



HAL
open science

Procédure unifiée d'identification par méthode inverse de coefficients aérodynamiques d'un projectile

Thomas Tallec

► **To cite this version:**

Thomas Tallec. Procédure unifiée d'identification par méthode inverse de coefficients aérodynamiques d'un projectile. Mécanique [physics.med-ph]. Normandie Université, 2023. Français. NNT : 2023NORMC246 . tel-04426316

HAL Id: tel-04426316

<https://theses.hal.science/tel-04426316v1>

Submitted on 30 Jan 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité **MECANIQUE DES SOLIDES, GENIE MECANIQUE, PRODUCTIQUE, TRANSPORT
ET GENIE CIVIL**

Préparée au sein de l'**Université de Caen Normandie**

**Procédure unifiée d'identification par méthode inverse de
coefficients aérodynamiques d'un projectile**

Présentée et soutenue par
THOMAS TALLEC

Thèse soutenue le 29/11/2023
devant le jury composé de :

| | | |
|------------------------|---|--------------------|
| M. MATHIEU AUCEJO | Maître de conférences HDR - Conservatoire Nat des Arts et Métiers | Rapporteur du jury |
| M. SÉBASTIEN MERCIER | Professeur des universités - UNIVERSITE DE LORRAINE | Rapporteur du jury |
| M. CYRILLE ALLERY | Professeur des universités - UNIVERSITE LA ROCHELLE | Membre du jury |
| M. NATHAN GRANGE | Docteur - KNDS France | Membre du jury |
| M. CHRISTOPHE GRIGNON | Docteur - Direction Générale de l'Armement | Membre du jury |
| MME SETTIE HEDDADJ | Docteur - KNDS France | Membre du jury |
| MME ANNE-CLAIRE BENNIS | Professeur des universités - Université de Caen Normandie | Président du jury |
| M. FRANCK DELVARE | Professeur des universités - Université de Caen Normandie | Directeur de thèse |

Thèse dirigée par **FRANCK DELVARE** (Laboratoire de Mathématiques 'Nicolas Oresme' (Caen))



Remerciements

L'accomplissement de cette thèse a été une aventure exigeante et gratifiante, rendue possible grâce au soutien inestimable de nombreuses personnes. C'est pourquoi, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers ceux qui ont contribué à cette réalisation.

En tout premier lieu, je tiens à remercier chaleureusement mon directeur de thèse, Franck DELVARE, professeur à l'Université de Caen qui m'a fait confiance malgré mon parcours atypique. Ses conseils éclairés et son expertise m'ont permis d'avancer sur mon travail. Cette thèse est le résultat de notre collaboration, et je suis reconnaissant de l'opportunité qui m'a été donnée de travailler sous sa direction pendant ces quatre années.

Je remercie Christophe GRIGNON, Settie HEDDADJ et Nathan GRANGE pour leur expertise, Ils m'ont permis de me familiariser et d'appréhender les difficultés de la balistique extérieure. Je remercie en particulier Nathan qui a toujours été disponible et accueillant lors de mes séjours à Bourges.

Je souhaite aussi remercier les autres membres qui ont constitué le jury de thèse. Je remercie Monsieur Mathieu AUCEJO et Monsieur Sébastien MERCIER pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux en acceptant d'en être rapporteur. Je remercie aussi Madame Anne-Claire BENNIS et Monsieur Cyrille ALLERY qui ont accepté d'être membre de ce jury.

Je remercie l'ensemble des membres du laboratoire LMNO et en particulier Anita pour sa gentillesse et sa disponibilité notamment pour m'épauler dans l'organisation de mes missions. Je remercie aussi mes collègues de bureau Aziz et Alioune, ainsi que les doctorants tunisiens Chayma et Hatem pour la bonne humeur qu'ils ont apportée.

Je remercie aussi tous les relecteurs de ce travail qui ont participé aux nombreuses corrections de ce mémoire.

Ensuite, je souhaite adresser un immense merci aux membres de ma famille qui ont toujours cru en moi et qui m'ont soutenu dans mon parcours de vie. A ma grand mère Jeanne et à mes parents pour leur soutien moral et leur confiance depuis le tout début.

À ma sœur et mes frères, Vanessa, Yoann et Jonathan ainsi que mes nièces Léïa, Zoé et Rose pour les bons moments passés ensemble, qui m'ont permis de me détacher du travail. Votre soutien et votre bonne humeur ont été mes sources de motivation constantes.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers mes amis proches piliers essentiels de ma vie pendant ces années de recherche. Vos encouragements, vos conseils et vos oreilles attentives ont été inestimables. À mes amis caennais et parisiens, dont je ne citerai pas tous les noms par peur d'en oublier, qui m'ont soutenu dans les moments de doute et de découragement. Vous m'êtes précieux et irremplaçables.

Je remercie particulièrement mes camarades, Simon et Romain, à qui j'ai souvent fait défaut mais qui m'ont permis d'avoir des moments de détente indispensables, notamment pendant les parties de fléchettes.

Enfin, je souhaite remercier, la personne la plus importante à mes yeux, elle m'a soutenu et supporté durant les moments difficiles de la thèse et m'a permis de finaliser ce travail dans les meilleures conditions. Karen mon amour, ma belle brune brésilienne, bien que tu saches déjà tout l'amour que j'ai pour toi, je tiens à te l'écrire une fois de plus, je t'aime. Je te remercie de me soutenir dans mes choix et d'égayer mon quotidien. Je te remercie de partager et d'éclairer ma vie.

Cette thèse marque la fin d'un chapitre de ma vie et le début d'une nouvelle ère d'opportunités et de défis. J'espère pouvoir continuer à compter sur votre soutien et votre amitié dans les années à venir. Je suis profondément reconnaissant envers chacun d'entre vous qui m'avez accompagné.

Table des matières

| | |
|--|-------------|
| Remerciements | i |
| Liste des principaux symboles | vii |
| Table des figures | xiii |
| Liste des tableaux | xvii |
| Introduction générale | 1 |
| I Introduction à la balistique extérieure et à l'identification des coefficients aérodynamiques | 5 |
| Introduction | 6 |
| 1 Généralités sur la mécanique du vol d'un projectile | 6 |
| 1.1 Les projectiles | 6 |
| 1.2 Repères balistiques | 9 |
| 1.3 Modèles balistiques utilisés pour représenter la trajectoire d'un projectile | 11 |
| 1.4 Comparaison numérique des modèles balistiques | 24 |
| 2 Moyens pour la caractérisation de l'aérodynamique des projectiles | 29 |
| 2.1 Mécanique des fluides numérique (CFD) | 29 |
| 2.2 Codes semi-empiriques | 31 |
| 2.3 Essais en soufflerie | 31 |
| 2.4 Tirs réels instrumentés | 31 |
| 3 Instrumentations disponibles | 32 |
| 3.1 Radar de trajectographie | 32 |
| 3.2 Mesure de la rotation axiale ω_c | 33 |
| 3.3 Sonde d'obliquité | 34 |
| 3.4 Magnétomètres et accéléromètres | 34 |
| 3.5 Ballon-sonde | 34 |
| 4 Méthode d'identification des coefficients aérodynamiques à partir des données de tir | 35 |
| 4.1 Cas d'un projectile empenné : obus flèche | 35 |
| 4.2 Cas d'un projectile gyrostabilisé | 37 |
| Bilan | 38 |

| | | |
|------------|---|-----------|
| II | Analyse asymptotique du modèle balistique PMM | 39 |
| | Introduction | 40 |
| 1 | Etude du modèle Point Matériel Modifié Réduit | 40 |
| | 1.1 Etude des accélérations | 40 |
| | 1.2 Étude des composantes de la vitesse | 43 |
| | 1.3 Bilan | 43 |
| 2 | Écriture adimensionnelle du PMM réduit | 44 |
| | 2.1 Adimensionnalisation du PMM | 44 |
| | 2.2 Introduction du paramètre adimensionnel ξ | 47 |
| | 2.3 Étude du paramètre adimensionnel ξ | 48 |
| 3 | Développement asymptotique en ξ de l'accélération du PMM réduit | 51 |
| 4 | Hypothèses sur la forme des développements de la vitesse et de l'accélération | 55 |
| 5 | Procédure d'identification séquentielle des coefficients aérodynamiques du modèle PMM | 56 |
| | 5.1 Identification du coefficient C_{lp} | 56 |
| | 5.2 Identification de la contribution principale C_{x0} du coefficient de traînée | 57 |
| | 5.3 Identification des contributions ξC_{zm0} puis de ξC_{x1} et $\xi C_{y_{pm}0}$ | 57 |
| | 5.4 Identification des contributions $\xi^2 C_{x2}$, $\xi^2 C_{zm1}$ et $\xi^2 C_{y_{pm}1}$ | 59 |
| | 5.5 Expression des coefficients à partir du second développement asymptotique | 60 |
| | Bilan | 60 |
| III | Mise en place de la procédure d'identification séquentielle des coefficients à partir de données synthétiques | 61 |
| | Introduction | 62 |
| 1 | Procédure d'identification de paramètres à partir d'un problème d'optimisation non linéaire sous contraintes égalités | 62 |
| | 1.1 Problème d'optimisation non linéaire sous contraintes égalités | 62 |
| | 1.2 Prise en compte de l'évolution des coefficients aérodynamiques au cours du vol | 65 |
| 2 | Détermination du coefficient d'amortissement en roulis C_{lp} | 67 |
| 3 | Détermination de la contribution C_{x0} du coefficient de traînée | 68 |
| | 3.1 Résultats d'identification à partir des données générées par le modèle balistique PMC | 69 |
| | 3.2 Résultats d'identification à partir des données générées avec le modèle balistique PMM | 73 |
| 4 | Détermination de la contribution ξC_{zm0} liée à la portance | 77 |
| | 4.1 Identification à partir des données de tir générées numériquement par le modèle PMM | 77 |
| | 4.2 Reconstruction de la trajectoire avec les coefficients identifiés | 79 |
| 5 | Détermination de la contribution $R_1 \xi C_{y_{pm}0}$ liée à l'effet Magnus | 80 |

| | | |
|---|---|------------|
| 6 | Calcul des termes correctifs provenant du modèle d'ordre deux | 81 |
| 6.1 | Correction $\xi^2 C_{x2}$ du coefficient de traînée | 82 |
| 6.2 | Correction $\xi^2 C_{zm1}$ | 84 |
| 6.3 | Contribution $\xi^2 C_{yym1}$ | 86 |
| 6.4 | Synthèse de la procédure d'identification séquentielle des coefficients | 88 |
| | Bilan | 90 |
| IV Applications de la procédure d'identification à des données de tir enregistrées par un radar de trajectographie | | 93 |
| | Introduction | 94 |
| 1 | Identification du coefficient d'amortissement en roulis C_{lp} | 94 |
| 2 | Procédure de prétraitement des données radar pour estimer les vitesses cartésiennes | 96 |
| 2.1 | Mesures météorologiques disponibles | 96 |
| 2.2 | Mesures radar disponibles | 96 |
| 2.3 | Détermination des conditions initiales du tir | 98 |
| 2.4 | Estimation des vitesses cartésiennes à partir de mesures de position | 100 |
| 2.5 | Analyse de la précision des vitesses estimées | 102 |
| 3 | Application de la procédure séquentielle d'identification des coefficients pour un vol de référence | 106 |
| 3.1 | Identification du C_{x0} | 106 |
| 3.2 | Identification de la contribution ξC_{zm0} | 110 |
| 4 | Identification de la contribution C_{x0} pour d'autres configurations et d'autres projectiles | 113 |
| 4.1 | Applications à trois tirs de la même campagne de tirs | 113 |
| 4.2 | Applications à trois tirs d'un projectile ayant une forte vitesse initiale | 115 |
| 4.3 | Applications à deux tirs d'un projectile base-bleed | 116 |
| 4.4 | Applications à huit tirs d'un projectile de petit calibre | 117 |
| | Bilan | 118 |
| Conclusion et perspectives | | 119 |
| A Second développement asymptotique du modèle PMM réduit | | 123 |
| B Identification des conditions initiales d'un tir | | 127 |
| Bibliographie | | 129 |

Liste des principaux symboles

δt_r Plage temporelle utilisée pour la régression polynomiale

r_v Ordre de la régression polynomiale pour le calcul des vitesses cartésiennes

Abréviations

CFD Computational Fluid Dynamics

DDL Degré De Liberté

DNS Direct Numerical Simulation

LES Large Eddy Simulation

PFD Principe Fondamental de la Dynamique

PMC Point Matériel Classique

PMM Point Matériel Modifié

RANS Reynolds Averaged Navier-Stokes Simulation

SST Menter's Shear Stress Transport

URANS Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes Simulation

Coefficients aérodynamiques

C_x Coefficient de traînée

C_z Coefficient de portance

C_{yp} Coefficient de Magnus

C_{np} Coefficient du moment de Magnus

C_{lp} Coefficient d'amortissement en roulis

C_m Coefficient de tangage

C_{mq} Coefficient d'amortissement en tangage

$C_{x0}^{\alpha_e}$ Coefficient de traînée à l'ordre 0 en α_e

$C_{x2}^{\alpha_e}$ Coefficient de traînée à l'ordre 2 en α_e

$C_{z0}^{\alpha_e}$ Coefficient de portance à l'ordre 0 en α_e

$C_{z2}^{\alpha_e}$ Coefficient de portance à l'ordre 2 en α_e

$C_{m0}^{\alpha_e}$ Coefficient de tangage à l'ordre 0 en α_e

$C_{m2}^{\alpha_e}$ Coefficient de tangage à l'ordre 2 en α_e

Notation utile au développement asymptotique

$\xi = \frac{I_1 \omega_c}{mvD}$ paramètre adimensionnel

$C_{zm} = \frac{C_{z\alpha}}{C_{m\alpha}}$ Rapport de coefficients lié à la force de portance

$C_{ypm} = \frac{C_{yp\alpha}}{C_{m\alpha}}$ Rapport de coefficients lié à la force de Magnus

C_{x0} Contribution d'ordre 0 en ξ du coefficient de traînée

C_{x1} Contribution d'ordre 1 en ξ du coefficient de traînée

C_{x2} Contribution d'ordre 2 en ξ du coefficient de traînée

C_{zm0} Contribution d'ordre 0 en ξ du rapport C_{zm}

C_{zm1} Contribution d'ordre 1 en ξ du rapport C_{zm}

C_{ypm0} Contribution d'ordre 0 en ξ du rapport C_{ypm}

C_{ypm1} Contribution d'ordre 1 en ξ du rapport C_{ypm}

$R_1 = \frac{D\omega_c}{v}$

$R_2 = \frac{mD}{I_1}$

Propriétés du fluide

M_{gaz} Masse molaire kg/mol

ρ Masse volumique kg/m³

P Pression Pa

T Température K

q Pression dynamique Pa

c Vitesse du son dans le fluide m/s

Propriétés du projectile

m Masse du projectile kg

D Diamètre du projectile m

L Longueur du projectile m

S Maître couple m²

I_1 Moment d'inertie du projectile suivant son axe longitudinal kg · m²

- $\underline{\underline{I}}$ Matrice d'inertie du solide
 $\underline{H}_{(\underline{I}, \underline{J}, \underline{K})}$ Moment cinétique du projectile dans le repère Galiléen
 $\underline{H}_{(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})}$ Moment cinétique du projectile dans le repère canon

Forces et moments aérodynamiques

- \underline{P} Force de pesanteur
 \underline{F}_c Force de Coriolis
 \underline{D} Force de traînée
 \underline{L} Force de portance
 \underline{K} Force de Magnus
 \underline{F}_{ext} Forces extérieures agissant sur le projectile
 \underline{M}_M Moment de Magnus
 \underline{M}_R Moment d'amortissement en roulis
 \underline{M}_A Moment de tangage
 \underline{M}_D Moment d'amortissement en tangage
 \underline{M} Moments agissant sur le solide

Constantes physiques

- γ Coefficient adiabatique
 R Constante des gaz parfaits 8.314 J/(K · mol)
 R_s Constante spécifique de l'air sec 287.048 J/(kg · K)
 R_T Rayon de la Terre 6 371 009 m
 Ω_T Vitesse de rotation de la Terre sur elle même $7.292\,115 \times 10^{-5}$ rad/s
 g_0 Pesanteur locale de référence m/s²

Repères et angles balistiques

- $(C_T, \underline{I}, \underline{J}, \underline{K})$ Repère Galiléen
 $(C, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ Repère canon
 $(G, \underline{t}, \underline{s}, \underline{h})$ Repère trajectoire
 $(G, \underline{c}, \underline{a}, \underline{b})$ Repère lié au solide
 Lat Latitude rad
 Az Azimut rad
 η Angle de gisement rad

| | | |
|------------------------|----------------------------------|-----|
| θ | Angle de hausse ou angle de site | rad |
| ψ | Angle de précession | rad |
| α | Angle d'obliquité | rad |
| φ | Angle de roulis | rad |
| $\underline{\alpha}_e$ | Vecteur obliquité | |
| α_e | Norme du vecteur obliquité | |
| mil | mille d'artillerie | |

Positions, vitesses et accélérations

| | | |
|--|---|-------|
| F | Centre de poussée | |
| G | Centre de gravité du projectile | |
| M | Nombre de Mach | |
| V_0 | Vitesse initiale de tir | m/s |
| r | Distance radiale du projectile | m |
| V_r | Vitesse radiale du projectile | m/s |
| ω_c | Vitesse de rotation du projectile autour de son longitudinal | |
| (x, y, z) | Coordonnées du centre de gravité G du projectile dans le repère canon | |
| \underline{v} | Vecteur vitesse relative du projectile | |
| $\underline{t} = \frac{v}{v}$ | Vecteur vitesse unitaire du projectile | |
| \underline{v}^* | Vecteur vitesse relative adimensionnée du projectile | |
| $\underline{t}^* = \frac{v^*}{v}$ | Vecteur vitesse adimensionnée unitaire du projectile | |
| $\underline{\dot{u}}$ | Vecteur accélération absolue du projectile | |
| $\underline{\dot{u}}^*$ | Vecteur accélération absolue adimensionnée du projectile | |
| $\underline{\Lambda}$ | Vecteur accélération de Coriolis | |
| $\underline{\Omega}_{(c,a,b)/(I,J,K)}$ | Vecteur rotation du projectile dans le repère Galiléen | rad/s |
| $\underline{\Omega}_{(c,a,b)/(i,j,k)}$ | Vecteur rotation du projectile dans le repère canon | rad/s |
| $\underline{\Omega}_{(i,j,k)/(I,J,K)}$ | Vecteur rotation du projectile du repère canon par rapport au repère Galiléen | rad/s |
| $\underline{T_{Cx}}$ | Contribution de l'accélération liée à la force de traînée | |
| $\underline{T_{Czm}}$ | Contribution de l'accélération liée à la force de portance | |
| $\underline{T_{Cypm}}$ | Contribution de l'accélération liée à la force de Magnus | |

- $T_{Coriolis}$ Contribution de l'accélération liée à l'effet Coriolis
- T_{Cx}^* Contribution de l'accélération adimensionnalisée liée à la force de traînée
- T_{Czm}^* Contribution de l'accélération adimensionnalisée liée à la force de portance
- T_{Cypm}^* Contribution de l'accélération adimensionnalisée liée à la force de Magnus
- $T_{Coriolis}^*$ Contribution de l'accélération adimensionnalisée liée à l'effet Coriolis

Table des figures

| | | |
|------|--|----|
| I.1 | CAmion Equipé d'un Système d'Artillerie : CAESAR (d'après [47]) | 7 |
| I.2 | Schéma simplifié d'un projectile flèche (d'après [17]) | 8 |
| I.3 | Schéma simplifié d'un projectile gyrostabilisé (d'après [17]) | 8 |
| I.4 | Représentation des différents régimes d'écoulement | 9 |
| I.5 | Passage du repère Galiléen au repère canon (d'après [22]) | 10 |
| I.6 | Passage du repère canon $(C, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ au repère trajectoire $(G, \underline{t}, \underline{s}, \underline{h})$: définitions des angles, d'azimut Az et de gisement η (a) et de hausse θ (b) (d'après [22]) | 11 |
| I.7 | Représentation de la force de Traînée \underline{D} | 14 |
| I.8 | Passage du repère trajectoire au repère projectile : angle de précession ψ (a), angle d'obliquité α (b) et angle de roulis φ (c) (d'après [22]) | 15 |
| I.9 | Représentation des angles de précession ψ , d'obliquité α et de roulis φ | 16 |
| I.10 | Forces aérodynamiques agissant sur le projectile (modèle à 6 D.D.L.) | 17 |
| I.11 | Représentation des moments aérodynamiques agissant sur le projectile | 18 |
| I.12 | Représentation du vecteur obliquité dans le plan $(\underline{t}, \underline{c})$ | 22 |
| I.13 | Trajectoires obtenues par les trois modèles : portée (a), altitude (b) et déviation (c,d) pour les quatre configurations de tir | 25 |
| I.14 | Comparaison des erreurs sur la portée entre les trois modèles : configurations n°1 (a), n°2 (b), n°3 (c) et n°4 (d) | 26 |
| I.15 | Comparaison des erreurs sur l'altitude entre les trois modèles : configurations n°1 (a), n°2 (b), n°3 (c) et n°4 (d) | 27 |
| I.16 | Comparaison des obliquités α obtenues pour les modèles 6DDL et PMM pour les configurations n°1 (a), n°2 (b), n°3 (c) et n°4 (d) | 28 |
| I.17 | Radar SARAH exposé le 14 juillet 2022 sur l'esplanade des Invalides [28] | 33 |
| I.18 | Représentation d'une flèche dans sa cartouche (a), maintenue dans son sabot (b) et lors de la séparation sabot-projectile (c) (d'après [22]) | 35 |
| II.1 | Exemples d'évolutions temporelles, suivant les trois directions de l'espace, des contributions en terme d'accélération. | 42 |
| II.2 | Évolution temporelle des composantes de la vitesse (v_x, v_y, v_z) respectivement dans les trois directions $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ | 43 |

| | | |
|--------|---|----|
| II.3 | Exemples d'évolutions temporelles, suivant les trois directions de l'espace, des différentes contributions au niveau de l'accélération adimensionnée $\underline{\dot{u}}^*$ | 45 |
| II.4 | Évolution temporelle des composantes du vecteur unitaire $\underline{t} = \frac{\underline{v}}{v}$ dans les trois directions pour deux échelles | 46 |
| II.5 | Évolution temporelle de ξ pour huit configurations de tirs avec une hausse fixe de 700mil ($300m/s < v_{init} < 1000m/s$) | 49 |
| II.6 | Évolution temporelle de ξ pour huit configurations de tirs avec une hausse fixe de 1200mil ($300m/s < v_{init} < 900m/s$). | 50 |
| III.1 | Exemple de répartition des nœuds pour $K = 0$ | 66 |
| III.2 | Identification du coefficient d'amortissement en roulis à partir de données générées numériquement | 67 |
| III.3 | Influence de la taille de l'intervalle d'identification | 70 |
| III.4 | Influence du pas de temps de calcul | 70 |
| III.5 | Influence de l'ordre du schéma d'intégration | 71 |
| III.6 | Utilisation de B-splines d'ordre un à deux | 72 |
| III.7 | Identification du coefficient de traînée à partir de données générées pour deux configurations respectant la condition ξ petit. | 73 |
| III.8 | Identification du coefficient de traînée à partir de données générées pour deux configurations ne respectant pas la condition ξ petit sur tout le vol | 74 |
| III.9 | Évolution temporelle du paramètre adimensionnel ξ pour les configurations n°1 (a), n°2 (b), n°3 (c) et n°4 (d) | 74 |
| III.10 | Évolution temporelle de l'identification du coefficient de traînée à partir de données générées pour deux configurations ne respectant pas la condition ξ petit sur tout le vol | 75 |
| III.11 | Comparaison entre les trajectoires de référence et les trajectoires recalculées dans les deux directions principales du tir ($\underline{i}, \underline{j}$) pour 4 configurations | 75 |
| III.12 | Identification du coefficient $\xi_{C_{zm0}}$ pour les configurations n°1 (a) et n°2 (b). | 77 |
| III.13 | Identification du coefficient $\xi_{C_{zm0}}$ pour les configurations n°3 (c) et n°4 (d). | 78 |
| III.14 | Identification du coefficient $\xi_{C_{zm0}}$ pour les configurations n°1 (a) et n°2 (b) avec un $C_{yp\alpha} = 0$ | 78 |
| III.15 | Comparaison des rejeux de la déviation pour les 4 configurations | 79 |
| III.16 | Identification de la contribution $R_1 \xi_{C_{ypm}}$ liée à la force de Magnus pour les configurations n°1 (a), n°2 (b), n°3 (c) et n°4 (d). | 80 |
| III.17 | Identification du coefficient adimensionné $C_{yp\alpha^*}$ associé à la force de Magnus pour les configurations n°1 (a) et n°2 (b). | 81 |
| III.18 | Évolutions en fonction du nombre de Mach et temporelles des coefficients identifiés pour les 4 configurations de tir | 83 |
| III.19 | Évolutions en fonction du nombre de Mach et temporelles du coefficient $\xi_{C_{zm}}$ avec les expressions issues des deux développements (I) et (II) pour les 4 configurations de tir. | 85 |

| | | |
|--------|--|-----|
| III.20 | Reconstructions du coefficient adimensionné $C_{z\alpha}$ pour les configurations n°1 (a), n°2 (b), n°3 (c) et n°4 (d) | 86 |
| III.21 | Identification de la contribution liée à la force de Magnus pour les configurations n°1 (a), n°2 (b), n°3 (c) et n°4 (d). | 87 |
| III.22 | Identification du coefficient $C_{yp\alpha 0}^*$ associé à la force de Magnus pour les configurations n°1 (a), n°2 (b), n°3 (c) et n°4 (d) | 87 |
| III.23 | Synthèse pour la configuration n°1 | 88 |
| III.24 | Synthèse pour la configuration n°2 | 89 |
| III.25 | Synthèse pour la configuration n°3 | 89 |
| III.26 | Synthèse pour la configuration n°4 | 90 |
| IV.1 | Mesure radar de la vitesse de rotation du projectile ω_c pour deux tirs (tir n°1 (a) et tir n°8 (b)) | 95 |
| IV.2 | Identification du coefficient d'amortissement en roulis C_{lp}^* pour 8 essais sur champ de tir | 96 |
| IV.3 | Évolution en altitude des données météorologiques. | 97 |
| IV.4 | Évolutions temporelles des mesures radar (V_r, r, η et θ) | 98 |
| IV.5 | Évolutions temporelles des positions cartésiennes (x,y,z) du projectile déduites des mesures radar (r, η, θ) | 99 |
| IV.6 | Zoom sur la déviation pour deux fenêtres temporelles | 99 |
| IV.7 | Estimation des vitesses cartésiennes pour une fenêtre temporelle δt_r de 1s à 8s et pour un ordre de régression $r_v = 1$ (a, b, c) et de $r_v = 2$ (d, e, f) | 101 |
| IV.8 | Zoom temporel sur l'intervalle [15s, 20s] pour un ordre de régression $r_v = 1$ (a, b, c) et $r_v = 2$ (d, e, f) | 102 |
| IV.9 | Évolution temporelle des écarts de portée (Δx) après intégration des vitesses estimées à partir de fenêtres temporelles δt_r allant de 1s à 8s et une régression d'ordre $r_v = 1$ (a) et (b) et d'ordre $r_v = 2$ (c), (d) | 103 |
| IV.10 | Évolution temporelle des écarts d'altitude (Δy) après intégration des vitesses estimées à partir de fenêtres temporelles δt_r allant de 1s à 8s et une régression d'ordre $r_v = 1$ (a) et (b) et d'ordre $r_v = 2$ (c), (d) | 104 |
| IV.11 | Évolution temporelle des écarts de déviation (Δz) après intégration des vitesses estimées à partir de fenêtres temporelles δt_r allant de 1s à 8s et une régression d'ordre $r_v = 1$ (a) et (b) et d'ordre $r_v = 2$ (c), (d) | 105 |
| IV.12 | Évolution temporelle de la déviation mesurée par le radar et des positions z obtenues après intégration des vitesses issues d'une régression quadratique sur une fenêtre temporelle de $\delta t_r = 3s$ (a) et $\delta t_r = 8s$ (b) | 105 |
| IV.13 | Étude de sensibilité par rapport à la taille de la fenêtre de régression δt_r du coefficient C_{x0} identifié : évolution temporelle | 107 |
| IV.14 | Étude de sensibilité par rapport à la taille de la fenêtre de régression δt_r du coefficient C_{x0} identifié : évolution en fonction du Mach | 107 |

| | | |
|-------|--|------|
| IV.15 | Étude de sensibilité par rapport à la taille de la fenêtre temporelle δt du coefficient C_{x0} identifié : évolution temporelle | .108 |
| IV.16 | Étude de sensibilité par rapport à la taille de la fenêtre temporelle δt du coefficient C_{x0} identifié : évolution en fonction du Mach | .108 |
| IV.17 | Comparaison des composantes de vitesses u_x (a) et u_y (b) en entrée ou en sortie de la procédure d'identification du C_{x0} | .109 |
| IV.18 | Évolution temporelle des portées recalculées après l'identification du C_{x0} (a). Tracés des écarts par rapport aux mesures radar (b) et (c) | .109 |
| IV.19 | Évolution temporelle des altitudes recalculées après l'identification du C_{x0} (a). Tracés des écarts par rapport aux mesures radar (b) et (c) | .110 |
| IV.20 | Comparaison de la composante de la vitesse u_z obtenue après identification du ξC_{zm0} aux estimations de vitesses obtenues par régression pour des fenêtres de régression $\delta t_r = 2s$ (a), $\delta t_r = 3s$ (b) et $\delta t_r = 8s$ (c) | .111 |
| IV.21 | Évolution temporelle des déviations recalculées après l'identification du C_{zm0} (a). Tracés des écarts par rapport aux mesures radar (b) et (c) | .112 |
| IV.22 | Évolution temporelle du coefficient ξC_{zm0} identifié à partir des vitesses estimées par régression ($r_v = 2$ et $\delta t_r = 1s$ à $8s$). | .113 |
| IV.23 | Coefficient de portance identifié à partir de données radar | .113 |
| IV.24 | Comparaison des coefficients de traînée identifiés à une référence interne DGA pour trois configurations initiales différentes | .114 |
| IV.25 | Comparaison des coefficients de traînée identifiés à une référence DGA pour trois tirs présentant une vitesse initiale identique et trois hausses différentes | .115 |
| IV.26 | Comparaison des coefficients de traînée identifiés à une référence DGA pour deux tirs d'un projectile base-bleed | .116 |
| IV.27 | Exemple d'évolution temporelle du paramètre adimensionnel ξ dans le cas d'un projectile de petit calibre | .117 |
| IV.28 | Coefficient de traînée identifié à partir de données radar pour le projectile de petit calibre | .117 |

Liste des tableaux

| | | |
|-------|---|-----|
| I.1 | Liste des configurations étudiées | 25 |
| I.2 | Tableau des erreurs du point d'impact entre les modèles PMC / PMM et le 6DDL | 27 |
| II.1 | Valeur maximale de ξ au cours du vol | 49 |
| II.2 | Fenêtre temporelle (en s) où $\xi > 0.1$ | 50 |
| III.1 | Données PMM : écarts d'altitude à l'apogée | 76 |
| III.2 | Données PMM : écarts de portée au point d'impact | 76 |
| III.3 | Écarts de déviation au point d'impact pour les 4 configurations | 79 |
| III.4 | Données PMM : écarts d'altitude à l'apogée après correction du coefficient C_x | 84 |
| III.5 | Données PMM : écarts de portée au point d'impact après correction du coefficient C_x | 84 |
| B.1 | Conditions initiales des tirs fournies par les données expérimentales | 128 |
| B.2 | Comparaison des corrections obtenues par notre code et celles données par la DGA | 128 |
| B.3 | Ecart entre les corrections obtenues par notre code et celles données par la DGA | 128 |

Introduction générale

Les travaux présentés ont été réalisés dans le cadre d'une thèse cofinancée par la région Normandie et la Direction Générale de l'Armement, représentée par l'Agence Innovation Défense, et préparés au sein du Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme (LMNO) de l'Université de Caen Normandie. En complément, la thèse a donné lieu à une collaboration avec l'entreprise KNDS France, située à Bourges, qui est un acteur fortement engagé dans les travaux antérieurs sur ce sujet.

La fiabilité de la prédiction de l'impact et de la trajectoire des tirs d'artillerie constitue un objectif majeur dans le domaine de la balistique extérieure, science étudiant le comportement des projectiles lors d'un tir. La précision du tir doit être garantie quelle que soit la nature des munitions utilisées. Pour obtenir une bonne connaissance du point d'impact, nous devons être en mesure de calculer la trajectoire au plus proche de la réalité. Les méthodes de génération de trajectoire font appel à des modèles mathématiques, appelés modèles balistiques, qui permettent de modéliser les actions mécaniques subies par le projectile pendant son vol. Cette modélisation permet de simuler le comportement en vol de l'objet afin de calculer sa trajectoire. Lors de la modélisation, certaines hypothèses peuvent être faites sur les différents efforts pris en compte afin d'adapter les pas de temps et le coût de calcul en fonction de la précision souhaitée pour les données de sortie. L'utilisation de ces modèles balistiques requiert la connaissance des caractéristiques aérodynamiques de l'objet afin de représenter l'écoulement du fluide lors du déplacement de l'objet. Ainsi, il existe un lien étroit entre l'aérodynamique et le vol (trajectoires et mouvements).

L'aérodynamique d'un objet est définie par l'ensemble des coefficients adimensionnels liés à chaque effort agissant sur l'objet. La détermination de ces coefficients est donc indispensable pour évaluer l'intensité des forces et moments à chaque instant du vol et ainsi prédire son vol. Ces coefficients, appelés "aérodynamiques", étant liés, en partie, au profil du projectile sont propres à chaque projectile. Ils permettent de caractériser les projectiles et par la suite de pouvoir les comparer entre eux. Dans le cadre de l'utilisation de projectile gyrostabilisé, projectile ayant des temps de vol de plusieurs dizaines de secondes, les coefficients aérodynamiques évoluent au cours du temps en fonction de la vitesse du projectile, ou plutôt du nombre de Mach associé et de l'orientation de l'axe longitudinal du projectile par rapport à la trajectoire du centre de gravité.

La balistique est divisée en plusieurs domaines, correspondants aux différentes phases d'un tir. La première phase est la balistique intérieure, qui étudie les phénomènes se produisant dans le canon entre la mise à feu dans la chambre et la sortie de la bouche. La deuxième phase est la balistique intermédiaire, qui se focalise sur le comportement à la sortie de bouche dans les premiers instants de vol. Le troisième domaine est la balistique extérieure, qui correspond à la phase de tir la plus longue et qui étudie le comportement au cours du vol, notamment influencé par les caractéristiques aérodynamiques du projectile. Enfin, la dernière phase est la balistique terminale, analysant les effets du projectile sur sa cible.

L'identification des coefficients aérodynamiques étant essentielle pour estimer les trajectoires des projectiles, leur détermination est indispensable pour la mise sur le marché de nouveaux projectiles. Dans un contexte industriel, nous cherchons à minimiser les coûts, notamment ceux d'une telle étude incluant indubitablement une partie expérimentale. Nous cherchons à déterminer les coefficients aérodynamiques en limitant le nombre de tirs et les instrumentations nécessaires pour le suivi du projectile et la mesure de ses différents paramètres (positions, angles, accélérations,...) évoluant au cours du vol. L'objectif de ces travaux est la mise en place d'une procédure générale d'identification séquentielle des coefficients à partir des mesures issues d'instrumentations au sol. Les données accessibles se limitent à celles fournies par un radar de suivi trajectographique de type radar Doppler. Cette méthode doit être en mesure d'identifier les coefficients aérodynamiques intervenant dans un modèle balistique, largement utilisé par l'OTAN, considéré comme notre référence. Bien que la qualité des mesures ait un impact sur les identifications, la procédure doit être fiable et robuste pour garantir une précision suffisante sur les coefficients identifiés, ce qui permettra ensuite de générer des trajectoires à l'aide de calculateurs balistiques.

Le premier chapitre permet d'introduire les notions nécessaires à nos travaux situés dans le domaine de la balistique extérieure. Nous commençons par fournir des informations générales sur les projectiles et les outils mathématiques permettant de modéliser leur comportement en vol. Nous décrivons deux types de projectiles largement utilisés dans l'armement. Nous présentons ensuite trois modèles balistiques principaux et les comparons en termes d'efficacité. Dans la deuxième partie, nous exposons différentes méthodes actuellement utilisées, à la fois numériques et expérimentales, pour caractériser l'aérodynamique des projectiles. La troisième section de ce premier chapitre décrit les dispositifs de mesure actuellement disponibles et couramment utilisés lors des essais de tir pour suivre le comportement en vol du projectile et les conditions atmosphériques. Enfin, la fin de ce chapitre introductif s'affaire à effectuer un état de l'art non exhaustif des travaux de recherche menés sur l'identification des coefficients aérodynamiques des deux types de projectiles présentés, en se focalisant plus particulièrement sur les travaux qui n'utilisent pas d'instrumentation embarquée, mais uniquement des données de tir recueillies par un radar de trajectographie.

Le deuxième chapitre décrit le développement asymptotique du modèle balistique du point matériel modifié, retenu comme modèle de référence pour nos travaux en raison de son utilisation par les pays membres de l'OTAN dans leurs calculateurs balistiques. Dans un premier temps, nous réalisons une adimensionnalisation de ce modèle, puis nous étudions l'évolution d'un paramètre adimensionnel utilisé pour le développement asymptotique. Ensuite, nous détaillons la méthodologie permettant d'obtenir les équations du développement aux différents ordres. Ces équations mettent en évidence le fait que les coefficients aérodynamiques n'interviennent pas au même ordre et ont des influences différentes dans chaque direction. Ce développement permet d'obtenir des équations différentielles ou des expressions analytiques permettant d'estimer les contributions des différents coefficients aux différents ordres.

Le troisième chapitre présente les résultats d'identification obtenus en utilisant des données générées numériquement pour différentes configurations de tir, ce qui permet de valider la méthode séquentielle d'identification. Dans un premier temps et après avoir décrit le processus d'identification, une étude de l'influence des paramètres numériques utilisés lors de l'identification est faite dans le cas de l'identification du premier coefficient aérodynamique C_x en utilisant le modèle balistique obtenu à l'ordre zéro. Dans un second temps, nous utilisons les relations obtenues à l'ordre un, ce qui permet une première approximation des coefficients C_{zm} et $C_{y\dot{p}m}$, ainsi qu'une correction du coefficient C_x identifié à l'étape précédente. Enfin, dans un dernier temps, nous utilisons les relations obtenues à l'ordre deux pour déterminer les corrections à appliquer à chacun des coefficients identifiés. La qualité des identifications est étudiée d'une part en comparant les identifications des coefficients aérodynamiques à leurs valeurs de référence, et d'autre part en comparant les trajectoires de référence simulées avec un modèle complet aux trajectoires reconstruites à l'aide des modèles intermédiaires utilisant les coefficients identifiés.

Le dernier chapitre est l'application de cette procédure séquentielle à des données issues de mesures radar provenant d'essais sur champs de tir. En amont de la présentation des résultats, nous montrons que la méthode peut être appliquée à l'identification du coefficient d'amortissement en roulis C_{lp} à la condition d'avoir une instrumentation supplémentaire permettant la mesure de la vitesse de rotation du projectile autour de son axe longitudinal. Ensuite, nous détaillons le prétraitement des données radar pour obtenir une estimation des vitesses, nécessaire à la procédure d'identification. Puis, la première étape de la procédure est appliquée permettant l'identification du C_{x0} . Nous poursuivons la procédure avec l'identification du coefficient ξC_{zm0} . À la fin du chapitre, nous appliquons la méthode pour différentes configurations de tirs et différents projectiles afin de démontrer la robustesse de la méthode et les perspectives d'obtenir une procédure unifiée d'identification des coefficients aérodynamiques à partir d'instrumentations au sol.

Chapitre I

Introduction à la balistique extérieure et à l'identification des coefficients aérodynamiques

Sommaire

| | |
|---|-----------|
| Introduction | 6 |
| 1 Généralités sur la mécanique du vol d'un projectile | 6 |
| 1.1 Les projectiles | 6 |
| 1.2 Repères balistiques | 9 |
| 1.3 Modèles balistiques utilisés pour représenter la trajectoire d'un projectile | 11 |
| 1.4 Comparaison numérique des modèles balistiques | 24 |
| 2 Moyens pour la caractérisation de l'aérodynamique des projectiles | 29 |
| 2.1 Mécanique des fluides numérique (CFD) | 29 |
| 2.2 Codes semi-empiriques | 31 |
| 2.3 Essais en soufflerie | 31 |
| 2.4 Tirs réels instrumentés | 31 |
| 3 Instrumentations disponibles | 32 |
| 3.1 Radar de trajectographie | 32 |
| 3.2 Mesure de la rotation axiale ω_c | 33 |
| 3.3 Sonde d'obliquité | 34 |
| 3.4 Magnétomètres et accéléromètres | 34 |
| 3.5 Ballon-sonde | 34 |
| 4 Méthode d'identification des coefficients aérodynamiques à partir des données de tir | 35 |
| 4.1 Cas d'un projectile empenné : obus flèche | 35 |
| 4.2 Cas d'un projectile gyrostabilisé | 37 |
| Bilan | 38 |

Introduction

L'objectif de ce travail est de déterminer les caractéristiques aérodynamiques d'un projectile en se basant sur les mesures de sa trajectoire obtenues avec un radar au sol. Avant de présenter, les résultats et la méthode pour y parvenir, nous devons dans un premier temps définir les projectiles et les outils mathématiques nécessaires à son suivi spatial. Cela permet ainsi d'expliquer comment le calcul de la trajectoire est effectué à l'aide des équations de la mécanique du vol. Dans un second temps, nous listons plusieurs méthodes actuellement utilisées pour la détermination du comportement aérodynamique en vol du projectile. Ensuite, nous présentons les moyens de mesure dont nous disposons pour effectuer le suivi de l'objet. Et enfin, pour finir ce chapitre, nous décrivons plusieurs méthodes permettant la détermination des caractéristiques aérodynamiques d'un projectile se basant sur les résultats d'essais de tir.

La première section décrit les différents types de projectile pour nous permettre de nous situer parmi le vaste choix de types de munitions que peuvent proposer les équipementiers. Nous décrivons principalement deux types de projectiles. De plus, étant donnée notre volonté d'étudier le comportement des projectiles au cours du vol, nous devons définir les différents repères dans lesquels leurs coordonnées peuvent être définies. Dans cette section, nous présentons également les modèles balistiques couramment utilisés pour modéliser le vol (trajectoire et mouvements) des projectiles à partir des équations de la mécanique du vol représentant les phénomènes physiques intervenant au cours du vol. A la fin de cette section, nous générons des trajectoires en utilisant les différents modèles présentés afin de comparer leurs performances et d'évaluer leurs limites de validité.

La suite présente les principaux avantages et inconvénients des moyens actuels utilisés pour la détermination des caractéristiques aérodynamiques d'un projectile en vol. Cette identification nécessite, pour la majorité des cas, un couplage de plusieurs méthodes combinant ainsi les avantages de chacune, qu'elles soient numériques ou expérimentales.

La section suivante fait un état de l'art non exhaustif des moyens expérimentaux existants permettant de mesurer à la fois la localisation de l'objet et son comportement, ainsi que les propriétés du milieu ambiant dans lequel cet objet évolue. Ces mesures aérologiques sont indispensables pour une modélisation au plus proche de la réalité.

Enfin, nous terminons ce chapitre en présentant différentes méthodes d'identification des paramètres aérodynamiques à partir des données de trajectographie. Cela permet de montrer le faible nombre de travaux n'utilisant pas d'instrumentations embarquées pour la détermination des caractéristiques aérodynamiques du projectile.

1 Généralités sur la mécanique du vol d'un projectile

1.1 Les projectiles

Il existe en balistique de multiples types de projectiles, qu'ils soient autopropulsés (missiles, torpilles,...) ou non (balles, obus,...). Nous limitons notre étude aux projectiles

non autopropulsés du type obus. Pour les projectiles obus flèches ou les munitions de moyen calibre, les projectiles sont encartouchés, c'est à dire que le projectile est en partie noyé dans le lit de poudre et à un projectile correspond une vitesse initiale de tir unique. Dans le cas de projectile d'artillerie, ayant un calibre plus important, l'énergie nécessaire au tir s'obtient uniquement à partir de la poudre propulsive placée dans des modules à l'arrière de l'obus dans le canon. Du fait de cette technique de tir, les vitesses initiales de tir ne sont pas continues. Elles dépendent du nombre de modules placés à l'arrière du projectile. Dans les deux cas, il n'y a pas de propulsion supplémentaire apportée lors de son vol. Pour notre projectile d'étude, six gammes de vitesse initiale moyenne sont définies correspondant au nombre de charges utilisées à une température donnée. En effet, notre projectile de référence a été défini pour un canon et un système de charge de nouvelle génération, avec des charges modulaires. Ces vitesses initiales (V_0) vont de 330 m/s en charge 1 à 939 m/s en charge 6 pour un obus de 155 mm . En modifiant la température des charges par chauffage ou refroidissement, nous pouvons ainsi faire varier légèrement la vitesse initiale autour de la vitesse moyenne de chaque gamme. Cependant, nous ne pouvons pas obtenir toutes les vitesses situées entre les gammes de vitesse, ce qui limite notre capacité à ajuster cette condition initiale de tir pour atteindre l'objectif visé. Le paramètre fondamental permettant de compenser cette faiblesse, liée à la discontinuité des vitesses autorisées, est la modification de la hausse du canon. Le canon permettant d'effectuer ce type de tir est le canon automoteur CAESAR (CAmion Equipé d'un Système d'ARtillerie) [47] (figure I.1) de l'armée française actuellement déployé sur de nombreux théâtres d'opérations.



FIGURE I.1 – CAmion Equipé d'un Système d'ARtillerie : CAESAR (d'après [47])

En balistique, un point primordial est la stabilité du projectile au cours de son vol. Pour obtenir cette stabilité, plusieurs solutions technologiques existent et définissent ainsi différentes catégories de projectiles. La première solution consiste à disposer des ailettes à l'arrière de l'obus (figure I.2). Ces obus, de type flèche, partent sans vitesse de rotation initiale. Un biseautage dissymétrique ou un braquage des ailettes permet de générer un couple d'entraînement en rotation du projectile ce qui entraîne une rotation du projectile autour de son axe (roulis). Le projectile flèche est stable statiquement, la rotation sert à lisser les éventuels défauts géométriques, dans le but d'accroître la précision.

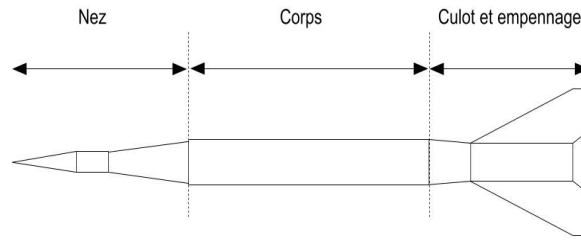


FIGURE I.2 – Schéma simplifié d'un projectile flèche (d'après [17])

La seconde solution pour obtenir la stabilité gyroscopique des projectiles est d'utiliser un canon rayé pour créer une rotation initiale de la munition en sortie de bouche du canon autour de son axe principal. L'acquisition de la rotation se fait alors pendant son parcours à l'intérieur du canon et cela dès les tout premiers instants du tir. Ce sont les rayures à l'intérieur du canon, technique développée dès la fin du XV^e siècle et démocratisée dans le domaine de l'artillerie à partir du XIX^e siècle, qui génèrent cette rotation dans le but de stabiliser son comportement en vol. La vitesse de rotation initiale en sortie de bouche, varie de 110 à 310 $tr.s^{-1}$ (pour du 155 mm), dépend de la charge du tir, de la longueur du canon et du type de rayage (angle des rayures). Dans ce cas, le projectile est dit gyrostabilisé. Il est composé de trois parties (figure I.3) : son nez correspondant à la partie avant possédant un rayon de courbure plus ou moins important, son corps pouvant être assimilé à un cylindre et enfin son culot désignant la partie arrière dont la forme peut être variable (droit, à retraite, creux...). Nous définissons pour chaque projectile, le diamètre de son corps (noté D) aussi appelé calibre, sa masse (m), sa longueur (L) et ses moments d'inertie. Pour un projectile de diamètre 155 mm , sa masse est aux alentours de 43 kg et sa longueur de l'ordre de 850 mm .

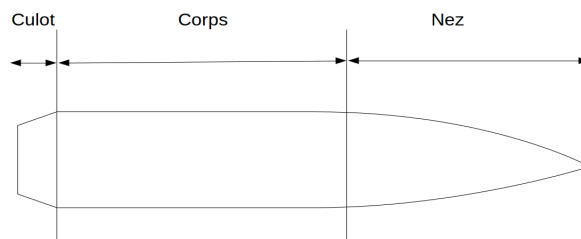


FIGURE I.3 – Schéma simplifié d'un projectile gyrostabilisé (d'après [17])

Dans le domaine de la mécanique des fluides, la vitesse du projectile exprimée en m/s n'est pas la seule mesure utilisée pour caractériser le déplacement du projectile. Un nombre sans dimension appelé nombre de Mach M est défini. Ce nombre correspond au rapport de la vitesse relative du projectile v sur la célérité du son c du milieu dans lequel évolue le projectile.

Soit

$$M = \frac{v}{c} \quad (\text{I.1})$$

Pour un gaz parfait, la célérité du son est définie par $c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$ où γ est le coefficient adiabatique, P est la pression et ρ est la masse volumique du gaz.

Dans le cas de l'air et pour une pression proche de 1 atm (1013.25 hPa), nous pouvons approximer la célérité du son par :

$$c = \sqrt{\gamma R_s T} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M_{\text{gaz}}}} \approx 20.06 \sqrt{T} \quad (\text{I.2})$$

où R_s est la constante spécifique de l'air, T est la température, R est la constante des gaz parfaits et M_{gaz} la masse molaire du gaz.

La célérité du son est dépendante des paramètres du milieu dans lequel elle est calculée, ce qui implique qu'elle n'est pas constante tout au long du vol. Le calcul du nombre de Mach dépend de la vitesse du projectile v et des conditions atmosphériques à la position du projectile permettant le calcul de c . Plusieurs régimes d'écoulement, correspondant à des intervalles en nombre de Mach, sont ainsi définis. Les valeurs limites de ces régimes peuvent légèrement varier suivant les ouvrages que nous utilisons. Ils sont représentés sur la figure I.4, laquelle est additionnée de quelques exemples.

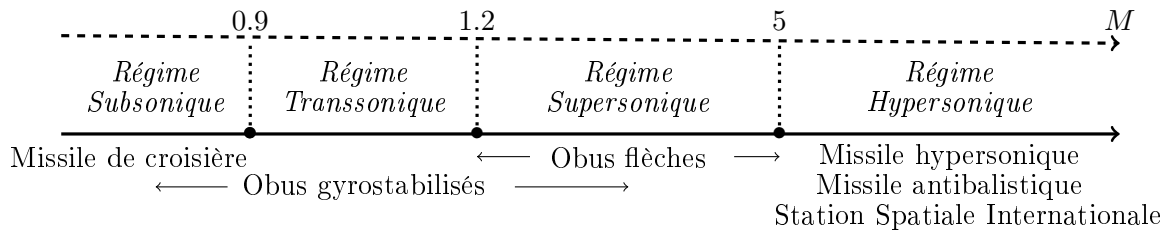


FIGURE I.4 – Représentation des différents régimes d'écoulement

1.2 Repères balistiques

Le suivi du projectile s'effectue par la connaissance de la position de son centre de gravité et de son comportement (orientation, angles,...) au cours de son vol. Ces informations peuvent être déterminées grâce aux équations de la mécanique du vol et dépendent des repères que nous utilisons. Il est donc indispensable de définir les repères utilisés lors des études faites dans le domaine de la balistique extérieure avant de décrire les différents modèles balistiques.

Les repères présentés permettent de définir des angles couramment utilisés en balistique. Cependant, il n'existe pas de définition unique des angles puisque aucune norme n'existe. Ici, nous utilisons les définitions utilisées dans les travaux de thèse d'Hélène Demailly [22] et de Vincent Condaminet [17].

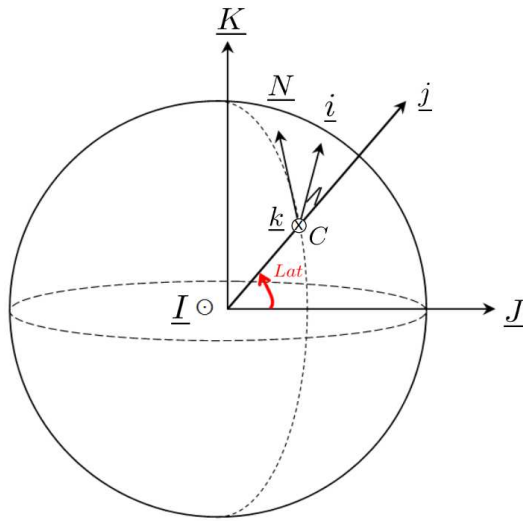


FIGURE I.5 – Passage du repère Galiléen au repère canon (d'après [22])

En balistique extérieure, trois principaux repères sont utilisés : le repère Galiléen, le repère pièce associé au canon et le repère associé au projectile. Le passage entre ces différents repères nécessite de définir des angles caractéristiques de la mécanique du vol. Nous rappelons les schémas permettant de définir les angles de passage entre les différents repères. Ces schémas sont repris des travaux de H. Demailly [22]. En pratique, un autre repère peut intervenir dans la modélisation, il s'agit du repère lié aux données aérologiques. En général, ce repère est proche de celui du canon. Le transport des données aérologiques vers le repère canon est relativement aisé mais ne doit pas être négligé pour autant afin de bien prendre en considération l'orientation du vent relevée aux différentes altitudes.

- Le repère Galiléen $(C_T, \underline{I}, \underline{J}, \underline{K})$ est fixé au centre de la Terre C_T et pointe vers des étoiles fixes permettant de prendre en considération la rotation de la Terre sur elle-même.
- Le repère pièce associé au canon $(C, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ est fixé en C position du canon situé sur la surface de la Terre. Le plan $(\underline{i}, \underline{k})$ est défini comme tangent à cette surface et le vecteur \underline{j} complète ce trièdre orthonormé direct. Ce dernier vecteur \underline{j} est colinéaire à l'axe passant par le centre de la Terre (origine du repère Galiléen) et la position du canon C (origine du repère canon). L'angle entre cet axe et le plan $(\underline{I}, \underline{J})$ passant par l'équateur permet de définir l'angle de latitude (noté Lat) (figure I.5). Pour que ce repère canon soit complètement défini, il faut définir un angle supplémentaire appelé l'azimut (noté Az) correspondant à l'angle entre le vecteur \underline{i} et un vecteur \underline{N} de même origine tangent à la surface de la Terre orienté vers le Nord (figures I.5 et I.6a).

- Le repère trajectoire $(G, \underline{t}, \underline{s}, \underline{h})$ lié à la position du centre de gravité G du projectile où \underline{t} est le vecteur vitesse unitaire $\frac{\underline{v}}{v}$. Le passage du repère canon au repère trajectoire nécessite de définir deux nouveaux angles, l'angle de gisement η et l'angle de hausse θ tous deux représentés sur la figure I.6. A la position du canon, l'angle de gisement représente l'angle entre l'axe canon et la ligne de tir (axe passant par C et par l'objectif ciblé) qui peut différer de \underline{i} du fait de la déviation du projectile au cours du vol. L'angle de hausse lui représente, à cette même position, l'élévation du canon.

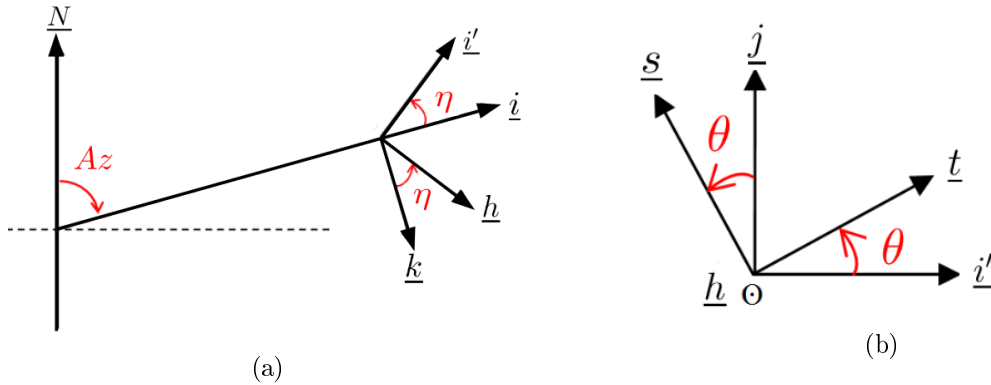


FIGURE I.6 – Passage du repère canon $(C, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ au repère trajectoire $(G, \underline{t}, \underline{s}, \underline{h})$: définitions des angles, d'azimut Az et de gisement η (a) et de hausse θ (b) (d'après [22])

1.3 Modèles balistiques utilisés pour représenter la trajectoire d'un projectile

Un modèle balistique est un ensemble d'équations de la mécanique permettant de représenter le vol d'un projectile. Ces équations sont obtenues à partir de l'application de principe fondamental de la dynamique (PFD) au projectile. Afin de simplifier la mise en équations, des hypothèses supplémentaires simplificatrices peuvent être faites en considérant que le projectile auquel nous avons affaire se comporte comme un solide indéformable et qu'il admet une symétrie de révolution. Ces conjectures sont en accord avec les caractéristiques de l'obus gyro-stabilisé.

Il existe différents modèles balistiques, plus ou moins complexes, permettant la modélisation de la trajectoire. Les différences entre ces modèles résident dans le choix des efforts retenus lors de l'application du PFD et des hypothèses simplificatrices effectuées. Les trois modèles balistiques présentés sont écrits dans le repère canon $(C, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$.

1.3.1 Le modèle Point Matériel Classique (P.M.C.)

Ce modèle est le plus simple, il permet d'obtenir pour un coût de calcul faible une première approximation de la trajectoire. Il est obtenu par application du principe fondamental de la dynamique au projectile en l'assimilant à une masse ponctuelle dans le repère trajectoire.

Le projectile est soumis aux efforts extérieurs suivants :

- la force de pesanteur, dépendante de la position dans l'atmosphère.
- la force de Coriolis, induite par le fait que notre repère de calcul n'est pas galiléen.
- une force aérodynamique représentant la résistance à l'avancement du projectile appelé force de traînée.

Certains travaux dans le domaine de la balistique extérieure moderne notamment ceux de R. McCoy [45] détaillent cette mise en équations. Avant d'appliquer le PFD à notre système, nous rappelons les expressions des trois forces.

— **La force de pesanteur : $\underline{P} = m\underline{g}$**

Le projectile étant un solide se déplaçant dans l'atmosphère terrestre, la force de pesanteur qui s'applique sur ce solide n'est pas constante et varie au cours du vol en fonction de la position du projectile dans l'atmosphère. En effet, les tirs atteignent de fortes altitudes et de longues portées, la variation de pesanteur ne peut être négligée. Nous considérons donc l'expression de la pesanteur locale [59] (au centre de gravité de notre projectile) qui tient compte de la position du projectile et de la variation g_0 en fonction de la latitude. Cette pesanteur locale g_0 est calculée à partir de la valeur de la pesanteur de référence g_{0ref} valable pour une latitude de 45° et une altitude nulle ($g_{0ref} = 9.80665 \text{ m.s}^{-2}$).

