



Ondes de surface le long de gouttes

Chi-tuong Pham

► To cite this version:

Chi-tuong Pham. Ondes de surface le long de gouttes. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Paris-Saclay, 2021. tel-04421369

HAL Id: tel-04421369

<https://theses.hal.science/tel-04421369>

Submitted on 27 Jan 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License



Mémoire en vue de l'obtention de
l'Habilitation à Diriger des Recherches

Université Paris-Saclay



Ondes de surface le long de gouttes

Chi-Tuong PHAM

Soutenance le 23 juin 2021, devant le jury composé de

M. Médéric ARGENTINA	Rapporteur (Université Côte d'Azur)
M. Philippe BRUNET	Rapporteur (Université de Paris)
M. Christophe JOSSERAND	Rapporteur (École Polytechnique)
M ^{me} Caroline NORE	Examinatrice (Université Paris-Saclay)
M ^{me} Emmanuelle RIO	Examinatrice (Université Paris-Saclay)
M ^{me} Laurette S. TUCKERMAN	Examinatrice (ESPCI)

*Rose, oh reiner Widerspruch, Lust,
Niemandes Schlaf zu sein unter so viel Lidern.^a*

R. M. Rilke

« Nous sommes, chacun de nous, des textes que même nos proches ont à déchiffrer, décrypter, et bien nécessaire est-il donc, même pour s'adresser à autrui, de commencer à s'asseoir devant une page blanche. »

Le Sommeil de personne
Yves Bonnefoy
William Blake & Co. Édit. (2004)

^aRose, ô pure contradiction, joie de n'être le sommeil de personne sous tant de paupières.

« Si le monde mathématisable était le seul véritable, ne seraient pas seulement illusoires les châteaux en Espagne, avec leurs dames et leurs jongleurs : le seraient aussi les paysages de la veille, la beauté d'un *lied* de Schubert, l'amour. Ou au moins, serait illusoire ce qui en *eux* nous émeut. »

Hommes et Engrenages
Ernesto Sábato
R&N Éditions (2019)

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier chaleureusement tous les membres du jury de mon Habilitation à Diriger des Recherches d'avoir accepté de faire partie de mon jury, en respectant les délais contraints que je leur imposais, tout particulièrement mes trois rapporteurs.

(À compléter...)

Enfin, les travaux présentés dans ce manuscrit n'auraient jamais pu être réalisés sans l'idée originelle du tore en lévitation d'Yves COUDER qui m'a bienveillamment donné tout son matériel expérimental et la liberté de reprendre les problèmes soulevés par ce système comme bon me semblait. Qu'il en soit infiniment remercié.

Sommaire

Remerciements	v
I Introduction	1
Avant-propos	1
I.1 Motivations originelles : polygones dans des tores en état Leidenfrost . . .	2
I.2 Systèmes expérimentaux étudiés	2
I.2.1 <i>Cylindre liquide en état Leidenfrost</i> , p. 4 • I.2.2 <i>Cylindre liquide posé</i> , p. 4 • I.2.3 <i>Tore liquide posé</i> , p. 5	
I.3 Questions scientifiques sous-jacentes	7
I.3.1 <i>Instabilité de Plateau–Rayleigh d’une goutte allongée</i> , p. 7 • I.3.2 <i>Nature des ondes linéaires</i> , p. 10 • I.3.3 <i>Ondes non linéaires</i> , p. 14 • I.3.4 <i>Gouttes toriques</i> , p. 14	
II Formes d’une goutte cylindrique et orbites d’un pendule pesant	19
II.1 Cas d’un substrat plat	19
II.1.1 <i>Mise en équation du problème</i> , p. 19 • II.1.2 <i>Gouttes pendantes</i> , p. 23 • II.1.3 <i>Gouttes posées</i> , p. 23	
II.2 Effets de l’angle de contact et cas d’un substrat en coin.	26
II.2.1 <i>Gouttes pendantes</i> , p. 26 • II.2.2 <i>Gouttes posées</i> , p. 26	
III Ondes linéaires le long de cylindres liquides	29
III.1 Modes variqueux et formalisme de Saint-Venant	30
III.1.1 <i>Relation de dispersion dans la limite non dispersive</i> , p. 30 • III.1.2 <i>Hypothèse adiabatique des modes variqueux</i> , p. 32 • III.1.3 <i>Instabilité de Plateau–Rayleigh d’un cylindre posé</i> , p. 33	
III.2 Effets dispersifs	39
III.2.1 <i>Effet du substrat sur les ondes variqueuses</i> , p. 40 • III.2.2 <i>Autres effets dus au substrat : les modes de ballonnement</i> , p. 41 • III.2.3 <i>Effets de la tension de surface</i> , p. 42 • III.2.4 <i>Modes sinueux</i> , p. 45 • III.2.5 <i>Comparaisons avec le cas Leidenfrost</i> , p. 45	
IV Ondes non linéaires le long de cylindres liquides	47
IV.1 Les équations de Saint-Venant comme système acoustique non linéaire .	47
IV.2 Solitons de Korteweg–de Vries le long de cylindres liquides.	50
IV.2.1 <i>Considérations théoriques</i> , p. 50 • IV.2.2 <i>Résultats expérimentaux</i> , p. 52	
IV.3 Cas d’un bord de Plateau	53

V	Gouttes à géométrie torique	57
V.1	Modes variqueux	59
V.2	Modes sinueux.	60
V.3	Échange d'énergie entre branches variqueuses et sinueuses	60
V.4	Modes de ballotement	61
VI	Conclusions et Perspectives	65
VI.1	Relations de dispersion complètes	66
	VI.1.1 <i>Cas cylindrique</i> , p. 66 • VI.1.2 <i>Cas torique</i> , p. 67	
VI.2	Interactions non linéaires, cascades d'énergie.	68
VI.3	Gouttes forcées verticalement.	70
	VI.3.1 <i>Auto-excitations et émergence de modes</i> , p. 70 • VI.3.2 <i>Ondes de Faraday et gouttes allongées</i> , p. 71	
Annexes		73
A	États de service	75
B	Articles	83
	Phys. Rev. E 2015, p. 83 • J. Fluid. Mech. 2020, p. 87 • J. Fluid. Mech. (2021, accepté), p. 101	
C	Quelques calculs classiques	121
C.1	Ondes de surface dans un canal.	121
	C.1.1 <i>Mise en équation</i> , p. 122 • C.1.2 <i>Ondes gravitaires et ballotement le long d'un canal rectangulaire</i> , p. 124 • C.1.3 <i>Ondes gravito-capillaires</i> , p. 127	
C.2	Résultats historiques de Rayleigh	127
	C.2.1 <i>Instabilité de Plateau–Rayleigh (1878)</i> , p. 128 • C.2.2 <i>Modes azimutaux d'un cylindre (1879)</i> , p. 130	
Bibliographie		131

Chapitre I

Introduction

Avant-propos

Ce manuscrit d'Habilitation à Diriger des Recherches se borne à mes recherches consacrées aux ondes de surface le long de gouttes allongées. Les travaux expérimentaux présentés ici ont été réalisés pendant les thèses de Stéphane Perrard et Gabriel Le Doudic au laboratoire Matière et Systèmes Complexes (MSC) de l'Université de Paris (anciennement Paris Diderot) et pendant les stages de Master 1, au même endroit, de Charles Duchêne, Gabriel Le Doudic et Filip Novkoski.

Mes travaux théoriques passés sur des problèmes de transition de mouillage et d'ancrage de cristaux liquides nématiques, comme ceux sur des problèmes de ligne de contact de liquide en évaporation, ne font l'objet d'aucune mention. Ce sont des thématiques que j'ai abandonnées depuis que j'ai réorienté ma recherche vers les expériences. Je n'évoquerai pas non plus ici mes travaux actuels en lien avec des écoulements cisailés en surface par effet Marangoni, sujet de thèse principal de Gabriel Le Doudic à MSC, sous la direction de Matthieu Roché.

En annexe A, on trouvera une présentation synthétique de mon parcours professionnel ainsi qu'une liste des étudiants avec lesquels j'ai travaillé. J'ai joint en annexe B les trois articles publiés ou acceptés qui concernent le manuscrit¹²³. Enfin, j'ai ajouté une annexe pédagogique en annexe C sur les phénomènes physiques à l'œuvre dans les travaux présentés. Elle pourra servir de fil conducteur à certains raisonnements faits tout au long du manuscrit.

Les chapitres II, III et IV sont une réorganisation des deux articles de *Journal of Fluid Mechanics* (gouttes posées sur substrat super-hydrophobe), à la lumière desquels les résultats de l'article de *Physical Review E* (gouttes en état Leidenfrost) sont réinterprétés. Les gouttes toriques présentées au chapitre V sont un système que j'ai commencé à étudier avec Filip Novkoski durant son stage de Master 1, co-encadré par Éric Falcon. Enfin, le chapitre VI porte sur mes projets de recherche sur le sujet.

¹Perrard *et al.*, *Phys. Rev. E* 2015

²Pham *et al.*, *J. Fluid Mech.* 2020

³Le Doudic *et al.*, *J. Fluid Mech.* 2021 (accepté)

I.1 Motivations originelles : polygones dans des tores en état Leidenfrost

Lorsqu'un liquide est déposé sur une surface très chaude, il peut léviter au-dessus du substrat grâce à la formation d'un film de sa propre vapeur sous le liquide. C'est l'effet Leidenfrost (ou caléfaction) [Leidenfrost, 1756]. A priori, l'extension horizontale des gouttes en état Leidenfrost est limitée à quelques fois la longueur capillaire $\ell_c = \sqrt{\sigma/\rho g}$ où σ désigne la tension de surface du liquide, g l'accélération de gravité et ρ sa masse volumique [Biance *et al.*, 2003]. Au-delà d'une certaine taille critique, le film de vapeur ne parvient plus à ne s'échapper que par les bords de la goutte. Il se crée alors des cheminées qui rendent la forme de la goutte instable.

Il a été montré qu'on pouvait dépasser cette limitation et obtenir des tores liquides en caléfaction de volume arbitrairement grand, en les déposant sur des substrats courbés en forme de demi-donut [Perrard *et al.*, 2012].

Dans cette configuration, des écoulements en volume dans le plan méridien (i.e. poloïdaux, cf. figure I.1 (c)) peuvent émerger, à cause d'un cisaillement du film de vapeur s'échappant sous la goutte [Linke *et al.*, 2006; Snezhko *et al.*, 2008]. Un cisaillement par effet Marangoni thermique [Tokugawa & Takaki, 1994] dû à des gradients de température en surface de goutte pourrait accompagner aussi le phénomène.

Lorsque le tore est suffisamment large et pour des substrats faiblement courbés, les mouvements poloïdaux en volume peuvent être accompagnés d'ondes de surface de forme polygonale qui, non seulement brisent l'invariance par rotation du tore, mais tournent aussi le long du bord intérieur du tore (dans la direction azimutale, i.e. la direction toroïdale), sans effet notable de cette rotation dans le volume. De récentes expériences ont été menées depuis avec de l'azote liquide où ces ondes polygonales ont été aussi observées [Ludu & Raghavendra, 2019]. Leur forme correspond à des solutions cnôïdales du problème [Ludu & Draayer, 1998]. Nous donnons quelques illustrations du phénomène en figure I.1 (a, b).

I.2 Systèmes expérimentaux étudiés

Intrigué par ce système, j'avais commencé par m'intéresser au problème des recirculations poloïdales en volume du tore via des simulations numériques. Face à la complexité de la géométrie, couplée aux phénomènes physiques (effets thermiques, effet Leidenfrost), j'ai choisi ensuite de m'intéresser à un système expérimental de géométrie plus simple en recourant à un substrat rectiligne. C'est ainsi qu'a commencé mon travail avec Stéphane Perrard, durant sa thèse avec Yves Couder et Emmanuel Fort, consacrée à un tout autre sujet, à savoir des gouttes rebondissantes.

Le principe de nos expériences de gouttes rectilignes est le suivant : des gouttes allongées sont créées en étirant un volume de liquide posé sur un substrat. Pour éviter qu'elles ne se rétractent sous l'effet de la tension de surface, elles sont piégées à leurs deux bouts. Les gouttes peuvent être excitées à l'aide d'un batteur relié à un pot vibrant et placé à un bout de la goutte (voir le schéma en figure I.2). Les excitations se font soit à fréquence fixe, soit par balayage de fréquence. Le dispositif est filmé en vue de dessus à l'aide d'une caméra. Un code de détection sous-pixellaire

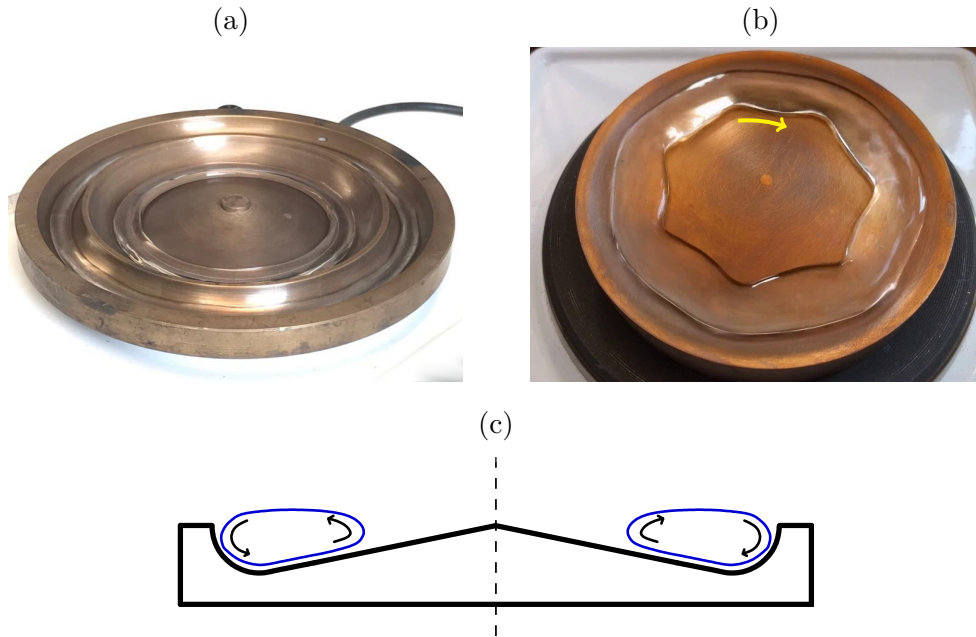


Figure I.1 : (a) Un substrat en forme de demi-donut est chauffé; on peut y faire léviter un tore d'eau liquide par effet Leidenfrost. Leur diamètre vaut ici environ 9 cm et 15 cm pour une largeur d'environ 1 cm. (b) Lorsque le tore est large (diamètre d'environ 10 cm et largeur d'environ 2 cm), sur des substrats peu creusés, des ondes de surface peuvent émerger et se mettre en rotation, brisant l'axisymétrie du tore qui se facette. (c) Schéma en coupe méridienne du substrat chauffé. À l'intérieur de la goutte torique en état Leidenfrost, des écoulements poloïdaux peuvent être observés.

du bord de la goutte a été écrit afin de déterminer la position de l'interface au cours du temps (figure I.3 (c)). Le signal peut être analysé ensuite.

Dans toute la suite, nous désignerons aussi par le mot « cylindre » une goutte allongée en géométrie rectiligne, quelle que soit la forme de sa section transverse — comme en mathématiques — et en oubliant la présence des deux bouts de la goutte.

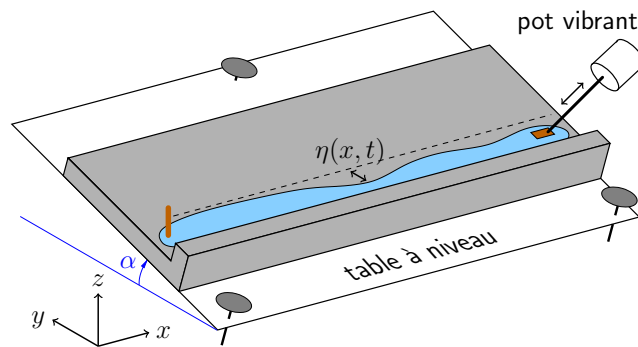


Figure I.2 : Schéma de principe des expériences. Des gouttes allongées sont créées en étirant et en piégeant aux deux bouts d'un substrat un volume de liquide donné. Les gouttes peuvent être excitées à une extrémité à l'aide d'un batteur relié à un pot vibrant. Le dispositif est filmé en vue de dessus à l'aide d'une caméra qui enregistre les déformations $\eta(x, t)$ des bords de la goutte. Le substrat peut être incliné d'un angle α afin de faire varier son profil bathymétrique.

I.2.1 Cylindre liquide en état Leidenfrost

En s’inspirant des expériences en géométrie torique, nous avons utilisé un substrat rectiligne, avec des fonds courbés (figure I.3(b)). Pour cela, un substrat en dural a été usiné et l’un des fonds possède une section constituée d’un quart de cercle relié à une partie plate (« *quarter-pipe* »). Sa longueur est de 45 cm. Le substrat est fixé sur des plaques chauffantes, elles-mêmes fixées à une table à niveau. On peut alors incliner le substrat à un angle voulu α , ce qui permet d’avoir une large plage de variation de bathymétrie du *quarter-pipe*.

Un volume d’eau est déposé sur le substrat chauffé à une température d’environ 250 °C. Il est étiré puis piégé aux deux bouts, ce qui en fixe la longueur. De l’eau thermalisée au préalable à 85 °C dans un bain-marie est injectée à l’aide d’un pousse-seringue à un débit tel qu’il compense l’évaporation du liquide due au chauffage. Une goutte allongée en état Leidenfrost est alors obtenue (photo en figure I.3 (a)) et peut être observée durant des temps très longs, supérieurs à la dizaine de minutes. Sa longueur est d’environ 45 cm (la longueur du substrat) et sa largeur peut varier entre à peu près un demi-centimètre et 2,5 cm. En dessous du demi-centimètre, la goutte se brise (instabilité de Plateau-Rayleigh), au-dessus de 2,5 cm, des cheminées se forment car la goutte est trop large pour que la vapeur puisse être évacuée par les côtés.

Les gouttes obtenues ne sont en contact avec aucune surface solide (hormis les vis utilisées pour piéger la goutte aux deux bouts). Il y a donc très peu d’amortissement des ondes qui se propagent dans le système.

I.2.2 Cylindre liquide posé sur substrat super-hydrophobe

Ces travaux sur les cylindres en caléfaction se sont poursuivis durant le stage de Master 1 de Gabriel Le Doudic. Face à certains écueils pratiques que nous avons rencontrés, je suis alors passé à un autre système moins contraignant et géométriquement équivalent, à savoir des gouttes posées, non plus sur un substrat chauffé, mais sur des substrats super-hydrophobes. Pour cela, deux substrats de longueur 50 cm en forme de coin ont été usinés (schéma en figure I.4 (a, b)). Le premier, que nous nommerons substrat en V, est symétrique et ses côtés font un angle faible de 10° avec l’horizontale. Le second, que nous nommerons substrat en L est tel que les deux côtés forment un angle à 90°. Posé sur une table à niveau, il peut donc être incliné d’un angle α compris entre 0 et 45°. C’est le pendant super-hydrophobe du substrat utilisé en caléfaction, sans arrondi au fond.

Les substrats sont traités au moyen de NeverWet, du fabricant RustOleum. Ce traitement permet d’obtenir des angles de contact autour de 160° [Gupta *et al.*, 2016]. Cet angle de contact rend la ligne de contact très mobile. Une goutte posée sur le substrat en V est montrée sur la figure I.4 (c). D’une longueur de 45 cm, elle fait environ 1,5 cm. Contrairement au cas Leidenfrost, ici, nous ne sommes plus limités par la largeur maximale de la goutte. En revanche, comme dans le cas Leidenfrost, un volume minimal à longueur de goutte fixée est requis pour obtenir une goutte qui ne se brise pas sous l’effet de l’instabilité de Plateau-Rayleigh.

Excitée à un bout par un batteur (figure I.4 (d, e)), on voit que différents modes de déplacement de la goutte peuvent être observés, ici des modes variatiques et des modes sinueux. La mobilité de ligne de contact est importante et les ondes émises

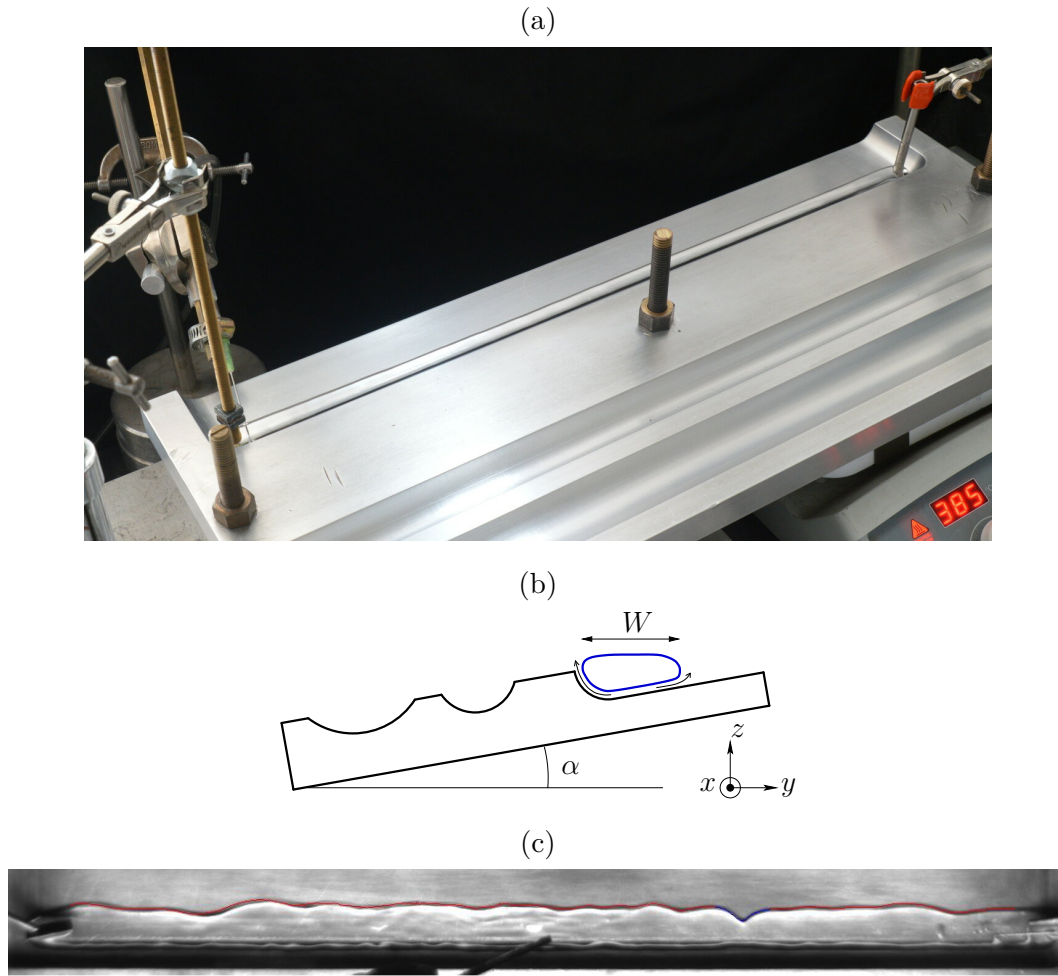


Figure I.3 : (a) Goutte d'eau allongée en caléfaction dans le cas d'un substrat en *quarter-pipe* incliné et chauffé à une température d'environ 250 °C. La longueur de la goutte vaut environ 43 cm et sa largeur environ 12 mm. (b) Schéma en coupe transverse du substrat utilisé. Le substrat est incliné d'un angle α et chauffé; le film de vapeur peut s'évacuer par les côtés tant que la largeur W du cylindre n'est pas trop importante. (c) Photo en vue de dessus et interface reconstruite.

par le batteur peuvent se propager jusqu'à l'autre bout de la goutte, en s'amortissant toutefois à cause de la dissipation à la ligne de contact.

I.2.3 Tore liquide posé sur substrat hydrophobe

Je m'intéresse de nouveau aux systèmes en géométrie torique depuis 2020. J'ai repris la méthodologie des gouttes cylindriques, ici posées sur un substrat super-hydrophobe (traité au NeverWet) à symétrie de révolution, creusé en forme de V dans tout le manuscrit (voir figure I.5 (a)), mais également en forme de L ou en prenant des moules à savarin du commerce.

Les gouttes sont filmées par au-dessus. Elles peuvent être excitées à l'aide d'un batteur et des programmes de reconstruction des bords intérieur et extérieur de la goutte ont été écrits pour étudier les déformations de la goutte dans cette géométrie.

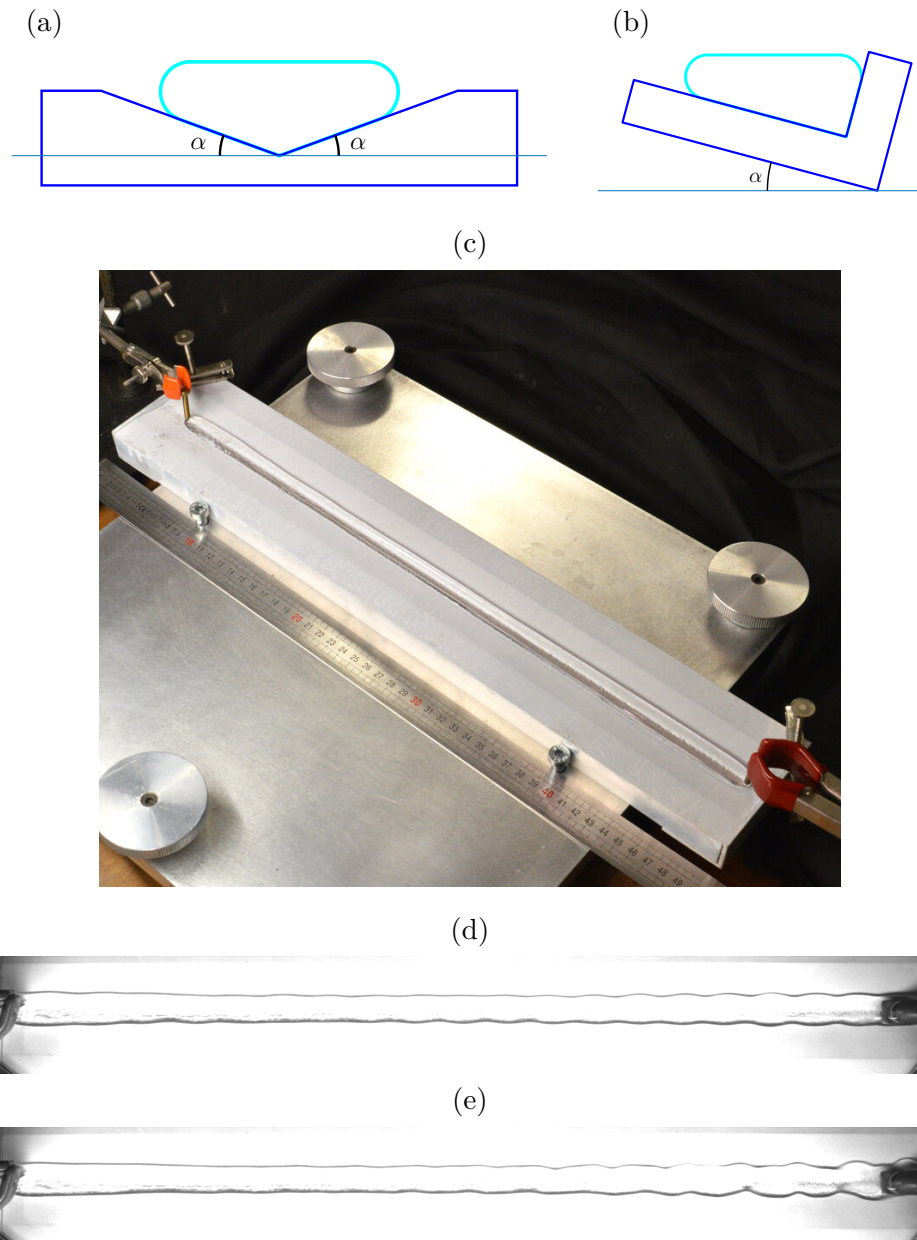


Figure 1.4 : Schéma des sections transverses des deux substrats utilisés dans les expériences en super-hydrophobe : (a) substrat en V ($\alpha = 10^\circ$); (b) substrat en L incliné. (c) En utilisant un substrat traité de manière super-hydrophobe (sans qu'on le chauffe), on peut obtenir des gouttes géométriquement équivalentes au cas Leidenfrost, mais cette fois-ci en contact avec le substrat. La longueur de la goutte fait une cinquantaine de centimètres, sa largeur environ 1 cm. (d) Exemple de mode variqueux. (e) Exemple de mode sinueux.

Comme pour les gouttes rectilignes, nous sommes limités en volume par valeur inférieure. En dessous d'un certain volume, il n'est pas possible d'avoir une goutte torique stable et elle se brise sous l'effet de l'instabilité de Plateau-Rayleigh. Notons enfin que c'est la présence de la pente non nulle dirigée vers le centre qui empêche le

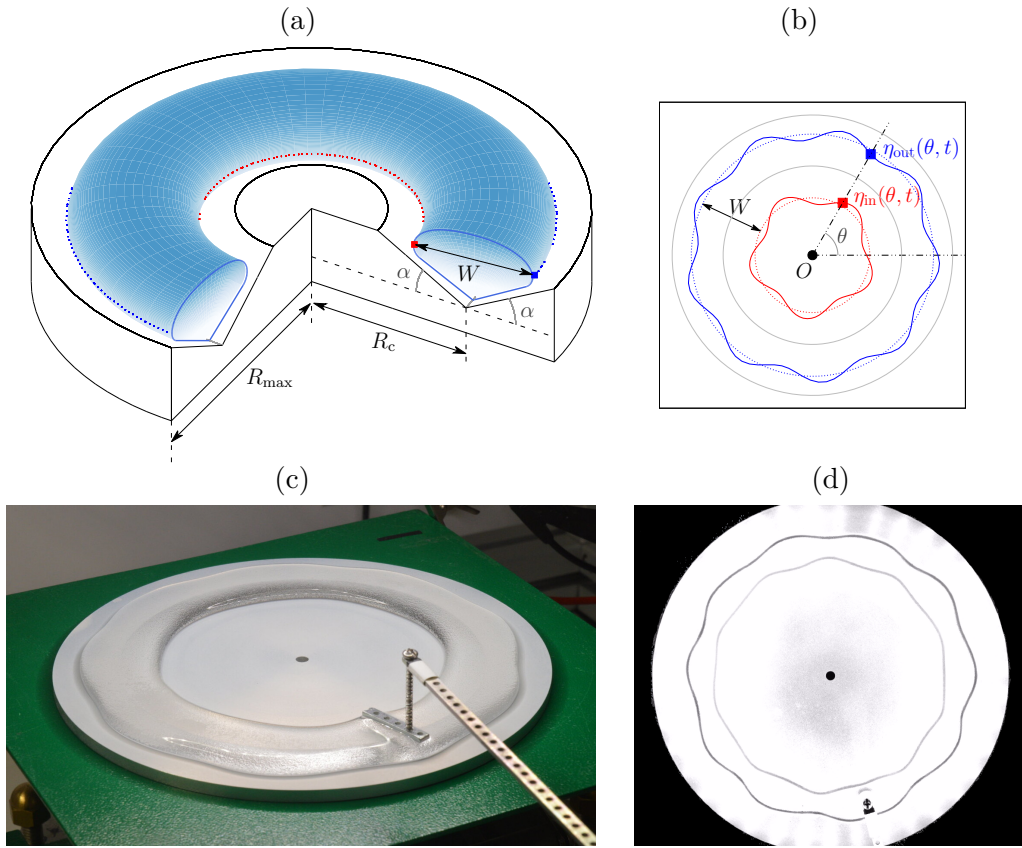


Figure 1.5 : (a) Schéma en coupe du substrat super-hydrophobe en V et notations. L'angle avec l'horizontale est de $4,5^\circ$, la pointe du V est située à $R_c = 7\text{ cm}$. La plaque fait un diamètre $D = 2R_{\max} = 19\text{ cm}$. Sur le substrat est posée une goutte de forme torique, de largeur notée W . (b) On peut détecter les déformations des bords intérieur et extérieur de l'interface au cours du temps (notées $\eta_{\text{in}}(\theta, t)$ et $\eta_{\text{out}}(\theta, t)$). (c) Photo d'une goutte large, aplatie par la gravité et excitée par un batteur. Des modulations de l'interface apparaissent. (d) Vue de haut d'une goutte mince excitée (de largeur environ $1,5\text{ cm}$). On peut observer des modes variqueux de longueur d'onde bien définie.

tore de refermer son trou, comme on s'attendrait à ce qu'il le fasse en l'absence de pente, sous l'effet de la tension de surface.

I.3 Questions scientifiques sous-jacentes

Nous présentons ici les problèmes scientifiques que nous avons abordés en étudiant ces systèmes expérimentaux. Il sera question d'abord de leur stabilité, puis des ondes linéaires et non linéaires qui se propagent à leur surface.

I.3.1 Instabilité de Plateau-Rayleigh d'une goutte allongée

Les cylindres liquides font l'objet de nombreuses études, en particulier consacrées à leur stabilité vis-à-vis des effets de la tension de surface. Historiquement, la première étude expérimentale sur le sujet est due à Savart alors qu'il étudiait la fragmentation

de jets liquides [Savart, 1833]. Si son nom n'a pas été retenu pour désigner le phénomène, c'est parce qu'il n'a pas invoqué la tension de surface comme moteur de l'instabilité. C'est Plateau qui a été le premier à interpréter la déstabilisation de colonnes liquides statiques comme un problème de minimisation de la surface de l'interface liquide [Plateau, 1849, 1873] et c'est Rayleigh qui en a effectué la première analyse de stabilité linéaire, en calculant quel mode axisymétrique avait le plus grand taux de croissance lorsqu'un cylindre circulaire sans viscosité était perturbé sinusoidalement le long de sa direction longitudinale, confirmant alors analytiquement les mesures tirées par Plateau des expériences de Savart [Rayleigh, 1878]. Dans ce cadre, Rayleigh insiste sur le fait que cette instabilité — désormais appelée instabilité de Plateau-Rayleigh — était indépendante de la vitesse de translation du jet. Cette première étude a été immédiatement suivie d'une étude sur la perturbation azimutale d'une section cylindrique circulaire de liquide [Rayleigh, 1879]. Plus tard, les propriétés visqueuses de la colonne liquide ont été prises en compte par Rayleigh [1892a,b], puis par Tomotika, en tenant compte de la présence du fluide environnant [Tomotika, 1935].

En ce qui concerne le problème de jets liquides libres, depuis ces travaux originels, de nombreuses études ont été menées sur des cylindres liquides avec des formes de sections diverses [Gutmark & Grinstein, 1999], dont des sections elliptiques [Morris, 1988; Amini & Dolatabadi, 2011; Amini *et al.*, 2014], rectangulaires [Tam & Thies, 1992], voire en forme d'étoiles [Quinn, 1992]. Les nombres de Reynolds en jeu sont grands dans ces études. À des nombres de Reynolds faibles, le pincement de gouttes allongées a aussi été étudié pour des formes initiales de section variées par Stone & Leal [1989b] et Stone & Leal [1989a].

Dans un autre contexte, l'instabilité de Plateau-Rayleigh survient aussi dans le cas de cylindres à surface libre, contraints par la présence d'un substrat solide le long de sa direction longitudinale. Ainsi, un liquide enrobant un fil ou l'intérieur d'un tube a été étudié pour la première fois par Goren [1962].

Lorsqu'un cylindre repose sur une surface solide avec un écoulement longitudinal, on parle alors de rivulet. Celui-ci peut être alors le lieu de diverses instabilités : il peut se briser sous l'effet de la capillarité [Schmuki & Laso, 1990] ; subir une instabilité de méandrage et ce, pour diverses conditions de mouillage : des conditions hydrophobes [Nakagawa & Scott, 1984; Nakagawa, 1992; Couvreur, 2013], des conditions de mouillage partiel [Birnir *et al.*, 2008], voire en situation de mouillage total [Daerr *et al.*, 2011] ; se séparer en deux [Myers *et al.*, 2004] ; former des tresses [Mertens *et al.*, 2005].

En l'absence d'écoulement longitudinal, les cylindres liquides posés sont aussi dénommés rivulets statiques et la première étude de leur stabilité est due à Davis [1980] qui a donné des conditions suffisantes pour que le rivulet soit stable et a étudié la stabilité pour différentes conditions d'angle de contact au substrat plan et horizontal (ligne de contact piégée, angle de contact constant, prise en compte de l'angle de contact dynamique). Plus tard, Sekimoto *et al.* [1987] ont étudié la forme et l'instabilité de cylindres liquides posés sur un substrat horizontal plan, sous conditions de mouillage partiel en prenant en compte la gravité. Speth & Lauga [2009] ont proposé des calculs explicites des modes instables de grande longueur d'onde d'un cylindre dans le cas non visqueux et pour des lignes de contact piégées. Dans l'approximation de lubrification, en tenant compte des effets de gravité ainsi

que des conditions de mouillage avec des modèles de pression de disjonction, [Diez et al. \[2009\]](#) ont fait une analyse de stabilité d'un rivulet sur un substrat plan, mettant en évidence la dépendance de l'instabilité avec la taille caractéristique du cylindre. Récemment, [Bostwick & Steen \[2018\]](#), ont proposé une étude très approfondie de la stabilité le long de cylindres circulaires des modes variqueux et sinueux dans un régime non visqueux, pour des lignes de contact piégées ou bien mobiles et à angle de contact constant.

Le cas d'un substrat non plan, dans la situation de rigoles en forme de coin, a été pour la première fois étudié par [Langbein \[1990\]](#). À partir d'arguments énergétiques, il a montré qu'en fonction de l'angle de contact et de l'angle d'ouverture des coins, des cylindres statiques pouvaient être stables ou instables. Ces résultats ont été étendus par [Roy & Schwartz \[1999\]](#), en considérant diverses géométries de substrats et différentes conditions de mouillage. La stabilité de rivulets en écoulement le long de coins a été étudiée par [Yang & Homsy \[2007\]](#) (dans l'approximation de lubrification avec un modèle de ligne de contact mobile) et par [Speth & Lauga \[2009\]](#) dans le cas statique (dans la limite non visqueuse, pour une ligne de contact piégée). Enfin, dans le cas où l'on applique une contrainte géométrique circulaire le long d'un côté du cylindre liquide, [Bostwick & Steen \[2010\]](#) ont montré que les effets de cette contrainte étaient de diminuer les taux de croissance des instabilités. Dans tous les cas de figure mentionnés ici, les effets dus à la gravité ne sont pas pris en compte. Seule une section de cylindre de forme circulaire a été considérée.

Pour résumer tout ce qui vient d'être écrit, nous pouvons ainsi constater que l'instabilité de Plateau-Rayleigh dans des cylindres liquides dépend de la forme de la section transverse et des conditions de mouillage lorsque celui-ci est posé sur un substrat, qu'il soit plat, en forme de coin ou bien courbé. De plus, l'échelle de la section est à prendre en compte car elle peut réduire les nombres d'onde critiques de la perturbation au-delà desquels le cylindre est stable. Ainsi, [Diez et al. \[2009\]](#) ont montré que dans une certaine mesure, la gravité, connue pour aplatir les gouttes, pouvait avoir un effet stabilisant sur l'instabilité de Plateau-Rayleigh.

Notons aussi que l'instabilité de Plateau-Rayleigh peut être plus ou moins inhibée dans des tubes dont l'intérieur est enrobé d'un liquide, à cause du drainage gravitationnel [[Duclaux et al., 2006](#)]. La stabilité de cylindres liquides a aussi été étudiée pour d'autres systèmes : des liquides ferromagnétiques stabilisés par un champ magnétique orthoradial [[Arkhipenko et al., 1980](#)] ; des solides mous pour lesquels l'instabilité de Plateau-Rayleigh peut être supprimée à cause de forces élastiques qui s'y opposent [[Mora et al., 2010](#)].

Nous n'avons parlé jusqu'ici que de cylindres. Dans le cas du tore, le premier à en avoir rapporté l'observation est [Plateau \[1843\]](#) qui a mentionné que des tores liquides pouvaient être produits par centrifugation de gouttes, mais que ces tores n'étaient pas stables et qu'ils se fragmentaient. [Worthington \[1880\]](#), contemporain de Rayleigh et Plateau, a étudié plus quantitativement la fragmentation d'anneaux liquides, afin de comparer et étendre les résultats de [Plateau \[1849\]](#) sur les gouttes rectilignes. La question de la stabilité des tores liquides est un sujet en soi, car non seulement il peut se fragmenter, mais aussi refermer son trou à cause de la tension de surface. Nous aborderons de nouveau la question ultérieurement en [I.3.4](#).

Pour en revenir à nos systèmes, les gouttes allongées que nous considérons, qu'elles soient rectilignes dans le cas cylindrique ou refermées sur elles-mêmes dans le cas des

tores, qu'elles soient en état Leidenfrost ou posées sur un substrat ne se brisent pas, tant que leur volume est suffisamment important. Plateau [1849] avait écrit qu'une colonne liquide ne se brisait pas, pourvu que sa longueur fût inférieure au périmètre de sa section. Les gouttes montrées sur les photos des figures I.1 (a), I.3 (a), I.4 (c) et I.5 (d) ne satisfont manifestement pas ce critère. Vu leur extension latérale bien supérieure à la longueur capillaire, elles sont aplaties par la gravité dont on sait qu'elle peut jouer un rôle stabilisant.

L'instabilité de Plateau-Rayleigh est une instabilité qui vaut pour des nombres d'onde k entre zéro et un certain $k_{\max}$ (voir annexe C.2.1, p. 128 pour un rappel du calcul), c'est une instabilité à petit nombre d'onde, i.e. à grande longueur d'onde. Nous avons résolu la question de la stabilité des gouttes cylindriques posées sur un substrat super-hydrophobe en calculant d'abord leur forme exacte (cf. chapitre II) puis en effectuant une analyse de stabilité linéaire, non pas en calculant un taux de croissance mais, de manière équivalente, en se posant la question des ondes qui peuvent se propager le long de ces cylindres. Pour cela, nous avons utilisé les équations de Saint-Venant qui permettent d'obtenir la relation de dispersion des ondes de constriction (i.e. les ondes variqueuses) le long du cylindre et qui, dans la limite $k \rightarrow 0$, se met sous la forme $\omega^2 = c_{\text{eff}}^2 k^2$; aussi, le cylindre est-il stable si $c_{\text{eff}}^2 > 0$, alors qu'il est instable lorsque $c_{\text{eff}}^2 < 0$.

Dans ce formalisme, on peut calculer de manière exacte cette vitesse effective et montrer que, posé sur un substrat plat super-hydrophobe, un cylindre n'est jamais stable. En revanche, dès que le substrat n'est plus plat, à cause de la présence de liquide sous la calotte capillaire, la quantité c_{eff}^2 peut devenir positive, pourvu que la section du cylindre soit suffisamment importante. On peut donc propager des ondes variqueuses le long du cylindre. Expérimentalement, nous avons mesuré les spectres de ces ondes et en avons déduit la relation de dispersion qui a un comportement linéaire au voisinage de $k = 0$. La pente à l'origine de la branche variqueuse correspond alors bien à la valeur de c_{eff} sans paramètre ajustable (cf. figure I.6).

De ce raisonnement, on peut en déduire la section critique de liquide en dessous de laquelle l'instabilité de Plateau-Rayleigh se manifeste. La prédiction a été confrontée à des mesures expérimentales avec un bon accord.

Toute cette étude a fait l'objet d'une publication dans *Journal of Fluid Mechanics* en 2020⁴ (voir article joint en annexe B). La section III.1 de ce manuscrit lui est longuement consacrée.

La figure I.6 montre la branche variqueuse, celle qui va à zéro pour $k \rightarrow 0$. Elle n'est linéaire qu'au voisinage de $k = 0$ (régime grande longueur d'onde non dispersif). D'autres branches sont visibles, caractérisées par des pulsations de coupure. La question est alors de déterminer leur nature, ce qui nous amène au sujet d'étude de la partie qui suit.

I.3.2 Nature des ondes linéaires

Dans la sous-section I.3.1, il a été question de jets, i.e. de cylindres dont la surface était totalement libre, mais aussi de rivulets lorsque le cylindre était posé sur un substrat plat. Enfin, une autre classe de cylindres à surface libre concerne les écoulements ouverts le long d'un canal.

⁴Pham et al., *J. Fluid Mech.* 2020

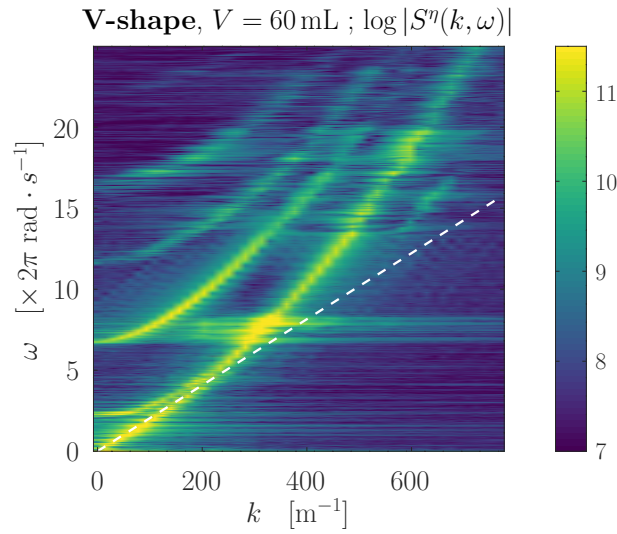


Figure I.6 : Cas d'un substrat en V. On a déposé 60 mL de liquide sur le substrat, sachant que sa longueur vaut 50 cm. À partir de la valeur de la section, on peut en déduire la forme caractéristique de la goutte et la valeur de c_{eff} . Elle correspond à la pente à l'origine de la branche variqueuse. En pointillé, on a tracé la relation de dispersion $\omega = c_{\text{eff}}k$ déduite du modèle de Saint-Venant. L'accord est très bon, sans paramètre ajustable.

Dans le cas des jets ou des rivulets, les principaux modes de déformation correspondent aux modes variqueux (donc avec changement de section le long du cylindre) ou aux modes sinueux (déplacement du centre de masse dans la direction transverse).

Dans le cas des écoulements en canal ouvert, les masses liquides sont stables, du moins à des échelles supérieures au centimètre ; la gravité agit comme une force stabilisatrice et des ondes de surface peuvent se propager le long du canal. Ces écoulements dans les canaux sont l'un des plus anciens sujets d'étude en hydrodynamique (voir [Craik \[2004, 2005\]](#) pour une revue historique). Dans tous les livres d'hydrodynamique, au chapitre consacré aux ondes, est présenté le résultat classique des ondes gravito-capillaires. Deux régimes peuvent être distingués : un régime où la profondeur est petite (régime capillaire), un régime où la profondeur du canal est grande (régime gravitaire). Le calcul dans un canal rectangulaire est par exemple donné dans le livre classique de [Lamb \[1932\]](#). Il est en fait assez facile d'aller au-delà du calcul classique des ondes gravito-capillaires (qui sont les ondes variqueuses du canal) et de s'intéresser à d'autres modes de propagation, à savoir les modes de ballotement (en anglais, *sloshing*) [[Lamb, 1932](#); [Groves, 1994](#)]. Dans des réservoirs finis, ils correspondent à des ondes stationnaires ; historiquement, s'agissant du lac Léman, le phénomène avait été baptisé « seiche » par [Forel \[1904\]](#). Des ouvrages entiers ont été écrits sur le ballotement [[Ibrahim, 2005](#)].

À des échelles plus petites, l'instabilité de Plateau-Rayleigh entre en jeu et nous avons montré, avec notre système de gouttes posées sur un substrat en coin, que c'est la présence du substrat qui pouvait rendre stable un cylindre posé sur ce substrat. À substrat donné, nous avons étudié le régime dispersif des ondes variqueuses, ainsi que les branches supérieures qui apparaissaient dans les spectres. Cette étude a donné

lieu à un article qui sera bientôt publié dans *Journal of Fluid Mechanics*⁵ et dont nous résumons ici les résultats. Les détails en seront donnés au chapitre III.

I.3.2.a Ondes variqueuses

Nous avons montré que la relation de dispersion générale des ondes variqueuses était de la forme

$$\omega^2 = \left[g_{\text{eff}} k + \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\rho} k^3 \right] \Psi(kW_{\text{eff}}), \quad (\text{I.1})$$

où $g_{\text{eff}} = g \sin \alpha$, W_{eff} une largeur effective telle que l'on a la relation $c_{\text{eff}}^2 = g_{\text{eff}} W_{\text{eff}}$ où la quantité c_{eff}^2 peut être calculée de manière exacte (celle-là même qui a servi à calculer les seuils de l'instabilité de Plateau-Rayleigh dans notre premier article de *Journal of Fluid Mechanics* [Pham *et al.*, 2020]). Ψ est une fonction que l'on peut approcher par la fonction tanh et σ_{eff} est une tension de surface effective dont la valeur est inférieure à σ , la valeur théorique de la tension de surface ($\sigma = 72 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$ pour l'eau). La valeur expérimentale de cette tension de surface effective, obtenue par des ajustements avec les spectres expérimentaux, peut être approchée via un modèle jouet. Elle a pour origine une distribution de courbure non triviale des modes variqueux le long de l'interface de la goutte.

En figure I.7, nous montrons quelques spectres spatio-temporels des déformations de nos gouttes à différents volumes. La relation de dispersion donnée par l'équation (I.1) ainsi que la relation de dispersion linéaire analytique donnée par le modèle de Saint-Venant $\omega = c_{\text{eff}} k$ sont superposées aux courbes expérimentales. L'accord est très bon. En figure I.7 (d), les spectres sont tracés en échelle log-log pour montrer les comportements linéaires à k petit et en $k^{3/2}$ à k grand.

Notons que pour de grands volumes, la courbe n'est pas convexe. Elle l'est en revanche pour des volumes $V \lesssim 80 \text{ mL}$. On retrouve le même comportement que dans le cas classique du canal rectangulaire. Définissons pour cela le nombre de Bond effectif Bo_{eff} et le nombre de Bond critique Bo_c définis comme

$$\text{Bo}_{\text{eff}} = \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\rho g_{\text{eff}} W_{\text{eff}}^2}, \quad \text{Bo}_c = \frac{|\Psi'''(0)|}{6}. \quad (\text{I.2})$$

Le changement de convexité de la relation de dispersion peut se trouver en effectuant un développement limité à l'ordre 4 de l'expression (I.1) qui donne, dans la mesure où Ψ est une fonction impaire et concave,

$$\omega^2 = \left[g_{\text{eff}} k + \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\rho} k^3 \right] \left[kW_{\text{eff}} - \frac{|\Psi'''(0)|}{6} (kW_{\text{eff}})^3 + \mathcal{O}((kW_{\text{eff}})^5) \right], \quad (\text{I.3})$$

$$= g_{\text{eff}} W_{\text{eff}} k^2 \left[1 + (\text{Bo}_{\text{eff}} - \text{Bo}_c) (kW_{\text{eff}})^2 \right] + \mathcal{O}((kW_{\text{eff}})^6). \quad (\text{I.4})$$

À ce nombre de Bond critique, on passe d'un régime capillaire (dit aussi eau peu profonde, où $\text{Bo}_{\text{eff}} > \text{Bo}_c$ et la relation de dispersion est convexe) à un régime gravitaire (dit aussi eau profonde, où $\text{Bo}_{\text{eff}} < \text{Bo}_c$ et la relation de dispersion est non convexe). La même relation de dispersion variqueuse et les mêmes régimes ont pu être observés dans les cylindres en état Leidenfrost.

⁵Le Doudic *et al.*, *J. Fluid Mech* 2021, accepté

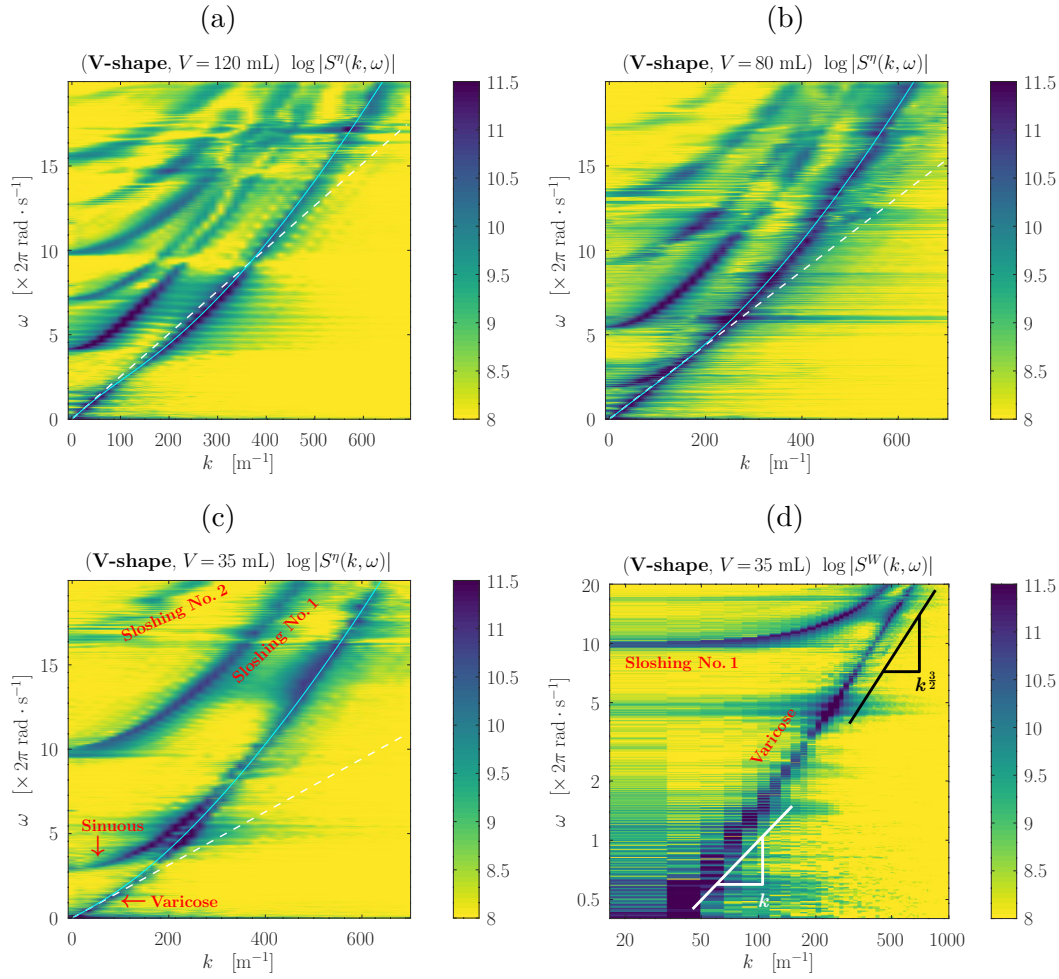


Figure I.7 : Spectres spatio-temporels $S^\eta(k, \omega)$ des déformations d'un bord d'un cylindre sur substrat en V super-hydrophobe pour trois volumes V différents : (a) $V = 120$ mL, (b) $V = 80$ mL, (c) $V = 35$ mL, à angle $\alpha = 10^\circ$. Plus le volume est grand, plus la pente à l'origine c_{eff} l'est. Nous montrons la relation non dispersive $\omega = c_{\text{eff}}k$ (pointillés blancs) et la relation de dispersion (I.1) avec $\tanh$ comme ansatz de la fonction Ψ (traits pleins cyan) et $\sigma_{\text{eff}} \simeq 58 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$. Les accords sont très bons. Notons un changement de convexité de la relation de dispersion variqueuse autour de $V \simeq 80$ mL. Les autres branches, caractérisées par des pulsations de coupure, correspondent aux modes sinueux et de ballonnement. (d) Spectre $S^W(k, \omega)$ de la largeur $W(x, t)$, à volume $V = 35$ mL, en échelle log-log. La branche sinueuse visible en (c), de fréquence de coupure $f_{\text{sinueuse}} \simeq 2,6$ Hz a disparu; seules subsistent la branche variqueuse et les branches de ballonnement. Les lois d'échelle à $k \rightarrow 0$ et $k \rightarrow \infty$ ont été ajoutées.

I.3.2.b Modes sinueux, modes de ballonnement

Des branches au-dessus de la branche variqueuse sont visibles, chacune caractérisée par une fréquence de coupure. La première branche supérieure est la branche sinueuse. Elle disparaît lorsque l'on considère les spectres spatio-temporels de la largeur $W(x, t)$ du cylindre (voir figure I.7 (d)). Il s'agit des modes de déformation à largeur constante; ce sont les modes de déplacement transverse du centre de masse.

Les autres branches correspondent aux modes de ballotement, dus à la présence du substrat sous la calotte capillaire. Les fréquences de coupure peuvent être caractérisées. Une étude numérique a permis de faire des comparaisons avec les résultats expérimentaux, détaillés dans la section III.2.

I.3.3 Ondes non linéaires

On peut se poser la question de ce qui se passe au-delà du régime non linéaire. Dans le cas du tore en Leidenfrost, l'onde de surface polygonale aux angles très marqués de la figure I.1 (b) avait évoqué des solitons de Korteweg–de Vries à Perrard *et al.* [2012].

Ces solitons ont été observés pour la première fois sous la forme d'une bosse liquide en 1844, par J. S. Russell qui en a rapporté la propagation à vitesse et profil constants le long d'un canal de section rectangulaire [Russell, 1844]. C'est en 1895 que Korteweg et de Vries ont établi ladite équation de Korteweg–de Vries (KdV), qui gouverne cette onde de type soliton. Ils en ont caractérisé la vitesse de propagation, l'amplitude et la largeur. Ils ont prédit en outre l'existence de solitons d'amplitude négative dès que la profondeur d'eau H devient inférieure à $\sqrt{3}\ell_c$, où $\ell_c = \sqrt{\sigma/(\rho g)}$ désigne la longueur capillaire, c'est-à-dire dès que le nombre de Bond $Bo = \sigma/(\rho g H^2)$ est plus grand que le nombre de Bond critique $1/3 = |\tanh'''(0)|/6$ [Korteweg & de Vries, 1895]. La première observation expérimentale de tels solitons en dépression a été faite par Falcon *et al.* [2002], à la surface d'une fine couche de mercure.

Ces solitons en dépression ont aussi été observés le long de nos cylindres en état Leidenfrost, ainsi que dans le cas des cylindres posés sur substrat super-hydrophobe. Nous avons montré qu'une équation de Korteweg–de Vries adaptée à nos substrats gouverne la propagation de ces ondes solitaires. Elle s'écrit sous la forme

$$\eta_t + c_{\text{eff}} \left[\eta_x + \frac{\nu_1}{W_{\text{eff}}} \eta \eta_x + \frac{1}{2} W_{\text{eff}}^2 (Bo_c - Bo_{\text{eff}}) \eta_{xxx} \right] = 0. \quad (\text{I.5})$$

Elle est la conséquence de la relation de dispersion développée jusqu'à sa première correction dispersive (I.4) et à laquelle on ajoute une contribution non linéaire due à la nature non linéaire des équations de Saint-Venant. Le coefficient ν_1 devant le terme non linéaire peut être calculé analytiquement, en bon accord avec les résultats expérimentaux. Le chapitre IV est consacré à ces résultats qui font partie de l'article de *Journal of Fluid Mechanics*⁶ récemment accepté.

I.3.4 Gouttes toriques

Les premiers objets physiques de forme torique qui peuvent venir à l'esprit sont les plasmas confinés dans un tokamak [Chen, 2016]. On peut aussi songer aux ronds de fumée émis par les fumeurs, manifestation d'un vortex de forme annulaire qu'on peut même observer au-dessus des volcans [Taddeucci *et al.*, 2015]. On peut songer également à des bulles en anneau [Walters & Davidson, 1963], comme celles produites par les dauphins [Marten *et al.*, 1996].

Si un anneau liquide est facile à obtenir en versant simplement de l'eau dans un réservoir de forme annulaire (un simple moule à savarin par exemple), l'observation

⁶Le Doudic *et al.*, *J. Fluid Mech.* 2021, accepté

d’anneaux liquides sur un substrat plan est plus ardue. On peut en observer par exemple lors d’un impact de goutte sur un substrat super-hydrophobe [Renardy *et al.*, 2003] mais ces gouttes toriques sont instables. Il en est de même lors de l’impact d’une goutte sur une fine couche de liquide [Deegan *et al.*, 2008], comme l’a illustré Edgerton avec sa célèbre goutte de lait en corolle (*Milk Drop Coronet*, 1935).

Historiquement, les premiers tores liquides ont été observés par Plateau [1843] en mettant en rotation des gouttes d’huile dans un mélange eau–alcool afin d’être en situation d’iso-densité. Lorsque la rotation est grande, une goutte torique peut alors être produite. Celle-ci se fragmente ensuite, à cause de la capillarité. La première étude quantitative de stabilité d’anneaux liquides a été faite par Worthington [1880], son contemporain, qui voulait vérifier si était bien satisfait le critère de stabilité avancé par Plateau selon lequel une goutte allongée était stable si le périmètre de sa section était plus grand que sa longueur.

Depuis, l’instabilité de Plateau–Rayleigh a été observée expérimentalement dans des tores de polymères liquides posés sur un substrat [McGraw *et al.*, 2010]. Elle a été analysée numériquement par [González *et al.*, 2013] dans des conditions de mouillage partiel, en faisant attention aux conditions de mouillage à prendre en compte, importantes pour avoir stabilité ou non du système [Chugunov *et al.*, 2011]. Les auteurs dans cette étude ont aussi montré la compétition entre la fragmentation du tore et la fermeture de son trou.

Un tore liquide n’est en effet certainement pas une forme qui minimise sa surface. Posé sur un substrat, un liquide prend, en fonction de son volume, la forme d’une calotte sphérique pour de petits volumes ou la forme d’une flaque pour de grands volumes [de Gennes *et al.*, 2002]. Un liquide en forme de tore aura naturellement tendance à refermer son trou afin de minimiser sa surface libre. Plateau [1843] avait aussi signalé qu’a priori, son tore liquide devait se recontracter en une sphère, mais qu’il constatait plutôt la fragmentation de ce tore en petites gouttes.

Les premiers à avoir étudié en détail la compétition entre cette fermeture du tore vers la forme sphérique et la fragmentation du tore en question via l’instabilité de Plateau–Rayleigh ont été Páram & Fernández-Nieves [2009], en injectant une goutte de liquide non miscible dans un liquide mis en rotation. Le système peut adopter l’une ou l’autre configuration finale en fonction des caractéristiques géométriques du tore : pour un tore fin, c’est l’instabilité de Plateau–Rayleigh qui prend le dessus, pour un tore épais, le tore préfère refermer son trou. Des études numériques ont été faites sur la question Mehrabian & Feng [2013] ; des mesures du taux de croissance de l’instabilité de Plateau–Rayleigh de tores minces ont été effectuées et des mesures PIV des écoulements lors de la phase de fermeture du trou pour des tores épais ont aussi été faites [Fragkopoulos *et al.*, 2017, 2018].

À l’inverse, plutôt que d’avoir un tore qui referme son trou, des gouttes 2D en état Leidenfrost, obtenues par confinement dans une cellule de Hele-Shaw chauffée, voient leur trou grossir à cause de la vapeur produite [Celestini *et al.*, 2014; Raufaste *et al.*, 2015].

Obtenir des tores liquides stables n’est ainsi pas chose aisée. En reprenant l’idée d’un liquide non miscible injecté dans un liquide en rotation, en considérant cette fois un bain de fluide à seuil, et un tore fait de cristaux liquides nématiques, Páram *et al.* [2013] ont montré qu’un tore pouvait rester stable. Des tores en état Leidenfrost stables (modulo leur évaporation) ont été obtenus en utilisant des substrats courbés

et de l'eau par Perrard *et al.* [2012] comme présenté en I.1, et plus récemment par Bergen *et al.* [2019], ou bien en utilisant des obstacles annulaires avec de l'azote liquide [Ludu & Raghavendra, 2019]. Enfin des anneaux liquides, stables eux aussi, ont été obtenus en utilisant du mercure versé autour d'un cylindre solide et pris en sandwich entre deux plaques [Laroche *et al.*, 2019]. Ce système possède des bords extérieurs libres et mobiles, le mercure ne mouillant pas le substrat sur lequel il est déposé. Le centre en revanche est complètement bloqué par la présence du cylindre central.

Le système que nous utilisons et avons présenté en I.2.3, consistant à déposer un grand volume de liquide sur un substrat super-hydrophobe très faiblement incliné, permet d'avoir une très grande surface libre, très mobile, car nous sommes en situation de mouillage super-hydrophobe. C'est le pendant géométrique des gouttes en Leidenfrost de Perrard *et al.* [2012]. Le dispositif a l'avantage de se faire à température ambiante, d'être complètement statique à l'équilibre, ce que n'étaient pas les gouttes en caléfaction du fait de la présence du film de vapeur sous la goutte et des éventuels mouvements de convection poloïdaux.

Les études concernant ce système en sont à leur début. Nous avons mesuré expérimentalement les relations de dispersion des ondes qui se propagent le long des bords internes et externes de la goutte en filmant les expériences en vue de dessus et en enregistrant les déformations $\eta(\theta, t)$ des bords intérieurs et extérieurs au cours du temps (cf. figure I.5 (a) pour les notations). Le système étant périodique, une relation de dispersion est donc une relation entre une pulsation ω et un nombre d'onde k_θ qui prend des valeurs entières à cause de la périodicité en l'angle θ qui repère les bords de l'interface.

Nous avons identifié les différentes branches expérimentales du système. Celles-ci sont équivalentes au cas rectiligne : le système est caractérisé par une branche variqueuse dont la relation de dispersion est bien approchée par une expression similaire à celle du cas rectiligne (I.1). Elle s'écrit sous la forme

$$\omega^2 = \left[g_{\text{eff}} \left(\frac{k_\theta}{R_{\text{out}}} \right) + \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\rho} \left(\frac{k_\theta}{R_{\text{out}}} \right)^3 \right] \Psi \left[k_\theta \frac{W R_{\text{out}}}{2 R_c^2} \right], \quad (\text{I.6})$$

où l'on a de nouveau $g_{\text{eff}} = g \sin \alpha$ et Ψ une fonction dont la fonction $\tanh$ est un bon ansatz. Ici W est la largeur du tore, R_c le rayon du fond du substrat et $R_{\text{out}} = R_c + W/2$ le rayon extérieur du tore. La quantité σ_{eff} est une fois de plus une tension de surface effective, ici constante sur la plage de W étudiée. Les branches sinueuses et variqueuses ont été caractérisées par la même occasion.

Dans le cas où les effets de tension de surface peuvent être négligés, donc en considérant une interface au repos plane, les relations de dispersion des modes variqueux et des modes de ballottement ont été calculés précédemment [Campbell, 1953; Ibrahim, 2005].

Dès que la surface de l'état de base devient courbée, les ondes hydrodynamiques deviennent plus compliquées à caractériser. Cela a été réalisé expérimentalement dans des coquilles liquides sphériques [Holt & Trinh, 1996; Falcón *et al.*, 2009; Berhanu *et al.*, 2019], le long de cylindres liquides [Bourdin *et al.*, 2010; Perrard *et al.*, 2015; Pham *et al.*, 2020; Le Doudic *et al.*, 2021] où les relations de dispersion ont pu être calculées de manière théorique [Arkhipenko *et al.*, 1980; Pham *et al.*, 2020; Le Doudic *et al.*, 2021].

Les résultats trouvés dans notre tore à surface libre sont, à notre connaissance, la première observation expérimentale d'une relation de dispersion d'ondes le long d'un objet courbé dans toutes les directions et de surcroît périodique, ce qui permet en outre de s'affranchir des effets de bord. Stéphane Perrard avait fait des premiers essais de mesure sur le tore en Leidenfrost. Les données de l'époque ont été depuis perdues après la défaillance du disque dur qui les contenait... C'est devant les spectres observés que nous avons alors décidé de passer à la géométrie rectiligne que nous présentons en détail dans les chapitres qui suivent.

