



**HAL**  
open science

# Techniques de modélisation multi-échelle de l'interface acier-béton pour le calcul de structures en béton armé à grande échelle

Maryam Trad

► **To cite this version:**

Maryam Trad. Techniques de modélisation multi-échelle de l'interface acier-béton pour le calcul de structures en béton armé à grande échelle. Génie civil. INSA de Lyon, 2023. Français. NNT : 2023ISAL0067 . tel-04427042

**HAL Id: tel-04427042**

**<https://theses.hal.science/tel-04427042>**

Submitted on 6 Feb 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THESE de DOCTORAT DE L'INSA LYON,  
membre de l'Université de Lyon**

**Ecole Doctorale N° 162  
(Mécanique, Énergétique, Génie civil, Acoustique)**

**Spécialité : Génie civil**

Soutenue publiquement le 03/10/2023, par :  
**Maryam Trad**

---

**Techniques de modélisation multi-  
échelle de l'interface acier-béton pour  
le calcul de structures en béton armé à  
grande échelle**

---

Devant le jury composé de :

Christian La Borderie	Professeur des universités, Directeur	ISA BTP	Président
Elias Bou Said	Expert-Directeur d'activité nucléaire	EGIS/EAS	Examinateur
Delphine Brancherie	Professeure des universités	UTC	Rapporteuse
Ludovic Jason	Directeur de recherche, HDR	CEA	Rapporteur
Stéphane Grange	Professeur des universités	INSA Lyon	Directeur de thèse
Benjamin Richard	Chef de laboratoire, HDR	IRSN	Co-directeur de thèse
Ibrahim Bitar	Ingénieur-chercheur	IRSN	Encadrant de thèse
Sylvie Michel-Ponnelle	Ingénieure-chercheuse, Experte	EDF	Invitée

Référence : TH1000\_Maryam TRAD

L'INSA Lyon a mis en place une procédure de contrôle systématique via un outil de détection de similitudes (logiciel Compilatio). Après le dépôt du manuscrit de thèse, celui-ci est analysé par l'outil. Pour tout taux de similarité supérieur à 10%, le manuscrit est vérifié par l'équipe de FEDORA. Il s'agit notamment d'exclure les auto-citations, à condition qu'elles soient correctement référencées avec citation expresse dans le manuscrit.

Par ce document, il est attesté que ce manuscrit, dans la forme communiquée par la personne doctorante à l'INSA Lyon, satisfait aux exigences de l'Établissement concernant le taux maximal de similitude admissible.

## Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
<b>CHIMIE</b>	<p><b><u>CHIMIE DE LYON</u></b></p> <p><a href="https://www.edchimie-lyon.fr">https://www.edchimie-lyon.fr</a>                      Sec. : Renée EL MELHEM                      Bât. Blaise PASCAL, 3e étage                      secretariat@edchimie-lyon.fr</p>	<p><b>M. Stéphane DANIELE</b>                      C2P2-CPE LYON-UMR 5265                      Bâtiment F308, BP 2077                      43 Boulevard du 11 novembre 1918                      69616 Villeurbanne  <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a></p>
<b>E.E.A.</b>	<p><b><u>ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</u></b></p> <p><a href="https://edeea.universite-lyon.fr">https://edeea.universite-lyon.fr</a>                      Sec. : Stéphanie CAUVIN                      Bâtiment Direction INSA Lyon                      Tél : 04.72.43.71.70                      secretariat.edeea@insa-lyon.fr</p>	<p><b>M. Philippe DELACHARTRE</b>                      INSA LYON                      Laboratoire CREATIS                      Bâtiment Blaise Pascal, 7 avenue Jean Capelle                      69621 Villeurbanne CEDEX                      Tél : 04.72.43.88.63  <a href="mailto:philippe.delachartre@insa-lyon.fr">philippe.delachartre@insa-lyon.fr</a></p>
<b>E2M2</b>	<p><b><u>ÉVOLUTION, ÉCOSYSTÈME, MICROBIOLOGIE, MODÉLISATION</u></b></p> <p><a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a>                      Sec. : Bénédicte LANZA                      Bât. Atrium, UCB Lyon 1                      Tél : 04.72.44.83.62                      secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr</p>	<p><b>Mme Sandrine CHARLES</b>                      Université Claude Bernard Lyon 1                      UFR Biosciences                      Bâtiment Mendel                      43, boulevard du 11 Novembre 1918 69622                      Villeurbanne CEDEX  <a href="mailto:sandrine.charles@univ-lyon1.fr">sandrine.charles@univ-lyon1.fr</a></p>
<b>EDISS</b>	<p><b><u>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTÉ</u></b></p> <p><a href="http://ediss.universite-lyon.fr">http://ediss.universite-lyon.fr</a>                      Sec. : Bénédicte LANZA                      Bât. Atrium, UCB Lyon 1                      Tél : 04.72.44.83.62                      secretariat.ediss@univ-lyon1.fr</p>	<p><b>Mme Sylvie RICARD-BLUM</b>                      Institut de Chimie et Biochimie Moléculaires et Supramoléculaires                      (ICBMS) - UMR 5246 CNRS - Université Lyon 1                      Bâtiment Raulin - 2ème étage Nord                      43 Boulevard du 11 novembre 1918                      69622 Villeurbanne Cedex                      Tél : +33(0)4 72 44 82 32  <a href="mailto:sylvie.ricard-blum@univ-lyon1.fr">sylvie.ricard-blum@univ-lyon1.fr</a></p>
<b>INFOMATHS</b>	<p><b><u>INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES</u></b></p> <p><a href="http://edinfomaths.universite-lyon.fr">http://edinfomaths.universite-lyon.fr</a>                      Sec. : Renée EL MELHEM                      Bât. Blaise PASCAL, 3e étage                      Tél : 04.72.43.80.46                      infomaths@univ-lyon1.fr</p>	<p><b>M. Hamamache KHEDDOUCI</b>                      Université Claude Bernard Lyon 1                      Bât. Nautibus                      43, Boulevard du 11 novembre 1918                      69 622 Villeurbanne Cedex France                      Tél : 04.72.44.83.69  <a href="mailto:hamamache.kheddouci@univ-lyon1.fr">hamamache.kheddouci@univ-lyon1.fr</a></p>
<b>Matériaux</b>	<p><b><u>MATÉRIAUX DE LYON</u></b></p> <p><a href="http://ed34.universite-lyon.fr">http://ed34.universite-lyon.fr</a>                      Sec. : Yann DE ORDENANA                      Tél : 04.72.18.62.44                      yann.de-ordenana@ec-lyon.fr</p>	<p><b>M. Stéphane BENAYOUN</b>                      Ecole Centrale de Lyon                      Laboratoire LTDS                      36 avenue Guy de Collongue                      69134 Ecully CEDEX                      Tél : 04.72.18.64.37  <a href="mailto:stephane.benayoun@ec-lyon.fr">stephane.benayoun@ec-lyon.fr</a></p>
<b>MEGA</b>	<p><b><u>MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GÉNIE CIVIL, ACOUSTIQUE</u></b></p> <p><a href="http://edmega.universite-lyon.fr">http://edmega.universite-lyon.fr</a>                      Sec. : Stéphanie CAUVIN                      Tél : 04.72.43.71.70                      Bâtiment Direction INSA Lyon                      mega@insa-lyon.fr</p>	<p><b>M. Jocelyn BONJOUR</b>                      INSA LYON                      Laboratoire CETHIL                      Bâtiment Sadi-Carnot                      9, rue de la Physique                      69621 Villeurbanne CEDEX  <a href="mailto:jocelyn.bonjour@insa-lyon.fr">jocelyn.bonjour@insa-lyon.fr</a></p>
<b>ScSo</b>	<p><b><u>ScSo*</u></b></p> <p><a href="https://edsciencessociales.universite-lyon.fr">https://edsciencessociales.universite-lyon.fr</a>                      Sec. : Mélina FAVETON                      INSA : J.Y. TOUSSAINT                      Tél : 04.78.69.77.79                      melina.faveton@univ-lyon2.fr</p>	<p><b>M. Bruno MILLY</b>                      Université Lumière Lyon 2                      86 Rue Pasteur 69365 Lyon CEDEX 07  <a href="mailto:bruno.milly@univ-lyon2.fr">bruno.milly@univ-lyon2.fr</a></p>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

Cette thèse a été réalisée au laboratoire de modélisation et d'analyse de la performance des structures (LMAPS) de l'IRSN en collaboration avec le laboratoire GEOMAS (Géomécanique, Matériaux, Structures) de l'INSA Lyon. Elle a été achevée entre octobre 2020 et septembre 2023.

Ce travail répond aux enjeux de sûreté qui relèvent de la mission de l'IRSN, puisqu'elle s'inscrit dans la question 6 de la stratégie scientifique de l'IRSN « comment mieux caractériser et modéliser les modes de dégradation du confinement des matières radioactives, en particulier la deuxième et la troisième barrière, en cas d'agressions internes et externes ? ».



De plus, cette thèse constitue une contribution aux actions quadripartites entre l'IRSN, le CEA, EDF et FRAMATOME, en particulier à la fiche d'action NLTA (Effets des non linéarités sur le transfert des spectres et l'amortissement). Les objectifs de cette action étant de mieux maîtriser le transfert des spectres depuis le sol vers les équipements, dans le cas d'une structure en béton armé manifestant des non linéarités modérées. Pour cela, il est nécessaire d'identifier de manière pertinente les différentes sources de dissipation d'énergie (dissipation matérielle, dissipation visqueuse et éventuellement la dissipation numérique liée au schéma d'intégration temporelle). La dégradation de l'interface acier-béton contribue fortement à la dissipation matérielle dont la modélisation numérique doit donc être maîtrisée. La modélisation numérique de cette interface constitue l'objectif principal de cette thèse.

# Résumé

La caractérisation du comportement mécanique des structures en béton armé est un défi majeur, en particulier lorsque des sollicitations au-delà du niveau de dimensionnement sont considérées. Dans ce cas, des informations locales sur la fissuration du béton sont nécessaires pour évaluer la performance structurale. Cela est particulièrement observé dans le cas où les ouvrages de génie civil, notamment à vocation industrielle, présentent des exigences d'étanchéité. La prise en compte de l'interaction entre le béton et les armatures en acier dans les simulations numériques joue un rôle important dans l'estimation réaliste du phénomène de fissuration. De plus, la dissipation d'énergie au sein de cette interface constitue environ 15-20% de la dissipation matérielle totale dans les structures en béton armé [Huguet Aguilera, 2016]. Pour toutes ces raisons, une modélisation de cette interface se montre indispensable pour la bonne reproduction numérique réaliste du comportement de ces structures. Plusieurs modèles sont proposés dans la littérature dans différents cadres méthodologiques (éléments d'interface [Richard *et al.*, 2010], éléments enrichis [Gutiérrez *et al.*, 2018] . . .) pour décrire l'interface entre l'acier et le béton. Pourtant, ces modèles restent peu satisfaisants principalement car ils demandent des temps de calcul élevés. Une prise en compte de l'interface acier-béton à l'échelle d'un bâtiment industriel avec ce type d'approches reste toujours fastidieuse [Phan *et al.*, 2015] voire impossible. Le but de ce travail de thèse est de proposer des stratégies de modélisation de l'interface acier-béton ayant le coût numérique le plus bas possible et étant applicables à l'échelle de l'ouvrage. Pour cela, une approche multi-échelle est proposée. Cette approche consiste à définir un macro-élément capable de reproduire le comportement de l'acier et de l'interface acier-béton reliés au moyen d'une densité d'efforts d'adhérence. Le macro-élément de [Sahyouni *et al.*, 2022] initialement développé pour lier une inclusion rigide à un domaine de sol qui l'entoure est développé et adapté à la problématique de l'interface acier-béton. Cette approche est intégrée dans des calculs de structures bidimensionnels (2D) et tridimensionnels (3D). En parallèle, une méthode de modélisation de l'interface dans le cadre d'éléments poutres inspirée des travaux de [Yousefi *et al.*, 2020] et de [Abtahi et Li, 2023] est présentée. En particulier, les éléments poutres sont bien connus pour leur avantage de fournir des résultats numériques précis avec des temps de calcul raisonnables. Un enrichissement est introduit par rapport à des théories de poutre classiques avec le déplacement de l'acier défini comme un degré de liberté supplémentaire au niveau des noeuds. Une extension de cette approche vers des éléments plaques est réalisée. Les différentes techniques proposées dans ce travail sont utilisées pour modéliser des tests expérimentaux de caractérisation du comportement de l'interface. Des exemples structuraux de poutres en flexion trois et quatre points sont également modélisés. Les applications présentées démontrent la robustesse des approches proposées et leur capacité à reproduire le comportement expérimental d'éléments structuraux en béton armé.

# Abstract

The characterization of the mechanical behavior of reinforced concrete structures is a major challenge, especially when loads beyond the design level are considered. In this case, local information on the cracking behavior of concrete is crucial to evaluate structural performance. This is particularly important in case of civil engineering structures, particularly those for industrial purposes, exhibiting waterproofing requirements. Considering the interaction between concrete and steel reinforcement in numerical simulations has an important impact on the realistic estimation of the cracking process. In addition, the energy dissipation within this interface is approximately estimated up to 15-20% of the total material energy dissipation in reinforced concrete structures [Huguet Aguilera, 2016]. For the aforementioned reasons, numerical modeling of this interface is essential for the good realistic reproduction of the behavior of these structures. Several models are proposed in the literature in different methodological frameworks (interface elements [Richard *et al.*, 2010], enhanced elements [Gutiérrez *et al.*, 2018] etc.) to describe the interface between steel and concrete. However, these models remain unsatisfactory mainly because they require an excessive need of calculation resources. Taking into account the steel-concrete interface behavior at the scale of an industrial building with this type of approaches remains tedious [Phan *et al.*, 2015] and even impossible. The aim of this thesis work is to propose representative modeling strategies for the steel-concrete interface with the lowest possible numerical cost. For this, a multi-scale approach is proposed. It consists of defining a macro-element capable of reproducing the behavior of the steel and the steel-concrete interface connected by means of a bond stresses density. The macro-element of [Sahyouni *et al.*, 2022] initially developed to link a rigid inclusion to a surrounding soil domain is developed here and adapted to the steel-concrete interface problematic. This approach is implemented into two-dimensional (2D) and three-dimensional (3D) structural calculations. In parallel, a modeling methodology of the interface behavior in the framework of beam elements inspired by the works of [Yousefi *et al.*, 2020] and [Abtahi *et al.*, 2023] is presented. Indeed, beam elements are well known for their advantage of providing accurate numerical results within a reasonable computation time. An enhancement is introduced to classical beam theories with the longitudinal steel displacement defined as an additional degree of freedom at the level of the beam nodes. An extension of this approach to plate elements is carried out. The various techniques proposed in this work to model the steel-concrete interface behavior are used to model several experimental tests that characterize the interface behavior. Structural examples of three-point and four-point flexural tests on reinforced concrete beams are also modeled. The presented applications demonstrate the robustness of the proposed approaches and their ability to reproduce the experimental behavior of reinforced concrete structural elements.

# Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma gratitude envers chacun des membres de mon jury d'avoir accepté d'évaluer mon travail de thèse. Merci également pour les discussions constructives que nous avons eues durant la soutenance. Je tiens particulièrement à exprimer ma reconnaissance envers Christian La Borderie, qui a accepté de présider le jury, ainsi que Delphine Brancherie et Ludovic Jason, qui ont accepté d'être les rapporteurs de ce mémoire.

Je remercie vivement mon équipe d'encadrement qui m'a permis de réaliser ma thèse dans un contexte optimal. Je vous suis très reconnaissante et j'apprécie énormément chacun de vous.

Ibrahim Bitar, je te remercie d'avoir toujours eu les meilleures qualités scientifiques et humaines qu'un encadrant peut avoir. Tu trouvais toujours des disponibilités pour discuter des moindres détails. Merci pour ta rigueur, ta gentillesse et ton encouragement. Je suis plus que ravie de t'avoir eu comme encadrant de stage et d'être la première doctorante que tu encadres.

Stéphane Grange, merci pour la connaissance que tu m'as transmise, ainsi que pour ta gentillesse, ta patience et ton encouragement. Merci également pour ton engagement et les idées brillantes que tu proposais toujours ! Je me considère chanceuse d'avoir eu l'opportunité de travailler sous ta direction.

Benjamin Richard, je te remercie d'avoir été toujours disponible et à l'écoute. J'ai beaucoup apprécié tes qualités scientifiques et humaines. Tes commentaires étaient toujours très utiles pour améliorer la qualité de mon travail. J'ai beaucoup appris de toi, et le travail avec toi m'a beaucoup ajouté.

Je tiens également à remercier les membres de la fiche d'action NLTA, dans laquelle s'inscrit ma thèse, pour les échanges scientifiques riches que nous avons eus.

J'adresse mes sincères remerciements à mes collègues et mes amis IRSN et INSA Lyon pour les moments que nous avons passés ensemble, les échanges, ainsi que tout ce que j'ai appris de chacun d'eux. Je remercie également mes amis en dehors du cadre de la thèse pour les moments que nous avons partagés et les motivations que vous m'avez apportées.

Je remercie surtout infiniment mon père, mes frères et ma sœur qui m'ont apporté et m'apporteront le soutien de tout genre.

Afin d'éviter tout oubli, je vais exprimer ma reconnaissance envers toutes les personnes qui ont aidé, de près ou de loin, à arriver jusqu'ici aujourd'hui. J'espère sincèrement qu'elles se reconnaîtront.

Finalement, je dédie ma réussite à la mémoire et à l'âme de ma mère, Bariaa, que je remercie pour son amour incommensurable et ses sacrifices.

Maryam Trad



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>20</b>
<b>2</b>	<b>Comportement de l'interface acier-béton : bibliographie</b>	<b>23</b>
2.1	Comportement physique . . . . .	23
2.2	Lois d'adhérence . . . . .	25
2.2.1	Chargements monotones . . . . .	25
2.2.2	Chargements cycliques . . . . .	27
2.3	Essais expérimentaux décrivant l'interface . . . . .	34
2.3.1	Essais d'arrachement pull-out . . . . .	34
2.3.2	Essais sur des poutres . . . . .	37
2.3.3	Essais sur des tirants . . . . .	37
2.3.4	Essai PIAF . . . . .	40
2.3.5	Essais de type push-in . . . . .	41
2.4	Modélisation numérique de l'interface . . . . .	42
2.4.1	Modélisation de l'interface par des éléments ressorts . . . . .	42
2.4.2	Modélisation de l'interface avec une bande d'éléments finis . . . . .	43
2.4.3	Modélisation de l'interface sous forme d'un problème de frottement entre deux solides . . . . .	43
2.4.4	Modélisation de l'interface avec des éléments dégénérés . . . . .	44
2.4.5	Modélisation de l'interface avec des éléments joints . . . . .	45
2.4.6	Modélisation de l'interface dans le cadre de la méthode des éléments de frontière (BEM) . . . . .	46
2.4.7	Modélisation de l'interface par des forces internes . . . . .	47
2.4.8	Modélisation de l'interface avec des éléments reliant : acier 1D et béton 3D . . . . .	48
2.4.9	Modélisation de l'interface avec la technique d'enrichissement X-FEM	49
2.4.10	Modélisation de l'interface incorporée dans le comportement des barres d'acier . . . . .	50
2.4.11	Modélisation homogénéisée de l'ensemble acier, béton, et interface . .	50
2.4.12	Modélisation de l'interface dans le cadre d'éléments semi-globaux . .	51
2.4.13	Bilan des différentes approches . . . . .	53
2.5	Conclusions . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Modèle de macro-élément linéique</b>	<b>57</b>
3.1	Échelle globale : structure en béton armé . . . . .	58
3.1.1	Formulation faible . . . . .	59
3.1.2	Discrétisation . . . . .	59

3.2	Formulation du macro élément et résolution à l'échelle locale . . . . .	61
3.3	Couplage des échelles globale et locale . . . . .	63
3.3.1	Connexion des maillages . . . . .	63
3.3.2	Résolution interne à l'échelle locale d'un macro-élément . . . . .	65
3.4	Identification des paramètres matériau . . . . .	67
3.5	Algorithme de résolution global . . . . .	67
3.6	Algorithme de résolution local . . . . .	68
3.7	Applications . . . . .	68
3.7.1	Essai pull-out . . . . .	68
3.7.2	Exemple de tirant en béton armé . . . . .	79
3.7.3	Test de bord de poutre . . . . .	90
3.7.4	Exemple de poutre en flexion 3 points . . . . .	96
3.7.5	Exemple de poutre en flexion 4 points . . . . .	110
3.8	Conclusions . . . . .	113
<b>4</b>	<b>Méthode de projection cinématique</b>	<b>117</b>
4.1	Problème aux limites . . . . .	117
4.2	Formulation faible . . . . .	117
4.3	Discrétisation . . . . .	118
4.4	Mise en œuvre de la projection cinématique . . . . .	119
4.5	Couplage de la méthode de projection cinématique avec les méthodes de simples et de doubles multiplicateurs de Lagrange . . . . .	122
4.6	Exemples de validation . . . . .	124
4.6.1	Ressorts en série . . . . .	124
4.6.2	Modélisation pull-out 3D . . . . .	133
4.7	Application du principe de projection cinématique pour relier des macro- éléments à des éléments de béton . . . . .	140
4.8	Conclusions . . . . .	142
<b>5</b>	<b>Modèles de poutres et de plaques enrichies</b>	<b>143</b>
5.1	Modèles de poutres . . . . .	143
5.1.1	Modèles basés sur des relations cinématiques . . . . .	143
5.1.2	Modèles de poutres multifibres . . . . .	150
5.2	Modèles de plaques . . . . .	151
5.2.1	Modèles de plaques monocouches . . . . .	151
5.2.2	Modèles de plaques multicouches . . . . .	155
5.3	Enrichissement des modèles de poutres et de plaques pour la prise en compte du comportement d'interface . . . . .	156
5.3.1	Principe de l'enrichissement . . . . .	156
5.3.2	Formulation faible d'un élément enrichi . . . . .	157
5.3.3	Condensation statique . . . . .	160
5.3.4	Élément enrichi avec une poutre Euler-Bernoulli . . . . .	160
5.3.5	Élément enrichi avec deux poutres . . . . .	164
5.3.6	Élément plaque enrichie . . . . .	169
5.4	Exemples de validation . . . . .	175
5.4.1	Validation de l'approche de plaque enrichie . . . . .	175
5.4.2	Validation de l'approche de poutre enrichie . . . . .	179

5.4.3	Validation et comparaison des approches de poutres et de plaques enrichies . . . . .	181
5.5	Exemples d'application . . . . .	188
5.5.1	Essai de tirant . . . . .	188
5.5.2	Poutre en flexion quatre points . . . . .	194
5.6	Conclusions . . . . .	200
<b>6</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>204</b>
6.1	Bilan général . . . . .	204
6.2	Perspectives . . . . .	206
<b>Annexe A : Loi d'endommagement de Mazars régularisée</b>		<b>217</b>
<b>Annexe B : Loi de comportement de Mazars Révisée régularisée</b>		<b>219</b>
<b>Annexe C : Loi de comportement de Marigo 1D</b>		<b>222</b>
<b>Annexe D : Calcul analytique de la flèche d'une poutre console en béton armé</b>		<b>223</b>

# Table des figures

1.1	Exemple de plaque en béton armé étudié dans [Huguet Aguilera, 2016]. . . . .	20
2.1	Modes de ruine d'un ensemble d'une barre d'acier environnée par un volume de béton. . . . .	24
2.2	Phases de comportement de l'adhérence acier-béton selon [Frantzeskakis, 1987]. . . . .	25
2.3	Influence du taux de corrosion sur la loi d'adhérence selon [Lejouad, 2020]. . . . .	27
2.4	Influence d'un chargement thermique élevé sur le comportement d'interface acier-béton [Gao <i>et al.</i> , 2013]. . . . .	28
2.5	Enveloppe de la loi d'adhérence proposée par [Verderame <i>et al.</i> , 2009]. . . . .	29
2.6	Loi d'adhérence pour un chargement cyclique donnée par [Verderame <i>et al.</i> , 2009]. . . . .	30
2.7	Courbe enveloppe initiale de la loi d'adhérence de [Murcia-Delso <i>et al.</i> , 2011]. . . . .	30
2.8	Différents types de contraintes pour la loi d'adhérence proposée par [Murcia-Delso <i>et al.</i> , 2011]. . . . .	31
2.9	Loi d'adhérence cyclique proposée par [Murcia-Delso <i>et al.</i> , 2011]. . . . .	32
2.10	Directions des coordonnées de l'interface [Murcia-Delso et Benson Shing, 2015]. . . . .	34
2.11	Principe de l'essai de pull-out. . . . .	35
2.12	Influence du mode de ruine sur la loi d'adhérence. . . . .	36
2.13	Essai proposé par [ACI Committee 408, 1964] sur une poutre. . . . .	37
2.14	Évolution des contraintes de béton $\sigma_b$ et d'acier $\sigma_a$ en fonction du temps lors des phases de comportement élastique et de comportement de fissuration de l'essai de tirant. . . . .	39
2.15	Phases de comportement de l'essai de tirant. . . . .	40
2.16	Principe de l'essai PIAF selon [Tran <i>et al.</i> , 2007]. . . . .	40
2.17	Principe de l'essai push-in selon [Tixier, 2013]. . . . .	41
2.18	Principe de modélisation de l'interface acier-béton par des éléments ressorts selon [Ngo et Scordelis, 1967]. . . . .	42
2.19	Principe des ressorts utilisé par [Nilson, 1968]. . . . .	43
2.20	Principe de maillage 2D de l'ensemble acier-béton-interface avec l'approche de [Reinhardt <i>et al.</i> , 1984] de modélisation de l'interface acier-béton. . . . .	43
2.21	Élément dégénéré selon [Ramirez, 2005]. . . . .	44
2.22	Surfaces de contact entre l'acier et le béton selon [Ramirez, 2005]. . . . .	45
2.23	Configurations initiale et déformée de l'acier et du béton selon [Torre-Casanova, 2012]. . . . .	47
2.24	Efforts internes ajoutés [Torre-Casanova, 2012]. . . . .	48
2.25	Élément proposé par [Mang, 2015]. . . . .	49
2.26	Principe de l'utilisation de la méthode d'enrichissement X-FEM. . . . .	50

