$$

Un à un, majorons les coefficients de cette matrice. En majorant les cos et sin par 1 on trouve

- $\left| \frac{e^{i\tau\beta}}{\Delta_\omega(r)} \left(\cos(\alpha\tau) - \cos(\alpha(2\pi - \tau)) e^{2i\pi\beta} \right) \right| \leq \frac{2}{|\Delta_\omega(r)|},$
- $\left| \frac{\alpha}{2} \frac{e^{i\tau\beta}}{\Delta_\omega(r)} \left(\sin(\alpha\tau) + \sin(\alpha(2\pi - \tau)) e^{2i\pi\beta} \right) \right| \leq \frac{\alpha}{|\Delta_\omega(r)|}$

puis, en majorant plus finement au voisinage de 0, en utilisant $|\sin(t)| \leq |t|$, il vient pour le dernier coefficient :

- $\left| \frac{2}{\alpha} \frac{e^{i\tau\beta}}{\Delta_\omega(r)} \left(\sin(\alpha\tau) + \sin(\alpha(2\pi - \tau)) e^{2i\pi\beta} \right) \right| \leq \frac{2(\tau + (2\pi - \tau))}{|\Delta_\omega(r)|} \leq \frac{4\pi}{|\Delta_\omega(r)|}.$

Tous les coefficients de la matrices sont donc majorés par

$$\frac{\max\{4\pi, \alpha\}}{|\Delta_\omega(r)|} = \frac{\max\left\{4\pi, \frac{\sqrt{\Phi_0(r)}}{\Omega_0(r)}\right\}}{|\Delta_\omega(r)|}. \quad (8.19)$$

2. Cas $r \in I_-$. Ce cas est moins intéressant du point de vue des résonances, car nous savons que sur une ligne de rayon r , il ne peut pas y avoir de résonance. Néanmoins, il est important d'avoir une estimation de ξ également dans ce cas là. On adopte de même les notations intermédiaires

$$\alpha := \frac{\sqrt{-\Phi_0(r)}}{\Omega_0(r)} \quad \text{et} \quad \beta := \frac{\omega}{\Omega_0(r)}.$$

La matrice $E(r, -\tau) - e^{\frac{2i\pi\omega}{\Omega_0(r)}} E(r, 2\pi - \tau)$ s'écrit alors sous la forme

$$\begin{aligned} & E(r, -\tau) - e^{\frac{2i\pi\omega}{\Omega_0(r)}} E(r, 2\pi - \tau) \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\alpha\tau) - e^{2i\pi\beta} \cosh(\alpha(2\pi - \tau)) & -\frac{2}{\alpha} \left(\sinh(\alpha\tau) + e^{2i\pi\beta} \sinh(\alpha(2\pi - \tau)) \right) \\ -\frac{\alpha}{2} \left(\sinh(\alpha\tau) + e^{2i\pi\beta} \sinh(\alpha(2\pi - \tau)) \right) & \cosh(\alpha\tau) - e^{2i\pi\beta} \cosh(\alpha(2\pi - \tau)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous calculons son déterminant Δ_ω , qui à présent ne peut pas s'annuler,

$$\begin{aligned} \Delta_\omega &= \left\{ \cosh(\alpha\tau) - e^{2i\pi\beta} \cosh(\alpha(2\pi - \tau)) \right\}^2 - \left\{ \sinh(\alpha\tau) + e^{2i\pi\beta} \sinh(\alpha(2\pi - \tau)) \right\}^2 \\ &= 1 - 2 \left\{ \cosh(\alpha\tau) \cosh(\alpha(2\pi - \tau)) + \sinh(\alpha\tau) \sinh(\alpha(2\pi - \tau)) \right\} e^{2i\pi\beta} + \left(e^{2i\pi\beta} \right)^2 \\ &= 1 - 2 \cos(2\pi\alpha) e^{2i\pi\beta} + \left(e^{2i\pi\beta} \right)^2. \end{aligned}$$

De nouveau, nous en avons une factorisation intéressante,

$$\Delta_\omega(r) = \left(1 - e^{2i\pi(i\beta+\alpha)} \right) \left(1 - e^{2i\pi(i\beta-\alpha)} \right) = \left(1 - e^{2i\pi \frac{\omega+i\sqrt{-\Phi_0(r)}}{\Omega_0(r)}} \right) \left(1 - e^{2i\pi \frac{\omega-i\sqrt{-\Phi_0(r)}}{\Omega_0(r)}} \right).$$

La convention que nous avons prise pour la racine carrée :

$$\Omega_0^*(r) = i\sqrt{-\Phi_0(r)},$$

permet d'unifier les écritures de Δ_ω trouvées dans les cas $r \in I_+$ et $r \in I_-$:

$$\Delta_\omega(r) = \left(1 - e^{2i\pi \frac{\omega+\Omega_0^*(r)}{\Omega_0(r)}} \right) \left(1 - e^{2i\pi \frac{\omega-\Omega_0^*(r)}{\Omega_0(r)}} \right),$$

où $\Omega_0^*(r)$ peut éventuellement être complexe. Nous en déduisons la même expression de l'inverse

$$\left(e^{-\tau A_\omega(r)} - e^{(2\pi-\tau)A_\omega(r)} \right)^{-1} = \frac{e^{i \frac{\tau\omega}{\Omega_0(r)}}}{\Delta_\omega(r)} \left(E(r, \tau) - e^{\frac{2i\pi\omega}{\Omega_0(r)}} E(r, \tau - 2\pi) \right).$$

Passons à la majoration des coefficients de la matrice. En utilisant les majorations sui-

vantes, pour $x \geq 0$, $\cosh(x) \leq e^x$, $\sinh(x) \leq e^x$, on a

- $\left| \frac{e^{i\tau\beta}}{\Delta_\omega(r)} (\cosh(\alpha\tau) - \cosh(\alpha(2\pi - \tau))e^{2i\pi\beta}) \right| \leq \frac{2e^{2\pi\alpha}}{|\Delta_\omega(r)|},$
- $\left| \frac{\alpha}{2} \frac{e^{i\tau\beta}}{\Delta_\omega(r)} (\sinh(\alpha\tau) + \sinh(\alpha(2\pi - \tau))e^{2i\pi\beta}) \right| \leq \frac{\alpha e^{2\pi\alpha}}{|\Delta_\omega(r)|},$

puis, avec la majoration pour $x \geq 0$, $\sinh(x) \leq xe^x$:

- $\left| \frac{2}{\alpha} \frac{e^{i\tau\beta}}{\Delta_\omega(r)} (\sinh(\alpha\tau) + \sinh(\alpha(2\pi - \tau))e^{2i\pi\beta}) \right| \leq \frac{2e^{2\pi\alpha}}{|\Delta_\omega(r)|}.$

Ainsi, tous les coefficients de la matrice sont majorés par

$$\frac{\max\{2, \alpha\}}{|\Delta_\omega(r)|} e^{2\pi\alpha} = \frac{\max\left\{2, -i \frac{\sqrt{-\Phi_0(r)}}{\Omega_0(r)}\right\}}{|\Delta_\omega(r)|} e^{2\pi \frac{\sqrt{-\Phi_0(r)}}{\Omega_0(r)}} \quad (8.20)$$

On remarque alors que l'on peut unifier les deux cas $r \in I_+$ et $r \in I_-$. En effet, les majorants trouvés (8.19) et (8.20) s'écrivent, pour $r \in I_+$, on a $\Omega_0^*(r) = \sqrt{\Phi_0(r)}$, donc,

$$\frac{\max\{4\pi, \sqrt{\Phi_0(r)}/\Omega_0(r)\}}{|\Delta_\omega(r)|} = \frac{\max\{4\pi, |\Omega_0^*(r)|/\Omega_0(r)\}}{|\Delta_\omega(r)|} \left| e^{-2i\pi \frac{\Omega_0^*(r)}{\Omega_0(r)}} \right|$$

et pour $r \in I_-$, $\Omega_0^*(r) = i\sqrt{-\Phi_0(r)}$ et donc

$$\frac{\max\{2, \sqrt{-\Phi_0(r)}/\Omega_0(r)\}}{|\Delta_\omega(r)|} e^{2\pi \frac{\sqrt{-\Phi_0(r)}}{\Omega_0(r)}} = \frac{\max\{2, |\Omega_0^*(r)|/\Omega_0(r)\}}{|\Delta_\omega(r)|} \left| e^{-2i\pi \frac{\Omega_0^*(r)}{\Omega_0(r)}} \right|.$$

Finalement, tous les coefficients de la matrices $(e^{-\tau A_\omega(r)} - e^{(2\pi-\tau)A_\omega(r)})^{-1}$ sont majorés, quelque soit $r \in [r_i, r_e]$ par :

$$\frac{\max\{4\pi, |\Omega_0^*(r)|/\Omega_0(r)\}}{|\Delta_\omega(r)|} \left| e^{-2i\pi \frac{\Omega_0^*(r)}{\Omega_0(r)}} \right|.$$

Nous en déduisons que pour tout $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^2$,

$$\begin{aligned} \left| (e^{-\tau A_\omega(r)} - e^{(2\pi-\tau)A_\omega(r)})^{-1} \mathbf{X} \right|^2 &\leq \left\| (e^{-\tau A_\omega(r)} - e^{(2\pi-\tau)A_\omega(r)})^{-1} \right\|_2^2 |\mathbf{X}|^2 \\ &\leq 4 \left(\frac{\max\{4\pi, |\Omega_0^*(r)|/\Omega_0(r)\}}{|\Delta_\omega(r)|} \left| e^{-2i\pi \frac{\Omega_0^*(r)}{\Omega_0(r)}} \right| \right)^2 |\mathbf{X}|^2. \end{aligned}$$

Finalement, nous avons la majoration de $|\xi(r, \theta)|$:

$$\begin{aligned} |\xi(r, \theta)|^2 &= \Omega_0(r)^{-2} \left| \int_0^{2\pi} \left(e^{-\tau A_\omega(r)} - e^{(2\pi-\tau)A_\omega(r)} \right)^{-1} f(r, 2\pi - \tau) d\tau \right|^2 \\ &\leq 2\pi \left(\frac{2 \max\{4\pi, |\Omega_0^*(r)|/\Omega_0(r)\}}{\Omega_0(r)|\Delta_\omega(r)|} \left| e^{-2i\pi \frac{\Omega_0^*(r)}{\Omega_0(r)}} \right| \right)^2 \int_0^{2\pi} |f(r, \theta - \tau)|^2 d\tau, \end{aligned}$$

puis la preuve se termine en intégrant en r et en θ . ■

Remarque 8.4.4. La constante $C(\mathbf{v}_0, \omega)$ obtenue peut être améliorée dans certains cas, par exemple si $\omega_0 \neq 0$, par diagonalisation de (8.3a) il vient :

$$C(\mathbf{v}_0, \omega) = 2\pi \sup_{r_i < r < r_e} \frac{\frac{\Omega_0^*(r)}{2\Omega_0(r)} + \frac{2\Omega_0(r)}{\Omega_0^*}}{\Omega_0(r)} \left(\left| 1 - e^{2i\pi \frac{\omega - \Omega_0^*(r)}{\Omega_0(r)}} \right|^{-2} + \left| 1 - e^{2i\pi \frac{\omega + \Omega_0^*(r)}{\Omega_0(r)}} \right|^{-2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Cependant, cette constante tend vers l'infini lorsque l'écoulement se rapproche d'un écoulement irrotationnel, car ceci implique que $\Omega_0^*(r) = \sqrt{2\Omega_0(r)\omega_0(r)} \rightarrow 0$. Notre point de vue étant celui de la perturbation d'un écoulement irrotationnel, nous lui préférons l'estimation donnée en (8.18).

Remarque 8.4.5. Les fréquences de résonances $\omega \in \mathcal{K}_{res}$ du problème sont exactement les valeurs telles que Δ_ω s'annule sur $[r_i, r_e]$, ce qui montre que la constante de continuité obtenue tend vers l'infini lorsque ω s'approche de \mathcal{K}_{res} .

8.5 Étude de quelques cas d'écoulements particuliers

Après avoir discuté de façon générale du caractère bien posé de l'équation de transport harmonique pour un écoulement circulaire, nous souhaitons illustrer nos propos dans des cas particuliers simples pour lesquels nous nous attacherons à décrire plus précisément l'ensemble des résonances \mathcal{K}_{res} ainsi que le comportement de la constante $C(\mathbf{v}_0, \omega)$ intervenant dans l'estimation (8.17). Nous nous intéresserons d'abord à un écoulement en rotation solide, que nous avons déjà abordé à la section 3.3.2 lors de la présentation de géométries et d'écoulements simplifiés. Puis, conformément à l'esprit de notre approche perturbative, nous traiterons le cas d'un écoulement potentiel, que nous perturberons ensuite par un faible écoulement rotationnel. Pour finir, nous considérerons un écoulement un peu plus complexe, dit tourbillon de Lamb-Oseen, utilisé par exemple dans la modélisation de tornades [79]. Il s'agit d'aller vers un écoulement plus complexe et complètement rotationnel tout en restant dans le cadre simple d'une vitesse orthoradiale.

Fluide en rotation solide. Pour un écoulement en rotation solide, c'est-à-dire dont la vitesse s'écrit $\mathbf{v}_0 = r\Omega_0 \mathbf{e}_\theta$ où la vitesse angulaire $\Omega_0 > 0$ est constante, la quantité Ω_0^* est constante et s'exprime par

$$\Omega_0^*(r) = 2\Omega_0.$$

Remarquons que dans ce cas

$$\Phi_0 = 2\Omega_0\omega_0 = 2\Omega_0(2\Omega_0 + r\Omega_0') = 4\Omega_0^2 \geq 0,$$

et donc que $\mathcal{K}_{res}^C = \mathcal{K}_{res}$ qui est ainsi donné par :

$$\mathcal{K}_{res} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \text{Im} \left\{ \pm 2\Omega_0 + n\Omega_0 \right\} = \Omega_0 \mathbb{Z}.$$

Remarquons que ce résultat est en accord avec les valeurs qui nous avons exclues pour isoler la constante $\hat{\xi}^0$ dans l'équation (3.22). De plus, il s'agit du cas exceptionnel d'écoulements circulaires tels que $\Phi_0 \geq 0$ non pris en compte par la proposition 8.3.3 pour lequel les hautes fréquences ne sont pas forcément des fréquences de résonances, car le spectre est ponctuel ici.

Pour une rotation solide, la constante $C(\omega, \mathbf{v}_0)$ s'écrit simplement comme suit

$$C(\mathbf{v}_0, \omega) = \frac{1}{\Omega_0} \left(\frac{4\pi}{\sin\left(\pi \frac{\omega}{\Omega_0}\right)} \right)^2.$$

Sur la figure 8.2, nous représentons cette constante en fonction de la pulsation ω . L'ensemble discret formé de points rouges représente l'ensemble des résonances \mathcal{K}_{res} , et naturellement, lorsque ω approche des valeurs pour lesquelles le problème du transport harmonique est mal posé, la constante d'estimation explose jusqu'à ne plus être définie en ces valeurs.

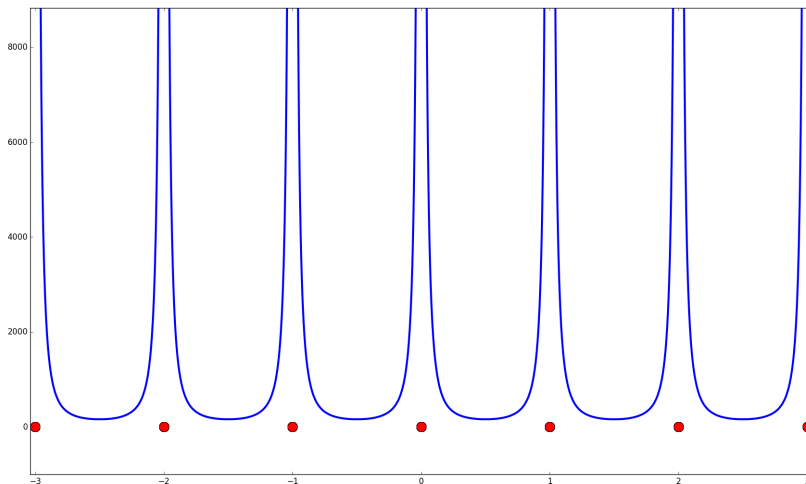


FIGURE 8.2 – Constante $C(\mathbf{v}_0, \omega)$ de l'estimation a priori en bleu dans le cas d'un fluide en rotation solide. En rouge, l'ensemble des résonances \mathcal{K}_{res} .

Il s'agit du spectre le plus simple que nous puissions obtenir et bien que notre problème vectoriel de transport harmonique ne se découple pas, nous retrouvons le même ensemble discret de valeurs menant au caractère mal posé du problème de transport scalaire traité dans [3] (section 1.12).

Fluide en écoulement irrotationnel perturbé. Considérons à présent un écoulement circulaire potentiel. Un tel écoulement s'écrit sous la forme

$$\mathbf{v}_0 = \frac{a}{r} \mathbf{e}_\theta,$$

où a est un réel non nul, que nous choisissons positif : $a > 0$.

Intéressons nous dans un premier temps à l'ensemble des résonances. Nous avons la simplification suivante :

$$\Omega_0^*(r) = \sqrt{2\Omega_0(r)\omega_0(r)} = 0,$$

qui montre que $\mathcal{K}_{res}^{\mathbb{C}} = \mathcal{K}_{res}$ qui s'exprime alors par :

$$\mathcal{K}_{res} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} n \left[\frac{a}{r_e^2}, \frac{a}{r_i^2} \right].$$

Ainsi, \mathcal{K}_{res} est une union d'intervalles fermés dont deux sont de la forme $]-\infty, \omega^-]$ et $[\omega^+, +\infty[$. La pulsation ω^+ est donnée par

$$\omega^+ = \bar{n} \frac{a}{r_i^2},$$

et où \bar{n} est le plus petit entier n tel qu'il y ait recouvrement des deux intervalles consécutifs se suivant $n[a/r_e^2, a/r_i^2]$ et $(n+1)[a/r_e^2, a/r_i^2]$, i.e.

$$(n+1) \frac{a}{r_e^2} \leq n \frac{a}{r_i^2} \iff \frac{1}{(r_e/r_i)^2 - 1} \leq n.$$

Finalement

$$\omega^+ = \left\lceil \frac{1}{(r_e/r_i)^2 - 1} \right\rceil \frac{a}{r_e^2}.$$

On trouve de même l'expression de la pulsation ω^- :

$$\omega^- = \left\lfloor \frac{1}{(r_e/r_i)^2 - 1} \right\rfloor \frac{a}{r_i^2},$$

où $\lceil x \rceil$ est la partie entière supérieure de $x \in \mathbb{R}$.

Afin d'illustrer le recouvrement des intervalles $n[a/r_e^2, a/r_i^2]$ formant \mathcal{K}_{res} , nous les représentons sur la figure 8.3, le n -ième à l'ordonnée $|n|+1$, ceux correspondant aux n négatifs étant situés sur la moitié gauche de la figure et ceux correspondant aux n positifs sur la moitié droite. A l'ordonnée 0, nous représentons le projeté de tous ces intervalles, c'est-à-dire \mathcal{K}_{res} .

Sur la figure 8.4, où en abscisse se trouve la pulsation ω , nous avons représenté en rouge l'ensemble \mathcal{K}_{res} à une ordonnée quelconque et en bleu la constante $C(\mathbf{v}_0, \omega)$. Comme précédemment, la constante $C(\mathbf{v}_0, \omega)$ explose lorsque ω s'approche de l'ensemble \mathcal{K}_{res} sur lequel elle n'est plus définie.

À présent, perturbons un peu cet écoulement $\mathbf{v}_0 = a/r\mathbf{e}_\theta$ par un écoulement rotationnel, à titre d'exemple, prenons simplement une perturbation constante ε :

$$\mathbf{v}_0(r) = \frac{a}{r} + \varepsilon.$$

Le rotationnel de cet écoulement est donné par

$$\omega_0(r) = \frac{\varepsilon}{r},$$

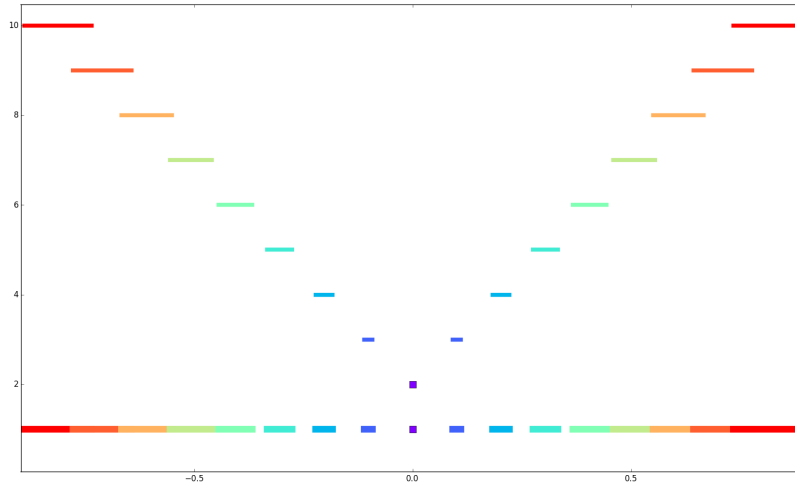


FIGURE 8.3 – Projection des segments $n[a/r_e^2, a/r_i^2]$, $n \in \mathbb{Z}$ pour former l'ensemble des résonances \mathcal{K}_{res} dans le cas d'un écoulement irrotationnel dans la couronne.

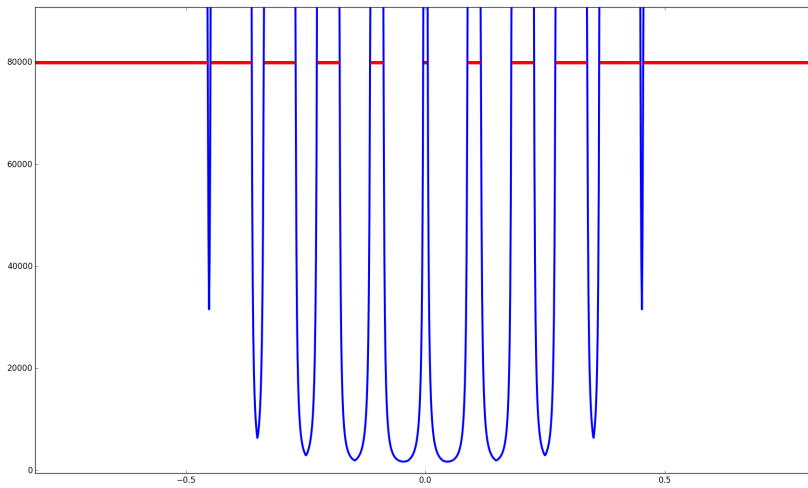


FIGURE 8.4 – Constante $C(v_0, \omega)$ de l'estimation a priori en bleu dans le cas d'un fluide en rotation solide. En rouge, l'ensemble des résonances \mathcal{K}_{res}

dont on déduit que

$$\Phi_0(r) = 2\Omega_0(r)\omega_0(r) = 2\frac{\varepsilon}{r^2}\left(\frac{a}{r} + \varepsilon\right).$$

Ainsi, pour ε petit devant a , le signe de Φ_0 est celui de a . Pour $\varepsilon < 0$, on a que $\mathcal{K}_{res} = \emptyset$, étudions le cas $\varepsilon > 0$. L'ensemble des résonance s'exprime dans ce cas par

$$\mathcal{K}_{res} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ \pm \frac{1}{r} \sqrt{2\varepsilon \left(\frac{a}{r} + \varepsilon\right)} + \frac{n}{r} \left(\frac{a}{r} + \varepsilon\right), r \in [r_i, r_e] \right\},$$

qui n'est plus si simple à décrire qualitativement. Nous le représentons sur la figure 8.5, où l'on trace à l'ordonnée $|n| + 2$ les segments $\text{Im}(\Omega_0^* + n\Omega_0)$ et leur projection formant \mathcal{K}_{res}^+ à l'ordonnée 1, à l'ordonnée $-|n| - 2$ les segments $\text{Im}(-\Omega_0^* + n\Omega_0)$ et leur projection formant \mathcal{K}_{res}^- à l'ordonnée -1 ; finalement, à l'ordonnée 0 est représenté l'ensemble des résonances \mathcal{K}_{res} , union de \mathcal{K}_{res}^+ et de \mathcal{K}_{res}^- . Le cas $\varepsilon = 0$ précédemment présenté donne $\mathcal{K}_{res}^- = \mathcal{K}_{res}^+$,

c'est pourquoi il n'y a que la partie supérieure du graphique qui est donnée sur la figure 8.3 ($\varepsilon = 0$). On remarque alors que la dissymétrie introduite avec la perturbation rotationnelle a tendance à faire grandir \mathcal{K}_{res} .

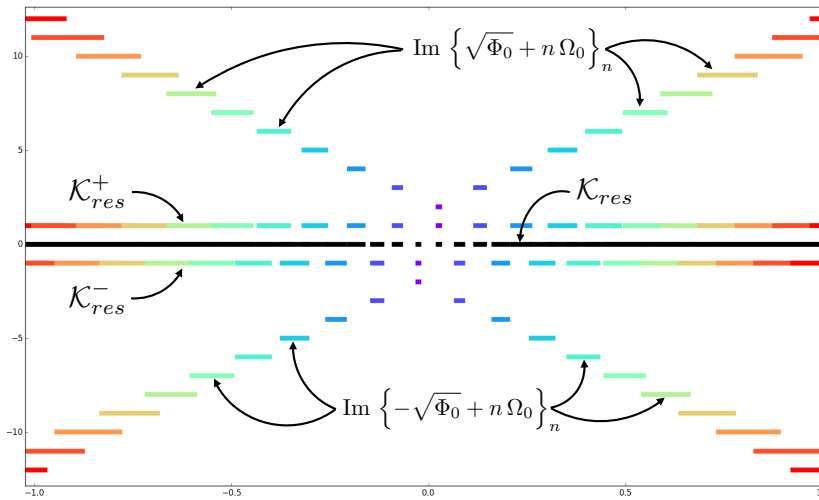


FIGURE 8.5 – Projection des segments $\text{Im}(\pm\Omega_0^* + n\Omega_0)$, pour $n \in \mathbb{Z}$, dans le cas d'un écoulement irrotationnel perturbé, dans une couronne.

Pour un écoulement irrotationnel, nous pouvons énoncer un résultat positif quant à l'existence de basses fréquences non résonantes. En effet, l'expression simple de \mathcal{K}_{res} obtenue permet d'affirmer que proche de 0, il existe toujours des fréquences non résonantes. Nous résumons cela dans la proposition immédiate suivante.

Proposition 8.5.1. *Pour un écoulement circulaire irrotationnel, dont la vitesse s'écrit*

$$v_0(r) = \frac{a}{r}, \quad a > 0,$$

on a

$$\left] -\frac{a}{r_e^2}, 0 \right[\subset \mathbb{R} \setminus \mathcal{K}_{res} \quad \text{et} \quad \left] 0, \frac{a}{r_e^2} \right[\subset \mathbb{R} \setminus \mathcal{K}_{res}.$$

Remarque 8.5.2. *Résoudre l'équation de transport harmonique dans le cadre d'un écoulement irrotationnel n'est pas intéressant pour nous du point de vu du couplage. En effet, nous avons vu que pour un tel écoulement, $\xi = \mathbf{0}$ et les équations de Goldstein se réduisent à celle d'Helmholtz convectée. Cependant, par un argument de continuité, une perturbation suffisamment petite d'un écoulement irrotationnel continuera à garantir l'existence de fréquences non résonantes au voisinage de 0.*

Cas du tourbillon de Lamb-Oseen. Illustrons à présent un cas de tourbillon complètement rotationnel utilisé parfois en mécanique des fluides. Nous avons vu précédemment que l'introduction de rotationnel, hors du cas dégénéré de la rotation solide, a tendance à remplir l'ensemble des fréquences résonantes. Nous avons annoncé dans la remarque 8.3.4 que l'on ne peut garantir l'existence de fréquences pour lesquelles le problème du transport

harmonique serait inversible. Nous allons voir qu'avec le tourbillon de Lamb-Oseen, ce cas problématique peut très bien arriver. Considérons l'écoulement dont la vitesse est donnée par

$$v_0(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-(r/r_c)^2}\right),$$

où la recirculation $\Gamma > 0$ et $r_c > 0$ est un rayon caractéristique. Ce profil est présenté sur la figure 8.6 par la courbe verte tandis que la courbe rouge représente le rotationnel qui s'exprime par

$$\omega_0(r) = \frac{\Gamma}{\pi r_c^2} e^{-(r/r_c)^2},$$

et qui est donc plus concentré au centre du disque de rayon critique r_c et tend vers 0 lorsque l'on s'éloigne du centre. Remarquons que nous avons également $\Phi_0 \geq 0$ pour cet écoulement

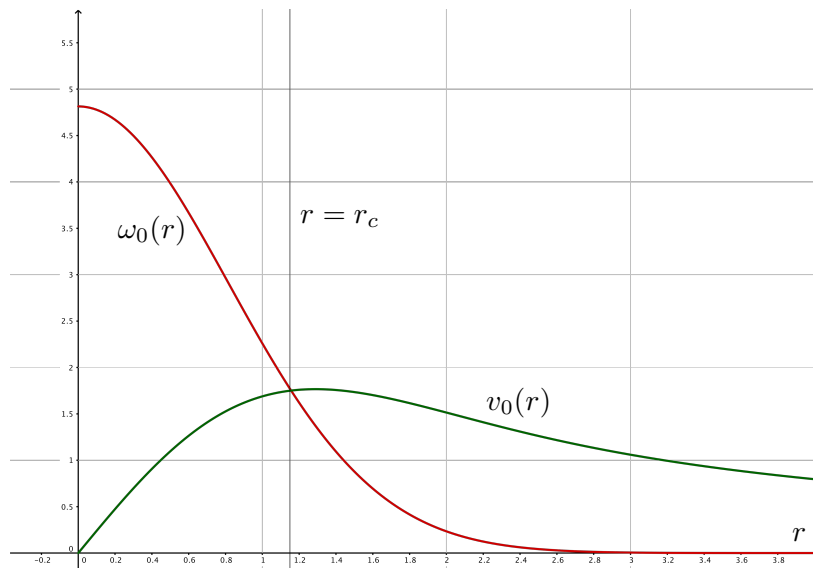


FIGURE 8.6 – Profil de vitesse $v_0(r)$ du tourbillon de Lamb-Oseen en vert et de son rotationnel $\omega_0(r)$ en rouge.

et que donc $\mathcal{K}_{res}^{\mathbb{C}} = \mathcal{K}_{res}$. Puis, comme pour les écoulements présentés précédemment, nous représentons sur la figure 8.7 les différentes parties de l'ensemble des résonances \mathcal{K}_{res} . On constate ici une superposition totale de toutes ces parties de sorte que

$$\mathcal{K}_{res} = \mathbb{R},$$

et donc il n'y a pas de pulsation ω telle que le problème de transport harmonique de Goldstein soit bien posé.

8.6 Résolution dans le cas résonant : lignes résonantes

L'étude du cas particulier du tourbillon de Lamb-Oseen nous indique qu'il n'est pas compliqué de trouver des écoulements recirculants dans la couronne pour lesquels le problème du transport harmonique est mal posé à toutes les fréquences : $\mathcal{K}_{res} = \mathbb{R}$. Nous nous plaçons dans ce cas, fixons $\omega \in \mathcal{K}_{res}$, et intéressons nous à ce que l'on peut dire en terme de lignes résonantes et de la définition d'une solution à l'équation de transport harmonique.

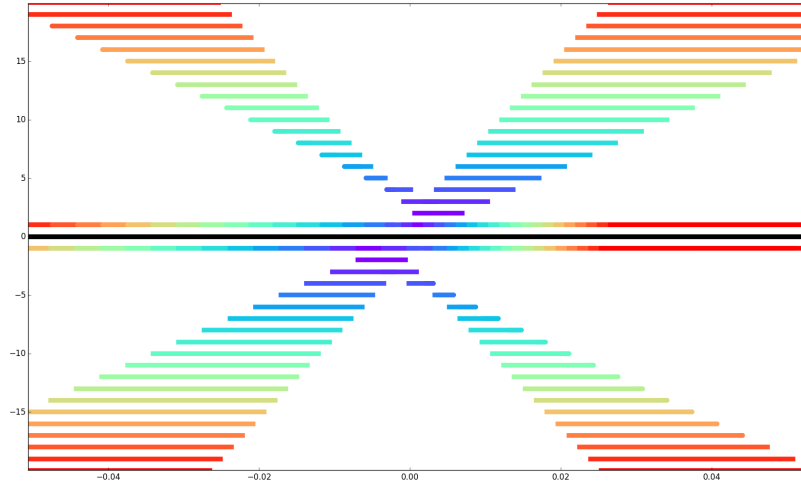


FIGURE 8.7 – Projection des segments $\text{Im}(\pm\Omega_0^* + n\Omega_0)$, pour $n \in \mathbb{Z}$, dans le cas du tourbillon de Lamb-Oseen.

Dans un premier temps énonçons ce qui se passe dans le cas d'un écoulement en rotation solide, ce qui apparaîtra comme un cas dégénéré par la suite. La proposition suivante est immédiate.

Proposition 8.6.1 (Rotation solide). *Pour un écoulement en rotation solide (Ω_0 constant), rappelons que $\mathcal{K}_{res}^{\mathbb{C}} = \mathcal{K}_{res} = \Omega_0 \mathbb{Z}$, et on a l'alternative suivante :*

- Soit $\omega \in \mathcal{K}_{res}$, et alors toutes les lignes sont résonantes,

$$\mathcal{L}_{res}(\omega) = \left\{ (r, \theta) : \theta \in [0, 2\pi[: r \in [r_i, r_e] \right\}.$$

- Soit $\omega \notin \mathcal{K}_{res}$, et alors, aucune ligne n'est résonante

$$\mathcal{L}_{res}(\omega) = \emptyset.$$

La proposition suivante montre que les lignes résonantes, sauf dans le cas dégénéré de la rotation solide, sont en nombre limité.

Proposition 8.6.2. *Si l'écoulement n'est pas localement une rotation solide, on a*

$$\text{Card}(\mathcal{L}_{res}(\omega)) < \infty.$$

Preuve. On a, pour $r \in [r_i, r_e]$, d'après les définitions 8.2.2 et 8.9 de \mathcal{L}_{res} et \mathcal{K}_{res} , il vient :

$$\begin{aligned} \{(r, \theta) : \theta \in [0, 2\pi[\} \in \mathcal{L}_{res}(\omega) &\Leftrightarrow \omega \in \mathcal{K}_{res} \\ &\Leftrightarrow I - e^{2\pi A_\omega(r)} \notin \text{GL}_2(\mathbb{C}) \\ &\Leftrightarrow \Delta_\omega(r) := \det(I - e^{2\pi A_\omega(r)}) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\{(r, \theta) : \theta \in [0, 2\pi[\} \in \mathcal{L}_{res}(\omega)$ si et seulement si c'est un zéro du déterminant $\Delta_\omega(r)$. Compte tenu de l'hypothèse d'analyticité faite sur la vitesse de l'écoulement, Δ_ω est également

analytique au voisinage de $]r_i, r_e[$ et donc possède un nombre fini de zéros sur le segment $[r_i, r_e]$. ■

Bien que ce nombre soit fini, la proposition suivante montre que sous les mêmes hypothèses que celles de la proposition 8.6.2, le nombre de lignes résonantes augmente avec la fréquence.

Proposition 8.6.3. *S'il existe un intervalle ouvert non vide $I \subset I_+$ tel que Ω_0 n'est pas constant sur I , alors*

$$\text{Card}(\mathcal{L}_{res}(\omega)) \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Preuve. Rappelons et employons les notations introduites dans la preuve de la proposition 8.3.3, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$[n\Omega_0^-, n\Omega_0^+] \subset \text{Im}(\Omega_0^* + n\Omega_0)$$

ainsi que

$$\omega_+^* := \sup_{r \in I} \Omega_0^*(r) \quad \text{et} \quad \omega_-^* := \inf_{r \in I} \Omega_0^*(r),$$

et, pour n suffisamment grand, disons $n \geq n_0$:

$$I_n^+ := [\omega_+^* + n\Omega_0^-, \omega_-^* + n\Omega_0^+] \neq \emptyset.$$

Il a été montré qu'alors, si l'écoulement n'est pas une rotation solide,

$$\forall n \geq n_0, \quad I_n^+ \subset \text{Im}(\Omega_0^* + n\Omega_0) \subset \mathcal{K}_{res}.$$

Or, on a par définition de \mathcal{L}_{res} et de \mathcal{K}_{res} , (8.2.2 et 8.9),

$$\mathcal{L}_{res}(\omega) = \{r \in [r_i, r_e] : \omega \in \mathcal{K}_{res}(r)\} = \{r \in [r_i, r_e] : \exists n \in \mathbb{Z}, \omega = \pm\Omega_0^*(r) + n\Omega_0(r)\}.$$

L'application suivante :

$$r : n \in \{n \geq n_0 : \omega \in I_n^+\} \mapsto \{(r_n, \theta) : \theta \in [0, 2\pi[\} \in \mathcal{L}_{res}(\omega),$$

où $r_n \in [r_i, r_e]$ est choisi comme l'une des solutions de $\omega = \Omega_0^*(r) + n\Omega_0(r)$, définit une injection. En effet, si $r_{n_1} = r_{n_2}$, on obtient que

$$\omega = \Omega_0^*(r_{n_1}) + n_1\Omega_0(r_{n_1}) = \Omega_0^*(r_{n_2}) + n_2\Omega_0(r_{n_1}),$$

ce qui implique que $(n_1 - n_2)\Omega_0(r_{n_1}) = 0$, et comme par hypothèse Ω_0 ne s'annule pas, il vient $n_1 = n_2$. Nous en déduisons ainsi la comparaison des cardinaux :

$$\text{Card}\{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0 \text{ et } \omega \in I_n^+\} \leq \text{Card}(\mathcal{L}_{res}(\omega)).$$

Il suffit alors de montrer que $\text{Card}\{n \geq n_0 : \omega \in I_n^+\}$ tend vers $+\infty$ lorsque ω tend lui-même

vers $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned} \{n \geq n_0 : \omega \in I_n^+\} &= \{n \geq n_0 : \omega_+^* + n\Omega_0^- \leq \omega \leq \omega_-^* + n\Omega_0^+\} \\ &= \mathbb{Z} \cap [n_0, +\infty[\cap \left[-\infty, \frac{\omega - \omega_+^*}{\Omega_0^-}\right] \cap \left[\frac{\omega - \omega_-^*}{\Omega_0^+}, +\infty\right[\\ &= \mathbb{Z} \cap [n_0, +\infty[\cap \left[\frac{\omega - \omega_-^*}{\Omega_0^+}, \frac{\omega - \omega_+^*}{\Omega_0^-}\right]. \end{aligned}$$

Or, la longueur de ce dernier intervalle tend vers $+\infty$ lorsque ω tend vers $+\infty$ car

$$\frac{\omega - \omega_+^*}{\Omega_0^-} - \frac{\omega - \omega_-^*}{\Omega_0^+} = \omega \underbrace{\left(\frac{1}{\Omega_0^-} - \frac{1}{\Omega_0^+}\right)}_{>0} + \frac{\omega_-^*}{\Omega_0^+} - \frac{\omega_+^*}{\Omega_0^-} \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} +\infty,$$

ce qui termine la preuve. ■

Illustration pour l'écoulement potentiel perturbé. Illustrons ces résultats en reprenant l'exemple de l'écoulement potentiel perturbé que nous déjà analysé à la section 8.5, pour rappel, nous choisissons v_0 de la forme :

$$v_0(r) = \frac{a}{r} + \varepsilon \quad \text{où } a, \varepsilon > 0.$$

Sur la figure 8.8, nous avons représenté comme à la section précédente l'ensemble des résonances en noir sur l'axe des abscisses comme résultant de la projection des segments colorés qui sont les représentations des $\text{Im}(\pm\Omega_0^* + n\Omega_0)$ aux ordonnées $\pm(|n| + 1)$. Nous avons représenté par une ligne verticale d'équation $\{r = \omega\}$, en rouge, la valeur de la pulsation choisie, ici $\omega = 0.24$. Les paramètres de l'écoulement sont choisis comme suit : $a = 1$ et $\varepsilon = 0.01$.