Chapitre II

Formes d'une goutte cylindrique et orbites d'un pendule pesant

Cette partie est une partie pédagogique consacrée à la caractérisation de la forme d'une goutte cylindrique soumise au champ de pesanteur. Nous traiterons a priori du cas d'une goutte posée mais le formalisme conduit en fait à traiter aussi du cas d'une goutte pendante. La forme d'une telle goutte cylindrique peut être trouvée en faisant une analogie avec les orbites d'un objet mécanique très familier, à savoir le pendule pesant.

Le mot cylindre devra être pris dans son acception mathématique, à savoir une surface réglée dont les génératrices sont dirigées selon un vecteur donné, ici orthogonal au champ de pesanteur.

Dans toute la suite, nous nous servirons des intégrales elliptiques complètes et incomplètes définies, pour n'importe quel paramètre $m < 1$, comme

$$E(\phi|m) = \int_0^\phi \sqrt{1 - m \sin^2 x} \, dx, \quad E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m \sin^2 x} \, dx, \quad (\text{II.1})$$

$$F(\phi|m) = \int_0^\phi \frac{dx}{\sqrt{1 - m \sin^2 x}}, \quad K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - m \sin^2 x}}. \quad (\text{II.2})$$

II.1 Cas d'un substrat plat

II.1.1 Mise en équation du problème

Soit z la direction verticale dirigée vers le haut. La direction x sera choisie dans toute la suite comme la direction des génératrices de nos cylindres. La forme des gouttes cylindriques que nous cherchons sera donc donnée par une courbe, notée Γ , l'interface libre du cylindre dans le plan (y, z) (cf. figure II.1). Γ sera paramétrée par son abscisse curviligne s . Les coordonnées d'un point $M(s)$ le long de l'interface seront notées $[\eta(s), \zeta(s)]$. En ce point, le vecteur tangent $\boldsymbol{\tau}$ est donné par $\boldsymbol{\tau} = \frac{dM(s)}{ds}$ et la courbure transverse (celle dans le plan (y, z)) sera notée κ^t . Elle est donnée par $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \kappa^t \mathbf{n}$, où $\mathbf{n}$ désigne le vecteur normal unitaire. Nous définissons l'angle $\phi(s)$ tel

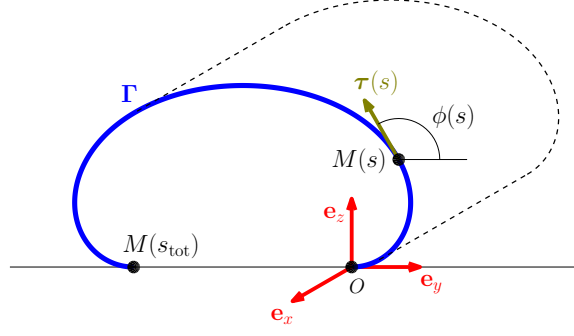


Figure II.1 : Forme de l'interface libre Γ d'une goutte cylindrique posée sur un substrat horizontal super-hydrophobe. La section de la goutte est invariante selon la direction x . Le bord de la goutte est paramétré par son abscisse curviligne s . La courbe part de l'origine O (à $s = 0$) et se termine en $M(s_{\text{tot}})$, avec s_{tot} , la longueur totale de l'arc paramétré. Le vecteur tangent τ en $M(s)$ fait un angle $\phi(s)$ avec l'horizontale.

que $\tau(s) = \cos \phi(s) \mathbf{e}_y + \sin \phi(s) \mathbf{e}_z$, si bien que l'on a

$$\kappa^t = \frac{d\phi}{ds}, \quad (\text{II.3})$$

$$\eta(s) = \eta_0 + \int_0^s \cos \phi(s) ds, \quad (\text{II.4})$$

$$\zeta(s) = \zeta_0 + \int_0^s \sin \phi(s) ds. \quad (\text{II.5})$$

Par convention, le point de départ de la courbe $M(s = 0) = (\eta_0, \zeta_0)$ sera situé à l'origine $O = (0, 0)$. La courbe commencera à angle $\phi(0) = 0$ au substrat.

Nous cherchons la forme statique d'une goutte. Le champ de pression $P(x, y, z, t)$ à l'intérieur du liquide vérifie l'équation de l'hydrostatique

$$-\nabla P(x, y, z, t) - \rho g \mathbf{e}_z = 0. \quad (\text{II.6})$$

Indépendant de (x, t) , il doit vérifier

$$\partial_y P(y, z) = 0, \quad (\text{II.7})$$

$$\partial_z P(y, z) = -\rho g. \quad (\text{II.8})$$

L'équation du gradient en z (II.8) entraîne qu'il est de la forme

$$P(y, z) = -\rho g z + A(y). \quad (\text{II.9})$$

avec A une certaine fonction de y qui dépendra des conditions aux limites à l'interface. Elle sera déterminée en utilisant la loi de Laplace en un point $M(s) = [\eta(s), \zeta(s)]$ de l'interface,

$$P[M(s)] - P_{\text{atm}} = \sigma \kappa^t(s), \quad (\text{II.10})$$

où P_{atm} désigne la pression du gaz au-dessus du liquide, supposée constante, σ la tension de surface et κ deux fois la courbure moyenne de l'interface, avec ici $\kappa = \kappa^t(s)$. En conséquence, le champ de pression P vaut

$$P(y, z) = -\rho g [\zeta(s) - z] + \sigma \kappa^t(s) + P_{\text{atm}} \quad (\text{II.11})$$

pour s tel que $z = \zeta(s)$. Cette équation doit être valable pour n'importe quel y (cf. équation (II.7)) et donc pour n'importe quel s , si bien que l'on doit avoir

$$\rho g \zeta(s) + \sigma \kappa^t(s) = \mathcal{C}_0, \quad \forall s, \quad (\text{II.12})$$

avec $\mathcal{C}_0$ une certaine constante indépendante de l'abscisse x .

Par la suite, nous noterons ℓ_c la longueur capillaire définie traditionnellement comme

$$\ell_c^2 = \frac{\sigma}{\rho g}. \quad (\text{II.13})$$

En dérivant (II.12) selon s , sachant que $\frac{d\zeta}{ds} = \sin \phi(s)$, nous obtenons alors

$$\frac{d^2 \phi}{ds^2} + \frac{1}{\ell_c^2} \sin \phi(s) = 0, \quad (\text{II.14})$$

qui est l'analogue de la classique équation du mouvement d'un pendule pesant, où la variable temps est maintenant l'abscisse curviligne s . Enfin, d'un point de vue hamiltonien, l'équation (II.14) est équivalente à

$$\frac{1}{2} \left[\frac{d\phi}{ds} \right]^2 + \frac{1}{\ell_c^2} [1 - \cos \phi(s)] = \mathcal{E} \text{ constante} \equiv \mathcal{H}(q, p), \quad (\text{II.15})$$

pour $\mathcal{H}$, le hamiltonien d'un pendule de pulsation $1/\ell_c$, la variable temps s et

$$(q, p) \equiv \left(\phi, \frac{d\phi}{ds} \right) = (\phi, \kappa^t), \quad (\text{II.16})$$

la paire de variables conjuguées. En tant que système conservatif, nous avons donc $\mathcal{H}[q(s), p(s)] = \mathcal{E}$, l'« énergie » conservée tout au long du « temps » s . Elle ne dépend donc que des conditions initiales $(\phi = \phi_i, \frac{d\phi}{ds} = \kappa_i^t)|_{s=s_i}$, à un « temps » initial s_i , si bien que

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} [\kappa_i^t]^2 + \frac{1}{\ell_c^2} [1 - \cos \phi_i]. \quad (\text{II.17})$$

La valeur de l'énergie $\mathcal{E}$ repère les différentes orbites du système dynamique autonome donné par les équations de Hamilton correspondantes

$$\begin{cases} \frac{dq}{ds} = + \frac{d\mathcal{H}}{dp}, \\ \frac{dp}{ds} = - \frac{d\mathcal{H}}{dq}, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{d\phi}{ds} = \kappa^t, \\ \frac{d\kappa^t}{ds} = - \frac{1}{\ell_c^2} \sin \phi. \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

Le deuxième terme de $\mathcal{E}$ dans (II.17) — celui donné par l'énergie potentielle — est borné par valeur supérieure, tandis que le premier terme — qui correspond à l'énergie cinétique, ici, les contributions dues à la courbure de l'arc — peut prendre des valeurs arbitraires.

Posons $\mathcal{E}_c = 2/\ell_c^2$. Les orbites correspondant à $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c$ correspondent aux séparatrices dans l'espace des phases (ϕ, κ^t) . Elles sont données par les équations

$$\kappa^t(\phi) = \frac{d\phi}{ds} = \pm \frac{2}{\ell_c} \cos \frac{\phi}{2}. \quad (\text{II.19})$$

Paramétrées par abscisse curviligne s , allant de $-\infty$ à $+\infty$, elles sont décrites par

$$\phi(s) = \mp\pi \pm 4 \arctan \exp \left[\pm \frac{s}{\ell_c} \right] + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (\text{II.20})$$

Les séparatrices en question sont montrées en figure II.2. Elles partitionnent l'espace des phases en des régions bornées (correspondant aux mouvements d'oscillation du pendule) et des régions non bornées (correspondant aux mouvements de rotation du pendule). Dans le cadre du pendule, ces séparatrices correspondent à des orbites hétéroclines connectant des positions instables voisines $\phi_k = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$. Nous verrons que dans le cas de gouttes cylindriques, elles correspondent au cas limite de gouttes d'extension horizontale transverse infinie.

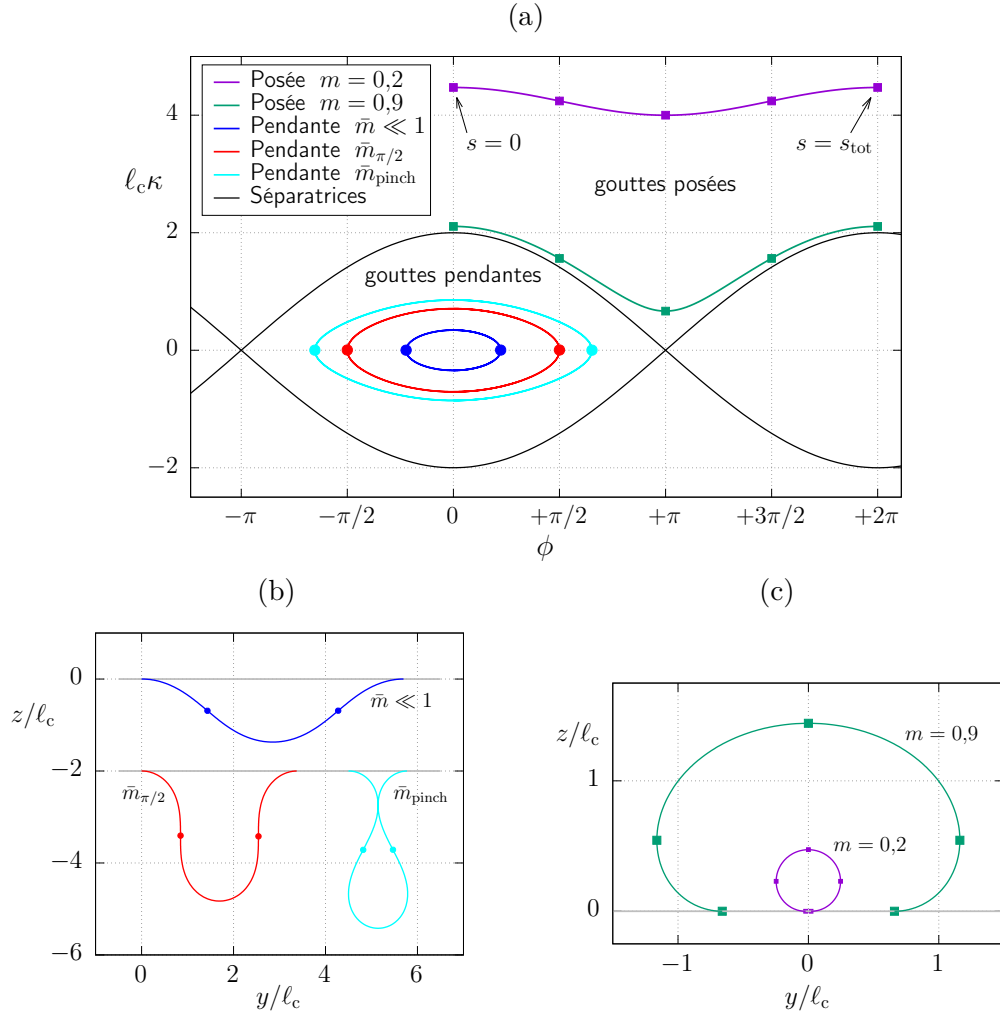


Figure II.2 : (a) Espace des phases et orbites typiques pour différents paramètres m et $\bar{m}$ ainsi que les séparatrices ($\mathcal{E} = \mathcal{E}_c$). Formes correspondantes de (b) gouttes pendantes et (c) gouttes sessiles, éventuellement décalées pour plus de clarté. Quelques points des orbites sont indiqués, qui correspondent à ceux reportés sur les formes des gouttes.

II.1.2 Gouttes pendantes

Les orbites à l'intérieur des séparatrices ($\mathcal{E} < \mathcal{E}_c$) sont fermées et correspondent aux modes oscillatoires du pendule. En matière de gouttes, elles décrivent la forme de l'interface de la section d'une goutte *pendante* cylindrique, accrochée à un substrat horizontal, et commençant avec un angle de contact nul au substrat. L'angle ϕ dirigeant la courbe est donné par

$$\phi(s) = 2 \arcsin \left[\sin \frac{\phi_0}{2} \operatorname{sn} \left(\frac{s}{\ell_c}; \sin^2 \frac{\phi_0}{2} \right) \right], \quad (\text{II.21})$$

avec sn la fonction elliptique de Jacobi de paramètre $\bar{m}$ tel que

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_c} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{m} = \sin^2 \frac{\phi_0}{2} < 1, \quad (\text{II.22})$$

de telle sorte que ϕ_0 correspond à l'angle de la courbe en son point d'inflexion (c'est l'amplitude de l'oscillation du pendule correspondante), c'est-à-dire, lorsque sa courbure est nulle.

La longueur totale de l'arc correspond à la période des oscillations du pendule. Elle est donnée par l'intégrale elliptique de première espèce K

$$s_{\text{tot}} = \int_{-\phi_0}^{+\phi_0} \frac{\ell_c d\phi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\phi_0}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2}}} = 4 K(\bar{m}) \ell_c. \quad (\text{II.23})$$

Dans la limite des petits $\bar{m}$, nous retrouvons le fait que l'oscillateur est quasi-harmonique et l'on a donc dans ce régime : $s_{\text{tot}} \simeq 2\pi\ell_c$.

Remarquons que ces sections ne seront plus convexes dès lors que $\phi_0 > \frac{\pi}{2}$ (pour $\phi_0 = \pi/2$, la direction de l'inflexion est alors verticale). Elles peuvent en outre s'auto-intersecter au-delà de la valeur $\phi_0^{\text{auto}} \simeq 0,653 \pi$, i.e. lorsque $\mathcal{E}/\mathcal{E}_c \gtrsim 0,731 \equiv \bar{m}_{\text{pinch}}$.

II.1.3 Gouttes posées

Dans les travaux que nous présentons dans ce manuscrit, nous nous intéressons à des gouttes cylindriques, *posées* sur un substrat. Leur forme correspond aux orbites du pendule telles que $\mathcal{E} > \mathcal{E}_c$, c'est-à-dire les orbites à l'extérieur des séparatrices. Elles sont liées au mouvement de rotation du pendule. Définissons le paramètre m tel que

$$\frac{\mathcal{E}_c}{\mathcal{E}} \stackrel{\text{def}}{=} m < 1. \quad (\text{II.24})$$

La courbure transverse κ^t est donnée par

$$\kappa^t(\phi) = \frac{d\phi}{ds} = \pm \frac{2}{\ell_c \sqrt{m}} \sqrt{1 - m \sin^2 \frac{\phi}{2}}, \quad (\text{II.25})$$

ce qui donne la solution

$$\phi(s) = 2 \arcsin \left[\operatorname{sn} \left(\frac{s}{\ell_c \sqrt{m}}; m \right) \right], \quad (\text{II.26})$$

avec la bonne détermination de la fonction arcsin et sn, la fonction elliptique de Jacobi de paramètre m . $\phi(s)$ peut aussi s'exprimer à l'aide d'une fonction amplitude am. Pour un m donné, la longueur totale de l'arc s_{tot} est donnée par

$$s_{\text{tot}}(m) = \frac{\ell_c \sqrt{m}}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \frac{\phi}{2}}} = 2\ell_c \sqrt{m} K(m) \quad (\text{II.27})$$

et les orbites dans l'espace des phases sont données par la courbe paramétrée selon l'angle ϕ

$$\eta(\phi) = \frac{\ell_c}{2} \sqrt{m} \int_0^\phi d\varphi \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}, \quad (\text{II.28})$$

$$\zeta(\phi) = \frac{\ell_c}{2} \sqrt{m} \int_0^\phi d\varphi \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}. \quad (\text{II.29})$$

les courbes ayant pour origine le point $O = (0, 0)$. Les expressions explicites de $\eta(\phi)$ et $\zeta(\phi)$ s'écrivent

$$\eta(\phi) = \frac{2\ell_c}{\sqrt{m}} \left[E\left(\frac{\phi}{2} | m\right) - \left(1 - \frac{m}{2}\right) F\left(\frac{\phi}{2} | m\right) \right], \quad (\text{II.30})$$

$$\zeta(\phi) = \frac{2\ell_c}{\sqrt{m}} \left[1 - \sqrt{1 - m \sin^2 \frac{\phi}{2}} \right]. \quad (\text{II.31})$$

Notons que [Lamb \[1928, §127\]](#), [Ku et al. \[1968\]](#) avaient proposé des expressions semblables, avec d'autres jeux de paramètres sans recourir à des analogies avec le pendule, tandis que [Michael & Williams \[1977\]](#) avaient résolu le problème de manière numérique.

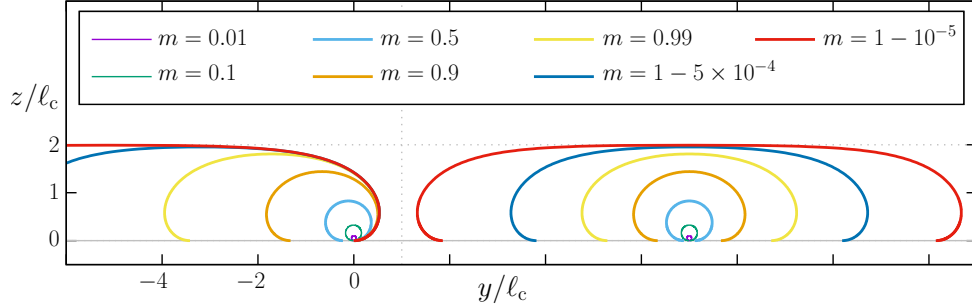


Figure II.3 : À gauche, forme de gouttes posées sur un substrat horizontal superhydrophobe pour différentes valeurs de m , calculées en partant de l'origine O . Plus m est proche de 1, plus la goutte est large. Dans cette limite, la hauteur de la goutte approche $2\ell_c$. À l'opposé, lorsque m tend vers 0^+ , la section de la goutte devient quasi-circulaire. À droite, les mêmes gouttes mais centrées selon leur axe de symétrie.

Sur la figure [II.3](#), nous traçons différentes formes de gouttes pour différentes valeurs de m (la goutte tracée en figure [II.1](#) correspond quant à elle, à $m = 0,95$). La limite $m \rightarrow 0^+$ correspond à des gouttes de section petite, quasi-circulaires (elles ont une énergie $\mathcal{E}$ grande devant $\mathcal{E}_c$) tandis que la limite $m \rightarrow 1^-$ correspond à des gouttes aplaties (d'énergie $\mathcal{E}$ proche de $\mathcal{E}_c$, donc des orbites proches des séparatrices).

À partir des équations (II.30) et (II.31), nous pouvons calculer les grandeurs caractéristiques suivantes :

- *Épaisseur de la goutte :*

$$\Delta Z_{\max}(m) = \zeta(\pi) - \zeta(0) = 2\ell_c \frac{1 - \sqrt{1-m}}{\sqrt{m}}. \quad (\text{II.32})$$

Elle est bornée par valeur supérieure par $2\ell_c$ et l'on retrouve l'épaisseur maximale d'une flaque posée sur substrat hydrophobe qui vaut $2\ell_c$.

- *Courbure transverse au sommet de la goutte :*

$$\kappa_{\text{top}}(m) = \frac{2}{\ell_c} \sqrt{\frac{1-m}{m}}. \quad (\text{II.33})$$

Nous obtenons alors la relation suivante, conséquence de l'équation de l'hydrostatique (II.12) :

$$\frac{C_0(m)}{\rho g \ell_c} = \frac{\Delta Z_{\max}(m)}{\ell_c} + \ell_c \kappa_{\text{top}}(m) = \frac{2}{\sqrt{m}}. \quad (\text{II.34})$$

- *Extension horizontale de la goutte :*

$$\Delta Y_{\max} = \left[\eta\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \eta\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (\text{II.35})$$

$$= \frac{2\ell_c}{\sqrt{m}} \left\{ \left(1 - \frac{m}{2}\right) \left[F\left(\frac{\pi}{4}|m\right) - F\left(\frac{3\pi}{4}|m\right) \right] + \left[E\left(\frac{3\pi}{4}|m\right) - E\left(\frac{\pi}{4}|m\right) \right] \right\}. \quad (\text{II.36})$$

- *Section de la goutte :*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(m) &= - \int_{\Gamma} \zeta \, d\eta = - \int_0^{2\pi} \zeta(\phi) \frac{d\eta}{d\phi}(\phi) \, d\phi, \\ &= \frac{8\ell_c^2}{m} \left[\left(1 - \frac{m}{2}\right) K(m) - E(m) \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

- *Extension de la goutte au substrat :*

$$\Lambda_c(m) = [\eta(0) - \eta(2\pi)] = -\frac{\ell_c}{2} \sqrt{m} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \, d\varphi \quad (\text{II.38})$$

et l'on a la relation suivante entre $\Lambda_c(m)$ et $\mathcal{A}(m)$

$$\mathcal{A}(m) = \frac{2}{\sqrt{m}} \ell_c \Lambda_c(m), \quad (\text{II.39})$$

ce qui entraîne

$$\Lambda_c(m) = \frac{4\ell_c}{\sqrt{m}} \left[\left(1 - \frac{m}{2}\right) K(m) - E(m) \right]. \quad (\text{II.40})$$

II.2 Effets de l'angle de contact et cas d'un substrat en coin

II.2.1 Gouttes pendantes

Dans le cas des gouttes pendantes, nous sommes partis de la situation où l'angle de contact était nul. Supposons maintenant que le cylindre fasse un angle de contact donné ϕ_{cntct} au substrat, pour une valeur donnée $\bar{m} = \sin^2 \frac{\phi_0}{2}$. Si $\phi_{\text{cntct}} > \phi_0$, alors il n'y a pas de solution. En revanche, si $\phi_{\text{cntct}} < \phi_0$, alors deux solutions existent. Leur forme correspond à la partie en dessous d'un plan horizontal tel que la courbe complète à angle de contact nul l'intersecte à angle ϕ_{cntct} (voir la figure II.2). Il s'agit alors de deux plans horizontaux situés à $z = z_{\text{cntct}}^{\pm}$ qui vérifient

$$z_{\text{cntct}}^+ = z_0 + \frac{\ell_c}{2} \left\{ \int_0^{\phi_{\text{cntct}}} \frac{\sin \phi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\phi_0}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2}}} d\phi \right\}, \quad (\text{II.41})$$

$$z_{\text{cntct}}^- = z_0 + \frac{\ell_c}{2} \left\{ \int_0^{\phi_0} \frac{\sin \phi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\phi_0}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2}}} d\phi + \int_{\phi_{\text{cntct}}}^{\phi_0} \frac{\sin \phi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\phi_0}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2}}} d\phi \right\}. \quad (\text{II.42})$$

où $z_0 = \zeta(\phi_0)$ désigne l'altitude du point d'inflexion.

Ces formes ont été obtenues par Roman *et al.* [2004] et par Sumesh & Govindarajan [2010] en utilisant des résolutions numériques. Nous avons appris lors de la soumission de notre article de *Journal of Fluid Mechanics* 2020¹ qu'un ouvrage très exhaustif sur les gouttes pendantes avait été écrit par McCuan [2017].

II.2.2 Gouttes posées

Nous avons calculé la forme de gouttes posées cylindriques en supposant que les conditions de mouillage étaient super-hydrophobes, i.e. avec un angle de contact $\theta_c = \pi$. Cette forme correspond à une orbite commençant à $\phi = 0$ et se terminant à $\phi = 2\pi$. Dans le cas plus général d'un angle de contact $\theta_c \in]0, \pi[$ au substrat, la forme de l'interface est celle correspondant à la portion de cette même orbite, mais pour un angle ϕ allant de $\pi - \theta_c$ à $\pi + \theta_c$. Cela permet de retrouver analytiquement les formes de rivulets statiques, précédemment calculées numériquement par Myers *et al.* [2004].

À partir de ce constat et des formules précédentes, la forme d'une goutte posée sur un substrat super-hydrophobe en forme de coin (cf. figure II.4), celle de nos expériences, peut être calculée. Cette propriété sera réutilisée en III.1.3.c.

¹Pham *et al.*, *J. Fluid Mech* 2020

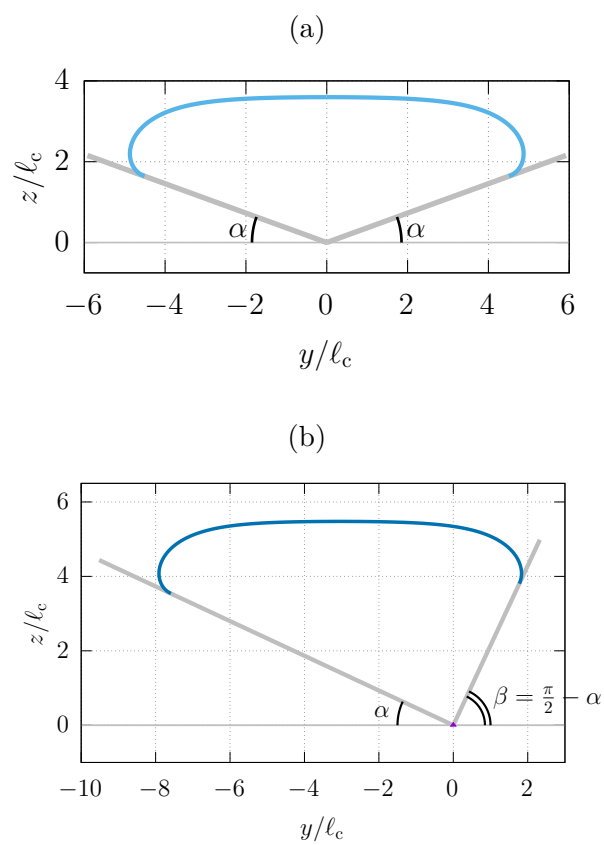


Figure II.4 : Exemple de formes de gouttes posées sur un substrat super-hydrophobe (a) en V et (b) en L.

Chapitre III

Ondes linéaires le long de cylindres liquides

Lorsque l'on enseigne la notion d'ondes dispersives et de relation de dispersion, ce sont les ondes gravito-capillaires se propageant à la surface libre d'un liquide que l'on prend généralement en exemple. L'expression de leur relation de dispersion s'écrit $\omega^2 = [gk + (\sigma/\rho)k^3] \tanh(kH)$, où k est le nombre d'onde, ω la pulsation, g l'accélération de gravité, σ la tension de surface liquide-gaz, ρ la masse volumique du liquide, et enfin H la profondeur du liquide au repos.

Dans ce chapitre, nous montrons de manière semi-analytique la relation de dispersion des ondes variqueuses se propageant à la surface de cylindres liquides posés sur un substrat triangulaire super-hydrophobe faisant un angle α le plus faible avec l'horizontale. Elle se met sous la forme

$$\omega^2 = \left[g_{\text{eff}}k + \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\rho}k^3 \right] \Psi(kW_{\text{eff}}), \quad (\text{III.1})$$

où $g_{\text{eff}} = g \sin \alpha$, W_{eff} est une largeur effective que l'on peut calculer de manière exacte, Ψ une fonction qu'on peut approcher par la fonction $\tanh$ et σ_{eff} une tension de surface effective dont la valeur est inférieure à σ . Les autres modes de propagation — modes sinueux et modes de ballottement — seront présentés aussi.

Le chapitre commence par une étude faite dans une approximation grande longueur d'onde afin de capturer le régime à $k \rightarrow 0$ de la relation de dispersion variqueuse (III.1). Pour cela, nous utiliserons les équations de Saint-Venant qui nous permettront de calculer les dimensions critiques à partir desquelles un cylindre liquide posé sur un substrat non plat super-hydrophobe en forme de coin est stable (section III.1).

À partir de ce résultat, pour aller au-delà de la limite non dispersive, nous procédons à une étude numérique et montrons quelle forme prend la fonction Ψ en fonction de la forme d'un canal en coin (section III.2). Nous discuterons enfin des effets dus à la tension de surface, sans entrer dans le détail.

Ce chapitre contient les résultats publiés dans les deux articles de *Journal of Fluid Mechanics* reproduits en annexe B.

III.1 Modes variqueux et formalisme de Saint-Venant

Les équations de Saint-Venant sont un jeu d'équations hyperboliques proposées par [Saint-Venant \[1871\]](#) dans le but d'étudier les écoulements dans des canaux ouverts, dans une direction donnée fixe que nous noterons x . Leur dérivation repose sur un développement, dans la limite des grandes longueurs d'onde, des équations d'Euler (dans le cas non visqueux) et celles de Navier–Stokes (dans le cas visqueux). Les hypothèses de base sont les suivantes :

- (i) l'écoulement est considéré comme quasi-parallèle dans la direction x ;
- (ii) Le champ de pression 3D est hydrostatique.

Sous ces hypothèses, on note $S(x, t)$ la section transverse de liquide, $P(x, y, z, t)$, le champ de pression hydrostatique et

$$\bar{u}(x, t) = \frac{1}{S(x, t)} \int_{S(x, t)} u(x, y, z, t) dy dz, \quad (\text{III.2})$$

la valeur moyennée dans la section de la composante selon x de la vitesse. Le débit en x et t vaut alors $Q(x, t) = S(x, t)\bar{u}(x, t)$. Les équations de Saint-Venant non visqueuses s'écrivent alors, sous forme conservative,

$$\partial_t S + \partial_x(Q) = 0, \quad (\text{III.3})$$

$$\partial_t(Q) + \partial_x \left[\frac{Q^2}{S} \right] + \int_{S(x, t)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} [P(x, y, z, t)] dy dz = 0. \quad (\text{III.4})$$

ce qui donne, sous forme non conservative,

$$\partial_t S + \partial_x(S\bar{u}) = 0, \quad (\text{III.5})$$

$$\partial_t \bar{u} + \bar{u} \partial_x \bar{u} + \frac{1}{S(x, t)} \int_{S(x, t)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} [P(x, y, z, t)] dy dz = 0. \quad (\text{III.6})$$

Ce jeu d'équations s'exprime donc en fonction du gradient de pression dans la direction x , moyenné dans la section et l'on est passé d'un système 3D à surface libre incompressible à un système 1D « compressible » où la section de liquide joue alors le rôle de densité. L'équation (III.5) est l'équation de conservation de la masse, tandis que l'équation (III.6) est l'équation de la quantité de mouvement.

Pour une dérivation complète de ces équations (incluant les effets visqueux), on pourra se référer à l'article de [Decoene et al. \[2009\]](#).

III.1.1 Relation de dispersion sans tension de surface et dans la limite non dispersive

Nous allons montrer ici que les équations de Saint-Venant permettent d'obtenir de manière très rapide la relation de dispersion des ondes de gravité, dans la limite non dispersive, i.e. dans la limite des nombres d'ondes $k \rightarrow 0$.

En négligeant les effets de tension superficielle, en faisant l'hypothèse que l'interface libre dans la section reste horizontale, repérée par $H(x, t)$ et valant H_0 au repos, le champ de pression hydrostatique s'écrit

$$P(x, y, z, t) = \rho g[H(x, t) - z] + P_{\text{atm}}, \quad (\text{III.7})$$

où P_{atm} est la pression de la phase gazeuse au-dessus de l'interface. On a donc

$$\frac{\partial}{\partial x} P(x, y, z, t) = \rho g \partial_x H(x, t). \quad (\text{III.8})$$

qui est indépendante de y et z , si bien que l'on a $\langle \partial_x P \rangle_S = \partial_x P$.

Plaçons-nous maintenant dans le cas d'un fluide au repos de section S_0 , de hauteur H et de largeur W d'interface libre Γ_0 (cf. figure III.1).

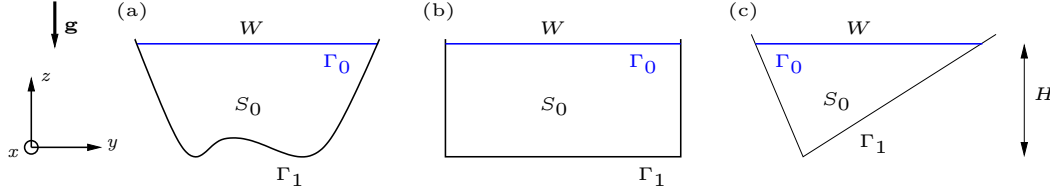


Figure III.1 : Notations pour (a) une section quelconque ; (b) un canal rectangulaire ; (c) un canal triangulaire quelconque.

La section S est une fonction monotone de H . On remarque que l'on a

$$S(H + \varepsilon) - S(H) = \frac{dS}{dH} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = W \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (\text{III.9})$$

si bien que l'on peut écrire

$$\partial_x H = \frac{dH}{dS} \partial_x S = \frac{1}{W} \partial_x S. \quad (\text{III.10})$$

Posons $S(x, t) = S_0[1 + s \exp[i(kx - \omega t)]]$ et $\bar{u}(x, t) = u_0 \exp[i(kx - \omega t)]$. Les équations linéarisées à l'ordre $s \ll 1$ et $u_0 \ll 1$ conduisent alors à

$$\omega^2 = g \frac{S_0}{W} k^2. \quad (\text{III.11})$$

Nous obtenons ainsi une relation de dispersion qui est non dispersive et la vitesse de phase c_0 est donnée par l'expression

$$c_0^2 = g \frac{S_0}{W}, \quad (\text{III.12})$$

historiquement établie par Kelland [1840, §28].

III.1.1.a Cas particulier d'un canal de section rectangulaire

Dans le cas d'un canal rectangulaire de largeur W et de hauteur de liquide au repos H (Fig. III.1), on a $S = WH$ et l'on retrouve ainsi

$$\omega^2 = c_0^2 k^2 \quad (\text{III.13})$$

$$c_0^2 = gH. \quad (\text{III.14})$$

On remarque que c'est la limite à $k \rightarrow 0$ de la relation de dispersion habituelle $\omega^2 = (gk + \sigma k^3/\rho) \tanh kH$.

III.1.1.b Cas particulier d'un canal de section triangulaire

Dans le cas d'un canal triangulaire de largeur W et de hauteur de liquide au repos H (Fig. III.1), on a $S = \frac{1}{2}WH$ et l'on obtient ainsi

$$c_0^2 = \frac{1}{2}gH. \quad (\text{III.15})$$

III.1.2 Hypothèse adiabatique des modes variqueux et discussion

Nous allons maintenant traiter le cas de nos cylindres posés sur un substrat super-hydrophobe. Afin d'aborder le problème de manière analytique, sans recourir à des calculs numériques élaborés des équations complètes (et laissés en perspective en VI.1, p. 66), dans toute cette partie, nous allons utiliser le formalisme de Saint-Venant en faisant l'hypothèse forte suivante concernant les modes variqueux : à toute abscisse x et tout temps t , nous supposons que la forme de la section transverse (de valeur $S(x, t)$) est adiabatiquement donnée par la forme à l'équilibre statique à cette même valeur de section $S(x, t)$ et déterminée par le paramètre géométrique $m(x, t)$ correspondant (cf. II.1.3, p. 23). Cette hypothèse impose d'elle-même que l'angle de contact égal à π au substrat super-hydrophobe est bien respectée. Cela revient à considérer une ligne de contact mobile, sans hystérèse d'angle de contact. L'hypothèse reproduit bien la phénoménologie de nos expériences. En outre, nous supposons aussi que le champ de pression reste hydrostatique, donc indépendant de la coordonnée y .

Dans cette situation, l'invariance par translation selon la direction x n'est plus assurée si bien que la constante $\mathcal{C}_0$ donnée par l'équation (II.12) dépend maintenant de la position x et du temps t et l'on a

$$\mathcal{C}_0(x, t) = \rho g \zeta(x, s, t) + \sigma \kappa^t(x, s, t), \quad (\text{III.16})$$

tout le long de l'interface, i.e. pour tout $s \in [0, s_{\text{tot}}(x, t)]$. Cette constante peut donc être calculée en n'importe quel point de l'interface.

Par la suite, nous choisirons donc de calculer cette quantité au sommet de la goutte, i.e. à l'angle $\phi = \pi$, pour lequel on a $\zeta(\pi) = \Delta Z_{\text{max}}(m(x, t))$ et $\kappa^t(x, s, t) = \kappa_{\text{top}}(m(x, t))$, respectivement donnés par (II.32) et (II.33).

Concentrons-nous maintenant sur le champ de pression hydrostatique. A priori, pour un point de coordonnées (x, y, z) à l'intérieur de la goutte, son expression s'écrit, à cause de la loi de Laplace et de l'équation (III.16)

$$P(x, y, z, t) = \rho g [\zeta(x, s, t) - z] + \sigma \kappa^t(x, s, t) + \sigma \kappa^l(x, s, t), \quad (\text{III.17})$$

$$= \mathcal{C}_0(x, t) - \rho g z + \sigma \kappa^l(x, s, t), \quad (\text{III.18})$$

avec s , la coordonnée curviligne telle que $\eta(s, t) = y$ et le terme de courbure donné par la somme de la courbure transverse $\kappa^t(x, s, t)$ (i.e. dans le plan (y, z)) et de la courbure longitudinale $\kappa^l(x, s, t)$ (i.e. la direction x) à un point de coordonnée (x, s, t) le long de l'interface. Notons en outre qu'à cause des valeurs possibles de s , la pression P ainsi exprimée peut être bi-valuée lorsque l'on quitte le cas statique.

L'hypothèse adiabatique est valable dans la limite $\kappa^t \gg \kappa^l$, qui correspond à la limite des grandes longueurs d'onde. On peut montrer que dans le régime linéaire, la

courbure longitudinale $\kappa^1(x, s, t)$ donne des termes d'ordre 2 en la dérivée selon x de $S(x, t)$ dans les expressions de la pression P , tandis que $\mathcal{C}_0(x, t)$ n'implique que des termes d'ordre zéro en dérivées selon x de $S(x, t)$.

Dans cette partie, nous nous intéressons au régime non dispersif, ce qui fait que nous pourrions ignorer la présence de κ^1 et ne considérer que les termes qui ont une contribution non dispersive dans la relation de dispersion que nous cherchons à établir.

La valeur moyenne du gradient selon x , $\partial_x P$, intervenant dans les équations de Saint-Venant s'écrit alors

$$\frac{1}{S(x, t)} \int_{S(x, t)} \{\partial_x P(x, y, z, t)\} dy dz = \frac{1}{S(x, t)} \int_{S(x, t)} \{\partial_x \mathcal{C}_0(x, t)\} dy dz = \partial_x \mathcal{C}_0(x, t). \quad (\text{III.19})$$

Dans tout ce qui suit, $S(x, t)$ et $\mathcal{C}_0(x, t)$ peuvent s'exprimer en fonction du paramètre $m(x, t)$. On notera $S_0 = S(m_0)$ la valeur de la section à l'équilibre.

III.1.3 Instabilité de Plateau–Rayleigh d'un cylindre posé sur substrat super-hydrophobe

Dans cette partie, nous faisons une étude de stabilité linéaire de notre système de goutte posée sur un substrat super-hydrophobe, dans le cadre de ces équations de Saint-Venant et donc dans la limite des grandes longueurs d'onde. Nous avons vu que la relation de dispersion obtenue dans ce cadre étaient alors de la forme

$$\omega^2 = c_{\text{eff}}^2 k^2. \quad (\text{III.20})$$

Le système est ainsi instable lorsque $c_{\text{eff}}^2 < 0$ et il est stable lorsque $c_{\text{eff}}^2 > 0$. Ici la section à l'équilibre S_0 vaut $\mathcal{A}(m_0)$, donnée par (II.37).

III.1.3.a Le cas plat

Nous commencerons par le cas d'un substrat plan et horizontal. Sous les hypothèses du système de Saint-Venant, en posant

$$a(m_0) = \left[\frac{S_0}{\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial m}(m_0)} \right], \quad (\text{III.21})$$

$$b(m_0) = \frac{1}{\ell_c} \left[\frac{\partial [\Delta Z_{\text{max}}]}{\partial m}(m_0) \right] + \ell_c \left[\frac{\partial \kappa_{\text{top}}}{\partial m}(m_0) \right] = -m_0^{-3/2}, \quad (\text{III.22})$$

on obtient alors la relation de dispersion des ondes, ainsi que le carré de la vitesse du son effective c_{eff}

$$\omega^2(k) = g \ell_c [a(m_0)] [b(m_0)] k^2, \quad (\text{III.23})$$

$$c_{\text{eff}}^2(m_0) = g \ell_c [a(m_0)] [b(m_0)]. \quad (\text{III.24})$$

On voit alors que c_{eff}^2 est toujours négatif à cause de la présence du facteur $b(m_0)$ donné par l'équation (III.22). Ainsi, un cylindre posé sur un substrat super-hydrophobe et

soumis à la gravité est toujours instable quelle que soit son extension transverse. En figure III.2 sont tracées les grandeurs $a(m)$ et $c_{\text{eff}}^2/(g\ell_c) = a(m)b(m)$ en fonction du paramètre m . On voit ainsi que le taux de croissance de l'instabilité $\Sigma = |c_{\text{eff}}|$ tend vers zéro pour m tendant vers 1. L'extension transverse du cylindre diverge dans cette limite et le cylindre devient marginalement instable.

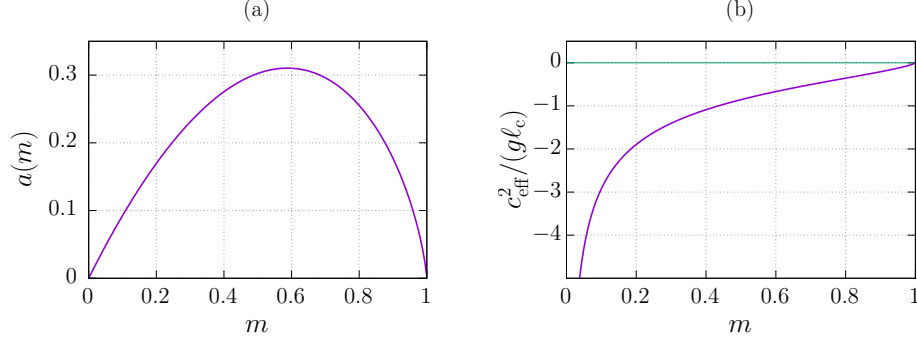


Figure III.2 : (a) Graphe du coefficient $a(m)$. (b) Rapport $c_{\text{eff}}^2/(g\ell_c) = a(m)b(m)$ en fonction de m . Les valeurs de c_{eff}^2 sont toujours négatives ; par conséquent, la goutte cylindrique est toujours instable dans le cas d'un substrat horizontal plan. Plus m est proche de 1, moins grand est le taux de croissance. Dans la limite $m \rightarrow 1^-$, on a $c_{\text{eff}}^2 \rightarrow 0^-$: le cylindre devient marginalement instable.

Régime des petits m : sections quasi-circulaires Dans le cas asymptotique $m \rightarrow 0^+$, on a

$$a(m) \underset{m \rightarrow 0^+}{=} m - \frac{3}{4}m^2 + \mathcal{O}(m^3), \quad (\text{III.25})$$

$$b(m) = -m^{-3/2}. \quad (\text{III.26})$$

Dans ce régime, la forme de la section est quasi-circulaire et la relation de dispersion s'écrit

$$\omega^2(k, m) \underset{m \rightarrow 0^+}{\simeq} g\ell_c k^2 \left[-m^{-1/2} \right]. \quad (\text{III.27})$$

ce qui correspond à la classique instabilité de Plateau-Rayleigh. En effet, en exprimant cette expression en fonction du rayon de la goutte $R_0 = \frac{1}{2}\ell_c\sqrt{m}$, on obtient

$$\omega^2(k, R_0) \underset{m \rightarrow 0^+}{\simeq} -\frac{\sigma}{2\rho R_0^3} (kR_0)^2. \quad (\text{III.28})$$

Nous rappelons que le taux de croissance Σ de l'instabilité de Plateau-Rayleigh dans le cas d'un cylindre libre de rayon R_0 vérifie (cf. C.2.1, p. 128)

$$\Sigma^2(k, R_0) = \frac{\sigma}{\rho R_0^3} \frac{I_1(kR_0)}{I_0(kR_0)} [1 - (kR_0)^2] kR_0, \quad (\text{III.29})$$

avec I_0 et I_1 les fonctions de Bessel modifiées de première espèce d'ordre zéro et d'ordre 1, qui satisfont $I_0(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$ and $I_1(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$. La pulsation ω satisfait ainsi exactement les mêmes propriétés que le taux de croissance Σ à petits nombres d'onde k , à l'ordre 2.

III.1.3.b Effet de l'angle de contact

À titre de comparaison avec le résultat précédent obtenu par les équations de Saint-Venant, intéressons-nous au problème abordé par [Bostwick & Steen \[2018\]](#), traité, lui, en prenant les équations de l'hydrodynamique, sans approximation. Ils étudiaient l'instabilité de modes variqueux de cylindres posés sur un substrat plat et de forme circulaire car la gravité n'était pas prise en compte. Deux conditions de mouillage étaient considérées : le cas de la ligne de contact mobile et à angle de contact fixé ; le cas de la ligne de contact piégée et donc à angle de contact variable.

Dans cette géométrie, la calotte liquide est déterminée par son rayon R et son angle de contact α , de telle sorte que l'on peut définir sa hauteur ζ et sa demi-largeur de contact au substrat L . Elles valent respectivement $L = R \sin \alpha$ et $\zeta = R(1 - \cos \alpha)$ (cf. figure III.3). Sa courbure vaut donc $\kappa = 1/R$ tandis que sa section S est donnée par

$$S = R^2(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha). \quad (\text{III.30})$$

Dans le cas de la ligne de contact mobile, α garde une valeur fixée et c'est le rayon $R(x, t)$ qui devient le paramètre de contrôle de la valeur de la section $S(x, t)$. On a alors

$$g \frac{\partial \zeta}{\partial R} + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial \kappa}{\partial R} = g \left[(1 - \cos \alpha) - \frac{\ell_c^2}{R^2} \right] = g \left[2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{\ell_c^2}{R^2} \right], \quad (\text{III.31})$$

qui est négatif pourvu que $R < \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \ell_c$, ce qui est vérifié dans le cas des petits R .

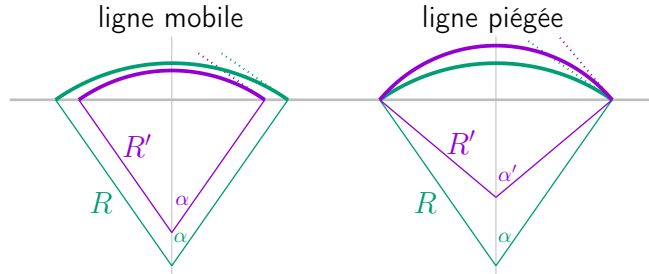


Figure III.3 : Schéma et définition du rayon R et de l'angle de contact α dans le cas (a) de la ligne de contact mobile ; (b) de la ligne de contact piégée. Les angles de contact avec le substrat horizontal sont matérialisés par des pointillés. On les retrouve comme les angles que font avec la verticale les rayons de la goutte passant par la ligne de contact (i.e. les demi-angles au sommet des triangles isocèles).

À l'inverse, dans le cas de la ligne de contact piégée, L est fixée et c'est α qui varie. On a

$$\zeta = L \tan \frac{\alpha}{2}, \quad \kappa = \frac{\sin \alpha}{L}, \quad (\text{III.32})$$

si bien que l'on a

$$g \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial \kappa}{\partial \alpha} = g \ell_c \left[\frac{1}{2} \left(\frac{L}{\ell_c} \right) \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \left(\frac{\ell_c}{L} \right) \cos \alpha \right]. \quad (\text{III.33})$$

Cette quantité est toujours positive pour les angles $\alpha < \frac{\pi}{2}$ et négative pour des angles $\alpha > \frac{\pi}{2}$ (dans la limite $R \ll \ell_c$), ce qui signifie que les modes variqueux pour une ligne de contact piégée sont stables tant que les conditions de mouillage sont hydrophiles. Lorsque l'angle de contact est supérieur à $\pi/2$, les modes variqueux deviennent instables.

Dans le cadre simplifié des équations de Saint-Venant, nous retrouvons ainsi les résultats de [Bostwick & Steen \[2018\]](#), similaires à ceux historiquement proposés par [Davis \[1980\]](#) ou plus tard par [Speth & Lauga \[2009\]](#), dans le cadre de comparaisons avec les expériences de [Gau *et al.* \[1999\]](#).

Nous rappelons que notre approche de type Saint-Venant ne donne que des résultats non dispersifs et n'est valable que dans la limite $k \rightarrow 0$. Sachant que l'instabilité de Plateau-Rayleigh est une instabilité à grande longueur d'onde, étudier le signe de c_{eff}^2 assure directement qu'on est dans une situation instable ou non. Toutefois, elle n'est pas adaptée pour déterminer le mode de croissance le plus rapide de l'instabilité, ni adaptée pour déterminer le nombre d'onde minimal à partir duquel les modes variqueux correspondants ne sont plus instables.

III.1.3.c Stabilisation de l'instabilité de Plateau-Rayleigh par la présence d'un substrat non horizontal

Dans cette partie, nous étudions la stabilité d'une goutte posée sur un substrat super-hydrophobe non plus plan, mais en forme de coin. Cette étude va se démarquer des travaux passés, conduits par [\[Langbein, 1990; Roy & Schwartz, 1999; Yang & Homsy, 2007; Speth & Lauga, 2009\]](#) car ici, la gravité va être prise en compte. Elle joue un rôle significatif, stabilisant nos cylindres posés, comme nous allons le voir maintenant.

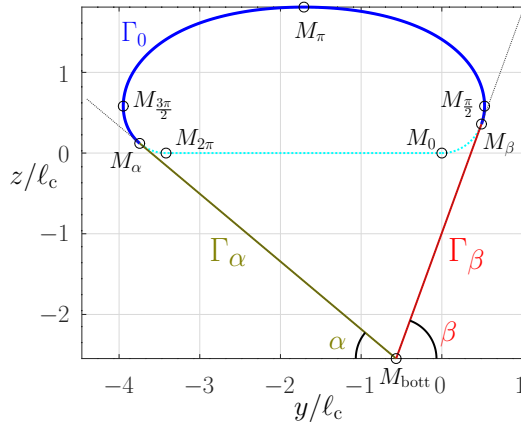


Figure III.4 : Forme d'une goutte cylindrique posée sur un substrat en coin d'angles α et β avec l'horizontale. En pointillés cyan, on a superposé la forme d'une goutte posée sur substrat plat, décrite en [III.1.3.a](#), de même extension horizontale ΔY_{max} . Huit points caractéristiques sont montrés (voir texte). Γ_0 est la surface libre, Γ_α et Γ_β correspondent aux parties mouillées du coin par la goutte. Ils connectent M_{bott} respectivement à M_α et M_β .

Le substrat considéré fait deux angles avec l'horizontale égaux à α et β . Quand $\alpha = \beta$, le substrat est symétrique et nous parlerons de géométrie en V. La forme de l'interface libre sera déterminée par la frontière notée Γ_0 . La frontière de toute la section est constituée d'une calotte liquide connectée à deux segments d'angle α et β avec l'horizontale. La section peut être vue comme une calotte capillaire vue au chapitre II placée au-dessus d'un triangle liquide, comme illustré en figure III.4. La frontière Γ_0 correspond à une orbite de pendule partielle commençant à $\phi = \beta$ et se terminant à $\phi = 2\pi - \alpha$ dans l'espace des phases. Une telle section peut être caractérisée par les huit points caractéristiques M suivants, de coordonnées respectives (η, ζ) données par les équations (II.30) et (II.31). Nous choisirons comme point de référence M_0 , situé à l'origine $(0, 0)$ et les autres points vérifient

$$M_{2\pi}, \quad \eta_1 = \eta(2\pi) = -\Lambda_c, \quad \zeta_1 = 0, \quad (\text{III.34})$$

$$M_\beta, \quad \eta_\beta = \eta(\beta), \quad \zeta_\beta = \zeta(\beta), \quad (\text{III.35})$$

$$M_{\frac{\pi}{2}}, \quad \eta_{\text{tip}}^+ = \eta\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \zeta_{\text{tip}}^+ = \zeta\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad (\text{III.36})$$

$$M_\pi, \quad \eta_{\text{top}} = \eta(\pi), \quad \zeta_{\text{top}} = \zeta(\pi), \quad (\text{III.37})$$

$$M_{\frac{3\pi}{2}}, \quad \eta_{\text{tip}}^- = \eta\left(\frac{3\pi}{2}\right), \quad \zeta_{\text{tip}}^- = \zeta\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \zeta_{\text{tip}}^+, \quad (\text{III.38})$$

$$M_\alpha, \quad \eta_\alpha = \eta(2\pi - \alpha), \quad \zeta_\alpha = \zeta(2\pi - \alpha). \quad (\text{III.39})$$

Enfin, le dernier point M_{bott} est situé au fond du substrat et a pour coordonnées

$$\eta_{\text{bott}} = \eta_\alpha + \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} [(\eta_\beta - \eta_\alpha) \sin \beta - (\zeta_\beta - \zeta_\alpha) \cos \beta], \quad (\text{III.40})$$

$$\zeta_{\text{bott}} = \zeta_\alpha - \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} [(\eta_\beta - \eta_\alpha) \sin \beta - (\zeta_\beta - \zeta_\alpha) \cos \beta]. \quad (\text{III.41})$$

et l'on posera

$$H_{\text{bott}} = -\zeta_{\text{bott}}. \quad (\text{III.42})$$

Les points M_0 et $M_{2\pi}$ sont situés à l'intérieur de la goutte.

La valeur de la section S_{tot} peut se calculer par la formule de Green–Riemann le long de la courbe fermée $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_\alpha \cup \Gamma_\beta$ orientée positivement

$$S_{\text{tot}}(m, \alpha, \beta) = - \oint_\Gamma \zeta \, d\eta. \quad (\text{III.43})$$

Dans la suite, nous allons traiter le cas symétrique $\alpha = \beta$ et étudier la relation de dispersion de notre système dans le cadre des équations de Saint-Venant, donc dans le régime non dispersif. La présence du substrat ajoute en fait un terme supplémentaire à l'expression de la pression hydrostatique et l'on peut en déduire

$$c_{\text{eff}}^2(m, \alpha, \beta) = g\ell_c \left[\frac{S_{\text{tot}}(\alpha, \beta, m)}{\frac{\partial S_{\text{tot}}}{\partial m}(\alpha, \beta, m)} \right] \left[\frac{1}{\ell_c} \frac{\partial H_{\text{bott}}}{\partial m} - m^{-3/2} \right], \quad (\text{III.44})$$

pour un paramètre m correspondant à la forme de la goutte au repos.

Le résultat important est que le terme négatif $-m^{-3/2}$ dû à la calotte capillaire et pilotant l'instabilité de Plateau–Rayleigh dans le cas plat peut être compensé par

la présence du terme additif $\ell_c^{-1} \times [\partial H_{\text{bott}}/\partial m]$ dû à la présence du substrat non plat, pourvu que ce terme soit suffisamment grand.

Pour α fixé, la quantité $\frac{1}{\ell_c} \frac{\partial H_{\text{bott}}}{\partial m} - m^{-3/2}$ est négative pour de petites valeurs de m . Elle devient positive au-delà d'une valeur critique $m_c = 1 - \mu_c$ qui peut être déterminée numériquement. Sa dépendance avec l'angle α est tracée en figure III.5. Pour $\alpha = 0$, i.e. pour un substrat plat, le cylindre est toujours instable, comme on l'a vu en III.1.3.a. À l'inverse, le cas $\alpha = 90^\circ$ peut être vu comme le cas asymptotique d'un canal infiniment profond avec des parois verticales. On est alors toujours stable, conformément à l'intuition.

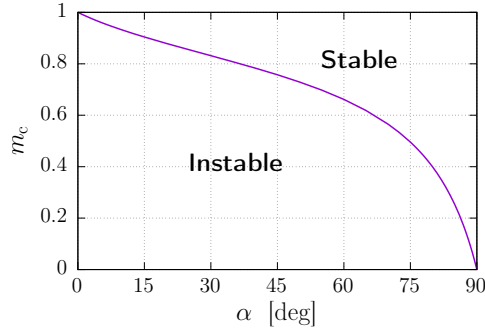


Figure III.5 : Dépendance du paramètre critique m_c selon l'angle α dans le cas d'un substrat symétrique en V ($\alpha = \beta$). Pour α non nul, les gouttes de grande extension (m proche de 1) sont toujours stables pourvu que $m > m_c(\alpha)$.

Dans le cas où la goutte est stable, la vitesse effective c_{eff} est la vitesse du son au sein de la goutte. Elle correspond à la pente à l'origine de la branche variqueuse. Comme le montre la figure I.6, p. 11 du chapitre I, l'accord expérience/prédiction théorique est très bon.

III.1.3.d Illustration expérimentale

Nous avons confronté nos prédictions à l'expérience. Dans le cas de notre substrat super-hydrophobe, nous sommes partis d'une goutte cylindrique de volume donné. Nous avons aspiré graduellement un volume d'eau bien défini. Nous atteignons ainsi un volume critique tel que la goutte se brise. Les comparaisons avec la théorie montrent un désaccord de 30 % (voir la table III.1) qui s'explique raisonnablement par le fait que d'une part, très près du seuil, le système devient très sensible à la moindre perturbation et que d'autre part, la manière dont les gouttes ont été piégées fait qu'en pratique, un bourrelet en bout de goutte se crée ; à volume donné, la section au centre de la goutte, là où se produit l'instabilité de Plateau-Rayleigh, devient inférieure à celle d'une goutte strictement cylindrique.

Nous montrons des instantanés d'une réalisation expérimentale sur le substrat en V sur la figure III.6. Après rupture, on remarque la présence caractéristique d'une goutte satellite. Les deux moitiés de la goutte se rétractent sous l'effet de la tension de surface afin de minimiser sa surface libre, rappelant la rétraction des nappes liquides étudiées historiquement par Taylor [1959] et Culick [1960]. Cette dynamique de rétraction de gouttes allongées est un sujet qui a été étudié récemment par Lv *et al.* [2015]. Pour le moment, nous n'avons pas fait de comparaisons quantitatives avec leurs résultats.

	Substrat α	V 10°	L 10°	L 20°	L 30°	L 45°
Théorie :	$\frac{1}{\ell_c^2} S_c$	3,87	3,95	3,43	3,24	3,18
Expériences :	$\frac{1}{\ell_c^2} S_c^{\text{exp}}$	4,97	4,90	4,54	4,20	4,07

Table III.1 : Valeurs des sections critiques (volume critique divisé par la longueur du cylindre qui est fixe) théoriques et expérimentales obtenues en diminuant pas à pas le volume d'une goutte posée, dans le cas du substrat en V ($\alpha = 10^\circ$) et du substrat en L pour différents angles α . L'erreur est d'une trentaine de pourcents, ce qui est satisfaisant, étant donné les conditions expérimentales. Ici, $\ell_c = 2,5$ mm.

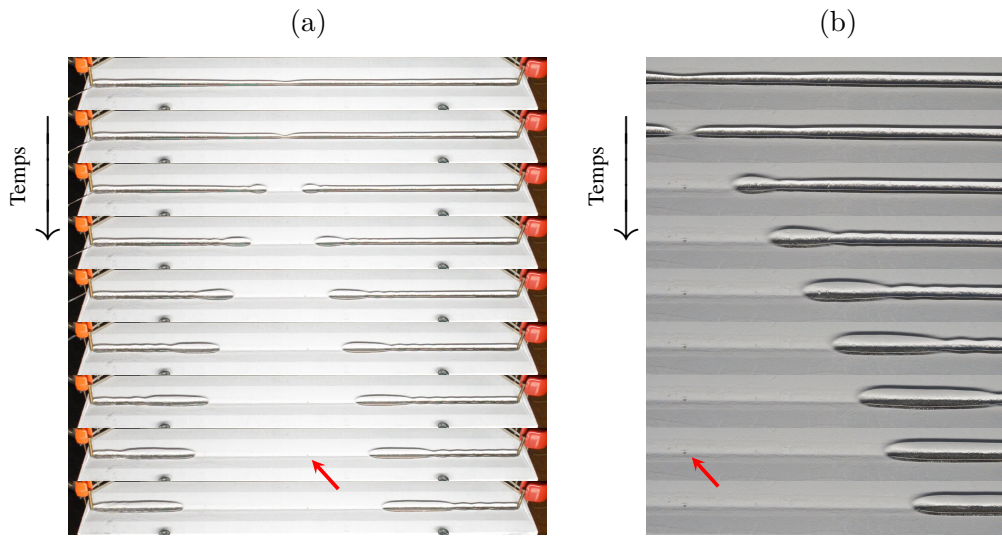


Figure III.6 : (a) Instantanés de la dynamique de rupture d'une goutte posée sur le substrat en V. (b) Gros plan du pincement de la goutte. Notons la présence résiduelle d'une goutte satellite consécutive à la brisure de la goutte (flèches rouges).

III.2 Effets dispersifs

Dans la section III.1, nous avons étudié la relation de dispersion des modes variereux dans la limite des grandes longueurs d'onde $k \rightarrow 0$ au travers des équations de Saint-Venant. La relation de dispersion alors obtenue est non dispersive. Dans cette limite, on peut négliger les effets de tension de surface, car liés à des effets de courbure longitudinale de l'interface, donc à des dérivées spatiales d'ordre supérieur aux termes dus aux effets de la gravité.

Sans les effets capillaires, le problème peut être étudié numériquement de façon systématique en résolvant les équations de l'hydrodynamique à l'ordre linéaire en les perturbations de l'état de base. Le problème consiste alors à trouver la relation de dispersion des ondes à la surface libre horizontale Γ_0 d'un liquide de section au repos Ω dont la frontière avec le substrat sera notée Γ_1 . Pour cela, il faut résoudre un problème aux valeurs propres généralisé qui s'écrit : Trouver un potentiel $\Phi(y, z)$

non nul tel que pour $k \in \mathbb{R}$, il existe $\omega \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \Delta \Phi - k^2 \Phi = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n \Phi = 0 & \text{le long de } \Gamma_1, \\ \partial_n \Phi = \frac{\omega^2}{g} \Phi & \text{le long de } \Gamma_0. \end{cases} \quad (\text{III.45})$$

L'obtention de ces équations est donnée en annexe C.1.

Le problème peut se résoudre numériquement en utilisant la méthode des éléments finis qui a le grand avantage de permettre de traiter des formes arbitraires de canaux de frontière Γ_1 en maillant le domaine en triangles et en utilisant des éléments de Lagrange $\mathbb{P}_1$. Le mailleur utilisé ici est le mailleur libre `mesh2d` [Engwirda, 2014] (cf. figure III.7 (a)). Le code éléments finis a été écrit sous Octave/Matlab.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons au cas d'un canal triangulaire, et tout particulièrement au cas symétrique en V ($\alpha = \beta$) ou au cas en L ($\beta = \pi/2 - \alpha$). Pour un triangle quelconque, la relation entre sa base W (i.e. la longueur de Γ_0), sa hauteur H et les angles α et β s'écrit

$$W = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} H, \quad (\text{III.46})$$

et l'aire du triangle vaut

$$S = \frac{1}{2} WH = \frac{1}{2} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} H^2 = \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} W^2. \quad (\text{III.47})$$

Par la suite, nous supposons par convention que $\alpha \leq \beta$. Des résultats de cette résolution numérique sont montrés en figure III.7.

III.2.1 Effet du substrat sur les ondes variqueuses

La première branche, celle qui va à zéro lorsque k tend vers zéro, correspond à la branche variqueuse. La relation de dispersion correspondante s'écrit alors

$$\omega^2(k) = (g \sin \alpha) k \Psi_{\alpha, \beta} \left(\frac{kH}{2 \sin \alpha} \right) = (g_{\text{eff}} k) \Psi_{\alpha, \beta} (W_{\text{eff}} k), \quad (\text{III.48})$$

avec $\Psi_{\alpha, \beta}$ une fonction qui, pour des angles α et β donnés, a les propriétés suivantes, analogues à la fonction $\tanh$ traditionnelle du cas classique rectangulaire (cf. annexe C.1)

$$\Psi_{\alpha, \beta}(\xi) \underset{\xi \rightarrow 0}{\sim} \xi, \quad (\text{III.49})$$

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \Psi_{\alpha, \beta}(\xi) = 1. \quad (\text{III.50})$$

La quantité $W_{\text{eff}} = H/(2 \sin \alpha)$ est une largeur effective.

De manière inattendue, il est à noter que le préfacteur $g \sin \alpha$ n'implique que l'angle le plus petit α , la dépendance en β étant contenue dans $\Psi_{\alpha, \beta}$. Numériquement la fonction $\Psi_{\alpha, \beta}(\xi)$ peut être déduite en calculant le rapport $\omega^2/[(g \sin \alpha)k] = \Psi_{\alpha, \beta}[kH/(2 \sin \alpha)]$. Ce résultat est illustré en figure III.7 (d) et l'on voit que c'est une fonction assez proche de la fonction $\tanh$. Nous avons mené une étude systématique du calcul de sa dérivée tierce, celle qui définit la valeur du nombre de Bond critique déterminant dans quel régime on se trouve, soit capillaire, soit gravitaire (cf. I.3.2.a, p. 12). Notons enfin que pour $k \rightarrow 0$, on retrouve bien le régime non dispersif donné par les équations de Saint-Venant pour un triangle (III.15), à savoir : $\omega^2 = \frac{gH}{2} k^2$.