2.27	Courbe de comportement d'acier réduite selon [Dehestani et Mousavi, 2015].	51
2.28	Principe de la modélisation homogénéisée acier+béton+interface. . . . .	51
2.29	Principe d'enrichissement selon [Yousefi <i>et al.</i> , 2020]. . . . .	53
2.30	Principe de la plaque homogénéisée selon [Combescure, 2013]. . . . .	53
3.1	Éléments de représentation d'une structure en béton armé. . . . .	57
3.2	Domaine $\Omega$ du solide étudié. . . . .	58
3.3	Deux domaines de l'élément biphasique avec des contraintes de cisaillement $\tau_{int}$ entre les deux domaines. . . . .	62
3.4	Structuration de l'approche multi-échelle. . . . .	64
3.5	Étude d'une structure en béton armé. . . . .	65
3.6	Principe de l'essai de pull-out de [Torre-Casanova, 2012]. . . . .	70
3.7	Lois d'adhérence analytique et expérimentale. . . . .	71
3.8	Modèle de pull-out 1D. . . . .	71
3.9	Modèle 1D de pull-out monotone ; déplacement imposé (a) et courbe de réaction (b). . . . .	72
3.10	Modèle 1D de pull-out cyclique ; déplacement imposé (a) et courbe de réaction (b). . . . .	72
3.11	Configurations (a) and (b) du modèle de pull-out cyclique 1D. . . . .	72
3.12	Lois d'adhérence d'entrée et de sortie du modèle de pull-out 1D. . . . .	73
3.13	Modèle de pull-out 1D ; forces dans le béton (a) et dans l'acier (b). . . . .	73
3.14	Modèle de pull-out 1D ; déplacements longitudinaux des noeuds de béton (a) et d'acier (b). . . . .	74
3.15	Maillage du modèle de pull-out 3D. . . . .	75
3.16	Conditions aux limites du modèle de pull-out 3D. . . . .	75
3.17	Déplacement imposé (a) et courbes de réaction (b) du modèle de pull-out 3D avec un chargement monotone. . . . .	76
3.18	Modèle de pull-out 3D cyclique ; déplacement imposé (a) et courbe de réaction (b). . . . .	77
3.19	Configurations (a) et (b) pour le modèle de pull-out cyclique 3D. . . . .	77
3.20	Cartographie d'endommagement du béton obtenue en fin de chargement pour l'exemple de pull-out 3D avec un chargement monotone. . . . .	77
3.21	Cartographies d'endommagement à différents stades de la courbe de réaction : A1 (a), A2 (b), et A3 (c) du modèle de pull-out 3D cyclique (voir figure 3.18). . . . .	78
3.22	Contraintes de cisaillement dans le béton pour le dernier pas de temps du modèle de pull-out 3D monotone. . . . .	78
3.23	Description du tirant de [Farra, 1995]. . . . .	79
3.24	Loi nonlinéaire d'adhérence. . . . .	80
3.25	Maillage 3D pour la modélisation de tirant avec un comportement linéaire de béton. . . . .	81
3.26	Section longitudinale dans le maillage 3D pour la modélisation de tirant avec un comportement linéaire de béton . . . . .	81
3.27	Courbes de réaction. . . . .	82
3.28	Nombre d'itérations en fonction du pseudo-temps pour différents modèles d'interface. . . . .	83
3.29	Nombre d'itérations locales. . . . .	84

3.30	Courbes de réaction avec des lois d'adhérence linéaires comparées à la courbe de réaction d'adhérence parfaite. . . . .	85
3.31	Maillage 3D pour la modélisation de tirant avec un comportement nonlinéaire de béton. . . . .	86
3.32	Distribution aléatoire du seuil d'endommagement. . . . .	86
3.33	Courbes de réaction des modélisations avec un comportement nonlinéaire de béton. . . . .	87
3.34	Distributions d'endommagement pour l'hypothèse d'adhérence parfaite (a) et imparfaite dans le cadre des macro-éléments (b). . . . .	87
3.35	Calcul de la déformation moyenne de béton. . . . .	88
3.36	Courbes numérique et expérimentale de l'évolution de la contrainte d'acier en fonction de la déformation moyenne de béton. . . . .	88
3.37	Comparaison du chemin de fissuration expérimental à la distribution de l'endommagement dans le béton pour des hypothèses d'interface acier-béton parfaite et imparfaite. . . . .	89
3.38	Déformation longitudinale de béton. . . . .	89
3.39	Configuration de l'essai de bord de poutre. . . . .	90
3.40	Sections transversale (a) et longitudinale (b) dans la géométrie de l'essai de bord de poutre. . . . .	91
3.41	Maillage de l'exemple de test de bord de poutre (a) et configuration des barres d'acier et des macro-éléments dans ce maillage (b). . . . .	94
3.42	Vue latérale du maillage. . . . .	94
3.43	Évolutions numérique et expérimentale des contraintes d'adhérence en fonction du glissement acier-béton. . . . .	95
3.44	Cartographie d'endommagement du béton. . . . .	95
3.45	Cartographie d'endommagement comparée à la fissuration expérimentale au niveau de la face supérieure du béton. . . . .	96
3.46	Exemple de poutre en flexion 3 points étudié [Ragueneau, 1999]. . . . .	97
3.47	Maillage de béton pour l'exemple de poutre en flexion trois points. . . . .	98
3.48	Configuration des éléments d'acier et des macro-éléments du modèle de poutre en flexion trois points dans le volume 3D du béton (a) et au niveau d'une coupe A-A dans ce volume (b). . . . .	98
3.49	Conditions aux limites appliquées au béton. . . . .	99
3.50	Conditions aux limites appliquées aux éléments d'acier et aux macro-éléments pour les choix d'adhérence parfaite (a) et imparfaite avec des macro-éléments (b). . . . .	99
3.51	Courbes de déplacement imposé (a) et de réaction (b) de l'essai de poutre en flexion trois points avec un comportement linéaire de béton. . . . .	100
3.52	Courbes de contraintes-déformations des parties d'acier des macro-éléments. . . . .	101
3.53	Courbes des contraintes des parties d'acier des macro-éléments en fonction de leur position longitudinale pour les différents pas de temps de la résolution. . . . .	101
3.54	Courbes de contraintes d'adhérence (a) et de glissement acier-béton (b) en fonction de la position longitudinale. . . . .	102
3.55	Courbes de réaction avec des choix d'adhérence parfaite et imparfaite comparées à la courbe expérimentale. . . . .	103
3.56	Courbes de contraintes-déformations des parties d'acier des macro-éléments. . . . .	104

3.57	Courbes de contraintes des parties d'acier des macro-éléments en fonction de leur position longitudinale pour les différents pas de temps de la résolution. . . . .	104
3.58	Courbes de contraintes d'adhérence (a) et de glissement acier-béton (b) en fonction de la position longitudinale. . . . .	105
3.59	Cartographie d'endommagement dans le volume de béton : modélisation de l'essai de flexion trois points avec un comportement nonlinéaire de béton et d'interface, avec une épaisseur d'interface de 1.12 mm. . . . .	105
3.60	Caractérisation locale de la fissuration du béton. . . . .	106
3.61	Différents maillages testés : maillage grossier (a), maillage de taille moyenne (b), et maillage fin (c). . . . .	106
3.62	Courbes de réaction associées aux différents maillages. . . . .	107
3.63	Observations locales de la distribution du champ de glissement et de la contrainte d'acier le long de la position longitudinale due à l'endommagement de béton ; maillage grossier. . . . .	108
3.64	Observations locales de la distribution du champ de glissement et de la contrainte d'acier le long de la position longitudinale due à l'endommagement de béton ; maillage fin. . . . .	109
3.65	Exemple de macro-élément. . . . .	109
3.66	Exemple de poutre en flexion 4 points étudié. . . . .	110
3.67	Maillage et conditions limites de l'essai de flexion quatre points. . . . .	112
3.68	Courbes de réaction de l'essai de flexion quatre points. . . . .	112
3.69	Cartographies d'endommagement de l'essai de poutre en flexion quatre points avec des comportements d'interface parfaite et imparfaite, comparées à la fissuration expérimentale. . . . .	113
3.70	Description locale de la fissuration de l'essai de flexion quatre points. . . . .	114
4.1	Configuration de contact entre les deux solides A et B. . . . .	117
4.2	Conditions aux limites de l'assemblage des deux solides A et B. . . . .	118
4.3	Exemple d'application unidirectionnel - forces imposées. . . . .	125
4.4	Exemple d'application unidirectionnel. . . . .	128
4.5	Résultat – forces en fonction des déplacements $u_2$ (a) ; et $u_3$ (b). . . . .	132
4.6	Contraintes en fonction des déformations pour les éléments 1 (a) ; et 2 (b). . . . .	132
4.7	Maillage de l'essai de pull-out : (a) vue 3D du maillage, (b) vue de dessus du maillage. . . . .	134
4.8	Maillages d'acier et de béton reliés avec des relations cinématiques de déplacement. . . . .	134
4.9	Conditions aux limites. . . . .	135
4.10	Courbe de réaction issue de l'utilisation de l'expression 1 (a) et loi d'adhérence de la modélisation utilisant l'expression 1 comparée à la loi d'adhérence expérimentale (b). . . . .	135
4.11	Courbe de réaction issue de l'utilisation de l'expression 2 (a) et loi d'adhérence de la modélisation utilisant l'expression 2 comparée à la loi d'adhérence expérimentale (b). . . . .	136
4.12	Zoom au niveau des parties pré-pic des courbes d'adhérence numériques et expérimentale. . . . .	137
4.13	Expressions 1 et 2 de relations cinématiques. . . . .	137
4.14	Maillage 3D (a) et coupe 3D dans le maillage (b). . . . .	138

4.15	Vue de dessus du maillage de pull-out. . . . .	139
4.16	Superposition des courbes de réaction des différents choix de modélisation (a) et superposition des courbes d'adhérence comparées à la courbe expérimentale. . . . .	139
5.1	Cinématique de la poutre d'Euler Bernoulli. . . . .	144
5.2	Cinématique d'une poutre de Timoshenko. . . . .	145
5.3	Élément poutre. . . . .	146
5.4	Degrés de liberté de l'élément poutre. . . . .	147
5.5	Principe de l'approche de poutre multifibre. . . . .	150
5.6	Illustration de la plaque. . . . .	151
5.7	Plan médian de la plaque et conditions aux limites. . . . .	154
5.8	Configuration d'une plaque multicouche (a) et des plans moyens de ses différentes couches (b). . . . .	156
5.9	Configurations de construction d'éléments poutres enrichies. . . . .	158
5.10	Configurations de construction d'éléments plaques enrichies. . . . .	158
5.11	Illustration de la poutre Euler-Bernoulli enrichie. . . . .	161
5.12	Degrés de liberté de la poutre Euler-Bernoulli enrichie. . . . .	161
5.13	Illustration de la configuration d'assemblage présentée avec deux éléments poutres en béton et un élément barre à trois noeuds d'acier. . . . .	165
5.14	Degrés de liberté de la configuration d'assemblage présentée avec deux éléments poutres en béton et un élément barre à trois noeuds d'acier. . . . .	165
5.15	Plaque enrichie. . . . .	169
5.16	Excentrement des barres d'acier par rapport au plan moyen de la plaque de béton. . . . .	171
5.17	Conditions aux limites de la plaque enrichie. . . . .	176
5.18	Déformée de la plaque enrichie pour une raideur de la loi linéaire d'adhérence = $10^5$ (a), $10^{10}$ (b), $10^{20}$ (c) Pa/m. . . . .	176
5.19	Maillage de la plaque bi-appuyée. . . . .	177
5.20	Courbe de réaction. . . . .	178
5.21	Forme de la déformée. . . . .	178
5.22	Glissements selon $x$ (a) et selon $y$ (b). . . . .	178
5.23	Exemple de pull-out 1D étudié avec des éléments poutres enrichies. . . . .	179
5.24	Courbe de réaction. . . . .	180
5.25	Déplacements de béton (a) et d'acier (b) en fonction de la position longitudinale, pour les différents pas de temps. . . . .	180
5.26	Déplacement imposé cyclique (a) et courbe de réaction correspondante (b). . . . .	181
5.27	Poutre console étudiée. . . . .	182
5.28	Maillage et conditions aux limites : modèle de plaque enrichie. . . . .	182
5.29	Maillage et conditions aux limites : modèle de poutre enrichie. . . . .	183
5.30	Conditions aux limites de l'essai de flexion 3 points modélisé avec des éléments poutres enrichies. . . . .	185
5.31	Conditions aux limites de l'essai de flexion 3 points modélisé avec des éléments plaques enrichies. . . . .	185
5.32	Maillage (a) et conditions aux limites (b) de la modélisation 3D de l'exemple de poutre en flexion 3 points. . . . .	185
5.33	Courbes de réaction de l'exemple de poutre en flexion 3 points. . . . .	186
5.34	Valeurs de glissement - barre d'acier non ancrée. . . . .	186



5.35	Valeurs de glissement. . . . .	188
5.36	Modélisation de l'essai de tirant avec des éléments plaques enrichies. . . . .	189
5.37	Maillage choisi pour la modélisation de l'essai de tirant avec des éléments poutres enrichies. . . . .	189
5.38	Courbes de réaction. . . . .	190
5.39	Déformée de la face latérale du tirant - modélisation 3D. . . . .	191
5.40	Déformée de la face latérale du tirant - modélisation avec des éléments plaques enrichies. . . . .	191
5.41	Déformée de la face latérale du tirant - modélisation avec des éléments poutres enrichies. . . . .	191
5.42	Distribution du seuil d'endommagement - modélisation de l'essai de tirant avec des éléments poutres enrichies. . . . .	193
5.43	Distribution du seuil $\varepsilon_{t0}$ - modélisation de l'essai de tirant avec des éléments plaques enrichies. . . . .	193
5.44	Courbes de réaction - éléments poutres (a) et plaques (b) enrichies. . . . .	193
5.45	Distribution du champ d'endommagement - modélisation de l'essai de tirant avec des éléments poutres enrichies : adhérence imparfaite (a) et adhérence parfaite (b). . . . .	194
5.46	Distribution du champ d'endommagement - modélisation de l'essai de tirant avec des éléments plaques enrichies : cas d'adhérence imparfaite et parfaite. . . . .	194
5.47	Description locale de la fissuration du tirant - modélisation avec des éléments poutres enrichies. . . . .	195
5.48	Description locale de la fissuration du tirant - modélisation avec des éléments plaques enrichies. . . . .	196
5.49	Maillage choisi pour la modélisation de l'essai de flexion 4 points avec des éléments poutres enrichies. . . . .	197
5.50	Conditions aux limites de la modélisation de l'essai de flexion 4 points avec des éléments poutres enrichies. . . . .	198
5.51	Conditions aux limites de la modélisation de l'essai de flexion 4 points avec des éléments plaques enrichies. . . . .	198
5.52	Courbes de réaction de l'exemple de poutre en flexion 4 points avec des poutres enrichies (a) et des plaques enrichies (b). . . . .	199
5.53	Cartographies d'endommagement issues des différentes modélisations comparées à la fissuration expérimentale. . . . .	199
5.54	Description locale de la fissuration de l'essai de poutre en flexion 3 points pour les différents pas de temps de la résolution - modélisation avec des éléments poutres enrichies. . . . .	200
5.55	Description locale de la fissuration de l'essai de poutre en flexion 3 points pour les différents pas de temps de la résolution - modélisation avec des éléments plaques enrichies. . . . .	201
5.56	Discontinuité de glissement due à la fissuration du béton au voisinage de l'acier. . . . .	203
6.1	Méthodologies de prise en compte du comportement d'interface acier-béton proposées dans cette thèse pour différents choix de modélisation des structures en béton armé. . . . .	204
6.2	Exemple de choix d'assemblage d'un élément plaque enrichi permettant un transfert d'efforts entre deux éléments d'acier. . . . .	207

B.1 Principe du calcul de l'énergie de fissuration. . . . . 220

# Liste des tableaux

2.1	Lois d'adhérence - chargement monotone. . . . .	26
2.2	Expressions de $\tau_b$ pour la loi d'adhérence de [Murcia-Delso et Benson Shing, 2015]. . . . .	32
2.3	Expressions de $\tau_f$ pour la loi d'adhérence de [Murcia-Delso et Benson Shing, 2015]. . . . .	33
2.4	Bilan des approches de modélisation de l'interface proposées dans la littérature. . . . .	54
3.1	Principaux paramètres identifiant un élément biphasique. . . . .	67
3.2	Propriétés matériau pour le modèle d'arrachement 1D. . . . .	70
3.3	Paramètres du béton pour le modèle de pull-out 3D. . . . .	74
3.4	Propriétés de béton utilisées pour la modélisations de l'essai de tirant avec un comportement linéaire de béton. . . . .	80
3.5	Nombre total d'itérations nécessaires pour la convergence. . . . .	83
3.6	Comparaison des ratios de temps de calcul par rapport à une modélisation d'adhérence parfaite. . . . .	84
3.7	Paramètres de la loi de Mazars. . . . .	85
3.8	Paramètres de béton pour la modélisation de l'essai de bord de poutre. . . . .	91
3.9	Expressions empiriques de $\tau_1$ . . . . .	91
3.10	Expressions empiriques de $\tau_1$ selon le mode de ruine de l'interface proposées par [Fib, 2010]. . . . .	92
3.11	Expressions empiriques de $g_1$ . . . . .	92
3.12	Paramètres de la loi d'adhérence utilisés pour la modélisation du test de bord de poutre. . . . .	93
3.13	Paramètres de béton pour la modélisation de l'essai de poutre en flexion trois points avec un comportement linéaire de béton. . . . .	97
3.14	Paramètres de la loi d'adhérence pour la modélisation de l'essai de poutre en flexion trois points. . . . .	97
3.15	Paramètres d'acier pour la modélisation de l'essai poutre en flexion trois points. . . . .	97
3.16	Paramètres de la loi de Mazars. . . . .	102
3.17	Paramètres d'acier de l'essai de flexion quatre points. . . . .	110
3.18	Paramètres de la loi de Mazars révisée pour l'exemple de poutre en flexion quatre points. . . . .	111
3.19	Valeurs d'épaisseur d'interface utilisées dans la littérature en fonction du diamètre des barres d'acier $d$ . . . . .	115
5.1	Paramètres d'acier et de béton du test membranaire de plaque enrichie. . . . .	175
5.2	Paramètres d'acier et de béton du test de plaque bi-appuyée. . . . .	177
5.3	Paramètres de la loi d'adhérence utilisés pour le test de plaque bi-appuyée. . . . .	177

5.4	Paramètres de l'exemple de poutre console. . . . .	182
5.5	Comparaison des résultats des calculs numérique et analytique-poutre en béton. . . . .	183
5.6	Comparaison des résultats des calculs numérique et analytique-poutre en béton armé. . . . .	183
5.7	Paramètres de le test de poutre en flexion. . . . .	184
5.8	Paramètres de la loi d'adhérence utilisés pour le test de poutre en flexion. . . . .	184
5.9	Paramètres de la loi de Mazars révisée pour l'exemple de tirant. . . . .	192
5.10	Paramètres de la loi de Mazars - modélisation de l'essai de poutre en flexion quatre points avec des poutres multifibres enrichies. . . . .	197

# Chapitre 1

## Introduction

La caractérisation du comportement mécanique des structures en béton armé est un défi majeur, en particulier lorsque des sollicitations au-delà du niveau de dimensionnement sont considérées. Afin d'assurer une plus grande robustesse numérique des approches non linéaires utilisées dans la modélisation des structures en béton armé, il est nécessaire de prendre en compte les différentes sources de dissipation d'énergie. Cela inclut la dissipation visqueuse, la dissipation numérique liée au schéma d'intégration temporelle, et surtout les dissipations matérielles dont l'interaction entre le béton et les armatures en acier qui se produit à l'interface acier-béton. En effet, le fonctionnement mécanique du béton armé repose sur un transfert d'efforts entre l'acier et le béton via l'interface entre ces deux matériaux. Dès que les premières fissures apparaissent dans le béton, les propriétés de l'acier peuvent être exploitées, à condition que l'interface acier-béton transmette les forces correspondantes. Cette interface est le lieu d'une série de phénomènes, notamment une redistribution des contraintes au voisinage des fissures. La prise en compte de cette interface acier-béton a donc une importance significative sur le processus de fissuration des structures en béton armé et sur la répartition spatiale des fissures. De plus, la dissipation d'énergie au sein cette interface constitue environ 15-20% de l'énergie matérielle dissipée [Huguet Aguilera, 2016].

La figure 1.1 présente une étude d'une plaque en béton armé ferrailée dans deux sens ( $x$  et  $y$ ), modélisée dans [Huguet Aguilera, 2016]. Les résultats obtenus (figure 1.1) concernant la dissipation d'énergie donnent un ordre de grandeur de la contribution du comportement de l'interface acier-béton à la dissipation d'énergie totale matérielle.

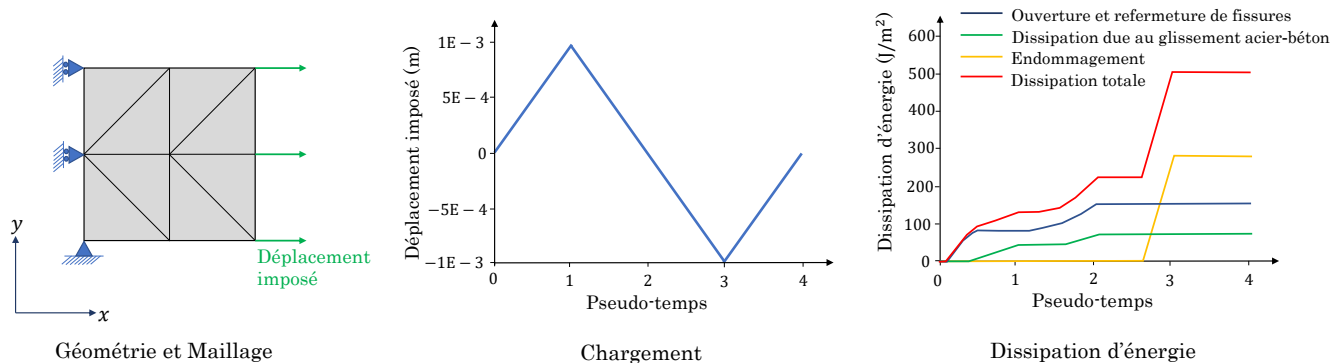


FIGURE 1.1 – Exemple de plaque en béton armé étudié dans [Huguet Aguilera, 2016].

Pour une représentation réaliste du processus de fissuration des structures en béton armé

et une meilleure estimation de leur dissipation d'énergie, il est indispensable de représenter le comportement de l'interface entre le béton et les aciers de renfort. Plusieurs modèles sont proposés dans la littérature dans différents cadres méthodologiques (éléments d'interface [Richard *et al.*, 2010], éléments enrichis [Gutiérrez *et al.*, 2018] ...) pour décrire l'interface entre l'acier et le béton. Ces modèles sont, le plus souvent, intégrés dans des analyses fines et détaillées (2D et 3D), afin d'améliorer la prévision du comportement local et global d'un élément structural. Dans le cas de structures industrielles à grande échelle avec des murs porteurs, l'interface acier-béton est rarement intégrée explicitement. En effet, une description de l'interface acier-béton à l'échelle d'un bâtiment industriel reste encore fastidieuse.

Ce travail de thèse vise principalement à améliorer la manière dont est prise en compte la dissipation d'énergie au niveau de l'interface acier-béton dans le cadre de la méthode des éléments finis. Plus précisément, l'objectif est de développer des techniques de modélisation numérique de cette interface qui soient à la fois représentatives de son comportement, et qui maintiennent le coût de calcul aussi bas que possible. Les structures d'intérêt pour lesquelles les différentes techniques proposées dans ce travail de thèse sont développées sont les structures en béton armé à grande échelle, plus particulièrement les barrières de confinement des enceintes, et les bâtiments annexes d'une structure voiles-planchers des centrales nucléaires. Une modélisation 3D de ces structures peut fournir une réponse détaillée de leur comportement. Néanmoins, ce type de modélisation peut demander des temps de calculs élevés. Ces structures peuvent également être modélisées avec un assemblage d'éléments finis plaques, vu leur géométrie présentant une faible épaisseur par rapport aux autres dimensions.

Plusieurs approches multi-échelles sont proposées en fonction du type d'élément fini utilisé. Une première approche est proposée pour être utilisée avec des éléments finis classiques 2D et 3D. Elle consiste à définir un macro-élément capable de reproduire le comportement de l'acier et de l'interface acier-béton reliés au moyen d'une densité d'efforts d'adhérence. Le macro-élément de [Sahyouni *et al.*, 2022] initialement développé pour lier une inclusion rigide à un domaine de sol qui l'entoure est développé dans ce travail de thèse et adapté à la problématique de l'interface acier-béton. Une deuxième approche est proposée pour incorporer le comportement d'interface dans des éléments poutres et plaques via des enrichissements cinématiques. Cette proposition définit les déplacements longitudinaux des noeuds d'acier comme des degrés supplémentaires par rapport aux formulations classiques de poutres et de plaques. En effet, les éléments poutres et plaques sont bien connus pour permettre de fournir des résultats numériques précis tout en économisant du temps de calcul par rapport aux simulations 2D et 3D complètes. Cette formulation permet de conserver les avantages des cinématiques de poutres et de plaques auxquelles se superposent les effets des barres d'acier et des interactions d'adhérence acier-béton.

Le chapitre 2 de ce travail présente un état de l'art sur la description du comportement physique de l'interface, les essais expérimentaux qui les caractérisent, et les approches de modélisation numérique de son comportement.

Le chapitre 3 décrit la formulation du macro-élément dans le contexte d'un cadre de modélisation multi-échelle. Une structure en béton armé est maillée en deux types d'éléments finis : des éléments finis en béton 2D/3D, et des macro-éléments. Chaque macro-élément est lui-même formé d'un assemblage d'une série d'éléments biphasiques. La formulation de l'élément biphasique assemble un élément barre à 3 noeuds qui représente l'acier, un élément barre à 3 noeuds qui représente l'interface, et des contributions de contraintes d'adhérence. Une résolution structurée est réalisée avec deux algorithmes de Newton Raphson complémentaires définis à l'échelle globale de la structure et à l'échelle locale de chaque macro-élément. Une

technique de condensation statique est adoptée pour calculer les degrés de liberté internes du macro-élément localement. Ce chapitre contient des illustrations de l'application de la méthode ainsi que des exemples de validation, tant au niveau élémentaire que structural. Un avantage principal de la technique de résolution sous structurée est qu'elle permet en général une meilleure convergence des calculs non linéaires, tout en étant ergonomique pour l'utilisateur. Pour démontrer cela, la robustesse de l'approche est comparée à celle de différents modèles d'interface issus de la littérature. Cette comparaison montre que la résolution structurée permet de simplifier la convergence globale. Les exemples d'application montrent la bonne reproduction du comportement expérimental des structures en béton armé et l'importance de la modélisation de cette interface pour la description du comportement de fissuration de ces structures.

Les macro-éléments sont reliés aux éléments de béton par le biais de relations cinématiques. Pour ce faire, une technique de projection cinématique est proposée et adoptée. Les détails de cette méthode sont exposés dans le chapitre 4, qui présente sa formulation ainsi que des exemples de validation. Il est également démontré dans ce chapitre que cette approche allège le calcul par rapport à des techniques classiques d'imposition de relations cinématiques.

Le chapitre 5 présente une approche de modélisation polyvalente de l'interface dans le cadre d'éléments poutres et plaques en béton armé. Elle consiste à assembler des éléments classiques poutres (généralisées ou multifibres) ou plaques (monocouches ou multicouches) avec des éléments barres en acier. À cet assemblage est ajoutée la contribution des contraintes d'adhérence acier-béton. Des exemples de validation et d'application détaillés dans ce chapitre démontrent le bon fonctionnement de l'approche et la bonne représentation du comportement expérimental des structures en béton armé.

Le chapitre 6 est dédié aux conclusions générales et aux perspectives.

# Chapitre 2

## Comportement de l'interface acier-béton : bibliographie

### 2.1 Comportement physique

Le transfert des efforts entre l'acier et le béton s'effectue au niveau de l'interface acier-béton. L'adhérence désigne une résistance contre le mouvement relatif entre les deux matériaux. Elle peut déterminer :

- la distribution des fissures : plus l'adhérence est importante, plus le nombre de fissures augmente avec des ouvertures associées plus petites. L'adhérence peut donc empêcher la formation de grandes fissures localisées [[Techniques de l'ingénieur, 2006](#)];
- le scellement des barres : l'adhérence acier-béton est plus importante avec des barres d'acier HA (haute performance, barres avec des crénelures) que des barres rondes et lisses. Les crénelures des aciers HA augmentent la surface de contact entre les deux matériaux, et donc l'adhérence à l'interface. Pour cette raison, les codes de dimensionnement des structures (l'Eurocode 2 par exemple) précisent des valeurs plus élevées pour les longueurs d'ancrage nécessaires de l'acier dans le béton lors de l'utilisation des barres de renfort lisses et rondes par rapport aux longueurs déterminées avec des barres HA [[Techniques de l'ingénieur, 2006](#)].