On constate alors, notamment sur le zoom (graphique de droite), qu'il existe une intersection entre la droite $\{\omega = 0.24\}$ avec l'ensemble $\text{Im}(\Omega_0^* + n\Omega_0)$ pour $n = 1$ et avec les ensembles $\text{Im}(-\Omega_0^* + n\Omega_0)$ pour $n = 1$ et $n = 2$. Pour chacune de ces intersections, il existe au moins une ligne résonante correspondante. Pour retrouver en quels rayons r la valeur ω

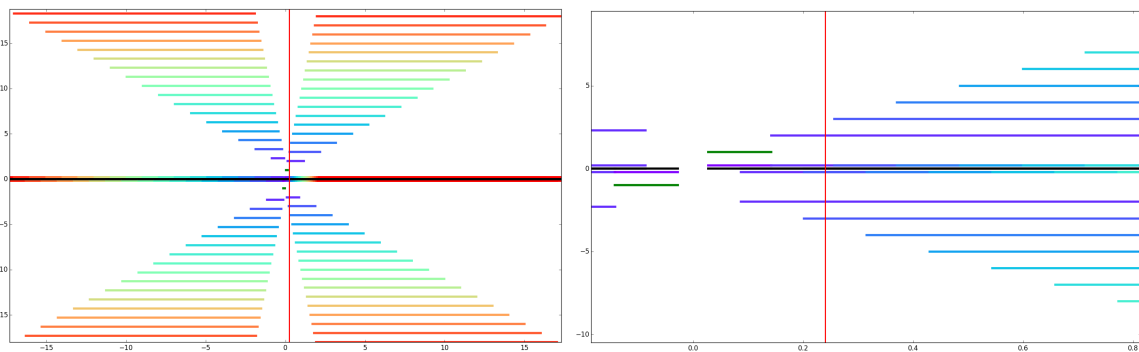


FIGURE 8.8 – Intersection de la droite d'équation $x = \omega$, où $\omega = 0.24$, avec les segments $\text{Im}(\pm\Omega_0^* + n\Omega_0)$. À droite : zoom

est atteinte pour chacune des images, on trace sur le graphique de droite de la figure 8.9 la courbe $r \mapsto |\Delta(r)|$ dont les valeurs d'annulation correspondent aux r^* des lignes résonantes.

Nous trouvons ainsi que trois lignes sont résonantes, grossièrement en $r_1^* \approx 1.8$, $r_2^* \approx 2.25$ et $r_3^* \approx 2.75$. Sur le graphique de gauche, on représente chacune de ces lignes résonantes en rouge $\{(r_i^*, \cos \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, $i = 1, 2, 3$. Illustrons à présent comment se comportent les

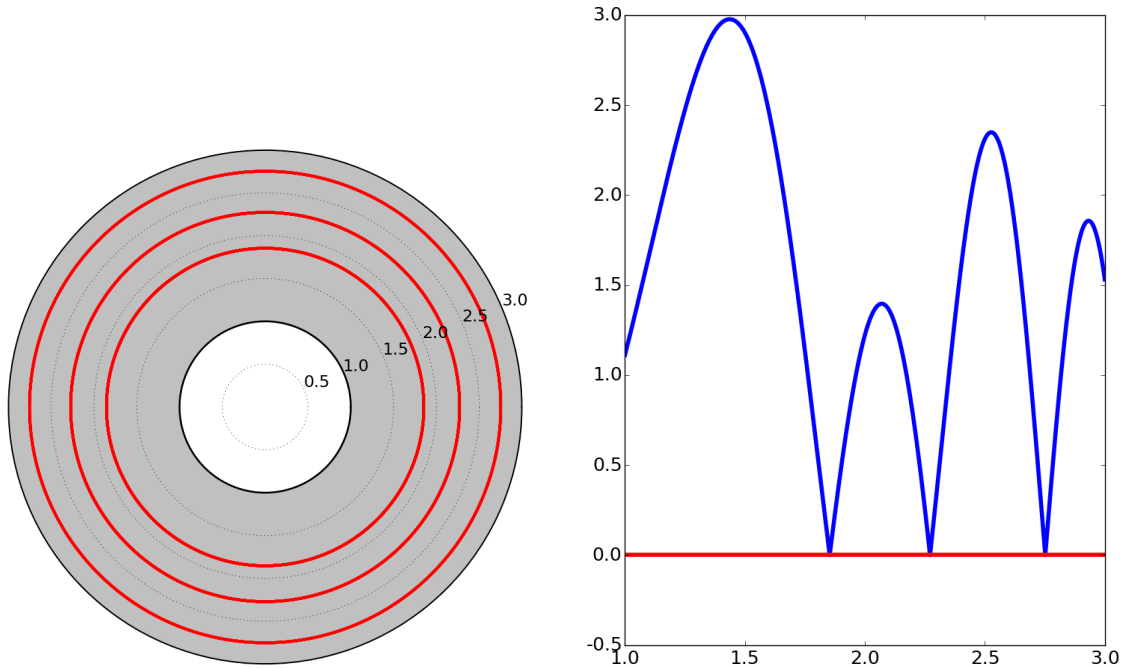


FIGURE 8.9 – Pulsation fixée à $\omega = 0.24$. Gauche : en rouge, les lignes résonantes $\{(r^*, \cos \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ correspondantes à $\Delta_\omega(r^*) = 0$. Droite : en bleu, la courbe $r \mapsto |\Delta_\omega(r)|$, s'annulant aux $r = r^*$, rayons correspondant aux lignes résonantes.

lignes résonantes lorsque la pulsation augmente. Sur la figure 8.10, chaque ligne de trois figures correspond à une pulsation différente, respectivement $\omega_1 = 0.06$, $\omega_2 = 0.2$ et $\omega_3 = 1$. Sur chacune de ces lignes, de gauche à droite, nous représentons les cercles correspondant aux lignes résonantes $\{(r_i^*, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ obtenues pour la pulsation considérée, puis nous représentons la courbe de la fonction $r \mapsto |\Delta_\omega(r)|$ et enfin, à droite, l'intersection de la droite d'équation $\{\omega = \omega_i\}$ intersectant les images $\text{Im}(\pm\Omega_0^* + n\Omega_0)$ représentées par des segments de couleurs.

Solutions en présence de lignes résonantes. Dans le cas générique où l'ensemble $\mathcal{L}_{res}(\omega)$ est fini, notons $r_1, \dots, r_k \in [r_i, r_e]$ ordonnés comme suit $r_i < r_{i+1}$ tels que $\{(r_i, \theta) : \theta \in [0, 2\pi[\} \in \mathcal{L}_{res}(\omega)$, on a

$$\dot{D}_\omega := \bigcup_{i=1}^k D_i(\omega),$$

où

$$\forall i \in \{1, \dots, k-1\}, \quad D_i(\omega) :=]r_i, r_{i+1}[\times]0, 2\pi[.$$

Étant donné un second membre f régulier, puisque sur chaque $D_k(\omega)$, la matrice $I - e^{2\pi A_\omega}$ est inversible, l'équation (8.15) fournit une solution régulière à l'équation de transport harmonique. Cependant, des singularités sont présentes aux bord des $D_k(\omega)$, là où sont situées les lignes résonantes, ce qui empêche d'étendre cette solution à l'espace qui nous intéresse : $\xi \in L^2(D)^2$, lorsque le second membre est lui-même dans $L^2(D)^2$.

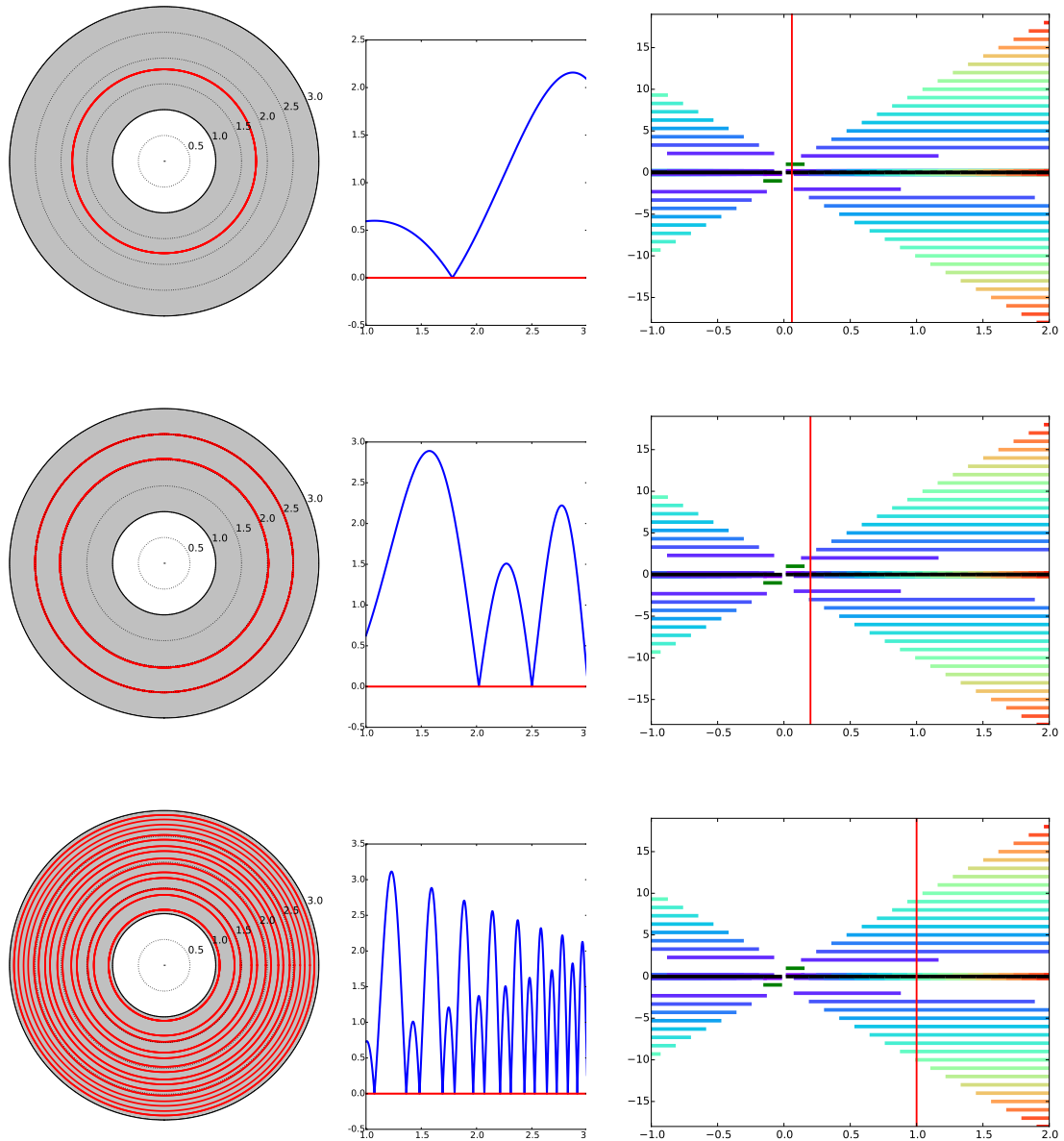


FIGURE 8.10 – Augmentation du nombre de lignes résonantes lorsque la pulsation augmente. Chaque ligne correspond à une pulsation : $\omega = 0.06, 0.2, 1$. De gauche à droite : 1) lignes résonantes en rouge $\{(r_i^*, \theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}$; 2) courbe $r \mapsto |\Delta_\omega(r)|$ tracée en bleu et $\{y = 0\}$ en rouge, 3) les $\text{Im}(\pm\Omega_0^* + n\Omega_0)$

Chapitre 9

Le cas des équations de Goldstein

9.1	Écriture des équations dans la couronne	228
9.2	Analyse des équations hors résonances du transport : caractère Fredholm	229
9.3	Mise sous forme modale des équations de Goldstein	232
9.4	Retour sur le caractère bien posé hors fréquence de résonance du transport.	233
9.4.1	Réduction des équations à une équation différentielle scalaire . . .	233
9.4.2	Notion de résonances et de lignes critiques	236
9.4.3	Caractère bien posé hors fréquence de résonance du transport et critique	238
9.5	Analyse des résonances critiques et du transport par absorption limite	244
9.5.1	Introduction de l'absorption	245
9.5.2	Écriture sous forme résolue.	247
9.5.3	Étude d'une base de solution locale par extension au plan complexe	248
9.5.4	Étude de l'espace des solutions locales à la limite d'absorption nulle : $\varepsilon \rightarrow 0^+$	255
9.5.5	Commentaires et perspectives.	266
	Conclusion	268

Après analyse des équations de Goldstein en écoulement domaine-remplissant et uniforme à la frontière du domaine, nous nous intéressons dans ce chapitre à un cas typique d'écoulement qui n'est pas domaine-remplissant : un écoulement recirculant dans une couronne. Nous avons vu que dans ce cas, l'équation de transport harmonique du couplage des équations de Goldstein peut ne pas être inversible à certaines fréquences. Dit autrement, à pulsation ω fixée, il peut exister des lignes de courant fermées de l'écoulement v_0 le long desquelles l'équation de transport, exprimée dans les variables caractéristiques, est mal posée.

Nous verrons que lorsque l'on se place à une pulsation ω hors résonances, nous retrouvons le caractère Fredholm des équations de Goldstein en procédant par perturbation comme nous l'avons fait lors du chapitre précédent pour le cas domaine-remplissant.

Cependant, nous avons vu lors de l'étude de l'équation de transport harmonique qu'il existe des cas d'écoulements recirculants dans la couronne tels qu'il n'y ait pas de pulsation non résonante. A une telle fréquence de résonance $\omega \in \mathcal{K}_{res}$, l'impossibilité de résoudre

l'équation de transport fait échouer notre méthode d'analyse par perturbation utilisée jusqu'à présent. Bien qu'on ne puisse pas conclure au caractère mal posé du problème couplé directement, nous verrons que les résonances de l'équation de transport entraînent des singularités dans les « solutions », qui ne sont plus solutions au sens que nous avons utilisé jusqu'à présent, $\varphi \in H^1(\Omega, \rho_0)$, $\xi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$, mais doivent être définies dans des espaces de distributions plus grands. Cette analyse est à un stade d'ébauche et souffre d'un manque de cadre rigoureux complet. Nous pensons qu'elle est néanmoins intéressante à présenter car elle répond à plusieurs questions. Les résonances de l'équation de transport se propagent-elles à tout le système couplé de Goldstein? Quel est le comportement local des solutions si l'on devait en définir?

Ce travail reste prospectif en ce sens qu'il ne fournit pas un cadre fonctionnel dans lequel le problème de Goldstein serait bien posé et permettant une résolution numérique. Cependant, il s'agit d'un premier pas vers la compréhension des singularités intervenant dans ces équations, en particulier lorsque l'écoulement possède des recirculations.

9.1 Écriture des équations dans la couronne

Écriture des équations. Pour une géométrie annulaire en présence d'écoulements porteurs circulaires, les équations de Goldstein s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_0}{c_0^2} \left(-i\omega + \Omega_0(r)\partial_\theta \right)^2 \varphi - \nabla \cdot \{ \rho_0(\nabla\varphi + \xi) \} = \rho_0 f, \\ \left(-i\omega + \Omega_0(r)\partial_\theta \right) \xi + \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega_0(r) \\ \omega_0(r) & 0 \end{pmatrix} \xi = \omega_0(r) \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \partial_\theta \varphi \\ -\partial_r \varphi \end{pmatrix}, \end{array} \right. \quad (9.1a)$$

$$\left(-i\omega + \Omega_0(r)\partial_\theta \right) \xi + \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega_0(r) \\ \omega_0(r) & 0 \end{pmatrix} \xi = \omega_0(r) \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \partial_\theta \varphi \\ -\partial_r \varphi \end{pmatrix}, \quad (9.1b)$$

Conditions aux limites Puisqu'il s'agit d'un problème modèle ne reflétant aucune situation industrielle en particulier, nous choisissons des conditions aux limites arbitraires. Sur la frontière intérieure du domaine $\partial D_i := \{r = r_i\}$, nous choisissons une condition de paroi rigide. C'est-à-dire que la perturbation de la vitesse acoustique \mathbf{v} ne traverse pas la paroi :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial D_i = \{r = r_i\}.$$

En faisant le lien avec les inconnues de Goldstein, le tout exprimé sur la frontière intérieure où $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_r$, on trouve :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -(\nabla\varphi + \xi) \cdot \mathbf{e}_r = -\partial_r \varphi - \xi_r = 0.$$

Ensuite, sur la frontière extérieure $\partial D_e := \{r = r_e\}$, nous choisissons une condition de type rayonnante approchée comme dans le cas de l'écoulement domaine-remplissant. La frontière sortante étant glissante $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$, il n'y a pas à faire « sortir » ξ du domaine, et nous utilisons pour faire rayonner φ la condition suivante :

$$(\nabla\varphi + \xi) \cdot \mathbf{n} = \partial_r \varphi + \xi_r = i \frac{\omega}{c_0} \lambda \varphi \quad \text{sur } \partial D_e = \{r = r_e\},$$

où λ une fonction strictement positive, que nous prendrons égale à $\lambda = 1$. Enfin, il ne s'agit pas d'une condition aux limites proprement dite, mais il nous faut raccorder les inconnues

par périodicité à cause du choix des coordonnées polaires, et nous imposons :

$$\begin{aligned}\varphi(\cdot, 0) &= \varphi(\cdot, 2\pi), \\ \xi(\cdot, 0) &= \xi(\cdot, 2\pi).\end{aligned}$$

Finalement, le problème de Goldstein posé dans la couronne D , en écoulement orthoradial avec les notations introduites dans cette section s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } f \in L^2(D, \rho_0), \text{ trouver } \varphi \in H_{\#}^1(D, \rho_0) \text{ et } \xi \in H_{\#}(D, v_0, \rho_0) \text{ tels que :} \\ \frac{\rho_0}{c_0^2} \left(-i\omega + \Omega_0(r)\partial_{\theta} \right)^2 \partial_{\theta}\varphi - \nabla \cdot \{ \rho_0 (\nabla\varphi + \xi) \} = \rho_0 f, \end{array} \right. \quad (9.2a)$$

$$\left(-i\omega + \Omega_0(r)\partial_{\theta} \right) \xi + \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega_0(r) \\ \omega_0(r) & 0 \end{pmatrix} \xi = \omega_0(r) \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \partial_{\theta}\varphi \\ -\partial_r\varphi \end{pmatrix}, \quad (9.2b)$$

Conditions aux limites

$$\partial_r\varphi(r_i, \cdot) + \xi_r(r_i, \cdot) = 0 \quad \text{sur } \partial D_i \quad (9.2c)$$

$$\partial_r\varphi(r_e, \cdot) + \xi_r(r_e, \cdot) = i \frac{\omega}{c_0} \varphi(r_e, \cdot) \quad \text{sur } \partial D_e, \quad (9.2d)$$

où les espaces $H_{\#}^1(D, \rho_0)$ et $H_{\#}(D, v_0, \rho_0)$ sont définis par :

$$\begin{aligned}H_{\#}^1(D, \rho_0) &:= \{ \varphi \in H^1(D, \rho_0) : \varphi(\cdot, 0) = \varphi(\cdot, 2\pi) \}, \\ H_{\#}(D, v_0, \rho_0) &:= \{ \xi \in H(D, v_0, \rho_0) : \xi(\cdot, 0) = \xi(\cdot, 2\pi) \}.\end{aligned}$$

9.2 Analyse des équations hors résonances du transport : caractère Fredholm

En suivant la même stratégie d'étude que pour le cas d'un écoulement domaine-remplissant et uniforme à l'infini, nous choisissons de d'abord résoudre l'équation de transport harmonique pour réduire le problème couplé à une équation sur φ faisant intervenir l'opérateur de résolution du transport $\xi = \mathcal{A}_{\omega, v_0}(\nabla\varphi)$ puis de voir cet opérateur comme une perturbation d'un écoulement cas potentiel, où l'opérateur serait nul. Cependant, nous avons vu que l'équation de transport harmonique dans la couronne, présentée au chapitre précédent (8), n'est inversible que pour un ensemble limité de fréquences. Nous nous plaçons donc dans cette section à une pulsation ω fixée hors de cet ensemble de résonances défini en 8.9 :

$$\omega \notin \mathcal{K}_{res}. \quad (9.3)$$

Grâce à l'estimation a priori pour l'opérateur de transport dans la couronne, voir (8.17), nous obtiendrons, comme pour le cas d'un écoulement domaine-remplissant, une condition de coercivité de la partie principale de l'équation de Goldstein, dégradée par rapport au cas potentiel et faisant intervenir la vorticité de l'écoulement.

Opérateur de résolution de l'équation de transport. Comme nous l'avons vu dans la section 8.4, la résolution de l'équation de transport harmonique dans la couronne D se fait de manière explicite. Nous pouvons redéfinir l'opérateur $\mathcal{A}_{\omega, v_0}$ qui à un terme source

$\mathbf{g} = (g_r, g_\theta) \in L^2(D, \rho_0)^2$ associe $\xi = \mathcal{A}_{\omega, v_0}(\mathbf{g}) \in H_\#(D, v_0, \rho_0)$ solution de

$$\left(-i\omega + \Omega_0(r)\partial_\theta\right)\xi + \begin{pmatrix} 0 & -2\Omega_0(r) \\ \omega_0(r) & 0 \end{pmatrix}\xi = \omega_0(r) \begin{pmatrix} g_\theta \\ -g_r \end{pmatrix}.$$

Cet opérateur bien défini car $\omega \notin \mathcal{K}_{res}$ et admet l'expression suivante, tirée de la formule (8.15) donnée par la proposition 8.4.1 :

$$\mathcal{A}_{\omega, v_0}(\mathbf{g})(r, \theta) = \Omega_0(r)^{-1} \left(I - e^{2\pi A(r)}\right)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{\tau A(r)} \mathbf{g}(r, \theta - \tau) d\tau,$$

où

$$A(r) = i\frac{\omega}{\Omega_0(r)} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\Phi_0(r)}{2\Omega_0(r)^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, la proposition 8.4.3 donne l'estimation suivante de cet opérateur :

$$\forall \mathbf{g} \in L^2(D, \rho_0)^2, \quad \|\mathcal{A}_{\omega, v_0} \mathbf{g}\|_{L^2(D, \rho_0)^2} \leq C(v_0, \omega) \|\mathbf{g}\|_{L^2(D, \rho_0)^2},$$

où l'on rappelle que la constante $C(v_0, \omega)$ est donnée par

$$C(v_0, \omega) := 4\pi \sup_{r_i < r < r_e} \frac{\max\{4\pi, |\Omega_0^*(r)|/\Omega_0(r)\}}{\Omega_0(r)|\Delta_\omega(r)|} \left| e^{-2i\pi \frac{\Omega_0^*(r)}{\Omega_0(r)}} \right|, \quad (9.4)$$

et où la grandeur

$$\Delta_\omega(r) := \left(1 - e^{2i\pi \frac{\omega + \Omega_0^*(r)}{\Omega_0(r)}}\right) \left(1 - e^{2i\pi \frac{\omega - \Omega_0^*(r)}{\Omega_0(r)}}\right), \quad (9.5)$$

s'annule pour $\omega \in \mathcal{K}_{res}(r)$. Le problème de Goldstein dans la couronne (9.2) se ramène donc, en utilisant l'opérateur $\mathcal{A}_{\omega, v_0}$, à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } f \in L^2(D, \rho_0), \text{ trouver } \varphi \in H_\#^1(D, \rho_0) \text{ tel que :} \\ \frac{\rho_0}{c_0^2} \left(-i\omega + \Omega_0(r)\partial_\theta\right)^2 \partial_\theta \varphi - \nabla \cdot \left\{ \rho_0 \left(\nabla \varphi + \mathcal{A}_{\omega, v_0}(\nabla \varphi)\right) \right\} = \rho_0 f, \quad (9.6a) \\ \text{Conditions aux limites} \\ \left(\nabla \varphi + \mathcal{A}_{\omega, v_0}(\nabla \varphi)\right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial D_i, \quad (9.6b) \\ \left(\nabla \varphi + \mathcal{A}_{\omega, v_0}(\nabla \varphi)\right) \cdot \mathbf{n} = i\frac{\omega}{c_0} \varphi \quad \text{sur } \partial D_e. \quad (9.6c) \end{array} \right.$$

Formulation variationnelle. Ce problème admet la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } f \in L^2(D, \rho_0), \text{ trouver } \varphi \in H_\#^1(D, \rho_0) \text{ telle que pour tout } \psi \in H_\#^1(D, \rho_0) : \quad (9.7) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{gold}^\#(\varphi, \psi) + b_{gold}^\#(\varphi, \psi) = \int_D \rho_0 f \bar{\psi}, \quad (9.8) \end{array} \right.$$

où :

$$a_{gold}^{\#}(\varphi, \psi) = a_{pot}^{\#}(\varphi, \psi) + \int_D \rho_0 \mathcal{A}_{\omega, v_0}(\nabla \varphi) \cdot \overline{\nabla \psi},$$

$$a_{pot}^{\#}(\varphi, \psi) = \int_D \rho_0 \left[\nabla \varphi \cdot \overline{\nabla \psi} + (\mathbf{M}_0 \cdot \nabla \varphi)(\overline{\mathbf{M}_0 \cdot \nabla \psi}) + \varphi \overline{\psi} \right] + \int_{\partial D_e} ik_0 \varphi \overline{\psi},$$

et

$$b_{gold}^{\#} = \int_D \rho_0 \left[-(1 + k_0^2) \varphi \overline{\psi} - ik_0 (\mathbf{M}_0 \cdot \nabla \varphi) \overline{\psi} + ik_0 \varphi (\overline{\mathbf{M}_0 \cdot \nabla \psi}) \right],$$

et l'on rappelle les notations usuelles :

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_0 = \frac{\mathbf{v}_0}{c_0}.$$

Caractère Fredholm. Le théorème suivant est le pendant de celui obtenu dans le cas d'un écoulement domaine-remplissant, voir 6.3.5, pour le cas de la couronne hors résonances. Par la même méthode de perturbation, on obtient :

Théorème 9.2.1. *Sous l'hypothèse $\omega \notin \mathcal{K}_{res}$, le problème de Goldstein dans la couronne (9.6) relève de l'alternative de Fredholm sous la condition :*

$$1 - \inf_{r_i < r < r_e} \left(\frac{v_0(r)}{c_0(r)} \right)^2 > \|\omega_0\|_{\infty} C(\mathbf{v}_0, \omega). \quad (9.9)$$

En particulier,

- la forme sesquilinéaire $a_{gold}^{\#}$ est coercive sous la condition (9.9) ;
- la forme sesquilinéaire $b_{gold}^{\#}$ est associée à un opérateur compact.

Preuve. La démonstration de ce théorème est identique à celle du théorème 6.3.5. La coercivité de $a_{gold}^{\#}$ découle de même de celle de $a_{pot}^{\#}$, dont la constante est dégradée par le terme de perturbation dû au transport.

Enfin la compacité de $b_{gold}^{\#}$ est simple à obtenir car, comme il n'y a pas de frontière entrante dans le cas de la couronne, il n'y a pas de terme de bord correspondant à la condition de sortie pour ξ . ■

Remarque 9.2.2. *Remarquons que la condition de coercivité (9.9) obtenue impose que l'équation de transport soit une petite perturbation de l'équation d'Helmholtz convectée du modèle potentiel. Ainsi, le rotationnel de l'écoulement, ω_0 , doit être suffisamment petit. De plus, pour que le transport de l'inconnue hydrodynamique reste une petite perturbation, il est nécessaire que la constante $C(\mathbf{v}_0, \omega)$ soit également petite et en particulier ω doit être loin de l'ensemble des fréquences de résonance \mathcal{K}_{res} . En effet, d'après les expression dénominateur $|\Delta_{\omega}(r)|$, (9.5), intervenant dans $C(\mathbf{v}_0, \omega)$, (9.4), on voit que :*

$$C(\mathbf{v}_0, \omega) \xrightarrow{\text{dist}(\omega, \mathcal{K}_{res}) \rightarrow 0} +\infty.$$

La constante $C(\mathbf{v}_0, \omega)$ n'a pas d'estimation simple et les conditions données ci-dessus donnent simplement une idée physique de ce que l'écoulement doit vérifier pour qu'elle soit petite. En pratique, cette constante peut être grande et la condition (9.9) est difficilement vérifiée.

Unicité? Tous nos théorèmes n'ont jusqu'ici donné que le caractère Fredholm de l'équation de Goldstein. Son caractère bien posé est alors équivalent à l'existence ou à l'unicité de solutions. Nous verrons que nous ne pouvons pas l'obtenir pour de bonnes raisons, même hors fréquence de résonance. En effet, il existe un autre phénomène de résonance, apparaissant à d'autres lignes, dites critiques, pouvant rendre le problème mal posé à certaines fréquences ! Nous analyserons cela dans le prochain paragraphe. Nous étudierons le système de Goldstein à l'aide d'une décomposition sur les modes de Fourier, où nous profiterons du caractère périodique de la géométrie.

9.3 Mise sous forme modale des équations de Goldstein

Exploitions à présent le caractère périodique de la géométrie en la variable θ et développons φ et ξ en série de Fourier de la manière suivante :

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi^n(r) e^{in\theta} \quad \text{et} \quad \xi(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi^n(r) e^{in\theta}, \quad (9.10)$$

où, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi^n \in H^1(]r_i, r_e[, \rho_0)$ et $\xi^n \in L^2(]r_i, r_e[, \rho_0)^2$. Puis cherchons les équations satisfaites par ces modes φ^n et ξ^n . Le second membre génériquement appelé $f \in L^2(D)$, est également décomposé sur ses modes de Fourier :

$$f(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f^n(r) e^{in\theta}. \quad (9.11)$$

Avant de remplacer φ et ξ dans les équations de Goldstein (9.2), introduisons des notations qui nous seront utiles. L'opérateur de dérivée convective en régime harmonique, D_ω , devient, exprimé sur le mode de Fourier $n \in \mathbb{Z}$, une simple multiplication par $i\alpha^n$ où

$$\alpha^n := -\omega + n\Omega_0. \quad (9.12)$$

Ainsi, la première équation du couplage de Goldstein s'écrit, sur le mode de Fourier $n \in \mathbb{Z}$:

$$-\frac{r\rho_0}{c_0^2}(\alpha^n)^2\varphi^n - \frac{d}{dr}\left(r\rho_0\frac{d\varphi^n}{dr} + r\rho_0\xi_r^n\right) + \rho_0\frac{n^2}{r}\varphi^n - in\rho_0\xi_\theta^n = r\rho_0f^n.$$

L'équation de transport, exprimée sur les modes de Fourier, ne contient donc plus d'opérateur différentiel agissant sur ξ^n , elle s'écrit sous la forme de la simple équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} i\alpha^n & -2\Omega_0 \\ \omega_0 & i\alpha^n \end{pmatrix} \xi^n = \omega_0 \begin{pmatrix} \frac{in}{r}\varphi^n \\ -\frac{d\varphi^n}{dr} \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons ainsi le problème de Goldstein écrit sur les modes de Fourier :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d}{dr} \left(r\rho_0 \frac{d\varphi^n}{dr} + r\rho_0 \xi_r^n \right) + r\rho_0 \left[\left(\frac{n}{r} \right)^2 - \left(\frac{\alpha^n}{c_0^2} \right)^2 \right] \varphi^n - in\rho_0 \xi_\theta^n = r\rho_0 f^n, \end{array} \right. \quad (9.13a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} i\alpha^n & -2\Omega_0 \\ \omega_0 & i\alpha^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_r^n \\ \xi_\theta^n \end{pmatrix} = \omega_0 \begin{pmatrix} \frac{in}{r} \varphi^n \\ -\frac{d\varphi^n}{dr} \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad (9.13b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Conditions aux limites :} \\ \frac{d\varphi^n}{dr}(r_i, \cdot) + \xi_r^n(r_i, \cdot) = 0, \end{array} \right. \quad (9.13c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varphi^n}{dr}(r_e, \cdot) + \xi_r^n = i \frac{\omega}{c_0} \varphi^n(r_e, \cdot) \end{array} \right. \quad (9.13d)$$

9.4 Retour sur le caractère bien posé hors fréquence de résonance du transport.

Dans cette section, nous souhaitons revenir sur l'étude du couplage de Goldstein, hors des résonances de l'équation de transport, grâce à une étude mode de Fourier par mode de Fourier. Nous nous plaçons donc à $\omega \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\omega \notin \mathcal{K}_{res}.$$

9.4.1 Réduction des équations à une équation différentielle scalaire

L'hypothèse $\omega \notin \mathcal{K}_{res}$ nous permet d'inverser l'équation de transport modale pour tous les modes $n \in \mathbb{Z}$ et de réduire le couplage de Goldstein à une famille d'équations différentielles ne portant que sur l'inconnue φ^n , que nous allons ensuite étudier.

Lemme 9.4.1 (Inversion modale du transport). *Nous avons les deux propriétés suivantes :*

(i) Définissons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\beta^n(r) := \alpha^n(r)^2 - \Omega_0^*(r)^2. \quad (9.14)$$

On a le lien suivant avec l'ensemble $\mathcal{K}_{res}^{\mathbb{C}}$:

$$\omega \notin \mathcal{K}_{res}^{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, \forall r \in [r_i, r_e], \beta^n(r) \neq 0.$$

(ii) Si $\omega \notin \mathcal{K}_{res}^{\mathbb{C}}$, alors quel que soit $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $\varphi^n \in H^1([r_i, r_e])$ fixé, l'équation

$$\begin{pmatrix} i\alpha^n & -2\Omega_0 \\ \omega_0 & i\alpha^n \end{pmatrix} \xi^n = \omega_0 \begin{pmatrix} \frac{in}{r} \varphi^n \\ -\frac{d\varphi^n}{dr} \end{pmatrix}$$

est inversible et ξ^n s'exprime par

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_r^n = \frac{\omega_0}{\beta^n} \left(\alpha^n \frac{n}{r} + 2\Omega_0 \frac{d}{dr} \right) \varphi^n \\ \xi_\theta^n = i \frac{\omega_0}{\beta^n} \left(\omega_0 \frac{n}{r} + \alpha^n \frac{d}{dr} \right) \varphi^n, \end{array} \right. \quad (9.15a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_r^n = \frac{\omega_0}{\beta^n} \left(\alpha^n \frac{n}{r} + 2\Omega_0 \frac{d}{dr} \right) \varphi^n \\ \xi_\theta^n = i \frac{\omega_0}{\beta^n} \left(\omega_0 \frac{n}{r} + \alpha^n \frac{d}{dr} \right) \varphi^n, \end{array} \right. \quad (9.15b)$$

Preuve. Ces deux petits résultats sont immédiats, donnons brièvement les calculs.

(i) On a l'équivalence :

$$\begin{aligned} \exists (n, r^n) \in \mathbb{Z} \times [r_i, r_e] / \beta^n(r^n) = 0 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists (n, r^n) \in \mathbb{Z} \times [r_i, r_e] / \\ (-\omega + n\Omega_0(r^n))^2 - \Omega_0^*(r^n)^2 = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \text{Im}(\Omega_0^* + n\Omega_0) \cup \text{Im}(-\Omega_0^* + n\Omega_0), \end{aligned}$$

et l'on conclut avec à l'expression (8.11) que nous avons trouvée de $\mathcal{K}_{res}^{\mathbb{C}}$.

(ii) Résoudre l'équation (9.13b) nécessite de pouvoir inverser la matrice de déterminant :

$$\det \begin{pmatrix} i\alpha^n & -2\Omega_0 \\ \omega_0 & i\alpha^n \end{pmatrix} = -(\alpha^n)^2 + 2\Omega_0\omega_0 = -\beta^n.$$

Le point (i) nous garantit donc que, sous l'hypothèse que $\omega \notin \mathcal{K}_{res}^{\mathbb{C}}$, ce déterminant est non nul, et on a l'expression de l'inverse de la matrice :

$$\begin{pmatrix} i\alpha^n & -2\Omega_0 \\ \omega_0 & i\alpha^n \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{\beta^n} \begin{pmatrix} i\alpha^n & 2\Omega_0 \\ -\omega_0 & i\alpha^n \end{pmatrix},$$

il vient ainsi l'expression annoncée de ξ^n

$$\xi^n = -\frac{1}{\beta^n} \begin{pmatrix} i\alpha^n & 2\Omega_0 \\ -\omega_0 & i\alpha^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0 \frac{in}{r} \varphi^n \\ -\omega_0 \frac{d\varphi^n}{dr} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\beta^n} \begin{pmatrix} -\omega_0 \frac{n}{r} \varphi^n - 2\Omega_0 \omega_0 \frac{d\varphi^n}{dr} \\ -\omega_0^2 \frac{in}{r} \varphi^n - i\alpha^n \omega_0 \frac{d\varphi^n}{dr} \end{pmatrix}.$$

■

Le lemme précédent nous permet de réduire le système d'équations de Goldstein en une simple équation différentielle pour chaque mode. Nous avons la proposition suivante.

Proposition 9.4.2 (Équations modales résolues en ξ). *Soit $\omega \in \mathbb{R}$, supposons que $\omega \notin \mathcal{K}_{res}$. Si (φ^n, ξ^n) est solution de l'équation de Goldstein modale (9.13), alors φ^n satisfait l'équation*

différentielle :

$$\left| \begin{array}{l} -\frac{d}{dr} \left(r \rho_0 s^n \frac{d\varphi^n}{dr} \right) + r \rho_0 m^n \varphi^n = r \rho_0 f^n, \end{array} \right. \quad (9.16a)$$

Conditions aux limites :

$$\left| \begin{array}{l} r \rho_0 s^n \frac{d\varphi^n}{dr} = -\rho_0 n \omega_0 \frac{\alpha^n}{\beta^n} \varphi^n, \quad \text{en } r = r_i \end{array} \right. \quad (9.16b)$$

$$\left| \begin{array}{l} r \rho_0 s^n \frac{d\varphi^n}{dr} = \left(-\rho_0 n \omega_0 \frac{\alpha^n}{\beta^n} + i r \rho_0 \frac{\omega}{c_0} \right) \varphi^n, \quad \text{en } r = r_e \end{array} \right. \quad (9.16c)$$

où

$$s^n := \frac{(\alpha^n)^2}{\beta^n},$$

$$m^n = \left(\frac{n}{r} \right)^2 \frac{(\alpha^n)^2}{\beta^n} - \left(\frac{\alpha^n}{c_0} \right)^2 - \frac{n}{r} \frac{(\rho_0 \omega_0)'}{\rho_0} \frac{\alpha^n}{\beta^n} + \frac{n \omega_0}{r} \alpha^n \frac{(\beta^n)'}{(\beta^n)^2},$$

et ξ^n est donné par (9.15).

Réciproquement, si φ^n est solution de l'équation différentielle (9.16), alors en posant ξ^n comme défini par la formule (9.15), (φ^n, ξ^n) satisfait le système de Goldstein modal (9.16)

Bien que la preuve soit un peu fastidieuse, elle comporte quelques transformations calculatoires que nous souhaitons détailler.