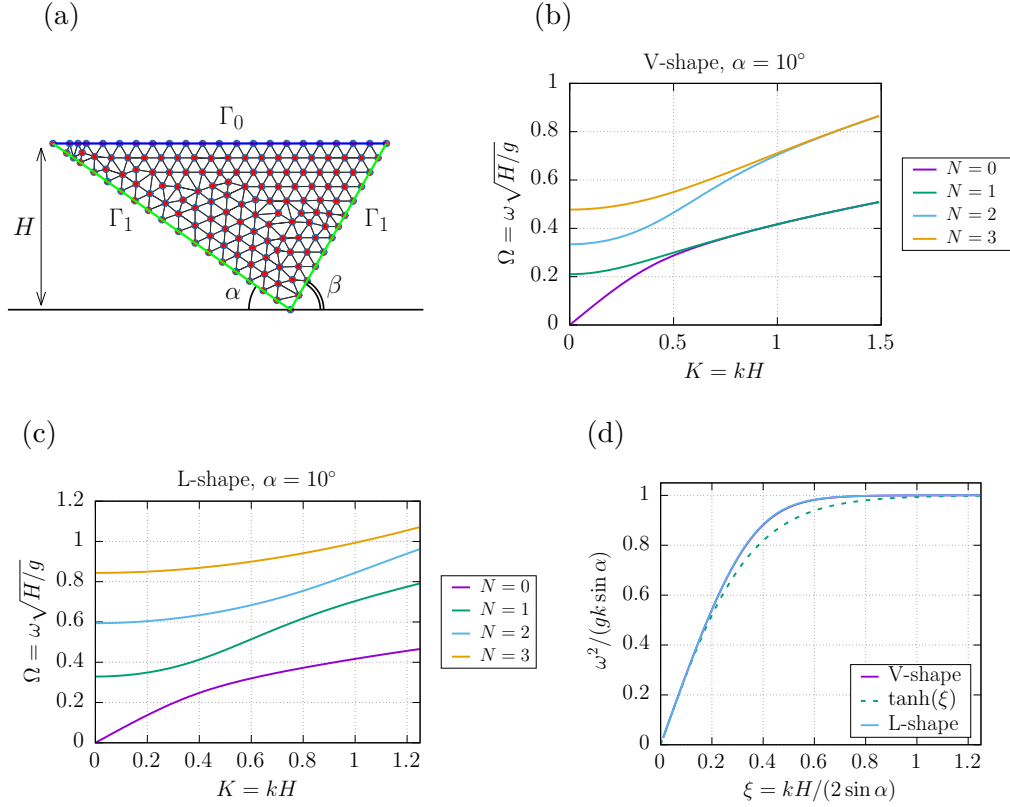


Figure III.7 : (a) Schéma de la géométrie traitée : le domaine liquide Ω est un triangle dont les angles avec l'horizontale sont α et β . Sa hauteur, i.e. la profondeur du canal, est H . Un exemple de maillage à basse résolution est montré. Deux spectres : (b) cas en V et (c) cas en L, pour un angle de $\alpha = 10^\circ$. La branche variqueuse correspond à la branche allant à zéro en $K = 0$. Les branches supérieures correspondent aux branches de ballottement, caractérisées par une pulsation de coupure $\omega_{\text{cut}}(N)$ pour $N > 0$, en unité adimensionnée. (d) Comparaison entre la classique fonction $\tanh$ (en pointillés) et les fonctions de forme $\Psi_{\alpha,\beta}$ dans les cas en V et en L (lignes pleines). Les deux fonctions $\Psi_{\alpha,\beta}$ sont quasiment identiques ; elles diffèrent de la fonction $\tanh$ pour des valeurs intermédiaires de ξ .

III.2.2 Autres effets dus au substrat : les modes de ballottement

À partir des calculs numériques, nous pouvons accéder aux branches de ballottement. Elles correspondent aux branches au-dessus des branches variqueuses et se caractérisent par une fréquence de coupure $\omega_{\text{cut}}(N)$ (figures III.7 (b,c)). Une analyse de la dépendance en les angles α et β ainsi que leur dépendance en le volume a été effectuée. Comme dans le cas rectangulaire (cf. annexe C.1.2.b, p. 127), plus la section est importante, plus la largeur W est grande, donc plus les fréquences de ballottement sont basses.

Nous avons mis en évidence que si les calculs numériques sans prendre en compte la tension de surface permettaient de bien reproduire qualitativement les branches de ballottement expérimentales dans la limite des grandes longueurs d'ondes (pour k grand, les comportements sont de toute façon complètement différents), la présence de la calotte capillaire devait être prise en compte pour capturer quantitativement

les valeurs des fréquences de coupure et que des ajustements étaient nécessaires pour faire coïncider résultats numériques et mesures expérimentales (figure III.8).

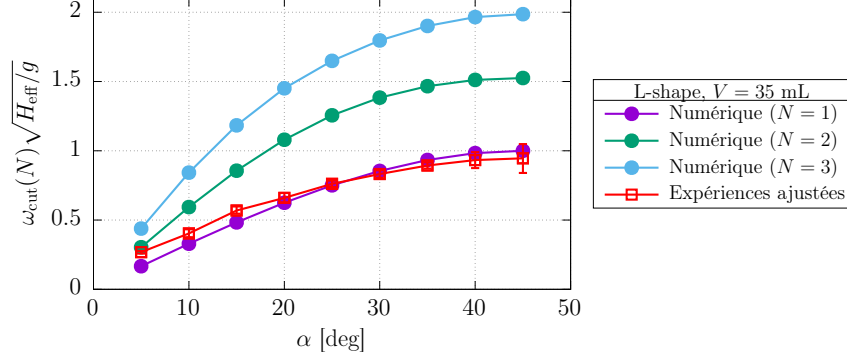


Figure III.8 : Substrat en L : Calculs numériques de $\omega_{\text{cut}}(N)$ (cercles pleins), ainsi qu'une comparaison avec les résultats expérimentaux renormalisés par ajustement (□ rouge).

III.2.3 Effets de la tension de surface

Dans cette partie, nous introduisons les corrections dispersives dues à la tension de surface dans la relation de dispersion variqueuse. Pour cela, nous utiliserons le formalisme de Saint-Venant et montrerons ses limites à capturer les effets dispersifs. Malgré ses limitations, nous utiliserons ce formalisme pour donner une estimation théorique de la valeur de la tension de surface effective mesurée dans les spectres expérimentaux.

III.2.3.a Effets capillaires et limite du modèle de Saint-Venant

Un cas particulier où les équations de Saint-Venant peuvent capturer une partie des effets de tension de surface est le cas où l'interface demeure horizontale dans la section ; c'est l'hypothèse que l'on fait d'ailleurs pour effectuer la substitution $g \mapsto g + \sigma k^2 / \rho$ quand on calcule traditionnellement la relation des ondes gravito-capillaires dans le canal rectangulaire.

À titre d'illustration des limites du modèle de Saint-Venant, considérons les modes variqueux d'un canal rectangulaire de largeur W_0 . L'interface est supposée horizontale dans la section, caractérisée par sa profondeur $H(x, t)$. On a $H(x, t) = H_0$ au repos. La section $S(x, t)$ vaut $W_0 H(x, t)$. La pression est hydrostatique et vaut alors, en tenant compte de courbure longitudinale $\kappa^1 = -\partial_{xx}H$,

$$P(x, y, z, t) = \rho g[H(x, t) - z] - \sigma \partial_{xx}H(x, t), \quad (\text{III.51})$$

si bien que les équations de Saint-Venant linéarisées deviennent

$$W_0 \partial_t H + W_0 H_0 \partial_x u = 0, \quad (\text{III.52})$$

$$\partial_t u + \frac{1}{S} \int_S \frac{1}{\rho} \partial_x P(x, y, z, t) dy dz = 0. \quad (\text{III.53})$$

Pour une section $S(x, t) = \{(y, z) | 0 < y < W_0, 0 < z < H(x, t)\}$, sachant que la quantité $\frac{1}{\rho} \partial_x P = g \partial_x H(x, t) - \frac{\sigma}{\rho} \partial_{xxx} H(x, t)$ est indépendante des coordonnées y et z , on a

$$\frac{1}{S} \int_S \frac{1}{\rho} \partial_x [P(x, t)] dy dz = \left[\frac{1}{\rho} \partial_x P \right]_{(x, t)} \times \frac{1}{S} \int_S 1 dy dz = \left[\frac{1}{\rho} \partial_x P \right]_{(x, t)}. \quad (\text{III.54})$$

L'équation d'onde satisfaite par H peut s'en déduire :

$$\partial_{tt} H - g H_0 \left(\partial_{xx} H - \frac{\sigma}{\rho g} \partial_{xxxx} H \right) = 0. \quad (\text{III.55})$$

En posant $H(x, t) \sim \exp[i(kx - \omega t)]$, on obtient la relation de dispersion

$$\omega^2(k) = g H_0 \left(k^2 + \ell_c^2 k^4 \right) = g H_0 k^2 \left(1 + \ell_c^2 k^2 \right). \quad (\text{III.56})$$

D'autre part, la relation de dispersion des ondes variqueuses dans un canal rectangulaire s'écrit

$$\omega^2 = g k \left(1 + \ell_c^2 k^2 \right) \tanh(k H_0), \quad (\text{III.57})$$

$$= g H_0 k^2 \left(1 + \ell_c^2 k^2 \right) \left[1 - \frac{1}{3} (k H_0)^2 + \mathcal{O} \left((k H_0)^4 \right) \right]. \quad (\text{III.58})$$

À l'ordre non dispersif, les deux développements (III.56) et (III.58) donnent le même résultat

$$\omega^2 \underset{k H_0 \rightarrow 0}{\sim} g H_0 k^2. \quad (\text{III.59})$$

En revanche, le moyennage dans les équations de Saint-Venant donne ici la contribution dispersive due à la tension de surface, mais pas celle due à la profondeur finie du canal provenant de la fonction $\tanh$. Cela revient donc à substituer à la fonction $\tanh$ le premier ordre de son développement en série entière, c'est-à-dire à faire la substitution $\tanh x \equiv x$ dans la relation de dispersion complète.

Un autre exemple que nous allons traiter à l'aide du formalisme de Saint-Venant est le cas classique de l'instabilité de Plateau-Rayleigh d'un cylindre circulaire, en reprenant la même idée qu'en section III.1.3.a. Nous partons de l'état de base d'un cylindre d'axe (Ox) et de rayon R_0 . Sa surface est modulée le long de son axe en considérant des variations de rayon qui s'écrivent

$$R(x, t) = R_0 [1 + \varepsilon e^{i(kx - \omega t)}]. \quad (\text{III.60})$$

Le champ de pression à l'interface s'écrit

$$P(x, t) = \sigma \left[\frac{1}{R(x, t)} - \partial_{xx} R(x, t) \right] \simeq \sigma \left[\frac{1}{R_0} \left[1 - \varepsilon e^{i(kx - \omega t)} \right] + \varepsilon k^2 R_0 e^{i(kx - \omega t)} \right], \quad (\text{III.61})$$

ce qui donne

$$\frac{1}{\rho} \partial_x P(x, t) = \frac{\sigma}{\rho} \left[-\frac{1}{R_0} + k^2 R_0 \right] i k \varepsilon e^{i(kx - \omega t)}. \quad (\text{III.62})$$

On a $S(x, t) = \pi R^2(x, t) = \pi R_0^2[1 + 2\varepsilon e^{i(kx - \omega t)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)]$ de telle sorte que la relation de dispersion s'écrit

$$\omega^2 = -\frac{\sigma}{2\rho R_0^3} [1 - (kR_0)^2] (kR_0)^2, \quad (\text{III.63})$$

à comparer au taux de croissance de Plateau-Rayleigh

$$\Sigma^2(k, R_0) = \frac{\sigma}{\rho R_0^3} \frac{I_1(kR_0)}{I_0(kR_0)} [1 - (kR_0)^2] kR_0. \quad (\text{III.64})$$

En poussant le développement un ordre significatif plus loin des fonctions de Bessel modifiées I_0 et I_1 , à savoir $I_0(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{4} + \mathcal{O}(x^4)$ et $I_1(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} + \mathcal{O}(x^5)$, ce taux de croissance Σ devient

$$\Sigma^2(k, R_0) \underset{kR_0 \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\rho R_0^3} \left[1 - \frac{9}{8}(kR_0)^2 \right] (kR_0)^2 + \mathcal{O}[(kR_0)^4]. \quad (\text{III.65})$$

Le moyennage du terme de pression dans les équations de Saint-Venant donne un préfacteur égal à 1 du terme en k^4 dans l'équation (III.63). Même s'il le sous-estime, ce calcul reste une bonne approximation du préfacteur exact, égal à 9/8.

III.2.3.b Tension de surface effective

Nous avons repris l'idée présentée en III.2.3.a — à savoir moyenner dans la section $\partial_x P$, le gradient selon x du champ de pression — afin d'en tirer les termes à l'ordre k^4 de la relation de dispersion, donc les contributions dispersives, au travers des équations de Saint-Venant. Dans le cadre d'un modèle jouet présenté en annexe de l'article de *Journal of Fluid Mechanics* 2021¹ et qu'il serait bien trop long d'exposer ici, nous avons pu donner une estimation en assez bon accord avec les expériences de la valeur de σ_{eff} .

L'idée est que contrairement au cas où l'interface reste horizontale dans la section, dans le cas où elle est courbée (en somme, le cas réel), les effets de courbure dus aux déformations variqueuses ne sont pas uniformes le long de l'interface. Elles sont essentiellement localisées aux extrémités de la section, si bien qu'un moyennage de cette distribution de courbure conduit à une valeur de tension de surface effective plus basse que la valeur a priori attendue σ donnée par la loi de Laplace.

III.2.3.c Régime capillaire, régime gravitaire, nombre de Bond effectif

Une fois la tension de surface caractérisée (les données expérimentales en donnent une valeur assez précise), ainsi que la valeur de la dérivée tierce de Ψ en 0, on peut définir un nombre de Bond effectif $\text{Bo}_{\text{eff}} = \sigma_{\text{eff}}/(\rho g_{\text{eff}} W_{\text{eff}}^2)$ et un nombre de Bond critique $\text{Bo}_c = |\Psi'''(0)|/6$ qui nous permettent de déterminer si l'on est dans le régime gravitaire ou dans le régime capillaire (cf. I.3.2.a, p. 12). Cela permet en outre d'estimer la transition entre les deux régimes. Dans le cas de notre substrat en V, avec les modèles théoriques et numériques, on trouve une transition autour d'un volume de 100 mL tandis que les spectres expérimentaux donnent une transition davantage autour de 80 mL (cf. figure I.7), soit un accord plutôt correct.

¹Le Doudic *et al.*, *J. Fluid Mech.* 2021, accepté

III.2.4 Modes sinueux

Il nous reste à parler des modes sinueux qu'on voit aussi apparaître dans les spectres. Ils correspondent à la toute première branche au-dessus de la branche variqueuse, visible sur les spectres du cas symétrique en V. Ces modes sinueux correspondent à des mouvements transverses du centre de masse du cylindre. Aussi ne les distingue-t-on pas dans les spectres du cas en L à angle α faible car leur déplacement latéral est bloqué par la forme même du substrat, l'angle β étant alors proche de la verticale.

Concernant leur pulsation de coupure, sur un substrat en V elle suit une loi d'échelle en

$$\omega_{\text{cut}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{g \sin 2\alpha}{2W}} \quad (\text{III.66})$$

et il est à remarquer que c'est exactement la même pulsation que celle d'un point matériel de masse m , astreint à se déplacer sur notre profil en V, d'équation $z = (\tan \alpha)|y|$, en partant de $y_0 = +\frac{W}{2}$, sans vitesse initiale. Le lagrangien de ce système s'écrit en effet

$$\mathcal{L}(y, \dot{y}) = \frac{1}{2} m (1 + \tan^2 \alpha) \dot{y}^2 - mg \tan \alpha |y|. \quad (\text{III.67})$$

et les équations d'Euler-Lagrange donnent $\ddot{y} = -g \cos \alpha \sin \alpha$. Le temps de parcours le long d'un côté du V (i.e. le quart de la période T) est alors $T/4 = [W/(g \sin \alpha \cos \alpha)]^{1/2}$.

III.2.5 Comparaisons avec le cas Leidenfrost

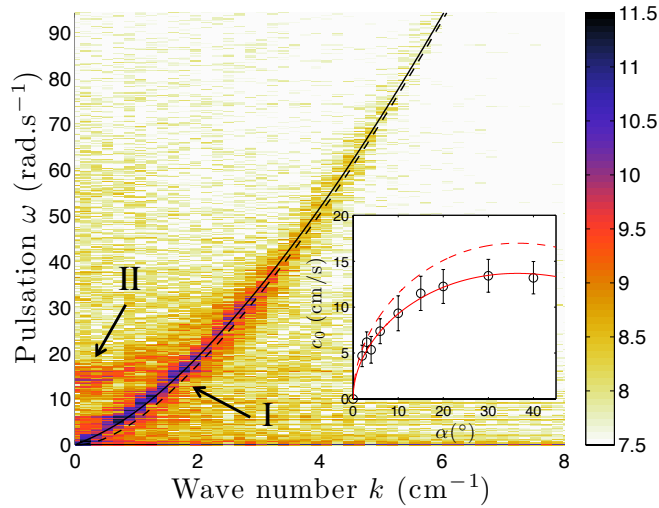


Figure III.9 : Cylindres en état Leidenfrost. Spectres spatio-temporels pour une inclinaison $\alpha = 2^\circ$. La branche I est la branche variqueuse, la branche II, la branche sinieuse. On a superposé la relation de dispersion (I.1), p. 12, qui décrit très bien la branche I. En médaillon, vitesses du son $c_0 \equiv c_{\text{eff}}$ en fonction de l'angle α à même volume d'eau.

La phénoménologie dans le cas des cylindres en état Leidenfrost est la même et l'on peut appliquer tous les résultats précédents à ces gouttes, à quelques nuances près. Ainsi, en mesurant les spectres des déformations des gouttes, on peut superposer la relation de dispersion (III.1) à la branche variqueuse expérimentale avec un très bon accord (voir figure III.9). La valeur de σ_{eff} mesurée est d'environ $34 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$, alors qu'à 95°C , la tension de surface σ vaut approximativement $60 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$. On retrouve la même tendance que dans le cas super-hydrophobe, accentué par le fait, sans doute, que les deux bords de la goutte sont parfaitement libres, la goutte n'étant en contact avec rien. Dans le modèle jouet, c'est lorsque le substrat en V était le plus faiblement pentu qu'on obtenait la valeur de σ_{eff} la plus petite.

Afin d'estimer c_{eff} , il est nécessaire d'utiliser une largeur effective W_{eff} inférieure à celle prévue dans le cas triangulaire. En effet, le *quarter-pipe* est en fait un substrat en L dont on a comblé le coin. Si l'on examine les termes qui donnent la valeur de c_{eff}^2 dans l'équation (III.44), on voit que le dernier terme du produit reste le même. En revanche, c_{eff}^2 dépend de la section S_{tot} qui est devenue plus faible, car la section est une version tronquée d'un coin.

Chapitre IV

Ondes non linéaires le long de cylindres liquides

La dérivation de l'équation dite de Korteweg–de Vries (KdV) a été établie en 1895 par les auteurs éponymes et repose sur un développement multi-échelle du potentiel des vitesses et l'élimination de ce dernier dans les équations d'Euler, afin d'obtenir *in fine* une équation maîtresse sur la déformation de l'interface libre [Korteweg & de Vries, 1895]. Du point de vue de sa structure, elle contient la relation de dispersion des ondes linéaires développée à l'ordre principal des premiers effets dispersifs, ainsi que la première contribution non linéaire à ces ondes.

Sachant la relation de dispersion des ondes variqieuses des systèmes expérimentaux étudiés, on peut en fait retrouver l'équation KdV, au travers des équations de Saint-Venant vues comme les équations de la dynamique d'un gaz polytrope ou barotrope.

IV.1 Les équations de Saint-Venant comme système acoustique non linéaire

Dans cette section, nous allons traiter les équations de Saint-Venant comme des équations d'acoustique non linéaire afin d'obtenir une équation de type Burgers non visqueuse sur la section transverse $S(x, t)$. Pour mémoire, en négligeant les effets de tension de surface, le gradient de pression hydrostatique dans la direction transverse x s'écrit

$$\partial_x P(x, y, z, t) = \rho g \partial_x H(x, t). \quad (\text{IV.1})$$

D'une part, les équations de Saint-Venant moyennées dans la section sont données par

$$\partial_t S + \partial_x (S \bar{u}) = 0, \quad (\text{IV.2})$$

$$\partial_t \bar{u} + \bar{u} \partial_x \bar{u} + \frac{1}{\rho} \langle \partial_x P \rangle = 0, \quad (\text{IV.3})$$

pour une section transverse $S(x, t)$, un champ de vitesse transverse moyenné $\bar{u}(x, t)$ et un gradient de pression hydrostatique moyenné $\langle \partial_x P(x, t) \rangle$. D'autre part, la

dynamique 1D d'un gaz isentropique de densité $\varrho(x, t)$, vitesse $v(x, t)$ et pression $\Pi(x, t)$ est donnée par les équations d'Euler compressibles qui s'écrivent

$$\partial_t \varrho + \partial_x(\varrho v) = 0, \quad (\text{IV.4})$$

$$\partial_t v + v \partial_x v + \frac{1}{\varrho} \partial_x \Pi = 0. \quad (\text{IV.5})$$

Lorsque l'on se place dans le régime non dispersif, on peut écrire $\langle \partial_x P \rangle = \rho g \partial_x H(x, t)$ et définir la position de l'interface $H(x, t)$ qui est plate, en fonction de la section $S(x, t)$ par monotonie. Symboliquement, écrivons

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \partial_x P \right\rangle = g \partial_x H[S(x, t)] \equiv \frac{1}{S(x, t)} \partial_x \Pi[S(x, t)], \quad (\text{IV.6})$$

si bien que les équations de Saint-Venant deviennent

$$\partial_t S + \partial_x(S\bar{u}) = 0, \quad (\text{IV.7})$$

$$\partial_t \bar{u} + \bar{u} \partial_x \bar{u} + \frac{1}{S} \partial_x \Pi(S) = 0. \quad (\text{IV.8})$$

Ce jeu d'équations est donc équivalent aux équations d'Euler compressibles (IV.4, IV.5) en effectuant les substitutions $\bar{u} \leftrightarrow v$, $S \leftrightarrow \varrho$ pourvu que la substitution (IV.6) soit effectuée. L'équation (IV.7) correspond à la conservation de la masse tandis que l'équation (IV.8) correspond à l'équation de la quantité de mouvement.

En ne considérant que les contributions linéaires, au voisinage de la section/densité au repos S_0 , on a

$$\partial_t S + S_0 \partial_x \bar{u} = 0, \quad (\text{IV.9})$$

$$\partial_t \bar{u} + \frac{1}{S_0} \left[\frac{\partial \Pi}{\partial S}(S_0) \right] \partial_x S = 0, \quad (\text{IV.10})$$

et l'on peut alors éliminer $\bar{u}$ et obtenir l'équation de d'Alembert

$$\partial_{tt} S - c^2(S_0) \partial_{xx} S = 0, \quad (\text{IV.11})$$

avec

$$c^2(S) = \left. \frac{\partial \Pi}{\partial S} \right|_S. \quad (\text{IV.12})$$

Ceci nous fournit donc une équation d'onde non dispersive. Par la suite, la célérité $c(S_0)$ sera notée c_0 .

Nous allons maintenant suivre un calcul dû à [Earnshaw \[1860\]](#), tel que présenté dans le livre de [Whitham \[1999, Sec. 6.9\]](#) afin d'obtenir la première correction non linéaire à cette équation d'onde. Pour ce faire, nous exprimerons $\bar{u}(x, t)$ comme une fonction $\bar{u}(S(x, t))$ de la densité/section $S(x, t)$. Sachant que l'on a $\partial_t \bar{u} = (\partial_t S)(\partial_S \bar{u})$ et $\partial_x \bar{u} = (\partial_x S)(\partial_S \bar{u})$, l'équation de continuité (IV.7) devient

$$\partial_t S + (\partial_x S) \bar{u} = -S(\partial_x S)(\partial_S \bar{u}) \quad (\text{IV.13})$$

et l'équation de la quantité de mouvement (IV.8), sachant (IV.12), devient

$$[\partial_t S + (\partial_x S) \bar{u}](\partial_S \bar{u}) + \frac{1}{S} (\partial_x S) c^2(S) = 0. \quad (\text{IV.14})$$

La combinaison de (IV.13) et (IV.14) donne ainsi la relation

$$\partial_S \bar{u} = \pm \frac{c(S)}{S}, \quad (\text{IV.15})$$

de telle sorte que (IV.13) s'écrit alors

$$\partial_t S + [\bar{u}(S) \pm c(S)] \partial_x S = 0. \quad (\text{IV.16})$$

La vitesse du son $c(S)$ est donnée par l'équation d'état $\Pi(S)$ en utilisant (IV.12). Ainsi, $\bar{u}(S)$ peut être déduite de (IV.15), ce qui ferme l'équation.

Nous allons nous intéresser aux ondes qui se déplacent vers la droite et choisir le signe + dans les équations (IV.15) et (IV.16). On a alors, à l'ordre linéaire en $(S - S_0)$

$$\bar{u}(S) = \left[\frac{c(S_0)}{S_0} \right] (S - S_0) + \mathcal{O}[(S - S_0)^2], \quad (\text{IV.17})$$

$$c(S) = c(S_0) + \left[\frac{\partial c}{\partial S} \Big|_{S_0} \right] (S - S_0) + \mathcal{O}[(S - S_0)^2], \quad (\text{IV.18})$$

$$= c_0 + \frac{1}{2c_0} \left[\frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} \Big|_{S_0} \right] (S - S_0) + \mathcal{O}[(S - S_0)^2]. \quad (\text{IV.19})$$

On en déduit alors

$$\bar{u}(S) + c(S) = c_0 \left[1 + \left(1 + \frac{S_0}{2c_0^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} \Big|_{S_0} \right) \frac{S - S_0}{S_0} \right] \quad (\text{IV.20})$$

et l'équation d'onde non linéaire (IV.16), pour une onde se déplaçant vers la droite, s'écrit sous la forme d'une équation de Burgers non visqueuse

$$\partial_t S + c_0 \left[1 + \left(1 + \frac{S_0}{2c_0^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} \Big|_{S_0} \right) \frac{S - S_0}{S_0} \right] \partial_x S = 0. \quad (\text{IV.21})$$

Nous allons maintenant nous pencher sur le cas particulier d'un gaz polytrophe, à savoir un gaz dont l'équation d'état est de la forme

$$\Pi(S) = \kappa S^\gamma. \quad (\text{IV.22})$$

L'exposant γ est appelé exposant polytropique. Nous avons alors, en utilisant (IV.12)

$$c(S) = (\kappa \gamma)^{\frac{1}{2}} S^{\frac{\gamma-1}{2}}, \quad (\text{IV.23})$$

et l'équation (IV.15) donne alors

$$\bar{u}(S) = \int_{S_0}^S \frac{c(s)}{s} ds = \frac{2}{\gamma-1} [c(S) - c(S_0)]. \quad (\text{IV.24})$$

si bien que l'on a

$$\bar{u}(S) + c(S) = \frac{2}{\gamma-1} [c(S) - c(S_0)] + c(S) + [-c(S_0) + c(S_0)], \quad (\text{IV.25})$$

$$= \frac{\gamma+1}{\gamma-1} [c(S) - c(S_0)] + c(S_0), \quad (\text{IV.26})$$

$$= \frac{\gamma+1}{2} c(S_0) \frac{S - S_0}{S_0} + c(S_0) + \mathcal{O}[(S - S_0)^2], \quad (\text{IV.27})$$

en linéarisant la différence $[c(S) - c(S_0)]$ autour de S_0 , sachant (IV.23). Ainsi, dans le cas d'une onde se déplaçant vers la droite, l'équation d'onde non linéaire (IV.16) — donc avec le signe (+) — s'écrit pour un gaz barotrope

$$\partial_t S + c_0 \left(1 + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{S - S_0}{S_0} \right) \partial_x S = 0, \quad (\text{IV.28})$$

au premier ordre non linéaire, en injectant (IV.27) dans (IV.16). Remarquons enfin que cette équation ne dépend que de l'exposant polytropique γ , indépendamment de la constante κ .

Nous allons maintenant considérer deux cas particuliers :

- (i) Pour un canal rectangulaire de largeur constante W_0 et de profondeur de liquide au repos $H(x, t)$, on a $S(x, t) = W_0 H(x, t)$, si bien que le gradient de pression hydrostatique s'écrit $g \partial_x H = (g/W_0)(\partial_x S)$. Afin de satisfaire (IV.6), nous avons

$$\Pi(S) = \frac{gS^2}{2W_0}, \quad (\text{IV.29})$$

soit un exposant polytropique $\gamma = 2$.

- (ii) Dans le cas d'une section triangulaire de liquide de hauteur $H(x, t)$ et d'angles α et β (cf. figure III.7 (a), p. 41), on a $S(x, t) = \lambda H(x, t)^2$ — avec $\lambda = (\sin(\alpha + \beta))/(2 \sin \alpha \sin \beta)$ donné par (III.47), p. 40 — si bien que l'on a pour gradient de pression hydrostatique : $g \partial_x H = g \lambda^{-1/2} \partial_x S^{1/2}$. Par conséquent, afin de satisfaire (IV.6), on a

$$\Pi(S) = \frac{gS^{3/2}}{3\lambda^{1/2}}, \quad (\text{IV.30})$$

soit un exposant polytropique $\gamma = 3/2$.

IV.2 Solitons de Korteweg–de Vries le long de cylindres liquides

IV.2.1 Considérations théoriques

L'équation d'onde des ondes linéaires en la variable $S(x, t)$ est donnée par la relation de dispersion variqueuse (I.1), p. 12, ce qui donne l'équation (I.4), p. 12 au premier ordre correctif en dispersion (i.e. à l'ordre k^4), soit

$$\partial_t S + c_{\text{eff}} \left[\partial_x S + \frac{1}{2} W_{\text{eff}}^2 (\text{Bo}_c - \text{Bo}_{\text{eff}}) \partial_{xxx} S \right] = 0. \quad (\text{IV.31})$$

Si l'on y ajoute la première correction non linéaire que l'on vient de calculer, on obtient alors l'équation de Korteweg–de Vries suivante

$$\partial_t S + c_{\text{eff}} \left[\partial_x S + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{S - S_0}{S_0} \partial_x S + \frac{1}{2} W_{\text{eff}}^2 (\text{Bo}_c - \text{Bo}_{\text{eff}}) \partial_{xxx} S \right] = 0. \quad (\text{IV.32})$$

Pour un canal rectangulaire de largeur W et de profondeur au repos H_0 , nous avons $S(x, t) = WH(x, t)$, $c_{\text{eff}} = \sqrt{gH_0}$ et $\gamma = 2$ comme exposant polytropique. De

plus, $\Psi(\xi) = \tanh(\xi)$, si bien que $\Psi'''(0) = -2$ et $\text{Bo}_c = 1/3$. En utilisant comme variable $\eta = H(x, t) - H_0$ et non plus $S(x, t)$, on retrouve l'équation classique de Korteweg–de Vries

$$\partial_t \eta + \sqrt{gH_0} \left[\partial_x \eta + \frac{3}{2} \frac{\eta}{H_0} \partial_x \eta + \frac{1}{2} H_0^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{\sigma}{\rho g H_0^2} \right) \partial_{xxx} \eta \right] = 0. \quad (\text{IV.33})$$

Dans le cas d'un canal triangulaire, en faisant l'hypothèse d'une interface libre horizontale dans la section transverse, (*donc en prenant en compte la tension de surface mais pas la présence de la calotte capillaire*), d'une profondeur au repos H_0 , on a $c_{\text{eff}} = \sqrt{gH_0/2}$ et $W_{\text{eff}} = H_0/(2 \sin \alpha)$. Les variations de section sont liées au déplacement du bord de l'interface, donc aux variations de la largeur de celle-ci que nous noterons $W(x, t)$. La section est proportionnelle à W^2 , si bien que le rapport $(S - S_0)/S_0$ devient $2(W - W_0)/W_0$ avec $W_0 = \sin(\alpha + \beta)/(\sin \alpha \sin \beta) H_0 = 2[\sin(\alpha + \beta)/\sin \beta] W_{\text{eff}}$ (cf. (III.46), p. 40). A priori, l'équation de Korteweg–de Vries pour un triangle quelconque est donc, en variable $\eta = W - W_0$, avec W_0 la largeur au repos

$$\partial_t \eta + c_{\text{eff}} \left[\partial_x \eta + \left(\frac{5}{4} \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \right) \frac{\eta}{W_{\text{eff}}} \partial_x \eta + \frac{1}{2} W_{\text{eff}}^2 (\text{Bo}_c - \text{Bo}_{\text{eff}}) \partial_{xxx} \eta \right] = 0. \quad (\text{IV.34})$$

pour des angles $\alpha < \beta$, avec $\text{Bo}_c = |\Psi'''_{\alpha, \beta}(0)|/6$ et $\text{Bo}_{\text{eff}} = \sigma/(\rho g W_{\text{eff}}^2)$.

Dans le cas de notre canal en L ($\alpha = \pi/2 - \beta$) et pour de faibles valeurs de α , le préfacteur $\sin \beta / \sin(\alpha + \beta)$ est proche de 1 et peut être ignoré dans cette limite. Nous avons donc l'approximation $5/4 \times \sin \beta / \sin(\alpha + \beta) \simeq 5/4$. Dans le cas de notre canal en V, ($\alpha = \beta$) et pour de petits angles α , les préfacteurs sinusoidaux ajoutent un facteur $1/2$ et nous avons $5/4 \times \sin \beta / \sin(\alpha + \beta) \simeq 5/8$.

Dans nos systèmes expérimentaux, qui consistent en un triangle en L (tronqué dans le cas Leidenfrost) auquel on ajoute au-dessus une calotte capillaire, l'équation d'état n'est plus celle d'un gaz polytrophe mais celle d'un gaz barotrope (ce n'est donc plus une loi de puissance). L'équation d'état pourrait être calculée après des calculs très fastidieux, ce que nous n'avons pas fait. Pour nous en sortir, nous avons plutôt fait les hypothèses suivantes : l'ansatz géométrique de la section du cylindre vu comme un triangle d'angles α et β (donc avec un exposant polytopique $\gamma = 3/2$) demeure pertinente pour calculer l'équation d'onde non linéaire ; l'équation KdV s'écrit en la variable $\eta = W - \Delta Y_{\text{max}}$, où ΔY_{max} est la largeur au repos de la goutte, celle-là même donnée par l'équation (II.36), p. 25. Alors l'équation KdV s'écrit

$$\partial_t \eta + c_{\text{eff}} \left[\partial_x \eta + \left(\frac{5}{2} \frac{W_{\text{eff}}}{\Delta Y_{\text{max}}} \right) \frac{\eta}{W_{\text{eff}}} \partial_x \eta + \frac{1}{2} W_{\text{eff}}^2 (\text{Bo}_c - \text{Bo}_{\text{eff}}) \partial_{xxx} \eta \right] = 0, \quad (\text{IV.35})$$

avec $W_{\text{eff}} = c_{\text{eff}}^2/g_{\text{eff}}$ donnée par les calculs analytiques, Bo_c et Bo_{eff} donnés par l'équation (I.2), p. 12 et le préfacteur ν_1 devant le terme non linéaire donné par

$$\nu_1 = \frac{5}{2} \frac{W_{\text{eff}}}{\Delta Y_{\text{max}}}. \quad (\text{IV.36})$$

IV.2.2 Résultats expérimentaux

Pour une équation KdV de la forme,

$$\partial_t \eta + c_{\text{eff}} \left[\partial_x \eta + \frac{\nu_1}{W_{\text{eff}}} \eta \partial_x \eta + \frac{1}{2} W_{\text{eff}}^2 (\text{Bo}_c - \text{Bo}_{\text{eff}}) \partial_{xxx} \eta \right] = 0, \quad (\text{IV.37})$$

la solution à 1 soliton localisé s'écrit

$$\eta(x, t) = A_0 \text{sech}^2 \left(\frac{x - ct}{\Delta} \right), \quad (\text{IV.38})$$

avec les relations suivantes reliant vitesse de propagation c , amplitude A_0 et largeur Δ

$$\frac{c}{c_{\text{eff}}} = 1 + \frac{\nu_1 A_0}{3W_{\text{eff}}}, \quad (\text{IV.39})$$

$$\frac{\Delta}{W_{\text{eff}}} = \sqrt{2 \frac{\text{Bo}_c - \text{Bo}_{\text{eff}}}{c/c_{\text{eff}} - 1}}. \quad (\text{IV.40})$$

Dans nos expériences, que ce soit en Leidenfrost ou en super-hydrophobe, nous avons étudié la propagation d'ondes non linéaires dans le cas de nombre de Bond plus grand que le nombre de Bond critique, donc dans une situation où l'amplitude des solitons est négative et la vitesse de propagation subsonique ($c < c_{\text{eff}}$). La question est alors de savoir si la relation (IV.39) est bien satisfaite avec ν_1 donné par (IV.36). Nous avons utilisé le substrat en L dans le cas super-hydrophobe et notre substrat courbé dans le cas Leidenfrost. Tous les deux sont faiblement inclinés d'un angle $\alpha \leq 4^\circ$.

Nous avons généré des solitons de grande amplitude de la manière suivante :

- dans le cas Leidenfrost, nous perturbons l'interface à la main à l'aide d'un barreau ;
- dans le cas super-hydrophobe, nous produisons un jet à l'aide d'une micropipette. Le jet crée une dépression qui déforme l'interface. Un train d'ondes rapides est émis et apparaît ensuite une onde solitaire (cf. figure IV.1).

Les mesures de vitesse de propagation et d'amplitude sont montrées en figure IV.2 où les quantités reportées sont le rapport adimensionné c/c_{eff} en fonction du rapport adimensionné $A_0/3W_{\text{eff}}$. À titre de comparaison, ont été ajoutées les données des expériences de Falcon *et al.* [2002] dans le mercure. On voit que les points suivent des droites de différentes pentes ν_1 . Les expériences de 2002 suivent bien une pente $\nu_1 = 3/2$, en bon accord avec le fait d'être en canal rectangulaire. Nos mesures en Leidenfrost suivent une pente $\nu_1^{\text{expe}} \simeq 3$ [Perrard *et al.*, 2015].

Dans le cas super-hydrophobe, nous nous sommes placés à volume $V = 40$ mL, pour une longueur de goutte $L = 50$ cm. La section vaut $S_{\text{tot}} = V/L = 80 \text{ mm}^2$; la valeur du paramètre m donnant la forme de la goutte peut se déduire des calculs du chapitre II ainsi que les valeurs de sa largeur, ΔY_{max} et sa largeur effective $W_{\text{eff}} = c_{\text{eff}}^2/g_{\text{eff}}$ (cf. Éqs. (3.44), (2.20) et (3.47) respectivement, de l'article de Pham *et al.* [2020]).

À des angles $\alpha = 2^\circ, 3^\circ$ and 4° , le préfacteur ν_1 donné par (IV.36) vaut respectivement 2,1, 2,03 et 1,99, ce qui reste très proche de 2. Parmi nos points expérimentaux, les points les plus significatifs sont ceux de grande amplitude, donc de vitesse lente. Ils suivent une pente ν_1^{expe} un peu plus grande que 2, ce qui est en bon accord avec nos prédictions $\nu_1 \simeq 2$.

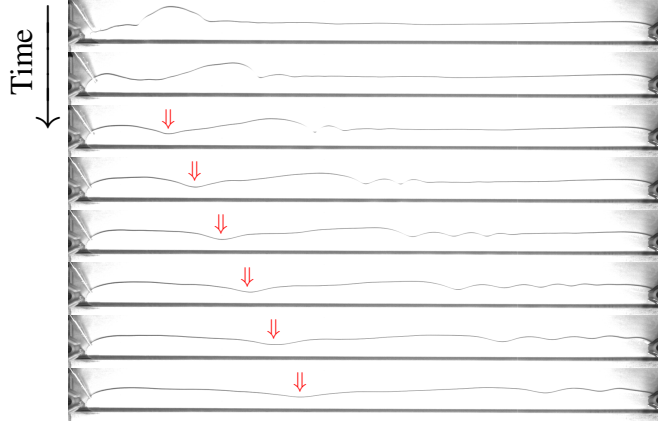


Figure IV.1 : Instantanés de la propagation d'un soliton KdV le long d'un cylindre posé sur substrat super-hydrophobe. Ici, le volume déposé est égal à 40 mL et l'angle d'inclinaison α est de 2° . Après une forte perturbation de l'interface en bout de goutte, des ondes sont émises devant une onde solitaire de dépression qui émerge et se propage à vitesse constante c inférieure à c_{eff} , la célérité des ondes de grande longueur d'onde. Elle finit par se dissiper à mi-goutte.

IV.3 Cas d'un bord de Plateau

Nous pouvons généraliser à d'autres systèmes à géométrie cylindrique notre méthode pour obtenir l'équation KdV à partir d'équations de type Saint-Venant. Nous allons considérer le cas des bords de Plateau le long desquels la propagation d'ondes solitaires de dépression a été observée récemment [Argentina *et al.*, 2015; Bouret *et al.*, 2016].

Les bords de Plateau sont des domaines liquides que l'on trouve à la jonction de films de savon. Dans le cas des expériences citées, leur section correspond à la région délimitée par trois cercles de même rayon $R(x, t)$ et tangents deux à deux. Ce rayon correspond au rayon de courbure du cylindre liquide à l'abscisse x et au temps t (cf. figure IV.3).

Nous ne considérons ici que les modes variqueux en supposant que la variation de section ne porte que sur les variations de rayon. La valeur de la section d'un tel bord de Plateau, de rayon R est donnée par

$$S(R) = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right) R^2. \quad (\text{IV.41})$$

Soit C l'un des trois centres de courbure. La distance de l'origine O à ce centre C est

$$OC(R) = \frac{R}{2\sqrt{3}} + R \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} R. \quad (\text{IV.42})$$

La distance de l'origine à l'interface est

$$Ox_i(R) = |OC(R)| - R = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right) R. \quad (\text{IV.43})$$

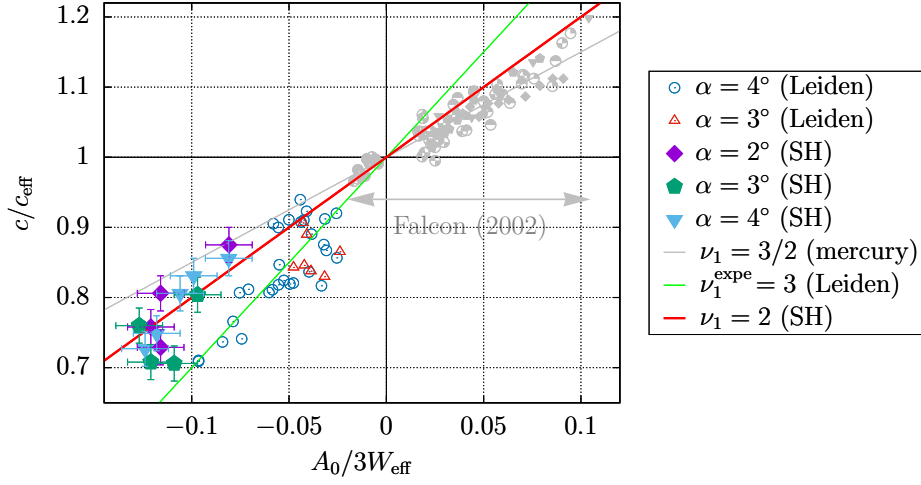


Figure IV.2 : Vitesse de propagation renormalisée c/c_{eff} versus amplitude renormalisée $A_0/(3W_{\text{eff}})$. Les régions $c/c_{\text{eff}} > 1$ correspondent aux solitons supersoniques (régime gravitaire et solitons d'amplitude positive) tandis que la région $c/c_{\text{eff}} < 1$ correspond aux solitons subsoniques (i.e. en régime capillaire où des solitons d'amplitude négative se propagent). Dans le cas super-hydrophobe (SH), les points suivent une droite de pente $\nu_1 \simeq 2$. Dans le cas Leidenfrost, la pente vaut à peu près $\nu_1^{\text{expe}} \simeq 3$. À titre de comparaison, les points correspondant à des expériences dans le mercure en canal rectangulaire (Falcon *et al.* [2002]) ont été ajoutés (en gris, suivant une droite de pente $\nu_1 = 3/2$).

En utilisant la loi de Laplace, nous pouvons exprimer la pression à l'interface comme

$$p(x, t) = +\sigma \left[-\frac{1}{R(x, t)} - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right) \partial_{xx} R(x, t) \right]. \quad (\text{IV.44})$$

Supposons un écoulement de type bouchon le long de la direction x . On se place dans la limite non visqueuse. Le champ de pression est donc uniforme dans la section, on le notera $p(x, t)$. Il est donné par sa valeur à l'interface. On est alors ramené à un système de type Saint-Venant s'exprimant comme

$$\partial_t S + \partial_x (\bar{u} S) = 0, \quad (\text{IV.45})$$

$$\partial_t \bar{u} + \bar{u} \partial_x \bar{u} = \frac{1}{\rho} \partial_x p. \quad (\text{IV.46})$$

En posant $R(x, t) = R_0 [1 + \varepsilon \exp[i(kx - \omega t)]]$ et $\bar{u} = \varepsilon u_0 \exp[i(kx - \omega t)]$, les équations (IV.45) et (IV.46), à l'ordre 1 en ε donnent alors la relation de dispersion

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{2\rho R_0} k^2 \left[1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right) R_0^2 k^2 \right]. \quad (\text{IV.47})$$

À notre connaissance, une confirmation expérimentale de cette relation n'a jamais été entreprise. Seule la relation de dispersion des modes sinués a été étudiée [Kosgodagan Acharige *et al.*, 2014].

Pour obtenir la première correction non linéaire, comme dans le cas de nos cylindres sessiles, nous nous plaçons dans le cas non dispersif, de telle sorte que la

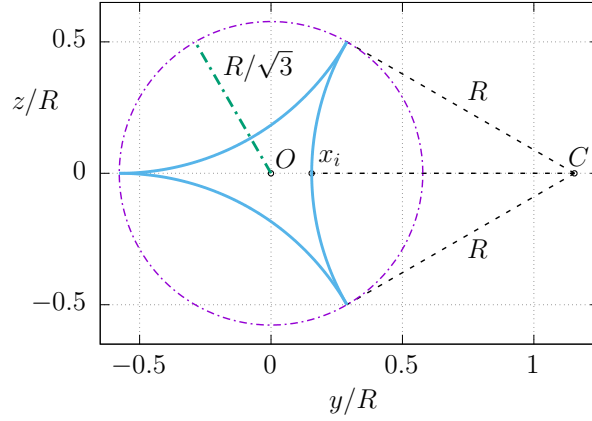


Figure IV.3 : Section transverse d'un bord de Plateau centré à l'origine O . Ses bords (en bleu) sont définis comme trois cercles tangents deux à deux de rayon R . x_i désigne la distance de l'interface à son centre. La longueur $|Cx_i|$ est le rayon de courbure R du bord de Plateau et C est le centre de courbure de l'un des trois arcs de cercle constituant l'interface. Le bord de Plateau est inscrit dans un cercle de rayon $R/\sqrt{3}$, centré à l'origine.

dérivée seconde dans (IV.44) $\partial_{xx}R$ sera négligée. La pression p peut donc s'exprimer comme une fonction de la section S et nous avons donc, en utilisant (IV.41),

$$p(x, t) = -\frac{\sigma}{R(x, t)} = -\frac{\sigma \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right)^{1/2}}{[S(x, t)]^{1/2}}. \quad (\text{IV.48})$$

La valeur moyennée de $\partial_x P$ est alors donnée par

$$\langle \partial_x P(x, t) \rangle = \frac{\sigma \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right)^{1/2}}{2[S(x, t)]^{3/2}} (\partial_x S), \quad (\text{IV.49})$$

si bien que l'on peut en déduire l'équation d'état (cf. équation (IV.6))

$$\Pi(S) = \frac{\sigma}{\rho} \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right)^{1/2} S^{1/2}, \quad (\text{IV.50})$$

ce qui donne un exposant polytropique $\gamma = 1/2$.

Pour une onde se propageant vers la droite, on a la relation de dispersion

$$\omega = c_0 k \left[1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \right) R_0^2 k^2 \right]. \quad (\text{IV.51})$$

avec $c_0 = \sqrt{\sigma/(2\rho R_0)}$ et l'équation KdV en la variable S peut s'obtenir à partir de (IV.32) et elle s'écrit

$$\partial_t S + c_0 \left[\partial_x S + \frac{3}{4} \frac{S - S_0}{S_0} \partial_x S - \frac{1}{2} R_0^2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right) \partial_{xxx} S \right] = 0. \quad (\text{IV.52})$$

Enfin, en variable r ($R = R_0 + r$), elle s'écrit

$$\partial_t r + c_0 \left[\partial_x r + \frac{3}{2R_0} r \partial_x r - \frac{1}{2} R_0^2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right) \partial_{xxx} r \right] = 0. \quad (\text{IV.53})$$

Cela fournit des solutions solitons (IV.38) de la forme, pour $\nu_1 = 3/2$ et $v = c/c_{\text{eff}}$:

$$r(x, t) = 2(v - 1)R_0 \operatorname{sech}^2 \frac{x - vc_0 t}{\sqrt{\frac{2(2/\sqrt{3}-1)}{1-v}} R_0} \equiv A_0 \operatorname{sech}^2 \frac{x - vc_0 t}{\frac{2\sqrt{\beta}}{\sqrt{1-v}} R_0}. \quad (\text{IV.54})$$

Expérimentalement, Bouret *et al.* [2016] ont trouvé $2\sqrt{\beta_{\text{expe}}} \simeq 0,4$, tandis que nous avons $2\sqrt{\beta} \equiv \sqrt{2(2/\sqrt{3}-1)} \simeq 0,56$, soit une erreur relative de 40 %. C'est une valeur plus proche de la valeur expérimentale que celle proposée par Argentina *et al.* [2015], pour qui $2\sqrt{\beta} = 2\sqrt{(2\sqrt{3}-\pi)/\pi} \simeq 0,64$, soit une erreur relative de 60 %.

Chapitre V

Gouttes à géométrie torique

À la suite de mes travaux sur des gouttes rectilignes sur substrat super-hydrophobe, je suis revenu au cas des gouttes à géométrie torique, obtenues non plus par effet Leidenfrost, mais cette fois-ci en traitant de manière super-hydrophobe différents substrats axisymétriques (cf. figures V.1 (a, b)). Le stage de M1 de Filip Novkoski a été consacré à ce système physique, en 2020, en collaboration avec Éric Falcon. Le schéma du montage est montré en figure V.1 (b).

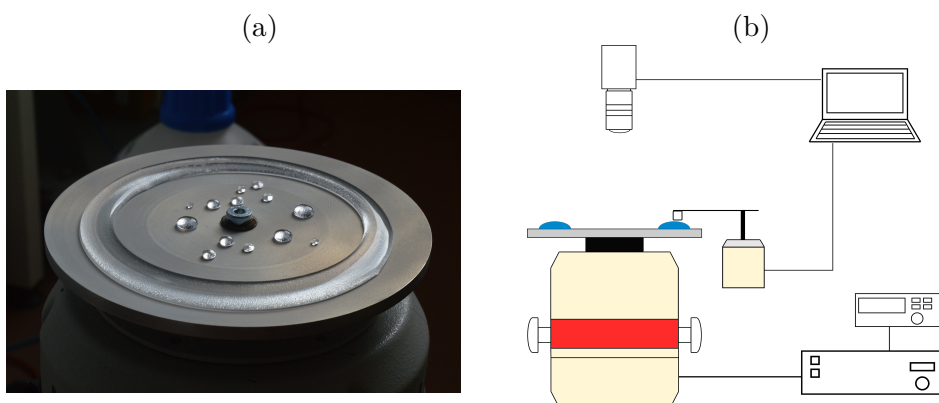


Figure V.1 : (a) Une goutte de liquide (ici du glycérol en guise d'illustration) est posée sur un substrat creusé, traité de manière super-hydrophobe. Le diamètre typique de la goutte torique est de 15 cm. Quelques petites gouttes sont déposées sur la partie plane au centre du substrat à titre de comparaison. La présence du substrat empêche l'instabilité de Plateau-Rayleigh de fragmenter la goutte et la tension de surface de refermer le trou du tore. Le diamètre de la cellule est de 19 cm. (b) Schéma du dispositif expérimental : on enregistre en vue de dessus la goutte et on analyse les déformations du bord de la goutte quand on l'excite à l'aide de pots vibrants.

Nous avons étudié de manière détaillée les ondes linéaires qui pouvaient se propager dans un tel système. Ces modes de déformation du tore se manifestent sur les spectres des signaux spatio-temporels (figure V.2) des déplacements des bords intérieur et extérieur du tore vu du dessus. Ces spectres respectifs se superposent. Ils matérialisent les différents modes du système, à savoir les modes variqueux, sinueux et de ballotement.

Notons que, dans la plage de fréquence visualisée, plus la largeur W est grande, plus le nombre de branches de ballotement est grand, car la valeur des fréquences de

coupure est une fonction décroissante de W . Contrairement à nos cylindres posés sur un substrat en V symétrique, ici, les deux bords ne sont pas équivalents. On le voit à la façon dont l'énergie des branches se répartit d'un bord à l'autre dans les spectres.

Si les branches de ballotement sont visibles sur les deux bords de manière équivalente, il n'en est pas de même des deux premières branches. La branche sinueuse est visible sur l'ensemble des pulsations le long du bord intérieur, ce qui n'est pas le cas de la branche variqueuse qui, pour sa part, est visible jusqu'à une certaine pulsation que nous noterons $\omega_{\text{vis}}^{\text{in}}(W)$. C'est l'inverse qui se produit le long du bord extérieur, pour une pulsation $\omega_{\text{vis}}^{\text{ext}}(W) > \omega_{\text{vis}}^{\text{in}}(W)$. Ces pulsations $\omega_{\text{vis}}(W)$ sont une fonction décroissante de W et l'on a $\omega_{\text{vis}}^{\text{in}}(W)$ qui vaut quasiment la fréquence de coupure des modes sinueux pour $W \gtrsim 2,5$ cm.

Par la suite, nous allons décrire plus quantitativement les différentes branches.

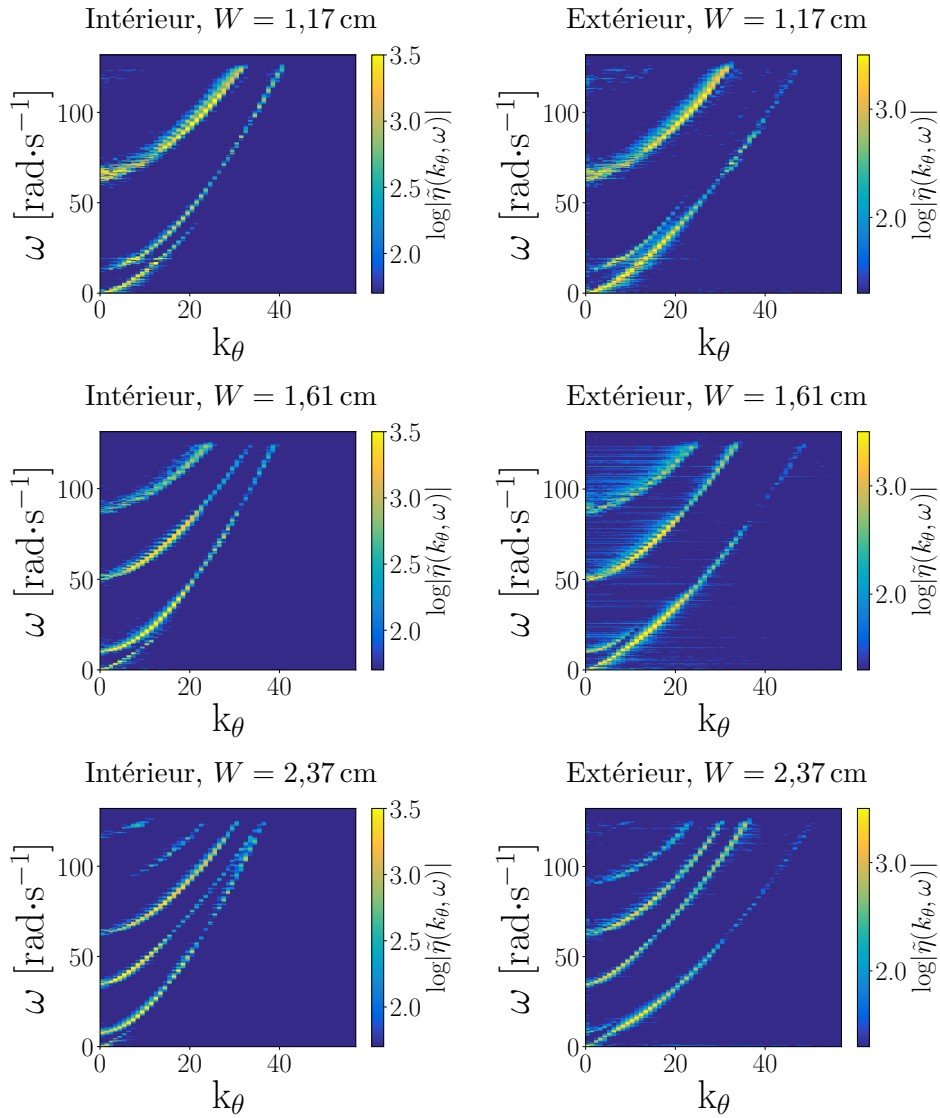


Figure V.2 : Spectres spatio-temporels des déplacements du bord interne et du bord externe d'une goutte torique, pour différentes largeurs de tore W .

V.1 Modes variqueux

La branche variqueuse peut se décrire par une expression qui a la même forme que dans le cas rectiligne, à savoir

$$\omega_V^2 = \left[g_{\text{eff}} \frac{k_\theta}{R_{\text{out}}} + \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\rho} \frac{k_\theta^3}{R_{\text{out}}^3} \right] \cdot \Psi \left[\frac{k_\theta W R_{\text{out}}}{2R_c^2} \right], \quad (\text{V.1})$$

avec $\Psi(\xi)$ une certaine fonction dont la fonction $\tanh$ est un bon ansatz, $\rho = 997 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $g_{\text{eff}} = g \sin \alpha$. Enfin $\sigma_{\text{eff}} \simeq 60 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$ est de nouveau une tension de surface effective obtenue en faisant des ajustements des branches variqueuses du bord extérieur. Notons que cette tension de surface effective est constante aux barres d'erreur expérimentales près pour tout W sur la plage de valeurs 1,6–3,2 cm.

Pour k_θ proche de zéro, on retrouve un comportement linéaire de la relation de dispersion des ondes variqueuses

$$\omega_V^2 \underset{k_\theta \rightarrow 0}{=} \frac{g_{\text{eff}} W}{2R_c^2} k_\theta^2 \equiv \Omega_\varphi^2 k_\theta^2, \quad (\text{V.2})$$

avec ainsi

$$\Omega_\varphi = \frac{\sqrt{g_{\text{eff}} W/2}}{R_c}, \quad (\text{V.3})$$

la « vitesse de phase angulaire » (rappelons qu'ici, k_θ n'a pas de dimension, c'est un nombre azimutal). Elle suit une loi d'échelle en $W^{1/2}$ bien vérifiée expérimentalement (figure V.3 (b) en médaillon).

Notons que l'expression (V.1) dans la limite des grands nombres k_θ a la même structure que la formule donnée par [Rayleigh, 1879, Éq. (28)] pour des modes azimutaux d'oscillation d'un cylindre de rayon R_0

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho R_0^3} n(n^2 - 1), \quad (\text{V.4})$$

formule souvent considérée dans le cas de flaques et dont nous rappelons l'obtention en annexe C.2.2. Cette formule a été affinée par Takaki & Adachi [1985, Éq. (27)] pour décrire les oscillations observées dans des gouttes aplaties par la gravité [Adachi & Takaki, 1984]. Elle s'écrit

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho R_0^3} \frac{n(n^2 - 1)}{(1 + 2\beta H) + \frac{n-3}{2GH}}, \quad (\text{V.5})$$

avec $\beta = 1/2 - \pi/8$, $H = h_0/R_0$ où h_0 est la hauteur de la goutte et R_0 son rayon, $G = \rho g R_0^2 / \sigma$. Le dénominateur supplémentaire diminue de manière effective la tension de surface, comme pour nos expériences. Toutefois, le facteur correctif est bien moins important que dans nos expériences, en utilisant nos échelles de longueur dans leur expression. Notre expression est également de la même forme que l'expression donnée dans le cas d'un tore de mercure maintenu par un cylindre en son centre [Laroche et al., 2019, Éq. (1)]. Il reste à expliquer pourquoi nous obtenons ces petites valeurs de σ_{eff} . La présence du trou libre au centre de nos tores pourrait en être la cause.

V.2 Modes sinueux

La branche sinueuse (S , sur la figure V.3) a un tout autre comportement que dans le cas rectiligne : elle intersecte toutes les branches supérieures. Un ajustement de la courbe indique qu'elle a un comportement purement capillaire pour $k \rightarrow \infty$, i.e., un comportement en $\omega^2 \sim k^3$ et l'on trouve

$$\omega_S^2 = (\omega_0^S)^2 + \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\rho} \left(\frac{k_\theta}{R_{\text{in}}} \right)^3. \quad (\text{V.6})$$

en prenant la même valeur de $\sigma_{\text{eff}} \simeq 60 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$ que dans l'expression (V.1) des modes variqueux, là encore pour $1,6 \text{ cm} \leq W \leq 3,2 \text{ cm}$, avec ω_0^S sa fréquence de coupure. Cette dernière vérifie expérimentalement très bien la relation

$$\omega_0^S = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{g \sin(2\alpha)}{2W}} \quad (\text{V.7})$$

(figure V.3 (b)) et l'on retrouve un résultat équivalent au cas rectiligne de la section III.2.4, p. 45.

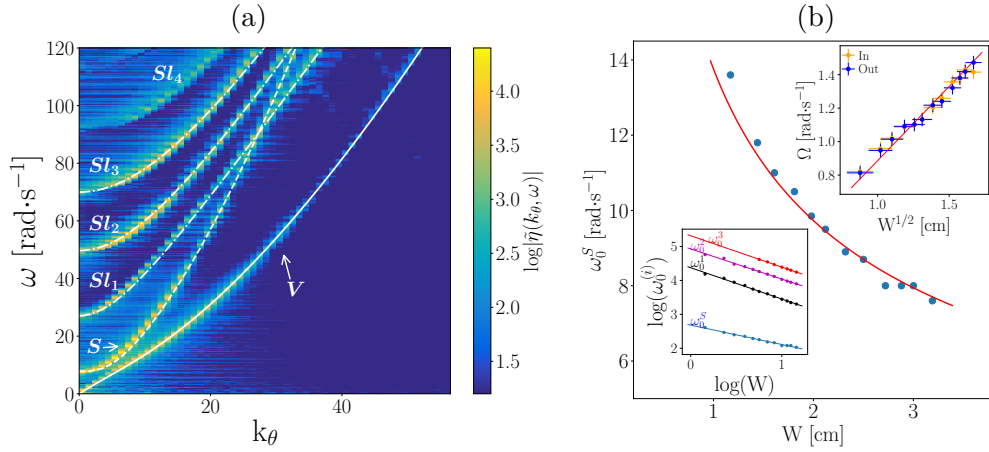


Figure V.3 : (a) Tore de largeur $W = 3,2 \text{ cm}$. Superposition des deux spectres afin de distinguer l'ensemble des branches simultanément. La branche V est la branche variqueuse, elle va en zéro lors que $k \rightarrow 0$. La branche S est la branche sinueuse. Elle intersecte les branches supérieures SL_i les branches de ballottement. Les courbes d'ajustement correspondantes ont été ajoutées sur les spectres. Les accords sont très satisfaisants. (b) Pulsations de coupure des modes sinueux en fonction de W . Médaillon du bas, lois d'échelle des fréquences de coupures des modes sinueux et de ballottement. Médaillon du haut : dépendance de la vitesse de phase angulaire Ω_φ en fonction de $\sqrt{W}$.

V.3 Échange d'énergie entre branches variqueuses et sinueuses

Au lieu de procéder à un forçage en balayage de fréquence, si l'on force maintenant le tore de manière monochromatique, i.e. à fréquence de forçage f fixée, des ondes

stationnaires peuvent être générées, bien visibles à basse fréquence, comme on peut le voir sur les figures I.5 (b), p. 7 et V.4 (a).

Pour illustrer les phénomènes, nous présentons deux cas : (i) un tore de volume faible, donc mince pour lequel $W = 1,5$ cm ; (ii) un tore de grand volume, donc large pour lequel $W = 3,2$ cm. Dans les deux cas, le nombre de motifs n à basse fréquence peut être déterminé en fonction de la fréquence $f \in [0,8, 3]$ Hz (figure V.4 (b)).

Dans le cas mince, les bords intérieur et extérieur réagissent au forçage de la même manière : le nombre de modes est identique et il suit la relation de dispersion variqueuse. En revanche, dans le cas large, tant que f est inférieure à f_{cut}^S (fréquence de coupure des modes sinueux), les modes se trouvent le long de la branche variqueuse. Dès que la fréquence f dépasse la fréquence de coupure f_{cut}^S , les deux bords se découplent. Sur le bord extérieur, le nombre de modes correspond au nombre azimutal k_θ donné par la relation de dispersion variqueuse. A contrario, sur le bord intérieur, le nombre de modes correspond au nombre azimutal k_θ donné par la relation de dispersion sinueuse.

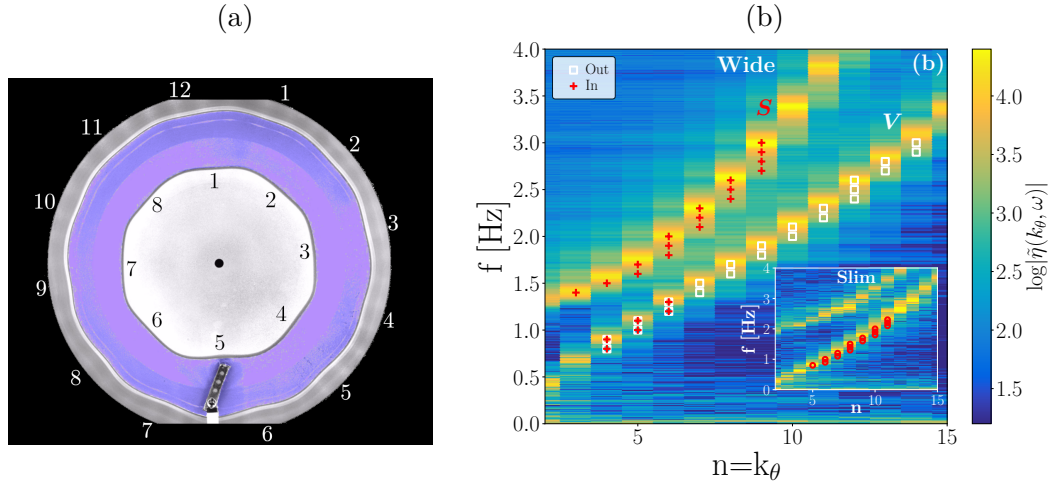


Figure V.4 : (a) Tore large, $W = 3,2$ cm. Motifs polygonaux générés sous la forme d'ondes stationnaires à la fréquence de forçage $f = 2,5$ Hz. À l'intérieur, $n = 8$ (motif octogonal) ; à l'extérieur, $n = 12$ (motif dodécagonal). (b) Nombre de côtés n du motif polygonal à l'extérieur ($\square$ blanc) et à l'intérieur ($+$ rouge) pour un tore large ($W = 3$ cm) pour différentes valeurs de forçage f . Les données sont ajoutées aux spectres intérieur et extérieur qui ont été superposés. Pour $f \geq 1,2$ Hz, les deux bords se découplent et n diffère selon les bords : le long du bord extérieur, n suit toujours la branche variqueuse, tandis qu'à l'intérieur n bascule sur la branche sinueuse. Médaillon : Nombre de motifs n ($\circ$ rouge) dans le cas d'un tore mince ($W = 1,5$ cm), où les n coïncident sur les deux bords, en suivant la branche variqueuse.

V.4 Modes de ballottement

Les branches notées Sl_i sur la figure V.3 correspondent comme dans le cas rectiligne à des modes de ballottement dus à la présence du substrat en V. Elles

peuvent être ajustées par des lois en

$$\omega_{Si}^2 = \left(\omega_0^{(i)}\right)^2 + c^2 \left(\frac{k_\theta}{R_c}\right)^2, \quad (\text{V.8})$$

avec $c = \sqrt{g_{\text{eff}} R_c}$ et $\omega_0^{(i)}$ des fréquences de coupure à $k_\theta = 0$.

Notons le comportement linéaire de ces branches pour $k \gg 1$ qu'on semblait trouver aussi dans le cas rectiligne, même si l'on manque de données dans ce dernier cas pour être véritablement concluant. Ce comportement à grand k_θ est différent de celui qu'on trouve quand on traite le problème sans tension de surface (figure V.5), en résolvant par une méthode des éléments finis les équations

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Phi - \frac{k^2}{r^2} \Phi = 0, \quad \forall (r, z) \in \Omega \quad (\text{V.9})$$

$$\partial_n \Phi|_{\Gamma_1} = 0, \quad (\text{V.10})$$

$$\partial_n \Phi|_{\Gamma_0} = \frac{\omega^2}{g} \phi|_{\Gamma_0}, \quad (\text{V.11})$$

analogues au cas rectiligne (III.45), p. 40, mais avec un opérateur laplacien adapté à la géométrie torique. Les calculs numériques donnent la fréquence de coupure des branches de ballotement, ainsi que leur rapport, dont la valeur est proche des valeurs expérimentales.