Soit :

$$\underline{P} = m\underline{g} = -m g_0 \begin{pmatrix} \frac{x}{R_T} \\ 1 - \frac{2y}{R_t} \\ \frac{z}{R_T} \end{pmatrix}_{(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})} \quad (\text{I.3})$$

où

$$g_0 = 9.80665 (1 - 0.0026 \cos(2Lat)) \quad (\text{I.4})$$

et (x, y, z) sont les coordonnées du centre de gravité du projectile, R_T le rayon de la Terre et Lat la latitude du tir.

Cette expression reste en accord avec l'approximation couramment utilisée qui considère que la force de pesanteur est colinéaire au vecteur \underline{j} normal à la surface de la Terre. Le rayon de la Terre étant de grande dimension devant les coordonnées du projectile dans l'atmosphère, les trois rapports $\frac{x}{R_T}$, $\frac{2y}{R_T}$ et $\frac{z}{R_T}$ sont petits devant 1 et donc négligeables. Ceci implique bien une prépondérance de la composante suivant \underline{j} de \underline{g} devant les autres composantes.

— **La force “fictive” de Coriolis :** $\underline{F}_c = m\underline{\Lambda} = 2m \underline{v} \wedge \underline{\Omega}_T$

Le repère dans lequel nous définissons la trajectoire du projectile est non galiléen, l'effet Coriolis doit être pris en compte pour compenser la rotation de la Terre autour de son axe. La force permettant de prendre en compte ce phénomène dépend de la masse du projectile m et de l'accélération de Coriolis $\underline{\Lambda}$ faisant elle-même intervenir le vecteur rotation de la terre $\underline{\Omega}_T$ et le vecteur vitesse du projectile \underline{v} . Elle est définie par la relation suivante :

$$\underline{F}_c = m\underline{\Lambda} = 2m \underline{v} \wedge \underline{\Omega}_T \quad (\text{I.5})$$

où $\underline{\Omega}_T = \Omega_T \begin{pmatrix} \cos(lat) \sin(Az) \\ \sin(lat) \\ -\cos(lat) \sin(Az) \end{pmatrix}$

avec $\Omega_T = 7.292115 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$ est la vitesse de rotation de la Terre autour de son axe Nord-Sud, Lat est la latitude et Az l'azimut.

L'influence de cette force, abusivement appelée force de Coriolis, sur la trajectoire est fortement dépendante de la direction du tir (l'Azimut) par rapport au Nord. Dans le cas d'un tir du Nord vers le Sud ou du Sud vers le Nord, la déviation induite par cet effet peut atteindre plusieurs dizaines de mètres alors que la portée ne sera modifiée que de quelques mètres. L'effet pour un tir orienté suivant un parallèle, Est-Ouest ou inversement (Azimut de 1600 ou 4800 millièmes d'artillerie utilisant la conversion suivante $360^\circ = 6400 \text{ mil}$) sera essentiellement visible suivant la portée (plusieurs dizaines de mètres) lorsque le canon se situera à la latitude 0° correspondant à l'équateur. Pour une latitude de 45° , l'écart en déviation sera supérieur à l'écart en portée.

— **La force de Traînée :** $\underline{D} = -qSC_x \underline{t}$

La force de Traînée \underline{D} (Drag Force en anglais) représente la résistance à l'avancement du solide lors de son déplacement dans le fluide conséquence des frottements dû à l'écoulement à sa surface. Elle est donc colinéaire à la vitesse \underline{v} (suivant \underline{t}) et de sens opposée, elle est appliquée au centre de poussée (point F sur la figure I.7). Cette force dépend de la capacité de pénétration dans l'air du projectile ce qui la rend fortement dépendante des caractéristiques géométriques du solide. Nous pouvons écrire cette force dite de “traînée” en fonction des propriétés du milieu représentées dans l'expression de la pression dynamique q et des propriétés géométriques du projectile avec son maître couple S et son diamètre D .

$$\underline{D} = -qSC_x \underline{t} \quad (\text{I.6})$$

où $v = \|\underline{v}\|$, $q = \frac{\rho v^2}{2}$, $S = \frac{\pi D^2}{4}$, $\underline{t} = \frac{1}{v} \underline{v}$ et ρ la masse volumique du fluide.

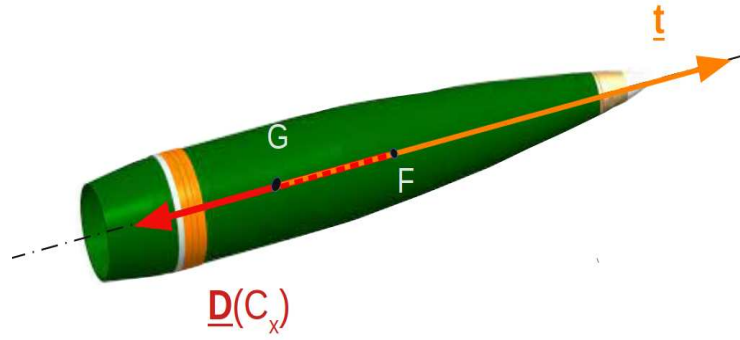


FIGURE I.7 – Représentation de la force de Traînée \underline{D}

Le coefficient aérodynamique C_x qui apparaît dans l'expression de la force de Traînée est propre à chaque projectile. C'est un paramètre adimensionnel qui permet de quantifier la qualité de pénétration du projectile dans l'air. La connaissance de ce coefficient est donc indispensable pour le calcul de la force aérodynamique de Traînée. Ce coefficient peut être calculé pour tout type d'objet se déplaçant dans un fluide (balle de baseball [36], le disc golf [34] et d'autres (tennis, golf...)[54]). Dans certains domaines, tels que l'automobile, l'aéronautique ou la construction navale, la diminution de ce coefficient est cruciale pour l'amélioration des performances tout en limitant les coûts financiers et environnementaux.

L'application du PFD au projectile en considérant uniquement ces trois forces permet d'obtenir le modèle dit "Point Matériel Classique" (PMC).

En faisant le bilan des efforts extérieurs $\underline{F}_{\text{extérieur}}$ agissant sur notre solide de masse m :

- La force de Pesanteur \underline{P} ,
- La force de Coriolis \underline{F}_c ,
- La force de Traînée \underline{D} ,

l'application du PFD à notre solide de masse m ayant une accélération $\underline{\dot{u}}$ dans le repère Canon $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ permet d'obtenir :

$$m\underline{\dot{u}} = \Sigma \underline{F}_{\text{ext}} \quad (\text{I.7})$$

Soit,

$$m\underline{\dot{u}} = \underline{D} + \underline{P} + \underline{F}_c \quad (\text{I.8})$$

En remplaçant les efforts par leurs expressions, nous obtenons :

$$m\underline{\dot{u}} = -qSC_x \underline{t} + m\underline{g} + 2m \underline{v} \wedge \underline{\Omega}_T \quad (\text{I.9})$$

A partir de l'application du PFD (I.9) au projectile, nous déduisons l'expression de l'accélération $\underline{\dot{u}}$, équation du modèle PMC :

$$\underline{\dot{u}} = -\frac{\pi\rho D^2}{8m} C_x v^2 \underline{t} + \underline{g} + 2v(\underline{t} \wedge \underline{\Omega}_T) \quad (\text{I.10})$$

où ρ est la masse volumique de l'air, $\underline{\dot{u}}$ l'accélération du centre d'inertie du projectile, \underline{t} son vecteur vitesse relative adimensionnée et C_x son coefficient de traînée. Ce coefficient aérodynamique de traînée est non constant au cours du vol.

Le modèle PMC est donc un modèle à trois degrés de liberté (D.D.L.) considérant une unique force aérodynamique, la force de traînée. Le projectile étant assimilé à un point matériel, sa géométrie est prise en compte au travers du coefficient de traînée mais ses mouvements angulaires ne sont pas pris en compte. Ces hypothèses simplificatrices sur la forme du projectile étant fortes, un modèle plus complet est décrit dans la suite afin de mieux représenter l'évolution du comportement du projectile au cours du vol.

1.3.2 Le modèle à 6 degrés de liberté (6 D.D.L.)

Le modèle 6 D.D.L. permet une modélisation plus réaliste de la trajectoire avec une meilleure estimation des phénomènes physiques qui interviennent lors du vol d'un projectile. Cette nouvelle représentation prend en considération des forces et moments aérodynamiques additionnels permettant de modéliser ces phénomènes. Nous passons ainsi d'un modèle balistique ayant 3 degrés de liberté (PMC), à un modèle plus complexe possédant 6 degrés de liberté (6 D.D.L.).

En artillerie, les projectiles utilisés ont une longueur non négligeable de plusieurs dizaines de centimètres. Afin d'effectuer une représentation au plus proche de ces derniers, il est important de regarder comment l'axe principal du projectile évolue par rapport à son vecteur vitesse. En effet, une partie du vol du projectile est effectuée avec l'axe longitudinal non tangent à la trajectoire, ce qui est appelé en balistique "vol en dérapage" lorsque cet angle est dans le plan horizontal. Le projectile évoluant dans les trois dimensions, il existe une inclinaison de son axe longitudinal par rapport au vecteur vitesse conséquence de l'effet gyroscopique, induit par la combinaison de la rotation de la trajectoire avec le roulis du projectile. Le projectile n'étant plus assimilé à un point matériel, un nouveau repère associé à ce dernier est introduit.

1.3.2.1 Repère projectile ($G, \underline{c}, \underline{a}, \underline{b}$)

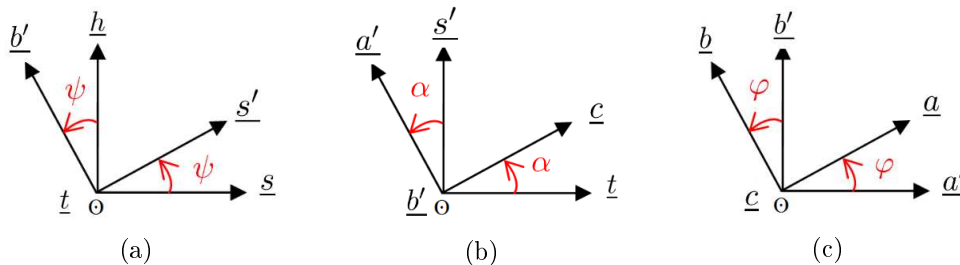


FIGURE I.8 – Passage du repère trajectoire au repère projectile : angle de précession ψ (a), angle d'obliquité α (b) et angle de roulis φ (c) (d'après [22])

Dans ce repère, le mouvement du projectile autour du repère trajectoire est entièrement modélisé avec l'introduction de trois nouveaux angles : l'angle de précession ψ , l'angle d'obliquité α et l'angle de roulis φ (figure I.8). Ce nouveau repère lié au solide ($G, \underline{c}, \underline{a}, \underline{b}$) est appelé repère projectile où \underline{c} est le vecteur unitaire colinéaire à l'axe longitudinal du projectile.

Ce repère définit donc les trois angles permettant de mesurer les rotations du projectile dans les trois directions du repère trajectoire. Le premier angle est l'angle de précession ψ (figure I.8a). Lors du parcours de la génératrice autour du cône définissant le cercle de précession (base du cône), aussi appelé cône de précession dont l'angle est l'obliquité α , la pointe du projectile effectue des oscillations périodiques autour de la trajectoire circulaire à la base du cône, le repère mobile associé permet de définir l'angle mesurant cette oscillation périodique, appelé nutation. Ce phénomène se produit en début de trajectoire et va vite tendre à s'amortir avec le flux d'air permettant ainsi d'assurer la stabilité dynamique du projectile. A la fin de la trajectoire lorsque la vitesse du projectile va décroître ce phénomène va revenir, perturbant ainsi les derniers instants du vol. De plus, cela permet aussi d'introduire la notion d'angle d'obliquité α , correspondant à l'angle entre le vecteur vitesse adimensionnée (\underline{t}) du projectile et son axe longitudinal (\underline{c}). Le dernier angle associé au repère projectile est l'angle de roulis φ (figure I.8c) qui permet d'évaluer la rotation du projectile autour de son axe longitudinal \underline{c} . La figure I.9 permet de visualiser ces angles définissant l'orientation du projectile.

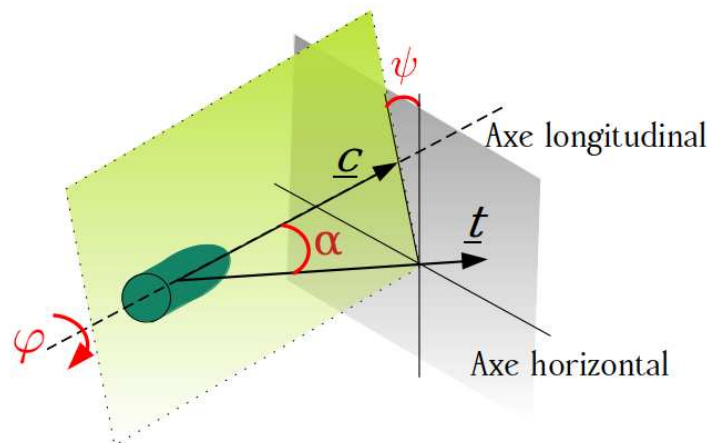


FIGURE I.9 – Représentation des angles de précession ψ , d'obliquité α et de roulis φ

Avec l'inclinaison de l'axe du projectile et la rotation autour de ce dernier, le parcours du nez de projectile est complexe. Ce mouvement, combinaison de la précession et de la nutation, est notamment représenté par des diagrammes traçant la trajectoire du nez dans le plan ($\underline{s}, \underline{h}$) (en gris sur la figure I.9) à différentes étapes du vol lors de l'analyse de ce modèle par V. Fleck [32] et P. Wernert [62]. Le comportement du projectile, déterminé en partie par ces diagrammes, permet de visualiser sa stabilité.

1.3.2.2 Efforts aérodynamiques additionnels

En plus de l'effort de traînée présenté pour le modèle PMC, deux efforts aérodynamiques supplémentaires de portance et de Magnus sont pris en compte. Ces derniers sont représentés sur la figure I.10.

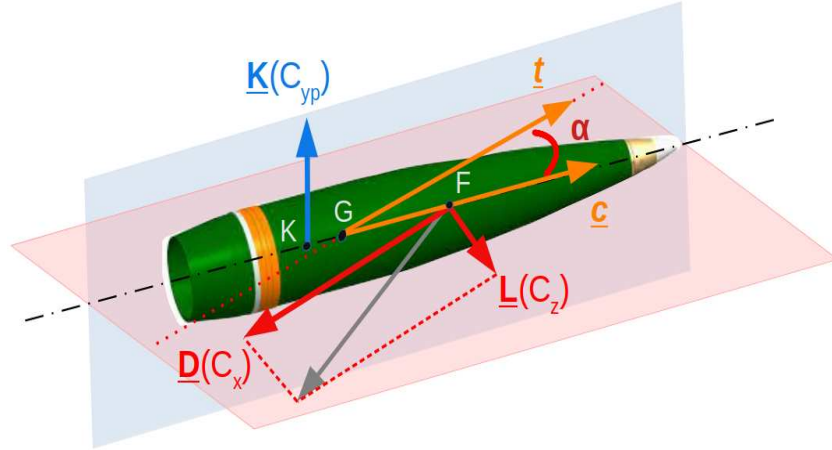


FIGURE I.10 – Forces aérodynamiques agissant sur le projectile (modèle à 6 D.D.L.)

— La force de portance : \underline{L}

Les angles de précession et d'obliquité du projectile créent une asymétrie de l'écoulement de l'air qui induisent une force aérodynamique complémentaire, vers la droite dans le plan de pendulation $(\underline{c}, \underline{t})$, appelée portance. Cette force \underline{L} est perpendiculaire à la force de traînée, dans le plan $(\underline{c}, \underline{t})$, et donc à la vitesse \underline{v} . Elle est appliquée au niveau du centre de poussée (point F sur la figure I.10) différent du centre de gravité G . Quand l'obliquité est nulle, la force de portance est nulle. Cette force de portance peut pour certains projectiles augmenter la capacité de planage du projectile, augmentant ainsi la durée du vol. Cependant, l'effet principal de cette force sur le projectile de référence de notre étude est d'induire une déviation gyroscopique. Son expression est donnée par :

$$\underline{L} = qSC_z \underline{t} \wedge \left(\frac{\underline{c}}{\sin(\alpha)} \wedge \underline{t} \right) \quad (\text{I.11})$$

où C_z est le coefficient aérodynamique de portance.

— La force de Magnus : \underline{K}

La force de Magnus, conséquence de la combinaison de la rotation du projectile et de l'obliquité, est créée à partir d'une asymétrie des écoulements de l'air autour du projectile. Cette asymétrie induit une différence de répartition de la pression entourant l'objet, d'un côté nous avons une surpression et de l'autre une dépression, ce qui implique un effort latéral et vertical. La force de Magnus est dirigée orthogonalement au plan comprenant les deux forces précédemment introduites, force qui est

donc principalement ascensionnelle dans notre cas. Les expériences de Magnus [44] ont permis de montrer que la direction de déviation du projectile dépend du sens de rotation du projectile. Lors d'un tir, le sens de rotation est fourni par le sens de rayure du canon, à droite pour un tube rayé à droite et à gauche pour un tube rayé à gauche. Cette déviation peut atteindre plusieurs dizaines de mètres. La force de Magnus est dépendante de la présence d'obliquité. Cette force nommée \underline{K} est donnée par :

$$\underline{K} = qSC_{yp} \frac{\omega_c D}{v} \frac{\underline{c}}{\sin(\alpha)} \wedge \underline{t} \quad (\text{I.12})$$

où C_{yp} est le coefficient aérodynamique de la force de Magnus et ω_c la vitesse de rotation du projectile autour de son axe longitudinal.

1.3.2.3 Moments aérodynamiques

En plus de ces forces, plusieurs moments agissent sur le projectile conséquence du décalage entre les points d'application des forces aérodynamiques (centre de poussée F et K) et de la force de pesanteur (centre de gravité G). Pour des raisons pratiques, ces moments (figure I.11) sont définis dans le repère projectile ($G, \underline{c}, \underline{a}, \underline{b}$) et sont exprimés au centre de gravité G .

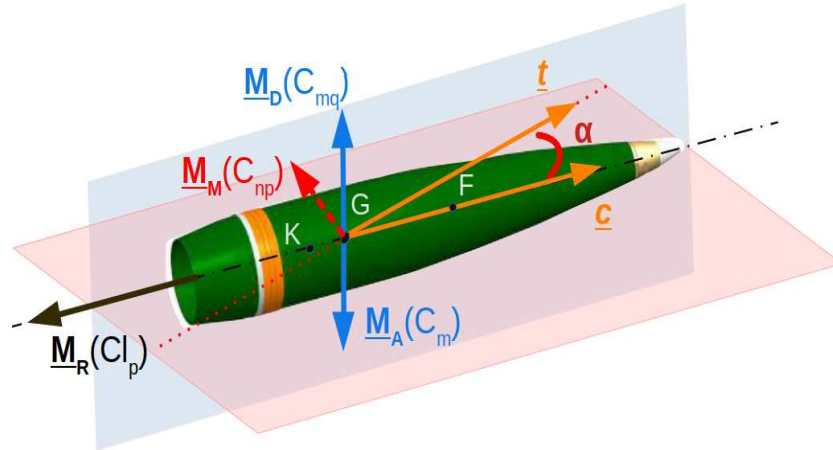


FIGURE I.11 – Représentation des moments aérodynamiques agissant sur le projectile

— Le moment de Magnus : \underline{M}_M

Le moment de Magnus est directement issu de la force de Magnus et induit un mouvement perpendiculaire au plan de résistance du projectile. De manière analogue à la force de Magnus, l'intensité de ce moment est proportionnelle à la vitesse de rotation axiale du projectile ω_c et est donnée par :

$$\underline{M}_M = -qSD^2C_{np} \frac{\omega_c}{v} \underline{c} \wedge \left(\frac{\underline{c}}{\sin(\alpha)} \wedge \underline{t} \right) \quad (\text{I.13})$$

où C_{np} est le coefficient aérodynamique du moment de Magnus.

— **Le moment d'amortissement en roulis : \underline{M}_R**

La répartition des frottements visqueux à la surface crée un moment qui tend à diminuer le roulis. La vitesse de rotation du projectile va donc diminuer au cours du temps ce qui entraînera, lors d'une forte diminution, une baisse de la stabilité gyroscopique. La diminution du taux de rotation va avoir comme conséquence d'augmenter les oscillations du projectile autour de son centre de gravité. L'expression de ce moment est donnée par :

$$\underline{M}_R = -qSDC_{lp} \frac{\omega_c D}{v} \underline{c} \quad (\text{I.14})$$

où C_{lp} est le coefficient aérodynamique d'amortissement en roulis.

— **Le moment de tangage : \underline{M}_A**

L'effet de tangage se produit lorsque le centre de poussée et le centre de gravité ne sont pas confondus. Le tangage affecte le mouvement du projectile par le biais de faibles oscillations autour du centre de gravité perturbant ainsi la stabilité statique en éloignant l'axe du projectile du vecteur vitesse, tangent à la trajectoire, par un effet de pendulation. Dans le cas d'un projectile flèche le centre de poussée est situé à l'arrière du centre de gravité permettant d'augmenter sa stabilité. Au contraire, l'effet de ce moment est déstabilisateur dans le cas d'un projectile gyrostabilisé, le centre de poussée étant localisé devant le centre de gravité. Pour éviter une trop forte instabilité, l'effet de ce moment doit être compensé par l'effet gyroscopique. Il existe donc une limite de vitesse de rotation à partir de laquelle il y a compensation, appelé critère de stabilité gyroscopique. L'expression du moment de tangage est :

$$\underline{M}_A = qSDC_m \underline{t} \wedge \frac{\underline{c}}{\sin(\alpha)} \quad (\text{I.15})$$

où C_m est le coefficient aérodynamique de tangage.

— **Le moment d'amortissement en tangage : \underline{M}_D**

Ce moment permet de compenser en partie le tangage induit par le moment précédent en atténuant la pendulation. Ce moment d'amortissement tend donc à ramener le projectile vers la stabilité que l'on recherche lors de l'utilisation de ces projectiles. Son expression est la suivante :

$$\underline{M}_D = -qSDC_{mq} (\underline{c} \wedge \dot{\underline{c}}) \frac{D}{v} \quad (\text{I.16})$$

où C_{mq} est le coefficient aérodynamique d'amortissement en tangage.

Les définitions de ces nouveaux efforts et moments introduisent six coefficients aérodynamiques supplémentaires, s'ajoutant au coefficient de la force de traînée, caractérisant

l'écoulement de l'air autour de notre projectile. Ces coefficients sont propres à chaque projectile et sont variables en fonction de sa vitesse et de son inclinaison, modifiant la surface projetée dans le plan normal $(\underline{g}, \underline{h})$.

1.3.2.4 Principe fondamental de la dynamique

A partir des différents efforts et moments définis et par application du PFD, nous pouvons établir un système de 6 équations représentant l'évolution temporelle des 6 DDL.

— Application du principe fondamental de la dynamique en terme de forces :

Au total, 5 efforts extérieurs agissent sur le solide : les trois forces aérodynamiques (de traînée \underline{D} , de portance \underline{L} et de Magnus \underline{K}), la force de pesanteur \underline{P} et la force de Coriolis \underline{F}_c . Nous pouvons écrire le principe fondamental de la dynamique en translation :

$$m \underline{\dot{u}} = \Sigma \underline{F}_{ext} \quad (\text{I.17})$$

Soit en détaillant les différentes forces :

$$m \underline{\dot{u}} = \underline{D} + \underline{L} + \underline{K} + \underline{P} + \underline{F}_c \quad (\text{I.18})$$

Nous obtenons ainsi à partir de l'équation (I.18), un système de trois équations après projection dans les trois directions du repère canon $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$.

— Application du théorème du moment cinétique :

Le théorème du moment cinétique dans le repère Galiléen $(\underline{I}, \underline{J}, \underline{K})$ au point C_T s'exprime :

$$\Sigma \underline{M} = \frac{d \underline{H}_{(\underline{I}, \underline{J}, \underline{K})}}{dt} \quad (\text{I.19})$$

où $\underline{H}_{(\underline{I}, \underline{J}, \underline{K})}$ est le moment cinétique du projectile dans le repère Galiléen. Ce moment cinétique peut être écrit dans le cas d'un corps rigide en rotation autour de son axe longitudinal comme le produit de sa matrice d'inertie \underline{I} par la vitesse de rotation $\underline{\Omega}_{(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})/(\underline{I}, \underline{J}, \underline{K})}$ autour de son axe, dans le repère Galiléen.

Soit

$$\underline{H}_{(\underline{I}, \underline{J}, \underline{K})} = \underline{I} \underline{\Omega}_{(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})/(\underline{I}, \underline{J}, \underline{K})} \quad (\text{I.20})$$

Pour des raisons pratiques, nous recherchons à écrire ce théorème dans le repère projectile $(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})$. Il faut donc transporter ce moment en passant par le repère intermédiaire lié au canon, nous utilisons ainsi la relation de composition des vecteurs vitesse de rotation (équation I.21).

$$\underline{\Omega}_{(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})/(\underline{I}, \underline{J}, \underline{K})} = \underline{\Omega}_{(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})/(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})} + \underline{\Omega}_{(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})/(\underline{I}, \underline{J}, \underline{K})} \quad (\text{I.21})$$

Du fait de l'intensité du vecteur rotation de la Terre ($\underline{\Omega}_T$), nous pouvons négliger cette vitesse de rotation $\underline{\Omega}_T = \underline{\Omega}_{(i,j,k)/(L,J,K)}$ devant celle du projectile $\underline{\Omega}_{(c,a,b)/(i,j,k)}$ de l'ordre de plusieurs centaines de radians par seconde en début de vol.

Avec l'utilisation de cette conjecture, la formule de changement de repère nous permet d'écrire :

$$\frac{d \underline{H}_{(L,J,K)}}{dt} \approx \frac{d \underline{H}_{(i,j,k)}}{dt} = \frac{d \underline{H}_{(c,a,b)}}{dt} + \underline{\Omega}_{(c,a,b)} \wedge \underline{H}_{(c,a,b)} \quad (\text{I.22})$$

Nous obtenons l'équation (I.23) à l'issue de l'application du théorème du moment cinétique à notre solide dans le repère $(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})$:

$$\underline{M}_M + \underline{M}_R + \underline{M}_A + \underline{M}_D = \frac{d \underline{H}_{(c,a,b)}}{dt} + \underline{\Omega}_{(c,a,b)} \wedge \underline{H}_{(c,a,b)} \quad (\text{I.23})$$

L'application de ce théorème fournit trois équations supplémentaires caractérisant les évolutions temporelles des vitesses de rotation du projectile.

Ce système de six équations, obtenu par l'application du PFD, est complété avec l'ajout des trois équations différentielles donnant les coordonnées du centre de gravité et trois autres introduisant les angles d'Euler. Dans la pratique, afin de faciliter la mise en équations et s'abstenir des angles d'Euler, un artefact mathématique appelé quaternions d'Hamilton est couramment utilisé, la mise en équations avec cette procédure est détaillée dans la STANREC 4618 de l'OTAN [59] standardisant le modèle balistique 6 DDL. Dans ce même document, un cas additionnel est ajouté, le cas d'un solide composé de deux corps rigides, impliquant un degré de liberté supplémentaire.

Un code de calcul nommé BALCO présenté dans [63], permet de générer les trajectoires. Il nécessite en entrée de définir les conditions initiales (paramètres du canon, direction du tir, position du tir, angle de hausse, vitesse initiale, vitesse de rotation initiale), les caractéristiques mécaniques du projectile (masse, diamètre, moments d'inertie) et les coefficients aérodynamiques, mais aussi les données aérologiques, dépendantes de l'altitude, telles que la température, la pression de l'air, la vitesse et l'orientation du vent. De manière générale, ces dernières sont recueillies localement au niveau du canon à l'aide de dispositifs spécifiques. Les sondages s'effectuent régulièrement à l'aide d'un ballon sonde qui suit une trajectoire imposée par le vent.

Ce modèle permet une meilleure modélisation du comportement en vol en effectuant une reconstruction de la trajectoire et une estimation très précise du point d'impact. Cependant, sa qualité provenant de la prise en compte de l'ensemble des efforts, cela peut devenir un inconvénient qui limite son utilisation dans la pratique. En effet, l'utilisation de ce dernier nécessite la connaissance de l'ensemble des coefficients aérodynamiques du projectile y compris ceux qui influent très faiblement sur la trajectoire. Un modèle intermédiaire entre le PMC et le 6DDL a été créé en partie pour éviter cet inconvénient et être plus adapté à un usage en environnement opérationnel.

1.3.3 Le modèle Point Matériel Modifié (PMM)

1.3.3.1 Motivations et hypothèses simplificatrices

Lors du passage du modèle PMC au modèle 6 DDL, nous passons d'une représentation simple du vol (PMC) à une représentation très complète (6 DDL). Il a donc été cherché un modèle intermédiaire permettant d'avoir une meilleure modélisation du comportement du solide sans pour autant le considérer comme un point matériel et en limitant le temps de calcul. Cet autre modèle a permis à l'époque, dans les années 70, de réduire de 100 à 1000 fois les temps de calcul (écart bien moins flagrant de nos jours). La première définition de ce modèle, appelé modèle du Point Matériel Modifié, a été faite par Lieske en 1966 [38] puis a été standardisé par l'OTAN dans le STANAG 4355 [58]. Ces équations de modélisation sont obtenues à partir du modèle à 6DDL pour un projectile gyro-stabilisé et dynamiquement stable en effectuant certaines hypothèses.

Nous rappelons les trois hypothèses faites par Lieske [38] :

- le projectile peut être représenté comme un corps ayant une symétrie de révolution,
- le projectile est dynamiquement stable,
- l'angle d'obliquité α est petit et évolue lentement au cours du vol.

1.3.3.2 Mise en équations du modèle PMM

Dans ce modèle, nous introduisons un vecteur spécifique au modèle défini par Lieske et Reiter [38], appelée "vecteur obliquité". Il permet de prendre en considération le mouvement du projectile autour de son centre de gravité. Ce vecteur obliquité $\underline{\alpha}_e$ est perpendiculaire à la vitesse \underline{v} dans le plan $(\underline{t}, \underline{c})$ et est orienté dans le sens de \underline{t} vers \underline{c} (figure I.12).

Soit,

$$\underline{\alpha}_e = \underline{t} \wedge (\underline{c} \wedge \underline{t}) \quad (\text{I.24})$$

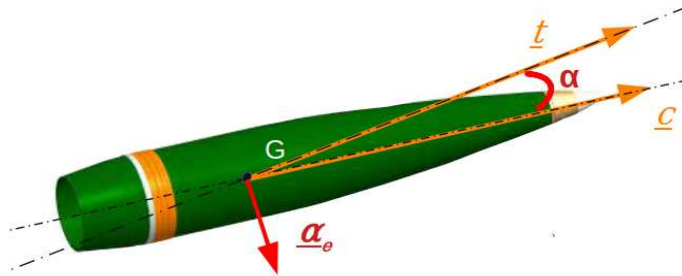


FIGURE I.12 – Représentation du vecteur obliquité dans le plan $(\underline{t}, \underline{c})$

Remarque : La norme $\|\underline{\alpha}_e\|$ est égale au sinus de l'angle d'obliquité $\sin(\alpha)$ et dans le cas de petits angles nous pouvons faire l'approximation $\|\underline{\alpha}_e\| \approx \alpha$.

L'application du principe fondamental de la dynamique à notre solide se limite donc aux trois forces aérodynamiques de traînée \underline{D} , de portance \underline{L} et de Magnus \underline{K} . Le PFD permet d'obtenir de manière analogue au modèle 6 DDL (équation I.18) une expression de l'accélération du projectile $\underline{\dot{u}}$ (équation I.26) après avoir remplacé les forces par leurs expressions, dans lesquelles le vecteur obliquité $\underline{\alpha_e}$ est introduit :

$$m \underline{\dot{u}} = \underline{D} + \underline{L} + \underline{K} + \underline{P} + \underline{F_c} \quad (\text{I.25})$$

Ou encore :

$$\underline{\dot{u}} = -\frac{\pi\rho D^2}{8m} C_x v^2 \underline{t} + \frac{\pi\rho D^2}{8m} C_{z\alpha} v^2 \underline{\alpha_e} - \frac{\pi\rho D^3 \omega_c}{8m} C_{yp\alpha} v (\underline{\alpha_e} \wedge \underline{t}) + \underline{g} + \frac{\underline{F_c}}{m} \quad (\text{I.26})$$

Nous retrouvons dans cette expression de l'accélération, en plus de la pesanteur et de l'effet de Coriolis, les trois forces aérodynamiques perpendiculaires entre-elles ainsi que leurs coefficients aérodynamiques respectifs.

La deuxième équation différentielle de ce modèle (I.27) est associée à la vitesse de roulis, vitesse de rotation autour de l'axe longitudinal du projectile ω_c . Elle est obtenue après projection du principe fondamental de la dynamique en rotation (équation I.23) suivant l'axe longitudinal \underline{c} . La projection permet d'extraire uniquement l'influence du moment d'amortissement en roulis \underline{M}_R . Les autres moments ($\underline{M}_M, \underline{M}_A, \underline{M}_D$) étant perpendiculaires à \underline{c} , ils sont donc inexistant dans ce modèle.

$$\dot{\omega}_c = \frac{\pi\rho D^4 v \omega_c C_{lp}}{8I_1} \quad (\text{I.27})$$

La dernière équation du modèle, qui en fait sa particularité, est l'estimation du vecteur obliquité $\underline{\alpha_e}$. L'expression de ce vecteur est obtenue à partir de la définition de l'angle d'obliquité et des hypothèses simplificatrices. L'équation définissant ce vecteur est la suivante :

$$\underline{\alpha_e} = -\frac{8I_1 \omega_c}{\pi\rho D^3 v^3 C_{m\alpha}} (\underline{t} \wedge \underline{\dot{u}}) \quad (\text{I.28})$$

1.3.3.3 Analyse du modèle

Dans ces équations, cinq coefficients aérodynamiques non constants au cours du vol interviennent. Le STANAG 4355 [58] préconise de considérer les coefficients aérodynamiques comme des fonctions dépendantes du nombre de Mach et de l'obliquité, de manière analogue aux coefficients utilisés dans le modèle 6 DDL. Le vecteur obliquité $\underline{\alpha_e}$ est pris en compte dans ce modèle et sa norme est utilisée pour introduire des termes correctifs à l'ordre 2 en $\alpha_e = \|\underline{\alpha_e}\|$ pour les coefficients de traînée, de portance et de tangage.

Les coefficients aérodynamiques sont donc définis par :

- Coefficient de traînée : $C_x(M, \alpha_e) = C_{x0}^{\alpha_e}(M) + C_{x2}^{\alpha_e}(M) \alpha_e^2$
- Coefficient de portance : $C_z(M, \alpha_e) = C_{z1}^{\alpha_e}(M) \alpha_e + C_{z3}^{\alpha_e}(M) \alpha_e^3$

- Coefficient de tangage : $C_m(M, \alpha_e) = C_{m1}^{\alpha_e}(M) \alpha_e + C_{m3}^{\alpha_e}(M) \alpha_e^3$
- Coefficient de Magnus : $C_{yp}(M, \alpha_e) = C_{yp1}^{\alpha_e}(M) \alpha_e$
- Coefficient d'amortissement en roulis : $C_{lp}(M)$ indépendant de α_e

Ces définitions mettent en évidence l'influence de l'obliquité sur le comportement en vol puisqu'elle agit directement sur les coefficients aérodynamiques. Dans la pratique, pour l'ensemble des projectiles qualifiés, des listes de référence des coefficients de l'ordre 0 à l'ordre 3 en α_e sont définies par intervalle de Mach.

La définition des coefficients aérodynamiques dépend du modèle utilisé. En conséquence, il y a des facteurs correctifs dans les termes des efforts pris en compte dans le modèle PMM, ces facteurs ne sont pas définis dans l'équation 1.26. Ils permettent de prendre en compte les efforts approximatés et négligés lors de l'application du principe fondamental de la dynamique.

Ce modèle permet de décrire précisément le mouvement du centre de gravité à partir des forces qui s'appliquent sur lui, de sa rotation autour de son axe principal et de l'estimation de son obliquité au cours du vol. Une comparaison de la forme implicite et de la forme explicite de ce modèle a été faite par L. Baranowski [5, 7]. L'atout principal de ce modèle est l'équation permettant une approximation du vecteur obliquité $\underline{\alpha}_e$. L'estimation de ce dernier permet de fournir un modèle relativement simple avec des résultats proches du comportement réel des projectiles et du modèle 6DDL [3, 4], le tout pour un coût de calcul réduit.

1.4 Comparaison numérique des modèles balistiques

L'utilisation des trois modèles précédents permet de générer différentes trajectoires pour un même projectile dans le cas de différentes configurations de tir (vitesses initiales, directions du canon, élévations du canon). Le modèle, considéré comme le plus proche de la réalité est le modèle 6DDL. Il sert donc de référence.

Les modèles nous permettent d'obtenir les trajectoires à partir de l'intégration numérique des équations. Il est toutefois nécessaire de faire attention au schéma d'intégration temporelle utilisé. Les données générées via le code BALCO (6DDL) utilisent un schéma d'intégration de Runge-Kutta Fehlberg d'ordre 7 [63, 30]. L'utilisation d'un schéma d'ordre 7 est nécessaire du fait de la variation temporelle très rapide des angles de nutation et de précession du projectile. Une telle discrétisation induit un coût de calcul accru pour les simulations 6DDL, c'est donc une raison supplémentaire de l'utilisation du modèle PMM. Les codes de calcul que nous avons développés pour les deux autres modèles (PMM et PMC) ont été implémentés avec un schéma d'intégration de Runge-Kutta d'ordre 4. Afin de vérifier, quelques tests avec un schéma d'ordre 7 ont été réalisés sans modification significative des résultats.

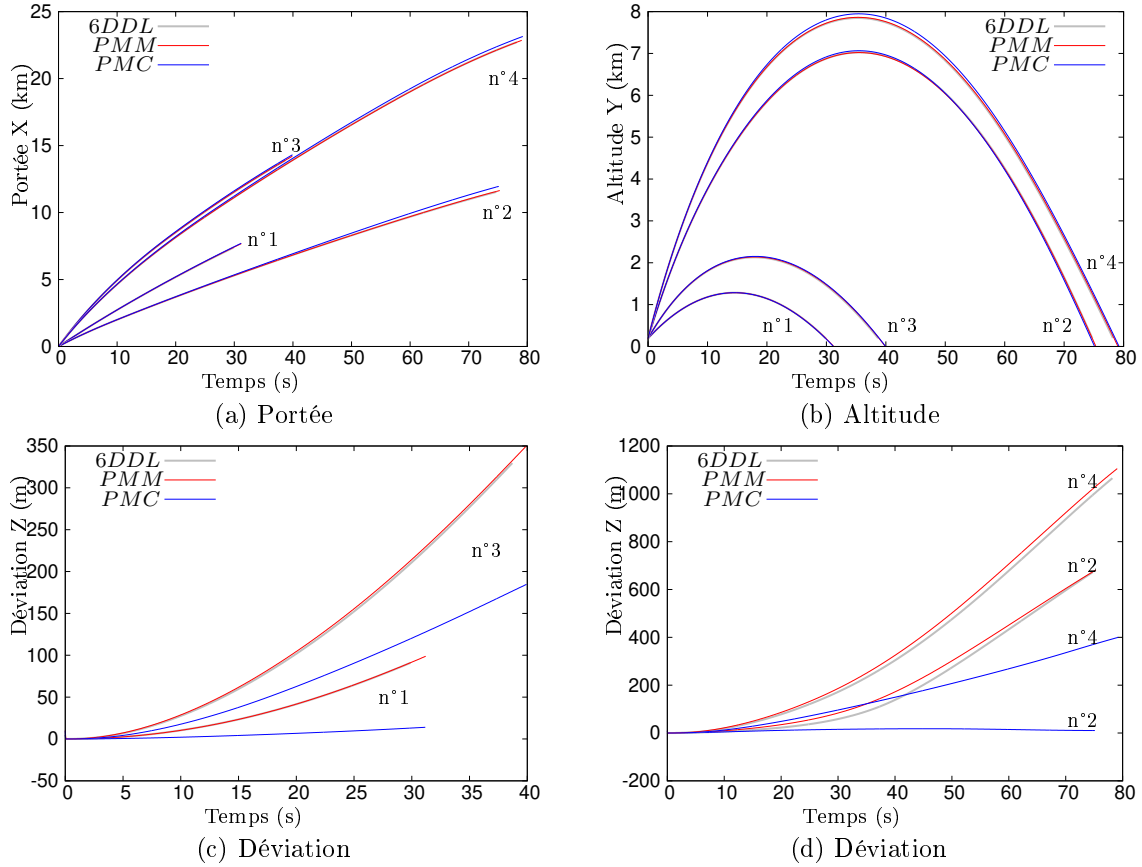


FIGURE I.13 – Trajectoires obtenues par les trois modèles : portée (a), altitude (b) et déviation (c,d) pour les quatre configurations de tir

Nous comparons les trajectoires et calculons les erreurs entre les modèles pour quatre configurations de tirs (tableau I.1). Ces configurations ont été choisies pour représenter un panel de tirs allant des faibles aux fortes vitesses initiales et des faibles aux fortes hausses du canon. En artillerie, les angles d'azimut et de hausse du canon sont généralement exprimés en millièmes d'artillerie aussi appelé mil angulaire (noté *mil* ou m). Un angle de 360 degrés correspond à 6400 millièmes d'artillerie.

| Configuration de tir | V_0 en m/s | Hausse en <i>mil</i> |
|----------------------|----------------|----------------------|
| n°1 | 330 | 500 |
| n°2 | 527 | 1130 |
| n°3 | 653 | 400 |
| n°4 | 799 | 800 |

Tableau I.1 – Liste des configurations étudiées

Les écarts suivant la portée (figure I.13a) et l'altitude (figure I.13b) entre les différents modèles pour l'ensemble des coups ne sont pas facilement observables ce qui confirme que ces modèles restent proches sur une grande partie de la trajectoire dans les directions du plan (\hat{i}, \hat{j}) . Nous observons tout de même que les courbes bleues, correspondant aux résul-

tats de trajectoires obtenues avec l'utilisation du modèle PMC, se détachent légèrement des deux autres pour l'ensemble des configurations. Les figures I.13c et I.13d comparent la déviation des trajectoires et mettent en évidence les lacunes du modèle PMC pour représenter le mouvement hors plan du tir ($\underline{i}, \underline{j}$). En effet, la dérive visible sur les données générées avec le modèle balistique PMC provient uniquement de l'effet Coriolis. Cela permet aussi de constater la proximité des trajectoires générées par le modèle PMM en comparaison de celles obtenues à partir du modèle 6DDL.

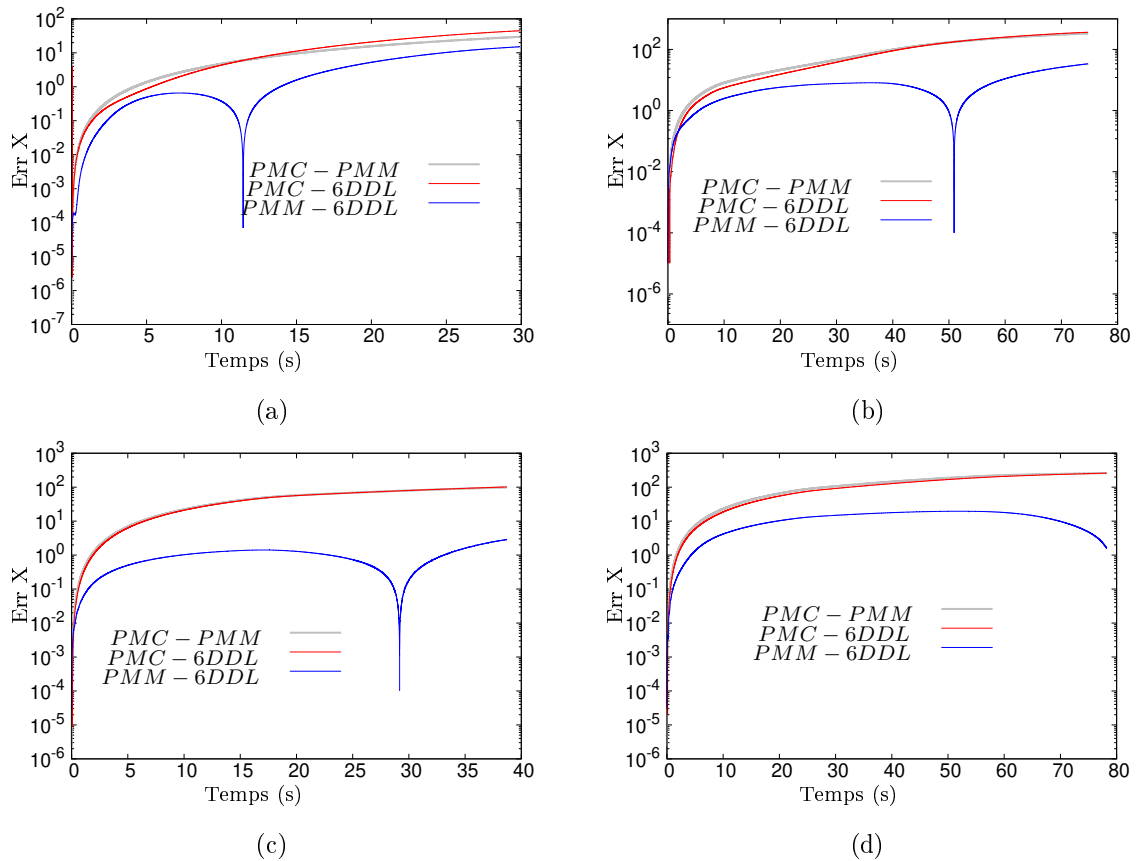


FIGURE I.14 – Comparaison des erreurs sur la portée entre les trois modèles : configurations n°1 (a), n°2 (b), n°3 (c) et n°4 (d)

Les tracés, en échelle semi-logarithmique, de la norme des erreurs commises sur la portée (figure I.14) et l'altitude (figure I.15) pour les quatre tirs permettent de confirmer nos observations précédentes sur la qualité des trajectoires obtenues par les modèles PMC et PMM en comparaison des trajectoires obtenues avec le modèle complet 6DDL. Les pics correspondent à un changement de signes des erreurs entre les trajectoires simulées par les différents modèles (figures I.13a et I.13b). Le modèle PMM génère une trajectoire proche du modèle de référence à 6DDL.

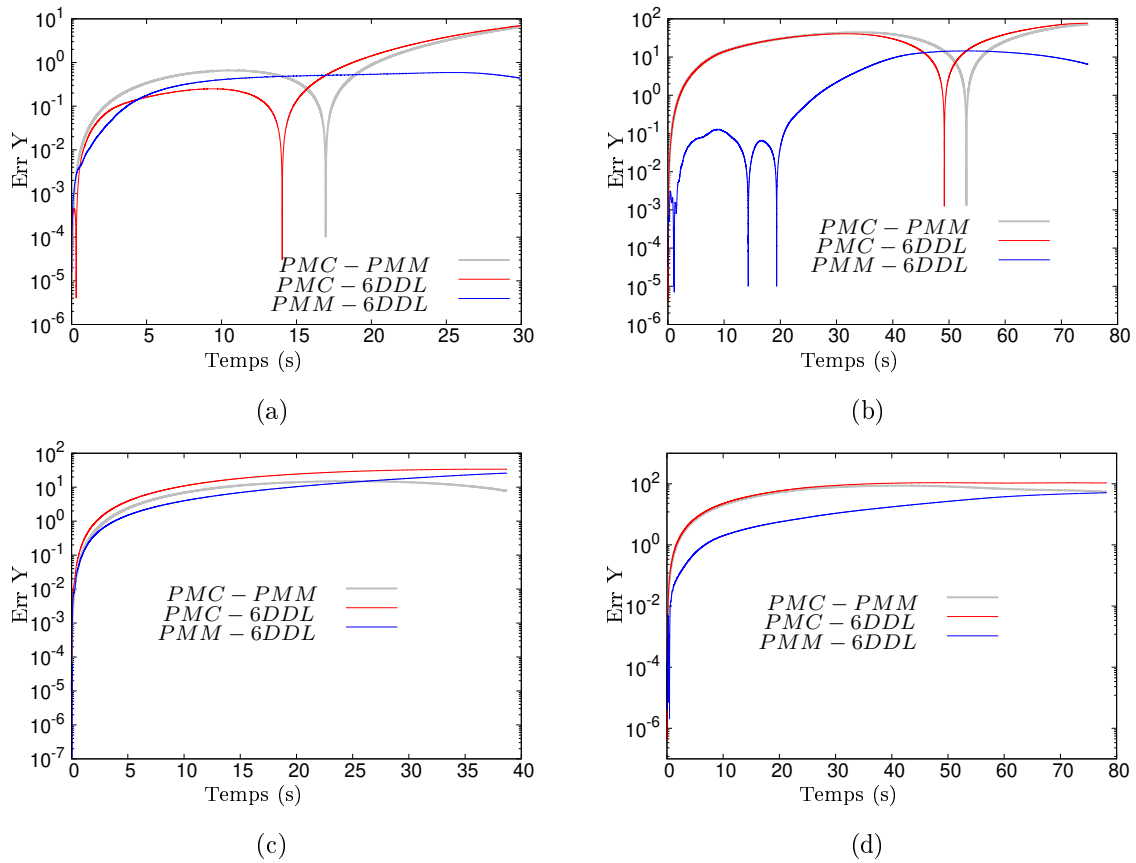


FIGURE I.15 – Comparaison des erreurs sur l’altitude entre les trois modèles : configurations n°1 (a), n°2 (b), n°3 (c) et n°4 (d)

| n° | Configuration de tir | | Différence en portée (m) | | Différence en déviation (m) | |
|-----|----------------------|--------------|--------------------------|-----------|-----------------------------|-----------|
| | V_0 (m/s) | Hausse (mil) | PMC/6 DDL | PMM/6 DDL | PMC/6 DDL | PMM/6 DDL |
| n°1 | 330 | 500 | 44.7 | 15.1 | 78 | 0.2 |
| n°2 | 527 | 1130 | 364 | 26 | 661 | 12 |
| n°3 | 653 | 400 | 102 | 2.9 | 153 | 2.9 |
| n°4 | 799 | 800 | 259 | 1.6 | 672 | 24 |

Tableau I.2 – Tableau des erreurs du point d’impact entre les modèles PMC / PMM et le 6DDL

Nous considérons que la fin du tir correspond à l’impact au sol c’est à dire à une altitude nulle. Le tableau I.2 donne les erreurs, à l’impact, en portée et en déviation en considérant que le modèle 6DDL est la référence. Nous constatons des erreurs beaucoup plus faibles lorsque le modèle PMM est utilisé. Cette diminution est d’autant plus significative lorsque nous regardons l’erreur en déviation. Nous observons un cas particulier où les erreurs pour le coup n°2 restent élevées avec l’utilisation du modèle PMM ce qui montre les limites de ce modèle lors de la génération de tir avec de très fortes hausses. Dans le code PMM que nous avons développé et utilisé, nous utilisons les mêmes coefficients aérodynamiques

que ceux utilisés avec le modèle 6DDL et les facteurs correctifs permettant de compenser l'absence des efforts présents dans le modèle 6 DDL sont bloqués à 1 pour l'ensemble des configurations.

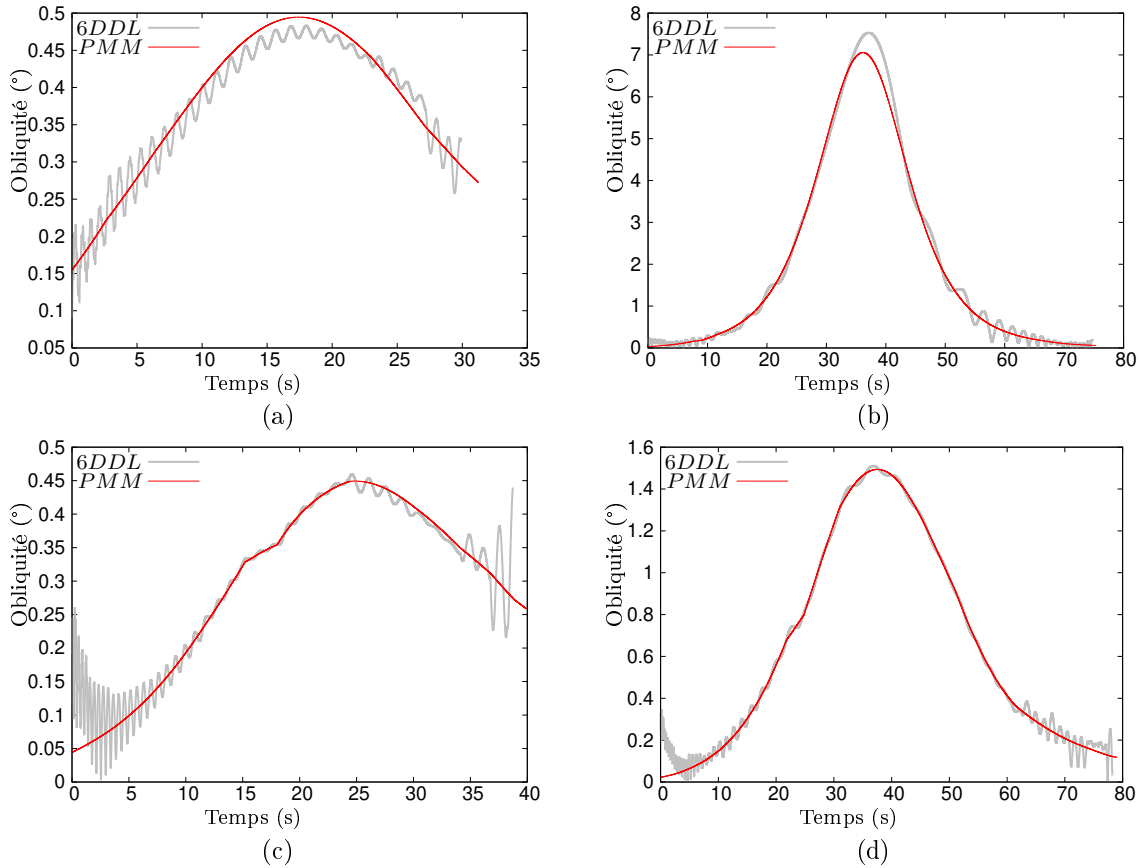


FIGURE I.16 – Comparaison des obliquités α obtenues pour les modèles 6DDL et PMM pour les configurations n°1 (a), n°2 (b), n°3 (c) et n°4 (d)

En plus des trajectoires générées par les différents modèles, nous pouvons regarder comment les modèles 6 DDL et PMM estiment la norme du vecteur obliquité en comparant son évolution au cours du vol pour les différentes configurations. Les angles étant faibles, cette valeur peut être assimilée à l'obliquité du projectile. Cela n'est pas possible avec le modèle PMC, puisqu'il considère le solide comme un point, l'obliquité ne peut donc être définie avec ce modèle.

L'obliquité générée avec le modèle 6 DDL est très oscillante en comparaison de celle générée par le modèle PMM ce qui est cohérent puisque négliger ce battement est une hypothèse simplificatrice modèle PMM. Ce phénomène d'oscillations du projectile autour de la trajectoire, est le plus intense en début et en fin de trajectoire comme nous le montre la figure I.16d dans le cas d'un tir longue portée. Nous observons que dans le cas du tir à très forte hausse (figure I.16b), les obliquités générées par les deux modèles s'écartent l'une de l'autre au moment de l'apogée. Cela nous montre les limites du modèle PMM dans le cas de tirs avec de très fortes hausses qui induisent une forte obliquité. Cependant

au début et à la fin de trajectoire les valeurs des obliquités restent proches. En théorie le modèle PMM est considéré comme fidèle au modèle 6 DDL lorsque l'obliquité ne dépasse pas les 12.5° , ce qui correspond à une forte inclinaison du projectile par rapport à la trajectoire parcourue par son centre d'inertie. D'autant que l'angle d'obliquité augmente avec l'élévation du canon.

Depuis la présentation du modèle PMM par Lieske et al. en 1966 [38], les moyens de calcul ont fortement évolué permettant d'accroître considérablement les possibilités de calcul. L'utilisation du modèle 6 DDL pour la génération de trajectoire d'un obus gyrostabilisé est donc de nos jours relativement aisée et très abordable. Néanmoins, le modèle PMM reste toujours fortement utilisé dans le domaine de la balistique pour la génération des tables de tir ainsi que dans les calculateurs balistiques pour de nombreux pays de l'OTAN. La qualité des trajectoires générées pour un coût de calcul relativement faible en fait son principal atout. Ce sont les raisons qui nous guident à choisir ce modèle pour nos travaux.

Maintenant que le projectile est défini et que son comportement est décrit par des modèles mathématiques, nous allons présenter les méthodes actuelles permettant de déterminer les paramètres aérodynamiques des projectiles introduits dans les modèles balistiques.

2 Moyens pour la caractérisation de l'aérodynamique des projectiles

De nos jours, il existe différentes techniques pour estimer les coefficients aérodynamiques d'un projectile. Nous présentons ici de manière non exhaustive une liste de méthodes régulièrement utilisées, certaines sont purement numériques et d'autres sont mixtes couplant l'expérimentation et les méthodes numériques indispensables aux traitements des données expérimentales.

2.1 Mécanique des fluides numérique (CFD)

La mécanique des fluides numérique (Computational Fluid Dynamics CFD) est une technique permettant l'étude de l'écoulement d'un fluide par des méthodes purement numériques [61, 31]. Les calculs CFD se déroulent en plusieurs étapes : la première est le pré-processing qui consiste à créer la géométrie ainsi que le maillage dans la zone où le fluide s'écoule, la seconde est la simulation à l'aide des codes CFD et enfin la dernière étape est le post processing permettant la visualisation des résultats.

Une première problématique de la CFD arrive lors de la génération du maillage [33, 52]. La qualité et la finesse du maillage, qu'il soit structuré ou non structuré, doivent permettre de prendre en compte les caractéristiques géométriques de l'objet autour duquel nous souhaitons étudier l'écoulement du fluide. Le choix de ce maillage est donc essentiel pour avoir des résultats conformes et réalistes. Par exemple plus le maillage sera fin, plus seront visibles des petites fluctuations dans l'écoulement.

La CFD se base principalement sur la résolution numérique des équations de Navier-Stokes. Bien que plus gourmande en ressources de calcul, la méthode numérique la plus largement utilisée est la méthode des volumes finis devant celles des éléments finis ou des différences finies. Les résolutions numériques sont permises grâce au développement des super calculateurs désormais très répandus et le développement du calcul parallèle.

Une seconde problématique porte sur le comportement de l'écoulement, dans la réalité l'écoulement est le plus souvent turbulent. Il y a alors une forte instabilité de l'écoulement avec la création de tourbillons à différentes échelles, ainsi qu'une forte dissipation d'énergie. Cet écoulement est alors très dépendant des conditions initiales et se caractérise par un nombre de Reynolds élevé. Les simulations peuvent être regroupées en trois grandes familles de la plus précise à la moins précise :

- Direct Numerical Simulation (DNS).
- Large Eddy Simulation (LES).
- Reynolds Averaged Navier-Stokes Simulation (RANS / Unsteady-RANS).

La finesse de la représentation de l'écoulement turbulent est directement reliée au coût de calcul de la méthode, le choix de ces méthodes se base en partie sur le temps de calcul et les ressources numériques disponibles. A ces trois familles est ajouté un quatrième type de méthode hybride issu du couplage de la méthode RANS dans la couche limite et de la méthode LES loin des parois permettant d'améliorer la simulation de la turbulence tout en limitant pour autant le coût de calcul par une faible discrétisation le long de la paroi. Plusieurs modèles de turbulence peuvent être utilisés dans les simulations URANS/RANS [27], nous pouvons citer parmi eux le modèle $k - \epsilon$ [55] ou encore le modèle $k - \omega$ dont une variante est le modèle SST $k - \omega$ (Shear Stress Transport $k - \omega$) [46].