Pour une armature soumise à un effort de traction scellée dans un massif de béton, l'augmentation progressive de cet effort peut générer une rupture du béton, de l'acier, et de leur interface. Plusieurs modes de rupture peuvent être observés [[Saliba, 2014](#)] :

- arrachement d'un cône de béton ;
- rupture par traction de l'acier ;
- éclatement du béton ;
- glissement relatif entre l'acier et le béton.

La longueur de contact entre l'acier et le béton affecte naturellement le mode de rupture. Pour des longueurs d'ancrage très petites, c'est l'éclatement du béton qui est le premier phénomène à se produire. Avec une adhérence parfaite entre l'acier et le béton, deux modes de rupture sont possibles en fonction de la longueur d'ancrage : soit un arrachement d'un cône de béton, soit une rupture de la barre d'acier (figure 2.1).

Dans le cas d'une rupture par arrachement d'un cône de béton, la zone dans laquelle la barre d'acier est en contact avec le béton reste généralement saine. La rupture de l'acier devient le phénomène prépondérant avec des longueurs d'ancrage plus importantes. Dans le



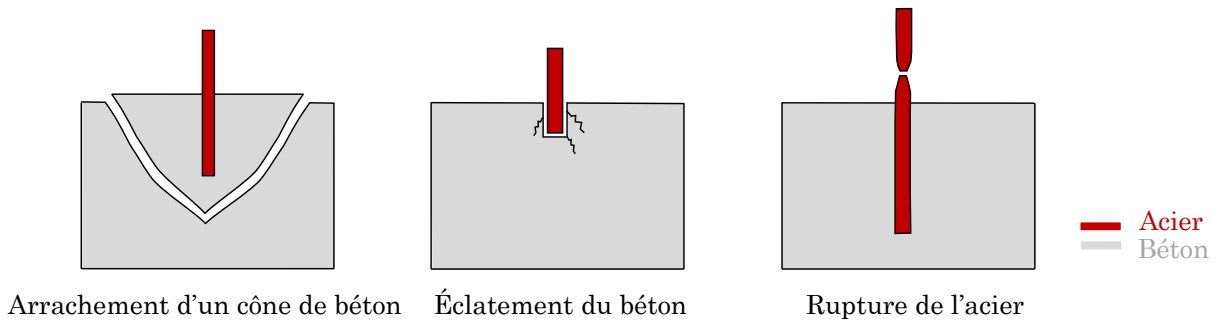


FIGURE 2.1 – Modes de ruine d'un ensemble d'une barre d'acier environnée par un volume de béton.

cas des structures en génie civil, les armatures libres ne se trouvent pas souvent au bord mais au sein de la structure. Le mode de rupture le plus observé sera donc caractérisé par un glissement relatif entre les deux matériaux. Ce glissement est accompagné de plusieurs phénomènes qui conduisent à des fissurations se produisant à l'échelle locale de la zone du béton au voisinage de l'acier.

Dans la suite, une description plus détaillée de ce mode est présentée, avec une attention particulière apportée aux lois d'adhérence. Le comportement local de l'interface acier-béton avec des barres HA est décrit dans [Lutz et Gergely, 1967]. Il peut être décomposé en différentes phases qui se produisent avec l'augmentation du chargement et qui sont les suivantes :

- phase 1 : phase d'adhésion physico-chimique. L'adhérence est dite parfaite. La valeur de l'adhérence augmente avec l'augmentation du chargement, le transfert d'efforts entre le béton et l'acier n'est généralement pas affecté.
- phase 2 : lors de cette phase, des microfissures transversales apparaissent autour de la barre d'acier. Le glissement commence à augmenter et le béton se comprime jusqu'à la fin de cette phase où des fissures longitudinales commencent à apparaître.
- phase 3 : lors de cette phase le glissement augmente, ce qui génère une augmentation du nombre de fissures. Les fissures longitudinales se développent et se localisent. À la fin de cette phase, on observe une décohésion de la barre d'acier.
- phase 4 : du fait de la décohésion entre l'acier et le béton, un adoucissement apparaît. Cela signifie que la résistance de l'interface diminue et donc que le glissement augmente de manière significative.
- phase 5 : c'est la phase de la rupture. Le béton et l'acier ne sont plus solidaires entre eux.

Pour les armatures rondes et lisses, les phases 2 et 3 ne sont pas observées en raison de la forme des armatures. Le comportement adoucissant mentionné en phase 4 apparaît bien plus tôt par rapport aux barres HA.

Au cours des phases de comportement de l'interface, des contraintes tangentielles le long des barres d'acier et des contraintes radiales perpendiculaires à la direction de ces barres se produisent. Pour caractériser ces phases, notamment dans la direction tangentielle, des lois d'adhérence sont généralement utilisées. Ces lois relient la contrainte d'adhérence à l'interface au glissement longitudinal des renforts par rapport au béton. Le sous-chapitre 2.2 est dédié à la description de ces lois.

## 2.2 Lois d'adhérence

Afin de quantifier les observations expérimentales et les exploiter, une loi d'adhérence entre l'acier et le béton est souvent utilisée. Il s'agit d'une courbe qui relie la valeur de la contrainte d'adhérence  $\tau$  à celle du glissement  $g$ . La contrainte d'adhérence est définie comme la contrainte surfacique (encore appelée contrainte vraie) au niveau de la surface de contact entre les deux matériaux. Le glissement quant à lui est défini comme le déplacement relatif moyen entre l'acier et le béton. À noter que la loi d'adhérence est identifiée pour un état de confinement (actif et passif) donné. Les différentes phases de comportement décrites aussi par [Frantzeskakis, 1987] sont présentées sur la figure 2.2. Les lois sont réparties en deux familles, celles qui sont utilisées pour les chargements monotones et celles qui sont utilisées pour les chargements cycliques.

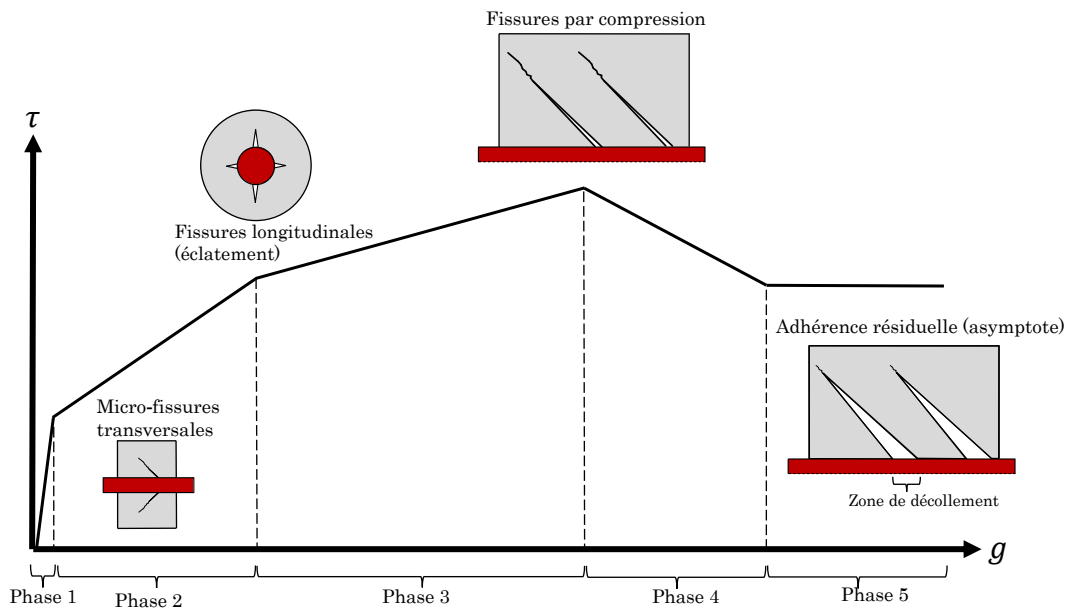


FIGURE 2.2 – Phases de comportement de l'adhérence acier-béton selon [Frantzeskakis, 1987].

### 2.2.1 Chargements monotones

Dans la littérature, plusieurs expressions sont proposées pour les lois d'adhérence. Ces expressions peuvent être utilisées dans les simulations numériques. Différentes lois provenant de différents travaux sont regroupées dans le tableau 2.1.

Il est à noter qu'une dépendance de la loi d'adhérence peut être analytiquement proposée afin de tenir compte de l'effet du confinement actif et passif [Walraven *et al.*, 2012] qui font croître la résistance de la liaison. De plus, l'effet de la corrosion des armatures sur la loi d'adhérence est étudié dans [Almusallam *et al.*, 1996] [Lejouad, 2020]. Par rapport à une courbe de référence d'adhérence pour de l'acier non corrodé, une augmentation de la contrainte maximale d'adhérence et un comportement post-pic plus fragile sont observés à des taux de corrosion faibles. En revanche, à des taux de corrosion élevés, une diminution brutale de la contrainte ultime d'adhérence et un comportement encore plus fragile sont

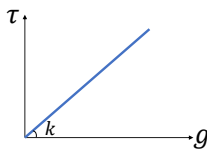
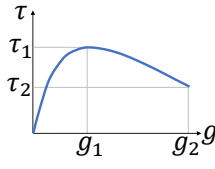
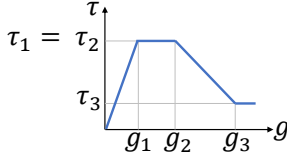
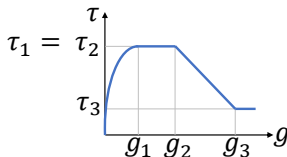
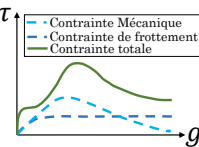
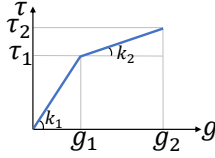
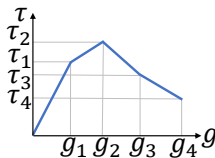
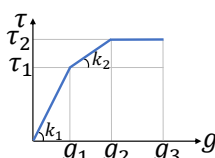
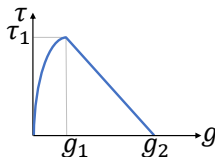
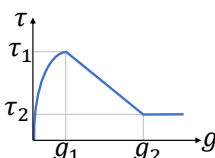
Référence	Illustration	Expression
[Ngo et Scordelis, 1967]		$\tau = kg$
[Nilson, 1968]		$\tau = k_1g - k_2g^2 + k_3g^3$
[Yankelevsky, 1997]		$\tau = \frac{\tau_1}{g_1}g$ pour $g \leq g_1$ $\tau = \tau_1$ pour $g_1 < g \leq g_2$ $\tau = \tau_1 - (\tau_1 - \tau_3) \left( \frac{g-g_2}{g_3-g_2} \right)$ pour $g_2 < g \leq g_3$ $\tau = \tau_3$ pour $g_3 < g$
[Eligehausen <i>et al.</i> , 1982] [Harajli, 1994] [Desnerck <i>et al.</i> , 2010]		$\tau_1 \left( \frac{g}{g_1} \right)^\alpha$ pour $g \leq g_1$ $\tau = \tau_1$ pour $g_1 < g \leq g_2$ $\tau = \tau_1 - (\tau_1 - \tau_3) \left( \frac{g-g_2}{g_3-g_2} \right)$ pour $g_2 < g \leq g_3$ $\tau = \tau_3$ pour $g_3 < g$
[Yankelevsky <i>et al.</i> , 1992]		$\tau = \tau_{\text{mécanique}} + \tau_{\text{frottement}}$ $\tau_{\text{mécanique}} = k_1g^D e^{-\alpha g}$ $\tau_{\text{frottement}} = \frac{\tau_u g}{g + \tau_u}$
[Khalfallah et Ouchenane, 2007]		$\tau = k_1g$ pour $g \leq g_1$ $\tau = \tau_1 + k_2(g - g_1)$ pour $g_1 < g \leq g_2$
[Banholzer <i>et al.</i> , 2005]		Expression linéaire par morceaux.
[Kwak et Kim, 2001]		$\tau = k_1g$ pour $g \leq g_1$ $\tau = \tau_1 + k_2(g - g_1)$ pour $g_1 < g \leq g_2$ $\tau = \tau_2$ pour $g_2 < g \leq g_3$
[Haskett <i>et al.</i> , 2008]		$\tau_1 \left( \frac{g}{g_1} \right)^\alpha$ pour $g \leq g_1$ $\tau = \tau_1 - \tau_1 \left( \frac{g}{g_2} \right)$ pour $g_1 < g \leq g_2$ $\tau = 0$ pour $g_2 < g$
[Torre-Casanova, 2012]		$\tau_1 \left( \frac{g}{g_1} \right)^{0.3}$ pour $g \leq g_1$ $\tau = \left( \frac{\tau_2 - \tau_1}{g_2 - g_1} \right) g + \left( \frac{\tau_1 g_2 - \tau_2 g_1}{g_2 - g_1} \right)$ pour $g_1 < g \leq g_2$ $\tau = \tau_2$ pour $g_2 < g$

TABLEAU 2.1 – Lois d'adhérence - chargement monotone.  
26

notés. Ces observations sont décrites dans [Almusallam *et al.*, 1996] et [Lejouad, 2020] (voir figure 2.3) pour des lois d’adhérences dans la direction longitudinale d’acier, et considérées dans les directions longitudinale et normale dans [Richard, 2010].

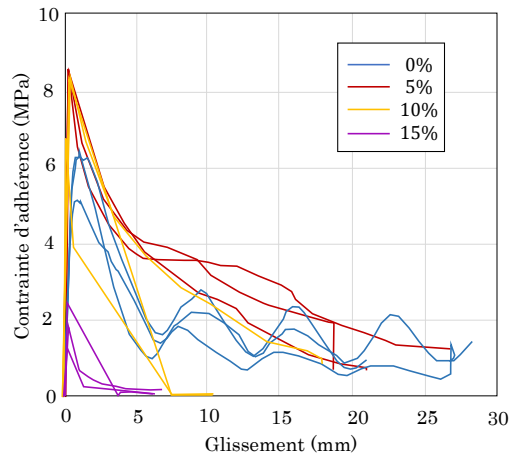


FIGURE 2.3 – Influence du taux de corrosion sur la loi d’adhérence selon [Lejouad, 2020].

D’autres facteurs influençant le comportement d’adhérence sont également observés et considérés pour la définition des lois d’adhérence comme l’effet d’un chargement thermique élevé [Gao *et al.*, 2013] et la plastification des barres d’acier [Fib, 2010].

Bien que la contrainte maximale d’adhérence ait généralement tendance à décroître avec l’augmentation de la température, quelques travaux constatent expérimentalement une tendance contraire dans une plage initiale de températures élevées, jusqu’à environ 300 °C. Cette augmentation inattendue peut être attribuée à des différences subtiles dans les coefficients de dilatation thermique d’acier et de béton, notamment une augmentation du confinement du béton par rapport à l’acier [Gao *et al.*, 2013]. La figure 2.4 montre les évolutions du ratio de la contrainte maximale d’adhérence pour une interface exposée à une haute température par rapport à sa valeur à température ambiante, fournies par différents travaux de la littérature [Diederchs et Schneider, 1981] [Hu, 1989] [Morley et Royles, 1983] [Milovanovf et Salmanov, 1954] [Reichel, 1978] [Haddad *et al.*, 2008]. Certains de ces travaux étudient le comportement d’interface acier-béton à haute température. D’autres l’étudient après refroidissement. La plastification des barres d’acier diminue la valeur de contrainte maximale de la loi d’adhérence [Fib, 2010] [Murcia-Delso et Benson Shing, 2015].

## 2.2.2 Chargements cycliques

Plusieurs lois cycliques d’adhérence plus ou moins complexes sont proposées dans la littérature.

Une loi cyclique proposée par [Verderame *et al.*, 2009] vise à représenter l’interface avec des aciers lisses utilisés dans les anciens ouvrages en béton armé. La courbe enveloppe de la loi est supposée constante même après les différents cycles de charges/décharges.

Une loi plus poussée est proposée par [Murcia-Delso *et al.*, 2011] avec une courbe enveloppe réduite sous l’effet du chargement cyclique appliqué. La loi peut être utilisée pour du béton armé comportant de barres d’acier HA présentant des crénelures. Elle définit une contrainte tangentielle d’adhérence comme une combinaison de deux types de contraintes :

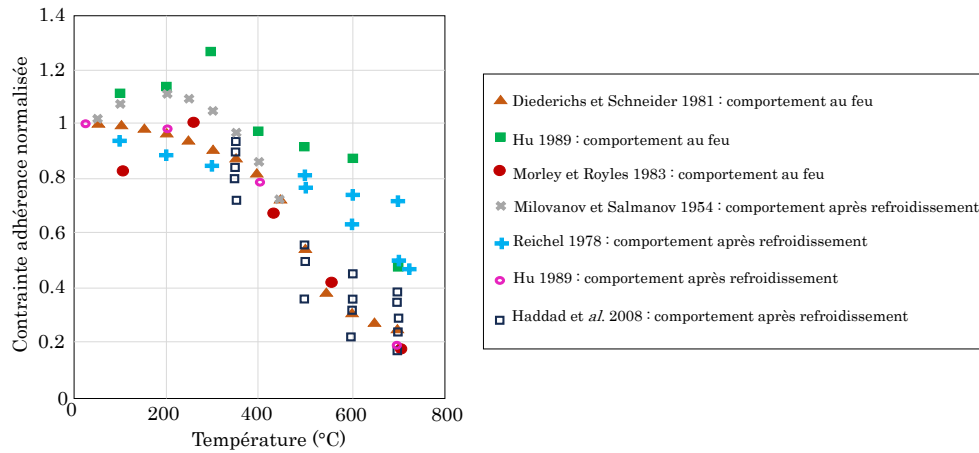


FIGURE 2.4 – Influence d'un chargement thermique élevé sur le comportement d'interface acier-béton [Gao *et al.*, 2013].

une contrainte de frottement, et une contrainte tangentielle de rupture par compression (bearing stress). Deux variables d'endommagement sont associées aux deux types de contraintes. Cette loi est inspirée d'une loi cyclique formulée dans [Eligehausen *et al.*, 1982] avec une seule variable d'endommagement.

Une version plus complète de la loi de [Murcia-Delso *et al.*, 2011] est proposée ultérieurement par [Murcia-Delso et Benson Shing, 2015]. Cette nouvelle version définit, en plus des contraintes tangentielles, des contraintes normales perpendiculaires à la direction des barres d'acier.

D'autres lois sont encore proposées dans la littérature pour les chargements cycliques comme dans [Mazzarolo *et al.*, 2012] où une loi est proposée avec une justification en termes d'énergie dissipée.

Le choix s'est porté dans ce qui suit sur la présentation de trois lois d'adhérence cycliques de complexités différentes : la loi de [Verderame *et al.*, 2009], la loi de [Murcia-Delso *et al.*, 2011], et celle de [Murcia-Delso et Benson Shing, 2015]. La présentation de la loi de [Verderame *et al.*, 2009] s'avère intéressante puisqu'elle a l'avantage d'être simple, vu qu'elle ne dégrade pas l'adhérence avec les cycles de charges/décharges. De plus, cette loi ne nécessite pas l'identification de beaucoup de paramètres. La loi de [Murcia-Delso *et al.*, 2011] est également détaillée car elle permet, contrairement à la loi de [Verderame *et al.*, 2009], de dégrader l'adhérence selon les cycles charges/décharges. Cela la rend plus représentative que la loi de [Verderame *et al.*, 2009] pour la modélisation de l'interface lors de l'utilisation d'aciers de renfort HA. La présentation de la loi de [Murcia-Delso et Benson Shing, 2015] est par ailleurs intéressante puisqu'elle fournit un cadre général dans lequel des contraintes tangentielles et normales par rapport à la direction de l'acier sont prises en compte.

Dans ce travail de thèse, l'attention est portée sur la modélisation du comportement tangentiel de l'interface. La loi de [Murcia-Delso *et al.*, 2011] sera utilisée pour des exemples d'application dans les chapitres 3 et 5.

### 2.2.2.1 Loi d'adhérence de [Verderame *et al.*, 2009]

La courbe enveloppe de cette loi formule le lien entre la contrainte d'adhérence  $\tau$  et le glissement  $g$  comme suit :

$$\tau = \tau_1 \left( \frac{g}{g_1} \right)^\alpha \quad \text{pour } g \leq g_1 \quad (2.1)$$

$$\tau = \left( \frac{\tau_2 - \tau_1}{g_2 - g_1} \right) g + \left( \frac{\tau_1 g_2 - \tau_2 g_1}{g_2 - g_1} \right) \quad \text{pour } g_1 < g \leq g_2 \quad (2.2)$$

$$\tau = \tau_2 \quad \text{pour } g_2 < g \leq g_3 \quad (2.3)$$

Le paramètre  $\alpha$  de l'équation (2.1) peut être calibré par rapport à la courbe  $(\tau, g)$  expérimentale et est identifié comme suit :

$$\alpha = \frac{\tau_1 g_1}{A_{1,exp}} - 1 \quad (2.4)$$

où  $A_{1,exp}$  est l'aire sous la partie pré-pic de la courbe  $(\tau, g)$ ,  $\tau_1$  et  $g_1$  sont les valeurs de contrainte et de glissement pour le point du pic. Pour une valeur de glissement plus grande que  $g_2$ , la contrainte d'adhérence de la courbe enveloppe demeure constante et égale à  $\tau_2$ . La pente  $p$  caractérisant la partie adoucissante de la courbe peut également être calibrée comme suit :

$$p = \frac{g_1 (\tau_1 - \tau_2)^2}{2\tau_1 [A_{2,exp} - \tau_2 (g_3 - g_1)]} \quad (2.5)$$

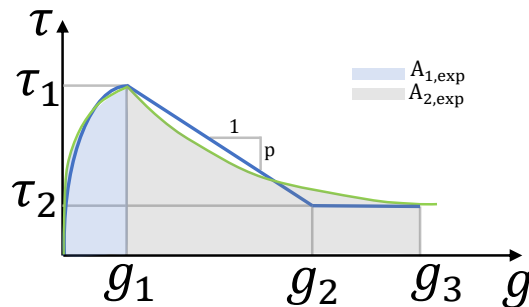


FIGURE 2.5 – Enveloppe de la loi d'adhérence proposée par [Verderame *et al.*, 2009].

Des valeurs moyennes de  $0.31 \sqrt{f_c}$  et  $0.13 \sqrt{f_c}$  sont estimées pour  $\tau_1$  et  $\tau_2$  respectivement,  $f_c$  étant la résistance à la compression du béton. Une fois que la pente  $p$  est déterminée, la valeur de  $g_2$  peut être déduite pour caractériser l'intersection de la deuxième et la troisième partie de la courbe de la figure 2.5 (équations (2.2) et (2.3)).  $g_3$  est la dernière valeur de glissement de cette courbe enveloppe. En ce qui concerne les cycles de charges/décharges, ces derniers sont définis selon la figure 2.6.

Les valeurs de  $\tau_r$  et de  $\tau_c$  (figure 2.6) sont estimées à  $0.09\sqrt{f_c}$  et  $0.05\sqrt{f_c}$  respectivement, les indices  $r$  et  $c$  étant utilisés pour désigner les comportements résiduel et cyclique. La pente de décharge est supposée égale à celle de recharge et est estimée expérimentalement à 15 MPa/mm. Pour cette loi, la courbe enveloppe de la figure 2.6 est supposée constante et donc n'est pas affectée par le nombre de cycles de charges/décharges.

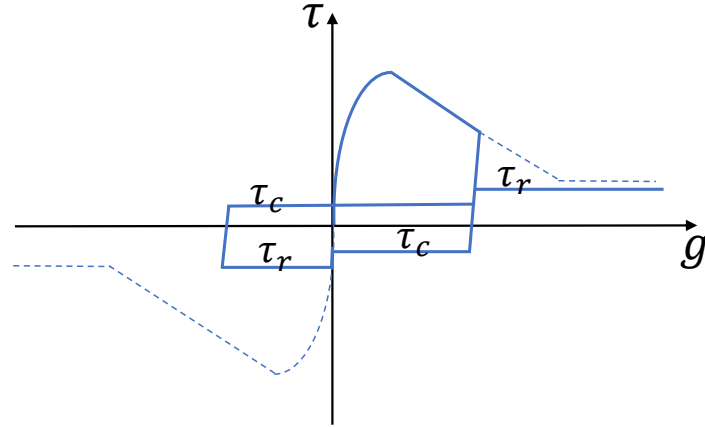


FIGURE 2.6 – Loi d’adhérence pour un chargement cyclique donnée par [Verderame *et al.*, 2009].

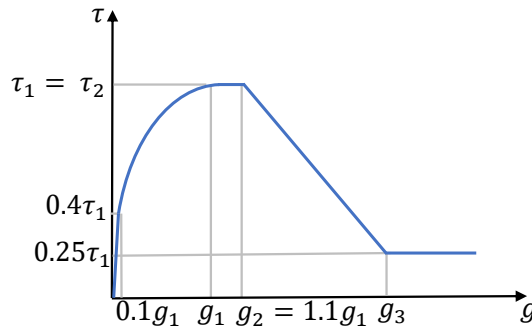


FIGURE 2.7 – Courbe enveloppe initiale de la loi d’adhérence de [Murcia-Delso *et al.*, 2011].

### 2.2.2.2 Loi d’adhérence de [Murcia-Delso *et al.*, 2011]

La courbe enveloppe initiale est définie selon la figure 2.7.

Les équations constitutives de cette courbe enveloppe sont exprimées comme suit :

$$\tau = 4 \frac{\tau_1}{g_1} g \quad \text{pour } g \leq 0.1g_1 \quad (2.6)$$

$$\tau = \tau_1 \left[ 1 - 0.6 \left( \frac{g - g_1}{0.9g_1} \right)^4 \right] \quad \text{pour } 0.1g_1 < g \leq g_1 \quad (2.7)$$

$$\tau = \tau_1 \quad \text{pour } g_1 < g \leq g_2 \quad (2.8)$$

$$\tau = \tau_1 \left[ 1 - 0.75 \frac{g - 1.1g_1}{g_3 - g_1} \right] \quad \text{pour } g_2 < g \leq g_3 \quad (2.9)$$

$$\tau = 0.25\tau_1 \quad \text{pour } g_3 < g \quad (2.10)$$

Pour cette courbe enveloppe, la contrainte d’adhérence est supposée être la combinaison de plusieurs types de contraintes : une contrainte de frottement  $\tau_f$  et une contrainte tangentielle de rupture par compression (bearing stress)  $\tau_b$ . La contrainte maximale  $\tau_1$  est ensuite estimée

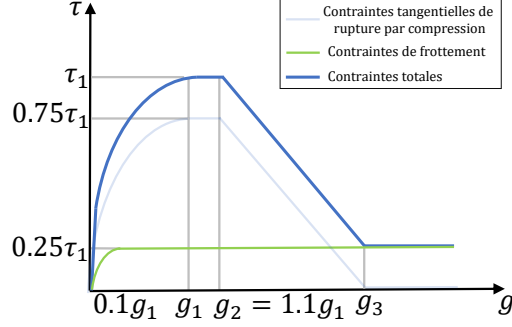


FIGURE 2.8 – Différents types de contraintes pour la loi d'adhérence proposée par [Murcia-Delso *et al.*, 2011].

en considérant une contribution de 25 % de la contrainte de frottement et de 75 % de la contrainte de rupture par compression. Ces contributions sont illustrées sur la figure 2.8.