Les fréquences de coupure expérimentales varient en $\omega_0^{(i)} \sim W^{-1}$ (cf. figure V.3, médaillon du bas). Cette loi d'échelle est la même que celle trouvée dans le cas d'un canal rectangulaire large et peu profond (cf. annexe C.1.2.b, p. 127). Elles sont bien décrites par une loi en $\omega_0^{(i)} = M(i) \sqrt{g_{\text{eff}} R_c} / W$ avec $M(i)$ une fonction déduite du calcul éléments finis.

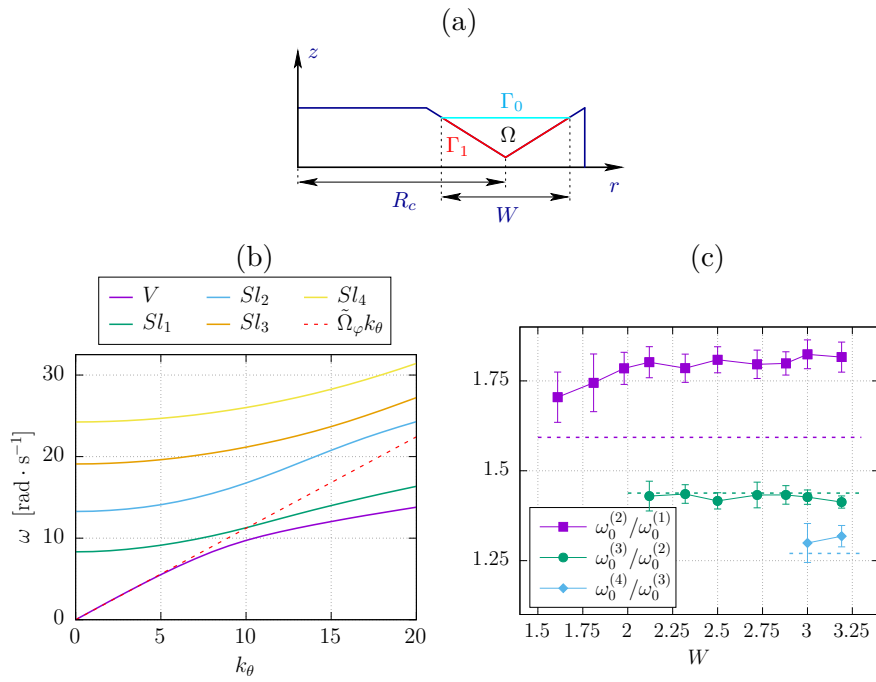


Figure V.5 : (a) Notations du problème numérique. (b) Relations de dispersion numériques pour un tore de rayon $R_c = 7$ cm et de largeur $W = 3,2$ cm. La branche variqueuse ainsi que les quatre premières branches de ballottement sont montrées. (c) Rapports de fréquence de coupure pour différents W . En pointillé : rapports de fréquence obtenus numériquement sans dépendance visible en W .

Chapitre VI

Conclusions et Perspectives

Les travaux que j'ai présentés dans les chapitres précédents ne sont qu'une première étape dans la compréhension des ondes qui se propagent dans nos gouttes allongées rectilignes ou toriques.

Dans le cas rectiligne, nous avons expliqué que des gouttes très allongées posées sur un substrat horizontal super-hydrophobe étaient toujours sujettes à l'instabilité de Plateau-Rayleigh. Nous avons pour cela calculé la relation de dispersion des ondes dans la limite grande longueur d'onde en utilisant les équations de Saint-Venant. Cependant, le taux de croissance des modes de grande longueur d'onde tend vers zéro à mesure que sa section transverse S_0 augmente. Du point de vue de la relation de dispersion, elle s'écrit $\omega^2 = [c_{\text{eff}}^{\text{plat}}(S_0)]^2 k^2$ avec $[c_{\text{eff}}^{\text{plat}}(S_0)]^2 \rightarrow 0^-$ pour $S_0 \rightarrow \infty$.

Dès que le substrat n'est plus plat, elles peuvent rester stables pourvu que leur section soit suffisamment importante. Le substrat est en effet rempli comme dans le cas d'un canal et ce volume d'eau donne une vitesse des ondes (en l'absence de la calotte) telle que $[c_{\text{eff}}^{\text{subst}}]^2 = gS_0/W_0$ où W_0 serait la largeur de l'interface libre sans la calotte. On a $[c_{\text{eff}}^{\text{subst}}]^2 \rightarrow \infty$ pour $S_0 \rightarrow \infty$. On comprend donc bien, avec ce raisonnement qualitatif, que dans le système total {canal + calotte}, les deux contributions (instabilité de la calotte et stabilité des ondes de gravité) peuvent se compenser lorsque la section augmente. $(c_{\text{eff}}^{\text{total}})^2$ devient alors positif dans le système complet au-delà d'une certaine section critique.

Nous avons comparé nos prédictions théoriques avec les résultats expérimentaux et avons trouvé un très bon accord entre les deux. Le raisonnement peut se généraliser au tore liquide et nous avons constaté expérimentalement le même phénomène, sans en avoir fait encore une étude quantitative.

Nous nous sommes ensuite intéressés au régime dispersif et avons caractérisé les modes sinueux et les modes de ballonnement dans nos deux systèmes. Quant aux modes variqueux, nous avons mis en évidence le rôle de la bathymétrie du substrat dans la relation de dispersion au travers d'une fonction de forme Ψ , le pendant de l'habituelle fonction $\tanh$. Des effets de tension de surface renormalisée ont été également mis en évidence. Pour caractériser tout cela, nous avons eu recours à des approches semi-analytiques, combinées à des calculs numériques simplifiés sans tension de surface.

Il nous reste encore à mieux expliquer les valeurs de tension de surface effective mesurées expérimentalement, que ce soit dans le cas super-hydrophobe ou dans le cas en caléfaction. Ceci ne pourra se faire qu'en modélisant le problème sans

approximation en résolvant numériquement les équations d'Euler du problème, ce qui nous amènera à la section VI.1.

Nous nous sommes aussi intéressés aux ondes non linéaires se propageant le long de nos gouttes. Pour cela nous avons proposé une équation de Korteweg–de Vries avec des coefficients adaptés aux propriétés de nos gouttes et aux propriétés des substrats. Elle gouverne la propagation d'ondes de dépression qu'on a pu observer dans nos gouttes rectilignes et les relations amplitude/vitesse de propagation sont bien vérifiées.

Nos gouttes sont donc un milieu quasi-1D dispersif et non linéaire, de surcroît très faiblement dissipatif dans le cas Leidenfrost et faiblement dissipatif dans le cas super-hydrophobe. De plus, des branches multiples de modes de propagation existent. À partir de ce constat, des questions concernant les interactions non linéaires entre ces modes se posent, que nous aborderons dans la section VI.2.

Rappelons enfin ce qui a été à l'origine des travaux présentés dans ce mémoire : le facetage d'un anneau liquide en caléfaction. La nature de ces ondes polygonales est non linéaire au vu des angles qu'elles peuvent faire prendre à l'interface (cf. figure I.1 (b), p. 3). Ces mêmes polygones ont été observés récemment dans des tores d'azote liquide par Ludu & Raghavendra [2019]. Ils en ont étudié la forme et proposé une équation de type KdV pour décrire leur rotation. Ils les ont identifiés comme des ondes cnoïdales [Ludu & Draayer, 1998]. La question qu'il est légitime de se poser est comment ces modes non linéaires émergent spontanément. La section VI.3 sera consacrée à cette question.

VI.1 Relations de dispersion complètes

VI.1.1 Cas cylindrique

La relation de dispersion des modes variqueux du cylindre posé a été obtenue de manière semi-analytique, en recourant à un certain nombre d'approximations. Le seul moyen de calculer la relation de manière complète est d'en passer par un calcul numérique, en partant des équations de l'hydrodynamique complètes.

Sans tenir compte de la tension de surface, le calcul peut être fait dans n'importe quel canal, comme présenté en III.2, p. 39 ou en annexe C.1, p. 121. Inclure la tension de surface est faisable en supposant une interface libre qui reste horizontale dans la section transverse et pour des conditions de mouillage au substrat particulières. On peut alors effectuer la substitution $g \mapsto g + (\sigma/\rho)k^2$ (cf. C.1.3, p. 127).

Dès que l'interface au repos devient courbée, les choses deviennent moins évidentes. Pour s'en convaincre, notons $\mathcal{F}$ le potentiel des vitesses, tel que $\mathbf{u} = \nabla \mathcal{F}$. Définissons l'interface par

$$M(x, s, t) = [x, \eta(x, s, t), \zeta(x, s, t)], \quad (\text{VI.1})$$

$$\eta(x, s, t) = \eta_0(s) + \varepsilon \cos(kx - \omega t) \eta_1(s), \quad (\text{VI.2})$$

$$\zeta(x, s, t) = \zeta_0(s) + \varepsilon \cos(kx - \omega t) \zeta_1(s), \quad (\text{VI.3})$$

avec s l'abscisse curviligne de la trace de l'interface au repos dans le plan orthogonal à Ox à l'abscisse x . On la perturbe avec une déformation (η_1, ζ_1) , modulée dans l'espace et dans le temps. Pour le moment, on ne prescrit rien concernant η_1 et ζ_1 .

En opérant par séparation des variables et en présupposant un potentiel des vitesses de la forme

$$\mathcal{F}(x, y, z, t) = \varepsilon \cos(kx - \omega t) \Xi(y, z), \quad (\text{VI.4})$$

on se ramène donc à un problème 2D et l'on pose $\boldsymbol{\tau}(x, s, t) = [0, \cos \phi(s, t), \sin \phi(s, t)]$ le vecteur tangent et $\mathbf{n}(x, s, t) = [0, -\sin \phi(s, t), \cos \phi(s, t)]$ le vecteur normal à l'interface. On notera Ω la section au repos, Γ_1 la surface mouillée du substrat et Γ_0 l'interface libre du cylindre.

On doit résoudre le problème suivant : Trouver Ξ non nul, tel que pour $k \in \mathbb{R}$, il existe un $\omega \in \mathbb{R}$ tel que

$$\Delta \Xi(y, z) - k^2 \Xi(y, z) = 0, \quad \forall t, \forall (y, z) \in \Omega, \quad (\text{VI.5})$$

$$\partial_n \Xi|_{M(x, y, z, t)} = \mathbf{n} \cdot \nabla \Xi = 0, \quad \forall t, \forall M \in \Gamma_1, \quad (\text{VI.6})$$

$$\partial_n \Xi|_{M(x, s, t)} = \mathbf{n} \cdot \nabla \Xi = \mathbf{n} \cdot [(\partial_t \eta) \mathbf{e}_y + (\partial_t \zeta) \mathbf{e}_z], \quad \forall t, \forall M \in \Gamma_0, \quad (\text{VI.7})$$

$$\partial_t \Xi|_{M(x, s, t)} + g \zeta(x, s, t) + \frac{\sigma}{\rho} \kappa|_{M(x, s, t)} = 0, \quad \forall t, \forall M \in \Gamma_0. \quad (\text{VI.8})$$

Pour le transformer en un problème aux valeurs propres généralisé (de la même forme que (C.17–C.19) en annexe, p. 124), il faut fermer le problème, i.e. éliminer les inconnues η_1 et ζ_1 de la condition cinématique (VI.7) en les exprimant en fonction du potentiel des vitesses Ξ à l'aide de la relation de Bernoulli (VI.8).

La résolution de ce genre de relation de dispersion a été faite dans le cas de calottes sphériques [Bostwick & Steen, 2009, 2014] ou cylindriques circulaires [Bostwick & Steen, 2010, 2018], en tirant avantage du fait de connaître les fonctions propres du laplacien de Ξ . De plus, vu la géométrie des systèmes, les équations (VI.7) et (VI.8) pouvaient se mettre sous la forme d'une équation intégral-différentielle en Ξ , qui est le pendant de l'équation (C.19). Aussi, le problème pouvait-il être résolu par une méthode de Ritz (voir par exemple [Segel & Handelman, 1987]).

Dans le cas qui nous occupe, le problème est compliqué par le fait que la forme de l'interface n'est pas une forme simple et que la gravité intervient, ce qui particularise la direction verticale et dissymétrise les rôles de η_1 et ζ_1 . L'étude numérique à faire fera très probablement appel à une méthode des éléments finis et le choix des perturbations η_1 et ζ_1 sera déterminant pour parvenir à la résolution complète du problème.

VI.1.2 Cas torique

Le cas torique sera de fait encore plus compliqué à aborder. La première question est de savoir quelle est la forme de l'interface libre dans nos expériences. Les tores en question sont stables pour un volume assez grand de liquide et subissent l'effet de la gravité qui les aplatit, en plus de leur permettre de ne pas refermer leur trou, à cause de la pente du substrat dirigée vers le centre du substrat.

Chugunov *et al.* [2011] ont étudié le problème en l'absence de gravité en procédant à des minimisations de la surface du tore en tenant compte des contraintes géométriques a priori d'une forme torique. Ils ont montré au passage l'importance du choix des angles de contact à imposer aux lignes de contact intérieure et extérieure qui ne pouvaient alors pas respecter la loi de Young–Dupré. Passer en coordonnées toriques pourrait aussi avoir un intérêt [Edwards *et al.*, 2021].

Une voie possible sera d'utiliser des codes de simulations numériques directes en laissant le système relaxer vers sa forme d'équilibre ou en y greffant des recherches de solutions stationnaires. Dans la limite des tores minces (i.e. de rayon grand devant sa largeur), on pourrait procéder aussi à un calcul perturbatif du cas cylindrique.

La relation de dispersion pourrait alors être calculée en s'inspirant du cas cylindrique précédent.

Tore libre, en flaque, en anti-flaque — La branche des déformations variqueuses a été caractérisée expérimentalement au chapitre V, dans le cas de notre substrat en V. Elle peut être bien décrite par la relation de dispersion

$$\omega_V^2 = \left[g_{\text{eff}} \left(\frac{k_\theta}{R_{\text{out}}} \right) + \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\rho} \left(\frac{k_\theta}{R_{\text{out}}} \right)^3 \right] \cdot \Psi \left[\frac{W R_{\text{out}}}{2R_c^2} k_\theta \right]. \quad (\text{VI.9})$$

avec $\tanh$ comme bon ansatz de la fonction de forme Ψ . Nous avons fait ce choix de relation de dispersion car sous cette forme, la valeur de σ_{eff} obtenue par ajustement de cette relation avec les expériences ne change pas sur la plage de valeurs de W considérées.

Au lieu de considérer des rapports k_θ/R_{out} dans le premier facteur, nous aurions très bien pu considérer des rapports k_θ/Λ , avec Λ une certaine longueur, ce qui aurait eu pour conséquence d'utiliser une nouvelle tension de surface effective $\sigma'_{\text{eff}}(W) = \sigma_{\text{eff}} \times (\Lambda/R_{\text{out}})^3$ pour que tout soit cohérent. De plus, si le choix de l'expression du préfacteur $W R_{\text{out}}/(2R_c^2)$ devant k_θ à l'intérieur de la fonction $\tanh$ fonctionne bien dans nos expériences, une question est de savoir si l'expression (VI.9) reste valable dans d'autres configurations de substrat.

Nous avons étudié un substrat en V sur lequel le tore possède deux bords libres. Comme dans le cas cylindrique, on peut bloquer l'un des deux bords du tore liquide en utilisant des profils en L (schéma en figure VI.1 (a)). Deux configurations peuvent alors être étudiées : la première correspond à une configuration équivalente à une flaque mais avec un trou (donc similaire aux expériences dans le mercure de [Laroche et al. \[2019\]](#)), où les bords libres sont dirigés vers l'extérieur du tore ; la seconde correspond à une « anti-flaque », pour laquelle les bords libres sont dirigés vers le centre de la plaque. Dans cette configuration, les ondes se propagent le long d'une interface qui au repos possède une courbure de Gauss négative. Il n'est pas à exclure que cela peut avoir des conséquences sur les valeurs de σ_{eff} . Rappelons en outre que les polygones observés dans les tores en caléfaction se développent toujours à l'intérieur du tore et non à l'extérieur. Les études des relations de dispersion sur ce type de substrat sont en cours de réalisation.

VI.2 Interactions non linéaires, cascades d'énergie

Nous avons étudié les ondes linéaires se propageant le long de nos gouttes allongées en regardant le spectre spatio-temporel des déformations de leurs bords. Le forçage était modéré et les déformations étaient de faible amplitude. Forcer les gouttes avec une amplitude plus élevée conduit à des branches qui sont moins bien définies, plus larges ; l'un des premiers phénomènes que nous avons pu observer sans nous appesantir dessus est la génération d'ondes liées [[Herbert et al., 2010](#)].

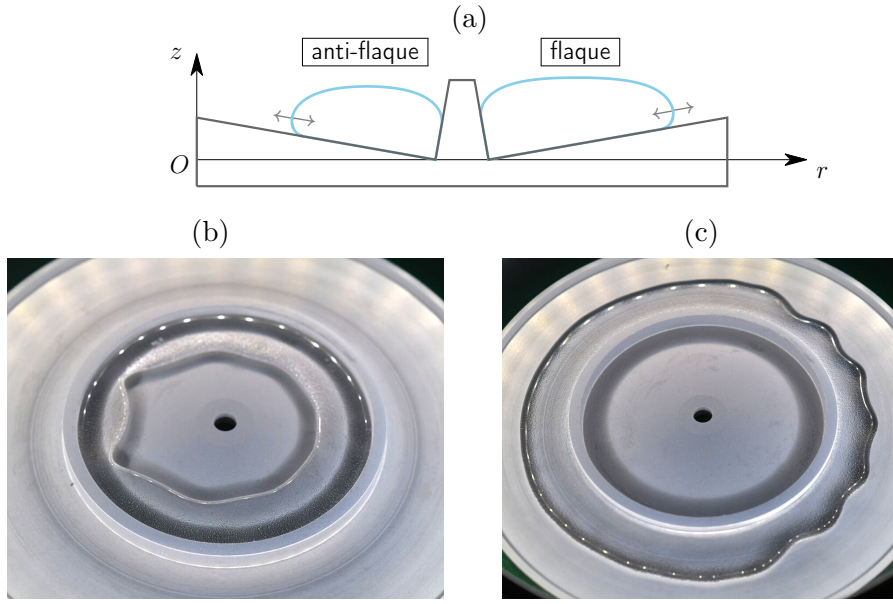


Figure VI.1 : (a) Coupe de substrats en L possibles. Les tores posés peuvent être en configuration (b) anti-flaque (bord extérieur bloqué, bord intérieur libre) ou (c) flaque (bord intérieur bloqué, bord extérieur libre).

La plupart des spectres que nous avons montrés ont été réalisés en balayage de fréquence, ce qui nous a permis de capturer l'ensemble des branches sur une plage de fréquences donnée. Le spectre de la figure III.9, p. 45 a quant à lui été réalisé en excitant le système à basse fréquence (1 Hz) et les effets non linéaires ont entraîné une cascade directe d'énergie vers les grands nombres d'onde, donc vers les petites échelles. À l'inverse nous avons aussi excité le système à fréquence de forçage élevé et constaté que les modes de haute fréquence étaient peuplés, mais aussi les modes de basse fréquence comme s'il y avait une cascade inverse. Nos gouttes étant de taille finie, le mode correspondant à la longueur de la goutte est naturellement excité et transfère de l'énergie vers les modes à plus grand k .

La question des cascades d'énergie directe ou inverse se pose pour comprendre les interactions entre branches d'excitations. Dans le cas du cylindre en caléfaction, nous avons commencé à regarder comment un bruit blanc basse fréquence injectait de l'énergie au système à petite échelle. Des cascades ont pu être observées dans les spectres (figure VI.2) et des mesures plus quantitatives doivent encore être effectuées.

Le système du tore liquide est bien adapté pour étudier la turbulence d'ondes qui concerne les propriétés dynamiques et statistiques d'un grand nombre d'ondes non linéaires aléatoires en interaction les unes avec les autres. Bien qu'omniprésent dans la nature (ondes océanographiques, ondes de plasma, ondes en optique non linéaire, ou encore ondes élastiques), ce régime est loin d'être entièrement compris. En effet, la théorie de la turbulence faible repose sur de fortes hypothèses (faible non-linéarité, système de taille infinie) dont le domaine de validité dans les expériences reste encore à déterminer [Falcon, 2010]. Notre géométrie torique sera ainsi très bien adaptée pour étudier le régime de turbulence d'ondes en présence de conditions aux limites périodiques, qui n'a jamais été abordée expérimentalement jusqu'à présent, ainsi que le rôle de la taille finie du système. Une confirmation expérimentale de récentes

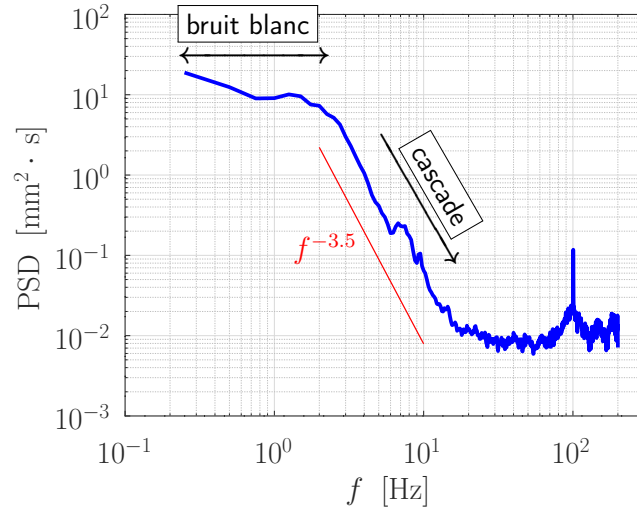


Figure VI.2 : Une goutte allongée en état Leidenfrost est excitée par un bruit blanc basse fréquence. Une cascade vers les hautes fréquences est observée.

prédictions théoriques incluant ces effets de taille finie dans ces conditions permettrait une meilleure modélisation de la turbulence d'ondes [Hrabski & Pan, 2020].

VI.3 Gouttes forcées verticalement

VI.3.1 Auto-excitations et émergence de modes

On a vu qu'à la surface d'un tore en caléfaction pouvaient se développer des ondes polygonales de manière spontanée. Leur nature a été déterminée par Ludu & Raghavendra [2019] mais la raison de leur émergence spontanée reste à déterminer.

Une piste avancée par Labousse & Bush [2015] est que le mouvement poloïdal du vortex en volume déstabilise l'interface. C'est une explication possible, mais d'autres phénomènes concomitants sont très probablement la source principale de la formation de ces polygones.

En forçant un tore non pas en caléfaction, mais posé sur un substrat super-hydrophobe, nous avons pu observer l'excitation de modes (figure VI.3 (a)). Ici, il ne s'agit pas d'un forçage local comme en V.3, p. 60, mais d'un forçage global. On peut donc imaginer que la poche de vapeur sur laquelle repose un tore en Leidenfrost, lorsqu'elle se développe et s'échappe par les bords, soit une source d'excitations du tore. La forme de cette poche de vapeur a été étudiée récemment par [Burton *et al.*, 2012; Caswell, 2014].

D'autre part, il a été montré par Bouwhis *et al.* [2013] qu'en faisant léviter une goutte au-dessus d'un poreux au travers duquel de l'air était injecté, on pouvait exciter différents modes de la goutte en lévitation. Il en est de même dans le cas Leidenfrost et la première étude sur les modulations du bord de la goutte date de Holter & Glasscock [1952]. Des études récentes ont mieux caractérisé les modes de moyenne amplitude [Ma & Burton, 2017, 2018] et les modes d'amplitude encore plus grande ont été aussi étudiés, dans des gouttes aplaties mais aussi dans des tores en configuration flaque [Bergen *et al.*, 2019]. Dans les travaux de Ma & Burton [2017,

2018], les fluctuations de pression du film de vapeur ont été mesurées et ils ont relié l'apparition spontanée des modes en étoile de leur goutte comme le résultat d'un forçage paramétrique par le film de vapeur.

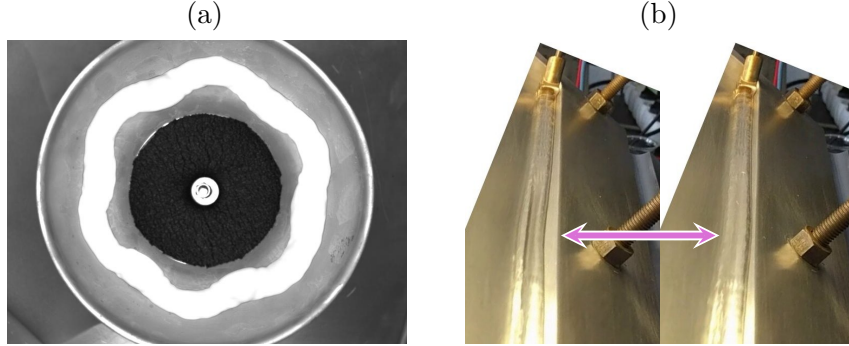


Figure VI.3 : (a) Tore liquide d'eau chargée en TiO_2 dont le substrat super-hydrophobe est vibré verticalement. En fonction de la fréquence et de l'amplitude, des modes peuvent apparaître, ici un mode d'ordre 6. (b) Auto-excitation d'un cylindre en Leidenfrost. Aucun forçage extérieur n'est appliqué à la goutte. Seul le film de vapeur au-dessus duquel elle lévite agit sur elle. Des excursions de grande amplitude du centre de masse sont observées au centre de la goutte (flèche mauve).

L'excitation du film de vapeur comme moteur de l'émergence de structures de grande échelle est donc très probable dans notre cas, ce que confirment des observations faites avec Gabriel Le Doudic mais que nous n'avons pas eu le temps de creuser : dans le cas d'un cylindre en caléfaction — donc sans vortex toroïdal qui est une hypothèse fondamentale du résultat de Labousse & Bush [2015] — et sans aucun forçage, en utilisant des rigoles symétriques ou bien notre *quarter-pipe* à des angles d'inclinaison α importants, nous avons pu observer des oscillations de grande amplitude au centre de la goutte (figure VI.3(b)). À supposer que les polygones dans les tores en caléfaction soient des ondes cnoïdales, solutions d'une équation de type KdV et que les modes observés dans la goutte rectiligne en caléfaction soient de type *breather*, on pourrait considérer ces structures grande échelle comme des attracteurs de bruit produit par le film de vapeur. Nous avons de plus observé l'apparition spontanée d'ondes de dépression dans les gouttes rectilignes dans le cas peu penché, ce qui va aussi dans ce sens. Dans notre article sur les cylindres en caléfaction [Perrard *et al.*, 2015], une analyse des spectres de puissance des hauteurs de l'interface lorsqu'on l'excitait à forte amplitude montrait des phénomènes de cascade similaires à un régime de turbulence de solitons [Zakharov, 2009; Costa *et al.*, 2014]. Un travail théorique approfondi, appuyé par des calculs numériques, devra être mené pour confirmer ces hypothèses.

VI.3.2 Ondes de Faraday et gouttes allongées

Nous avons abordé la question des gouttes forcées par le film de vapeur. Cela nous amène à nous intéresser à un forçage vertical plus fort. En 1831, Faraday a constaté qu'un liquide à surface libre soumis à un mouvement vertical se déstabilisait et des motifs apparaissaient en surface [Faraday, 1831]. Faraday a remarqué que les ondes oscillaient à une fréquence moitié de la fréquence de forçage, ce qu'a confirmé plus tard Rayleigh [1883] en menant ses propres expériences sur le sujet.

L'instabilité de Faraday est généralement étudiée dans le cas d'interfaces libres planes et où les bords du liquide sont fixés par les conditions aux limites du réservoir. Les études dans le cas courbé sont moins courantes. Récemment, [Pucci *et al.* \[2011\]](#) ont étudié cette instabilité dans des lentilles liquides flottantes et ont montré que les ondes de Faraday interagissaient avec les bords de la lentille. Il y a alors une adaptation mutuelle entre la forme que prend la lentille et les motifs faits par les ondes de Faraday. Des régimes instationnaires sont aussi observés. Plus récemment, les ondes de Faraday à la surface d'une sphère ont été étudiées théoriquement et numériquement [[Ebo Adou & Tuckerman, 2016](#); [Ebo Adou *et al.*, 2019](#)]. Des travaux expérimentaux ont été réalisés aussi à la surface de cylindres [[Kumar Maity *et al.*, 2020](#)].

Nous avons commencé à nous intéresser durant le stage de M1 de Filip Novkoski à la manière dont le tore se comportait vis-à-vis de l'instabilité de Faraday, en forçant verticalement le substrat (cf. Fig. VI.4). Des motifs apparaissent en surface en se réarrangeant. En fonction des caractéristiques géométriques du tore, les motifs adoptent des configurations plus ou moins complexes. Ce travail ne demande qu'à être poursuivi plus tard.

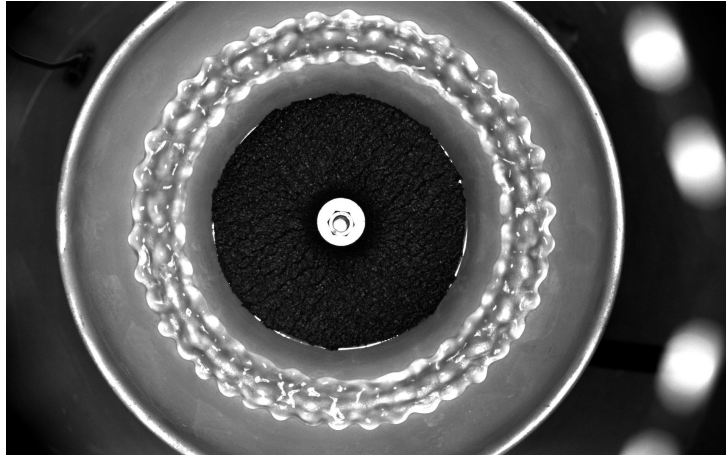


Figure VI.4 : Excitations paramétriques d'une goutte torique au-delà du seuil de l'instabilité de Faraday. Ici le substrat est un moule à savarin traité au NeverWet.

Annexes

Annexe A

États de service ou Comment je me suis dispersé... (ma vie d'E.-C.)

Chi-Tuong PHAM

Maître de conférences depuis le 1^{er} septembre 2008, à l'université Paris-Saclay (hors-classe)

Laboratoire Interdisciplinaire des Sciences du Numérique (LISN, ex-LIMSI)

Bâtiment 508, Université Paris-Saclay, 91400 ORSAY CEDEX, FRANCE

01 69 15 80 84

pham@lisn.fr

Né le 28 septembre 1974 à Caen (Calvados)

<https://orcid.org/0000-0001-8219-1178>

<https://publons.com/researcher/AAF-4005-2019/>

■ Parcours académique

- | | | |
|------------------|---|---------------|
| 1999–2003 | ○ Doctorat de Physique | (ENS/Paris 6) |
| 1998–1999 | ○ DEA de Physique Théorique Rhône-Alpin | (ENS Lyon) |
| 1997–1998 | ○ Agrégation externe de Mathématiques | (ENS Lyon) |
| 1995–1999 | ○ Magistère des Sciences de la Matière (Physique) | (ENS Lyon) |
| | ○ Élève normalien (concours Mathématiques) | (ENS Lyon) |

■ Enseignement

- | | | |
|------------------|--|-------------------------|
| 2008– ... | ○ Maître de conférences
<i>UFR Sciences, L3, M1, M2</i> | (Paris-Saclay, Orsay) |
| 2002–2004 | ○ ATER (50 %)
<i>Magistère Interuniversitaire de Physique, 1^{re} année</i> | (ENS) |
| 1999–2002 | ○ Moniteur
<i>UFR de Mathématiques, DEUG Mias; UFR de Physique, DEUG SCVT</i> | (Paris 6) |
| 1999–2003 | ○ Colles de Mathématiques (MPSI) | (Louis le Grand, Paris) |
| 1998–1999 | ○ Colles de Mathématiques (MPSI & MP*) | (Aux Lazaristes, Lyon) |

■ Recherche

- 2008– ...** ○ Maître de conférences (Université Paris-Saclay, Orsay)
*Laboratoire Interdisciplinaire des Sciences du Numérique (LISN, ex-LIMSI),
 groupe COuplages Multiphysiques Et Transferts (COMET). Thématique :*
 Dynamique d'écoulements interfaciaux.
- 2007–2008** ○ Post-doctorat (Université Paris Diderot, Paris)
*Laboratoire Matière et Systèmes Complexes (MSC), groupe de L. Limat.
 Thématique :* Dynamique de ligne de contact sous évaporation.
- 2004–2007** ○ Post-doctorat (Université de Lisbonne, Portugal)
*Centro de Física Teórica e Computacional (CFTC), groupe de P. Patrício
 et M. M. Telo da Gama. Thématique :* Ancrage et mouillage de cristaux
 liquides nématiques.
- 2002–2004** ○ ATER (50 %) (École normale supérieure, Paris)
Laboratoire de Physique Statistique (LPS). Thématique : Instabilités d'écou-
 lements interfaciaux.
- 1999–2003** ○ Thèse de doctorat (École normale supérieure, Paris)
Laboratoire de Physique Statistique (LPS), sous la direction de M.-É. Brachet.
 Stabilité et dynamique d'écoulements de fluides parfaits barotropes autour
 d'un obstacle en présence de dispersion.
*Soutenue le 23 septembre 2003 à l'ENS. Jury : M.-É. Brachet, P. Couillet
 (rapporteur), L. Limat, C. Nore, D. Salin, L. Tuckerman (rapporteur).*

■ Publications

Publications dans des revues internationales à comité de lecture

1. C.-T. PHAM & M. BRACHET, Dynamical scaling laws in two types of extended Hamiltonian systems at dissipation onset, *Physica D* 2002, **163**, 127–149.
2. M. ABID, C. HUEPE, S. MÉTENS, C. NORE, C.-T. PHAM, L.S. TUCKERMAN & M.E. BRACHET, Gross-Pitaevskii dynamics of Bose-Einstein condensates and superfluid turbulence, *Fluid Dyn. Res.* 2003, **33**, N° 5–6, 509–544.
3. C.-T. PHAM, C. NORE & M.-É. BRACHET, Boundary layers in superflow around a disk, *C. R. Physique* 2004, **5**, N° 1, 3–8.
4. C.-T. PHAM, C. NORE & M.-É. BRACHET, Critical speed for capillary-gravity surface flows in the shallow water limit. *Phys. Fluids* 2005, **17**, 062104.
5. C.-T. PHAM, C. NORE & M. BRACHET, Boundary layers and emitted excitations in nonlinear Schrödinger superflow past a disk. *Physica D* 2005, **210**, 203–226.
6. P. PATRÍCIO, C.-T. PHAM & J.-M. ROMERO-ENRIQUE, Wetting transition of a nematic liquid crystal on a periodic wedge structured substrate. *Eur. Phys. J. E* 2008, **26**, 97–101.
7. G. BERTELOOT, C.-T. PHAM, A. DAERR, F. LEQUEUX & L. LIMAT, Evaporation induced flow a near contact line: Consequences on coating and contact angle. *Europhys. Lett.* 2008, **83**, 14003.

8. J.-M. ROMERO-ENRIQUE, C.-T. PHAM & P. PATRÍCIO, Scaling of the elastic contribution to the surface free energy of a nematic on a sawtoothed substrate. *Phys. Rev. E* 2010, **82**, 011707.
9. C.-T. PHAM, G. BERTELOOT, F. LEQUEUX & L. LIMAT, Dynamics of complete wetting liquid under evaporation. *Europhys. Lett.* 2010, **92**, 54005; C.-T. PHAM, G. BERTELOOT, F. LEQUEUX & L. LIMAT, Dynamics of complete wetting liquid under evaporation (Erratum). *Europhys. Lett.* 2011, **93**, 69901.
10. P. PATRÍCIO, N. SILVESTRE, C.-T. PHAM & J.-M. ROMERO-ENRIQUE, Filling and wetting transitions of nematic liquid crystals on sinusoidal substrates. *Phys. Rev. E* 2011, **84**, 021701.
11. S. PERRARD, C. DUCHÊNE, L. DEIKE & C.-T. PHAM, Capillary solitons on a levitated medium, *Phys. Rev. E* 2015, **92**, 011002.
12. C.-T. PHAM, S. PERRARD & G. LE DOUDIC, Surface waves along liquid cylinders. Part 1. Stabilising effect of gravity on the Plateau–Rayleigh instability. *J. Fluid. Mech.* 2020, **891**, A8.
13. G. LE DOUDIC, S. PERRARD & C.-T. PHAM, Surface waves along liquid cylinders. Part 2. Varicose, sinuous, sloshing and nonlinear waves. *J. Fluid. Mech.* 2021, accepté le 23 avril 2021.

Articles soumis

14. F. NOVKOSKI, E. FALCON & C.-T. PHAM, Experimental dispersion relation of surface waves along a torus of fluid. Soumis à *Phys. Rev. Lett.*

Actes de conférences

15. C.-T. PHAM & M. BRACHET, Critical dynamics in reversible forced pendulum chains, dans *Instabilities and Nonequilibrium Structures IX*, éditeurs : O. Descalzi, J. Martinez & S. Rica (Kluwer Academic Publisher, 2004) pp. 101–109.
16. C.-T. PHAM, G. BERTELOOT, F. LEQUEUX & L. LIMAT, Dynamics of complete wetting under evaporation, dans *ECS 11 Proceedings, European Coating Symposium, Åbo/Turku*, (Åbo Akademi University, 2011), pp. 80–83.
17. C.-T. PHAM, F. LEQUEUX & L. LIMAT, Dynamics of a complete wetting liquid under evaporation, dans *Without bounds: A scientific canvas of nonlinearity and complex dynamics*, (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013), pp. 275–283.

Thèse de doctorat

18. C.-T. PHAM, *Stabilité et dynamique d'écoulements de fluides parfaits barotropes autour d'un obstacle en présence de dispersion*, université Paris 6. <http://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00002792>

Ouvrages en tant qu'éditeur

19. Comptes-Rendus de la 16^e Rencontre du Non-Linéaire. Éditeurs : É. Falcon, C. Josserand, M. Lefranc, F. Pétrélis & C.-T. Pham (Non-Linéaire Publications, 2013), 196 pages, ISBN 978-2-9538596-2-1.
20. Comptes-Rendus de la 17^e Rencontre du Non-Linéaire. Éditeurs : É. Falcon, M. Lefranc, F. Pétrélis & C.-T. Pham (Non-Linéaire Publications, 2014), 167 pages, ISBN 978-2-9538596-3-8.
21. Comptes-Rendus de la 18^e Rencontre du Non-Linéaire. Éditeurs : É. Falcon, M. Lefranc, F. Pétrélis & C.-T. Pham (Non-Linéaire Publications, 2015), 169 pages, ISBN 978-2-9538596-4-5.
22. Comptes-Rendus de la 19^e Rencontre du Non-Linéaire. Éditeurs : É. Falcon, M. Lefranc, F. Pétrélis & C.-T. Pham (Non-Linéaire Publications, 2016), 159 pages, ISBN 978-2-9538596-5-2.
23. Comptes-Rendus de la 20^e Rencontre du Non-Linéaire. Éditeurs : É. Falcon, M. Lefranc, F. Pétrélis & C.-T. Pham (Non-Linéaire Publications, 2017), 120 pages, ISBN 978-2-9538596-6-9.
24. Comptes-Rendus de la 21^e Rencontre du Non-Linéaire. Éditeurs : É. Falcon, M. Lefranc, F. Pétrélis & C.-T. Pham (Non-Linéaire Publications, 2018), 114 pages, ISBN 978-2-9538596-7-6.
25. Comptes-Rendus de la 22^e Rencontre du Non-Linéaire. Éditeurs : É. Falcon, M. Lefranc, F. Pétrélis & C.-T. Pham (Non-Linéaire Publications, 2019), 230 pages, ISBN 978-2-9538596-8-3.
26. Comptes-Rendus de la 23^e Rencontre du Non-Linéaire. Éditeurs : É. Falcon, M. Lefranc, F. Pétrélis & C.-T. Pham (Non-Linéaire Publications, 2020), 146 pages, ISBN 978-2-9538596-9-0.
27. Résumés de la 24^e Rencontre du Non-Linéaire. Éditeurs : É. Falcon, M. Lefranc, F. Pétrélis & C.-T. Pham (Non-Linéaire Publications, 2021), 146 pages, ISBN 978-2-9576145-0-9.

■ Conférences

Conférence invitée

1. 14th Workshop on Instabilities and Non-Equilibrium Structures (9–13 décembre 2013, Viña del Mar, Chili), *Depression soliton wave in a Leidenfrost cylinder*.

■ Organisation de congrès

- **2010** Co-organisation de la conférence IMA5 (*International Marangoni Association*) à la Villa Finaly, Florence, Italie (100 participants), 7–10 juin 2010 et mise en place et gestion du site Internet de la conférence <http://www.ima5.u-psud.fr/>
- **2013–présent** Co-organisation des Rencontres du Non-Linéaire ($\simeq$ 200 participants), en mars de chaque année, à l'université Paris-Diderot

■ Autres responsabilités scientifiques

- **2013–présent** Membre du comité scientifique des Rencontres du Non-Linéaire
- **2013–présent** Éditeur des actes des Rencontres du Non-Linéaire
- **2021–présent** Membre du bureau de la division Physique non linéaire de la Société Française de Physique (SFP)
- **Activité de rapporteur** pour *Fluid Dyn. Res.*, *Phys. Rev. Lett.*, *EPJ ST*, *J. Fluid Mech.*
- **Financements** Participation au projet ANR-11-BS04-001-01 FREEFLOW (2011–2014)
- **Jury de thèse** Thèse de Paul Boniface, soutenue le 27 mai 2014 à l’université Paris Diderot.

■ Responsabilités administratives

Responsabilités principales

- **2012–2020** Responsable du Master 2 Dynamique des Fluides et Énergétique du master de Mécanique de l’université Paris-Saclay
- **2010–présent** Membre nommé de la Commission Consultative de Spécialistes de l’Université (CCSU) 60-61-62^{es} sections de l’université Paris-Sud et membre rang B de son bureau
- **2010–présent** Membre nommé du conseil du Département de Physique de l’université Paris-Sud
- **2012–2015** Membre du Groupe de Travail « Master Mécanique » de l’université Paris-Saclay

Autres responsabilités

- **2008–2011** Gestion du parc informatique aux bâtiments 507 puis 470
- **2016–présent** Correspondant Enseignement du Pôle Géographique d’Informatique Pédagogique (PGIP)
- **2018–présent** Comité de pilotage du partenariat Université Paris-Sud/Safran
- **Comités de sélection**
 - 2010 : Comité de sélection, poste MCF 0247, 60^e section (Paris-Sud, Orsay)
 - 2013 : Comité de sélection, poste MCF 4142, 60^e section (Paris-Sud, Orsay)
 - 2013 : Comité de sélection, poste MCF 4143, 60^e section (Paris-Sud, Orsay)
 - 2013 : Comité de sélection, poste MCF 1361, 34^e section (UPMC, Paris)
 - 2019 : Comité de sélection, poste MCF 4519, 60^e section (UCBL, Lyon)

Décharges d’enseignement

- **Délégation CNRS (50 %)** du 1^{er} mars 2020 au 31 août 2020.
- **Délégation CNRS (50 %)** du 1^{er} mars 2021 au 31 août 2021.

▪ Encadrement d'étudiants

Les co-encadrements que je comptabilise ne l'ont jamais été à titre officiel, du point de vue des Écoles Doctorales. Toutes les thèses ont été effectuées ou s'effectuent au laboratoire Matière et Systèmes Complexes (MSC) de l'université Paris Diderot dont je ne fais pas partie officiellement. On pourra noter que je suis le seul permanent de la liste des auteurs des publications 11, 12 et 13.

Thèses soutenues

◦ Guillaume Berteloot

- Commencée au 1^{er} octobre 2006 et soutenue le 16 novembre 2009 ;
- Encadrants officiels : Adrian Daerr (MSC, Paris Diderot), François Lequeux (PPMD, ESPCI) & Laurent Limat (MSC, Paris Diderot) ;
- [Publications 7, 9, 16] ;
- *J'ai participé à son encadrement pour toute la partie de modélisation, de calculs analytiques et numériques, ainsi qu'à la préparation du manuscrit de thèse et de sa soutenance.*

◦ Paul Boniface

- Commencée au 1^{er} octobre 2010 et soutenue le 27 mai 2014 ;
- Encadrants officiels : Luc Lebon (MSC, Paris Diderot) & Laurent Limat (MSC, Paris Diderot) ;
- Le papier consacré aux modélisations du système ainsi qu'à la simulation numérique directe des écoulements observés dans les expériences de la thèse de Paul Boniface n'a jamais été écrit. On en trouvera des traces dans son manuscrit de thèse.
- *J'ai participé à la mise en place et à l'optimisation de l'expérience au travers de simulations numériques préliminaires. Ensuite, j'ai proposé des modèles et fait des simulations numériques directes des écoulements. J'ai encadré la rédaction du manuscrit de thèse et pris part à la préparation de la soutenance.*

◦ Stéphane Perrard

- Commencée au 1^{er} octobre 2011 et soutenue le 1^{er} décembre 2014 ;
- Encadrants officiels : Emmanuel Fort (Institut Langevin, ESPCI) & Yves Couder (MSC, Paris Diderot) ;
- [Publications 11–13] dont je suis le seul permanent parmi les auteurs ;
- *La thèse officielle de Stéphane Perrard, intitulée « Une mémoire ondulatoire : états propres, chaos et probabilités » porte sur des problèmes de gouttes rebondissantes. Elle n'a aucun rapport avec les problèmes d'ondes de surface le long de gouttes en caléfaction que j'ai étudiés avec lui. Notre étude est un travail mené en parallèle durant sa thèse et ne figurant nulle part dans son manuscrit. C'est la suite d'une étude initiée pendant son stage de M1 de 2010 avec Yves Couder, sur des anneaux liquides en lévitation.*

Thèse en cours

◦ Gabriel Le Doudic

- Commencée le 1^{er} octobre 2018 ;
- Encadrants officiels : Matthieu Roché (MSC, Paris Diderot) & Laurent Limat (MSC, Paris Diderot) ;
- [Publications 12, 13].

■ Encadrement pré-doctoral

- Stage de M1 de Charles Duchêne (Paris Diderot, 2013), *Propagation de solitons le long de cylindres en état Leidenfrost* [Publication 11].
- Stage de M1 de Gabriel Le Doudic (Paris-Sud, 2017), *Caractérisation des ondes à la surface de cylindres en état Leidenfrost* [Publications 12, 13].
- Stage de M1 de Filip Novkoski (ENS Paris, 2020), *Ondes de surface le long d'un tore liquide posé* [Publication 14].
- Stage de M2 de Yann Cédric Mézui (CentraleSupélec, 2016), *Réalisation expérimentale de cylindres liquides posés*.
- Stage de M2 de Filip Novkoski (ENS Paris, 2021), *Turbulence d'ondes à la surface d'un tore liquide*.

Annexe B

Articles

Dans cette annexe, nous avons inclus les trois articles qui ont servi d’ossature à ce manuscrit :

- [Perrard *et al.* \[2015\]](#) ;
- [Pham *et al.* \[2020\]](#) ;
- [Le Doudic *et al.* \[2021\]](#).

Capillary solitons on a levitated medium

S. Perrard,^{1,2} L. Deike,^{1,3} C. Duchêne,¹ and C.-T. Pham⁴¹Laboratoire Matière et Systèmes Complexes, Université Paris Diderot, CNRS UMR 7057, Bâtiment Condorcet, 10 rue Alice Domon et Léonie Duquet, F-75013 Paris, France, EU²James Franck Institute and Department of Physics, The University of Chicago, Chicago, Illinois 60637, USA³Scripps Institution of Oceanography, University of California San Diego, La Jolla, California 92093, USA⁴Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur, Université Paris-Sud, CNRS UPR 3251, rue J. von Neumann, F-91405 Orsay Cedex, France, EU

(Received 4 December 2014; published 20 July 2015)

A water cylinder deposited on a heated channel levitates on its own generated vapor film owing to the Leidenfrost effect. This experimental setup permits the study of the one-dimensional propagation of surface waves in a free-to-move liquid system. We report the observation of gravity-capillary waves under a dramatic reduction of gravity (up to a factor 30), leading to capillary waves at the centimeter scale. The generated nonlinear structures propagate without deformation and undergo mutual collisions and reflections at the boundaries of the domain. They are identified as Korteweg-de Vries solitons with negative amplitude and subsonic velocity. The typical width and amplitude-dependent velocities are in excellent agreement with theoretical predictions based on a generalized Korteweg-de Vries equation adapted to any substrate geometry. When multiple solitons are present, they interact and form a soliton turbulence-like spectrum.

DOI: 10.1103/PhysRevE.92.011002

PACS number(s): 47.35.Fg, 05.45.Yv, 68.03.Kn

Since their first observation by Russell on the water surface of a channel [1], solitons have been studied in a wide range of physical contexts, for instance, acoustics, hydrodynamical internal waves [2,3], and living systems, such as in the propagation of the pressure blood disturbance in arteries [4]. Korteweg and de Vries (KdV) provided the first theoretical description of solitonic waves through the so-called KdV equation [5–7], describing the propagation of noninteracting solitons by a balance between dispersion and nonlinear effects [8]. Solitons can be either supersonic or subsonic, depending on the sign of the curvature of the dispersion relation close to infinite wavelength [7]. A superposition of many propagating solitons forming a turbulent soliton state has also been encountered in various situations ranging from plasma waves [9,10] to crystalline solids [11]. In spite of the full integrable feature of such systems [12], the description of the dynamical and statistical properties of many interacting solitonic structures remains an open question.

At the surface of a liquid layer, solitons are observed in the shallow regime ($\Delta \gg H$) where Δ is the typical soliton width and H is the fluid depth. Most observed are supersonic solitons in the gravity-driven domain ($\Delta \gg \ell_c$), where $\ell_c = \sqrt{\sigma/g\rho}$ (with σ the surface tension, ρ the liquid density, and g the acceleration of gravity) is the capillary length which defines the transition scale between gravity and capillary dominating forces. Under Earth's gravity, ℓ_c is typically equal to a few millimeters.

Albeit predicted in the capillary-driven domain, the observations of subsonic solitons on a fluid layer remain scarce. When the depth of the fluid is millimetric or less, dissipative effects on the surface and in the bulk [13,14] quickly damp the capillary waves. One experiment reports their observation at the surface of a thin layer of mercury but for a limited range of amplitude [15]. By driving with a moving object, recent experiments have observed localized subsonic waves, but with a more complex spatial

structure [16] described by a modified nonlinear Schrödinger equation [17].

In order to observe surface waves corresponding to subsonic solitons, we take advantage of the Leidenfrost effect. It provides a remarkable situation in which a liquid levitates over its own vapor film [18]. Using a curved substrate [19], a 100 mL water cylinder is levitated. Capillary waves are found to propagate along the levitated liquid cylinder, arising now up to the centimeter scale. An effective 30-fold reduction of gravitational effects in an on-Earth laboratory experiment is indeed observed. The generated localized structures are identified as subsonic KdV solitons driven by surface tension. Eventually, when multiple solitons are generated, they interact and a turbulence-like wave spectrum is observed, which might be assigned to soliton turbulence.

The experimental setup is displayed in Fig. 1(a). A cylinder of distilled water is set in levitation by the Leidenfrost effect [20] on a Dural channel of 45 cm length and 4 cm width, heated at a temperature $T_p = 280 \pm 10^\circ\text{C}$. The liquid has a quarter-pipe section. The liquid evaporation is compensated by a flow ($Q = 7\text{ mL/min}$) of simmering water poured into the levitating cylinder with a motorized syringe [21]. A steady volume of water in levitation (density $\rho = 960\text{ kg/m}^3$ and surface tension $\sigma = 50 \pm 10\text{ mN/m}$ at 100°C) is then obtained with $W = 18 \pm 0.2\text{ mm}$ for the width and with $h = 4.5 \pm 0.5\text{ mm}$ for the depth. The cylinder is pinned at each extremity and one end can be set in oscillation by a mechanical shaker driven either with a periodic function of frequency f varying from 1 to 20 Hz or with short pulses to generate localized structures. We focus on the horizontal disturbance of the liquid width $\eta(x, t)$ [Fig. 1(a)]. The interface position $\eta(x, t)$ is recorded from above with a digital camera at 50 fps and numerically detected with an algorithm of contour detection based on the change in the color gradient. A movie of propagating solitons is shown in the Supplemental Material [22], together with the detected interface.

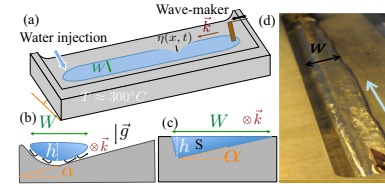


FIG. 1. (Color online) Sketch of the experimental setup. (a) 100 mL of distilled water is poured onto a 45 cm long quarter-pipe-shaped channel, heated at 280°C , forming a levitated liquid cylinder. A wave maker is used to generate a disturbance $\eta(x, t)$ of the cylinder interface. (b) Side view of the channel: We focus on the propagation of waves along the free right-hand border of the interface. The inclination angle α of the container is tunable. (c) Sketch of the geometry investigated theoretically. (d) Photograph of the experimental setup.

The originality of this setup comes from the channel geometry. At low inclination angle α of the channel with respect to the horizontal [see Fig. 1(b)], the motion of the left-hand liquid interface is limited by the substrate confinement. In contrast, the right-hand liquid interface is free to move along an almost horizontal plane and can undergo large variations. The liquid moving along $\mathbf{u}$ is subjected to a gravitational force through its projection $\mathbf{g}' = \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}$. It defines an effective gravity $g' = g \sin \alpha$. Experimentally, α can be tuned from a zero gravity situation ($\alpha \rightarrow 0$, $g' \rightarrow 0$) to a symmetric channel ($\alpha = 45^\circ$, $g' \rightarrow g/\sqrt{2}$).

In this configuration, the wave propagation depends on the ratio between the fluid inertia per unit length ρS and the width W of the interface. The effective fluid depth H' for any cross section shape yields [23]

$$H' = \frac{S}{W \sin \alpha}. \quad (1)$$

The cross section [Fig. 1(b)] is modeled by a triangle [Fig. 1(c)] with an effective depth $H' = \frac{1}{2} \cos \alpha W$. This geometry is thus analogous to a one-dimensional water channel in which gravity g and fluid depth H can be tuned continuously simply by changing the inclination angle α . For instance, at an inclination angle $\alpha = 2^\circ$, the effective gravity $g' = 0.34\text{ m s}^{-2}$ is 30 times smaller than usual.

Linear waves are characterized by exciting the water cylinder at 1 Hz. Figure 2 shows $S_\eta(k, \omega)$, the space-time spectral density of the liquid displacement $\eta(x, t)$, as a function of the wave number k and the angular frequency ω for an inclination angle $\alpha = 2^\circ$. The energy is localized in Fourier space along two curves for ω ranging from 0.1 to 80 rad s^{-1} . While the driving is performed at low frequency, energy is observed in a large frequency range, stemming from nonlinear wave interactions leading to an energy cascade [24,25]. The lines of maximum energy density reveal the dispersion relations between k and ω . Two distinct branches are identified, corresponding to two propagation modes (I and II). The main branch (I) is a convex curve related to phase velocity

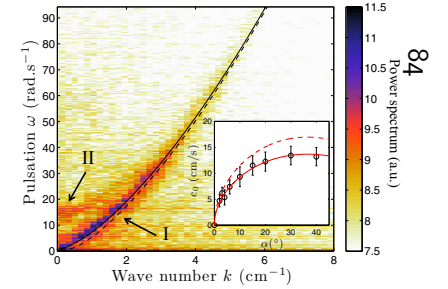


FIG. 2. (Color online) Power spectrum $S_\eta(k, \omega)$ of the cylinder right interface $\eta(x, t)$ for $\alpha = 2^\circ$ as a function of k and ω . Color is log scaled. The energy is localized along two branches of propagation. I: Gravity-capillary waves given by Eq. (2) (solid line). The dashed line corresponds to the dispersion relation of pure capillary waves. II: Sloshing modes, i.e., in-phase oscillations of both the left- and right-hand sides of the interface. Inset: Experimental ($\circ$) minimum phase velocity c_0 as a function of α . c_0 is measured from a fit of the dispersion relation in the limit $k \rightarrow 0$. Theoretical model $c_0 = \sqrt{g'H'}$ [see Eq. (3)] with no fit parameter (dashed line) and with an adjusted geometrical factor $H'_{\text{eff}} = 0.65 H'$ (solid line).

$c(k) = \omega/k$ ranging from 5 to 30 mm/s. It is associated with the variation of the cross section and therefore to deformations localized on the right interface, the left-hand side being almost unperturbed. The other branch (II) exhibits a frequency cutoff at $\omega_c = 14 \pm 1\text{ rad s}^{-1}$. This branch is related to a sloshing mode corresponding to an in-phase oscillation of both sides of the interface [26]. In the following, we solely focus on the main branch (I).

The main branch (I) is described by the usual dispersion relation for gravity-capillary waves,

$$\omega^2 = \Phi(H'k) \left(g'k + \frac{\sigma}{\rho} k^3 \right), \quad (2)$$

where H' and g' are the effective depth and gravitational acceleration and $\Phi(x) = \tanh(x)$ for a rectangular channel [26]. Φ may, however, depend on the substrate shape. In our case, $\Phi(x) = \tanh(x)$ remains a good approximation in the whole range of tested inclination angles ($2^\circ < \alpha < 45^\circ$) (solid line in Fig. 2).

For $k > 1\text{ cm}^{-1}$ the wave propagation is well described by the pure capillary wave dispersion relation ($\omega^2 = \sigma k^3/\rho$, dashed line in Fig. 2). The surface tension $\sigma = 35\text{ mN/m}$ is, however, 30% smaller than expected. The most likely origin of this discrepancy is the presence of contaminants at the surface. Other possible origins of this low surface tension value, such as the influence of a curved interface, still need to be investigated. The contamination process occurs during the first 30 min, at which time the surface tension reaches this asymptotic value. We choose to perform our measurements at a later time to ensure that σ remains constant during all the measurements. To avoid too much accumulation of

contaminants, the water is changed at least every 2 h. The effective capillary length computed with $g' = g \sin \alpha$ is larger than usual ($\ell_c^{\text{eff}} = \sqrt{\sigma/\rho g'} \approx 1.2$ cm for $\alpha = 2^\circ$) due to the reduction of gravity.

In the limit $k \rightarrow 0$, the capillary term vanishes and gravity dominates. Using a section-averaged Saint-Venant equation [27] for inviscid fluid in the shallow water limit ($kH' \ll 1$) and neglecting capillarity ($k\ell_c \ll 1$), the nondispersive limit is recovered using the effective gravity g' and the effective depth H' ,

$$\omega^2 = g \frac{S}{W} k^2 = g' H' k^2, \quad (3)$$

where S and W designate the section and the cylinder width, respectively. The minimum phase velocity $c_0 = \omega/k$ is shown in the inset of Fig. 2 as a function of the inclination angle α . c_0 is in good agreement with its analytical expression deduced from Eq. (3) with a prefactor 20% smaller than expected. This discrepancy may be attributed to the difference between the experimental cross section [Fig. 1(b)] and the theoretical ansatz [Fig. 1(c)]. In the following, the effective depth $H_{\text{eff}} = 0.65H'$ is used.

Close to $k = 0$, the leading dispersive contribution is found by expanding Eq. (2) to the fourth order in k . It yields

$$\omega^2 \simeq c_0^2 k^2 [1 + H_{\text{eff}}^2 (\text{Bo} - \text{Bo}_c) k^2], \quad (4)$$

where $c_0 = \sqrt{g' H_{\text{eff}}}$ is the modified phase velocity for $k \rightarrow 0$ and $\text{Bo}_c = -\Phi''(0)/6$ is a critical Bond number. The amplitude and sign of the leading dispersive term strongly depends on the Bond number $\text{Bo} \equiv (\ell_c^{\text{eff}}/H_{\text{eff}})^2$ which compares H_{eff} to the effective capillary length ℓ_c^{eff} .

When the dispersive effects are balanced by the nonlinear term in $\eta\eta_x$ [28], the propagation of nonlinear waves in the shallow limit ($kH_{\text{eff}} \ll 1$) is described by a Korteweg-de Vries equation [5,7],

$$\eta_t + c_0 \left[\eta_x + \frac{\mu_1}{H_{\text{eff}}} \eta \eta_x + \frac{1}{2} H_{\text{eff}}^2 (\text{Bo}_c - \text{Bo}) \eta_{xxx} \right] = 0, \quad (5)$$

where $\mu_1 = 3/2$ for a uniform depth (rectangular channel). In the case of our geometrical ansatz, it can be shown that $\mu_1 = 5/2$ [23].

The sign of the dispersive term in η_{xxx} changes for a critical Bond number Bo_c ($1/3$ in the rectangular case). This limit separates two different types of solitons. Small Bond numbers $\text{Bo} < \text{Bo}_c$ correspond to supersonic gravity-driven waves, whereas large Bond numbers $\text{Bo} > \text{Bo}_c$ lead to the propagation of subsonic capillary-driven structures.

The shape of a gravity-capillary soliton can then be derived from the KdV equation (5),

$$\eta(x, t) = A_0 \text{sech}^2 \left(\frac{x - ct}{\Delta} \right), \quad (6)$$

with A_0 the amplitude of the soliton, c its speed, and Δ its width. Both are related to the minimum of phase velocity c_0 , the effective Bond number Bo_{eff} , and the effective depth H_{eff} ,

$$c = c_0 \left(1 + \frac{\mu_1 A_0}{3 H_{\text{eff}}} \right), \quad \Delta \equiv \sqrt{\frac{6(\text{Bo}_c - \text{Bo}) H_{\text{eff}}^3}{\mu_1 A_0}}. \quad (7)$$

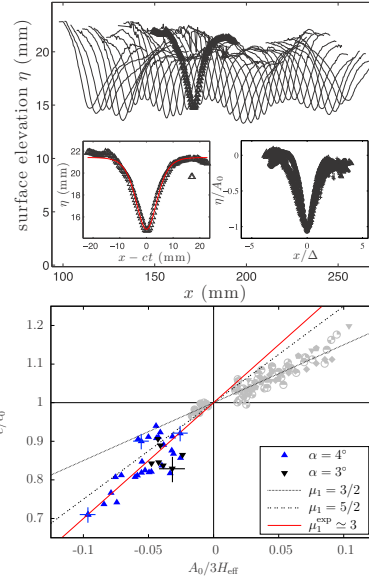


FIG. 3. (Color online) Top: $\eta(x, t)$ of a capillary soliton as a function of time (solid line) with a time step 0.04 s between two neighboring profiles ($\alpha = 4^\circ$). Left inset: Experimental data (Δ) and theoretical shape of a negative amplitude soliton given by Eq. (6) (solid red line). Right inset: Rescaling of the solitonic shape for various soliton amplitudes using the expression of Δ given by Eq. (7) ($\times$). Bottom: Normalized velocity c/c_0 as a function of the normalized amplitude $A_0/3H_{\text{eff}}$ for $\alpha = 3^\circ$ and 4° and data from Falcon *et al.* [15] (gray symbols). Linear relations correspond to Eq. (7) for three theoretical values of μ_1 [flat channel $\mu_1 = 3/2$, triangular geometry in Fig. 1(c) $\mu_1 = 5/2$], and best experimental fit ($\mu_1 = 3 \pm 0.4$). Typical error bars are shown on four data points.

Figure 3 (top) shows the evolution of one depression soliton as a function of time. The shape is conserved during the propagation while its amplitude is modulated at low frequency by the sloshing modes. The amplitude slowly decreases with time due to dissipative effects. Its shape is given by Eq. (6) (left inset of Fig. 3 (top)). The velocity c is measured from the position of the soliton minimum as a function of time. Individual interaction events with other solitons perturb briefly both the shape and the velocity but the speed remains constant between two of these events.

The right inset of Fig. 3 (top) shows the rescaled solitons $A/|A_0|$ as a function of $(x - ct)/\Delta$ for various initial pulses corresponding to negative amplitudes A_0 ranging from 2 to 5 mm. Since c , A_0 , and W are measured and Bo_{eff} is known

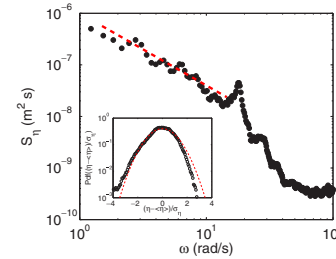


FIG. 4. (Color online) $S_\eta(\omega)$, calculated for each x location and then spatially averaged. A $\omega^{-1.5}$ power law (red dashed line) is observed at low ω , with a cutoff at $\omega = 18$ rad/s corresponding to the sloshing mode. This low frequency regime can be interpreted as a solitary wave turbulence regime. Inset: Normalized PDF of η . High amplitude negative events lead to a departure from the Gaussian statistics (red dashed line).

for a given α , there is no adjustable parameter. The rescaled data are found to be in good agreement with the theoretical shape. A typical soliton can undergo several reflections at the edges of the cylinder before being totally dissipated. Therefore, the typical dissipative scale is of the order of 1 m, which is 100 times larger than their sizes. The soliton velocity c/c_0 is plotted as a function of its normalized amplitude $A_0/3H_{\text{eff}}$ for several experiments of various driving amplitudes [Fig. 3 (bottom)]. All the observed solitons are subsonic, since $\text{Bo}_{\text{eff}} > \text{Bo}_c$. In addition, the speed decreases for larger negative amplitude. Straight lines correspond to $(c/c_0) = 1 + \mu_1(A_0/3H_{\text{eff}})$ for three values of μ_1 . The classical rectangular case is given by $\mu_1 = 3/2$, and the case of our triangular ansatz corresponds to $\mu_1 = 5/2$. The best fit to our experimental data is slightly

larger with $\mu_1 \simeq 3 \pm 0.4$, which is a 20% deviation from the triangular ansatz. Good quantitative agreement with the theoretical prediction is then obtained.

The observed range can be compared to a positive shallow water KdV soliton observed by Falcon *et al.* [15] [Fig. 3 (bottom)]. H_{eff} replaces the liquid depth H in Ref. [15]. Our results go far beyond these observations in the subsonic domain, reaching an amplitude limit that is almost the same as in the supersonic case ($|A/3H_{\text{eff}}| \approx 0.1$ and $|c - c_0|/c_0 \approx 0.3$). Note that the data at low ratio $A_0/3H_{\text{eff}} \approx 0.04$ are scattered due to the concomitance of linear waves of various frequencies.

When solitons are continuously generated, multiple solitary waves of various sizes and amplitudes are observed. Figure 4 shows the wave height power spectrum $S_\eta(\omega)$ as a function of ω . $S_\eta(\omega)$ follows a power law at low frequency, with $S_\eta(\omega) \sim \omega^{-\beta}$, and $\beta = 1.5$. The power law exponent is found to be roughly constant ($1 < \beta < 1.5$) for all tested driving amplitudes and low gravity cases ($\alpha < 4^\circ$). This solitary wave turbulencelike regime is limited at high frequency by the sloshing frequency and at low frequency by the duration of the experiment. Interestingly, a similar regime has been recently reported for gravity-driven solitary waves in shallow water approaching the coast [29] and assigned to soliton turbulence, similar to a dense gas soliton turbulence [12]. Finally, the inset in Fig. 4 shows the probability density function (PDF) of the wave height. The wave statistic presents a clear asymmetry, related to the capillary wave asymmetry, together with a departure from the Gaussian statistics, due to the occurrence of numerous nonlinear solitons of negative large amplitude.

We thank J. Haddad and L. Dupuy for performing preliminary experiments; A. Lantheaume for technical assistance; and E. Fort, L. Limat, Y. Couder, and E. Falcon for helpful discussions. This work was supported by the French Agence Nationale de la Recherche through Grant No. ANR-11-BS04-001-01 (FREEFLOW Project).