Preuve. On a

$$-\frac{r \rho_0}{c_0^2} (\alpha^n)^2 \varphi^n - \underbrace{\frac{d}{dr} \left(r \rho_0 \frac{d\varphi^n}{dr} + r \rho_0 \xi_r^n \right)}_{=I} - \underbrace{in \left(\rho_0 \frac{in}{r} \varphi^n + \rho_0 \xi_\theta^n \right)}_{=II} = r \rho_0 f^n.$$

En remplaçant ξ_r^n par son expression (9.15a) trouvée en fonction de φ^n , on a

$$\begin{aligned} I &= -\frac{d}{dr} \left(r \rho_0 \frac{d\varphi^n}{dr} + r \rho_0 \xi_r^n \right) = -\frac{d}{dr} \left(r \rho_0 \frac{d\varphi^n}{dr} + r \rho_0 \frac{\omega_0}{\beta^n} \alpha^n \frac{n}{r} \varphi^n + r \rho_0 \frac{\omega_0}{\beta^n} 2\Omega_0 \frac{d\varphi^n}{dr} \right) \\ &= -\frac{d}{dr} \left(r \rho_0 \frac{\beta^n + 2\Omega_0 \omega_0}{\beta^n} \frac{d\varphi^n}{dr} + n \rho_0 \omega_0 \frac{\alpha^n}{\beta^n} \varphi^n \right), \end{aligned}$$

et puisque que $\beta^n + 2\Omega_0 \omega_0 = (\alpha^n)^2$, on a

$$I = -\frac{d}{dr} \left(r \rho_0 \frac{d\varphi^n}{dr} + r \rho_0 \xi_r^n \right) = -\frac{d}{dr} \left(r \rho_0 \frac{(\alpha^n)^2}{\beta^n} \frac{d\varphi^n}{dr} \right) - n \rho_0 \omega_0 \frac{\alpha^n}{\beta^n} \frac{d\varphi^n}{dr} - n \left(\rho_0 \omega_0 \frac{\alpha^n}{\beta^n} \right)' \varphi^n.$$

Ensuite, en remplaçant ξ_θ^n par son expression (9.15b) en fonction de φ^n , on trouve

$$\begin{aligned} II &= -in \left(\rho_0 \frac{in}{r} \varphi^n + \rho_0 \xi_\theta^n \right) = \rho_0 \frac{n^2}{r} \varphi^n + n \rho_0 \frac{\omega_0}{\beta^n} \left(\omega_0 \frac{n}{r} \varphi^n + \alpha^n \frac{d\varphi^n}{dr} \right) \\ &= r \rho_0 \left[\left(\frac{n}{r} \right)^2 + \left(\frac{n \omega_0}{r} \right)^2 \frac{1}{\beta^n} \right] \varphi^n + n \rho_0 \omega_0 \frac{\alpha^n}{\beta^n} \frac{d\varphi^n}{dr}. \end{aligned}$$

Ainsi, en regroupant et simplifiant les termes, on a finalement

$$-\frac{d}{dr} \left(r \rho_0 \frac{(\alpha^n)^2}{\beta^n} \frac{d\varphi^n}{dr} \right) + r \rho_0 \left\{ \left(\frac{n}{r} \right)^2 - \left(\frac{\alpha^n}{c_0} \right)^2 + \left(\frac{n\omega_0}{r} \right)^2 \frac{1}{\beta^n} - \frac{n}{r\rho_0} \left(\rho_0 \omega_0 \frac{\alpha^n}{\beta^n} \right)' \right\} \varphi^n = r \rho_0 f^n,$$

et ainsi

$$m^n = \left(\frac{n}{r} \right)^2 - \left(\frac{\alpha^n}{c_0} \right)^2 + \left(\frac{n\omega_0}{r} \right)^2 \frac{1}{\beta^n} - \frac{n}{r\rho_0} \left(\rho_0 \omega_0 \frac{\alpha^n}{\beta^n} \right)'.$$

Ensuite, développons le dernier terme pour simplifier m^n ,

$$\frac{n}{r\rho_0} \left(\rho_0 \omega_0 \frac{\alpha^n}{\beta^n} \right)' = \frac{n}{r} \frac{(\rho_0 \omega_0)'}{\rho_0} \frac{\alpha^n}{\beta^n} + \frac{n\omega_0}{r} \left(\frac{(\alpha^n)'}{\beta^n} - \alpha^n \frac{(\beta^n)'}{(\beta^n)^2} \right).$$

Remarquons, en utilisant que

$$(\alpha^n)' = (-\omega + n\Omega_0)' = n\Omega_0' = n \left(\frac{v_0'}{r} - \frac{v_0}{r^2} \right) = \frac{n}{r} \underbrace{\left(v_0' + \frac{v_0}{r} - 2\frac{v_0}{r} \right)}_{=\omega_0} = \frac{n}{r} (\omega_0 - 2\Omega_0),$$

la simplification intéressante entre les termes suivants

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{r} \right)^2 + \left(\frac{n\omega_0}{r} \right)^2 \frac{1}{\beta^n} - \frac{n\omega_0}{r} \frac{(\alpha^n)'}{\beta^n} &= \left(\frac{n}{r} \right)^2 + \left(\frac{n\omega_0}{r} \right)^2 \frac{1}{\beta^n} - \frac{n^2 \omega_0}{r^2} \frac{\omega_0 - 2\Omega_0}{\beta^n} \\ &= \left(\frac{n}{r} \right)^2 \left(1 + \frac{2\Omega_0 \omega_0}{\beta^n} \right) \\ &= \left(\frac{n}{r} \right)^2 \frac{(\alpha^n)^2}{\beta^n}. \end{aligned}$$

Ce qui démontre l'expression voulue pour m^n :

$$m^n = \left(\frac{n}{r} \right)^2 \frac{(\alpha^n)^2}{\beta^n} - \left(\frac{\alpha^n}{c_0} \right)^2 - \frac{n}{r} \frac{(\rho_0 \omega_0)'}{\rho_0} \frac{\alpha^n}{\beta^n} + \frac{n\omega_0}{r} \alpha^n \frac{(\beta^n)'}{(\beta^n)^2}.$$

Les conditions aux limites s'expriment alors aisément en remplaçant ξ_r^n et ξ_θ^n par leurs expressions en fonction de φ^n dans (9.13d) et (9.13c). ■

9.4.2 Notion de résonances et de lignes critiques

Nous pouvons à présent nous intéresser au caractère bien posé de l'équation modale hors fréquence de résonance.

Le problème aux limites obtenu (9.16) entre dans la théorie classique des équations différentielles ordinaires avec conditions aux limites, que l'on ne peut étudier dans l'espace $H^1([r_i, r_e])$, comme nous le faisons ici, que lorsque les coefficients s^n et m^n ont le bon comportement, en particulier dans les cas où

- s^n et m^n ne sont pas singuliers sur l'intervalle $[r_i, r_e]$;
- s^n ne s'annule pas sur l'intervalle $[r_i, r_e]$.

On remarque que choisir une fréquence qui n'est pas une fréquence de résonance de l'équation de transport permet de garantir que le coefficient s^n n'est pas singulier dans le domaine d'intérêt, car dans ce cas β^n ne s'annule pas, et ce pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Cependant, nous voyons une difficulté supplémentaire apparaître : il se peut que α^n s'annule pour certaines fréquences et certaines valeurs de $n \in \mathbb{Z}$. Et une annulation de α^n entraîne une annulation du coefficient s^n . Pour le mode $n \in \mathbb{Z}$, s'il existe une ligne $r = r_c^n$ qui annule α^n :

$$\alpha^n(r) = -\omega + n\Omega_0(r) = 0,$$

alors, l'équation (9.16) dégénère en la valeur $r = r_c^n$. Cela nous amène à définir un second ensemble de résonances.

Définition 9.4.3 (Fréquences de résonance critiques). *On appelle ensemble de fréquences de résonance critiques l'ensemble suivant*

$$\mathcal{K}_{crit} := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{K}_{crit}^n \subset \mathbb{R}, \quad (9.17)$$

où chaque \mathcal{K}_{crit}^n correspond aux possibilités d'annulation de α^n :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{K}_{crit}^n := \left\{ \omega \in \mathbb{R} : \exists r_c^n \in [r_i, r_e] / \alpha^n(r_c^n) = 0 \right\}.$$

On a alors simplement, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{K}_{crit}^n = n \operatorname{Im}(\Omega_0). \quad (9.18)$$

De même que pour les lignes résonantes du transport, on sera amené à adopter également le point de vue à fréquence fixée, à chercher quelles sont les lignes sur lesquelles les problèmes apparaissent. On a la définition suivante.

Définition 9.4.4 (Lignes de résonance critiques). *Soit $\omega \in \mathbb{R}$ fixée, pour $r^c \in [r_i, r_e]$, la ligne $\{(r^c, \theta) : 0 \leq \theta < 2\pi\}$ est une ligne critique à la fréquence ω s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $-\omega + n\Omega_0(r^c) = 0$:*

$$\mathcal{L}_{crit}(\omega) := \left\{ (r^c, \theta) : 0 \leq \theta < 2\pi \right\} : \exists n \in \mathbb{Z} / -\omega + n\Omega_0(r^c) = 0. \quad (9.19)$$

Ces lignes de résonance critiques ne sont pas dues aux recirculations de la classe d'écoulements que nous étudions dans cette partie. En effet, on trouve par exemple dans [80] l'étude d'un écoulement cisailé dans un guide cylindrique à section circulaire, l'écoulement étant dans le sens de l'axe du guide. Ces lignes critiques sont connues pour induire des singularités dans la fonction de Green des équations d'Euler linéarisées, aux endroits de l'espace où la « fréquence locale » due à l'effet Doppler s'annule. En d'autres termes, les singularités apparaissent aux endroits de l'espace où le symbole de la dérivée convective s'annule, ici ce symbole est bien α_n pour le mode $n \in \mathbb{Z}$. Nous étudierons dans notre cas d'écoulement circulaire ces singularités plus tard dans le chapitre.

La très simple proposition suivante montre que les hautes fréquences entraînent toujours l'existence de lignes critiques, à l'exception de l'écoulement en rotation solide. Ce résultat

est l'analogue de celui de la proposition 8.4.1 pour l'ensemble des fréquences de résonance \mathcal{K}_{res} .

Proposition 9.4.5. *Si l'écoulement n'est pas une rotation solide, c'est-à-dire si Ω_0 n'est pas une constante, alors il existe deux pulsations, ω_c^- et ω_c^+ telles que*

$$]-\infty, \omega_c^-] \subset \mathcal{K}_{crit} \quad \text{et} \quad [\omega_c^+, +\infty[\subset \mathcal{K}_{crit}.$$

Preuve. La preuve est très simple, en notant

$$\text{Im}(\Omega_0) = [\Omega_0^-, \Omega_0^+],$$

avec $\Omega_0^+ - \Omega_0^- > 0$. Alors pour $n \in \mathbb{Z}$, il y a recouvrement entre $\mathcal{K}_{crit}^n = [n\Omega_0^-, n\Omega_0^+]$ et l'intervalle suivant $\mathcal{K}_{crit}^{n+1} = [(n+1)\Omega_0^-, (n+1)\Omega_0^+]$ si et seulement si

$$n\Omega_0^+ > (n+1)\Omega_0^- \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{\Omega_0^-}{\Omega_0^+ - \Omega_0^-}.$$

Et donc, à partir d'un certain rang n_0 , tous les intervalles se recouvrent du côté de $+\infty$. Il existe donc ω_c^+ tel que $[\omega_c^+, +\infty[\subset \mathcal{K}_{crit}$. On procède de même du côté de $-\infty$. ■

Remarque 9.4.6. *Ces deux phénomènes de résonance n'apparaissent que lorsque l'on considère un écoulement non potentiel. En effet, pour un écoulement potentiel, on sait a priori que $\xi = 0$ et puisqu'alors $\beta^n = (\alpha^n)^2$ il vient :*

$$s^n = 1 \quad \text{et} \quad m^n = \left(\frac{n}{r}\right)^2 - \left(\frac{\alpha^n}{c_0}\right)^2.$$

Ainsi, aucune équation modale ne comporte de singularité, pour aucune valeur de ω .

9.4.3 Caractère bien posé hors fréquence de résonance du transport et critique

Analyse mode par mode. En évitant les fréquences de résonance du transport ainsi que les fréquences critiques nouvellement introduites, on est capable de montrer que l'équation de Goldstein est bien posée. Commençons par donner la formulation variationnelle du problème associé.

Proposition 9.4.7. *Sous l'hypothèse que $\omega \notin \mathcal{K}_{res}$, le problème de Goldstein (9.16) réduit et associé au mode $n \in \mathbb{Z}$, muni des conditions aux limites (9.16c) et (9.16b), admet pour formulation variationnelle le problème suivant*

$$\left| \begin{array}{l} \text{Pour } f^n \in L^2(]r_i, r_e[, \rho_0), \text{ trouver } \varphi^n \in H^1(]r_i, r_e[, \rho_0) \text{ telle que :} \\ \forall \psi \in H^1(]r_i, r_e[, \rho_0), \quad a^n(\varphi^n, \psi) = \int_{r_i}^{r_e} r \rho_0 f^n \bar{\psi} \, dr, \end{array} \right. \quad (9.20)$$

où

$$a^n(\varphi, \psi) := \int_{r_i}^{r_e} r \rho_0 \left\{ s^n \frac{d\varphi}{dr} \frac{d\bar{\psi}}{dr} + m^n \varphi \bar{\psi} \right\} dr - \left(\rho_0 n \omega_0 \frac{\alpha^n}{\beta^n} \varphi \bar{\psi} \right)(r_i) \\ + \left(\rho_0 n \omega_0 \frac{\alpha^n}{\beta^n} \varphi \bar{\psi} - i r_e \rho_0 \frac{\omega}{c_0} \varphi \bar{\psi} \right)(r_e)$$

Puis, énonçons le caractère bien posé de l'équation modale, pour chaque mode.

Proposition 9.4.8. *Sous l'hypothèse que*

$$\omega \notin \mathcal{K}_{res} \cup \mathcal{K}_{crit},$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le problème (9.20) est bien posé. En particulier, le problème relève de l'alternative de Fredholm et l'unicité est garantie par les conditions aux limites.

Preuve. Sous l'hypothèse que $\omega \notin \mathcal{K}_{res} \cup \mathcal{K}_{crit}$, les fonctions α^n et β^n ne s'annulent pas sur $[r_i, r_e]$ et donc $s^n = (\alpha^n)^2 / \beta^n$ non plus et n'est pas singulier. Ainsi, s^n est de signe constant, et quitte à multiplier l'équation par -1 , supposons que $s^n > 0$, ce qui garantit la coercivité du terme

$$\int_{r_i}^{r_e} r \rho_0 s^n \frac{d\varphi}{dr} \frac{d\bar{\psi}}{dr} + r \rho_0 \varphi \bar{\psi} dr.$$

Ainsi, le problème relève de l'alternative de Fredholm.

Montrons l'unicité. Soit φ^n solution de l'équation homogène, alors en prenant comme fonction test $\psi = \varphi^n$, il vient $a^n(\varphi^n, \varphi^n) = 0$, et en en prenant la partie imaginaire :

$$0 = \text{Im}(a^n(\varphi^n, \varphi^n)) = -r_e \rho_0(r_e) \frac{\omega}{c_0(r_e)} |\varphi^n(r_e)|^2.$$

D'où l'on déduit que $\varphi^n(r_e) = 0$ puis en utilisant la condition aux limites (9.16c), on trouve que $(\varphi^n)'(r_e) = 0$, ce qui montre finalement que $\varphi^n = 0$ et termine la preuve. La théorie de Fredholm est peut être un peu disproportionnée pour analyser ce cas qui relève de la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients réguliers. Cependant, elle nous permet de garder un style plus constant de présentation. ■

Reconstruction modale. Dans ce paragraphe, nous souhaitons reconstruire la solution φ à partir des composantes modales φ^n puisqu'elles sont bien définies de façon unique d'après l'étude au paragraphe précédent. Pour ce faire, nous établissons un lemme d'estimation des coefficients de la formulation variationnelle qui nous permettra de déduire des estimations en norme L^2 et H^1 de φ^n , pour ensuite pouvoir sommer ces modes de Fourier. Nous constaterons que pour $|n|$ grand, le problème est coercif sous la condition habituelle que l'écoulement ait un rotationnel qui ne soit pas trop fort, en plus d'être subsonique, condition déjà apparue dans le modèle potentiel.

Lemme 9.4.9 (Estimations). *Nous avons les propriétés suivantes.*

(i) *Pour tout réel $\kappa < 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que*

$$\forall |n| \geq n_0, \quad \forall r \in [r_i, r_e], \quad s^n(r) \geq \kappa.$$

(ii) Sous la condition

$$\inf_{r_i < r < r_e} \left(1 - \left(\frac{v_0(r)}{c_0(r)} \right)^2 + 2 \left(\omega_0(r)^2 - 2\Omega_0(r)\omega_0(r) \right) \right) > 0, \quad (9.21)$$

il existe deux constantes $n_0 \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ telles que :

$$\forall |n| \geq n_0, \quad \forall r \in [r_i, r_e], \quad m^n(r) \geq C n^2.$$

Preuve. Nous détaillons d'avantage le premier cas car il fait intervenir moins de notations et donc est plus simple à présenter.

(i) Soit $\kappa < 1$. On peut ré-écrire s^n sous la forme :

$$s^n = \frac{(\alpha^n)^2}{\beta^n} = \frac{(\alpha^n)^2}{(\alpha^n)^2 - (\Omega_0^*)^2} = 1 + \frac{(\Omega_0^*)^2}{(\alpha^n)^2 - (\Omega_0^*)^2}.$$

Or, on rappelle que par hypothèse

$$\forall r \in [r_i, r_e], \quad 0 < \Omega_0^- \leq \Omega_0(r)$$

et puisque $\alpha^n(r) = -\omega + n\Omega_0(r)$, il vient

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in [r_i, r_e], \quad \alpha^n(r) &\geq -\omega + n\Omega_0^-, \\ \forall n \in \mathbb{Z}^-, \quad \forall r \in [r_i, r_e], \quad \alpha^n(r) &\leq -\omega + n\Omega_0^-. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\inf_{r_i < r < r_e} \alpha^n(r) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \quad \text{et} \quad \sup_{r_i < r < r_e} \alpha^n(r) \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} -\infty.$$

Ainsi, lorsque $|n|$ tend vers $+\infty$, on trouve que $\inf_{r_i < r < r_e} \alpha^n(r)^2$ diverge vers $+\infty$.

Ainsi, pour $|n|$ assez grand, on a $(\alpha^n)^2 - (\Omega_0^*)^2 > 0$ sur tout $[r_i, r_e]$ et donc l'inégalité

$$\kappa \leq 1 + \frac{(\Omega_0^*)^2}{(\alpha^n)^2 - (\Omega_0^*)^2}$$

est équivalente à

$$\frac{-\kappa}{1-\kappa} (\Omega_0^*)^2 \leq (\alpha^n)^2,$$

qui est vérifiée dès lors que $\inf_{r_i < r < r_e} \alpha^n(r)^2$ est supérieur au maximum de la fonction $-\kappa(\Omega_0^*)^2/(1-\kappa)$.

- Rappelons l'expression du coefficient m^n .

$$m^n = \left(\frac{n}{r} \right)^2 \frac{(\alpha^n)^2}{\beta^n} - \left(\frac{\alpha^n}{c_0} \right)^2 - \frac{n(\rho_0 \omega_0)'}{r \rho_0} \frac{\alpha^n}{\beta^n} + \frac{n\omega_0}{r} \alpha^n \frac{(\beta^n)'}{(\beta^n)^2}.$$

Nous allons analyser quels sont les coefficients dominants lorsque $|n|$ est grand. D'une

part, on a la ré-organisation suivante pour le premier groupe de termes :

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{r}\right)^2 \frac{(\alpha^n)^2}{\beta^n} - \left(\frac{\alpha^n}{c_0}\right)^2 &= \left(\frac{n}{r}\right)^2 \left[\frac{(\alpha^n)^2}{(\alpha^n)^2 - (\Omega_0^*)^2} - \left(-\frac{r\omega}{c_0} + \frac{v_0}{c_0}\right)^2 \right] \\ &= \left(\frac{n}{r}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{v_0}{c_0}\right)^2\right) + \left(\frac{n}{r}\right)^2 \frac{(\Omega_0^*)^2}{(\alpha^n)^2 - (\Omega_0^*)^2} + 2\frac{\omega\Omega_0}{c_0^2}n - \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2, \end{aligned}$$

dont le coefficient dominant fait apparaître la quantité classique $1 - (v_0/c_0)^2$ qui impliquera que l'écoulement doit être choisi subsonique.

Puis, analysons le terme suivant,

$$-\frac{n(\rho_0\omega_0)'}{r\rho_0}\frac{\alpha^n}{\beta^n} = -\frac{(\rho_0\omega_0)'}{\rho_0}\frac{n^2\Omega_0 - \omega n}{(n\Omega_0 - \omega)^2 - (\Omega_0^*)^2},$$

qui ne contient donc pas de terme en n^2 . Enfin, le dernier terme s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{n\omega_0}{r}\alpha^n\frac{(\beta^n)'}{\beta^n} &= \frac{\omega_0}{r}n(-\omega + n\Omega_0)\frac{2(\alpha^n)'\alpha^n - (2\Omega_0\omega_0)'}{(n\Omega_0 - \omega)^2 - (\Omega_0^*)^2} \\ &= \frac{\omega_0}{r}(n^2\Omega_0 - \omega + n)\frac{2n^2\Omega_0'\Omega_0 - 2n\omega\Omega_0' - (\Omega_0^*)^2}{(n\Omega_0 - \omega)^2 - (\Omega_0^*)^2}, \end{aligned}$$

et le coefficient dominant lorsque n est grand est

$$\frac{\omega_0}{r}n^2\Omega_0\frac{2\Omega_0'\Omega_0}{\Omega_0^2} = \frac{n^2}{r}2\Omega_0'\omega_0,$$

qui se simplifie grâce à $\omega_0 = 2\Omega_0 + r\Omega_0'$ en

$$2\left(\frac{n}{r}\right)^2(\omega_0^2 - (\Omega_0^*)^2).$$

Il n'a cependant a priori pas de signe particulier, sauf dans le cas notable intéressant où $(\Omega_0^*)^2 = 2\Omega_0\omega_0 \geq 0$ sur tout l'intervalle $[r_i, r_e]$ (i.e. pour $I_+ = [r_i, r_e]$).

Résumons, le coefficient dominant de m^n lorsque $|n|$ est grand s'écrit sous donc sous la forme

$$\left(\frac{n}{r}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{v_0}{c_0}\right)^2 + 2(\omega_0^2 - 2\Omega_0\omega_0)\right),$$

qui permet de conclure sur l'estimation de m^n en utilisant l'hypothèse que ce coefficient dominant est minoré par un nombre strictement positif. ■

Nous pouvons alors montrer les estimations suivantes de φ^n uniformément en n et garantir la reconstruction de φ .

Théorème 9.4.10 (Reconstruction modale). *Soit $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $\omega \notin \mathcal{K}_{res} \cup \mathcal{K}_{crit}$. Soit $f \in L^2(D)$ et soient $(f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ les modes de Fourier associés (9.11). Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soit φ^n l'unique solution du problème modal (9.20) associée au second membre $f^n \in L^2([r_i, r_e])$.*

Sous les conditions

$$\left\{ \inf_{r_i < r < r_e} \left(1 - \left(\frac{v_0(r)}{c_0(r)} \right)^2 + 2(\omega_0(r)^2 - 2\Omega_0(r)\omega_0(r)) \right) \right\} > 0, \quad (9.22a)$$

$$\left\{ \forall r \in \{r_i, r_e\}, \quad C_i^2 \left| \rho_0(r) \frac{\omega_0(r)}{\Omega_0(r)} \right| < \frac{1}{2} \right. \quad (9.22b)$$

où $C_i > 0$ est la constante de continuité de l'injection de Sobolev $H^1([r_i, r_e], r\rho_0) \hookrightarrow C^0([r_i, r_e])$ (indépendante de n), alors, il existe une constante $c > 0$ et un seuil $n_0 \in \mathbb{N}$, tels que les estimations suivantes aient lieu,

(i) en norme H^1 :

$$\forall |n| \geq n_0, \quad \|\varphi^n\|_{H^1([r_i, r_e], r\rho_0)} \leq c \|f^n\|_{L^2([r_i, r_e], r\rho_0)},$$

(ii) et plus précisément pour la norme L^2 :

$$\forall |n| \geq n_0, \quad n^2 \|\varphi^n\|_{L^2([r_i, r_e], r\rho_0)} \leq c \|f^n\|_{L^2([r_i, r_e], r\rho_0)}.$$

Ainsi, $\sum_n \|\varphi^n\|_{H^1}^2$ et $\sum_n n^2 \|\varphi^n\|_{L^2}^2$ sont convergentes et on en déduit que

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi^n(r) e^{in\theta},$$

et est l'unique solution du problème de Goldstein dans la couronne (9.2).

Preuve. Soit φ^n l'unique solution du problème modal correspondant à $n \in \mathbb{Z}$. En utilisant comme fonction test φ^n dans la formulation variationnelle, on obtient que

$$\Re(a^n(\varphi^n, \varphi^n)) = \Re \left(\int_{r_i}^{r_e} r\rho_0 f^n \varphi^n \right) \leq \|f^n\|_{L^2([r_i, r_e], r\rho_0)} \|\varphi^n\|_{L^2([r_i, r_e], r\rho_0)}.$$

Puis, nous cherchons à minorer le membre de gauche de deux manières pour obtenir les estimations (i) et (ii).

(i) En utilisant les estimations démontrées au lemme 9.4.9, pour tout $\kappa < 1$, il existe un seuil $n_0 \in \mathbb{N}$ et une constante $C > 0$, tels que pour tout $|n| \geq n_0$,

$$s^n \geq \kappa \quad \text{et} \quad m^n \geq C n^2 \geq \kappa. \quad (9.23)$$

On en déduit que pour tout $|n| \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \Re(a^n(\varphi^n, \varphi^n)) &\geq \kappa \left\| \frac{d\varphi^n}{dr} \right\|_{H^1([r_i, r_e], r\rho_0)}^2 + \kappa \|\varphi^n\|_{L^2([r_i, r_e], r\rho_0)}^2 \\ &\quad + \rho_0(r_e)\omega_0(r_e) \frac{n\alpha^n(r_e)}{\beta^n(r_e)} |\varphi^n(r_e)|^2 - \rho_0(r_i)\omega_0(r_i) \frac{n\alpha^n(r_i)}{\beta^n(r_i)} |\varphi^n(r_i)|^2. \end{aligned}$$

En utilisant l'injection de Sobolev $H^1([r_i, r_e], r\rho_0) \hookrightarrow C^0([r_i, r_e])$, dont nous avons noté la constante de continuité C_i :

$$\forall r \in \{r_i, r_e\}, \quad |\varphi^n(r)|^2 \leq C_i^2 \|\varphi^n\|_{H^1([r_i, r_e], r\rho_0)}^2$$

il vient,

$$\begin{aligned} \Re\left(a^n(\varphi^n, \varphi^n)\right) &\geq \kappa \|\varphi^n\|_{H^1(\cdot)_{[r_i, r_e], r\rho_0}}^2 - C_i^2 \left| \rho_0(r_e) \omega_0(r_e) \frac{n\alpha^n(r_e)}{\beta^n(r_e)} \right| \|\varphi^n\|_{H^1(\cdot)_{[r_i, r_e], r\rho_0}}^2 \\ &\quad - C_i^2 \left| \rho_0(r_i) \omega_0(r_i) \frac{n\alpha^n(r_i)}{\beta^n(r_i)} \right| \|\varphi^n\|_{H^1(\cdot)_{[r_i, r_e], r\rho_0}}^2. \end{aligned}$$

Comme de plus, en utilisant l'hypothèse (9.22b), on a la convergence suivante

$$\forall r \in [r_i, r_e], \quad C_i^2 \left| \rho_0(r) \omega_0(r) \frac{n\alpha^n(r)}{\beta^n(r)} \right| \xrightarrow{|n| \rightarrow +\infty} C_i^2 \left| \rho_0(r) \frac{\omega_0(r)}{\Omega_0(r)} \right| < \frac{1}{2},$$

il existe $\varepsilon > 0$ tel que, quitte à augmenter n_0 , on a

$$\forall |n| \geq n_0, \quad \forall r \in [r_i, r_e], \quad -C_i^2 \left| \rho_0(r) \omega_0(r) \frac{n\alpha^n(r)}{\beta^n(r)} \right| > -\frac{1-\varepsilon}{2}.$$

On a ainsi trouvé la minoration suivante

$$\Re\left(a^n(\varphi^n, \varphi^n)\right) \geq (\kappa + \varepsilon - 1) \|\varphi^n\|_{H^1(\cdot)_{[r_i, r_e], r\rho_0}}^2.$$

Or, on peut choisir κ tel que $1 > \kappa > 1 - \varepsilon$ quitte à augmenter une nouvelle fois le seuil n_0 , et donc on peut supposer que

$$\nu := \kappa + \varepsilon - 1 > 0.$$

On a donc trouvé que

$$\begin{aligned} \nu \|\varphi^n\|_{H^1(\cdot)_{[r_i, r_e], r\rho_0}}^2 &\leq \|\varphi^n\|_{L^2(\cdot)_{[r_i, r_e], r\rho_0}} \|\varphi^n\|_{L^2(\cdot)_{[r_i, r_e], r\rho_0}} \\ &\leq \|\varphi^n\|_{H^1(\cdot)_{[r_i, r_e], r\rho_0}} \|\varphi^n\|_{L^2(\cdot)_{[r_i, r_e], r\rho_0}}, \end{aligned}$$

ce qui démontre l'estimation voulue en norme H^1 pour φ^n avec $c = 1/\nu > 0$.

- (ii) Pour l'estimation fine de la norme L^2 , on refait les mêmes calculs en utilisant l'inégalité plus précise $m^n \geq C n^2$ à la place de $m^n \geq \kappa$ de (9.23) il vient :

$$\begin{aligned} \forall |n| \geq n_0, \quad \Re\left(a^n(\varphi^n, \varphi^n)\right) &\geq \kappa \left\| \frac{d\varphi^n}{dr} \right\|_{L^2(\cdot)_{[r_i, r_e], r\rho_0}}^2 + C n^2 \|\varphi^n\|_{L^2(\cdot)_{[r_i, r_e], r\rho_0}}^2 - (1 - \varepsilon) \|\varphi^n\|_{H^1(\cdot)_{[r_i, r_e], r\rho_0}}^2 \\ &\geq (\kappa + \varepsilon - 1) \left\| \frac{d\varphi^n}{dr} \right\|_{L^2(\cdot)_{[r_i, r_e], r\rho_0}}^2 + n^2 \left(C + \frac{\varepsilon - 1}{n^2} \right) \|\varphi^n\|_{L^2(\cdot)_{[r_i, r_e], r\rho_0}}^2. \end{aligned}$$

Et donc, quitte une nouvelle fois à augmenter le seuil n_0 , il existe $c > 0$ telle que $C + (\varepsilon - 1)/n^2 > 1/c > 0$ pour tout $|n| \geq n_0$ et on a donc :

$$\forall |n| \geq n_0, \quad \Re\left(a^n(\varphi^n, \varphi^n)\right) \geq \frac{n^2}{c} \|\varphi^n\|_{L^2(\cdot)_{[r_i, r_e], r\rho_0}}^2.$$

Enfin, on conclut de même en combinant les estimations

$$\frac{n^2}{c} \|\varphi^n\|_{L^2(]r_i, r_e[, r\rho_0)}^2 \leq \|\varphi^n\|_{L^2(]r_i, r_e[, r\rho_0)} \|f^n\|_{L^2(]r_i, r_e[, r\rho_0)},$$

ce qui termine la preuve des estimations.

Expliquons brièvement la reconstruction, qui est classique. f étant dans $L^2(D, \rho_0)$, par le théorème de Parseval, il vient que $\sum_n \|f^n\|_{L^2(]r_i, r_e[, r\rho_0)}^2$ est convergente et :

$$\|f\|_{L^2(D, \rho_0)}^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|f^n\|_{L^2(]r_i, r_e[, r\rho_0)}^2.$$

Ainsi, les majorations

$$\sum_{|n| \geq n_0} n^2 \|\varphi^n\|_{L^2(]r_i, r_e[, r\rho_0)}^2 \leq \sum_{|n| \geq n_0} n^4 \|\varphi^n\|_{L^2(]r_i, r_e[, r\rho_0)}^2 \leq c^2 \sum_{|n| \geq n_0} \|f^n\|_{L^2(]r_i, r_e[, r\rho_0)}^2 < \infty,$$

montrent que $\varphi \in L^2(D, \rho_0)$ et même que $\partial_\theta \varphi \in L^2(]r_i, r_e[, r\rho_0))$. Enfin,

$$\sum_{|n| \geq n_0} \|\varphi^n\|_{H^1(]r_i, r_e[, r\rho_0)}^2 \leq c^2 \sum_{|n| \geq n_0} \|f^n\|_{L^2(]r_i, r_e[, r\rho_0)}^2 < \infty,$$

finit la reconstruction en montrant que $\partial_r \varphi \in L^2(]r_i, r_e[, r\rho_0)$. ■

Remarque 9.4.11. La condition « d'être une petite perturbation d'un écoulement potentiel subsonique » n'apparaissant pas dans la proposition 9.4.7, il semblerait que nous en ayons perdu la trace. C'est donc dans ce théorème de reconstruction des modes de Fourier que l'on voit apparaître le fait que l'écoulement doit être non seulement subsonique mais également avoir un rotationnel suffisamment petit.

9.5 Analyse des résonances critiques et du transport par absorption limite

Les deux résultats suivants montrent qu'il n'est pas raisonnable de faire l'impasse sur les fréquences de résonance ou critiques :

1. À l'exception des écoulements en rotations solides, toutes les hautes fréquences sont résonantes et critiques : voir les deux propositions analogues 8.4.1 et 9.4.5.
2. Il existe des écoulements circulaires tels que les fréquences de résonance remplissent tout l'espace, $\mathcal{K}_{res} = \mathbb{R}$: voir le cas du tourbillon de Lamb-Oseen ou même le cas d'un écoulement potentiel trop perturbé, étudiés dans la section 8.5 d'exemples d'écoulements circulaires.

Nous souhaitons donc aller plus loin dans cette section et prendre en compte ce qui se passe à une fréquence de résonance ou critique. Le problème est de donner un sens aux solutions des équations modales (9.16) munies des conditions aux limites (9.16c) et (9.16b) posées sur l'intervalle $]r_i, r_e[$, alors que les coefficients possèdent des singularités à l'intérieur de cet intervalle. Rappelons que :

- $\omega \in \mathcal{K}_{res}$ correspond à une valeur d'annulation de β^n pour certains $n \in \mathbb{Z}$, et entraîne la présence d'une singularité dans les coefficients s^n et m^n .
- $\omega \in \mathcal{K}_{crit}$ correspond à une valeur d'annulation de α^n pour certains $n \in \mathbb{Z}$, entraînant l'existence de point d'annulation de s^n : dégénérescence de l'ellipticité de l'équation.

Hypothèse simplificatrice : Pour étudier ces deux phénomènes séparément, nous supposons que nous ne sommes jamais en présence d'une ligne résonante et critique en même temps. Génériquement, les deux phénomènes sont simultanés, mais ne se produisent pas sur les mêmes lignes.

Les équations étant mal posées en présence de ces lignes résonantes ou critiques, il nous faut un critère physique permettant de sélectionner d'éventuelles solutions. Un problème similaire apparaît lors de l'étude des plasmas aux fréquences appelées « résonance cyclotron » et « résonance hybride ». Dans [75] par exemple, l'approche retenue pour analyser la façon dont dégèrent les solutions à ces fréquences de résonance est d'introduire de l'absorption correspondant à la friction ν des particules dans le plasma. Cet ajout d'absorption permet de supprimer les singularités dans les coefficients des équations, puis en suivant la méthode d'absorption limite, le comportement des solutions est analysé lorsque ν tend vers 0^+ . Il est montré que la notion de solution du problème limite aux fréquences de résonance n'a pas de sens dans les espaces de Sobolev utilisés hors résonance. En particulier, les méthodes numériques standards ne sont pas adaptées au calcul des solutions physiques sélectionnées par absorption limite, voir [76] et [77] pour un traitement numérique de ces solutions singulières par les « solutions manufacturées ».

Nous procéderons également par absorption limite pour l'étude de nos résonances, l'absorption n'ayant évidemment pas la même origine physique, mais correspond néanmoins à un terme de frottement dans l'équation d'onde en régime temporel. Cela revient classiquement à complexifier la pulsation, en posant $\omega_\varepsilon := \omega + i\varepsilon$, où $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Nous verrons qu'une absorption non nulle suffisamment petite supprime les singularités des coefficients des équations modales. Il s'agira ensuite d'étudier le comportement des solutions trouvées en présence d'absorption lorsque ε tend vers 0.

9.5.1 Introduction de l'absorption

Nous nous intéressons donc aux équations de Goldstein où la pulsation ω a été remplacée par celle correspondant à la présence d'absorption :

$$\omega_\varepsilon := \omega + i\varepsilon, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Exprimées sur les modes de Fourier, nous obtenons les mêmes équations qu'en (9.13) où ω a été simplement remplacée par ω_ε . En notant avec un indice ε les inconnues, φ_ε^n et $\xi_\varepsilon^n = (\xi_{r,\varepsilon}^n, \xi_{\theta,\varepsilon}^n)$, ces équations en présence d'absorption s'écrivent :

$$\left\{ -\frac{d}{dr} \left(r\rho_0 \frac{d\varphi_\varepsilon^n}{dr} + r\rho_0 \xi_{r,\varepsilon}^n \right) + r\rho_0 \left[\left(\frac{n}{r} \right)^2 - \left(\frac{\alpha_\varepsilon^n}{c_0} \right)^2 \right] \varphi_\varepsilon^n - in\rho_0 \xi_{\theta,\varepsilon}^n = r\rho_0 f^n, \right. \quad (9.24a)$$

$$\left. \begin{pmatrix} i\alpha_\varepsilon^n & -2\Omega_0 \\ \omega_0 & i\alpha_\varepsilon^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{r,\varepsilon}^n \\ \xi_{\theta,\varepsilon}^n \end{pmatrix} = \omega_0 \begin{pmatrix} \frac{in}{r} \varphi_\varepsilon^n \\ -\frac{d\varphi_\varepsilon^n}{dr} \end{pmatrix}. \right. \quad (9.24b)$$

Nous notons également avec un indice ε les grandeurs correspondant à α^n et β^n en présence d'absorption :

$$\begin{aligned}\alpha_\varepsilon^n &:= -\omega_\varepsilon + n\Omega_0, \\ \beta_\varepsilon^n &:= (\alpha_\varepsilon^n)^2 - 2\Omega_0\omega_0,\end{aligned}$$

et donc, à $\varepsilon = 0$, on retrouve $\alpha_0^n = \alpha^n$ et $\beta_0^n = \beta^n$.

Comme l'exprime la proposition suivante, l'introduction d'absorption permet de supprimer les singularités des équations modales (9.13a) et (9.13b), pour une absorption suffisamment petite du moins.

Proposition 9.5.1.

i) Pour toute absorption $\varepsilon > 0$, on a

$$\forall r \in [r_i, r_e], \quad \alpha_\varepsilon^n(r) \neq 0.$$

ii) Sous l'hypothèse qu'il n'y a pas de ligne qui soit à la fois résonante et critique, il existe $\underline{\varepsilon} > 0$ telle que :

$$\forall \varepsilon \in [0, \underline{\varepsilon}], \quad \forall r \in [r_i, r_e], \quad \beta_\varepsilon^n(r) \neq 0.$$

Preuve.

i) Pour α_ε^n , c'est évident, car

$$\operatorname{Im}(\alpha_\varepsilon^n) = -\varepsilon \neq 0.$$

ii) Pour β_ε^n , il faut faire un peu plus attention car en toute généralité, il est possible que même après introduction d'absorption, ω_ε soit encore une fréquence de résonance complexe, i.e. dans $\mathcal{K}_{res}^{\mathbb{C}}$. Remarquons que

$$\Re(\beta_\varepsilon^n) = (\alpha^n)^2 - 2\Omega_0\omega_0 - \varepsilon^2 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(\beta_\varepsilon^n) = -2\varepsilon\alpha^n,$$

s'annulent simultanément si et seulement si

$$\alpha^n = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon^2 + 2\Omega_0\omega_0 = 0.$$

Supposons par l'absurde qu'il existe une suite d'absorption $(\varepsilon_k)_k$ tendant vers 0 et une suite de rayons $(r_k) \in [r_i, r_e]^{\mathbb{N}}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\alpha^n(r^k) = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_k^2 + 2\Omega_0(r_k)\omega_0(r_k) = 0,$$

alors, en passant à la limite et quitte à extraire une sous-suite, on a $\lim_k r_k = r_*$, et on trouve

$$\alpha_0^n(r_*) = 0 \quad \text{et} \quad 2\Omega_0(r_*)\omega_0(r_*) = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\alpha^n(r_*) = 0 \quad \text{et} \quad \beta^n(r_*) = 0.$$

Ainsi, $\{(r_*, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ est une ligne de résonance mais également une ligne critique, cas que nous avons pris le soin d'écartier par hypothèse. Il existe donc $\underline{\varepsilon} > 0$ tel que pour toute absorption ε plus petite et non nulle, $\beta_\varepsilon^n \neq 0$ sur $[r_i, r_e]$.