Deux variables d'endommagement sont définies :  $d_b$  et  $d_f$ . Elles sont reliées aux contraintes  $\tau_b$  et  $\tau_f$  respectivement. Les nouvelles courbes enveloppe réduites  $\tau_{b,r}$  et  $\tau_{f,r}$  peuvent être déduites à tout moment selon les équations suivantes :

$$\tau_{b,r} = (1 - d_b) \tau_b \quad (2.11)$$

$$\tau_{f,r} = (1 - d_f) \tau_f \quad (2.12)$$

$d_b$  et  $d_f$  sont exprimées respectivement comme étant :

$$d_b = 1 - e^{2.5 \left( \frac{g_{\max}}{g_3} \right)^{0.8}} \quad (2.13)$$

$$d_f = \frac{g_{\max}^+ + g_{\max}^-}{g_3} \left( 1 - e^{0.4 \left( \frac{g_{\max}}{g_3} \right)^{0.75}} \right) \quad (2.14)$$

avec :

$$g_{\max} = 0.75 \max(g_{\max}^+, g_{\max}^-) + 0.125 (g_{\max}^+ + g_{\max}^-) \quad (2.15)$$

$g_{\max}$  est le glissement total cumulé des deux directions tangentielles de sens opposé.  $g_{\max}^+$  et  $g_{\max}^-$  sont les valeurs de glissement maximal atteintes depuis le début du chargement dans les deux directions. La courbe de la loi cyclique est illustrée dans la figure 2.9. La contrainte  $\tau_{rev}$  de la figure 2.9 est déterminée en fonction de la contrainte  $\tau_{f,r}$ , de la valeur maximale atteinte par le glissement, et de la valeur du glissement  $g_1$ .

$$\tau_{rev} = \frac{\max(g_{\max}^+, g_{\max}^-)}{g_1} \tau_{f,r} \text{ avec } \frac{\max(g_{\max}^+, g_{\max}^-)}{g_1} \leq 1 \quad (2.16)$$

Les pentes des parties de décharges/recharges  $k$  sont supposées être les mêmes et s'expriment comme suit :

$$k = 4 \frac{\tau_1}{g_1} \quad (2.17)$$



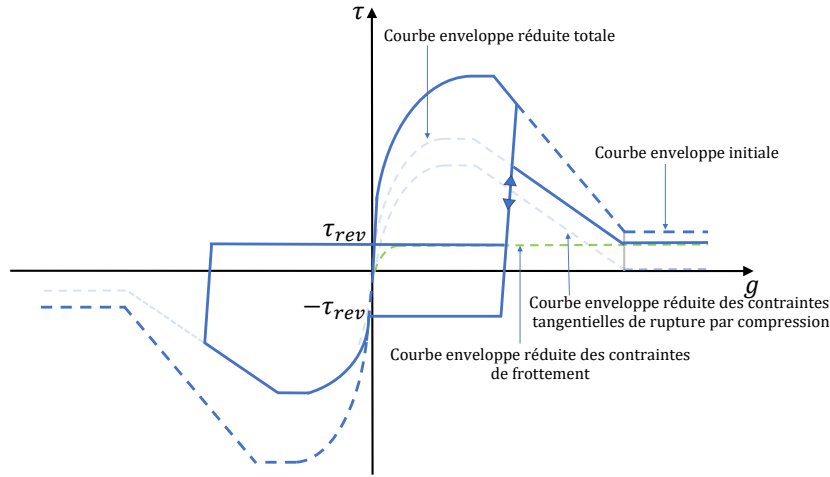


FIGURE 2.9 – Loi d'adhérence cyclique proposée par [Murcia-Delso *et al.*, 2011].

### 2.2.2.3 Loi d'adhérence de [Murcia-Delso et Benson Shing, 2015]

Cette loi repose sur des hypothèses similaires à celles de la loi de [Murcia-Delso *et al.*, 2011] en termes de contraintes de frottement et de rupture par compression. Toutefois, des contraintes normales  $y$  sont introduites et définies.

La contrainte tangentielle  $\tau_2$  est exprimée comme une combinaison des composantes de frottement  $\tau_f$  et de contraintes dues aux fissurations par compression  $\tau_b$ . Ces deux contraintes sont définies pour une barre d'acier dont le comportement est supposé rester élastique et qui subie une action d'arrachement sous un chargement monotone.

$$\tau_2 = \rho_n (\rho_{b,s}\rho_{b,c}\tau_b + \rho_{f,s}\rho_{f,c}\tau_f) \quad (2.18)$$

$\rho_n$  est un facteur de réduction qui prend en compte l'ouverture des nouvelles fissurations autour de la barre d'acier.  $\rho_{b,s}$  et  $\rho_{f,s}$  sont des facteurs de réduction qui prennent en compte la réduction des contraintes  $\tau_b$  et  $\tau_f$  en fonction des contraintes au sein de la barre d'acier.  $\rho_{b,c}$  et  $\rho_{f,c}$  sont deux variables internes qui prennent en compte l'histoire de charges/décharges subies par l'interface. L'évolution des contraintes tangentielles de cette loi est illustrée par la figure 2.8 pour la courbe globale enveloppe et par la figure 2.9 pour le comportement cyclique. Pour  $\tau_b$ , les équations constitutives sont exprimées dans le tableau 2.2.

$g \leq 0$		$g > 0$	
$\tau_b = \frac{3\tau_1}{g_1}g$	pour $0 < g \leq 0.1g_1$	$\tau_b = -1.6\frac{\tau_1}{g_1} g $	pour $-0.15g_1 < g \leq 0$
$\tau_b = \tau_1 \left[ 0.75 - 0.45 \left( \frac{g-g_1}{0.9g_1} \right)^4 \right]$	pour $0.1g_1 < g \leq g_1$	$\tau_b = -\tau_1 \left[ 0.6 - 0.36 \left( \frac{ g -1.5g_1}{1.35g_1} \right)^4 \right]$	pour $-1.5g_1 < g \leq -0.15g_1$
$\tau_b = 0.75\tau_1$	pour $g_1 < g \leq 1.1g_1$	$\tau_b = -0.6\tau_1$	pour $-1.6g_1 < g \leq -1.5g_1$
$\tau_b = 0.75\tau_1 \left[ 1 - \frac{g-1.1g_1}{g_3-1.6g_1} \right]$	pour $1.1g_1 < g \leq g_3$	$\tau_b = -0.6\tau_1 \left[ 1 - \frac{ g -1.6g_1}{g_3-1.6g_1} \right]$	pour $-g_3 < g \leq -1.6g_3$
$\tau_b = 0$	pour $g_3 < g$	$\tau_b = 0$	pour $g < g_3$

TABLEAU 2.2 – Expressions de  $\tau_b$  pour la loi d'adhérence de [Murcia-Delso et Benson Shing, 2015].

Pour  $\tau_f$ , elle est exprimée comme détaillé dans le tableau 2.3.

$g \leq 0$		$g > 0$	
$\tau_f = \tau_1 \left[ 0.25 - 0.15 \left( \frac{g-g_1}{0.9g_1} \right)^4 \right]$	pour $0.1g_1 < g \leq g_1$	$\tau_f = -\tau_1 \left[ 0.25 - 0.15 \left( \frac{ g -g_1}{1.35g_1} \right)^4 \right]$	pour $-1.5g_1 < g \leq -0.15g_1$
$\tau_f = \tau_1 \left[ 0.25 - 0.15 \left( \frac{g-g_1}{0.9g_1} \right)^4 \right]$	pour $0.1g_1 < g \leq g_1$	$\tau_f = -\tau_1 \left[ 0.25 - 0.15 \left( \frac{ g -g_1}{1.35g_1} \right)^4 \right]$	pour $-1.5g_1 < g \leq -0.15g_1$
$\tau_f = 0.25\tau_1$	pour $g_1 < g$	$\tau_f = -0.25\tau_1$	pour $g < -1.5g_1$

TABLEAU 2.3 – Expressions de  $\tau_f$  pour la loi d'adhérence de [Murcia-Delso et Benson Shing, 2015].

En ce qui concerne les coefficients de réduction,  $\rho_n$  est calculé comme suit :

$$\begin{aligned} \rho_n &= 1 && \text{pour } s_1 \leq 0.5h \\ \rho_n &= 2 \left( 1 - \frac{s_1}{h} \right) && \text{pour } 0.5h < s_1 \leq h \\ \rho_n &= 0 && \text{pour } s_1 > h \end{aligned} \quad (2.19)$$

avec :

- $h$  : hauteur des crénelures de l'acier ;
- $s_1$  : ouverture de fissure normale à la direction de l'acier.

Les coefficients  $\rho_{b,s}$ ,  $\rho_{f,s}$  sont calculés comme suit :

$$\rho_{f,c} = 1 - \min \left( \frac{g_{\max}^+ + g_{\max}^-}{g_3}, 1 \right) \left( 1 - e^{-0.45 \left( \frac{g_{cum}}{g_3} \right)^{0.75}} \right) \quad (2.20)$$

$$\rho_{b,c} = 1.2e^{-2.7 \left( \frac{g_{\max}}{g_3} \right)^{0.8}} \leq 1 \quad (2.21)$$

avec :

- $g_{max} = 0.75 \max(g_{max}^+, g_{max}^-) + 0.25(g_{max}^+ + g_{max}^-)$  ;
- $g_{cum}$  : glissement cumulé dans les deux directions. La valeur de  $g_{cum}$  est supposée nulle avant d'atteindre  $g_1$  pour la première fois dans l'historique de chargement ;
- $g_{max}^+$  et  $g_{max}^-$  : valeurs de glissement maximal atteint dans les deux directions.

Le calcul des coefficients  $\rho_{b,s}$  et  $\rho_{f,s}$  est réalisé comme suit :

$$\begin{aligned} \rho_{b,s} &= 1 && \text{pour } \varepsilon_s \leq \varepsilon_y \\ \rho_{b,s} &= \frac{\varepsilon_{sh} - \varepsilon_s}{\varepsilon_{sh} - \varepsilon_y} && \text{pour } \varepsilon_y < \varepsilon_s \leq \varepsilon_{sh} \\ \rho_{b,s} &= 0 && \text{pour } \varepsilon_s > \varepsilon_{sh} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \rho_{f,s} &= 1 && \text{pour } \varepsilon_s \leq \varepsilon_{sh} \\ \rho_{f,s} &= \frac{\varepsilon_u - \varepsilon_s}{\varepsilon_u - \varepsilon_{ch}} && \text{pour } \varepsilon_s > \varepsilon_{sh} \end{aligned} \quad (2.23)$$

avec :

- $\varepsilon_s$  : déformation en tension de l'acier ;
- $\varepsilon_y$  : déformation maximale pour le comportement élastique de l'acier.
- $\varepsilon_{sh}$  : déformation de l'acier à partir de laquelle l'écroutissement est déclenché.

Pour la contrainte  $\tau_{rev}$  (voir figure 2.9 qui peut représenter l'allure générale de la loi), cette dernière est calculée selon l'équation (2.24) si le glissement n'a jamais atteint une valeur plus importante que  $g_1$  sur toute la durée du chargement et selon l'équation (2.25) sinon.

$$\tau_{rev} = 0.25\rho_n\rho_{f,s}\rho_{f,c}\tau_1 \quad (2.24)$$

$$\tau_{rev} = k_{rev}0.25\rho_n\rho_{f,s}\rho_{f,c}\tau_1 \quad (2.25)$$

avec :

$$k_{rev} = \frac{\max(g_{\max}^+, g_{\max}^-)}{g_1} \leq 1 \quad (2.26)$$

Pour les contraintes dans les directions 1 et 3 (voir figure 2.10), elles sont déduites comme suit :

$$\sigma_1 = -|\tau| \tan \theta + k_{pen,1} \min(s_1, 0) \quad (2.27)$$

$$\sigma_3 = k_{pen,3} s_3 \quad (2.28)$$

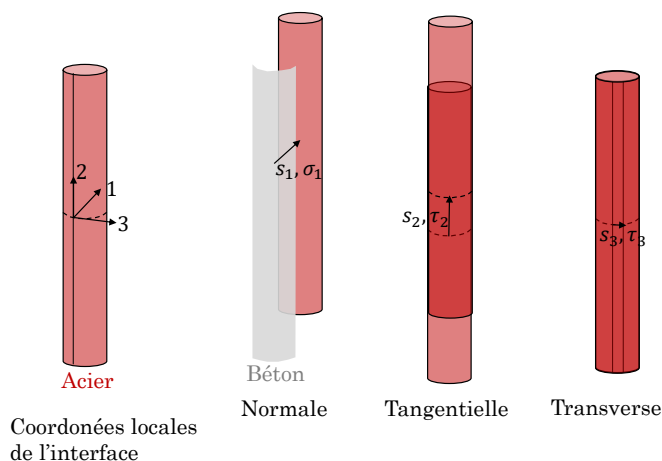


FIGURE 2.10 – Directions des coordonnées de l'interface [Murcia-Delso et Benson Shing, 2015].

$\theta$  étant un angle de  $60^\circ$ . Les rigidités  $k_{pen,1}$  et  $k_{pen,3}$  sont généralement très élevées de telle façon à éviter l'interpénétration entre l'acier et le béton dans la direction normale ( $k_{pen,1}$ ) en fixant la barre dans la direction 3 ( $k_{pen,3}$ ). Plus concrètement, la rotation  $s_3$  dans la direction 3 est imposée nulle.

Finalement, il est important d'évoquer que la compréhension des phénomènes physiques au niveau de l'interface et la modélisation numérique subséquente de celle-ci n'auraient pas été possibles sans les informations apportées par les essais expérimentaux. Dans le sous-chapitre suivant, plusieurs essais expérimentaux proposés dans la littérature sont présentés.

## 2.3 Essais expérimentaux décrivant l'interface

Dans ce sous-chapitre, différents essais expérimentaux proposés et présentés dans la littérature pour identifier le comportement de l'interface acier-béton et le caractériser sont exposés.

### 2.3.1 Essais d'arrachement pull-out

La géométrie de l'essai de pull-out est composée d'un échantillon de béton cubique ou cylindrique traversé par une seule barre d'acier. La translation du béton est bloquée par un support rigide. La longueur de contact acier-béton est plus petite que la dimension de l'échantillon de béton. Un déplacement est imposé à l'extrémité de la barre d'acier (voir

figure 2.11). Le principe de ce type d'essai consiste à supposer que la valeur de l'adhérence est constante le long de la barre d'acier (pour la longueur de contact acier-béton de l'essai). Cette contrainte  $\tau$  peut être calculée comme suit :

$$\tau = \frac{F}{dL\pi} \quad (2.29)$$

$d$  étant le diamètre de la barre et  $L$  la longueur d'ancrage entre les deux matériaux. Le glissement  $g$  est mesuré à l'extrémité non chargée de l'éprouvette, ce qui permet d'obtenir la courbe de l'adhérence en fonction du glissement. De même, et pour chaque nouvelle valeur de déplacement imposé à l'extrémité de la barre, la force  $F$  équivalente est mesurée. Pour cet essai, deux modes de rupture sont prépondérants : une rupture par éclatement du béton ou par arrachement de la barre d'acier (voir figure 2.12).

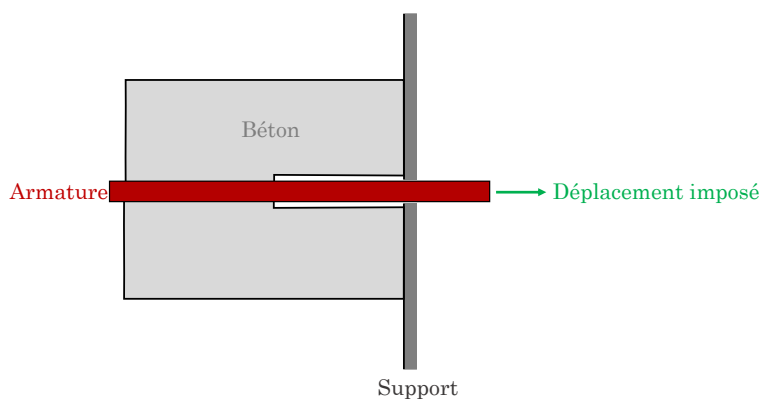


FIGURE 2.11 – Principe de l'essai de pull-out.

Pour un enrobage suffisamment grand, la barre d'acier est totalement arrachée à la fin de l'essai. Une rupture par arrachement de l'acier se produit généralement pour des valeurs de contraintes d'adhérence et de glissement importantes. De plus, la forme de la partie post-pic de la courbe (contrainte d'adhérence-glissement) dépend du mode de rupture : un glissement de la barre d'acier entraîne un adoucissement prononcé contrairement à la rupture d'un cône de béton qui aboutit à un comportement plus fragile [Soroushian *et al.*, 1991] (voir figure 2.12).

Des essais de pull-out sont réalisés dans [Mezhoud *et al.*, 2017] avec un suivi à l'aide d'une technique d'émission acoustique. Pour cela, des capteurs piézoélectriques sont placés sur deux faces latérales opposées du béton. Les résultats montrent des corrélations entre le nombre des signaux captés, leur intensité, et leur durée, avec le mode de ruine de l'essai de pull-out (rupture par glissement ou par éclatement du béton).

### 2.3.1.1 Avantages de l'essai pull-out

Deux avantages principaux peuvent être cités en ce qui concerne l'essai pull-out :

- une grande base de données existe dans la littérature. De nombreux travaux intègrent ce type d'essai. L'essai pull-out est très adopté et couramment utilisé pour caractériser le comportement mécanique de l'interface acier-béton [Ngo et Scordelis, 1967] [Torre-Casanova, 2012] [Lin et Ostertag, 2017] ;
- c'est un essai simple à mettre en œuvre.

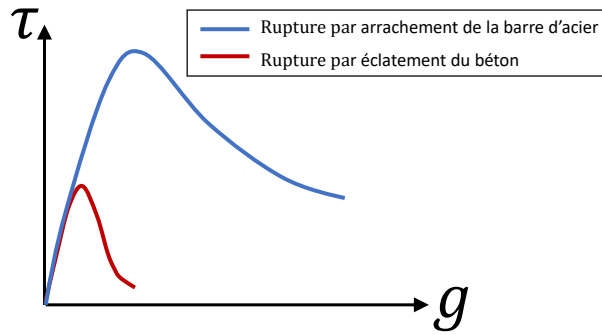


FIGURE 2.12 – Influence du mode de ruine sur la loi d’adhérence.

### 2.3.1.2 Limites de l’essai pull-out

L’essai pull-out présente plusieurs limites dont les principales sont citées ci-après :

- le retrait endogène de l’échantillon peut créer un confinement qui peut influencer les résultats obtenus [Tran *et al.*, 2007] ;
- un frottement entre l’échantillon et la plaque d’acier de support peut également créer un confinement [Tran *et al.*, 2007] ;
- l’enrobage tout autour de la barre tirée (5 fois le diamètre de la barre selon les recommandations de [RILEM, 1970b]) est peu représentatif des valeurs couramment admises pour des enrobages dans les structures réelles ;
- le post-traitement de cet essai est réalisé en déterminant des grandeurs moyennes du fait que la contrainte d’adhérence est supposée constante le long de la longueur de contact. Les valeurs à l’échelle locale de l’interface ne sont généralement pas analysées [Tran *et al.*, 2007] [Leibovich *et al.*, 2018]. Cette limite de l’essai de pull-out dépend cependant de la taille de la structure à modéliser. Pour une structure de grandes dimensions, l’essai de pull-out peut être considéré comme un volume élémentaire représentatif. À cette échelle, la taille des éléments finis utilisée pour construire le maillage est généralement plus grande que les dimensions de ce type d’essais [Mezher, 2022] ;
- les résultats issus de ce test dépendent de nombreux paramètres. Cette dépendance est discutée dans le paragraphe suivant.

### 2.3.1.3 Paramètres influençant le comportement de l’interface captés par les essais de pull-out

[Eligehausen *et al.*, 1982] a étudié l’effet du confinement passif sur la réponse de l’essai de pull-out. Ce type de confinement est dû à la présence d’acier passif dans l’échantillon tout autour du béton. Les résultats montrent qu’un confinement passif peut augmenter l’adhérence et la ductilité de l’ensemble de l’échantillon acier-béton. En ce qui concerne l’ajout d’un confinement actif provenant de contraintes de confinement appliquées sur les surfaces libres du béton, les résultats montrent également une augmentation de l’adhérence et donc de la résistance au glissement [Malvar, 1991] [Turgut *et al.*, 2020]. Il existe de plus une grande variété de paramètres qui peuvent affecter les résultats de l’essai, parmi lesquels :

- l’épaisseur de l’enrobage [Tepfers, 1973] ;
- les résistances à la compression [Tepfers, 1979] et à la traction du béton [Hortigon

*et al.*, 2022];

- la direction de coulage du béton [Daoud et Lorrain, 2003];
- le diamètre du renfort [Abrams, 1913] [Bouazaoui et Li, 2008];
- la taille de l'échantillon (ensemble acier et béton) [Bazant et Sener, 1988].

### 2.3.2 Essais sur des poutres

La traction subie par les armatures dans les structures réelles est souvent la conséquence d'une mise en flexion d'ensemble. C'est pourquoi l'idée d'évaluer l'adhérence pour un élément en flexion a été émise. Le premier essai de ce type a été proposé par [ACI Committee 408, 1964], avec une poutre en flexion où le renfort principal n'est pas ancré. Une alternative à cet essai est suggérée dans [RILEM, 1970a], avec deux éléments de type pull-out reliés par une rotule sur la partie supérieure de l'éprouvette et une barre d'acier sur la partie inférieure. L'absence de béton dans la partie reliant les deux éléments permet de mesurer la valeur de la force de réaction  $F$ . Cette alternative est appliquée par [Dancygier et Katz, 2012] pour tester des bétons fibrés.

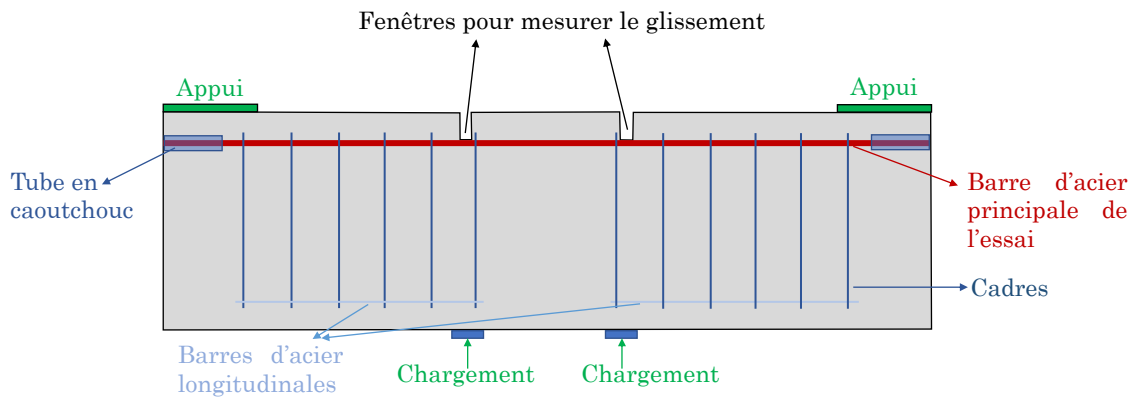


FIGURE 2.13 – Essai proposé par [ACI Committee 408, 1964] sur une poutre.

#### 2.3.2.1 Avantage des essais sur des poutres

Ce type d'essai étudie le comportement de l'interface pour un élément structural couramment utilisé en génie civil.

#### 2.3.2.2 Limite des essais sur des poutres

Les essais sur des poutres sont principalement critiqués dans [Tran *et al.*, 2007] à cause de l'inhomogénéité de la contrainte le long de l'interface.

### 2.3.3 Essais sur des tirants

Cet essai est le plus souvent utilisé pour caractériser l'influence de l'adhérence acier-béton sur la fissuration. Plusieurs résultats expérimentaux sont présentés dans la littérature [Clément, 1987] [Farra et Jaccoud, 1994] [Mivelaz, 1996]. Aux extrémités du tirant, les contraintes sont nulles au niveau du béton. À travers l'interface, les contraintes imposées sur l'extrémité

de la barre sont distribuées entre l'acier et le béton. Au début de l'essai, les contraintes dans l'acier et le béton le long du tirant sont constantes dans une zone centrale comme montré dans la figure 2.14. Pour cette zone, la déformation longitudinale du béton  $\varepsilon_b$  est égale à celle de l'acier  $\varepsilon_a$ .

$$\varepsilon_a = \varepsilon_b \quad (2.30)$$

donc :

$$\frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{\sigma_b}{E_b} \quad (2.31)$$

avec :

- $\sigma_a$  : la contrainte longitudinale de l'acier ;
- $\sigma_b$  : la contrainte longitudinale du béton ;
- $E_a$  : le module d'Young de l'acier ;
- $E_b$  : le module d'Young du béton.

d'où :

$$\sigma_a = \frac{E_a}{E_b} \sigma_b = n \sigma_b \quad (2.32)$$

La force résistante  $F$  de l'essai de tirant est exprimée comme suit :

$$F = A \sigma_a + B \sigma_b \quad (2.33)$$

avec  $A$  et  $B$  les sections de l'acier et du béton, respectivement. Par la suite, c'est possible de calculer la contrainte du béton  $\sigma_b$  comme suit :

$$\sigma_b = \frac{F}{B + nA} \quad (2.34)$$

L'hétérogénéité expérimentale du béton implique que celui-ci présente des zones plus faibles que d'autres.  $f_t$  étant la résistance à la traction du béton, lorsque  $F$  atteint la valeur  $F_t = (B + nA)f_t$ , une fissure se forme dans le béton au niveau de sa zone la plus faible (principe du maillon faible ; les propriétés expérimentales du béton sont les plus faibles au niveau de l'apparition de la première fissure). Une redistribution des contraintes dans l'acier et le béton est par suite induite à l'apparition de cette première fissure (figure 2.14). Avec cette nouvelle distribution, la contrainte dans le béton est nulle au niveau de ses bords et également au niveau des bords de la fissure. Avec un chargement appliqué monotone croissant à l'extrémité de la barre d'acier, une redistribution des contraintes dans l'acier et le béton est observée à chaque fois qu'une nouvelle fissure se forme dans le béton (figure 2.14).

La réponse monotone du tirant est divisée en trois phases (voir figure 2.15) :

- phase élastique ;
- phase de fissuration ;
- comportement de l'acier seul.

### 2.3.3.1 Avantages des essais sur des tirants

Les avantages principaux des essais sur des tirants peuvent être résumés comme suit :

- le principe de cet essai est simple à mettre en place ;
- la barre en acier de l'essai de tirants représente le mode comportement d'une armature inférieure classique dans les éléments structurels en flexion.