- [1] J. Russel, York 1844 BA Reports, pp 311–390 (1845).
- [2] C. G. Koop and G. Butler, *J. Fluid Mech.* **112**, 225 (1980).
- [3] J. W. Miles, *Tellus* **31**, 456 (1979).
- [4] S. Yomosa, *J. Phys. Soc. Jpn.* **56**, 506 (1987).
- [5] L. J. W. S. Rayleigh, *Philos. Mag.* **1**, 257 (1876).
- [6] J. Boussinesq, *C. R. Acad. Sci., Paris* **72**, 755 (1871).
- [7] D. Korteweg and G. de Vries, *Philos. Mag. J. Sci.* **39**, 422 (1895).
- [8] R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, and H. C. Morris, *Solitons and Nonlinear Wave Equations* (Academic, New York, 1982).
- [9] H. Ikezi, R. J. Taylor, and D. R. Baker, *Phys. Rev. Lett.* **25**, 11 (1970).
- [10] S. Ghosh, *Europhys. Lett.* **99**, 36002 (2012).
- [11] H.-Y. Hao and H. J. Maris, *Phys. Rev. B* **64**, 064302 (2001).
- [12] V. E. Zakharov, *Stud. Appl. Math.* **122**, 219 (2009).
- [13] W. G. V. Dorn, *J. Fluid Mech.* **24**, 769 (1966).
- [14] J. W. Miles, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **297**, 459 (1967).
- [15] E. Falcon, C. Laroche, and S. Fauve, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 204501 (2002).
- [16] J. Diorio, Y. Cho, J. H. Duncan, and T. R. Akylas, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 214502 (2009).
- [17] Y. Cho, J. D. Diorio, T. R. Akylas, and J. H. Duncan, *J. Fluid Mech.* **672**, 288 (2011).
- [18] D. Quéré and A. Ajdari, *Nat. Mater.* **5**, 429 (2006).
- [19] S. Perrard, Y. Couder, E. Fort, and L. Limat, *Europhys. Lett.* **100**, 54006 (2012).
- [20] J. G. Leidenfrost, *De Aquae Communis Nonnullis Qualitatibus Tractatus* (Ovenius, Duisburg, 1756).
- [21] A.-L. Bianche, C. Clanet, and D. Quéré, *Phys. Fluids* **15**, 1632 (2003).
- [22] See Supplemental Material at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevE.92.011002> for a movie showing a collision between two capillary solitons.

- [23] C. T. Pham (private communication).
- [24] E. Falcon, C. Laroche, and S. Fauve, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 094503 (2007).
- [25] M. Berhanu and E. Falcon, *Phys. Rev. E* **87**, 033003 (2013).
- [26] H. Lamb, *Hydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1932).
- [27] A. Decoene, L. Bonaventura, E. Miglio, and F. Saleri, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **19**, 387 (2009).
- [28] T. Dauxois and M. Peyrard, *Physics of Solitons* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2006).
- [29] A. Costa, A. R. Osborne, D. T. Resio, S. Alessio, E. Chirvi, E. Saggese, K. Bellomo, and C. E. Long, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 108501 (2014).

Surface waves along liquid cylinders. Part 1. Stabilising effect of gravity on the Plateau–Rayleigh instability

Chi-Tuong Pham^{1,†}, Stéphane Perrard² and Gabriel Le Doudic³

¹Université Paris-Saclay, CNRS, LIMSI, rue John von Neumann, 91400 Orsay, France

²Laboratoire de Physique de l'École normale supérieure, ENS, Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, Université de Paris, 24 rue Lhomond, 75005 Paris, France

³Matière et Systèmes Complexes, Université de Paris, CNRS, 10 rue Alice Domon et Léonie Duquet, 75013 Paris, France

(Received 26 August 2019; revised 13 December 2019; accepted 3 February 2020)

We study the shape and the geometrical properties of sessile drops with translational invariance (namely ‘liquid cylinders’) deposited upon a flat superhydrophobic substrate. We account for the flattening effects of gravity on the shape of the drop using a pendulum rotation motion analogy. In the framework of the inviscid Saint-Venant equations, we show that liquid cylinders are always unstable because of the Plateau–Rayleigh instability. However, a cylindrical drop deposited upon a superhydrophobic non-flat channel (here, wedge-shaped channels) is stabilised beyond a critical cross-sectional area. The critical threshold of the Plateau–Rayleigh instability is analytically computed for various profiles of the channel. The stability analysis is performed in terms of an effective propagation speed of varicose waves. Experiments are performed in order to test these analytical results. We measure the critical drop size at which breakup occurs, together with the decreasing effective propagation speed of varicose waves as the threshold is approached. Our theoretical predictions are in excellent agreement with the experimental measurements.

Key words: breakup/coalescence, capillary flows, surface gravity waves

1. Introduction

Liquid cylinders, namely volumes of liquid of a given cross-section with translational invariance along its normal direction, have long been a matter of study, more specifically their stability, when surface tension is at play. Historically, in this context, the first reported experimental study of the destabilisation of a liquid column was due to Savart while studying the decay of liquid jets (Savart 1833). However, Savart did not mention surface tension as the driving phenomenon and Plateau was the first to interpret the destabilisation of a static circular column of liquid in terms of surface minimisation of the liquid interface (Plateau 1849, 1873). Lord Rayleigh then

[†] Email address for correspondence: pham@limsi.fr

performed a linear analysis of stability, computing the fastest axisymmetric growing mode of sinusoidal perturbations along its axis of a free infinite circular cylinder of inviscid liquid, confirming the values obtained by Plateau from the aforementioned experiments by Savart (Rayleigh 1878). In this framework, Lord Rayleigh stressed the fact that this now so-called Plateau–Rayleigh instability is independent of the general translatory motion of the jet. This first theoretical study was immediately followed by azimuthal perturbations of a circular cross-section (Rayleigh 1879). Later, the viscous properties of the liquid column were accounted for by Rayleigh (1892*a,b*), then followed by Tomotika who took the surrounding fluid into account (Tomotika 1935).

Ever since these seminal works on circular liquid cylinders, many studies regarding the problem of free liquid jets have been devoted to the instability of jets of various cross-section geometries (Gutmark & Grinstein 1999), including elliptical cross-section (Morris 1988; Amini & Dolatabadi 2011; Amini *et al.* 2014), rectangular cross-section (Tam & Thies 1992) or even star-shaped jets (Quinn 1992). However, these studies mostly concern high Reynolds number flows at which other physical phenomena such as vortex shedding or vorticity–surface interaction play a key role in the instability mechanism. At low Reynolds number, the pinch-off of a viscous elongated drop has been studied for various initial shapes by Stone & Leal (1989*a,b*).

In a different context, the Plateau–Rayleigh instability can also be encountered in the case of a free surface liquid cylinder constrained by the presence of a solid substrate along its longitudinal direction. For instance, the annular coating of a liquid on a wire or on the inside of a tube was first studied by Goren (1962). He related the fastest growing perturbation wavelength to the ratio of the two radii of the annulus and the Ohnesorge number.

Deposited upon a solid surface, a liquid cylinder is called a rivulet and it can undergo different instabilities such as capillary breakup (Schmuki & Laso 1990) or meandering for different wetting conditions: either hydrophobic conditions (Nakagawa & Scott 1984; Nakagawa 1992; Couvreur 2013), partial wetting (Birni *et al.* 2008) or total wetting (Daerr *et al.* 2011); braiding (Mertens, Putkaradze & Vorobieff 2005); or splitting (Myers, Liang & Wetton 2004).

In the absence of longitudinal flow, liquid cylinders were called static rivulets, and the first theoretical study of their stability was due to Davis (1980). Using balance of kinetic energy arguments, he gave sufficient conditions for circular sessile cylinders to be stable, and he studied their stability for different contact angle conditions at a planar substrate (pinned contact line, constant contact angle, smooth contact angle variations with contact line speed).

Using a geometrical variational formulation, Sekimoto, Oguma & Kawasaki (1987) studied the shape and the instability of steady liquid ridges on a horizontal planar substrate, under partial wetting conditions, in a small slope approximation, and taking gravity into account. Speth & Lauga (2009) gave explicit calculations of unstable long-wave modes of a cylindrical ridge for pinned contact lines in the inviscid case. Within lubrication approximation, taking the gravity effects into account, together with the wetting conditions using a disjoining pressure model, Diez, González & Kondic (2009) analysed the stability of a rivulet on a horizontal plane. They evidenced the respective dependence of the instability on these effects and the nano- or macroscopic size of the rivulet. Recently, Bostwick & Steen (2018) performed, through a Rayleigh–Ritz method, a thorough study of the stability of inviscid sinuous and varicose modes, for pinned contact lines or free contact lines with constant contact angle. More specifically, they identified the dominant modes for various contact line configurations.

The case of non-planar substrates, in the context of a wedge-shaped groove, was first treated by Langbein (1990). Based on energy arguments, he showed that, depending on the contact angle and the opening angle of the wedge, static cylinders on a wedge-shaped groove could be stable or unstable. These results were extended by Roy & Schwartz (1999), considering various geometries of substrate and different wetting conditions. Using hydrodynamic considerations, the stability of a rivulet on a wedge was studied by Yang & Homsy (2007) in the flowing case (using lubrication approximation together with a model of dynamic contact line) and by Speth & Lauga (2009) in the static case (inviscid fluid, with pinned contact line wetting conditions). In the context of a circular constraint applied to one side of a cylindrical drop, Bostwick & Steen (2010) showed that this constraint slowed the growth rate of the unstable modes. In all aforementioned cases, gravity effects were not taken into account and circular cylindrical base states were considered.

As a summary, we can state that the Plateau–Rayleigh instability in liquid cylinders depends on the shape of the cross-section of the cylinder and on the wetting conditions when placed upon a substrate, either flat, wedge-shaped or curved. Moreover, the scale of the cross-section can reduce the critical wavenumber of the perturbations, beyond which the cylinder becomes stable: gravity, known to flatten sessile drops, has a stabilising effect on the Plateau–Rayleigh instability (Diez *et al.* 2009).

Note that the Plateau–Rayleigh instability can be fully inhibited to a certain extent in coated tubes because of gravitational drainage (Duclaux, Clanet & Quéré 2006). The stability of a liquid cylinder has also been studied for other liquid systems: ferromagnetic liquid cylinder stabilised by an orthoradial magnetic field (Arkhipenko *et al.* 1980); and soft solids for which the Plateau–Rayleigh instability can be inhibited by elastic forces (Mora *et al.* 2010).

Other examples of non-breaking slender liquid drops, without contact with any solid wall, have been observed in the case of liquid cylinders levitating above hot curved rectilinear substrates owing to the Leidenfrost effect (Perrard *et al.* 2015). Large volumes of liquid can be deposited above such substrates. Their lengths are several times larger than the perimeter of their cross-section, which contradicts the historical stability criterion proposed by Plateau (1849), stating that a – circular – slender drop breaks up whenever its length is larger than the circumference of its cross-section. In the study by Perrard *et al.*, Leidenfrost drops are flattened by gravity, which may play a significant stabilising role. If such drops are left evaporating without being water-fed the volume decreases down to a critical volume, at which breakup eventually occurs.

The current article will be devoted to the full characterisation of the shape of these flattened drops together with the characterisation of linear waves that the authors observed along these levitating liquid cylinders (here, restricting ourselves to the non-dispersive regime). To that end, we will consider – instead of a levitating liquid – a simpler system that can be viewed as geometrically equivalent: we will consider an infinite sessile cylinder deposited upon a superhydrophobic substrate.

The exact shape of the cross-section of such a drop will be obtained using a mechanical analogy with the rotation motion of a pendulum. We will relate the breakup of these drops to the Plateau–Rayleigh instability by studying the stability of varicose modes along these drops, resorting to a mass conservation and a section-averaged momentum equation, a formalism best known as the Saint-Venant equations, in an inviscid framework. We will show that the Plateau–Rayleigh instability is suppressed whenever the substrate underneath the drop becomes non-flat

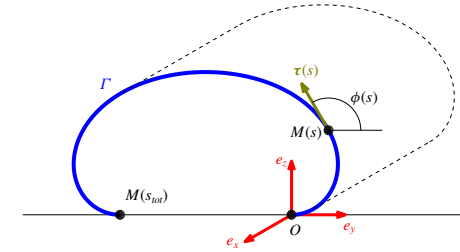


FIGURE 1. The shape of the free surface Γ of a cylindrical sessile drop placed upon a horizontal superhydrophobic substrate is computed. The drop profile is invariant along the x -direction. The border of the drop is parameterised by its arclength, s . The curve starts at the origin O (at which $s=0$) and ends at the point $M(s_{tot})$, with s_{tot} the total arclength. The tangent vector τ at the point $M(s)$ forms an angle $\phi(s)$ with the horizontal.

and its cross-section is sufficiently large, which explains the observed stability of cylinders in Leidenfrost state (Perrard *et al.* 2015). In order to validate our predictions, experimental comparisons will be performed that show an excellent agreement, which confirms the validity of our approach in the non-dispersive limit.

In §2, we present the computation of the exact shape of the cross-section of a sessile cylindrical drop, under superhydrophobic wetting conditions when placed upon a flat horizontal substrate. In §3, we analyse the linear stability of such a drop using the Saint-Venant equations. We then present experimental comparisons with the theoretical results in §4. Finally, in §5, we close this paper with our conclusions and perspectives.

2. Shape of a cylindrical sessile drop

This section is devoted to the full characterisation of the shape of a sessile drop deposited upon a flat hydrophobic substrate, with translational invariance with respect to the x -direction, namely cylindrical sessile drops, taking gravity into account. To that end, we draw an analogy with the rotation motion of a pendulum and propose complete analytical expressions.

Let z denote the upward vertical direction and y the horizontal direction. The free interface will be denoted as Γ . It can be described as a curve in the (y, z) -plane (see figure 1). The latter will be parameterised by its arclength, s . The coordinates of a point $M(s)$ along the interface will be denoted as $(\eta(s), \zeta(s))$. At the point $M(s)$, the unit tangent vector τ is given by $\tau = dM(s)/ds$ and the transverse (that is the in-plane) curvature κ' is given by $d\tau/ds = \kappa' \mathbf{n}$, where $\mathbf{n}$ is the unit normal vector. We set the angle $\phi(s)$ such that $\tau(s) = \cos \phi(s) \mathbf{e}_y + \sin \phi(s) \mathbf{e}_z$, so that

$$\kappa' = \frac{d\phi}{ds}, \quad \eta(s) = \eta_0 + \int_0^s \cos \phi(s) ds, \quad \zeta(s) = \zeta_0 + \int_0^s \sin \phi(s) ds. \quad (2.1a-c)$$

In this section, by convention, the starting point of the curve $M(s=0) = (\eta_0, \zeta_0)$ will be located at the origin $O = (0, 0)$.

The equation satisfied by the vertical position ζ of the interface is obtained solving the hydrostatics equation, taking the Young–Laplace law into account. It reads (see,

for instance, Landau & Lifschitz (1987, § 61))

$$\rho g \zeta(s) + \sigma \kappa(s) = \mathcal{C}_0, \quad (2.2)$$

where σ denotes the surface tension and $\mathcal{C}_0$ is a constant independent of the x -coordinate.

We set the usual capillary length ℓ_c as $\ell_c^2 = \sigma/\rho g$. After differentiating (2.2) with respect to s , knowing that $d\zeta/ds = \sin \phi(s)$, we obtain

$$\frac{d^2 \phi}{ds^2} + \frac{1}{\ell_c^2} \sin \phi(s) = 0, \quad (2.3)$$

which is equivalent to the classic equation of motion of a pendulum, where the time variable is now the arclength s . Equation (2.3) is equivalent to

$$\frac{1}{2} \left[\frac{d\phi}{ds} \right]^2 + \frac{1}{\ell_c^2} [1 - \cos \phi(s)] = \text{const. } \mathcal{E} \equiv \mathcal{H}(q, p), \quad (2.4)$$

with $\mathcal{H}$ the Hamiltonian of a pendulum of angular frequency $1/\ell_c$, for the time variable s and $(q, p) = (\phi, (d\phi/ds))$, the corresponding set of conjugate variables. As a conservative system, we have $\mathcal{H}(q(s), p(s)) = \mathcal{E}$, the conserved 'energy' along the time s , which only depends on the initial conditions $(\phi = \phi_i, (d\phi/ds) = \kappa_i')|_{s=s_i}$, at the given initial time s_i , so that

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} [\kappa_i']^2 + \frac{1}{\ell_c^2} [1 - \cos \phi_i]. \quad (2.5)$$

The energy value $\mathcal{E}$ labels the different orbits of the autonomous dynamical system given by the corresponding Hamilton equations. The right-hand side part of the summation is bounded (corresponding to the ϕ -periodic potential energy of gravity), whereas the left-hand side part (corresponding to the kinetic energy, i.e. the curvature contribution) can assume arbitrary values.

Let us define $\mathcal{E}_c = 2/\ell_c^2$. The orbits corresponding to $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c$ are the usual separatrices of the phase space, given by the equations

$$\kappa'(\phi) = \frac{d\phi}{ds} = \pm \frac{2}{\ell_c} \cos \frac{\phi}{2}. \quad (2.6)$$

In terms of arclength s , ranging from $-\infty$ to $+\infty$, they read

$$\phi(s) = \mp \pi \pm 4 \arctan \exp \left[\pm \frac{s}{\ell_c} \right] + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (2.7)$$

The corresponding curves are displayed in figure 2. They partition the phase space into bounded regions (related to libration pendulum motion) and unbounded regions (related to rotation pendulum motion). In the framework of pendulum motion, they correspond to heteroclinic orbits, connecting neighbouring unstable equilibrium positions $\phi_k = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. We will later see that these separatrices correspond to the limit case of a sessile drop of infinite horizontal extension.

The orbits inside the separatrices ($\mathcal{E} < \mathcal{E}_c$) are closed. They correspond to libration modes in terms of pendulum. They are related to the shape of the cross-section of a

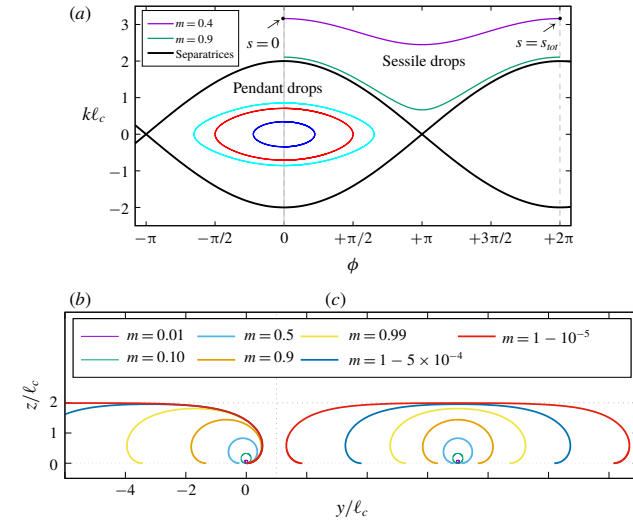


FIGURE 2. Cylindrical drop shapes viewed as pendulum orbits. (a) Phase space and typical orbits. The separatrices ($\mathcal{E} = \mathcal{E}_c$, see text for definition) partition the phase space into two types of regions. The bounded regions are those related to closed pendulum orbits (libration mode); they correspond to pendant drop profiles. Outside the separatrices, the orbits are those of pendulum rotation mode; they correspond to sessile drop profiles. In the case of superhydrophobic wetting conditions, the orbits start at $\phi = 0$ at arclength $s = 0$ and end at $\phi = 2\pi$ at arclength s_{tot} (see (2.13)). Two orbits are displayed, corresponding to parameters $m = 0.4$ and $m = 0.9$. (b) Drop shapes for different values of m , calculated starting at the origin O . The closer m is to the value 1, the larger the drop. In this limit, its height approaches $2\ell_c$. In contrast, the drops are nearly circles when m approaches zero. (c) Same drops, but centred with respect to their vertical symmetry axis.

pendant drop (with translational invariance along the x -direction). One can refer to the comprehensive review of McCuan (2017) for the properties and the explicit analytical expressions of the solutions. Note that the pendulum analogy was previously made by Roman, Gay & Clanet (2003) as well. Nevertheless, only numerical solutions were proposed by the authors.

In the following, we will resort to the usual partial and complete elliptic integrals (for any parameter $m < 1$) defined as

$$E(\phi|m) = \int_0^\phi \sqrt{1 - m \sin^2 x} dx, \quad E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m \sin^2 x} dx, \quad (2.8a, b)$$

$$F(\phi|m) = \int_0^\phi \frac{dx}{\sqrt{1 - m \sin^2 x}}, \quad K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - m \sin^2 x}}. \quad (2.9a, b)$$

The solutions to our system are those corresponding to $\mathcal{E} > \mathcal{E}_c$, namely orbits outside the separatrices. They are related to the rotating modes of a pendulum. If we set m ,

the parameter such that

$$\frac{\mathcal{E}_c}{\mathcal{E}} \stackrel{\text{def}}{=} m < 1, \quad (2.10)$$

we have κ^t , the transverse curvature, given by the equation

$$\kappa^t(\phi) = \frac{d\phi}{ds} = \pm \frac{2}{\ell_c \sqrt{m}} \sqrt{1 - m \sin^2 \frac{\phi}{2}} \quad (2.11)$$

that yields the solution

$$\phi(s) = 2 \arcsin \left[\text{sn} \left(\frac{s}{\ell_c \sqrt{m}}; m \right) \right], \quad (2.12)$$

with the proper determination of arcsin function and sn, the Jacobi elliptic function of parameter m ($\phi(s)$ can be expressed in terms of am amplitude function as well). For a given m , the total arclength s_{tot} is given by

$$s_{\text{tot}}(m) = \frac{\ell_c \sqrt{m}}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \frac{\phi}{2}}} = 2\ell_c \sqrt{m} K(m) \quad (2.13)$$

and the orbits in the phase space are given by the following parameterisation with angle ϕ :

$$\eta(\phi) = \frac{\ell_c}{2} \sqrt{m} \int_0^\phi d\varphi \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}, \quad \zeta(\phi) = \frac{\ell_c}{2} \sqrt{m} \int_0^\phi d\varphi \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}. \quad (2.14a,b)$$

The explicit expressions of $\eta(\phi)$ and $\zeta(\phi)$ then read

$$\eta(\phi) = \frac{2\ell_c}{\sqrt{m}} \left[E \left(\frac{\phi}{2} \middle| m \right) - \left(1 - \frac{m}{2} \right) F \left(\frac{\phi}{2} \middle| m \right) \right], \quad \zeta(\phi) = \frac{2\ell_c}{\sqrt{m}} \left[1 - \sqrt{1 - m \sin^2 \frac{\phi}{2}} \right]. \quad (2.15a,b)$$

Note that Lamb (1928, § 127) and Ku, Ramsey & Clinton (1968) previously gave the same expressions, using different parameterisations, but without resorting explicitly to a pendulum analogy, whereas Michael & Williams (1977) solved the same problem using numerical calculations.

In figure 2, we show various shapes of drops for different values of m (and the drop pictured in figure 1 corresponds to $m = 0.95$). One must keep in mind that the $m \rightarrow 0^+$ -limit corresponds to vanishingly small droplets (i.e. high energy $\mathcal{E}$) whereas the limit case $m \rightarrow 1^-$ corresponds to large flattened drops (i.e. energy $\mathcal{E}$ close to $\mathcal{E}_c$, namely orbits close to the separatrices).

From (2.15), we can compute the following typical quantities.

(i) The vertical thickness of the drop, denoted as $\Delta Z_{\text{max}}(m)$, is given by

$$\Delta Z_{\text{max}}(m) = \zeta(\pi) - \zeta(0) = 2\ell_c \frac{1 - \sqrt{1 - m}}{\sqrt{m}} \quad (2.16)$$

and is upper-bounded by $2\ell_c$, which corresponds to the usual result that the maximum height of a liquid puddle is $2\ell_c$.

(ii) The transverse curvature at the top of the drop is given by

$$\kappa_{\text{top}}(m) = \frac{2}{\ell_c} \sqrt{\frac{1 - m}{m}}. \quad (2.17)$$

Note that we have the following relationship, as a consequence of (2.2):

$$\frac{C_0(m)}{\rho g \ell_c} = \frac{\Delta Z_{\text{max}}(m)}{\ell_c} + \ell_c \kappa_{\text{top}}(m) = \frac{2}{\sqrt{m}}. \quad (2.18)$$

(iii) The horizontal extension of the drop is given by

$$\Delta Y_{\text{max}} = \left[\eta \left(\frac{3\pi}{2} \right) - \eta \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (2.19)$$

$$= \frac{2\ell_c}{\sqrt{m}} \left\{ \left(1 - \frac{m}{2} \right) \left[F \left(\frac{\pi}{4} \middle| m \right) - F \left(\frac{3\pi}{4} \middle| m \right) \right] + \left[E \left(\frac{3\pi}{4} \middle| m \right) - E \left(\frac{\pi}{4} \middle| m \right) \right] \right\}. \quad (2.20)$$

(iv) The cross-sectional area of the drop is given by

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(m) &= - \int_{\Gamma} \zeta \, d\eta = - \int_0^{2\pi} \zeta(\phi) \frac{d\eta}{d\phi}(\phi) \, d\phi, \\ &= \frac{8\ell_c^2}{m} \left[\left(1 - \frac{m}{2} \right) K(m) - E(m) \right]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

(v) The contact extension at the substrate is given by

$$\Lambda_c(m) = [\eta(0) - \eta(2\pi)] = -\frac{\ell_c}{2} \sqrt{m} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \, d\varphi \quad (2.22)$$

and we have the following relationship between $\Lambda_c(m)$ and $\mathcal{A}(m)$:

$$\mathcal{A}(m) = \frac{2}{\sqrt{m}} \ell_c \Lambda_c(m), \quad (2.23)$$

which yields

$$\Lambda_c(m) = \frac{4\ell_c}{\sqrt{m}} \left[\left(1 - \frac{m}{2} \right) K(m) - E(m) \right]. \quad (2.24)$$

Note that we have exhibited the shape of a cylindrical drop deposited upon a superhydrophobic flat substrate (i.e. imposing a contact angle $\theta_c = \pi$) that corresponds to an orbit starting from angle $\phi = 0$ and ending at angle $\phi = 2\pi$. In a more general case, if the drop is deposited upon a horizontal substrate at which the corresponding contact angle is θ_c , the shape of the interface then corresponds to a symmetric portion of the same kind of orbit, with an angle ϕ ranging from $\pi - \theta_c$ to $\pi + \theta_c$, allowing us to recover analytically the shape of a static rivulet previously numerically computed by Myers *et al.* (2004). We will resort to an analogous statement in § 3.5, where a wedge-shaped substrate will be considered. We now turn to a couple of asymptotic cases, for which the expressions can be greatly simplified and will be of use thereafter.

2.1. Small values of m regime (nearly circular drop)

For small values of positive parameter m , we have the following expansions:

$$\Delta Z_{\max}(m) = \ell_c \sqrt{m} \left[1 + \frac{1}{4}m + O(m^2) \right], \quad (2.25)$$

$$\Delta Y_{\max}(m) = \ell_c \sqrt{m} \left[1 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) m + O(m^2) \right], \quad (2.26)$$

$$\mathcal{A}(m) = \frac{\pi}{4} m \ell_c^2 + O(m^2). \quad (2.27)$$

Therefore, the cross-section of the drop is nearly that of a circle of radius R_0 that reads at leading order

$$R_0(m) = \frac{1}{2} \sqrt{m} \ell_c = \frac{1}{2} \Delta Z_{\max} = \frac{1}{2} \Delta Y_{\max} \quad (2.28)$$

and a contact length to the substrate $\Lambda_c(m)$ that satisfies

$$\Lambda_c = \frac{\pi}{8} m^{3/2} \ell_c \quad (2.29)$$

which is then negligible compared to the radius $R_0(m)$. As the volume per unit length (in the x -direction) increases, we depart from the circular shape because of gravity that flattens the drop.

2.2. Parameter m close to 1^- (flattened drop)

Let the parameter μ be such that $m = 1 - \mu$. We can compute the following asymptotic expressions for $\mu \rightarrow 0^+$ that read:

$$\Delta Z_{\max}(m) = 2\ell_c \left[1 - \sqrt{\mu} + o(\sqrt{\mu}) \right], \quad (2.30)$$

$$\Delta Y_{\max}(m) = \ell_c \left[-\log \mu + \left(-4 + 2\sqrt{2} + 2 \log \tan \frac{\pi}{8} + 4 \log 2 \right) \right] + O(\mu \log \mu), \quad (2.31)$$

$$\mathcal{A}(m) = 2\ell_c^2 [-\log \mu + 4(\log 2 - 1)] + O(\mu \log \mu), \quad (2.32)$$

$$\Lambda_c(m) = \frac{\sqrt{m}}{2\ell_c} \mathcal{A}(m) = \ell_c [-\log \mu + 4(\log 2 - 1)] + O(\mu \log \mu), \quad (2.33)$$

with the following approximate numerical values of the additive constants to the logarithmic expressions, found in (2.31) and (2.33),

$$\mathcal{C}_1 = -4 + 2\sqrt{2} + 2 \log \tan \frac{\pi}{8} + 4 \log 2 \simeq -0.16173, \quad (2.34)$$

$$\mathcal{C}_2 = 4(\log 2 - 1) \simeq -1.2274. \quad (2.35)$$

Last, note that we have the following relationship between the value of the cross-sectional area and those of the vertical thickness and the contact extension

$$\mathcal{A}(m) = \Lambda_c(m) \times \Delta Z_{\max}(m) \left[1 - \sqrt{\mu} + O(\mu) \right], \quad (2.36)$$

and we have $\ell_c/2(\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2)$, corresponding roughly to half the capillary length, which is the length of the tip of the drop protruding above the wetted area.

In figure 3, we plot $\Delta Z_{\max}$, $\Delta Y_{\max}$ together with the aspect ratio $\varrho_A = \Delta Y_{\max}/\Delta Z_{\max}$. The latter is always larger than 1 and diverges in the limit $m \rightarrow 1^-$ as $\Delta Y_{\max}$ does. The plots are given with respect to the coordinate m or $\mu = 1 - m$, in lin–lin or log–lin scales.

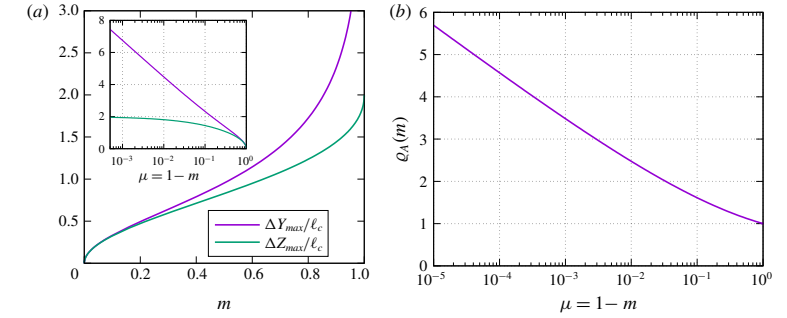


FIGURE 3. (a) Plot of the horizontal extension $\Delta Y_{\max}$ and the thickness $\Delta Z_{\max}$ with respect to the variables m and $\mu = 1 - m$ (inset); the y -coordinates are expressed in ℓ_c -units. (b) Plot of the aspect ratio $\varrho_A(m) = \Delta Y_{\max}/\Delta Z_{\max}$ with respect to $\mu = 1 - m$. For $m \rightarrow 0$ (or $\mu \rightarrow 1$), the cross-section of the cylinder is nearly a circle, whereas for $m \rightarrow 1$ (or $\mu \rightarrow 0$), the horizontal extension diverges and the thickness tends to $2\ell_c$.

3. Plateau-Rayleigh instability in the Saint-Venant equations framework

In the previous section, the shape of a sessile cylindrical drop was calculated when placed upon a horizontal planar substrate with non-wetting conditions; typical dimensions were also obtained. In this section, the question of their stability against varicose perturbation is dealt with. It is related to the classical Plateau-Rayleigh instability in the context of non-circular geometry. To that end, we will use the inviscid Saint-Venant equations and focus on the speed of propagation of varicose waves along our sessile cylinder placed upon a superhydrophobic substrate. We will show that such drops can become stable provided the substrate is non-flat and sufficiently large.

3.1. Saint-Venant governing equations

The Saint-Venant equations are a set of hyperbolic equations that were proposed by the eponymous Saint-Venant (1871) in order to study flows in open-channels along the x -direction. Their derivation is based on a long-wavelength (shallow water limit $k \rightarrow 0$) expansion and the basic hypotheses are the following: (i) the flow is considered quasi-parallel in the x -direction; and (ii) the pressure is hydrostatic. Under these hypotheses, if one sets the following quantities:

$$S(x, t), \text{ the transverse cross-sectional area of liquid,} \quad (3.1)$$

$$\bar{u}(x, t) = \frac{1}{S(x, t)} \int_{S(x, t)} u(x, y, z, t) dy dz, \text{ the section-averaged velocity,} \quad (3.2)$$

$$P(x, y, z, t), \text{ the hydrostatic three-dimensional pressure field,} \quad (3.3)$$

the inviscid Saint-Venant equations read

$$\partial_t S + \partial_x (S \bar{u}) = 0, \quad (3.4)$$

$$\partial_t \bar{u} + \bar{u} \partial_x \bar{u} + \frac{1}{S(x, t)} \int_{S(x, t)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} [P(x, y, z, t)] dy dz = 0. \quad (3.5)$$

This set of equations is expressed in terms of section-averaged pressure gradient in the x -coordinate and turns into one-dimensional equations in space. For a complete derivation of these equations (including viscous effects), one can read the article of Decoene *et al.* (2009). As we are interested in the linear stability of a sessile drop, we will study a linearised version of these equations.

3.2. Special case of triangle-shaped cross-section

As a first elementary result given by the Saint-Venant equations, let us neglect the surface tension effects and consider a triangular cross-section of liquid, with both sides Γ_α and Γ_β , respectively, making an angle α and β with the horizontal. As no capillary effects are considered, we consider a flat horizontal interface. Let $S(x, t)$ be the cross-sectional area at coordinate x . We have $S(x, t) = \frac{1}{2} \lambda H^2(x, t)$, with H , the liquid depth measured from the bottom of the substrate and $\lambda = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta)/\sin \alpha \sin \beta)$. We denote as S_0 , the liquid cross-sectional area at rest and as H_0 , its corresponding depth. The pressure field is hydrostatic, hence it is independent of the y -coordinate and reads

$$P(x, y, z, t) = \rho g [H(x, t) - z]. \quad (3.6)$$

The Saint-Venant equations (3.4) and (3.5) after linearisation then read

$$\partial_t S + \partial(S\bar{u}) = 2\lambda H_0 \partial_t H + S_0 \partial_x \bar{u} = 0, \quad (3.7)$$

$$\partial_t \bar{u} + \frac{1}{S} \int_S \frac{1}{\rho} (\partial_x P) dy dz = \partial_t \bar{u} + g \partial_x H = 0, \quad (3.8)$$

so that we obtain the following wave equation on H

$$\partial_{tt} H - \frac{1}{2} g H_0 \partial_{xx} H = 0, \quad (3.9)$$

hence the gravity wave speed

$$c_0 = \sqrt{\frac{g H_0}{2}}. \quad (3.10)$$

3.3. Adiabatic perturbation hypothesis and discussion

In this article, we will make the following strong hypothesis: at any coordinate x , at any time t , we will assume that the cross-section shape (of area value $S(x, t)$) is adiabatically given by the equilibrium static shape calculated in §2, at that very value $S(x, t)$, corresponding to a geometrical parameter $m(x, t)$. This assumption implies that the contact line is free to move on the superhydrophobic substrate, with contact angle at the substrate kept constant at value π . Moreover, we assume that the pressure field remains hydrostatic, hence independent of the y -coordinate.

In the current situation, translational invariance in the x -direction does not hold any longer so that the constant C_0 given by (2.2) must depend on the coordinate x and time t . In the framework of our assumption, the shape corresponds to that at equilibrium, provided it is given by some parameter $m(x, t)$ and we have

$$C_0(x, t) = \rho g \zeta(x, s, t) + \sigma \kappa'(x, s, t) \quad (3.11)$$

at given x and t , all along the interface, namely for all $s \in [0, s_{tot}(x, t)]$. It can be calculated anywhere along the interface. In the following, we will choose to calculate it at the top of the drop, i.e. at angle $\phi = \pi$, at which we have $\zeta(\pi) = \Delta Z_{max}(m(x, t))$ and $\kappa'(x, s, t) = \kappa_{top}(m(x, t))$, respectively, given by (2.16) and (2.17).

Let us now focus on the hydrostatic pressure field. *A priori*, for a point of coordinates (x, y, z) inside the drop, its expression reads, because of the Young-Laplace law and (3.11)

$$P(x, y, z, t) = \rho g [\zeta(x, s, t) - z] + \sigma \kappa'(x, s, t) + \sigma \kappa'(x, s, t), \quad (3.12)$$

$$= C_0(x, t) - \rho g z + \sigma \kappa'(x, s, t), \quad (3.13)$$

with s being an arclength coordinate satisfying $\eta(s, t) = y$ and the curvature term being the sum of the transverse curvature $\kappa'(x, s, t)$ (i.e. in the (y, z) -plane) and the longitudinal curvature $\kappa^l(x, s, t)$ (i.e. in the x -direction) at a given point of coordinates (x, s, t) located at the interface. At this stage, note that, because of the possible values of s , the pressure P can be bivalued.

The adiabatic hypothesis regarding the equilibrium shape is valid in the limit $\kappa' \gg \kappa^l$, which corresponds to the long-wave limit. Without entering into further technical details, at linear approximation, the longitudinal curvature term $\kappa^l(x, s, t)$ will yield second-order contributions in x -derivatives of $S(x, t)$ in the expression of the pressure P , whereas $C_0(x, t)$ only involves zeroth-order contributions in x -derivatives of $S(x, t)$. Therefore, in the following, we will not account for the presence of κ^l and will then solely focus on the terms that will have non-dispersive contributions in the dispersion relation we are looking for. The section-averaged value of $\partial_x P$ used in the Saint Venant equations then reads

$$\frac{1}{S(x, t)} \int_{S(x, t)} \{\partial_x P(x, y, z, t)\} dy dz = \frac{1}{S(x, t)} \int_{S(x, t)} \{\partial_x C_0(x, t)\} dy dz = \partial_x C_0(x, t). \quad (3.14)$$

3.4. Plateau-Rayleigh instability in drops on flat hydrophobic substrate

We now turn to the stability study of the static sessile drops considered in §2. As mentioned in §3.3, we consider one particular class of perturbation by making the following assumption: the cross-section shape – of transverse area value $S(x, t)$ – is adiabatically given by the equilibrium static shape calculated in §2, at that very value $S(x, t)$, corresponding to a geometrical parameter $m(x, t)$, at any given space coordinate x and time t . The contact line is then free to move on the superhydrophobic substrate, keeping a constant contact angle equal to π . We focus on the varicose deformations; the liquid is supposed inviscid. Moreover, we choose the particular class of varicose perturbations with a symmetry about its (x, z) -mid-plane, as displayed in figure 2(c). The base state is supposed to correspond to the parameter m_0 , with a cross-sectional area equal to $S_0 = S(m_0)$.

We set the perturbed cross-sectional area as being $S(x, t) = S_0 + \varsigma(x, t)$, with $\varsigma \ll S_0$ and set $\bar{u}$ as the section-averaged velocity. Because of (3.14), the section-averaged value of $\partial_x P$ can be expressed as

$$\partial_x \bar{p} = \rho g \partial_x [\Delta Z_{max}(x, t)] + \sigma \partial_x [\kappa_{top}(x, t)]. \quad (3.15)$$

The linearised Saint-Venant equations then read

$$\partial_t \varsigma + S_0 \partial_x \bar{u} = 0, \quad (3.16)$$

$$\partial_t \bar{u} + \frac{1}{\rho} \partial_x \bar{p} = 0, \quad (3.17)$$

that is,

$$\partial_n \zeta = \frac{S_0}{\rho} \partial_{xx} \bar{p}. \quad (3.18)$$

Knowing that

$$\partial_x [\Delta Z_{max}(x, t)] = \left[\frac{\partial [\Delta Z_{max}]}{\partial m} \right] \left[\frac{\partial S}{\partial m} \right]^{-1} \left[\frac{\partial S}{\partial x} \right], \quad (3.19)$$

$$\partial_x [\kappa_{top}(x, t)] = \left[\frac{\partial \kappa_{top}}{\partial m} \right] \left[\frac{\partial S}{\partial m} \right]^{-1} \left[\frac{\partial S}{\partial x} \right], \quad (3.20)$$

we obtain the following wave equation, after only retaining the linear contributions of ζ :

$$\partial_n \zeta = g \left[\frac{S_0}{\frac{\partial S}{\partial m}(m_0)} \right] \left\{ \left[\frac{\partial [\Delta Z_{max}]}{\partial m}(m_0) \right] + \frac{\sigma}{\rho g} \left[\frac{\partial \kappa_{top}}{\partial m}(m_0) \right] \right\} \partial_{xx} \zeta. \quad (3.21)$$

Setting $\zeta(x, t) = \varepsilon \exp[i(\omega t - kx)]$ eventually yields the following dispersion relation:

$$\omega^2(k) = gk^2 \left[\frac{S_0}{\frac{\partial S}{\partial m}(m_0)} \right] \left\{ \left[\frac{\partial [\Delta Z_{max}]}{\partial m}(m_0) \right] + \ell_c^2 \left[\frac{\partial \kappa_{top}}{\partial m}(m_0) \right] \right\}. \quad (3.22)$$

We have an instability whenever $\omega^2(k) < 0$; conversely, if $\omega^2(k) > 0$, the varicose mode is stable.

Let the following dimensionless quantities be

$$a(m_0) = \left[\frac{S_0}{\frac{\partial S}{\partial m}(m_0)} \right] = 2m_0(1 - m_0) \frac{(m_0 - 2)K(m_0) + 2E(m_0)}{(m_0 - 4)(m_0 - 1)K(m_0) + (3m_0 - 4)E(m_0)}, \quad (3.23)$$

$$b(m_0) = \frac{1}{\ell_c} \left[\frac{\partial [\Delta Z_{max}]}{\partial m}(m_0) \right] + \ell_c \left[\frac{\partial \kappa_{top}}{\partial m}(m_0) \right] = -m_0^{-3/2}, \quad (3.24)$$

we then obtain the dispersion relation, that reads

$$\omega^2(k) = g\ell_c k^2 [a(m_0)][b(m_0)], \quad (3.25)$$

which yields the expression of the wave speed

$$c_{eff}^2(m_0) = g\ell_c [a(m_0)][b(m_0)]. \quad (3.26)$$

This quantity is always negative because of the factor $b(m_0)$ (see (3.24)), so that a cylindrical sessile drop on a flat superhydrophobic substrate is always unstable regardless of its size. As a visual illustration, in figure 4, we plot the quantities $a(m)$ and $c_{eff}^2/(g\ell_c) = a(m)b(m)$ as functions of the parameter m .

In the following, we will make more quantitative statements, by analysing these results in two distinct limits: small m regime, i.e. small cross-section cylinder and large m regime (m close to 1^-), i.e. large cross-section regime.

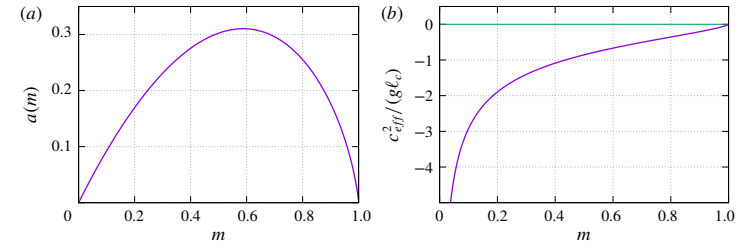


FIGURE 4. Plots of (a) the coefficients $a(m)$ together with (b) the renormalised $c_{eff}^2/(g\ell_c) = a(m)b(m)$ with respect to the parameter m . The values of c_{eff}^2 are always negative, therefore, the drop is unstable. The larger m , the smaller the growth rate. In the limit $m \rightarrow 1^-$, we have $c_{eff}^2 \rightarrow 0^-$; in this regime, the horizontal extension of the cylinder tends to infinity and the latter becomes marginally unstable.

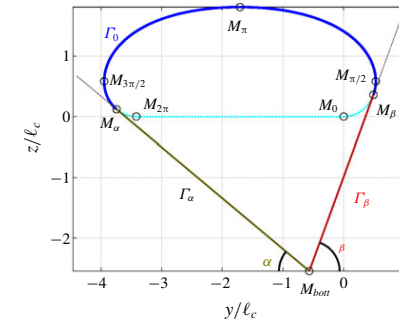


FIGURE 5. Geometry of a sessile cylindrical drop deposited upon a wedge-shaped substrate with angles to the horizontal equal to α and β . In dashed cyan is superimposed the shape of a drop of same horizontal extension ΔY_{max} , deposited upon a flat superhydrophobic substrate. Eight particular points are shown (see § 3.5 for their definition). Here, Γ_0 denotes the free surface, while Γ_α and Γ_β correspond to the parts of the wedge wetted by the drop. They connect M_α to M_{bot} and M_{bot} to M_β , respectively.

3.4.1. Small m regime: nearly circle cross-section, Plateau-Rayleigh instability recovered

Let us consider the asymptotic regime $m \rightarrow 0^+$. We have

$$a(m) \underset{m \rightarrow 0^+}{=} m - \frac{3}{4}m^2 + O(m^3), \quad (3.27)$$

$$b(m) = -m^{-3/2}, \quad (3.28)$$

and the dispersion relation then reads

$$\omega^2(k, m) \underset{m \rightarrow 0^+}{\simeq} g\ell_c k^2 \left[-\frac{1}{\sqrt{m}} \right]. \quad (3.29)$$

We see that for small values of m , we have an instability corresponding to the classic Plateau-Rayleigh instability: rewriting this expression in terms of radius of the drop $R_0 = \frac{1}{2}\ell_c\sqrt{m}$ (see (2.28)) indeed leads to

$$\omega^2(k, R_0) \underset{m \rightarrow 0^+}{\simeq} -\frac{\sigma}{2\rho R_0^3}(kR_0)^2. \quad (3.30)$$

As a reminder, we recall that the growth rate Σ of the classic Plateau-Rayleigh instability in the case of a free cylinder of radius R_0 reads

$$\Sigma^2(k, R_0) = \frac{\sigma}{\rho R_0^3} \frac{I_1(kR_0)}{I_0(kR_0)} [1 - (kR_0)^2] k R_0, \quad (3.31)$$

with I_0 and I_1 the zeroth and first modified Bessel functions of the first kind, which satisfy for small x , $I_0(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$ and $I_1(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x/2$. The angular frequency ω satisfies the exact same properties as the growth rate Σ at small k , at leading quadratic order.

3.4.2. Large cross-section regime

For large cross-section drops, the Plateau-Rayleigh instability still holds, for $b(m)$ is always negative, for any $m \in]0, 1[$ (see (3.24)). Still, let us be more quantitative. For $m = 1 - \mu$ with $\mu \rightarrow 0^+$, we have

$$a(\mu) = -\mu[\log(\mu) + 4(1 - \log(2))] + O(\mu^2), \quad (3.32)$$

$$b(\mu) \underset{\mu \rightarrow 0^+}{=} -1 - \frac{3\mu}{2} - \frac{15\mu^2}{8} + O(\mu^3), \quad (3.33)$$

so that the wave celerity reads

$$c_{\text{eff}}^2 \underset{\mu \rightarrow 0^+}{\simeq} g\ell_c\mu[\log(\mu) + 4(1 - \log 2)] \longrightarrow 0^-. \quad (3.34)$$

In the limit of very large cross-sectional areas, the growth rate vanishes and wide drops become marginally unstable. This result is reminiscent of the result evidenced by Diez *et al.* (2009), in a different wetting situation (partial wetting), who stated that, because of gravity, a rivulet was unstable for a reduced interval of small wavenumbers.

As a general conclusion to this subsection, a sessile cylindrical drop placed upon a superhydrophobic flat substrate is always unstable whatever its volume by unit length may be.

3.5. Stabilisation due to substrate shape

In this section, we will study the stability of our previous sessile drop, this time deposited upon a non-flat superhydrophobic substrate, more specifically, a substrate that has a wedge-shaped geometry. We will start with the general case and then focus on two particular geometries used in our experimental set-ups, as a comparison with theoretical results. This study will greatly depart from the studies regarding wedge-shaped substrates that were cited in the introduction (Langbein 1990; Roy & Schwartz 1999; Yang & Homsy 2007; Speth & Lauga 2009) because we account for gravity effects that will play a crucial role on stabilising sessile drops, as we will see.

The substrate that we consider is a wedge with angles to the horizontal equal to α and β . Without any loss of generality, we will assume that $0 < \alpha \leq \beta < \pi/2$.

When $\alpha = \beta$, the substrate is symmetric. The shape of the liquid domain will consist in a sessile liquid cap (Γ_0 will denote its boundary) connected to tangent straight lines of angle α and β with the horizontal, i.e. that of a (partial) sessile cap placed upon a triangular liquid cylinder, as depicted in figure 5. The sessile cap profile Γ_0 corresponds to a partial pendulum orbit starting at $\phi = \beta$, ending at $\phi = 2\pi - \alpha$ in the phase space. Such a cross-section shape can be characterised by the eight following characteristic points M , with the corresponding coordinates (η, ζ) given by (2.15). We first choose the reference point M_0 as the origin (0, 0) and the other points are

$$M_{2\pi}, \quad \eta_1 = \eta(2\pi) = -\Lambda_c, \quad \zeta_1 = 0, \quad (3.35)$$

$$M_\beta, \quad \eta_\beta = \eta(\beta), \quad \zeta_\beta = \zeta(\beta), \quad (3.36)$$

$$M_{\pi/2}, \quad \eta_{\text{tip}}^+ = \eta\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \zeta_{\text{tip}}^+ = \zeta\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad (3.37)$$

$$M_\pi, \quad \eta_{\text{top}} = \eta(\pi), \quad \zeta_{\text{top}} = \zeta(\pi), \quad (3.38)$$

$$M_{3\pi/2}, \quad \eta_{\text{tip}}^- = \eta\left(\frac{3\pi}{2}\right), \quad \zeta_{\text{tip}}^- = \zeta\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \zeta_{\text{tip}}^+, \quad (3.39)$$

$$M_\alpha, \quad \eta_\alpha = \eta(2\pi - \alpha), \quad \zeta_\alpha = \zeta(2\pi - \alpha). \quad (3.40)$$

The last point M_{bott} is located at the bottom of the wedge and has the following coordinates:

$$\eta_{\text{bott}} = \eta_\alpha + \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} [(\eta_\beta - \eta_\alpha) \sin \beta - (\zeta_\beta - \zeta_\alpha) \cos \beta], \quad (3.41)$$

$$\zeta_{\text{bott}} = \zeta_\alpha - \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} [(\eta_\beta - \eta_\alpha) \sin \beta - (\zeta_\beta - \zeta_\alpha) \cos \beta] \equiv -H_{\text{bott}}(\alpha, \beta, m). \quad (3.42)$$

Note that the points M_0 and $M_{2\pi}$ are located inside the cross-section, they do not belong to the boundary of the cross-section and serve as known references.

Using the Green-Riemann formula, we can exactly compute the cross-sectional area of the cylinder by an integration along Γ , the closed curve $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_\alpha \cup \Gamma_\beta$ with positive orientation, that is, using $S_{\text{tot}} = -\oint_\Gamma \zeta \, d\eta$,

$$S_{\text{tot}} = -\int_\beta^{2\pi-\alpha} \zeta(\varphi) \frac{d\eta}{d\varphi}(\varphi) \, d\varphi - \int_{\Gamma_\alpha} \zeta^{(\alpha)} \, d\eta^{(\alpha)} - \int_{\Gamma_\beta} \zeta^{(\beta)} \, d\eta^{(\beta)}, \quad (3.43)$$

with $(\eta^{(\alpha)}, \zeta^{(\alpha)})$ and $(\eta^{(\beta)}, \zeta^{(\beta)})$ straightforward parameterisations of the line segments Γ_α and Γ_β , respectively, connecting M_α to M_{bott} and M_{bott} to M_β (see figure 5). This yields the expression for the total cross-sectional area $S_{\text{tot}}(m, \alpha, \beta)$,

$$\begin{aligned} S_{\text{tot}}(m, \alpha, \beta) = & -\frac{1}{m} \left\{ 2(m-2) \left[F\left(\pi - \frac{\alpha}{2} \middle| m\right) - F\left(\frac{\beta}{2} \middle| m\right) \right] \right. \\ & + 4 \left[E\left(\pi - \frac{\alpha}{2} \middle| m\right) - E\left(\frac{\beta}{2} \middle| m\right) \right] \Big\} \\ & - \frac{1}{2} [(\eta_{\text{bott}} - \eta_\alpha)(\zeta_\alpha + \zeta_{\text{bott}}) + (\eta_\beta - \eta_{\text{bott}})(\zeta_{\text{bott}} + \zeta_\beta)], \end{aligned} \quad (3.44)$$

with expressions of η_α , η_β , η_{bott} , ζ_α , ζ_β , ζ_{bott} given by (2.14) and (3.35)–(3.42), which yield an explicit expression for the cross-sectional area, for given parameter m and angles α and β . Note that the dependence of S_{tot} on m is monotonic, so that the

relationship between both quantities is unequivocal. In the flat substrate case, for a given cross-sectional area value S , the interface has translational invariance in the y -direction if the starting point $M(s=0)$ is not specified. In contrast, in the wedge case, the relative position of the interface to M_{bot} is unequivocal, once the cross-sectional area S_{tot} is set.

In the following, we will focus on the symmetrical case, namely $\alpha = \beta$. We will again study the dispersion relation of our system in the framework of the Saint-Venant equations (see (3.16), (3.17) and below), that is to say, in the non-dispersive limit. We will only retain the partial derivatives of order zero in x , i.e. only the quadratic terms in k , in the dispersion relation (3.25). Possible instabilities will appear at small wavenumber.

The presence of the symmetrical substrate adds a supplementary term to the expression of the hydrostatic pressure given by (3.15); due to the presence of the wedge underneath the liquid cap, the position of the interface now reads, on top of the drop

$$\zeta_{\text{top}}(x, t) = \Delta Z_{\text{max}}(x, t) + H_{\text{bot}}(x, t), \quad (3.45)$$

so that we can now write

$$\frac{1}{\rho} \partial_x \bar{p} = g \partial_x [\Delta Z_{\text{max}}(x, t) + H_{\text{bot}}(x, t)] + \frac{\sigma}{\rho} \partial_x [\kappa_{\text{top}}(x, t)]. \quad (3.46)$$

Equation (3.44) allows us to compute the derivative of the cross-sectional area with respect to the parameter m , so that the effective speed of propagation of waves along a sessile cylindrical drop above a wedge can be explicitly computed, using

$$c_{\text{eff}}^2(m, \alpha, \beta) = g \ell_c \left[\frac{S_{\text{tot}}(\alpha, \beta, m)}{\partial S_{\text{tot}}(\alpha, \beta, m)} \right] \left[\frac{1}{\ell_c} \frac{\partial H_{\text{bot}}}{\partial m} - m^{-3/2} \right], \quad (3.47)$$

for a parameter m corresponding to that of the drop at rest, knowing that $\beta = \alpha$. The full explicit expression of $c_{\text{eff}}^2(m, \alpha, \beta)$ is overly complicated to be written down. However, one important remark is that the negative factor $-m^{-3/2}$ yielding the Plateau-Rayleigh instability in the case of a flat substrate can be compensated by the additional positive term $\ell_c^{-1} \times [\partial H_{\text{bot}} / \partial m]$ stemming from the presence of the non-flat substrate underneath the sessile drop, provided it is sufficiently large.

At given angle α , the quantity $(1/\ell_c)(\partial H_{\text{bot}} / \partial m) - m^{-3/2}$ is negative for small values of m . It becomes positive when m is larger than a critical value $m_c = 1 - \mu_c$. This latter quantity can be numerically computed and its dependence on the angle α is plotted in figure 6. For $\alpha = 0$, i.e. for a flat substrate, the cylinder is unstable whatever its cross-section may be (see § 3.4.2).

In the following, in order to illustrate all these calculations in a meaningful way, we perform some approximate computations and discuss their validity. They will come in handy for comparisons with the experimental results (see § 4).

As a reminder, we are dealing with the symmetrical case ($\alpha = \beta$) and we will make the following hypotheses: the angle α is supposedly small and the parameter $m = 1 - \mu$ is close to 1, i.e. large flattened cross-sections are considered. We can approximate the geometrical properties of our system by considering a cap (given by the shape of a sessile drop on a flat surface) placed on top of a symmetrical triangle (see figure 7a).

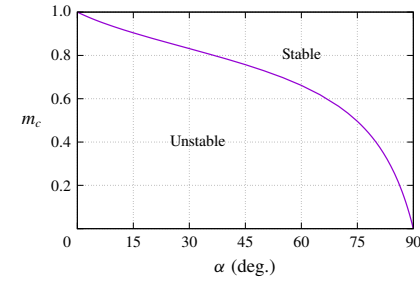


FIGURE 6. Dependence of the critical parameter m_c on the angle α of a symmetrical V-shaped substrate ($\alpha = \beta$). For positive α , large drops (m close to 1) are stable as long as $m > m_c(\alpha)$.

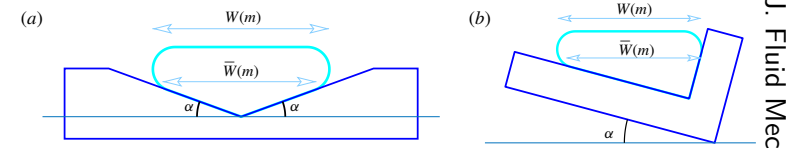


FIGURE 7. Geometry of the two different substrate shapes used in our experiments: (a) V-shaped symmetrical channel. (b) L-shaped asymmetrical channel. For a given parameter m , $W(m)$ is the width of the sessile cap, whereas $\bar{W}(m)$ denotes the width of the triangular cross-section, which can somehow be approximated by the wetted length $\Lambda_c(m)$ (see text).

We have the following approximate quantities, using the asymptotic formulas of § 2.2,

- (i) for the sessile cap:
 - (a) width $W(m) \simeq \ell_c Y_{\text{max}} \simeq \ell_c [-\log(1 - m) + \mathcal{C}_1]$;
 - (b) cross-sectional area $S_{\text{cap}}(m) \simeq W(m) \times \Delta Z_{\text{max}}(m) \simeq 2\ell_c^2 [-\log(1 - m) + \mathcal{C}_1]$;
- (ii) for the triangle:
 - (a) width $\bar{W}(m) \simeq \Lambda_c(m) \simeq \ell_c [-\log(1 - m) + \mathcal{C}_2]$;
 - (b) height $H_{\text{bot}}(m) \simeq \frac{1}{2} \bar{W}(m) \tan \alpha$;
 - (c) cross-sectional area $S_0 = \frac{1}{4} \bar{W}(m)^2 \tan \alpha$.

The total cross-sectional area is

$$S_{\text{tot}}(m) \simeq S_{\text{cap}}(m) + S_0(m) \simeq 2\ell_c^2 W(m) + \frac{1}{4} \bar{W}(m)^2 \tan \alpha, \quad (3.48)$$

$$\simeq \ell_c^2 \left[2(-\log(1 - m) + \mathcal{C}_1) + \frac{\tan \alpha}{4} [-\log(1 - m) + \mathcal{C}_2]^2 \right],$$

so that

$$\frac{\partial S_{\text{tot}}}{\partial m}(m) = \ell_c^2 \frac{\tan \alpha [\mathcal{C}_2 - \log(1 - m)] + 4}{2(1 - m)}. \quad (3.49)$$

α (deg.)	3°	5°	10°	15°	20°	30°	45°
μ_c (exact)	0.0237	0.0376	0.0685	0.0958	0.121	0.168	0.243
$\tilde{\mu}_c$ (approximation)	0.0252	0.0412	0.0788	0.114	0.149	0.218	1/3
$\Delta Y_{\max}(\mu_c)/\ell_c$	3.65	3.21	2.66	2.36	2.15	1.87	1.56
$S(\mu_c)/\ell_c^2$	5.45	4.70	3.87	3.51	3.33	3.20	3.18

TABLE 1. Values of critical μ_c together with corresponding non-dimensional values of horizontal extension $\Delta Y_{\max}(\mu_c)/\ell_c$ and of cross-sectional area $S(\mu_c)/\ell_c^2$, for a symmetrical V-shaped substrate. The values in the framework of the approximate computations (namely $\tilde{\mu}_c$, see § 3.5) are added for comparison.

The effective wave celerity then reads, using (3.47),

$$c_{\text{eff}}^2(m) = g\ell_c \left[\frac{S_{\text{tot}}(m)}{\partial S_{\text{tot}}(m)} \right] \left\{ +\frac{\tan \alpha}{2\mu} - 1 - \frac{3\mu}{2} + O(\mu^2) \right\}, \quad (3.50)$$

with

$$\left[\frac{S_{\text{tot}}(m)}{\partial S_{\text{tot}}(m)} \right] = 2(1-m) \frac{2[\mathcal{C}_1 - \log(1-m)] + \frac{\tan \alpha}{4} [\mathcal{C}_2 - \log(1-m)]^2}{\tan \alpha [\mathcal{C}_2 - \log(1-m)] + 4}. \quad (3.51)$$

If we have $\alpha = 0$ (flat substrate), we recover $c_{\text{eff}}^2 < 0$, corresponding to an unstable drop, whatever its size may be. For small values of μ and $\tan \alpha \neq 0$, the drop is stable, provided $\tan \alpha / 2\mu - 1 - \frac{3}{2}\mu > 0$, that is

$$\mu < \tilde{\mu}_c = \frac{\sqrt{1+3\tan \alpha} - 1}{3}. \quad (3.52)$$

As a comparison, in the experiments we present in the next section, we have typical values of width equal to $7.5\ell_c$, that corresponds to a parameter $\mu_{\text{exp}} \simeq 5 \times 10^{-4}$, which satisfies the stability criterion.

Note that up to $\alpha \simeq 10^\circ$, our approximations in terms of $\log \mu$ are valid for calculating the critical threshold. For large angles α , this approximate threshold value is arguable. One has to resort to the exact analytical computations presented previously. However, comparisons between these approximations and actual exact results remain surprisingly good, the relative errors being no greater than 30% for α up to 45° (see table 1).

We can compute an ultimate term, that of (3.51), in the limit $\mu \rightarrow 0^+$, that reads

$$\left[\frac{S_{\text{tot}}}{\partial S_{\text{tot}}} \right]_{\mu \rightarrow 0^+} \sim 2\mu \frac{\frac{\tan \alpha}{4} \log^2 \mu - 2 \log \mu}{-\tan(\alpha) \log \mu + 4} \underset{\mu \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{1}{2} \mu \log \mu. \quad (3.53)$$

We recover the expression of the wave celerity c_{eff} ,

$$c_{\text{eff}}^2 = -g\ell_c \frac{\tan \alpha}{4} \log \mu = g \frac{H_{\text{pott}}}{2}, \quad (3.54)$$

in the large cross-section limit as explained in § 3.2 (see (3.10)). It is the gravity wave speed directly given by the Saint-Venant equations, in the case of a symmetrical channel of angle α , in the absence of capillarity. The presence of a sessile cap is of no importance in this limit and it thus can be disregarded, as one would have expected it to be.

4. Experimental comparisons

4.1. Experimental set-up

In this section, we present an experimental characterisation of the varicose waves propagating along cylindrical drops, when deposited upon superhydrophobic substrates. The critical volume at which breakup of these drops occurs is studied as well. In order to distinguish the theoretical liquid cylinder shape from its experimental realisation, we use the term ‘drop’ in this section to denote a slender volume of liquid deposited upon a non-flat substrate with translational invariance.

For this study, we use two different substrates. The first one is a symmetrical V-shaped Dural channel with angle $\alpha = 10^\circ$. The second one is an L-shaped Dural channel, placed upon a levelling table, so that it can be tilted by an angle α , set from 0° up to 45° (see the schematic of substrate cross-section in figure 7). The surface of these substrates is treated using Rust-Oleum NeverWet, so that the wetting conditions (contact angle around 160°) can be considered as superhydrophobic (see Gupta, Vaikuntanathan & Siakumar 2016). Both channels are 50 cm long. On either of them, a controlled volume of distilled water is deposited and stretched from one end to the other end of the channel. If the deposited volume is sufficiently large, we can pin such long drops at both ends of the channel without breakup.

In order to study the propagation of varicose waves along these drops, we force one end of the drop using a shaker at swept frequencies (1–25 Hz) (see figure 8a). Two photographs are shown as an illustration in figure 8(b,c). The plate connected to the shaker can be seen at the right-hand side of the photographs. The photographs correspond to excited drops of volume equal to 40 ml, deposited on the symmetric V-shaped substrate and the non-symmetrical L-shaped substrate, respectively, with a tilt angle $\alpha = 10^\circ$. In the symmetrical case, constriction modes are clearly visible near the shaker, whereas in the non-symmetrical case, only the deformations of one side of the drop can be captured, for deformations of the border of the drop at the steepest side of the substrate are too small to be visible. We then naturally focus on the interface located on the smallest slope of the substrate. The deformation of the border of the drop and consequently the position $\eta(x, t)$ of the border of the interface is recorded from above using a digital camera at 50 f.p.s. (AVT Manta G223). The interface position is numerically reconstructed using an algorithm of contour detection based on the change in the colour gradient, with a 0.03 mm accuracy: we record images of a region of interest of a border of the drop. Suppose the images have resolution $N_x \times N_y$, at all discrete x -coordinates $(x_i)_{1 \leq i \leq N_x}$, we locate the minimum of intensity in the y -direction (for $1 \leq j \leq N_y$), using polynomial interpolations of the discrete values in this direction. The procedure is performed at each discrete time t_k ($1 \leq k \leq N_t$), so that we obtain a discrete signal $\eta(x_i, t_k)$. Last, we compute the position at rest $\eta_0(x_i)$ of the interface, using the same procedure.

4.2. Experimental results

From the camera recordings, we compute the spatio-temporal spectrum $S(k, f)$ of the disturbed interface by performing fast Fourier transforms on the difference

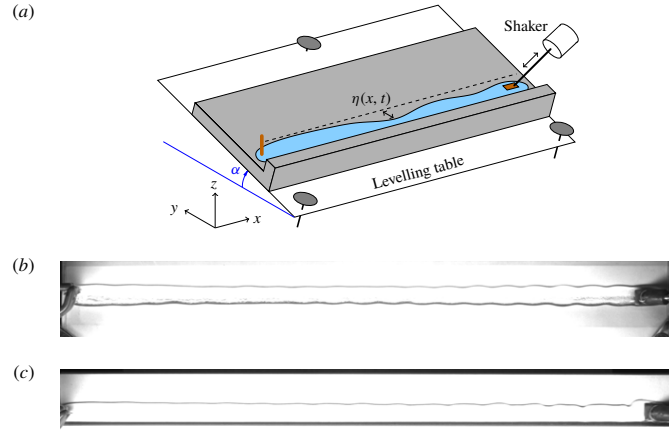


FIGURE 8. (a) Schematic of the experimental set-up. Top views of experiments of shaken drops of volume 40 ml (b) on a symmetrical V-shaped substrate (of angle $\alpha = 10^\circ$) and (c) on a non-symmetrical L-shaped substrate tilted by an angle $\alpha = 10^\circ$. They are lit so that the border of the drop is clearly visible for numerical treatments. Varicose modes, i.e. constriction modes, are clearly visible near the shaker. They are symmetrical in the V-shaped case. In contrast, due to the asymmetry of the L-shaped substrate, only the constrictions of the interface border located at the gentle slope side (upper side of the image) are clearly visible. They propagate and vanish far from the shaker because of dissipation and dispersion.

$\eta(x_i, t_k) - \eta_0(x_i)$. The spatial resolution is 0.252 mm pixels, and we use a typical image resolution N_x equal to 1690 pixels. As for the temporal sampling, the typical recording duration is 2 minutes, which yields a typical number of time samples $N_t \sim 6000$. Several branches can be identified from the spatio-temporal spectra (see figure 9). We focus here on the lowest branch, which goes to zero when $k \rightarrow 0$ (namely the varicose branch). Other branches (characterised by cutoff frequencies at $k=0$) are related to the other modes of wave propagation, the very first upper branch being related to sloshing motion (namely sinuous waves).

From the value of deposited volume, V_0 , we can deduce the value at rest of the cross-sectional area, $S_{tot} = V_0/L$, with L , the length of the cylinder. Using the expression (3.44) of $S_{tot}(m)$, we can estimate the corresponding parameter m , hence the width $W(m)$. From these data, we can evaluate c_{eff} and plot $f(k) = (1/2\pi)c_{eff}k$ (the non-dispersive long-wavelength regime given by the Saint-Venant formalism) and compare them to the experimental measurements. The small-wavelength regime (dispersive regime) together with the sinuous modes will be discussed in a future article.