La CFD est très utile pour visualiser des situations spécifiques telle que l'effet d'une post-combustion au niveau du culot sur la traînée [51] ou encore lorsque l'angle d'obliquité est très fort ce qui est difficilement réalisable lors d'essais de tir [26, 64]. Cela permet de visualiser notamment des champs de pression, des iso-Mach, des chocs, des phénomènes tourbillonnaires... Un des principaux avantages de ce type de calcul est qu'il ne nécessite pas de résultat expérimental en résolvant directement les équations de la dynamique des fluides mais suppose de connaître les conditions initiales et l'état initial. Un autre avantage est la détermination de la distribution linéique des coefficients le long du profil du projectile. A contrario, cette méthode est lente dans le cas de son application à des géométries complexes du fait des grandes capacités de calcul nécessaire pour le maillage et la résolution du problème. De plus, les résultats prenant en compte le mouvement de l'objet (mouvement de rotation, tangage...) nécessitent un temps de calcul accru. La multiplication des calculs pour des angles d'obliquité et des nombres de Mach différents adoptés par le projectile tout au long du vol est nécessaire pour la caractérisation complète du projectile.

2.2 Codes semi-empiriques

Les méthodes de calcul semi-empiriques sont issues du couplage entre les équations de base de la mécanique et des bases de données contenant des résultats expérimentaux issus du vol ou d'essais en soufflerie. Cependant, ils ne possèdent pas une très bonne précision sur l'identification des coefficients aérodynamiques avec des erreurs supérieures à 10% sur la traînée et la portance, et aux alentours de 25% pour les coefficients d'amortissement en roulis et en tangage. Leur utilisation se restreint donc à des pré-études lors de la création de nouveaux projectiles. Nous pouvons citer les deux principaux codes, le code américain PRODAS [56] et le code MISSILE [25] développé par l'ONERA.

2.3 Essais en soufflerie

Une partie des essais peut être menée en soufflerie avec des maquettes à l'échelle réelle ou plus petite, généralement l'échelle est inférieure à 1 pour les projectiles. A partir de l'écoulement autour de sa structure et en modifiant son angle d'attaque cela permet la détermination des principaux coefficients aérodynamiques. La principale problématique de ces essais est le maintien du projectile en suspension afin de visualiser l'écoulement autour de ce dernier. Généralement, le corps de l'obus est maintenu à l'arrière pour étudier les phénomènes qui se produisent lorsque ce dernier pénètre dans l'air. Or la mise en place d'un tel dispositif va perturber l'écoulement à l'arrière et ne permet donc pas de déterminer la traînée exacte du projectile. Ce phénomène de perturbation connu lors des études en soufflerie porte le nom d'interférence de support [50], l'étude de son impact nécessite le couplage avec des méthodes numériques [48, 18]. L'amélioration des techniques de mesures en soufflerie se poursuit avec l'existence de méthode permettant la détermination de plusieurs coefficients simultanément en utilisant des bancs d'essais spécifiques notamment à l'Institut Saint Louis (ISL) possédant des souffleries d'études [49] ou encore sur la limitation des interférences du support à l'aide d'une suspension magnétique couplée à un système d'équilibrage décrit dans les travaux de Seo et al. [53]. En France, les projets d'études industrielles de plus grande dimension utilisent les souffleries de l'ONERA.

L'ensemble des essais en soufflerie sur un projectile n'est pas suffisant et n'est pas assez précis pour élaborer les tables de tirs nécessitant la connaissance de l'ensemble des coefficients aérodynamiques. Il est alors nécessaire de coupler les essais en soufflerie avec d'autres techniques pour finaliser la caractérisation telle que la CFD.

2.4 Tirs réels instrumentés

La dernière méthode de caractérisation est basée sur des tirs instrumentés. En effet, la méthode la plus directe pour étudier l'aérodynamique du projectile en vol est d'effectuer des tirs. Cela permet de visualiser le comportement en situation réelle en effectuant une cartographie de sa position dans l'espace au cours du vol. En plus des mesures externes faites au sol, par exemple avec un radar, il est possible d'intégrer au projectile des instrumentations embarquées permettant notamment la mesure de l'accélération, du roulis et

de l'obliquité. Ces dispositifs embarqués fournissent des données très précises permettant d'avoir un accès facile au comportement en vol mais leur mise en place reste complexe et coûteuse.

Le principal avantage des tirs instrumentés est d'étudier le projectile dans des conditions réelles, au plus proche des conditions opérationnelles dans lesquelles ils sont utilisés. Cependant, cette méthode possède de nombreux inconvénients : le coût d'une telle campagne, du fait du nombre élevé de tirs nécessaires, l'instrumentation embarquée peut être difficile à intégrer et modifie la géométrie du projectile et a fortiori son comportement en vol. L'intégration de ces systèmes engendre un post-traitement spécifique des essais avec une mise en place de procédures adaptées pour le dépouillement des données supplémentaires.

3 Instrumentations disponibles

De nombreux dispositifs de mesures existent en balistique et nous pouvons en distinguer deux catégories : les dispositifs utilisés depuis le sol et les instrumentations embarquées. Leurs objectifs sont de mesurer l'évolution, au cours du vol, des paramètres d'état du projectile. Nous pouvons citer parmi eux la vitesse radiale, le taux de rotation axiale ou encore l'obliquité. Les différentes instrumentations qui sont détaillées ici sont ou ont été largement utilisées dans le domaine de la balistique extérieure. D'autres paramètres que ceux directement liés au projectile doivent être mesurés si nous souhaitons pouvoir simuler au mieux le vol. Une dernière partie de cette section est ainsi consacrée à la description des appareils permettant les mesures aérologiques.

3.1 Radar de trajectographie

Un radar de trajectographie permet de suivre le projectile tout au long de sa trajectoire. Le principe général est basé sur l'effet Doppler-Fizeau, d'où aussi le nom de radar Doppler. Cet effet se traduit de la manière suivante : la fréquence des ondes électromagnétiques varie lorsque l'émetteur et le récepteur du signal sont en mouvement l'un par rapport à l'autre. Cela permet ainsi de relier ce décalage de fréquence mesuré à la vitesse d'éloignement de l'objet. Le radar de trajectographie utilisé, en balistique, permet la mesure directe de quatre quantités : la distance radiale r , la vitesse radiale V_r , l'angle de site θ et l'angle de gisement η . A partir de la distance radiale r et des deux angles de site et de gisement, il est relativement aisé de calculer la position cartésienne du projectile dans l'espace. Un exemple de ce type de radar Doppler est le radar SARAH utilisé par la DGA Techniques terrestres (figure I.17). Ce radar est couplé à un code de calcul permettant de traiter les données brutes et de fournir d'autres quantités. Toutefois, ce code de calcul est une boîte noire où il est impossible d'avoir accès à la manière dont est fait le post-traitement. Il ne sera donc pas utilisé par la suite et nous nous limiterons aux données brutes (r , V_r , θ et η).



FIGURE I.17 – Radar SARAH exposé le 14 juillet 2022 sur l’esplanade des Invalides [28]

Ce type de radar de trajectographie suit le projectile dès la première seconde du vol et jusqu’à sa limite de portée visuelle (altitude avant le point d’impact dépendante des configurations du tir). Pendant les premiers instants du vol, un second radar est parfois utilisé. Il est plus précis mais a une zone de mesure plus restreinte. Pour obtenir des données fiables sur la vitesse radiale, les radars doivent être placés proches de l’arme pour limiter l’erreur de parallaxe, conséquence de l’angle entre les axes radar-projectile et canon-projectile. L’éloignement du projectile tend à diminuer cette erreur.

Les principaux avantages de ce type de radar sont sa facilité de mise en place et la plage de suivi qu’il permet. En effet, il peut suivre le projectile sur plusieurs dizaines de kilomètres. Malgré tous ces avantages, il ne permet pas une mesure directe de la vitesse cartésienne du projectile, de la vitesse de rotation axiale ni de l’angle d’obliquité du projectile. De plus, les mesures concernant les faibles variations de position, telle que la déviation, restent difficiles malgré les efforts faits pour améliorer la précision des radars de trajectographie.

3.2 Mesure de la rotation axiale ω_c

La mesure de la rotation axiale ω_c du projectile nécessite de modifier le culot de l’obus en le rainurant. Deux solutions techniques existent, soit en usinant directement le culot, soit en ajoutant un réflecteur qui est vissé sur le culot. Le rainurage du culot permet le suivi de la rotation du projectile autour de son axe principal. La méthode de mesure s’appuie sur la polarisation de l’onde du radar et le déphasage créé par la pénétration de l’onde à l’intérieur des rainures. Le déphasage maximal est atteint à chaque demi-tour du projectile autour de son axe. Le calcul de l’angle de roulis est alors obtenu en analysant les modulations du signal radar reçu. Nous admettons que lors de l’utilisation de ce type d’instrumentation le comportement en vol du projectile n’est pas affecté par cette modification géométrique. Cette technique de mesures de la rotation est difficilement applicable à l’ensemble des tirs et pour toutes les campagnes de qualifications. Par conséquent les informations sur la rotation sont considérées comme difficiles à acquérir et ne seront disponibles que pour un

nombre limité de tirs.

3.3 Sonde d'obliquité

Ce type de sonde est implanté dans le nez du projectile. Elle est composée de deux capteurs photodiodes répartis à une distance angulaire égale autour de l'axe longitudinal, d'une antenne, d'un émetteur et d'un amplificateur. Ce dispositif émet des pulsations à chaque exposition des capteurs au soleil. La position de l'axe longitudinal en fonction de la direction du soleil peut ainsi être déterminée. Le traitement des données de mesures de sonde permet d'extraire les données d'angle d'obliquité et de vitesse de roulis.

3.4 Magnétomètres et accéléromètres

Un magnétomètre trois axes développé à l'Institut Franco-Allemand de recherches de Saint-Louis (ISL) permet la mesure précise de l'intensité et la direction du champ magnétique terrestre. La mesure précise du champ magnétique nécessite l'utilisation de trois capteurs spécifiquement orientés ayant une grande sensibilité spatiale. A partir de ces mesures du champ magnétique, nous pouvons déterminer l'orientation du projectile comme le montre notamment S. Changey et al. [11, 12]. De plus, la combinaison de ce type d'instrumentation avec des accéléromètres permet la détermination avec précision de la trajectoire du projectile [14]. La qualité des mesures de ce type de dispositif est étudiée dans les travaux de M. Albisser [2]. Il est aussi possible de mesurer ces angles uniquement à partir de la mesure de l'accélération dans les trois directions à l'aide d'accéléromètres embarqués [19].

3.5 Ballon-sonde

La connaissance des variations des paramètres météorologiques (température, pression, vent, humidité) est indispensable pour effectuer une bonne modélisation de la trajectoire qui comprend une large plage d'altitudes (allant jusqu'à $20km$). Les conditions météorologiques rencontrées varient en fonction de l'altitude et sont ainsi différentes de celles recueillies au niveau du radar au moment du tir. De nombreux dispositifs existent pour la mesure de ces informations mais celui le plus couramment utilisé est le ballon-sonde.

Un ballon-sonde est constitué d'un ballon gonflé à l'hélium, d'une radiosonde et d'un parachute sécurisant sa chute après l'explosion du ballon. Plusieurs instrumentations sont intégrées à la radiosonde dont un émetteur transférant en temps réel la mesure des différents capteurs de pression, de température (de l'air et du point de rosée) et d'humidité. En plus de ces dispositifs, le suivi du déplacement de la sonde par GPS permet le calcul de la vitesse et de la direction du vent aux différentes altitudes parcourues par le ballon.

Les sondages météorologiques fournissent des mesures continues des différents paramètres en fonction de l'altitude. Cependant, en raison du formalisme du STANAG, l'intégralité des variations de ces mesures n'est pas utilisée. En effet, le STANAG 4082 [57] discrétise les mesures par couches espacées de plusieurs centaines de mètres, ce qui nécessite

une interpolation entre ces paliers afin de retrouver une évolution continue des différents paramètres relevés. Cette méthode introduit donc une première approximation dans la prise en compte de la météo sous ce formalisme. Une seconde problématique que nous pouvons soulever est l'absence de prise en compte des variations temporelles et spatiales de ces mesures. Effectivement, les tirs peuvent s'étendre sur plusieurs dizaines de kilomètres, impliquant une durée de vol de plusieurs dizaines de secondes. Bien que de telles mesures existent, elles sont très peu utilisées. Nous considérons dans la suite ces erreurs comme négligeables devant l'influence des coefficients aérodynamiques.

4 Méthode d'identification des coefficients aérodynamiques à partir des données de tir

L'identification des coefficients aérodynamiques est une partie nécessaire de la balistique extérieure. Des travaux ont été menés à partir de mesures issues de tirs mais peu d'entre eux peuvent s'affranchir des données transmises par des instrumentations embarquées. Ici, nous présentons des travaux sur deux types de projectile, le premier avec un empennage et le second gyrostabilisé. Chacune des parties sur les projectiles est divisée en deux, en premier lieu une étude de différents travaux utilisant des instrumentations embarquées puis dans un second temps le cas particulier où seules les mesures recueillies par le radar de trajectographie sont utilisées.

4.1 Cas d'un projectile empenné : obus flèche

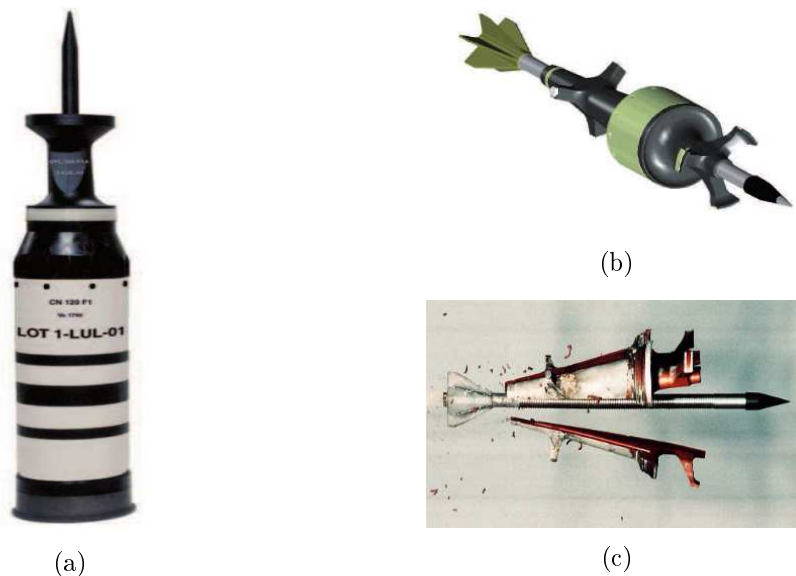


FIGURE I.18 – Représentation d'une flèche dans sa cartouche (a), maintenue dans son sabot (b) et lors de la séparation sabot-projectile (c) (d'après [22])

Un projectile empenné, type obus flèche (figure I.18), est enfermé dans un sabot permettant son guidage à l'intérieur d'un canon lisse, ce qui n'entraîne pas de rotation du projectile dans le canon. Dès la sortie du canon, il y a séparation du sabot ce qui met à jour le profil du projectile. Les ailettes, généralement braquées ou biseautées, du projectile permettent ainsi d'entamer la rotation nécessaire à l'augmentation de la précision du projectile. La rotation mise en œuvre permet de donner de la précision au tir en réduisant l'effet des asymétries éventuelles (géométriques, aérodynamiques,...). Ce phénomène de séparation n'est pas pris en compte dans le cadre de notre étude puisqu'il fait partie de la phase balistique intermédiaire.

Dans les années 60, Lieske [39] a cherché à identifier les coefficients dans le cadre de l'élaboration des tables de tirs pour ce type de projectile. Une autre procédure que nous pouvons citer est l'identification des coefficients aérodynamiques pour un projectile empenné à partir de mesures radar et de mesures provenant d'un magnétomètre trois axes, développé par l'Institut de Saint Louis, qui est présentée par M. Albisser [2, 1]. Les identifications des coefficients aérodynamiques (C_x , $C_{z\alpha}$, C_{lp} , $C_{l\delta}$, $C_{m\alpha}$ et C_{mq}), considérés comme des polynômes fonction du nombre de Mach et de l'angle d'obliquité, sont faites dans le cas de plusieurs configurations en faisant varier les paramètres suivants : la vitesse initiale de tir, l'angle d'attaque initial, l'angle de braquage des ailettes et la position du centre de gravité.

La dernière méthode que nous citons est décrite dans les travaux de H. Demailly [22] et de V. Condaminet [17]. Ces travaux ont permis la mise en place d'une méthode d'identification des coefficients aérodynamiques de projectile type flèche à partir des seules mesures radar sans instrumentation embarquée. Lors de l'utilisation de ce type de projectile plusieurs simplifications ont été faites. La première approximation, du fait de la faible variation de la vitesse, permet de considérer les coefficients comme constants au cours du vol. De plus, le tir étant tendu, la variation d'altitude n'est pas prise en compte ce qui implique des propriétés du fluide (densité, température) constantes. Une analyse comparative de sensibilité des différents coefficients aérodynamiques sur les paramètres du vol (les vitesses, les vitesses de rotation et les positions) intervenant dans les équations régissant le vol d'un projectile empenné a été faite par H. Demailly [22]. Ce travail a permis de valider une méthode d'identification, utilisant une méthode d'optimisation par pénalisation, des trois coefficients C_x , C_{lp} et C_{l0} à partir des mesures de deux paramètres u_i et ω_c . Cette méthode a été appliquée sur des données simulées puis sur des données radar [23]. V. Condaminet a proposé une amélioration de la méthode d'identification notamment en se passant du choix du paramètre de pénalisation par l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange [16, 15] et l'utilisation d'une technique de régularisation évanescence introduite dans un autre contexte par A. Cimetière et al. [13] et F. Delvare [21]. Ces méthodes ont démontré leurs fortes capacités pour l'identification des trois principaux coefficients que cela soit avec des données générées ou avec des mesures réelles à condition d'avoir une qualité de mesure raisonnable. Une des spécificités de la méthode étant de recalculer la trajectoire, elle permet en plus des identifications des coefficients de retrouver la vitesse v . Ces essais à partir de mesure

radar ayant abouti à des résultats satisfaisants, l'identification a pu être validée pour le projectile de type flèche.

4.2 Cas d'un projectile gyrostabilisé

Dans le cadre de l'identification des coefficients aérodynamiques d'un projectile gyrostabilisé, les approximations faites précédemment ne sont plus valables. En effet, les projectiles gyrostabilisés ont des trajectoires à peu près paraboliques durant plusieurs dizaines de secondes. Il parcourt une grande plage d'altitude sur une portée de plusieurs dizaines de kilomètres induisant une forte variation du comportement du projectile (orientation et rotation) autour de son centre de gravité. La vitesse du projectile et les coefficients ne sont donc pas constants au cours du vol.

Dès le développement du modèle PMM au début des années 1970, R. F. Lieske et al [40] ont recherché le coefficient de traînée à partir de mesures de position issues de radar. Ces travaux se sont poursuivis avec l'étude de nouveaux projectiles afin de réduire significativement le coefficient de traînée [41] dont l'évolution est toujours analysée de nos jours [20]. S. Dobre [29] propose une procédure d'identification des coefficients d'un projectile gyrostabilisé de 155 mm, comme des fonctions du nombre de Mach, à partir de mesures de radar de trajectographie complétées par des mesures de magnétomètres trois axes embarqués dans le projectile permettant l'utilisation du modèle 6 DDL. Une autre méthode consiste à une optimisation globale de l'identification en combinant plusieurs séries de mesure radar [10]. Dans le cas de projectile de plus petit calibre de 35 mm, L. Baranowski [6] a défini un algorithme d'identification à partir des tables de tirs qui peut être adaptable à des mesures d'essais de tirs.

Les travaux de V. Condaminet [17] ont aussi permis de généraliser la méthode d'identification utilisée pour le projectile empenné, en l'adaptant au cas d'un projectile gyrostabilisé. Une méthode d'optimisation sous contraintes égalités utilisant les multiplicateurs de Lagrange permet de rechercher les coefficients aérodynamiques intervenant dans le modèle PMM de telle sorte que les vitesses recalculées s'approchent au mieux des données de vitesse mesurées. Cela a permis, à partir des équations du modèle PMM, des mesures de vitesse et de la mesure du taux de roulis, l'identification des coefficients aérodynamiques, considérés comme des fonctions temporelles, C_x et C_{lp} ainsi que des deux rapports de coefficients $\frac{C_{z\alpha}}{C_{m\alpha}}$ et $\frac{C_{yp\alpha}}{C_{m\alpha}}$. Les résultats obtenus à partir des données générées et des mesures radar sont en globalité de bonne qualité, bien que moins précis pour le rapport $\frac{C_{yp\alpha}}{C_{m\alpha}}$. Notamment lors de la comparaison à un modèle 6DDL prenant en compte les phénomènes oscillatoires négligés par le modèle PMM. L'étude présentée ici est la suite immédiate de ces travaux [17] dont les résultats sont limités en terme de configurations et de calibres de projectiles gyrostabilisés. Notre objectif sera une identification complète des coefficients du modèle PMM à partir uniquement de données recueillies avec un radar de trajectographie en repensant la procédure d'identification. Les seules mesures accessibles seront donc la distance radiale, la vitesse radiale, l'angle de site et l'angle de gisement.

D'autres travaux n'utilisant pas des données radar existent, nous ne les détaillerons pas mais il est tout de même intéressant d'en citer quelques-uns pour connaître l'application d'autres stratégies à cette problématique. D'autres procédures pour l'identification des coefficients aérodynamiques utilisent par exemple les filtres de Kalman [24], la méta-optimisation [35], le modèle à paramètre quasi-linéaire variant (quasi-LPV) [42, 43] ou encore à l'aide des réseaux de neurones et l'intelligence artificielle [37, 60].

Bilan

Ce chapitre introductif a permis de présenter deux types de projectiles dont le projectile gyrostabilisé avec lequel nous allons travailler. La description du projectile a permis l'introduction des différents repères et angles couramment utilisés en balistique pour son suivi au cours du vol. Ensuite, la mise en équations à partir des forces et moments agissant sur le projectile a pu être faite. Nous avons pu expliciter les trois principaux modèles balistiques qui diffèrent par le choix des hypothèses simplificatrices retenues lors de l'application du principe fondamental de la dynamique. Les effets de ces hypothèses sont visibles lors de la comparaison entre les modèles sur les vitesses et trajectoires générées en considérant le modèle 6 DDL comme référence. Nous avons donné ensuite une liste non exhaustive des moyens actuels utilisés pour la détermination des coefficients aérodynamiques et les instrumentations, embarquées ou non, qui sont disponibles pour la mesure des différents paramètres d'état lors d'un tir. Enfin, un état de l'art de plusieurs méthodes d'identification à partir des mesures radar dans le cas des deux projectiles a été réalisé. Cela permet de situer notre étude parmi le vaste choix de méthodes utilisées dans le domaine de la balistique extérieure pour la détermination des coefficients aérodynamiques.

Le chapitre 2 permettra en se basant sur les travaux déjà réalisés par H. Demailly [22] et V. Condaminet [17] de décrire une nouvelle méthode d'identification plus robuste avec une procédure séquentielle des coefficients aérodynamiques. Deux principaux impératifs dirigent nos axes de réflexion et de travail. Le premier concerne l'instrumentation, nous ne devons pas utiliser d'instrumentation embarquée. Cela amène plusieurs avantages, notamment l'utilisation de projectile de série et la limitation des coûts de développement d'instrumentation spécifique. Les données auxquelles nous avons accès sont limitées aux mesures que peut fournir un radar de trajectographie au sol (distance radiale, vitesse radiale, angle de site, angle de gisement et éventuellement la vitesse angulaire longitudinale). Le second impératif est l'utilisation du modèle balistique PMM qui est imposé par les partenaires industriels de cette étude. La justification de cette seconde contrainte est la large utilisation de ce modèle dans les calculateurs balistiques pour la génération des tables de tirs par l'OTAN, l'objectif est donc d'obtenir des coefficients directement utilisables pour cette application. A partir de ce modèle, l'identification des coefficients aérodynamiques se fera de manière séquentielle, en allant du coefficient le plus influent au moins influent sur le vol. Ces coefficients n'étant pas constants au cours du vol, ils seront considérés au cours de la trajectoire comme des fonctions dépendantes du nombre de Mach uniquement.

Chapitre II

Analyse asymptotique du modèle balistique PMM

Sommaire

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 40 |
| 1 Étude du modèle Point Matériel Modifié Réduit | 40 |
| 1.1 Étude des accélérations | 40 |
| 1.2 Étude des composantes de la vitesse | 43 |
| 1.3 Bilan | 43 |
| 2 Écriture adimensionnelle du PMM réduit | 44 |
| 2.1 Adimensionnalisation du PMM | 44 |
| 2.2 Introduction du paramètre adimensionnel ξ | 47 |
| 2.3 Étude du paramètre adimensionnel ξ | 48 |
| 3 Développement asymptotique en ξ de l'accélération du PMM réduit | 51 |
| 4 Hypothèses sur la forme des développements de la vitesse et de l'accélération | 55 |
| 5 Procédure d'identification séquentielle des coefficients aérodynamiques du modèle PMM | 56 |
| 5.1 Identification du coefficient C_{lp} | 56 |
| 5.2 Identification de la contribution principale C_{x0} du coefficient de traînée | 57 |
| 5.3 Identification des contributions ξC_{zm0} puis de ξC_{x1} et ξC_{ypm0} | 57 |
| 5.4 Identification des contributions $\xi^2 C_{x2}$, $\xi^2 C_{zm1}$ et $\xi^2 C_{ypm1}$ | 59 |
| 5.5 Expression des coefficients à partir du second développement asymptotique | 60 |
| Bilan | 60 |

Introduction

Le but de ce chapitre est d'obtenir des modèles balistiques intermédiaires permettant l'identification séquentielle des différents coefficients aérodynamiques du modèle balistique PMM.

Dans un premier temps, nous étudions les différentes contributions des forces aérodynamiques du modèle balistique PMM réduit dans les différentes directions, ainsi que les composantes de la vitesse. Ce travail vise à mettre en évidence les différents niveaux d'influence de ces forces dans chacune des directions. En complément de cette étude, nous adimensionnons le modèle balistique et examinons à nouveau le comportement des différentes contributions. Pour les rendre plus explicites, nous introduisons un paramètre adimensionnel dont l'évolution est étudiée.

Dans un second temps, après cette analyse quantitative, nous effectuons un développement asymptotique du modèle PMM réduit adimensionné par rapport à ce paramètre adimensionnel. Après des calculs et des identifications terme à terme, nous obtenons une expression des différents termes de l'accélération aux différents ordres.

Enfin, nous utilisons ces équations pour obtenir les contributions des coefficients aux différents ordres. La détermination de ces modèles intermédiaires se réalise par projection et combinaison linéaire des termes d'accélération aux différents ordres dans les trois directions du repère $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$. L'identification s'effectue par récurrence, en allant des contributions les plus importantes et en progressant vers les moins influentes.

1 Etude du modèle Point Matériel Modifié Réduit

Le choix du modèle utilisé pour représenter la trajectoire est celui du modèle PMM. Dans un premier temps, après rappel des équations du modèle, une étude de l'évolution des termes du modèle balistique PMM est faite pour différentes configurations. Puis dans un second temps, les composantes des vitesses du projectile dans les différentes directions sont analysées dans le but de les comparer.

1.1 Etude des accélérations

Nous rappelons tout d'abord le modèle PMM.

$$\begin{cases} \dot{\underline{u}} = -\frac{\pi\rho D^2}{8m}C_x v^2 \underline{t} + \frac{\pi\rho D^2}{8m}C_{z\alpha} v^2 \underline{\alpha}_e - \frac{\pi\rho D^3 \omega_c}{8m}C_{yp\alpha} v (\underline{\alpha}_e \wedge \underline{t}) + \underline{g} + \frac{\underline{F}_c}{m} & \text{(II.1a)} \\ \dot{\omega}_c = \frac{\pi\rho D^4 v \omega_c C_{lp}}{8I_1} & \text{(II.1b)} \\ \dot{\underline{\alpha}}_e = -\frac{8I_1 \omega_c}{\pi\rho D^3 v^3 C_{m\alpha}} (\underline{t} \wedge \dot{\underline{u}}) & \text{(II.1c)} \end{cases}$$

Étant donné que nous nous plaçons dans le cas d'une instrumentation non embarquée,

nous n'avons pas accès à la mesure de l'obliquité $\underline{\alpha}_e$, nous utilisons donc le modèle PMM réduit (II.2). Ce modèle est obtenu en remplaçant le vecteur obliquité $\underline{\alpha}_e$ intervenant dans l'équation donnant l'accélération (II.1a) par son expression (II.1c) fonction de la vitesse et de l'accélération.

Modèle PMM réduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{u}} = -\frac{\pi\rho D^2}{8m} C_x v^2 \underline{t} - \frac{I_1 \omega_c}{m D v} \frac{C_{z\alpha}}{C_{m\alpha}} (\underline{t} \wedge \dot{\underline{u}}) + \frac{I_1 \omega_c^2}{m v^2} \frac{C_{yp\alpha}}{C_{m\alpha}} [(\underline{t} \wedge \dot{\underline{u}}) \wedge \underline{t}] + \underline{g} + \frac{F_c}{m} \\ \dot{\omega}_c = \frac{\pi\rho D^4 v \omega_c C_{lp}}{8I_1} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(II.2a)} \\ \text{(II.2b)} \end{array}$$

L'accélération $\dot{\underline{u}}$ est composée de cinq termes :

- Contribution liée à la force de traînée : $\underline{T}_{Cx} = -\frac{\pi\rho D^2}{8m} C_x v^2 \underline{t}$
- Contribution liée à la force de portance : $\underline{T}_{Czm} = -\frac{I_1 \omega_c}{m D v} \frac{C_{z\alpha}}{C_{m\alpha}} (\underline{t} \wedge \dot{\underline{u}})$
- Contribution liée à la force de Magnus : $\underline{T}_{Cypm} = \frac{I_1 \omega_c^2}{m v^2} \frac{C_{yp\alpha}}{C_{m\alpha}} [(\underline{t} \wedge \dot{\underline{u}}) \wedge \underline{t}]$
- Contribution liée à l'effet Coriolis : $\underline{T}_{Coriolis} = \frac{F_c}{m}$
- Accélération gravitationnelle : \underline{g}

Chaque contribution étant associée à une force, nous traçons l'évolution, au cours du vol, de ces différentes contributions dans les trois directions (figures II.1a, II.1b et II.1c). Afin d'améliorer la visualisation des termes les plus faibles, les quantités sont aussi tracées en valeur absolue avec une échelle logarithmique (figures II.1d, II.1e et II.1f). Ces tracés sont réalisés pour un projectile gyrostabilisé standard et pour des conditions initiales intermédiaires (élévation du canon et vitesse initiale moyennes). La contribution de la gravité étant relativement importante dans la direction \underline{j} , elle est regroupée avec la contribution liée à la force de traînée.

Sur les différents graphiques de la figure II.1, nous visualisons clairement les différentes contributions majeures dans chaque direction. L'échelle étant logarithmique sur les graphiques II.1d à II.1f les écarts de contributions sont d'autant plus flagrants et permettent de comparer les termes entre eux. Les contributions d'accélération les plus fortes sont dans le plan $(\underline{i}, \underline{j})$. Dans ces deux directions, le tracé rouge associé aux forces de traînée et de gravité, domine nettement les autres. La force de gravité agissant uniquement dans la direction \underline{j} , c'est la force de traînée qui domine dans la direction \underline{i} correspondant à l'axe du tir. A un second niveau, ce sont ensuite les contributions liées à la force de Magnus et l'effet Coriolis qui sont les plus fortes dans les deux directions du plan $(\underline{i}, \underline{j})$ et par conséquent la contribution liée à la force de portance est la plus faible. Sur les figures II.1c et II.1f, c'est à dire dans la direction \underline{k} , orthogonale au plan de tir, la contribution la plus importante,

tout au long du vol, est celle associée à la force de portance (en bleue). A la fin de la trajectoire, l'influence du terme dû à la force de traînée ne doit pas être négligée.

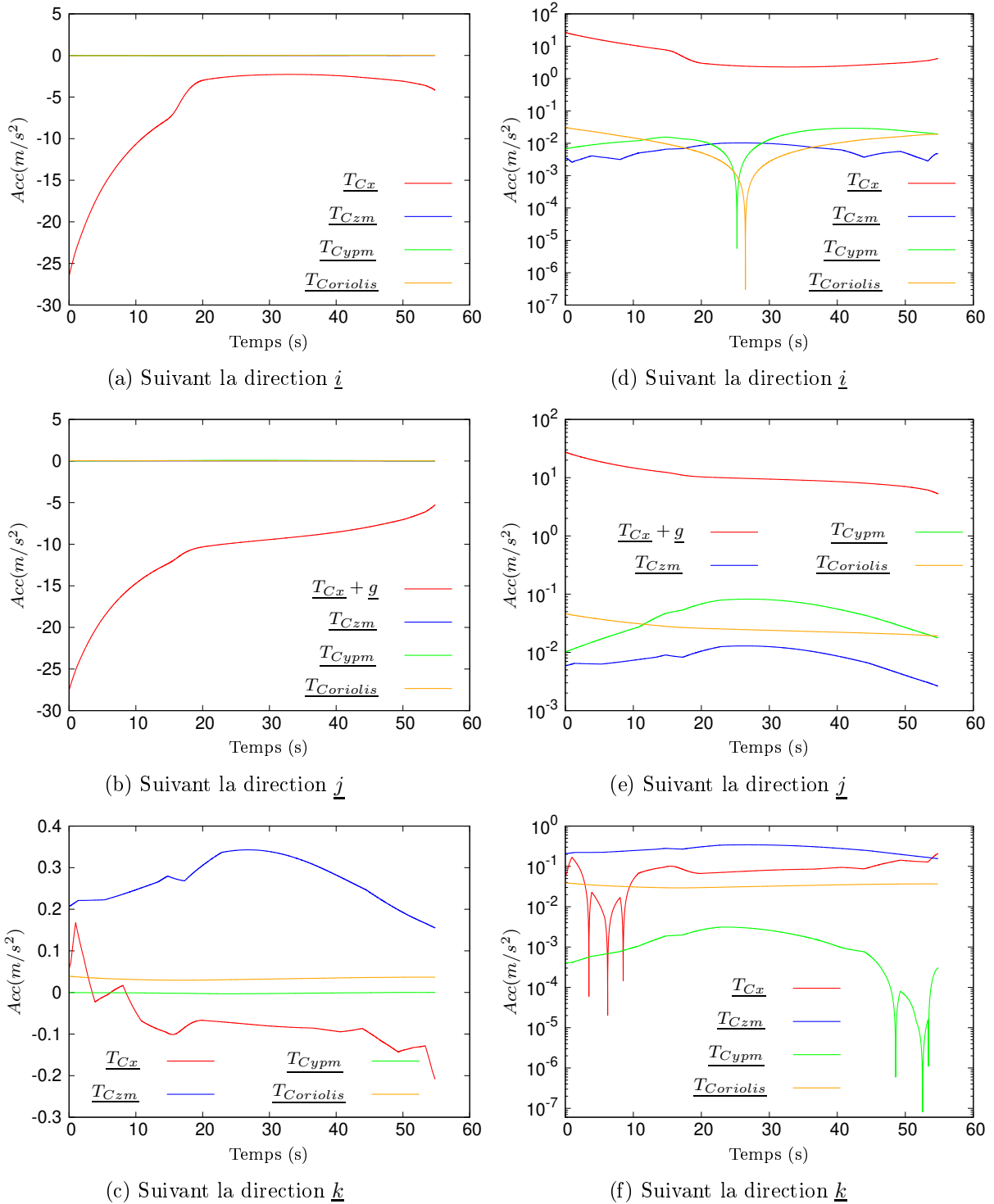


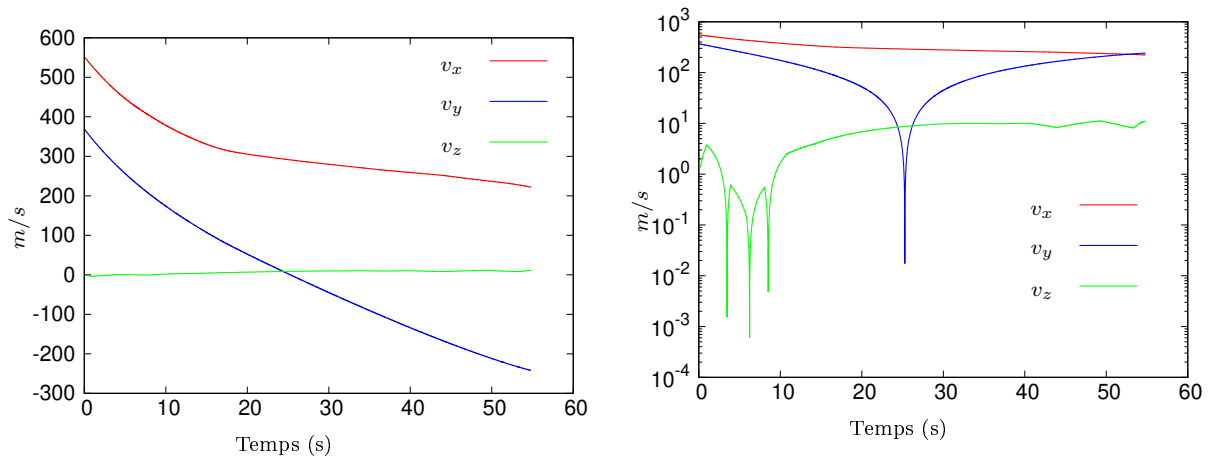
FIGURE II.1 – Exemples d'évolutions temporelles, suivant les trois directions de l'espace, des contributions en terme d'accélération

Sur ces tracés, nous constatons que la contribution de la force de Coriolis est négligeable (20 à 30 fois plus faible) devant celle de la force de traînée dans les deux directions du plan

de tir, ce constat est aussi vérifié pour un large panel de tirs avec des azimuts allant de 0 à 6400 millièmes d'artillerie. L'effet de cette force n'est cependant pas négligeable suivant la direction de déviation \underline{k} . Nous devons alors la prendre en compte puisque son influence, bien que plus faible que la portance, est quasiment du même ordre que le terme associé à l'effort de traînée.

1.2 Étude des composantes de la vitesse

En complément de l'étude sur les composantes de l'accélération, une étude supplémentaire sur celle de la vitesse est réalisée. L'objectif est d'observer comment ses composantes évoluent afin de pouvoir les comparer. La trajectoire du projectile étant principalement dans le plan de tir $(\underline{i}, \underline{j})$, nous cherchons à observer l'évolution de la vitesse latérale v_z (hors plan) du projectile par rapport aux deux autres composantes.



(a) Évolution des composantes de la vitesse

(b) Évolution de la valeur absolue des composantes de la vitesse (échelle logarithmique)

FIGURE II.2 – Évolution temporelle des composantes de la vitesse (v_x, v_y, v_z) respectivement dans les trois directions $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$

En analysant les évolutions temporelles des trois composantes de la vitesse, nous observons la prépondérance des composantes dans le plan $(\underline{i}, \underline{j})$ devant la composante de la vitesse suivant \underline{z} . Dans une première approximation, cette dernière pourra donc être négligée devant les deux autres. Avec la figure II.2b, nous pouvons faire une remarque supplémentaire au niveau de l'apogée, qui se situe dans cette configuration de tir aux alentours de 25 secondes, où nous avons une prépondérance de la composante de la vitesse suivant \underline{i} devant les deux autres composantes.

1.3 Bilan

A partir de ces études, nous observons bien une différence notable de l'influence des différentes forces dans les différentes directions. Nous avons pu faire deux constats lors de l'analyse des données issues du modèle PMM. Le premier sur les forces aérodynamiques :

les différentes forces n'ont pas le même niveau d'influence entre elles mais aussi dans les différentes directions. Le second à partir de l'étude des vitesses : la composante v_z de la vitesse hors plan de tir (suivant \underline{k}) est petite devant les composantes de la vitesse (v_x, v_y) dans le plan de tir ($\underline{i}, \underline{j}$).

2 Écriture adimensionnelle du PMM réduit

2.1 Adimensionnalisation du PMM

Nous rappelons tout d'abord le modèle PMM dans lequel l'expression de la force induite par l'effet Coriolis est exprimée.

$$\begin{cases} \dot{\underline{u}} = -\frac{\pi\rho D^2}{8m}C_x v^2 \underline{t} + \frac{\pi\rho D^2}{8m}C_{z\alpha} v^2 \underline{\alpha}_e - \frac{\pi\rho D^3 \omega_c}{8m}C_{yp\alpha} v (\underline{\alpha}_e \wedge \underline{t}) + \underline{g} + 2v(\underline{t} \wedge \underline{\Omega}_T) & \text{(II.3a)} \\ \dot{\omega}_c = \frac{\pi\rho D^4 v \omega_c C_{lp}}{8I_1} & \text{(II.3b)} \\ \underline{\alpha}_e = -\frac{8I_1 \omega_c}{\pi\rho D^3 v^3 C_{m\alpha}}(\underline{t} \wedge \dot{\underline{u}}) & \text{(II.3c)} \end{cases}$$

Nous introduisons le rapport $k = \frac{\pi\rho D^2 v^2}{8m}$ qui est homogène à une accélération et nous introduisons les quantités adimensionnelles suivantes :

$$\dot{\underline{u}}^* = \frac{1}{k} \dot{\underline{u}} \quad , \quad \underline{g}^* = \frac{1}{k} \underline{g} \quad \text{et} \quad \underline{\Omega}_T^* = \frac{v}{k} \underline{\Omega}_T$$

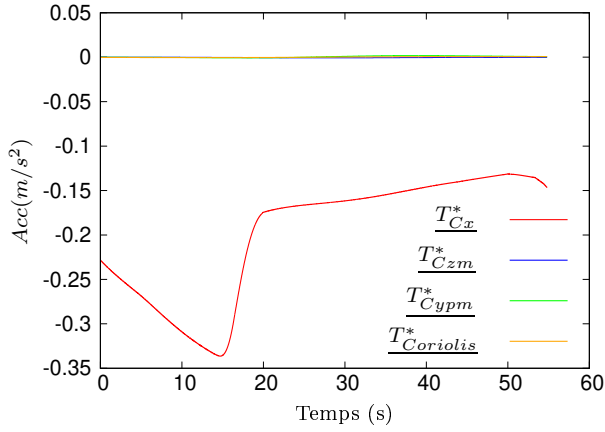
Une écriture adimensionnée du modèle PMM est ainsi obtenue :

$$\begin{cases} \dot{\underline{u}}^* = -C_x \underline{t} + C_{z\alpha} \underline{\alpha}_e - \frac{D\omega_c}{v} C_{yp\alpha} (\underline{\alpha}_e \wedge \underline{t}) + \underline{g}^* + 2(\underline{t} \wedge \underline{\Omega}_T^*) & \text{(II.4a)} \\ \dot{\omega}_c = \frac{\pi\rho D^4 v \omega_c C_{lp}}{8I_1} & \text{(II.4b)} \\ \underline{\alpha}_e = -\frac{I_1 \omega_c}{mvD} \frac{(\underline{t} \wedge \dot{\underline{u}}^*)}{C_{m\alpha}} & \text{(II.4c)} \end{cases}$$

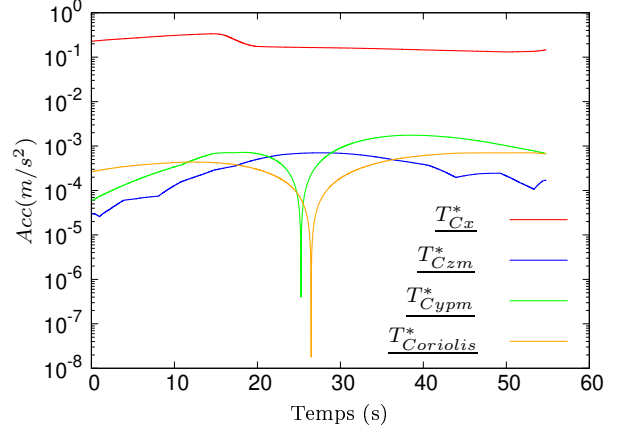
L'objectif de nos travaux étant de se passer d'instrumentations embarquées nous substituons dans l'équation (II.4a) l'expression de $\underline{\alpha}_e$ (II.4c).

Nous obtenons ainsi une écriture adimensionnelle du PMM réduit :

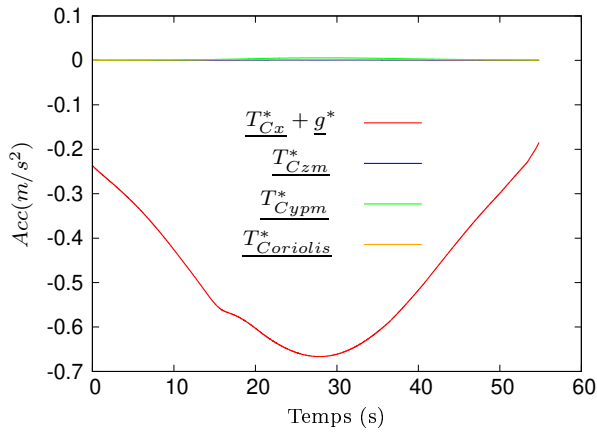
$$\boxed{\begin{cases} \dot{\underline{u}}^* = -C_x \underline{t} - \frac{I_1 \omega_c}{mvD} \frac{C_{z\alpha}}{C_{m\alpha}} (\underline{t} \wedge \dot{\underline{u}}^*) + \frac{I_1 \omega_c^2}{mv^2} \frac{C_{yp\alpha}}{C_{m\alpha}} [(\underline{t} \wedge \dot{\underline{u}}^*) \wedge \underline{t}] + \underline{g}^* + 2(\underline{t} \wedge \underline{\Omega}_T^*) & \text{(II.5a)} \\ \dot{\omega}_c = \frac{\pi\rho D^4 v \omega_c C_{lp}}{8I_1} & \text{(II.5b)} \end{cases}}$$



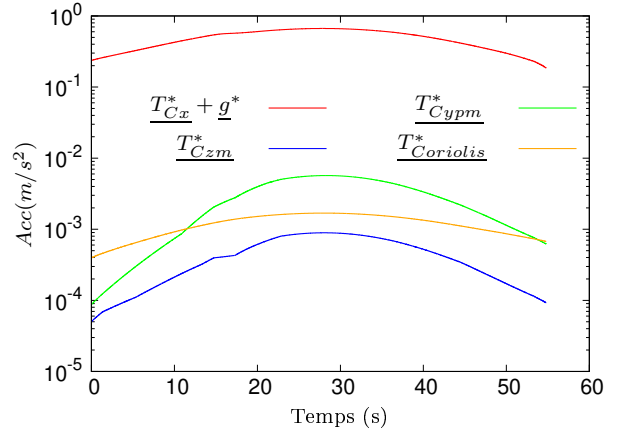
(a) Suivant la direction \underline{i}



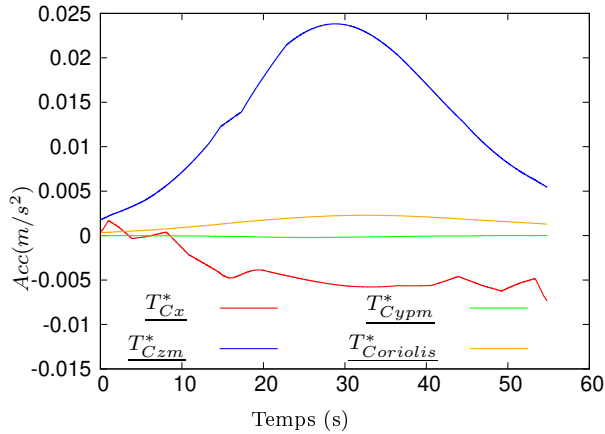
(d) Suivant la direction \underline{i}



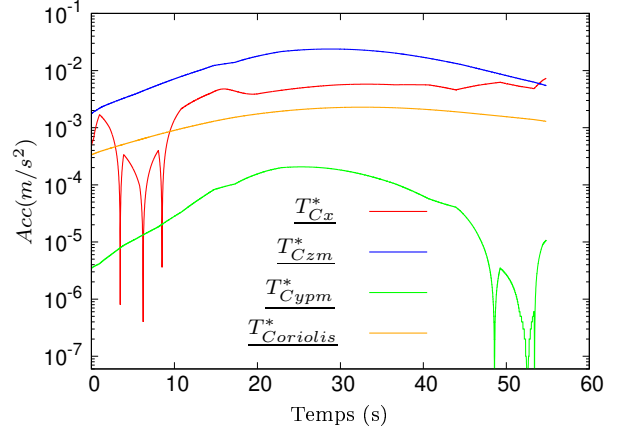
(b) Suivant la direction \underline{j}



(e) Suivant la direction \underline{j}



(c) Suivant la direction \underline{k}



(f) Suivant la direction \underline{k}

FIGURE II.3 – Exemples d'évolutions temporelles, suivant les trois directions de l'espace, des différentes contributions au niveau de l'accélération adimensionnée $\underline{\dot{u}}^*$

Nous pouvons ainsi définir les contributions au niveau de l'accélération adimensionnée de chacune des forces :

- Contribution liée à la force de traînée : $\underline{T}_{Cx}^* = -C_x \underline{t}$

- Contribution liée à la force de portance : $\underline{T}_{Czm}^* = -\frac{I_1 \omega_c}{mvD} \frac{C_{z\alpha}}{C_{m\alpha}} (\underline{t} \wedge \underline{\dot{u}}^*)$
- Contribution liée à la force de Magnus : $\underline{T}_{Cypm}^* = \frac{I_1 \omega_c^2}{mv^2} \frac{C_{yp\alpha}}{C_{m\alpha}} [(\underline{t} \wedge \underline{\dot{u}}^*) \wedge \underline{t}]$
- Contribution liée à l'effet Coriolis : $\underline{T}_{Coriolis}^* = 2(\underline{t} \wedge \underline{\Omega}_T^*)$
- Accélération gravitationnelle : \underline{g}^*

Comme nous l'avons fait dans la partie (1.1) de ce chapitre, nous pouvons tracer l'évolution temporelle de chacune de ces nouvelles contributions (figure II.3).

De manière analogue, nous traçons dans les trois directions avec les deux échelles. L'échelle classique met en évidence la prédominance du terme \underline{T}_{Cx}^* dans les directions du plan de tir $(\underline{i}, \underline{j})$ et celle moins flagrante du terme \underline{T}_{Czm}^* dans la direction complémentaire \underline{k} . L'échelle logarithmique nous confirme les observations de l'analyse précédente en faisant apparaître plus clairement les ordres de grandeurs auxquels les autres termes interviennent et dans quelles directions.

La figure II.4, donnant les composantes du vecteur unitaire \underline{t} , montre bien une prédominance des composantes dans le plan $(\underline{i}, \underline{j})$, similairement aux observations précédentes. La composante du vecteur vitesse unitaire \underline{t} dans la direction \underline{i} est très proche de 1 au niveau de l'apogée ($t \approx 25s$).

A partir de l'étude des contributions des termes de l'accélération adimensionnée $\underline{\dot{u}}^*$ et du vecteur unitaire \underline{t} , nous retrouvons les mêmes niveaux d'influence des forces dans les différentes directions que ceux observés lors de l'étude du modèle PMM non adimensionné.

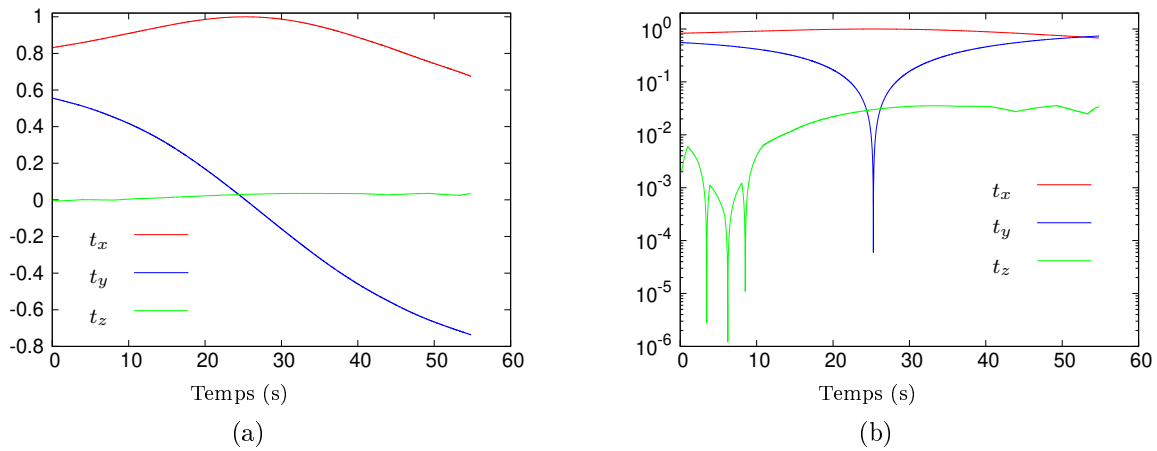


FIGURE II.4 – Évolution temporelle des composantes du vecteur unitaire $\underline{t} = \frac{\underline{v}}{v}$ dans les trois directions pour deux échelles

2.2 Introduction du paramètre adimensionnel ξ

Les intensités des forces diffèrent entre elles. En effet, les contributions des forces de portance, de Magnus et de l'effet Coriolis sont négligeables devant celles de la force de traînée et de la pesanteur. Cette observation nous amène à introduire un petit paramètre adimensionnel ξ et à supposer que les contributions des forces autres que celles de traînée et de pesanteur n'interviennent qu'à partir du premier ordre en ξ .

Dans l'expression du vecteur obliquité $\underline{\alpha}_e$ (II.4c), si nous faisons abstraction du coefficient aérodynamique C_m nous voyons apparaître un paramètre adimensionnel, que nous appelons ξ , en facteur du produit vectoriel. Ce paramètre est donc défini par l'expression :

$$\xi = \frac{I_1 \omega_c}{m v D} \quad (\text{II.6})$$

Ce paramètre adimensionnel fait intervenir des constantes physiques relatives au projectile tels que le moment d'inertie longitudinal I_1 , sa masse m et son diamètre D , mais aussi des quantités variables au cours du vol, telles que la vitesse relative du projectile v et la vitesse angulaire du projectile autour de son axe principal ω_c .

Le choix de ce paramètre adimensionnel est relativement trivial au vu du facteur intervenant dans la contribution de l'accélération liée à la force de portance. Ce paramètre peut aussi être facilement mis en facteur dans la contribution liée au coefficient de Magnus du modèle PMM.

Nous obtenons donc une écriture adimensionnelle du PMM :

$$\begin{cases} \dot{\underline{u}}^* = -C_x \underline{t} - \xi \frac{C_{z\alpha}}{C_{m\alpha}} (\underline{t} \wedge \dot{\underline{u}}^*) + \xi \frac{D\omega_c}{v} \frac{C_{yp\alpha}}{C_{m\alpha}} ((\underline{t} \wedge \dot{\underline{u}}^*) \wedge \underline{t}) + \underline{g}^* + 2(\underline{t} \wedge \underline{\Omega}_T^*) & (\text{II.7a}) \\ \dot{\omega}_c = \frac{\pi \rho D^4 v \omega_c C_{lp}}{8I_1} & (\text{II.7b}) \\ \underline{\alpha}_e = -\frac{\xi}{C_{m\alpha}} (\underline{t} \wedge \dot{\underline{u}}^*) & (\text{II.7c}) \end{cases}$$

Ainsi qu'une nouvelle expression du PMM dit "réduit" est obtenue en utilisant l'expression (II.7). La première écriture adimensionnelle du PMM réduit :

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\underline{u}}^* = -C_x \underline{t} - \xi C_{zm} (\underline{t} \wedge \dot{\underline{u}}^*) - \xi R_1 C_{ypm} (\underline{t} \wedge (\underline{t} \wedge \dot{\underline{u}}^*)) + \underline{g}^* + 2(\underline{t} \wedge \underline{\Omega}_T^*) & (\text{II.8a}) \\ \dot{\omega}_c = \frac{\pi \rho D^4 v \omega_c C_{lp}}{8I_1} & (\text{II.8b}) \end{cases}}$$

Où $R_1 = \frac{D\omega_c}{v}$ et (C_{zm}, C_{ypm}) sont les rapports de coefficients aérodynamiques :

$$C_{zm} = \frac{C_{z\alpha}}{C_{m\alpha}} \quad \text{et} \quad C_{ypm} = \frac{C_{yp\alpha}}{C_{m\alpha}} \quad (\text{II.9})$$

Avec cette nouvelle écriture, nous mettons en évidence les remarques faites lors de l'analyse des termes du modèle balistique PMM concernant les différentes influences des différents coefficients aérodynamiques.

Remarque :

En analysant les graphiques, un autre choix du facteur devant le terme lié à la force de Magnus est aussi possible pour faire apparaître une contribution de la force de Magnus à partir de l'ordre 2 au lieu de l'ordre 1 et amène une seconde écriture adimensionnelle du PMM :

Seconde écriture adimensionnelle du PMM réduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\dot{u}}^* = -C_x \underline{t} - \xi C_{zm} (\underline{t} \wedge \underline{\dot{u}}^*) - \xi^2 R_2 C_{ypm} (\underline{t} \wedge (\underline{t} \wedge \underline{\dot{u}}^*)) + \underline{g}^* + 2(\underline{t} \wedge \underline{\Omega_T}^*) \\ \dot{\omega}_c = \frac{\pi \rho D^4 v \omega_c C_{lp}}{8 I_1} \\ \underline{\alpha_e} = -\frac{\xi}{C_{m\alpha}} (\underline{t} \wedge \underline{\dot{u}}^*) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(II.10a)} \\ \text{(II.10b)} \\ \text{(II.10c)} \end{array}$$

$$\text{Où } R_2 = \frac{m D^2}{I_1}.$$

Pour des raisons de clarté, le détail des calculs réalisés à partir de cette écriture adimensionnelle du PMM sont donnés en annexe A. Seuls les résultats seront donnés dans le corps de ce chapitre.

2.3 Étude du paramètre adimensionnel ξ

Nous étudions désormais l'évolution du paramètre ξ au cours du vol pour différentes configurations correspondant à différentes conditions initiales de tir. Son évolution est donc tracée tout au long de la trajectoire. Les conditions initiales variables sont la hausse du canon et la vitesse initiale du projectile. La valeur maximale du paramètre est atteinte à proximité de l'apogée. Sur la figure II.5, est tracée l'évolution du paramètre ξ pour huit configurations ayant une vitesse initiale comprise entre 300m/s et 1000m/s. La hausse du canon, quant à elle, est fixée à un angle de 700 millièmes d'artillerie pour l'ensemble des configurations.

La figure II.5 montre bien l'influence de la vitesse initiale sur la valeur maximale du paramètre. Plus la vitesse est grande, plus l'intervalle temporel où la valeur de ce paramètre est au dessus de 0.1 sera grand. Cependant, la quasi totalité de la trajectoire avant l'apogée est en dessous de cette limite. La limite de 0.1 est choisie arbitrairement comme condition de petitesse afin de mieux visualiser l'évolution du paramètre lors du changement des conditions initiales.

Ce travail sur l'évolution a été complété par une étude regroupant 114 configurations avec des hausses comprises entre 300mil et 1200mil et des vitesses initiales correspondant aux 6 zones de tirs compatibles avec les équipements de tirs, à notre disposition, comprises entre 335m/s et 939m/s.