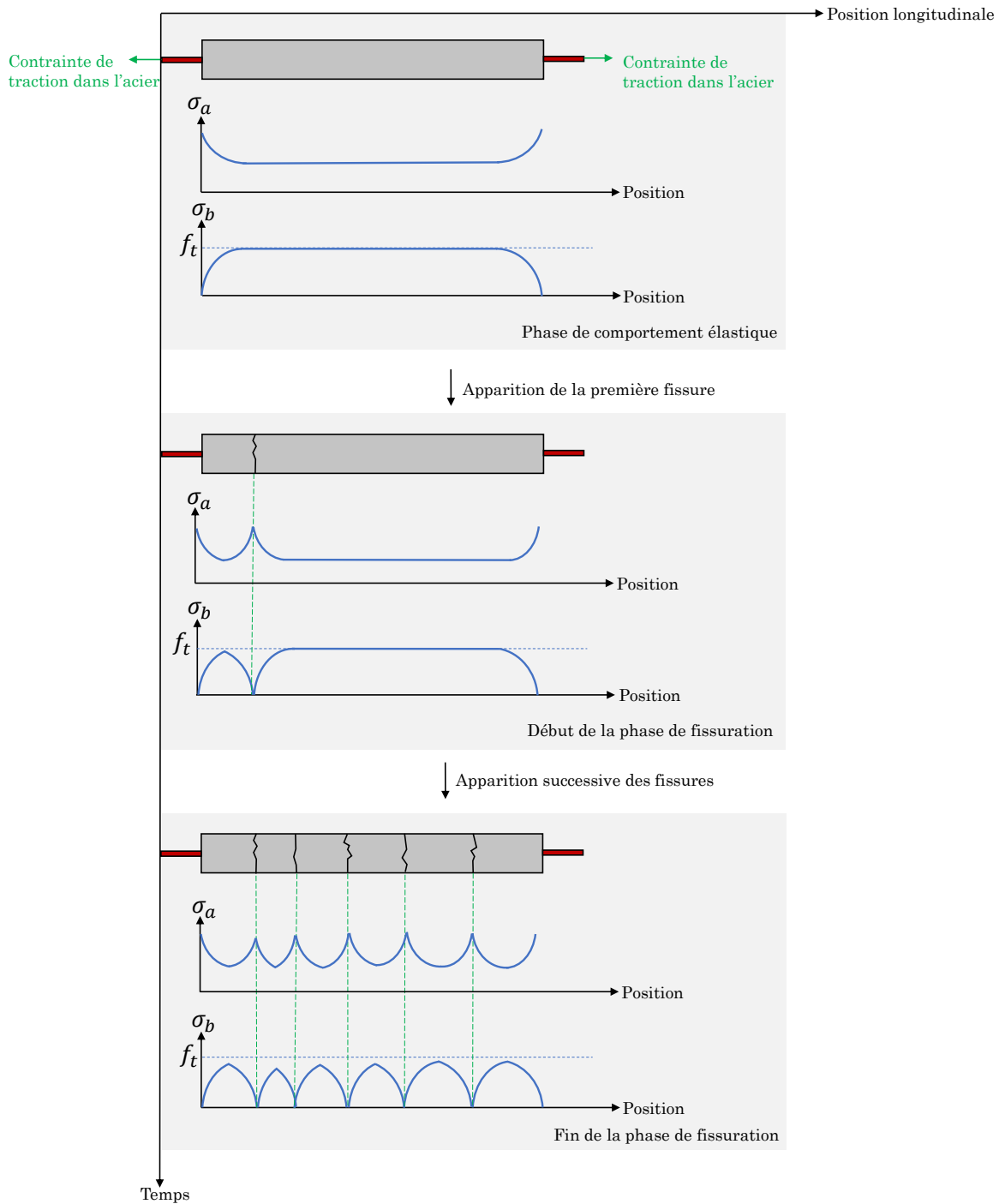


FIGURE 2.14 – Évolution des contraintes de béton  $\sigma_b$  et d'acier  $\sigma_a$  en fonction du temps lors des phases de comportement élastique et de comportement de fissuration de l'essai de tirant.

### 2.3.3.2 Limite des essais sur des tirants

Le mode de ruine résultant des essais sur des tirants correspond soit à une rupture longitudinale de l'enrobage, soit à une plastification de la barre l'acier. L'arrachement de la



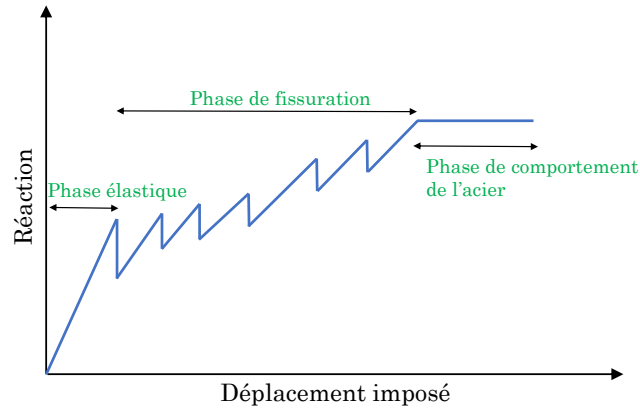


FIGURE 2.15 – Phases de comportement de l'essai de tirant.

barre d'acier n'est pas un phénomène qu'on peut observer. Les essais de tirant ne permettent pas d'atteindre l'état ultime de l'interface acier-béton (les valeurs de glissement ne sont pas très élevées) [Tran, 2011].

De plus, cet essai est rarement réalisé avec un chargement cyclique (on peut pourtant trouver quelques résultats avec des chargements cycliques présentant quelques cycles de charges/décharges dans [Jang *et al.*, 2019]).

### 2.3.4 Essai PIAF

Pour l'essai pull-out classique, les valeurs d'adhérence obtenues ne sont pas exactes à cause du confinement qui est dû au frottement entre le béton et la plaque d'acier (le support) et au retrait endogène de l'échantillon. De ce fait, ces effets ne sont pas pris en compte dans l'essai pull-out. L'essai PIAF vise à limiter les efforts latéraux en proposant une géométrie d'essai ayant une faible épaisseur de 4 cm (voir figure 2.16). La présence de deux fenêtres dans l'échantillon permet de visualiser la dégradation de l'interface. La manipulation des résultats peut se faire par la technique de corrélation d'images [Tran *et al.*, 2007].

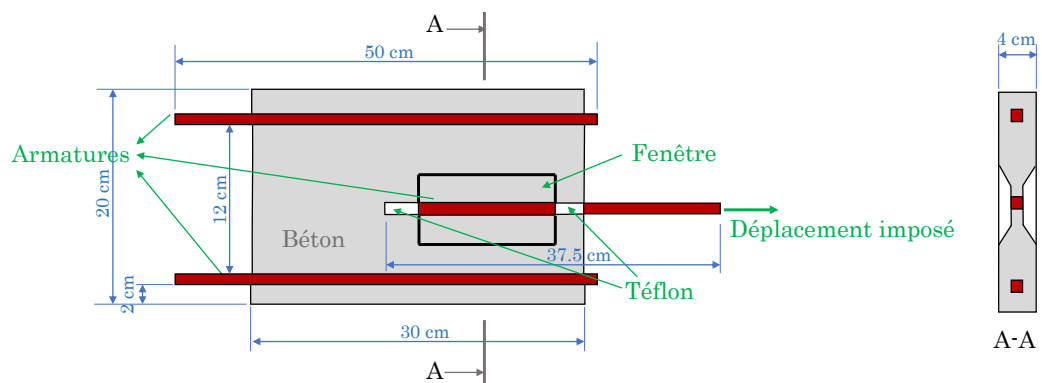


FIGURE 2.16 – Principe de l'essai PIAF selon [Tran *et al.*, 2007].

#### 2.3.4.1 Avantages de l'essai PIAF

L'essai PIAF présente les avantages suivants :

- la petite épaisseur de l'échantillon peut réduire, voire éliminer les effets latéraux ;
- un post-traitement avec la technique de corrélation d'images permet de caractériser à l'échelle locale le comportement de l'interface.

### 2.3.4.2 Limite de l'essai PIAF

Même si le principe de l'essai est innovant et vise à dépasser les limites de l'essai pull-out classique, l'échantillon peut perdre sa stabilité pour des valeurs de déplacement imposé importantes à cause de la faible épaisseur, ce qui rend cet essai valable uniquement pour les faibles valeurs de déplacement imposé.

### 2.3.5 Essais de type push-in

Cet essai a été proposé par [Tixier, 2013]. Le principe est de comprimer la barre d'acier dans le béton. L'essai vise à reproduire l'état de contrainte du béton comprimé dans le cas des structures précontraintes comme les enceintes de confinement. Pour déterminer les déformations à l'échelle locale dans l'échantillon étudié, des fibres optiques sont noyées dans le béton à différentes distances de l'acier.

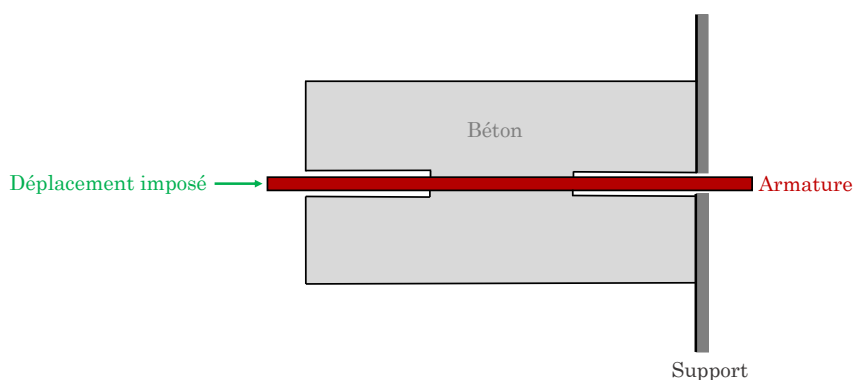


FIGURE 2.17 – Principe de l'essai push-in selon [Tixier, 2013].

#### 2.3.5.1 Avantages de l'essai push-in

Deux avantages principaux peuvent être résumés en ce qui concerne l'essai push-in :

- cet essai représente l'état du béton en compression dans les enceintes de confinement ;
- les mesures par fibres optiques de déformations faites dans [Tixier, 2013] permettent de caractériser localement le comportement de l'interface acier-béton.

#### 2.3.5.2 Limite de l'essai push-in

Pour le moment, peu d'auteurs ont travaillé sur ce type d'essai. Peu de résultats expérimentaux sont présentés dans la littérature.

## 2.4 Modélisation numérique de l'interface

Au niveau local de l'interface acier-béton, et comme présenté dans le sous-chapitre 2.1 de ce travail, de nombreux phénomènes dissipatifs peuvent avoir lieu. Ainsi, une prise en compte de cette interface dans les calculs non linéaires de structures demeure une nécessité dès que l'on s'intéresse à une description fine de la fissuration. Différentes approches de modélisation de l'interface sont proposées dans la littérature dont les principales sont synthétisées dans la suite de ce sous-chapitre.

### 2.4.1 Modélisation de l'interface par des éléments ressorts

Le principe de cette stratégie est d'ajouter entre chaque couple de nœuds acier-béton, superposés dans la configuration initiale du système, deux ressorts dans les directions normale et tangentielle par rapport à la direction de la barre d'acier. L'idée a été proposée pour la première fois par [Ngo et Scordelis, 1967]. Les contraintes  $\sigma_n$  et  $\sigma_t$  et les déformations  $\varepsilon_n$  et  $\varepsilon_t$  des ressorts seront liées par les équations suivantes :

$$\sigma_n = k_n \varepsilon_n \quad (2.35)$$

$$\sigma_t = k_t \varepsilon_t \quad (2.36)$$

Les indices  $n$  et  $t$  représentent respectivement les directions normale et tangentielle par rapport à la barre d'acier.

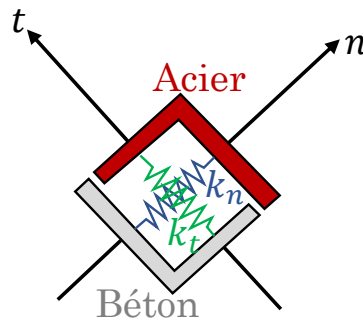


FIGURE 2.18 – Principe de modélisation de l'interface acier-béton par des éléments ressorts selon [Ngo et Scordelis, 1967].

En 2D, deux ressorts sont introduits. Pour le cas 3D il est possible d'ajouter 3 ressorts : deux dans les directions normales et un dans la direction tangentielle par rapport au renfort. Dans [Ngo et Scordelis, 1967], des valeurs constantes des rigidités normale et tangentielle  $k_n$  et  $k_t$  sont adoptées. Pour cette raison, les ressorts ont des comportements élastiques linéaires. Ainsi, la dégradation de l'interface n'est pas réellement prise en compte. Toutefois, la possibilité d'un glissement à l'interface est autorisée comme les déformations  $\varepsilon_n$  et  $\varepsilon_t$  dans les directions normale et tangentielle sont prises en compte.

La même idée est reprise par [Nilson, 1968] avec une loi d'adhérence pour la rigidité tangentielle, ce qui permet de représenter la dégradation dans cette direction. Cette loi est exprimée dans le tableau 2.1.

La limite de cette approche réside dans la difficulté de la construction du maillage qui nécessite la définition d'éléments ressorts pour chaque couple de nœuds acier-béton. Cela augmente par la suite le coût de calcul de la résolution.

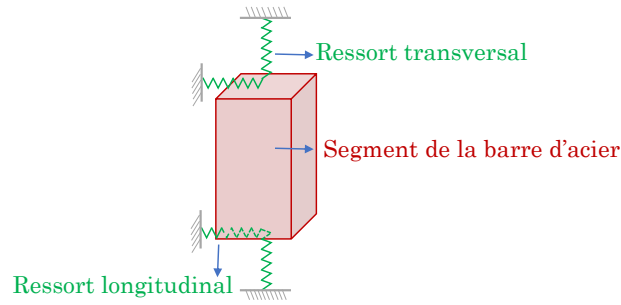


FIGURE 2.19 – Principe des ressorts utilisé par [Nilson, 1968].

## 2.4.2 Modélisation de l'interface avec une bande d'éléments finis

L'idée de cette approche est d'ajouter une bande d'éléments finis entre les éléments d'acier et ceux du béton. Ces éléments représentent l'interface et ont des lois de comportement associées. Dans [Reinhardt *et al.*, 1984], un comportement plastique endommageable est attribué à cette bande.

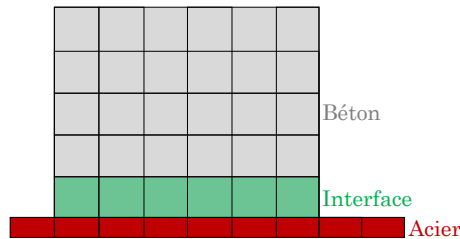


FIGURE 2.20 – Principe de maillage 2D de l'ensemble acier-béton-interface avec l'approche de [Reinhardt *et al.*, 1984] de modélisation de l'interface acier-béton.

[Giry, 2011] a utilisé une approche similaire pour un modèle d'interface avec un comportement basé sur la loi d'endommagement de Mazars [Mazars, 1986].

Cette méthode, similairement à la méthode de ressorts (paragraphe 2.4.1), augmente le nombre d'éléments finis utilisés pour construire le maillage de la structure en béton armé étudiée. Pourtant, les éléments d'interface ajoutés sont des éléments 2D/3D, numériquement plus coûteux que les éléments ressorts 1D.

## 2.4.3 Modélisation de l'interface sous forme d'un problème de frottement entre deux solides

Dans [Raous et Ali Karray, 2009], l'acier et le béton sont supposés être deux solides distincts qui peuvent avoir des lois de contact entre eux. Une loi de frottement génère la liaison, avec une condition unilatérale sur le saut de déplacement normal.

$$[\mathbf{u}] = [u_N] \mathbf{n}^1 + [\mathbf{u}_T] \quad (2.37)$$

$$\mathbf{R} = R_N \mathbf{n}^1 + \mathbf{R}_T \quad (2.38)$$

$[\mathbf{u}]$  et  $\mathbf{R}$  sont respectivement le saut de déplacement et la force équivalente entre les deux solides.  $\mathbf{n}^1$  est le vecteur normal à la surface de contact. Les indices  $N$  et  $T$  désignent les

directions normale et tangentielle. Cette approche est validée dans le travail de [Raous et Ali Karray, 2009] par rapport à des résultats expérimentaux de type pull-out avec des barres d'acier lisses sans l'introduction de barres HA. Elle est pourtant utilisée dans un cadre de calcul 2D. Une extension vers un cadre 3D n'est pas présentée.

#### 2.4.4 Modélisation de l'interface avec des éléments dégénérés

Dans le cadre d'une hypothèse d'axisymétrie, [Ramirez, 2005] a formulé un élément 2D avec une loi de comportement pour l'interface formulée dans un cadre thermodynamique à l'aide de relations contraintes/déformations. Le potentiel thermodynamique est défini selon l'équation (2.39) suivante :

$$\rho\psi = \frac{1}{2} \left[ \langle \varepsilon_N \rangle^- E \langle \varepsilon_N \rangle^- + \langle \varepsilon_N \rangle^+ E (1 - \mathbf{D}_N) \langle \varepsilon_N \rangle^+ + \varepsilon_T G (1 - \mathbf{D}_T) \varepsilon_T + (\varepsilon_T G (1 - \mathbf{D}_T) \varepsilon_T + (\varepsilon_T - \varepsilon_T^f) G \mathbf{D}_T (\varepsilon_T - \varepsilon_T^f) + \gamma \alpha^2) \right] + \mathbf{H}(z) \quad (2.39)$$

avec :

- $\rho$  : la densité ;
- $\psi$  : l'énergie libre de Helmholtz ;
- $G$  : le module de cisaillement ;
- $E$  : le module d'Young ;
- $D_N$  : variable d'endommagement dans la direction normale ;
- $D_T$  : variable d'endommagement dans la direction tangentielle ;
- $\varepsilon_N$  : déformation dans la direction normale ;
- $\varepsilon_T$  : déformation dans la direction tangentielle ;
- $\gamma$  : le module d'écrouissage par glissement ;
- $\alpha$  : variable interne d'écrouissage cinématique ;
- $z$  : variable interne d'écrouissage isotrope ;
- $\mathbf{H}(z)$  : la fonction de consolidation de l'écrouissage isotrope.

Les deux composantes tangentielle et normale de la loi sont découplées.

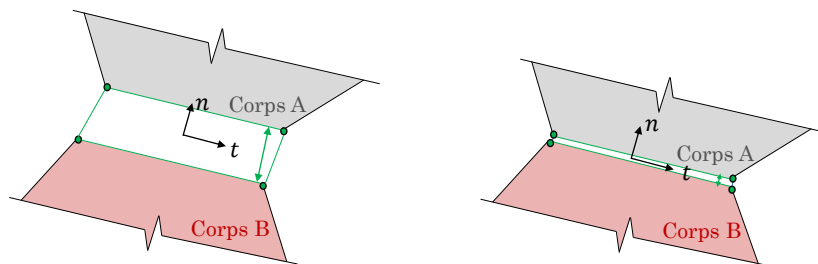


FIGURE 2.21 – Élément dégénéré selon [Ramirez, 2005].

Dans [Ramirez, 2005], les fonctions de forme de l'élément dégénéré (à zéro épaisseur) sont définies. Même en l'absence d'épaisseur, un paramètre  $h_{pen}$  est défini étant égal à l'épaisseur  $t_0^A$  associée à la surface de contact du béton avec l'acier (reliée aux hétérogénéités du béton). L'élément de [Ramirez, 2005] est un élément fini à 4 noeuds ayant une épaisseur nulle.

L'élément joint de [Ramirez, 2005], étant défini avec une hypothèse d'axisymétrie, n'est applicable pour un cas de calcul général dans lequel cette hypothèse n'est pas applicable.

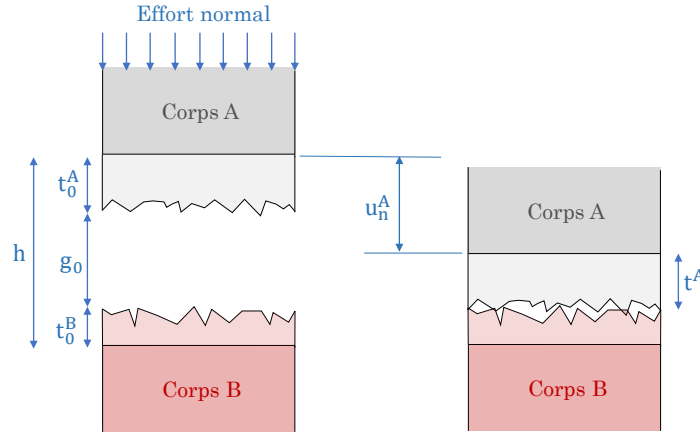


FIGURE 2.22 – Surfaces de contact entre l'acier et le béton selon [Ramirez, 2005].

## 2.4.5 Modélisation de l'interface avec des éléments joints

Il s'agit d'un élément fini à zéro épaisseur qui relie des contraintes à des sauts de déplacement. Un élément joint 3D a été proposé dans [Richard, 2010], avec une attention particulière portée sur l'introduction de la corrosion à l'étude de l'interface. Une loi de comportement élasto-endommageable-glissante est définie pour l'élément joint, avec une incorporation de l'effet d'un confinement potentiel sur le comportement de l'interface. Dans cet élément on relie des contraintes à des valeurs d'incrément de déplacement dans les directions normale et longitudinale. Le potentiel thermodynamique est défini comme suit :

$$\rho\psi = \frac{k}{6} \left( (1-d) (\langle \text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon} \rangle^+)^2 + (\langle \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_r) \rangle^-)^2 \right) + (1-d)\mu\boldsymbol{\varepsilon}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d + d\mu(\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_\pi) : (\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_\pi) + \frac{1}{2}\gamma\alpha : \alpha + \mathbf{H}(z) + \frac{k}{6}\text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon} \langle \text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon}_{r0} \rangle^+ \quad (2.40)$$

avec :

- $\rho$  : la densité ;
- $\psi$  : l'énergie libre de Helmholtz ;
- $d$  : un paramètre d'endommagement ;
- $\boldsymbol{\varepsilon}$  : le tenseur de déformations, et  $\boldsymbol{\varepsilon}^d$  sa partie déviatorique ;
- $\boldsymbol{\varepsilon}_r$  : un tenseur de déformation associé aux produits de la corrosion, et  $\boldsymbol{\varepsilon}_{r0}$  sa valeur initiale ;
- $\boldsymbol{\varepsilon}_\pi$  : un glissement interne ;
- $k$  : le coefficient de compressibilité de l'interface ;
- $\mu$  : le coefficient de cisaillement de l'interface ;
- $\frac{1}{2}\gamma\alpha : \alpha$  : un écrouissage cinématique ;
- $\mathbf{H}(z)$  : un écrouissage isotrope ;
- $\gamma$  : le module d'écrouissage cinématique ;
- $\alpha$  : variable interne d'écrouissage cinématique ;

- $z$  : variable interne d'écoulement isotrope ;
- $\mathbf{Tr}$  : l'opérateur trace d'une matrice ;
- $\langle x \rangle^+$  : la partie positive de  $x$  ;
- $\langle x \rangle^-$  : la partie négative de  $x$ .

L'utilisation de l'élément joint 3D de [Richard, 2010] demande une identification des valeurs d'un grand nombre de paramètres définissant cet élément, qui peut ne pas être aisée. Différentes versions d'éléments joints 2D [Brisotto *et al.*, 2012] et 3D [Sanz *et al.*, 2018] sont proposées ultérieurement dans la littérature. Pourtant, ces travaux nécessitent de mailler l'acier avec des éléments surfaciques en 2D et volumiques en 3D. Pour un calcul à grande échelle, l'utilisation d'éléments barres pour le maillage de l'acier est plus pratique.

## 2.4.6 Modélisation de l'interface dans le cadre de la méthode des éléments de frontière (BEM)

La méthode des éléments de frontière est une approche mathématique qui modélise un système physique en le divisant en deux parties : une région intérieure et une région frontalière. Elle consiste à résoudre un problème en rapprochant la solution en termes de valeurs limites. Cela signifie que la solution est représentée en fonction des valeurs limites et de leurs dérivées. La BEM consiste à résoudre les équations intégrales de frontière qui relient les valeurs de frontière aux valeurs intérieures du problème.

Contrairement à la méthode des éléments finis (FEM), la BEM ne nécessite pas un maillage du domaine. Seulement la limite du domaine étudié est discrétisée [Bonnet, 1999] [Nishimura, 2002].

Concernant le comportement l'interface acier-béton, le travail de [Ameen *et al.*, 2009] propose une modélisation de cette interface dans le cadre de la BEM. Pour cela, la frontière externe de la géométrie étudiée et les lignes d'acier sont discrétisés. Le comportement d'adhérence est pris en compte avec des ressorts qui relient les lignes d'acier au béton.

Bien que les résultats fournis par [Ameen *et al.*, 2009] sont prometteurs, les applications présentées dans se limitent à des comportements linéaires d'acier et de béton. La méthode des éléments de frontière est très peu reconnue en comparaison avec la méthode des éléments finis pour la modélisation des structures en béton armé. En outre, la BEM implique une résolution numérique d'un système d'équations linéaires, en inversant une matrice dense. La matrice impliquée dans la BEM est donc généralement pleine et non symétrique, ce qui peut entraîner des coûts de calcul et des besoins en mémoire plus élevés que ceux de la FEM [Seghir, 2014]. La FEM, en revanche, produit souvent des matrices peu denses. Ce caractère des matrices de la FEM facilite leur inversion.

Le couplage BEM-FEM peut offrir des avantages en termes de précision, d'efficacité, et de modélisation des problèmes complexes. On trouve dans la littérature des approches de couplage BEM-FEM utilisées dans beaucoup de domaines comme l'étude de l'interaction sol-structure [Von Estorff et Firuziaan, 2000] [Vasilev *et al.*, 2015], de l'interaction solide-fluide [Seghir, ], et le domaine de la mécanique de la rupture [Aour *et al.*, 2007]. Le principe de couplage BEM-FEM n'est pas appliqué dans la littérature pour l'étude de l'interface acier-béton. Ce couplage peut pourtant introduire des complexités en termes d'implémentation et de gestion des interfaces entre les deux méthodes [Boumaiza et Aour, 2014].

## 2.4.7 Modélisation de l'interface par des forces internes

[Torre-Casanova, 2012] a proposé une approche de modélisation de l'interface pour des calculs à l'échelle d'une grande structure, avec des maillages non coïncidents pour l'acier et le béton. L'acier est représenté par des éléments barres et le béton par des éléments volumiques.

Tout d'abord, pour une liaison d'adhérence parfaite, le déplacement des nœuds d'acier peut être relié aux déplacements des nœuds de béton via des relations cinématiques. Le point  $ba$  de la figure 2.23 est le nœud d'acier confondu avec le centroïde du maillage de béton dans la configuration initiale. Son déplacement est déterminé à partir de celui des nœuds de béton en utilisant des fonctions de forme  $N_i$ .

$$\mathbf{u}_{ba,t} = \sum_{i=1}^8 N_i(x_{ba}, y_{ba}, z_{ba}) \mathbf{u}_{bi,t} \quad (2.41)$$

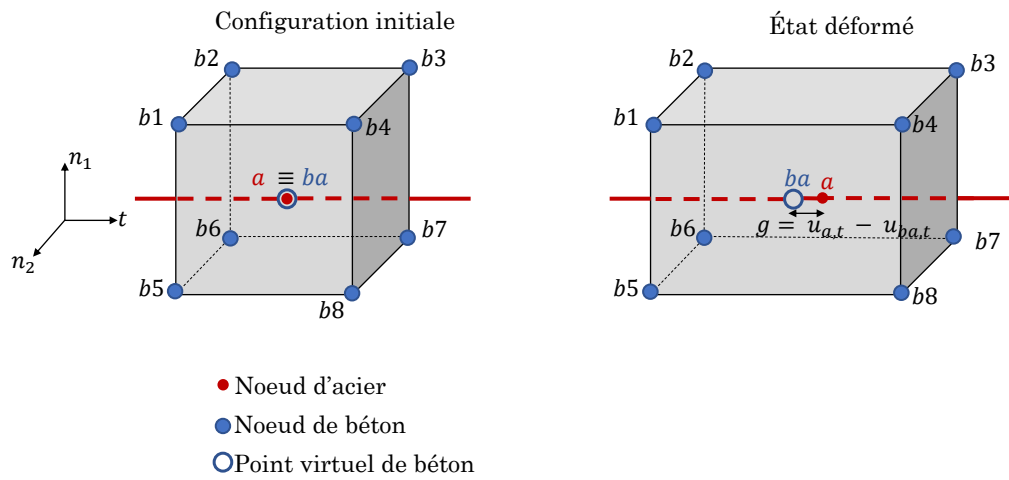


FIGURE 2.23 – Configurations initiale et déformée de l'acier et du béton selon [Torre-Casanova, 2012].