■

Ainsi, à absorption non nulle et suffisamment petite $0 < \varepsilon < \underline{\varepsilon}$, l'équation de transport harmonique modale est inversible et l'on peut exprimer ξ_ε^n en fonction de φ_ε^n comme nous l'avons fait hors fréquence de résonance du transport :

$$\xi_{r,\varepsilon}^n = \frac{\omega_0}{\beta_\varepsilon^n} \left(\frac{n}{r} \alpha_\varepsilon^n + 2\Omega_0 \frac{d}{dr} \right) \varphi_\varepsilon^n, \quad (9.25a)$$

$$\xi_{\theta,\varepsilon}^n = i \frac{\omega_0}{\beta_\varepsilon^n} \left(\frac{n}{r} \omega_0 + \alpha_\varepsilon^n \frac{d}{dr} \right) \varphi_\varepsilon^n. \quad (9.25b)$$

Ces expressions de ξ_ε^n mènent aux conditions aux limites suivantes avec absorption exprimées qu'en fonction de φ_ε^n :

$$\begin{cases} r\rho_0 s_\varepsilon^n \frac{d\varphi_\varepsilon^n}{dr} = -\rho_0 n \omega_0 \frac{\alpha_\varepsilon^n}{\beta_\varepsilon^n} \varphi_\varepsilon^n, & \text{en } r = r_i, \end{cases} \quad (9.26a)$$

$$\begin{cases} r\rho_0 s_\varepsilon^n \frac{d\varphi_\varepsilon^n}{dr} = \left(-\rho_0 n \omega_0 \frac{\alpha_\varepsilon^n}{\beta_\varepsilon^n} + i r \rho_0 \frac{\omega_\varepsilon}{c_0} \right) \varphi_\varepsilon^n, & \text{en } r = r_e. \end{cases} \quad (9.26b)$$

Ainsi, le problème de Goldstein avec absorption exprimé sur les modes de Fourier s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } f^n \in L^2(]r_i, r_e[, r\rho_0), \text{ trouver } \varphi_\varepsilon^n \in H^1(]r_i, r_e[, r\rho_0) \text{ telle que :} \\ -\frac{d}{dr} \left(r\rho_0 s_\varepsilon^n \frac{d\varphi_\varepsilon^n}{dr} \right) + r\rho_0 m_\varepsilon^n \varphi_\varepsilon^n = r\rho_0 f^n, \end{array} \right. \quad (9.27a)$$

Conditions aux limites :

$$r\rho_0 s_\varepsilon^n \frac{d\varphi_\varepsilon^n}{dr} = -\rho_0 n \omega_0 \frac{\alpha_\varepsilon^n}{\beta_\varepsilon^n} \varphi_\varepsilon^n, \quad \text{en } r = r_i \quad (9.27b)$$

$$r\rho_0 s_\varepsilon^n \frac{d\varphi_\varepsilon^n}{dr} = \left(-\rho_0 n \omega_0 \frac{\alpha_\varepsilon^n}{\beta_\varepsilon^n} + i r \rho_0 \frac{\omega_\varepsilon}{c_0} \right) \varphi_\varepsilon^n, \quad \text{en } r = r_e \quad (9.27c)$$

où

$$s_\varepsilon^n := \frac{(\alpha_\varepsilon^n)^2}{\beta_\varepsilon^n}, \quad (9.28a)$$

$$m_\varepsilon^n := \left(\frac{n}{r} \right)^2 \frac{(\alpha_\varepsilon^n)^2}{\beta_\varepsilon^n} - \left(\frac{\alpha_\varepsilon^n}{c_0} \right)^2 - \frac{n}{r} \frac{(\rho_0 \omega_0)'}{\rho_0} \frac{\alpha_\varepsilon^n}{\beta_\varepsilon^n} + \frac{n \omega_0}{r} \alpha_\varepsilon^n \frac{(\beta_\varepsilon^n)'}{(\beta_\varepsilon^n)^2}. \quad (9.28b)$$

s_ε^n et m_ε^n sont des fonctions à valeurs complexes régulières définies sur $[r_i, r_e]$. Par ajout d'absorption, nous sommes donc revenus à un cadre d'équations différentielles à coefficients réguliers classiques à résoudre.

9.5.2 Écriture sous forme résolue.

Dans le but d'analyser les éventuelles singularités des solutions en utilisant la théorie de Fuchs (ou méthode de Frobenius) appliquée à une version étendue au plan complexe de l'équation (9.27a), nous l'écrivons sous une forme plus adaptée, dite résolue (coefficient 1 devant la plus haute dérivée). La forme de Sturm-Liouville (9.27a) est en effet plus adaptée à une analyse variationnelle. D'après la méthode de variation de la constante, toutes les solutions du problème avec absorption s'écrivent en fonction des solutions du problème homogène. Ainsi, nous ne nous intéressons qu'à l'équation homogène, pour $f^n = 0$, dont nous avons

pour but de décrire des solutions physiquement acceptables, obtenues par absorption limite.

Lemme 9.5.2. *L'équation différentielle (9.27a) homogène ($f^n = 0$) s'écrit sous la forme résolue suivante :*

$$\frac{d^2 \varphi_\varepsilon^n}{dr^2} + P_\varepsilon^n \frac{d\varphi_\varepsilon^n}{dr} + Q_\varepsilon^n \varphi_\varepsilon^n = 0, \quad (9.29)$$

où

$$P_\varepsilon^n(r) := \frac{(r\rho_0)'}{r\rho_0} + 2 \frac{(\alpha_\varepsilon^n)'}{\alpha_\varepsilon^n} - \frac{(\beta_\varepsilon^n)'}{\beta_\varepsilon^n} \quad (9.30a)$$

$$Q_\varepsilon^n(r) := -\left(\frac{n}{r}\right)^2 + \frac{\beta_\varepsilon^n}{c_0^2} + \frac{n(\rho_0\omega_0)'}{r\rho_0} \frac{1}{\alpha_\varepsilon^n} - \frac{n\omega_0}{r} \frac{(\beta_\varepsilon^n)'}{\alpha_\varepsilon^n \beta_\varepsilon^n}. \quad (9.30b)$$

Preuve. Il suffit de développer l'expression de m_ε^n donnée par (9.28b). Il vient

$$-\frac{d}{dr} \left(r\rho_0 \frac{(\alpha_\varepsilon^n)^2}{\beta_\varepsilon^n} \frac{d\varphi_\varepsilon^n}{dr} \right) = -r\rho_0 \frac{(\alpha_\varepsilon^n)^2}{\beta_\varepsilon^n} \left\{ \frac{d^2 \varphi_\varepsilon^n}{dr^2} + \left(\frac{(r\rho_0)'}{r\rho_0} + 2 \frac{(\alpha_\varepsilon^n)'}{\alpha_\varepsilon^n} - \frac{(\beta_\varepsilon^n)'}{\beta_\varepsilon^n} \right) \frac{d\varphi_\varepsilon^n}{dr} \right\}.$$

Ainsi, φ_ε^n est solution de l'équation homogène (9.27a) si et seulement si

$$\frac{d\varphi_\varepsilon^n}{dr} + \left(\frac{(r\rho_0)'}{r\rho_0} + 2 \frac{(\alpha_\varepsilon^n)'}{\alpha_\varepsilon^n} - \frac{(\beta_\varepsilon^n)'}{\beta_\varepsilon^n} \right) \frac{d\varphi_\varepsilon^n}{dr} + Q_\varepsilon^n \varphi_\varepsilon^n = 0,$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon^n &= -\frac{\beta_\varepsilon^n}{(\alpha_\varepsilon^n)^2} m_\varepsilon^n = -\frac{\beta_\varepsilon^n}{(\alpha_\varepsilon^n)^2} \left\{ \left(\frac{n}{r}\right)^2 \frac{(\alpha_\varepsilon^n)^2}{\beta_\varepsilon^n} - \left(\frac{\alpha_\varepsilon^n}{c_0}\right)^2 - \frac{n(\rho_0\omega_0)'}{r\rho_0} \frac{\alpha_\varepsilon^n}{\beta_\varepsilon^n} + \frac{n\omega_0}{r} \alpha_\varepsilon^n \frac{(\beta_\varepsilon^n)'}{(\beta_\varepsilon^n)^2} \right\} \\ &= -\left(\frac{n}{r}\right)^2 + \frac{\beta_\varepsilon^n}{c_0^2} + \frac{n(\rho_0\omega_0)'}{r\rho_0} \frac{1}{\alpha_\varepsilon^n} - \frac{n\omega_0}{r} \frac{(\beta_\varepsilon^n)'}{\alpha_\varepsilon^n \beta_\varepsilon^n}. \end{aligned}$$

■

9.5.3 Étude d'une base de solution locale par extension au plan complexe

Sans prendre en compte les conditions aux limites pour l'instant, nous nous intéressons à l'espace des solutions des équations modales homogènes sur un sous-intervalle ouvert non vide $I \subset]r_i, r_e[$, en présence d'absorption $0 < \varepsilon < \underline{\varepsilon}$ suffisamment petite :

$$\mathcal{S}_\varepsilon^n(I) = \left\{ \varphi_\varepsilon^n \in H^1(I) : \frac{d^2 \varphi_\varepsilon^n}{dr^2} + P_\varepsilon^n \frac{d\varphi_\varepsilon^n}{dr} + Q_\varepsilon^n \varphi_\varepsilon^n = 0 \text{ sur } I \right\}. \quad (9.31)$$

D'après la théorie classique des équations différentielles à coefficients réguliers, cet espace est de dimension deux :

$$\dim(\mathcal{S}_\varepsilon^n(I)) = 2.$$

Nous allons à présent étudier le comportement local d'une base de cet espace au voisinage du rayon correspondant d'une ligne résonante ou critique. Pour cela, nous nous plaçons dans le plan complexe afin de garder une trace des singularités que nous avons perdues en

introduisant de l'absorption. En quelque sorte, les rayons $r^n \in [r_i, r_e]$ donnant lieu à des lignes résonantes ou critiques, $\{(r^n, \theta) : 0 \leq \theta \leq 0\}$ dans $\mathcal{L}_{res}(\omega)$ ou $\mathcal{L}_{crit}(\omega)$, sont déplacés dans le plan complexe lorsque l'on passe de $\omega \in \mathbb{R}$ à ω_ε . La théorie de Fuchs nous permettra de déterminer le comportement des solutions autour de ces singularités déplacées dans le plan complexe. Pour cela, nous passerons par la théorie des équations différentielles holomorphes, où la variable $r \in \mathbb{R}$ sera complexifiée $z = r + iy \in \mathbb{C}$ et la dérivation d/dr deviendra d/dz au sens de la dérivée complexe.

Extension au plan complexe. Nous faisons une hypothèse supplémentaire concernant la régularité des grandeurs caractéristiques de l'écoulement (p_0, ρ_0, v_0) . Nous supposons que p_0, ρ_0 et v_0 se prolongent analytiquement dans le plan complexe sur un voisinage ouvert du segment $[r_i, r_e]$. Ceci signifie qu'il existe un ouvert $V \subset \mathbb{C}$ contenant $[r_i, r_e]$ au sens où la variable complexifiée

$$z = r + iy \in \mathbb{C}, \quad r, y \in \mathbb{R}$$

est dans V pour $r \in [r_i, r_e]$ et $y = 0$, et qu'il existe des fonctions holomorphes dans V (ensemble noté $\mathcal{H}(V)$) :

$$z \mapsto p_0(z), \quad z \mapsto \rho_0(z), \quad z \mapsto v_0(z) \in \mathcal{H}(V),$$

et l'on retrouve les caractéristiques du fluide $p_0(r), \rho_0(r)$ et $v_0(r)$ par restriction à au segment $[r_i, r_e]$:

$$\begin{aligned} \forall r \in [r_i, r_e], \quad p_0(r + i0) &= p_0(r), \\ \rho_0(r + i0) &= \rho_0(r), \\ v_0(r + i0) &= v_0(r). \end{aligned}$$

On déduit de ces propriétés qu'il existe également des extensions analytiques sur V de c_0 ainsi que des fonctions α_ε^n et β_ε^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et quelque soit $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Par contre, les coefficients de l'équation différentielle (9.29), P_ε^n et Q_ε^n , peuvent comporter des singularités dans le voisinage V , et en particulier, à absorption nulle $\varepsilon = 0$, ces singularités correspondent aux rayons des lignes de résonance du transport et ou de résonance critique. Nous reviendrons sur la régularité de ces coefficients plus tard, nous verrons qu'ils sont méromorphes et nous identifierons leurs pôles.

Étude séparée entre ligne résonante critique et du transport. Pour simplifier notre étude, nous allons nous placer autour d'une ligne résonante ou autour d'une ligne critique, et dans la situation générique où ces singularités sont simples. Nous supposerons que localement, ce sont les seules et que s'il y a l'une, il n'y a pas l'autre. Cela revient à supposer que l'on est dans l'une ou l'autre des situations suivantes :

- Ligne critique simple : il existe un unique $r^n \in [r_i, r_e]$ tel que

$$\alpha^n(r^n) = 0 \quad \text{et} \quad (\alpha^n)'(r^n) \neq 0. \quad (9.32)$$

- Ligne résonante simple : il existe un unique $r^n \in [r_i, r_e]$ tel que

$$\beta^n(r^n) = 0 \quad \text{et} \quad (\beta^n)'(r^n) \neq 0. \quad (9.33)$$

Lorsque l'on ajoute de l'absorption, $\varepsilon > 0$, les fonctions α_ε^n et β_ε^n ne s'annulent pas sur $[r_i, r_e]$ et ces singularités sont déplacées dans le plan complexe, hors de l'axe réel car à $\varepsilon \neq 0$. Le

lemme suivant donne l'existence et le comportement de ces singularités déplacées, comme illustré sur la figure 9.1

Lemme 9.5.3. *Au voisinage d'une ligne critique ou résonante r^n , il existe un unique z_ε^n tel que*

- *Cas d'une ligne critique :*

$$\alpha_\varepsilon^n(z_\varepsilon^n) = 0 \quad \text{et} \quad (\alpha_\varepsilon^n)'(z_\varepsilon^n) \neq 0,$$

avec l'estimation

$$z_\varepsilon^n = r^n + \frac{i}{(\alpha^n)'(r^n)} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

- *Cas d'une ligne résonante :*

$$\beta_\varepsilon^n(z_\varepsilon^n) = 0 \quad \text{et} \quad (\beta_\varepsilon^n)'(z_\varepsilon^n) \neq 0,$$

avec l'estimation

$$z_\varepsilon^n = r^n + 2i \frac{\alpha^n(r^n)}{(\beta^n)'(r^n)} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Remarque 9.5.4. *Avant de faire la preuve, remarquons que le deuxième point du lemme concerne une ligne résonante, et donc $\alpha^n(r^n) \neq 0$ par hypothèse car nous avons supposé que les lignes ne peuvent pas être résonantes et critiques à la fois.*

Preuve.

- La première estimation est obtenue en écrivant le développement limité à l'ordre 1 de la fonction $(z, \varepsilon) \mapsto \alpha_\varepsilon^n(z)$ au point $(z, \varepsilon) = (r^n, 0)$:

$$\alpha_\varepsilon^n(z_\varepsilon^n) = \alpha^n(r^n) + (\alpha^n)'(r^n)(z_\varepsilon^n - r^n) + \partial_\varepsilon \alpha_{\varepsilon=0}^n(r^n) \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2, (z_\varepsilon^n - r^n)^2).$$

Comme $\alpha^n(r^n) = 0$, $\alpha_\varepsilon^n(z_\varepsilon^n) = 0$ et que l'on a :

$$\partial_\varepsilon \alpha_\varepsilon^n(z) = \partial_\varepsilon (\alpha_0^n(z) - i\varepsilon) = -i,$$

on peut isoler z_ε^n et obtenir l'estimation voulue.

- On procède de même pour l'estimation de z_ε^n dans le cas d'une ligne résonante, en développant la fonction $(z, \varepsilon) \mapsto \beta_\varepsilon^n(z)$ au point $(r^n, 0)$:

$$\beta_\varepsilon^n(z_\varepsilon^n) = \beta^n(r^n) + (\beta^n)'(r^n)(z_\varepsilon^n - r^n) + \partial_\varepsilon \beta_{\varepsilon=0}^n(r^n) \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Exprimons la dérivée suivant ε :

$$\partial_\varepsilon \beta_\varepsilon^n(z) = \partial_\varepsilon ((\alpha_\varepsilon^n)^2 - (\Omega_0^*)^2) = 2\alpha_\varepsilon^n(z) \partial_\varepsilon \alpha_\varepsilon^n(z) = -2i\alpha_\varepsilon^n(z),$$

qui nous donne

$$\partial_\varepsilon \beta_{\varepsilon=0}^n(r^n) = -2i\alpha_0^n(r^n).$$

En utilisant que $\beta_\varepsilon^n(z_\varepsilon^n) = 0$ et $\beta^n(r^n) = 0$, on peut isoler z_ε^n en fonction de r^n pour obtenir l'estimation voulue. ■

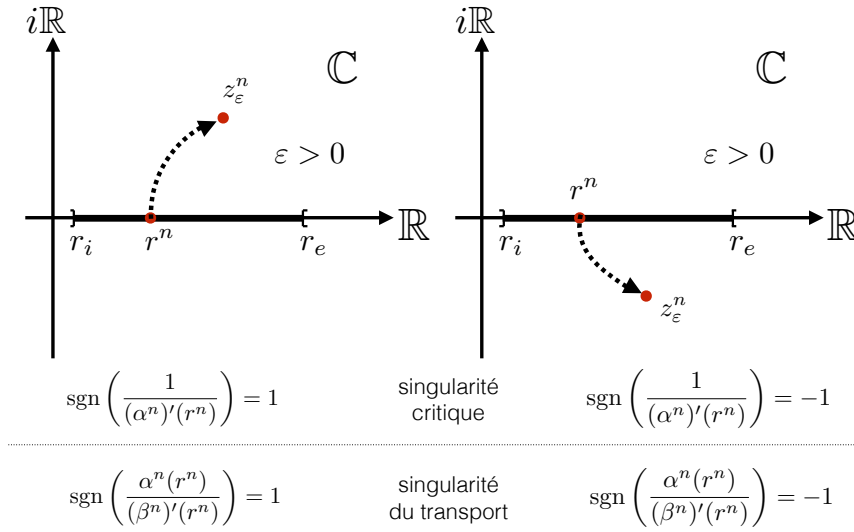


FIGURE 9.1 – Schéma représentant les singularités z_ε^n déplacées dans le plan complexe, selon si elles sont localement de partie imaginaire positive ou négative.

Équations complexifiées. Les coefficients de l'équation différentielle (9.29), P_ε^n et Q_ε^n , sont singuliers en z_ε^n . En effet, nous verrons qu'ils sont méromorphes sur V avec pour pôle z_ε^n , d'ordres respectivement 1 et 2. Définissons, lorsque l'on s'intéresse à une ligne critique ou résonante, les fonctions p_ε^n et q_ε^n comme suit :

$$\begin{aligned} p_\varepsilon^n(z) &:= (z - z_\varepsilon^n) P_\varepsilon^n(z), \\ q_\varepsilon^n(z) &:= (z - z_\varepsilon^n)^2 Q_\varepsilon^n(z). \end{aligned}$$

Ces fonctions seront donc holomorphes sur V . On est alors ramené à une équation dont nous cherchons des solutions holomorphes sur le voisinage V de $]r_i, r_e[$, à une coupure près, partant de la singularité z_ε^n :

$$\frac{d^2 \psi_\varepsilon^n}{dz^2} + \frac{p_\varepsilon^n(z)}{z - z_\varepsilon^n} \frac{d\psi_\varepsilon^n}{dz} + \frac{q_\varepsilon^n(z)}{(z - z_\varepsilon^n)^2} \psi_\varepsilon^n = 0. \quad (9.34)$$

Une base de solutions de cette équation peut être trouvée à l'aide de la méthode de Frobenius, qui consiste à chercher une solution sous la forme $(z - z^*)^\nu \sum_k a_k (z - z^*)^k$ où z^* est la singularité. Plus précisément, on dit que l'équation différentielle admet une singularité régulière si elle est de la forme suivante

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} + \frac{p(z)}{z - z^*} \frac{d\psi}{dz} + \frac{q(z)}{(z - z^*)^2} \psi = 0, \quad (9.35)$$

où p et q sont des fonctions analytiques sur un voisinage $B(z^*, R_c)$ de la singularité $z^* \in \mathbb{C}$, et dans ce cas, le théorème de Fuchs suivant donne le comportement d'une base de solutions. Pour ce qui concerne les résultats autour de la théorie de Fuchs et de la méthode de Frobenius, nous nous reportons à [81]. Rappelons le théorème qui nous intéresse ici.

Théorème 9.5.5 (de Fuchs). *On considère l'équation holomorphe (9.35) posée au voisinage de la singularité z^* . Soient $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{C}$, tels que $\Re(\nu_1) \geq \Re(\nu_2)$, les deux solutions complexes de l'équation indicelle*

$$\nu^2 + (p(0) - 1)\nu + q(0) = 0. \quad (9.36)$$

Il existe deux fonctions analytiques u et v analytiques sur $B(z^, R_c)$ et une constante $c \in \mathbb{C}$ telles que $u(z^*) = v(z^*) = 1$ et telles que l'équation (9.35) admette les deux solutions ψ_1 et ψ_2 indépendantes suivantes, selon les cas :*

1. Si $\nu_1 - \nu_2 \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \psi_1(z) := (z - z^*)^{\nu_1} u(z), \\ \psi_2(z) := (z - z^*)^{\nu_2} v(z) + c \operatorname{Log}(z - z^*) (z - z^*)^{\nu_1} u(z), \end{cases} \quad (9.37)$$

$$(9.38)$$

où Log est une détermination du logarithme complexe.

2. Si $\nu_1 - \nu_2 \notin \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \psi_1(z) := (z - z^*)^{\nu_1} u(z), \\ \psi_2(z) := (z - z^*)^{\nu_2} v(z). \end{cases}$$

Remarque 9.5.6. *Pour définir les fonctions puissances complexes ainsi que le logarithme dans le théorème de Fuchs, il est nécessaire d'introduire une coupure dans le plan complexe ayant pour origine la singularité. L'introduction de l'absorption va nous permettre de définir une coupure acceptable, c'est-à-dire ne traversant pas le segment $[r_i, r_e]$ qui nous intéresse. Nous y reviendrons plus tard.*

Pour appliquer le théorème de Fuchs, il nous faut donc analyser les pôles des coefficients P_ε^n et Q_ε^n pour déterminer si les singularités sont régulières, et donner le comportement d'une base de solutions. Il est notable que le comportement des solutions au voisinage des singularités, qui sont effectivement régulières, que ce soit une ligne critique ou résonante, ne dépendent pas des paramètres de l'écoulement, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 9.5.7. *Dans le cas d'une ligne résonante ou d'une ligne critique, les singularités de l'équation 9.34 sont régulières et en particulier on a :*

- Cas d'une ligne critique

$$(z - z_\varepsilon^n) P_\varepsilon^n(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_\varepsilon^n} 2 \quad \text{et} \quad (z - z_\varepsilon^n)^2 Q_\varepsilon^n(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_\varepsilon^n} 0,$$

et donc $p_\varepsilon^n(z_\varepsilon^n) = 2$ et $q_\varepsilon^n(z_\varepsilon^n) = 0$.

- Cas d'une ligne résonante

$$(z - z_\varepsilon^n) P_\varepsilon^n(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_\varepsilon^n} -1 \quad \text{et} \quad (z - z_\varepsilon^n)^2 Q_\varepsilon^n(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_\varepsilon^n} 0,$$

et donc $p_\varepsilon^n(z_\varepsilon^n) = -1$ et $q_\varepsilon^n(z_\varepsilon^n) = 0$.

Dans les deux cas, les fonctions p_ε^n et q_ε^n sont donc holomorphes sur V .

Preuve. On utilise les expressions (9.30) de P_ε^n et de Q_ε^n trouvées au lemme 9.5.2 et le fait que les singularités sont supposées simples, respectivement pour une ligne critique ou résonante :

$$\alpha_\varepsilon^n(z) \underset{z \rightarrow z_\varepsilon^n}{\sim} (\alpha_\varepsilon^n)'(z_\varepsilon^n)(z - z_\varepsilon^n) \quad \text{et} \quad \beta_\varepsilon^n(z) \underset{z \rightarrow z_\varepsilon^n}{\sim} (\beta_\varepsilon^n)'(z_\varepsilon^n)(z - z_\varepsilon^n).$$

- Cas d'une ligne critique.

$$P_\varepsilon(z) = \left(\frac{(r\rho_0)'(z)}{z\rho_0(z)} + 2 \frac{(\alpha_\varepsilon^n)'(z)}{\alpha_\varepsilon^n(z)} - \frac{(\beta_\varepsilon^n)'(z)}{\beta_\varepsilon^n(z)} \right) \underset{z \rightarrow z_\varepsilon^n}{\sim} \frac{2(\alpha_\varepsilon^n)'(z_\varepsilon^n)}{(\alpha_\varepsilon^n)'(z_\varepsilon^n)(z - z_\varepsilon^n)} = \frac{2}{z - z_\varepsilon^n},$$

puis comme on a

$$Q_\varepsilon^n(z) = \left(-\frac{n}{z} \right)^2 + \frac{\beta_\varepsilon^n(z)}{c_0(z)^2} + \frac{n(\rho_0\omega_0)'(z)}{r\rho_0(z)} \frac{1}{\alpha_\varepsilon^n(z)} - \frac{n\omega_0(z)}{z} \frac{(\beta_\varepsilon^n)'(z)}{\alpha_\varepsilon^n(z)\beta_\varepsilon^n(z)},$$

il vient

$$(z - z_\varepsilon^n) Q_\varepsilon^n(z) \underset{z \rightarrow z_\varepsilon^n}{\longrightarrow} \frac{n(\rho_0\omega_0)'(z_\varepsilon^n)}{z_\varepsilon^n} \frac{1}{(\alpha_\varepsilon^n)'(z_\varepsilon^n)} - \frac{n\omega_0(z_\varepsilon^n)}{z_\varepsilon^n} \frac{(\beta_\varepsilon^n)'(z_\varepsilon^n)}{(\alpha_\varepsilon^n)'(z_\varepsilon^n)\beta_\varepsilon^n(z_\varepsilon^n)}$$

et donc

$$(z - z_\varepsilon^n)^2 Q_\varepsilon^n(z) \underset{z \rightarrow z_\varepsilon^n}{\longrightarrow} 0.$$

- Cas d'une ligne résonante.

$$P_\varepsilon(z) = \left(\frac{(r\rho_0)'(z)}{z\rho_0(z)} + 2 \frac{(\alpha_\varepsilon^n)'(z)}{\alpha_\varepsilon^n(z)} - \frac{(\beta_\varepsilon^n)'(z)}{\beta_\varepsilon^n(z)} \right) \underset{z \rightarrow z_\varepsilon^n}{\sim} - \frac{(\beta_\varepsilon^n)'(z_\varepsilon^n)}{(\beta_\varepsilon^n)'(z_\varepsilon^n)(z - z_\varepsilon^n)} = - \frac{1}{z - z_\varepsilon^n},$$

puis en utilisant de même l'expression de Q_ε^n , on a

$$(z - z_\varepsilon^n) Q_\varepsilon^n(z) \underset{z \rightarrow z_\varepsilon^n}{\longrightarrow} - \frac{n\omega_0(z_\varepsilon^n)}{z_\varepsilon^n} \frac{(\beta_\varepsilon^n)'(z_\varepsilon^n)}{\alpha_\varepsilon^n(z_\varepsilon^n)(\beta_\varepsilon^n)'(z_\varepsilon^n)} = - \frac{n\omega_0(z_\varepsilon^n)}{\alpha_\varepsilon^n(z_\varepsilon^n)}$$

et donc on a de même

$$(z - z_\varepsilon^n)^2 Q_\varepsilon^n(z) \underset{z \rightarrow z_\varepsilon^n}{\longrightarrow} 0. \quad \blacksquare$$

Théorème 9.5.8 (Cas d'une ligne résonante critique). *Dans le cas d'une ligne critique, sous la condition 9.32, il existe deux fonctions holomorphes indépendantes définies au voisinage de z_ε^n , U_ε^n et V_ε^n et une constante $c_\varepsilon^n \in \mathbb{C}$ telles que $U_\varepsilon^n(z_\varepsilon^n) = V_\varepsilon^n(z_\varepsilon^n) = 1$ et*

$$\begin{cases} \Phi_\varepsilon^n = U_\varepsilon^n, & (9.39a) \\ \Psi_\varepsilon^n := z \mapsto \frac{1}{z - z_\varepsilon^n} V_\varepsilon^n(z) + c_\varepsilon^n \operatorname{Log}(z - z_\varepsilon^n) U_\varepsilon^n(z), & (9.39b) \end{cases}$$

Preuve. Il s'agit d'une application directe du théorème 9.5.5 en utilisant les valeurs trouvées de $p_\varepsilon^n(z_\varepsilon^n)$ et $q_\varepsilon^n(z_\varepsilon^n)$ au lemme 9.5.7 dans le cas d'une ligne critique. En effet, d'après le lemme 9.5.7, pour tout $\varepsilon > 0$ et dans le cas d'une résonance critique, on a

$$p_\varepsilon^n(z_\varepsilon^n) = 2 \quad \text{et} \quad q_\varepsilon^n(z_\varepsilon^n) = 0.$$

L'équation indicelle (9.36) s'écrit alors de façon indépendante de ε :

$$\nu^2 + \nu = 0.$$

On en déduit que $\nu_1 = 0$ et $\nu_2 = -1$. On est donc dans le cas où $\nu_1 - \nu_2 = 1 \in \mathbb{N}$ et le théorème de Fuchs 9.5.5 permet de conclure. ■

On a le résultat suivant analogue dans le cas d'une ligne résonante.

Théorème 9.5.9 (Cas d'une ligne résonante du transport). *Dans le cas d'une ligne critique, sous la condition 9.33, il existe deux fonctions holomorphes indépendantes définies au voisinage de z_ε^n , U_ε^n et V_ε^n et une constante $c_\varepsilon^n \in \mathbb{C}$ telles que $U_\varepsilon^n(z_\varepsilon^n) = V_\varepsilon^n(z_\varepsilon^n) = 1$ et*

$$\begin{cases} \Phi_\varepsilon^n : z \mapsto (z - z_\varepsilon^n)^2 U_\varepsilon^n(z), & (9.40a) \\ \Psi_\varepsilon^n := z \mapsto V_\varepsilon^n(z) + c_\varepsilon^n (z - z_\varepsilon^n)^2 \text{Log}(z - z_\varepsilon^n) U_\varepsilon^n(z), & (9.40b) \end{cases}$$

Preuve. Il s'agit de même d'une application directe du théorème 9.5.5 en utilisant les valeurs trouvées de $p_\varepsilon^n(z_\varepsilon^n)$ et $q_\varepsilon^n(z_\varepsilon^n)$ au lemme 9.5.7 dans le cas d'une ligne résonante. En effet, pour tout ε , le lemme 9.5.7 montre que

$$p_\varepsilon^n(z_\varepsilon^n) = -1 \quad \text{et} \quad q_\varepsilon^n(z_\varepsilon^n) = 0.$$

L'équation indicielle (9.36) s'écrit donc

$$\nu^2 - 2\nu = 0.$$

On en déduit que $\nu_1 = 2$ et $\nu_2 = 0$. Encore une fois, on est dans le cas $\nu_2 - \nu_1 = 2 \in \mathbb{N}$ et le théorème de Fuchs (9.5.5) permet de conclure. ■

Coupure dans le plan complexe. Comme nous en avons déjà fait la remarque, les bases de solutions définies par (9.39) et (9.40) ne peuvent pas être définies sur un voisinage complet de z_ε^n à cause de la présence de la fonction logarithme Log dont il faut choisir une détermination en introduisant une coupure dans le domaine partant de la singularité z_ε^n . Dans l'objectif de passer à la limite et de définir les solutions Φ_ε^n et Ψ_ε^n au voisinage de r^n dans l'intervalle $]r_i, r_e[$, il convient de choisir les coupures, une par valeurs de ε telles qu'elles ne traversent pas l'intervalle $]r_i, r_e[$. Pour pouvoir choisir correctement la direction de telles coupures, il faut connaître la façon dont les singularités z_ε^n s'approchent de $r^n \in]r_i, r_e[$, ce qui est donné par le lemme 9.5.3, en particulier, le côté de l'intervalle par lequel arrive z_ε^n permet de choisir une direction fixe pour les coupures telles qu'elles ne coupent jamais $]r_i, r_e[$. Le lemme suivant, dont la preuve est immédiate, indique comment nous choisissons de définir les coupures.

Lemme 9.5.10 (Coupures). *Pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, nous pouvons définir les coupures de la manière suivante :*

- *Cas d'une ligne critique. On définit :*

$$\mathbb{D}_\varepsilon := z_\varepsilon^n + i\mathfrak{s} \mathbb{R}_+, \quad (9.41)$$

où \mathfrak{s} est

$$\mathfrak{s} = \text{sgn} \left(\frac{1}{(\alpha^n)'(r^n)} \right) \in \{+1, -1\}.$$

- Cas d'une ligne résonante. On définit :

$$\mathbb{D}_\varepsilon := z_\varepsilon^n + i\mathfrak{s}\mathbb{R}_+, \tag{9.42}$$

$$\mathfrak{s} = \operatorname{sgn}\left(\frac{\alpha^n(r^n)}{(\beta^n)'(r^n)}\right) \in \{+1, -1\}.$$

Nous avons ainsi, dans les deux cas, pour tout $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit,

$$\mathbb{D}_\varepsilon \cap]r_i, r_e[= \emptyset.$$

La figure 9.2 illustre des coupures correctement choisies ou pas pour plusieurs valeurs de ε .

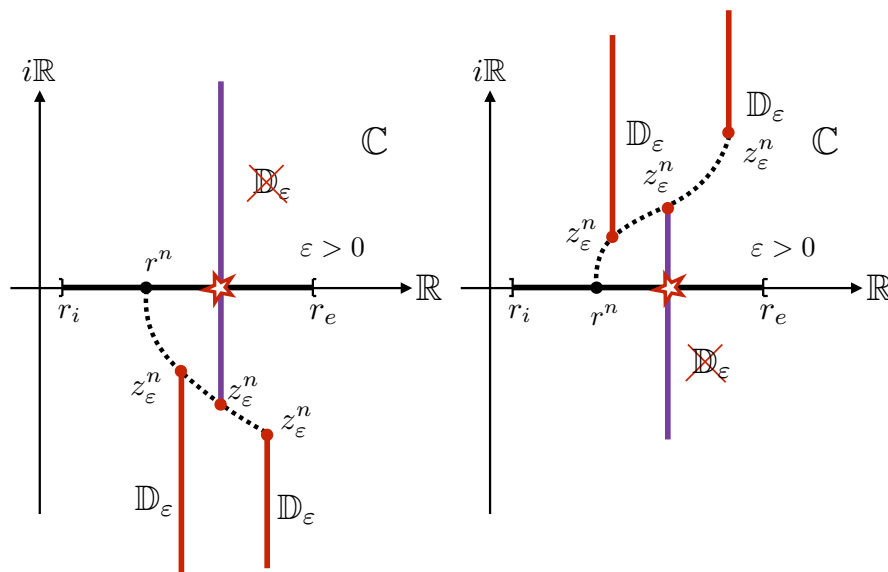


FIGURE 9.2 – Choix des coupures \mathbb{D}_ε , selon si la singularité déplacée z_ε^n se situe dans $\{z : \Re \mathcal{L}(z) < 0\}$ (gauche) ou $\{x : \Re \mathcal{L}(z) > 0\}$ (droite), ne devant pas couper l'intervalle $]r_i, r_e[$. La droite violette intersecte $]r_i, r_e[$ et correspondrait à un mauvais choix de coupure.

9.5.4 Étude de l'espace des solutions locales à la limite d'absorption nulle : $\varepsilon \rightarrow 0^+$

Le passage à la limite est un peu délicat et nécessite d'entrer plus dans les détails du théorème de Fuchs et de la méthode de Frobenius. En particulier, nous analyserons la convergence des fonctions analytiques U_ε^n et V_ε^n du théorème de Fuchs 9.5.5 à partir desquelles sont définies les solutions locales indépendantes Φ_ε^n et Ψ_ε^n .

Commençons par admettre un lemme d'uniformité de l'analyticité des coefficients de l'équation en fonction du paramètre d'absorption ε lorsqu'il est suffisamment petit.

Lemme 9.5.11 (admis). *Il existe un rayon de convergence $R_c^n > 0$ tel que pour tout ε suffisam-*

ment petit, les fonctions p_ε^n et q_ε^n sont analytiques sur $B(z_\varepsilon^n, R_c^n)$ et notons

$$p_\varepsilon^n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_{\varepsilon,k}^n (z - z_\varepsilon^n)^k \quad \text{et} \quad q_\varepsilon^n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} q_{\varepsilon,k}^n (z - z_\varepsilon^n)^k,$$

leur développement.

Le lemme 9.5.7 donnent les premières valeurs de ces développements, à savoir

$$p_{\varepsilon,0}^n = \begin{cases} 2 & \text{dans le cas d'une résonance critique,} \\ -1 & \text{dans le cas d'une résonance du transport,} \end{cases}$$

et dans les deux cas,

$$q_{\varepsilon,0}^n = 0.$$

Définissons à présent une séries entières dépendant d'un paramètre réel ou complexe qui apparaît lorsque l'on applique la méthode de Frobenius en cherchant une solution à l'équation (9.34) sous la forme $(z - z_\varepsilon^n)^\nu \sum_k a_k^n (z - z_\varepsilon^n)^k$.

À tout nombre complexe z , on définit la quantité $\mathcal{I}(z)$ par :

$$\mathcal{I}(z) := z^2 + (p_{\varepsilon,0}^n - 1)z + q_{\varepsilon,0}^n = \begin{cases} z^2 + z & \text{dans le cas d'une résonance critique,} \\ z^2 - 2z & \text{dans le cas d'une résonance du transport.} \end{cases}$$

Puis, pour $\nu \in \mathbb{C}$, définit la suite de nombres complexes $(a_{\varepsilon,k}^n(\nu))_{k \in \mathbb{N}}$ par récurrence de la façon suivante :

$$a_{\varepsilon,0}^n(\nu) := 1, \tag{9.43a}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad a_{\varepsilon,k}^n(\nu) := \frac{-1}{\mathcal{I}(\nu + k)} \sum_{j=0}^{k-1} ((\nu + j)p_{\varepsilon,k-j}^n + q_{\varepsilon,k-j}^n) a_{\varepsilon,j}^n(\nu), \tag{9.43b}$$

qui est donc bien définie si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{I}(\nu + k) \neq 0.$$

On reconnaît que l'équation indicelle introduite dans le théorème de Fuchs s'exprime à l'aide de \mathcal{I} par

$$\mathcal{I}(z) = 0.$$

Notons ν_1 et ν_2 les solutions de cette équation numérotées tels que $\Re(\nu_1) \geq \Re(\nu_2)$. Nous avons déjà vu que dans le cas d'une résonance critique, $(\nu_1, \nu_2) = (0, -1)$ et dans le cas d'une résonance du transport, $(\nu_1, \nu_2) = (2, 0)$. Notons également une quantité qui va intervenir souvent par la suite, la différence de ces deux solutions :

$$s = \nu_1 - \nu_2 = \begin{cases} 2 - 0 = 2 & \text{cas d'une résonance critique} \\ 0 - (-1) = 1 & \text{cas d'une résonance du transport} \end{cases} \in \mathbb{N}^*.$$

Le lemme suivant montre que le rayon de convergence de la série entière associée à la suite $(a_{\varepsilon,k}^n(\nu))_{k \in \mathbb{N}}$ lorsqu'elle est bien définie est au moins celui des coefficients du développement en série de p_ε^n et de q_ε^n à partir desquels la suite est définie.

Lemme 9.5.12. *Pour tout $\nu \in \mathbb{C}$ tel que*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{I}(\nu + k) \neq 0,$$

la suite $(a_{\varepsilon,k}^n(\nu))_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie par (9.43) et la série entière

$$\sum_{k \leq 0} a_{\varepsilon,k}^n(\nu) (z - z_\varepsilon^n)^k,$$

converge sur la boule $B(z_\varepsilon^n, R_c^n)$ où l'on rappelle que R_c^n est le rayon des fonctions analytiques p_ε^n et q_ε^n .