4.2.1. Case of the V-shaped symmetrical substrate

We now start with the spatio-temporal spectra of an elongated drop, placed upon a superhydrophobic symmetric V-shaped substrate, for four different volumes (23 ml,

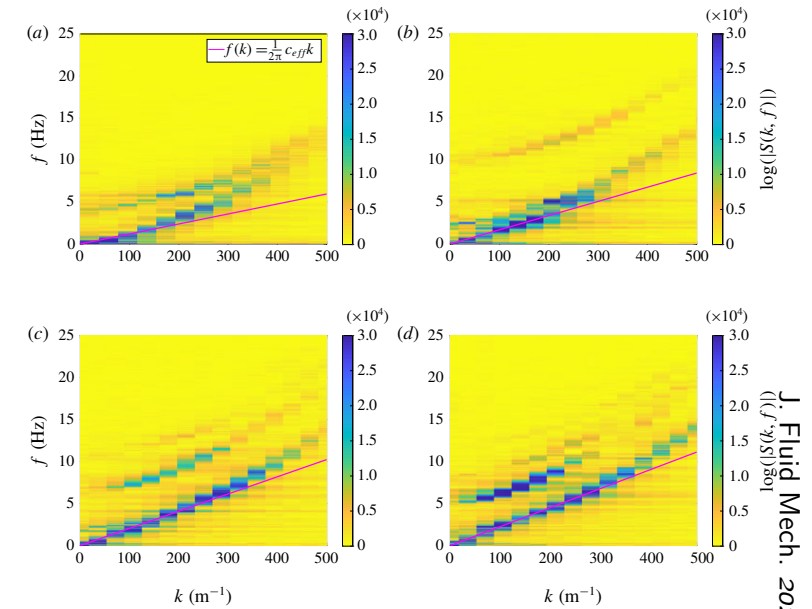


FIGURE 9. Spatio-temporal spectra of elongated drops, on a superhydrophobic symmetric V-shaped substrate with an angle $\alpha = 10^\circ$, for four different volumes V . We have superimposed the linear relation $f(k) = (1/2\pi)c_{eff}k$ with c_{eff} calculated using (3.50) and (3.51). (a) $V = 23$ ml, $c_{eff} = 7.47$ cm s $^{-1}$; (b) $V = 40$ ml, $c_{eff} = 10.60$ cm s $^{-1}$; (c) $V = 60$ ml, $c_{eff} = 12.86$ cm s $^{-1}$; (d) $V = 80$ ml, $c_{eff} = 13.98$ cm s $^{-1}$. The smaller the volume, the smaller the slope at origin, namely the effective celerity of long wavelength varicose modes. Below a critical volume $V_c \simeq 15$ ml, the drop becomes unstable. The agreements are excellent. The secondary branches correspond to other modes of propagation (in particular, sloshing modes).

40 ml, 60 ml, 80 ml) at fixed angle $\alpha = 10^\circ$. These spectra are plotted in figure 9. The smaller the volume, the smaller the slope at origin, which is the celerity of surface waves c_{eff} . We compare this experimental slope to its analytical value found using the Saint-Venant formalism, in the large drop limit (see (3.50) and (3.51)), for a parameter m deduced from the value of deposited volume of water. The agreement is excellent (even better if we use the exact computations given by (3.47)). The larger the volume, the steeper the slope, that is the larger the value of c_{eff} .

We can clearly distinguish the existence of upper branches. The very first branch corresponds to sloshing modes. Its cutoff frequency depends on the volume of the drop. The larger the volume, the smaller the cutoff frequency. This point will be discussed in a future article.

4.2.2. Case of non-symmetrical substrate: L-shaped substrate or inclined V-shaped substrate

We now turn to the asymmetrical case which corresponds to a cap placed on top of an asymmetrical right-angled triangle (see figure 7*b*). The triangle properties will satisfy the following properties: small angle α and steep angle $\beta = (\pi/2) - \alpha$, width $W(m)$ supposedly large. The properties of the sessile cap are identical to those of the symmetrical case. As for the triangle, we can approximate the length of its hypotenuse $\bar{W}(m)$, with $\Delta Y_{\max}$ minus the length of one of the tip of liquid protruding above the wetted area, which was approximated as being $\ell_c/2(\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2)$. Here, $\bar{W}(m)$ turns out to be somehow equivalent to the mean value of $\Delta Y_{\max}$ and Λ_c . We set $\mathcal{C}_3 = \frac{1}{2}(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)$, so that the triangle has the following properties:

- (i) width $\bar{W}(m) \simeq \frac{1}{2}[W(m) + \Lambda_c] = \ell_c[-\log(1-m) + \mathcal{C}_3]$;
- (ii) height $H_{\text{bot}}(m) \simeq \frac{1}{2}\bar{W}(m) \sin 2\alpha$; and
- (iii) cross-sectional area $S_0 = \frac{1}{4}\bar{W}(m)^2 \sin 2\alpha$.

Therefore, we can compute the effective propagation speed

$$c_{\text{eff}}^2(m) = g\ell_c \left[\frac{S_{\text{tot}}(m)}{\frac{\partial S_{\text{tot}}}{\partial m}(m)} \right] \left\{ + \frac{\sin 2\alpha}{2\mu} - 1 - \frac{3\mu}{2} + O(\mu^2) \right\}, \quad (4.1)$$

with

$$\left[\frac{S_{\text{tot}}(m)}{\frac{\partial S_{\text{tot}}}{\partial m}(m)} \right] = 2(1-m) \frac{2[\mathcal{C}_1 - \log(1-m)] + \frac{\sin 2\alpha}{4}[\mathcal{C}_3 - \log(1-m)]^2}{\sin 2\alpha[\mathcal{C}_3 - \log(1-m)] + 4}. \quad (4.2)$$

For a fixed volume of 40 ml, we show the spatio-temporal spectra for two different angles (10° and 30°) in figure 10. The values of the parameter m used for the following comparisons between experiments and theory are set by the value of the deposited volume of water. For $\alpha = 10^\circ$, the agreement between the experimental slope at origin and c_{eff} given by (4.1) is excellent, whereas in order to capture the correct theoretical value of c_{eff} at angle $\alpha = 30^\circ$, we resort to exact calculations given by (3.47) and we can see that the agreement is excellent as well.

Last, we have performed an experiment using our V-shaped substrate tilted by an angle 5° , that corresponds to the asymmetrical case $\alpha = 5^\circ$ and $\beta = 15^\circ$. It is displayed in figure 10(c) together with the Saint-Venant dispersion relation $f(k) = (1/2\pi)c_{\text{eff}}k$, where c_{eff} is computed using (3.47), with an excellent agreement.

4.2.3. Experimental threshold of breakup

Section 3.5 was devoted to the critical value of the parameter μ (hence m) at which instability occurs, that is when c_{eff}^2 changes its sign, from positive to negative as volume decreases (that is when the parameter μ increases). In order to experimentally confirm these predictions, we pin both ends of a large controlled volume of water, deposited upon our superhydrophobic substrates (V-shaped substrate together with L-shaped substrate that we tilt at angle α). We progressively and carefully pump controlled volumes of water out from one end of the cylinder, of length L , using a syringe with a very sharp needle in order to minimise meniscus effects. We deduce

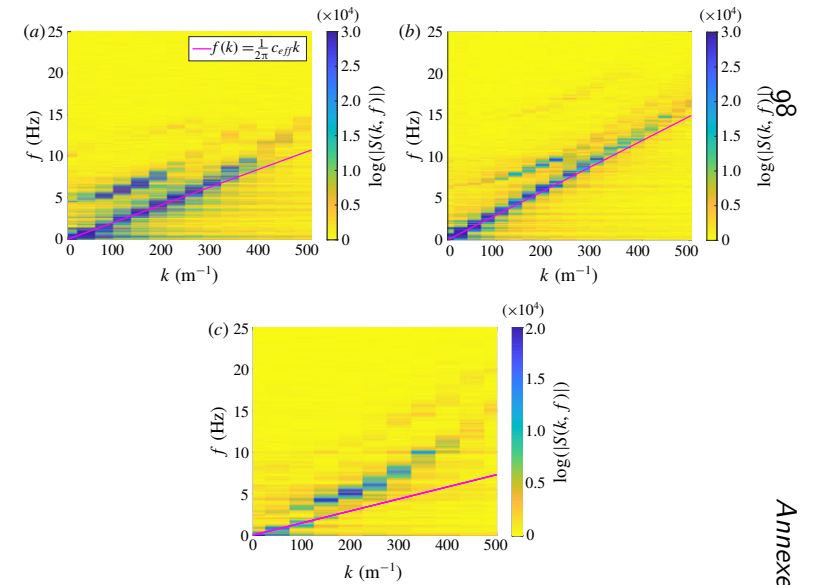


FIGURE 10. Spatio-temporal spectra of elongated drops, on a superhydrophobic asymmetrical L-shaped substrate, for a volume equal to 40 ml and two different angles α . We have superimposed the linear relation $f(k) = (1/2\pi)c_{\text{eff}}k$. (a) $\alpha = 10^\circ$, $c_{\text{eff}} = 13.5 \text{ cm s}^{-1}$; (b) $\alpha = 30^\circ$, $c_{\text{eff}} = 18.8 \text{ cm s}^{-1}$. The larger the angle, the larger the slope namely the celerity of varicose modes. And last, (c) spectrum of an elongated drop on a superhydrophobic asymmetrical tilted V-shaped substrate corresponding to the case $\alpha = 5^\circ$ and $\beta = 15^\circ$, for volume $V = 40 \text{ ml}$. We have $c_{\text{eff}} = 9.13 \text{ cm s}^{-1}$. In all the cases, the secondary branches correspond to other modes of propagation (for instance, sloshing modes).

the remaining deposited volume, down to a critical volume at which the drop breaks up. The (slow) pinch-off is located about the centre of the cylinder and retraction of both remaining halves eventually occurs, owing to surface tension (see supplementary movies, long shot and close-up, in the case of the symmetrical V-shaped substrate which are available at <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.114>). The critical volume V_c^{exp} allows us to obtain the critical cross-sectional area S_c^{exp} of the drop ($S_c^{\text{exp}} = V_c^{\text{exp}}/L$), hence the critical value μ_c^{exp} , using (3.44). We compare this experimental value to the theoretical one in table 2. The breakup of the drops systematically occurs at volumes approximately 1.3 times larger than the predicted theoretical volumes for a given substrate geometry.

At this limit regime, we have to stress that the system becomes very sensitive to any external perturbations such as the vibrations caused by the pumping procedure. Moreover, the translational invariance is broken because of the meniscus created by our pinning procedure. It induces a bulge at both tips of the drop, so that the effective

	Substrate	V-shaped	L-shaped	L-shaped	L-shaped	L-shaped
	α	10°	10°	20°	30°	45°
Theory:	μ_c	0.0685	0.118	0.184	0.223	0.243
	$\frac{1}{\ell_c^2} S_c$	3.87	3.95	3.43	3.24	3.18
Experiments:	μ_c^{exp}	0.0381	0.0710	0.101	0.131	0.150
	$\frac{1}{\ell_c^2} S_c^{exp}$	4.97	4.90	4.54	4.20	4.07

TABLE 2. Values of the critical thresholds found in our experiments, in the cases of the symmetrical V-shaped substrate ($\alpha = 10^\circ$), and the non-symmetrical L-shaped substrates. Here, we have $\ell_c = 2.5$ mm.

volume per unit length, i.e. the effective cross-sectional area of the cylindrical part of our drop, turns out to be lower than that measured in our procedure. Using a longer channel would certainly help alleviate this discrepancy.

5. Conclusion

In this article, we have computed the exact shape of the cross-section of a cylindrical (i.e. assuming translational invariance) sessile drop of liquid deposited upon a superhydrophobic substrate, taking into account the flattening effect of gravity. The substrate geometry was supposed either flat and horizontal or that of a wedge. Using an analogy with the rotation motion of a pendulum, we show how the shape is related to the value of the cross-sectional area (in capillary length unit). When the cross-sectional area is small, the cross-section is nearly a circle, whereas the large cross-section shapes more or less resemble oblong pills. In the wedge-shaped substrate case, the cross-section is equivalent to that of a liquid cap placed upon a liquid wedge.

We have used the inviscid Saint-Venant equations, in order to study the stability of such sessile drops, in terms of the square of an effective wave propagation speed, c_{eff}^2 , of the varicose modes of the drop (namely constriction modes). In this framework, we have shown that in the case of a flat substrate, such drops are linearly unstable as the values of c_{eff}^2 are always negative, whatever the cross-sectional area may be. This regime corresponds to the well known Plateau-Rayleigh instability in the case of circular cross-sections. In contrast, placed upon a wedge-shaped substrate, such drops can become stable, corresponding to a positive sign of c_{eff}^2 , provided the cross-sectional area of the drop is sufficiently large.

These theoretical predictions have been experimentally tested with an excellent agreement, using specifically designed superhydrophobic substrates: a symmetrical V-shaped substrate and a non-symmetrical L-shaped substrate. Both can be tilted and using the L-shaped substrate allows us to tune the geometry and reach a wide range of non-symmetrical wedge angles. By measuring the spatio-temporal spectra of the deformation of the border of the drop when excited by a shaker, we have evidenced multiple branches corresponding to the dispersion relations of the various wave modes ($\omega = f(k)$ with ω , the angular frequency and k the wavenumber). Our theoretical Saint-Venant calculations correspond to the non-dispersive regime of the lowest branch that goes to zero in the limit $k \rightarrow 0$. The slope at origin is equal to the expected value of c_{eff} .

Note that these experimental results are equivalent to the spectra found in previous work related to the wave propagation along levitating cylinders (Perrard *et al.* 2015). The Saint-Venant formalism is only valid in the $k \rightarrow 0$ -limit of the lowest branch. The dispersive effects of the varicose modes cannot be captured by this formalism. It is of course unfit to capture the upper branches. The problem of the full dispersive regime of the varicose modes together with the characterisation of the sinuous modes (corresponding to sloshing motion) is beyond the scope of this article. A future article will be devoted to this problem.

Acknowledgements

C.-T.P. thanks C. Mezui for preliminary experiments, M. Receveur and A. Grados for technical support. The authors gratefully thank laboratoire Matière et Systèmes Complexes (MSC) and Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur (LIMSI) for their valuable material and financial support. We thank the anonymous referee who indicated to us the references from Lamb (1928), Ku *et al.* (1968) and McCuan (2017), which we were unaware of. This work has benefited from no other funding whatsoever.

Declaration of interests

The authors report no conflict of interest.

Supplementary movies

Supplementary movies are available at <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.114>.

REFERENCES

- AMINI, G. & DOLATABADI, A. 2011 Capillary instability of elliptic liquid jets. *Phys. Fluids* **23**, 084109.
- AMINI, G., LV, L., DOLATABADI, A. & IHME, M. 2014 Instability of elliptic liquid jets: temporal linear stability theory and experimental analysis. *Phys. Fluids* **26**, 114105.
- ARKHIPENKO, V. I., BARKOV, Y. D., BASHTOVOI, V. G. & KRAKOV, M. S. 1980 Investigation into the stability of a stationary cylindrical column of magnetizable liquid. *Fluid Dyn.* **15**, 477–481.
- BIRNIR, B., MERTENS, K., PUTKARADZE, V. & VOROBIEFF, P. 2008 Morphology of a stream flowing down an inclined plane. Part 2. Meandering. *J. Fluid Mech.* **603**, 401–411.
- BOSTWICK, J. B. & STEEN, P. H. 2010 Stability of constrained cylindrical interfaces and the torus lift of Plateau-Rayleigh. *J. Fluid Mech.* **647**, 201–219.
- BOSTWICK, J. B. & STEEN, P. H. 2018 Static rivulet instabilities: varicose and sinuous modes. *J. Fluid Mech.* **837**, 819–838.
- COUVREUR, S. 2013 Instabilités de filets liquides sur plan incliné. PhD thesis, Université Paris Diderot.
- DAERR, A., EGGERS, J., LIMAT, L. & VALADE, N. 2011 General mechanism for the meandering instability of rivulets of Newtonian fluids. *Phys. Rev. Lett.* **106**, 184501.
- DAVIS, S. H. 1980 Moving contact lines and rivulet instabilities. Part 1. The static rivulet. *J. Fluid Mech.* **98**, 225–242.
- DECOENE, A., BONAVENTURA, L., MIGLIO, E. & SALERI, F. 2009 Asymptotic derivation of the section-averaged shallow water equations. *Math. Models Meth. Appl. Sci.* **19**, 387–417.
- DIEZ, J. A., GONZÁLEZ, A. G. & KONDIC, L. 2009 On the breakup of fluid rivulets. *Phys. Fluids* **21** (8), 082105.

Stabilising effect of gravity on the Plateau-Rayleigh instability **891** A8-27

- DUCLAUX, V., CLANET, C. & QUÉRÉ, D. 2006 The effects of gravity on the capillary instability in tubes. *J. Fluid Mech.* **556**, 217–226.
- GOREN, S. L. 1962 The instability of an annular thread of fluid. *J. Fluid Mech.* **12**, 309–319.
- GUPTA, R., VAIKUNTANATHAN, V. & SIAKUMAR, S. 2016 Superhydrophobic qualities of an aluminum surface coated with hydrophobic solution NeverWet. *Colloids Surf. A* **500**, 45–53.
- GUTMARK, E. J. & GRINSTEIN, F. F. 1999 Flow control with noncircular jets. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **31**, 239–272.
- KU, T. C., RAMSEY, J. H. & CLINTON, W. C. 1968 Calculation of liquid droplet profiles from closed-form solution of Young–Laplace equation. *IBM J. Res. Dev.* **12**, 441–447.
- LAMB, H. 1928 *Statics, including Hydrostatics and the Elements of the Theory of Elasticity*, 3rd edn. Cambridge University Press.
- LANDAU, L. D. & LIFSHITZ, E. M. 1987 *Fluid Mechanics*, 2nd edn. Pergamon.
- LANGBEIN, D. 1990 The shape and stability of liquid menisci at solid edges. *J. Fluid Mech.* **213**, 251–265.
- MCCUAN, J. 2017 The stability of cylindrical pendant drop. In *Memoirs of the American Mathematical Society*, **250** (1189), doi:[10.1090/memo/1189](https://doi.org/10.1090/memo/1189).
- MERTENS, K., PUTKARADZE, V. & VOROBIEFF, P. 2005 Morphology of a stream flowing down an inclined plane. Part 1. Braiding. *J. Fluid Mech.* **531**, 49–58.
- MICHAEL, D. H. & WILLIAMS, P. G. 1977 The equilibrium and stability of sessile drops. *Proc. R. Soc. Lond. A* **354**, 127–136.
- MORA, S., PHOU, T., FROMENTAL, J.-M., PISMEN, L. M. & POMEAU, Y. 2010 Capillary driven instability of a soft solid. *Phys. Rev. Lett.* **105**, 214301.
- MORRIS, P. J. 1988 Instability of elliptic jets. *AIAA J.* **26**, 172–178.
- MYERS, T. G., LIANG, H. X. & WETTON, B. 2004 The stability and flow of a rivulet driven by interfacial shear and gravity. *Int. J. Nonlinear Mech.* **39**, 1239–1249.
- NAKAGAWA, T. 1992 Rivulet meanders on a smooth hydrophobic surface. *Int. J. Multiphase Flow* **18**, 455–463.
- NAKAGAWA, T. & SCOTT, J. C. 1984 Stream meanders on a smooth hydrophobic surface. *J. Fluid Mech.* **149**, 88–99.
- PERRARD, S., DEIKE, L., DUCHÊNE, C. & PHAM, C.-T. 2015 Capillary solitons on a levitated medium. *Phys. Rev. E* **92**, 011002(R).
- PLATEAU, J. 1849 Recherches expérimentales et théoriques sur les figures d'une masse liquide sans pesanteur. *Mémoires de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux arts de Belgique* **23**, 1–50.
- PLATEAU, J. 1873 *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*. Gauthier-Villars.
- QUINN, W. R. 1992 Streamwise evolution of a square jet cross section. *AIAA J.* **30**, 2852–2857.
- RAYLEIGH, LORD 1878 On the instability of jets. *Proc. Lond. Math. Soc.* **10**, 4–13.
- RAYLEIGH, LORD 1879 On the capillary phenomena of jets. *Proc. R. Soc. Lond.* **29**, 71–97.
- RAYLEIGH, LORD 1892a On the instability of a cylinder of viscous liquid under capillary force. *Philos. Mag.* **34**, 145–154.
- RAYLEIGH, LORD 1892b On the instability of cylindrical fluid surfaces. *Philos. Mag.* **34**, 177–180.
- ROMAN, B., GAY, C. & CLANET, C. 2003 Pendulum, drops and rods: an analogy. Available at: https://www.researchgate.net/publication/237480399_Pendulum_Drops_and_Rods_a_physical_analogy.
- ROY, V. & SCHWARTZ, L. W. 1999 On the stability of liquid ridges. *J. Fluid Mech.* **291**, 293–318.
- SAINT-VENANT, A. J. C. B. DE 1871 Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction de marées dans leurs lits. *C. R. Acad. Sci.* **73**, 147–154 and 237–240.
- SAVART, F. 1833 Mémoire sur la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en mince paroi. *Ann. Chim. Phys.* **53**, 337–386.
- SCHMUKI, P. & LASO, M. 1990 On the stability of rivulet flow. *J. Fluid Mech.* **215**, 125–143.
- SEKIMOTO, K., OGUMA, R. & KAWASAKI, K. 1987 Morphological stability analysis of partial wetting. *Ann. Phys.* **176**, 359–392.

891 A8-28

C.-T. Pham, S. Perrard and G. Le Doudic

- SPETH, R. L. & LAUGA, E. 2009 Capillary instability on a hydrophilic stripe. *New J. Phys.* **11**, 075024.
- STONE, H. A. & LEAL, L. G. 1989a The influence of initial deformation on drop breakup in subcritical time-dependent flows at low Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **206**, 223–263.
- STONE, H. A. & LEAL, L. G. 1989b Relaxation and breakup of an initially extended drop in an otherwise quiescent fluid. *J. Fluid Mech.* **198**, 399–427.
- TAM, C. K. W. & THIES, A. T. 1992 Instability of rectangular jets. *J. Fluid Mech.* **248**, 425–448.
- TOMOTIKA, S. 1935 On the instability of a cylindrical thread of a viscous liquid surrounded by another viscous fluid. *Proc. R. Soc. Lond. A* **150**, 322–337.
- YANG, L. & HOMSY, G. M. 2007 Capillary instabilities of liquid films inside a wedge. *Phys. Fluids* **19**, 044101.

Surface waves along liquid cylinders. Part 2. Varicose, sinuous, sloshing and nonlinear waves

Gabriel Le Doudic¹, Stéphane Perrard² and Chi-Tuong Pham^{3†}

¹Laboratoire Matière et Systèmes Complexes, Université de Paris, CNRS, 10, rue Alice Domon et Léonie Duquet, 75013 Paris, France

²Laboratoire de Physique de l'École normale supérieure, École normale supérieure, Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, Université de Paris, 24 rue Lhomond, 75005 Paris, France

³Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire Interdisciplinaire des Sciences du Numérique, Bâtiment 507, rue John von Neumann, 91400, Orsay, France

(Received xx; revised xx; accepted xx)

Version v7.0 compiled on May 19, 2021 at 10:13

Gravito-capillary waves propagating along extended liquid cylinders in the inviscid limit are studied in the context of experiments of sessile cylinders deposited upon superhydrophobic substrates, with tunable geometries. In Part 1 of this work (Pham *et al.* 2020), we characterised the non-dispersive regime of the varicose waves. In this second part, we characterise the varicose waves in the dispersive regime, as well as the sinuous and the sloshing modes. We numerically study the shape function of the system (the counterpart of the standard tanh function of the dispersion relation of gravity-capillary wave in a rectangular channel) and the cut-off frequencies of the sloshing modes, and show how they depend on the geometry of the substrate. A reduced-gravity effect is evidenced and the transition between a capillary- and a gravity-dominated regime is expressed in terms of effective Bond number and effective surface tension. Semi-quantitative agreements are found between the theoretical computations and the experiments. As a consequence of these results, resorting to the inviscid section-averaged Saint-Venant equations, we propose a Korteweg-de Vries (KdV) equation with adapted coefficients that governs the propagation of localised nonlinear waves. We relate these results to the propagation of depression solitons observed in our experimental set-up and along Leidenfrost cylinders levitating above a hot substrate (Perrard *et al.* 2015). We extend our derivation of the KdV equation to solitary-like waves propagating along Plateau borders in soap films, evidenced by Argentina *et al.* (2015).

Key words: To be chosen during the online submission

1. Introduction

Considering a mass of liquid with a translational invariance in one direction (which we will henceforth call “liquid cylinders”, regardless of the shape of its transverse section), such a cylinder can have a totally free surface in the case of a jet; it can be bounded by

† Email address for correspondence: pham@limsi.fr

the presence of a flat substrate in the case of a rivulet; it can be laterally bounded in the case of open-channel flows.

Since the seminal works of Savart (1833), Plateau (1849) and Rayleigh (1878), jets are known to be unstable because of the capillary forces that lead to the Plateau-Rayleigh instability, whereas the stability of a rivulet on a flat surface depends on the wetting condition at the substrate (Davis 1980; Bostwick & Steen 2018; Sekimoto *et al.* 1987). In both cases, the two principal modes of propagating deformations are identified as varicose modes (that is, modulations of the cross-sectional area along its axis) and as sinuous modes (that is, displacements of the center of mass of the section, in the transverse direction). Recently, Bostwick & Steen (2018) performed a comprehensive numerical study of the stability of inviscid sinuous and varicose modes along sessile circular cylinders, for pinned contact lines or free contact lines with constant contact angle. In particular, they identified the dominant modes for various contact line configurations.

In contrast, liquid cylinders placed upon a horizontal trough are supposedly stable, at least at centimetre scales, because gravity acts as a stabilising force, and waves at the surface of an open channel can propagate along the latter. This is actually one of the oldest problems studied in hydrodynamics (see Craik (2004, 2005) for a historical review) and in any textbook is treated the classical result of the gravity-capillary waves propagating along a rectangular channel (see Lamb (1932), for instance). Regarding the varicose waves, the capillary- and the gravity-dominated regimes can be distinguished depending on the channel depth. Other modes of wave propagation can be evidenced. They correspond to sloshing modes (Lamb (1932); Groves (1994)), observed as standing waves in the case of bounded tanks, even at very large scales and known in this context as “seiches” (Forel 1904).

At millimetre scales, the Plateau-Rayleigh instability comes into play along a liquid cylinder in a small trough. In particular, it depends on the contact line configuration at the substrate. In the context of a wedge-shaped groove, the problem the stability of a circular cylinder was first treated by Langbein (1990) and extended by Roy & Schwartz (1999), considering various substrate geometries and different wetting conditions. The stability of a rivulet on a wedge was studied by Yang & Homsy (2007) in the flowing case and by Speth & Lauga (2009) in the static case. In all aforementioned cases, gravity effect were not taken into account and circular cylindrical base states were considered.

In 1844, Russell reported for the first time the propagation of a hump of water, propagating at constant speed and constant shape (Russell 1844). In 1895, Korteweg and de Vries derived the now so-called Korteweg-de Vries (KdV) equation which governs the properties of this soliton (speed, amplitude, width) propagating along a rectangular channel. They predicted the existence of negative amplitude solitons whenever the depth of water H is below $\sqrt{3}\ell_c$, where $\ell_c = \sqrt{\sigma/(\rho g)}$ denotes the capillary length for a fluid of surface tension σ and density ρ , that is, whenever the Bond number — defined as $\text{Bo} = \sigma/(\rho g H^2)$ in this article — is larger than 1/3 the critical value of the Bond number in the case of a rectangular channel (Korteweg & de Vries 1895). The first experimental observation of such negative solitons was made by Falcon *et al.* (2002), at the surface of a thin layer of mercury.

In the context of Leidenfrost liquid cylinders levitating above their own vapour (see figure 1 (a)), Perrard *et al.* (2015) experimentally studied the linear and nonlinear waves propagating along this cylinder. They evidenced a reduced-gravity effect due to the shape of their experimental substrate, as well as an effective reduced surface tension, supposedly stemming from the non-trivial shape of the cylinder section. Different branches of the dispersion relation were evidenced. One branch was related to the varicose modes of the

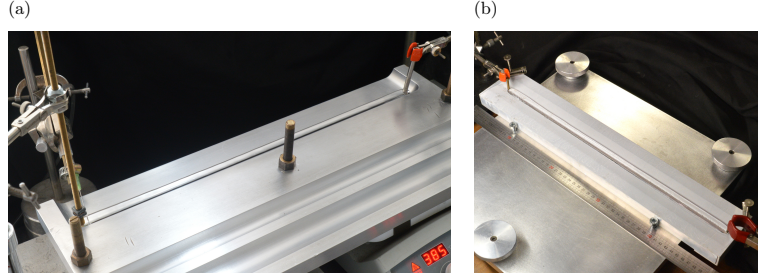


FIGURE 1. (a) Photograph of a water cylinder deposited upon a hot substrate. The temperature is larger than the boiling temperature. Owing to the Leidenfrost effect, this cylinder levitates above its own vapour. Depression Korteweg-de Vries solitons can propagate along such a cylinder. (b) A cylinder of water can be deposited upon a superhydrophobic substrate (here a symmetrical V-shaped substrate). Beyond a critical volume, such a cylinder is stable and waves can propagate along it.

drop, whereas an upper branch was characterised by a cut-off frequency and corresponded to sloshing modes. In this context, the general dispersion relation of the varicose modes read

$$\omega^2 = \left(g_{\text{eff}} k + \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\rho} k^3 \right) \Psi(W_{\text{eff}} k), \quad (1.1)$$

with $g_{\text{eff}} = g \sin \alpha$; $W_{\text{eff}} = c_{\text{eff}}^2 / g_{\text{eff}}$, c_{eff} being the phase velocity of long-wave varicose modes; σ_{eff} , an effective surface tension (fitted in experiments), lower than the expected surface tension of the liquid; α , a tilt angle; Ψ , a function depending on the substrate shape and equivalent to the standard tanh function for a rectangular channel.

Negative amplitude solitons were observed along these Leidenfrost cylinders. The authors characterised the existence of these depression solitary waves by means of an effective Bond number that they compared to a critical Bond number related to the substrate section shape. By adding nonlinear corrections to the dispersive wave equation, they proposed a KdV equation with ad-hoc coefficients of the form

$$\eta_t + c_{\text{eff}} \left[\eta_x + \frac{\nu_1}{W_{\text{eff}}} \eta \eta_x + \frac{1}{2} W_{\text{eff}}^2 (\text{Bo}_c - \text{Bo}_{\text{eff}}) \eta_{xxx} \right] = 0. \quad (1.2)$$

The coefficient ν_1 depended on the substrate geometry, the critical Bond Bo_c and the effective Bond number Bo_{eff} were respectively equal to $|\Psi'''(0)|/6$ and $\sigma_{\text{eff}}/(\rho g_{\text{eff}} W_{\text{eff}}^2)$. No details of the theoretical derivation of this KdV equation were given within the article.

Recently Pham *et al.* (2020) studied a system that bridges open-channel flows and the free cylinder encountered in the Leidenfrost experiments, provided the curved substrate is replaced by a superhydrophobic non-heated wedge-shaped substrate. They calculated the exact shape of the capillary cap and showed that cylinders can be stable against the Plateau-Rayleigh instability as long as the liquid is deposited upon a non-flat substrate and its section is sufficiently large (see figure 1 (b) as an illustration). They interpreted this instability in terms of the square of the effective celerity of the varicose waves in the non-dispersive regime, c_{eff}^2 . It is positive for large volumes of liquid, it becomes negative for small volumes of liquid.

This article is the follow-up of this first part. We present a thorough study of the

dispersive regime of the waves propagating along sessile cylinders of water, deposited upon superhydrophobic wedge-shaped substrates.

We start with the presentation of our experimental set-up along with the experimental results in §2. Cylinders of liquids are deposited upon superhydrophobic substrates (either a symmetrical V-shape channel, or an L-shaped channel such that its geometry can be finely tuned). These cylinders are excited and the spectra of the deformations of the interface are analysed. We evidence the existence of varicose, sinuous and sloshing waves. Fittings of the varicose branch of excitations with (1.1) are carried out.

In §3, we numerically study the varicose and the sloshing waves, without taking the surface tension into account, by studying the inviscid equations governing the motion of the fluid in such channels. To do so, we solve the equations governing the velocity potential, in the form of a generalised eigenvalue problem that we solve through a code based on the finite element method. This leads to the dispersion relations of the different wave modes. More specifically, we characterise the varicose waves in terms of a shape function Ψ , equivalent to the standard tanh function of the classic capillary-gravity waves, and relate this function Ψ to the substrate geometry. We compute the sloshing branches above the varicose branch and compare them to the experimental results by analysing their characteristic cut-off frequencies at zero wavenumber.

We introduce the dispersive correction due to the surface tension effects. An estimation of the renormalized surface tension is proposed in §4, based on a toy model. It is developed and discussed in details in appendix B. Because the varicose perturbations of the base state induce a non-uniform distribution of the curvature along the section border of the cylinder, there is an effective averaging of the surface tension, which leads to an effective surface tension lower than the expected standard value.

In §5, based on a nonlinear acoustics analogy, we add nonlinear corrections to the wave equation obtained through the dispersion relation (1.1) and derive the ad-hoc KdV equation (1.2) governing our system, taking into account the shape of the channel. Experiments are performed in order to check the validity of this equation. In a similar way to the Leidenfrost case of Perrard *et al.* (2015), negative amplitude solitons can propagate along our cylinder. We characterise them by measuring their amplitude and their propagation speed, which is subsonic, namely lower than c_{eff} .

Last we show in §5.4 how our method can be generalised and how it can describe the propagation of depression pulses in Plateau borders, observed in experiments by Argentina *et al.* (2015), and we draw our conclusions in §6.

2. Experimental set-up and results

In this section, we present an experimental characterisation of the waves propagating along cylindrical drops (namely with translational invariance along one direction), when deposited upon superhydrophobic substrates. We will study the dispersive regime, while Pham *et al.* (2020) only focused on the non-dispersive regime.

2.1. Experimental set-up

We use the same two different substrates as in Pham *et al.* (2020). The first one is a symmetrical V-shaped Dural channel with an angle $\alpha = 10^\circ$. The second one is an L-shaped Dural channel, placed upon a levelling table, so that it can be tilted by an angle α , set from 0° up to 45° (see the schematics in figures 2 (a, b, c)). The surface of these substrates is treated using Rust-Oleum NeverWet, so that the wetting conditions can be considered as superhydrophobic (contact angle around 160° , see Gupta *et al.* 2016). Both channels are 50 cm long. On either of them, a controlled volume of distilled water

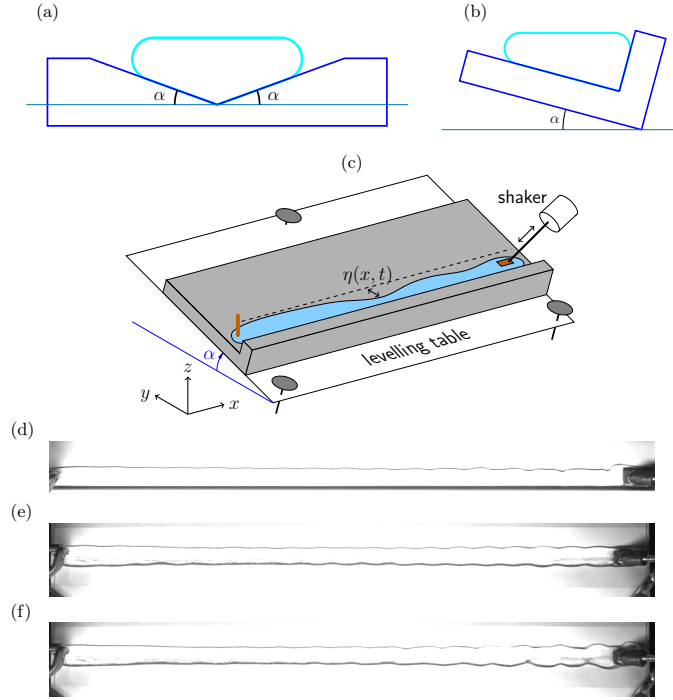


FIGURE 2. Geometry of our two different substrate shapes used in our experiments. (a) Cross-section of the V-shaped substrate ($\alpha = 10^\circ$). (b) Cross-section of the L-shaped substrate. (c) Schematic of the experimental set-up. Movies are recorded from above. Top views of experiments of shaken drops of volume 40 mL (d) on the non-symmetrical L-shaped substrate tilted by an angle $\alpha = 10^\circ$; (e) on the V-shapes symmetrical substrate. Varicose modes, that is constriction modes, are observed. They are symmetrical in the V-shape case. In contrast, due to the asymmetry of the L-shaped substrate, only the constrictions of the interface border located at the gentle slope side (upper side of the image) are clearly visible. (f) V-shaped symmetrical substrate: generation of sinuous modes when excited close to their cut-off frequency.

is deposited and stretched from one end to the other end of the channel. If the deposited volume is sufficiently large, such long drops can be pinned at both ends of the channel without breaking up (see Pham *et al.* (2020)).

In order to study the propagation of waves along these drops, we force one end of the drop using a shaker at slowly increasing frequencies from 1 Hz to 20 Hz. Three snapshots are shown as an illustration in figure 2 (d, e, f). The plate connected to the shaker can be seen at the right-hand side of the photographs. The photographs correspond to excited drops of volume equal to 40 mL, deposited on the symmetric V-shaped substrate and the non-symmetrical L-shaped substrate with a tilt angle $\alpha = 10^\circ$. In the symmetrical case, constriction modes are clearly visible near the shaker, whereas in the non-symmetrical case, only the deformations of one side of the drop can be captured, for deformations of

the border of the drop at the steepest side of the substrate are too small to be visible. We then naturally focus on the interface located on the smallest slope of the substrate.

The deformation of the interface border is recorded from above using a digital camera at 50 fps (AVT Manta G223). The position of the interface border, $\eta(x, t)$, is numerically reconstructed using an algorithm of contour detection based on the change in the colour gradient, with a 0.03 mm accuracy.

From the camera recordings, we compute the spatio-temporal spectrum $S^\eta(k, \omega)$ of the perturbed interface by performing Fast Fourier Transforms (FFTs) on the difference $\eta(x_i, t_k) - \eta_0(x_i)$, where $\eta_0(x_i)$ is the shape of the border at rest. The typical spatial resolution is of order 0.25 mm per pixel and we use a typical image resolution N_x equal to 1700 pixels.

2.2. Experimental results

Several branches can be observed from the obtained spatio-temporal spectra (see figures 3 and 4). We will first focus on the lowest branch, which goes to zero when $k \rightarrow 0$ (namely the varicose branch), then on the other branches (characterised by a low-frequency cut-off at $k = 0$), that are related to other modes of wave propagation. The very first upper branch is related to sinuous modes (in the V-shape case), while the other ones correspond to sloshing modes.

We have analytically characterised the long-wave regime ($k \rightarrow 0$ -limit) of the varicose modes in Pham *et al.* (2020), with a very good agreement with the experiments. From the value of the deposited volume, V_0 and the substrate geometry (given by the angle α), we were able to deduce the value of the geometric parameter m that sets the section of the drop at rest. Then we deduced the slope at zero of the varicose branch, corresponding to the phase velocity c_{eff} of the varicose modes. Note that this wedge-shaped geometry corresponds to the ansatz used in Perrard *et al.* (2015). In this latter work, the authors found a corrective 0.8 factor, because of the curvature of the substrate bottom, which made the actual cross-sectional area lower than that of the ansatz.

We can then deduce the parameter $W_{\text{eff}} = c_{\text{eff}}^2 / g_{\text{eff}}$ in the dispersion relation (1.1) and we have superimposed the latter to the spectra using $\Psi \equiv \tanh$. This functional ansatz will be justified in §3. Moreover, in order to take into account the short-wave dispersive regime where $\omega^2 \sim (\sigma_{\text{eff}} / \rho) k^3$, we have fitted the experimental varicose curve using a fitted value of σ_{eff} , typically about 57 mN/m. As already observed in the case of levitating Leidenfrost cylinders (see Perrard *et al.* (2015)), this value is below its expected value (72 mN/m in the superhydrophobic case). This property is due to the non-uniform distribution of curvature of the interface along its section border. This point is thoroughly discussed in §4 and appendices A and B. The agreement is very good for both the V-shape and the L-shape cases. Note that in the V-shape case, the curve loses its convexity as expected, when the Bond number is below the critical Bond number. This transition between a capillary- and a gravity-dominated regime occurs at a critical volume $V_c \simeq 80$ mL (see discussion in §4).

Several upper branches $\omega = \omega(k)$, those that do not go to zero at $k \rightarrow 0$, are clearly visible in the spectra. In order to characterise the first upper branch, we consider the spectra of the interface border in the V-shape case. The geometry allows us to capture both the upper $\eta^{\text{up}}(x, t)$ and the lower $\eta^{\text{lo}}(x, t)$ borders of the interface. The spectrum of $\eta^{\text{up}}(x, t)$ is shown in figure 3(c) for a volume $V = 35$ mL, whereas we have plotted the spectrum of the difference $W(x, t) = \eta^{\text{up}}(x, t) - \eta^{\text{lo}}(x, t)$ which corresponds to the spectrum of the drop width (figure 3(d)). The latter figure is plotted in log-log scale in order to evidence the long-wave regime (for $k \rightarrow 0$, $\omega(k)$ scales like k) along with the short-wave regime (for $k \rightarrow \infty$, $\omega(k)$ scales like $k^{3/2}$). The first upper branch has

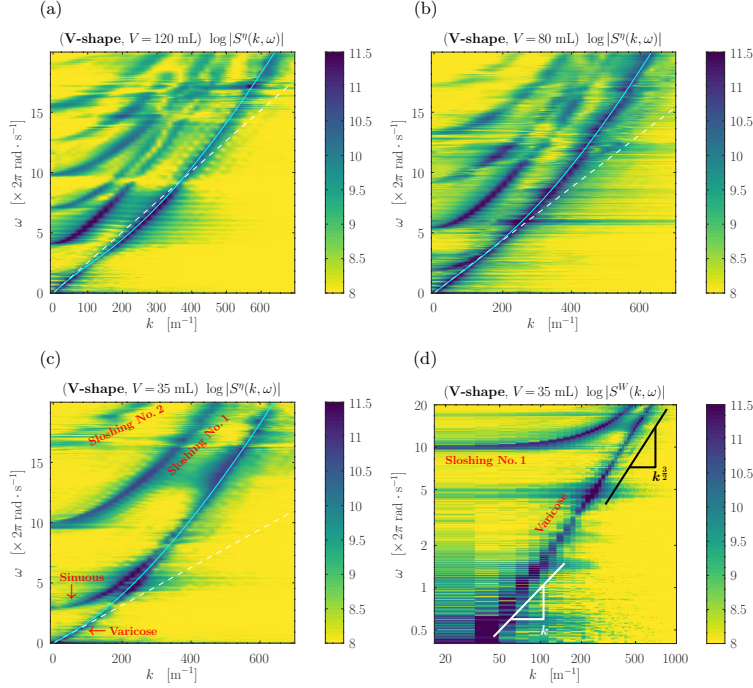


FIGURE 3. Spatio-temporal spectra $S^\eta(k, \omega)$ of the deformation of the border of elongated drops, on a superhydrophobic symmetric V-shaped substrate for three different volumes V : (a) $V = 120$ mL, (b) $V = 80$ mL, (c) $V = 35$ mL, at fixed angle $\alpha = 10^\circ$. The larger the volume, the larger the slope at origin, that is the speed of sound. We have superimposed the analytical non-dispersive relation $\omega = c_{\text{eff}} k$ (dashed white, with respective values of c_{eff} : (a) 15.9 cm/s; (b) 13.8 cm/s; (c) 9.9 cm/s) along with the dispersion relation (1.1) with the tanh function as an ansatz of Ψ (solid cyan). The agreements are very good. At large volumes (greater than 80 mL), the dispersion relation is not convex, it is the gravity-dominated regime. For smaller volumes (which will correspond to regimes of Bond numbers larger than a critical value), the dispersion relation is purely convex, it is the capillary-dominated regime. The other branches are characterised by a cut-off frequency. They correspond to other modes of propagation (sinuous and sloshing modes). (c) At a volume of water equal to 35 mL, we can clearly distinguish two branches with cut-off frequencies: $f_{\text{sinuous}} \simeq 2.6$ Hz and $f_{\text{slosh}} \simeq 10$ Hz. (d) Spectrum $S^W(k, \omega)$ of $W(x, t)$, the width of the same drop, at $V = 35$ mL (see text for its definition). The figure is plotted in log-log scale. The sinuous branch with cut-off frequency $f_{\text{sinuous}} \simeq 2.6$ Hz vanishes; only remains the varicose mode branch, as well as the upper sloshing branch. For $k \rightarrow 0$, $\omega(k)$ scales like k (non-dispersive regime), while for $k \rightarrow \infty$, $\omega(k)$ scales like $k^{\frac{3}{2}}$.

vanished. It corresponds to a motion of the drop of constant section, namely to sinuous modes.

The other upper branches are related to sloshing modes because of the presence of the substrate. The cut-off frequencies of the sinuous and the sloshing modes decrease

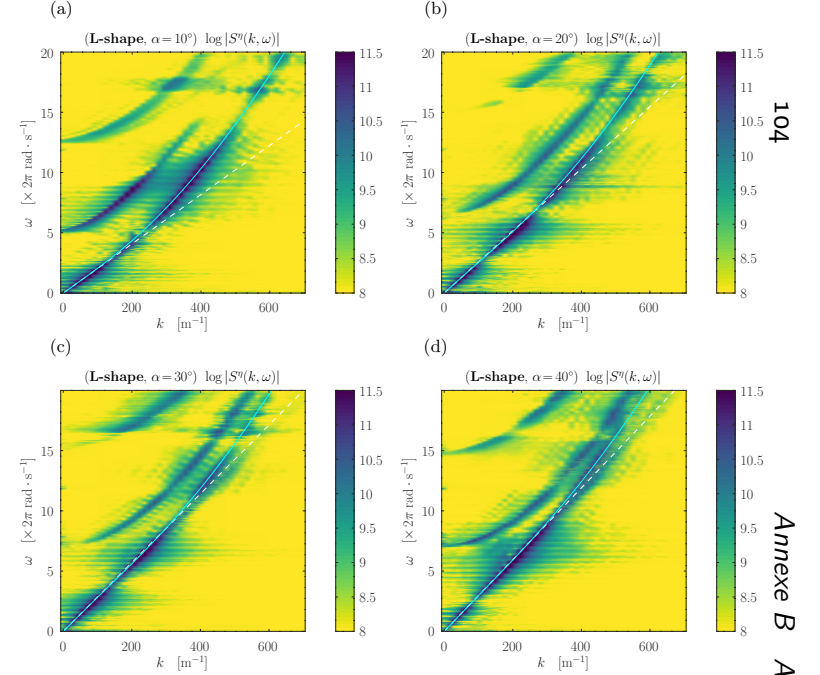


FIGURE 4. Spatio-temporal spectra of elongated drops, on a superhydrophobic asymmetrical L-shaped substrate for volume equal to 35 mL and four different angles (a) $\alpha = 10^\circ$, (b) $\alpha = 20^\circ$, (c) $\alpha = 30^\circ$, (d) $\alpha = 40^\circ$. We have superimposed the analytical non-dispersive relation $\omega = c_{\text{eff}} k$ together with the dispersion relation (1.1) with the tanh function as an ansatz of Ψ . The larger the angle, the larger the slope, that is the propagation speed of long wavelength varicose modes. We have $c_{\text{eff}} =$ (a) 12.8 cm/s, (b) 16.2 cm/s, (c) 17.9 cm/s, (d) 18.7 cm/s. At this low-volume regime, the varicose branches are convex. No sinuous branch is visible.

for increasing values of the deposited volume of liquid. Comparisons with numerical simulations are made in §3 in the V-shape case.

In the case of the L-shaped substrate, by inspection of figures 4 (a–d), one can tell that, at a fixed volume $V = 35$ mL, the cut-off frequencies increase as the angle α increases. A quantitative measurement of these cut-off frequencies along with a comparison with numerical simulations will be discussed in §3. No sinuous branch is visible.

3. Numerical dispersion relations without surface tension

We will start with a brief presentation of classical results on gravity waves. We will then address the question of gravity waves propagating along general wedge-shaped channels and then, more specifically, along the channels used in our experiments.

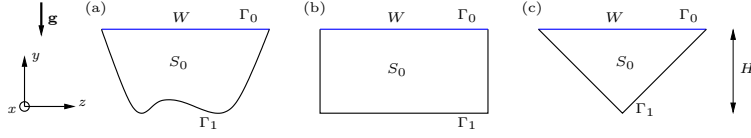


FIGURE 5. (a) General notations of the numerical problem. W denotes the width of the horizontal free interface Γ_0 . S_0 denotes the cross-sectional area of the cylinder at rest. Γ_1 denotes the solid bottom of the channel. H denotes the maximum depth of the liquid. (b) Rectangular geometry. (c) Symmetrical square geometry.

3.1. Governing equations and classical results

In this section, we present the equations that govern the propagation of surface waves in the x -direction, along a channel of given cross-section of water at rest S_0 , without taking surface tension into account. The flat free interface is denoted Γ_0 and the solid bottom of the substrate is denoted Γ_1 (see figure 5(a)). Let us consider an irrotational, incompressible, inviscid flow. We set $\Phi(x, y, z)$ as the velocity potential and separate it into $\Phi(x, y, z, t) = \phi(y, z) e^{i(kx - \omega t)}$, the problem to solve is: Find a non-zero function $\phi(y, z)$ such that it exists ω that satisfies (see Lamb (1932))

$$(\Delta - k^2) \phi = 0, \quad \forall (y, z) \in S_0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad \forall (y, z) \in \Gamma_1, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\omega^2}{g} \phi, \quad \forall (y, z) \in \Gamma_0. \quad (3.3)$$

It corresponds to a generalised eigenvalue problem. As stated in McIver & McIver (1993) and Groves (1994), very few analytical solutions of the problem (3.1–3.3) can be exhibited. We will present the two standard following ones.

3.1.1. Rectangular channel

In the case of a rectangular channel of depth H and width W (see figure 5(b)), we have a discrete set of dispersion relations, indexed by an integer N

$$\omega^2(k) = g\mu_N(k) \tanh[\mu_N(k)H], \quad (3.4)$$

with

$$\mu_N(k) = \sqrt{\frac{N^2\pi^2}{W^2} + k^2}. \quad (3.5)$$

The case $N = 0$ yields the classical dispersion relation

$$\omega^2(k) = gk \tanh kH. \quad (3.6)$$

In the limit $kH \rightarrow 0$, we have $\omega^2 = c_0^2 k^2$ with $c_0^2 = gH$.

For positive integers N , the other branches possess a cut-off frequency $\omega_{\text{cut}}(N)$ that reads

$$\omega_{\text{cut}}^2(N) = g \left[\frac{N\pi}{W} \tanh \left(H \frac{N\pi}{W} \right) \right]. \quad (3.7)$$

For $N = 1$ and a depth H much smaller than the width W , the first cut-off frequency then reads

$$\omega_{\text{cut}}(N = 1) \underset{H/W \ll 1}{=} \frac{\pi \sqrt{gH}}{W}. \quad (3.8)$$

3.1.2. Square symmetrical wedge-shaped channel

In the case of a square symmetrical wedge-shaped channel (see figure 5(c)), exact solutions can be exhibited as well (Lamb (1932), Wehausen & Laitone (1960, p. 551), Groves (1994)). The first two branches (varicose and first sloshing modes) respectively satisfy the following dispersion relations

$$\omega^2 = \frac{g}{\sqrt{2}} k \tanh \frac{kH}{\sqrt{2}}, \quad (3.9)$$

$$\omega^2 = \frac{g}{\sqrt{2}} k \cot \tanh \frac{kH}{\sqrt{2}}. \quad (3.10)$$

Rewriting (3.9) as $\omega^2 = g_{\text{eff}} k \tanh(W_{\text{eff}} k)$, yields $g_{\text{eff}} = g \sin \alpha$ with $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Note that in the long-wavelength limit, we recover the non-dispersive varicose regime

$$\omega^2 \underset{k \rightarrow 0}{=} \frac{gH}{2} k^2. \quad (3.11)$$

Note that (3.11) is valid for any wedge-shaped channel, regardless of the wedge slopes.

The cut-off frequency of the first branch is

$$\omega_{\text{cut}}(N = 1) = \sqrt{\frac{g}{H}}. \quad (3.12)$$

and in order to obtain the upper-branches of the dispersion relations, one has to resort to numerical calculations (Groves 1994).

3.2. Numerical results

We now turn to the general case of an arbitrary triangular channel section, with angles α and $\beta \geq \alpha$ (see figure 6(a)). In such a geometry, the substrate is unequivocally characterised by its height H and its angles α and β . We recall that the relationships between the height H , the width W and the cross-sectional area S are given by

$$W = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} H, \quad (3.13)$$

$$S = \frac{1}{2} WH = \frac{1}{2} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} H^2 = \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} W^2, \quad (3.14)$$

which yields for our substrates: $W = (\cot \alpha) H$ in the V-shape case and $W = H / \sin 2\alpha$ in the L-shape case. The eigenvalue problem (3.1–3.3) depends on 6 independent quantities: $\alpha, \beta, g, \omega, H, k$. The Buckingham π theorem implies that our system is governed by four independent dimensionless numbers $\alpha, \beta, \Omega = \omega \sqrt{H/g}$ and $K = kH$. Hence, H sets our length scale and $\sqrt{H/g}$ our time scale.

In order to obtain the dispersion relation of the problem, we resort to numerical computations. To that end, we have discretised the domain into a 2D triangular mesh using Matlab/Octave mesh2d mesh-generator (Engwirda 2014). A Lagrange $\mathbb{P}_1$ finite element method is used to solve the problem (3.1–3.3) which consists in a generalised eigenvalue problem. The numerical computations yield different branches $\Omega(K)$. A typical number of 2,000 to 4,000 elements is used in order to ensure numerical convergence, depending on the angles α and β .

The first branch, the one that goes to zero as $k \rightarrow 0$, corresponds to the varicose modes. Their dispersion relation reads in physical units

$$\omega^2(k) = (g \sin \alpha) k \Psi_{\alpha, \beta} \left(\frac{kH}{2 \sin \alpha} \right) = (g_{\text{eff}} k) \Psi_{\alpha, \beta} (W_{\text{eff}} k), \quad (3.15)$$

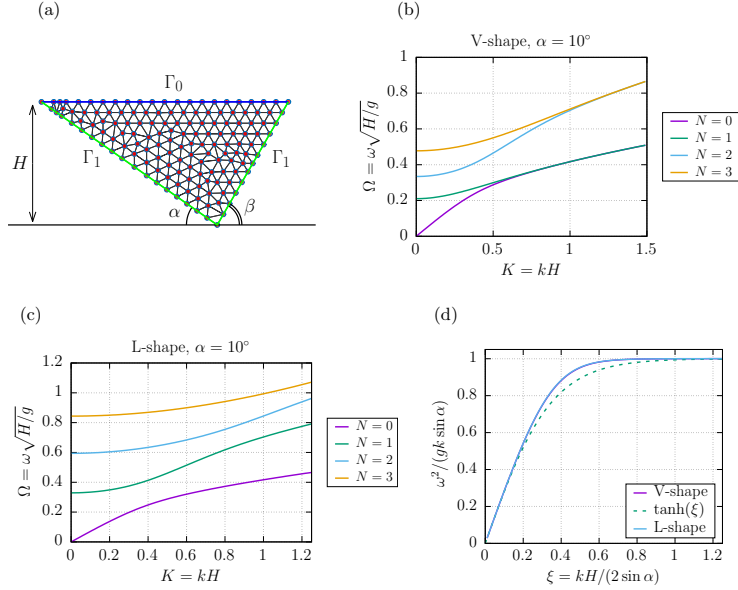


FIGURE 6. (a) Schematic of the geometry. Example of a 2D mesh used in numerical simulation (low spatial resolution, here 239 elements). Two spectra : (b) V-shape and (c) L-shape, for an angle $\alpha = 10^\circ$. Note that in the L-shape case, branches do not converge asymptotically in pairs as in the V-shape case. (d) Comparison between the classical tanh function (dashed line) and the actual shape function $\Psi_{\alpha,\beta}$ for the V-shape and the L-shape cases (solid lines). Both shape functions are almost identical, whereas they differ from the tanh function at intermediate values of ξ .

with the function $\Psi_{\alpha,\beta}$, for given angles α and β , having the following properties

$$\Psi_{\alpha,\beta}(\xi) \underset{\xi \rightarrow 0}{\sim} \xi, \quad (3.16)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \Psi_{\alpha,\beta}(\xi) = 1, \quad (3.17)$$

and $W_{\text{eff}} = H/(2 \sin \alpha)$ being the effective width. The boundary conditions (3.16) and (3.17) of the function $\Psi_{\alpha,\beta}$ are chosen so that they are the same as those of the tanh function in the classical cases, aforementioned in §3.1 (rectangular and square symmetrical triangle), thus allowing direct comparisons. Note that the prefactor $g_{\text{eff}}k$ does not depend on β , it only depends on the smallest angle α . We can deduce the function $\Psi_{\alpha,\beta}(\xi)$ by considering the numerical ratio

$$\Omega^2 / [(\sin \alpha) K] = \Psi_{\alpha,\beta} [K / (2 \sin \alpha)]. \quad (3.18)$$

This result is depicted in figure 6(d).

From the numerical computations, we obtain the upper branches as well. They are characterised by a cut-off frequency $\omega_{\text{cut}}(N)$. For different angles α and β , the first three

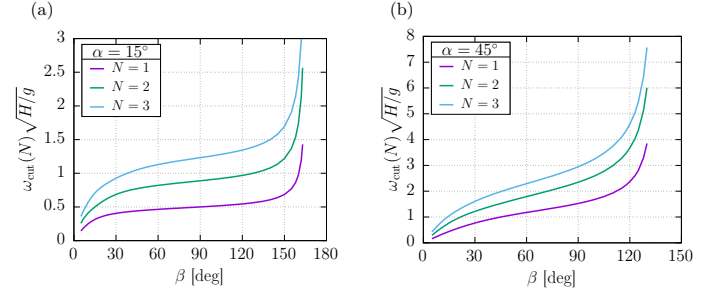


FIGURE 7. For a fixed angle α and for different angles β (normally $2\pi - \alpha > \beta \geq \alpha$, but we will even consider the case $\beta \leq \alpha$), dimensionless values of $\Omega_{\text{cut}}(N) = \omega_{\text{cut}}(N) \times \sqrt{H/g}$, for $N = 1, 2$ and 3. (a) $\alpha = 15^\circ$ and (b) $\alpha = 45^\circ$.

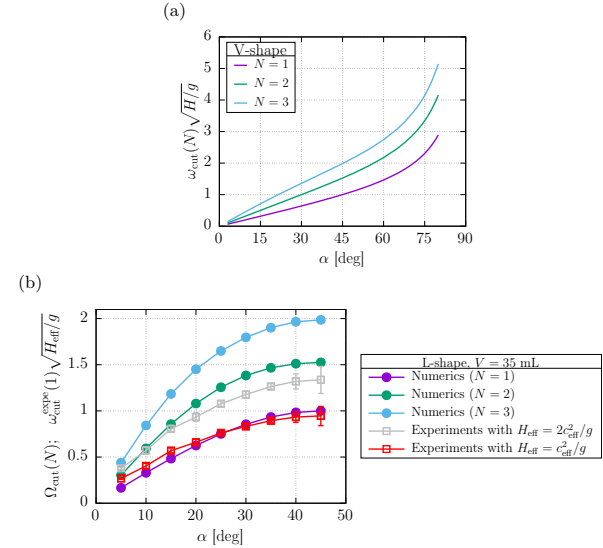


FIGURE 8. (a) V-shaped substrate: Numerical calculations of the first three dimensionless cut-off frequencies $\Omega_{\text{cut}}(N) = \omega_{\text{cut}}(N) \times \sqrt{H/g}$ for a given angle α . (b) L-shaped substrate: Numerical calculations of $\Omega_{\text{cut}}(N)$ (solid circles), together with a comparison with the experimental measurements of $\omega_{\text{cut}}^{\text{expe}}(1)$ using different values of H_{eff} (open squares, see text): in gray, we use $H_{\text{eff}} = 2c_{\text{eff}}^2/g$, while in red, we use a smaller $H_{\text{eff}} = c_{\text{eff}}^2/g$, which yields a better agreement.

cut-off frequencies are computed and shown in figures 7 (a,b). At fixed angle α , the cut-off frequency is an increasing function of the angle β .

More specifically, we have performed the same calculations in the particular cases of V-shaped and L-shaped substrates in order to relate them to our experiments (see figure 8).

At fixed depth, for both the V-shaped and L-shaped substrates, the cut-off frequencies $\omega_{\text{cut}}(N)$ are increasing functions of the angle α . In the limit $\alpha \rightarrow 0$, the cut-off frequencies decrease linearly towards zero: the less steep the channel, the slower the sloshing motion.

3.3. Comparison with the experiments

In this section, we compare the cut-off frequencies found in the experimental spectra and the numerical results.

In the case of the V-shaped substrate, the cut-off frequency shall scale as $\sqrt{g/H}$. The larger the volume, the larger H , therefore the lower the cut-off frequency. For larger volumes of liquid, the measurements of the cut-off frequencies become less accurate. Nevertheless, the larger the volume, the more branches can be distinguished. For instance four sloshing branches are visible at volume 80 mL in figure 3 (a). The value of their cut-off frequencies can be extrapolated at $k = 0$: $f_1^{\text{expe}} \simeq 5.5$ Hz, $f_2^{\text{expe}} \simeq 9.5$ Hz, $f_3^{\text{expe}} \simeq 13.3$ Hz, $f_4^{\text{expe}} \simeq 17.2$ Hz. Their ratios $f_2^{\text{expe}}/f_1^{\text{expe}} \simeq 1.73$, $f_3^{\text{expe}}/f_2^{\text{expe}} \simeq 1.4$, $f_4^{\text{expe}}/f_3^{\text{expe}} \simeq 1.29$ are in good agreement with the numerical calculations which yield the following ratios: $f_2^{\text{num}}/f_1^{\text{num}} \simeq 1.59$ and $f_3^{\text{num}}/f_2^{\text{num}} \simeq 1.43$ and $f_4^{\text{num}}/f_3^{\text{num}} \simeq 1.26$ (see figure 8(a), where the first three frequencies are displayed).

In the case of the L-shaped substrate, we have performed a series of experiments at fixed volume $V = 35$ mL with an angle α varying from 5° to 45° , by 5° steps. First we must state that because of the L-shaped geometry, in particular in the low-angle regime, sinuous modes are penalised, for the steepest side of the substrate prevents the border of the interface from moving laterally and keeping its width constant. We have measured the cut-off frequency of the first visible upper branch $\omega_{\text{cut}}^{\text{expe}}(1)$.

From the experimental data, the dimensionless quantity $\omega_{\text{cut}}^{\text{expe}}(1)\sqrt{H_{\text{eff}}/g}$, where H_{eff} is a length, can be computed and compared to the numerical calculations of $\Omega_{\text{cut}}(N)$. It is known that for any triangle of height H , we have exactly $c_{\text{eff}}^2 = gH/2$ (see (3.10) in Pham *et al.* (2020)). From the value of c_{eff}^2 of our drop, if we consider $H_{\text{eff}} = 2c_{\text{eff}}^2/g$, we do not find any agreement between the numerical and the experimental results; the relative error is of 40%. If $H_{\text{eff}} = c_{\text{eff}}^2/g$ is chosen instead, the agreement becomes good and the data seem to correspond to the first sloshing branch (see figure 8 (b)). The larger the angle, the larger the cut-off frequency. Determining the exact value of H_{eff} remains an open question; it can most likely be attributed to the presence of the capillary cap on top of the wedge-shaped volume of water, which has an effect on the experimental value of $\omega_{\text{cut}}^{\text{expe}}(1)$, while the sequence of the cut-off frequency ratios may still be described by a sole wedge-shaped cross-section.

4. First dispersive contributions to the varicose modes

In §3, we have numerically calculated the shape function $\Psi_{\alpha,\beta}$, which is not a linear function; its linear behaviour is only true at vanishing wavenumbers. Therefore, dispersion is present in the dispersion relation of the varicose waves even without taking into account the surface tension effects. We will quantify the first dispersive corrections due to the nonlinear behaviour of $\Psi_{\alpha,\beta}$ in §4.1.

Another source of dispersion is due to surface tension. As long as the interface remains horizontal in the (y, z) -plane, in the case of a rectangular channel, it is straightforward to make the substitution $g \mapsto g + \frac{\sigma}{\rho}k^2$ in the dispersion relation of the varicose modes. This substitution yields the classical dispersion relation

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\sigma}{\rho}k^3\right) \tanh kH. \quad (4.1)$$

When the interface in the transverse plane turns out to be curved, the substitution does not hold any longer. In the following subsection §4.2 we present a toy model in order to explain and estimate the renormalization effect on the surface tension observed in our experimental spectra, as well as in the work of Perrard *et al.* (2015). As a consequence, in §4.3, we will estimate the effective Bond number of our system as well as the value of the critical Bond number at which the transition between a capillary- and a gravity-dominated regime occurs.

4.1. Dispersive effects due to the shape function $\Psi_{\alpha,\beta}$

From the numerical calculations presented in §3, we have evidenced the dispersion relation of the varicose modes propagating along a wedge-shaped channel of angles α and β . It is given by (3.15) and because the shape function $\Psi_{\alpha,\beta}$ is not a linear function, dispersive effects are intrinsically present. A Taylor expansion of the shape function $\Psi_{\alpha,\beta}(\xi)$ at order 3 in ξ yields the first dispersive correction of the dispersion relation at small wavenumbers k which reads

$$\omega^2 \underset{k \rightarrow 0}{=} g_{\text{eff}}k \left(W_{\text{eff}}k + \frac{1}{6}\Psi_{\alpha,\beta}'''(0)W_{\text{eff}}^3k^3 \right) + \mathcal{O}(k^6). \quad (4.2)$$

This correction is given by $\Psi_{\alpha,\beta}'''(0)$. From the numerical calculations, its value can be numerically deduced, insofar as $\Psi_{\alpha,\beta}(\xi) \sim \xi$ and $\Psi_{\alpha,\beta}$ is an odd function, using the limit

$$\frac{6}{\xi^2} \left(\frac{\Psi_{\alpha,\beta}(\xi)}{\xi} - 1 \right) \underset{\xi \rightarrow 0}{\longrightarrow} \Psi_{\alpha,\beta}'''(0). \quad (4.3)$$

The results are depicted in figures 9 (a,b). The dependence in α and β is non-trivial. One can note that for a fixed value of α , $\Psi_{\alpha,\beta}'''(0)$ does not vary significantly with β . This value is of great importance because it sets the value of the critical Bond number at which the dispersion relation starts above (purely convex dispersion relation) or below the non-dispersive dispersive relation (non-convex dispersion relation) (see §4.3). We will refer to both these regimes as the capillary- and the gravity-dominated regime respectively.

In figure 9 (c) are displayed the values of $\Psi_{\alpha,\beta}'''(0)$ in the particular cases of the V-shaped and the L-shaped substrates. At angle $\alpha = \pi/4$, we recover the value $\tanh'''(0) = -2$, whereas for $\alpha \rightarrow 0$, we have $\Psi_{\alpha,\beta}'''(0) \rightarrow -1$. In the V-shape case, when $\alpha \rightarrow \pi/2$, we have $\Psi_{\alpha,\beta}'''(0) \rightarrow -3$.

4.2. An analytical estimation of σ_{eff}

We propose an estimation of σ_{eff} as a cross-sectional averaging of the hydrostatic pressure field, by taking into account the non-uniform profile of curvature of the interface along the transverse section of it, due to the presence of varicose modes. In short, we go one step further than the non-dispersive calculation of Pham *et al.* (2020) and calculate the k^4 contribution in the framework of the Saint-Venant equations. Due to the length of the derivations, their technical details are deferred to appendix B, where we first analytically compute the curvature of the interface of the varicose modes using an adiabatic hypothesis on the sections. We then perform an estimation of the averaged pressure gradient that yields σ_{eff} , through a toy model. This toy model is motivated by a few statements on how dispersive effects due to surface tension can be taken into account within the Saint-Venant formalism we used to study the non-dispersive regime of our sessile cylinders (Pham *et al.* 2020). These statements are made in appendix A.