Pour tenir compte du comportement d'interface, des efforts internes sont ajoutés aux nœuds d'acier et de béton. Dans la direction normale par rapport à la barre de renfort, la liaison est supposée parfaite. Dans le modèle, l'intérêt se porte seulement à la description dans la direction tangentielle avec :

$$\vec{\mathbf{F}}_{b/a} = \delta \pi d_a l f_{ad} \vec{\mathbf{t}} \quad (2.42)$$

$d_a$  étant le diamètre de la barre,  $l$  la longueur de la barre décrite par chaque nœud d'acier, et  $f_{ad}$  une contrainte d'adhérence déduite à partir d'une loi d'adhérence selon la valeur du glissement.  $\delta$  peut prendre une valeur de plus ou moins 1 selon le sens de la direction du glissement. Pour assurer l'équilibre, la force du béton sur l'acier  $\vec{\mathbf{F}}_{b/a}$  doit être équilibrée par l'ensemble des forces  $\vec{\mathbf{F}}_{a/b_j}$  de l'acier sur le béton.

$$\vec{\mathbf{F}}_{a/b_j} = N_j(x_{ba}, y_{ba}, z_{ba}) \vec{\mathbf{F}}_{a/b} \quad (2.43)$$

avec :

$$\vec{\mathbf{F}}_{a/b} = -\vec{\mathbf{F}}_{b/a} \quad (2.44)$$



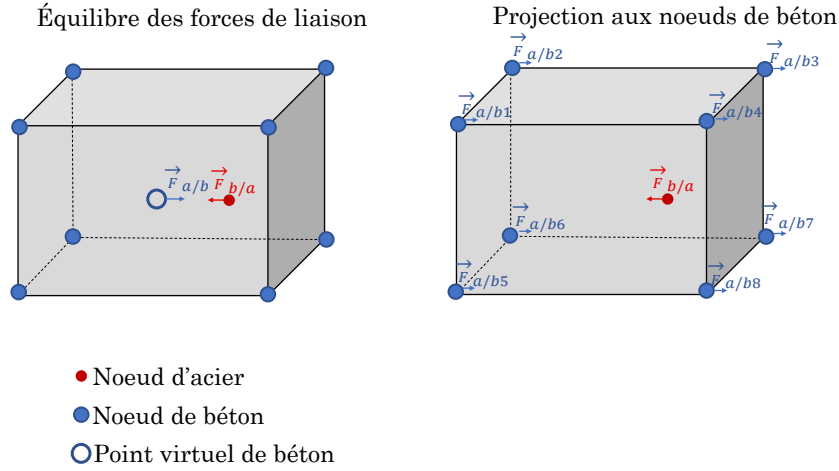


FIGURE 2.24 – Efforts internes ajoutés [Torre-Casanova, 2012].

La résolution se fait avec un schéma Newton-Raphson en ajoutant un terme lié aux efforts internes exprimé comme suit :

$$\mathbf{F}_{\text{int, LAB}}(\mathbf{u}) = - \begin{pmatrix} F_{b/a,x} \\ F_{b/a,y} \\ F_{b/a,z} \\ F_{a/b1,x} \\ F_{a/b1,y} \\ F_{a/b1,z} \\ \dots \\ F_{a/b8,z} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Le vecteur  $\mathbf{F}_{\text{int, LAB}}(\mathbf{u})$  rassemble toutes forces internes ajoutées aux noeuds d'acier et de béton pour tenir en compte le comportement de l'interface.  $\mathbf{u}$  est l'ensemble de degrés de liberté du système étudié. Comme classiquement et sans l'ajout de ce terme additionnel, les forces intérieures d'expriment selon l'équation suivante :

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \int_{\text{volume}} {}^T[\mathbf{B}]\boldsymbol{\sigma} dv \quad (2.46)$$

$\mathbf{B}$  étant la matrice des dérivées des fonctions de forme et  $\boldsymbol{\sigma}$  l'ensemble des contraintes. Avec le modèle proposé par [Torre-Casanova, 2012], les forces intérieures sont l'union de  $\mathbf{F}_{\text{int, LAB}}(\mathbf{u})$  et de  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  et la matrice tangente de résolution est la dérivée de l'ensemble des deux.

## 2.4.8 Modélisation de l'interface avec des éléments reliant : acier 1D et béton 3D

Selon [Mang, 2015], la méthodologie proposée par [Torre-Casanova, 2012] peut amener à un nombre d'itérations très élevé. Par conséquent, le but de l'utiliser pour réaliser des calculs à grandes échelles n'est pas tout à fait atteint. Ainsi, en se basant sur le travail de [Torre-Casanova, 2012], [Mang, 2015] propose un modèle plus avancé conduisant à un coût de calcul plus faible. Le modèle proposé par [Mang, 2015] repose sur un élément joint reliant

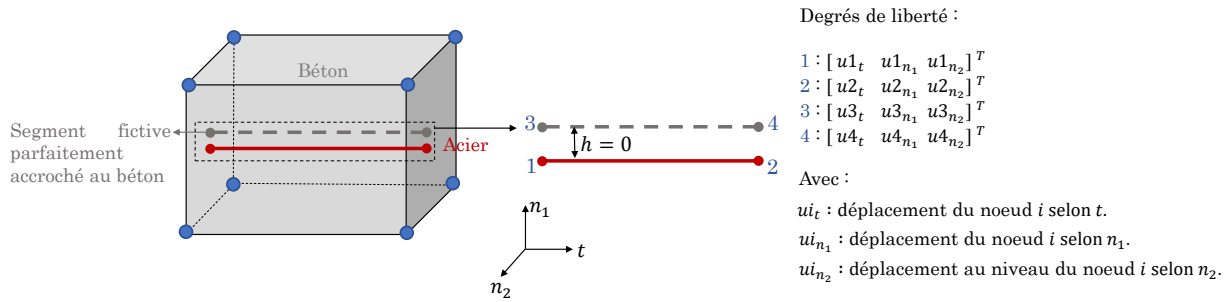


FIGURE 2.25 – Élément proposé par [Mang, 2015].

un élément d'acier 1D (unidirectionnel) à un segment fictif parfaitement adhérent au béton et qui est superposé à la l'acier dans la configuration initiale.

Pour les contraintes à l'intérieur de cette interface, une valeur très grande valeur de raideur est donnée pour la direction normale.

$$\sigma_{n1} = k_n \delta_{n1} \quad (2.47)$$

$$\sigma_{n2} = k_n \delta_{n2} \quad (2.48)$$

( $\sigma_{n1}, \sigma_{n2}$ ) étant les contraintes dans les directions normales à la barre d'acier, et ( $\delta_{n1}, \delta_{n2}$ ) les ouvertures de fissures qui peuvent apparaître dans ces directions.

Pour la direction tangentielle, des forces nodales qui dépendent de la loi d'adhérence adoptée sont calculées et définies au niveau des 4 noeuds de l'élément d'interface proposé.

Le modèle d'interface de [Mang, 2015] est développé dans [Turgut, 2018] pour y incorporer la prise de compte de l'effet du confinement sur le comportement de l'interface et pour tenir en compte l'effet goujon.

Contrairement aux éléments éléments joints de [Richard *et al.*, 2010] [Brisotto *et al.*, 2012] [Sanz *et al.*, 2018] qui relie des maillages surfacique/surfaciques ou volumiques/volumiques d'acier et de béton, l'élément joint de [Mang, 2015] relie des éléments barres d'acier à des éléments volumiques de béton. Cela rend l'élément de [Mang, 2015] plus convenable aux calculs à grandes échelles. Pourtant, bien que cet élément réduit le temps de calcul par rapport au modèle d'interface de [Torre-Casanova, 2012], il nécessite toujours un temps de calcul élevé (selon [Mang, 2015]).

## 2.4.9 Modélisation de l'interface avec la technique d'enrichissement X-FEM

Un enrichissement selon les principes de la méthode des éléments finis étendus X-FEM peut être utilisé pour représenter la cinématique de l'interface. Avec cette approche, le glissement entre les deux matériaux acier/béton est porté au niveau des nœuds communs entre les deux maillages grâce à un saut de déplacement [Gutiérrez *et al.*, 2018].

Avec ce type de modèle, les nœuds en commun entre les deux maillages sont enrichis avec plus de degrés de libertés par rapport aux autres nœuds. En plus des degrés de liberté classiques de déplacement-rotation, le glissement est un degré de liberté supplémentaire à déterminer.

Une utilisation de cette approche pour une application à grande échelle peut aboutir à un coût de calcul élevé du fait de l'augmentation significative du nombre d'inconnues du système à résoudre.

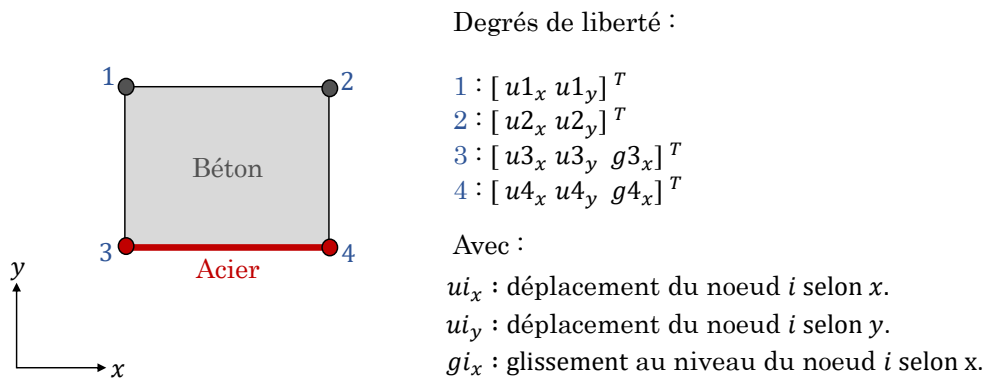


FIGURE 2.26 – Principe de l’utilisation de la méthode d’enrichissement X-FEM.

### 2.4.10 Modélisation de l’interface incorporée dans le comportement des barres d’acier

Une des approches de modélisation de l’interface consiste à modifier le comportement contrainte-déformation de l’acier pour y incorporer le comportement de l’interface.

[Wang *et al.*, 2019] proposent de modifier le module d’Young du béton et son coefficient d’érouissage. Ce type de loi constitutive modifiée des aciers de renfort est principalement utilisé dans les régions critiques des structures, telles que des pieds de poteaux ou des connexions poutres-poteaux.

Dans le travail de [Dehestani et Mousavi, 2015], le module d’Young et la limite d’élasticité de l’acier sont changés pour prendre en compte le comportement de l’interface.

En outre, d’autres chercheurs ont tenté de remplacer la loi de contrainte-déformation bilinéaire d’acier par une relation non linéaire équivalente [Laterza *et al.*, 2017].

Une dépendance de la loi de comportement de l’acier du comportement de l’interface dans le cas d’une corrosion non uniforme de l’acier est étudiée dans [Yuan *et al.*, 2020].

Cette approche introduit pourtant une homogénéisation de l’ensemble interface et acier. Elle demande l’identification de nouveaux paramètres (comme par exemple une longueur de rotule plastique  $L_p$  dans [Yuan *et al.*, 2020] et un coefficient de réduction du module d’Young dans [Dehestani et Mousavi, 2015]). Le comportement de l’interface n’est pas introduit de manière explicite.

### 2.4.11 Modélisation homogénéisée de l’ensemble acier, béton, et interface

Le travail de [Sellier et Millard, 2019] propose un approche de modélisation du comportement du béton armé avec un matériau homogénéisé. Ce matériau représente le comportement de l’ensemble acier+béton+interface acier-béton, comme le montre la figure 2.28.

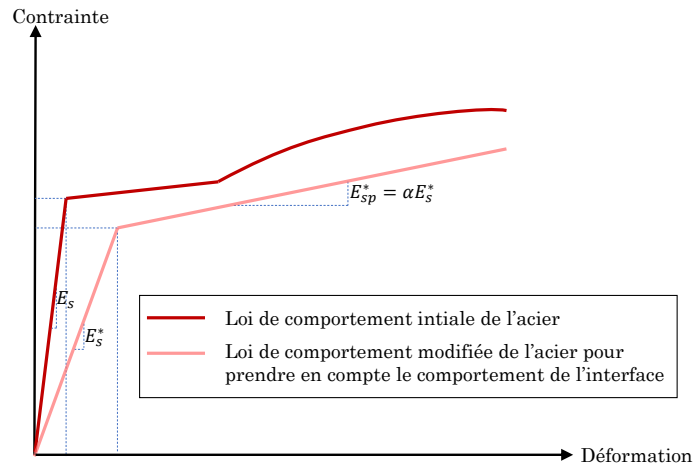


FIGURE 2.27 – Courbe de comportement d’acier réduite selon [Dehestani et Mousavi, 2015].

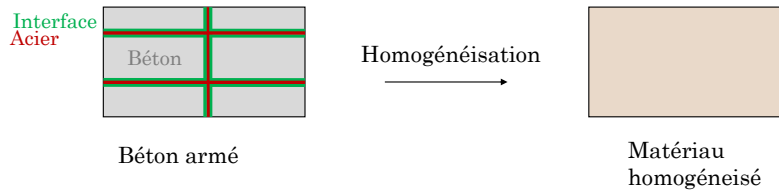


FIGURE 2.28 – Principe de la modélisation homogénéisée acier+béton+interface.

Cependant, dans cette étude, une loi d’adhérence linéaire est utilisée pour décrire le comportement de l’interface. L’utilisation d’une loi complète avec un comportement post-pic adoucissant n’a pas été examinée. De plus, l’effet du comportement cyclique de l’interface n’a pas été étudié.

D’une manière générale, une modélisation homogénéisée du comportement du béton armé peut rendre difficile la description fine de la localisation de la fissuration du béton tout autour des barres d’acier [Combescure, 2013] [KHEBIZI *et al.*, 2014].

### 2.4.12 Modélisation de l’interface dans le cadre d’éléments semi-globaux

La modélisation aux éléments finis des structures en béton armé fournit des résultats précis de leur comportement. Pourtant, l’utilisation d’éléments semi-globaux de types poutres et plaques s’est avérée efficace sur le plan informatique. En effet, les éléments poutres et plaques sont bien connus pour leur avantage de fournir des résultats numériques représentatifs pour des temps de calcul raisonnables. Pour cela, la modélisation du comportement de l’interface acier-béton au sein de ce type d’éléments peut être particulièrement intéressante. Différentes approches sont présentées dans la littérature pour incorporer l’étude de l’interface dans le cadre d’éléments semi-globaux.

### 2.4.12.1 Modélisation de l'interface dans des éléments finis poutres

L'utilisation d'éléments poutres est intéressante lors de la modélisation de structures en portiques (par exemple des bâtiments à ossature et des ponts). Plus particulièrement, les modèles de poutres multifibres sont largement utilisés dans le domaine de l'ingénierie sismique structurale [Mazars *et al.*, 2005] [Grange, 2008] [Lejouad, 2020].

Un enrichissement du champ de déformation de l'acier dans le cadre d'un élément fini poutre multifibre en béton armé est proposé dans [Monti et Spacone, 2000]. Une longueur caractéristique  $LIP$  appelée "splice length" est introduite au modèle. Cette longueur dépend du nombre de points de gauss et des fonctions d'interpolation de la poutre. Une approche similaire d'enrichissement est utilisée dans [Richard, 2010], introduisant une réduction de l'adhérence due à la corrosion de l'acier. Pourtant, cette idée d'enrichissement amène à un temps de calcul important selon [Richard, 2010].

Une modélisation discrète de l'interface est réalisée dans [Limkatanyu et Spacone, 2002]. Des degrés de liberté supplémentaires de déplacement longitudinal d'acier sont introduits par rapport à un élément fini poutre classique. Plusieurs types d'éléments sont proposés, notamment un élément basé sur des forces (force-based), un élément basé sur des déplacements (displacement-based), et un élément à formulation mixte Hellinger-Reissner ([Pian, 1995]). Une approche similaire est abordée dans [Yousefi *et al.*, 2020], où un élément fini poutre multifibre basé sur des déplacements est développé pour tenir compte des grands déplacements, un aspect qui n'est pas traité dans l'étude de [Limkatanyu et Spacone, 2002]. Par ailleurs, [Abtahi et Li, 2023] utilise une approche similaire avec un élément fini poutre multifibre basé sur des forces, intégrant la prise en compte des grands déplacements. Des applications structurales cycliques et sismiques sont présentées dans [Abtahi et Li, 2023], montrant l'importance de la prise en compte du comportement non linéaire de l'interface dans ces cas de chargement.

La figure 2.29 (inspirée de [Yousefi *et al.*, 2020]) illustre l'enrichissement des degrés de liberté. Pour un élément fini poutre enrichie reliant deux noeud 1 et 2, le vecteur élémentaire de degrés de liberté  $\mathbf{u}_e$  est exprimé comme suit :

$$\mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} u_{N1} \\ u_{V1} \\ u_{M1} \\ u_{N2} \\ u_{V2} \\ u_{M2} \\ u_{sb1} \\ u_{sb2} \\ u_{st1} \\ u_{st2} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

avec :

- $u_{Ni}$  : le déplacement longitudinal du noeud  $i$  de l'élément de poutre (selon l'axe  $N$  de la figure 2.29) ;
- $u_{Vi}$  : le déplacement normal du noeud  $i$  de l'élément de poutre (selon l'axe  $V$  de la figure 2.29) ;
- $u_{Mi}$  : la rotation de la section de la poutre au niveau du noeud  $i$  (par rapport à l'axe  $M$  de la figure 2.29) ;

- $u_{sbi}$  : le déplacement longitudinal du noeud de la barre inférieure d'acier, ayant la même position longitudinale que le noeud  $i$  de la poutre ;
- $u_{sti}$  : le déplacement longitudinal du noeud de la barre supérieure d'acier, ayant la même position longitudinale que le noeud  $i$  de la poutre.

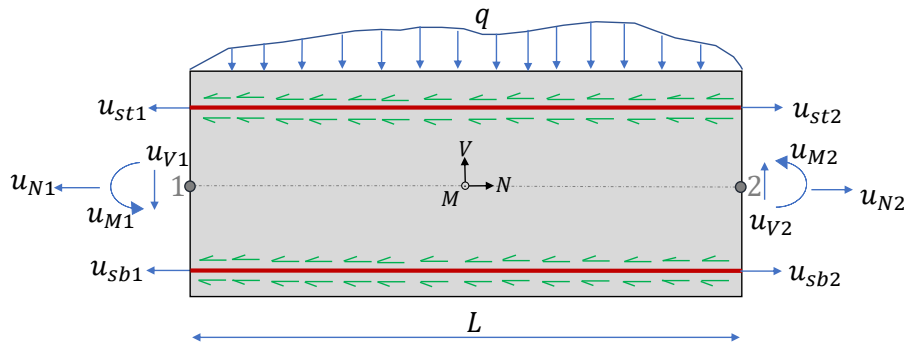


FIGURE 2.29 – Principe d'enrichissement selon [Yousefi *et al.*, 2020].

#### 2.4.12.2 Modélisation de l'interface dans des éléments finis plaques

Une modélisation homogénéisée de l'ensemble acier, béton et interface est proposée dans [Combesure, 2013] et [Huguet Aguilera, 2016] dans le cadre des éléments plaques. Ces deux modèles nécessitent pourtant l'identification d'un grand nombre de paramètres (6 paramètres en plus des paramètres élastiques des matériaux d'acier et de béton pour le modèle [Combesure, 2013] et 13 pour le modèle de [Huguet Aguilera, 2016]). La limite de ces approches de plaques homogénéisée réside donc dans la difficulté d'identification de ce grand nombre de paramètres.

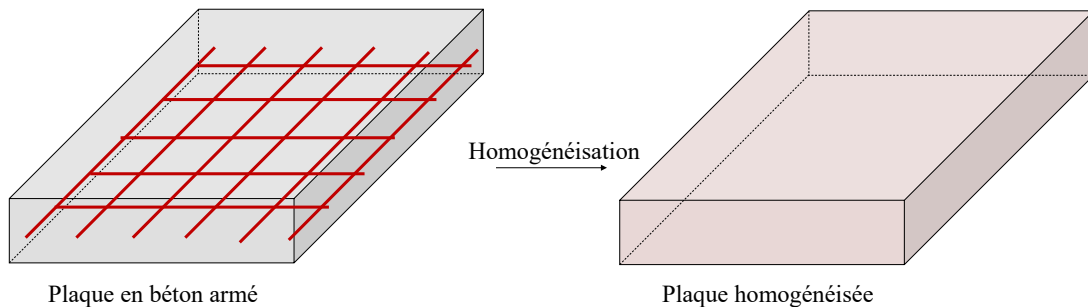


FIGURE 2.30 – Principe de la plaque homogénéisée selon [Combesure, 2013].

### 2.4.13 Bilan des différentes approches

Un bilan des différentes approches de modélisation de l'interface est fourni dans le tableau 2.4. Ce tableau montre qu'une grande variété d'approche est proposée dans des cadres de calcul variés.

Technique de modélisation	Référence	Homogénéisation	Élément fini d'interface	Enrichissement cinématique	Forces internes
Élément de type ressort	[Ngo et Scordelis, 1967] [Nilson, 1968]		x		
Bande d'éléments en 2D avec une épaisseur	[Reinhardt <i>et al.</i> , 1984] [Giry, 2011]		x		
Deux solides avec lois de contact	[Raous et Ali Karray, 2009]				x
Élément dégénéré	[Ramirez, 2005]		x		
Élément joint en 2D	[Brisotto <i>et al.</i> , 2012]		x		
Élément joint en 3D	[Richard <i>et al.</i> , 2010] [Sanz <i>et al.</i> , 2018]		x		
Méthode des éléments de frontière (BEM)	[Ameen <i>et al.</i> , 2009]		x		
Forces internes imposées aux noeuds d'acier et de béton	[Torre-Casanova, 2012]				x
Élément joint reliant un maillage 1D de l'acier et 3D du béton	[Mang, 2015]		x		
Enrichissement cinématique (X-FEM)	[Gutiérrez <i>et al.</i> , 2018]			x	
Comportement homogénéisé acier+interface	[Wang <i>et al.</i> , 2019] [Dehestani et Mousavi, 2015] [Laterza <i>et al.</i> , 2017] [Yuan <i>et al.</i> , 2020]	x			
Comportement homogénéisé acier+béton+interface	[Sellier et Millard, 2019]	x			
Enrichissement du champ de déformation - éléments poutres	[Monti et Spacone, 2000] [Richard, 2010]			x	
Enrichissement cinématique - éléments poutres	[Limkatanyu et Spacone, 2002] [Yousefi <i>et al.</i> , 2020] [Abtahi et Li, 2023]			x	
Homogénéisation - éléments plaques	[Combescure, 2013] [Huguet Aguilera, 2016]	x			

TABLEAU 2.4 – Bilan des approches de modélisation de l'interface proposées dans la littérature.

## 2.5 Conclusions

Ce chapitre a été consacré à une étude bibliographique portant sur le comportement physique de l'interface acier-béton, les lois d'adhérence qui la décrivent, sa caractérisation expérimentale, et sa modélisation numérique.

Une fois les approches de modélisation de l'interface sont identifiées, il est important de mener une réflexion sur leur faisabilité et leur applicabilité pour des calculs à grandes échelles. Il est donc important ici de noter le suivant :

- les approches d'utilisation de ressorts, d'éléments avec une épaisseur et des éléments joints demande de créer trois types de maillages : des éléments finis d'acier, des éléments d'interface, et des éléments de béton pour étudier une structure en béton armé. Les éléments finis associés à l'interface dans ces cadres ont leur propre comportement. Pour des calculs à grandes échelles, cela peut vite augmenter le nombre total d'éléments finis de la structure, et rendre la construction du maillage un processus pas pratique à réaliser. Ces approches sont critiquées dans les travaux de [Torre-Casanova, 2012] et de [Mang, 2015] qui mentionnent également la difficulté liée au temps de calcul élevé qui résulte de l'utilisation de ces approches ;

- la modélisation de l'interface avec une prise en compte d'un frottement des surfaces d'acier et de béton est appliquée dans la littérature dans des cadres de calcul 2D limités, ce qui est le cas également pour l'utilisation de la méthode X-FEM et la méthode BEM ;
- une modélisation homogénéisée acier+interface ou acier+béton+interface entraîne la nécessité de l'identification de plusieurs paramètres du modèle plus ou moins physiques. Ce processus d'identification de paramètres n'est pas trivial et peut ajouter une difficulté à la modélisation en jeu.

Trois difficultés sont donc reliées à la modélisation de l'interface : difficulté de construction du maillage, temps de calcul élevé, et identification difficile des paramètres de caractérisation des modèles.

Il est possible d'indiquer que les différentes approches existantes de modélisation du comportement de l'interface acier-béton ne sont toujours pas suffisantes. Elles présentent en effet au moins une des trois difficultés citées. Pour cela, des nouvelles approches de modélisation de l'interface sont proposées dans ce travail de thèse.

La première approche proposée est une stratégie de calcul multi-échelle dans un cadre de calcul continu 2D/3D. Elle consiste à définir un macro-élément capable de représenter un assemblage d'éléments d'acier (1D) et d'éléments d'interface (1D). L'acier peut glisser par rapport à l'interface. Ce glissement est piloté par une loi analytique d'adhérence. Le fait d'avoir un élément fini représentant l'acier et l'interface élimine la difficulté reliée au maillage. Une technique de sous-structuration de la résolution basée sur un principe de condensation statique est accordée au modèle de macro-élément. Cette technique permet d'accélérer le calcul et limite au mieux possible le problème relié au temps de calcul élevé. L'intérêt de la sous-structuration est aussi de limiter le nombre de degrés de liberté externes, et donc de proposer des éléments simples et ergonomiques pour l'utilisateur. Autrement dit, une discrétisation locale est réalisée à l'échelle locale des macro-éléments. Cette discrétisation n'est pas visible à l'échelle globale de la structure en béton armé étudiée. Quant à l'identification des paramètres d'adhésion, une expression analytique au choix de loi d'adhérence (voir le sous-chapitre 2.2) peut être utilisée. Cette technique de modélisation par macro-élément est détaillée dans le chapitre 3 de cette thèse. Les macro-éléments sont accroché à des éléments 2D/3D de béton via des relations cinématiques. Pour établir cet accrochage, une technique originale de projection cinématique est utilisée . Cette technique des présentée dans le chapitre 4.