Preuve. Le fait que la suite $(a_{\varepsilon,k}^n(\nu))_{k \in \mathbb{N}}$ soit bien définie est évident. Montrons que le rayon de convergence de la série $\sum_k a_{\varepsilon,k}^n(\nu)(z - z_\varepsilon^n)^k$ est d'au moins R_c^n . Soit r_c^n un réel tel que $0 < \rho < R_c^n$ et soit $z \in B(z_\varepsilon^n, \rho)$. Puisque r_c^n est strictement inférieur au rayon de convergence des développements des séries $\sum_k p_{\varepsilon,k}^n(z - z_\varepsilon^n)^k$ et $\sum_k q_{\varepsilon,k}^n(z - z_\varepsilon^n)^k$, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |p_{\varepsilon,k}^n(z - z_\varepsilon^n)^k| \leq |p_{\varepsilon,k}^n| \rho^k \leq M \quad \text{et} \quad |q_{\varepsilon,k}^n(z - z_\varepsilon^n)^k| \leq |q_{\varepsilon,k}^n| \rho^k \leq M.$$

Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}^*$, il vient la majoration suivante

$$\begin{aligned} |a_{\varepsilon,k}^n(\nu)| &\leq \frac{1}{|\mathcal{I}(\nu + k)|} \sum_{j=0}^{k-1} \left((|\nu| + j) |p_{\varepsilon,k-j}^n| + |q_{\varepsilon,k-j}^n| \right) |a_{\varepsilon,j}^n(\nu)| \\ &\leq \frac{M}{|\mathcal{I}(\nu + k)|} \sum_{j=0}^{k-1} (|\nu| + j + 1) \rho^{j-k} |a_{\varepsilon,j}^n(\nu)|. \end{aligned}$$

Et, comme $k^{-2}|\mathcal{I}(\nu + k)| \rightarrow 1$ lorsque k tend vers $+\infty$, il existe une constante $c_\nu > 0$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad |\mathcal{I}(\nu + k)| \geq c_\nu k^2.$$

Nous avons donc

$$|a_{\varepsilon,k}^n(\nu)| \leq \frac{M/c_\nu}{k^2} \sum_{j=0}^{k-1} (|\nu| + j + 1) \rho^{j-k} |a_{\varepsilon,j}^n(\nu)|.$$

Nous avons alors tout ce qu'il faut pour définir une suite majorante $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de la suite $(a_{\varepsilon,k}^n(\nu))_{k \in \mathbb{N}}$ par récurrence :

$$\begin{aligned} A_0 &:= |a_{\varepsilon,0}^n| = 1, \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A_k &:= \frac{M/c_\nu}{k^2} \sum_{j=0}^{k-1} (|\nu| + j + 1) \rho^{j-k} A_j. \end{aligned}$$

Un récurrence immédiate montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |a_{\varepsilon,k}^n(\nu)| \leq A_k,$$

Et puis, remarquons que comme pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \frac{M/c_\nu}{k^2} (|\nu| + k + 1) \rho^{-1} A_k + \rho^{-1} \frac{M/c_\nu}{(k+1)^2} \sum_{j=0}^{k-1} (|\nu| + j + 1) \rho^{j-k} A_j \\ &= \frac{M/c_\nu}{k^2} (|\nu| + k + 1) \rho^{-1} A_k + \rho^{-1} \frac{k^2}{(k+1)^2} A_k. \end{aligned}$$

On en déduit donc la limite

$$\frac{A_{k+1}}{A_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \rho^{-1},$$

ce qui montre, d'après le critère de d'Alembert, que la série majorante $\sum_k A_k (z - z_\varepsilon^n)^k$ est convergente absolument sur $B(z_\varepsilon^n, \rho)$ et donc qu'il en est de même de la série $\sum_k a_{\varepsilon,k}^n(\nu) (z - z_\varepsilon^n)^k$. Enfin, puisque ρ a été choisi quelconque $\rho < R_c^n$, il vient que la série $\sum_k a_{\varepsilon,k}^n(\nu) (z - z_\varepsilon^n)^k$ est absolument convergente sur $B(z_\varepsilon^n, R_c^n)$. ■

Le théorème suivant donne une expression plus précise des solutions de Fuchs et permettra une analyse de la convergence. On pourra consulter [82] pour une preuve complète de ce théorème.

Théorème 9.5.13 (Théorème de Fuchs détaillé). *Avec les notations des théorèmes 9.39 et 9.40, le théorème de Fuchs fournit les deux solutions indépendantes de l'équation (9.34) suivantes :*

$$\begin{cases} \Phi_\varepsilon^n : z \mapsto (z - z_\varepsilon^n)^{\nu_1} U_\varepsilon^n(z), \\ \Psi_\varepsilon^n : z \mapsto (z - z_\varepsilon^n)^{\nu_2} V_\varepsilon^n(z) + c_\varepsilon^n \text{Log}(z - z_\varepsilon^n) (z - z_\varepsilon^n)^{\nu_1} U_\varepsilon^n(z) \end{cases}$$

où

$$U_\varepsilon^n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{\varepsilon,k}^n(\nu_1) (z - z_\varepsilon^n)^k \quad \text{et} \quad V_\varepsilon^n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \partial_\nu a_{\varepsilon,k}^n(\nu_2) (z - z_\varepsilon^n)^k$$

qui convergent sur $B(z_\varepsilon^n, R_c^n)$ pour tout ε suffisamment petit. Et enfin, la constante c_ε^n a pour expression :

$$c_\varepsilon^n = \lim_{\nu \rightarrow \nu_2} (\nu - \nu_2) a_{\varepsilon,s}^n(\nu).$$

Preuve. Donnons les grandes lignes de l'obtention de la première solution. Les manipulations pour obtenir la deuxième sont plus complexes et nous reportons la lecture à la référence [82] pour une preuve complète. La méthode de Frobenius correspond à chercher une solution de la forme

$$\Phi_\varepsilon^n : z \mapsto (z - z_\varepsilon^n)^\nu \sum_{k=0}^n \alpha_{\varepsilon,k}^n (z - z_\varepsilon^n)^k,$$

où l'on cherche donc les coefficients $(\alpha_{\varepsilon,k}^n)_k$ et le nombre a priori complexe ν . En remplaçant dans l'équation (9.34) où l'on a développé en série les coefficients de p_ε^n et q_ε^n puis en procédant par identification des puissances, on trouve la relation de récurrence suivante entre les

$(\alpha_{\varepsilon,k}^n)_k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\nu^2 + (p_{\varepsilon,0}^n - 1)\nu + q_{\varepsilon,0}^n \right) \alpha_{\varepsilon,0}^n = 0 \quad \text{pour } k = 0, \\ \left((\nu + k)^2 + (p_{\varepsilon,0}^n - 1)(\nu + k) + q_{\varepsilon,0}^n \right) \alpha_{\varepsilon,k}^n + \sum_{j=1}^k \left((\nu + k - j)p_{\varepsilon,j}^n + q_{\varepsilon,j}^n \right) \alpha_{\varepsilon,k-j}^n = 0. \end{array} \right. \quad (9.44a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\nu^2 + (p_{\varepsilon,0}^n - 1)\nu + q_{\varepsilon,0}^n \right) \alpha_{\varepsilon,0}^n = 0 \quad \text{pour } k = 0, \\ \left((\nu + k)^2 + (p_{\varepsilon,0}^n - 1)(\nu + k) + q_{\varepsilon,0}^n \right) \alpha_{\varepsilon,k}^n + \sum_{j=1}^k \left((\nu + k - j)p_{\varepsilon,j}^n + q_{\varepsilon,j}^n \right) \alpha_{\varepsilon,k-j}^n = 0. \end{array} \right. \quad (9.44b)$$

Dans (9.44a), en facteur de $\alpha_{\varepsilon,0}^n$, que nous souhaitons choisir égal à 1, on retrouve l'équation indicelle

$$\mathcal{I}(\nu) = \nu^2 + (p_{\varepsilon,0}^n - 1)\nu + q_{\varepsilon,0}^n = 0.$$

Soit ν_1 la solution de plus grande partie réelle de cette équation, soit ν_2 l'autre. Deux choix sont alors possibles, soit $\nu = \nu_1$ soit $\nu = \nu_2$. Pour le premier choix possible, $\nu = \nu_1$, puisque $\Re(\nu_1) \geq \Re(\nu_2)$,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{I}(\nu_1 + k) = k(\nu_1 - \nu_2 + k) \neq 0,$$

et donc d'après le lemme 9.5.12, la solution du système de récurrence (9.44a) et (9.44b) est la suite $(a_{\varepsilon,k}^n(\nu_1))_k$ qui définit les coefficients d'une fonction analytique sur $B(z_\varepsilon^n, R_c^n)$ et nous avons donc trouvé une solution de l'équation (9.34) sous la forme $(z - z_\varepsilon^n)^{\nu_1} \sum_k a_{\varepsilon,k}^n(\nu_1)(z - z_\varepsilon^n)^k$.

Pour trouver la seconde solution, nous pouvons tenter de répéter la même technique avec $\nu = \nu_2$. Ce choix fournit effectivement une autre solution, de plus indépendante, mais que lorsque $\nu_1 - \nu_2 \notin \mathbb{N}$. En effet, lorsque $\nu_1 - \nu_2 \in \mathbb{N}$, ce qui est précisément notre cas, $\mathcal{I}(\nu_2 + k) = k(k - (\nu_1 - \nu_2))$ s'annule pour $k = s$ et donc la méthode précédente échoue. Il faut alors travailler un peu plus pour contourner cette difficulté. Nous avons choisi d'admettre de ne pas présenter ces calculs. ■

Le lemme suivant donne des estimations des coefficients du développement en série entière de p_ε^n et de q_ε^n uniformes en ε . Ces estimations expriment que les fonctions p_ε^n et q_ε^n convergent uniformément lorsque ε tend vers 0^+ vers des fonctions analytiques p^n et q^n de rayon de convergence R_c^n . La dépendance en ε des coefficients p_ε^n et q_ε^n étant relativement simple, nous admettons ce théorème dont la preuve serait avant tout calculatoire.

Lemme 9.5.14. *Il existe un seuil $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que pour tout $\rho \in]0, R_c^n[$, il existe une constante $C > 1$ telle*

$$\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in]0, \bar{\varepsilon}[, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| p_{\varepsilon_1,k}^n - p_{\varepsilon_2,k}^n \right| \leq C |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \rho^{-k}. \\ \left| q_{\varepsilon_1,k}^n - q_{\varepsilon_2,k}^n \right| \leq C |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \rho^{-k}. \end{array} \right.$$

On en déduit alors le lemme suivant, préparant les estimations que nous allons établir sur les $(a_{\varepsilon,k}^n(\nu_1))_{k \in \mathbb{N}}$ pour démontrer la convergence de la fonction U_ε^n .

Lemme 9.5.15. *Il existe un seuil $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que pour tout $\rho \in]0, R_c^n[$, il existe une constante $C > 1$ telle*

$$\forall \varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}[, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \left| p_{\varepsilon,k}^n \right| \leq C \rho^{-k} \quad \text{et} \quad \left| p_{\varepsilon,k}^n + \nu_1 q_{\varepsilon,k}^n \right| \leq C \rho^{-k}$$

et

$$\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in]0, \bar{\varepsilon}[, \forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} |p_{\varepsilon_1, k}^n - p_{\varepsilon_2, k}^n| & \leq \frac{C}{2} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \rho^{-k} \\ |\nu_1(p_{\varepsilon_1, k}^n - p_{\varepsilon_2, k}^n) + q_{\varepsilon_1, k}^n - q_{\varepsilon_2, k}^n| & \leq \frac{C}{2} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \rho^{-k}. \end{cases}$$

Grâce à la relation de récurrence (9.43) qui lie les fonctions p_ε^n et q_ε^n à la suite $(a_{\varepsilon, k}^n(\nu_1))_{k \in \mathbb{N}}$, le lemme précédent permet de donner les estimations clefs intervenant dans la preuve de la convergence de la fonction U_ε^n .

Lemme 9.5.16. *Il existe un rayon de convergence $R_a^n > 0$ et un seuil $\bar{\varepsilon} > 0$ tels qu'on ait les propriétés suivantes :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |a_{\varepsilon, k}^n(\nu_1)| \leq (R_a^n)^{-k} \quad (9.45)$$

et

$$\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in]0, \bar{\varepsilon}[, \forall k \in \mathbb{N}, \quad |a_{\varepsilon_1, k}^n(\nu_1) - a_{\varepsilon_2, k}^n(\nu_1)| \leq |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| (R_a^n)^{-k} \quad (9.46)$$

Preuve. Soit $\rho_0 \in]0, R_c^n[$, $C > 1$ et $\bar{\varepsilon} > 0$ tels que les estimations du lemme 9.5.15 soient satisfaites, puis posons

$$R_a^n := \frac{\rho}{C}.$$

La première propriété est évidente, car $R_a^n < \rho < R_c^n$ et on sait que le rayon de convergence de la série $\sum_k a_{\varepsilon, k}^n(\nu_1)$ est d'au moins R_c^n . Démontrons la seconde (9.46) par récurrence. Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in]0, \bar{\varepsilon}[$.

- Pour $k = 0$, puisque pour tout ε , $a_{\varepsilon, 0}^n(\nu_1) = 1$, on a

$$|a_{\varepsilon_1, 0}^n(\nu_1) - a_{\varepsilon_2, 0}^n(\nu_1)| = 0,$$

qui vérifie bien l'estimation (9.46).

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$, et supposons que (9.46) soit valide pour tout $j \in [0, k-1]$, alors calculons la différence en utilisant la définition 9.43 et la simplification d'écriture $\mathcal{I}(k + \nu_1) =$

$$k(k + \nu_1 - \nu_2) = k(k + s) :$$

$$\begin{aligned} a_{\varepsilon_1, k}^n(\nu_1) - a_{\varepsilon_2, k}^n(\nu_1) &= \frac{-1}{k(k+s)} \sum_{j=1}^k \left\{ (\nu_1 + k - j) p_{\varepsilon_1, j}^n + q_{\varepsilon_1, j}^n \right\} a_{\varepsilon_1, k-j}^n(\nu_1) \\ &\quad + \frac{1}{k(k+s)} \sum_{j=1}^k \left\{ (\nu_1 + k - j) p_{\varepsilon_2, j}^n + q_{\varepsilon_2, j}^n \right\} a_{\varepsilon_2, k-j}^n(\nu_1) \\ &= \frac{1}{k(k+s)} \sum_{j=1}^k \left\{ (\nu_1 + k - j) (p_{\varepsilon_1, j}^n - p_{\varepsilon_2, j}^n) + (q_{\varepsilon_1, j}^n - q_{\varepsilon_2, j}^n) \right\} a_{\varepsilon_1, k-j}^n(\nu_1) \\ &\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{=I} \\ &\quad + \frac{1}{k(k+s)} \sum_{j=1}^k \left\{ (\nu_1 + k - j) p_{\varepsilon_2, j}^n + q_{\varepsilon_2, j}^n \right\} \left(a_{\varepsilon_2, k-j}^n(\nu_1) - a_{\varepsilon_1, k-j}^n(\nu_1) \right). \\ &\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{=II} \end{aligned}$$

Majorons la valeur absolue de chacun des termes I et II séparément. Pour le terme I , il vient, en utilisant le lemme 9.5.15 et la majoration de $|a_{\varepsilon, k}^n(\nu_1)|$ obtenue au i), lorsque ε_1 et ε_2 sont plus petit que $\bar{\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} |I| &\leq \frac{1}{k(k+s)} \sum_{j=1}^k \left\{ (k-j) |p_{\varepsilon_1, j}^n - p_{\varepsilon_2, j}^n| + |\nu_1 (p_{\varepsilon_1, j}^n - p_{\varepsilon_2, j}^n) + q_{\varepsilon_1, j}^n - q_{\varepsilon_2, j}^n| \right\} |a_{\varepsilon_1, k-j}^n(\nu_1)| \\ &\leq \frac{1}{k(k+s)} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \frac{C}{2} \sum_{j=1}^k (k-j+1) \rho^{-j} \left(\frac{C}{\rho} \right)^{k-j}, \end{aligned}$$

que l'on majore en utilisant une nouvelle fois que $C^{k-j} \leq C^{k-1}$ pour tout $j = 1 \dots k$ car $C \geq 1$. Il vient :

$$|I| \leq \frac{C}{2} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \frac{C^{k-1} \sum_{j=1}^k (k-j+1)}{\rho^k k(k+s)} \leq \frac{1}{2} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| (R_a^n)^{-k}.$$

Passons au terme II , de la même manière, le lemme 9.5.15 donne une majoration de $p_{\varepsilon, j}^n$ et de $q_{\varepsilon, j}^n$ et l'hypothèse de récurrence nous permet de majorer $|a_{\varepsilon_1, k-j}^n(\nu_1) - a_{\varepsilon_2, k-j}^n(\nu_1)|$:

$$\begin{aligned} |II| &\leq \frac{1}{k(k+s)} \sum_{j=1}^k \left\{ (k-j) |p_{\varepsilon_2, j}^n| + |\nu_1 p_{\varepsilon_2, j}^n + q_{\varepsilon_2, j}^n| \right\} |a_{\varepsilon_1, k-j}^n(\nu_1) - a_{\varepsilon_2, k-j}^n(\nu_1)| \\ &\leq \frac{1}{k(k+s)} \sum_{j=1}^k \left\{ (k-j) \frac{C}{2} \rho^{-j} + \frac{C}{2} \rho^{-j} \right\} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \rho^{j-k} \\ &\leq \frac{C}{2} \frac{1}{\rho^k} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \frac{\sum_{j=1}^k (k-j+1)}{k(k+s)} \\ &\leq \frac{1}{2} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| (R_a^n)^{-k}. \end{aligned}$$

Enfin, en sommant les estimations obtenues de $|I|$ et $|II|$, on trouve l'hypothèse de récurrence au rang k

$$\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in]0, \bar{\varepsilon}[, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad |a_{\varepsilon_1, k}^n(\nu_1) - a_{\varepsilon_2, k}^n(\nu_1)| \leq |I| + |II| \leq |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| (R_a^n)^{-k},$$

ce qui termine la preuve. ■

Proposition 9.5.17 (Convergence de U_ε^n). *Il existe un voisinage de r^n du plan complexe de la forme $B(r^n, \eta)$, où $\eta > 0$, et un seuil $\bar{\varepsilon} > 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}[$, U_ε^n soit bien définie sur $B(r^n, \eta)$ et tels qu'on ait la convergence uniforme en ε :*

$$U_\varepsilon^n : z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_{\varepsilon, k}^n(\nu_1) (z - z_\varepsilon^n)^k \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{L^\infty(B(r^n, \eta))} U^n : z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^n(\nu_1) (z - r^n)^k,$$

où

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k^n(\nu_1) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} a_{\varepsilon, k}^n(\nu_1).$$

Preuve. Puisque $(z_\varepsilon^n)_\varepsilon$ converge lorsque ε tend vers 0^+ vers le rayon de la ligne résonante r^n , il existe une boule $B(r^n, \eta)$ centrée sur r^n de rayon η , $\eta \in]0, R_a^n[$, et un seuil $\bar{\varepsilon}$ choisis tels que

$$\forall \varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}[, \quad B(r^n, \eta) \subset B(z_\varepsilon^n, R_a^n),$$

où la constante $R_a^n > 0$ est celle introduite dans le lemme 9.5.16. La situation est illustrée sur la figure 9.3

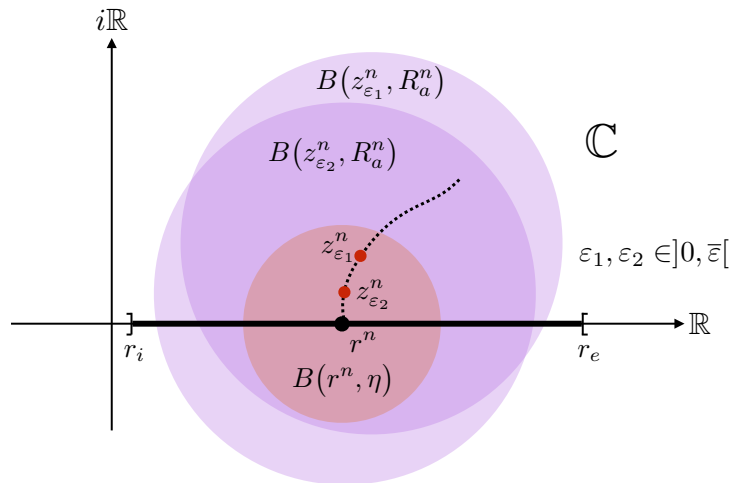


FIGURE 9.3 – Boule $B(r^n, \eta)$ contenue dans toutes les boules $B(z_\varepsilon^n, R_a^n)$ pour ε assez petit

Soit $z \in B(r^n, \eta)$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in]0, \bar{\varepsilon}[$, on a

$$U_{\varepsilon_1}^n(z) - U_{\varepsilon_2}^n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{\varepsilon_1, k}^n(\nu_1) (z - z_{\varepsilon_1}^n)^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_{\varepsilon_2, k}^n(\nu_1) (z - z_{\varepsilon_2}^n)^k.$$

En tronquant les sommes à $K \in \mathbb{N}$, on les découpe de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^K a_{\varepsilon_1, k}^n(\nu_1)(z - z_{\varepsilon_1}^n)^k - \sum_{k=0}^K a_{\varepsilon_2, k}^n(\nu_1)(z - z_{\varepsilon_2}^n)^k &= \underbrace{\sum_{k=0}^K (a_{\varepsilon_1, k}^n(\nu_1) - a_{\varepsilon_2, k}^n(\nu_1))(z - z_{\varepsilon_1}^n)^k}_{=I} \\ &+ \underbrace{\sum_{k=0}^K a_{\varepsilon_2, k}^n(\nu_1) \left[(z - z_{\varepsilon_1}^n)^k - (z - z_{\varepsilon_2}^n)^k \right]}_{=II}. \end{aligned}$$

Majorons chacun des termes I et II . Pour le premier terme, on utilise la majoration (9.46) du lemme 9.5.16, il vient

$$|I| \leq |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \sum_{k=0}^K \left| \frac{z - z_{\varepsilon_1}^n}{R_a^n} \right|^k,$$

et puisque $z \in B(r^n, \eta) \subset B(z_{\varepsilon_1}^n, \eta)$ et que $\eta < R_a^n$, on a $|z - z_{\varepsilon_1}^n| \leq \eta$ et

$$|I| \leq |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\eta}{R_a^n} \right)^k = \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|}{1 - \eta/R_a^n}.$$

Passons au terme II . On a,

$$\begin{aligned} |II| &\leq \sum_{k=0}^K |a_{\varepsilon_2, k}^n(\nu_1)| \left| (z - z_{\varepsilon_1}^n)^k - (z - z_{\varepsilon_2}^n)^k \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^K |a_{\varepsilon_2, k}^n(\nu_1)| \left| (z - z_{\varepsilon_1}^n) - (z - z_{\varepsilon_2}^n) \right| \sum_{j=0}^{k-1} |z - z_{\varepsilon_1}^n|^j |z - z_{\varepsilon_2}^n|^{k-j-1}, \end{aligned}$$

puis comme $z \in B(r^n, \eta) \subset B(z_{\varepsilon_1}^n, \eta) \cap B(z_{\varepsilon_2}^n, \eta)$ avec $\eta < R_a^n$, il vient que

$$|z - z_{\varepsilon_1}^n| \leq \eta \quad \text{et} \quad |z - z_{\varepsilon_2}^n| \leq \eta,$$

puis,

$$|II| \leq \sum_{k=1}^K |a_{\varepsilon_2, k}^n(\nu_1)| |z_{\varepsilon_1}^n - z_{\varepsilon_2}^n| \sum_{j=0}^{k-1} (R_a^n)^j (R_a^n)^{k-j-1} \leq |z_{\varepsilon_1}^n - z_{\varepsilon_2}^n| \sum_{k=1}^K |a_{\varepsilon_2, k}^n(\nu_1)| k \eta^{k-1}.$$

Et comme d'après le lemme 9.5.16, l'estimation (9.45) donne :

$$|II| \leq |z_{\varepsilon_1, k}^n - z_{\varepsilon_2}^n| \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{\eta}{R_a^n} \right)^{k-1} = \frac{|z_{\varepsilon_1}^n - z_{\varepsilon_2}^n|}{(1 - \eta/R_a^n)^2}.$$

On a donc établi la majoration suivante :

$$\left| U_{\varepsilon_1}^n(z) - U_{\varepsilon_2}^n(z) \right| \leq |I| + |II| \leq \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|}{1 - \eta/R_a^n} + \frac{|z_{\varepsilon_1}^n - z_{\varepsilon_2}^n|}{(1 - \eta/R_a^n)^2}. \quad (9.47)$$

Finalement, comme $(z_\varepsilon^n)_\varepsilon$ converge lorsque ε tend vers 0^+ , cette suite est de Cauchy, ce qui permet de conclure en passant à la borne supérieure dans (9.47) que :

$$\sup_{z \in B(r^n, \eta)} |U_{\varepsilon_1}^n(z) - U_{\varepsilon_2}^n(z)| \leq \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|}{1 - \eta/R_a^n} + \frac{|z_{\varepsilon_1}^n - z_{\varepsilon_2}^n|}{(1 - \eta/R_a^n)^2},$$

et donc U_ε^n vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $B(r^n, \eta)$. De plus, l'estimation (9.46) montre que la suite $(a_{\varepsilon, k}^n(\nu_1))_\varepsilon$ est également de Cauchy donc converge, notons a_k^n sa limite. Et en passant à la limite pour $\varepsilon_2 \rightarrow 0^+$ dans la majoration de la différence tronquée obtenue :

$$\left| \sum_{k=0}^K a_{\varepsilon_1, k}^n(\nu_1) (z - z_{\varepsilon_1}^n)^k - \sum_{k=0}^K a_{\varepsilon_1, k}^n(\nu_1) (z - z_{\varepsilon_1}^n)^k \right| \leq |I| + |II| \leq \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|}{1 - \eta/R_a^n} + \frac{|z_{\varepsilon_1}^n - z_{\varepsilon_2}^n|}{(1 - \eta/R_a^n)^2},$$

puis en passant également à la limite sur $K \rightarrow +\infty$, on trouve

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_{\varepsilon_1, k}^n(\nu_1) (z - z_{\varepsilon_1}^n)^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^n(\nu_1) (z - z_{\varepsilon_1}^n)^k \right| \leq \frac{|\varepsilon_1|}{1 - \eta/R_c} + \frac{|z_{\varepsilon_1}^n - r^n|}{(1 - \eta/R_c)^2},$$

ce qui conclut la preuve. ■

Nous avons une proposition analogue à celle 9.5.17 pour la fonction V_ε^n à partir de laquelle est définie l'autre solution Ψ_ε^n de la base. Donnons le résultat sans preuve.

Proposition 9.5.18 (Convergence de V_ε^n). *Il existe un voisinage r^n du plan complexe de la forme $B(r^n, \eta)$, où $\eta > 0$, et un seuil $\bar{\varepsilon} > 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}[$, V_ε^n soit bien définie sur $B(r^n, \eta)$ et tels qu'on ait la convergence uniforme en ε :*

$$V_\varepsilon^n : z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \partial_\nu a_{\varepsilon, k}^n(\nu_2) (z - z_\varepsilon^n)^k \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{L^\infty(B(r^n, \eta))} V^n : z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \partial_\nu a_k^n(\nu_2) (z - r^n)^k.$$

où

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \partial_\nu a_k^n(\nu_2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \partial_\nu a_{\varepsilon, k}^n(\nu_2)$$

Enfin, il nous reste plus qu'à énoncer le lemme donnant la convergence de la constante c_ε^n .

Proposition 9.5.19 (Convergence de c_ε^n). *La constante c_ε^n admet pour limite*

$$c_\varepsilon^n \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} c^n := \lim_{\nu \rightarrow \nu_2} (\nu - \nu_2) a_s^n(\nu),$$

où l'on rappelle que $s = \nu_1 - \nu_2$.

Espace des solutions locales. Rappelons que nous sommes intéressés par le comportement des solutions au voisinage du rayon r^n . Nous avons pour cela défini l'espace des solutions locales sur l'intervalle ouvert non vide $I \subset]r_i, r_e[$ en 9.31 par :

$$\mathcal{S}_\varepsilon^n(I) = \left\{ \varphi_\varepsilon^n \in H^1(I) : \frac{d^2 \varphi_\varepsilon^n}{dr^2} + P_\varepsilon^n \frac{d\varphi_\varepsilon^n}{dr} + Q_\varepsilon^n \varphi_\varepsilon^n = 0, \text{ sur } I \right\}.$$

Ayant obtenu que les fonctions auxiliaires U_ε^n et V_ε^n sont bien définies sur un voisinage $B(r^n, \eta)$ du rayon résonant à absorption suffisamment petite, nous pouvons à présent définir la trace des fonctions Φ_ε^n et Ψ_ε^n sur l'intervalle $]r_i, r_e[$, au moins au voisinage de r^n et en déduire une base de l'espace des solutions locales, comme décrit la proposition suivante.

Proposition 9.5.20. *Pour $\varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}[$, les solutions*

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon^n(z) &= (z - z_\varepsilon^n)^{\nu_1} U_\varepsilon^n(z), \\ \Psi_\varepsilon^n(z) &= (z - z_\varepsilon^n)^{\nu_2} V_\varepsilon^n(z) + c_\varepsilon^n \operatorname{Log}(z - z_\varepsilon^n) (z - z_\varepsilon^n)^{\nu_1} U_\varepsilon^n(z),\end{aligned}$$

sont bien définie sur le voisinage $B(r^n, \eta)$ privé de la coupure : $B(r^n, \eta) \setminus \mathbb{D}_\varepsilon$, et l'espace des solutions locales 9.31 autour du rayon résonant r^n est donnée par

$$\mathcal{S}_\varepsilon^n(I_\eta) = \operatorname{Vect}\{\phi_\varepsilon^n, \psi_\varepsilon^n\},$$

où $I_\eta :=]r^n - \eta, r^n + \eta[$, et

$$\phi_\varepsilon^n : r \in I_\eta \mapsto \Phi_\varepsilon^n(r + i0) \quad \text{et} \quad \psi_\varepsilon^n : r \in I_\eta \mapsto \Psi_\varepsilon^n(r + i0).$$

Preuve. La preuve de cette proposition est directe en utilisant le fait que les restrictions à un intervalle ouvert non vide de l'axe réel de fonctions holomorphes linéairement indépendantes définissent des fonctions indépendantes, c'est une conséquence simple de l'unicité du prolongement analytique. De plus, ces restrictions sont analytiques sur I_η et satisfont l'équation différentielle au sens classique. Cela fournit donc bien une paire de solutions indépendante à l'équation (9.29) pour toute absorption suffisamment petite. L'espace de solutions recherché étant de dimension 2, nous l'avons donc déterminé. ■

Passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Analysons à présent comment se comportent les solutions formant la base de l'espace $\mathcal{S}_\varepsilon^n(I_\eta)$ que nous avons trouvée en introduisant de l'absorption lorsque cette absorption tend vers zéro.

De même que nous avons défini ϕ_ε^n et ψ_ε^n les traces de Φ_ε^n et de Ψ_ε^n sur I_η , introduisons les fonctions u_ε^n et v_ε^n définie sur I_η par :

$$u_\varepsilon^n : r \in I_\eta \mapsto U_\varepsilon^n(r + i0) \quad \text{et} \quad v_\varepsilon^n : r \in I_\eta \mapsto V_\varepsilon^n(r + i0).$$

Le lemme suivant est une conséquence directe des lemmes de convergence uniforme des fonctions U_ε^n et V_ε^n sur $B(r^n, \eta)$, 9.5.17 et 9.5.18.

Lemme 9.5.21 (Convergence de u_ε^n et v_ε^n). *Sur I_η , les suites de fonctions $(u_\varepsilon^n)_\varepsilon$ et $(v_\varepsilon^n)_\varepsilon$ convergent uniformément sur I_η :*

$$u_\varepsilon^n \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{L^\infty(I_\eta)} u^n, \quad \text{et} \quad v_\varepsilon^n \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{L^\infty(I_\eta)} v^n,$$

où u^n et v^n sont définies également par restrictions à I_η des fonctions limites U^n et V^n .

Pour passer à la limite, distinguons les cas d'une résonance critique et d'une résonance du transport. Nous avons les deux théorèmes suivants.

Théorème 9.5.22 (Cas d'une ligne résonante critique). *Pour ε suffisamment petit, les solutions ϕ_ε^n et ψ_ε^n s'écrivent sur I_η :*

$$\forall r \in I_\eta, \quad \begin{cases} \phi_\varepsilon^n(r) = u_\varepsilon^n(r), \\ \psi_\varepsilon^n(r) = \frac{1}{r - z_\varepsilon^n} v_\varepsilon^n(r) + c_\varepsilon^n \operatorname{Log}(r - z_\varepsilon^n) u_\varepsilon^n(r), \end{cases}$$

et convergent, au sens des distributions de l'intervalle I_η :

$$\begin{aligned} \phi_\varepsilon^n &\xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{\mathcal{D}'(I_\eta)} u^n, \\ \psi_\varepsilon^n &\xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{\mathcal{D}'(I_\eta)} \left(i\mathfrak{s}\pi\delta(r - r^n) + \text{v.p.} \frac{1}{r - r^n} \right) v^n + c^n \ln(|r - r^n|) u^n, \end{aligned}$$

où δ est la distribution de Dirac et v.p. et la distribution « valeur principale », et où

$$\mathfrak{s} = \operatorname{sgn} \left(\frac{1}{(a^n)'(r^n)} \right).$$

Théorème 9.5.23 (Cas d'une ligne résonante du transport). *Pour ε suffisamment petit, les solutions ϕ_ε^n et ψ_ε^n s'écrivent sur I_η :*

$$\forall r \in I_\eta, \quad \begin{cases} \phi_\varepsilon^n(r) = (r - z_\varepsilon^n)^2 u_\varepsilon^n(r), \\ \psi_\varepsilon^n(r) = v_\varepsilon^n(r) + c_\varepsilon^n (r - z_\varepsilon^n)^2 \operatorname{Log}(r - z_\varepsilon^n) u_\varepsilon^n(r), \end{cases}$$

et convergent, au sens des distributions de l'intervalle I_η :

$$\begin{aligned} \phi_\varepsilon^n &\xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{\mathcal{D}'(I_\eta)} (r - r^n)^2 u^n, \\ \psi_\varepsilon^n &\xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{\mathcal{D}'(I_\eta)} v^n + c^n (r - r^n)^2 \ln(r - r^n) u^n. \end{aligned}$$

La convergence est en réalité beaucoup plus forte dans ce cas car les fonctions obtenues finalement sont régulières.

9.5.5 Commentaires et perspectives.

Terminons cette section par des commentaires prospectifs dont l'étude demande des approfondissements qui n'ont pas trouvé leur place dans cette thèse, mais qui sont prévus pour de futurs développements. Nous avons choisis de les présenter ici, même de manière moins formelle que ce qui a été fait jusque là.

Régularité des solutions à la limite. Au vu des théorèmes de convergence 9.5.22 et 9.5.23, le cas des résonances critiques semble donc être plus sévère en terme de singularité du point de vue des inconnues des équations de Goldstein. En effet, l'espace des solutions obtenues par passage à absorption nulle, qui sont par définition pour nous les solutions physiquement acceptables présentent des singularités le faisant sortir du cadre d'analyse clas-

sique pour φ^n qui est $H^1(]r_i, r_e[)$. Nous pouvons alors nous demander quelle régularité est attendue à absorption pour l'inconnue hydrodynamique localement autour d'une singularité critique. Rappelons pour cela l'expression obtenue de ξ_ε^n :

$$\begin{aligned}\xi_{r,\varepsilon}^n(r) &= \frac{\omega_0(r)}{\beta_\varepsilon^n(r)} \left(\frac{n}{r} + 2\Omega_0(r) \frac{d}{dr} \right) \varphi_\varepsilon^n(r), \\ \xi_\theta^n(r) &= i \frac{\omega_0(r)}{\beta_\varepsilon^n(r)} \left(\frac{n}{r} \omega_0(r) + \alpha_\varepsilon^n(r) \frac{d}{dr} \right) \varphi_\varepsilon^n(r).\end{aligned}$$

Ainsi, nous nous attendons à ce que les singularités empirent pour $\xi_{r,\varepsilon}^n$ à cause de la présence de la dérivation suivant r de φ_ε^n , tandis dans l'expression de $\xi_{\theta,\varepsilon}^n$ la dérivation est contrebalancée par la multiplication par α_ε^n qui est régularisant à la limite d'absorption nulle. Ainsi, pour ξ^n non plus, le cadre L^2 ne semble plus correspondre à l'espace naturel d'étude.

Pour ce qui est des résonances du transport, il semblerait que les choses se passent mieux. En effet, les bases de solutions locales obtenues à absorption nulle ne possèdent que de très faible singularités et en particulier restent dans l'espace $H^1(]r_i, r_e[)$ alors que les coefficients des équations modales présentent des singularités dans ce cas. Pour ξ_ε^n , bien que la division par la fonction β_ε^n qui s'annule en r^n à la limite d'absorption nulle s'ajoute à la dérivation par rapport à la variable r pour accentuer les singularités, ξ_ε^n reste dans le cadre L^2 qui est son espace naturel utilisé jusqu'ici.

Singularité des quantités physiques. Une question intéressante est celle de la régularité des quantités physiques. En effet, rappelons que les inconnues des équations de Goldstein sont obtenus par un changement de variable faisant intervenir des opérateurs différentiels, et en particulier l'opérateur D_{ω_ε} , dont le symbole est précisément α_ε^n qui s'annule pour les fréquence de résonance critique. En effet, rappelons que l'on a :

$$\begin{aligned}p_\varepsilon &= -\rho_0 D_{\omega_\varepsilon} \varphi_\varepsilon, \\ \rho_\varepsilon &= c_0^{-2} p_\varepsilon, \\ \mathbf{v}_\varepsilon &= \nabla \varphi_\varepsilon + \xi_\varepsilon,\end{aligned}$$

d'où l'on déduit pour les modes de Fourier :

$$\begin{aligned}p_\varepsilon^n &= -i\rho_0 \varphi_\varepsilon^n, \\ \rho_\varepsilon^n &= c_0^{-2} p_\varepsilon^n, \\ v_{\varepsilon,r}^n &= \frac{d\varphi_\varepsilon^n}{dr} + \xi_{\varepsilon,r}^n, \\ v_{\varepsilon,\theta}^n &= \frac{in}{r} \varphi_\varepsilon^n + \xi_{\varepsilon,\theta}^n,\end{aligned}$$

Une remarque importante, surtout dans le cadre des résonances critiques est que le changement de variable qui permet d'établir les équations de Goldstein depuis celles d'Euler linéarisées introduit quelque peu artificiellement une singularité critique par la division par α_ε^n . Cette remarque ne plaide pas en faveur des équations de Goldstein en présence de résonances critiques car elles semblent en effet ajouter des singularités dans les solutions, ce qui devrait les rendre plus difficile d'accès numériquement par exemple, si tant est que nous ayons une théorie dans laquelle on puisse établir une discrétisation numérique.