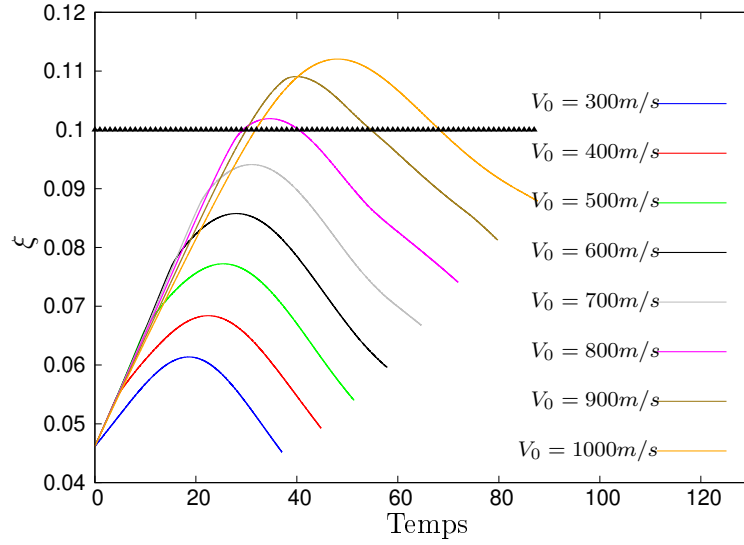


FIGURE II.5 – Évolution temporelle de ξ pour huit configurations de tirs avec une hausse fixe de 700mil ($300\text{m/s} < v_{init} < 1000\text{m/s}$)

A partir de cette étude, plusieurs tableaux de synthèse sont générés. Un résumé de quelques configurations est fait dans le tableau II.1. Ce tableau donne la valeur maximale du paramètre au cours du vol et le tableau II.2 donne la fenêtre temporelle autour de l'apogée lorsque la valeur du paramètre ξ est supérieure à la valeur seuil fixée à 0.1.

| Hausse (mil) \ Vitesse (m/s) | 300 | 500 | 700 | 900 | 1100 | 1200 |
|------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 335 | 0.050 | 0.055 | 0.063 | 0.076 | 0.103 | 0.130 |
| 493 | 0.064 | 0.069 | 0.077 | 0.092 | 0.124 | 0.155 |
| 538 | 0.068 | 0.073 | 0.080 | 0.096 | 0.129 | 0.162 |
| 665 | 0.079 | 0.083 | 0.091 | 0.107 | 0.142 | 0.181 |
| 803 | 0.089 | 0.094 | 0.102 | 0.117 | 0.154 | 0.199 |
| 939 | 0.098 | 0.103 | 0.111 | 0.124 | 0.158 | 0.220 |

Tableau II.1 – Valeur maximale de ξ au cours du vol

Lorsque la hausse de tir et la vitesse initiale augmentent, l'intervalle temporel au cours duquel le paramètre ξ est supérieur à 0.1 est de plus en plus grand (tableau II.2). Cependant, nous observons que lors des premiers instants le paramètre est inférieur à ce seuil. L'hypothèse que le paramètre ξ soit petit est donc possible sur le début de trajectoire comme la figure II.5 le montre.

| Hausse (mil) \ Vitesse (m/s) | 500 | 700 | 900 | 1100 |
|------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 335 | - | - | - | [24.09 ; 31.16] |
| 493 | - | - | - | [22.34 ; 45.92] |
| 538 | - | - | - | [22.12 ; 49.61] |
| 665 | - | - | [26.26 ; 45.08] | [21.85 ; 59.74] |
| 803 | - | [29.21 ; 40.86] | [25.37 ; 56.74] | [23.31 ; 71.12] |
| 939 | [32.99 ; 45.49] | [30.64 ; 61.41] | [28.26 ; 72.39] | [26.48 ; 84.71] |

Tableau II.2 – Fenêtre temporelle (en s) où $\xi > 0.1$

De manière complémentaire, l'évolution du paramètre ξ est tracée lors de tirs avec une très forte hausse de 1200mil . Ce type de configuration est un cas extrême au delà de la limite usuelle d'élévation du canon. De plus, le couplage de cet angle d'élévation avec de très fortes vitesses nous amène dans des configurations critiques avec une forte augmentation de l'angle d'obliquité (nous atteignons alors la limite de validité du modèle PMM lui-même). Nous constatons sur la figure II.6 que l'ensemble des configurations présente une large fenêtre temporelle durant laquelle le paramètre adimensionnel ξ dépasse la valeur de 0.1 dont la taille augmente lorsque la vitesse initiale de tir croît. Les parties de la trajectoire pour lesquelles la valeur limite n'est pas dépassée sont au début et en fin de tir.

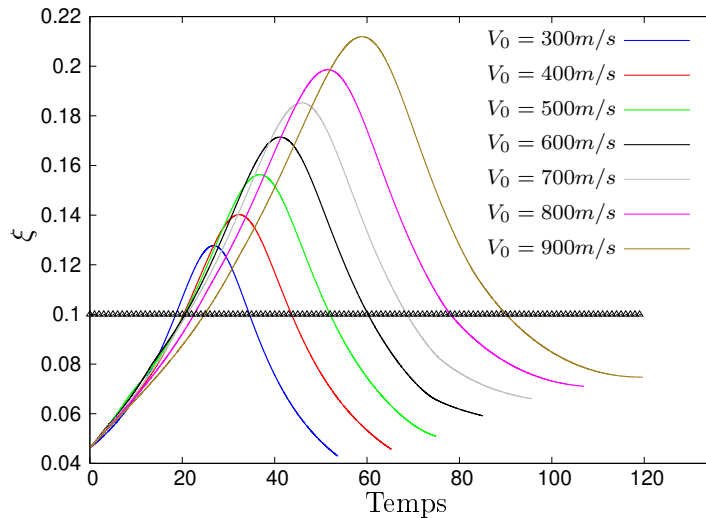


FIGURE II.6 – Évolution temporelle de ξ pour huit configurations de tirs avec une hausse fixe de 1200mil ($300\text{m/s} < v_{init} < 900\text{m/s}$)

L'introduction d'un développement asymptotique en ξ induit une condition sine qua non sur la valeur maximale de ce paramètre adimensionnel. La plage où ce paramètre est petit c'est à dire où la condition $\xi \ll 1$ est respectée est relativement large. Lorsque cette dernière n'est pas respectée sur la totalité de la trajectoire, seule la plage autour de l'apogée est à exclure. Les développements futurs dans cette zone limite devront être surveillés pour éviter tout risque d'erreur. En excluant ces cas limites, cela nous autorise bien à effectuer un développement asymptotique en ξ des équations du PMM.

3 Développement asymptotique en ξ de l'accélération du PMM réduit

Les observations précédentes nous renseignent sur les influences des différents coefficients aérodynamiques dans chaque direction mais ne fournissent pas d'équations balistiques intermédiaires permettant l'identification des coefficients. Une méthode utilisant un développement asymptotique en ξ est mise en place afin de déterminer ces équations.

Dans la littérature, des paramètres adimensionnels associés à l'équation du PMM existent. Nous pouvons par exemple citer les travaux de Baranowski [5, 7] qui définit deux paramètres adimensionnels. Cependant, nous ne pouvons les utiliser dans le cas de notre méthode, ces deux paramètres nécessiteraient un double développement asymptotique, ce qui est possible mais le résultat obtenu serait difficilement exploitable. En effet, les valeurs des paramètres évoluant rapidement, les comparer entre eux s'avère difficile. Le choix de prioriser l'un par rapport à l'autre n'est pas facilement justifiable. Il a donc été choisi de définir le paramètre adimensionnel ξ permettant un unique développement asymptotique du PMM.

Les deux équations (II.8) du système adimensionné dans lequel le paramètre ξ est introduit peuvent être traitées de manière indépendante. D'un côté, l'équation (II.8b), permettant l'identification du coefficient aérodynamique C_{lp} , est directement utilisable sous cette forme. Et de l'autre côté, l'équation de l'accélération adimensionnée ne permet pas une identification directe des trois coefficients aérodynamiques. Par la suite, nous avons donc pour objectif de faire apparaître des équations découlant de cette dernière pour identifier de manière séquentielle les coefficients aérodynamiques intervenant dans l'accélération $\underline{\dot{u}}$ du modèle PMM.

Nous réalisons un développement asymptotique de l'équation (II.8a) du modèle PMM réduit adimensionné. Nous définissons pour cela les développements asymptotiques, jusqu'à l'ordre deux, de l'accélération $\underline{\dot{u}}^*$ de la vitesse relative \underline{v} et du vecteur vitesse unitaire \underline{t} :

$$\underline{\dot{u}}^* = \underline{\dot{u}}_0^* + \xi \underline{\dot{u}}_1^* + \xi^2 \underline{\dot{u}}_2^* \quad (\text{II.11})$$

$$\underline{v} = \underline{v}_0 + \xi \underline{v}_1 + \xi^2 \underline{v}_2 \quad (\text{II.12})$$

$$\underline{t} = \frac{\underline{v}}{v} = \underline{t}_0 + \xi \underline{t}_1 + \xi^2 \underline{t}_2 \quad (\text{II.13})$$

$$(\text{II.14})$$

De même, nous définissons les développements asymptotiques des coefficients aérodynamiques (C_x, C_{zm} et C_{ypm}).

$$C_x = C_{x0} + \xi C_{x1} + \xi^2 C_{x2} \quad (\text{II.15})$$

$$C_{zm} = C_{zm0} + \xi C_{zm1} + \xi^2 C_{zm2} \quad (\text{II.16})$$

$$C_{ypm} = C_{ypm0} + \xi C_{ypm1} + \xi^2 C_{ypm2} \quad (\text{II.17})$$

A ces définitions, nous ajoutons une hypothèse supplémentaire, provenant de l'analyse des termes de l'accélération du PMM, nous considérons que l'effet Coriolis, du fait de son intensité, intervient uniquement à partir de l'ordre un en ξ .

$$\underline{\Omega_T}^* = \xi \underline{\Omega_{T0}}^* \quad (\text{II.18})$$

Nous pouvons ainsi écrire l'équation (II.8a) sous la forme :

$$\underline{\dot{u}}^* = \underbrace{-C_x \underline{t}}_{\underline{T_{Cx}}^*} - \underbrace{\xi C_{zm} (\underline{t} \wedge \underline{\dot{u}}^*)}_{\underline{T_{Czm}}^*} - \underbrace{\xi R_1 C_{ypm} (\underline{t} \wedge (\underline{t} \wedge \underline{\dot{u}}^*))}_{\underline{T_{Cypm}}^*} + \underline{g}^* + \underbrace{2(\underline{t} \wedge \underline{\Omega_T}^*)}_{\underline{T_{Coriolis}}^*} \quad (\text{II.19})$$

Les définitions (II.12) à (II.18) permettent d'écrire les développements asymptotiques jusqu'à l'ordre deux des différents termes.

La contribution de la force de traînée intervient dès l'ordre zéro et a pour développement :

$$\underline{T_{Cx}}^* = -C_x \underline{t} = -C_{x0} \underline{t}_0 - \xi (C_{x0} \underline{t}_1 + C_{x1} \underline{t}_0) - \xi^2 (C_{x0} \underline{t}_2 + C_{x1} \underline{t}_1 + C_{x2} \underline{t}_0) \quad (\text{II.20})$$

Les contributions de la portance, de l'effet de Magnus et de l'effet Coriolis interviennent uniquement dès l'ordre un et ont pour développements respectifs :

$$\begin{aligned} \underline{T_{Czm}}^* &= -\xi C_{zm} (\underline{t} \wedge \underline{\dot{u}}^*) \\ &= -\xi C_{zm0} (\underline{t}_0 \wedge \underline{\dot{u}}_0^*) - \xi^2 \left(C_{zm0} (\underline{t}_0 \wedge \underline{\dot{u}}_1^* + \underline{t}_1 \wedge \underline{\dot{u}}_0^*) + C_{zm1} (\underline{t}_0 \wedge \underline{\dot{u}}_0^*) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

$$\begin{aligned} \underline{T_{Cypm}}^* &= -\xi R_1 C_{ypm} (\underline{t} \wedge (\underline{t} \wedge \underline{\dot{u}}^*)) \\ &= -\xi R_1 C_{ypm0} (\underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{\dot{u}}_0^*)) - \xi^2 R_1 \left[C_{ypm0} \left(\underline{t}_1 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{\dot{u}}_0^*) + \underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{\dot{u}}_1^*) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_1 \wedge \underline{\dot{u}}_0^*) \right) + C_{ypm1} (\underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{\dot{u}}_0^*)) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

$$\underline{T_{Coriolis}}^* = 2(\underline{t} \wedge \underline{\Omega_T}^*) = 2 \xi (\underline{t}_0 \wedge \underline{\Omega_{T0}}^*) + 2 \xi^2 (\underline{t}_1 \wedge \underline{\Omega_{T0}}^*) \quad (\text{II.23})$$

A partir de ces développements jusqu'à l'ordre deux en ξ et après identification, terme à terme, à chaque ordre nous obtenons différentes relations :

à l'ordre zéro :

$$\boxed{\dot{\underline{u}}_0^* = -C_{x0} \underline{t}_0 + \underline{g}^*} \quad (\text{II.24})$$

à l'ordre un :

$$\dot{\underline{u}}_1^* = -(C_{x0}\underline{t}_1 + C_{x1}\underline{t}_0) - C_{zm0}(\underline{t}_0 \wedge \dot{\underline{u}}_0^*) - R_1 C_{ypm0} (\underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \dot{\underline{u}}_0^*)) + 2 (\underline{t}_0 \wedge \underline{\Omega}_{T0}^*) \quad (\text{II.25})$$

à l'ordre deux :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{u}}_2^* = & -(C_{x0}\underline{t}_2 + C_{x1}\underline{t}_1 + C_{x2}\underline{t}_0) - C_{zm0}(\underline{t}_0 \wedge \dot{\underline{u}}_1^* + \underline{t}_1 \wedge \dot{\underline{u}}_0^*) - C_{zm1}(\underline{t}_0 \wedge \dot{\underline{u}}_0^*) \\ & - R_1 C_{ypm0} \left(\underline{t}_1 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \dot{\underline{u}}_0^*) + \underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \dot{\underline{u}}_1^*) + \underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_1 \wedge \dot{\underline{u}}_0^*) \right) - R_1 C_{ypm1} (\underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \dot{\underline{u}}_0^*)) \\ & + 2 (\underline{t}_1 \wedge \underline{\Omega}_{T0}^*) \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

En écrivant les équations de la sorte, nous remarquons que la relation à l'ordre zéro (II.24) ne fait intervenir que le paramètre C_{x0} . De plus, nous constatons que les équations (II.25) et (II.26) font intervenir les accélérations $\dot{\underline{u}}_0^*$ et $\dot{\underline{u}}_1^*$ intervenant aux ordres inférieurs.

Après avoir constaté que :

$$\underline{t}_0 \wedge \dot{\underline{u}}_0^* = \underline{t}_0 \wedge \underline{g}^* \quad (\text{II.27})$$

$$\underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \dot{\underline{u}}_0^*) = \underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) \quad (\text{II.28})$$

Nous remplaçons de manière récurrente ces termes et nous obtenons une réécriture de l'équation (II.25) à l'ordre un qui ne fait plus intervenir $\dot{\underline{u}}_0^*$.

$$\boxed{\dot{\underline{u}}_1^* = -(C_{x0} \underline{t}_1 + C_{x1} \underline{t}_0) - C_{zm0} (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) - R_1 C_{ypm0} (\underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*)) + 2 (\underline{t}_0 \wedge \underline{\Omega}_{T0}^*)} \quad (\text{II.29})$$

De plus, en observant que :

$$\underline{t}_1 \wedge \dot{\underline{u}}_0^* = -C_{x0} (\underline{t}_1 \wedge \underline{t}_0) + \underline{t}_1 \wedge \underline{g}^* \quad (\text{II.30})$$

$$\underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_1 \wedge \dot{\underline{u}}_0^*) = -C_{x0} \underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_1 \wedge \underline{t}_0) + \underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_1 \wedge \underline{g}^*) \quad (\text{II.31})$$

$$\underline{t}_1 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \dot{\underline{u}}_0^*) = \underline{t}_1 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) \quad (\text{II.32})$$

$$\underline{t}_0 \wedge \dot{\underline{u}}_1^* = -C_{x0} \underline{t}_0 \wedge \underline{t}_1 - C_{zm0} (\underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*)) + R_1 C_{ypm0} (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) + 2 (\underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{\Omega}_{T0}^*)) \quad (\text{II.33})$$

$$\underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \dot{\underline{u}}_1^*) = -C_{x0} (\underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{t}_1)) + C_{zm0} (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) + R_1 C_{ypm0} (\underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*)) - 2 (\underline{t}_0 \wedge \underline{\Omega}_{T0}^*) \quad (\text{II.34})$$

Nous obtenons une première réécriture de la relation (II.26) à l'ordre deux :

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{t}}_2^* = & -(C_{x0}\underline{t}_2 + C_{x1}\underline{t}_1 + C_{x2}\underline{t}_0) - C_{zm0} \left(\underline{t}_0 \wedge \dot{\underline{t}}_1^* - C_{x0} (\underline{t}_1 \wedge \underline{t}_0) + \underline{t}_1 \wedge \underline{g}^* \right) \\
& - R_1 C_{ypm0} \left(\underline{t}_1 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) - C_{x0} (\underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_1 \wedge \underline{t}_0)) + \underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_1 \wedge \underline{g}^*) + \underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \dot{\underline{t}}_1^*) \right) \\
& - C_{zm1} (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) - R_1 C_{ypm1} (\underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*)) + 2 \underline{t}_1 \wedge \underline{\Omega}_{T0}^*
\end{aligned} \tag{II.35}$$

En remplaçant ensuite les termes, dépendants de $\dot{\underline{t}}_1^*$, dans l'équation (II.35), nous obtenons une autre écriture de l'équation à l'ordre deux.

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{t}}_2^* = & -(C_{x0}\underline{t}_2 + C_{x1}\underline{t}_1 + C_{x2}\underline{t}_0) \\
& - C_{zm0} \left(\underline{t}_1 \wedge \underline{g}^* + 2 \underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{\Omega}_{T0}^*) \right) \\
& - R_1 C_{ypm0} \left(\underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_1 \wedge \underline{g}^*) + \underline{t}_1 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) - 2 (\underline{t}_0 \wedge \underline{\Omega}_{T0}^*) \right) \\
& - 2 R_1 C_{zm0} C_{ypm0} (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) \\
& + (C_{zm0}^2 - R_1^2 C_{ypm0}^2) \left(\underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) \right) \\
& - C_{zm1} (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) - R_1 C_{ypm1} \left(\underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) \right) + 2 \underline{t}_1 \wedge \underline{\Omega}_{T0}^*
\end{aligned} \tag{II.36}$$

Chacune des équations (II.24), (II.29) et (II.36) peut se mettre sous la forme $\dot{\underline{t}}_i^* = f(t, \underline{C}_i)$ où \underline{C}_i est un vecteur composé des coefficients aérodynamiques recherchés jusqu'à l'ordre i .

Le développement asymptotique en ξ du modèle balistique PMM jusqu'à l'ordre deux peut donc aussi être écrit sous la forme suivante $\dot{\underline{t}}^* = f(t, \underline{C}_i)$ où \underline{C}_i est le vecteur comprenant les coefficients aérodynamiques aux différents ordres intervenant dans le modèle PMM :

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{t}}^* = & -C_{x0} \underline{t}_0 + \underline{g}^* \\
& + \xi \left[- (C_{x0} \underline{t}_1 + C_{x1} \underline{t}_0) - C_{zm0} (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) - R_1 C_{ypm0} \left(\underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) \right) + 2 (\underline{t}_0 \wedge \underline{\Omega}_{T0}^*) \right] \\
& + \xi^2 \left[- (C_{x0}\underline{t}_2 + C_{x1}\underline{t}_1 + C_{x2}\underline{t}_0) - C_{zm0} \left(\underline{t}_1 \wedge \underline{g}^* + 2 \underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{\Omega}_{T0}^*) \right) \right. \\
& \quad - R_1 C_{ypm0} \left(\underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_1 \wedge \underline{g}^*) + \underline{t}_1 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) - 2 (\underline{t}_0 \wedge \underline{\Omega}_{T0}^*) \right) \\
& \quad - 2 R_1 C_{zm0} C_{ypm0} (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) + (C_{zm0}^2 - R_1^2 C_{ypm0}^2) \left(\underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) \right) \\
& \quad \left. - C_{zm1} (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) - R_1 C_{ypm1} \left(\underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) \right) + 2 \underline{t}_1 \wedge \underline{\Omega}_{T0}^* \right]
\end{aligned} \tag{II.37}$$

L'utilisation du paramètre adimensionnel ξ permet d'écrire le développement asymptotique de l'accélération uniquement en fonction de la vitesse unitaire \underline{t} , des coefficients aérodynamiques, de l'accélération gravitationnelle adimensionnée \underline{g}^* et de l'accélération provenant de l'effet Coriolis. Nous observons bien dans ce développement que les coefficients aérodynamiques n'interviennent pas tous au même ordre comme l'étude quantitative a pu le laisser suggérer. Les observations de la partie précédente sont bien validées par l'équation (II.36) obtenue après le développement asymptotique de l'équation du PMM jusqu'à l'ordre deux en ξ .

Remarque :

Si nous utilisons l'écriture (II.10) où la force de Magnus est supposée être à l'ordre deux en ξ , nous obtenons après calculs (cf annexe A) un **second développement asymptotique** :

$$\begin{aligned}
 \underline{\dot{u}}^* = & -C_{x0} \underline{t}_0 + \underline{g}^* \\
 & + \xi \left[-(C_{x0}\underline{t}_1 + C_{x1}\underline{t}_0) - C_{zm0}(\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) + 2\underline{t}_0 \wedge \underline{\Omega}_{T0}^* \right] \\
 & + \xi^2 \left[-(C_{x0}\underline{t}_2 + C_{x1}\underline{t}_1 + C_{x2}\underline{t}_0) - C_{zm0}[2\underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{\Omega}_{T0}^*) + (\underline{t}_1 \wedge \underline{g}^*)] - C_{zm1}(\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) \right. \\
 & \quad \left. + (C_{zm0}^2 - R_2 C_{yym0})\underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) + 2\underline{t}_1 \wedge \underline{\Omega}_{T0}^* \right]
 \end{aligned}
 \tag{II.38}$$

4 Hypothèses sur la forme des développements de la vitesse et de l'accélération

En complément des hypothèses sur l'ordre des différentes forces, nous introduisons des approximations sur la forme de la vitesse et de l'accélération. Les ordres de grandeur constatés dans la partie 1 de ce chapitre, nous amènent à faire l'hypothèse que les composantes hors plan de tir (suivant \underline{k}) de la vitesse et de l'accélération interviennent uniquement à partir du premier ordre en ξ alors que les composantes dans le plan de tir ($\underline{i}, \underline{j}$) sont d'ordre zéro.

Nous faisons donc par la suite les approximations suivantes :

— pour la vitesse :

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ \xi v_{1z} \end{pmatrix} \tag{II.39}$$

— pour l'accélération :

$$\underline{\dot{u}}^* = \begin{pmatrix} \dot{u}_x^* \\ \dot{u}_y^* \\ \dot{u}_z^* \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \dot{u}_{0x}^* \\ \dot{u}_{0y}^* \\ \xi \dot{u}_{1z}^* \end{pmatrix} \quad (\text{II.40})$$

— et pour le vecteur \underline{t} , vecteur unitaire directeur de la vitesse :

$$\underline{t} \approx \begin{pmatrix} t_{0x} \\ t_{0y} \\ \xi t_{1z} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad t_{0x}^2 + t_{0y}^2 \approx 1 \quad (\text{II.41})$$

5 Procédure d'identification séquentielle des coefficients aérodynamiques du modèle PMM

Après avoir établi des équations à chaque ordre du développement asymptotique de l'équation (II.4a), nous les traitons de manière séquentielle afin de faire apparaître les différentes étapes de notre procédure d'identification. En complément, et de manière préalable, nous présentons l'identification du C_{lp} à partir de la seconde équation (II.4b) du modèle PMM réduit.

5.1 Identification du coefficient C_{lp}

Cette première identification ne nécessite pas la connaissance des autres coefficients aérodynamiques, elle peut être effectuée, de manière indépendante, à n'importe quel instant du processus d'identification à condition d'être en possession des informations nécessaires intervenant dans l'équation (II.42).

$$\dot{\omega}_c = \frac{\pi \rho D^4 v \omega_c C_{lp}}{8I_1} \quad (\text{II.42})$$

Cette équation est de la forme $\dot{U} = f(C, U, t)$. Même si cette identification est indépendante des autres, elle nécessite en plus des données de mesures radar habituelles de connaître l'évolution temporelle de la vitesse de rotation $\omega_c(t)$ autour de son axe principal. La mesure de ω_c nécessitant une instrumentation spécifique, elle n'est pas disponible pour l'ensemble des tirs. La détermination du coefficient C_{lp} , bien que faisant partie du processus d'identification n'est toutefois pas nécessaire pour l'identification des autres coefficients aérodynamiques intervenant dans l'équation (II.1) du PMM. L'identification du coefficient C_{lp} sera validée par la suite à partir de données générées numériquement puis à partir des données issues d'un radar de trajectographie complétées par des mesures de rotation du projectile autour de son axe longitudinal.

5.2 Identification de la contribution principale C_{x0} du coefficient de traînée

La première étape du processus séquentiel d'identification des coefficients est basée sur l'expression de l'accélération à l'ordre zéro suivante :

$$\underline{\dot{u}}_0^* = - C_{x0} \underline{t}_0 + \underline{g}^* \quad (\text{II.43})$$

Les forces qui interviennent dans cette équation sont uniquement celle de traînée et de gravité, ce qui est en accord avec les observations graphiques. Il est donc possible à partir de cette équation de déterminer une première contribution C_{x0} du coefficient de traînée à partir de la connaissance de la vitesse du projectile \underline{t}_0 et des variations météorologiques (vent, pression, température de l'air). De plus, nous observons que l'équation (II.24) adimensionnée à l'ordre zéro en ξ correspond au modèle balistique PMC adimensionné dans lequel l'effet Coriolis est négligé. Cette équation peut donc être utilisée pour obtenir une première approximation du coefficient de traînée.

En utilisant ce modèle d'ordre zéro (II.43) et les hypothèses émises sur les formes de l'accélération (II.40) et de la vitesse unitaire (II.41), nous obtenons après projection dans les directions du plan de tir $(\underline{i}, \underline{j})$ un système de deux équations vectorielles couplées où seul intervient le coefficient C_{x0} :

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{u}_{0x}^* &= - C_{x0} t_{0x} \\ \dot{u}_{0y}^* &= - C_{x0} t_{0y} - g^* \end{aligned}} \quad (\text{II.44})$$

Ce système peut être mis sous la forme $\dot{U} = f(C, U, t)$. A partir de la connaissance de la vitesse à chaque instant, nous sommes en mesure d'évaluer cette première approximation du coefficient de traînée. Lors du calcul, en utilisant une méthode d'optimisation sous contraintes égalités, nous obtenons en sortie du code, en plus du C_{x0} , l'accélération à l'ordre zéro $\underline{\dot{u}}_0^*$ et un (re)-calcul de la vitesse unitaire \underline{t}_0 à l'ordre zéro.

5.3 Identification des contributions ξC_{zm0} puis de ξC_{x1} et ξC_{ypm0}

Nous utilisons ensuite le développement asymptotique de l'accélération jusqu'à l'ordre un en ξ qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\underline{\dot{u}}^* = \underline{\dot{u}}_0^* + \xi \underline{\dot{u}}_1^* \quad (\text{II.45})$$

Le terme $\underline{\dot{u}}_0^*$ étant déterminé avec le modèle d'ordre zéro précédent, nous le supposons connu. La seule inconnue est donc la contribution $\xi \underline{\dot{u}}_1^*$ d'ordre un dont l'expression est donnée par la relation :

$$\xi \dot{\underline{u}}_1^* = - (C_{x0} \xi \underline{t}_1 + \xi C_{x1} \underline{t}_0) - \xi C_{zm0} (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) - \xi R_1 C_{ypm0} \left[\underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) \right] + 2 (\underline{t}_0 \wedge \xi \underline{\Omega}_{T0}^*) \quad (\text{II.46})$$

Dans cette équation, l'effet Coriolis n'est plus négligé. Une remarque que nous pouvons faire est que les termes dans les différentes directions ne sont pas affectés par cet effet de manière identique suivant l'orientation du tir par rapport au Nord. En effet, l'azimut de tir influence les composantes du vecteur rotation de la Terre intervenant dans l'expression de la force de Coriolis.

La contribution $(\xi \dot{\underline{u}}_1^*)$ de l'accélération à l'ordre un fait intervenir la contribution, identifiée à l'étape précédente, C_{x0} du coefficient de traînée, une correction du coefficient de traînée avec une contribution à l'ordre un (ξC_{x1}) et enfin les contributions des coefficients liés à la force de portance (ξC_{zm0}) et à la force de Magnus (ξC_{ypm0}) . L'objectif, à l'ordre un, est donc de déterminer ces trois paramètres $(\xi C_{x1}, \xi C_{zm0}$ et $\xi C_{ypm0})$. La vitesse \underline{t}_0 est connue puisqu'elle correspond à la vitesse obtenue en sortie de l'étape précédente. Le vecteur \underline{t}_1 est obtenu à partir du vecteur unitaire \underline{t} , qui est obtenu à partir de la donnée de vitesse, et de \underline{t}_0 obtenu à l'étape précédente, à partir de la vitesse recalculée à l'ordre zéro, soit $\xi \underline{t}_1 = \underline{t} - \underline{t}_0$, qui peut s'écrire d'après notre hypothèse (II.41), $\xi \underline{t}_1 \approx \xi t_{1z} \underline{k} = t_z \underline{k}$.

Considérant les hypothèses ((II.39) et (II.41)) sur la forme de la vitesse et en projetant la relation (II.46) dans les trois directions, nous obtenons :

$$\xi \dot{u}_{1x}^* = - \xi C_{x1} t_{0x} + \xi R_1 C_{ypm0} t_{0x} t_{0y} g^* + 2 t_{0y} \xi \Omega_{T0z}^* \quad (\text{II.47})$$

$$\xi \dot{u}_{1y}^* = - \xi C_{x1} t_{0y} - \xi R_1 C_{ypm0} t_{0x}^2 g^* - 2 t_{0x} \xi \Omega_{T0z}^* \quad (\text{II.48})$$

$$\xi \dot{u}_{1z}^* = - C_{x0} \xi t_{1z} + \xi C_{zm0} t_{0x} g^* + 2 (t_{0x} \xi \Omega_{T0y}^* - t_{0y} \xi \Omega_{T0x}^*) \quad (\text{II.49})$$

La projection suivant \underline{k} aboutit à une équation différentielle (II.49) où intervient un seul coefficient aérodynamique inconnu C_{zm0} . Nous pouvons déterminer la contribution ξC_{zm0} en utilisant cette équation différentielle qui peut aussi se mettre sous la forme $\dot{U} = f(C, U, t)$.

Les deux autres équations (II.47) et (II.48), issues des projections dans le plan de tir, sont couplées. En utilisant l'hypothèse (II.40) sur la forme de l'accélération, impliquant $\dot{u}_{1x}^* = 0$ et $\dot{u}_{1y}^* = 0$, et l'approximation $t_{0x}^2 + t_{0y}^2 \approx 1$, nous pouvons par combinaison obtenir deux relations indépendantes permettant le calcul des contributions ξC_{ypm0} et ξC_{x1} .

Nous obtenons ainsi à partir du développement asymptotique jusqu'à l'ordre un et des hypothèses (II.39) à (II.41) les trois équations suivantes :

$$\boxed{\xi \dot{u}_{1z}^* = -C_{x0} \xi t_{1z} + \xi C_{zm0} g^* t_{0x} + 2 (t_{0x} \xi \Omega_{T0y}^* - t_{0y} \xi \Omega_{T0x}^*)} \quad (\text{II.50})$$

$$\boxed{C_{x1} = 0} \quad (\text{II.51})$$

$$\boxed{\xi C_{yppm0} = -2\xi \frac{\Omega_{T0z}^*}{R_1 g^* t_{0x}} = -2\xi \frac{v}{D\omega_c g^* t_{0x}}} \quad (\text{II.52})$$

Les équations du développement à l'ordre un permettent d'obtenir une première estimation de la contribution à l'ordre zéro de ξC_{zm} et ξC_{yppm} (ξC_{zm0} , ξC_{yppm0}), ainsi qu'une correction du coefficient de traînée C_x . Cette méthode permet la détermination, en complément de celle du coefficient de traînée, des coefficients globaux ξC_{zm} et ξC_{yppm} plutôt que des coefficients couramment utilisés en balistique, à savoir C_{zm} et C_{yppm} . Toutefois, la connaissance de ces quantités permet la reconstruction de la trajectoire en utilisant les modèles balistiques intermédiaires obtenus grâce au développement asymptotique jusqu'à l'ordre un.

Nous remarquons aussi, d'après les hypothèses ((II.39) à (II.41)) que dans la direction \underline{k} , $\xi \dot{u}_{1z} = \dot{u}_z$ et $\xi t_{1z} = t_z$.

5.4 Identification des contributions $\xi^2 C_{x2}$, $\xi^2 C_{zm1}$ et $\xi^2 C_{yppm1}$

De manière analogue, en utilisant le développement asymptotique de l'accélération jusqu'à l'ordre deux (II.36) et en tenant compte des hypothèses ((II.39), (II.40) et (II.41)) sur la forme de l'accélération et de la vitesse nous obtenons à partir de l'équation (II.36) projetée, les contributions $\xi^2 C_{x2}$, $\xi^2 C_{zm1}$ et $\xi^2 C_{yppm1}$.

$$\boxed{\xi^2 C_{x2} = -\xi t_{1z} \left[\xi C_{zm0} t_{0x} g^* + 2(t_{0x} \xi \Omega_{T0y}^* - t_{0y} \xi \Omega_{T0x}^*) \right]} \quad (\text{II.53})$$

$$\boxed{\xi^2 C_{zm1} = 2 \frac{\xi \Omega_{T0z}^*}{t_{0x} g^*} \left[\xi C_{zm0} - \frac{1}{t_{0x} g^*} \left(t_{0y} \xi t_{1z} g^* + 2(t_{0x} \xi \Omega_{T0y}^* - t_{0y} \xi \Omega_{T0x}^*) \right) \right]} \quad (\text{II.54})$$

$$\boxed{\xi^2 C_{yppm1} = \frac{1}{R_1 t_{0x} g^*} \left[\xi C_{zm0} \left(t_{0y} \xi t_{1z} g^* + 2 (t_{0x} \xi \Omega_{T0y}^* - t_{0y} \xi \Omega_{T0x}^*) \right) + \xi^2 (C_{zm0}^2 - R_1^2 C_{yppm0}^2) t_{0x} g^* - \xi R_1 C_{yppm0} \xi \Omega_{T0z}^* + 2 \xi t_{1z} (t_{0x} \xi \Omega_{T0x}^* + t_{0y} \xi \Omega_{T0y}^*) \right]} \quad (\text{II.55})$$

5.5 Expression des coefficients à partir du second développement asymptotique

Dans le cas du second développement asymptotique (II.38) où le terme lié à la force de Magnus est supposé d'ordre deux et en tenant compte des mêmes hypothèses sur l'accélération et la vitesse, nous obtenons des expressions inchangées pour estimer respectivement C_{x0} , ξC_{zm0} , ξC_{x1} et $\xi^2 C_{x2}$ (avec respectivement les relations (II.44), (II.50), (II.51) et (II.53)). Seules changent les expressions suivantes :

$$\boxed{\xi^2 C_{zm1} = -2 \frac{\xi C_{zm0} \xi \Omega_{T0z}^*}{t_{0x} g^*}} \quad (\text{II.56})$$

$$\boxed{\xi^2 C_{ypm0} = \frac{1}{R_2 t_{0x} g^*} \left[\xi C_{zm0} \left(t_{0y} \xi t_{1z} g^* + 2 (t_{0x} \xi \Omega_{T0y}^* - t_{0y} \xi \Omega_{T0x}^*) \right) + 2 \xi t_{1z} (t_{0x} \xi \Omega_{T0x}^* + t_{0y} \xi \Omega_{T0y}^*) + \xi^2 C_{zm0}^2 t_{0x} g^* \right]} \quad (\text{II.57})$$

Bilan

Ce chapitre a permis de déterminer, aussi bien graphiquement que par calcul, les différents niveaux d'influence de chaque force dans les différentes directions du modèle balistique PMM. Les différents niveaux d'influence sont donc reliés aux coefficients de chacune des forces nous amenant ainsi à la mise en place d'une identification séquentielle. Dans la direction du plan de tir $(\underline{i}, \underline{j})$, la force de traînée domine les autres à l'ordre zéro. Dans la direction de déviation \underline{k} , c'est la force portance qui domine, mais à un ordre inférieur. Les effets des forces aux ordres inférieurs sont plus difficilement observables.

Ce constat nous a amené à effectuer une adimensionnalisation du modèle PMM et a permis l'introduction d'un paramètre adimensionnel permettant la mise en place d'un développement asymptotique du modèle PMM réduit adimensionné. Le développement asymptotique obtenu donne l'expression des contributions de l'accélération aux différents ordres et valide les constatations de l'étude quantitative. Nous voyons apparaître à l'ordre zéro uniquement la contribution C_{x0} du coefficient de traînée, à l'ordre un une correction de ce coefficient de traînée et les contributions des coefficients ξC_{zm} et ξC_{ypm} à l'ordre zéro. Enfin, le terme d'accélération à l'ordre deux fait intervenir des corrections de ces trois coefficients.

En conjecturant sur la forme de la vitesse et de l'accélération, nous avons déterminé par projection des termes de l'accélération aux différents ordres, des modèles balistiques intermédiaires ainsi que des expressions analytiques permettant l'identification séquentielle des coefficients aérodynamiques. De plus, nous avons vu que le développement proposé n'était pas unique, un second développement a été effectué, ce qui permet d'obtenir plusieurs expressions pour la détermination des contributions des coefficients $\xi^2 C_{zm1}$ et ξC_{ypm0} .

Chapitre III

Mise en place de la procédure d'identification séquentielle des coefficients à partir de données synthétiques

Sommaire

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 62 |
| 1 Procédure d'identification de paramètres à partir d'un problème d'optimisation non linéaire sous contraintes égalités . . | 62 |
| 1.1 Problème d'optimisation non linéaire sous contraintes égalités . . | 62 |
| 1.2 Prise en compte de l'évolution des coefficients aérodynamiques au cours du vol | 65 |
| 2 Détermination du coefficient d'amortissement en roulis C_{lp} . . | 67 |
| 3 Détermination de la contribution C_{x0} du coefficient de traînée 68 | |
| 3.1 Résultats d'identification à partir des données générées par le modèle balistique PMC | 69 |
| 3.2 Résultats d'identification à partir des données générées avec le modèle balistique PMM | 73 |
| 4 Détermination de la contribution ξC_{zm0} liée à la portance . . . | 77 |
| 4.1 Identification à partir des données de tir générées numériquement par le modèle PMM | 77 |
| 4.2 Reconstruction de la trajectoire avec les coefficients identifiés . . | 79 |
| 5 Détermination de la contribution $R_1 \xi C_{y_{pm0}}$ liée à l'effet Magnus 80 | |
| 6 Calcul des termes correctifs provenant du modèle d'ordre deux 81 | |
| 6.1 Correction $\xi^2 C_{x2}$ du coefficient de traînée | 82 |
| 6.2 Correction $\xi^2 C_{zm1}$ | 84 |
| 6.3 Contribution $\xi^2 C_{y_{pm1}}$ | 86 |
| 6.4 Synthèse de la procédure d'identification séquentielle des coefficients | 88 |
| Bilan | 90 |

Introduction

Nous allons, dans ce chapitre, appliquer la procédure séquentielle d'identification proposée au chapitre II à partir des données générées par les modèles balistiques.

Avant l'application de la procédure, nous expliquons brièvement comment l'identification est réalisée de manière générale. Dans un second temps, nous montrons que l'identification du coefficient d'amortissement en roulis peut être mise en œuvre facilement. Ensuite, les différentes étapes sont détaillées et les résultats sont commentés à partir d'une part des comparaisons des coefficients aux références et d'autre part, des comparaisons des trajectoires régénérées a posteriori avec les coefficients identifiés. Nous appliquons la première étape, associée à l'identification de la contribution du coefficient de traînée à l'ordre zéro C_{x0} , sur des données générées par les deux modèles balistiques PMC et PMM. L'utilisation des données générées avec le modèle balistique PMC, proche de notre première étape, permet à l'aide d'une étude sur les influences des paramètres numériques de calcul de déterminer ceux qui sont optimaux pour l'identification du C_{x0} . Nous utilisons ensuite des données générées avec le modèle PMM, modèle utilisé comme référence, pour des configurations ayant des conditions initiales différentes, à l'intérieur et à l'extérieur du domaine de validité du développement asymptotique. La suite de la procédure consiste en l'identification des contributions issues du développement à l'ordre un, ξC_{zm0} et $R_1 \xi C_{ypm0}$. Enfin, la dernière étape de la procédure, avec l'utilisation des relations issues du développement à l'ordre deux, est présentée pour les calculs d'une correction du coefficient de traînée C_x à l'ordre deux et des corrections des deux autres contributions (ξC_{zm} et $R_1 \xi C_{ypm}$) à l'ordre un.

Les représentations temporelles de l'évolution des coefficients permettent une meilleure visualisation des corrections et ainsi une évaluation de la validité des différentes étapes de la procédure en fonction de la valeur du paramètre adimensionnel. Cela permet aussi de montrer les différences de précisions sur l'identification des coefficients.

1 Procédure d'identification de paramètres à partir d'un problème d'optimisation non linéaire sous contraintes égalités

Avant de déterminer les coefficients aérodynamiques, nous détaillerons la méthode de calcul utilisant les équations des modèles balistiques intermédiaires développés dans le chapitre précédent. Nous montrerons ensuite comment les variations des coefficients au cours de la trajectoire sont prises en compte.

1.1 Problème d'optimisation non linéaire sous contraintes égalités

L'identification des coefficients aérodynamiques se ramène à un problème d'optimisation sous contraintes égalités. La mise en équations de ce problème est fortement inspirée des travaux de V. Condaminet [17]. Avant d'exposer la procédure, il est important d'ob-

server que l'ensemble des modèles balistiques (PMC, PMM et 6DDL) exposés au chapitre I et les équations intermédiaires obtenues par développement asymptotique au chapitre II, peuvent s'écrire sous la forme générique suivante :

$$\dot{\underline{U}}(t) = f(\underline{U}(t), \underline{C}(t)) \quad \forall t \in \Omega \quad (\text{III.1})$$

où $\underline{U}(t)$ est le vecteur composé des paramètres d'état du projectile (essentiellement la vitesse du projectile dans notre cas) et $\underline{C}(t)$ le vecteur composé des coefficients aérodynamiques intervenants dans le modèle.

Le processus d'identification consiste à rechercher les coefficients aérodynamiques en recherchant la trajectoire la plus proche des données (mesures) tout en satisfaisant le modèle balistique (III.1) à chaque instant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\underline{U}, \underline{C}) \text{ minimisant} \\ J(\underline{U}, \underline{C}) = \|\underline{u} - \tilde{\underline{u}}\|^2 \\ \text{sous la contrainte égalité } \dot{\underline{U}}(t) = f(\underline{U}(t), \underline{C}(t)) \quad \forall t \in \Omega \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Afin d'effectuer ce travail, nous avons le choix de minimiser plusieurs paramètres d'état, soit les positions, soit les vitesses ou bien encore les deux combinées. Dans la suite de l'étude, la minimisation est effectuée uniquement sur les données des composantes de la vitesse dans les différentes directions. En effet, à la suite de tests, la minimisation sur les vitesses est apparue la plus judicieuse du fait de la qualité des résultats obtenus. De plus, ce choix permet de réduire le nombre de contraintes. La prise en compte additionnelle des positions impliquerait de rajouter les équations de passage entre les positions et les vitesses dans les trois directions. Le nombre de contraintes dans ce cas serait alors multiplié par deux. Pour respecter le modèle de vol, le couple des éléments optimaux $(\underline{U}, \underline{C})$ doit satisfaire, à chaque instant t , l'équation du modèle balistique. Cela est équivalent à satisfaire à l'équation des contraintes représentant notre modèle :

$$A(t) = -\dot{\underline{U}}(t) + f(\underline{U}(t), \underline{C}(t)) = 0 \quad \forall t \in \Omega \quad (\text{III.3})$$

Ayant les mesures tout au long du vol nous pouvons écrire l'équation (III.3) sous sa forme discrète à chaque pas de temps en utilisant un schéma d'intégration d'ordre p .

$$A(t_m) = \underline{U}(t_{m+1}) - \underline{U}(t_m) - \Delta t \sum_{r=0}^{p-1} \beta_r f(\underline{U}(t_{m-r}), \underline{C}(t_{m-r})), \quad \forall m \in \{p-1, p, \dots, N-1\} \quad (\text{III.4})$$

Les inconnues du problème d'optimisation sous sa forme discrète sont donc le vecteur composé des valeurs de \underline{U} en chaque instant, soit $\mathcal{U} = (\underline{U}(t_0), \underline{U}(t_1), \dots, \underline{U}(t_N))$, et l'ensemble des coefficients à identifier contenus dans le vecteur $\underline{C}(t)$.

Deux types de schémas d'intégration temporelle ont été testés, le premier a été le schéma d'intégration multi-pas explicite d'Adams-Bashforth et le second le schéma d'intégration

implicite Backward Differentiation Formula pour des ordres allant de $p = 1$ à 4. L'ordre du schéma fait l'objet d'une attention particulière à la section (3.1) lors de l'analyse des paramètres numériques de calcul intervenant dans le problème.

Le problème de minimisation sous sa forme discrète peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\underline{\mathcal{U}}, \underline{\mathcal{C}}) \text{ minimisant} \\ J(\underline{\mathcal{U}}, \underline{\mathcal{C}}) = \|\underline{u}(t) - \tilde{\underline{u}}(t)\|_{\Omega_0}^2 \\ \text{sous les contraintes égalités : } A(t_m) = 0, \forall m \in \{1, \dots, N-1\} \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

Afin de prendre en considération les contraintes égalités dans la fonctionnelle de notre problème d'optimisation J , nous introduisons le Lagrangien L tel que :

$$L(\underline{\mathcal{U}}, \underline{\mathcal{C}}, \underline{\mu}) = J(\underline{\mathcal{U}}, \underline{\mathcal{C}}) + \sum_{i=1}^3 \sum_{m=1}^{N-1} \mu_{(i-1) \times N + m} A_i(t_m) \quad (\text{III.6})$$

L'équation étant discrétisée, les contraintes dans les 3 directions sont prises en compte via la somme sur l'indice i . Le couple $(\underline{\mathcal{U}}, \underline{\mathcal{C}})$ est ainsi la solution du problème d'optimisation (III.5) seulement s'il existe $\underline{\mu}$, vecteur contenant les multiplicateurs de Lagrange, tel que $(\underline{\mathcal{U}}, \underline{\mathcal{C}}, \underline{\mu})$ soit la solution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \nabla L(\underline{\mathcal{U}}, \underline{\mathcal{C}}, \underline{\mu}) = \nabla J(\underline{\mathcal{U}}, \underline{\mathcal{C}}) + \sum_{i=1}^3 \sum_{m=0}^{N-1} \mu_{(i-1) \times N + m} \nabla A_i(t_m) = 0 \\ A(t_m) = 0 \quad \forall m \in \{0, \dots, N-1\} \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

Résoudre le problème d'optimisation (III.5) revient à résoudre le système d'équations non-linéaires (III.7), cette résolution est effectuée en utilisant la technique de Newton Raphson [8]. Cette technique est bien adaptée et souvent utilisée dans le cadre de problème discrétisé tel que le notre.

Méthode de Newton-Raphson :

Nous posons $\underline{R} = (\underline{\mathcal{U}}, \underline{\mathcal{C}}, \underline{\mu})$ afin de simplifier les notations. Nous recherchons la suite de vecteurs $\underline{R}^0, \underline{R}^1, \dots$ convergeant vers une solution approchée \underline{R}^* du système (III.7).

La première étape est le calcul de la correction à appliquer ($\Delta \underline{R}$) pour la mise à jour de la solution approchée \underline{R}^0 grâce à l'équation (III.9) obtenue à partir de l'approximation de Taylor :

$$\nabla L(\underline{R} + \Delta \underline{R}) \approx \nabla L(\underline{R}^0) + H(\underline{R}^0) \Delta \underline{R} \quad (\text{III.8})$$

où H est la matrice hessienne définie par : $H(\underline{R}) = \nabla^2 L(\underline{R})$

$$\Delta \underline{R} = (H(\underline{R}))^{-1} (-\nabla L(\underline{R})) \quad (\text{III.9})$$

nous faisons ensuite la mise à jour de la solution approchée : $\underline{R}^1 = \underline{R}^0 + \Delta \underline{R}$.

Nous recherchons donc, par itérations et mise à jour successives, la solution \underline{R}^* vers laquelle la suite des solutions approchées \underline{R} converge. Un des avantages de la méthode est sa convergence quadratique.

Il est à noter que notre procédure d'identification ne se limite pas à l'identification des coefficients aérodynamiques \underline{C} mais qu'elle permet un re-calcul d'une trajectoire $\underline{u}(t)$ qui vérifie au mieux les données $\tilde{\underline{u}}$.

1.2 Prise en compte de l'évolution des coefficients aérodynamiques au cours du vol

Un point important dans l'identification est de connaître l'ensemble sur lequel les coefficients aérodynamiques sont définis afin de le représenter au mieux. Les travaux précédents de V. Condaminet [17], évoqués dans le premier chapitre, définissent les coefficients comme des fonctions temporelles constantes par morceaux. Or dans la littérature, notamment les STANREC 4618 [59] et STANAG 4355 [58], ils sont définis comme des fonctions dépendantes du nombre de Mach et de l'obliquité du projectile. Bien que le nombre de Mach et l'obliquité soient des fonctions elles-mêmes dépendantes du temps, il est plus aisé de visualiser le coefficient comme étant une fonction du nombre de Mach.

Les mesures à partir d'un radar au sol d'un projectile gyro-stabilisé sans instrumentation embarquée ne nous permettant pas d'obtenir une mesure de l'obliquité, seule la dépendance au nombre de Mach est retenue. Cette définition est cohérente avec la définition des coefficients aérodynamiques utilisée dans le modèle balistique PMM standardisé par l'OTAN. De plus, dans le domaine de la balistique, la norme est de tracer les coefficients aérodynamiques en fonction du nombre de Mach, ce qui sera facilité par cette définition.

Dans la suite, les coefficients aérodynamiques sont approximés comme des courbes B-splines dépendantes du nombre de Mach. Ces courbes B-splines permettent une meilleure prise en compte de l'évolution des coefficients aérodynamiques. Cependant, définir ces coefficients de cette manière implique certaines restrictions liées à la dépendance au nombre de Mach et aux propriétés intrinsèques des courbes B-splines. Lors d'un tir, le nombre de Mach décroît sur la première partie de la trajectoire puis augmente légèrement après le passage de l'apogée. Un calcul des coefficients aérodynamiques sur l'ensemble de la trajectoire peut donc être problématique car l'unicité du coefficient sur cette zone post-apogée peut ne pas être assurée, ce qui pose une difficulté pour la résolution de notre problème d'optimisation sous contraintes égalités.

Pour pallier à cela, nous proposons une identification en plusieurs sous-parties indépendantes. Cette méthode permet d'augmenter le nombre de points composant la courbe d'identification tout en diminuant la taille du système à résoudre. Le temps de calcul est ainsi réduit et permet d'utiliser un ordinateur portable standard et des capacités de calcul limitées.

Les fonctions B-splines de degré K sont définies par récurrence de la manière suivante. Soit $M_0 \leq M_1 \leq M_2 \leq \dots \leq M_m$ une suite croissante de réels représentant des valeurs du

nombre de Mach où chacun de ces points est appelé un nœud :

— pour $0 \leq i \leq m - 1$

$$B_{i,0}(M) = \begin{cases} 1 & \text{si } M \in [M_i, M_{i+1}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

— pour $K \geq 1$ et $0 \leq i \leq m - K - 1$

$$B_{i,K}(M) = \frac{M - M_i}{M_{i+K} - M_i} B_{i,K-1}(M) + \frac{M_{i+K+1} - M}{M_{i+K+1} - M_{i+1}} B_{i+1,K-1}(M)$$

avec la convention $\frac{x}{0} = 0$

Nous rappelons les propriétés suivantes que possèdent les B-Splines [9] :

- $B_{i,K}(M)$ est un polynôme de degré k sur $[M_i, M_{i+K+1}[$,
- $B_{i,K}(M) = 0$ si $M \notin [M_i, M_{i+K+1}[$,
- $0 < B_{i,K}(M) \leq 1$ si $M \in]M_i, M_{i+K+1}[$,
- $\forall M, B_{i,k}(M)$ est dérivable à droite et

$$B'_{i,K}(M) = k \left[\frac{B_{i,K-1}(M)}{M_{i+K} - M_i} - \frac{B_{i+1,K-1}(M)}{M_{i+K+1} - M_{i+1}} \right]$$

— partition de l'unité :

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} B_{i,K}(M) = 1 \text{ pour } n \leq m - K \text{ et } M_K \leq M < M_n$$

Parmi ces propriétés, la plus importante est la dernière. Le respect de cette partition de l'unité, nous apporte une contrainte supplémentaire lors la création des intervalles de calcul. Elle implique d'avoir $(K + 1)$ nœuds avant et après en dehors de la zone du maillage sur laquelle nous recherchons les coefficients.

La figure III.1 permet de visualiser la répartition des $(n_{Bs} - 1)$ nœuds N_i pour le calcul sur une plage Mach $[M_{min}; M_{max}]$ divisée en n_{Bs} B-splines d'ordre $K = 0$.



FIGURE III.1 – Exemple de répartition des nœuds pour $K = 0$

Soit $[M_{min}, M_{max}]$ la zone de Mach sur laquelle nous souhaitons identifier les coefficients aérodynamiques. Nous avons alors : $M_K = M_{min}$ et $M_{m-K} = M_{max}$. Soient C_1, C_2, \dots, C_n n points du plan ou de l'espace. Nous appelons, la courbe B-Splines associée au polygône

des C_j , la courbe paramétrée :

$$S(M) = \sum_{j=1}^n C_j B_{j,K}(M) \quad \text{pour } M_K \leq M < M_n$$

Nous définissons ainsi les coefficients aérodynamiques comme une somme de courbes B-Splines, fonctions du nombre de Mach M . L'application au coefficient de traînée permet d'écrire :

$$C_x(M) = \sum_{j=1}^n C_{xj} B_{j,K}(M) \quad \text{pour } M_K \leq M < M_n$$

L'écriture des coefficients aérodynamiques sous cette forme permet de respecter l'hypothèse de dépendance au nombre de Mach telle qu'elle est définie dans le modèle PMM.

2 Détermination du coefficient d'amortissement en roulis C_{lp}

Dans cette section, nous recherchons le coefficient C_{lp} afin qu'il respecte le modèle balistique PMM via l'équation (II.42). La minimisation s'effectue donc sur la vitesse de rotation du projectile autour de son axe longitudinal ω_c en définissant le problème d'optimisation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \int_{t_{initial}}^{t_{final}} (\omega_c - \tilde{\omega}_c)^2 dt \\ \text{sous la contrainte égalité : } \dot{\omega}_c(t) = \frac{\pi \rho D^4 v \omega_c(t) C_{lp}(t)}{8 I_1} \quad \forall t \end{array} \right. \quad (\text{III.10})$$

Les résultats obtenus après application de la méthode pour deux configurations de tir ayant une vitesse initiale intermédiaire sont présentés (figure III.2). Les mesures $\tilde{\omega}_c$ utilisées sont des données générées de vitesses de rotation à l'aide de l'intégration du modèle balistique PMM (II.1) via un schéma de Runge-Kutta d'ordre quatre.

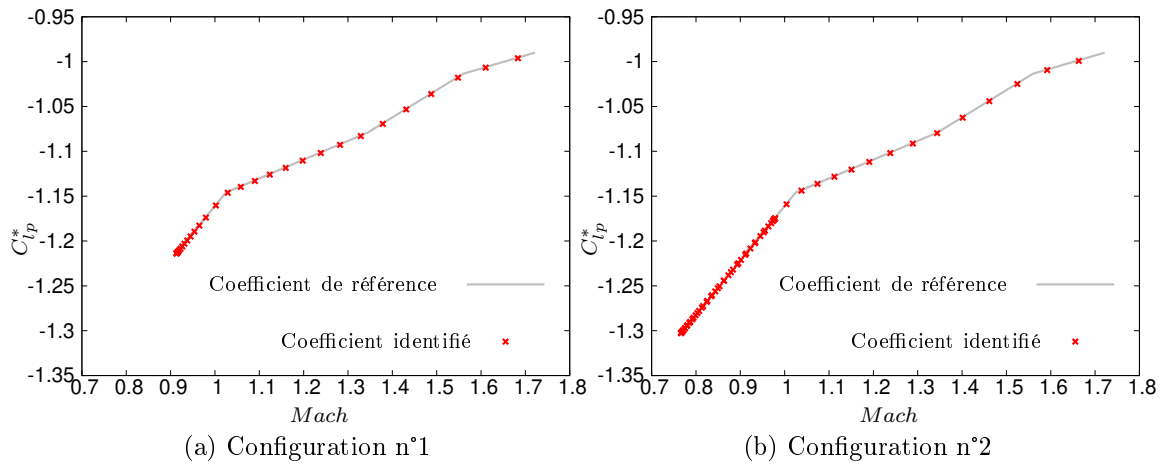


FIGURE III.2 – Identification du coefficient d'amortissement en roulis à partir de données générées numériquement

L'identification de ce coefficient ne pose aucune difficulté. Nous observons bien dans les deux cas une superposition des points identifiés avec le coefficient de référence et cela pour les deux tests qui sont présentés dans les figures III.2a et III.2b. La reconstruction de ce coefficient permet de reproduire exactement son évolution en fonction du nombre de Mach au cours du vol du projectile. L'utilisation de notre méthode est donc validée sur des données générées dans le cadre de l'identification du coefficient d'amortissement en roulis C_{lp} intervenant dans le modèle balistique PMM. La condition, facilement respectée lors de données générées numériquement, est d'avoir accès aux mesures de la rotation du projectile au cours du temps ω_c . La qualité des reconstructions du coefficient étant très bonne, les reconstructions des trajectoires, qui ne sont pas présentées ici, sont excellentes.

3 Détermination de la contribution C_{x0} du coefficient de traînée

Le modèle asymptotique obtenu à l'ordre zéro (II.43) ne fait intervenir que la contribution C_{x0} du coefficient de traînée. Les hypothèses permettent de se réduire aux deux directions principales dans le plan et de négliger la déviation du projectile en première approximation. L'application de la méthode d'optimisation, décrite dans la partie 1, fait intervenir comme nous l'avons vu de multiples paramètres numériques lors de la discrétisation du problème d'optimisation sous contraintes égalités. Ces paramètres sont au nombre de quatre : la taille de l'intervalle sur lequel nous recherchons le coefficient aérodynamique δt , le pas de temps utilisé lors du calcul Δt , l'ordre du schéma d'intégration temporelle p et enfin, ayant choisi de définir les coefficients comme des courbes B-splines, nous devons définir la forme de ces dernières en choisissant leur ordre K . Le schéma temporel utilisé dans cette étude est un schéma multipas explicite d'Adams-Bashforth. D'autres schémas tel que le schéma Backward Differentiation Formula (BDF) ont été testés. Cependant, ces schémas fournissent des résultats similaires, qui ne seront pas présentés. Le choix des paramètres numériques agit directement aussi bien sur le temps de calcul que sur la qualité des identifications. Les temps de calculs étant faibles, de l'ordre de quelques secondes, l'aspect temporel n'a pas été priorisé. Nous faisons donc uniquement une étude d'influence des paramètres sur la qualité de l'identification de la contribution C_{x0} . Nous utilisons, afin de déterminer ces influences, des données générées avec le modèle balistique PMC. Le modèle à l'ordre zéro coïncide avec le modèle PMC pour lequel nous négligeons l'effet Coriolis. Ce modèle est bien de la forme $\dot{U} = f(U(t), C(t))$ et le problème d'optimisation non linéaire à résoudre est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \int_{t_{initial}}^{t_{final}} (u_{0x} - \tilde{u}_{0x})^2 + (u_{0y} - \tilde{u}_{0y})^2 dt \\ \text{sous les contraintes égalités : } \begin{cases} \dot{u}_{0x}^* = -C_{x0} t_{0x} \\ \dot{u}_{0y}^* = -C_{x0} t_{0y} - g^* \end{cases} \quad \forall t \end{array} \right. \quad (\text{III.11})$$

Cette étude permet ainsi de déterminer les paramètres numériques optimaux pour l'identification de ce coefficient à partir de données de vitesses générées numériquement avec le modèle balistique PMC. Nous appliquons ensuite, cette première étape d'identification, à des données générées par le modèle balistique PMM pour quatre configurations de tir ayant des conditions initiales différentes.