En ce qui concerne la modélisation dans le cadre des éléments semi-globaux (poutres et plaques), un enrichissement du champ de déformation peut entraîner un coût de calcul élevé [Richard, 2010]. Pourtant, un enrichissement cinématique semble être une meilleur alternative [Yousefi *et al.*, 2020]. Pour les éléments plaques, une proposition d'une homogénéisation de l'ensemble acier+interface+béton entraîne la nécessité d'identifier un grand nombre de paramètres. À la connaissance de l'auteure, il n'existe pas encore dans la littérature de modélisation explicite de l'interface pour les éléments plaques. Un enrichissement cinématique basé sur les travaux de [Yousefi *et al.*, 2020] et de [Abtahi et Li, 2023] est discuté dans le chapitre 5 dans un cadre polyvalent assemblant des éléments finis poutres, des éléments d'acier, et des contraintes d'adhérence. Ce même principe est appliqué pour modéliser l'interface dans le cadre d'éléments plaques.

Les différentes approches proposées visent fournir un compromis entre la finesse de la modélisation de l'interface et le coût de calcul qui en résulte. Une modélisation explicite de l'acier, du béton, et de l'adhérence est réalisée dans ces approches. En parallèle, le temps de



calcul résultant est raisonnable.

# Chapitre 3

## Modèle de macro-élément linéique

L'approche multi-échelle considérée consiste à utiliser un macro-élément qui représente l'acier, des contraintes d'adhérence, et une gaine d'interface. La structure en béton armé est représentée donc par des macro-éléments et des éléments de béton (voir figure 3.1).

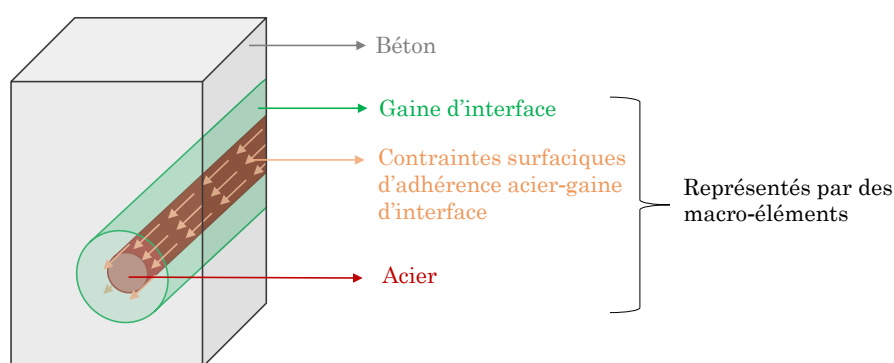


FIGURE 3.1 – Éléments de représentation d'une structure en béton armé.

Le macro-élément est défini à différentes échelles : une échelle globale et une échelle locale. L'échelle globale est celle de la structure en béton armé étudiée. Le macro-élément est considéré à cette échelle comme un élément fini à quatre nœuds. À l'échelle locale, un macro-élément est un assemblage de plusieurs éléments biphasiques représentant chacun une barre d'acier, une zone d'interface et des contraintes d'adhérence. Il s'agit donc de traiter un problème sous structuré : le macro-élément possède des éléments internes, ce qui nécessitera une résolution à l'échelle locale (en interne).

Le macro élément à degrés de liberté internes peut être vu comme un élément fini classique appelé par l'algorithme de résolution global (un algorithme de résolution classique utilisé pour résoudre les équations d'équilibre de la structure en béton armé), et qui va retourner un vecteur force et un opérateur tangent condensé sur les noeuds, en lien avec le domaine global. L'intérêt principal de la méthode de sous-structuration est donc qu'elle n'est pas intrusive pour la résolution à l'échelle globale.

Dans ce chapitre, la résolution classique aux éléments finis à l'échelle globale est rappelée, et la résolution à l'échelle locale est détaillée. La résolution à l'échelle locale nécessite une condensation des degrés de liberté internes des macro-éléments sur les degrés de liberté globaux, pour assurer la bonne convergence numérique de la résolution globale. Les formula-

tions faibles des deux échelles de modélisation et les algorithmes de résolution associés sont présentés.

### 3.1 Échelle globale : structure en béton armé

À cette échelle, la méthode des éléments finis classique est adoptée. La structure en béton armé est discrétisée en deux types d'éléments : des éléments de béton 2D/3D et des macro-éléments.

Le problème aux limites à l'échelle globale consiste à considérer un corps solide qui occupe un volume  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  (avec  $n = 1, 2, 3$  la dimension du problème, et  $\subset$  le symbole de sous-ensemble strict).  $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est le bord de  $\Omega$ . Une force volumique  $\mathbf{f}$  est appliquées dans  $\Omega$ .  $\partial\Omega$  est composé de deux parties complémentaires  $\partial\Omega_f$  et  $\partial\Omega_u \subset \partial\Omega$ . Des forces surfaciques  $\mathbf{t}$  sont appliquées sur  $\partial\Omega_f$ , et des valeurs de déplacement  $\mathbf{U}_d$  sont imposées le long de  $\partial\Omega_u$ .

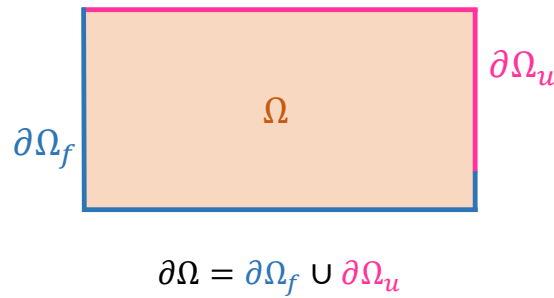


FIGURE 3.2 – Domaine  $\Omega$  du solide étudié.

#### 3.1.0.1 Formulation forte

Sous l'hypothèse des petites perturbations, la résolution du problème aux limites consiste à trouver le champ de déplacement cinématiquement admissible  $\mathbf{U}$  et le tenseur de contraintes statiquement admissible  $\boldsymbol{\sigma}$  en une position  $\mathbf{x}$  de  $\Omega$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad : \text{équations d'équilibre} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad : \text{équations constitutives contrainte-déformation} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{U} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad : \text{conditions de compatibilité des déformations} \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_f = \mathbf{t} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_f \quad : \text{conditions aux limites de Neumann} \\ \mathbf{U} = \mathbf{U}_d \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_u \quad : \text{conditions aux limites de Dirichlet} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

avec :

- $\nabla^s$  : la partie symétrique de l'opérateur gradient  $\nabla$  ;
- $\mathbf{n}_f$  : un vecteur unitaire normal à  $\partial\Omega_f$  ;
- $\mathcal{F}$  : une relation constitutive ;
- $\forall$  : le symbole de quantification universelle ;
- $\in$  : le symbole d'appartenance.

### 3.1.1 Formulation faible

Le principe des puissances virtuelles conduit à l'expression de la formulation variationnelle du problème détaillée comme suit :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^* : \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{\Omega} \mathbf{U}^{*T} \mathbf{f} dV + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{U}^{*T} \mathbf{t} dS + \int_{\partial\Omega_u} \mathbf{U}_d^{*T} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_u) dS \quad (3.2)$$

avec :

- $\mathbf{U}^*$  : un champ de degrés de liberté virtuel de valeur  $\mathbf{U}_d^*$  le long de  $\partial\Omega_u$  ;
- $\mathbf{n}_u$  : le vecteur unitaire normal à la surface  $\partial\Omega_u$  ;
- $T$  : l'application transposée.

En choisissant un vecteur de degrés de liberté  $\mathbf{U}^*$  cinématiquement admissible à zéro, l'équation (3.2) peut être exprimée comme suit :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^* : \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{\Omega} \mathbf{U}^{*T} \mathbf{f} dV + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{U}^{*T} \mathbf{t} dS \quad (3.3)$$

tel que :

- $\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^* : \boldsymbol{\sigma} dV$  : la puissance virtuelle des efforts internes ;
- $\int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{U}^* dV + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{t} \mathbf{U}^* dS$  : la puissance virtuelle des forces externes.

L'équation (3.3) détaille le principe des puissance virtuelles où la puissance virtuelle  $P_{ext}^*$  des forces externes appliquées à un système est égale à la puissance virtuelle  $P_{int}^*$  de ses forces internes :

$$P_{int}^* = P_{ext}^* \quad (3.4)$$

### 3.1.2 Discrétisation

Une discrétisation aux éléments finis de  $\Omega$  est considérée.  $\Omega$  est discrétisé en  $N_e$  éléments  $\Omega_e$ .  $\partial\Omega$  est en conséquent divisé en  $N_{\Omega_e}$  parties appelées  $\partial\Omega_e$ . Lors de l'étude d'une structure en béton armé,  $\Omega_e$  peut être un élément de béton  $\Omega_{ec}$  ou un macro-élément  $\Omega_{em}$  qui représente l'acier et l'interface acier-béton, de sorte que  $\Omega_e = \Omega_{ec} \cup \Omega_{em}$  et  $\Omega_{ec} \cap \Omega_{em} = \emptyset$ .  $\cup$  et  $\cap$  sont les symboles d'union et d'intersection.  $\emptyset$  représente l'ensemble vide. Le déplacement  $\mathbf{U}_i$  d'un point  $i$  appartenant à un élément de béton peut être déduit à partir du champ de déplacement nodal  $\mathbf{U}$  selon l'équation suivante :

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{N} \mathbf{U} \quad (3.5)$$

avec :

- $\mathbf{N}$  : la matrice de l'ensemble des fonctions d'interpolation attribuées aux éléments finis utilisés pour construire le maillage ;
- $\mathbf{U}$  : le vecteur nodal de tous les degrés de liberté des noeuds du maillage.

Le champ de déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est calculé en dérivant le champ de déplacement généralisé  $\mathbf{U}_i$  comme suit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{U}_i = \mathbf{B} \mathbf{U} \quad (3.6)$$

$\mathbf{B}$  désigne la matrice de l'ensemble des dérivées premières des fonctions de forme  $\mathbf{N}$ .  $\nabla^s$  représente la partie symétrique de l'opérateur gradient  $\nabla$ .

La puissance virtuelle  $P_{int}^*$  des forces internes est une combinaison de deux contributions  $P_{intc}^*$  et  $P_{intm}^*$  des éléments de béton et des macro-éléments, respectivement. De ce fait, il est possible d'exprimer  $P_{int}^*$  comme suit :

$$P_{int}^* = P_{intc}^* + P_{intm}^* \quad (3.7)$$

Le principe des puissance virtuelles de l'équation (3.4) s'écrit comme suit :

$$\mathbf{U}^{*T} \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) = \mathbf{U}^{*T} \mathbf{F}_{ext} \quad \forall \mathbf{U}^* \quad (3.8)$$

Le vecteur des forces internes  $\mathbf{F}_{int}$  est une combinaison des forces internes des éléments finis de béton et des macro-éléments :

$$\mathbf{F}_{int} = \mathbf{A} \left[ \int_{\Omega_{ec}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV \cup \mathbf{f}_b \right] \quad (3.9)$$

Le symbole  $\mathbf{A}$  désigne l'opérateur d'assemblage.  $\boldsymbol{\sigma}$  est la matrice des contraintes de béton qui dépendent des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . L'expression de  $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$  est donnée par la loi de comportement du béton.  $\mathbf{f}_b$  est le vecteur de forces internes d'un macro-élément. Le vecteur  $\mathbf{F}_{ext}$  des forces externes est exprimé comme suit :

$$\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{A} \int_{\Omega_e} \mathbf{f} dV + \mathbf{A} \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{t} dS \quad (3.10)$$

Pour résoudre l'équation (3.8) (une fois une discrétisation dans le temps est établie), un algorithme classique de résolution itérative de Newton Raphson peut être utilisé. La linéarisation du vecteur de forces internes  $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{U})$  de l'équation (3.8) donne :

$$d\mathbf{F}_{int} = \mathbf{k} d\mathbf{U} \quad (3.11)$$

avec :

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{F}_{int}}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{A} \left[ \int_{\Omega_{ec}} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \cup \mathbf{k}_{em} \right] \quad (3.12)$$

$d\mathbf{U}$  est le vecteur des valeurs incrémentales de l'ensemble des degrés de liberté de la structure étudiée et  $d\mathbf{F}_{int}$  est le vecteur des valeurs incrémentales des forces internes.  $\mathbf{C}$  est la matrice de la loi constitutive de béton.  $\mathbf{k}$  est la matrice de rigidité de la structure étudiée.  $\int_{\Omega_{ec}} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV$  est une matrice de rigidité élémentaire d'un élément en béton, et  $\mathbf{k}_{em}$  est une matrice de rigidité élémentaire d'un macro-élément. Le calcul de  $\mathbf{k}_{em}$  nécessite un équilibre local au niveau du macro-élément détaillé dans le sous-chapitre 3.2.

Les conditions aux limites de Dirichlet imposées le long de  $\partial\Omega_u$  s'expriment comme suit :

$$\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{U}_d \quad (3.13)$$

$\mathbf{L}$  est une matrice de blocage définie pour établir le lien entre les vecteurs  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{U}_d$ ,  $\mathbf{U}_d$  étant le vecteur des valeurs imposées des degrés de liberté. Le problème aux éléments finis consiste à résoudre les deux équations (3.8) et (3.13).

L'incorporation des conditions de Dirichlet dans la résolution est possible en appliquant des méthodologies classiques d'imposition de conditions cinématiques telles que la méthode de pénalité [Babuška, 1973] [Chessa *et al.*, 2002] et celle des simples ou doubles multipliateurs de Lagrange [Verpeaux et Charras, 2011]. Pourtant, l'efficacité de la méthode de

pénalité dépend du choix d'un paramètre de pénalité incorporé dans la résolution [Moumnassi, 2011]. En parallèle, la méthode des simples multiplicateurs de Lagrange peut amener à une perte de positivité de la matrice de rigidité à inverser lors de la résolution [Richard et al., 2019]. En conséquence, la méthode des doubles multiplicateurs de Lagrange est choisie. Deux multiplicateurs de Lagrange sont introduits pour chaque condition de Dirichlet, et les équations (3.8) et (3.13) sont combinées comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) + \mathbf{L}^T \boldsymbol{\lambda}^1 + \mathbf{L}^T \boldsymbol{\lambda}^2 \\ \mathbf{L}\mathbf{U} - \beta \boldsymbol{\lambda}^1 + \beta \boldsymbol{\lambda}^2 \\ \mathbf{L}\mathbf{U} + \beta \boldsymbol{\lambda}^1 - \beta \boldsymbol{\lambda}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{ext} \\ \mathbf{U}_d \\ \mathbf{U}_d \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

L'équation (3.14) est représentée sous une forme plus condensée tel que :

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_{tot}) = \mathbf{F}_{tot} \quad (3.15)$$

avec :

$$\mathbf{U}_{tot} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\lambda}^1 \\ \boldsymbol{\lambda}^2 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{tot} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{ext} \\ \mathbf{U}_d \\ \mathbf{U}_d \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

La linéarisation du terme  $\mathbf{F}(\mathbf{U}_{tot})$  de l'équation (3.15) donne :

$$d\mathbf{F}(\mathbf{U}_{tot}) = \mathbf{k}_{tot} d\mathbf{U}_{tot} \quad (3.17)$$

avec :

$$\mathbf{k}_{tot} = \begin{bmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{L}^T & \mathbf{L}^T \\ \mathbf{L} & -\beta \mathbf{I} & \beta \mathbf{I} \\ \mathbf{L} & \beta \mathbf{I} & -\beta \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$\mathbf{I}$  est la matrice identité. La valeur de  $\beta$  est choisie de manière à garantir un bon conditionnement de la matrice  $\mathbf{k}_{tot}$ .

## 3.2 Formulation du macro élément et résolution à l'échelle locale

Un macro-élément est un assemblage d'éléments biphasiques. La formulation d'un élément biphasique est décrite ici dans un premier temps. Soit  $H$  la longueur d'un élément biphasique.  $(E_i, S_i)$  et  $(E_s, S_s)$  définissent le module d'Young et la section pour les domaines d'interface et d'acier. Deux champs de déformation virtuels  $\varepsilon_s^*$  et  $\varepsilon_i^*$  sont associés à l'acier et à l'interface. Une contrainte de frottement  $\tau_i(y_s - y_i) = -\tau_s(y_s - y_i)$  est considérée entre les deux domaines comme une contribution externe.  $\tau_s$  représente les contraintes d'adhérence appliquées sur l'acier et  $\tau_i$  sont les contraintes appliquées sur le domaine d'interface. Ces contraintes sont des fonctions linéaires ou nonlinéaires qui dépendent du déplacement relatif  $(y_s - y_i)$  entre l'acier et l'interface. Des forces externes supplémentaires peuvent être appliquées dont le travail virtuel associé est appelé  $P_{ext}^*$ .

Le principe des puissances virtuelles décrit l'égalité entre les puissances virtuelles  $P_{int}^*$  et  $P_{ext}^*$  des forces internes et externes de l'élément biphasique.

$$\int_0^H (\varepsilon_s^* S_s \sigma_s(\varepsilon_s) + \varepsilon_i^* E_i S_i \varepsilon_i) dx + \int_0^H (y_s^* - y_i^*) \tau_i(y_s - y_i) P dx = P_{ext}^* \quad (3.19)$$

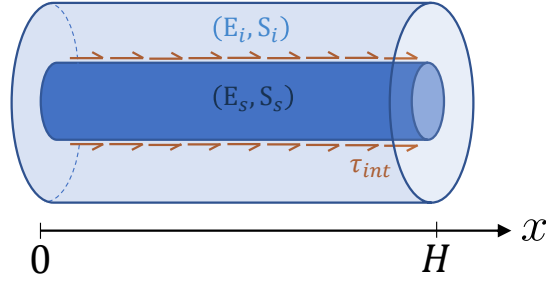


FIGURE 3.3 – Deux domaines de l'élément biphasique avec des contraintes de cisaillement  $\tau_{int}$  entre les deux domaines.

P étant le périmètre de la barre d'acier. Dans la version actuelle du modèle un comportement linéaire est associé à zone d'interface. La contrainte de cette zone est exprimée dans l'équation (3.19) étant égale à  $E_i \varepsilon_i$  (loi linéaire). D'autre part, l'acier peut avoir un comportement nonlinéaire. La contrainte de l'acier est égale à  $\sigma_s(\varepsilon_s)$  qui est une fonction linéaire ou nonlinéaire dépendant de la loi de comportement de l'acier. Des éléments barres à trois nœuds sont utilisés en parallèle connectés via des forces d'adhérence. Cette discrétisation permet d'exprimer les déplacements d'un nœud  $i$  appartenant à l'interface et d'un nœud  $s$  appartenant à l'acier en fonction des vecteurs de déplacement élémentaires  $\mathbf{u}_i$  et  $\mathbf{u}_s$ .

$$y_s(x) = \mathbf{N}(x)\mathbf{u}_s \quad (3.20)$$

$$y_i(x) = \mathbf{N}(x)\mathbf{u}_i \quad (3.21)$$

Pour une valeur de  $x \in [0 : H]$ , les positions des noeuds des éléments barres à trois noeuds  $x_{nodes}$  sont définies tel que  $x_{nodes} = \{0; H/2; H\}$ . La matrice des fonctions de forme  $\mathbf{N}$  est exprimée comme suit :

$$\mathbf{N} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} \left( \frac{4x^2}{H^2} - \frac{6x}{H} + 2 \right) & -\frac{4x^2}{H^2} + \frac{4x}{H} & \frac{2x^2}{H^2} - \frac{x}{H} \end{array} \right] \quad (3.22)$$

Un changement de variable est utilisé pour simplifier la matrice  $\mathbf{N}$  et l'exprimer dans un élément parent en fonction d'une variable  $\xi \in [-1 : 1]$ , tel que :

$$x = \frac{1 + \xi}{2} H \quad (3.23)$$

La matrice des fonctions d'interpolation  $\mathbf{N}$  est donc exprimée comme suit :

$$\mathbf{N} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) & 1 - \xi^2 & \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \end{array} \right] \quad (3.24)$$

Les déformations  $\varepsilon_s$  et  $\varepsilon_i$  s'expriment en dérivant les équations (3.20) et (3.21) par rapport à  $x$  :

$$\varepsilon_i(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{u}_i \quad (3.25)$$

$$\varepsilon_s(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{u}_s \quad (3.26)$$

$\mathbf{B}$  étant la matrice des dérivées des fonctions de forme  $\mathbf{N}$  exprimée tel que :

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \left[ \begin{array}{ccc} \xi - \frac{1}{2} & -2\xi & \xi + \frac{1}{2} \end{array} \right] \frac{2}{H} \quad (3.27)$$

Le principe des puissances virtuelles s'exprime donc comme suit :

$$\int_0^H (\mathbf{u}_s^{*T} \mathbf{B}^T S_s \sigma_s (\mathbf{B} \mathbf{u}_s) + \mathbf{u}_i^{*T} \mathbf{B}^T E_i S_i \mathbf{B} \mathbf{u}_i) dx + \int_0^H (\mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_s^*)^T \mathbf{N}^T \tau_i (y_s - y_i) P dx = P_{ext}^* \quad (3.28)$$

$\mathbf{u}_i^*$  et  $\mathbf{u}_s^*$  sont deux vecteurs de déplacement virtuels indépendants. Le champ de forces internes d'un élément biphasique  $\mathbf{p}^{el}$  comporte les contributions des deux éléments barres à trois nœuds (acier et interface) et des forces d'adhérence internes.

$$\mathbf{p}^{el} = \left[ \begin{array}{c} \int_0^H \mathbf{B}^T S_s \sigma_s (\mathbf{B} \mathbf{u}_s) dx \\ \int_0^H \int_0^H \mathbf{B}^T E_i S_i \mathbf{B} \mathbf{u}_i dx \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \int_0^H -\mathbf{N}^T \tau_i (y_i - y_s) P dx \\ \int_0^H \mathbf{N}^T \tau_i (y_i - y_s) P dx \end{array} \right] \quad (3.29)$$

La soustraction  $(y_i - y_s)$  est exprimée en fonction de  $\mathbf{u}_s$  et de  $\mathbf{u}_i$  comme suit :

$$y_i - y_s = \begin{bmatrix} -N & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N & N \end{bmatrix} \mathbf{u}^{el} \quad (3.30)$$

L'équation (3.29) est dérivée par rapport à  $\mathbf{u}^{el}$  pour calculer la matrice de rigidité élémentaire  $\mathbf{k}_{bp}^{el}$  d'un élément biphasique.

$$\frac{\partial \mathbf{p}^{el}}{\mathbf{u}^{el}} = \mathbf{k}_{bp}^{el} = \int_0^H \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_s S_s \mathbf{B} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^T E_i S_i \mathbf{B} \end{bmatrix} dx + \int_0^H \begin{bmatrix} -\mathbf{N}^T \\ \mathbf{N}^T \end{bmatrix} \frac{\partial \tau_i}{\partial (y_i - y_s)} \begin{bmatrix} -N & N \end{bmatrix} P dx \quad (3.31)$$

$\mathbf{C}_s$  est la matrice tangente de la loi de comportement de l'acier.  $\frac{\partial \tau_i}{\partial (y_i - y_s)}$  est calculé en dérivant l'expression de la loi d'adhérence qui donne l'évolution de la contrainte d'adhérence  $\tau_i$  en fonction du glissement  $(y_s - y_i)$ . La matrice de rigidité d'un macro-élément  $\mathbf{k}_{bp}$  est l'assemblage des matrices élémentaires  $\mathbf{k}_{bp}^{el}$  des éléments biphasiques. Le nombre d'éléments biphasiques pour chaque macro-élément est un paramètre d'entrée.

### 3.3 Couplage des échelles globale et locale

Le macro-élément est considéré à différentes échelles : une échelle globale et une échelle locale. Au niveau global, il est considéré comme un élément à quatre nœuds. Une discrétisation interne peut être effectuée au niveau local. Plus précisément, chaque macro-élément est un assemblage d'un ensemble d'éléments biphasiques.

#### 3.3.1 Connexion des maillages

À l'échelle globale, le macro-élément (vu comme un élément à quatre nœuds) est assemblé avec des éléments 2D/3D de béton. Les maillages des macro-éléments et des éléments de béton peuvent être coïncidents ou non. Dans le cas de maillages coïncidents, les nœuds de la partie interface des macro-éléments et ceux des éléments de béton sont superposés et possèdent les mêmes déplacements dans toutes les directions. Dans la direction normale du macro-élément, des relations cinématiques linéaires sont imposées de sorte que les déplacements des nœuds d'acier sont égaux aux déplacements des nœuds d'interface. Dans la direction longitudinale, cependant, les nœuds d'acier sont libres de se déplacer indépendamment des déplacements des nœuds d'interface. Le glissement acier-interface peut donc se produire dans la direction longitudinale.



Avec des maillages non coïncidents, dans le cas d'une simulation 3D, les déplacements des nœuds d'interface sont liés aux déplacements des nœuds de béton  $c_i$ , avec les fonctions de forme  $N_i$ . Lorsque l'on utilise des éléments à huit nœuds pour le maillage du béton, ces relations cinématiques sont définies de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_{\text{interface},x} = \sum_{i=1}^8 N_i u_{c_i,x} \\ u_{\text{interface},y} = \sum_{i=1}^8 N_i u_{c_i,y} \\ u_{\text{interface},z} = \sum_{i=1}^8 N_i u_{c_i,z} \end{cases} \quad (3.32)$$

Les nœuds  $c_i$  représentent les nœuds de l'élément volumique de béton auquel appartient le nœud d'interface.  $N_i$  représentent les fonctions de forme de cet élément volumique.  $x$ ,  $y$ , et  $z$  sont les trois dimensions de l'espace. L'équation (3.32) est exprimée pour un élément volumique de béton à huit nœuds (voir figure 3.4), mais elle est pourtant généralisable pour d'autres éléments finis de béton 3D. De plus, il est possible, avec la démarche de calcul proposée, d'accrocher un macro-élément à plusieurs éléments de béton et un élément de béton à plusieurs macro-éléments, selon la configuration des maillages de béton et de macro-éléments utilisée.

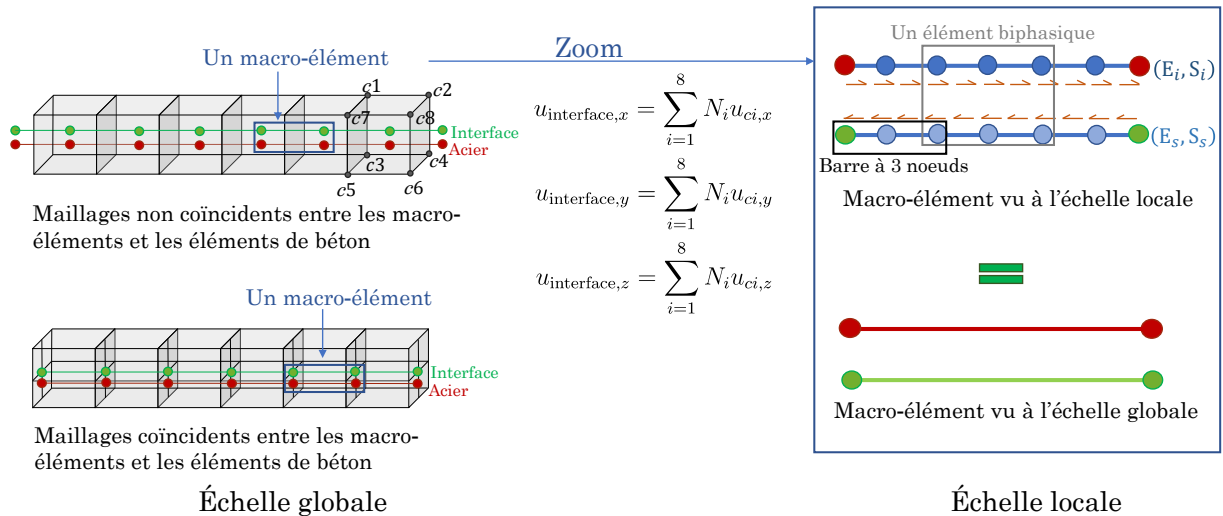


FIGURE 3.4 – Structuration de l'approche multi-échelle.