Exprimées qu'en fonction de φ_ε^n , les inconnues physiques du problèmes s'écrivent :

$$\begin{cases} p_\varepsilon^n = -i\rho_0\alpha_\varepsilon^n\varphi_\varepsilon^n, \\ \rho_\varepsilon^n = -i\frac{\rho_0}{c_0}\alpha_\varepsilon^n\varphi_\varepsilon^n, \\ v_{\varepsilon,r}^n = \frac{1}{r\rho_0}\frac{(\alpha_\varepsilon^n)^2}{\beta_\varepsilon^n}\frac{d\varphi_\varepsilon^n}{dr} + \frac{n\omega_0}{r^2\rho_0}\frac{\alpha_\varepsilon^n}{\beta_\varepsilon^n}\varphi_\varepsilon^n, \\ v_{\varepsilon,\theta}^n = \frac{i\omega_0}{r\rho_0}\frac{\alpha_\varepsilon^n}{\beta_\varepsilon^n}\frac{d\varphi_\varepsilon^n}{dr} + \frac{in}{r^2\rho_0}\frac{(\alpha_\varepsilon^n)^2 - 2\Omega_0\omega_0 + \omega_0^2}{\beta_\varepsilon^n}\varphi_\varepsilon^n. \end{cases}$$

En particulier, pour une résonance critique, la pression p_ε^n et la densité ρ_ε^n sont plus régulières que φ_ε^n en présence de résonance critique et de même régularité en présence de résonance du transport. Pour ce qui est de la vitesse, en présence de résonance critique,

Illustrations numériques 1D. Pour illustrer brièvement numériquement ce que l'on obtient en présence d'une résonance critique, nous avons programmé un petit programme C++ d'éléments finis 1D permettant de résoudre les équations modales de la couronne en φ_ε^n en présence d'absorption. L'équation doit être résolue très finement pour des valeurs d'absorption assez petites. Nous illustrons le résultat obtenu pour un mode sur la figure 9.4 en traçant pour plusieurs valeurs d'absorption, en haut, $\Re(\varphi_\varepsilon^n)$ et $\Im(\varphi_\varepsilon^n)$ et en bas un zoom autour de la valeur $r^n = 2$ sur cet exemple. L'équation est résolue pour un second membre bidon mais pour les bonnes conditions aux limites. On remarque de façon très qualitative le comportement en $1/(r - r^n)$ de la partie réelle de φ_ε^n et le comportement qui pourrait être celui d'un Dirac pour sa partie imaginaire. Ces interprétations sont en accord avec ce que prévoit le théorème 9.5.22. La même expérience numérique est réalisée pour une résonance du transport et présentée sur la figure 9.5. Le résultat attendu est la convergence vers une solution apparemment régulière, comme prévu par le théorème 9.5.23 lorsque l'absorption diminue.

Pour finir ces petites expériences numériques, nous présentons un cas où c'est l'équation modale régissant la pression qui est résolue. Non présentée dans ce manuscrit, cette équation présente une singularité en $r = r^n$ dans ces coefficients en présence d'une résonance critique. Nous observons sur la figure 9.6 la partie réelle et imaginaire de la pression p_ε^n , pour plusieurs niveaux d'absorption. Bien que l'équation résolue soit à coefficients assez singuliers (ils ne le sont pas vraiment car de l'absorption est introduite dans le domaine), la solution donnée ne présente pas de singularité en $r^n = 2$. Cela montre bien que l'on retrouve le fait que la multiplication par α_ε^n pour passer de φ_ε^n supprime la singularité critique de l'inconnue physique alors qu'elle était présente, voir figure 9.4 sur l'inconnue φ_ε^n .

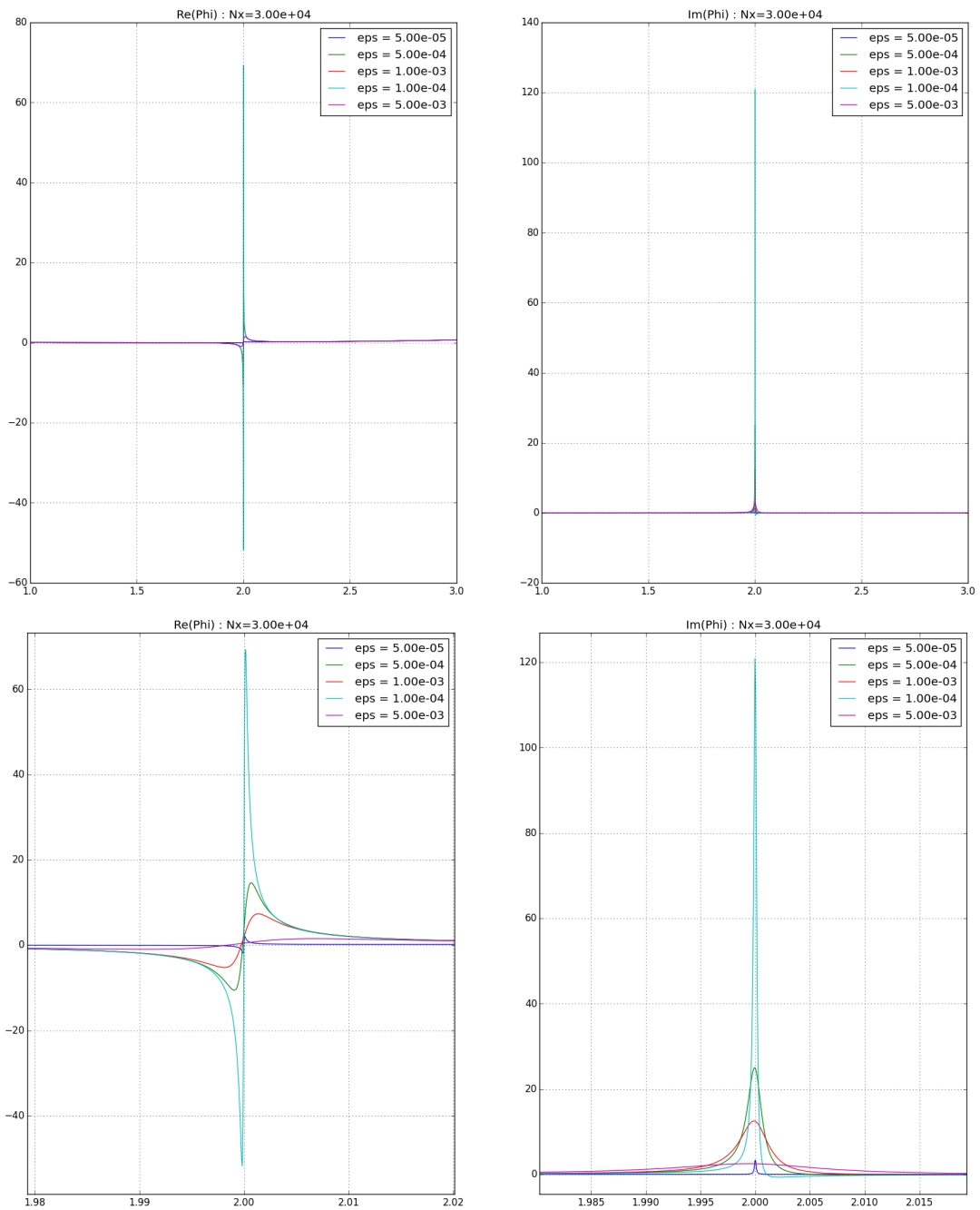


FIGURE 9.4 – $\Re(\varphi_\varepsilon^n)$ et $\Im(\varphi_\varepsilon^n)$ (haut, zoom en bas) : illustration d’une résonance du transport en $r^n = 2$ obtenue numériquement par résolution d’une équation modale par éléments finis 1D en présence d’absorption pour différents niveaux d’absorption : $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}, 10^{-3}, 5 \times 10^{-4}, 10^{-4}, 5 \times 10^{-5}$.

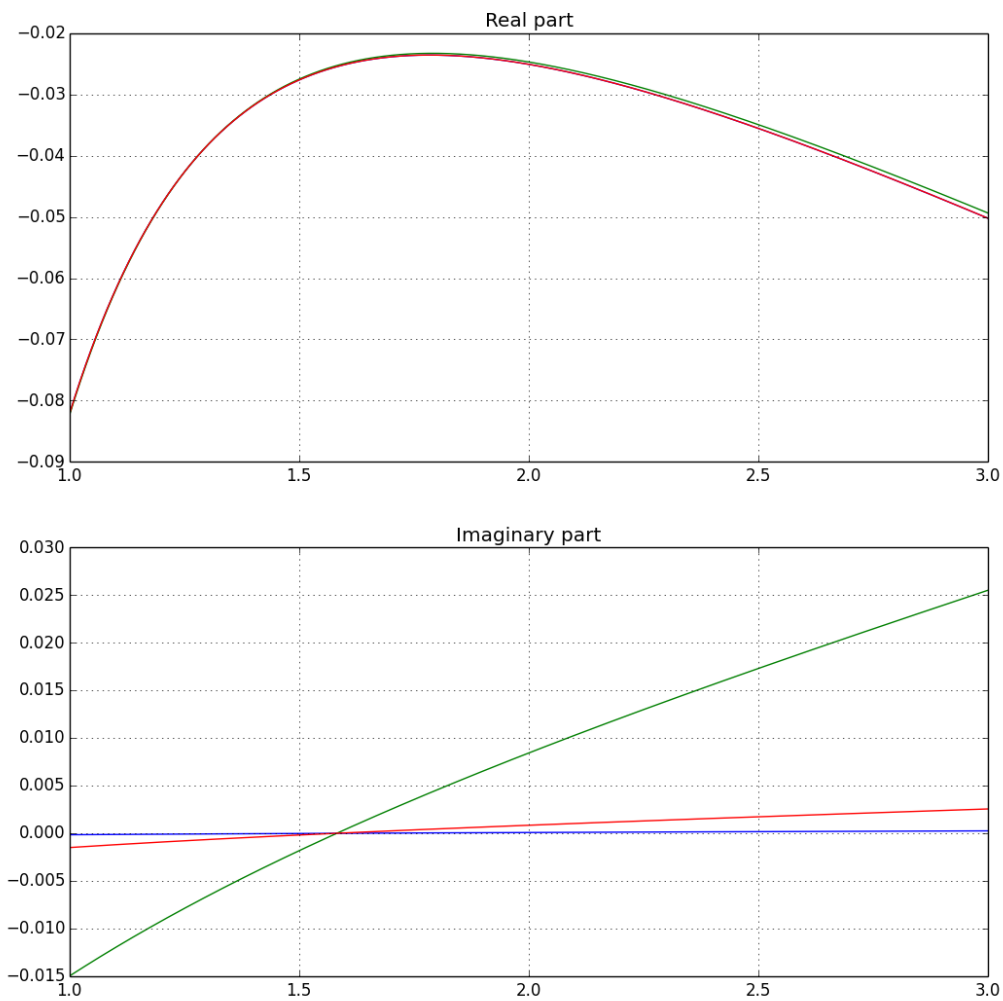


FIGURE 9.5 – $\Re(\varphi_\varepsilon^n)$ et $\Im(\varphi_\varepsilon^n)$ (haut et bas) : illustration d’une résonance du transport en $r^n = 2$ obtenue numériquement par résolution d’une équation modale par éléments finis 1D en présence d’absorption pour différents niveaux d’absorption : $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$.

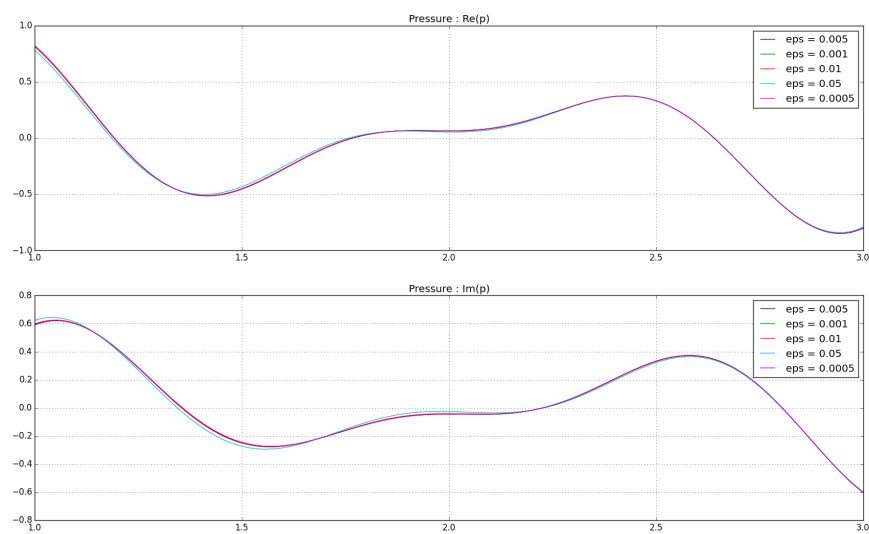


FIGURE 9.6 – $\Re(p_\varepsilon^n)$ et $\Im(p_\varepsilon^n)$ (haut et bas) : illustration d'une résonance critique en $r^n = 2$ obtenue numériquement par résolution d'une équation modale par éléments finis 1D en présence d'absorption pour différents niveaux d'absorption : $\varepsilon = 5 \times 10^{-2}, 10^{-2}, 5 \times 10^{-3}, 10^{-3}, 5 \times 10^{-4}$.

Conclusion

Les travaux abordés dans cette thèse traitent de la modélisation de la propagation acoustique en régime harmonique dans un écoulement rotationnel par la formulation de Goldstein. Cette approche répond aux contraintes industrielles et méthodologiques dans laquelle cette thèse CIFRE s'inscrit. En effet, la formulation de Goldstein a été traitée du point de vue perturbatif par rapport au modèle potentiel (équation d'Helmholtz convectée) dont la résolution numérique était implémentée avant la thèse dans le code de calcul d'Airbus, Aseris. Nous avons proposé une approche théorique et numérique de ces équations.

Après une introduction à la modélisation physique de l'aéroacoustique, nous nous sommes attachés à présenter l'établissement rigoureux de la formulation de Goldstein, en équivalence aux équations d'Euler linéarisées. En particulier, nous avons pris soin d'établir la correspondance des sources avec celles des équations d'Euler linéarisées, qui sont le plus souvent utilisées en domaine temporel. Nous avons également donné la démonstration d'une propriété clef du modèle amenant à la localisation de l'inconnue hydrodynamique là où le rotationnel de l'écoulement est non nul. Cette propriété est très intéressante du point de vue industriel et laisse percevoir un surcoût de résolution numérique en 3D peu important en comparaison avec le modèle potentiel, qui revient à négliger cette inconnue hydrodynamique. Nous avons vu qu'il y a néanmoins quelques bémols à cette anticipation du coût de calcul ; en particulier, cette propriété de localisation est vraie dans le cadre d'un écoulement satisfaisant strictement les équations d'Euler.

Approche théorique. Conformément à cette vision perturbative, nous avons analysé les équations de Goldstein par résolution de l'équation de transport harmonique afin d'isoler l'inconnue hydrodynamique qui vient « corriger » le potentiel acoustique, contenant en particulier le rotationnel de la perturbation acoustique de la vitesse. Cependant, cette équation de transport en régime harmonique n'est pas classique. Par exemple, elle n'entre pas naturellement dans le cadre de la théorie des systèmes de Friedrichs, par manque de dissipation. Il s'agit d'une version vectorielle de l'équation de transport harmonique scalaire que l'on voit apparaître lors de l'étude du modèle de Galbrun, voir [3], qui est une autre formulation des mêmes équations de l'aéroacoustique, s'appuyant sur une description mixte eulérienne-lagrangienne des perturbations de l'écoulement. Plus délicate à analyser, les résultats concernant cette équation de transport sont néanmoins généralisables. A savoir, en reprenant l'hypothèse que l'écoulement soit domaine-remplissant, introduite par [42] qui correspond à un écoulement traversant le domaine en un temps borné, l'analyse de l'équation par la méthode des caractéristiques est possible et donne lieu à une estimation a priori, de la même nature que l'inégalité de Poincaré courbe donnée dans [42]. Puis, par analyse de l'équation adjointe, nous arrivons à montrer que l'équation est alors bien posée. L'analyse de cette équation hors de ce cadre n'est pas aisée et des résultats généraux nous semblent hors de portée. En particulier, nous avons montré que pour une classe particulière d'écoulements non domaine-remplissants : des écoulements en recirculation dans une couronne 2D,

l'équation de transport harmonique possède des fréquences de résonance, associées à des lignes résonantes. Ainsi, à une fréquence de résonance fixée, le long de certaines lignes de courant de l'écoulement, dites résonantes, l'équation est mal posée. Nous avons de plus montré que ces problèmes ne se produisent pas rarement. Par exemple, nous savons qu'à haute fréquence, il existe toujours des lignes de courant résonantes et que leur nombre augmente avec la fréquence. Nous avons interprété ces problèmes en terme de manque de dissipation dans le modèle. Par exemple, par ajout d'absorption, nous faisons disparaître ces résonances du transport, qui sont dues à la périodicité des lignes de courant de l'écoulement. Nous soupçonnons qu'il en serait de même si nous prenions en compte la viscosité ou les termes non linéaires négligés par l'approche de la formulation de Goldstein, mais nous n'en n'avons pas de preuve. Une question en suspens à ce niveau de la thèse est alors de savoir si ces fréquences de résonances de l'équation de transport se transmettent au problème couplé de Goldstein ou non.

Pour étudier le problème de Goldstein, nous nous sommes donc naturellement placés dans un premier temps dans le cadre d'écoulements domaine-remplissants. Nous profitons alors de l'inversibilité de l'équation de transport et de l'estimation a priori que nous en avons pour montrer que la perturbation que constitue l'introduction de l'inconnue hydrodynamique est contrôlée par le rotationnel de l'écoulement. Ainsi, nous avons pu justifier la vision initiale industrielle consistant à dire que l'inconnue hydrodynamique supplémentaire contient les interactions de l'onde acoustique avec le rotationnel de l'écoulement et qu'elle est petite pour un écoulement peu rotationnel. Pour ce qui est de borner le domaine de calcul, nous avons compris qu'il fallait prendre en compte l'inconnue hydrodynamique dans les conditions de rayonnement du bord du domaine. En effet, lorsque les écoulements considérés ne satisfont plus les équations d'Euler ou que comme en 2D nous ne sommes pas capables de placer la frontière du domaine de calcul hors du support du rotationnel, l'inconnue hydrodynamique sort du domaine. Par exemple, dans un écoulement cisailé qui se « dé-cisaillerait », sous l'effet de la viscosité, nous avons remarqué que les équations de Goldstein ne sont pas toujours en mesure de faire décroître la perturbation hydrodynamique comme on pourrait l'attendre. C'est pourquoi nous avons proposé deux approches. Du point de vue de l'analyse théorique dans un premier temps, nous avons établi des conditions aux limites absorbantes permettant de faire « fuir » ξ . Du point de vue numérique, nous avons constaté que l'utilisation de PML permet également de faire fuir l'inconnue hydrodynamique du domaine sans créer d'artefact visible dans le domaine. Néanmoins, la tentative d'analyse théorique des PML dans le cas des équations de Goldstein s'est avérée compliquée et les résultats obtenus ne nous satisfont pas dans la mesure où ils introduisent des conditions supplémentaires pour obtenir le caractère Fredholm du problème.

Enfin, pour aller plus loin et comprendre ce qu'il se passe lorsque l'écoulement n'est pas supposé domaine-remplissant, nous avons analysé les équations de Goldstein dans le cadre d'écoulements modèles recirculants dans la couronne. Dans un premier temps, hors des fréquences de résonances de l'équation de transport, nous avons démontré que nous retrouvons des résultats similaires au cas domaine-remplissant, à savoir, qu'à faible rotationnel le couplage de Goldstein relève de l'alternative de Fredholm. Par analyse en série de Fourier, profitant ainsi du caractère invariant par rotation de notre géométrie et donc des équations, nous avons trouvé de nouvelles résonances, que nous n'avions pas identifiées jusque là. Il s'agit de résonances connues sous le nom « couche critique » dans la littérature, voir [80]. Nous avons alors été capables, hors toute résonance du transport et critique, de montrer le caractère bien posé du problème de Goldstein dans la couronne.

La présence de résonances se traduit sur les équations différentielles régissant les modes

de Fourier par la présence de singularités dans les coefficients aux fréquences de résonance du transport, ou par une dégénérescence aux fréquences de résonance critiques. Pour analyser ce qu'il se passe en présence de ces résonances, nous avons utilisé la méthode d'absorption limite. Ainsi, nous avons montré que l'introduction d'absorption dans le domaine supprime les deux phénomènes de résonance, du transport et critique. Puis par des méthodes d'analyse complexe, théorie de Fuchs ou méthode de Frobenius, nous avons analysé les singularités des bases de solutions des équations modales et identifier leur limite lorsque l'absorption tend vers zéro. Cette analyse reste prospective et ne permet pas la prise en compte numérique de ces résonances. Il s'agit dans un premier temps d'identifier la nature des singularités qui apparaissent. Ces travaux ont été inspirés par des recherches similaires dans le domaine des plasmas, voir [75] ou [77], où des singularités apparaissent à la fréquence de résonance hybride.

Approche numérique. Notre approche d'étude numérique a été de programmer un code éléments finis en C++ pour résoudre les équations de transport et du couplage de Goldstein en 2D. Le faible coût de la résolution de ces équations en 2D nous a permis de tester les propriétés attendues et théoriques de ces équations. L'équation de transport harmonique, en tant qu'EDP d'ordre 1 nécessite une stabilisation pour être résolue par éléments finis classiques. Nous avons retenu pour notre étude 2D la méthode « Streamline Upwind Galerkin Method » (SUPG) qui nécessite d'ajuster le paramètre de stabilisation en fonction du pas de maillage, mais également de la vitesse de l'écoulement, voir [52]. Cette approche a été utilisée pour des questions de simplicité de mise en oeuvre et en comparaison avec la méthode des moindres carrés qui, bien que n'ayant pas de paramètre à ajuster, s'est montrée trop dissipative.

L'étude du couplage de Goldstein en 2D a permis de vérifier numériquement son caractère perturbatif par rapport à la résolution de l'équation d'Helmholtz convectée. Nous avons pu également constater la localisation attendue de l'inconnue hydrodynamique aux tubes de courant contenant le support du rotationnel de l'écoulement porteur. Néanmoins, comme expliqué précédemment, lorsque les écoulements porteurs considérés ne satisfont pas les équations d'Euler, l'inconnue ξ n'a pas de raison de s'atténuer au bord. Nous avons constaté que les PML se comportent bien avec l'équation de transport, même lorsque l'écoulement est cisailé dans les couches absorbantes, qui doivent alors lutter contre un éventuel accroissement de ξ dans le cisaillement.

L'étude numérique du couplage en 2D nous a également permis de retrouver une approximation qui nous semble satisfaisante pour notre application consistant à approximer l'équation de transport par un opérateur d'ordre 0. Cette approximation est la même que celle démontrée pour des écoulements cisailés faible Mach et proposée parmi les modèles d'interactions de faible vorticité dans [6].

Pour des questions de simplicité, c'est cette approximation de l'équation de transport qui a été implémentée dans le code Aseris d'Airbus durant la thèse et dont les premiers résultats sont présentés dans la dernière partie de ce manuscrit. Ces résultats sont les premiers d'une étude industrielle à venir. Les principales perspectives pour de futures développements de recherche industrielles vont être de se demander si les corrections apportées par le modèle de Goldstein, par l'introduction de l'inconnue hydrodynamique en comparaison avec le modèle potentiel, ne sont pas perdues dans les incertitudes que nous avons sur l'écoulement porteur dans le cadre de nos applications. En effet, l'écoulement porteur étant issu d'un calcul de CFD, une approche de type « propagation d'incertitudes » aiderait à comprendre si nous devons aller jusqu'au modèle de Goldstein et si oui dans quels cas, ou alors si le modèle potentiel suffit compte tenu des erreurs sur les données d'entrées du calcul ainsi que sur les sources.

Annexe A

Résultats annexes

A.1	Transformation de Lorentz	277
A.2	Caractérisation 2D de la propriété Ω -remplissant	279
A.3	Borner le domaine calcul avec des « Perfectly Matched Layers »?	283
A.3.1	Dans le cas « domaine-remplissant » avec PML	283
	Géométrie et notations	284
	Estimation	286
	Formulation variationnelle en présence de PML et condition de coercivité	294

A.1 Transformation de Lorentz

On prouve ici le résultat de la proposition 2.1.1. Pour cela, on commence par établir les formules de commutation suivantes :

Lemme A.1.1. *On a pour toute fonction $\phi : (\mathbf{x}, t) \mapsto \phi(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{C}$ et $\phi : (\mathbf{x}, t) \mapsto \phi(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{C}^d$ suffisamment régulières :*

$$(i) \quad \mathcal{L}(\nabla\phi) = L\nabla\mathcal{L}\phi + \left(\frac{\gamma_\infty}{c_\infty}\right)^2 \partial_t(\mathcal{L}\phi) \mathbf{v}_\infty,$$

$$(ii) \quad \mathcal{L}(\nabla \cdot \phi) = \nabla \cdot (L\mathcal{L}\phi) + \left(\frac{\gamma_\infty}{c_\infty}\right)^2 \mathbf{v}_\infty \cdot \partial_t \mathcal{L}\phi.$$

Preuve.

(i) Dérivons simplement par rapport à la variable x_i ,

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} \mathcal{L}\phi(\mathbf{x}, t) &= \partial_{x_i} \phi\left(L^{-1}\mathbf{x}, t - \frac{\gamma_\infty}{c_\infty^2} \mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{x}\right), \\ &= L_{j,i}^{-1} \partial_{x_j} \phi\left(L^{-1}\mathbf{x}, t - \frac{\gamma_\infty}{c_\infty^2} \mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{x}\right) - \frac{\gamma_\infty}{c_\infty^2} \partial_t \phi\left(\mathbf{x}, t - \frac{\gamma_\infty}{c_\infty^2} \mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{x}\right) v_{\infty,i}, \end{aligned}$$

ainsi, par symétrie de L ,

$$\nabla\phi = L^{-1}\nabla\mathcal{L}\phi - \frac{\gamma_\infty}{c_\infty^2} \partial_t(\mathcal{L}\phi) \mathbf{v}_\infty.$$

Il reste à remarquer que

$$L\mathbf{v}_\infty = \left(\text{Id} + \frac{\gamma_\infty - 1}{v_\infty^2} \mathbf{v}_\infty \mathbf{v}_\infty^T \right) \mathbf{v}_\infty = \mathbf{v}_\infty + (\gamma_\infty - 1) \mathbf{v}_\infty = \gamma_\infty \mathbf{v}_\infty,$$

et isoler le terme $\nabla \mathcal{L} \phi$.

(ii) Calculons la divergence de la transformée,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathcal{L} \phi) &= \partial_{x_i} \phi_i \left(L^{-1} \mathbf{x}, t - \frac{\gamma_\infty}{c_\infty^2} \mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{x} \right) = L_{j,i}^{-1} \partial_{x_j} \phi_i \left(L^{-1} \mathbf{x}, t - \frac{\gamma_\infty}{c_\infty^2} \mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{x} \right) \\ &\quad - \frac{\gamma_\infty}{c_\infty^2} v_{\infty,i} \partial_t \phi_i \left(L^{-1} \mathbf{x}, t - \frac{\gamma_\infty}{c_\infty^2} \mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{x} \right), \end{aligned}$$

ou autrement écrit

$$\nabla \cdot (\mathcal{L} \phi) = \mathcal{L}(\nabla \cdot (L^{-1} \phi)) - \frac{\gamma_\infty}{c_\infty^2} \mathbf{v}_\infty \cdot \partial_t \mathcal{L} \phi,$$

finalemt, en remplaçant ϕ par $L\phi$, en multipliant par L , avec $L\mathbf{v}_\infty = \gamma_\infty \mathbf{v}_\infty$, on trouve

$$\nabla \cdot (L\mathcal{L} \phi) = \mathcal{L}(\nabla \cdot \phi) - \left(\frac{\gamma_\infty}{c_\infty} \right)^2 \mathbf{v}_\infty \cdot \partial_t \mathcal{L} \phi. \quad \blacksquare$$

A présent, nous pouvons calculer la transformée de l'opérateur qui nous intéresse. Soit ϕ une fonction assez régulière,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\partial_t \phi + \mathbf{v}_\infty \cdot \nabla \phi) &= \partial_t \mathcal{L} \phi + \mathbf{v}_\infty \cdot \mathcal{L} \nabla \phi = \partial_t \mathcal{L} \phi + \mathbf{v}_\infty \cdot \left(L \nabla \mathcal{L} \phi + \left(\frac{\gamma_\infty}{c_\infty} \right)^2 \partial_t (\mathcal{L} \phi) \mathbf{v}_\infty \right) \\ &= \left(1 + \frac{v_\infty^2}{c_\infty^2} \gamma_\infty \right) \partial_t \mathcal{L} \phi + \mathbf{v}_\infty^T L \partial_t \nabla \mathcal{L} \phi, \end{aligned}$$

puis, grâce à $(v_\infty/c_\infty)^2 = 1 - \gamma_\infty^{-2}$ et $\mathbf{v}_\infty^T L = \gamma_\infty \mathbf{v}_\infty^T$,

$$\mathcal{L}(\partial_t \phi + \mathbf{v}_\infty \cdot \nabla \phi) = \gamma_\infty^2 \partial_t \mathcal{L} \phi + \gamma_\infty \mathbf{v}_\infty \cdot \partial_t \nabla \mathcal{L} \phi,$$

ainsi,

$$\mathcal{L} \left((\partial_t + \mathbf{v}_\infty \cdot \nabla)^2 \phi \right) = \gamma_\infty^4 \partial_t^2 \phi + 2\gamma_\infty^3 \mathbf{v}_\infty \cdot \partial_t \nabla \mathcal{L} \phi + \gamma_\infty^2 \mathbf{v}_\infty \cdot \nabla (\mathbf{v}_\infty \cdot \nabla \mathcal{L} \phi). \quad (\text{A.1})$$

Puis, reste à calculer la transformée du laplacien, en appliquant successivement les formules donnant la transformée de la divergence et du gradient,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c_\infty^2 \Delta \phi) &= \mathcal{L}(c_\infty^2 \nabla \cdot (\nabla \phi)) = c_\infty^2 \nabla \cdot (L\mathcal{L}(\nabla \phi)) + \gamma_\infty^2 \mathbf{v}_\infty \cdot \partial_t (\mathcal{L}(\nabla \phi)) \\ &= c_\infty^2 \nabla \cdot \left(L^2 \nabla \mathcal{L} \phi + \left(\frac{\gamma_\infty}{c_\infty} \right)^2 \partial_t (\mathcal{L} \phi) L\mathbf{v}_\infty \right) + \gamma_\infty^2 \mathbf{v}_\infty \cdot \partial_t \left(L \nabla \mathcal{L} \phi + \left(\frac{\gamma_\infty}{c_\infty} \right)^2 \partial_t (\mathcal{L} \phi) \mathbf{v}_\infty \right), \end{aligned}$$

toujours en utilisant que $L\mathbf{v}_\infty = \gamma_\infty \mathbf{v}_\infty$, on a

$$\mathcal{L}(c_\infty^2 \Delta \phi) = c_\infty^2 \nabla \cdot (L^2 \nabla \mathcal{L} \phi) + 2\gamma_\infty^3 \mathbf{v}_\infty \cdot \partial_t \nabla \mathcal{L} \phi + \frac{\gamma_\infty^4}{c_\infty^2} v_\infty^2 \partial_t^2 \mathcal{L} \phi.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} L^2 &= \left(\text{Id} + \frac{\gamma_\infty - 1}{v_\infty^2} \mathbf{v}_\infty \mathbf{v}_\infty^T \right)^2 = \text{Id} + 2 \frac{\gamma_\infty - 1}{v_\infty^2} \mathbf{v}_\infty \mathbf{v}_\infty^T + \left(\frac{\gamma_\infty - 1}{v_\infty^2} \right)^2 (\mathbf{v}_\infty \mathbf{v}_\infty^T)^2, \\ &= \text{Id} + \left(\frac{2\gamma_\infty - 2}{v_\infty^2} + v_\infty^2 \frac{\gamma_\infty^2 - 2\gamma_\infty + 1}{v_\infty^4} \right) \mathbf{v}_\infty \mathbf{v}_\infty^T = \text{Id} + \left(\frac{\gamma_\infty^2 - 1}{v_\infty^2} \right) \mathbf{v}_\infty \mathbf{v}_\infty^T, \\ &= \text{Id} + \frac{1}{v_\infty^2} \left(\frac{1}{1 - v_\infty^2/c_\infty^2} - 1 \right) \mathbf{v}_\infty \mathbf{v}_\infty^T, \\ &= \text{Id} + \left(\frac{\gamma_\infty}{c_\infty} \right)^2 \mathbf{v}_\infty \mathbf{v}_\infty^T. \end{aligned}$$

Finalement, la transformée du laplacien s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c_\infty^2 \Delta \phi) &= c_\infty^2 \Delta \mathcal{L} \phi + \gamma_\infty^2 \mathbf{v}_\infty \cdot \nabla (\mathbf{v}_\infty \cdot \nabla \mathcal{L} \phi) + 2\gamma_\infty^3 \mathbf{v}_\infty \cdot \nabla \partial_t \mathcal{L} \phi, \\ &\quad + \gamma_\infty^4 \left(\frac{v_\infty}{c_\infty} \right)^2 \partial_t^2 \mathcal{L} \phi. \end{aligned} \tag{A.2}$$

La transformation de l'opérateur des ondes convectées s'obtient alors en soustrayant les deux égalités établies (A.1) et (A.2) :

$$\mathcal{L} \left((\partial_t + \mathbf{v}_\infty \cdot \nabla)^2 \phi - c_\infty^2 \Delta \phi \right) = \gamma_\infty^4 \left(1 - \left(\frac{v_\infty}{c_\infty} \right)^2 \right) \partial_t^2 \phi - c_\infty^2 \Delta \mathcal{L} \phi.$$

A.2 Caractérisation 2D de la propriété Ω -remplissant

Nous donnons une preuve du lemme 4.1.7 qui stipule qu'un champ de vecteur $\mathbf{v}_0 \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ est Ω -remplissant si et seulement si

$$\inf_{x \in \Omega} |\mathbf{v}_0(x)| > 0.$$

Pour montrer le lemme 4.1.7, on établit d'abord quelques résultats. Le premier lemme montre que la frontière glissante Γ_0 contient localement les lignes de courant de \mathbf{v}_0 .

Lemme A.2.1. *Pour tout $\mathbf{x}_b^0 \in \Gamma_0$, il existe un intervalle ouvert I' , contenant 0 et tel que :*

$$\forall t \in I', \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}_b^0) \in \Gamma_0.$$

Preuve (du lemme A.2.1). Soit $\mathbf{x}_b^0 := \mathbf{b}_0(s_0) \in \Gamma_0$, et $s_0 \in I_{0,i}$ où $i \in \{1, \dots, c_0\}$. Comme $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}_b^0(s)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{b}_0(s)) = 0$ pour tout $s \in I_{0,i}$ et comme $\mathbf{b}'_0(s)$ est orthogonal à $\mathbf{n}(\mathbf{b}_0(s))$, il existe

un réel $\alpha(s) \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{b}'_0(s) = \alpha(s)\mathbf{v}_0(\mathbf{b}_0(s))$, ainsi

$$\alpha(s) = \frac{\mathbf{b}'_0(s) \cdot \mathbf{v}_0(\mathbf{b}_0(s))}{|\mathbf{v}_0(\mathbf{b}_0(s))|^2}.$$

Puisque $\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{0}$ sur $\overline{\Omega}$, α est une fonction continue qui ne s'annule pas sur un intervalle ouvert J contenant s_0 . Ainsi, nous pouvons définir le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} \sigma : J \rightarrow I' \subset I_{0,i} \\ t \mapsto \int_{s_0}^t \alpha(\tau) d\tau, \\ \forall t \in I', \psi(t, \mathbf{x}_b^0) := \mathbf{b}_0 \circ \sigma^{-1}(t). \end{cases}$$

Alors ψ satisfait alors l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, \mathbf{x}_b^0) = (\sigma^{-1}(t))' \mathbf{b}'_0(\sigma^{-1}(t)) = \mathbf{v}_0(\mathbf{b}_0(\sigma^{-1}(t))) = \mathbf{v}_0(\psi(t, \mathbf{x}_b^0)), \\ \psi(0, \mathbf{x}_b^0) = \mathbf{b}_0(\sigma^{-1}(0)) = \mathbf{b}_0(s_0) = \mathbf{x}_b^0, \end{cases}$$

ce qui montre, en utilisant l'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz :

$$\forall t \in I', \varphi(t, \mathbf{x}_b^0) = \psi(t, \mathbf{x}_b^0) = \mathbf{b}_0(\sigma(t)) \in \Gamma_0. \quad \blacksquare$$

Le lemme suivant montre qu'une ligne de courant de \mathbf{v}_0 traverse forcément les frontières Γ_- et Γ_+ et ce en un unique point. Ainsi, localement, il y a une unique intersection entre la frontière entrante ou sortante et la ligne de courant.

Lemme A.2.2. *Nous avons la propriété suivante :*

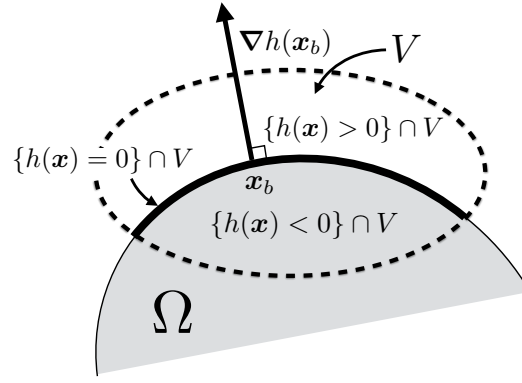
$$\mathbf{x}_b \in \Gamma_{\pm} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 / \forall t \in]0, \varepsilon[, \begin{cases} \varphi(\mp t, \mathbf{x}_b) \in \Omega \\ \varphi(\pm t, \mathbf{x}_b) \in \overline{\Omega}^c. \end{cases}$$

Preuve (du lemme A.2.2). Nous ne donnons la preuve que pour la frontière entrante Γ_- , le cas de la frontière sortante Γ_+ se traitant de manière très similaire. Soit $\mathbf{x}_b \in \Gamma_-$. Utilisons la définition implicite locale de Ω autour de \mathbf{x}_b comme montré sur la figure A.1 : il existe un voisinage V de \mathbf{x}_b dans \mathbb{R}^2 et une fonction $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 tels que :

$$\Omega \cap V = \{\mathbf{x} \in V : h(\mathbf{x}) < 0\}.$$

Au voisinage de \mathbf{x}_b , la frontière de Ω est donnée par $\partial\Omega \cap V = \{\mathbf{x} \in V : h(\mathbf{x}) = 0\}$, ainsi la normale extérieure $\mathbf{n}(\mathbf{x}_b)$ est positivement colinéaire à $\nabla h(\mathbf{x}_b)$. De plus, pour tout point $\mathbf{x}'_b \in V \cap \Gamma_-$ on a $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}'_b) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}'_b) < 0$. Ainsi la fonction $f : t \mapsto h(\varphi(t, \mathbf{x}_b))$ définie au voisinage de 0 vérifie :

$$\begin{aligned} f(0) &= h(\varphi(0, \mathbf{x}_b)) = h(\mathbf{x}_b) = 0 \quad \text{et} \\ f'(0) &= \nabla h(\varphi(0, \mathbf{x}_b)) \cdot \partial_t \varphi(0, \mathbf{x}_b) = \nabla h(\varphi(0, \mathbf{x}_b)) \cdot \mathbf{v}_0(\varphi(0, \mathbf{x}_b)) = (\nabla h \cdot \mathbf{v}_0)(\mathbf{x}_b) < 0. \end{aligned}$$


FIGURE A.1 – Paramétrisation locale de Ω au voisinage de $x_b \in \partial\Omega$

Finalement, en vertu de la continuité de f , il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]0, \varepsilon[$, on ait $\pm f(\pm t) < 0$, i.e. $\pm h(\varphi(\pm t, x_b)) < 0$, ce qui montre que $\varphi(t, x_b) \in \Omega$ et $\varphi(-t, x_b) \in \overline{\Omega}^c$ et termine la preuve. ■

Lemme A.2.3. Soit un sous ensemble K de \mathbb{R}^2 , compact et simplement connexe et soit $x \in K$, on a :

$$\mathcal{O}_x^\pm := \{\varphi(t, x), t \in \mathbb{R}^\pm\} \subset K \quad \Rightarrow \quad \exists x_0 \in K / v_0(x_0) = \mathbf{0}.$$

Comme on a supposé que $\overline{\Omega}$ ne contient aucun point d'annulation de la vitesse v_0 , une conséquence directe de ce résultat est qu'une ligne de courant partant d'un point de $\overline{\Omega}$ sort de $\overline{\Omega}$ en un temps fini.