3.1 Résultats d'identification à partir des données générées par le modèle balistique PMC

L'influence des paramètres numériques est faite sur des données simulées numériquement à partir du modèle balistique PMC. Ce modèle balistique est équivalent à notre modèle balistique intermédiaire de l'étape zéro, cependant le nôtre néglige l'effet Coriolis devant la force de traînée, ce qui comme nous le montrons n'a pas de forte incidence sur l'identification de ce premier coefficient.

3.1.1 Influence de la taille de l'intervalle d'identification

Du fait de notre procédure, l'identification sur l'ensemble de la trajectoire en une fois n'est pas possible en raison de la non unicité du Mach lors du vol comme nous l'avons précédemment évoqué. Pour résoudre ce problème, il a été choisi de découper dans un premier temps la trajectoire en deux parties autour du nombre de Mach minimum, situé proche de l'apogée. Les essais menés ont permis de bien identifier le coefficient sur l'ensemble de la trajectoire. Toutefois, nous avons pu remarquer que cette méthode n'était pas optimale. L'utilisation d'un intervalle de Mach important lors de l'identification a plusieurs conséquences. La première est de limiter le nombre de points reconstruits afin de limiter la taille du système matriciel inversible et donc limiter le temps de calcul. La seconde est la perte de qualité de la reconstruction du coefficient dans la zone transsonique (aux alentours du Mach 1.1). Dans cette zone, il y a une forte variation du coefficient de traînée qui induit des difficultés de reconstruction. Au vu de ces observations, le choix d'un découpage de la trajectoire en tronçons temporels plus petits a été fait. Un avantage majeur de ce choix est d'assurer l'indépendance entre chaque identification. Le nombre de points identifiés peut ainsi être augmenté en utilisant des intervalles qui se chevauchent et suffisamment grands pour ne pas perdre d'informations, le tout en limitant le coût de calcul. Un découpage régulier de taille δt est choisi. L'influence de la taille de ces intervalles est présentée dans les graphiques de la figure III.3 toujours dans le cas de données simulées numériquement à partir du modèle balistique PMC.

Les trois tailles d'intervalles utilisées permettent une bonne identification du coefficient aérodynamique de traînée comme nous pouvons le voir sur la figure III.3a. La comparaison des coefficients identifiés sur une même figure III.3a ne permet pas de définir la meilleure valeur de ce paramètre. Une analyse complémentaire a été faite en calculant les erreurs (figure III.3b) entre les valeurs identifiées pour les trois paramètres et la valeur de référence. Cela permet de constater que plus la taille de l'intervalle de calcul est petite, plus l'erreur est

faible. Le faible nombre de points dans le cas d'un grand intervalle peut être compensé en augmentant le nombre d'intervalles superposés. La taille d'intervalle des mesures retenues est donc $\delta t = 1s$. Dans l'optique de l'application à des données issues de mesures sur le terrain, nous devons faire attention à ce que cette fenêtre temporelle ne soit pas trop petite afin de garder la robustesse de la méthode dans le cas de bruit.

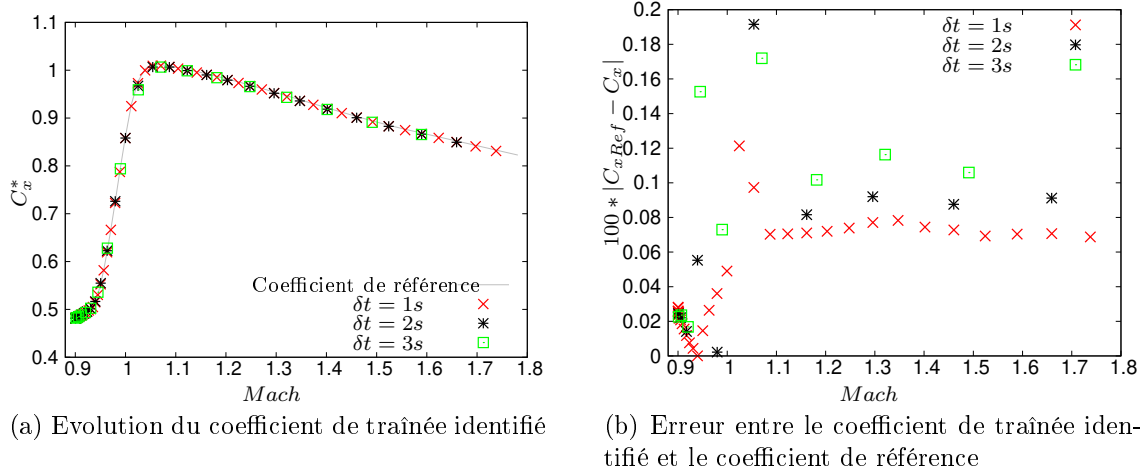


FIGURE III.3 – Influence de la taille de l'intervalle d'identification

3.1.2 Influence du pas de temps de calcul : Δt

La résolution de notre problème d'optimisation nécessitant l'introduction de contraintes égalités, l'utilisation d'un schéma d'intégration temporelle permettant la prise en compte des équations du modèle balistique est indispensable. La qualité du respect du modèle est dépendante de ce schéma, une étude sur ce paramètre Δt est donc proposée. La comparaison de plusieurs identifications obtenues avec des pas de temps différents est tracée sur la figure III.4.

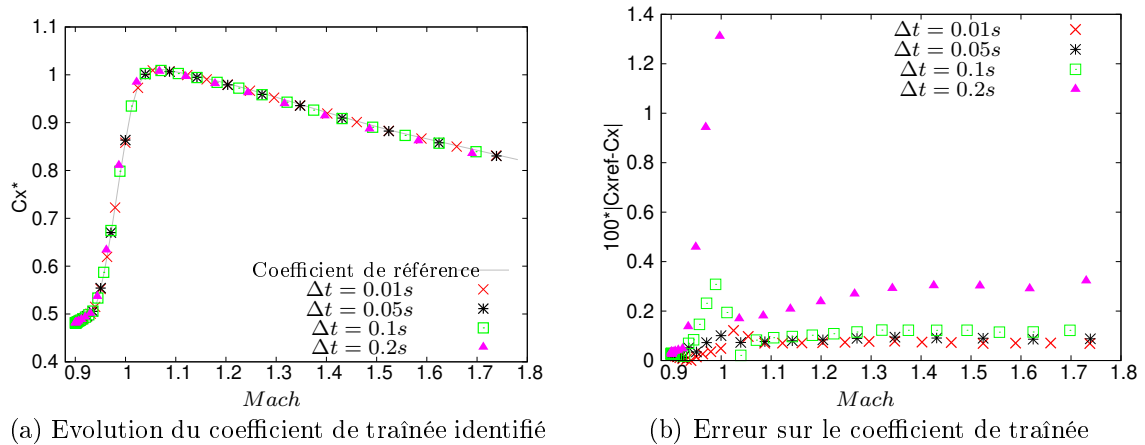


FIGURE III.4 – Influence du pas de temps de calcul

Quatre pas de temps ont ainsi pu être testés dans le but d'analyser l'impact de ces

derniers sur les identifications. L'influence du pas de temps de calcul n'est pas directement visible sur le graphique d'évolution des coefficients de traînée de la figure III.4a. Les identifications sont en effet très proches de la référence, y compris pour le pas de temps le plus grand de 0.2s. Cependant, en traçant les erreurs d'identification, nous remarquons bien, comme nous pouvions nous y attendre, que le pas de temps le plus performant est le pas de temps le plus petit. Cet écart est le plus visible autour du nombre de Mach 1.1 même si cette erreur reste très faible. L'échelle étant petite, la plus grande des erreurs pour le pas de temps de calcul le plus grand reste raisonnable. Le pas de temps le plus petit est facilement utilisable dans le cas de données générées mais risque de poser problème lors du passage à des données de mesure radar. Dans la suite, nous choisissons, à la vue de ces résultats, de garder un pas de temps intermédiaire de $\Delta t = 0.1s$ permettant un compromis satisfaisant entre le temps de calcul et la qualité de l'identification.

3.1.3 Influence de l'ordre du schéma d'intégration temporelle

Un autre paramètre influent est l'ordre du schéma d'intégration. Deux schémas dont un implicite, le Backward Differentiation Formula, et un schéma multi-pas explicite, Adams-Bashforth, ont pu être testés pour des résultats équivalents. Comme nous l'avons évoqué, nous présentons dans ce travail uniquement les résultats d'identification avec l'utilisation d'un schéma d'intégration temporelle explicite d'Adams-Bashforth pour différents ordres allant de l'ordre un, correspondant au schéma d'Euler explicite, à l'ordre 4.

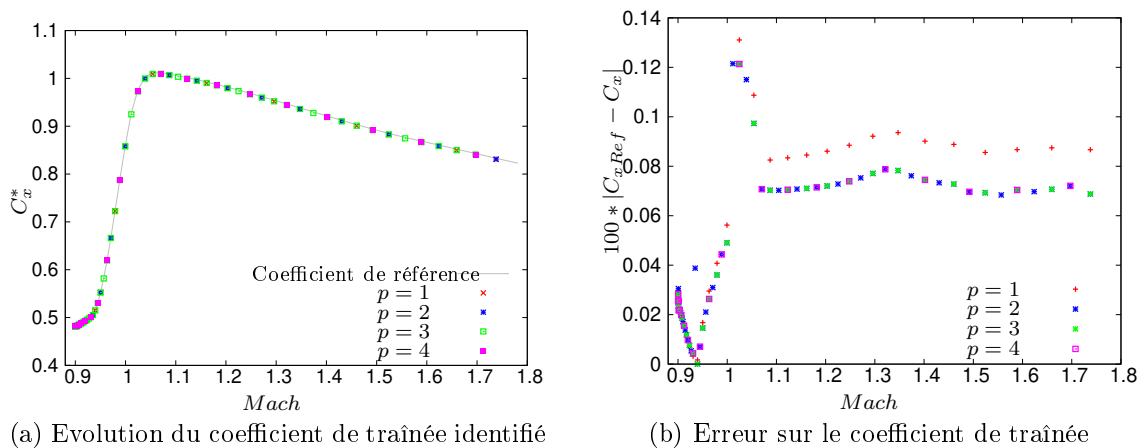


FIGURE III.5 – Influence de l'ordre du schéma d'intégration

La figure III.5a ne permet toujours pas de différencier la qualité entre les différentes identifications compte tenu de la très bonne reconstruction des coefficients aérodynamiques de traînée. En comparant les erreurs sur un même graphique, figure III.5b, nous remarquons que seul le schéma d'Adams-Bashforth d'ordre un, équivalent au schéma d'Euler explicite, a une erreur différente et plus importante que les trois autres identifications. Augmenter l'ordre du schéma d'intégration temporelle au delà de deux n'améliore pas l'identification, l'erreur reste stable. Afin de réduire au plus les coûts de calcul lors de la résolution, nous

utilisons dans la suite un schéma multipas explicite d'Adams-Bashforth d'ordre deux.

3.1.4 Influence de l'ordre des B-splines

Les coefficients aérodynamiques sont définis à l'aide de courbes B-splines fonction du nombre de Mach, cela nous a amené à une analyse de l'ordre de ces B-splines. L'intervalle sur lequel les coefficients sont calculés étant petit $\delta t = 1s$, il a été décidé après de nombreux essais d'utiliser une unique B-spline sur l'intervalle. De plus, seule la valeur du coefficient de traînée C_x au milieu de cette courbe est tracée. Des B-splines d'ordre zéro, un, et deux ont ainsi été testés. L'ordre de ces B-splines modifie la forme de la courbe permettant de représenter le coefficient en fonction du nombre de Mach.

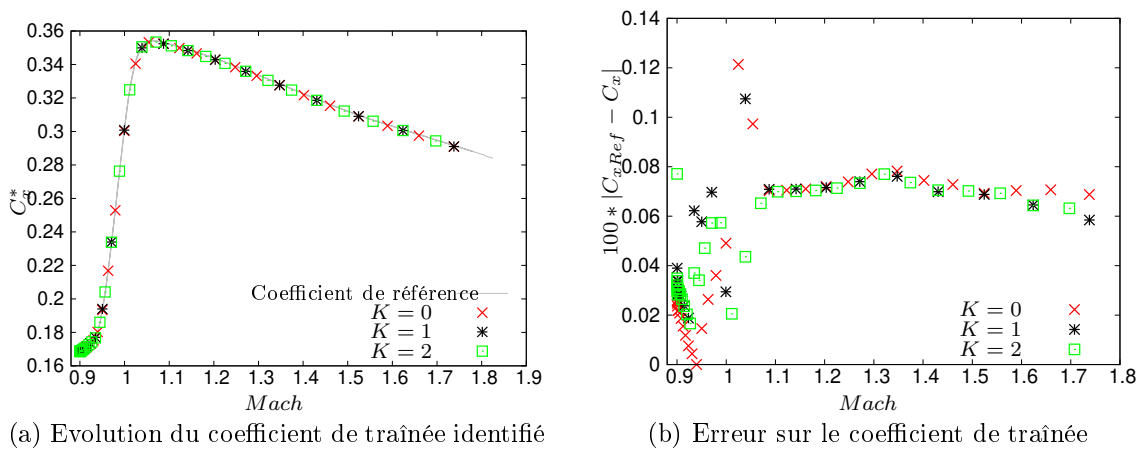


FIGURE III.6 – Utilisation de B-splines d'ordre un à deux

Les identifications pour les différents ordres des B-splines (figure III.6) sur les intervalles fournissent une très bonne approximation du coefficient dans les trois cas. Les erreurs absolues montrent que la partie la plus difficile, dans la zone transsonique, est mieux reconstruite avec l'ordre deux, cette amélioration est toutefois relative à la vue des quantités d'erreurs pour les trois identifications. L'ordre retenu pour la suite est l'ordre zéro correspondant à une fonction constante par morceaux. Ici, ayant une seule B-spline, nous recherchons une seule constante, ce qui correspond à un coefficient constant par intervalle. La définition en tant que courbe B-splines est cependant gardée dans le but d'accroître les possibilités de calcul. Dans le cas où nous souhaitons déterminer les coefficients sur un intervalle plus grand, nous ne pourrions plus le considérer comme constant. Le choix de l'ordre sera un outil supplémentaire pour améliorer l'identification.

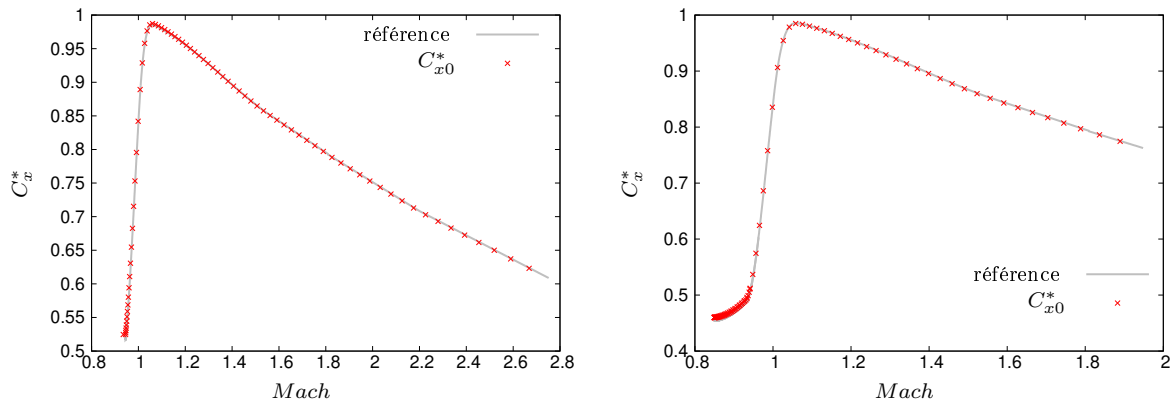
L'étude des influences des différents paramètres nous fournit les valeurs optimales suivantes : rechercher le coefficient sur un intervalle $\delta t = 1s$ avec un schéma d'intégration temporelle d'Adams-Bashforth d'ordre deux, un pas de temps de calcul de $\Delta t = 0.1s$ et une seule B-spline d'ordre zéro. Ces valeurs optimales sont fournies dans le cadre de l'utilisation de données simulées numériquement avec un pas de temps de génération de $0.01s$. Dans le cas où les données radar ne nous permettent pas d'utiliser un intervalle de calcul

aussi petit nous devons augmenter le nombre de B-splines sur cette intervalle pour se rapprocher au mieux de l'évolution du coefficient.

3.2 Résultats d'identification à partir des données générées avec le modèle balistique PMM

Dans cette partie, et dans toute la suite de notre étude, pour des raisons de confidentialité, les informations précises sur les conditions initiales du tir (vitesse initiale et hausse du canon) ne sont plus données. De même, les coefficients aérodynamiques sont tracés sous forme adimensionnée.

3.2.1 Identification de la contribution C_{x0}

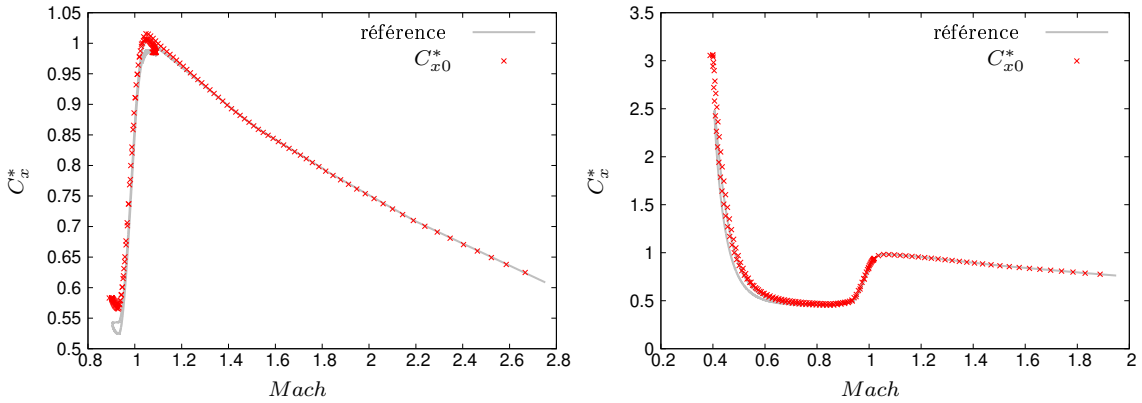


(a) configuration n°1 : faible hausse et forte vitesse initiale (b) Configuration n°2 : hausse moyenne et vitesse initiale moyenne

FIGURE III.7 – Identification du coefficient de traînée à partir de données générées pour deux configurations respectant la condition ξ petit.

Dans la suite, les quantités utilisées comme données d'entrée sont générées à partir de l'utilisation du modèle balistique PMM, imposé dans le cadre de notre étude. Les résultats de l'identification du coefficient de traînée pour quatre configurations de tir différentes sont représentés sur les figures III.7 et III.8. Sur chacun des graphiques, le coefficient de référence à partir duquel sont générées les données est représenté afin d'évaluer rapidement la qualité de l'identification. Parmi les 4 configurations de tir seulement deux correspondent à des tirs où la valeur du paramètre adimensionnel ξ reste petit sur l'intégralité du vol. Les configurations n°3 et n°4 ont des hausses et des vitesses initiales du projectile qui induisent une forte obliquité, ce qui agit directement sur la valeur de ξ . L'analyse de l'évolution du paramètre adimensionnel lors de ces deux dernières conditions de tir montre que la condition $\xi \ll 1$, permettant notre développement asymptotique utilisé dans notre méthode séquentielle, n'est plus respectée (ou du moins sur toute la durée du vol). La figure III.9 donnant l'évolution temporelle du paramètre adimensionnel montre bien, pour les configurations n°3 et n°4, les fenêtres temporelles autour de l'apogée durant lesquelles

le paramètre adimensionnel ξ est supérieur à 0.1.



(a) Configuration n°3 : forte hausse et forte vitesse initiale (b) Configuration n°4 : très forte hausse et vitesse initiale moyenne

FIGURE III.8 – Identification du coefficient de traînée à partir de données générées pour deux configurations ne respectant pas la condition ξ petit sur tout le vol

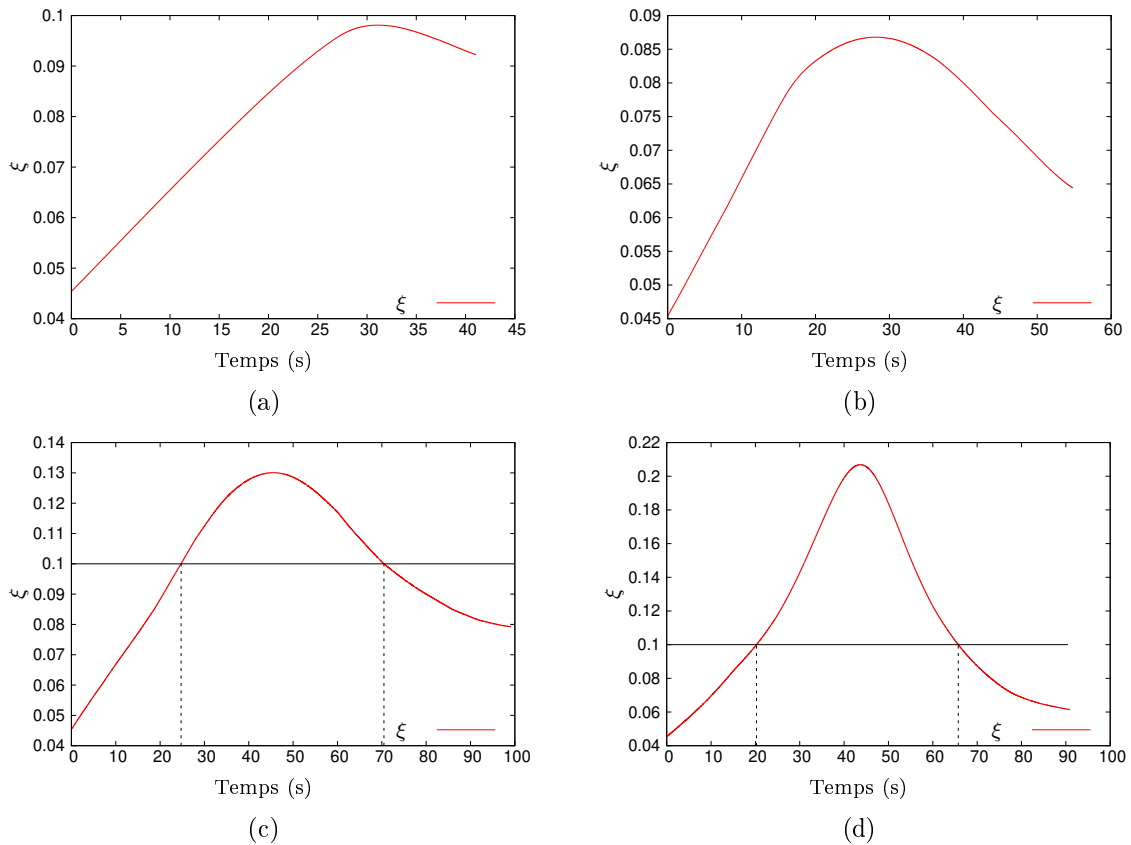
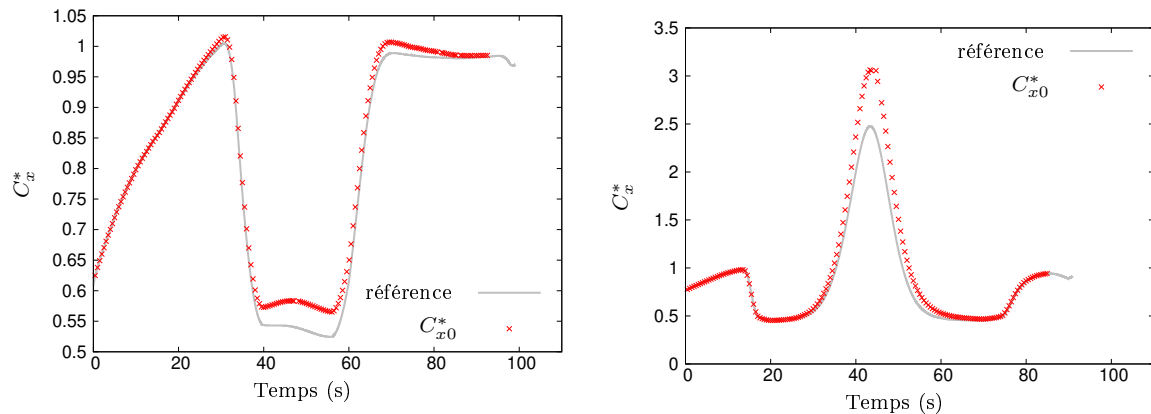


FIGURE III.9 – Évolution temporelle du paramètre adimensionnel ξ pour les configurations n°1 (a), n°2 (b), n°3 (c) et n°4 (d)

L'identification du coefficient de traînée permet d'obtenir une très bonne approximation de ce dernier pour les configurations n°1 et n°2 (figure III.7) respectant le domaine de

validité. La combinaison d'une hausse relativement forte et d'une vitesse initiale suffisamment élevée implique un tir en dehors du domaine de validité (figure III.9c et III.9d). En réalité, seule une partie du tir comprise entre δt_1 avant l'apogée et δt_2 après l'apogée est en dehors de ce domaine. L'apogée se situe aux alentours du Mach minimum. Notre méthode d'identification étant appliquée sur des subdivisions de la trajectoire, indépendantes entre elles, les résultats sur les parties satisfaisant à la condition de validité sont corrects. Nous le remarquons bien sur les quatre graphiques des figures III.8 et III.10, le coefficient de traînée C_x est bien reconstruit en début de trajectoire lorsque le paramètre adimensionnel est faible.



(a) Configuration n°3 : forte hausse et forte vitesse initiale (b) Configuration n°4 : très forte hausse et vitesse initiale moyenne

FIGURE III.10 – Évolution temporelle de l'identification du coefficient de traînée à partir de données générées pour deux configurations ne respectant pas la condition ξ petit sur tout le vol

3.2.2 Rejeux des tirs après identification du C_{x0}

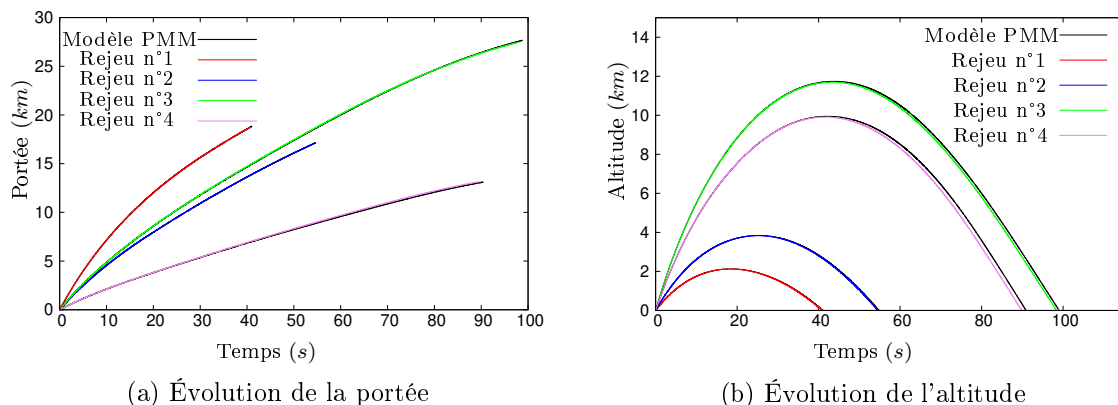


FIGURE III.11 – Comparaison entre les trajectoires de référence et les trajectoires recalculées dans les deux directions principales du tir (i, j) pour 4 configurations

Afin de déterminer la qualité des identifications, nous comparons les trajectoires (figure III.11), d'une part celles calculées avec le modèle PMM et d'autre part celles calculées avec le modèle balistique (II.44) obtenu à l'ordre zéro en utilisant le coefficient de traînée C_{x0} identifié. Les secondes trajectoires correspondent à celles obtenues après intégration pas à pas des équations du modèle d'ordre zéro dans les deux directions du plan de tir (\underline{i} , \underline{j}). Les positions sont ainsi recalculées pour les 4 configurations où les coefficients de traînée ont été identifiés. Les distances parcourues par le projectile étant grandes, des tableaux récapitulatifs des erreurs dans les directions du tir à l'apogée (tableau III.1) et en fin de trajectoire sont fournis (tableau III.2).

Ces rejeux (figure III.11) permettent une bonne approximation de la trajectoire dans les 4 configurations y compris pour les configurations limites ou hors de notre domaine de validité. La troisième configuration est celle où nous avons le plus grand écart entre les positions, puisqu'elle correspond à la configuration où la valeur du paramètre adimensionnel ξ est supérieure à 0.1 sur une fenêtre temporelle [24s–70s] relativement grande (figure III.9).

Au cours de la trajectoire, il y a deux instants clés, l'un où le projectile obtient son altitude maximale (apogée), et l'autre où il impacte le sol. Nous déterminons ainsi l'erreur absolue et l'erreur relative entre la trajectoire de référence et la trajectoire recalculée pour ces instants qui sont récapitulées dans les tableaux III.1 et III.2.

| Nom Tir | Erreur absolue | Erreur relative |
|---------|-----------------|----------------------|
| | Altitude m | Altitude % |
| Tir n°1 | 5.39 | $2.53 \cdot 10^{-1}$ |
| Tir n°2 | 10.78 | $2.81 \cdot 10^{-1}$ |
| Tir n°3 | 46.18 | $3.93 \cdot 10^{-1}$ |
| Tir n°4 | 40.80 | $4.10 \cdot 10^{-1}$ |

Tableau III.1 – Données PMM : écarts d'altitude à l'apogée

| Nom Tir | Erreur absolue | Erreur relative |
|---------|----------------|----------------------|
| | Portée m | Portée % |
| Tir n°1 | 64.61 | $3.41 \cdot 10^{-1}$ |
| Tir n°2 | 81.10 | $4.65 \cdot 10^{-1}$ |
| Tir n°3 | 214.99 | $7.48 \cdot 10^{-1}$ |
| Tir n°4 | 102.74 | $7.70 \cdot 10^{-1}$ |

Tableau III.2 – Données PMM : écarts de portée au point d'impact

Les erreurs relatives, à ces deux instants, sont très faibles et inférieures à 1%. La qualité de nos identifications est donc très satisfaisante. Nous constatons aussi que l'estimation C_{x0} du coefficient de traînée fournit une bonne approximation du coefficient de traînée C_x .

L'application de la première étape de la procédure utilisant le modèle à l'ordre zéro pour la détermination de la contribution C_{x0} permet d'obtenir une estimation très fiable du

coefficient de traînée. Nous avons pu voir, en étudiant les écarts après rejeu des trajectoires, que même dans le cas des conditions de tir induisant une valeur du paramètre adimensionnel ξ au dessus de 0.1, que les estimations restaient très bonnes. Les erreurs d'identification les plus fortes, pour les configurations n°3 et n°4, sont localisées dans la zone autour de l'apogée. Dans cette zone, où le nombre de Mach est faible, le paramètre adimensionnel atteint sa valeur maximale. La qualité de l'identification du coefficient de traînée à l'ordre zéro est directement reliée à l'évolution du paramètre adimensionnel avec la condition que ce dernier soit petit.

4 Détermination de la contribution ξC_{zm0} liée à la portance

Nous utilisons dans un premier temps l'équation :

$$\xi \dot{u}_{1z}^* = -C_{x0} \xi t_{1z} + \xi C_{zm0} t_{0x} g^* + 2 (t_{0x} \xi \Omega_{T0y}^* - t_{0y} \xi \Omega_{T0x}^*) \quad (\text{III.12})$$

Elle est issue de la projection, suivant la direction \underline{k} , du modèle obtenu lors du développement asymptotique jusqu'à l'ordre un. Nous appliquons la méthode d'optimisation en prenant comme contrainte cette équation qui est bien de la forme $\dot{U} = f(U(t), C(t))$. La fonction objective à minimiser fait intervenir uniquement les données de vitesse suivant \underline{k} . Nous évaluons ensuite la qualité des identifications de ce coefficient en rejouant les trajectoires. Le problème d'optimisation sous contraintes est donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \int_{t_{initial}}^{t_{final}} (u_{1z} - \tilde{u}_{1z})^2 dt \\ \text{sous les contrainte égalités : (III.12)} \forall t \end{array} \right. \quad (\text{III.13})$$

4.1 Identification à partir des données de tir générées numériquement par le modèle PMM

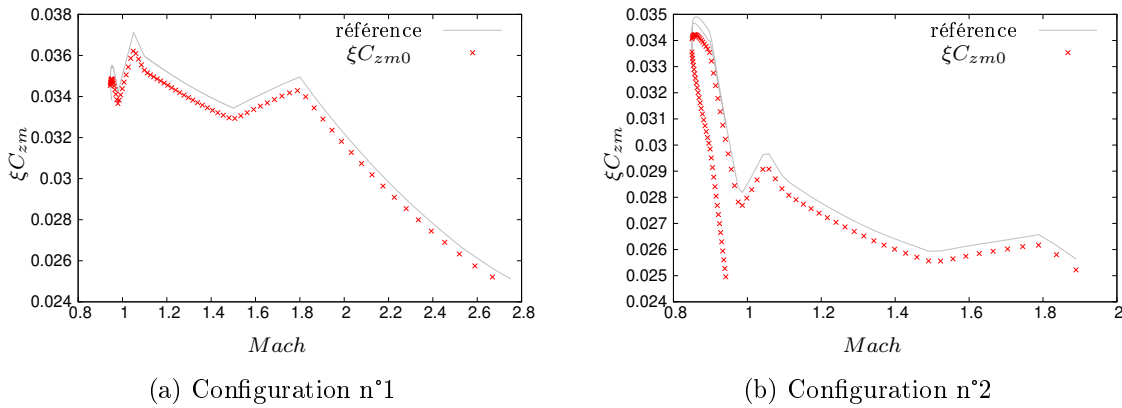


FIGURE III.12 – Identification du coefficient ξC_{zm0} pour les configurations n°1 (a) et n°2 (b)

Les résultats d'identification, du coefficient ξC_{zm0} pour les 4 configurations, sont donnés en figures III.12 et III.13. Nous observons dans l'ensemble un décalage entre la valeur du coefficient de référence et la valeur du coefficient identifié. Comprendre ce décalage est donc essentiel pour la suite de notre étude. Ce modèle étant une approximation qui ne prend pas en compte les effets du dernier rapport de coefficient C_{ypm} lié à l'effet Magnus, nous cherchons à savoir si cette erreur provient de cet effet. Pour visualiser son influence, nous utilisons des données générées avec le modèle PMM en considérant l'effet de Magnus nul (soit $C_{yp\alpha} = 0$).

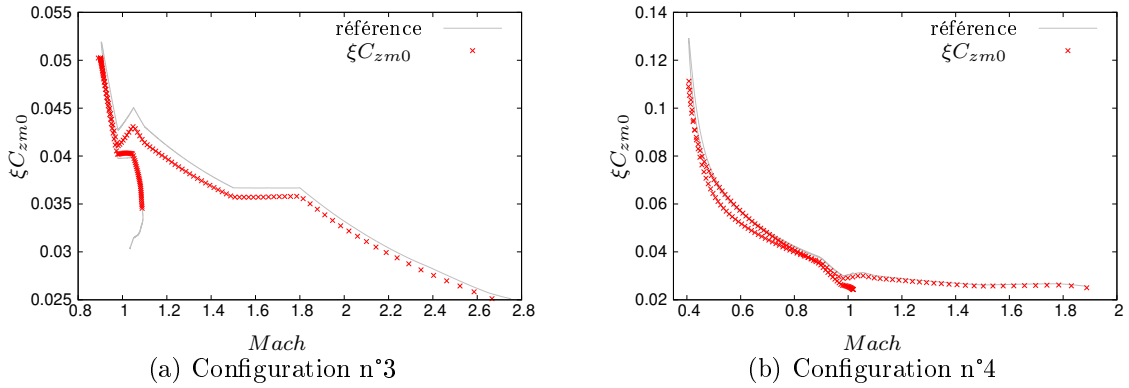


FIGURE III.13 – Identification du coefficient ξC_{zm0} pour les configurations n°3 (c) et n°4 (d)

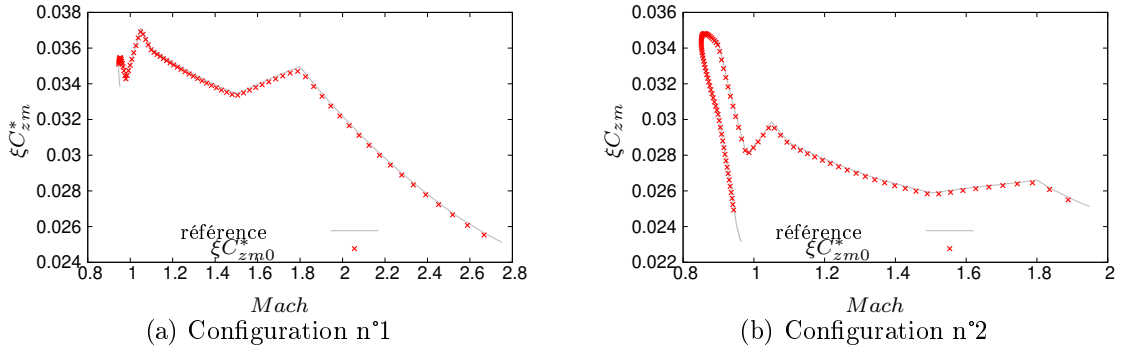


FIGURE III.14 – Identification du coefficient ξC_{zm0} pour les configurations n°1 (a) et n°2 (b) avec un $C_{yp\alpha} = 0$

Dans le cas, où nous ne prenons pas en compte l'effet Magnus dans le modèle PMM lors de la génération des données, puis identifions le coefficient ξC_{zm0} , nous observons de meilleurs résultats (figure III.14) avec de très faibles erreurs. Ces observations permettent de conclure que l'effet Magnus influence l'identification du coefficient ξC_{zm0} . Nous identifions donc un coefficient globalisé qui prend en compte l'ensemble des efforts modélisés dans le modèle balistique PMM. Une étude complémentaire, non présentée ici, permet de mettre en évidence l'influence de l'azimut qui augmente ou diminue l'effet Magnus et agit donc sur la qualité des identifications obtenues.

Étant donné que nous déterminons un coefficient globalisé, il est normal que ce dernier soit différent du coefficient de référence ξC_{zm} . La comparaison ne permet donc pas

de quantifier véritablement la qualité du coefficient identifié. Pour étudier si le coefficient déterminé est bien un coefficient globalisé, nous faisons des rejeux des trajectoires en utilisant le coefficient identifié et en intégrant l'équation (III.12). Nous pouvons ainsi comparer les trajectoires rejouées aux trajectoires de référence obtenues avec le modèle balistique PMM où l'ensemble des coefficients sont activés.

4.2 Reconstruction de la trajectoire avec les coefficients identifiés

Nous utilisons pour le rejeu des trajectoires, les deux équations (II.44) issues du modèle à l'ordre zéro, dans les directions du plan de tir $(\underline{i}, \underline{j})$, ainsi que l'équation (III.12) pour le calcul suivant la direction de déviation (\underline{k}) . Dans ces équations, les coefficients identifiés à l'ordre zéro C_{x0} et à l'ordre un ξC_{zm0} sont utilisés. Ces trajectoires sont comparées aux trajectoires de référence issues du PMM. Les écarts ainsi obtenus entre les deux types de trajectoire permettent de conclure quant à la qualité de reconstruction de nos coefficients. Dans les directions du plan de tir, les résultats sont identiques à ceux de la section précédente, nous traçons (figure III.15) uniquement l'évolution de la déviation directement associée au coefficient ξC_{zm0} .

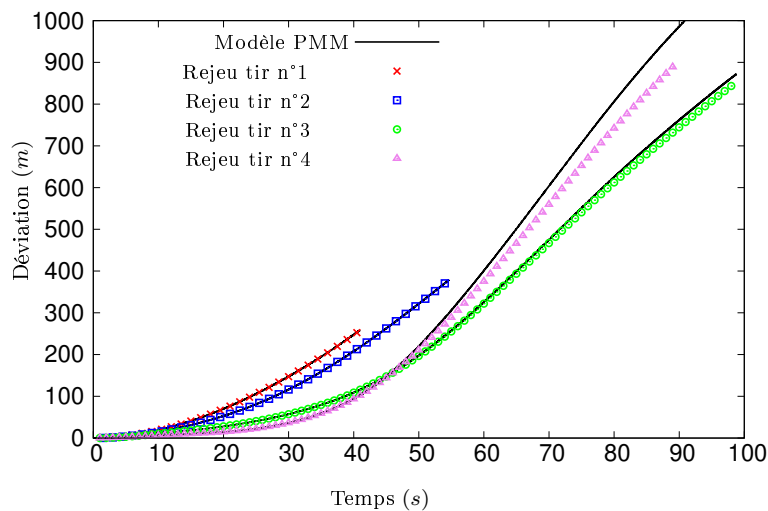


FIGURE III.15 – Comparaison des rejeux de la déviation pour les 4 configurations

| Nom Tir | Erreur absolue (m) | Erreur relative en % |
|---------|--------------------|----------------------|
| Tir n°1 | 2.84 | 1% |
| Tir n°2 | 3.71 | 1% |
| Tir n°3 | 26.46 | 3% |
| Tir n°4 | 98.25 | 10% |

Tableau III.3 – Écarts de déviation au point d'impact pour les 4 configurations

Nous observons que les niveaux d'erreurs sur la position en déviation sont relativement faibles pour les configurations n°1 à n°3. L'erreur est bien plus importante, atteignant les

10%, pour la quatrième configuration. Ces erreurs en déviation sont plus importantes que celles sur la portée et sur l'altitude. Nous observons aussi que les erreurs d'identification faites sur le coefficient, décalage des courbes, induisent de faibles écarts lors des rejeux des trajectoires. Cela démontre le fait que le coefficient identifié est bien un coefficient globalisé, prenant en compte la contribution de l'effet Magnus dans la direction \underline{k} .

Les déviations calculées avec les coefficients identifiés (figure III.15) sont proches des déviations obtenues avec le modèle PMM. Les écarts sur la déviation sont les plus importants pour les deux configurations n°3 et n°4 où les coefficients ξC_{zm0} ont été les moins bien identifiés, conséquence des fortes obliquités. Les écarts en fin de trajectoire, qui sont récapitulés dans le tableau III.3, confirment les observations faites sur le coefficient identifié.

5 Détermination de la contribution $R_1 \xi C_{ypm0}$ liée à l'effet Magnus

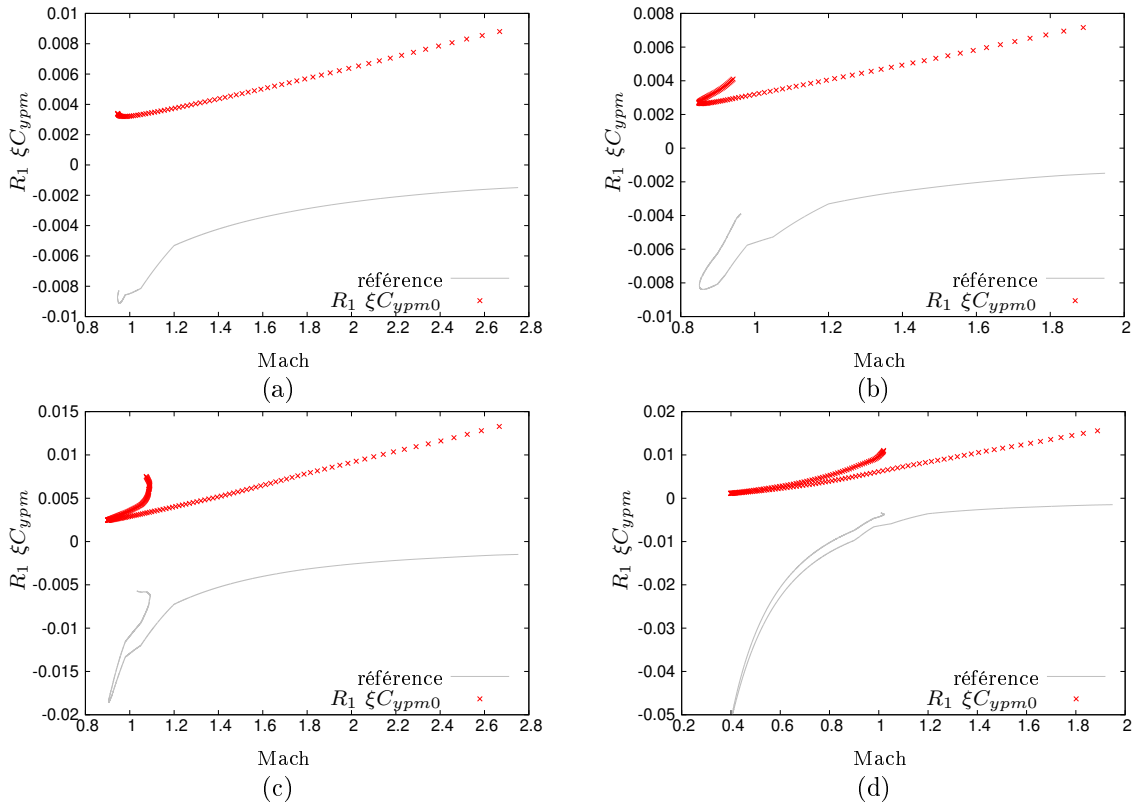


FIGURE III.16 – Identification de la contribution $R_1 \xi C_{ypm0}$ liée à la force de Magnus pour les configurations n°1 (a), n°2 (b), n°3 (c) et n°4 (d)

La combinaison linéaire des équations obtenues à l'ordre un dans les directions du plan de tir (\underline{i} , \underline{j}) permet d'obtenir une expression (III.14) de la contribution ξC_{ypm0} .

$$R_1 \xi C_{ypm0} = -2\xi \frac{\Omega_{T0z}^*}{g^* t_{0x}} \quad (\text{III.14})$$

Ce coefficient lié à la force de Magnus n'est pas très bien identifié et ceux pour l'ensemble des 4 configurations (figure III.16). Les écarts des valeurs identifiées, comparés aux données générées, sont très élevés. Cependant, nous observons que la quantité est petite y compris devant le coefficient identifié précédemment ξC_{zm0} . Cette observation est en corrélation avec le second développement asymptotique proposé considérant le terme en $R_2 \xi^2 C_{ypm0}$ à un ordre supérieur au terme ξC_{zm0} .

Dans le cas de l'utilisation des données générées, nous avons accès à la variation des différents paramètres d'état intervenant dans le terme globalisé $R_1 C_{ypm0}$ ce qui permet le calcul a posteriori du rapport de coefficient aérodynamique $C_{ypm} = \frac{C_{yp\alpha}}{C_{m\alpha}}$ qui intervient dans le modèle PMM. Nous pouvons aussi, toujours en utilisant les données générées remonter au coefficient de Magnus $C_{yp\alpha}$ du modèle PMM (figure III.17). Les observations faites sur la qualité d'identification des termes identifiés $R_1 C_{ypm0}$ se retrouvent sur ces tracés du coefficient $C_{yp\alpha}$.

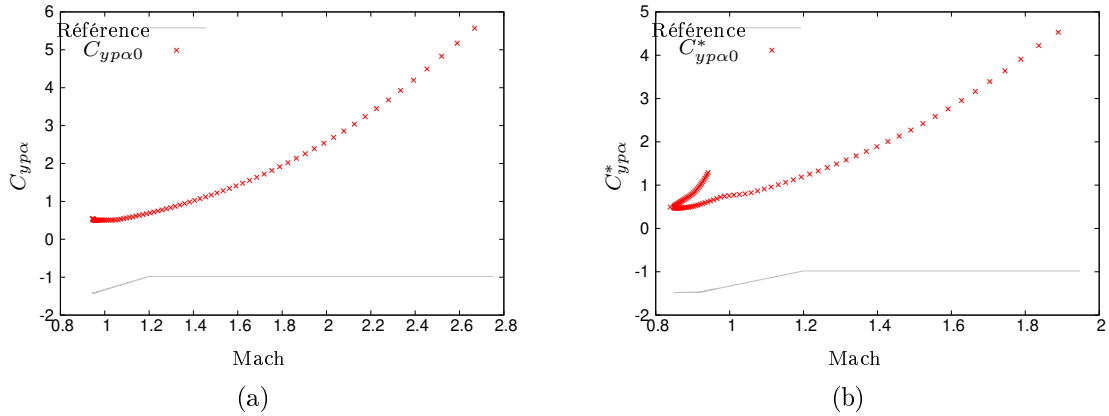


FIGURE III.17 – Identification du coefficient adimensionné $C_{yp\alpha}^*$ associé à la force de Magnus pour les configurations n°1 (a) et n°2 (b)

6 Calcul des termes correctifs provenant du modèle d'ordre deux

Nous appliquons la suite de la procédure en utilisant les relations établies ((II.53), (II.54) et (II.55)) à partir du développement asymptotique jusqu'à l'ordre deux et en tenant compte des hypothèses sur la forme des vitesses et des accélérations. Ces relations permettent ainsi de déterminer, en utilisant les résultats obtenus aux étapes précédentes, une correction du coefficient de traînée à l'ordre deux et des corrections des deux autres coefficients à l'ordre un.

6.1 Correction $\xi^2 C_{x2}$ du coefficient de traînée

La relation (III.15) obtenue au chapitre II donne l'expression du terme correctif C_{x2} du coefficient de traînée intervenant à l'ordre deux en ξ .

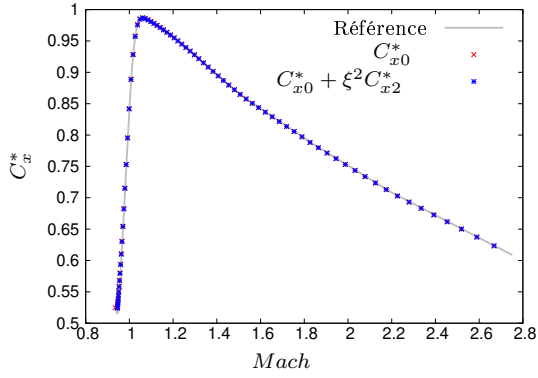
$$\xi^2 C_{x2} = -\xi t_{1z} \left[\xi C_{zm0} t_{0x} g^* + 2(t_{0x} \xi \Omega_{T0y}^* - t_{0y} \xi \Omega_{T0x}^*) \right] \quad (\text{III.15})$$

En additionnant $\xi^2 C_{x2}$ à la contribution C_{x0} provenant de l'ordre zéro, nous obtenons une nouvelle estimation du coefficient de traînée C_x . Les évolutions de ce coefficient sont données (figures III.18a à III.18d) pour les 4 configurations de tir.

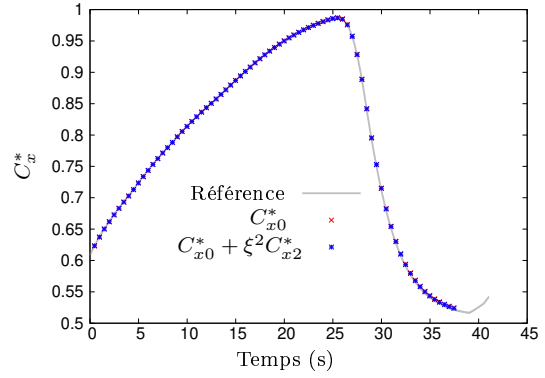
La contribution C_{x2} à l'ordre deux du coefficient de traînée permet de corriger le coefficient identifié dans la zone des nombres de Mach faibles, zone où l'erreur entre la référence et le C_{x0} est la plus grande. Cependant, la correction est très faible en début de trajectoire lorsque le paramètre adimensionnel est faible. Nous traçons l'évolution temporelle (figure III.18e à III.18h) afin de mieux visualiser les fenêtres temporelles où les identifications sont améliorées. Les corrections de ce coefficient sont les plus importantes dans les fenêtres autour de l'apogée, en particulier pour les configurations de tir 3 et 4 qui induisent une obliquité plus importante et de fait une valeur du paramètre adimensionnel ξ plus importante dépassant la valeur seuil 0.1.

Un autre constat que nous faisons est l'amélioration du coefficient aérodynamique dans la seconde partie du vol lorsque ce dernier a passé l'apogée et lorsque le nombre de Mach atteint son minimum avant de ré-augmenter lors de la retombée du projectile. Cette étape permet donc bien une correction du coefficient de traînée. Néanmoins, au vu des faibles taux d'erreurs faits lors de l'identification en premier lieu C_{x0} , ce type de correction est peu utile dans le cas des configurations induisant un paramètre adimensionnel relativement faible (figures III.18e) et (III.18f). A l'inverse, la correction C_{x2} est très utile pour des tirs présentant une forte obliquité et pour lesquels le développement asymptotique que nous faisons atteint ses limites.

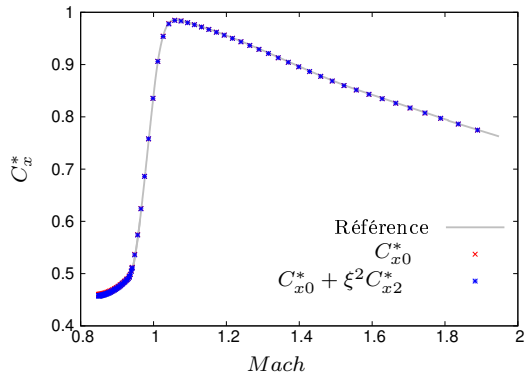
A partir de ce coefficient de traînée identifié $C_{x0} + \xi^2 C_{x2}$ qui améliore l'estimation du C_x , nous effectuons un recalcul de la trajectoire dans les directions du plan de tir ($\underline{i}, \underline{j}$) avec les équations (II.43). Les tracés étant très proches entre eux, nous complétons les tableaux des erreurs en altitude (tableau III.4 au niveau de l'apogée) et en portée (tableau III.5 au point d'impact). Les corrections du coefficient de traînée impactent peu les trajectoires des configurations n°1 et n°2 avec des erreurs similaires à celles précédemment obtenues aux deux instants clés. Pour la configuration n°3, la trajectoire recalculée se rapproche de la référence avec une légère diminution de l'erreur. En revanche, la correction du coefficient sur la dernière configuration augmente l'erreur sur la portée au point d'impact.



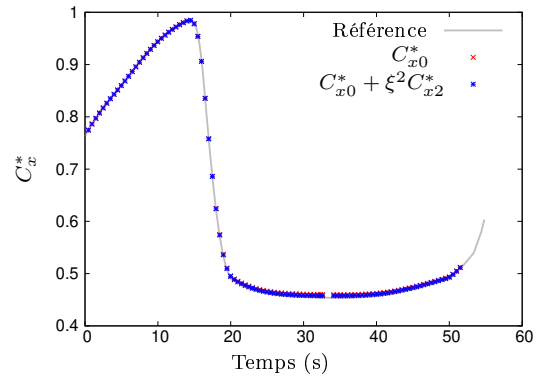
(a) Configuration n°1



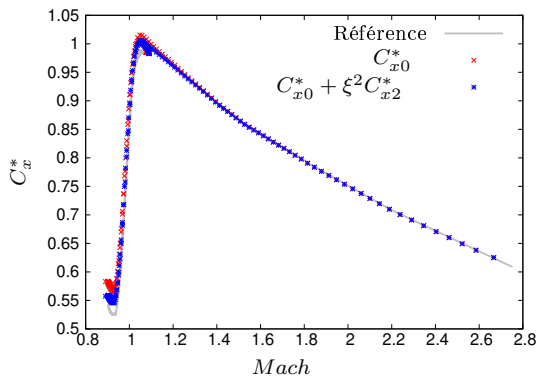
(e) Configuration n°1



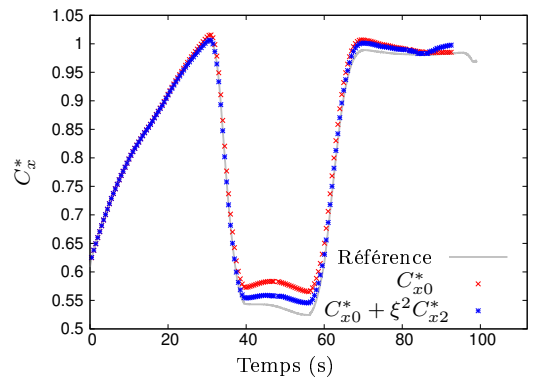
(b) Configuration n°2



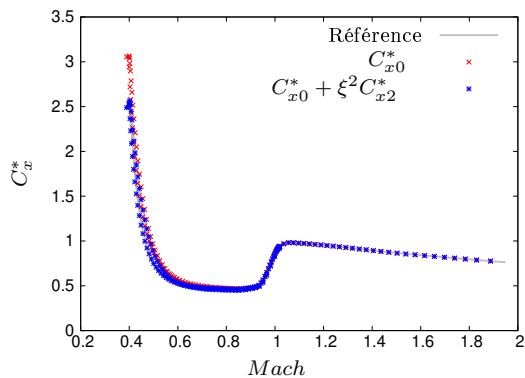
(f) Configuration n°2



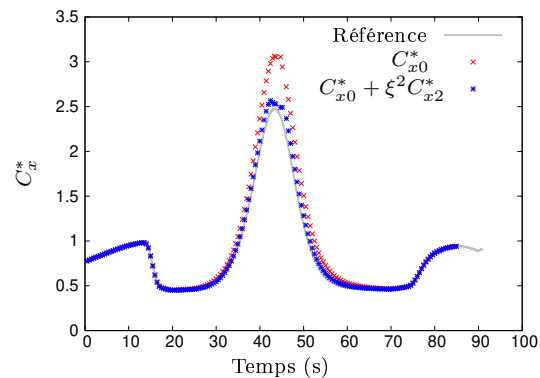
(c) Configuration n°3



(g) Configuration n°3



(d) Configuration n°4



(h) Configuration n°4

FIGURE III.18 – Évolutions en fonction du nombre de Mach et temporelles des coefficients identifiés pour les 4 configurations de tir

| Nom Tir | Recalcul avec C_{x0} | | Recalcul avec $C_{x0} + \xi^2 C_{x2}$ | |
|---------|------------------------|----------------------|---------------------------------------|----------------------|
| | Erreur absolue | Erreur relative | Erreur absolue | Erreur relative |
| | m | % | m | % |
| Tir n°1 | 5.39 | $2.53 \cdot 10^{-1}$ | 5.61 | $2.64 \cdot 10^{-1}$ |
| Tir n°2 | 10.78 | $2.81 \cdot 10^{-1}$ | 10.96 | $2.85 \cdot 10^{-1}$ |
| Tir n°3 | 46.18 | $3.93 \cdot 10^{-1}$ | 44.29 | $3.77 \cdot 10^{-1}$ |
| Tir n°4 | 40.80 | $4.10 \cdot 10^{-1}$ | 35.90 | $3.60 \cdot 10^{-1}$ |

Tableau III.4 – Données PMM : écarts d'altitude à l'apogée après correction du coefficient C_x

| Nom Tir | Avec C_{x0} | | Avec $C_{x0} + \xi^2 C_{x2}$ | |
|---------|----------------|----------------------|------------------------------|----------------------|
| | Erreur absolue | Erreur relative | Erreur absolue | Erreur relative |
| | m | % | m | % |
| Tir n°1 | 64.61 | $3.41 \cdot 10^{-1}$ | 66.05 | $3.49 \cdot 10^{-1}$ |
| Tir n°2 | 81.10 | $4.65 \cdot 10^{-1}$ | 77.44 | $4.44 \cdot 10^{-1}$ |
| Tir n°3 | 214.99 | $7.48 \cdot 10^{-1}$ | 162.85 | $5.66 \cdot 10^{-1}$ |
| Tir n°4 | 102.74 | $7.70 \cdot 10^{-1}$ | 220.13 | $16.5 \cdot 10^{-1}$ |

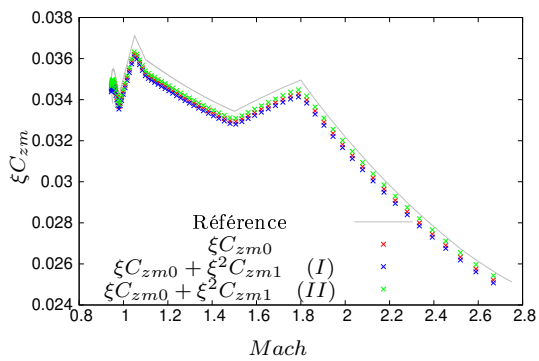
Tableau III.5 – Données PMM : écarts de portée au point d'impact après correction du coefficient C_x

6.2 Correction $\xi^2 C_{zm1}$

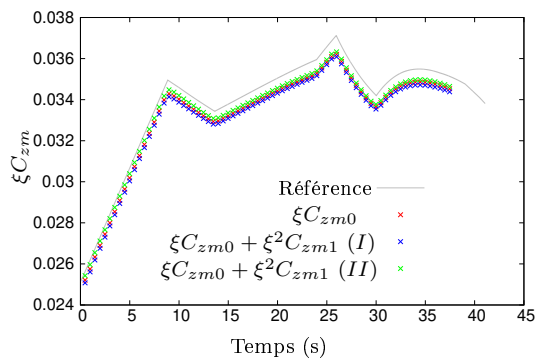
Nous poursuivons les étapes du processus avec le calcul de la correction du terme $\xi^2 C_{zm1}$ en utilisant la relation II.54 établie au chapitre II (noté (I) sur les graphiques). Une autre estimation de cette correction (noté (II) sur les graphiques) est aussi réalisée en utilisant l'expression (II.56) obtenue en supposant que la contribution de l'effet de Magnus est à l'ordre deux en ξ . Ces deux estimations sont basées sur des hypothèses fortes concernant la forme des développements asymptotiques de la vitesse (II.39) et de l'accélération (II.40).