The main result of this study is that because of the non-flat interface, the perturbative curvature profile along the interface when varicose perturbations are present is non-trivial. At low angle α , the curvature is dominant at the drop tip, while at steep angle

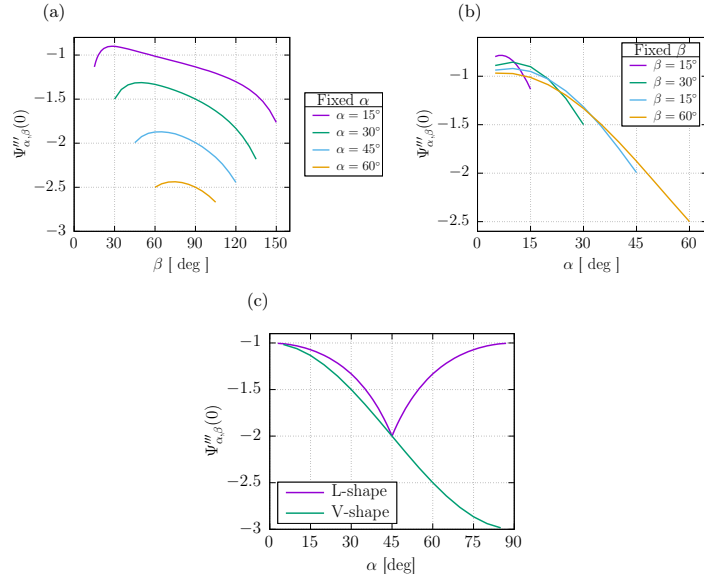


FIGURE 9. (a) Values of $\Psi'''_{\alpha,\beta}(0)$ for fixed values of α . (b) Same, for fixed values of β . (c) Particular cases of the V-shaped and L-shaped substrates: Dependence of $\Psi'''_{\alpha,\beta}(0)$ on the angle α . Note that for $\alpha = \pi/4 = 45^\circ$, both situations are the same and we recover $\Psi'''_{\alpha,\beta}(0) = \tanh'''(0) = -2$. The curve of the L-shaped substrate has been symmetrized about $\alpha = 45^\circ$; the values of $\alpha > 45^\circ$ actually are those of the corresponding angle $\beta = 90^\circ - \alpha$. In all cases, the value of $|\Psi'''_{\alpha,\beta}(0)|/6$ yields the critical Bond number (see §4.3).

V-shape	volume V	[mL]	35	40	60	80	100	120
$\alpha = 10^\circ$	$\sigma_{\text{eff}}^{\text{expe}}$	[mN/m]	56	54	59	58	56	56
	$\sigma_{\text{eff}}^{\text{toy}}$	[mN/m]	48.3	48.4	48.6	48.7	48.8	48.8

TABLE 1. Case of the V-shaped substrate. Experimental values of σ_{eff} found by fitting the spectra, using (1.1), for different volumes V and comparison with the toy model. The agreement is fair, with a relative error of 15%.

α , the maximum of the curvature is reached about the top of the drop. The uneven distribution of curvature leads to an effective reduced surface tension of about 57 mN/m observed in our experiments, in both the V-shaped and the L-shaped substrates. The comparisons with the experiments are summarised in tables 1 and 2.

In the case of our V-shaped geometry, at a low angle $\alpha = 10^\circ$, the fitting of the value of σ_{eff} does not show much dependence on the volume, and so do the values yielded by the toy model, which undershoots the experimental value with an error of 15%. In the case of our L-shaped substrate, the experimental values do not show any obvious dependence on the angle α , while the toy model we used shows a small decrease in the values of σ_{eff}

L-shape	angle α	[deg]	5	10	15	20	25	30	35	40	45
	volume V	[mL]	40	35	35	35	35	35	35	35	35
	$\sigma_{\text{eff}}^{\text{expe}}$	[mN/m]	56	55	57	56	58	57	57	58	57
	$\sigma_{\text{eff}}^{\text{toy}}$	[mN/m]	58.0	57.1	56.5	55.8	55.2	54.7	54.3	54.1	54.0

TABLE 2. Case of the L-shaped substrate. Comparison of the values of σ_{eff} between experiments and toy model. The agreement is good, with an error of less than 10%.

with increasing angles α . In any case, we obtain a better agreement than in the V-shape case. The error is of 10% with the experimental data.

4.3. Effective Bond number and critical value

From the general dispersion relation (1.1) and the Taylor expansion of $\Psi(\xi)$ at order 3, we get, at order k^4 ,

$$\omega^2 = c_{\text{eff}}^2 k^2 \cdot [1 + (\text{Bo}_{\text{eff}} - \text{Bo}_c) k^2 W_{\text{eff}}^2] + \mathcal{O}(k^6) \quad (4.4)$$

with the effective Bond number and the critical Bond number defined as

$$\text{Bo}_{\text{eff}} = \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\rho g_{\text{eff}} W_{\text{eff}}^2}, \quad \text{Bo}_c = \frac{|\Psi'''(0)|}{6}. \quad (4.5)$$

In the V-shape and L-shape cases, both quantities depend strongly on the angle α . The difference $\text{Bo}_{\text{eff}} - \text{Bo}_c$, as it can be seen in (4.4), ensures whether the dispersion relation is purely convex (namely is always above its tangent), yielding the capillary-dominated regime, or starts like a concave curve in the neighbourhood of the origin (the dispersion relation curve starts under the line $\omega = c_{\text{eff}} k$). In both cases, the shape of the curve is convex at large wavenumbers k ($\omega \sim \sqrt{\sigma_{\text{eff}}/\rho} k^{3/2}$). For a given substrate of given angle α , may it be an L-shaped or a V-shaped substrate, the larger the volume of water, the larger the effective width W_{eff} and the smaller the effective Bond number Bo_{eff} . Conversely, because of the presence of $g_{\text{eff}} = g \sin \alpha$, Bo_{eff} can reach large numbers when the volume is small (yet larger than the Plateau-Rayleigh threshold).

As it can be seen in figure 9(c), the value of $\Psi'''(0)$ ranges from -1 at vanishing α , to -2 at $\alpha = \pi/4$ for a V-shaped substrate, and down to -3 for α approaching $\pi/2$ when ignoring the capillary cap. These results are valid in the absence of surface tension, or considering that the interface remains horizontal. Now, let us compare the previous results with the experimental results of §2 in terms of effective Bond number Bo_{eff} .

In the V-shape case with no surface tension, we have $\alpha = 10^\circ$, $\Psi'''_{\text{num}}(0) \simeq -1.061$, so that $\text{Bo}_c \simeq 1/6 \simeq 0.167$. The value of the effective surface tension σ_{eff} are given by fitting the experimental spectra (see table 1). For a volume $V = 35$ mL, we find $\text{Bo}_{\text{eff}} \simeq 1.00$, whereas for a larger volume $V = 80$ mL, we find $\text{Bo}_{\text{eff}} \simeq 0.274$. At volumes lower than $V = 80$ mL, the dispersion relation curve remains convex and we can note that the curve is linear within a larger range of small k as the volume increases. It seems that the transition occurs at the vicinity of the volume $V = 80$ mL (see figure 3). Therefore, from our experiments, we can perform the estimation $\text{Bo}_c \simeq 0.274$, so that $\Psi'''_{\text{expe}}(0) \simeq -6 \times 0.274 \simeq -1.644$. This result departs from the case without surface tension because of the presence of the capillary cap on top of the triangular wedge.

5. Beyond the linear dispersive regime: the Korteweg–de Vries equation

In this part we will take into account the nonlinear effects and evidence the propagation of nonlinear constriction waves along our cylinders. To that end, we will draw an analogy between the Saint-Venant equations and equations of nonlinear acoustics. This analogy will yield an ad-hoc Korteweg–de Vries equation. Note that this formalism can be generalised to other constriction waves such as solitary waves found in Plateau borders (§5.4).

5.1. Linear part of the Korteweg–de Vries equation

We will start with the following statement: If we consider the first dispersive contribution of the general dispersion relation (1.1), we obtain (4.4), which corresponds to a wave equation that reads

$$\eta_{tt} - c_{\text{eff}}^2 [\eta_{xx} + W_{\text{eff}}^2 (\text{Bo}_c - \text{Bo}_{\text{eff}}) \eta_{xxx}] = 0. \quad (5.1)$$

The linear part of the KdV equation (1.2) reads

$$\eta_t + c_{\text{eff}} \left[\eta_x + \frac{1}{2} W_{\text{eff}}^2 (\text{Bo}_c - \text{Bo}_{\text{eff}}) \eta_{xxx} \right] = 0. \quad (5.2)$$

and this wave equation corresponds to travelling waves in the right direction.

5.2. Saint-Venant equations as nonlinear acoustics equations

In order to obtain the nonlinear contribution in (1.2), we will use the Saint-Venant equations previously used in Part 1 of this work (Pham *et al.* 2020) and treat them as nonlinear acoustics equations. The aim is to eliminate the averaged speed in the Saint-Venant equations and obtain a nonlinear wave equation in the section variable only. The details of the derivation are deferred to appendix A.3. It follows a calculation due to Earnshaw (1860), as presented by Whitham (1999, §6.9). In this subsection, we will disregard the surface tension effects and suppose that the transverse section of liquid has a flat horizontal free interface.

We start from the Saint-Venant equations

$$\partial_t S + \partial_x (S \bar{u}) = 0, \quad (5.3)$$

$$\partial_t \bar{u} + \bar{u} \partial_x \bar{u} + \frac{1}{\rho} \langle \partial_x P \rangle = 0, \quad (5.4)$$

for a transverse section of the liquid $S(x, t)$, a section-averaged velocity in the x -direction $\bar{u}(x, t)$ and a section-averaged hydrostatic pressure gradient $\langle \partial_x P(x, t) \rangle$ (see Pham *et al.* (2020)). In the context of a section with a horizontal free interface, the section-averaged pressure gradient reads $\langle \partial_x P \rangle = \rho g \partial_x H$, where $H(x, t)$ denotes the vertical position of the free interface. As we want to eventually obtain an equation in the variable S only, we first write H as a function of the cross-sectional area S and perform the symbolic substitution $\frac{1}{\rho} \langle \partial_x P \rangle \equiv \frac{1}{S} \partial_x \Pi(S)$. The Saint-Venant equations then become

$$\partial_t S + \partial_x (S \bar{u}) = 0, \quad (5.5)$$

$$\partial_t \bar{u} + \bar{u} \partial_x \bar{u} + \frac{1}{S} \partial_x \Pi(S) = 0, \quad (5.6)$$

which is equivalent to the one-dimensional compressible Euler equations governing the dynamics of a compressible isentropic gas of density $\varrho(x, t)$, velocity $\bar{u}(x, t)$ and pressure field $\Pi(x, t)$.

In the case of a polytropic gas, namely a system which has an equation of state that reads $\Pi(S) = \kappa S^\gamma$, and in the case of a wave travelling in the right direction, $\bar{u}$ can be eliminated in (5.5) and we obtain the nonlinear wave equation

$$\partial_t S + c_0 \left(1 + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{S - S_0}{S_0} \right) \partial_x S = 0. \quad (5.7)$$

In the case of a rectangular section, we have $\gamma = 2$. In the case of triangular section, we have $\gamma = 3/2$. Note that if the nonlinear terms are neglected, we recover the non-dispersive linear regime.

The linear waves in the variable $S(x, t)$ actually follow the dispersion relation (5.2) at first dispersive order. Taking into account both the first correction in nonlinearity and in dispersion thus yields the following Korteweg–de Vries equation

$$\partial_t S + c_{\text{eff}} \left[\partial_x S + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{S - S_0}{S_0} \partial_x S + \frac{1}{2} W_{\text{eff}}^2 (\text{Bo}_c - \text{Bo}_{\text{eff}}) \partial_{xxx} S \right] = 0. \quad (5.8)$$

For a rectangular channel of width W and depth at rest H_0 , we have $S(x, t) = WH(x, t)$, $c_{\text{eff}} = \sqrt{gH_0}$, and $\gamma = 2$. Moreover, $\Psi(\xi) = \tanh(\xi)$ so that $\Psi'''(0) = -2$ and $\text{Bo}_c = 1/3$. By using $\eta = H(x, t) - H_0$ as the variable, the standard Korteweg–de Vries equation is recovered, which reads

$$\partial_t \eta + \sqrt{gH_0} \left[\partial_x \eta + \frac{3}{2} \frac{\eta}{H_0} \partial_x \eta + \frac{1}{2} H_0^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{\sigma}{\rho g H_0^2} \right) \partial_{xxx} \eta \right] = 0. \quad (5.9)$$

In the case of a wedge-shaped channel with a flat interface (surface tension is taken into account but not the capillary cap) and of depth H_0 , we have $c_{\text{eff}} = \sqrt{gH_0/2}$ and $W_{\text{eff}} = H_0/(2 \sin \alpha)$. The variations of the cross-sectional area are related to the displacement of the border of the interface, hence to the variations of the width of the interface, that will be denoted W . The cross-sectional area S is proportional to W^2 so that the ratio $(S - S_0)/S_0$ becomes $2(W - W_0)/W_0$ with $W_0 = \sin(\alpha + \beta)/(\sin \alpha \sin \beta) H_0 = 2[\sin(\alpha + \beta)/\sin \beta] W_{\text{eff}}$ (see (3.14)). The Korteweg–de Vries equation for a general triangle now reads, in terms of variable $\eta = W - W_0$, with W_0 the width at rest

$$\partial_t \eta + c_{\text{eff}} \left[\partial_x \eta + \left(\frac{5}{4} \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \right) \frac{\eta}{W_{\text{eff}}} \partial_x \eta + \frac{1}{2} W_{\text{eff}}^2 (\text{Bo}_c - \text{Bo}_{\text{eff}}) \partial_{xxx} \eta \right] = 0. \quad (5.10)$$

for angles $\alpha < \beta$, with $\text{Bo}_c = |\Psi'''_{\alpha, \beta}(0)|/6$ and $\text{Bo}_{\text{eff}} = \sigma/(\rho g W_{\text{eff}}^2)$.

In the L-shape case ($\alpha = \pi/2 - \beta$) and for small values of α , the prefactor $\sin \beta / \sin(\alpha + \beta)$ is close to 1 and can be ignored in this limit. We then have the approximation $5/4 \times \sin \beta / \sin(\alpha + \beta) \simeq 5/4$. In contrast, in the V-shape case ($\alpha = \beta$) and for a small angle α , the sinusoidal prefactors add a factor 1/2 and we have $5/4 \times \sin \beta / \sin(\alpha + \beta) \simeq 5/8$.

In our experimental set-up, that will consist in an L-shaped triangle with a capillary cap on top, the equation of state is no longer that of a polytropic gas, but rather that of a barotropic gas. In this case, $\Pi(S)$ is no longer a power law. The nonlinear wave equation can be formally derived using the expression of $\Pi(S)$, that could be computed after tedious calculations. Instead of doing so, we assume that the geometrical ansatz of the cylinder cross-section as a triangle of angle α and β (hence a polytropic exponent $\gamma = 3/2$) is relevant to yield the nonlinear term in the nonlinear wave equation, so that the Korteweg–de Vries equation now reads in the variable $\eta = W - \Delta Y_{\text{max}}$, where ΔY_{max} is the width at rest

$$\partial_t \eta + c_{\text{eff}} \left[\partial_x \eta + \left(\frac{5}{2} \frac{W_{\text{eff}}}{\Delta Y_{\text{max}}} \right) \frac{\eta}{W_{\text{eff}}} \partial_x \eta + \frac{1}{2} W_{\text{eff}}^2 (\text{Bo}_c - \text{Bo}_{\text{eff}}) \partial_{xxx} \eta \right] = 0, \quad (5.11)$$

with $W_{\text{eff}} = c_{\text{eff}}^2/g_{\text{eff}}$, Bo_c and Bo_{eff} given by (4.5), and the prefactor ν_1 in front of the nonlinear term here is

$$\nu_1 = \frac{5}{2} \frac{W_{\text{eff}}}{\Delta Y_{\text{max}}}. \quad (5.12)$$

5.3. Experimental results

For a Korteweg-de Vries equation of the form

$$\partial_t \eta + c_{\text{eff}} \left[\partial_x \eta + \frac{\nu_1}{W_{\text{eff}}} \eta \partial_x \eta + \frac{1}{2} W_{\text{eff}}^2 (\text{Bo}_c - \text{Bo}_{\text{eff}}) \partial_{xxx} \eta \right] = 0, \quad (5.13)$$

the one-soliton solution reads

$$\eta(x, t) = A_0 \text{sech}^2 \left(\frac{x - ct}{\Delta} \right), \quad (5.14)$$

with the following relationship between speed c , amplitude A_0 , and width Δ

$$\frac{c}{c_{\text{eff}}} = 1 + \frac{\nu_1 A_0}{3W_{\text{eff}}}, \quad (5.15)$$

$$\frac{\Delta}{W_{\text{eff}}} = \sqrt{2 \frac{\text{Bo}_c - \text{Bo}_{\text{eff}}}{c/c_{\text{eff}} - 1}}. \quad (5.16)$$

In our experiments, we will study the propagation of large negative amplitude waves and see if the relationship (5.15) is satisfied with ν_1 given by (5.12). To that end, we will consider the L-shaped substrate, tilted by a small angle $\alpha = 2^\circ, 3^\circ$ or 4° . We will use a volume of water $V = 40$ mL, which is sufficiently small for the effective Bond number to be large compared to the value of critical Bond number that lies somewhere in between $1/3$ and $1/6$ (see §4.3).

In order to generate a large amplitude soliton, we use a micro-pipette that injects a small jet of water inside the sessile liquid cylinder. Because of the jet, a depression is locally created that strongly disturbs the interface (see figure 10(a) and movie as a supplementary material). A train of fast waves and a hump of water are ejected and travel to the other end of the drop. Eventually, a deep depression solitary wave emerges, propagating at a speed c slower than the speed of the non-dispersive waves c_{eff} . Note that contrary to their Leidenfrost counterpart, because of the dissipation at the contact line, these depression waves damp in a shorter distance about half of the drop.

We measure the propagation speed c of this solitary wave as well as its negative amplitude A_0 . The results are shown in figure 10(b) where the dimensionless ratio c/c_{eff} is measured with respect to the dimensionless ratio $A_0/3W_{\text{eff}}$. In this plot, we have added the results found by Falcon *et al.* (2002) in experiments performed in mercury; they follow a line of slope $\nu_1 = 3/2$ in accordance with the rectangular geometry of the tank they use. The measurements in the Leidenfrost case are plotted as well, and they follow a line of slope $\nu_1^{\text{expe}} \simeq 3$ (Perrard *et al.* 2015).

At volume $V = 40$ mL and length $L = 50$ cm, the cross-sectional area is $S_{\text{tot}} = V/L = 80 \text{ mm}^2$; the value of the geometric parameter m yielding the analytical shape of the drop section can then be analytically deduced, as well as the values of the width of the drop ΔY_{max} and the effective width $W_{\text{eff}} = c_{\text{eff}}^2/g_{\text{eff}}$ (see equations (3.44), (2.20) and (3.47) respectively, in Pham *et al.* (2020)). At angles $\alpha = 2^\circ, 3^\circ$ and 4° , the prefactor ν_1 given by (5.12) is then respectively equal to 2.1, 2.03 and 1.99, which is very close to 2. In order to test this prediction, we have plotted the line of slope $\nu_1 = 2$. From the experimental data points obtained with our superhydrophobic substrate, the most significant points

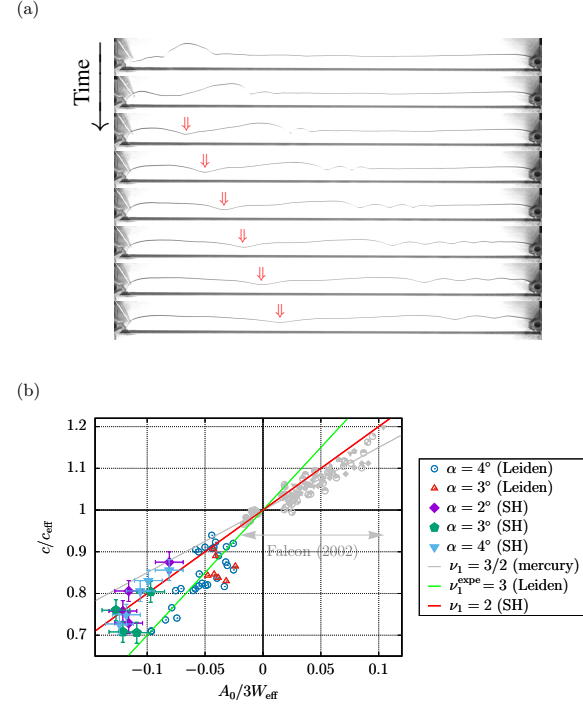


FIGURE 10. (a) Snapshots of the propagation of a KdV soliton. The deposited volume is equal to 40 mL and the angle α is equal to 2° . After a strong perturbation of the surface at the tip of the cylinder, waves propagate ahead of a solitary depression that emerges (see arrows) and propagates at a speed c lower than c_{eff} , the propagation speed of the long-wavelength waves. Eventually, it vanishes. (b) Renormalized propagation speed c/c_{eff} versus renormalized amplitude $A_0/(3W_{\text{eff}})$. The region $c/c_{\text{eff}} > 1$ corresponds to the supersonic soliton regime (namely the gravity-dominated regime where elevation solitons exist), whereas the region $c/c_{\text{eff}} < 1$ corresponds to the subsonic soliton regime (namely the capillary-dominated regime where depression solitons exist). The data points (SH, for three different angles α) seem to follow a straight line of slope $\nu_1 \simeq 2$. As a comparison, we have added the experimental data in mercury from Falcon *et al.* (2002) (in gray, following the standard slope $\nu_1 = 3/2$, each symbol representing a given depth of mercury) along with those obtained by Perrard *et al.* (2015) in Leidenfrost (open symbols, following a slope $\nu_1^{\text{expe}} \simeq 3$).

are those with the largest amplitudes and the lowest speeds, since they are the easiest ones to characterise. Those points seem to follow a slope ν_1^{expe} slightly larger than 2, which is in reasonable agreement with our prediction $\nu_1 = 2$.

5.4. Korteweg-de Vries solitons in Plateau borders

The method we have presented to derive the KdV equation is generic and it can be applied to other free-interface systems with a cylinder-type geometry. As an illustration

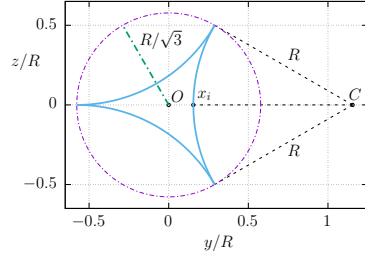


FIGURE 11. Transverse section of a Plateau border of radius of curvature R , centred at the origin O . Its boundaries are defined as three tangent circle arcs (in blue). x_i denotes the distance from the center to the interface. The length $|Cx_i|$ is the radius of curvature R of the Plateau border, C is the center of curvature of one of the three interfaces. The Plateau border is circumscribed in a circle of radius $R/\sqrt{3}$, centred at origin.

of the genericity of the method, we will consider the case of Plateau borders, along which the observation of the propagation of depression solitary waves has been reported in experiments using soap films (Argentina *et al.* 2015; Bouret *et al.* 2016).

A Plateau border is a cylinder of liquid that corresponds to a geometric region bounded by three tangent circles of radius $R(x, t)$. The latter corresponds to the radius of curvature of the cylinder at the coordinate x and time t (see figure 11). The section of a Plateau border of radius of curvature R is given by

$$S(R) = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) R^2. \quad (5.17)$$

Let C be one of the three centers of curvature. The distance from the origin to this center C is

$$OC(R) = \frac{R}{2\sqrt{3}} + R\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}R. \quad (5.18)$$

The distance from the origin to the interface is

$$Ox_i(R) = |OC(R)| - R = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) R. \quad (5.19)$$

Using the Laplace law, we can then deduce the pressure term, that reads

$$P(x, t) = +\sigma \left[-\frac{1}{R(x, t)} - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) \partial_{xx} R(x, t) \right]. \quad (5.20)$$

It is uniform in the section so that we can apply the Saint-Venant formalism. After setting $R = R_0[1 + \varepsilon \exp[i(kx - \omega t)]]$ and $\bar{u} = \varepsilon u_0 \exp[i(kx - \omega t)]$, equations (5.3) and (5.4), at order 1 in ε , yield the dispersion relation

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{2\rho R_0} k^2 \left[1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) R_0^2 k^2 \right]. \quad (5.21)$$

after elimination of u_0 and ε . It would be interesting to validate this theoretical dispersion relation experimentally. To our knowledge, the dispersion relations of waves along Plateau border studied so far were related to the sinuous modes (Kosdogadan Acharige *et al.* 2014) and not to the varicose modes.

From the nonlinear acoustics analogy (see appendix A.3), we can deduce the following

equation of state

$$\Pi(S) = \frac{\sigma}{\rho} \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)^{1/2} S^{1/2}, \quad (5.22)$$

which corresponds to a polytropic gas, with exponent $\gamma = 1/2$. The dispersion relation for linear dispersive waves travelling to the right reads

$$\omega = c_0 k \left[1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right) R_0^2 k^2 \right], \quad (5.23)$$

with $c_0 = \sqrt{\sigma/(2\rho R_0)}$. The KdV equation in the S variable can then be derived from (5.8) as

$$\partial_t S + c_0 \left[\partial_x S + \frac{3}{4} \frac{S - S_0}{S_0} \partial_x S - \frac{1}{2} R_0^2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) \partial_{xxx} S \right] = 0. \quad (5.24)$$

The KdV equation in the width variable r ($R = R_0 + r$) then reads

$$\partial_t r + c_0 \left[\partial_x r + \frac{3}{2R_0} r \partial_x r - \frac{1}{2} R_0^2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) \partial_{xxx} r \right] = 0. \quad (5.25)$$

We then have a soliton solution (5.14) that reads, for $\nu_1 = 3/2$ and $v = c/c_{\text{eff}}$:

$$r(x, t) = 2(v - 1)R_0 \operatorname{sech}^2 \frac{x - vc_0 t}{\sqrt{\frac{2(2/\sqrt{3}-1)}{1-v}} R_0} \equiv A_0 \operatorname{sech}^2 \frac{x - vc_0 t}{\frac{2\sqrt{\beta}}{\sqrt{1-v}} R_0}. \quad (5.26)$$

Experimentally, Bouret *et al.* (2016) found $2\sqrt{\beta_{\text{expe}}} \simeq 0.4$, whereas we have $2\sqrt{\beta} \equiv \sqrt{2(2/\sqrt{3}-1)} \simeq 0.56$, which yields a relative error of 40%, improving the model used by Argentina *et al.* (2015), who found $2\sqrt{\beta} = 2\sqrt{(2\sqrt{3}-\pi)/\pi} \simeq 0.64$, namely a relative error of 60%.

6. Conclusion

In Part 1 of this two-part article, we had shown that sessile cylinders on a flat superhydrophobic substrate were not stable owing to the Plateau-Rayleigh instability. In contrast, placed upon a wedge shaped superhydrophobic channel, they could be stable against varicose modes provided their cross-sectional area is sufficiently large. We resorted to the Saint-Venant equations in order to analytically compute the phase speed of varicose waves in the non-dispersive regime. We showed that the cylinder section was equivalent to the superposition of a wedge-shaped section of water with a capillary cap on top of it (Pham *et al.* 2020).

In this second part, we have studied the dispersive regime of the varicose waves using numerical calculations. These calculations yielded the full spectra of the varicose and the sloshing modes of a triangular channel of arbitrary shape, without considering the surface tension effects. We introduced the dispersive contribution of the surface tension using the Saint-Venant formalism and evidenced an effective renormalization of the surface tension stemming from the presence of a capillary cap which induces a non-trivial curvature profile along the free boundary of the section of the cylinder submitted to varicose perturbations. These calculations allowed us to estimate the transition between the capillary- and the gravity-dominated regime, depending on the cross-sectional area of the cylinder. This transition crucially depends on the bathymetry of the channel. Sinuous modes have been experimentally evidenced as well.

We have proposed a derivation of the KdV equation, adapted to our capillary cylinders.

For this purpose, we have calculated the first nonlinear corrections to our linear wave propagation, by using a nonlinear acoustics analogy to the Saint-Venant equations. Coupled with a reduced-gravity effect caused by the geometry of the substrate, the propagation of depression KdV solitons of centimetre scale was evidenced. Experiments regarding elevation KdV solitons will be carried to confirm the predictions.

Our derivation of the KdV equation was adapted to another physical system, Plateau borders, and our predictions were in agreement with the experiments previously performed by Argentina *et al.* (2015).

All the theoretical results regarding the dispersive regime were obtained using a number of assumptions and approximations that reasonably capture the experimental properties of the different modes. The presence of the capillary cap on top of the wedge-shaped section is of importance and must be taken into account in order to be fully accurate. To do so, numerical simulations of the full hydrodynamics equations must be performed; they are left for future work.

Acknowledgements

CTP thanks Cédric Mezui for preliminary experiments. The authors thank laboratory Matière et Systèmes Complexes (MSC) and Laboratoire Interdisciplinaire des Sciences du Numérique (LISN) for their valuable material and financial support, Arnaud Grados and Mathieu Receveur for technical support, Filip Novkoski, Florence Élias and Valentin Leroy for fruitful discussions. This work has benefited from no other funding whatsoever.

Declaration of interests

The authors report no conflict of interest.

Supplementary movies

Supplementary movies are available at <https://...>

Appendix A. Saint-Venant equations: dispersive and nonlinear effects

We start this appendix by presenting the Saint-Venant equations. We will see to what extent this Saint-Venant formalism can capture the dispersive effects and comparisons with the standard rectangular tank dispersion relation will be made in §A.2. From these statements, a toy model devoted to the estimation of the effective surface tension σ_{eff} measured in our experimental spectra will follow in appendix B. §A.3 is specifically devoted to the derivation of the nonlinear wave equation (5.7), by drawing an analogy between the Saint-Venant equations and nonlinear acoustics equations.

A.1. Saint-Venant equations

The Saint-Venant equations are a set of hyperbolic equations that were proposed by the eponymous Saint-Venant (1871) in order to study flows in open-channels. Their derivation is based on a long-wavelength expansion (shallow water limit $k \rightarrow 0$) and the basic hypotheses are the following: (i) the flow is considered quasi-parallel in the x -direction; (ii) the pressure is hydrostatic. Under these hypotheses, if one sets the following quantities

$$S(x, t), \text{ the transverse cross-sectional area of liquid,} \quad (\text{A } 1)$$

$$\bar{u}(x, t) = \frac{1}{S(x, t)} \int_{S(x, t)} u(x, y, z, t) dy dz, \text{ the section-averaged velocity,} \quad (\text{A } 2)$$

$$P(x, y, z, t), \text{ the hydrostatic 3D pressure field,} \quad (\text{A } 3)$$

the inviscid Saint-Venant equations read

$$\partial_t S + \partial_x (S \bar{u}) = 0, \quad (\text{A } 4)$$

$$\partial_t \bar{u} + \bar{u} \partial_x \bar{u} + \frac{1}{S(x, t)} \int_{S(x, t)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} [P(x, y, z, t)] dy dz = 0. \quad (\text{A } 5)$$

This set of equations is expressed in terms of section-averaged pressure gradient in the x -coordinate and turns into 1D equations in space. For a complete derivation of these equations (including viscous effects), one can read the article of Decoene *et al.* (2009). As we are interested in the linear dispersion relation of varicose waves, we will study a linearised version of these equations.

A.2. Dispersion and Saint-Venant formalism

One particular case where Saint-Venant can capture a part of the dispersive contribution of surface tension is when the interface remains strictly horizontal in the transverse plane (y, z) , that is, independent of the coordinate y . As an illustrative example, let us consider the varicose mode of gravity waves in a rectangular channel of fixed width W_0 . This will show the limitations of Saint-Venant formalism. The interface is supposedly horizontal and characterised by its height $H(x, t)$. At rest, the interface is flat, and $H(x, t) = H_0$. The section $S(x, t)$ reads $W_0 H(x, t)$. Here, the pressure field is hydrostatic and, taking into account the longitudinal curvature $\kappa^1 = -\partial_{xx} H$, it reads

$$P(x, y, z, t) = \rho g [H(x, t) - z] - \sigma \partial_{xx} H(x, t), \quad (\text{A } 6)$$

so that the linearised Saint-Venant equations become

$$W_0 \partial_t H + W_0 H_0 \partial_x u = 0, \quad (\text{A } 7)$$

$$\partial_t u + \frac{1}{S} \int_S \frac{1}{\rho} \partial_x P(x, y, z, t) dy dz = 0. \quad (\text{A } 8)$$

For a section $S(x, t) = \{(y, z) | 0 < y < W_0, 0 < z < H(x, t)\}$, knowing that the quantity $\frac{1}{\rho} \partial_x P = g \partial_x H(x, t) - \frac{\sigma}{\rho} \partial_{xxx} H(x, t)$ is independent of the coordinates y and z , we have

$$\frac{1}{S} \int_S \frac{1}{\rho} \partial_x [P(x, t)] dy dz = \left[\frac{1}{\rho} \partial_x P \right]_{(x, t)} \times \frac{1}{S} \int_S 1 dy dz = \left[\frac{1}{\rho} \partial_x P \right]_{(x, t)}. \quad (\text{A } 9)$$

The wave equation satisfied by H can be deduced as

$$\partial_{tt} H - g H_0 \left(\partial_{xx} H - \frac{\sigma}{\rho g} \partial_{xxxx} H \right) = 0. \quad (\text{A } 10)$$

Setting $H(x, t) \sim \exp[i(kx - \omega t)]$ yields the dispersion relation

$$\omega^2(k) = g H_0 (k^2 + \ell_c^2 k^4) \underset{k \rightarrow 0}{=} g H_0 k^2 (1 + \ell_c^2 k^2). \quad (\text{A } 11)$$

In contrast, it is well known that the actual dispersion relation for varicose waves in a rectangular channel reads

$$\omega^2 = g k (1 + \ell_c^2 k^2) \tanh(k H_0) = g H_0 k^2 (1 + \ell_c^2 k^2) \left[1 - \frac{1}{3} (k H_0)^2 + \mathcal{O}((k H_0)^4) \right]. \quad (\text{A } 12)$$

Both give the same non-dispersive results at quadratic order, namely

$$\omega^2 \underset{k H_0 \rightarrow 0}{\sim} g H_0 k^2. \quad (\text{A } 13)$$

The Saint-Venant averaging yields the dispersive contribution related to the surface tension but not that related to the finite depth H via the tanh function. It amounts to considering the tanh function as a linear function ($\tanh x \equiv x$) in the actual dispersion relation expression. The toy model presented in appendix B will be based on this substitution.

A.3. Saint-Venant equations as nonlinear acoustics equations

In this subsection, we will treat the Saint-Venant equations as nonlinear acoustics equations in order to obtain a nonlinear wave equation in the variable S , the cross-sectional area. We will neglect the surface tension contributions so that the transverse section of liquid has a flat interface and the hydrostatic pressure field gradient in the x -direction reads

$$\partial_x P(x, y, z, t) = \rho g \partial_x H(x, t). \quad (\text{A } 14)$$

On the one hand, the section-averaged Saint-Venant equations are given by (A 4, A 5). On the other hand, the dynamics of a compressible isentropic gas of density $\varrho(x, t)$, velocity $v(x, t)$ and pressure field $\Pi(x, t)$ is governed by the one-dimensional compressible Euler equations that read

$$\partial_t \varrho + \partial_x(\varrho v) = 0, \quad (\text{A } 15)$$

$$\partial_t v + v \partial_x v + \frac{1}{\varrho} \partial_x \Pi = 0. \quad (\text{A } 16)$$

Let $\langle \partial_x P \rangle$ denote the section-averaged pressure gradient in the x -coordinate of our hydrodynamic system. When considering the non-dispersive regime, we can write $\langle \partial_x P \rangle = \rho g \partial_x H(x, t)$. As the cross-sectional area S is monotonic in the height H , H can be considered as a function of S . Hence, we can perform the symbolic substitution

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \partial_x P \right\rangle = g \partial_x H[S(x, t)] \equiv \frac{1}{S(x, t)} \partial_x \Pi[S(x, t)], \quad (\text{A } 17)$$

and the Saint-Venant equations turn into

$$\partial_t S + \partial_x(S \bar{u}) = 0, \quad (\text{A } 18)$$

$$\partial_t \bar{u} + \bar{u} \partial_x \bar{u} + \frac{1}{S} \partial_x \Pi(S) = 0. \quad (\text{A } 19)$$

This set of equations is equivalent to the compressible Euler equations (A 15, A 16) provided that the substitutions $\bar{u} \leftrightarrow v$, $S \leftrightarrow \varrho$ are carried out. (A 18) corresponds to the mass conservation equation, while (A 19) corresponds to the momentum equation. In this situation, the equation of state $\Pi(S)$ corresponds to that of a barotropic gas.

At linear order (in the neighbourhood of the equilibrium density/section S_0), we can eliminate $\bar{u}$ and obtain the d'Alembert wave equation

$$\partial_{tt} S - c^2(S_0) \partial_{xx} S = 0, \quad (\text{A } 20)$$

with

$$c^2(S) = \frac{\partial \Pi}{\partial S}(S), \quad (\text{A } 21)$$

which yields a non-dispersive wave equation. In the following, $c(S_0)$ will be denoted c_0 .

As done in the field of nonlinear acoustics (see Whitham (1999, §6.9), following a calculation due to Earnshaw (1860)), we can obtain the first nonlinear corrections to this wave equation by expressing $\bar{u}(x, t)$ as a function $\bar{u}(S(x, t))$ of the density/section $S(x, t)$

and by eliminating it in (A 18). To do so, we use the fact that $\partial_t \bar{u} = (\partial_t S)(\partial_S \bar{u})$ and $\partial_x \bar{u} = (\partial_x S)(\partial_S \bar{u})$; the continuity equation (A 18) then turns into

$$\partial_t S + (\partial_x S) \bar{u} = -S(\partial_x S)(\partial_S \bar{u}), \quad (\text{A } 22)$$

and the momentum equation (A 19), using (A 21), turns into

$$[\partial_t S + (\partial_x S) \bar{u}](\partial_S \bar{u}) + \frac{1}{S} (\partial_x S) c^2(S) = 0. \quad (\text{A } 23)$$

Combining (A 22) and (A 23) yields the relationship

$$\partial_S \bar{u} = \pm \frac{c(S)}{S}, \quad (\text{A } 24)$$

so that (A 22) now reads

$$\partial_t S + [\bar{u}(S) \pm c(S)] \partial_x S = 0. \quad (\text{A } 25)$$

The speed of sound $c(S)$ is given by the equation of state $\Pi(S)$ using (A 21), and $\bar{u}(S)$ can be deduced from (A 24), which closes the equation.

Choosing the upper plus sign in (A 24) and (A 25) yields at linear order in $(S - S_0)$, $\bar{u}(S) \simeq [c(S_0)/S_0](S - S_0)$ and $c(S) \simeq c_0 + (\partial^2 \Pi / \partial S^2)|_{S_0}(S - S_0)/(2c_0)$, so that, at first nonlinear order,

$$\bar{u}(S) + c(S) = c_0 \left[1 + \left(1 + \frac{S_0}{2c_0^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} \Big|_{S_0} \right) \frac{S - S_0}{S_0} \right]. \quad (\text{A } 26)$$

In the end, the nonlinear wave equation (A 25), for a wave travelling in the right direction, reads

$$\partial_t S + c_0 \left[1 + \left(1 + \frac{S_0}{2c_0^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} \Big|_{S_0} \right) \frac{S - S_0}{S_0} \right] \partial_x S = 0. \quad (\text{A } 27)$$

We will now focus on the particular case of a polytropic gas, the equation of state of which reads

$$\Pi(S) = \kappa S^\gamma. \quad (\text{A } 28)$$

The exponent γ is called the polytropic exponent. We have

$$c(S) = (\kappa \gamma)^{\frac{1}{2}} S^{\frac{\gamma-1}{2}}, \quad (\text{A } 29)$$

and (A 24) yields

$$\bar{u}(S) = \int_{S_0}^S \frac{c(s)}{s} ds = \frac{2}{\gamma-1} [c(S) - c(S_0)]. \quad (\text{A } 30)$$

We can then compute

$$\bar{u}(S) + c(S) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} [c(S) - c(S_0)] + c(S_0), \quad (\text{A } 31)$$

$$= \frac{\gamma+1}{2} c(S_0) \frac{S - S_0}{S_0} + c(S_0) + \mathcal{O}(S - S_0), \quad (\text{A } 32)$$

after linearization of the difference $[c(S) - c(S_0)]$ in the neighbourhood of S_0 , using (A 29). Eventually, in the case of a wave travelling in the right direction, the nonlinear wave equation (A 25) — with the upper plus sign — reads, for a barotropic gas,

$$\partial_t S + c_0 \left(1 + \frac{\gamma+1}{2} \frac{S - S_0}{S_0} \right) \partial_x S = 0, \quad (\text{A } 33)$$

at first nonlinear order, after using (A 32) in (A 25). Note that this equation only depends on the polytropic exponent γ , regardless of the constant κ .

We will now consider the three following particular cases, encountered within this article :

(i) For a rectangular section of constant width W_0 and depth $H(x, t)$, we have $S(x, t) = W_0 H(x, t)$, so that $g\partial_x H = (g/W_0)(\partial_x S)$. In order to satisfy (A 17), we then have

$$\Pi(S) = \frac{gS^2}{2W_0}, \quad (\text{A } 34)$$

hence a polytropic exponent $\gamma = 2$.

(ii) For a triangular section of height $H(x, t)$ and angles α and β (see Fig. 6(a)), $S(x, t) = \lambda H(x, t)^2$ (with $\lambda = (\sin(\alpha + \beta))/(2 \sin \alpha \sin \beta)$ given by (3.14)), so that $g\partial_x H = g\lambda^{-1/2}\partial_x S^{1/2}$. Therefore, in order to satisfy (A 17), we have

$$\Pi(S) = \frac{gS^{3/2}}{3\lambda^{1/2}}, \quad (\text{A } 35)$$

hence a polytropic exponent $\gamma = 3/2$.

(iii) For a Plateau border, the pressure field is constant along the interface and is given by (5.20). The second derivative in $\partial_{xx}R$ will be disregarded since, in the nonlinear acoustics framework, only the non-dispersive terms are taken into account. Hence, we can express the pressure P as a function of the cross-sectional area S and we have, because of (5.17),

$$P(x, t) = -\frac{\sigma}{R(x, t)} = -\frac{\sigma \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)^{1/2}}{[S(x, t)]^{1/2}}. \quad (\text{A } 36)$$

The section-averaged value of $\partial_x P$ is given by

$$\langle \partial_x P(x, t) \rangle = \frac{\sigma \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)^{1/2}}{2[S(x, t)]^{3/2}} (\partial_x S), \quad (\text{A } 37)$$

so that the equation of state can be deduced from (A 17). It reads

$$\Pi(S) = \frac{\sigma}{\rho} \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)^{1/2} S^{1/2}, \quad (\text{A } 38)$$

which yields a polytropic exponent $\gamma = 1/2$.

Appendix B. Estimation of the effective surface tension via a toy model

In this appendix, in order to estimate the first dispersive corrections to the non-dispersive regime due to the surface tension, we will use the idea of averaging the pressure field gradient presented in appendix A. To that end, a toy model is proposed, based on the Saint-Venant equations pushed to their limits, if not beyond.

B.1. Parameterization of the interface

In this article and in Pham *et al.* (2020), in the case of varicose modes, we make the following strong hypothesis: at any coordinate x , at any time t , we will assume that the cross-section shape (of area value $S(x, t)$) is adiabatically given by the equilibrium static shape calculated in Pham *et al.* (2020), at that very value $S(x, t)$, corresponding to a geometrical parameter $m(x, t)$. This assumption implies that the contact line is free

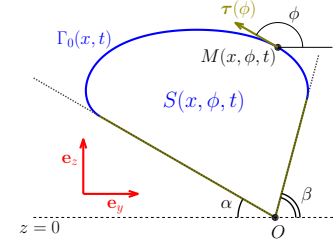


FIGURE 12. Schematic of the notations. At time t and coordinate x , the section $S(x, t)$ is determined by its interface $\Gamma_0(x, t)$. The latter can be parameterised, using the angle ϕ made by its tangent τ with the horizontal, at the corresponding point $M(x, \phi, t)$. As an illustration, here, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 75^\circ$, $\mu = 10^{-2}$. For a V-shaped substrate, $\beta = \alpha$, whereas for an L-shaped substrate, $\beta = \pi/2 - \alpha$.

to move on the superhydrophobic substrate, with contact angle at the substrate kept constant at the value π . In the rest of this appendix, we will set the parameter μ such that $\mu = 1 - m$.

Under this hypothesis, in the case of a V-shaped substrate of angle α , the shape of the free interface $\Gamma_0(x, t)$, at the coordinate x and time t , can be parameterized in the (y, z) -plane by the angle ϕ made with the horizontal by its tangent vector τ (see figure 12). It can be viewed as the set of points $M(x, \phi, t)$ such that

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall \phi \in [\beta = \alpha, 2\pi - \alpha], M(x, \phi, t) = (x, \tilde{\eta}(x, \phi, t), \tilde{\zeta}(x, \phi, t)) \quad (\text{B } 1)$$

with

$$\tilde{\eta}(x, \phi, t) = \frac{\ell_c}{2} \sqrt{m(x, t)} \int_{\pi}^{\phi} d\varphi \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - m(x, t) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}, \quad (\text{B } 2)$$

$$\tilde{\zeta}(x, \phi, t) = \frac{\ell_c}{2} \sqrt{m(x, t)} \int_{\pi}^{\phi} d\varphi \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - m(x, t) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} + H_{\text{tot}}(m(x, t)), \quad (\text{B } 3)$$

with H_{tot} that reads

$$H_{\text{tot}}(m(x, t)) = \ell_c \sqrt{m(x, t)} \frac{\tan \alpha}{4} \int_{2\pi - \alpha}^{\alpha} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - m(x, t) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} d\varphi + \frac{2\ell_c}{\sqrt{m(x, t)}} \left[\sqrt{1 - m(x, t) \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \sqrt{1 - m(x, t)} \right]. \quad (\text{B } 4)$$

In the case of an L-shaped substrate, using the same notations as in the V-shape case (see figure 12), the interface $\Gamma_0(x, t)$ can be parameterized in the (y, z) -plane by the angle ϕ and be viewed as the points $M(x, \phi, t)$ such that

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall \phi \in \left[\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha, 2\pi - \alpha\right], M(x, \phi, t) = (x, \tilde{\eta}(x, \phi, t), \tilde{\zeta}(x, \phi, t)), \quad (\text{B } 5)$$

knowing that the expressions of $\tilde{\eta}(x, \phi, t)$ and $\tilde{\zeta}(x, \phi, t)$ read

$$\tilde{\eta}(x, \phi, t) = \frac{\ell_c}{2} \sqrt{m(x, t)} \int_{2\pi-\alpha}^{\phi} d\varphi \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - m(x, t) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} - \eta'_{\text{bott}}, \quad (\text{B } 6)$$

$$\tilde{\zeta}(x, \phi, t) = \frac{\ell_c}{2} \sqrt{m(x, t)} \int_{2\pi-\alpha}^{\phi} d\varphi \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - m(x, t) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} - \zeta'_{\text{bott}}, \quad (\text{B } 7)$$

$$\eta'_{\text{bott}} = +\frac{\ell_c}{2} \sqrt{m(x, t)} \cos \alpha \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{2\pi-\alpha} d\varphi \frac{\sin(\varphi - \frac{\pi}{2} + \alpha)}{\sqrt{1 - m(x, t) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}, \quad (\text{B } 8)$$

$$\zeta'_{\text{bott}} = -\frac{\ell_c}{2} \sqrt{m(x, t)} \sin \alpha \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{2\pi-\alpha} d\varphi \frac{\sin(\varphi - \frac{\pi}{2} + \alpha)}{\sqrt{1 - m(x, t) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}. \quad (\text{B } 9)$$

In both parameterizations, the origin $O = (0, 0)$ is set at the bottom of the substrate.

The hydrostatic pressure field reads, at a given point $M(x, y, z, t)$ in the liquid, taking the Laplace law at the interface into account

$$p(x, y, z, t) = \rho g [\tilde{\zeta}(x, \phi, t) - z] + \sigma \kappa, \quad (\text{B } 10)$$

where the angle ϕ is such that $\eta(x, \phi, t) = y$, whereas $\kappa = 2\mathcal{H}$ is twice the mean curvature $\mathcal{H}$ and can be splitted into the sum $\kappa = \kappa^t + \kappa^l$ with κ^t the transverse curvature κ^t (that is, in the section) and κ^l the longitudinal curvature (in the x -direction).

From now on, the variable x will be expressed in ℓ_c unit and the wavenumber k will be dimensionless. As we are dealing with the problem of linear waves, we will start from a static situation corresponding to a parameter m_0 and perturb this state by considering the following parameter

$$m(x, t) = m_0 [1 + \varepsilon \cos(kx - \omega t)]. \quad (\text{B } 11)$$

In the following, we will resort to the usual partial and complete elliptic integrals (for any parameter $m < 1$) defined as

$$\text{E}(\phi|m) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - m \sin^2 x} dx, \quad \text{E}(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m \sin^2 x} dx, \quad (\text{B } 12)$$

$$\text{F}(\phi|m) = \int_0^{\phi} \frac{dx}{\sqrt{1 - m \sin^2 x}}, \quad \text{K}(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - m \sin^2 x}}. \quad (\text{B } 13)$$

B.2. Curvatures in the V-shape case

In the case of a V-shaped substrate, at order 1 in ε , we have, after tedious calculations,

$$\ell_c \mathcal{H}(x, \phi, m_0, \alpha, t) = \mathcal{H}^0(\phi, m_0) + \varepsilon \cos(kx - \omega t) \times [\mathcal{H}^{1,0}(\phi, m_0) + \mathcal{H}^{1,1}(\phi, m_0, \alpha) k^2] + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (\text{B } 14)$$

with

$$\mathcal{H}^0(\phi, m_0) = \sqrt{\frac{1 - m_0 \sin^2 \frac{\phi}{2}}{m_0}}, \quad \mathcal{H}^{1,0}(\phi, m_0) = \frac{-1}{2m_0^{3/2} \sqrt{1 - m_0 \sin^2 \frac{\phi}{2}}}. \quad (\text{B } 15)$$

The first term $\mathcal{H}^0(\phi)$ corresponds to the static curvature $\frac{\ell_c}{2} \kappa^t(\phi, m_0)$ of the interface at rest. The second term $\mathcal{H}^{1,0}(\phi)$ gives the non-dispersive contribution of the dispersion

relation, namely the function $b(m)$ (with some prefactor) in Pham *et al.* (2020). Note that they are independent of the angle α . The last quantity $\mathcal{H}^{1,1}$ will yield the first dispersive correction to the dispersion relation. It reads

$$\mathcal{H}^{1,1}(\phi, m, \alpha) = \frac{1}{8m^{3/2}(1-m)} [\mathcal{A}_V(\phi, m, \alpha) \cos \phi + \mathcal{B}_V(\phi, m, \alpha) \sin \phi], \quad (\text{B } 16)$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_V(\phi, m, \alpha) = & 4(1-m) \left(\frac{1}{\sqrt{1-m \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-m \sin^2 \frac{\phi}{2}}} \right) \\ & + \tan \alpha \left\{ \frac{(m-2)m \sin \alpha}{\sqrt{1-m \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} + 2(1-m) \left[\text{F} \left(\frac{2\pi-\alpha}{2} \middle| m \right) - \text{F} \left(\frac{\alpha}{2} \middle| m \right) \right] \right. \\ & \left. + (2-m) \left[\text{E} \left(\frac{\alpha}{2} \middle| m \right) - \text{E} \left(\frac{2\pi-\alpha}{2} \middle| m \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B } 17)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_V(\phi, m, \alpha) = & 4(m-1) \left[\text{K}(m) - \text{F} \left(\frac{\phi}{2} \middle| m \right) \right] + 2(m-2) \left[\text{E} \left(\frac{\phi}{2} \middle| m \right) - \text{E}(m) \right] \\ & + \frac{(2m-m^2) \sin \phi}{\sqrt{1-m \sin^2 \frac{\phi}{2}}}. \end{aligned} \quad (\text{B } 18)$$

We have the following asymptotics, for $m \rightarrow 0$ (nearly-circle section)

$$\mathcal{H}^{1,1}(\phi, m, \alpha) \underset{m \rightarrow 0}{=} \frac{1}{8\sqrt{m}} \left[1 - \frac{\cos \phi}{\cos \alpha} \right] + \mathcal{O}(m^{3/2}); \quad (\text{B } 19)$$

and for $m = 1 - \mu \rightarrow 1$ (flattened section)

$$\mathcal{H}^{1,1}(\phi, m = 1 - \mu, \alpha) \underset{\mu \rightarrow 0}{=} \frac{1}{4\mu} [\sin \phi - \tan \alpha \cos \phi] + \mathcal{O}(\mu^0). \quad (\text{B } 20)$$

The function $\mathcal{H}^{1,1}$ is depicted in figure 13 for two different angles α and various parameters m together with the asymptotic expressions (B 19) and (B 20).

In the limit $m \rightarrow 1$, in the interval $\phi \in [\alpha, \pi]$, the function $\mathcal{H}^{1,1}$ reaches its maximum at $\phi_{\text{max}} = \pi/2 + \alpha$, hence its maximum is located in the upper neighbourhood of the tip of the drop for low angles α , whereas it is located near the top of the drop for α approaching $\pi/2$. Last, we have

$$\mathcal{H}^{1,1}(\phi_{\text{max}}) = \frac{1}{4\mu \cos \alpha}, \quad \mathcal{H}^{1,1}(\pi) = \frac{\tan \alpha}{4\mu}. \quad (\text{B } 21)$$

B.3. Curvatures in the L-shape case

In the case of an L-shaped substrate, after even more tedious calculations, we can compute the mean curvature of the interface $\mathcal{H}$. Its expression is the same as in the V-shape case (B 14), with $\mathcal{H}^0$ and $\mathcal{H}^{1,0}$ given by (B 15). As for $\mathcal{H}^{1,1}$, it reads

$$\mathcal{H}^{1,1}(\phi, m, \alpha) = \frac{1}{8m^{3/2}} [\mathcal{A}_L(\phi, m, \alpha) \cos \phi - \mathcal{B}_L(\phi, m, \alpha) \sin \phi], \quad (\text{B } 22)$$

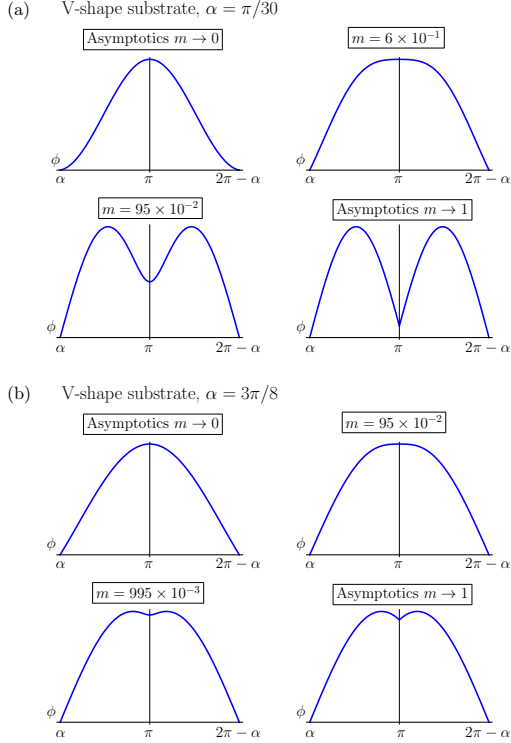


FIGURE 13. V-shaped channel case. Plots of $\mathcal{H}^{1,1}(\phi, m, \alpha)$ for different m (arbitrary vertical unit) with respect to angle $\phi \in [\alpha, 2\pi - \alpha]$. (a) $\alpha = \pi/30$. (b) $\alpha = 3\pi/8$. As α approaches $\pi/2$, the loci of the maxima approach π .

with

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_L(\phi, m, \alpha) = & \frac{4}{\sqrt{1 - m \sin^2 \frac{\phi}{2}}} + \sqrt{2} \sin^2 \alpha \left(\frac{1}{\sqrt{1 - m \sin^2 \frac{\pi - 2\alpha}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - m \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \\ & + \frac{2 - m}{1 - m} \sin 2\alpha \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - m \sin^2 \frac{\pi - 2\alpha}{4}}} + \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - m \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \right. \\ & \quad \left. + E \left(\frac{2\pi - \alpha}{2} \middle| m \right) - E \left(\frac{\pi - 2\alpha}{4} \middle| m \right) \right] \\ & - 2 \sin 2\alpha \left[F \left(\frac{\pi - 2\alpha}{4} \middle| m \right) - F \left(\pi - \frac{\alpha}{2} \middle| m \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{B } 23)$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_L(\phi, m, \alpha) = & \frac{2 - m}{1 - m} \left\{ m \left(-\frac{\sin^3 \alpha}{\sqrt{1 - m \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} + \frac{\cos^3 \alpha}{\sqrt{1 - m \sin^2 \frac{\pi - 2\alpha}{4}}} - \frac{\sin \phi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \frac{\phi}{2}}} \right) \right. \\ & \left. + 2 \left[-\cos^2 \alpha E \left(\frac{\pi - 2\alpha}{4} \middle| m \right) - \sin^2 \alpha E \left(\pi - \frac{\alpha}{2} \middle| m \right) + E \left(\frac{\phi}{2} \middle| m \right) \right] \right\} \\ & + \sin 2\alpha \left[m \left(-\frac{2 \sin^2 \frac{\pi - 2\alpha}{4}}{\sqrt{1 - m \sin^2 \frac{\pi - 2\alpha}{4}}} + \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - m \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \right) \right. \\ & \left. + 2 \left(-\sqrt{1 - m \sin^2 \frac{\pi - 2\alpha}{4}} + \sqrt{1 - m \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \right] \\ & + 4 \left[\cos^2 \alpha F \left(\frac{\pi - 2\alpha}{4} \middle| m \right) + \sin^2 \alpha F \left(\frac{2\pi - \alpha}{2} \middle| m \right) - F \left(\frac{\phi}{2} \middle| m \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B } 24)$$

We have the following asymptotics for $m \rightarrow 0$ (nearly-circle section)

$$\mathcal{H}^{1,1}(\phi, m, \alpha) \underset{m \rightarrow 0}{=} \frac{1 - \sin(\alpha + \phi) - \cos(\alpha + \phi)}{8\sqrt{m}} + \mathcal{O}(\sqrt{m}); \quad (\text{B } 25)$$

and for $m = 1 - \mu \rightarrow 1$ (flattened section)

$$\mathcal{H}^{1,1}(\phi, m = 1 - \mu, \alpha) \underset{\mu \rightarrow 0}{=} \frac{1}{4\mu} [\sin 2\alpha \cos \varphi - (1 \pm \cos 2\alpha) |\sin \varphi|], \quad \text{for } \varphi \gtrless \pi. \quad (\text{B } 26)$$

For both asymptotics, as expected, we recover the results of the V-shape case at angle $\alpha = \pi/4$. Figure 14 are illustrations of the skewed distribution of the curvature $\mathcal{H}^{1,1}$ with respect to ϕ . The skewness is strong at low angle α , as $m \rightarrow 1$.

B.4. Section-averaged pressure in the V-shape case

We now turn to the question of the pressure term. The Saint-Venant equations are based on an averaging of the gradient of the hydrostatic pressure field. We will here focus on the V-shape case.

As we need to compute

$$\langle \partial_x p \rangle(x, t) = \frac{1}{S(x, t)} \int_{S(x, t)} \partial_x p(x, y, z, t) dy dz, \quad (\text{B } 27)$$

with $p(x, y, z, t)$ given by (B 10), we will then start computing

$$\partial_x p(x, y, z, t) = \rho g \ell_c \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\tilde{\zeta}[\phi, m(x, t)]}{\ell_c} + \ell_c \kappa[\phi, m(x, t)] \right], \quad (\text{B } 28)$$

using (B 3) and (B 4), with $m(x, t) = m_0[1 + \varepsilon \cos(kx - \omega t)]$ (we recall that, here, x is

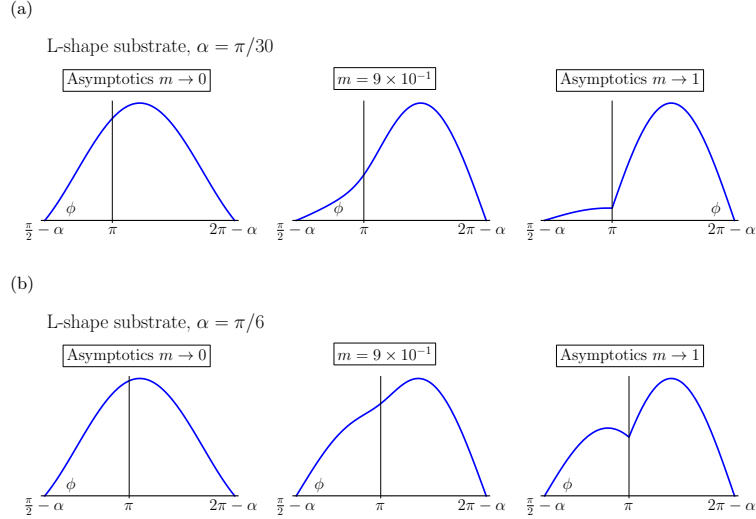


FIGURE 14. L-shaped channel. Plots of $\mathcal{H}^{1,1}(\phi, m, \alpha)$ for different m , with respect to angle $\phi \in [\pi/2 - \alpha, 2\pi - \alpha]$ (arbitrary vertical unit) (a) Angle $\alpha = \pi/30$. (b) Angle $\alpha = \pi/6$.

dimensionless; it has been renormalized in ℓ_c unit), so that we find

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\zeta}[\phi, m(x, t)]}{\ell_c} + \ell_c \kappa[\phi, m(x, t)] &= \frac{2}{m_0^{3/2}} \sqrt{1 - m_0 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \\ &+ \frac{\tan \alpha}{2m_0^{3/2}} \left\{ (2 - m_0) \left[F\left(\frac{2\pi - \alpha}{2} \middle| m_0\right) - F\left(\frac{\alpha}{2} \middle| m_0\right) \right] \right. \\ &\quad \left. - 2 \left[E\left(\frac{2\pi - \alpha}{2} \middle| m_0\right) - E\left(\frac{\alpha}{2} \middle| m_0\right) \right] \right\} \\ &+ \varepsilon \cos(kx - \omega t) [b_{\text{eff}}(m_0, \alpha)] \\ &+ 2 \varepsilon k^2 \cos(kx - \omega t) [\mathcal{H}^{1,1}(\phi, m_0, \alpha)] + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (\text{B } 29) \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} b_{\text{eff}}(m_0, \alpha) &= \frac{-1}{m_0^{3/2} \sqrt{1 - m_0 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} + \frac{\tan \alpha}{4} \left[\frac{(2 - m_0) \sin \alpha}{m_0^{1/2} (1 - m_0) \sqrt{1 - m_0 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2 - m_0) [E(\frac{2\pi - \alpha}{2} | m_0) - E(\frac{\alpha}{2} | m_0)] + 2(1 - m_0) [F(\frac{\alpha}{2} | m_0) - F(\frac{2\pi - \alpha}{2} | m_0)]}{(1 - m_0) m_0^{3/2}} \right]. \quad (\text{B } 30) \end{aligned}$$

All the terms of order k^0 are independent of the variable ϕ and remain the same after an averaging in the section $S(x, t)$. Those terms yield the non-dispersive dispersion relation found by Pham *et al.* (2020).

We will now focus on the averaged value of $\mathcal{H}^{1,1}$ over the section $S(x, t)$ and we will first

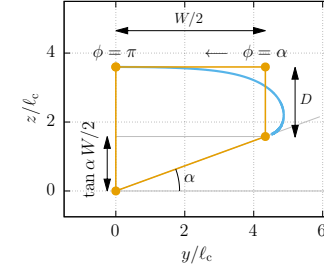


FIGURE 15. Shape of half of the sessile drop on a V-shaped substrate, for $\mu = 5 \times 10^{-5}$ and $\alpha = 20^\circ$ (in blue), along with the corresponding trapezoidal ansatz. We have $D = 2\ell_c(1 - \sqrt{\mu})$ and $W = A_c$. The flat horizontal interface is travelled from the right to the left, for a parameter ϕ ranging from α to π . The figure is scaled in ℓ_c unit.

discuss its definition. The function $\mathcal{H}^{1,1}$ is a function that is not defined in the interior of $S(x, t)$ but along its free interface. The presence of the $\mathcal{H}^{1,1}$ term stems from the capillary pressure term. Under the adiabatic hypothesis, the definition of the pressure field as a hydrostatic field is actually ill-posed for it is multi-valued in the region of coordinates y where the interface has two values (that is, in the neighbourhood of both tips of the section), because of the presence of the longitudinal curvature $\kappa^1 \equiv \mathcal{H}^{1,1}/\ell_c$ that differs at the two corresponding angles ϕ . By neglecting $\mathcal{H}^{1,1}$ in the non-dispersive regime, this problem was circumvented in the article by Pham *et al.* (2020) (see the discussion above equation (3.14) in the latter reference).

In the following, we will use the quantity A_c defined, in the $\mu = 1 - m \rightarrow 0$ -limit, as

$$A_c(\mu = 1 - m) \underset{\mu \rightarrow 0}{\simeq} \ell_c [-\log \mu + 4(\log 2 - 1)]. \quad (\text{B } 31)$$

It corresponds to the wetting length of a sessile cylinder on a horizontal superhydrophobic substrate. The height of such a cylinder is given by

$$D(\mu) \underset{\mu \rightarrow 0}{\simeq} 2\ell_c(1 - \sqrt{\mu}), \quad (\text{B } 32)$$

(see Pham *et al.* (2020, p. 9)). Symbolically, the section-averaged term is supposed to be of the form

$$\langle \mathcal{H}^{1,1} \rangle = \frac{1}{S(x, t)} \iint_{S(x, t)} \mathcal{H}^{1,1} dy dz. \quad (\text{B } 33)$$

As a relevant geometrical ansatz of the section $S(x, t)$, we will consider the drop as two trapezoidal parts, the free interface being flat, the capillary cap being a rectangle of width $W = A_c(\mu)$ and height $D(\mu)$ and the liquid part in contact with the substrate being a symmetrical V-shape triangle of angle α and height $(W \tan \alpha)/2$. Because of the symmetry, we will only consider half of the domain (see figure 15). The interface will be travelled from the right to the left, parameterised by the angle ϕ , from $\phi = \alpha$ to $\phi = \pi$. Note that considering a simpler ansatz only consisting of a sole triangular section would have eventually yielded results in complete disagreement with the experimental measurements. The geometrical ansatz we chose to consider contains the minimum features to account for the experimental results.