Preuve (du lemme A.2.3). La preuve repose sur deux principaux résultats, le théorème de Poincaré-Bendixson et le théorème du point fixe de Brouwer. Soit $x \in K$, supposons que $\mathcal{O}_x^+ \subset K$ (le cas de \mathcal{O}_x^- se traite de la même manière). Le théorème de Poincaré-Bendixson stipule que l'ensemble limite $\omega^+(x)$ défini de la façon suivante :

$$\omega^+(x) := \bigcap_{t>0} \overline{\{\varphi(\tau, x), \tau \geq t\}},$$

est soit un point fixe $y \in K$ du flot $\varphi(\cdot, y)$ ou une orbite périodique \mathcal{O}_y .

- Dans le premier cas, il existe $y \in K$ tel que

$$\forall t \geq 0, \varphi(t, y) = y,$$

ce qui implique que $v_0(y) = v_0(\varphi(t, y)) = \partial_t \varphi(t, y) = \mathbf{0}$.

- si $\omega^+(x) = \mathcal{O}_y$ est une orbite périodique, notons B l'ensemble compact qu'elle délimite. Cet ensemble B est simplement connexe et, comme les orbites ne se croisent pas, invariant par le flot $\varphi(t, \cdot)$ pour tout temps $t \in \mathbb{R}^+$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons $t_n := 2^{-n}$ et l'ensemble $K_n := \{x \in B : \varphi(t_n, x) = x\}$. D'après la continuité du flot φ , chaque K_n est fermé. Chaque K_n est également borné et donc compact et de plus non vide en vertu du théorème de point fixe de Brouwer appliqué à la fonction $x \mapsto \varphi(t_n, x) \in B$. Remarquons que de plus $K_{n+1} \subset K_n$ car pour

tout $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{x} \in K_{n+1}$:

$$\varphi(t_n, \mathbf{x}) = \varphi(t_{n+1} + t_{n+1}, \mathbf{x}) = \varphi(t_{n+1}, \varphi(t_{n+1}, \mathbf{x})) = \varphi(t_{n+1}, \mathbf{x}) = \mathbf{x},$$

qui montre que $\mathbf{x} \in K_n$. Finalement, en appliquant le théorème d'intersection de Cantor, qui montre qu'une intersection décroissante de compacts non vide est non vide, on trouve qu'il existe $\mathbf{x}_\infty \in \bigcap_n K_n$ qui vérifie donc :

$$\begin{aligned} v_0(\mathbf{x}_\infty) &= v_0(\varphi(0, \mathbf{x}_\infty)) = \partial_t \varphi(0, \mathbf{x}_\infty) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} t_n^{-1} (\varphi(t_n, \mathbf{x}_\infty) - \varphi(0, \mathbf{x}_\infty)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} t_n^{-1} (\mathbf{x}_\infty - \mathbf{x}_\infty) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Comme v_0 ne s'annule pas sur $\overline{\Omega}$, chaque orbite négative ou positive \mathcal{O}_x^\pm , où $\mathbf{x} \in \Omega$, n'est pas contenue dans $\overline{\Omega}$. ■

A présent, démontrons le résultat principal.

Preuve (du lemme 4.1.7). Cette preuve s'articule en deux étapes. Étant donné $\mathbf{x} \in \Omega$:

1. Nous démontrons l'existence de $t_x \in \mathbb{R}_+^*$ et de $\mathbf{x}_b \in \partial\Omega$ tel que : $\forall \tau \in]0, t_x[, \varphi(\tau, \mathbf{x}_b) \in \Omega$ and $\varphi(t_x, \mathbf{x}_b) = \mathbf{x}$.
2. Puis, nous montrons que si \mathbf{x} n'est pas dans l'ensemble négligeable \mathcal{N} , nous avons $\mathbf{x}_b \in \Gamma_-$.
3. Nous montrons alors l'unicité d'un tel couple t_x, \mathbf{x}_b .
4. Finalement, il restera à montrer qu'il existe une constante $t^* > 0$, indépendante de \mathbf{x} telle que $t_x \leq t^*$.

1. Avec le lemme A.2.3, l'ensemble $T_x^- := \{t \in \mathbb{R}_-^* : \forall \tau \in]t, 0], \varphi(\tau, \mathbf{x}) \in \Omega\}$, qui est non vide, est borné et donc admet un minimum, que l'on note $-t_x < 0$. Définissons alors $\mathbf{x}_b := \varphi(-t_x, \mathbf{x})$. Pour tout $t \in]0, t_x[, \varphi(t, \mathbf{x}_b) = \varphi(t, \varphi(-t_x, \mathbf{x})) = \varphi(t - t_x, \mathbf{x})$ and $t - t_x$ est plus grand que le minimum de T_x^- , c'est pourquoi il existe $t' \in T_x^-$ tel que $t - t_x > t'$. Puis, par définition de l'ensemble T_x^- , $\varphi(t, \mathbf{x}_b) = \varphi(t - t_x, \mathbf{x}) \in \Omega$. Il reste à prouver que $\mathbf{x}_b \in \partial\Omega$. Par l'absurde, on suppose que $\mathbf{x}_b \notin \partial\Omega$. Comme $(\partial\Omega)^c$ est l'union disjointe de deux ouverts : Ω et $\overline{\Omega}^c$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'alternative suivante ait lieu :

- Soit $B(\mathbf{x}_b, \varepsilon) \subset \overline{\Omega}^c$. Par continuité de l'application $t \mapsto \varphi(t, \mathbf{x})$ and as $\varphi(-t_x, \mathbf{x}) = \mathbf{x}_b$, il existe un voisinage $(-t_x - \eta, -t_x + \eta)$ de $-t_x$, où $\eta > 0$, tel que pour tout $t \in (-t_x - \eta, -t_x + \eta)$, $\varphi(t, \mathbf{x}_b) \in \overline{\Omega}^c$, ce qui contredit le fait que $-t_x$ soit le minimum de T_x^- .
- Ou alors, $B(\vec{b}_x, \varepsilon) \subset \Omega$. De la même façon, il est facile de montrer qu'il y a contradiction avec le fait que $-t_x$ est le minimum de T_x^- .

2. D'après le lemme A.2.2, si \mathbf{x}_b appartient à Γ_+ , il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]0, \varepsilon[, \varphi(t, \mathbf{x}_b) \notin \Omega$, ce qui signifie que $\varphi(t - t_x, \mathbf{x}) \notin \Omega$ et contredit que $-t_x$ soit le minimum de T_x^- . D'après le lemme A.2.1, si $\mathbf{x}_b \in \Gamma_0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \varphi(t, \mathbf{x}_b) \in \Gamma_0$, donc $\varphi(t - t_x, \mathbf{x}_b) \notin \Omega$, ce qui contredit de nouveau le fait que $-t_x$ soit le minimum de T_x^- .

Ainsi, soit $\mathbf{x}_b \in \Gamma_-$ ou alors $\mathbf{x}_b \in \overline{\Gamma_0} \setminus \Gamma_0$. Dans le second cas, il existe $\bar{s} \in \overline{\Gamma_0} \setminus \Gamma_0$ tel que $\mathbf{b}_0(\bar{s}) = \mathbf{x}_b$. Ainsi,

$$\mathbf{x} \in \mathcal{N} := \bigcup_{\bar{s} \in \overline{\Gamma_0} \setminus \Gamma_0} \{ \varphi(t, \mathbf{b}_0(\bar{s})), t \in \mathbb{R} \},$$

où \mathcal{N} est négligeable pour la mesure de Lebesgue car $\overline{\Gamma_0} \setminus \Gamma_0$ est supposé fini.

3. Considérons le couple $(t'_x, \mathbf{x}'_b) \in \mathbb{R}_+^* \times \partial\Omega$ tel que pour tout $\tau' \in (0, t'_x)$ on a $\varphi(\tau', \mathbf{x}'_b) \in \Omega$ et $\varphi(t_x, \mathbf{x}_b) = \varphi(t'_x, \mathbf{x}'_b)$. Si $t'_x < t_x$, alors en composant par $\varphi(-t'_x, \cdot)$, on obtient

$$\begin{aligned} \varphi(-t'_x, \varphi(t_x, \mathbf{x}_b)) &= \varphi(-t'_x, \varphi(t'_x, \mathbf{x}'_b)) &\Rightarrow & \varphi(t_x - t'_x, \mathbf{x}_b) = \varphi(0, \mathbf{x}'_b), \\ & &\Rightarrow & \varphi(t_x - t'_x, \mathbf{x}_b) = \mathbf{x}'_b. \end{aligned}$$

Mais $t_x - t'_x > 0$, donc $\varphi(t_x - t'_x, \mathbf{x}_b) \in \Omega$ ce qui contredit que $\mathbf{x}_b \notin \Omega$. Puis, $t_x \leq t'_x$, et par symétrie du problème, $t'_x \leq t_x$, donc $t'_x = t_x$. Finalement, également par composition par $\varphi(-t_x, \cdot)$, on obtient $\varphi(0, \mathbf{x}_b) = \varphi(0, \mathbf{x}'_b)$, i.e. $\mathbf{x}_b = \mathbf{x}'_b$.

4. En appliquant le lemme A.2.3, on peut définir pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$ le premier temps de sortie de l'ensemble $\overline{\Omega}$ part :

$$\bar{\tau}(\mathbf{x}) := \sup \{ t \in \mathbb{R}_+ : \forall \tau \in [0, t], \varphi(\tau, \mathbf{x}) \in \overline{\Omega} \} < +\infty.$$

On souhaite donc montrer que

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \bar{\tau}(\mathbf{x}) < +\infty.$$

Par l'absurde, on suppose que $\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \bar{\tau}(\mathbf{x}) = +\infty$ on considère la suite $(\mathbf{x}_n) \in \Omega$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\tau}(\mathbf{x}_n) = +\infty$. Comme $\overline{\Omega}$ est compact, à extraction près, on suppose que $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x} \in \overline{\Omega}$. Il existe alors une suite croissante (t_n) telle que :

$$t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, t_n], \varphi(t, \mathbf{x}_n) \in \overline{\Omega}.$$

On en déduit que pour tout $m \geq n$, on a $\varphi(t_n, \mathbf{x}_m) \in \overline{\Omega}$, puis par passage à la limite $m \rightarrow +\infty$ et en utilisant la continuité du flot φ , on conclut que $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(t_n, \mathbf{x}) \in \overline{\Omega}$. Ceci montre que l'orbite positive partant de $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ est contenu dans $\overline{\Omega}$ ce qui est interdit par le lemme A.2.3. ■

A.3 Borner le domaine calcul avec des « Perfectly Matched Layers » ?

A.3.1 Dans le cas « domaine-remplissant » avec PML

Cette annexe expose notre tentative d'analyse des équations de Goldstein en présence de PML. Cependant, la condition obtenue n'est pas satisfaisante car elle introduit de nouvelles conditions sur les paramètres des PML se mêlant aux conditions plus physiques concernant l'écoulement porteur.

Géométrie et notations

La géométrie que l'on considère est présentée sur la figure A.2. Nous nous plaçons en 2D et le domaine de calcul est toujours noté Ω , que l'on considérera rectangulaire. Nous réservons des bandes de largeurs $L_x > 0$ et $L_y > 0$ pour servir de PML autour du domaine d'intérêt Ω_i . On note la découpe du domaine de la façon suivante (aux frontières près), entre domaine d'intérêt Ω_i et zone PML, Ω_∞ :

$$\Omega = \Omega_i \cup \Omega_\infty,$$

où,

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < R_x + L_x \text{ et } |y| < R_y + L_y\}, \\ \Omega_i &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < R_x \text{ et } |y| < R_y\}, \quad \Omega_\infty = \Omega \setminus \Omega_i. \end{aligned}$$

Puis la zone PML est elle-même découpée en :

$$\Omega_\infty = \Omega_\infty^0 \cup \Omega_\infty^+ \cup \Omega_\infty^-, \quad \text{où} \quad \begin{cases} \Omega_\infty^\pm = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : R_x < \pm x < R_x + L_x \text{ et } |y| < R_y\} \\ \Omega_\infty^0 = \Omega_\infty \setminus (\Omega_\infty^+ \cup \Omega_\infty^-). \end{cases}$$

Ω_∞^+ est le domaine en aval de la zone « diffractante », zone où l'écoulement est plus complexe que seulement cisailé. Les PML sont associées à un nombre complexe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

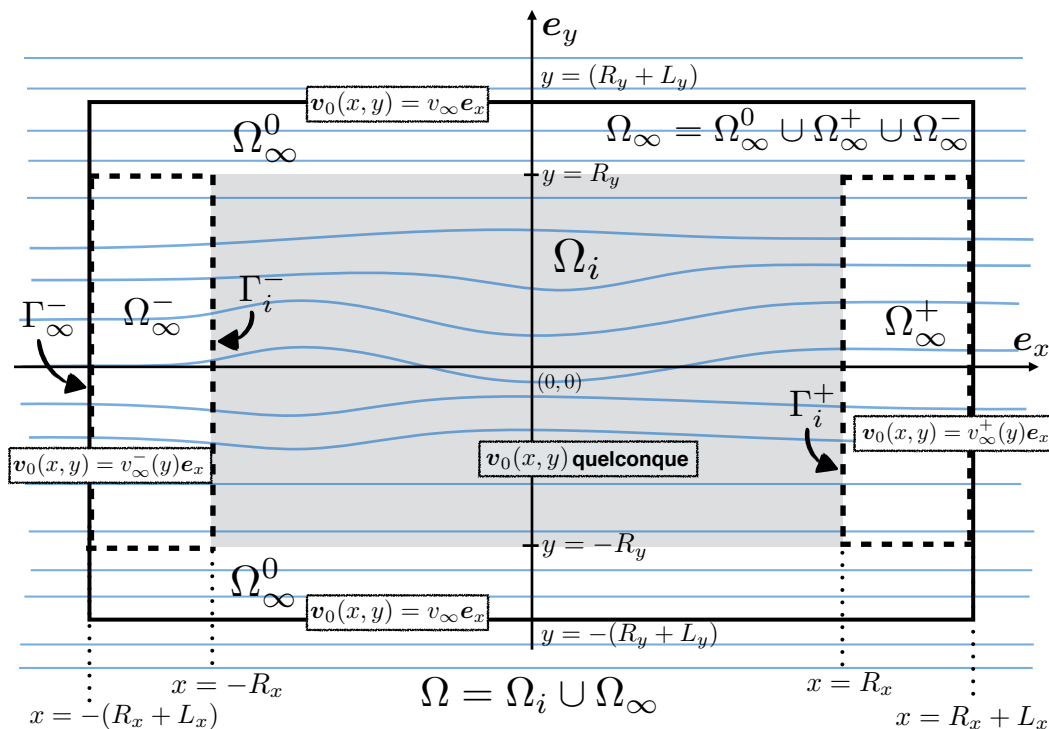


FIGURE A.2 – Description du domaine pour l'étude avec PML

$$\Re(\alpha) > 0 \quad \text{et} \quad \text{Im}(\alpha) < 0,$$

et à la fonction vectorielle $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y)$ définie par

$$\alpha_{x,y} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{x} = (x, y) \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < R_x \quad (\text{resp. } |y| < R_y \text{ pour } \alpha_y), \\ \alpha & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Définissons quelques notations pour les frontières qui nous seront utiles par la suite :

$$\begin{aligned} \Gamma_\infty^- &:= \{(-R_x - L_x, y) : |y| < R_y + L_y\}, \\ \Gamma_i^\pm &:= \{(\pm R_x, y) : |y| < R_y\}. \end{aligned}$$

Le domaine de calcul Ω_i est choisi tel que l'écoulement hors de Ω_i en renvoie aucune onde dans lui-même. Ainsi, l'écoulement porteur $(\rho_0, p_0, \mathbf{v}_0)$ est cisailé à l'extérieur de Ω_i et de plus uniforme au dessus et en dessous de ce domaine, pour $|y| > R_y$. Plus précisément, on postule que dans Ω_∞^0 , l'écoulement est uniforme :

$$\forall (x, y) \in \Omega_\infty^0, \quad \mathbf{v}_0(x, y) = v_\infty \mathbf{e}_x,$$

puis cisailé dans Ω_∞^\pm :

$$\forall (x, y) \in \Omega_\infty^\pm, \quad \mathbf{v}_0(x, y) = v_\infty^\pm(y) \mathbf{e}_x.$$

Les équations d'Euler stationnaires imposent alors que la densité et la pression de l'écoulement porteur dans la zone extérieure Ω_∞ sont constantes :

$$\forall (x, y) \in \Omega_\infty, \quad \rho_0(x, y) = \rho_\infty \quad \text{et} \quad p_\infty(x, y) = p_\infty.$$

Nous aurons également besoin des notations suivantes, donnant le minimum et le maximum de la vitesse dans la partie PML, que nous supposons strictement positifs :

$$\underline{v}_\infty^\pm = \inf_{|y| < R_y} v_\infty^\pm(y) > 0 \quad \text{et} \quad \bar{v}_\infty^\pm = \sup_{|y| < R_y} v_\infty^\pm(y) > 0. \quad (\text{A.5})$$

Remarque A.3.1. *Supposer que la vitesse de l'écoulement à l'infini ne s'annule pas peut paraître surprenant dans la mesure où les équations se simplifient grandement dans ce cas. Néanmoins, les estimations obtenues lors de la résolution de l'équation de transport passent mal à la limite lorsque la vitesse de l'écoulement tend vers zéro. Le cas de l'écoulement uniforme à l'infini, et en particulier nul, fera l'objet de discussions dans la section suivante.*

Les équations de Goldstein s'écrivent avec PML sous la forme

$$\begin{aligned} \rho_0 D_{\omega, \alpha} (c_0^{-2} D_{\omega, \alpha} \varphi) - \nabla_\alpha \cdot (\rho_0 \nabla_\alpha \varphi + \rho_0 \boldsymbol{\xi}) &= f, \\ D_{\omega, \alpha} \boldsymbol{\xi} + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 &= \nabla_\alpha \varphi \times \boldsymbol{\omega}_0, \end{aligned}$$

où les opérateurs ∇_α et $D_{\omega, \alpha}$ sont des versions avec PML des opérateurs ∇ et D_ω , définis par

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha &:= \begin{pmatrix} \alpha_x \partial_x \\ \alpha_y \partial_y \end{pmatrix}, \\ D_{\omega, \alpha} &:= -i\omega + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla_\alpha. \end{aligned}$$

Les PML sont conçues pour absorber et faire tendre vers zéro φ . Par conséquent, pour des largeurs de bandes PML, L_x et L_y , suffisamment grandes, on fait l'approximation d'imposer $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$. Pour ce qui est de ξ , les PML jouent également le rôle d'absorption, cependant, seule une condition sur le bord entrant $\partial\Omega^- = \Gamma_\infty^-$ est nécessaire pour ξ . Même si l'écoulement est cisailé en amont du domaine, on fait l'approximation que $\xi = \mathbf{0}$ sur le bord entrant Γ_∞^- . On obtient ainsi les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned}\varphi &= 0, & \text{sur } \partial\Omega, \\ \xi &= \mathbf{0}, & \text{sur } \Gamma_\infty^- = \Gamma_\infty.\end{aligned}$$

Finalement, le problème de Goldstein avec PML s'écrit :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Pour } f \in L^2(\Omega_i), \text{ trouver } \varphi \in H_0^1(\Omega, \rho_0), \xi \in H^-(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0), \text{ tels que :} \\ \rho_0 D_{\omega, \alpha} (c_0^{-2} D_{\omega, \alpha} \varphi) - \nabla_\alpha \cdot (\rho_0 \nabla_\alpha \varphi + \rho_0 \xi) = f, \quad \text{dans } \Omega \\ D_{\omega, \alpha} \xi + (\xi \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = \nabla_\alpha \varphi \times \omega_0, \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(A.6a)} \\ \text{(A.6b)} \end{array}$$

Estimation

Établissons quelques lemmes donnant des estimations nécessaires pour montrer le caractère Fredholm des équations de Goldstein avec PML.

Le lemme suivant traduit le fait que ξ est créé dès la zone amont Ω_∞^- en interaction avec l'onde φ , puis est convecté et amplifié/diminué dans Ω_i et Ω_∞^+ .

Lemme A.3.2. *Soit $(\varphi, \xi) \in H^1(\Omega, \rho_0) \times H^-(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0)$ satisfaisant l'équation de transport de Goldstein (A.6b), alors*

$$\xi = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_\infty^0 = \Omega \setminus (\Omega_i \cup \Omega_\infty^+ \cup \Omega_\infty^-)$$

Preuve. Considérons une solution (φ, ξ) des équations (A.6). Remarquons dans un premier temps que dans Ω_∞^0 , la vitesse \mathbf{v}_0 est uniforme $\mathbf{v}_0(x, y) = v_\infty \mathbf{e}_x$, l'écoulement y est donc irrotationnel $\omega_0(x, y) = \mathbf{0}$ et à gradient nul, donc $(\xi \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = 0$. De plus, dans Ω_∞^0 , $\alpha_x(x, y) = 1$. Ainsi, l'équation de transport de Goldstein (A.6b) se découple de l'équation d'onde (A.6a) et s'écrit :

$$-i\omega \xi + v_\infty \partial_x \xi = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_\infty^0. \quad \text{(A.7)}$$

Comme $\mathbf{v}_0 = v_\infty \mathbf{e}_x$ est domaine-remplissant dans Ω_∞^0 (quitte à le découper en deux domaines que sont ses parties connexes), l'équation (A.7) est bien posée dans $H^-(\Omega_\infty^0)$. Or, ξ appartient bien à $H^-(\Omega_\infty^0)$ car $\xi \in H^-(\Omega)$ et que $\partial(\Omega_\infty^0)^- \subset \partial\Omega^-$. Ceci permet de conclure que $\xi = \mathbf{0}$ est l'unique solution de (A.7). ■

Le lemme d'estimation de trace suivant nous sera également très utile :

Lemme A.3.3. *Soit un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ tel que les frontières ∂D^- et ∂D^+ sont séparées, on a pour tout $\xi \in H(D, \mathbf{v}_0, \rho_0)$, l'estimation suivante*

$$\left(\inf_{\partial D^+} |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| \right) \|\xi\|_{L^2(\partial D^+, \rho_0)}^2 \leq 2 \|\xi\|_{H(\Omega_i)}^2 + \left(\sup_{\partial D^-} |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| \right) \|\xi\|_{L^2(\partial D^-, \rho_0)}^2,$$

Preuve. Étant donné $\xi \in H(D, \mathbf{v}_0, \rho_0)$, on applique la formule de Green (3.16) et on obtient :

$$\begin{aligned} 2\Re\left(\int_D (\rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \xi \cdot \bar{\xi}\right) &= \int_{\partial D^+ \cup \partial D^-} |\xi|^2 (\rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma \\ &\geq \left(\inf_{\partial D^+} |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|\right) \|\xi\|_{L^2(\partial D^+, \rho_0)}^2 - \left(\sup_{\partial D^-} |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|\right) \|\xi\|_{L^2(\partial D^-, \rho_0)}^2 \end{aligned}$$

De là, on déduit par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned} \left(\inf_{\partial D^+} |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|\right) \|\xi\|_{L^2(\partial D^+, \rho_0)}^2 &\leq 2\Re\left(\int_D (\rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \xi \cdot \bar{\xi}\right) + \left(\sup_{\partial D^-} |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|\right) \|\xi\|_{L^2(\partial D^-, \rho_0)}^2 \\ &\leq \|(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \xi\|_{L^2(D, \rho_0)} \|\xi\|_{L^2(D, \rho_0)} + \left(\sup_{\partial D^-} |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|\right) \|\xi\|_{L^2(\partial D^-, \rho_0)}^2 \\ &\leq \|\xi\|_{H(D)}^2 + \left(\sup_{\partial D^-} |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|\right) \|\xi\|_{L^2(\partial D^-, \rho_0)}^2 \end{aligned}$$

ce qui montre l'estimation voulue. ■

Le lemme A.3.4 nous permettra d'obtenir une estimation de ξ dans les zones PML où il n'est pas nul.

Lemme A.3.4. Soit $\varphi \in H^1(\Omega_\infty^\pm, \rho_0)$. Si $\xi \in H(\Omega_\infty^\pm, \mathbf{v}_0, \rho_0)$ satisfait l'équation

$$D_{\omega, \alpha} \xi + (\xi \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = \nabla_\alpha \varphi \times \omega_0 \quad \text{dans } \Omega_\infty^\pm,$$

alors on a les estimations suivantes

$$\|\xi\|_{L^2(\Omega_\infty^\pm, \rho_0)} \leq C_i^\pm \|\xi\|_{L^2(\partial(\Omega_\infty^\pm)^-, \rho_0)} + C_\infty^\pm \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega_\infty^\pm, \rho_0)},$$

où, avec les notations $\underline{v}_\infty^\pm = \inf_{|y| < R_y} v_\infty^\pm(y)$, $\beta := -2 \frac{\text{Im}(\alpha)}{|\alpha|^2} > 0$ et $\Upsilon_\infty^\pm := \sup_{|y| < R_y} \left| \frac{(v_\infty^\pm)'(y)}{v_\infty^\pm(y)} \right|$,

$$\begin{aligned} C_i^\pm &:= 2 \sqrt{\frac{1 - e^{-\beta \frac{\omega}{\underline{v}_\infty^\pm} L_x}}{\beta \frac{\omega}{\underline{v}_\infty^\pm}} + \left| \frac{L_x \Upsilon_\infty^\pm}{\alpha} \right|^2}, \\ C_\infty^\pm &:= 2 \frac{L_x \Upsilon_\infty^\pm}{|\alpha|} \sqrt{1 + \frac{|\alpha|^2}{2} + \frac{(L_x \Upsilon_\infty^\pm)^2}{3}}. \end{aligned}$$

Remarque A.3.5. • Lorsque l'écoulement est uniforme à l'extérieur du domaine d'intérêt Ω_i , i.e. pour $v_\infty^\pm = v_\infty$, alors $(v_\infty^\pm)' = 0$, donc $\Upsilon_\infty^\pm = 0$ et ainsi

$$\begin{aligned} C_i^\pm &= 2 \sqrt{\frac{1 - e^{-\beta \frac{\omega}{\underline{v}_\infty^\pm} L_x}}{\beta \frac{\omega}{\underline{v}_\infty^\pm}}} \xrightarrow{L_x \rightarrow +\infty} 2 \sqrt{\frac{\underline{v}_\infty^\pm}{\beta \omega}}, \\ C_\infty &= 0. \end{aligned}$$

• Le fait de considérer un écoulement cisailé à l'infini, $(v_\infty^\pm)'(y) \neq 0$, entraîne des problèmes

lorsque la longueur L_x des PML tend vers l'infini, en effet :

$$C_i^\pm \xrightarrow{L_x \rightarrow +\infty} +\infty,$$

$$C_\infty^\pm \xrightarrow{L_x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

- En particulier, nous ne sommes pas capable de définir de solutions aux équations, même en avec l'absorption des PML, en domaine infini en présence d'un écoulement cisailé. Cependant, un tel écoulement, bien que solution des équations d'Euler stationnaires, n'est pas physiquement acceptable car la viscosité ne pourrait plus être négligée sur de telles échelles.

Preuve (du lemme A.3.4). Les cas des domaines Ω_∞^+ et Ω_∞^- étant identiques à une translation près en changeant v_∞^+ en v_∞^- , nous donnons la preuve arbitrairement pour le domaine Ω_∞^+ .

A $\varphi \in H^1(\Omega_\infty^+, \rho_0)$ fixé, la solution $\xi = (\xi_x, \xi_y)$ de l'équation s'exprime de façon explicite en fonction de sa trace sur le bord $\xi(R, y)$, $|y| < R_y$:

$$\xi_y(x, y) = \xi_y(R_x, y) e^{i \frac{\omega}{\alpha v_\infty^+(y)} (x-R_x)} + \frac{(v_\infty^+)'(y)}{v_\infty^+(y)} \int_{R_x}^x e^{i \frac{\omega}{\alpha v_\infty^+(y)} (x-s)} \partial_x \varphi(s, y) ds,$$

$$\xi_x(x, y) = \xi_x(R_x, y) e^{i \frac{\omega}{\alpha v_\infty^+(y)} (x-R_x)} - \frac{1}{\alpha} \frac{(v_\infty^+)'(y)}{v_\infty^+(y)} (x-R_x) \xi_y(R_x, y) e^{i \frac{\omega}{\alpha v_\infty^+(y)} (x-R_x)}$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \left(\frac{(v_\infty^+)'(y)}{v_\infty^+(y)} \right)^2 \int_{R_x}^x (x-s) e^{i \frac{\omega}{\alpha v_\infty^+(y)} (x-s)} \partial_x \varphi(s, y) ds$$

$$- \frac{1}{\alpha} \frac{(v_\infty^+)'(y)}{v_\infty^+(y)} \int_{R_x}^x e^{i \frac{\omega}{\alpha v_\infty^+(y)} (x-s)} \partial_y \varphi(s, y) ds.$$

Commençons par majorer ξ_y . En utilisant que $\text{Im}(\alpha) < 0$, on a la majoration brutale suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \left| e^{i \frac{\omega}{\alpha v_\infty^+(y)} x} \right| = e^{\text{Re} \left(i \frac{\omega}{\alpha v_\infty^+(y)} x \right)} = e^{\frac{\text{Im}(\alpha)}{|\alpha|^2} \frac{\omega}{v_\infty^+(y)} x} \leq 1,$$

qui donne,

$$\left| \xi_y(x, y) \right| \leq \left| \xi_y(R_x, y) \right| e^{\frac{\text{Im}(\alpha)}{|\alpha|^2} \frac{\omega}{v_\infty^+(y)} (x-R_x)} + \left| \frac{(v_\infty^+)'(y)}{v_\infty^+(y)} \right| \int_{R_x}^x \left| \partial_x \varphi(s, y) \right| ds.$$

Puis, élevons au carré et intégrons sur le domaine Ω_∞^+ , en notant $\underline{v}_\infty^+ = \inf_{|y| < R_y} v_\infty^+(y)$, $\beta :=$

$-2\text{Im}(\alpha)/|\alpha|^2$, et $\Upsilon_\infty^\pm := \sup_{|y| < R_y} \left| \frac{(v_\infty^+)'(y)}{v_\infty^+(y)} \right|$,

$$\begin{aligned} \int_{-R_y}^{R_y} \int_{R_x}^{R_x+L_x} |\xi_y(x, y)|^2 dx dy &\leq 2 \int_{-R_y}^{R_y} \int_{R_x}^{R_x+L_x} e^{-\beta \frac{\omega}{v_\infty^+}(x-R_x)} |\xi_y(R_x, y)|^2 dx dy \\ &\quad + 2 \left(\frac{(v_\infty^+)'(y)}{v_\infty^+(y)} \right)^2 \int_{-R_y}^{R_y} \int_{R_x}^{R_x+L_x} \left(\int_{R_x}^x |\partial_x \varphi(s, y)| ds \right)^2 dx dy \\ &\leq 2 \left(\int_{R_x}^{R_x+L_x} e^{-\beta \frac{\omega}{v_\infty^+}(x-R_x)} dx \right) \|\xi_y\|_{L^2(\Gamma_i^+)}^2 \\ &\quad + 2L_x (\Upsilon_\infty^\pm)^2 \int_{-R_y}^{R_y} \left(\int_{R_x}^{R_x+L_x} |\partial_x \varphi(s, y)| ds \right)^2 dy \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\|\xi_y\|_{L^2(\Omega_\infty^+)}^2 \leq 2 \frac{1 - e^{-\beta \frac{\omega}{v_\infty^+} L_x}}{\beta \frac{\omega}{v_\infty^+}} \|\xi_y\|_{L^2(\Gamma_i^+)}^2 + 2 (L_x \Upsilon_\infty^\pm)^2 \|\partial_x \varphi\|_{L^2(\Omega_\infty^+)}^2. \quad (\text{A.8})$$

Passons à la majoration de ξ_x , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} |\xi_x(x, y)|^2 &\leq |\xi_x(R_x, y)|^2 e^{-\beta \frac{\omega}{v_\infty^+}(x-R_x)} + \frac{(\Upsilon_\infty^\pm)^2}{|\alpha|^2} (x-R_x)^2 |\xi_y(R_x, y)|^2 e^{-\beta \frac{\omega}{v_\infty^+}(x-R_x)} \\ &\quad + \frac{(\Upsilon_\infty^\pm)^4}{|\alpha|^2} \left(\int_{R_x}^x (x-s) |\partial_x \varphi(s, y)| ds \right)^2 + \frac{(\Upsilon_\infty^\pm)^2}{|\alpha|^2} \left(\int_{R_x}^x |\partial_y \varphi(s, y)| ds \right)^2 \\ &\leq |\xi_x(R_x, y)|^2 e^{-\beta \frac{\omega}{v_\infty^+}(x-R_x)} + \left| \frac{L_x \Upsilon_\infty^\pm}{\alpha} \right|^2 |\xi_y(R_x, y)|^2 e^{-\beta \frac{\omega}{v_\infty^+}(x-R_x)} \\ &\quad + \frac{(\Upsilon_\infty^\pm)^4 L_x^3}{|\alpha|^2} \int_{R_x}^{R_x+L_x} |\partial_x \varphi(s, y)|^2 ds + \frac{(\Upsilon_\infty^\pm)^2}{|\alpha|^2} L_x \int_{R_x}^{R_x+L_x} |\partial_y \varphi(s, y)|^2 ds, \end{aligned}$$

ainsi, en intégrant sur Ω_∞^+ , il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_{-R_y}^{R_y} \int_{R_x}^{R_x+L_x} |\xi_x(x, y)|^2 dx dy &\leq \int_{-R_y}^{R_y} \int_{R_x}^{R_x+L_x} e^{-\beta \frac{\omega}{v_\infty^+}(x-R_x)} |\xi_x(R_x, y)|^2 dx dy \\ &\quad + \left| \frac{L_x \Upsilon_\infty^\pm}{\alpha} \right|^2 \int_{-R_y}^{R_y} \int_{R_x}^{R_x+L_x} e^{-\beta \frac{\omega}{v_\infty^+}(x-R_x)} |\xi_y(R_x, y)|^2 dx dy \\ &\quad + \frac{(L_x \Upsilon_\infty^\pm)^4}{3|\alpha|^2} \int_{-R_y}^{R_y} \int_{R_x}^{R_x+L_x} |\partial_x \varphi(x, y)|^2 dx dy \\ &\quad + \left| \frac{L_x \Upsilon_\infty^\pm}{\alpha} \right|^2 \int_{-R_y}^{R_y} \int_{R_x}^{R_x+L_x} |\partial_y \varphi(x, y)|^2 dx dy \\ &\leq \frac{1 - e^{-\beta \frac{\omega}{v_\infty^+} L_x}}{\beta \frac{\omega}{v_\infty^+}} \|\xi_x\|_{L^2(\Gamma_i^+)}^2 + \left| \frac{L_x \Upsilon_\infty^\pm}{\alpha} \right|^2 \|\xi_y\|_{L^2(\Gamma_i^+)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{(L_x \Upsilon_\infty^\pm)^4}{|\alpha|^2} \|\partial_x \varphi\|_{L^2(\Omega_\infty^+)}^2 + \left| \frac{L_x \Upsilon_\infty^\pm}{\alpha} \right|^2 \|\partial_y \varphi\|_{L^2(\Omega_\infty^+)}^2, \end{aligned}$$

ainsi,

$$\begin{aligned} \|\xi_x\|_{L^2(\Omega_i)}^2 &\leq 4 \frac{1 - e^{-\beta \frac{\omega}{v_\infty^+} L_x}}{\beta \frac{\omega}{v_\infty^+}} \|\xi_x\|_{L^2(\Gamma_i^+)}^2 + 4 \left| \frac{L_x \Upsilon_\infty^\pm}{\alpha} \right|^2 \|\xi_y\|_{L^2(\Gamma_i^+)}^2 \\ &\quad + \frac{4|\alpha|^2}{3} \left| \frac{L_x \Upsilon_\infty^\pm}{\alpha} \right|^4 \|\partial_x \varphi\|_{L^2(\Omega_\infty^+)}^2 + 4 \left| \frac{L_x \Upsilon_\infty^\pm}{\alpha} \right|^2 \|\partial_y \varphi\|_{L^2(\Omega_\infty^+)}^2. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Puis en combinant (A.8) est (A.9) obtenues, on a

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{L^2(\Omega_\infty^+)^2}^2 &\leq 4 \left(\frac{1 - e^{-\beta \frac{\omega}{v_\infty^+} L_x}}{\beta \frac{\omega}{v_\infty^+}} + \left| \frac{L_x \Upsilon_\infty^\pm}{\alpha} \right|^2 \right) \|\xi\|_{L^2(\Gamma_i^+)}^2 \\ &\quad + 4 \left| \frac{L_x \Upsilon_\infty^\pm}{\alpha} \right|^2 \left(1 + \frac{|\alpha|^2}{2} + \frac{(L_x \Upsilon_\infty^\pm)^2}{3} \right) \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega_\infty^+)^2}^2, \end{aligned}$$

où on a bien $\partial(\Omega_\infty^+)^- = \Gamma_i^+$. ■

Proposition A.3.6. *Le problème du transport harmonique avec PML suivant*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } \mathbf{g} \in L^2(\Omega, \rho_0)^2, \text{ trouver } \xi \in H^-(\Omega, \mathbf{v}_0, \rho_0) \text{ tel que :} \\ D_{\omega, \alpha} \xi + (\xi \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = \mathbf{g} \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (\text{A.10})$$

$$(\text{A.11})$$

est bien posé.

Preuve. Il suffit de diviser l'équation par α_x , et ainsi appliquer les résultats sur l'équation de transport harmonique au domaine Ω et à la vitesse

$$\tilde{\mathbf{v}}_0 = \begin{pmatrix} v_{0,x} \\ \frac{\alpha_y}{\alpha_x} v_{0,y} \end{pmatrix},$$

qui est bien domaine remplissante car \mathbf{v}_0 l'est et a des composantes de classe $C^1(\overline{\Omega})$ car $\tilde{v}_{0,y}$ s'annule sur $\Omega \setminus \Omega_i$ où α_y/α_x possède des discontinuités. ■

On peut alors définir l'opérateur qui résout l'équation de transport du problème de Goldstein posé avec PML comme suit :

Définition A.3.7. *On définit l'opérateur de résolution de l'équation de transport avec PML comme un opérateur \mathcal{A} de $L^2(\Omega, \rho_0)$ dans $L^2(\Omega, \rho_0)^2$, de domaine $D(\mathcal{A}) := H_0^1(\Omega, \rho_0)$, qui a $\varphi \in H_0^1(\Omega, \rho_0)$ associe $\xi := \mathcal{A}\varphi$ solution de*

$$\begin{aligned} D_{\omega, \alpha} \xi + (\xi \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 &= \nabla_\alpha \varphi \times \omega_0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \xi &= \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_\infty^-. \end{aligned}$$

Après avoir défini cet opérateur, le lemme suivant donne une estimation de sa constante de continuité, qui nous servira à l'étude du problème couplé.

Lemme A.3.8. *L'opérateur \mathcal{A} défini en A.3.7 est un opérateur borné, ce qui est équivalent dans $H_0^1(\Omega, \rho_0)$ à l'existence d'une constante $C_\Omega > 0$ telle que*

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega, \rho_0), \quad \|\mathcal{A}\varphi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^2} \leq C_\Omega \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^2},$$

avec

$$C_{\Omega} := \left(C_{\Omega_{\infty}^{-}}^2 + C_{\Omega_i}^2 + C_{\Omega_{\infty}^{+}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

où

$$C(\Omega_{\infty}^{-}) := C_{\infty}^{-} + C_b K + \frac{C_i^{+} K}{\underline{v}_{\infty}^{+}} (2C_b + \bar{v}_{\infty}^{-})$$

$$C(\Omega_i) := \left(1 + \frac{C_i^{+}}{\underline{v}_{\infty}^{+}} \right) C_{fil}$$

$$C(\Omega_{\infty}^{+}) := C_{\infty}^{+},$$

et

$$K := \sqrt{\frac{2}{\underline{v}_{\infty}^{-}}} \left(\sqrt{\max(|\alpha|^{-1}, |\alpha|) \sup |(v_{\infty}^{-})'|} + C_{\infty}^{-} \left(1 + \frac{\omega + \sup |(v_{\infty}^{-})'|}{|\alpha|} \right) \right).$$

Remarque A.3.9. Comme dans la preuve de la proposition A.3.6, en divisant l'équation de transport harmonique par α_x , on peut se ramener à un écoulement domaine remplissant. Le lemme A.3.8 peut alors être déduit de l'estimation 4.1.14 obtenue lors de l'étude de l'opérateur de transport harmonique. Néanmoins, nous voulons avoir une expression plus précise de la constante et en particulier de ses dépendances en fonction des paramètres des PML. Cela motive la preuve suivante.