Les corrections de ce coefficient ne permettent pas d'améliorer les identifications obtenues à l'étape précédente (figure III.19). Nous observons au contraire un décalage par rapport à la courbe de référence qui augmente pour le premier développement (I). La contribution à l'ordre un, issue du second développement (II), a un effet correctif sur le terme ξC_{zm} en diminuant, très faiblement, l'écart à la courbe de référence. Ces constatations sont d'autant plus visibles sur les tracés de l'évolution temporelle (figures III.19e, III.19f, III.19g et III.19h).

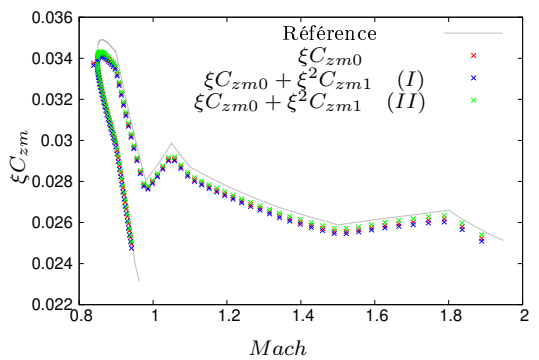
Nous regardons l'effet de cette erreur d'identification en traçant le coefficient de portance adimensionné C_z^* (figure III.20) à partir des coefficients identifiés ξC_{zm} jusqu'à l'ordre un.



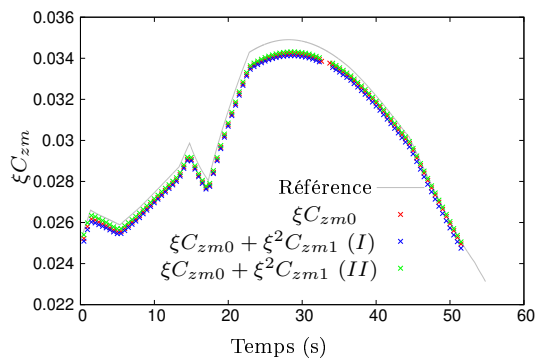
(a) Configuration n°1



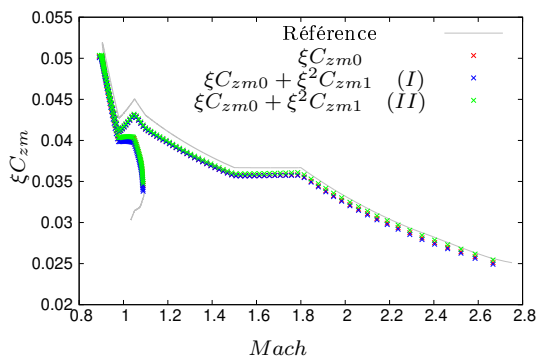
(e) Configuration n°1



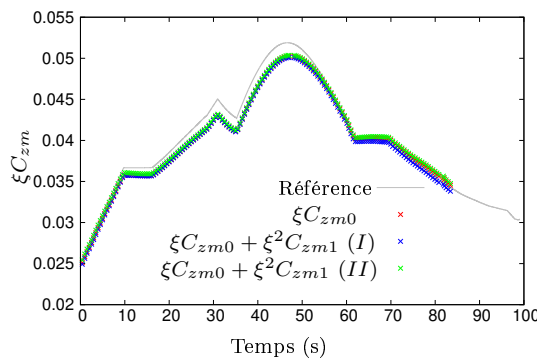
(b) Configuration n°2



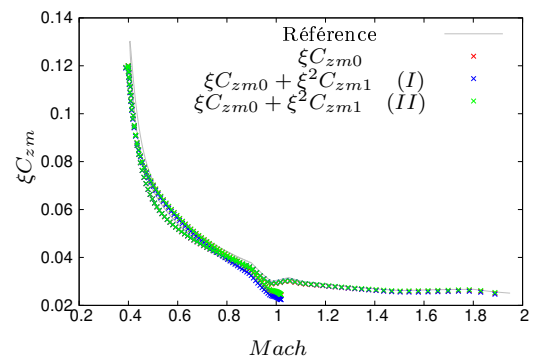
(f) Configuration n°2



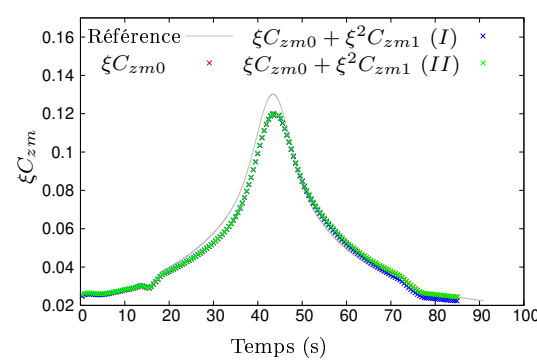
(c) Configuration n°3



(g) Configuration n°3



(d) Configuration n°4



(h) Configuration n°4

FIGURE III.19 – Évolutions en fonction du nombre de Mach et temporelles du coefficient ξC_{zm} avec les expressions issues des deux développements (I) et (II) pour les 4 configurations de tir

Les contributions à l'ordre un, obtenues par l'un ou l'autre développement, ne parviennent pas à corriger la première estimation du coefficient. La partie post-apogée pour les configurations n°3 et n°4, zones les plus mal identifiées à l'ordre zéro, ne sont pas corrigées. Le décalage régulier à la référence, est probablement dû en partie à une contribution de l'effet Magnus qui est globalisée dans la contribution $\xi C_{z\alpha 0}$.

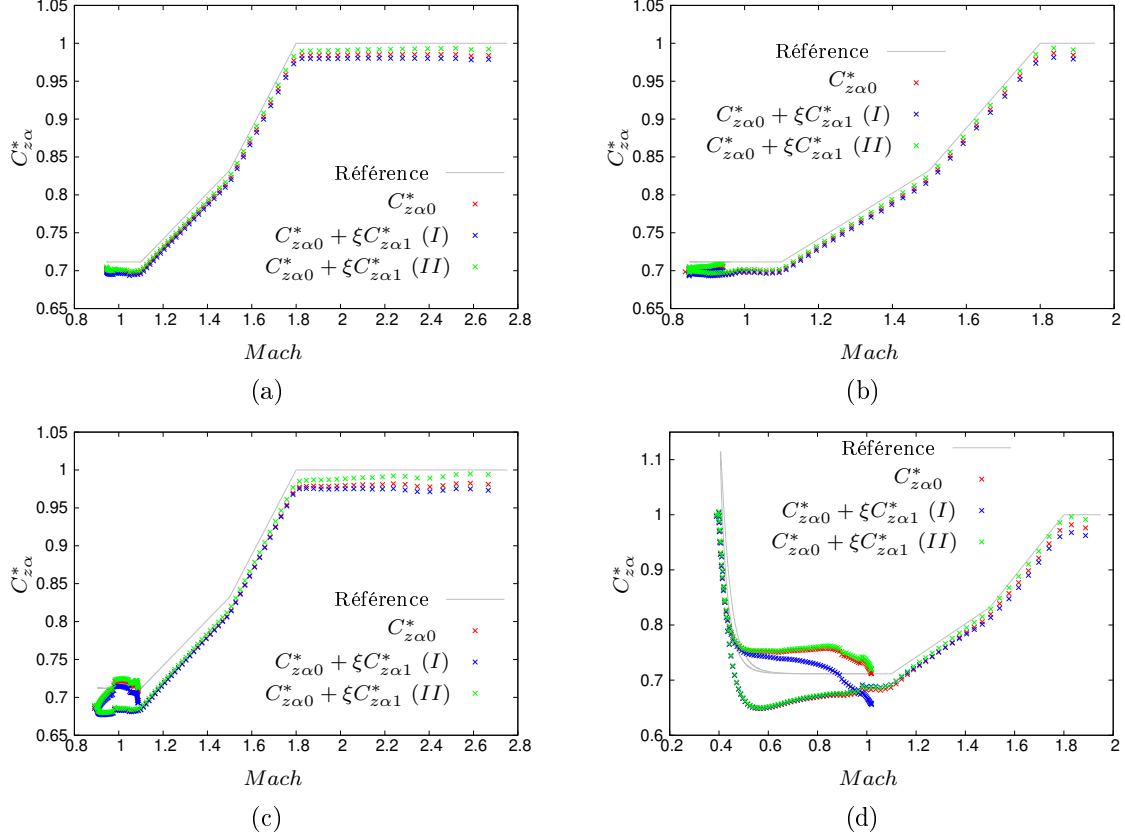


FIGURE III.20 – Reconstructions du coefficient adimensionné $C_{z\alpha}$ pour les configurations n°1 (a), n°2 (b), n°3 (c) et n°4 (d)

6.3 Contribution $\xi^2 C_{ypm1}$

Nous poursuivons l'identification des coefficients en corrigeant le coefficients identifié $R_1 \xi C_{ypm0}$ à l'aide de la contribution à l'ordre deux donnée par l'équation (II.55). Le terme obtenu $R_1(\xi C_{ypm0} + \xi^2 C_{ypm1})$ est aussi comparé à $R_2 \xi^2 C_{ypm0}$ obtenu avec le second développement (équation II.57).

Nous observons que la correction n'améliore pas l'identification (figure III.21). Elle crée un décalage supplémentaire sur la première partie du vol et une forte perturbation autour de l'apogée. L'identification obtenue avec le second développement est aussi de mauvaise qualité. Cependant, cette seconde identification semble mieux reconstruire le coefficient lors de la première partie du vol avec un écart à la référence plus faible que le coefficient corrigé avec le premier développement.

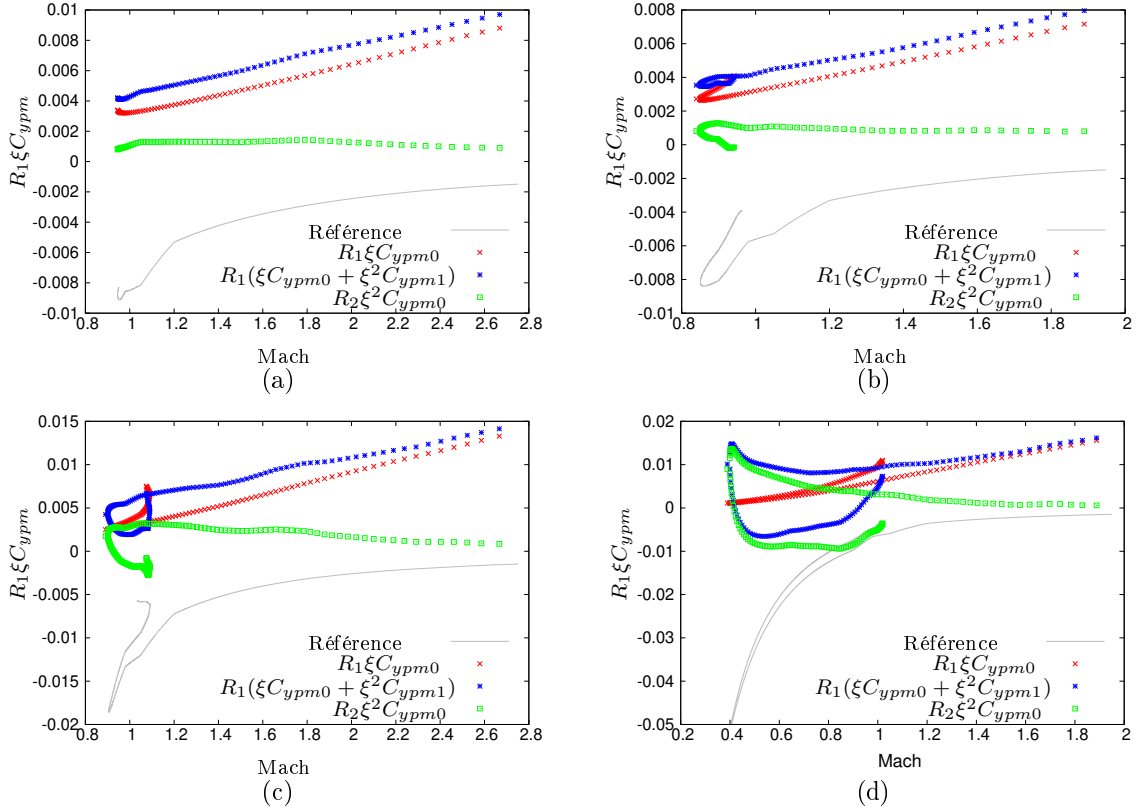


FIGURE III.21 – Identification de la contribution liée à la force de Magnus pour les configurations n°1 (a), n°2 (b), n°3 (c) et n°4 (d)

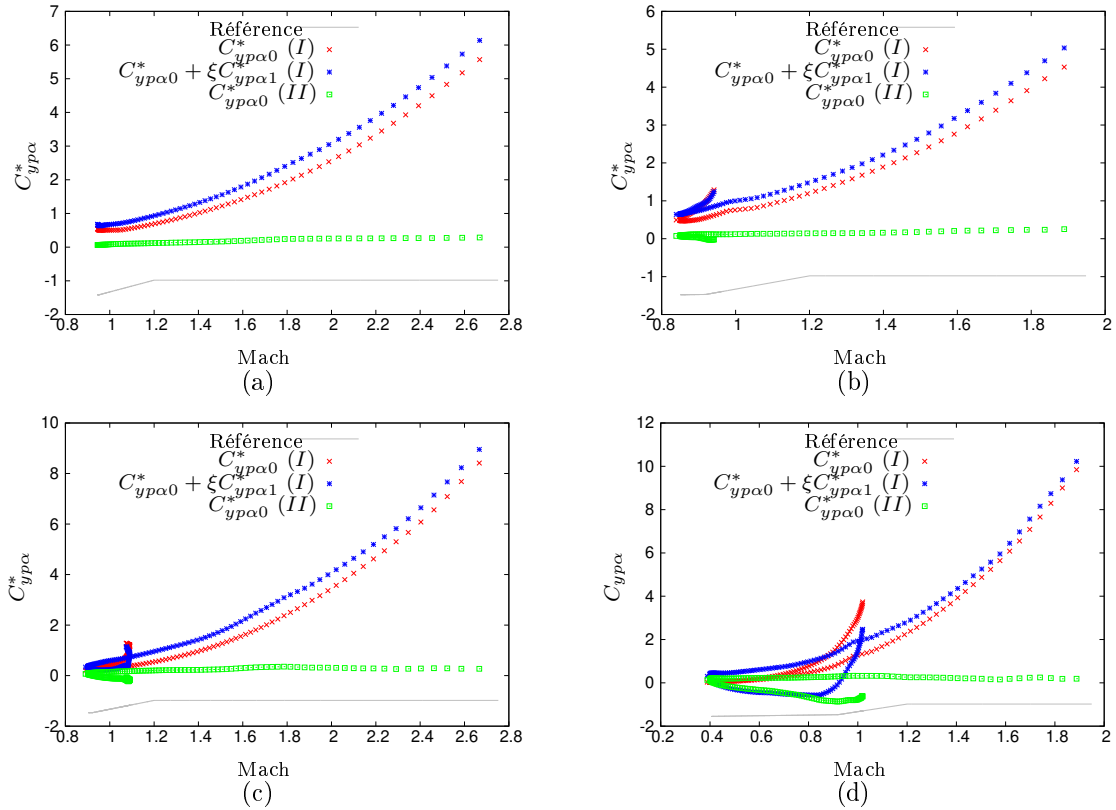


FIGURE III.22 – Identification du coefficient $C_{yp\alpha}^*$ associé à la force de Magnus pour les configurations n°1 (a), n°2 (b), n°3 (c) et n°4 (d)

L'identification du coefficient $C_{yp\alpha 0}$ (figure III.22) est difficile du fait de sa faible intensité en comparaison des autres. La procédure étant séquentielle, de faibles erreurs sur les coefficients identifiés lors des étapes précédentes vont accentuer la difficulté à reconstruire ce coefficient. Les résultats d'identification de ce coefficient à partir de données générées non bruitées ne sont pas encourageants pour une application de cette identification sur des données radar.

6.4 Synthèse de la procédure d'identification séquentielle des coefficients

Dans le domaine de la balistique, les coefficients aérodynamiques sont définis en fonction du nombre de Mach. Toutefois, des tracés des évolutions temporelles des coefficients nous permettent de relier l'évolution du paramètre adimensionnel aux qualités des identifications. Afin d'effectuer une synthèse de ces identifications, nous traçons ces évolutions temporelles, pour les 4 configurations, les coefficients aérodynamiques ainsi que le paramètre adimensionnel ξ .

Pour les configurations n°1 (figure III.23) et n°2 (figure III.24), où le paramètre adimensionnel reste inférieur à 0.1, l'identification de C_x dès l'étape zéro est très précise et nous avons une bonne reconstruction du coefficient $C_{z\alpha 0}$ dès l'étape une. Nous pouvons faire le même constat, avec les configurations n°3 (figure III.25) et n°4 (figure III.26) en début et en fin de vol lorsque le paramètre ξ reste inférieur à 0.1.

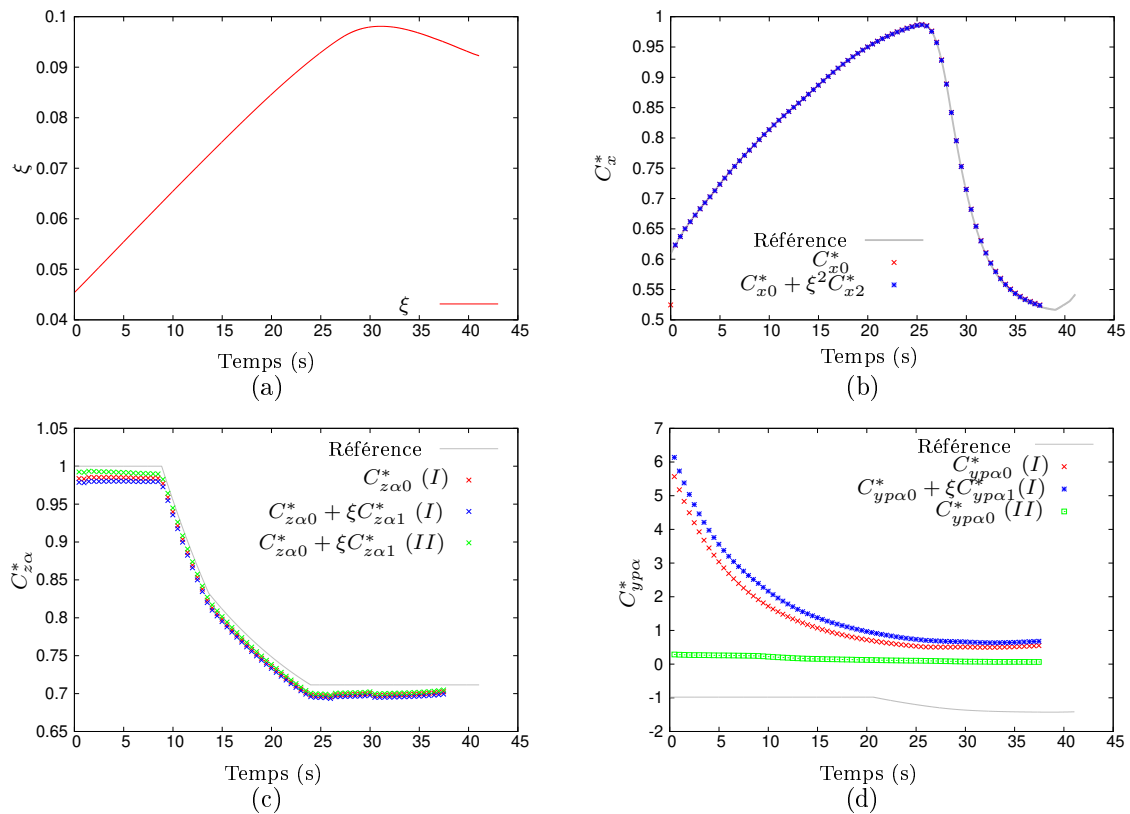


FIGURE III.23 – Synthèse pour la configuration n°1

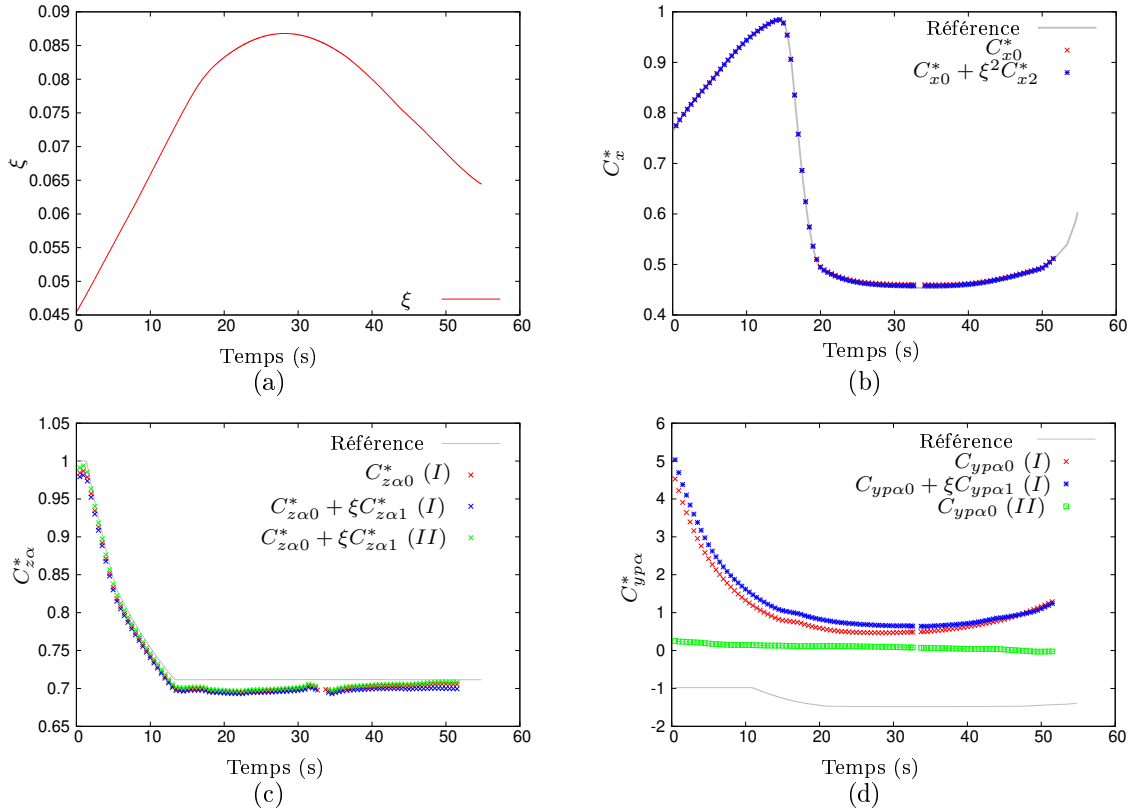


FIGURE III.24 – Synthèse pour la configuration n°2

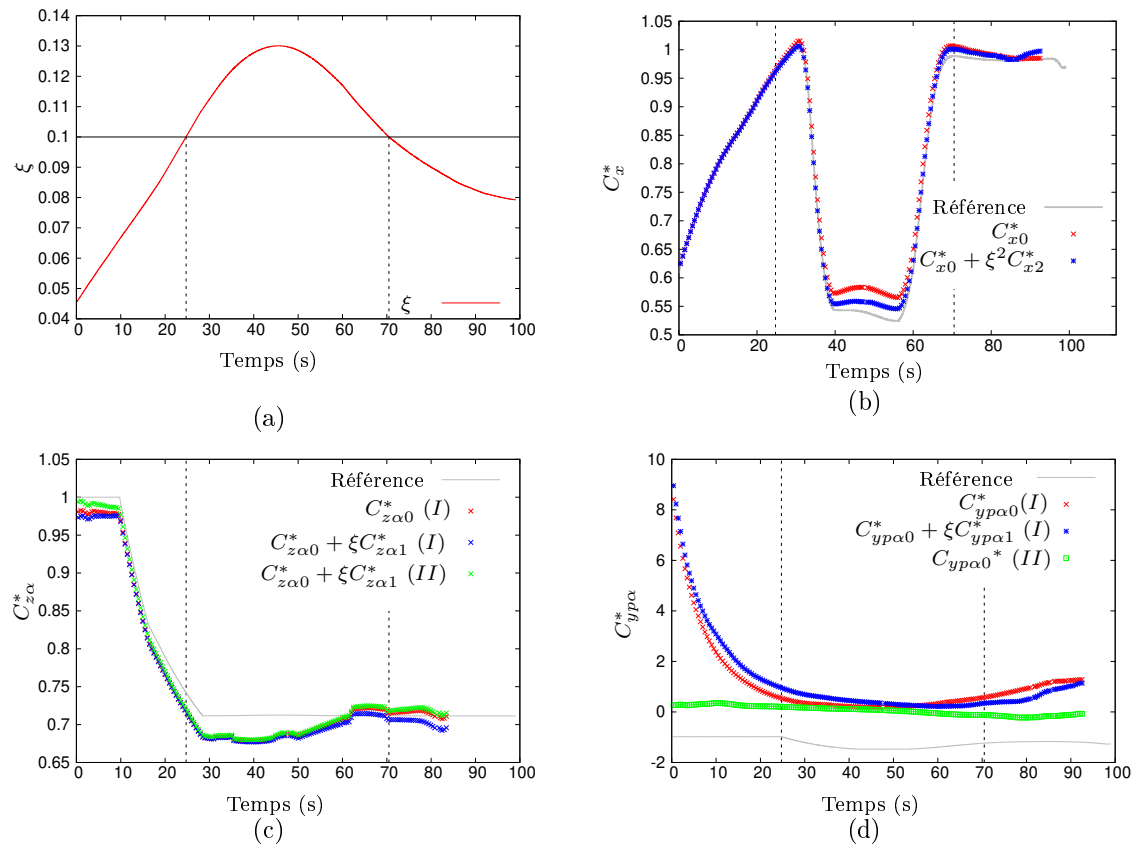


FIGURE III.25 – Synthèse pour la configuration n°3

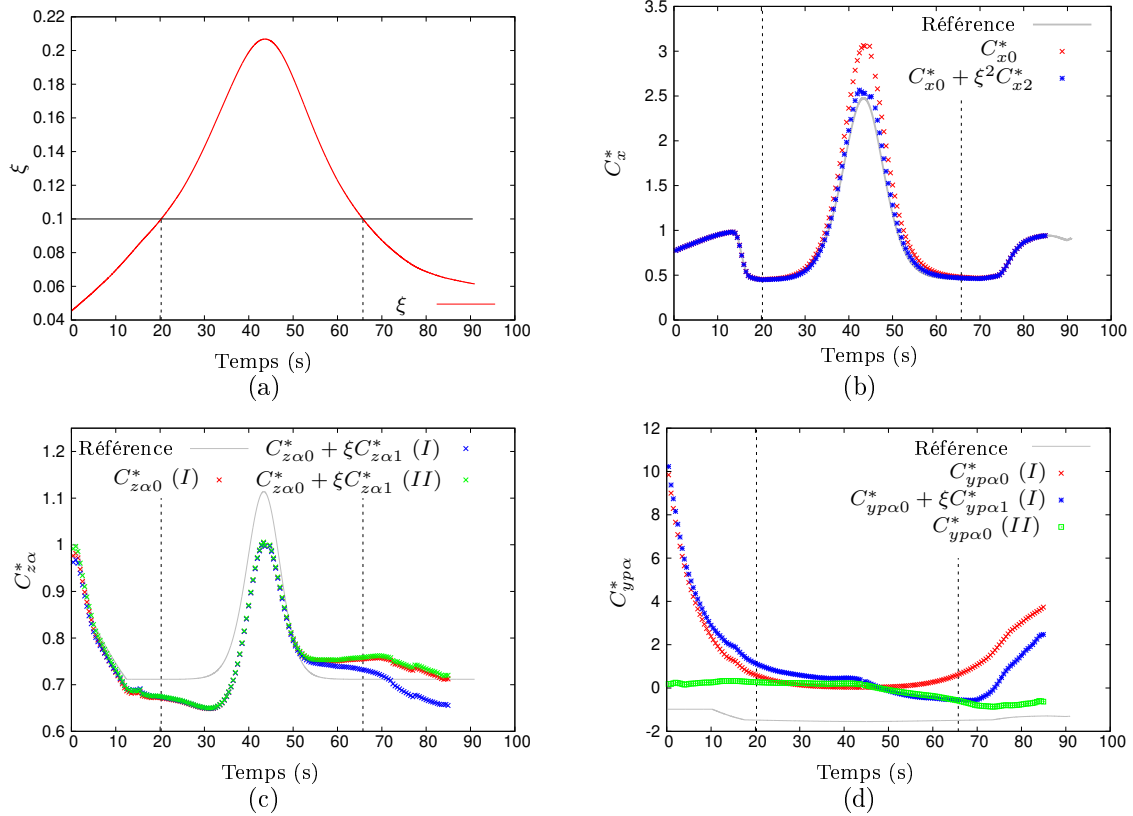


FIGURE III.26 – Synthèse pour la configuration n°4

A l'inverse, pour ces deux dernières configurations, durant la fenêtre temporelle autour de l'apogée, où le paramètre est supérieur à 0.1, l'identification à l'ordre zéro n'est pas très précise. Etant donné que la procédure est séquentielle, cette imprécision sur le C_x se reporte sur l'identification du $C_{z\alpha 0}$ créant ainsi une erreur. La mauvaise identification du C_x à l'ordre zéro est en grande partie corrigée avec la correction C_{x2} à l'ordre deux. L'identification du coefficient $C_{y\rho\alpha 0}$ est fortement impactée par les accumulations des erreurs du fait de sa très faible intensité.

Bilan

Ce chapitre a permis d'appliquer le processus d'identification séquentielle des coefficients aérodynamiques à partir de données synthétiques. Cette étape a permis d'évaluer la qualité du processus lors de l'utilisation de données non bruitées. La validation s'est faite par étapes. Après identification des coefficients, nous avons effectué des rejeux de trajectoire à l'aide des modèles balistiques intermédiaires et en utilisant les coefficients identifiés.

Dans un premier temps, nous avons montré que l'identification du coefficient d'amortissement en roulis C_{lp} ne pose aucune difficulté à partir de l'équation différentielle du modèle PMM qui régit l'évolution de ω_c .

Dans un second temps, nous avons identifié le coefficient de traînée qui est le plus influent en utilisant le modèle obtenu à l'ordre zéro. Lors de cette identification, nous

avons effectué une étude des influences des différents paramètres qui sont utilisés dans le code de calculs à partir de données générées par le modèle PMC. Ce travail a permis de déterminer les paramètres numériques donnant les meilleurs résultats d'identification en analysant les erreurs aussi bien sur le coefficient aérodynamique de traînée C_x que sur les vitesses recalculées.

La validation de l'identification du coefficient de traînée à l'ordre zéro s'est poursuivie avec des données générées par le modèle PMM pour différentes configurations de tirs où le paramètre adimensionnel respectait ou non le seuil fixé. Les résultats d'identification de cette contribution C_{x0} montrent une très bonne estimation du coefficient de traînée lorsque le paramètre adimensionnel reste en dessous du seuil de 0.1.

Nous avons poursuivi, l'identification des coefficients avec les équations obtenues à l'ordre un du développement asymptotique. Nous avons constaté que le coefficient ξC_{zm0} identifié est un coefficient globalisé qui prend en compte une partie de l'effet Magnus créant un léger décalage de l'identification par rapport à la valeur de référence. Nous avons aussi pu observer une relativement bonne approximation de ce coefficient dans les zones où $\xi < 0.1$ qui permet une bonne reconstruction de la trajectoire dans la direction de déviation \underline{k} . L'identification du dernier coefficient aérodynamique, $C_{yp\alpha}$, intervenant dans le modèle PMM n'est pas concluante.

Enfin, la troisième étape de la procédure utilisant le développement jusqu'à l'ordre deux a permis une correction significative du coefficient de traînée.

Les deux développements asymptotiques permettent d'obtenir deux corrections du coefficient associé à la portance (ξC_{zm0}) et deux identifications du coefficient associé à l'effet Magnus ($R_1 \xi C_{ypm0}$ et $R_2 \xi^2 C_{ypm0}$). Parmi ces deux développements, il apparaît difficile de déterminer lequel est le meilleur. En effet, les deux corrections à l'ordre un sont très proches, sans pour autant effectuer une réelle correction, et les identifications du dernier coefficient, du fait de sa faible intensité, ne sont pas concluantes.

Chapitre IV

Applications de la procédure d'identification à des données de tir enregistrées par un radar de trajectographie

Sommaire

| | |
|---|------------|
| Introduction | 94 |
| 1 Identification du coefficient d'amortissement en roulis C_{lp} | 94 |
| 2 Procédure de prétraitement des données radar pour estimer les vitesses cartésiennes | 96 |
| 2.1 Mesures météorologiques disponibles | 96 |
| 2.2 Mesures radar disponibles | 96 |
| 2.3 Détermination des conditions initiales du tir | 98 |
| 2.4 Estimation des vitesses cartésiennes à partir de mesures de position | 100 |
| 2.5 Analyse de la précision des vitesses estimées | 102 |
| 3 Application de la procédure séquentielle d'identification des coefficients pour un vol de référence | 106 |
| 3.1 Identification du C_{x0} | 106 |
| 3.2 Identification de la contribution ξC_{zm0} | 110 |
| 4 Identification de la contribution C_{x0} pour d'autres configurations et d'autres projectiles | 113 |
| 4.1 Applications à trois tirs de la même campagne de tirs | 113 |
| 4.2 Applications à trois tirs d'un projectile ayant une forte vitesse initiale | 115 |
| 4.3 Applications à deux tirs d'un projectile base-bleed | 116 |
| 4.4 Applications à huit tirs d'un projectile de petit calibre | 117 |
| Bilan | 118 |

Introduction

Nous exploitons, dans ce chapitre, des données expérimentales fournies par la Direction Générale de l'Armement Techniques Terrestres et provenant de tirs réalisés pour des projectiles de différents calibres déjà qualifiés. L'ensemble des tirs inclut différentes conditions initiales et différents projectiles.

Ce chapitre détaille l'application de la procédure séquentielle en utilisant des données radar. Nous nous limitons aux deux premières étapes du processus validées lors de l'utilisation de données générées. Les données radar brutes ne sont pas directement exploitables, nous devons donc adapter la procédure. Le prétraitement des données est détaillé dans le cas d'un projectile gyro-stabilisé, ayant un calibre largement utilisé, et dont la configuration de tir permet le respect du domaine de validité du développement asymptotique sur l'intégralité de son vol. Les conditions initiales sont donc une faible hausse et une vitesse initiale moyenne permettant d'avoir une évolution temporelle du paramètre adimensionnel constamment en dessous de 0.1.

En amont, nous montrons qu'il est possible d'identifier le coefficient d'amortissement en roulis à condition d'être en possession de mesures complémentaires provenant d'une instrumentation non standard.

Dans un second temps, nous détaillons l'intégralité de la procédure sur un vol de référence, nous présentons les données météorologiques ainsi que les différentes données brutes provenant du radar de trajectographie utilisé par la DGA Techniques Terrestres. Une analyse qualitative de ces dernières est menée à partir de leurs évolutions temporelles. Notre procédure d'identification nécessite comme données d'entrée les vitesses cartésiennes, non fournies par le radar, que nous obtenons par un prétraitement des données de positions radar. Ceci nous amène à faire une étude d'influence des différents paramètres numériques utilisés au cours de ce prétraitement. Nous appliquons ensuite les différentes étapes de la procédure d'identification séquentielle. La première étape permet une première estimation du coefficient de traînée où nous étudions l'influence des paramètres de prétraitement. Nous comparons ainsi les reconstructions obtenues aux vitesses d'entrée estimées et aux positions données par le radar. Ensuite, nous poursuivons la procédure avec l'identification du second paramètre tout en analysant l'impact des paramètres de prétraitement sur les résultats de cette étape.

Finalement, nous présentons, afin de montrer que la technique est utilisable pour d'autres projectiles, des identifications du coefficient de traînée avec la première étape de la procédure pour différents calibres et des conditions initiales variables.

1 Identification du coefficient d'amortissement en roulis C_{lp}

Cette section déroge légèrement à la volonté initiale d'utiliser uniquement les données de mesures radar classique. En effet, recueillir la variation de la vitesse de rotation ω_c du projectile autour de son axe longitudinal nécessite des modifications du culot et une

instrumentation spécifique, présentée au chapitre I (section 3.2), qui ne peut pas être mise en place de manière standard sur chaque tir.

Par conséquent, le nombre de tirs instrumentés permettant l'identification du coefficient d'amortissement en roulis est limité. Ce coefficient aérodynamique n'intervient que dans l'équation (IV.1).

$$\dot{\omega}_c = \frac{\pi \rho D^4 v \omega_c C_{lp}}{8I_1} \quad (\text{IV.1})$$

L'équation (IV.1) est donc la contrainte égalité à respecter dans le problème d'optimisation où la fonction objectif J est :

$$J = \int_t (\omega_c - \tilde{\omega}_c)^2 dt \quad (\text{IV.2})$$

où $\tilde{\omega}_c$ représente les mesures de la vitesse de rotation ω_c .

Les données brutes sont données pour deux tirs de la campagne (figure IV.1). Nous pouvons constater que le bruit de mesure le plus important est en fin de trajectoire et nous excluons donc cette partie de trajectoire pour l'identification du coefficient C_{lp} . Lors de l'identification, plusieurs paramètres de calcul (fenêtre temporelle, ordre du schéma d'intégration,...) ont été testés afin d'étudier leur influence. Cette étude d'influence n'est pas présentée mais la conclusion principale que nous en tirons est que la taille de fenêtre temporelle doit être suffisamment grande (4s minimum) dans le cas de données réelles pour limiter les effets du bruit de mesure sur les résultats d'identification, alors que cette taille n'affecte pas ou très peu l'identification lors de données générées.

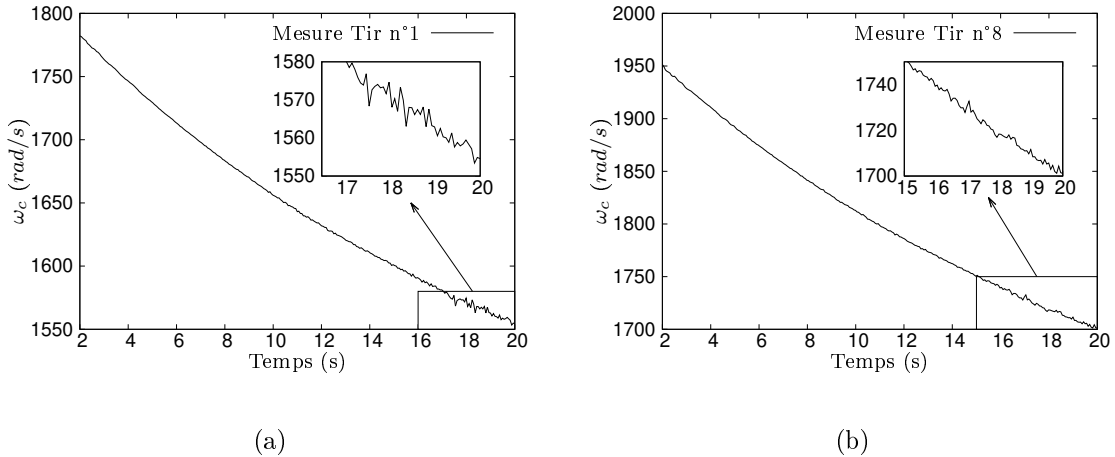


FIGURE IV.1 – Mesure radar de la vitesse de rotation du projectile ω_c pour deux tirs (tir n°1 (a) et tir n°8 (b))

Les mesures de ω_c nous ont été fournies pour une dizaine de tirs. Aucune valeur de référence du coefficient n'est actuellement disponible pour ces tirs mais une comparaison des identifications entre-elles est cependant possible. Toutefois, l'évolution en fonction du nombre de Mach est conforme avec les références d'autres projectiles ayant le même calibre.

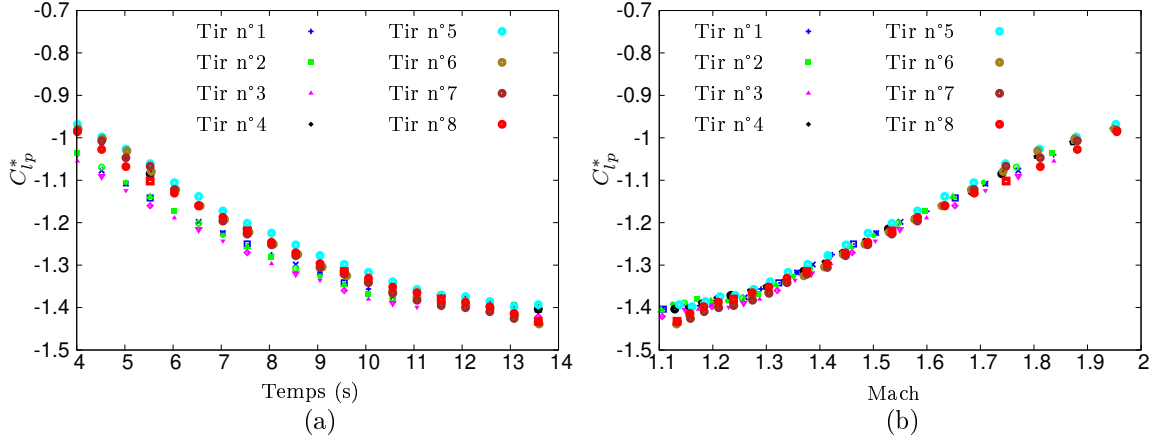


FIGURE IV.2 – Identification du coefficient d'amortissement en roulis C_{lp}^* pour 8 essais sur champ de tir

Les identifications, tracées en fonction du temps, pour l'ensemble des coups sont synthétisées sur la figure IV.2a. Les évolutions en fonction du nombre de Mach (figure IV.2b) semblent bien reproduites (par rapport aux références d'autres projectiles de calibre similaires) sur l'ensemble de la trajectoire. Ces travaux montrent qu'il est possible de déterminer le coefficient d'amortissement en roulis C_{lp} à partir des mesures fournies par nos partenaires.

2 Procédure de prétraitement des données radar pour estimer les vitesses cartésiennes

2.1 Mesures météorologiques disponibles

Le projectile gyrostabilisé atteint des altitudes importantes, ce qui rend nécessaire la prise en compte des variations des paramètres météorologiques au cours du vol. Nous traçons (figure IV.3) les profils utilisés pour chaque paramètre aérologique : la température T , la pression atmosphérique P et les composantes du vent (w_x et w_z) en fonction de l'altitude. Ces graphiques correspondent aux données relatives à un tir avec une élévation moyenne du canon et une vitesse initiale moyenne de tir. Les données ont été recueillies par un ballon sonde lâché à la verticale du canon, qui dérive librement en fonction du vent.

Les évolutions de la température et de la pression atmosphérique sont linéaires par morceaux et sont obtenues à partir de quelques mesures et d'une loi d'évolution supposée. Le vent a des composantes qui varient fortement, notamment la composante transverse w_z suivant \underline{k} (figure IV.3d).

2.2 Mesures radar disponibles

Le radar utilisé est un radar de type Doppler. Il permet la mesure de quatre paramètres : la vitesse d'éloignement radiale du projectile V_r , la position radiale r , l'angle de

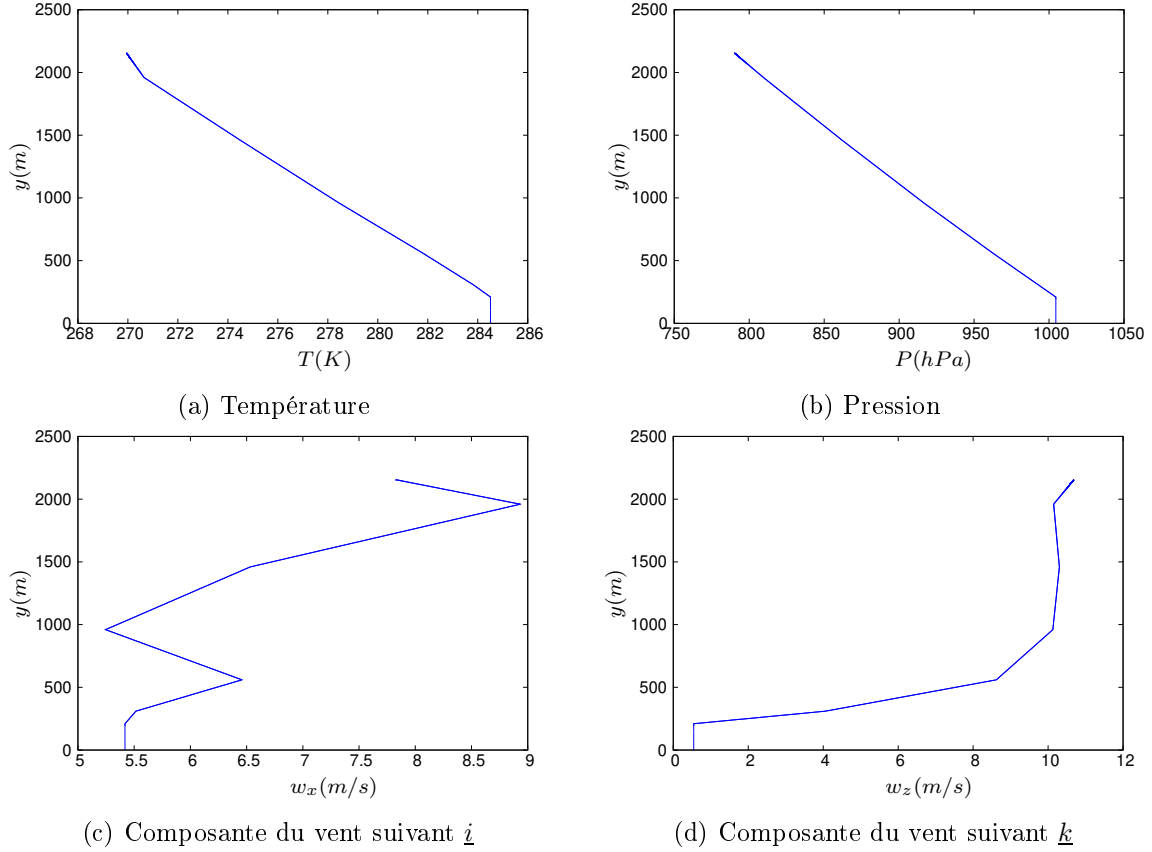


FIGURE IV.3 – Évolution en altitude des données météorologiques

gisement η et l'angle de site θ du projectile. Un exemple de mesures fournies par le radar de trajectographie est donné sur la figure IV.4. Nous devons aussi prendre en considération la position $(x_{\text{radar}}, y_{\text{radar}}, z_{\text{radar}})$ et l'orientation du radar par rapport à la position du canon ($\gamma_r = \widehat{i_{\text{radar}}, i_{\text{canon}}}$).

La forme de la vitesse radiale en début de trajectoire (figure IV.4a) est due à la différence de position entre le radar et le canon. En effet, si elles étaient confondues, nous aurions eu une courbe purement décroissante comme le montre V. Condaminet [17]. Les bruits sur les mesures de vitesse radiale et de distance radiale sont peu visibles sur les figures IV.4a et IV.4b. Cependant, lorsque nous examinons les mesures angulaires (figures IV.4c et IV.4d), exprimées en millièmes d'artillerie, nous observons que certaines plages temporelles présentent des bruits plus importants avec de fortes oscillations. Ces zones, localisées dans la première partie du vol (avant 20s), font l'objet d'un zoom sur les figures IV.4c et IV.4d.

A partir des paramètres (r, η, θ) , relevés par le radar, il est possible, par simple changement de repère, de déterminer les positions cartésiennes du projectile en utilisant les relations suivantes qui sont données dans le cas où l'orientation du radar est la même que celle du canon ($\gamma_r = 0$) :

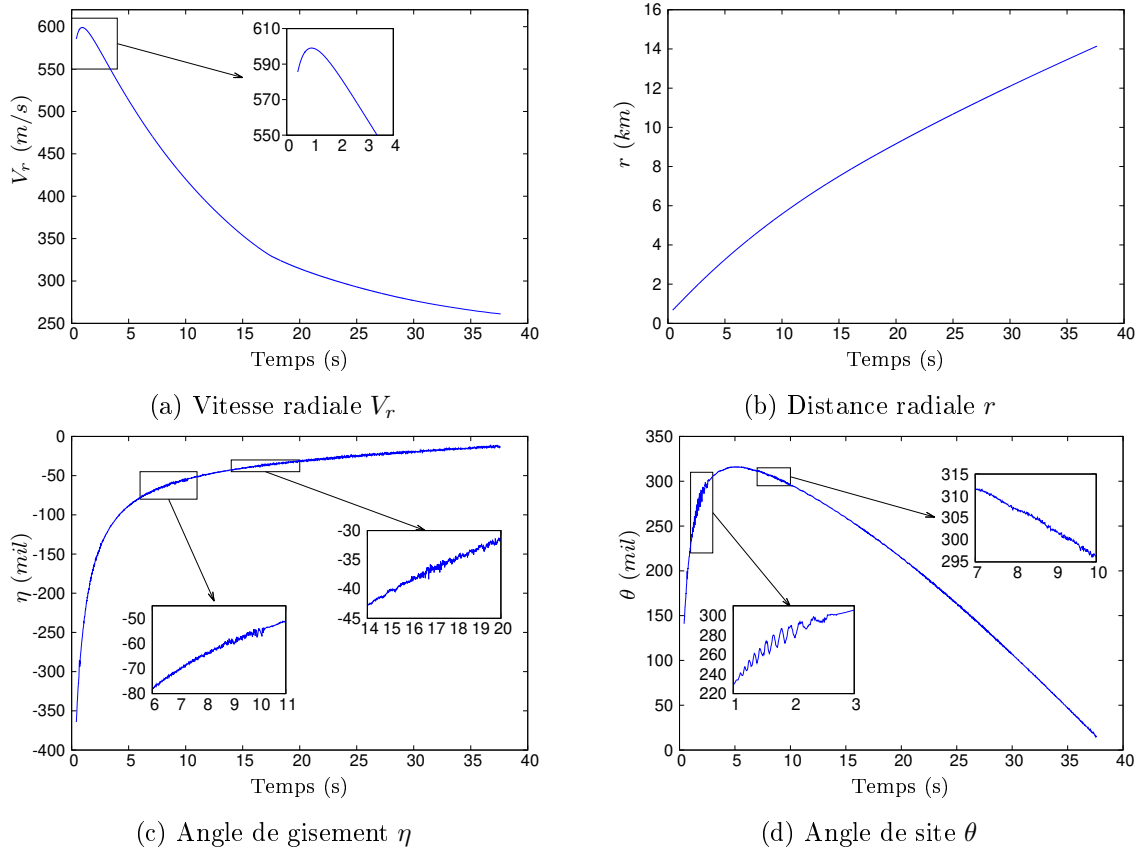


FIGURE IV.4 – Évolutions temporelles des mesures radar (V_r , r , η et θ)

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos(\theta) \cos(\eta) + x_{radar} \\ y(t) = r(t) \sin(\theta) + y_{radar} \\ z(t) = r(t) \cos(\theta) \sin(\eta) + z_{radar} \end{cases} \quad (IV.3)$$

Les positions associées aux données radar (figure IV.4) sont tracées sur la figure IV.5. Les positions en x (portée) et en y (altitude) ont des allures globales relativement lisses. Cependant, des zooms sur des fenêtres temporelles avant l'apogée (figure IV.5b) montrent toutefois des signaux relativement bruités. Nous constatons dans la direction de déviation (figure IV.5b) de fortes oscillations des mesures de position qui sont en fait plus visibles à cause de l'échelle (de l'ordre du mètre alors qu'elle est de l'ordre du kilomètre dans les autres directions), induisant une erreur relative plus importante. Le choix des plages temporelles sur lesquelles nous recherchons le coefficient est donc primordial. Les fenêtres temporelles $[3s, 7s]$ et $[10.5s, 15s]$, qui apparaissent comme les moins bruitées, sont tracées sur la figure IV.6 montrant une faible oscillation de ces mesures.

2.3 Détermination des conditions initiales du tir

Les conditions initiales du tir (vitesse initiale v_i , angle de hausse θ_c et de l'angle de gisement du canon η_c) rapportées par les données expérimentales peuvent présenter des

écarts aux conditions initiales réelles. Pour remédier à ce problème et répondre à la demande de nos partenaires industriels, nous avons développé un outil relativement simple permettant de recalculer ces conditions initiales à partir des mesures de positions fournies par le radar. Les détails de la méthode utilisée et les résultats obtenus pour plusieurs tirs sont présentés en annexe B.

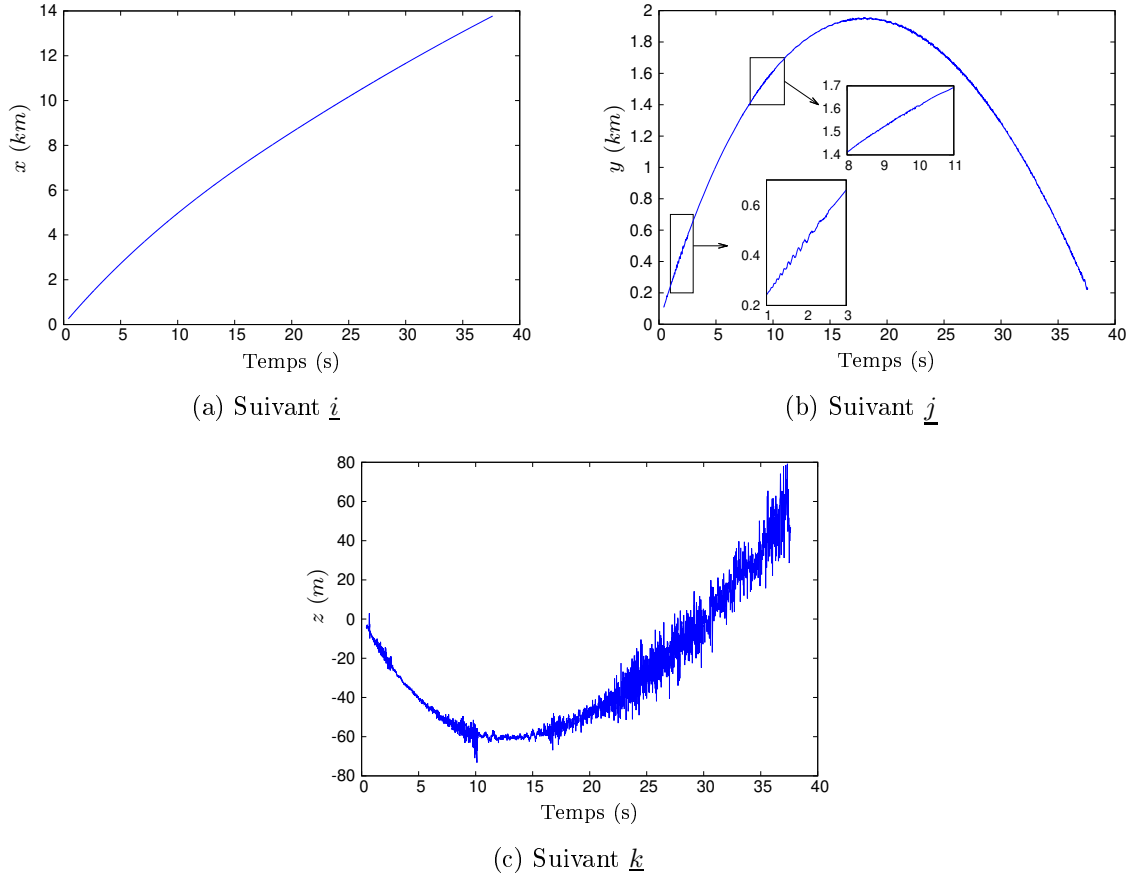


FIGURE IV.5 – Évolutions temporelles des positions cartésiennes (x,y,z) du projectile déduites des mesures radar (r, η, θ)

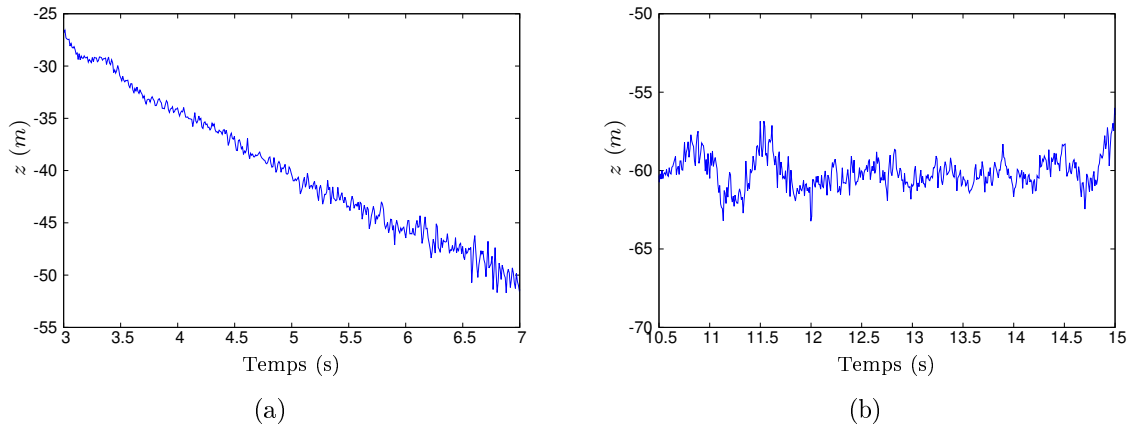


FIGURE IV.6 – Zoom sur la déviation pour deux fenêtres temporelles

2.4 Estimation des vitesses cartésiennes à partir de mesures de position

La procédure d'identification des coefficients aérodynamiques est basée sur la minimisation de fonctionnelles, où seules interviennent les composantes cartésiennes de la vitesse. Il est donc nécessaire au préalable d'obtenir une estimation de ces quantités. L'estimation à chaque instant t s'effectue à l'aide de régressions polynomiales d'ordre r_v des positions cartésiennes sur une fenêtre temporelle, $[t - \frac{\delta t_r}{2}; t + \frac{\delta t_r}{2}]$. L'équation polynomiale des positions ainsi obtenue permet, par dérivation, la détermination la vitesse associée sur cet intervalle, en particulier à l'instant t . Ce procédé est répété en faisant glisser la fenêtre temporelle de régression pour parcourir l'ensemble de la trajectoire. Cette méthode détermine uniquement la valeur de la vitesse au milieu de la fenêtre. Nous aurons donc une légère perte d'informations en début et en fin de trajectoire d'une durée $\delta t_r/2$.