Therefore, the section-averaged term reads

$$\langle \mathcal{H}^{1,1} \rangle(\mu, \alpha) = \frac{1}{S(x, t)} \int_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\pi} d\varphi \times \{\text{height of liquid at } y(\varphi)\} \times \{\mathcal{H}^{1,1}(\varphi)\}. \quad (\text{B } 34)$$

which yields the following expression, when using (B 26)

$$\langle \mathcal{H}^{1,1} \rangle(\mu, \alpha) = \frac{\left[\frac{1}{2} A_c(\mu) \tan^2 \alpha + \frac{1}{2} (\pi - \alpha) A_c(\mu) \tan \alpha + 2\ell_c (\pi - \alpha) (1 - \sqrt{\mu}) \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha} \right) \right]}{\left[A_c(\mu) \tan \alpha + 8\ell_c (1 - \sqrt{\mu}) \right] (\pi - \alpha)^2 \mu}. \quad (\text{B } 35)$$

B.5. Effective surface tension in the V-shape case

Following the notations used in Pham *et al.* (2020), let us formally rewrite the dispersion relation as

$$\omega^2 = a_{\text{eff}}(m_0, \alpha) [b_{\text{eff}}(m_0, \alpha) k^2 + d_{\text{eff}}(m_0, \alpha) \ell_c^2 k^4], \quad (\text{B } 36)$$

with a_{eff} stemming from the continuity equation and b_{eff} stemming from the momentum equation and given by (B 30). Those two terms yield the non-dispersive term so that we have $c_{\text{eff}}^2 = a_{\text{eff}} b_{\text{eff}}$. Last, $d_{\text{eff}} = 2\langle \mathcal{H}^{1,1} \rangle$ yields the dispersive contributions. We know that the dispersion relation reads $\omega^2 = \left(g_{\text{eff}} k + \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\rho} k^3 \right) \Psi \left(\frac{c_{\text{eff}}^2}{g_{\text{eff}}} k \right)$. In the case of the Saint-Venant expansion we are performing, the dispersion relation is an expansion the dispersion relation obtained by considering $\Psi(\xi) \equiv \xi$, dropping the higher order terms, as stated in appendix A. This yields

$$\omega^2 = c_{\text{eff}}^2 k^2 + \frac{c_{\text{eff}}^2}{g_{\text{eff}}} \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\rho} k^4, \quad (\text{B } 37)$$

so that we can identify σ_{eff} from (B 36) and (B 37) as

$$\sigma_{\text{eff}} = a_{\text{eff}}(m_0, \alpha) d_{\text{eff}}(m_0, \alpha) \frac{\rho}{g_{\text{eff}} c_{\text{eff}}^2} \ell_c^2, \quad (\text{B } 38)$$

while $g_{\text{eff}} = g \sin \alpha$, $\ell_c^2 = \sigma / (\rho g)$ and $c_{\text{eff}}^2 = a_{\text{eff}}(m_0, \alpha) b_{\text{eff}}(m_0, \alpha)$. Therefore, we obtain

$$\sigma_{\text{eff}} = \frac{2 \sin \alpha \langle \mathcal{H}^{1,1} \rangle}{b_{\text{eff}}(m_0, \alpha)} \sigma. \quad (\text{B } 39)$$

A few numerical values are given in table 1 and compared with the experimental results obtained by fitting the spectra using the dispersion relation (1.1) (see figure 3). As it can be seen in the case of the V-shaped substrate at different volumes, the values of σ_{eff} from our toy model are slightly sensitive to the parameter μ . These values undershoot the experimental values with an error of 15 %, which is satisfactory, given the approximations we made.

Note that if, at fixed α and fixed μ , we had chosen a uniform distribution of curvature along the interface, with the value of $\mathcal{H}^{1,1}(\phi)$ set at $\mathcal{H}^{1,1}(\phi_{\text{max}})$ (see (B 21)), we would have obtained $\sigma_{\text{eff}} = \sigma = 72 \text{ mN/m}$. Because of the non-uniform distribution of curvature along the curved interface, we have a renormalization effect of the surface tension.

We have tested the dependence on the angle α at fixed $\mu = 10^{-6}$ and computed the numerical value of σ_{eff} . The results can be found in table 3. The effective surface tension value grows with the angle α up to a value of 60.1 mN/m, then, past 70°, it slowly decreases. One would have expected to find a monotonous behaviour, with σ_{eff} increasing up to 72 mN/m as α approaches 90°: the substrate resembles a substrate with vertical walls, the curvature is maximum almost at the top of the drop. Moreover, the

Toy V-shape	angle α [deg]	10	20	30	40	50	60	70	80
$\sigma_{\text{eff}}^{\text{toy}}$ [mN/m]		48.7	51.7	54.6	56.9	58.7	59.8	60.1	59.6

TABLE 3. Estimation of the dependence on the angle α of the effective surface tension σ_{eff} via the toy model, at fixed $\mu = 1 - m = 10^{-6}$, in the case of a V-shaped substrate. At angles α approaching 90°, one expects to recover the usual surface tension value $\sigma = 72 \text{ mN/m}$. The toy model is only suited for small angles α .

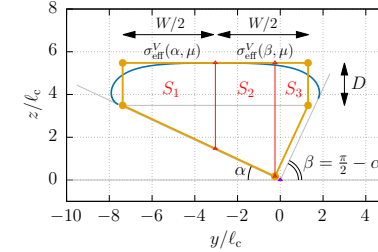


FIGURE 16. Shape of the capillary cap in blue, in the case of an L-shaped substrate, with a tilt angle $\alpha = 25^\circ$ and a geometric parameter $\mu = 1 - m = 10^{-5}$ in ℓ_c unit. The ansatz of the section is given by a rectangle of width $W = \ell_c(\mu)$ and height $D = 2\ell_c(1 - \sqrt{\mu})$, on top of an L-shaped wedge of width W . The section can be partitioned into three trapezoids S_1, S_2 and S_3 . The effective tension is calculated as the averaging of the values of the surface tension found in the V-shape case (σ_{eff}^V , see text).

curvature is close to this maximum value in a wide region of almost flat interface. The averaged value of $\mathcal{H}^{1,1}$ should be really close to this maximum value. The choice of our ansatz is not suited for such a situation but still yields a fair value, with an error of 20 %.

In order to be accurate, we need to solve the full hydrodynamics equations through numerical calculations such as those based on the Ritz method (see Segel & Handelman (1987) and Bostwick & Steen (2018), for instance). This will be left for future work.

B.6. Effective surface tension in the L-shape case

In our toy model, the effective surface tension is given by (B 39) in the V-shape case. It depends on the section-averaged value of the curvature distribution $\mathcal{H}^{1,1}$ given by (B 26). In the L-shape case, $\mathcal{H}^{1,1}$ is defined along two intervals $[\pi/2 - \alpha, \pi]$ and $[\pi, 2\pi - \alpha]$, along which it has the shape of a sinusoidal arch, as in the V-shape cases.

In the case of an L-shaped substrate, the shape of the capillary cap on the left-hand side ($\varphi \in [\pi, 2\pi - \alpha]$) corresponds to half a capillary cap in the V-shape case at angle α . In contrast, the capillary cap shape on the right-hand side ($\varphi \in [\pi/2 - \alpha, \pi]$) corresponds to half a capillary cap in the V-shape case at angle $\pi/2 - \alpha$. We will then use a geometrical ansatz of the actual system, by considering the capillary cap as a rectangle of width $W = \ell_c(\mu)$ and height $D = 2\ell_c(1 - \sqrt{\mu})$, placed upon a wedge of angles with the horizontal equal to α and $\beta = \pi/2 - \alpha$. The domain will then be splitted into three trapezoidal parts (see figure 16).

In the following, instead of performing tedious calculations of $\langle \mathcal{H}^{1,1} \rangle$ and b_{eff} counterpart in the L-shape case, we will choose ad-hoc effective values of the surface tension at

the free interface of each part $(S_i)_{1 \leq i \leq 3}$. For the left-hand part S_1 , of horizontal width equal to $W/2$, the surface tension will have the value $\sigma_1 = \sigma_{\text{eff}}^V(\alpha)$ given by our toy model for the same angle α in the V-shape case. In the two other parts S_2 and S_3 , we will chose the value of $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_{\text{eff}}^V(\beta, \mu)$ for an angle equal to $\beta = \pi/2 - \alpha$ (again in the V-shape case). The resulting value $\sigma_{\text{eff}}^L(\alpha, \mu)$ we are looking for will be the averaged value with respect to the sections, namely :

$$\sigma_{\text{eff}}^L(\alpha, \mu) = \frac{\mathcal{A}(S_1) \times \sigma_{\text{eff}}^V(\alpha, \mu) + \mathcal{A}(S_2 \cup S_3) \times \sigma_{\text{eff}}^V(\frac{\pi}{2} - \alpha, \mu)}{\mathcal{A}(S_1 \cup S_2 \cup S_3)}, \quad (\text{B } 40)$$

where $\mathcal{A}$ denotes the sectional area of a part, so that

$$\mathcal{A}(S_1) = \frac{1}{2}W \left(D + \frac{1}{4}W \tan \alpha \right), \quad (\text{B } 41)$$

$$\mathcal{A}(S_1 \cup S_2 \cup S_3) = W \left(D + \frac{1}{4}W \sin 2\alpha \right). \quad (\text{B } 42)$$

A few numerical values are given in table 2 as a comparison with the experiments. The experimental values were obtained by fitting the spectra with the dispersion relation (1.1) (see figure 4). The agreement happens to be good, the error being less than 10 %. Note that the dependence on α of the experimental values of σ_{eff} are not monotonic, contrary to the values given by the toy model. As in the V-shape case, some experimental variabilities were encountered, they may be due to the aging of the substrate coating or the hysteresis of the contact angle.

REFERENCES

- ARGENTINA, M., COHEN, A., BOURET, Y., FRAYSSE, N. & RAUFASTE, C. 2015 One-dimensional capillary jumps. *J. Fluid Mech.* **765**, 1–16.
- BOSTWICK, J. B. & STEEN, P. H. 2018 Static rivulet instabilities: Varicose and sinuous modes. *J. Fluid Mech.* **837**, 819–838.
- BOURET, Y., COHEN, A., FRAYSSE, N., ARGENTINA, M. & RAUFASTE, C. 2016 Solitary-like waves in a liquid foam microchannel. *Phys. Rev. Fluids* **1**, 043902.
- CRAIK, A. D. D. 2004 The origins of water wave theory. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **36**, 1–28.
- CRAIK, A. D. D. 2005 George Gabriel Stokes on water wave theory. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **37**, 23–42.
- DAVIS, S. H. 1980 Moving contact lines and rivulet instabilities. Part 1. The static rivulet. *J. Fluid Mech.* **98**, 225–242.
- DECOENE, A., BONAVENTURA, L., MIGLIO, E. & SALERI, F. 2009 Asymptotic derivation of the section-averaged shallow water equations. *Math. Models Methods Appl. Sci.* **19**, 387–417.
- EARNSHAW, REV. S. 1860 On the mathematical theory of sound. *Phil. Trans. R. Soc.* **150**, 133–148.
- ENGWIRDA, D. 2014 Locally optimized Delaunay-refinement and optimisation-based mesh generation. PhD thesis, School of Mathematics and Statistics, The University of Sydney, the source code of mesh2d is available at <https://github.com/dengwirda/mesh2d>.
- FALCON, É., LAROCHE, C. & FAUVE, S. 2002 Observation of depression solitary surface waves on a thin fluid layer. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 204501.
- FOREL, F. A. 1904 *Le Léman : Monographie limnologique*, 2nd edn., , vol. 3. Lausanne: F. Rouge & Cie.
- GROVES, M. D. 1994 Hamiltonian long-wave theory for water waves in a channel. *Q. J. Mech. Appl. Math.* **47**, 367–404.
- GUPTA, R., VAIKUNTANATHAN, V. & SIAKUMAR, S. 2016 Superhydrophobic qualities of an aluminum surface coated with hydrophobic solution NeverWet. *Colloids Surf. A: Physicochem. Eng. Aspects* **500**, 45–53.
- KORTEWEG, D. J. & DE VRIES, G. 1895 On the change of form of long waves advancing in a

- rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philos. Mag. J. Sci.* **39**, 422–443.
- KOSDOGADAN ACHARIGE, A., ELIAS, F. & DEREC, C. 2014 Soap film vibration: origin of the dissipation. *Soft Matter* **10**, 8341.
- LAMB, H. 1932 *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 6th ed.
- LANGBEIN, D. 1990 The shape and stability of liquid menisci at solid edges. *J. Fluid Mech.* **213**, 251–265.
- MCIVER, M. & MCIVER, P. 1993 Sloshing frequencies of longitudinal modes for a liquid contained in a trough. *J. Fluid Mech.* **252**, 525–541.
- PERRARD, S., DEIKE, L., DUCHÈNE, C. & PHAM, C.-T. 2015 Capillary solitons on a levitated medium. *Phys. Rev. E* **92**, 011002(R).
- PHAM, C.-T., PERRARD, S. & LE DOUDIC, G. 2020 Surface waves along liquid cylinders. Part 1. Stabilising effect of gravity on the Plateau-Rayleigh instability. *J. Fluid Mech.* **891**, A5.
- PLATEAU, J. 1849 Recherches expérimentales et théoriques sur les figures d’une masse liquide sans pesant. *Mem. Acad. R. Sci. R. Sci. Lett. Belg.* **23**, 1–150.
- RAYLEIGH, LORD J. W. S. 1878 On the instability of jets. *Proc. London Math. Soc.* **10**, 4–13.
- ROY, V. & SCHWARTZ, L. W. 1999 On the stability of liquid ridges. *J. Fluid Mech.* **291**, 293–318.
- RUSSELL, J. S. 1844 Report on waves. *Rep. Br. Assoc. Adv. Sci.* pp. 311–390.
- SAINT-VENANT, A. J. C. B. 1871 Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l’introduction de marées dans leurs lits. *C. R. Acad. Sci.* **73**, 147–154 and 237–240.
- SAVART, F. 1833 Mémoire sur la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en mince paroi. *Annal. Chim. Phys.* **53**, 337–386.
- SEGEL, L. A. & HANDELMAN, G. H. 1987 *Mathematics Applied to Continuum Mechanics*. New York: Dover Publications.
- SEKIMOTO, K., OGUMA, R. & KAWASAKI, K. 1987 Morphological stability analysis of partial wetting. *Ann. Phys.* **176**, 359–392.
- SPETH, R. L. & LAUGA, E. 2009 Capillary instability on a hydrophilic stripe. *New J. Phys.* **11**, 075024.
- WEHAUSEN, J. V. & LAITONE, E. V. 1960 *Surface Waves*. Springer.
- WHITHAM, G. B. 1999 *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley.
- YANG, LI & HOMSY, G. M. 2007 Capillary instabilities of liquid films inside a wedge. *Phys. Fluids* **19**, 044101.

Annexe C

Quelques calculs classiques

C.1 Ondes de surface dans un canal

L'étude de la propagation des ondes à la surface d'un liquide est un problème vieux comme l'hydrodynamique [Craik, 2004, 2005] et que l'on aborde dans tous les enseignements de mécanique des fluides. Avec l'optique géométrique, c'est l'exemple archétypique qui sert d'introduction aux ondes dispersives.

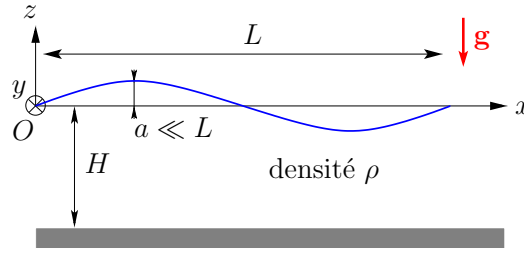


Figure C.1 : Notations du problème.

Si l'on considère la propagation d'ondes de surface dans la direction x de nombre d'onde $k = 2\pi/L$ et de pulsation ω , à la surface d'un liquide non visqueux, de densité ρ , de tension de surface liquide-gaz σ , de profondeur H (cf. notations en figure C.1), soumis à la gravité $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$, la relation de dispersion s'écrit alors

$$\omega^2 = \left[gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3 \right] \tanh kH. \quad (\text{C.1})$$

C'est cette équation que l'on va établir dans le cadre de cette section. Traditionnellement, on suppose une invariance dans la direction y . Nous ne considérerons pas cette hypothèse, mais considérerons la propagation d'une telle onde le long d'un canal rectangulaire de largeur W .

Avant de passer au calcul en question, rappelons que deux régimes peuvent être distingués selon la profondeur de liquide H . Pour cela, développons à l'ordre 4 en puissance de kH la relation de dispersion. On utilise le fait que $\tanh(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^5)$ et l'on a alors

$$\omega^2(k) \underset{x \rightarrow 0}{=} gHk^2 \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\rho g} - \frac{H^2}{3} \right) k^2 + \mathcal{O}(k^4) \right]. \quad (\text{C.2})$$

En notant la longueur capillaire $\ell_c = \sqrt{\sigma/(\rho g)}$, on voit que pour $H < \ell_c/\sqrt{3}$, la relation de dispersion est convexe. On appellera ce régime le régime capillaire. Elle ne l'est plus dès que $H > \ell_c/\sqrt{3}$. On appellera ce régime le régime gravitaire. Si l'on définit le nombre de Bond comme étant $Bo = \ell_c^2/H^2$, on passe d'un régime à l'autre lorsque le nombre de Bond passe un nombre de Bond critique, défini ici comme $Bo_c = 1/3$, ce facteur $1/3$ étant donné par la valeur de $|\tanh'''(0)|/6$.

C.1.1 Mise en équation

On s'intéresse au problème de la dynamique à surface libre d'un liquide, considéré comme un fluide parfait de densité ρ , incompressible et irrotationnel, dans un canal solide de section invariante par translation dans la direction transverse x (cf. Fig. C.2 (a)). Le liquide est soumis à la gravité $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$. C'est le problème du ballonnement (en anglais *sloshing*), abordé entre autres dans le domaine des interactions fluide–structure. On ne tiendra pas compte des effets de tension de surface liquide–air. L'air environnant est à pression uniforme, P_{atm} , pression atmosphérique. L'interface au repos du liquide est plane et située à l'altitude $z = 0$.

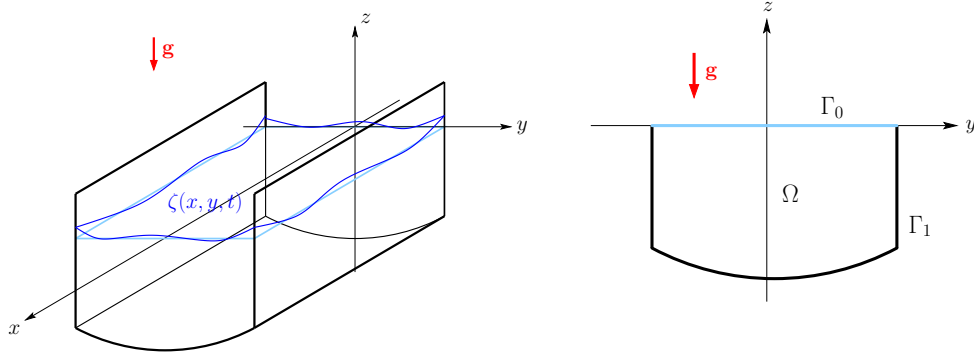


Figure C.2 : (a) Schéma du problème 3D. (b) Notations du problème 2D : Ω désigne la section de liquide, Γ_1 la frontière du substrat au contact du liquide et Γ_0 l'interface libre au repos du liquide.

C.1.1.a Problème 3D a priori

En faisant l'hypothèse d'un écoulement irrotationnel et incompressible, il existe un potentiel de vitesse $\Psi(x, y, z)$ tel que le champ de vitesse du fluide s'écrive $\mathbf{U} = (u, v, w) = \nabla \Psi$. Sachant que $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$, on obtient

$$\Delta^{(3)} \Psi = 0 \quad (\text{partout dans le liquide}), \quad (\text{C.3})$$

où $\Delta^{(3)} = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$ désigne l'opérateur laplacien à 3D.

Le champ de pression $P(x, y, z)$ est donné par l'équation de Bernoulli qu'on écrira

$$\partial_t \Psi + \frac{1}{2} (\nabla \Psi)^2 + \frac{1}{\rho} P + gz = 0 \quad (\text{dans } \Omega). \quad (\text{C.4})$$

Aux parois solides du canal, on a impénétrabilité du fluide donc annulation de la composante normale de la vitesse

$$\mathbf{u}_n = \partial_n \Phi = 0 \quad (\text{aux parois } \Gamma_1). \quad (\text{C.5})$$

Les conditions aux limites cinématiques à l'interface fluide, repérée par l'équation $z = \zeta(x, y, t)$, s'écrivent

$$w = \partial_z \Psi = \partial_t \zeta + u \partial_x \zeta + v \partial_y \zeta, \quad (\text{C.6})$$

$$= \partial_t \zeta + (\partial_x \Psi) (\partial_x \zeta) + (\partial_y \Psi) (\partial_y \zeta) \quad (\text{en tout point de } \Gamma_0). \quad (\text{C.7})$$

Les conditions aux limites dynamiques à la surface libre, en l'absence de tension de surface, correspondent à la continuité du champ de pression, à savoir

$$P(x, y, z) = P_{\text{atm}} \quad (\text{en tout point de } \Gamma_0). \quad (\text{C.8})$$

C.1.1.b Problème 2D

Les ondes que nous cherchons sont des ondes linéaires, donc considérées comme des perturbations linéaires de l'état de base. On va donc chercher une solution se propageant dans le canal sous la forme d'une onde transverse, à savoir une solution de la forme

$$\Psi(x, y, z) = \Phi(y, z) e^{i(\omega t - kx)} \quad (\text{C.9})$$

ce qui ramène l'équation de Poisson (C.3) à 3D à une équation de Helmholtz à 2D

$$\Delta \Phi - k^2 \Phi = 0, \quad (\text{C.10})$$

où $\Delta = \partial_{yy} + \partial_{zz}$ désigne l'opérateur laplacien à 2D.

On cherchera de même le mouvement d'une interface fluide sous la forme d'une onde

$$\zeta(x, y, t) = \bar{\zeta}(y) e^{i(\omega t - kx)}. \quad (\text{C.11})$$

On suppose que ε mesure le rapport entre l'ordre de grandeur de l'amplitude des ondes de surface ($\mathcal{O}(\bar{\zeta})$) et la profondeur moyenne du canal ; on va supposer $\varepsilon \ll 1$. On va donc regarder les contributions à l'ordre 1 en ε de Φ et $\bar{\zeta}$.

En ne gardant que la partie linéaire des équations tridimensionnelles dans l'équation de Bernoulli à la surface du liquide (donc au point de coordonnées $[x, y, z = \zeta(x, y, t)]$), on se retrouve avec

$$\partial_t \Psi[x, y, \zeta(x, y, t), t] + \frac{1}{\rho} P_{\text{atm}} + g \zeta(x, y, t) = 0, \quad (\text{C.12})$$

sachant qu'à l'ordre qui nous intéresse,

$$\partial_t \Psi(x, y, \zeta(x, y, t), t) \simeq \partial_t (\Psi(x, y, 0, t)) = i\omega \Phi(y, 0) e^{i(\omega t - kx)} \quad (\text{C.13})$$

et donc

$$i\omega \Phi(y, 0) = -g \bar{\zeta}(y). \quad (\text{C.14})$$

À l'ordre 1 en ε , en ne conservant que les contributions linéaires, la condition cinématique à l'interface (C.7) s'écrit

$$\partial_z \Psi[x, y, \zeta(x, y, t), t] = \partial_t \zeta = i\omega \zeta(y), \quad (\text{C.15})$$

et l'on a, à l'ordre principal, l'expression $\partial_z \Psi[x, y, \zeta(x, z, t), t] \simeq \partial_z \Psi(x, y, 0, t) = \partial_z \Phi(y, 0) e^{i(\omega t - kx)}$. En utilisant (C.14) et (C.15), on en déduit que

$$\partial_z \Phi(y, 0) = \frac{\omega^2}{g} \Phi(y, 0). \quad (\text{C.16})$$

Sachant que la dérivée selon z en $z = 0$ correspond à la dérivée normale à l'interface, nos équations consistent donc à résoudre le problème suivant : À nombre d'onde k donné, trouver un potentiel $\Phi(y, z)$ non nul tel qu'il existe une pulsation ω qui vérifie

$$\begin{cases} \Delta \Phi - k^2 \Phi = 0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (\text{C.17})$$

$$\begin{cases} \partial_n \Phi = 0, & \text{le long de } \Gamma_1, \text{ les parois solides,} \end{cases} \quad (\text{C.18})$$

$$\begin{cases} \partial_n \Phi = \frac{\omega^2}{g} \Phi, & \text{le long de } \Gamma_0, \text{ l'interface libre horizontale.} \end{cases} \quad (\text{C.19})$$

Le domaine Ω correspond à la section transverse du liquide au repos ; (C.17) est l'équation portant sur l'irrotationnalité et l'incompressibilité du champ de vitesse ; (C.18) la condition à la frontière Γ_1 correspond à la non-pénétration du liquide aux parois solides du canal ; (C.19) la condition à la frontière Γ_0 correspond aux conditions cinématiques de la vitesse à l'interface liquide-air (cf. Fig. C.2 (b)) combinées à l'équation de Bernoulli (C.4). Il s'agit ici de résoudre ce qu'on appelle *un problème aux valeurs propres généralisé*.

Très peu de solutions analytiques non triviales sont connues pour le problème (C.17–C.19) : le cas d'un canal rectangulaire et le cas d'un canal triangulaire isocèle rectangle [Lamb, 1932]. Dans ce qui suit nous étudierons en détail le cas rectangulaire. Pour une section de canal de forme quelconque, la relation de dispersion ne peut être obtenue que numériquement.

C.1.2 Ondes gravitaires et ballottement le long d'un canal rectangulaire

Les relations de dispersion des différentes ondes propagatives se trouvent en résolvant le problème (C.17–C.19) par une méthode standard de séparation des variables. Nous en présentons le détail ici. On suppose que le domaine Ω est un rectangle de largeur W et de hauteur H . L'interface libre Γ_0 sera située en $z = 0$ et le fond du rectangle en $z = -H$. Le domaine Ω sera défini comme $\Omega = \{(y, z) \mid y \in [-\frac{W}{2}, +\frac{W}{2}], z \in [-H, 0]\}$ (cf. figure III.1 (b)).

Séparons le potentiel $\Psi(y, z)$ sous la forme

$$\Phi(y, z) = F(y)G(z). \quad (\text{C.20})$$

L'équation d'incompressibilité (C.17) entraîne alors

$$\frac{F''(y)}{F(y)} = k^2 - \frac{G''(z)}{G(z)} \quad \forall (y, z) \in \Omega. \quad (\text{C.21})$$

Il existe ainsi un réel que l'on supposera non nul et que l'on notera $-p^2$ (p étant a priori ou bien réel, ou bien imaginaire pur) tel que

$$\frac{F''(y)}{F(y)} = -p^2, \quad \forall y \in \left[-\frac{W}{2}, +\frac{W}{2}\right], \quad (\text{C.22})$$

ce qui donne F de la forme

$$F(y) = a e^{ipy} + b e^{-ipy}, \quad (\text{C.23})$$

pour a et b réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ (on cherche des solutions non triviales). La condition (C.18) se ramène à

$$\partial_y F(y = \pm \frac{W}{2}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} ip \left(a e^{+ip\frac{W}{2}} - b e^{-ip\frac{W}{2}} \right) = 0 \\ ip \left(a e^{-ip\frac{W}{2}} - b e^{+ip\frac{W}{2}} \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{C.24})$$

et le système linéaire homogène 2×2 en les variables (a, b) n'admet de solutions non nulles que si son déterminant de Cramer est nul, c'est-à-dire si l'on a

$$e^{+ipW} - e^{-ipW} = 2i \sin pW = 0. \quad (\text{C.25})$$

Si p était imaginaire pur (donc $-p^2 > 0$), cette condition ne pourrait être satisfaite. Ainsi p est réel et doit alors être de la forme

$$p = \frac{m\pi}{W} \quad \text{pour } m \in \mathbb{N}^*. \quad (\text{C.26})$$

On peut alors déduire l'équation satisfaite par G en utilisant (C.21, C.22, C.26)

$$G''(z) = \left[k^2 + \left(\frac{m\pi}{W} \right)^2 \right] G(z), \quad \forall z \in [-H, 0]. \quad (\text{C.27})$$

On pose

$$\mu_m(k) = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{W} \right)^2 + k^2}. \quad (\text{C.28})$$

La fonction $G(z)$ est donc de la forme

$$G(z) = c e^{+\mu_m(k)z} + d e^{-\mu_m(k)z} \quad (\text{C.29})$$

et doit satisfaire (C.18) et (C.19), soit respectivement

$$c e^{-\mu_m(k)H} - d e^{+\mu_m(k)H} = 0, \quad (\text{C.30})$$

$$[\mu_m(k)H](c - d) = \frac{\omega^2}{g}(c + d). \quad (\text{C.31})$$

Ce système linéaire homogène 2×2 en les variables (c, d) admet des solutions non triviales si et seulement si son déterminant de Cramer D est nul, c'est-à-dire si

$$D = \det \begin{bmatrix} e^{-\mu_m(k)H} & -e^{+\mu_m(k)H} \\ \mu_m(k) - \frac{\omega^2}{g} & -\left[\mu_m(k) + \frac{\omega^2}{g} \right] \end{bmatrix} \quad (\text{C.32})$$

$$= -2\mu_m(k) \sinh \mu_m(k)H + 2\frac{\omega^2}{g} \cosh[\mu_m(k)] = 0. \quad (\text{C.33})$$

On obtient alors les relations de dispersion suivantes, indexées par l'entier $m \in \mathbb{N}$

$$\omega^2 = g[\mu_m(k)] \tanh[\mu_m(k)H], \quad (\text{C.34})$$

et pour ce même indice m , l'expression du potentiel $\Phi(y, z)$, à une constante multiplicative près, s'écrit

$$\Phi(y, z) \sim \left[e^{+i\frac{m\pi}{W}y} + (-1)^m e^{-i\frac{m\pi}{W}y} \right] \cosh[\mu_m(k)(z - H)], \quad (\text{C.35})$$

et c'est $\Phi(y, 0)$ qui donnera la forme de l'interface $\zeta(y)$ correspondant au mode en question (cf. (C.14)). Les relations de dispersion sont tracées en figure C.3, ainsi que les déformations de l'interface dues aux premiers modes d'indice m .

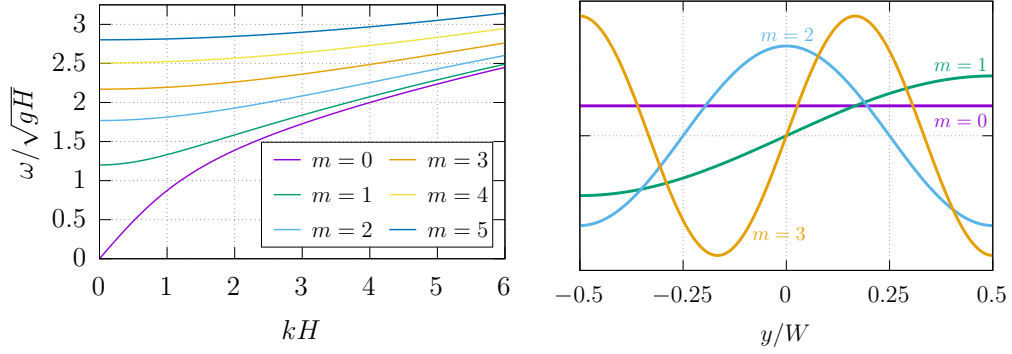


Figure C.3 : (a) Relation de dispersion des ondes dans un canal rectangulaire de profondeur $H = 1$ et de largeur $W = 2$. (b) Modes de déformation de l'interface correspondants, en fonction de m (unités arbitraires en ordonnée). Le cas $m = 0$ correspond aux ondes gravitaires, c'est-à-dire aux ondes variqueuses.

C.1.2.a Ondes gravitaires

Les ondes gravitaires correspondent à l'indice $m = 0$ et $\mu_0(k) = k$. On retrouve la relation de dispersion standard

$$\omega^2 = gk \tanh kH. \quad (\text{C.36})$$

Ici, m vaut zéro et $\Phi(y, 0)$ est une fonction constante de y . Cela correspond à un mode de déplacement de l'interface qui reste horizontal dans la section. Il est donc tel que la section varie dans la direction x . Il s'agit des modes variqueux du canal, ce sont les ondes gravitaires classiquement étudiées dans tout livre abordant les ondes de surface.

Pour $k \rightarrow 0$, on a $\tanh kH \sim kH$ et l'on retrouve la relation de dispersion linéaire

$$\omega^2 = gHk^2. \quad (\text{C.37})$$

C.1.2.b Ondes de ballonnement

Les ondes de ballonnement correspondent aux indices $m \in \mathbb{N}^*$. Elles sont caractérisées par des fréquences de coupure en $k \rightarrow 0$. Celles-ci valent

$$\omega_{\text{cut}}(m, W, H) = \sqrt{m\pi \frac{g}{W} \tanh\left(m\pi \frac{H}{W}\right)}. \quad (\text{C.38})$$

Pour W petit devant H (canal étroit), les fréquences de coupure varient en $W^{-1/2}$ alors que pour W grand devant $m\pi H$ (canal peu profond, m petit), on a $\omega_{\text{cut}}(m, W, H) \simeq m\pi \frac{\sqrt{gH}}{W}$.

Les modes de déformation de l'interface $\bar{\zeta}$ sont données par (C.35). Ils dépendent de la parité de m et sont de la forme

$$\bar{\zeta}(y) = \cos\left(\frac{m\pi}{W}y\right), \quad \text{pour } m \text{ pair (mode symétrique)}, \quad (\text{C.39})$$

$$\bar{\zeta}(y) = \sin\left(\frac{m\pi}{W}y\right), \quad \text{pour } m \text{ impair (mode anti-symétrique)}. \quad (\text{C.40})$$

C.1.3 Ondes gravito-capillaires

Ajouter les contributions de la tension de surface aux modes variqueux lorsque l'interface au repos est plate peut se faire dans un canal rectangulaire en faisant l'hypothèse d'un angle de contact égal à $\pi/2$ aux parois du canal et en supposant que la section transversale reste un rectangle, à savoir que $\bar{\zeta}(y)$ est indépendante de y . Sous ces conditions, la loi de Laplace à la surface du liquide s'écrit alors, en fonction de $\kappa(x, t)$, qui vaut deux fois la courbure moyenne de l'interface

$$P(x, y, \zeta(x, t)) - P_{\text{atm}} = \sigma\kappa = -\sigma\partial_{xx}\zeta(x, t). \quad (\text{C.41})$$

sachant qu'à l'ordre linéaire, on a $-\sigma\partial_{xx}\zeta(x, t) = +\sigma k^2\zeta(x, t)$. Ainsi, (C.14), équation de Bernoulli linéarisée en un point de l'interface liquide, devient alors

$$i\omega\Phi(y, 0) = -\left[g + \frac{\sigma}{\rho}k^2\right]\bar{\zeta}(y) \quad (\text{C.42})$$

Le dernier terme permet donc de faire la substitution $g \mapsto g + \frac{\sigma}{\rho}k^2$ dans l'équation (C.36). On obtient in fine la relation de dispersion des ondes gravito-capillaires

$$\omega^2 = \left[gk + \frac{\sigma}{\rho}k^3\right]\tanh kH. \quad (\text{C.43})$$

On vient de voir à travers ces calculs que trouver une relation de dispersion revient à trouver des conditions de solvabilité d'équations dues à un mode de forçage de l'interface libre. Dans le cas d'une interface horizontale, il est facile de trouver des modes admissibles. Dès que l'interface n'est plus courbée, des contraintes viennent s'ajouter aux modes de déformation possibles, ce qui rend le calcul complexe.

C.2 Résultats historiques de Rayleigh

Nous faisons ici un rappel rapide de l'obtention par Rayleigh [1878] du taux de croissance des modes axisymétriques poussant dans un cylindre circulaire ainsi que la relation de dispersion obtenue par le même Rayleigh [1879] concernant les modes azimutaux d'un cylindre, en ne supposant pas ici de déformation longitudinale.

C.2.1 Instabilité de Plateau–Rayleigh (1878)

Faire un calcul d'instabilité est équivalent à trouver une relation de dispersion, en considérant la pulsation ω comme valant $\omega = -i\Sigma$, où Σ est un taux de croissance. C'est ainsi qu'on peut passer de la relation de dispersion (C.43) des ondes gravito-capillaires à l'instabilité de Rayleigh–Taylor en changeant le signe de la gravité g .

Dans cette section, nous redémontrons le résultat classique de Rayleigh [1878]. Pour cela, considérons un cylindre liquide d'axe Ox , de rayon R_0 , de densité ρ et de tension de surface σ . Nous négligerons la gravité, la viscosité et supposerons les écoulements irrotationnels et incompressibles. Nous supposerons le problème axisymétrique et nous placerons en coordonnées cylindriques d'axe Ox . Nous désignerons par r la coordonnée radiale. Il existe donc un potentiel des vitesses $\Psi(x, r, t)$ tel que le champ de vitesse dans le fluide s'écrive $\mathbf{U} = u_x \mathbf{e}_x + u_r \mathbf{e}_r = (\partial_x \Psi) \mathbf{e}_x + (\partial_r \Psi) \mathbf{e}_r$ et tel qu'il vérifie

$$\Delta \Psi = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \Psi = 0. \quad (\text{C.44})$$

Le cylindre est perturbé par une modulation sinusoïdale de son rayon, d'amplitude εR_0 et que l'on écrit

$$R(x, t) = R_0(1 + \varepsilon e^{ikx + \Sigma t}) \quad (\text{C.45})$$

où k est le nombre d'onde dans la direction x et Σ le taux de croissance de la perturbation.

On va chercher Ψ d'ordre ε sous la forme

$$\Psi(x, r, t) = \varepsilon \Phi(r) e^{ikx + \Sigma t} \quad (\text{C.46})$$

Par (C.44), on voit que Φ vérifie l'équation de Bessel

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - k^2 \right] \Phi = 0. \quad (\text{C.47})$$

et $\Phi(r)$ est de la forme $\Phi(r) = A I_0(kr)$ où I_0 désigne la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre zéro. Rappelons que l'on cherche un problème aux valeurs propres, donc un potentiel Φ non nul. Rappelons enfin que l'on a $I'_0 = I_1$.

La condition cinématique à l'interface s'écrit

$$\partial_r \Psi(x, R(x, t), t) = \partial_t R(x, t) + u_x(x, R(x, t), t) \partial_x R(x, t) \quad (\text{C.48})$$

ce qui donne à l'ordre ε

$$\partial_r \Psi(x, R_0, t) = \Sigma \varepsilon R_0 e^{ikx + \Sigma t} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (\text{C.49})$$

soit, à l'ordre principal, en simplifiant les exponentielles et les ε

$$Ak I_1(kR_0) = \Sigma R_0. \quad (\text{C.50})$$

À l'interface, en tenant compte de la loi de Laplace, on a

$$P(x, R(x, t), t) - P_{\text{atm}} = \sigma \kappa(x, R(x, t), t) \quad (\text{C.51})$$

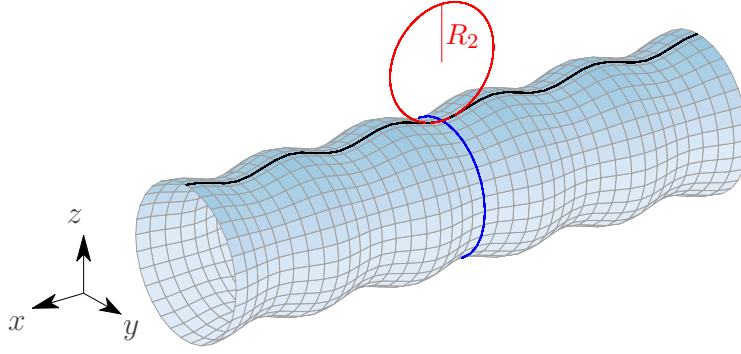


Figure C.4 : Schéma des perturbations sinusoïdales le long d'un cylindre de rayon R_0 . Une génératrice est tracée en noir. La courbure en un point d'abscisse x de cette génératrice est donnée par la somme de l'inverse de $R(x, t)$ le rayon de courbure dans le plan (y, z) (correspondant au cercle bleu) et de l'inverse de R_2 le rayon de courbure dans un plan méridien passant par Ox (cercle rouge).

où $\kappa(x, t)$ vaut deux fois la courbure moyenne, c'est-à-dire $\kappa(x, t) = 1/R(x, t) + 1/R_2$ avec R_2 le rayon de courbure longitudinale (cf. figure C.4). Cela donne, pour de petites déformations de l'interface,

$$\kappa(x, R(x, t), t) \simeq \frac{1}{R(x, t)} - \partial_{xx}R(x, t), \quad (\text{C.52})$$

ce qui donne à l'ordre ε

$$\kappa(x, R(x, t), t) = \varepsilon \left[-\frac{1}{R_0} + R_0 k^2 \right] e^{ikx + \Sigma t} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (\text{C.53})$$

L'équation de Bernoulli s'écrit

$$\partial_t \Psi + \frac{1}{2}(u_r^2 + u_z^2) + \frac{1}{\rho}P(x, r, t) = 0 \quad (\text{C.54})$$

et devient à l'interface, en tenant compte de la loi de Laplace, à l'ordre ε

$$\Sigma \Psi(x, R_0, t) = -\varepsilon \frac{\sigma}{\rho} \left[-\frac{1}{R_0} + R_0 k^2 \right] e^{ikx + \Sigma t} \quad (\text{C.55})$$

$$= \Sigma \varepsilon A I_0(k R_0) e^{ikx + \Sigma t}, \quad (\text{C.56})$$

ce qui donne en simplifiant les exponentielles et les ε

$$\Sigma A I_0(k R_0) = \left[\frac{1}{R_0} - R_0 k^2 \right]. \quad (\text{C.57})$$

Le système formé des équations (C.50) et (C.57) n'admet des solutions en A que si l'on a la relation

$$\Sigma^2 = \frac{\sigma}{\rho R_0^3} \frac{I_1(k R_0)}{I_0(k R_0)} \left[1 - (k R_0)^2 \right] k R_0, \quad (\text{C.58})$$

qui est la relation classique calculée par Rayleigh [1878]. Pour $(k R_0) < 1$, i.e. pour les grandes longueurs d'onde, on a $\Sigma^2 > 0$ et donc une instabilité.

C.2.2 Modes azimutaux d'un cylindre (1879)

Les modes azimutaux d'un cylindre de rayon R_0 se calculent selon la même logique. Ici, on va présupposer un système invariant par translation dans la direction x . Le problème devient un problème plan dans le plan transverse (y, z) et l'on utilisera les coordonnées polaires (r, θ) . On suppose que l'interface est modulée en

$$R(\theta, t) = R_0 \left[1 + \varepsilon e^{i\omega t} \cos n\theta \right], \quad (\text{C.59})$$

où $n \in \mathbb{Z}$. La courbure d'une telle courbe en polaire est donnée par

$$\kappa(\theta, t) = \frac{|2R'^2 + R^2 - RR''|}{[R'^2 + R^2]^{3/2}}, \quad (\text{C.60})$$

le signe prime ' désignant la dérivée en θ , ce qui donne à l'ordre 1 en ε

$$\kappa(\theta, t) = \frac{1}{R_0} \left[1 + \varepsilon(n^2 - 1)e^{i\omega t} \cos n\theta \right] + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (\text{C.61})$$

Le potentiel des vitesses $\Psi(r, \theta, t)$ vérifie l'équation de Poisson $\Delta\Psi = 0$. Écrit sous la forme $\Psi(r, \theta, t) = \Phi(r, t) \cos n\theta$ en procédant par séparation des variables, $\Phi(r, t)$ vérifie alors l'équation

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \right] \Phi = 0. \quad (\text{C.62})$$

qui a pour solution des combinaisons linéaires de r^n et r^{-n} . Nous ne retiendrons que les puissances positives et nous chercherons Φ sous la forme $\Phi(r, t) = \varepsilon A_0 r^n e^{i\omega t}$. En utilisant, à l'ordre ε , l'équation de Bernoulli et la condition cinématique à l'interface, on trouve alors respectivement les deux équations suivantes

$$i\omega A_0 R_0^n + \frac{\sigma}{\rho R_0} (n^2 - 1) = 0, \quad (\text{C.63})$$

$$n A_0 R_0^{n-1} = i\omega R_0. \quad (\text{C.64})$$

Elles n'admettent de solution en A_0 que si l'on a la relation de dispersion donnée par [Rayleigh \[1879\]](#)

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho R_0^3} (n^2 - 1)n. \quad (\text{C.65})$$

Bibliographie

- ADACHI, K. & TAKAKI, R. 1984 Vibration of a flattened drop I. Observation. *J. Phys. Soc. Jpn.* **53**, 4184–4191.
- AMINI, G. & DOLATABADI, A. 2011 Capillary instability of elliptic liquid jets. *Phys. Fluids* **23**, 084109.
- AMINI, G., LV, L., DOLATABADI, A. & IHME, M. 2014 Instability of elliptic liquid jets: Temporal linear stability theory and experimental analysis. *Phys. Fluids* **26**, 114105.
- ARGENTINA, M., COHEN, A., BOURET, Y., FRAYSSE, N. & RAUFASTE, C. 2015 One-dimensional capillary jumps. *J. Fluid. Mech.* **765**, 1–16.
- ARKHIPENKO, V. I., BARKOV, Y. D., BASHTOVOI, V. G. & KRAKOV, M. S. 1980 Investigation into the stability of a stationary cylindrical column of magnetizable liquid. *Fluid Dyn.* **15**, 477–481.
- BERGEN, J. E., BASSO, B. C. & BOSTWICK, J. B. 2019 Leidenfrost drop dynamics: Exciting dormant modes. *Phys. Rev. Fluids* **4**, 083603.
- BERHANU, M., FALCON, E., MICHEL, G., GISSINGER, C. & FAUVE, S. 2019 Capillary wave turbulence experiments in microgravity. *EPL (Europhys. Lett.)* **128**, 34001.
- BIANCE, A.-L., CLANET, C. & QUÉRÉ, D. 2003 Leidenfrost drops. *Phys. Fluids* **15**, 1632–1637.
- BIRNIR, B., MERTENS, K., PUTKARADZE, V. & VOROBIEFF, P. 2008 Morphology of a stream flowing down an inclined plane. Part 2. Meandering. *J. Fluid Mech.* **603**, 401–411.
- BOSTWICK, J. B. & STEEN, P. H. 2009 Capillary oscillations of a constrained liquid drop. *Phys. Fluids* **21**, 032108.
- BOSTWICK, J. B. & STEEN, P. H. 2010 Stability of constrained cylindrical interfaces and the torus lift of Plateau–Rayleigh. *J. Fluid Mech.* **647**, 201–219.
- BOSTWICK, J. B. & STEEN, P. H. 2014 Dynamics of sessile drops. Part 1. Inviscid theory. *J. Fluid Mech.* **760**, 5–38.
- BOSTWICK, J. B. & STEEN, P. H. 2018 Static rivulet instabilities: Varicose and sinuous modes. *J. Fluid Mech.* **837**, 819–838.
- BOURDIN, E., BACRI, J.-C. & FALCON, E. 2010 Observation of axisymmetric solitary waves on the surface of a ferrofluid. *Phys. Rev. Lett.* **104**, 094502.
- BOURET, Y., COHEN, A., FRAYSSE, N., ARGENTINA, M. & RAUFASTE, C. 2016 Solitary-like waves in a liquid foam microchannel. *Phys. Rev. Fluids* **1**, 043902.

- BOUWHIS, W., WINKELS, K. G., PETERS, I. R., BRUNET, P., VAN DER MEER, D. & SNOELIJER, J. H. 2013 Oscillating and star-shaped drops levitated by an airflow. *Phys. Rev. E* **88**, 023017.
- BURTON, J. C., SHARPE, A. L., VAN DER VEEN, R. C. A., FRANCO, A. & NAGEL, S. R. 2012 Geometry of the vapor layer under a Leidenfrost drop. *Phys. Rev. Lett.* **109**, 074301.
- CAMPBELL, I. J. 1953 Wave motion in an annular tank. *Philos. Mag.* **44** (355), 845.
- CASWELL, T. A. 2014 Dynamics of the vapor layer below a Leidenfrost drop. *Phys. Rev. E* **90**, 013014.
- CELESTINI, F., FRISCH, T., COHEN, A., RAUFASTE, C., DUCHEMIN, L. & POMEAU, Y. 2014 Two dimensional Leidenfrost droplets in a Hele-Shaw cell. *Phys. Fluids* **26**, 032103.
- CHEN, F. F. 2016 *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, 3^e édition. Springer.
- CHUGUNOV, S. S., SCHULZ, D. L. & AKHATOV, I. S. 2011 Ring-shaped sessile droplet. *Proc. ASME 2011 IMECE* **6**, 69–76.
- COSTA, A., OSBORNE, A. R., RESIO, D. T., ALESSIO, S., CHRIVÌ, E., SAGGESE, E., BELLOMO, K. & LONG, C. E. 2014 Soliton turbulence in shallow water ocean surface waves. *Phys. Rev. Lett.* **113**, 108501.
- COUVREUR, S. 2013 *Instabilités de filets liquides sur plan incliné*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot.
- CRAIK, A. D. D. 2004 The origins of water wave theory. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **36**, 1–28.
- CRAIK, A. D. D. 2005 George Gabriel Stokes on water wave theory. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **37**, 23–42.
- CULICK, F. E. C. 1960 Comments on a ruptured soap film. *J. Appl. Phys.* **31**, 1128–1129.
- DAERR, A., EGGERS, J., LIMAT, L. & VALADE, N. 2011 General mechanism for the meandering instability of rivulets of Newtonian fluids. *Phys. Rev. Lett.* **106**, 184501.
- DAVIS, S. H. 1980 Moving contact lines and rivulet instabilities. Part 1. The static rivulet. *J. Fluid Mech.* **98**, 225–242.
- DECOENE, A., BONAVENTURA, L., MIGLIO, E. & SALERI, F. 2009 Asymptotic derivation of the section-averaged shallow water equations. *Math. Models Methods Appl. Sci.* **19**, 387–417.
- DEEGAN, R. D., BRUNET, P. & EGGERS, J. 2008 Complexities of splashing. *Nonlinearity* **21**, C1–C11.
- DIEZ, J. A., GONZÁLEZ, A. G. & KONDIC, L. 2009 On the breakup of fluid rivulets. *Phys. Fluids* **21**, 082105.
- DUCLAUX, V., CLANET, C. & QUÉRÉ, D. 2006 The effects of gravity on the capillary instability in tubes. *J. Fluid Mech.* **556**, 217–226.
- EARNSHAW, REV. S. 1860 On the mathematical theory of sound. *Phil. Trans. R. Soc.* **150**, 133–148.

- EBO ADOU, A.-H. & TUCKERMAN, L. S. 2016 Faraday instability on a sphere: Floquet analysis. *J. Fluid Mech.* **805**.
- EBO ADOU, A.-H., TUCKERMAN, L. S., SHIN, S., CHERGUI, J. & JURIC, D. 2019 Faraday instability on a sphere: Numerical simulation. *J. Fluid Mech.* **870**, 433–459.
- EDWARDS, A. M. J., RUIZ-GUTIÉRREZ, E., NEWTON, M. I., MCHALE, G., WELLS, G. G., LEDESMA-AGUILAR, R. & BROWN, C. V. 2021 Controlling the breakup of toroidal liquid films on solid surfaces. *Sci. Rep.* **11**, 8130.
- ENGWIRDA, D. 2014 Locally optimized Delaunay-refinement and optimisation-based mesh generation. PhD thesis, School of Mathematics and Statistics, The University of Sydney, the source code of mesh2d is available at <https://github.com/dengwirda/mesh2d>.
- FALCÓN, C., FALCON, E., BORTOLOZZO, U. & FAUVE, S. 2009 Capillary wave turbulence on a spherical fluid surface in low gravity. *EPL (Europhys. Lett.)* **86**, 14002.
- FALCON, E. 2010 Laboratory experiments on wave turbulence. *Discrete Contin. Dynam. Syst. Ser. B* **13**, 819–840.
- FALCON, É., LAROCHE, C. & FAUVE, S. 2002 Observation of depression solitary surface waves on a thin fluid layer. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 204501.
- FARADAY, M. 1831 On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* **121**, 299–340.
- FOREL, F. A. 1904 *Le Léman : Monographie limnologique, Tome 3*, 2^e édition. Lausanne: F. Rouge & Cie.
- FRAGKOPOULOS, A. A., PAIRAM, E., BERGER, E. & FERNANDEZ-NIEVES, A. 2018 Toroidal droplets: Growth rates, dispersion relations, and behavior in the thick-torus limit. *Langmuir* **34**, 1218–1224.
- FRAGKOPOULOS, A. A., PAIRAM, E., BERGER, E., SEGREC, P. N. & FERNANDEZ-NIEVES, A. 2017 Shrinking instability of toroidal droplets. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **114**, 2871–2875.
- GAU, H., HERMINGHAUS, S., LENZ, P. & LIPOWSKY, R. 1999 Liquid morphologies on structured surfaces: From microchannels to microchips. *Science* **283**, 46–49.
- DE GENNES, P.-G., BROCHARD-WYART, F. & QUÉRÉ, D. 2002 *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Échelles, Belin.
- GONZÁLEZ, A. G., DIEZ, J. A. & KONDIC, L. 2013 Stability of a liquid ring on a substrate. *J. Fluid Mech.* **718**, 246–279.
- GOREN, S. L. 1962 The instability of an annular thread of fluid. *J. Fluid Mech.* **12**, 309–319.
- GROVES, M. D. 1994 Hamiltonian long-wave theory for water waves in a channel. *Q. J. Mech. Appl. Math.* **47**, 367–404.
- GUPTA, R., VAIKUNTANATHAN, V. & SIAKUMAR, S. 2016 Superhydrophobic qualities of an aluminum surface coated with hydrophobic solution NeverWet. *Colloids Surf. A: Physicochem. Eng. Aspects* **500**, 45–53.

- GUTMARK, E. J. & GRINSTEIN, F. F. 1999 Flow control with noncircular jets. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **31**, 239–272.
- HERBERT, E., MORDANT, N. & FALCON, E. 2010 Observation of the nonlinear dispersion relation and spatial statistics of wave turbulence on the surface of a fluid. *Phys. Rev. Lett.* **105**, 144502.
- HOLT, R. G. & TRINH, E. H. 1996 Faraday wave turbulence on a spherical liquid shell. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1274–1277.
- HOLTER, N. J. & GLASSCOCK, W. R. 1952 Vibrations of evaporating liquid drops. *J. Acoust. Soc. Am.* **24**, 682–686.
- HRABSKI, A. & PAN, Y. 2020 Effect of discrete resonant manifold structure on discrete wave turbulence. *Phys. Rev. E* **102**, 041101.
- IBRAHIM, R. A. 2005 *Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications*. Cambridge University Press.
- KELLAND, REV. P. 1840 On the theory of waves. Part I. *Trans. Roy. Soc. Edin.* **14**, 497–545.
- KORTEWEG, D. J. & DE VRIES, G. 1895 On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philos. Mag. J. Sci.* **39**, 422–443.
- KOSGODAGAN ACHARIGE, A., ELIAS, F. & DEREK, C. 2014 Soap film vibration: Origin of the dissipation. *Soft Matter* **10**, 8341.
- KU, T. C., RAMSEY, J. H. & CLINTON, W. C. 1968 Calculation of liquid droplet profiles from closed-form solution of Young–Laplace equation. *IBM J. Res. Develop.* **12**, 441–447.
- KUMAR MAITY, D., KUMAR, K. & KHASTGIR, S. P. 2020 Instability of a horizontal water half-cylinder under vertical vibration. *Exp. Fluids* **61**, 25.
- LABOUSSE, M. & BUSH, J. W. 2015 Polygonal instabilities on interfacial vorticities. *Eur. Phys. J. E* **38**, 113.
- LAMB, H. 1928 *Statics, including Hydrostatics and the Elements of the Theory of Elasticity*. Cambridge University Press, Cambridge, 3rd ed.
- LAMB, H. 1932 *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 6th ed.
- LANGBEIN, D. 1990 The shape and stability of liquid menisci at solid edges. *J. Fluid Mech.* **213**, 251–265.
- LAROCHE, C., BACRI, J.-C., DEVAUD, M., JAMIN, T. & FALCON, E. 2019 Observation of the resonance frequencies of a stable torus of fluid. *Phys. Rev. Lett.* **123**, 094502.
- LE DOUDIC, G., PERRARD, S. & PHAM, C.-T. 2021 Surface waves along liquid cylinders. Part 2. Sinuous, sloshing, varicose and nonlinear waves. *J. Fluid Mech.* Accepted.
- LEIDENFROST, J. G. 1756 *De Aquae Communis Nonnullis Qualitatibus Tractatus*. Duisburg. Une traduction anglaise du passage sur l'effet Leidenfrost a été faite dans *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1966, **9**, 1153–1166.
- LINKE, H., ALEMÁN, B. J., MELLING, L. D., TAORMINA, M. J., FRANCIS, M. J., DOW-HYGELUND, C. C., NARAYANAN, V., TAYLOR, R. P. & STOUT, A. 2006 Self-propelled Leidenfrost droplets. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 154502.

- LUDU, A. & DRAAYER, J. P. 1998 Nonlinear modes of liquid drops as solitary waves. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2125–2128.
- LUDU, A. & RAGHAVENDRA, A. 2019 Rotating hollow patterns in fluids. *Appl. Numer. Math.* **141**, 167.
- LV, C., CLANET, C. & QUÉRÉ, D. 2015 Retraction of large liquid stripes. *J. Fluid Mech.* **778**, R6.
- MA, X. & BURTON, J. C. 2017 Star-shaped oscillations of Leidenfrost drops. *Phys. Rev. Fluids* **2**, 031602(R).
- MA, X. & BURTON, J. C. 2018 Self-organized oscillations of Leidenfrost drops. *J. Fluid Mech.* **846**, 263–291.
- MARTEN, K., SHARIFF, K., PSARAKOS, S. & WHITE, D. 1996 Ring bubbles of dolphins. *Scientific American* **275**, 22.
- MCCUAN, J. 2017 The stability of cylindrical pendant drops. *Mem. Am. Math. Soc.* **250** (1189).
- MCGRAW, J. D., LI, J., TRAN, D. L., SHI, A.-C. & DALNOKI-VERESS, K. 2010 Plateau–rayleigh instability in a torus: Formation and breakup of a polymer ring. *Soft Matter* **6**, 1258.
- MEHRABIAN, H. & FENG, J. J. 2013 Capillary breakup of a liquid torus. *J. Fluid Mech.* **717**, 281.
- MERTENS, K., PUTKARADZE, V. & VOROBIEFF, P. 2005 Morphology of a stream flowing down an inclined plane. Part 1. Braiding. *J. Fluid Mech.* **531**, 49–58.
- MICHAEL, D. H. & WILLIAMS, P. G. 1977 The equilibrium and stability of sessile drops. *Proc. R. Soc. Lond. A* **354**, 127–136.
- MORA, S., PHOU, T., FROMENTAL, J.-M., PISMEN, L. M. & POMEAU, Y. 2010 Capillary driven instability of a soft solid. *Phys. Rev. Lett.* **105**, 214301.
- MORRIS, P. J. 1988 Instability of elliptic jets. *AIAA J.* **26**, 172–178.
- MYERS, T. G., LIANG, H. X. & WETTON, B. 2004 The stability and flow of a rivulet driven by interfacial shear and gravity. *Int. J. Nonlin. Mech.* **39**, 1239–1249.
- NAKAGAWA, T. 1992 Rivulet meanders on a smooth hydrophobic surface. *Int. J. Multiphase Flow* **18**, 455–463.
- NAKAGAWA, T. & SCOTT, J. C. 1984 Stream meanders on a smooth hydrophobic surface. *J. Fluid Mech.* **149**, 88–99.
- PAIRAM, E. & FERNÁNDEZ-NIEVES, A. 2009 Generation and stability of toroidal droplets in a viscous liquid. *Phys. Rev. Lett.* **102**, 234501.
- PAIRAM, E., VALLAMKONDU, J., KONING, V., VAN ZUIDEN, B. C., ELLIS, P. W., BATES, M. A., VITELLI, V. & FERNANDEZ-NIEVES, A. 2013 Stable nematic droplets with handles. *Proc. Natl. Acad. Sci.* **110**, 9295.
- PERRARD, S., COUDER, Y., FORT, E. & LIMAT, L. 2012 Leidenfrost levitated liquid tori. *EPL (Europhys. Lett.)* **100**, 54006.
- PERRARD, S., DEIKE, L., DUCHÊNE, C. & PHAM, C.-T. 2015 Capillary solitons on a levitated medium. *Phys. Rev. E* **92**, 011002(R).
- PHAM, C.-T., PERRARD, S. & LE DOUDIC, G. 2020 Surface waves along liquid cylinders. Part 1. Stabilising effect of gravity on the Plateau–Rayleigh instability. *J. Fluid Mech.* **891**, A5.

- PLATEAU, J. 1843 Mémoire sur les phénomènes que présente une masse liquide libre et soustraite à l'action de la pesanteur. *Mem. Acad. R. Sci. R. Sci. Lett. Belg.* **16**, 1–34.
- PLATEAU, J. 1849 Recherches expérimentales et théoriques sur les figures d'une masse liquide sans pesanteur. *Mem. Acad. R. Sci. R. Sci. Lett. Belg.* **23**, 1–150.
- PLATEAU, J. 1873 *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*. Gauthier-Villars.
- PUCCI, G., FORT, E., AMAR, M. BEN & COUDER, Y. 2011 Mutual adaptation of a Faraday instability pattern with its flexible boundaries in floating fluid drops. *Phys. Rev. Lett.* **106**, 024503.
- QUINN, W. R. 1992 Streamwise evolution of a square jet cross section. *AIAA J.* **30**, 2852–2857.
- RAUFASTE, C., CELESTINI, F., BARZYK, A. & FRISCH, T. 2015 Hole growth dynamics in a two dimensional Leidenfrot droplet. *Phys. Fluids* **27**, 031704.
- RAYLEIGH, LORD J. W. S. 1878 On the instability of jets. *Proc. London Math. Soc.* **10**, 4–13.
- RAYLEIGH, LORD J. W. S. 1879 On the capillary phenomena of jets. *Proc. R. Soc. Lond.* **29**, 71–97.
- RAYLEIGH, LORD J. W. S. 1883 VII. On the crispations of fluid resting upon a vibrating support. *Philos. Mag.* **16**, 50–58.
- RAYLEIGH, LORD J. W. S. 1892a On the instability of a cylinder of viscous liquid under capillary force. *Philos. Mag.* **34**, 145–154.
- RAYLEIGH, LORD J. W. S. 1892b On the instability of cylindrical fluid surfaces. *Philos. Mag.* **34**, 177–180.
- RENARDY, Y., POPINET, S., DUCHEMIN, L., RENARDY, M., ZALESKI, S., JOSSERAND, C., DRUMRIGHT-CLARKE, M. A., RICHARD, D., CLANET, C. & QUÉRÉ, D. 2003 Pyramidal and toroidal water drops after impact on a solid surface. *J. Fluid Mech.* **484**, 69.
- ROMAN, B., GAY, C. & CLANET, C. 2004 Pendulum, drops and rods: An analogy. *Am. J. Phys.* Accepted mais, pour l'anecdote, non publié pour cause d'oubli de la part des auteurs. Une version électronique reste disponible à l'adresse suivante : <https://www.researchgate.net/publication/237480399>.
- ROY, V. & SCHWARTZ, L. W. 1999 On the stability of liquid ridges. *J. Fluid Mech.* **291**, 293–318.
- RUSSELL, J. S. 1844 Report on waves. *Rep. Br. Assoc. Adv. Sci.* pp. 311–390.
- SAINT-VENANT, A. J. C. B. 1871 Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction de marées dans leurs lits. *C. R. Acad. Sci.* **73**, 147–154 et 237–240.
- SAVART, F. 1833 Mémoire sur la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en mince paroi. *Annal. Chim. Phys.* **53**, 337–386.
- SCHMUKI, P. & LASO, M. 1990 On the stability of rivulet flow. *J. Fluid Mech.* **215**, 125–143.
- SEGEL, L. A. & HANDELMAN, G. H. 1987 *Mathematics Applied to Continuum Mechanics*. New York: Dover Publications.

- SEKIMOTO, K., OGUMA, R. & KAWASAKI, K. 1987 Morphological stability analysis of partial wetting. *Ann. Phys.* **176**, 359–392.
- SNEZHKO, A., BEN JACOB, E. & ARANSON, I. S. 2008 Pulsating-gliding transition in the dynamics of levitating liquid nitrogen droplets. *New J. Phys.* **10**, 043034.
- SPETH, R. L. & LAUGA, E. 2009 Capillary instability on a hydrophilic stripe. *New J. Phys.* **11**, 075024.
- STONE, H. A. & LEAL, L. G. 1989a The influence of initial deformation on drop breakup in subcritical time-dependent flows at low Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **206**, 223–263.
- STONE, H. A. & LEAL, L. G. 1989b Relaxation and breakup of an initially extended drop in an otherwise quiescent fluid. *J. Fluid Mech.* **198**, 399–427.
- SUMESH, P. T. & GOVINDARAJAN, R. 2010 The possible equilibrium shapes of static pendant drops. *J. Chem. Phys.* **133**, 144707.
- TADDEUCCI, J., ALATORRE-IBARGUENGOITIA, M. A., PALLADINO, D. M., SCARLATO, P. & CAMALDO, C. 2015 High-speed imaging of Strombolian eruptions: Gas-pyroclast dynamics in initial volcanic jets. *Geophys. Res. Lett.* **42**, 6253.
- TAKAKI, R. & ADACHI, K. 1985 Vibration of a flattened drop II. Normal mode analysis. *J. Phys. Soc. Jpn.* **54**, 2462–2469.
- TAM, C. K. W. & THIES, A. T. 1992 Instability of rectangular jets. *J. Fluid. Mech.* **248**, 425–448.
- TAYLOR, G. I. 1959 The dynamics of thin sheets of fluid. III. Disintegration of fluid sheets. *Proc. R. Soc. Lond. A* **253**, 313–321.
- TOKUGAWA, N. & TAKAKI, R. 1994 Mechanism of self induced vibration of a liquid drop based on the surface tension fluctuation. *J. Phys. Soc. Jpn.* **63**, 1758–1768.
- TOMOTIKA, S. 1935 On the instability of a cylindrical thread of a viscous liquid surrounded by another viscous fluid. *Proc. R. Soc. A* **150**, 322–337.
- WALTERS, J. K. & DAVIDSON, J. F. 1963 The initial motion of a gas bubble formed in an inviscid liquid. Part 1. The two-dimensional bubble. *J. Fluid Mech.* **17**, 408.
- WHITHAM, G. B. 1999 *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley.
- WORTHINGTON, A. M. 1880 On the spontaneous segmentation of a liquid annulus. *Proc. R. Soc. Lond* **30**, 49–60.
- YANG, L. & HOMSY, G. M. 2007 Capillary instabilities of liquid films inside a wedge. *Phys. Fluids* **19**, 044101.
- ZAKHAROV, V. E. 2009 Turbulence in integrable systems. *Studies in Applied Mathematics* **122**, 219–234.

Résumé

Ce mémoire présente une thématique de recherche qui m'occupe depuis maintenant huit ans. Elle est consacrée à l'étude des ondes de surface se propageant à la surface de gouttes qui ont, ou bien une géométrie rectiligne très allongée (typiquement d'une cinquantaine de centimètres en longueur et de l'ordre du centimètre en largeur), ou bien une géométrie torique. Elles sont soit posées sur un substrat super-hydrophobe à température ambiante, soit en lévitation au-dessus d'un substrat chauffé. À cause de la forme du substrat qui les supporte, elles ne sont pas le siège de l'instabilité de Plateau-Rayleigh pourvu que leur volume soit suffisant. De plus, dans le cas du tore, elles ne referment pas leur trou.

La propagation d'ondes de surface le long de ces gouttes peut être étudiée en analysant les déformations de l'interface libre le long de leurs bords. Différents modes de propagation ont été mis en évidence : des modes variqueux dont nous avons caractérisé la relation de dispersion, qui prend la forme d'une relation de dispersion gravito-capillaire avec des valeurs effectives de gravité, de tension de surface et de profondeur ; des modes sinueux et des modes de ballonnement, caractérisés par des pulsations de coupure bien définies. Ces systèmes sont des systèmes quasi-1D, peu dissipatifs, dispersifs et non linéaires et la propagation de solitons de Korteweg-de Vries en dépression a été observée le long des gouttes rectilignes.

Nos deux géométries de gouttes sont ainsi des systèmes originaux pour réaliser des études liées aux phénomènes de turbulence d'ondes. En outre, dans le cas du tore, nous sommes spécifiquement en présence d'une famille doublement discrète d'excitations qui peuvent interagir entre elles. Enfin, le forçage vertical d'une goutte torique conduit à l'émergence de modes et, passé un certain seuil, des ondes de Faraday se développent le long de la surface libre, initialement courbée dans toutes les directions.