Preuve. Soit $\varphi \in H_0^1(\Omega, \rho_0)$, notons $\xi = \mathcal{A}\varphi$. Nous allons estimer tous les termes de la décomposition suivante

$$\|\xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)}^2 = \|\xi\|_{L^2(\Omega_{\infty}^0, \rho_0)}^2 + \|\xi\|_{L^2(\Omega_{\infty}^+, \rho_0)}^2 + \|\xi\|_{L^2(\Omega_{\infty}^-, \rho_0)}^2 + \|\xi\|_{L^2(\Omega_i, \rho_0)}^2.$$

En appliquant le lemme A.3.2, le premier terme est en fait nul. Ensuite, nous traitons les termes restants en s'appuyant à chaque fois sur les estimations obtenues sur les domaines en amonts de l'écoulement.

- Estimation de $\|\xi\|_{L^2(\Omega_{\infty}^-, \rho_0)}^2$. Le lemme A.3.4 donne la première estimation recherchée, en prenant en compte la condition aux limites qui impose $\xi = \mathbf{0}$ sur $\partial(\Omega_{\infty}^{-})^-$, on trouve :

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{L^2(\Omega_{\infty}^-, \rho_0)}^2 &\leq C_i^{-} \underbrace{\|\xi\|_{L^2(\partial(\Omega_{\infty}^{-})^-, \rho_0)}^2}_{=0} + C_{\infty}^{-} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_{\infty}^-, \rho_0)}^2, \\ &\leq C_{\infty}^{-} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_{\infty}^-, \rho_0)}^2. \end{aligned}$$

- Estimation de $\|\xi\|_{L^2(\Omega_i, \rho_0)}^2$. Ensuite, nous majorons la norme de ξ sur le domaine intérieur Ω_i de façon beaucoup moins explicite en utilisant l'estimation a priori pour un écoulement domaine remplissant :

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{L^2(\Omega_i, \rho_0)}^2 &\leq C_{fil} \|\omega_0 \times \nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_i, \rho_0)}^2 + C_b \|\xi\|_{L^2(\Gamma_i^-, \rho_0)}^2 \\ &\leq C_{fil} \|\omega_0\|_{L^{\infty}(\Omega_i)} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_i, \rho_0)}^2 + C_b \|\xi\|_{L^2(\Gamma_i^-, \rho_0)}^2. \end{aligned}$$

Il convient alors d'estimer ξ sur le bord $\Gamma_i^- = \partial(\Omega_{\infty}^-)^+$ en utilisant le lemme A.3.3

appliqué au domaine $D = \Omega_{\infty}^{-}$ pour lequel

$$\inf_{\partial(\Omega_{\infty}^{-})^{-}} |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| = \underline{v}_{\infty}^{-} \quad \text{et} \quad \sup_{\partial(\Omega_{\infty}^{-})^{+}} |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| = \overline{v}_{\infty}^{-}.$$

On trouve donc l'estimation suivante, qui se simplifie en prenant en compte la condition aux limites $\xi = \mathbf{0}$ sur $\partial(\Omega_{\infty}^{-})^{-} \subset \Gamma_{\infty}^{-}$

$$\|\xi\|_{L^2(\Gamma_i^{-}, \rho_0)}^2 \leq \frac{2}{\underline{v}_{\infty}^{-}} \|\xi\|_{H(\Omega_{\infty}^{-})}^2 + \underbrace{\frac{\overline{v}_{\infty}^{-}}{\underline{v}_{\infty}^{-}} \|\xi\|_{L^2(\partial(\Omega_{\infty}^{-})^{-})}^2}_{=0}.$$

Ensuite, la norme $\|\xi\|_{H(\Omega_{\infty}^{-})}$ s'estime en fonction de la norme L^2 de ξ et de $\nabla\varphi$ sur Ω_{∞}^{-} de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{H(\Omega_{\infty}^{-})} &= \left(\|\xi\|_{L^2(\Omega_{\infty}^{-}, \rho_0)}^2 + \|(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_{\alpha})\xi\|_{L^2(\Omega_{\infty}^{-}, \rho_0)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\xi\|_{L^2(\Omega_{\infty}^{-}, \rho_0)} + \|(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_{\alpha})\xi\|_{L^2(\Omega_{\infty}^{-}, \rho_0)}, \end{aligned}$$

où l'on a, en utilisant le fait dans Ω_{∞}^{-} , on ait $\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_{\alpha} = \alpha v_{\infty}^{-}(y) \partial_x$ et l'équation vérifiée par ξ :

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_{\alpha})\xi\|_{L^2(\Omega_{\infty}^{-}, \rho_0)}^2 &= |\alpha|^{-1} \|\nabla_{\alpha}\varphi \times \omega_0 + i\omega\xi - (\xi \cdot \nabla)\mathbf{v}_0\|_{L^2(\Omega_{\infty}^{-}, \rho_0)}^2 \\ &\leq \sqrt{\max(|\alpha|^{-1}, |\alpha|)} \|\omega_0\|_{L^{\infty}(\Omega_{\infty}^{-})} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_{\infty}^{-}, \rho_0)}^2 \\ &\quad + |\alpha|^{-1} (\omega + \|\nabla\mathbf{v}_0\|_{L^{\infty}(\Omega_{\infty}^{-})}) \|\xi\|_{L^2(\Omega_{\infty}^{-}, \rho_0)}^2 \\ &\leq \sqrt{\max(|\alpha|^{-1}, |\alpha|)} (\sup |(v_{\infty}^{-})'|) \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_{\infty}^{-}, \rho_0)}^2 \\ &\quad + |\alpha|^{-1} (\omega + \sup |(v_{\infty}^{-})'|) \|\xi\|_{L^2(\Omega_{\infty}^{-}, \rho_0)}^2, \end{aligned}$$

et ainsi,

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{H(\Omega_{\infty}^{-})} &\leq \sqrt{\max(|\alpha|^{-1}, |\alpha|)} (\sup |(v_{\infty}^{-})'|) \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_{\infty}^{-}, \rho_0)}^2 \\ &\quad + \left(1 + \frac{\omega + |(v_{\infty}^{-})'|}{|\alpha|} \right) \|\xi\|_{L^2(\Omega_{\infty}^{-}, \rho_0)}^2. \end{aligned}$$

On trouve donc :

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{L^2(\Gamma_i^{-}, \rho_0)}^2 &\leq \sqrt{\frac{2}{\underline{v}_{\infty}^{-}} \max(|\alpha|^{-1}, |\alpha|)} (\sup |(v_{\infty}^{-})'|) \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_{\infty}^{-}, \rho_0)}^2 \\ &\quad + \sqrt{\frac{2}{\underline{v}_{\infty}^{-}}} \left(1 + \frac{\omega + |(v_{\infty}^{-})'|}{|\alpha|} \right) \|\xi\|_{L^2(\Omega_{\infty}^{-}, \rho_0)}^2, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{L^2(\Omega_i, \rho_0)^2} &\leq C_{fil} \|\omega_0\|_{L^\infty(\Omega_i)^2} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_i, \rho_0)^2} \\ &\quad + C_b \sqrt{\frac{2}{\underline{v}_\infty}} \max(|\alpha|^{-1}, |\alpha|) \left(\sup |(v_\infty^-)'| \right) \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_\infty^-, \rho_0)^2} \\ &\quad + C_b \sqrt{\frac{2}{\underline{v}_\infty}} \left(1 + \frac{\omega + \sup |(v_\infty^-)'|}{|\alpha|} \right) \|\xi\|_{L^2(\Omega_\infty^-, \rho_0)^2}, \end{aligned}$$

ce qui nous ramène enfin à l'estimation déjà effectuée au point précédent de ξ sur le domaine Ω_∞^- . Finalement, on a trouvé :

$$\|\xi\|_{L^2(\Omega_i, \rho_0)^2} \leq C_{fil} \|\omega_0\|_{L^\infty(\Omega_i)^2} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_i, \rho_0)^2} + C_b K \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_\infty^-, \rho_0)^2}$$

où

$$K = \sqrt{\frac{2}{\underline{v}_\infty}} \left\{ \sqrt{\max(|\alpha|^{-1}, |\alpha|) \sup |(v_\infty^-)'|} + C_\infty^- \left(1 + \frac{\omega + \sup |(v_\infty^-)'|}{|\alpha|} \right) \right\}.$$

- Estimation de $\|\xi\|_{L^2(\Omega_\infty^+, \rho_0)^2}^2$. Le lemme A.3.4 fournit l'estimation sur Ω_∞^+ :

$$\|\xi\|_{L^2(\Omega_\infty^+, \rho_0)^2} \leq C_i^+ \|\xi\|_{L^2(\Gamma_i^+, \rho_0)^2} + C_\infty^+ \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_\infty^+, \rho_0)^2}$$

qui en combinaison avec le lemme d'estimation de trace A.3.3 permet de remonter au domaine Ω_i et à la trace à l'entrée de ce domaine :

$$\|\xi\|_{L^2(\Gamma_i^+, \rho_0)^2} \leq \left(\frac{2}{\underline{v}_\infty^+} \|\xi\|_{L^2(\Omega_i, \rho_0)^2}^2 + \frac{\bar{v}_\infty^-}{\underline{v}_\infty^+} \|\xi\|_{L^2(\Gamma_i^-, \rho_0)^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Et nous avons déjà obtenu au point précédent les estimations de la norme de ξ sur Ω_i et de sa trace sur Γ_i^- . Il vient

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{L^2(\Omega_\infty^+, \rho_0)^2} &\leq C_\infty^- \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_\infty^+, \rho_0)^2} + \frac{2}{\underline{v}_\infty^+} C_i^+ C_{fil} \|\omega_0\|_{L^\infty(\Omega_i)} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_i, \rho_0)^2} \\ &\quad + \frac{C_i^+ K}{\underline{v}_\infty^+} (2C_b + \bar{v}_\infty^-) \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_i, \rho_0)^2}. \end{aligned}$$

En recombinaison les estimations obtenues sur chaque partie du domaine Ω , on trouve, avec les notations introduites dans le lemme :

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^2} &= \left(\|\xi\|_{L^2(\Omega_\infty^-, \rho_0)^2}^2 + \|\xi\|_{L^2(\Omega_i, \rho_0)^2}^2 + \|\xi\|_{L^2(\Omega_\infty^+, \rho_0)^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\xi\|_{L^2(\Omega_\infty^-, \rho_0)^2} + \|\xi\|_{L^2(\Omega_i, \rho_0)^2} + \|\xi\|_{L^2(\Omega_\infty^+, \rho_0)^2} \\ &\leq C_{\Omega_\infty^-} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_\infty^-, \rho_0)^2} + C_{\Omega_i} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_i, \rho_0)^2} + C_{\Omega_\infty^+} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_\infty^+, \rho_0)^2} \\ &\leq \left(C_{\Omega_\infty^-}^2 + C_{\Omega_i}^2 + C_{\Omega_\infty^+}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^2}. \end{aligned}$$

■

Formulation variationnelle en présence de PML et condition de coercivité

Lemme A.3.10. *A l'aide de l'opérateur de résolution du transport \mathcal{A} , le problème de Goldstein en présence de PML (A.6) s'écrit sous la forme*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } f \in L^2(\Omega_i), \text{ trouver } \varphi \in H_0^1(\Omega, \rho_0) \text{ tel que :} \\ \rho_0 D_{\omega, \alpha} (c_0^2 D_{\omega, \alpha} \varphi) - \nabla_{\alpha} \cdot [\rho_0 (\nabla_{\alpha} \varphi + \mathcal{A}\varphi)] = \rho_0 f \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

qui admet la formulation variationnelle suivante, Pour $f \in L^2(\Omega_i)$, trouver $\varphi \in H_0^1(\Omega, \rho_0)$ tel que

$$\forall \psi \in H_0^1(\Omega, \rho_0), \quad a(\varphi, \psi) + b(\varphi, \psi) + c(\varphi, \psi) = l(\psi),$$

où,

$$\begin{aligned} a(\varphi, \psi) &= \int_{\Omega} \frac{\rho_0}{\alpha_x \alpha_y} \left\{ \nabla_{\alpha} \varphi \cdot \nabla_{\alpha} \bar{\psi} - c_0^{-2} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_{\alpha} \varphi) (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_{\alpha} \bar{\psi}) \right\}, \\ b(\varphi, \psi) &= \int_{\Omega} \frac{\rho_0}{\alpha_x \alpha_y} (\mathcal{A}\varphi) \cdot \nabla_{\alpha} \bar{\psi}, \\ c(\varphi, \psi) &= \int_{\Omega} \frac{\rho_0}{\alpha_x \alpha_y} \left[\frac{i\omega}{c_0^2} (\varphi (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_{\alpha} \bar{\psi}) - (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_{\alpha} \varphi) \bar{\psi}) - \frac{\omega^2}{c_0^2} \varphi \bar{\psi} \right], \\ l(\psi) &= \int_{\Omega} \frac{\rho_0}{\alpha_x \alpha_y} f \bar{\psi} \end{aligned}$$

Théorème A.3.11 (Caractère Fredholm de Goldstein avec PML). *Le problème de Goldstein (A.6) posé dans Ω avec PML, relève de l'alternative de **Fredholm**, si la condition suivante est satisfaite :*

$$\min(\Re(\alpha), \Re(\alpha^{-1})) \inf_{\Omega} \left(1 - \frac{|\mathbf{v}_0|^2}{c_0^2} \right) > \max(1, |\alpha|^{-1}) C_{\Omega}, \quad (\text{A.12})$$

où la constante C_{Ω} est donnée par le lemme A.3.8.

Preuve. La preuve procède en deux temps :

1. On montre que la forme sesquilinéaire $a + b$ est coercive sous la condition (A.12). Pour $\varphi \in H_0^1(\Omega, \rho_0)$, on a

$$\begin{aligned} a(\varphi, \varphi) &= \int_{\Omega} \frac{\rho_0}{\alpha_x \alpha_y} \left\{ \alpha_x^2 |\partial_x \varphi|^2 + \alpha_y^2 |\partial_y \varphi|^2 - c_0^{-2} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_{\alpha} \varphi) (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_{\alpha} \bar{\varphi}) \right\} \\ &= \int_{\Omega} \rho_0 \frac{\alpha_x}{\alpha_y} |\partial_x \varphi|^2 + \rho_0 \frac{\alpha_y}{\alpha_x} |\partial_y \varphi|^2 - \frac{\rho_0}{\alpha_x \alpha_y} c_0^{-2} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_{\alpha} \varphi) (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_{\alpha} \bar{\varphi}). \end{aligned}$$

On exprime cette intégrale en somme de deux contributions, sur le domaine intérieur Ω_i d'une part et sur le domaine PML, $\Omega_i^c := \Omega \setminus \Omega_i$, d'autre part. Avec des notations évidentes, on écrit :

$$a(\varphi, \varphi) = a_{\Omega_i}(\varphi, \varphi) + a_{\Omega_i^c}(\varphi, \varphi).$$

Commençons par traiter le cas du domaine intérieur Ω_i , sur lequel $\alpha_x = \alpha_y = 1$, on

obtient

$$\begin{aligned} \Re\mathcal{E}(a_{\Omega_i}(\varphi, \varphi)) &= \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_i, \rho_0)}^2 - \left\| \frac{\mathbf{v}_0}{c_0} \cdot \nabla\varphi \right\|_{L^2(\Omega_i, \rho_0)}^2 \\ &\geq \inf_{\Omega} \left(1 - \frac{|\mathbf{v}_0|^2}{c_0^2} \right) \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_i, \rho_0)}^2. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Traitons ensuite la contribution sur Ω_i^c , $a_{\Omega_i^c}(\varphi, \varphi)$, où l'opérateur $\mathbf{v}_0 \cdot \nabla$ se simplifie en $\mathbf{v}_0 \cdot \nabla = v_{0,x} \partial_x$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \Re\mathcal{E}(a_{\Omega_i^c}(\varphi, \varphi)) &= \Re\mathcal{E} \int_{\Omega_i^c} \rho_0 \frac{\alpha_x}{\alpha_y} |\partial_x \varphi|^2 + \rho_0 \frac{\alpha_y}{\alpha_x} |\partial_y \varphi|^2 - \rho_0 \frac{\alpha_x}{\alpha_y} \frac{v_{0,x}^2}{c_0^2} |\partial_x \varphi|^2 \\ &= \Re\mathcal{E} \int_{\Omega_i^c} \rho_0 \frac{\alpha_x}{\alpha_y} \left(1 - \frac{v_{0,x}^2}{c_0^2} \right) |\partial_x \varphi|^2 + \rho_0 \frac{\alpha_y}{\alpha_x} |\partial_y \varphi|^2. \end{aligned}$$

Comme, α_x/α_y et α_y/α_x ne prennent que les valeurs 1, α et α^{-1} , et que l'on a choisi α tel que $\Re\mathcal{E}(\alpha) > 0$, on trouve

$$\begin{aligned} \Re\mathcal{E}(a_{\Omega_i^c}(\varphi, \varphi)) &\geq \min(1, \Re\mathcal{E}(\alpha), \Re\mathcal{E}(\alpha^{-1})) \inf_{\Omega_i^c} \left(1 - \frac{v_{0,x}^2}{c_0^2} \right) \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_i^c, \rho_0)}^2 \\ &\geq \min(1, \Re\mathcal{E}(\alpha), \Re\mathcal{E}(\alpha^{-1})) \inf_{\Omega} \left(1 - \frac{|\mathbf{v}_0|^2}{c_0^2} \right) \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_i^c, \rho_0)}^2. \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\Re\mathcal{E}(\alpha)\Re\mathcal{E}(\alpha^{-1}) = \left(\frac{\Re\mathcal{E}(\alpha)}{|\alpha|} \right)^2 \leq 1,$$

on en déduit que $\Re\mathcal{E}(\alpha) \leq 1$ ou $\Re\mathcal{E}(\alpha^{-1}) \leq 1$, d'où

$$\min(1, \Re\mathcal{E}(\alpha), \Re\mathcal{E}(\alpha^{-1})) = \min(\Re\mathcal{E}(\alpha), \Re\mathcal{E}(\alpha^{-1})), \quad (\text{A.14})$$

on obtient donc

$$\Re\mathcal{E}(a_{\Omega_i^c}(\varphi, \varphi)) \geq \min(\Re\mathcal{E}(\alpha), \Re\mathcal{E}(\alpha^{-1})) \left(1 - \frac{|\mathbf{v}_0|^2}{c_0^2} \right) \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_i^c, \rho_0)}^2. \quad (\text{A.15})$$

En regroupant les contributions (A.13) et (A.15), obtenues sur Ω_i et Ω_i^c , on obtient en utilisant une nouvelle fois (A.14) :

$$\begin{aligned} &\Re\mathcal{E}(a(\varphi, \varphi)) \\ &= \Re\mathcal{E}(a_{\Omega_i}(\varphi, \varphi) + a_{\Omega_i^c}(\varphi, \varphi)) \\ &\geq \min(1, \min(\Re\mathcal{E}(\alpha), \Re\mathcal{E}(\alpha^{-1}))) \inf_{\Omega} \left(1 - \frac{|\mathbf{v}_0|^2}{c_0^2} \right) \left(\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_i, \rho_0)}^2 + \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_i^c, \rho_0)}^2 \right) \\ &\geq \min(\Re\mathcal{E}(\alpha), \Re\mathcal{E}(\alpha^{-1})) \inf_{\Omega} \left(1 - \frac{|\mathbf{v}_0|^2}{c_0^2} \right) \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)}^2. \end{aligned}$$

Le terme $b(\varphi, \varphi)$ n'étant pas coercif, nous le traitons comme un terme continu fai-

sant baisser la constante de coercivité dans le pire des cas. En utilisant les estimations obtenues de $\mathcal{A}\varphi$ au lemme A.3.8, on trouve :

$$\begin{aligned}
|b(\varphi, \varphi)| &= \left| \int_{\Omega_i} \rho_0 \mathcal{A}\varphi \cdot \nabla \bar{\varphi} + \int_{\Omega_{\infty}^- \cup \Omega_{\infty}^+} \rho_0 (\mathcal{A}\varphi)_x \partial_x \bar{\varphi} + \rho_0 \alpha^{-1} (\mathcal{A}\varphi)_y \partial_y \bar{\varphi} \right| \\
&\leq \|\mathcal{A}\varphi\|_{L^2(\Omega_i, \rho_0)^2} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega_i, \rho_0)^2} + \|(\mathcal{A}\varphi)_x\|_{L^2(\Omega_{\infty}^-, \rho_0)^2} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega_{\infty}^-, \rho_0)^2} \\
&\quad + |\alpha|^{-1} \|(\mathcal{A}\varphi)_y\|_{L^2(\Omega_{\infty}^+, \rho_0)^2} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega_{\infty}^+, \rho_0)^2} \\
&\leq \max(1, |\alpha|^{-1}) \|\mathcal{A}\varphi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^2} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^2} \\
&\leq \max(1, |\alpha|^{-1}) C_{\Omega} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^2}^2.
\end{aligned}$$

On obtient finalement la minoration de $\Re \varepsilon(a(\varphi, \varphi) + b(\varphi, \varphi))$ suivante :

$$\begin{aligned}
\Re \varepsilon(a(\varphi, \varphi) + b(\varphi, \varphi)) &\geq \Re \varepsilon(a(\varphi, \varphi)) - |b(\varphi, \varphi)| \\
&\geq \min(\Re \varepsilon(\alpha), \Re \varepsilon(\alpha^{-1})) \inf_{\Omega} \left(1 - \left(\frac{|v_0|}{c_0} \right)^2 \right) \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^2}^2 \\
&\quad - \max(1, |\alpha|^{-1}) C_{\Omega} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega, \rho_0)^2}^2,
\end{aligned}$$

ce qui suffit à montrer la coercivité de $a + b$ sur $H_0^1(\Omega, \rho_0)$ d'après l'inégalité de Poincaré.

2. Il ne reste qu'à montrer que la forme sesquilinéaire c est associée à un opérateur compact, ce qui est très classique, le point clef étant l'injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ d'après le théorème de Rellich. ■

Bibliographie

- [1] F. Casenave, *Méthodes de réduction de modèles appliquées à des problèmes d'aéroacoustique résolus par équations intégrales*. PhD thesis, Paris Est, 2013.
- [2] G. Legendre, *Rayonnement acoustique dans un fluide en écoulement : analyse mathématique et numérique de l'équation de Galbrun*. PhD thesis, ENSTA ParisTech, 2003.
- [3] E. Peynaud, *Rayonnement sonore dans un écoulement subsonique complexe en régime harmonique : analyse et simulation numérique du couplage entre les phénomènes acoustiques et hydrodynamiques*. PhD thesis, Toulouse, INSA, 2013.
- [4] L. Giraud, J. Langou, and G. Sylvand, "On the parallel solution of large industrial wave propagation problems," *Journal of Computational Acoustics*, vol. 14, no. 01, pp. 83–111, 2006.
- [5] B. Lizé, *Résolution directe rapide pour les éléments finis de frontière en électromagnétisme et acoustique : \mathcal{H} -Matrices. Parallélisme et applications industrielles*. PhD thesis, Université Paris-Nord-Paris XIII, 2014.
- [6] C. Legendre, *On the interactions of sound waves and vortices*. Lulu. com, 2015.
- [7] A. Novotny and I. Straskraba, *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*, vol. 27. Oxford University Press on Demand, 2004.
- [8] M. J. Lighthill, "On sound generated aerodynamically. i. general theory," in *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 211, pp. 564–587, The Royal Society, 1952.
- [9] M. J. Lighthill, "On sound generated aerodynamically. ii. turbulence as a source of sound," in *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 222, pp. 1–32, The Royal Society, 1954.
- [10] N. Curle, "The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound," *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 231, no. 1187, pp. 505–514, 1955.
- [11] J. Ffowcs William and D. Hawkings, "Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion," *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, vol. 264, no. 1151, pp. 321–342, 1969.
- [12] M. S. Howe, *Theory of vortex sound*, vol. 33. Cambridge University Press, 2003.
- [13] D. Crighton, "Basic principles of aerodynamic noise generation," *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 16, no. 1, pp. 31–96, 1975.
- [14] C. K. Tam and J. C. Webb, "Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics," *Journal of computational physics*, vol. 107, no. 2, pp. 262–281, 1993.
- [15] C. K. Tam, "Computational aeroacoustics : an overview," tech. rep., FLORIDA STATE UNIV TALLAHASSEE DEPT OF MATHEMATICS, 2003.

- [16] C. Bailly and C. Bogey, “An overview of numerical methods for acoustic wave propagation,” in *European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD, P. Wesseling, E. Onate, J. Périaux (Eds)*, Citeseer, 2006.
- [17] B. Cockburn, G. E. Karniadakis, and C.-W. Shu, “The development of discontinuous galerkin methods,” in *Discontinuous Galerkin Methods*, pp. 3–50, Springer, 2000.
- [18] H. L. Atkins and C.-W. Shu, “Quadrature-free implementation of discontinuous galerkin method for hyperbolic equations,” *AIAA journal*, vol. 36, no. 5, pp. 775–782, 1998.
- [19] C. Peyret and P. Delorme, “Simulation of linear aeracoustic propagation in lined ducts with discontinuous galerkin method,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 115, no. 5, pp. 2588–2588, 2004.
- [20] P. Delorme, P. Mazet, C. Peyret, and Y. Ventribout, “Computational aeroacoustics applications based on a discontinuous galerkin method,” *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 333, no. 9, pp. 676–682, 2005.
- [21] M. Bernacki, S. Lanteri, and S. Piperno, “Time-domain parallel simulation of heterogeneous wave propagation on unstructured grids using explicit, nondiffusive, discontinuous galerkin methods,” *Journal of Computational Acoustics*, vol. 14, no. 01, pp. 57–81, 2006.
- [22] H. Glauert, “The effect of compressibility on the lift of an aerofoil,” *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 118, no. 779, pp. 113–119, 1928.
- [23] R. Amiet and W. Sears, “The aerodynamic noise of small-perturbation subsonic flows,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 44, no. 2, pp. 227–235, 1970.
- [24] A. Bissuel, G. Allaire, L. Daumas, S. Barré, and F. Rey, “Linearized navier–stokes equations for aeroacoustics using stabilized finite elements : Boundary conditions and industrial application to aft-fan noise propagation,” *Computers & Fluids*, vol. 166, pp. 32–45, 2018.
- [25] W. Mohring, “A well posed acoustic analogy based on a moving acoustic medium,” *arXiv preprint arXiv :1009.3766*, 2010.
- [26] C. Legendre, G. Lielens, and J.-P. Coyette, “Sound propagation in a sheared flow based on fluctuating total enthalpy as generalized acoustic variable,” in *ASME 2012 Noise Control and Acoustics Division Conference at InterNoise 2012*, pp. 279–284, American Society of Mechanical Engineers, 2012.
- [27] A. H. Nayfeh and J. Sun, “Effect of transverse velocity and temperature gradients on sound attenuation in two-dimensional ducts,” *Journal of Sound and vibration*, vol. 34, no. 4, pp. 505–517, 1974.
- [28] A. H. Nayfeh, J. E. Kaiser, and D. P. Telionis, “Acoustics of aircraft engine-duct systems,” *AIAA Journal*, vol. 13, no. 2, pp. 130–153, 1975.
- [29] C. K. Tam, “Advances in numerical boundary conditions for computational aeroacoustics,” *Journal of Computational Acoustics*, vol. 6, no. 04, pp. 377–402, 1998.
- [30] C. Bogey, C. Bailly, and D. Juvé, “Computation of flow noise using source terms in linearized euler’s equations,” *AIAA journal*, vol. 40, no. 2, pp. 235–243, 2002.
- [31] G. Gabard, “Discontinuous Galerkin methods with plane waves for time-harmonic problems,” *Journal of Computational Physics*, vol. 225, no. 2, pp. 1961–1984, 2007.
- [32] H. Galbrun, *Propagation d’une onde sonore dans l’atmosphère et théorie des zones de silence*. Gauthier-Villars, 1931.

- [33] E.-M. Duclairoir, *Rayonnement acoustique dans un écoulement cisailé : une méthode d'éléments finis pour la simulation du régime harmonique*. PhD thesis, Ecole Polytechnique X, 2007.
- [34] G. Gabard, F. Treysede, and M. B. Tahar, "A numerical method for vibro-acoustic problems with sheared mean flows," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 272, no. 3, pp. 991–1011, 2004.
- [35] G. Gabard, R. Astley, and M. Ben Tahar, "Stability and accuracy of finite element methods for flow acoustics. i : general theory and application to one-dimensional propagation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 63, no. 7, pp. 947–973, 2005.
- [36] A. B.-B. Dhia, J.-F. Mercier, F. Millot, S. Pernet, and E. Peynaud, "Time-harmonic acoustic scattering in a complex flow : a full coupling between acoustics and hydrodynamics," *Communications in Computational Physics*, vol. 11, no. 2, pp. 555–572, 2012.
- [37] M. Goldstein, "Unsteady vortical and entropic distortions of potential flows round arbitrary obstacles," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 89, no. 3, pp. 433–468, 1978.
- [38] V. Golubev and H. Atassi, "Sound propagation in an annular duct with mean potential swirling flow," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 198, no. 5, pp. 601–616, 1996.
- [39] V. V. Golubev and H. M. Atassi, "Acoustic–vorticity waves in swirling flows," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 209, no. 2, pp. 203–222, 1998.
- [40] C. Heaton and N. Peake, "Algebraic and exponential instability of inviscid swirling flow," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 565, pp. 279–318, 2006.
- [41] F. M. J.-F. Mercier, C. Mietka and V. Pagneux, "Acoustic propagation in a complex homentropic flow : a new model based on generalized goldstein's equations," *submitted*, 2015.
- [42] P. Azérad and J. Pousin, "Inégalité de Poincaré courbe pour le traitement variationnel de l'équation de transport," *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, vol. 322, no. 8, pp. 721–727, 1996.
- [43] M. Jensen, *Discontinuous Galerkin methods for Friedrichs systems with irregular solutions*. PhD thesis, University of Oxford, 2005.
- [44] D. A. Di Pietro and A. Ern, *Mathematical aspects of discontinuous Galerkin methods*, vol. 69. Springer Science & Business Media, 2011.
- [45] A. Ern and J.-L. Guermond, "Discontinuous galerkin methods for friedrichs' systems. i. general theory," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 44, no. 2, pp. 753–778, 2006.
- [46] Z. Ding, "A proof of the trace theorem of Sobolev spaces on Lipschitz domains," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 124, no. 2, pp. 591–600, 1996.
- [47] P. Joly, "Some trace theorems in anisotropic sobolev spaces," *SIAM journal on mathematical analysis*, vol. 23, no. 3, pp. 799–819, 1992.
- [48] R. Courant and D. Hilbert, "Methods of mathematical physics, vol. ii," *Physics Today*, vol. 7, no. 5, pp. 17–17, 1954.
- [49] H. Poincaré, "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (i)," *Journal de mathématiques pures et appliquées*, vol. 7, pp. 375–422, 1881.
- [50] E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*. Tata McGraw-Hill Education, 1955.
- [51] J.-Y. Chemin, *Perfect incompressible fluids*, vol. 14. Oxford University Press, 1998.

- [52] A. Ern and J.-L. Guermond, *Theory and practice of finite elements*, vol. 159. Springer Science & Business Media, 2013.
- [53] G. Guennebaud, B. Jacob, *et al.*, “Eigen v3.” <http://eigen.tuxfamily.org>, 2010.
- [54] M. Stynes, “Steady-state convection-diffusion problems,” *Acta Numerica*, vol. 14, pp. 445–508, 2005.
- [55] L. Demkowicz and J. Gopalakrishnan, “A class of discontinuous petrov–galerkin methods. part i : The transport equation,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, no. 23-24, pp. 1558–1572, 2010.
- [56] T.-P. Fries, H. G. Matthies, *et al.*, “A review of petrov–galerkin stabilization approaches and an extension to meshfree methods,” *Technische Universitat Braunschweig, Brunswick*, 2004.
- [57] P. B. Bochev and M. D. Gunzburger, *Least-squares finite element methods*, vol. 166. Springer Science & Business Media, 2009.
- [58] P. Bochev and J. Choi, “Improved least-squares error estimates for scalar hyperbolic problems,” *Computational Methods in Applied Mathematics Comput. Methods Appl. Math.*, vol. 1, no. 2, pp. 115–124, 2001.
- [59] A. N. Brooks and T. J. Hughes, “Streamline upwind/petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations,” *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 32, no. 1-3, pp. 199–259, 1982.
- [60] E. Bécache, A. B.-B. Dhia, and G. Legendre, “Perfectly matched layers for the convected helmholtz equation,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 42, no. 1, pp. 409–433, 2004.
- [61] E. Bécache, A. B.-B. Dhia, and G. Legendre, “Perfectly matched layers for time-harmonic acoustics in the presence of a uniform flow,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 44, no. 3, pp. 1191–1217, 2006.
- [62] S. Duprey, *Etude mathématique et numérique de la propagation acoustique d’un turbo-réacteur*. PhD thesis, Université Henri Poincaré-Nancy I, 2006.
- [63] F. Casenave, A. Ern, and G. Sylvand, “Coupled bem–fem for the convected helmholtz equation with non-uniform flow in a bounded domain,” *Journal of Computational Physics*, vol. 257, pp. 627–644, 2014.
- [64] J. F. Mercier, A.-S. B.-B. Dhia, F. Millot, S. Pernet, and E. Peynaud, “Time-harmonic acoustic scattering in a complex flow,” in *Acoustics 2012*, 2012.
- [65] J.-P. Berenger, “A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves,” *Journal of computational physics*, vol. 114, no. 2, pp. 185–200, 1994.
- [66] J.-P. Berenger, “Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves,” *Journal of computational physics*, vol. 127, no. 2, pp. 363–379, 1996.
- [67] P. P. Rao and P. J. Morris, “Use of finite element methods in frequency domain aeroacoustics,” *AIAA journal*, vol. 44, no. 7, pp. 1643–1652, 2006.
- [68] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [69] F. Hamel and N. Nadirashvili, “A liouville theorem for the euler equations in the plane,” *arXiv preprint arXiv :1703.07293*, 2017.

- [70] M. H. Gutknecht, "Variants of bicgstab for matrices with complex spectrum," *SIAM journal on scientific computing*, vol. 14, no. 5, pp. 1020–1033, 1993.
- [71] G. L. Sleijpen and D. R. Fokkema, "Bicgstab (l) for linear equations involving unsymmetric matrices with complex spectrum," *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, vol. 1, no. 11, p. 2000, 1993.
- [72] Y. Saad, "Iterative methods for sparse linear systems," *IEEE Computational Science and Engineering*, vol. 3, no. 4, p. 87, 1996.
- [73] R. White and F. Chen, "Amplification and absorption of electromagnetic waves in overdense plasmas," *Plasma Physics*, vol. 16, no. 7, p. 565, 1974.
- [74] B. Després, L.-M. Imbert-Gérard, and R. Weder, "Hybrid resonance of maxwell's equations in slab geometry," *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 101, no. 5, pp. 623–659, 2014.
- [75] B. Després, L.-M. Imbert-Gérard, and O. Lafitte, "Singular solutions for the plasma at the resonance," *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 2017.
- [76] M. Campos Pinto and B. Després, "Constructive formulations of resonant maxwell's equations," *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 49, no. 5, pp. 3637–3670, 2017.
- [77] A. Nicolopoulos, M. Campos-Pinto, and B. Després, "A stable formulation of resonant maxwell's equations in cold plasma," 2018.
- [78] P. G. Drazin and W. H. Reid, *Hydrodynamic stability*. Cambridge university press, 2004.
- [79] P. G. Saffman, *Vortex dynamics*. Cambridge university press, 1992.
- [80] E. J. Brambley, M. Darau, and S. W. Rienstra, "The critical layer in linear-shear boundary layers over acoustic linings," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 710, pp. 545–568, 2012.
- [81] G. Kristensson, *Second order differential equations : special functions and their classification*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [82] R. P. Agarwal and D. O'Regan, *Ordinary and partial differential equations : with special functions, Fourier series, and boundary value problems*. Springer Science & Business Media, 2008.

Titre : Une approche nouvelle de la modélisation mathématique et numérique en aéroacoustique par les équations de Goldstein – Applications en aéronautique

Mots Clefs : aéroacoustique, équations de Goldstein, SUPG, caractère Fredholm, méthode de Frobenius, résonance

Résumé : La problématique du bruit fait par les réacteurs d'avions est un des enjeux majeurs de l'industrie aéronautique. C'est dans ce contexte que l'équipe du centre de recherche d'Airbus travaille au développement du code de calcul Actipole de propagation acoustique en présence d'un écoulement porteur. L'approche consiste en un couplage FEM-BEM entre la zone de propagation loin de l'avion où l'écoulement est supposé uniforme (BEM) et la zone plus proche où l'écoulement est supposé potentiel (FEM). Les équations de l'aéroacoustique en régime harmonique se réduisent alors à la simple équation scalaire d'Helmholtz convectée.

Nous étudions une reformulation des équations d'Euler linéarisées, les équations de Goldstein, prenant en compte l'interaction entre l'acoustique et l'hydrodynamique, lorsque l'écoulement n'est plus potentiel, par l'ajout d'une inconnue hydrodynamique localisée aux zones fortement rotationnelles. Les équations de Goldstein peuvent être vues comme une perturbation de l'équation d'Helmholtz convectée, couplée à une équation de transport harmonique.

Nos approches théorique et numérique restent dans le cadre de cette vision perturbative en étudiant dans un premier temps la résolution de l'équation de transport. Nous montrons ainsi que sous l'hypothèse d'un écoulement domaine-remplissant, l'équation de transport harmonique peut être inversée et sous contrainte d'un faible rotationnel, le caractère Fredholm de l'équation d'Helmholtz convectée se généralise aux équations de Goldstein.

Le cas général est un problème ouvert et difficile, nous montrons que l'équation de transport n'est pas toujours inversible et possède des fréquences de résonance auxquelles les « solutions » tendent à être singulières le long de lignes de recirculation de l'écoulement. Nous montrons qu'il en est de même des équations couplées qui possèdent en plus des fréquences de résonance du transport d'autres résonances, dites critiques. Nous terminons cette thèse par une étude locale des singularités, par la méthode de Frobenius, des solutions modales obtenues par absorption limite, aux fréquences de résonance du transport et critiques, au voisinage de lignes résonantes, montrant que de telles solutions sortent alors du cadre variationnelle classiques.

Title : A new approach about mathematic and numerical modeling in aeroacoustics with Goldstein equations – Application in aeronautics

Keys words : aeroacoustics, Goldstein equations, SUPG, Fredholm property, Frobenius method, résonance

Abstract : The issue of the noise radiating by reactor engines is one of the most important in the aeronautic industry. It is in this context that the Airbus research department team is working on the code Actipole of acoustic propagation in flow. The approach used is a FEM-BEM coupling between areas far away of the aircraft where the flow is assumed to be uniform (BEM) and the the nearest area where the flow is assumed to be potential (FEM). Then, harmonic aeroacoustic equations simplify in the simpler scalar convected Helmholtz equation.

We study the Goldstein formulation, equivalent to the Linearized Euler equations, taking into account the interaction between acoustics and hydrodynamics, where the flow is no more potential, by locally adding a hydrodynamic unknown in most vortical areas. Goldstein equations can be seen as perturbations of the convected Helmholtz equation, coupled with a harmonic transport equation.

Our theoretical and numerical approaches take advantage of this perturbative view by studying in a first step the resolution of the transport equation. We then show that under the hypothesis of a domain-filling flow, the harmonic transport equation can be solved and under the assumption of a small vorticity, the Fredholm property of the convected Helmholtz equation can be generalized to Goldstein equations.

The general case is an open problem and is much more difficult, we show that the transport equation is not always well-posed and admits some resonance frequencies for which « solutions » tend to be singular along some closed streamlines of the flow. We show that the same phenomena occurs with the coupled equations which admit, in addition to resonance frequencies due to transport, other resonances so called critic resonances. We end this thesis by studying the local singularities, by Frobenius method, of modal solutions obtained using limiting absorption principle when we are at the resonance frequencies around a resonant streamline. We show that these solutions are then no more in the classical functional framework used for variational formulation.