Les choix de l'ordre de régression r_v pour chaque direction et de la taille de la fenêtre δt_r sont choisis en fonction de la qualité des mesures fournies par le radar de trajectographie. Ces paramètres doivent permettre de prendre en compte les mesures radar tout en atténuant les bruits de mesure sur les positions par un effet de lissage. Nous étudions, sur un même jeu de données, l'impact des paramètres de régression (ordre du polynôme r_v et taille de la fenêtre δt_r).

2.4.1 Influence des paramètres de régression

Dans le but d'étudier l'influence des paramètres de régression sur l'estimation des vitesses, nous calculons les vitesses pour différentes tailles de fenêtre allant de $1s$ à $8s$. Ce travail est effectué pour deux ordres de régression polynomiale (linéaire $r_v = 1$ et quadratique $r_v = 2$). Les vitesses obtenues sont tracées sur la figure IV.7. Les résultats issus des régressions linéaires correspondent aux figures IV.7a, IV.7b, IV.7c et quadratiques aux figures IV.7d, IV.7d et IV.7f. Nous observons, de prime abord, une faible sensibilité des composantes u_x et u_y lors du changement de la taille de la fenêtre et de l'ordre de régression. Les évolutions apparaissent lisses et presque superposées, exceptées celles obtenues avec un $\delta t_r = 1s$. Les échelles de ces graphiques, dans les directions du plan (\underline{i} , \underline{j}) (figures IV.7a, IV.7b, IV.7d et IV.7e) ne permettent pas de conclure réellement quant à la précision des vitesses obtenues. Pour la direction de déviation \underline{k} , les figures IV.7c et IV.7f montrent de fortes oscillations, notamment après l'apogée qui se situe légèrement avant $20s$, en particulier pour des fenêtres de régression δt_r inférieures à $3s$.

Pour mieux analyser les différentes influences, nous effectuons un zoom sur un intervalle de quelques secondes autour de l'apogée [$15s, 20s$]. Cet intervalle correspond d'une part à un changement de courbure des vitesses u_x et u_y et d'autre part, pour la vitesse u_z , à la zone la moins bruitée suivant \underline{k} précédemment identifiée sur les mesures de position (figure IV.5c).

Sur l'ensemble des graphiques composant la figure IV.8, nous constatons un très faible impact de l'ordre de régression, qu'il soit linéaire ou quadratique, chacun fournissant des résultats très semblables. Pour les composantes dans le plan (\underline{i} , \underline{j}), nous observons sur la

figure IV.8, outre des oscillations pour $\delta t_r = 1s$, un décalage croissant des reconstructions lorsque nous augmentons δt_r . La courbure est de plus en plus atténuée lors du lissage des positions avec des δt_r croissants. Dans la direction de déviation (figures IV.8c et IV.8f), nous observons des oscillations sur l'ensemble de l'intervalle temporel [15s, 20s] quels que soient les paramètres de régression choisis. Contrairement aux autres directions, les tracés semblent osciller autour d'une même référence et ne pas se décaler. De ce fait, l'augmentation de la taille de la fenêtre de régression δt_r permet de limiter l'amplitude de ces oscillations, $\delta t_r = 8s$ donnant probablement la meilleure approximation.

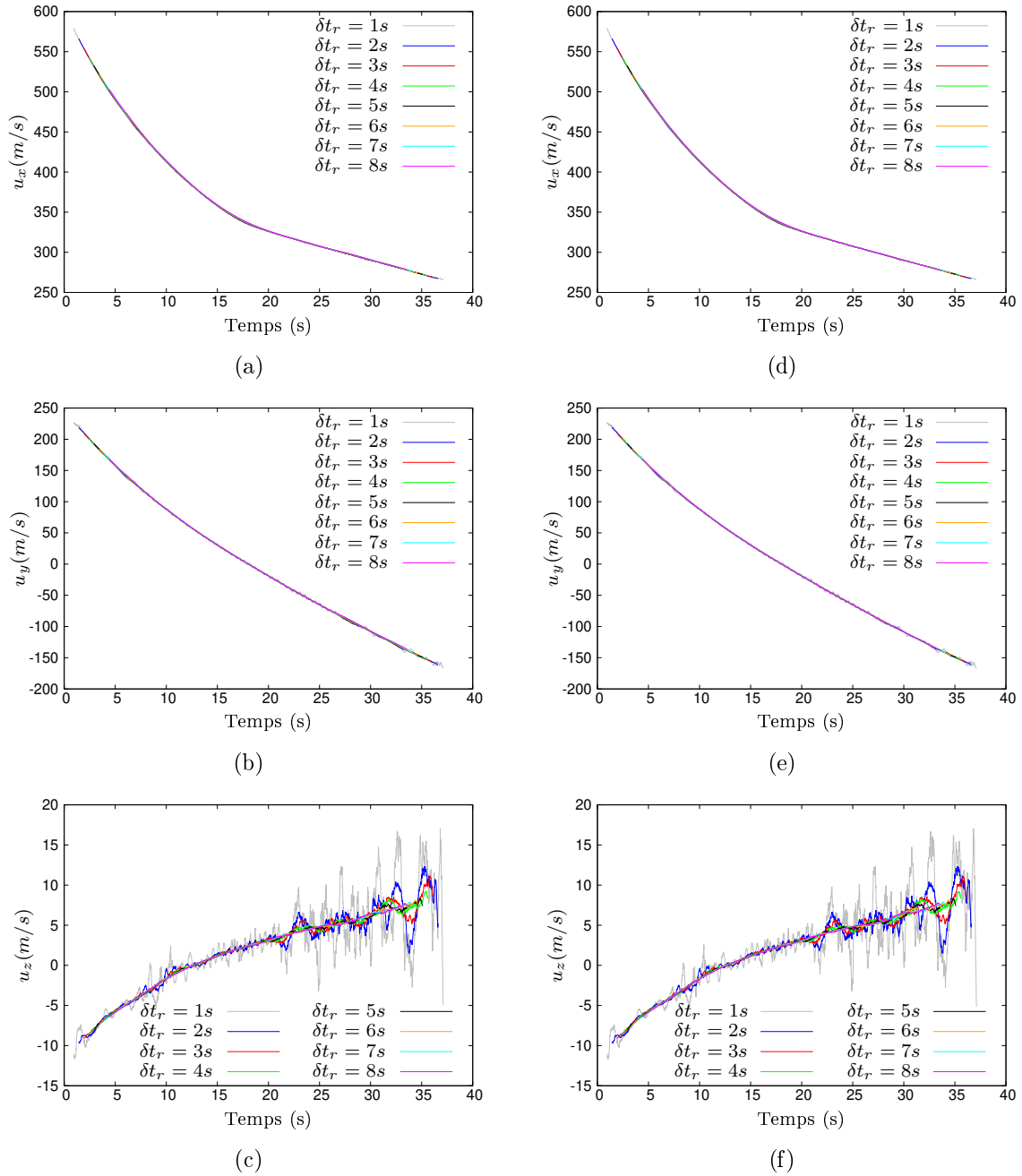


FIGURE IV.7 – Estimation des vitesses cartésiennes pour une fenêtre temporelle δt_r de 1s à 8s et pour un ordre de régression $r_v = 1$ (a, b, c) et de $r_v = 2$ (d, e, f)

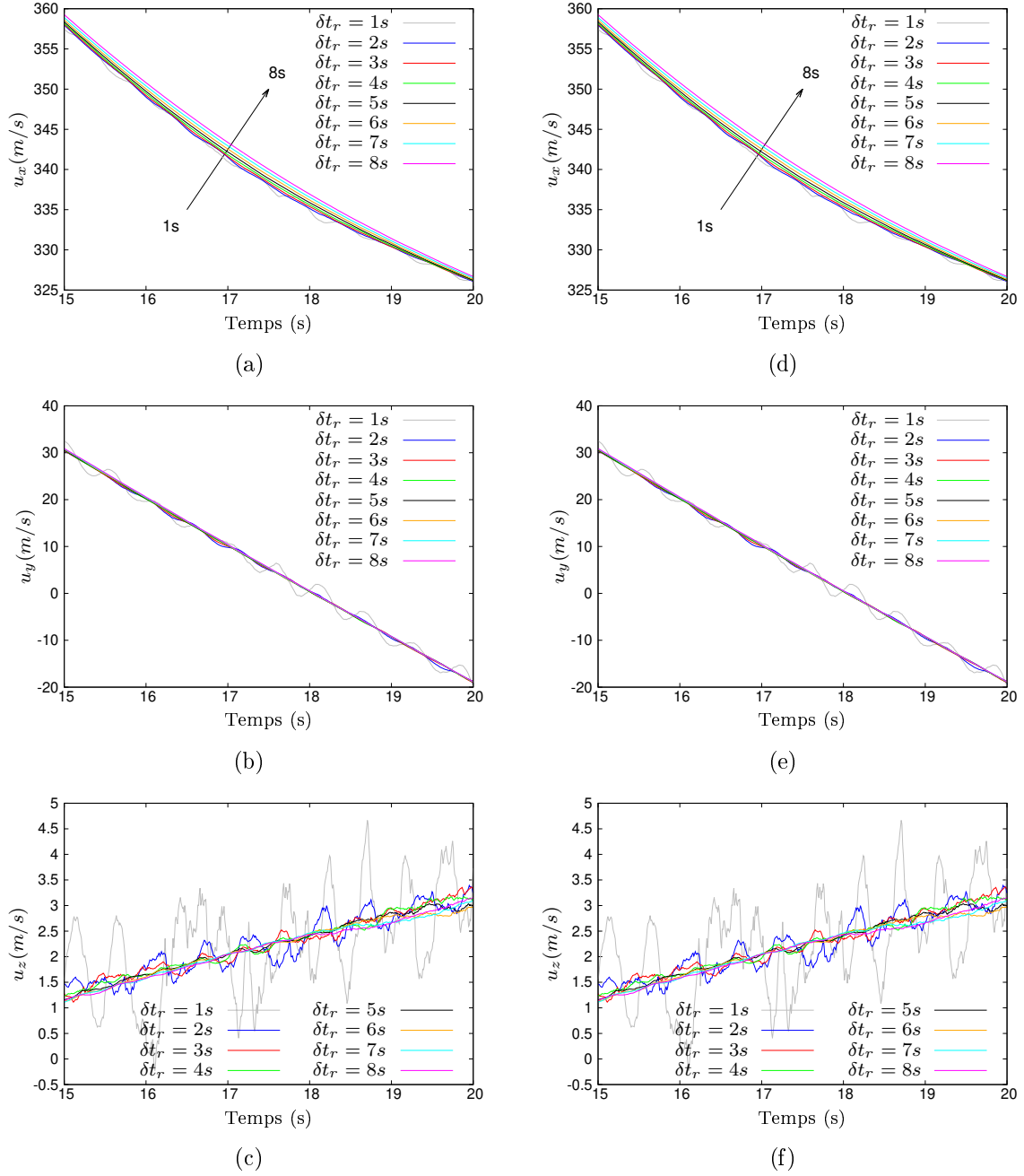


FIGURE IV.8 – Zoom temporel sur l'intervalle $[15s, 20s]$ pour un ordre de régression $r_v = 1$ (a, b, c) et $r_v = 2$ (d, e, f)

2.5 Analyse de la précision des vitesses estimées

Le processus d'estimation des vitesses cartésiennes introduit inévitablement des erreurs. Après estimation des vitesses pour différents couples de paramètres (taille de la fenêtre δt_r et ordre de la régression r_v), nous tentons d'estimer les erreurs et la précision des quantités estimées. Nous pouvons pour cela comparer différentes valeurs représentant la position. D'une part, nous avons les mesures brutes de position fournies par le radar et d'autre

part, nous pouvons réintégrer les estimations des vitesses pour revenir aux positions. Les différentes positions, dans le plan de tir ($\underline{i}, \underline{j}$), que nous avons obtenues sont très proches les unes des autres. Par conséquent, nous traçons les écarts entre les positions mesurées par le radar et celles obtenues par l'intégration des vitesses estimées. Les figures IV.9 et IV.10 donnent respectivement les écarts en portée (Δx) et en altitude (Δy). Suivant la direction de déviation, en plus des tracés des écarts Δz (figure IV.11), nous traçons les déviations obtenues après intégration des vitesses ($\delta t_r = 3s$ et $\delta t_r = 8s$) et les comparons aux données radar fortement bruitées (figure IV.12).

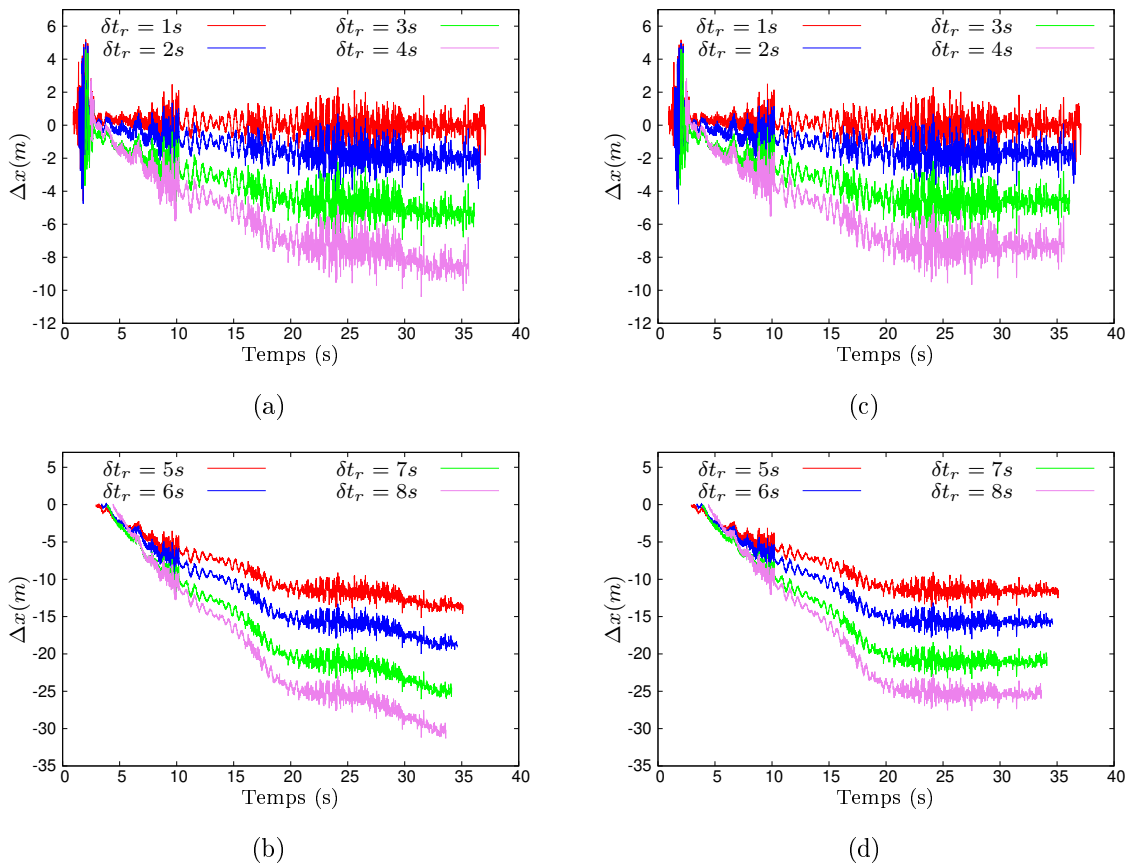


FIGURE IV.9 – Évolution temporelle des écarts de portée (Δx) après intégration des vitesses estimées à partir de fenêtres temporelles δt_r allant de 1s à 8s et une régression d'ordre $r_v = 1$ (a) et (b) et d'ordre $r_v = 2$ (c), (d)

Nous remarquons une forte erreur en début de trajectoire qui provient de la qualité des mesures radar sur cette partie du vol. Les premiers instants ne sont pas les plus précis lors de l'utilisation du radar de trajectographie SARAH. Il serait cependant possible d'améliorer les mesures en utilisant un autre radar dit de proximité plus adapté pour le suivi du projectile sur cette partie de la trajectoire.

En comparant les écarts de position entre les mesures radar et les trajectoires obtenues après intégration des vitesses estimées, nous observons (figures IV.9a et IV.9b) que plus la fenêtre temporelle est grande et plus les écarts sont grands lorsque nous utilisons une régression linéaire. L'utilisation d'un ordre de régression quadratique (figure IV.9c et IV.9d)

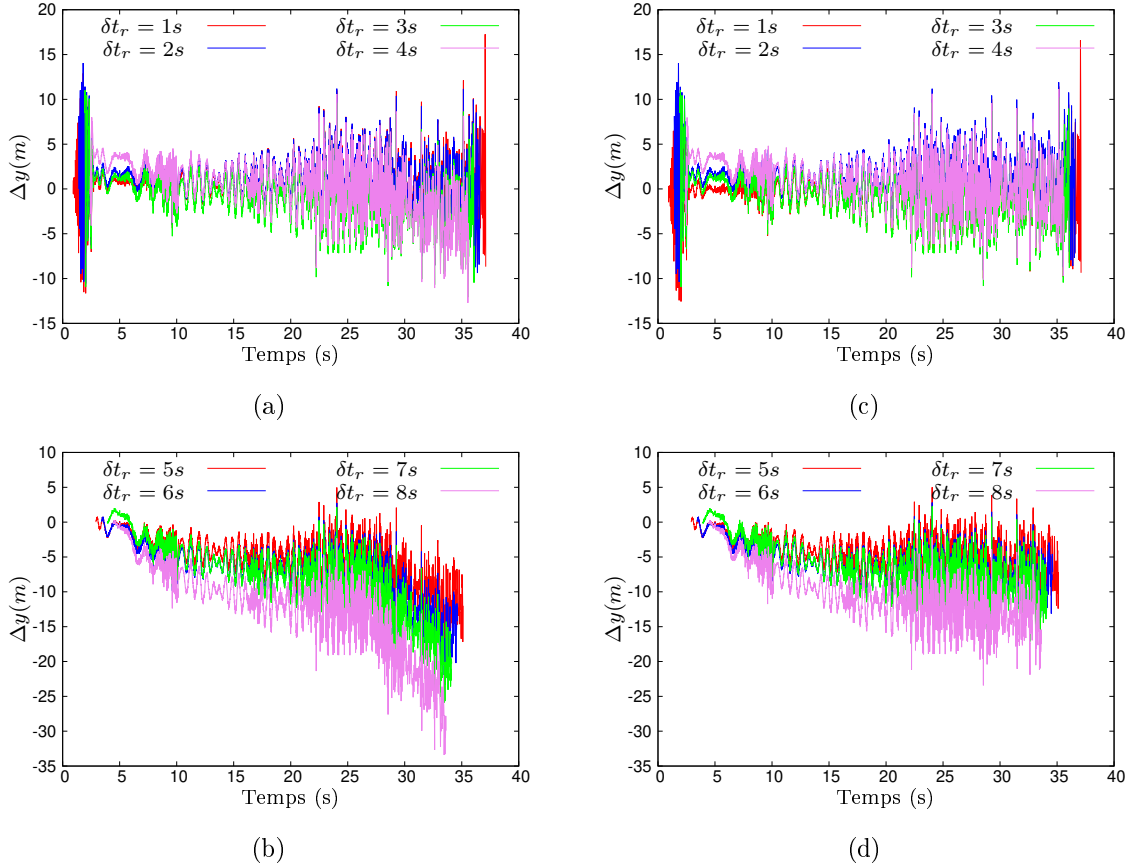
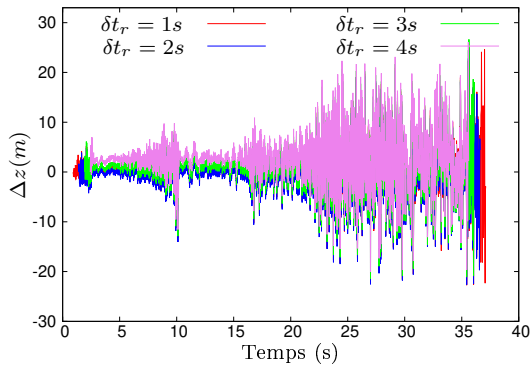


FIGURE IV.10 – Évolution temporelle des écarts d'altitude (Δy) après intégration des vitesses estimées à partir de fenêtres temporelles δt_r allant de 1s à 8s et une régression d'ordre $r_v = 1$ (a) et (b) et d'ordre $r_v = 2$ (c), (d)

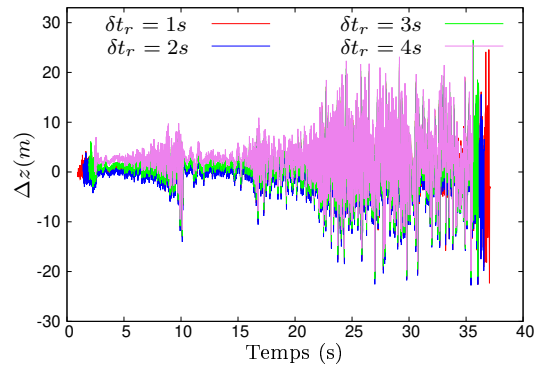
a un effet stabilisateur. Nous observons ainsi une faible variation des écarts des positions lorsque la taille de la fenêtre δt_r est modifiée (figures IV.9c et IV.9d). Ces observations sont moins visibles mais toujours valables pour les données d'écart en altitude (figure IV.10).

Pour les écarts en déviation Δz , nous constatons le faible impact de l'ordre r_v de la régression devant celui du choix de la taille de la fenêtre δt_r . En effet, cette dernière réduit les erreurs relatives lorsque sa taille augmente. Les plages temporelles où le bruit de mesure est le plus faible se retrouvent sur les graphiques composant la figure IV.11. Dans cette direction, les erreurs absolues sont du même ordre de grandeur que celles obtenues dans le plan de tir, cela dit au vu des faibles valeurs de déviation, les erreurs relatives sont très importantes. En traçant, les dérivations (figure IV.12) obtenues après intégration des vitesses estimées pour $\delta t_r = 3s$ et $\delta t_r = 8s$, nous visualisons l'effet lissant de l'intégration de la vitesse en comparant les trajectoires obtenues à la mesure brute.

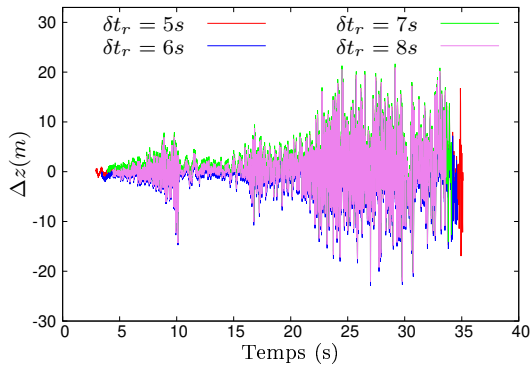
Les paramètres numériques (δt_r et r_v) ont un effet direct sur la qualité des vitesses estimées, ce qui se répercute sur la qualité de l'identification des coefficients aérodynamiques. A l'issue de ce pré-traitement, des valeurs estimées de vitesses sont disponibles et utilisables par la procédure d'identification.



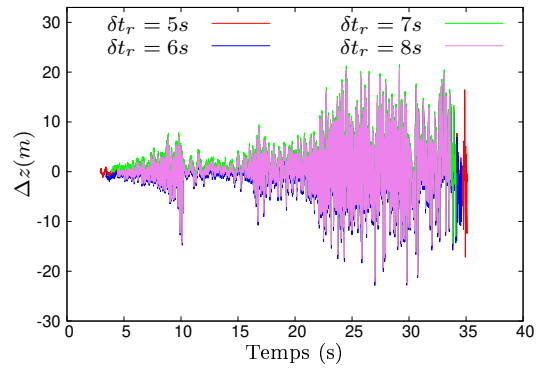
(a)



(c)

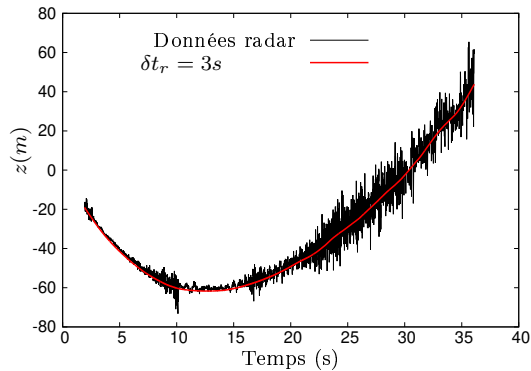


(b)

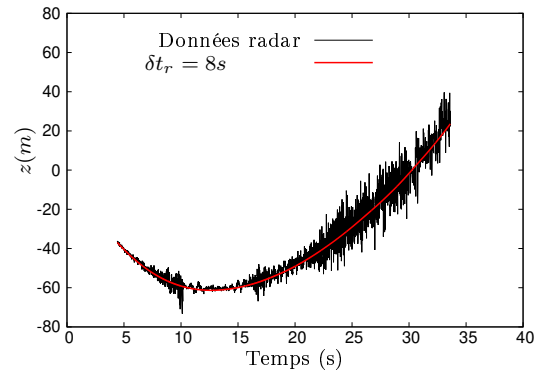


(d)

FIGURE IV.11 – Évolution temporelle des écarts de déviation (Δz) après intégration des vitesses estimées à partir de fenêtres temporelles δt_r allant de 1s à 8s et une régression d'ordre $r_v = 1$ (a) et (b) et d'ordre $r_v = 2$ (c), (d)



(a)



(b)

FIGURE IV.12 – Évolution temporelle de la déviation mesurée par le radar et des positions z obtenues après intégration des vitesses issues d'une régression quadratique sur une fenêtre temporelle de $\delta t_r = 3s$ (a) et $\delta t_r = 8s$ (b)

3 Application de la procédure séquentielle d'identification des coefficients pour un vol de référence

Dans cette partie, nous présentons en détail les résultats d'identification obtenus pour un tir de référence. Ce tir correspond à celui d'un projectile, déjà qualifié par la DGA, pour lequel nous connaissons un coefficient de traînée de référence. De plus, ce tir se situe dans la plage de validité de notre approche. Nous détaillons la mise en œuvre des deux premières étapes de la procédure d'identification. Cela inclut donc l'identification de la contribution C_{x0} puis celle de ξC_{zm0} . Nous examinons, en particulier, l'impact de la taille de la fenêtre δt_r , utilisée lors du prétraitement des données, sur les identifications.

3.1 Identification du C_{x0}

La première étape de la procédure consiste à calculer la contribution à l'ordre zéro du coefficient de traînée C_{x0} . Nous analysons l'influence de deux paramètres numériques que sont la taille de la fenêtre de régression δt_r utilisée en prétraitement pour le calcul des vitesses et la taille de la fenêtre de vol analysée δt .

3.1.1 Influence de la taille de la fenêtre de régression δt_r sur l'identification du C_{x0}

Pour étudier, l'influence de la taille de la fenêtre de régression sur l'identification de C_{x0} , nous avons choisi, de fixer la taille de la fenêtre de vol analysée δt à 2 secondes. Les figures IV.13a et IV.13b montrent qu'il est nécessaire d'adapter la taille δt_r de la fenêtre de régression. En effet, lors de l'utilisation d'une taille trop grande, nous observons une erreur de reconstruction dans la partie transsonique, zone où le coefficient de traînée évolue très rapidement (figure IV.13b), puisque la procédure de prétraitement utilisée pour le calcul des vitesses a tendance à lisser les positions (cf figure IV.8). La rupture de pente dans la zone transsonique (ici entre 15s et 20s) est moins bien approchée lorsque δt_r augmente. A l'inverse, l'utilisation d'une fenêtre temporelle petite ($\delta t_r = 1$ ou $2s$) crée des oscillations du coefficient identifié en fin de vol, particulièrement visible sur le tracé temporel de la figure IV.13a lorsque t est supérieur à 20 secondes.

3.1.2 Influence de la fenêtre de vol analysée δt sur l'identification du C_{x0}

En plus des paramètres introduits par la régression, plusieurs paramètres numériques, taille de la fenêtre temporelle δt , pas de temps Δt , ordre du schéma d'intégration p et ordre des B-splines K interviennent lors de la résolution des problèmes d'optimisation. Dans la suite, nous nous intéressons uniquement au paramètre le plus influent, à savoir la taille de la fenêtre temporelle analysée δt .

Nous comparons deux fenêtres temporelles, $\delta t = 1s$ et $\delta t = 2s$. D'après les conclusions de la section (2.5) sur les erreurs de positions, nous utilisons exclusivement les données de vitesse obtenues pour des fenêtres de régression δt_r comprise entre 1s et 4s.

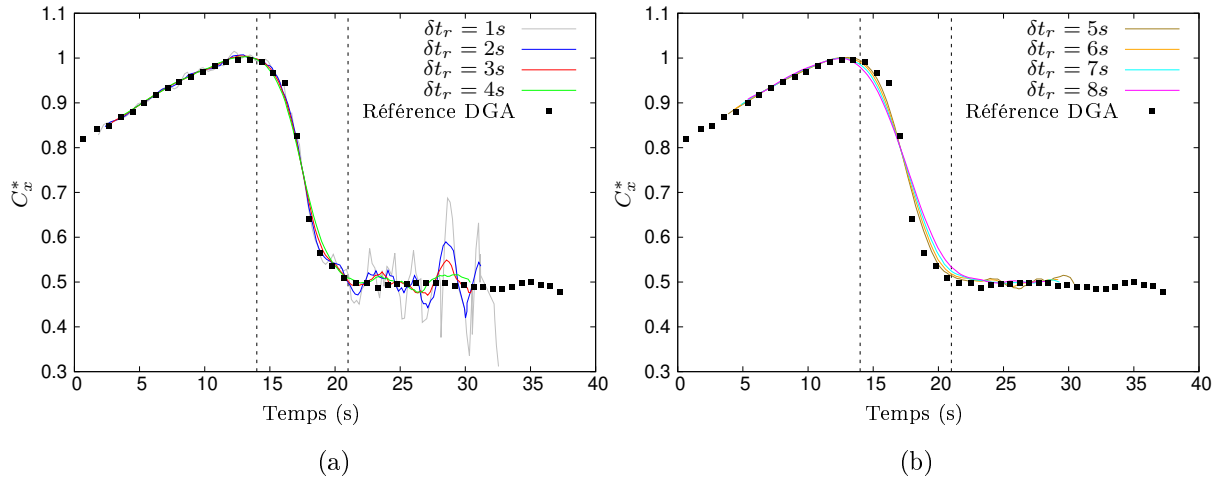


FIGURE IV.13 – Étude de sensibilité par rapport à la taille de la fenêtre de régression δt_r du coefficient C_{x0} identifié : évolution temporelle

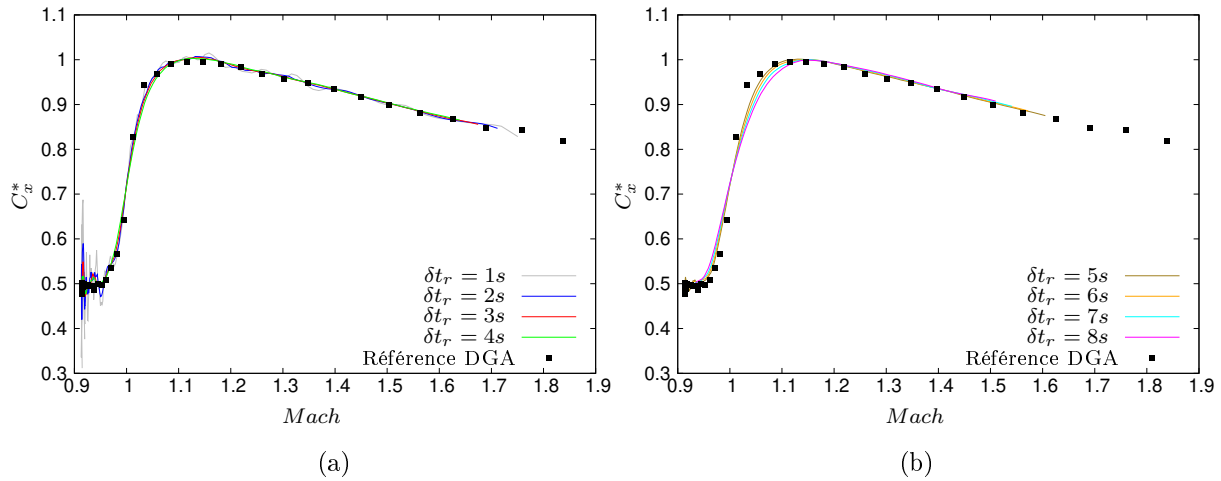


FIGURE IV.14 – Étude de sensibilité par rapport à la taille de la fenêtre de régression δt_r du coefficient C_{x0} identifié : évolution en fonction du Mach

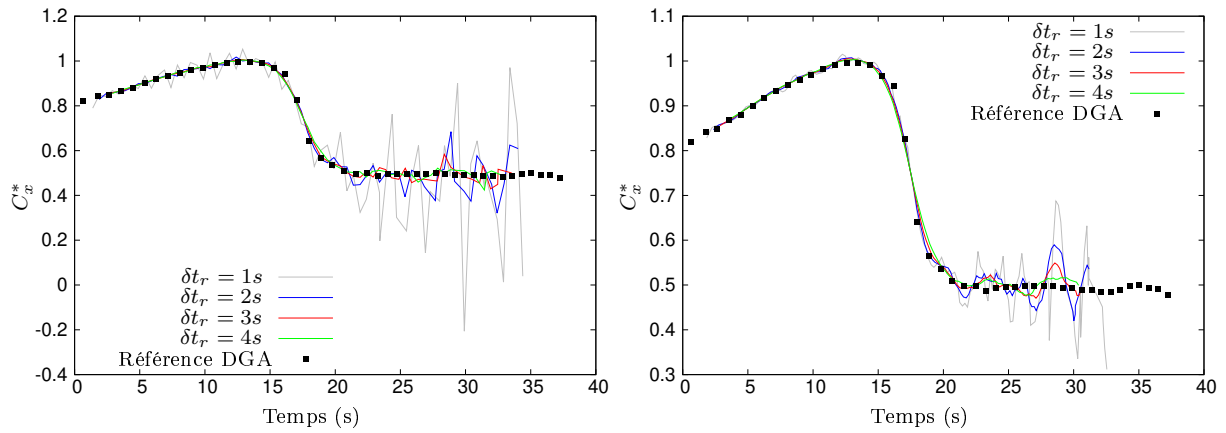
La figure IV.16 montre que la taille de la fenêtre ne doit pas être trop réduite. En effet, nous voyons que dans le cas où $\delta t = 1s$, cette taille engendre de fortes oscillations dans l'identification du coefficient aérodynamique.

3.1.3 Comparaison des vitesses et positions obtenues après identification du C_{x0}

La procédure d'identification, en plus de l'estimation du coefficient, donne en sortie des vitesses recalculées. Nous pouvons ainsi, comparer ces vitesses issues de l'identification aux données en entrée.

La figure IV.17 représente les composantes u_x et u_y en entrée ($\delta t_r = 2s$) et en sortie de la procédure d'identification. Les vitesses de sortie sont, ici, relativement proches des données d'entrée. Nous obtenons, par intégration des vitesses, les positions après identification qui

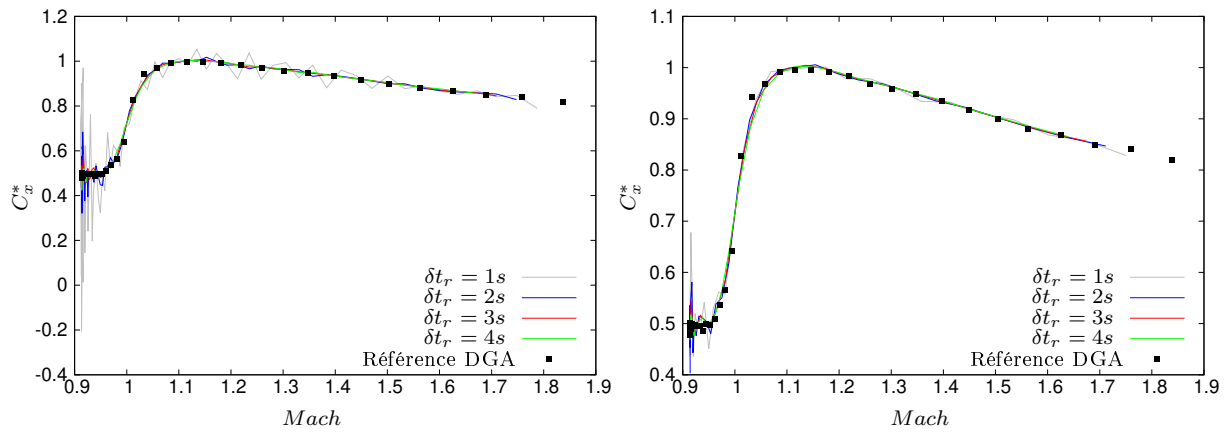
peuvent être comparées aux positions cartésiennes obtenues à partir des mesures brutes du radar.



(a) Découpage en fenêtre temporelle de 1s

(b) Découpage en fenêtre temporelle de 2s

FIGURE IV.15 – Étude de sensibilité par rapport à la taille de la fenêtre temporelle δt du coefficient C_{x0} identifié : évolution temporelle



(a) Découpage en fenêtre temporelle de 1s

(b) Découpage en fenêtre temporelle de 2s

FIGURE IV.16 – Étude de sensibilité par rapport à la taille de la fenêtre temporelle δt du coefficient C_{x0} identifié : évolution en fonction du Mach

Nous constatons des résultats semblables lors de la comparaison des positions, figure IV.18a pour la portée et figure IV.19a pour l'altitude. La superposition des courbes montre de faibles erreurs relatives. Les erreurs sont données par les figures IV.18b et IV.18c pour la portée et les figures IV.19b et IV.19c pour l'altitude. Pour la portée, nous observons une dérive linéaire sur l'intervalle [10s – 20s] qui est de plus en plus important lorsque la fenêtre de régression δt_r augmente. Cela coïncide avec le constat fait sur la sous estimation de la vitesse u_x lors du passage dans la zone transsonique. Ce phénomène est très visible $\delta t_r > 4s$ (figure IV.18c). A l'inverse, l'erreur en portée, reste stable au delà de 20s. Des observations semblables peuvent être faites sur l'altitude (figure IV.19).

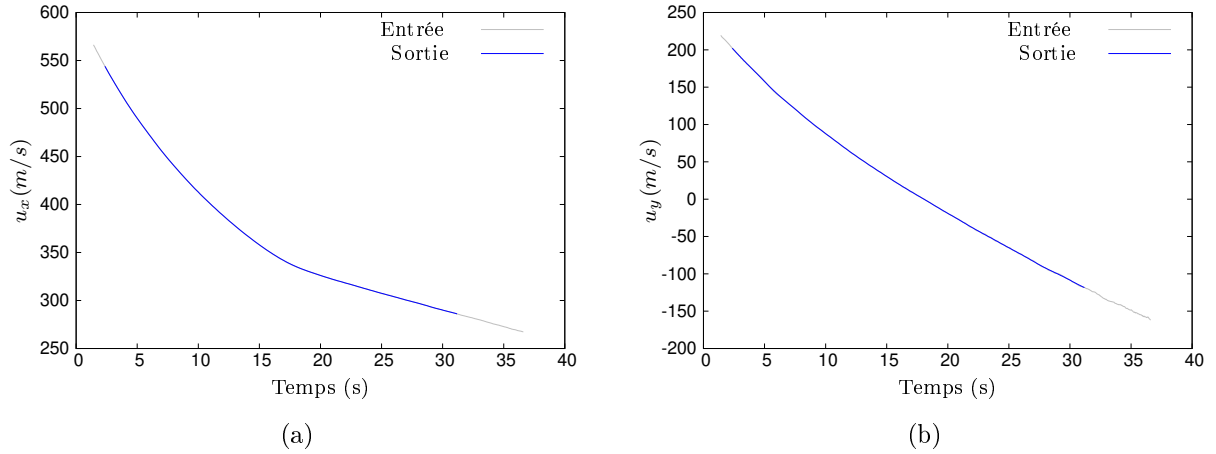


FIGURE IV.17 – Comparaison des composantes de vitesses u_x (a) et u_y (b) en entrée ou en sortie de la procédure d'identification du C_{x0}

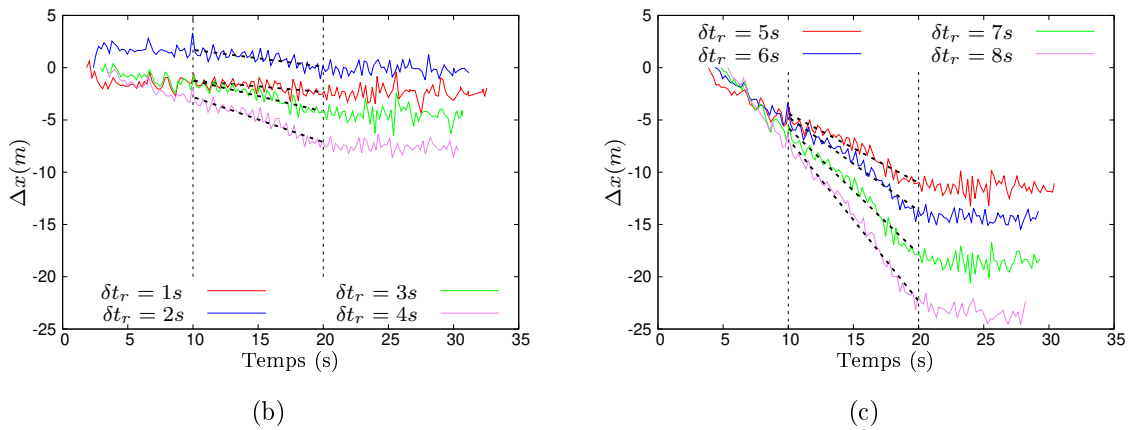
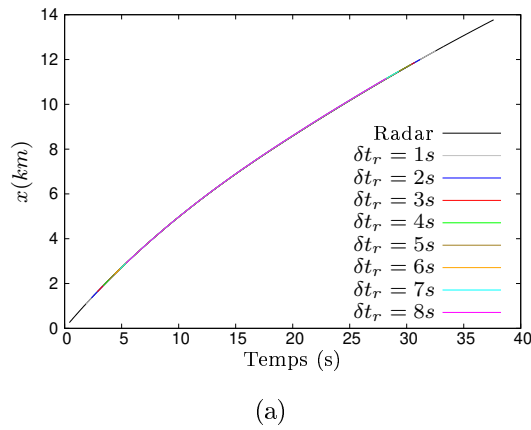
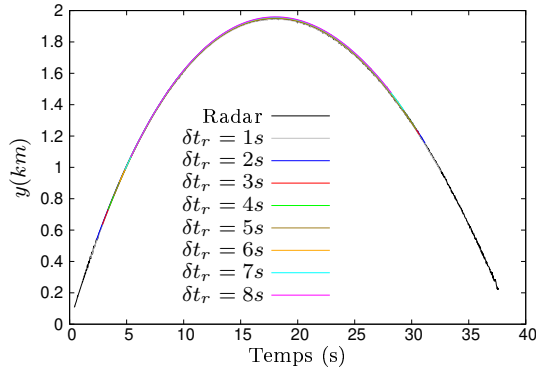


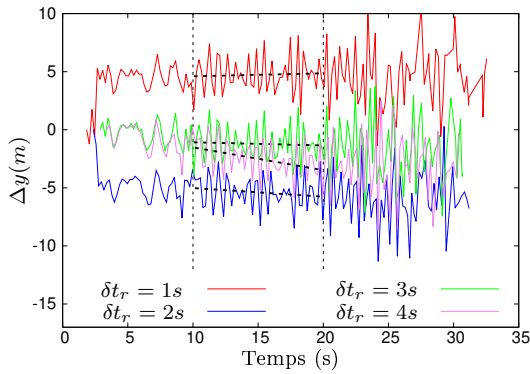
FIGURE IV.18 – Évolution temporelle des portées recalculées après l'identification du C_{x0} (a). Tracés des écarts par rapport aux mesures radar (b) et (c)

L'identification du coefficient C_{x0} produit des résultats proches de la référence DGA lorsque les paramètres de prétraitement et de calcul sont soigneusement sélectionnés, comme le montre la figure IV.13a. En particulier, dans la zone transsonique, il faut limiter la taille de la fenêtre de régression δt_r pour éviter un lissage et une sous estimation

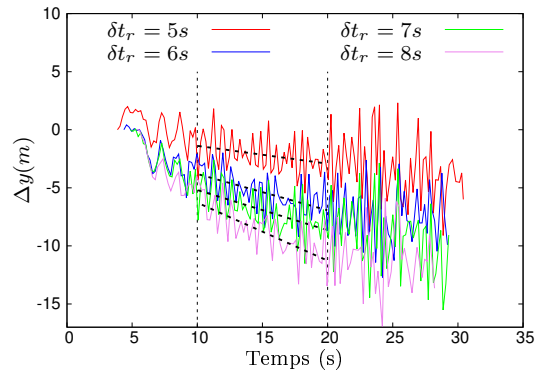
de la vitesse. A l'inverse, en fin de vol, les données étant plus bruitées, un δt_r grand apporte une certaine stabilité à l'identification.



(a)



(b)



(c)

FIGURE IV.19 – Évolution temporelle des altitudes recalculées après l'identification du C_{x0} (a). Tracés des écarts par rapport aux mesures radar (b) et (c)

3.2 Identification de la contribution ξC_{zm0}

Nous poursuivons la procédure d'identification avec l'étape suivante qui utilise les données de vitesse en déviation. Cette étape nécessite, en addition de ces données d'entrée, les composantes recalculées de la vitesse (u_{0x} et u_{0y}) ainsi que le coefficient de traînée C_{x0} estimé à l'étape précédente.

3.2.1 Analyse des vitesses et des positions obtenues après identification du ξC_{zm0}

Simultanément à l'identification du ξC_{zm0} , nous obtenons en sortie de la procédure une reconstruction de la vitesse suivant la composante de déviation. Ces vitesses sont comparées aux vitesses d'entrée du code (figure IV.20) qui proviennent du prétraitement des mesures de position radar en déviation. Les graphiques de la figure IV.20 correspondent respectivement aux situations où la fenêtre temporelle de régression quadratique est de 2 secondes (a), 3 secondes (b) et 8 secondes (c). Ces vitesses reconstruites par la procédure

d'identification font apparaître un lissage par rapport aux données d'entrée qui présentent des oscillations.

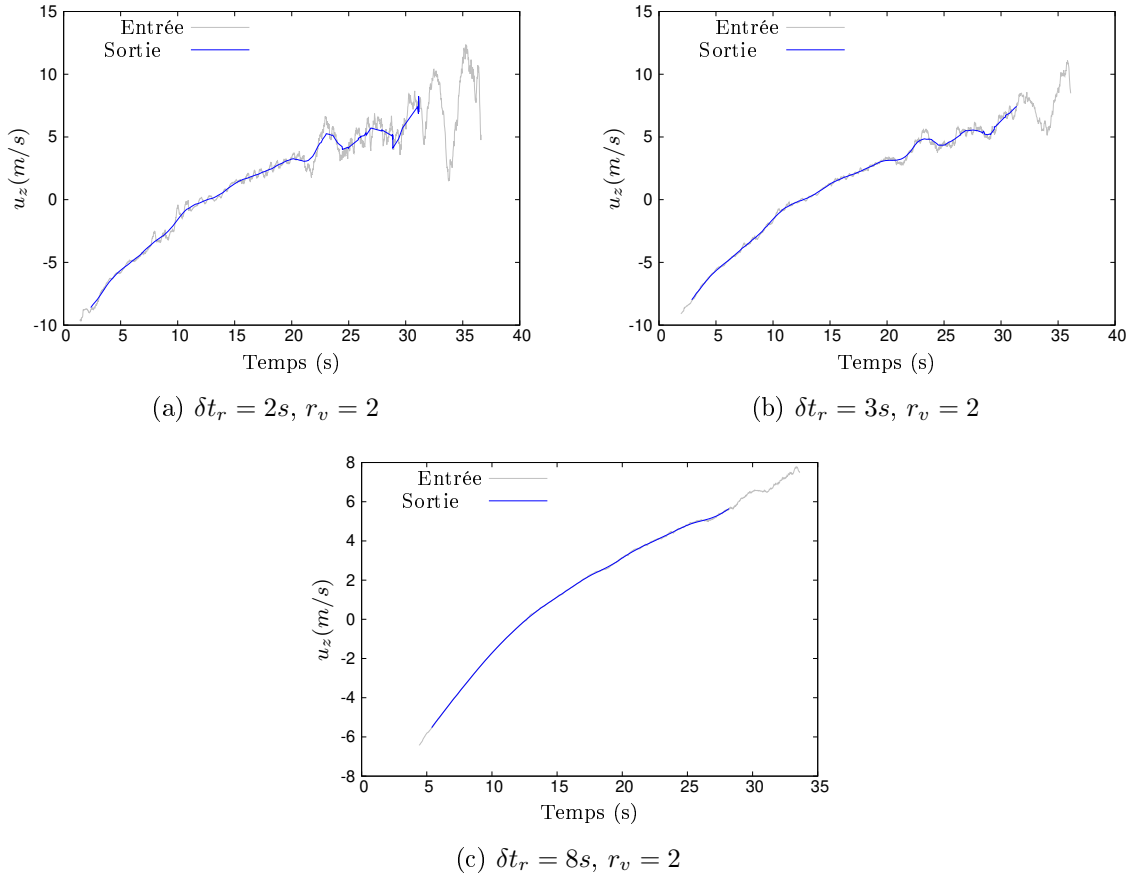
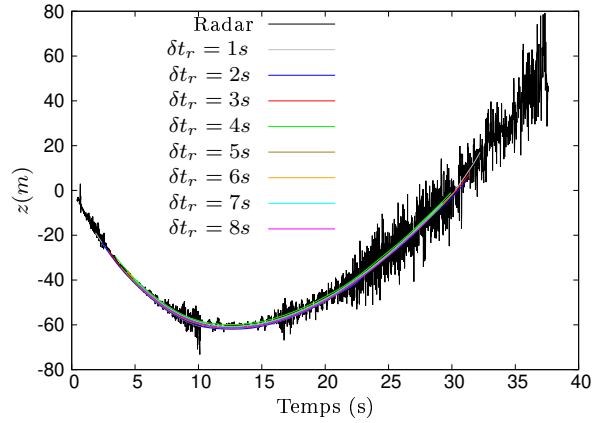


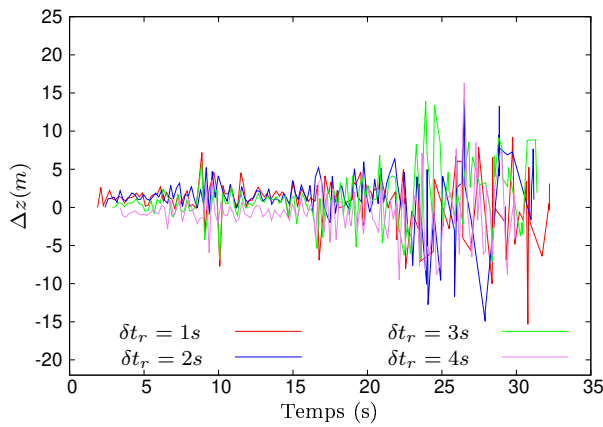
FIGURE IV.20 – Comparaison de la composante de la vitesse u_z obtenue après identification du ξC_{zm0} aux estimations de vitesses obtenues par régression pour des fenêtres de régression $\delta t_r = 2s$ (a), $\delta t_r = 3s$ (b) et $\delta t_r = 8s$ (c)

Nous recalculons ensuite les positions reconstruites en déviation et les comparons aux données radar (figure IV.21a). Ces positions reconstruites permettent un débruitage des données radar. Les erreurs relatives (figures IV.21b et IV.21c) sont significatives en raison du bruit important que présentent les données brutes radar. Cependant, deux fenêtres temporelles ($[3s; 7s]$ et $[10s; 15s]$) présentent des erreurs relatives moindres. En revanche les erreurs relatives importantes, autour de l'instant $t = 10s$, proviennent de la moindre qualité des mesures radar à cet instant, comme cela a pu être observé sur les mesures radar de l'angle de site (figure IV.4c) et de gisement (figure IV.4d).

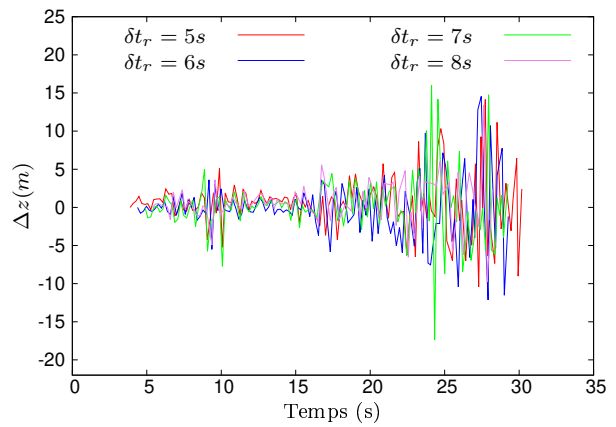
Cette analyse nous fournit des indications sur les fenêtres temporelles pour lesquelles l'identification du coefficient ξC_{zm0} pourrait être considérée la plus fiable. En effet, ce coefficient, intervenant à l'ordre un, a une faible influence sur la trajectoire et son identification est relativement sensible aux bruits entachant les données radar.



(a)



(b)



(c)

FIGURE IV.21 – Évolution temporelle des déviations recalculées après l'identification du C_{zm0} (a). Tracés des écarts par rapport aux mesures radar (b) et (c)

3.2.2 Identification du ξC_{zm0}

En se basant sur les observations précédentes, nous limitons l'identification aux instants de vol compris entre 3s et 18s. La figure IV.22 présente les identifications obtenues à partir des vitesses estimées pour des fenêtres de régression δt_r . L'augmentation de δt_r conduit à une identification moins oscillante du coefficient ξC_{zm0} . Nous conservons, pour la suite, les résultats obtenus pour δt_r variant entre 5s et 8s (figure IV.22b).

Le projectile étant connu et qualifié par les partenaires industriels, il est possible de compléter les données issues du radar par des données de vitesse de rotation suivant son axe longitudinal ω_c générées numériquement, ainsi que par la connaissance de l'évolution du coefficient $C_{m\alpha}$ pour ce tir. Nous pouvons ainsi estimer une valeur adimensionnée du coefficient de portance $C_{z\alpha 0}^*$ (figure IV.23) sur les fenêtres temporelles présentant des données brutes les plus fiables ([3s, 7s] et [13s, 18s]).

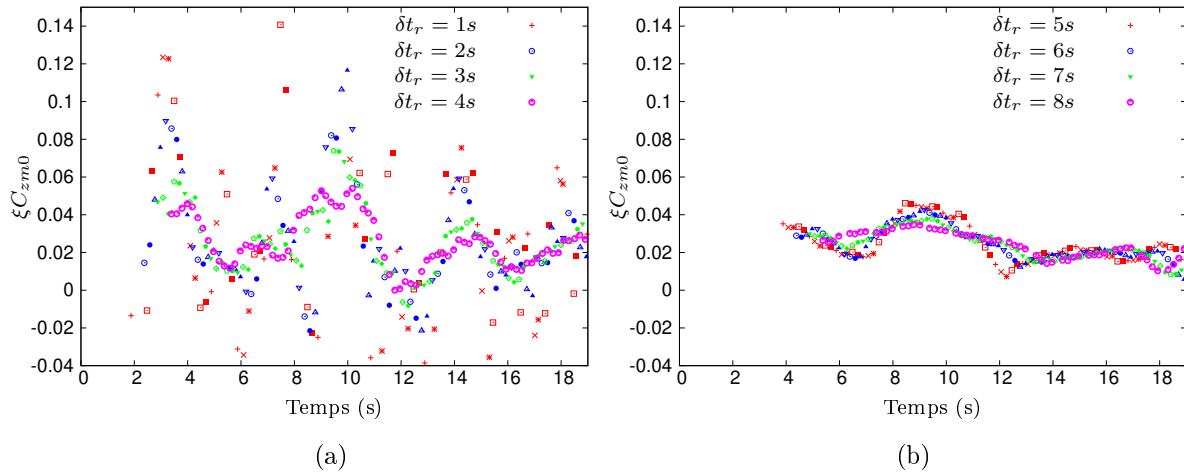


FIGURE IV.22 – Évolution temporelle du coefficient ξC_{zm0} identifié à partir des vitesses estimées par régression ($r_v = 2$ et $\delta t_r = 1s$ à $8s$)

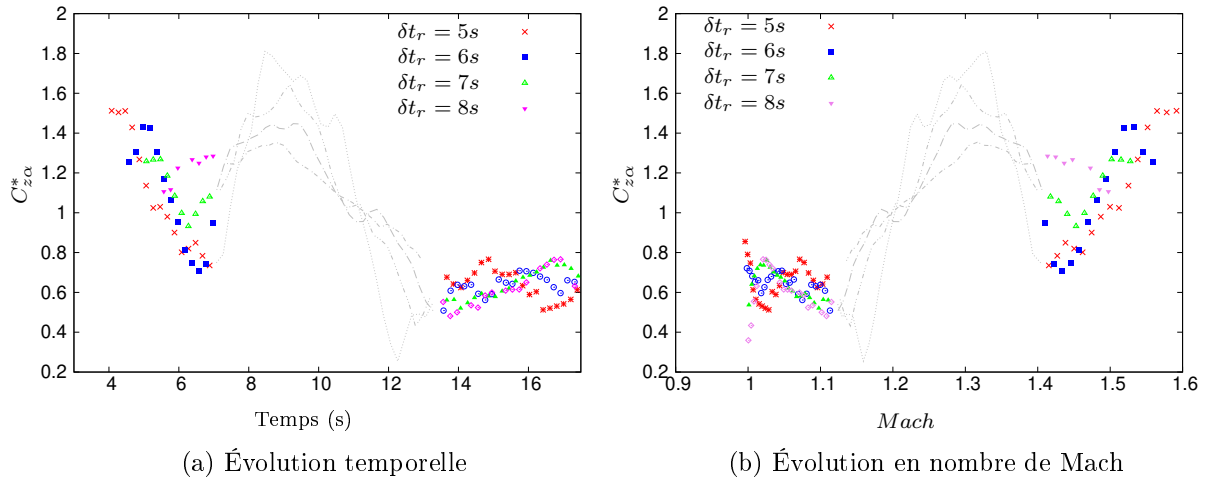


FIGURE IV.23 – Coefficient de portance identifié à partir de données radar

4 Identification de la contribution C_{x0} pour d'autres configurations et d'autres projectiles

Un début de qualification de la procédure d'identification est réalisé en analysant des données radar enregistrées lors de différentes campagnes de tir. La qualification ne concerne pour l'instant que la détermination des coefficients de traînée. Les identifications sont réalisées pour différentes conditions initiales. Les résultats sont comparés à des références internes de la DGA obtenues par une technique dont nous n'avons pas les détails.

4.1 Applications à trois tirs de la même campagne de tirs

Dans un premier temps, nous utilisons la procédure pour trois autres tirs du même projectile faisant partie de la même campagne de tir. Seules les conditions initiales de vitesse et de hausse du canon changent entre les tirs. Du point de vue numérique, nous

fixons les paramètres de prétraitement et de calcul (régression quadratique, taille de la fenêtre de régression $\delta t_r = 2s$ et taille de la fenêtre d'identification $\delta t = 2s$)

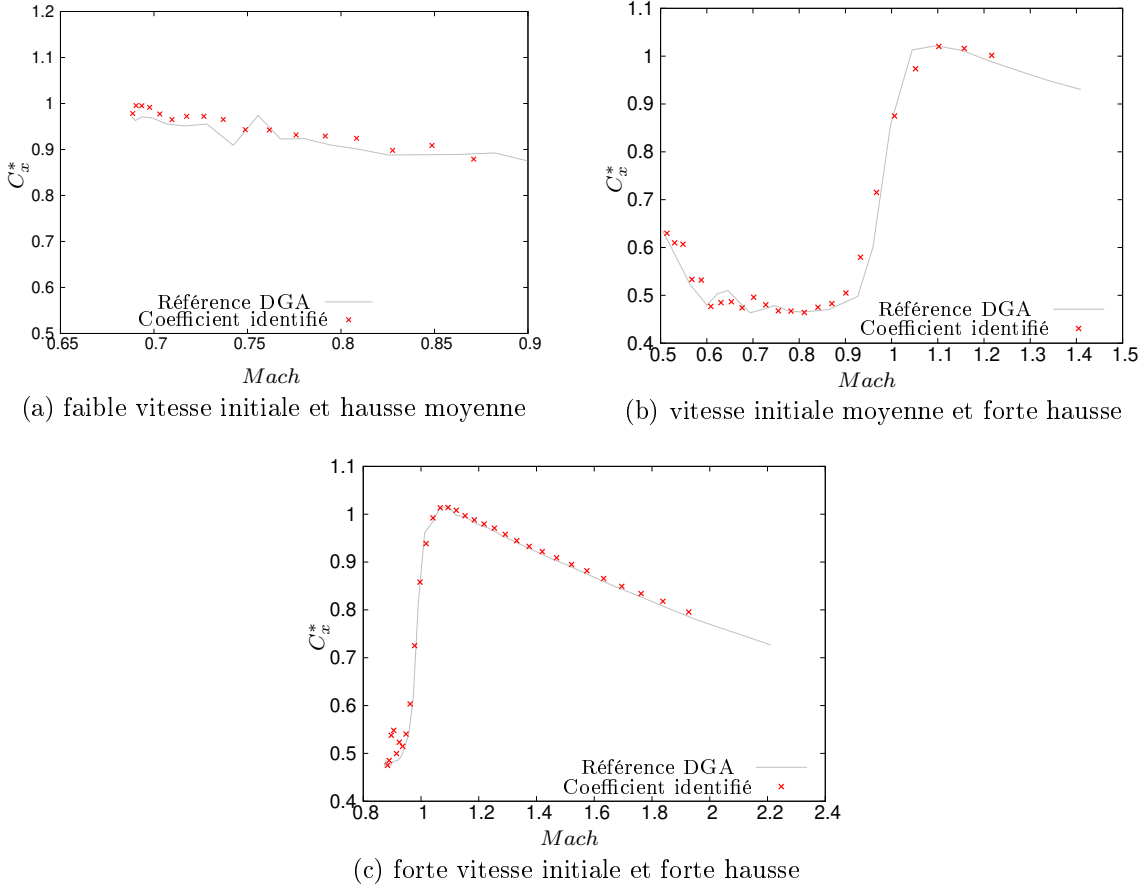


FIGURE IV.24 – Comparaison des coefficients de traînée identifiés à une référence interne DGA pour trois configurations initiales différentes

En comparant les identifications des coefficients de traînée par rapport à la référence interne de la DGA, nous pouvons remarquer qu'elles sont très proches. Malgré cela, deux phases du vol distinctes peuvent poser des problèmes. La première correspond à la zone transsonique où le coefficient évolue très rapidement. Sur les figures IV.24b et IV.24c, nous observons un léger décalage entre le coefficient identifié et la référence DGA dans cette zone. La seconde se situe autour de l'apogée (proche du Mach minimum). Dans cette zone, le projectile a une vitesse non monotone (décroissante puis croissante), ce qui implique une variation non monotone du nombre de Mach. Cela pose des problèmes lors de l'identification, en particulier à cause de la non unicité du C_x en fonction du nombre de Mach. Il est donc essentiel de veiller à ce que les paramètres de calcul prennent en considération ces phénomènes.

4.2 Applications à trois tirs d'un projectile ayant une forte vitesse initiale

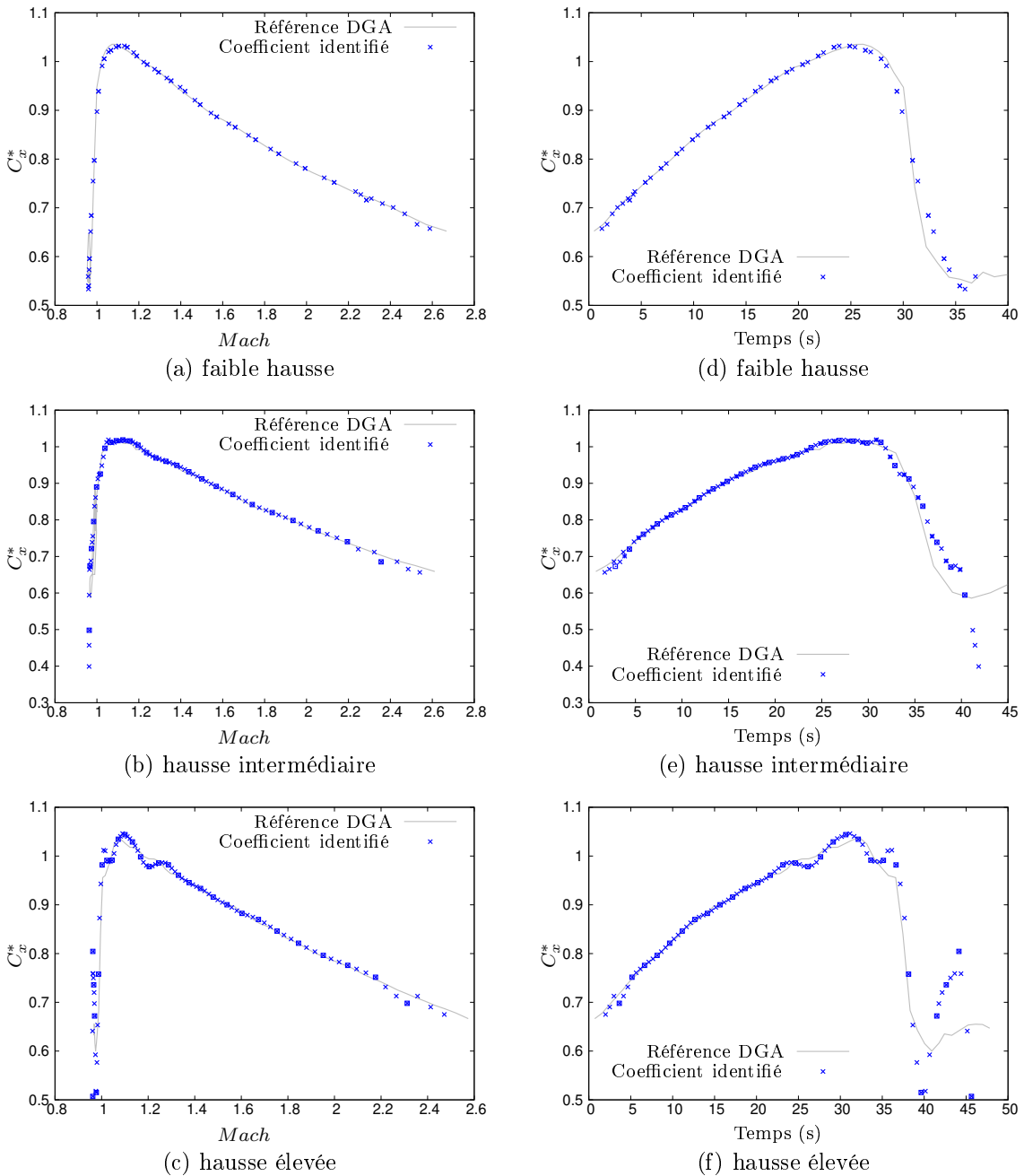


FIGURE IV.25 – Comparaison des coefficients de traînée identifiés à une référence DGA pour trois tirs présentant une vitesse initiale identique et trois hausses différentes

Afin de poursuivre la qualification de la première étape de la procédure d'identification, nous examinons les résultats issus d'une autre campagne de tirs. Cette campagne de tir est réalisée pour un projectile similaire à celui étudié aux paragraphes 3 et 4.1. La vitesse pour ces trois tirs est maintenue constante à une valeur élevée. Les variations de conditions initiales concernent uniquement la hausse du canon avec une valeur faible (figure IV.25a),

intermédiaire (figure IV.25b) et forte (figure IV.25c).

À première vue, les trois configurations semblent fournir de bons résultats en matière d'identification, en particulier dans le cas des tirs à faible hausse et hausse intermédiaire (figures IV.25a et IV.25b). La moins bonne proximité par rapport à la référence concerne la configuration où la hausse du canon est la plus élevée (figure IV.25c). La difficulté de l'identification dans cette configuration provient probablement du fait que la valeur du paramètre adimensionnel sort temporairement du domaine de validité du développement asymptotique. En effet, en dehors de la zone transsonique, la résolution est satisfaisante. Ce cas limite est difficile à traiter en raison de la forte obliquité du projectile autour de l'apogée.

4.3 Applications à deux tirs d'un projectile base-bleed

Le projectile étudié, ici, présente une particularité qui permet de réduire la traînée lors de la première phase du vol. Ce projectile, appelé "base-bleed", est équipé d'une charge propulsive spécifique située au niveau du culot. La charge brûle durant les premiers instants, cela modifie l'écoulement turbulent du fluide autour du projectile et diminue ainsi la traînée. Bien que cette technologie soit ancienne, elle permet d'augmenter la portée.

Le coefficient de traînée (figure IV.26) dans ce cas présente une forme très caractéristique, avec une augmentation significative, après quelques secondes de vol, dès la fin de la combustion. Cette particularité a nécessité une adaptation de la procédure pour prendre en compte la perte de masse, approximée comme étant linéaire, correspondant à la variation de masse de la charge propulsive lors de sa combustion.

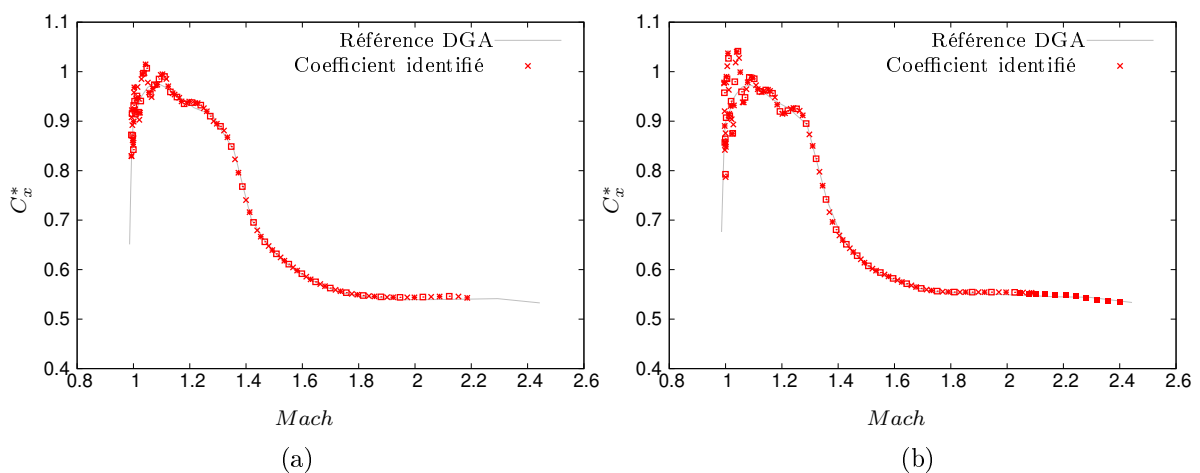


FIGURE IV.26 – Comparaison des coefficients de traînée identifiés à une référence DGA pour deux tirs d'un projectile base-bleed

4.4 Applications à huit tirs d'un projectile de petit calibre

La validité de l'étape d'identification du C_{x0} est aussi testée pour un projectile ayant un calibre différent. Dans ce cas, l'évolution du paramètre adimensionnel (figure IV.27) montre qu'il reste petit au cours du vol.

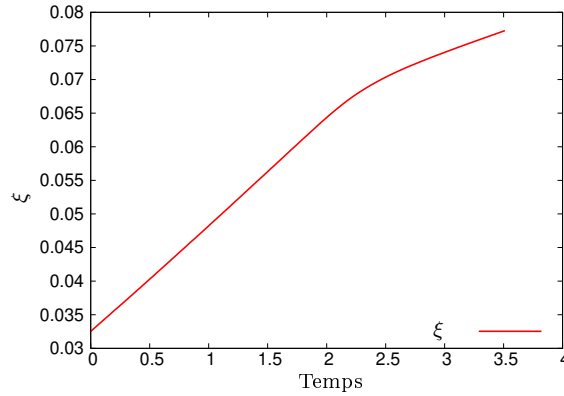


FIGURE IV.27 – Exemple d'évolution temporelle du paramètre adimensionnel ξ dans le cas d'un projectile de petit calibre

Les résultats d'identifications pour huit tirs avec des conditions initiales différentes sont données (figure IV.28). Nous comparons ces résultats à une référence fournie par les partenaires industriels.

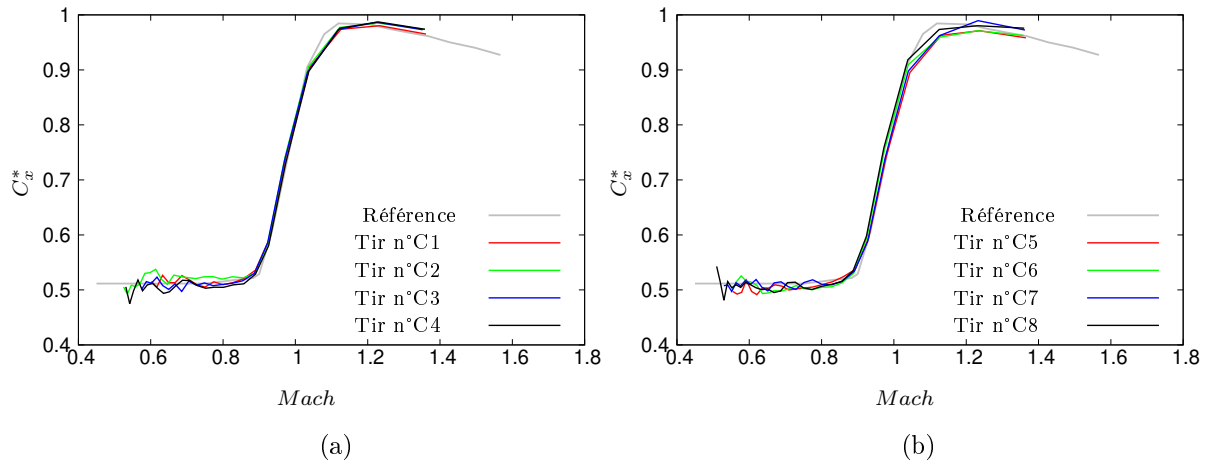


FIGURE IV.28 – Coefficient de traînée identifié à partir de données radar pour le projectile de petit calibre

Nous observons que pour l'ensemble des tests, les identifications sont proches de la référence. Nous retrouvons des erreurs plus significatives dans les deux zones que nous avons déjà évoquées : la pente de la courbe dans la zone transsonique et l'apparition de légères oscillations dans la zone des faibles Mach.

Bilan

Ce chapitre a présenté en détails l'application des deux premières étapes de l'identification séquentielle (l'identification du coefficient de traînée C_{x0} et du coefficient adimensionnel ξC_{zm0}) à partir de mesures provenant d'un radar de trajectographie. L'utilisation de ces mesures radar a nécessité une adaptation de la procédure d'identification afin de disposer des vitesses cartésiennes non mesurées par le radar, mais nécessaires lors de la procédure de minimisation. Ce processus est détaillé pour un tir de référence, présentant une élévation du canon et une vitesse moyenne, qui entre dans le domaine de validité du développement asymptotique proposé au chapitre II. L'estimation de ces vitesses est réalisée grâce à une régression polynomiale des données de position. L'impact des paramètres de régression est évalué en analysant les qualités des coefficients identifiés C_x et ξC_{zm0} .

Après avoir appliqué la procédure sur un tir de référence, nous avons présenté les résultats d'identification du coefficient de traînée pour un projectile de même calibre mais avec des conditions initiales de tir différentes. Nous avons montré que cette première étape de la procédure donne de bons résultats, y compris dans le cas de configurations pour lesquelles une partie de la trajectoire est en dehors de notre domaine de validité ($\xi > 0.1$).

Enfin, nous avons testé l'étape d'identification du C_{x0} pour différents projectiles. Les résultats obtenus pour les coefficients de traînée sont en accord avec les références connues de nos partenaires industriels.

Conclusion et perspectives

Parmi les différents domaines de la balistique, notre étude se focalise sur la balistique extérieure, qui examine la phase de vol libre du projectile. Pendant cette phase, le comportement en vol du projectile dépend à la fois des paramètres du milieu ambiant et des paramètres aérodynamiques. Ce travail présente une méthode pour déterminer les coefficients aérodynamiques, ce qui permet de prédire ses mouvements dans le fluide et, par conséquent, sa trajectoire.

Il existe de nombreuses méthodes avec des avantages et des inconvénients plus ou moins importants, dont une liste non exhaustive a été présentée dans le premier chapitre de ce manuscrit. Nous avons constaté l'importance du couplage de plusieurs méthodes pour obtenir un résultat suffisamment fiable. Les méthodes actuelles, bien que satisfaisantes et largement utilisées, ne répondent pas à toutes les exigences de l'industrie en termes de simplicité et de coûts. Dans cette thèse, nous proposons une nouvelle méthode basée sur les travaux antérieurs de H. Demailly [22] et V. Condaminet [17] pour le projectile type flèche, et poursuivie pour les projectiles gyrostabilisés par V. Condaminet [17] dans une configuration spécifique. La procédure, qui est proposée ici, repose sur un développement asymptotique du modèle balistique PMM, permettant ainsi une identification séquentielle des coefficients aérodynamiques avec l'idée que celle-ci soit généralisable à différents types de projectiles.

L'un des principaux avantages de cette méthode réside dans son utilisation exclusive de données radar, sans nécessiter d'instrumentation embarquée. Cette approche, basée sur des données radar, doit être robuste face aux bruits de mesure, qui peuvent varier considérablement en fonction des directions de vol et de la distance du projectile. La nouvelle méthode pour déterminer les coefficients aérodynamiques est fondée sur un modèle balistique PMM réduit, en raison de l'absence de mesure de l'obliquité, car il a été choisi de ne pas recourir à une instrumentation embarquée. Une étude quantitative a permis de mettre en évidence les différents niveaux d'influence des forces, et par conséquent, des coefficients aérodynamiques sur la trajectoire. L'introduction d'un paramètre adimensionnel $\xi = \frac{I_1 \omega_c}{mvD}$ a permis un développement asymptotique du modèle PMM réduit, conduisant ainsi à la détermination de relations à différents ordres, permettant une identification séquentielle des coefficients aérodynamiques. Pour explorer le domaine de validité de ce travail, une

analyse complémentaire de l'évolution temporelle du paramètre adimensionnel a permis de mettre en évidence les limites du développement autour de l'apogée pour des configurations de tirs à fortes hausses et de fortes vitesses initiales, configurations se rapprochant elles-mêmes des limites du modèle PMM.

Le chapitre III présente l'application de ce processus d'identification à partir de données générées. Nous avons étudié l'influence des différents paramètres de calcul utilisés dans la méthode d'optimisation sous contraintes lors de l'identification du coefficient C_{x0} , qui correspond à la première étape de la procédure séquentielle. Les résultats des autres étapes ont montré la possibilité d'identifier les coefficients ξC_{zm} et ξC_{ypm} . Bien que les coefficients identifiés soient en fait des coefficients globalisés, nous constatons la possibilité de prédire des trajectoires similaires à celles obtenues avec le modèle PMM de référence. Dans l'ensemble, nous obtenons de bons résultats d'identification pour les configurations situées dans le domaine de validité du développement asymptotique en ξ . Lorsque les configurations induisent un angle d'obliquité plus important, augmentant ainsi la valeur du paramètre adimensionnel, la correction des coefficients, notamment du coefficient de traînée avec sa contribution à l'ordre deux, est indispensable pour de faibles valeurs du nombre de Mach. Cette zone difficile à reconstruire correspond à la zone autour de l'apogée, où le paramètre adimensionnel atteint sa valeur maximale.

Les résultats obtenus à partir des données générées ont été validés à l'aide de données expérimentales collectées avec un radar de trajectographie. La qualité des données limitant les identifications, nous nous sommes restreints à l'application des deux premières étapes du processus séquentiel. Nous avons ainsi pu démontrer l'efficacité de la méthode pour estimer le coefficient de traînée C_x pour différentes configurations et différents projectiles. Les résultats obtenus pour le coefficient ξC_{zm0} sont à prendre avec précaution puisque les mesures à notre disposition présentent un niveau de bruit important.

La qualité des données radar est primordiale, en particulier dans la direction de la déviation, pour obtenir des identifications suffisamment fiables. Les objectifs de ce travail sont partiellement atteints grâce à une méthode fiable et robuste pour déterminer le coefficient de traînée, mais des améliorations doivent être apportées pour identifier les coefficients ayant moins d'influence, tels que ξC_{zm0} et ξC_{ypm0} . En particulier, l'identification du coefficient ξC_{zm0} est essentielle car il caractérise la déviation du projectile. Le terme en ξC_{ypm0} , quant à lui, influe sur la portée en augmentant l'altitude.

Une première approche pour améliorer les identifications serait de boucler le processus. Les coefficients identifiés à la fin du processus seraient ainsi réintroduits dans les différentes étapes pour obtenir de nouvelles identifications.

Une autre perspective consiste à établir automatiquement un lien entre la qualité des données radar et la précision des identifications. En étudiant le bruit des mesures, en particulier le bruit oscillant, nous pourrions déterminer les intervalles de temps où le taux de précision des identifications est le plus élevé. Cette démarche permettrait d'améliorer le coefficient ξC_{zm0} , qui utilise des données de déviation sujettes à un taux de bruit élevé. Il sera également nécessaire de porter une attention particulière à la zone transsonique, caractérisée par de fortes variations du coefficient de traînée.

De plus, à partir des modèles intermédiaires, nous pourrions calculer les accélérations à l'ordre zéro dans les directions du plan $(\underline{i}, \underline{j})$ et d'ordre un dans la direction de déviation (\underline{k}) . En déduisant l'accélération du projectile à partir des données de vitesse, nous serions en mesure d'estimer les erreurs d'accélération telles que $\xi \dot{u}_{1x}$, $\xi \dot{u}_{1y}$ et $\xi^2 \dot{u}_{2z}$. Cette approche nous dispenserait de faire des hypothèses sur la forme de l'accélération pour obtenir les corrections d'ordre un dans les directions du plan de tir $(\underline{i}, \underline{j})$. Ainsi, nous établirions une relation permettant d'introduire une correction non nulle ξC_{x1} du coefficient de traînée à l'ordre un, ainsi qu'une autre expression pour le calcul du coefficient ξC_{ypm0} .

Annexe A

Second développement asymptotique du modèle PMM réduit

Dans cette annexe sont détaillés les calculs effectués à partir de la seconde expression du PMM réduit où la contribution de l'effet Magnus est supposé être à l'ordre deux en ξ .

$$\dot{\underline{u}}^* = -C_x \underline{t} - \xi C_{zm} (\underline{t} \wedge \underline{u}^*) - \xi^2 R_2 C_{ypm} (\underline{t} \wedge (\underline{t} \wedge \underline{u}^*)) + \underline{g}^* + 2(\underline{t} \wedge \underline{\Omega}_T^*) \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Où } R_2 = \frac{mD^2}{I_1}.$$

Nous pouvons définir le développement asymptotique jusqu'à l'ordre deux en ξ de l'accélération adimensionnée et des coefficients aérodynamiques intervenants dans (A.1) (cf équations A.2).

$$\begin{aligned} \dot{\underline{u}}^* &= \dot{\underline{u}}_0^* + \xi \dot{\underline{u}}_1^* + \xi^2 \dot{\underline{u}}_2^* \\ C_x &= C_{x0} + \xi C_{x1} + \xi^2 C_{x2} \\ C_{zm} &= C_{zm0} + \xi C_{zm1} + \xi^2 C_{zm2} \\ C_{ypm} &= C_{ypm0} + \xi C_{ypm1} + \xi^2 C_{ypm2} \\ \underline{t} &= \underline{t}_0 + \xi \underline{t}_1 + \xi^2 \underline{t}_2 \\ \underline{\Omega}_T^* &= \xi \underline{\Omega}_{T0}^* \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

En remplaçant le développement de $\dot{\underline{u}}^*$ et des coefficients dans (A.1), nous obtenons l'équation :

$$\begin{aligned}
\underline{\dot{u}}_0^* + \xi \underline{\dot{u}}_1^* + \xi^2 \underline{\dot{u}}_2^* = & -C_{x0} \underline{t}_0 + \underline{g}^* \\
& - \xi \left[C_{x0} \underline{t}_1 + C_{x1} \underline{t}_0 + C_{zm0} (\underline{t}_0 \wedge \underline{\dot{u}}_0^*) - 2 \underline{t}_0 \wedge \underline{\Omega}_{T_0}^* \right] \\
& - \xi^2 \left[C_{x0} \underline{t}_2 + C_{x1} \underline{t}_1 + C_{x2} \underline{t}_0 + C_{zm0} (\underline{t}_1 \wedge \underline{\dot{u}}_0^* + \underline{t}_0 \wedge \underline{\dot{u}}_1^*) + C_{zm1} (\underline{t}_0 \wedge \underline{\dot{u}}_0^*) \right. \\
& \left. + R_2 C_{ypm0} \underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{\dot{u}}_0^*) - 2 \underline{t}_1 \wedge \underline{\Omega}_{T_0}^* \right]
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Par identification terme à terme nous avons obtenu à chaque ordre :

$$\begin{cases}
\underline{\dot{u}}_0^* = -C_{x0} \underline{t}_0 + \underline{g}^* \\
\underline{\dot{u}}_1^* = -(C_{x0} \underline{t}_1 + C_{x1} \underline{t}_0) - C_{zm0} (\underline{t}_0 \wedge \underline{\dot{u}}_0^*) + 2 \underline{t}_0 \wedge \underline{\Omega}_{T_0}^* \\
\underline{\dot{u}}_2^* = -(C_{x0} \underline{t}_2 + C_{x1} \underline{t}_1 + C_{x2} \underline{t}_0) - C_{zm0} (\underline{t}_1 \wedge \underline{\dot{u}}_0^* + \underline{t}_0 \wedge \underline{\dot{u}}_1^*) - C_{zm1} (\underline{t}_0 \wedge \underline{\dot{u}}_0^*) \\
\quad - R_2 C_{ypm0} \underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{\dot{u}}_0^*) + 2 \underline{t}_1 \wedge \underline{\Omega}_{T_0}^*
\end{cases} \tag{A.4}$$

Nous observons que dans $\underline{\dot{u}}_1^*$ (respectivement $\underline{\dot{u}}_2^*$) intervient les contributions d'ordre inférieure $\underline{\dot{u}}_0^*$ (respectivement $\underline{\dot{u}}_0^*$ et $\underline{\dot{u}}_1^*$). Cependant par récurrence, il est possible de les remplacer en tenant compte des relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\underline{t}_0 \wedge \underline{\dot{u}}_0^* &= \underline{t}_0 \wedge \underline{g}^* \\
\underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{\dot{u}}_0^*) &= \underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) \\
\underline{t}_1 \wedge \underline{\dot{u}}_0^* &= -C_{x0} \underline{t}_1 \wedge \underline{t}_0 + \underline{t}_1 \wedge \underline{g}^* \\
\underline{t}_0 \wedge \underline{\dot{u}}_1^* &= -C_{x0} \underline{t}_0 \wedge \underline{t}_1 - C_{zm0} \underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) + 2 \underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{\Omega}_{T_0}^*)
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Nous obtenons ainsi à chaque ordre les relations suivantes :

$$\begin{cases}
\underline{\dot{u}}_0^* = -C_{x0} \underline{t}_0 + \underline{g}^* \\
\underline{\dot{u}}_1^* = -(C_{x0} \underline{t}_1 + C_{x1} \underline{t}_0) - C_{zm0} (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) + 2 \underline{t}_0 \wedge \underline{\Omega}_{T_0}^* \\
\underline{\dot{u}}_2^* = -(C_{x0} \underline{t}_2 + C_{x1} \underline{t}_1 + C_{x2} \underline{t}_0) - C_{zm0} [2 \underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{\Omega}_{T_0}^*) + (\underline{t}_1 \wedge \underline{g}^*)] - C_{zm1} (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) \\
\quad + (C_{zm0}^2 - R_2 C_{ypm0}) \underline{t}_0 \wedge (\underline{t}_0 \wedge \underline{g}^*) + 2 \underline{t}_1 \wedge \underline{\Omega}_{T_0}^*
\end{cases} \tag{A.6}$$

Compte tenu de la forme de la vitesse, et en particulier que la composante en déviation (suivant \underline{k}) est petite devant les deux autres, nous faisons les approximations suivantes :

$$\underline{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ \xi v_{1z} \end{pmatrix} \quad \text{ce qui conduit à} \quad \underline{t}_0 = \begin{pmatrix} t_{0x} \\ t_{0y} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{t}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t_{1z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{t}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Nous faisons aussi les approximations que $v \approx v_0$ et $t_0 \approx 1$ ce qui permet, après projection dans les trois directions d'obtenir les relations suivantes :

À l'ordre zéro en ξ :

$$\begin{cases} \dot{u}_{0x}^* = -C_{x0} t_{0x} & (\text{A.8a}) \\ \dot{u}_{0y}^* = -C_{x0} t_{0y} - g^* & (\text{A.8b}) \end{cases}$$

À l'ordre un en ξ :

$$\begin{cases} \dot{u}_{1x}^* = -C_{x1} t_{0x} + 2t_{0y} \Omega_{T0z}^* & (\text{A.9a}) \\ \dot{u}_{1y}^* = -C_{x1} t_{0y} - 2t_{0x} \Omega_{T0z}^* & (\text{A.9b}) \\ \dot{u}_{1z}^* = -C_{x0} t_{1z} + C_{zm0} t_{0x} g^* + 2(t_{0x} \Omega_{T0y}^* - t_{0y} \Omega_{T0x}^*) & (\text{A.9c}) \end{cases}$$

À l'ordre deux en ξ :

$$\begin{cases} \dot{u}_{2x}^* = -C_{x2} t_{0x} - C_{zm0} \left[2t_{0y} (t_{0x} \Omega_{T0y}^* - t_{0y} \Omega_{T0x}^*) + t_{1z} g^* \right] \\ \quad - (C_{zm0}^2 - R_2 C_{ypm0}) t_{0x} t_{0y} g^* - 2 t_{1z} \Omega_{T0y}^* & (\text{A.10a}) \\ \dot{u}_{2y}^* = -C_{x2} t_{0y} - C_{zm0} \left[2t_{0x} (t_{0y} \Omega_{T0x}^* - t_{0x} \Omega_{T0y}^*) \right] \\ \quad + (C_{zm0}^2 - R_2 C_{ypm0}) t_{0x}^2 g^* + 2 t_{1z} \Omega_{T0x}^* & (\text{A.10b}) \\ \dot{u}_{2z}^* = -C_{x1} t_{1z} + 2 C_{zm0} \Omega_{T1z}^* + C_{zm1} t_{0x} g^* & (\text{A.10c}) \end{cases}$$

Les équations (A.8) et (A.9c) permettent l'identification de C_{x0} et C_{zm0} , elles sont identiques à celles obtenues au chapitre 2.

Les autres relations permettant le calcul des autres contributions changent.

En effet, en supposant $\dot{u}_{1x}^* = \dot{u}_{1y}^* = \dot{u}_{2x}^* = \dot{u}_{2y}^* = \dot{u}_{2z}^* \approx 0$, nous pouvons écrire des combinaisons linéaires des équations obtenues ((A.9a), (A.9b), (A.10a) et (A.10b)) aux ordres un et deux :

$$\begin{cases} v_{0x}\dot{u}_{1x}^* + v_{0y}\dot{u}_{1y}^* = 0 = -C_{x1}t_0^2 \\ v_{0x}\dot{u}_{2x}^* + v_{0y}\dot{u}_{2y}^* = 0 = -C_{x2}t_0^2 - C_{zm0}t_{1z}t_{0x}g^* + 2t_{1z}(t_{0y}\Omega_{T0x}^* - t_{0x}\Omega_{T0y}^*) \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

et obtenons les termes correctifs du coefficient de traînée :

$$\boxed{C_{x1} = 0} \quad (\text{A.12})$$

$$\boxed{C_{x2} = -C_{zm0}t_{1z}t_{0x}g^* + 2t_{1z}(t_{0y}\Omega_{T0x}^* - t_{0x}\Omega_{T0y}^*)} \quad (\text{A.13})$$

A partir de l'équation (A.10c), et en tenant compte de (A.12), le terme correctif du coefficient C_{zm} peut être estimé :

$$\boxed{C_{zm1} = -C_{zm0} \frac{2\Omega_{T0z}^*}{t_{0x}g^*}} \quad (\text{A.14})$$

Enfin, par combinaison linéaire des équations (A.10a) et (A.10b), nous obtenons une estimation du C_{ypm0} (A.15) :

$$\boxed{C_{ypm0} = \frac{1}{R_2} \left[2 \frac{t_{1z}}{t_{0x}g^*} (t_{0y}\Omega_{T0y}^* + t_{0x}\Omega_{T0x}^*) + C_{zm0} \left[\frac{2}{t_{0x}g^*} (t_{0x}\Omega_{T0y}^* - t_{0y}\Omega_{T0x}^*) + \frac{t_{0y}t_{1z}}{t_{0x}} \right] + C_{zm0}^2 \right]} \quad (\text{A.15})$$

Du fait des hypothèses faites sur la forme du développement de l'accélération

$\underline{\dot{u}}^* = \begin{pmatrix} \dot{u}_{0x}^* \\ \dot{u}_{0y}^* \\ \xi \dot{u}_{1z}^* \end{pmatrix}$, les expressions donnant les termes correctifs ξC_{x1} , $\xi^2 C_{x2}$ et ξC_{zm1} ainsi que

l'estimation du coefficient $C_{ypm} \approx C_{ypm0}$ sont à considérer avec précaution.

Annexe B

Identification des conditions initiales d'un tir

Une demande des partenaires industriels est de fournir un outil permettant de déterminer a posteriori les conditions du tir lors des essais.

En pratique, lors des essais de tir, les opérateurs adaptent la position du canon à partir de la position du tir précédent au lieu de revenir à une position de référence. Cette pratique a tendance à cumuler des erreurs de positionnement sur les hausses et azimuts de tir initialement prévues dans la planification des tirs. Pour éviter ce problème, il faudrait faire un zéro entre chaque mesure, ce qui est difficile à mettre en œuvre en pratique sans rallonger la durée des essais. Une autre erreur, moins importante, porte sur la vitesse initiale du tir, mesurée avec un radar spécifique à la sortie du canon. Un radar plus précis ayant un pas de temps de mesure plus petit que le radar de trajectographie SARAH est utilisé et permet d'améliorer le calcul de ces conditions initiales. L'azimut étant calculé principalement à partir de la déviation, les données dans cette direction doivent être de bonne qualité avec une faible dispersion.

Un code de calcul par simple dichotomie basé sur les équations du modèle balistique PMM permet de déterminer les conditions initiales du tir (Hausse du canon, Azimut et vitesse initiale) en comparant des trajectoires calculées aux trajectoires mesurées. L'initialisation est faite à l'aide des données de mesures de hausse, d'azimut et de vitesse fournies par les opérateurs d'essais. Afin d'améliorer les résultats, le processus consiste à modifier un seul paramètre à la fois (hausse, azimut ou vitesse) et à répéter alternativement pour s'approcher au mieux de la trajectoire mesurée. Les pas (hausse, azimut ou vitesse) à chaque itération peuvent aussi être modifiés pour améliorer la précision du résultat. Bien que cette méthode ne soit pas la plus optimale, elle donne de très bons résultats comme le montre les tableaux B.2 et B.3. Les valeurs calculées sont comparées à une "référence" fournie par la DGA Techniques Terrestres dont la procédure d'obtention ne nous a pas été fournie. La mesure donnée pour l'azimut est la dérive du projectile définie comme la différence d'azimut entre la ligne de tir et l'orientation du canon exprimée en millièmes d'artillerie. Cette dérive précise aussi le sens de décalage par rapport à la ligne de tir signifié par une

lettre D pour droite ou G pour gauche.

| Nom Tir | Vitesse Initiale <i>m/s</i> | Hausse <i>mil</i> | Dérive <i>mil</i> |
|---------|--------------------------------|----------------------|----------------------|
| Tir n°1 | 939.2 | 501.50 | 36.3 <i>G</i> |
| Tir n°2 | 938.2 | 699.99 | 52.7 <i>G</i> |
| Tir n°3 | 803.2 | 600.02 | 38.0 <i>G</i> |
| Tir n°4 | 938.5 | 400.85 | 29.2 <i>G</i> |
| Tir n°5 | 933.1 | 599.35 | 47.5 <i>G</i> |
| Tir n°6 | 933 | 801.00 | 21.9 <i>G</i> |

Tableau B.1 – Conditions initiales des tirs fournies par les données expérimentales

| Nom Tir | Correction calculée par notre procédure | | | Correction donnée par la DGA | |
|---------|--|----------------------|----------------------|---------------------------------|----------------------|
| | Vitesse <i>m/s</i> | Hausse <i>mil</i> | Dérive <i>mil</i> | Hausse <i>mil</i> | Dérive <i>mil</i> |
| Tir n°1 | -1.65 | -1.5 | -4.3 | -1.2 | -4.1 |
| Tir n°2 | -1.00 | 0.0 | -2.7 | 0.1 | -2.5 |
| Tir n°3 | -1.49 | 0.0 | -3.0 | 0.0 | -3.0 |
| Tir n°4 | -0.30 | -0.8 | -1.2 | -1.2 | -1.3 |
| Tir n°5 | 5.70 | 0.7 | -1.5 | -0.3 | -1.6 |
| Tir n°6 | 0.70 | -1.0 | 1.1 | -1.7 | -1.2 |

Tableau B.2 – Comparaison des corrections obtenues par notre code et celles données par la DGA

| Nom Tir | Ecart entre les corrections | |
|---------|-----------------------------|----------------------|
| | Hausse <i>mil</i> | Dérive <i>mil</i> |
| Tir n°1 | 0.3 | 0.1 |
| Tir n°2 | 0.1 | 0.2 |
| Tir n°3 | 0.1 | 0.0 |
| Tir n°4 | 0.4 | 0.1 |
| Tir n°5 | 1.0 | 0.1 |
| Tir n°6 | 0.7 | -0.1 |

Tableau B.3 – Ecart entre les corrections obtenues par notre code et celles données par la DGA

Bibliographie

- [1] M. Albisser, S. Dobre, C. Berner, M. Thomassin, and H. Garnier. Identifiability investigation of the aerodynamic coefficients from free flight tests. In *AIAA Atmospheric Flight Mechanics (AFM) Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Boston, MA, USA, 19-22 August 2013. [doi:10.2514/6.2013-4922](https://doi.org/10.2514/6.2013-4922).
- [2] M. Albisser. *Identification of aerodynamic coefficients from free flight data*. PhD thesis, Université de Lorraine 2015.
- [3] L. Baranowski. Equations of motion of a spin-stabilized projectile for flight stability testing. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 51 :235–246, 2013. [2013-1-baranowski-path](#).
- [4] L. Baranowski. Feasibility analysis of the modified point mass trajectory model for the need of ground artillery fire control systems. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 51(3) :511–522, 2013. [2013-2-baranowski-path](#).
- [5] L. Baranowski, B. Gadowski, J. Szymonik, and P. Majewski. Comparison of explicit and implicit forms of the modified point mass trajectory model. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 54 :1183–1195, 2016. [doi:10.15632/jtam-pl.54.4.1183](https://doi.org/10.15632/jtam-pl.54.4.1183).
- [6] L. Baranowski, B. Gadowski, P. Majewski, and J. Szymonik. A concept of live fire testing to identify the aerodynamic factors of a 35-mm AA projectile. *Problems of Mechatronics Armament Aviation Safety Engineering*, 10(2) :89–102, June 2019. [doi:10.5604/01.3001.0013.2118](https://doi.org/10.5604/01.3001.0013.2118).
- [7] L. Baranowski, P. Majewski, and J. Szymonik. Explicit form of the "modified point mass trajectory model" for the use in fire control systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences : Technical Sciences*, 68(5) :1167–1175, 2020. [doi:10.24425/bpasts.2020.134661](https://doi.org/10.24425/bpasts.2020.134661).
- [8] D. P. Bertsekas. *Nonlinear programming*. Athena Scientific, 1999.
- [9] C. de Boor. On calculating with b-splines. *Journal of Approximation Theory*, 6(1) :50–62, 1972. [doi:10.1016/0021-9045\(72\)90080-9](https://doi.org/10.1016/0021-9045(72)90080-9).
- [10] S. Chang, Y. Liu, and W. Wei. Global optimization of aerodynamic coefficient identification through combined multiple measured data of projectiles. In *Proceedings - 31st International Symposium on Ballistics, BALLISTICS 2019*, volume 1, page 630 – 642, 2019. www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2...

- [11] S. Changey, V. Fleck, and D. Beauvois. Projectile attitude and position determination using magnetometer sensor only. In K. L. Priddy, editor, *SPIE Proceedings*, volume 5803, page 49 – 58. SPIE, 2005. doi:10.1117/12.602099.
- [12] S. Changey, E. Pecheur, L. Bernard, E. Sommer, P. Wey, and C. Berner. Real time estimation of projectile roll angle using magnetometers : In-flight experimental validation. In *Proceedings of the 2012 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium*, pages 371–376, Myrtle Beach, SC, USA, 23-26 April 2012. doi:10.1109/plans.2012.6236904.
- [13] A. Cimetière, F. Delvare, M. Jaoua, and F. Pons. Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization. *Inverse Problems*, 17(3) :553–570, 2001. doi:10.1088/0266-5611/17/3/313.
- [14] C. Combettes, S. Changey, R. Adam, and E. Pecheur. Attitude and velocity estimation of a projectile using low cost magnetometers and accelerometers. In *2018 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium (PLANS)*, pages 650–657, Monterey, CA, USA, 23-26 April 2018. doi:10.1109/plans.2018.8373439.
- [15] V. Condaminet, F. Delvare, D. Choi, H. Demailly, C. Grignon, and S. Heddadj. Identification of aerodynamic coefficients of a projectile and reconstruction of its trajectory from partial flight data. *Computer Assisted Methods in Engineering and Science*, 21(3-4) :177–186, 01 2014. <https://cames.ippt.pan.pl/index.php/cames/article/view/36/33>.
- [16] V. Condaminet, F. Delvare, C. Grignon, and S. Heddadj. Identification of the aerodynamic coefficients of a spin-stabilized projectile from free flight data. In *29th International Symposium on Ballistics*, Edinburgh, Scotland, 9-13 May 2016.
- [17] V. Condaminet. *Identification par méthode inverse des coefficients aérodynamiques d'un projectile à partir de l'observation de son vol*. PhD thesis, Université de Caen, 2016.
- [18] B. D. Corte, A. A. Perpignan, M. van Sluis, and A. G. Rao. Experimental and computational analysis of model–support interference in low-speed wind-tunnel testing of fuselage-boundary-layer ingestion. *MATEC Web of Conferences*, 304 :02020, 2019. doi:10.1051/mateconf/201930402020.
- [19] M. Costello and T. Jitraphai. Determining angular velocity and angular acceleration of projectiles using triaxial acceleration measurements. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 39(1) :73–80, Jan. 2002. doi:10.2514/2.3784.
- [20] A. De and P. Chettri. *Drag Reduction with Optimum Designing of a Base Bleed Projectile Using Computational Analysis*, pages 23–45. Springer Singapore, July 2019. doi:10.1007/978-981-13-9012-8_2.
- [21] F. Delvare. *Une méthode inverse itérative à effet régularisant évanescent*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2000.

- [22] H. Demailly. *Identification des coefficients aérodynamiques d'un projectile à partir de mesures prises en vol*. PhD thesis, Université d'Orléans, 2011.
- [23] H. Demailly, F. Delvare, C. Grignon, S. Heddadj, and P. Bailly. Identification of aerodynamic coefficients of a kinetic energy projectile from flight data. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 21(1) :63–83, 2013. doi:10.1080/17415977.2012.668676.
- [24] Z. Deng, Q. Shen, J. Cheng, and H. Wang. Trajectory estimation method of spinning projectile without velocity input. *Measurement*, 160 :107831, 2020. doi:10.1016/j.measurement.2020.107831.
- [25] P. Denis. Le code de prévision aérodynamique de l'ONERA : "MISSILE". In *Applied Vehicle Technology Panel Symposium (RTO Meeting Proceedings, 5)*, page 336 – 344, Sorrento, Italy, 11-14 May 1998. <https://apps.dtic.mil/sti/pdfs/ADA359244.pdf>.
- [26] J. DeSpirito. CFD Aerodynamic Characterization of 155-mm Projectile at High Angles-of-Attack. In *35th AIAA Applied Aerodynamics Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 5-9 June, Denver, Colorado, 2017. doi:10.2514/6.2017-3397.
- [27] A. Dewan. *Tackling Turbulent Flows in Engineering*. Springer Berlin Heidelberg, 2011. doi:10.1007/978-3-642-14767-8.
- [28] Direction Générale de l'Armement. 2022. <https://twitter.com/dga/status/1547601625631506437>.
- [29] S. Dobre, M. Albissier, C. Berner, L. Bernard, and C. Grignon. Identification of the aerodynamic coefficients of a 155mm artillery shell based on free flight data. In *29th International Symposium on Ballistics*, Edinburgh, Scotland, 9-13 May 2016. <https://www.dpi-proceedings.com/index.php/ballistics/article/view/2048>.
- [30] E. Fehlberg. Classical Fifth-, Sixth-, Seventh-, and Eighth-Order Runge-Kutta Formulas with Step-size Control. Technical report, NASA Technical report, NASA TR R-287, 1968. <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19680027281/downloads/19680027281.pdf>.
- [31] J. H. Ferziger and M. Perić. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer Berlin Heidelberg, 2002. doi:10.1007/978-3-642-56026-2.
- [32] V. Fleck. Introduction a la balistique extérieure. *Institut Franco-Allemand de Recherche de Saint-Louis (ISL)*, France, 1998.
- [33] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmsh : A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11) :1309–1331, May 2009. doi:10.1002/nme.2579.
- [34] K. E. T. Giljarhus, M. T. Gooding, and J. Njærheim. Disc golf trajectory modelling combining computational fluid dynamics and rigid body dynamics. *Sports Engineering*, 25(1) :1–9, 2022. doi:10.1007/s12283-022-00390-5.

- [35] M. Gross and M. Costello. Smart projectile parameter estimation using meta-optimization. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 56(5) :1508–1519, Sept. 2019. [doi:10.2514/1.a34059](https://doi.org/10.2514/1.a34059).
- [36] J. R. Kensrud and L. V. Smith. Drag and lift measurements of solid sports balls in still air. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part P : Journal of Sports Engineering and Technology*, 232(3) :255–263, 2018. [doi:10.1177/1754337117740749](https://doi.org/10.1177/1754337117740749).
- [37] Z. Liang, J. Guan, Y. Xia, and W. Yi. Projectile drag coefficient identification based on extreme learning. *AIP Advances*, 11(9), Sept. 2021. [doi:10.1063/5.0062342](https://doi.org/10.1063/5.0062342).
- [38] R. F. Lieske and M. L. Reiter. Equations of Motion for a Modified Point Mass Trajectory. Ballistic Research Laboratories. Technical Report No. 1314, March 1966. <https://apps.dtic.mil/sti/pdfs/AD0485869.pdf>.
- [39] R. F. Lieske and J. W. Kochenderfer. Determination of Performance Parameters for Fin-Stabilized Free-Flight Missiles. Ballistic Research Laboratories. Technical Report No. 1349, December 1966. <https://apps.dtic.mil/sti/pdfs/AD0809790.pdf>.
- [40] R. F. Lieske and A. MacKenzie. Determination of aerodynamic drag from radar data. Ballistic Research Laboratories. Memorandum Report, BRL-MR-2210. 1972. <https://apps.dtic.mil/sti/tr/pdf/AD0750564.pdf>.
- [41] R. F. Lieske. Determination of aerodynamic drag and exterior ballistic trajectory simulation for the 155mm, DPICM, M864 base-burn projectile. Memorandum Report, BRL-MR-2210. 1989. <https://apps.dtic.mil/sti/tr/pdf/ADA209510.pdf>.
- [42] D. Machala. *Comportement d'un projectile en vol libre : modélisation LPV et analyse de sensibilité*. PhD thesis, Université de Lorraine 2019.
- [43] D. Machala, F. Collin, M. Gilson, M. Albisser, and S. Dobre. Global sensitivity analysis for modeling the free-flight behavior of an artillery projectile. *AIAA Journal*, 58(7) :3139–3148, July 2020. [doi:10.2514/1.j059065](https://doi.org/10.2514/1.j059065).
- [44] G. Magnus. Über die durch die rotation der geschosse bedingte abweichung (De la déviation due au mouvement de rotation des projectiles). *Berichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Annalen der Physik und Chemie, Zweite Folge*, 1852-1853.
- [45] R. McCoy. *Modern Exterior Ballistics : The launch and Flight Dynamics of Symmetric Projectiles*. Schiffer Pub., 1999.
- [46] F. Menter. Zonal two equation k-w turbulence models for aerodynamic flows. In *23rd Fluid Dynamics, Plasmadynamics, and Lasers Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Orlando,FL,U.S.A., July 6-9, 1993. [doi:10.2514/6.1993-2906](https://doi.org/10.2514/6.1993-2906).
- [47] Ministère des Armées Armée de Terre. CAESAR : Camion équipé d'un système d'artillerie 2022. . [www.defense.gouv.fr/...](http://www.defense.gouv.fr/)
- [48] S. Mouton. Numerical investigations of model support interference in subsonic and transonic wind tunnels. In *ODAS 2007 - 8th*

- ONERA-DLR Aerospace Symposium*, Göttingen, Germany, October, 2007. https://hal.science/hal-03017003/file/D0C362594_s1.pdf.
- [49] L. Muller, M. Libsig, B. Martinez, M. Bastide, D. Bidino, B. Yannick, and J.-C. Roy. Wind tunnel measurements of the dynamic stability derivatives of a fin-stabilized projectile by means of a 3-axis freely rotating test bench. *AIAA 2020*, June 2020. [doi:10.2514/6.2020-2782](https://doi.org/10.2514/6.2020-2782).
- [50] G. Ocokoljić, B. Rašuo, and M. Kozić. Supporting system interference on aerodynamic characteristics of an aircraft model in a low-speed wind tunnel. *Aerospace Science and Technology*, 64 :133–146, May 2017. [doi:10.1016/j.ast.2017.01.021](https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.01.021).
- [51] D. S. K. Reddy, P. K. Sah, and A. Sharma. Prediction of Drag Coefficient of a Base Bleed Artillery Projectile at Supersonic Mach number. *Journal of Physics : Conference Series*, 2054(1) :012013, Oct. 2021. [doi:10.1088/1742-6596/2054/1/012013](https://doi.org/10.1088/1742-6596/2054/1/012013).
- [52] F. Salmon and L. Chatellier. pyMeshFOAM : Automated meshing for CFD and fluid–structure simulations. *SoftwareX*, 23 :101431, July 2023. [doi:10.1016/j.softx.2023.101431](https://doi.org/10.1016/j.softx.2023.101431).
- [53] K. Seo, H. Okuizumi, Y. Konishi, T. Kobayashi, H. Hasegawa, and S. Obayashi. Measurement of aerodynamic force and moment acting on a javelin using a magnetic suspension and balance system. *Scientific Reports*, 13(1), 2023. [doi:10.1038/s41598-023-27534-2](https://doi.org/10.1038/s41598-023-27534-2).
- [54] K. Shah, R. Shakya, and S. Mittal. Aerodynamic forces on projectiles used in various sports. *Physics of Fluids*, 31(1) :015106, Jan. 2019. [doi:10.1063/1.5064700](https://doi.org/10.1063/1.5064700).
- [55] T.-H. Shih, W. W. Liou, A. Shabbir, Z. Yang, and J. Zhu. A new k- ϵ eddy viscosity model for high reynolds number turbulent flows. *Computers & Fluids*, 24(3) :227–238, Mar. 1995. [doi:10.1016/0045-7930\(94\)00032-t](https://doi.org/10.1016/0045-7930(94)00032-t).
- [56] J. Siewert. Using prodas 6 dof traj simulation to estimate dispersion. *Report, Arrow Tech Associates, South Burlington, VT*, 2013.
- [57] STANAG 4082. Adoption of a Standard Artillery Computer Meteorological Message (METCM). NATO Standardization Agreement, Edition 2, 1969.
- [58] STANAG 4355. The Modified Point Mass and five Degrees of Freedom Trajectory Models. NATO Standardization Agreement NSA/0454, Edition 3, 2009.
- [59] STANREC 4618. the Six/Seven Degrees of Freedom Guided Projectile Trajectory Model. NATO Standardisation recommendation, Draft Edition 1, 2014.
- [60] T. Wang, W. Yi, and Y. Xia. Aerodynamic Parameter Identification of Projectile Based on Improved Extreme Learning Machine and Ensemble Learning Theory. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2023 :1–15, Feb. 2023. [doi:10.1155/2023/3854295](https://doi.org/10.1155/2023/3854295).
- [61] J. F. Wendt. *Computational Fluid Dynamics*. Springer Berlin Heidelberg, 3ème édition, 2009. [doi:10.1007/978-3-540-85056-4](https://doi.org/10.1007/978-3-540-85056-4).

- [62] P. Wernert, S. Theodoulis, and Y. Morel. Flight Dynamics Properties of 155 mm Spin-Stabilized Projectiles Analyzed in DifferentBody Frames. In *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2-10 August, Toronto, Ontario, Canada, 2010. doi:[10.2514/6.2010-7640](https://doi.org/10.2514/6.2010-7640).
- [63] P. Wey, D. Corriveau, T. Saitz, W. de Ruijter, and P. Strömbäck. Balco 6/7-dof trajectory model. In *29th International Symposium on Ballistics*, Edinburgh, Scotland, 9-13 May 2016.
- [64] B. Q. Yang, L. Zhang, Q. Shen, L. X. Liu, and C. Shi. Aerodynamic characteristics of Spin-stabilized Projectile at High Angle of Attack. *Journal of Physics : Conference Series*, 2460(1) :012067, Apr. 2023. doi:[10.1088/1742-6596/2460/1/012067](https://doi.org/10.1088/1742-6596/2460/1/012067).

Procédure unifiée d'identification par méthode inverse de coefficients aérodynamiques d'un projectile.

Résumé : Dans le domaine de la balistique extérieure, l'identification des coefficients aérodynamiques d'un projectile est cruciale pour la prédiction de sa trajectoire et de son point d'impact. Parmi les nombreuses méthodes d'identification existantes, l'approche proposée à partir de données issues de vol instrumenté se distingue par deux aspects majeurs : premièrement, elle repose exclusivement sur des mesures radar, éliminant ainsi tout équipement embarqué, et deuxièmement, elle permet d'identifier les coefficients aérodynamiques de manière séquentielle. L'introduction d'un petit paramètre adimensionnel et le développement asymptotique du modèle balistique du Point Matériel Modifié permettent d'une part de mettre en évidence les différents niveaux d'influence des forces aérodynamiques dans les différentes directions et d'autre part, d'obtenir des modèles intermédiaires ou des expressions analytiques pour l'identification des coefficients aux différents ordres. Notre technique d'optimisation recherche, à chaque étape, le couple vitesses/coefficients aérodynamiques qui satisfait les modèles balistiques intermédiaires tout en se rapprochant au mieux de la trajectoire mesurée. La validation de la procédure d'identification séquentielle est effectuée en plusieurs étapes, dans un premier temps à partir de données synthétiques puis dans un second temps en utilisant des données expérimentales obtenues à l'aide d'un radar de trajectographie. Dans le cadre, de la qualification de la méthode, différentes configurations de tirs pour différents projectiles sont analysées avec l'obtention de résultats aussi précis, pour le coefficient de traînée, que ceux obtenus par les outils existants.

Mots clés : identification, coefficients aérodynamiques, développement asymptotique, méthode inverse, projectile gyroscopiquement stabilisé, radar de trajectographie.

Unified procedure for the identification of projectile's aerodynamic coefficients by inverse method.

Abstract : In the field of external ballistics, identifying the aerodynamic coefficients of a projectile is crucial to predict its trajectory and point of impact. Among the various existing identification methods, the proposed approach, which utilizes data from instrumented flights, stands out for two major aspects : first, it relies exclusively on radar measurements, eliminating the need for onboard equipment, and second, it allows for sequential identification of the aerodynamic coefficients. The introduction of a dimensionless small parameter and the subsequent asymptotic development of the Modified Point-Mass ballistic model serve a dual purpose. On the one hand, they reveal the varying levels of influence exerted by aerodynamic forces in different directions, and on the other hand, furnish intermediate models or analytical expressions for coefficient identification across various orders. Our optimization technique searches, at each step, for the velocity/aerodynamic coefficient pair that satisfies the intermediate ballistic models while closely matching the measured trajectory. The validation of the sequential identification procedure is carried out in several steps, initially using synthetic data and then using experimental data obtained with a trajectory radar. In the context of method validation, diverse firing configurations for a range of projectiles undergo rigorous analysis, resulting in drag coefficient results as precise as those attained by established tools.

Keywords : identification, aerodynamic coefficients, asymptotic development, inverse method, spin stabilized projectile, tracking radar.

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme

CNRS UMR 6139

Université de Caen Normandie BP 5186

14032 Caen Cedex