Pour les simulations 2D où des éléments à quatre nœuds constituent le maillage du béton, quatre fonctions de forme  $N_i$  sont définies au lieu de huit fonctions de forme. Cela est néanmoins généralisable pour d'autres types d'éléments finis 2D de béton en utilisant les fonctions de forme de l'élément choisi.

L'incorporation des relations cinématiques utilisées pour relier les nœuds d'acier, d'interface, et de béton, au niveau de l'algorithme global de résolution, est possible en appliquant la méthodologie des doubles multiplicateurs de Lagrange [Verpeaux et Charras, 2011]. Cela

consiste à enrichir la matrice  $\mathbf{k}_{tot}$  de l'équation (3.18) avec des nouvelles relations cinématiques (équation (3.32)). La méthode des doubles multiplicateurs de Lagrange, même si elle est largement utilisée pour ajouter des relations cinématiques à un système de résolution par éléments finis, ajoute des inconnues supplémentaires à calculer (les multiplicateurs de Lagrange) [Richard *et al.*, 2019]. L'utilisation de cette approche est pratique lorsque l'on considère des conditions aux limites de Dirichlet (qui sont techniquement des relations cinématiques). En revanche, lier l'acier et l'interface au béton ajoute des relations cinématiques pour tous les nœuds d'acier et d'interface du maillage. La méthode des doubles multiplicateurs de Lagrange incorpore deux inconnus de plus au niveau de la résolution (deux multiplicateurs de Lagrange à déterminer) pour chaque relation cinématique. En 3D, pour chaque nœud d'interface, 6 inconnus sont ajoutés à la résolution (2 pour chaque direction de l'espace). De plus, 4 inconnus sont ajoutés pour chaque nœud d'acier (relié au béton dans les deux directions normales par rapport à la direction du macro-élément). Au total, 10 inconnus sont ajoutés à la résolution pour chaque couple de nœuds acier/interface. Ainsi, une méthode alternative est proposée dans ce travail de thèse pour incorporer les relations cinématiques acier/interface/béton dans la résolution. Cette approche basée sur un principe de projection cinématique est détaillée dans le chapitre 4.

La figure 3.5 illustre la conception de l'étude d'une structure en béton armé. La structure étudiée est discrétisée en deux types d'éléments finis : des éléments de béton et des macro-éléments. Chaque macro-élément est localement un assemblage de plusieurs éléments biphasiques. Chaque élément biphasique est une combinaison de deux éléments barre à trois nœuds et de contraintes d'adhérence entre les deux barres. Les deux barres à trois nœuds représentent l'acier et l'interface.

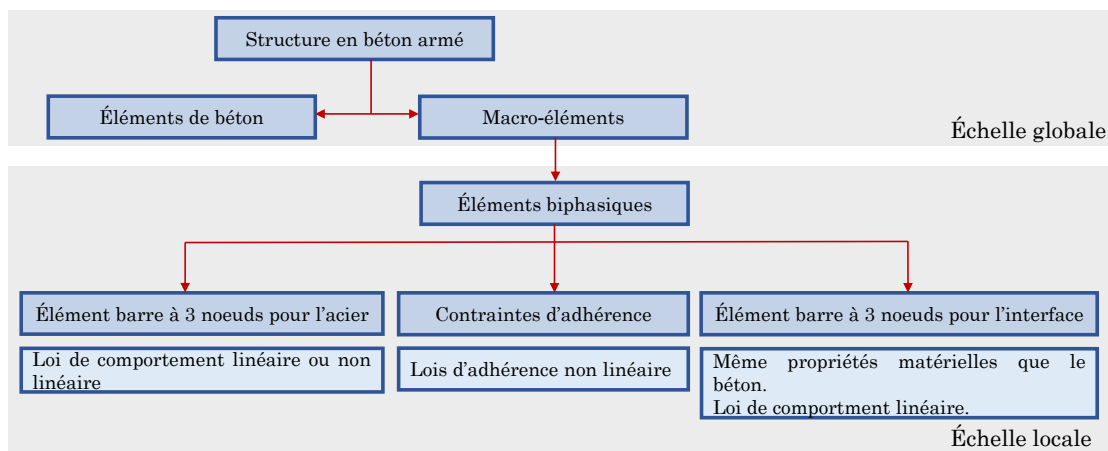


FIGURE 3.5 – Étude d'une structure en béton armé.

Il convient d'indiquer que l'indépendance des tailles des maillages des deux échelles globale et locale permet de raffiner le maillage local tout en conservant un maillage grossier à l'échelle globale. La densité du maillage local est un choix de l'utilisateur.

### 3.3.2 Résolution interne à l'échelle locale d'un macro-élément

Pour résoudre l'équilibre interne, une technique de sous-structuration est utilisée. Celle-ci nécessite une condensation statique de la matrice de raideur pour la résolution. L'objectif de la condensation statique est de diminuer le nombre total de degrés de liberté à

calculer à l'échelle globale [Grange et Bertrand, 2021]. En effet, dans la résolution globale, quatre degrés de liberté sont considérés pour chaque macro-élément. Ces degrés représentent les déplacements longitudinaux des quatre nœuds externes de la discrétisation locale.  $\mathbf{u}_{tot}^T = [\mathbf{u}_r \quad \mathbf{u}_b]^T$  est le vecteur des degrés de liberté totaux des éléments biphasiques constituant un macro-élément. Les indices  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{b}$  désignent les degrés de liberté de déplacement longitudinal internes et externes.  $\mathbf{u}_b$  représente les degrés de liberté des quatre nœuds externes, et  $\mathbf{u}_r$  est le vecteur des degrés de liberté des nœuds internes.

Le vecteur des forces résistantes  $\mathbf{f}_{tot}$  d'un macro-élément est un assemblage des vecteurs de forces internes élémentaires  $\mathbf{p}^{el}$  (voir équation (3.29)) des éléments biphasiques. Soit  $\mathbf{f}_r$  le vecteur des forces au niveau des noeuds internes d'un macro-élément, et  $\mathbf{f}_b$  les forces au niveau des noeuds externes (voir équation (3.9)). Il est donc possible de définir  $\mathbf{f}_{tot}$  de telle sorte que  $\mathbf{f}_{tot}^T = [\mathbf{f}_b \quad \mathbf{f}_r]^T$ . La résolution interne au niveau local du macro-élément consiste à résoudre l'équation suivante :

$$\mathbf{f}_r = 0 \quad (3.33)$$

L'équation (3.33) décrit l'équilibre interne au niveau de la discrétisation du macro-élément.

Soit  $\mathbf{k}_{bp}$  l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires  $\mathbf{k}_{bp}^{el}$  des éléments biphasiques constituant un macro-élément (voir équation (3.31)). Il est possible de relier le vecteur d'incrément de déplacements  $d\mathbf{u}_{tot}$  au vecteur d'incrément de forces  $d\mathbf{f}_{tot}$  tel que :

$$\mathbf{k}_{bp}d\mathbf{u}_{tot} = d\mathbf{f}_{tot} \quad (3.34)$$

Le vecteur  $d\mathbf{u}_{tot}$  regroupe l'ensemble des valeurs incrémentales des degrés de liberté de déplacement longitudinal totaux du macro-élément (internes et externes). Il est constitué de deux parties complémentaires  $d\mathbf{u}_b$  et  $d\mathbf{u}_r$  tel que  $d\mathbf{u}_{tot}^T = [d\mathbf{u}_b \quad d\mathbf{u}_r]^T$ .  $d\mathbf{u}_b$  est le vecteur rassemblant les valeurs incrémentales des degrés de liberté des quatre nœuds du bord du macro-élément (noeuds externes).  $d\mathbf{u}_r$  rassemble les incréments des degrés de liberté internes de la discrétisation. Par conséquent, la matrice  $\mathbf{k}_{bp}$  est composée de quatre sous-matrices :  $\mathbf{k}_{rr}$ ,  $\mathbf{k}_{rb}$ ,  $\mathbf{k}_{br}$ , et  $\mathbf{k}_{bb}$  avec  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{b}$  étant les indices des degrés de libertés internes et externes. À convergence,  $d\mathbf{f}_{tot}$  est égal à zéro au niveau des noeuds internes du macro-élément. Ces nœuds ne sont pas visibles à l'échelle globale. Ainsi, l'équation (3.34) est exprimée sous une forme développée comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{bb} & \mathbf{k}_{br} \\ \mathbf{k}_{rb} & \mathbf{k}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{u}_b \\ d\mathbf{u}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\mathbf{f}_b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

La condensation statique fournit un lien entre les vecteurs incrémentaux  $d\mathbf{u}_b$  et  $d\mathbf{f}_b$  tel que :

$$(\mathbf{k}_{bb} - \mathbf{k}_{br}\mathbf{k}_{rr}^{-1}\mathbf{k}_{rb})d\mathbf{u}_b = d\mathbf{f}_b \quad (3.36)$$

Sous une forme plus condensée, l'équation (3.36) s'écrit comme suit :

$$\mathbf{k}_{em}d\mathbf{u}_b = d\mathbf{f}_b \quad (3.37)$$

$\mathbf{k}_{em}$  est la matrice de rigidité condensée du macro-élément.

### 3.4 Identification des paramètres matériau

Afin de définir un élément biphasique, les lois de comportement de ses parties constitutives doivent être définies : barre à trois noeud d'acier, barre à trois noeuds d'interface, et contraintes d'adhérence. La loi constitutive d'acier (loi contrainte-déformation) peut être une loi linéaire ou élastique-plastique selon la structure étudiée et le chargement appliqué. Pour les structures où les barres d'acier ne se plastifient pas, l'utilisation d'une loi constitutive linéaire pour l'acier est satisfaisante. Les lois d'adhérence sont identifiées sur la base d'essais expérimentaux de pull-out (voir tableau 2.1 à titre d'exemple). Des expressions empiriques sont ainsi proposées pour leurs paramètres d'identification.

Pour l'interface, et par souci de simplicité, les mêmes propriétés matériau que celles du béton lui sont attribuées. Pour la même raison, une loi de comportement linéaire est attribuée à cette interface. Cependant, il est toujours possible de modifier les paramètres matériau de l'interface et sa loi constitutive.

Si une loi constitutive nonlinéaire va être attribuée à l'interface, le terme  $E_i S_i \mathbf{B} \mathbf{u}_i$  de l'équation (3.31) doit être remplacé par  $S_i \sigma(\mathbf{B} \mathbf{u}_i)$ , où  $\sigma(\mathbf{B} \mathbf{u}_i)$  est la contrainte dans l'interface liée à la déformation  $\mathbf{B} \mathbf{u}_i$  via la loi nonlinéaire adoptée. L'épaisseur à associer à l'interface est un paramètre de chaque élément biphasique. Ce paramètre d'épaisseur possède une interprétation physique puisque le comportement expérimental de l'interface montre qu'une zone spécifique de béton tout autour de l'acier est principalement endommagée, et cette zone représente bien l'interface. Des études de sensibilité seront menées dans les sous-chapitres suivants pour étudier l'influence de la valeur d'épaisseur d'interface sur le comportement des éléments structurels en béton armé.

Le tableau 3.1 résume les principaux paramètres d'identification des éléments biphasiques. Des paramètres supplémentaires peuvent être ajoutés pour décrire les lois constitutives nonlinéaires d'acier et d'interface (si on souhaite attribuer une loi nonlinéaire à l'interface). Ces paramètres dépendent dans ce cas des lois constitutives choisies. En outre, une loi d'adhérence nonlinéaire est généralement utilisée. Les paramètres de cette loi de liaison dépendent (en termes de nombre de paramètres et d'interprétation physique de chaque paramètre) de la loi de liaison choisie.

Paramètre	Description	Unité
$E_s$	Module d'Young d'acier	GPa
$S_s$	Section de la barre d'acier	m <sup>2</sup>
$E_i$	Module d'Young d'interface	GPa
$S_i$	Section d'interface	m <sup>2</sup>

TABLEAU 3.1 – Principaux paramètres identifiant un élément biphasique.

### 3.5 Algorithme de résolution global

La résolution aux éléments finis comprend l'utilisation de deux algorithmes de Newton Raphson : un au niveau global de l'ensemble de la structure étudiée, et un autre au niveau local de chaque macro-élément. L'algorithme global 1 est appelé à chaque pas de temps  $n$ .

Il est important de noter que l'algorithme global 1 est un algorithme de Newton Raphson classique. Lors du calcul de la rigidité et des forces internes des macro-éléments, l'algorithme

---

**Algorithme 1** Algorithme de résolution global

---

$\mathbf{U}_{tot_{n+1}} \leftarrow \mathbf{U}_{tot_n}$  ( $= 0$  pour le premier pas de temps), voir équation (4.18) pour la définition de  $\mathbf{U}_{tot}$   
 $conv \leftarrow 0$   
 $k \leftarrow 0$   
 $\mathbf{U}_{tot_k} = \mathbf{U}_{tot_{n+1}}$   
**tant que**  $conv = 0$  **faire**  
    **Calcul** de  $\mathbf{R}_k = \mathbf{F}_{tot_n} - \mathbf{F}_k(\mathbf{U}_{tot_k})$  (voir équation (3.15)). À cette étape, l'algorithme local 2 est appelé pour calculer la contribution de chaque macro-élément dans  $\mathbf{F}_k$  (représentée par le vecteur  $\mathbf{f}_b$  dans l'algorithme 2)  
    **Calcul** de  $\mathbf{U}_{tot_{k+1}} = \mathbf{U}_{tot_k} + (\mathbf{k}_{tot_k})^{-1} \mathbf{R}_k$  (voir équation (3.18)). À cette étape, l'algorithme local 2 est appelé pour calculer la contribution de chaque macro-élément dans  $\mathbf{k}_{tot}$  (représentée par la matrice  $\mathbf{k}_{em}$  dans l'algorithme 2)  
    **Calcul** de  $\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{F}_{tot_n} - \mathbf{F}_{k+1}(\mathbf{U}_{tot_{k+1}})$   
    **si**  $\mathbf{R}_{k+1} < tolerance$  **alors**  
         $conv \leftarrow 1$   
         $\mathbf{U}_{tot_n} = \mathbf{U}_{tot_{k+1}}$   
    **sinon**  
         $k \leftarrow k + 1$   
    **fin si**  
**fin tant que**

---

local 2 (qui a également une structure de Newton Raphson classique) est appelé par l'algorithme global 1. En d'autres termes, le macro-élément peut être facilement mis en œuvre dans n'importe quel code de résolution d'éléments finis sans modification de sa structure.

## 3.6 Algorithme de résolution local

L'algorithme local 2 est défini à l'échelle des macro-éléments.  $k_i$  est l'indice utilisé pour les itérations locales.

## 3.7 Applications

Dans ce sous-chapitre, la formulation de macro-élément est utilisée pour modéliser : un essai de pull-out, un essai de tirant, un essai de bord de poutre, un essai de poutre en flexion trois points, et un essai de poutre en flexion quatre points.

### 3.7.1 Essai pull-out

L'essai de [Torre-Casanova, 2012] est modélisé afin de valider la formulation de macro-élément. Deux choix de modélisation de l'essai sont effectués : modélisation simplifiée 1D et modélisation 3D. Dans le cas spécifique du modèle 1D, les macro-éléments représentent l'acier, le béton et les contraintes de liaison acier-béton. En d'autres termes, la partie interface des macro-éléments représente l'ensemble du volume de béton. Pour le modèle 3D, les macro-éléments représentent l'acier, l'interface, et les contraintes de liaison, et sont attachés à des

---

**Algorithme 2** Algorithme de résolution local

---

$conv_i \leftarrow 0$

$k_i \leftarrow 0$

$\mathbf{u}_{tot}^T = [\mathbf{u}_b \ \mathbf{u}_r]^T$ .  $\mathbf{u}_b$  est donné par l'algorithme global. Il reste constant dans cet algorithme local. Une première estimation de la valeur de  $\mathbf{u}_r$  est égale à sa valeur pour dernier pas de temps convergé

**tant que**  $conv_i = 0$  **faire**

**Calcul** des quantités élémentaires  $\mathbf{p}^{el}$  et  $\frac{\partial \mathbf{p}^{el}}{\partial \mathbf{u}^{el}}$  pour chaque élément biphasique du macro-élément selon les équations (3.29) et (3.31)

**Calcul** de  $\mathbf{f}_{tot} = \mathbf{A}_{e=1}^{N_{bp}} \mathbf{p}^{el}$  et  $\mathbf{k}_{bp} = \mathbf{A}_{el=1}^{N_{bp}} \frac{\partial \mathbf{p}^{el}}{\partial \mathbf{u}^{el}}$

**Calcul** de  $\mathbf{f}_r = \mathbf{f}_{totr}$

**Calcul**  $\mathbf{R}_{k_i} = -\mathbf{f}_r$

**si**  $\mathbf{R}_{k_i} < tolerance$  **alors**

$conv_i \leftarrow 1$

**Condensation statique** :  $\mathbf{k}_{em} = \mathbf{k}_{bb} - \mathbf{k}_{br} \mathbf{k}_{rr}^{-1} \mathbf{k}_{rb}$  (voir équation (3.36)) et  $\mathbf{f}_b = \mathbf{f}_{totb}$ .  $\mathbf{k}_{em}$  et  $\mathbf{f}_b$  représentent la matrice de rigidité et le vecteur de forces internes du macro-élément renvoyés à l'algorithme global

**sinon**

$\mathbf{u}_{r_{k_i+1}} = \mathbf{u}_{r_{k_i}} + \mathbf{k}_{rr}^{-1} \mathbf{R}_{k_i}$

$k_i \leftarrow k_i + 1$

**fin si**

**fin tant que**

---

éléments volumiques de béton. Des configurations monotones et cycliques de chargement sont étudiées.

### 3.7.1.1 Description de l'essai

L'essai d'arrachement (pull-out) de [Torre-Casanova, 2012] est décrit ici. La géométrie de l'essai est composée d'un cube de béton traversé par une seule barre d'armature en acier. La translation du cube est bloquée par une plaque métallique. L'échantillon se repose sur un support en téflon afin d'assurer un alignement correct entre la barre d'acier et la direction du déplacement imposé, empêchant ainsi la flexion de l'armature. Le glissement armature-béton est mesuré par un premier capteur LVDT (Linear Variable Differential Transformer) situé à l'extrémité non chargée de l'armature. Un deuxième capteur LVDT est situé du côté du chargement pour obtenir une deuxième valeur de glissement acier-béton. La longueur de contact est égale à cinq fois le diamètre de la barre d'acier, noté  $d_a$ . Cette valeur de longueur de contact est recommandée dans [RILEM, 1970b]. La valeur de contrainte d'adhérence  $\tau$  est supposée constante le long de la barre d'acier et est estimée comme suit :

$$\tau = \frac{F}{d_a L \pi} \quad (3.38)$$

$F$  étant la force de réaction mesurée et  $L$  la longueur de contact acier-béton. La loi d'adhérence déduite de l'essai décrit l'évolution de la valeur de contrainte d'adhérence calculée par rapport au glissement mesuré à l'extrémité libre de la barre d'acier.

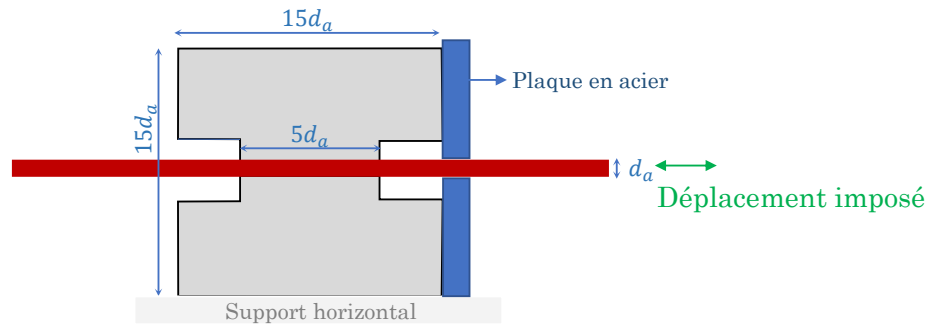


FIGURE 3.6 – Principe de l’essai de pull-out de [Torre-Casanova, 2012].

### 3.7.1.2 Modélisation 1D

L’essai de pull-out est ici représenté avec un seul macro-élément.

#### 3.7.1.2.1 Propriétés des matériaux

Pour ce modèle 1D, des lois constitutives élastiques linéaires sont affectées à l’acier et au béton (la zone d’interface du macro-élément ici). La seule source de non-linéarité dans le modèle provient de l’expression nonlinéaire de la loi d’adhérence acier-béton.

La loi d’adhérence de [Murcia-Delso *et al.*, 2011] est utilisée (voir figure 2.9). Cette loi a été initialement proposée pour modéliser le comportement de contraintes d’adhérence-glisement des barres d’acier confinées de grands diamètres. Cependant, elle peut être utilisée pour le cas général de n’importe quel diamètre de barre, et appliquée pour des barres confinées ou non confinées, en calibrant ses paramètres d’une manière appropriée. Cette loi est choisie pour sa simplicité. Elle peut être appliquée pour des configurations de chargement monotones et cycliques, et est définie par trois paramètres : la force d’adhérence maximale  $\tau_1$ , le glissement  $g_1$  pour lequel  $\tau_1$  est atteint, et le glissement  $g_3$ . Pour des valeurs de glissement supérieures à  $g_3$ , la contrainte d’adhérence de la version monotone de la loi reste constante. Le tableau 3.2 résume les propriétés des matériaux utilisées pour le modèle de pull-out 1D.

Paramètre	Description	Value	Unit
$E_c$	Module d’Young du béton	28	GPa
$E_s$	Module d’Young de l’acier	200	GPa
$\tau_1$	Paramètre d’entrée de la loi d’adhérence (figure 2.8)	22.5	MPa
$g_1$	Paramètre d’entrée de la loi d’adhérence (figure 2.8)	1.45	mm
$g_3$	Paramètre d’entrée de la loi d’adhérence (figure 2.8)	10	mm

TABLEAU 3.2 – Propriétés matériau pour le modèle d’arrachement 1D.

Il est à noter que les paramètres de la loi d’adhérence sont choisis pour décrire au mieux la courbe expérimentale de la loi de liaison de [Torre-Casanova, 2012] (voir figure 3.7).

#### 3.7.1.2.2 Maillage

La partie centrale de l’essai où l’acier et le béton sont en contact est représentée, avec une longueur de contact égale à cinq fois le diamètre de la barre. Un macro-élément est utilisé pour représenter l’ensemble de l’essai. Ce macro-élément est subdivisé en trois éléments biphasiques. La figure 3.8 montre le maillage et les conditions aux limites. Pour cet exemple

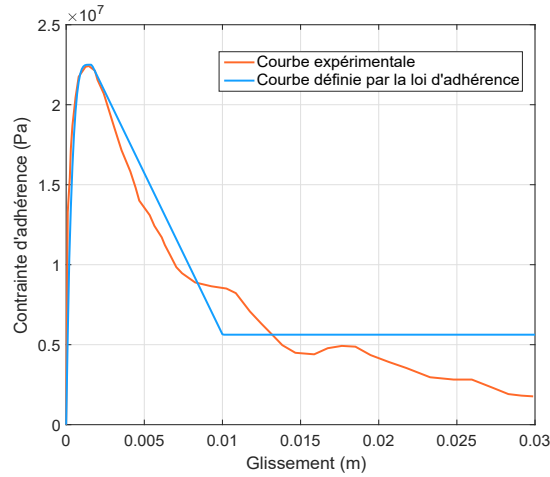


FIGURE 3.7 – Lois d’adhérence analytique et expérimentale.

1D, la section transversale de la partie d’interface du macro-élément représente la section de l’échantillon de béton de l’essai, qui est égale à  $15d_a \times 15d_a$ , où  $d_a$  réfère au diamètre de la barre d’acier égal à 12 mm.

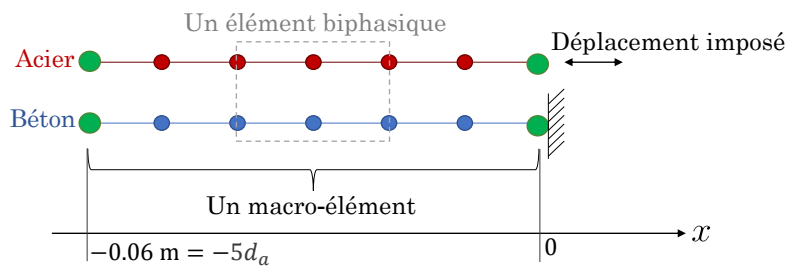


FIGURE 3.8 – Modèle de pull-out 1D.

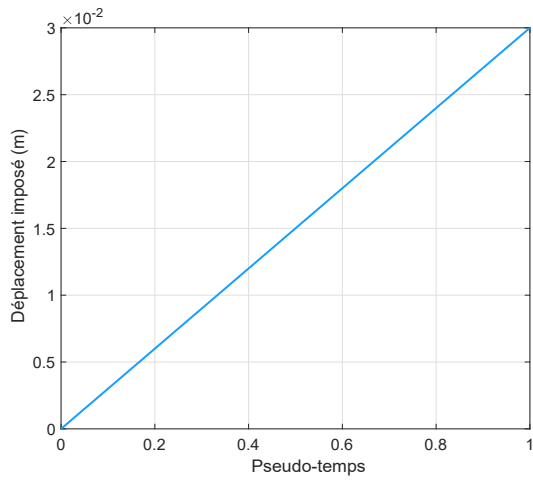
### 3.7.1.2.3 Résultats

Les figures 3.9 et 3.10 illustrent le déplacement imposé et les courbes de réaction pour des configurations de chargement monotone et cyclique. Le travail expérimental [Torre-Casanova, 2012] se focalise sur des essais d’arrachement monotones. Pourtant, la loi de [Murcia-Delso et al., 2011] peut reproduire le comportement cyclique de liaison sans le besoin de définir des paramètres d’entrée supplémentaires par rapport à la version monotone de la loi. Pour le cas cyclique, les conditions aux limites sont modifiées entre les deux configurations de la figure 3.11 à chaque fois que le déplacement imposé est égal à zéro.

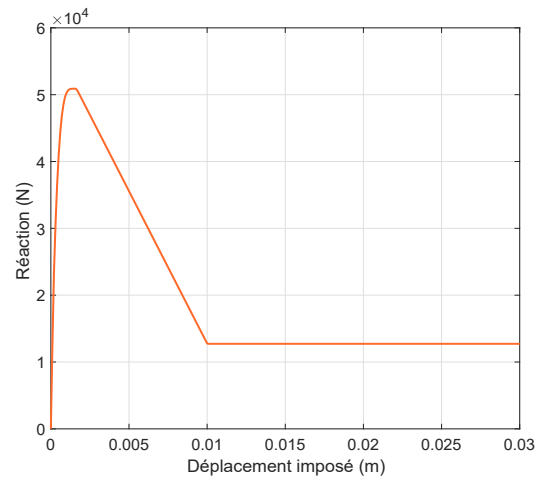
### 3.7.1.2.4 Discussion

Les courbes de réaction montrent que l’expression reliant la force de réaction  $F$  à la contrainte d’adhérence  $\tau$  (équation (3.38)) de l’essai de pull-out est vérifiée. Une parfaite superposition entre la courbe contrainte d’adhérence – glissement en entrée et celle post-traitée à partir de la force résultante est observée, comme le montre la figure 3.12.



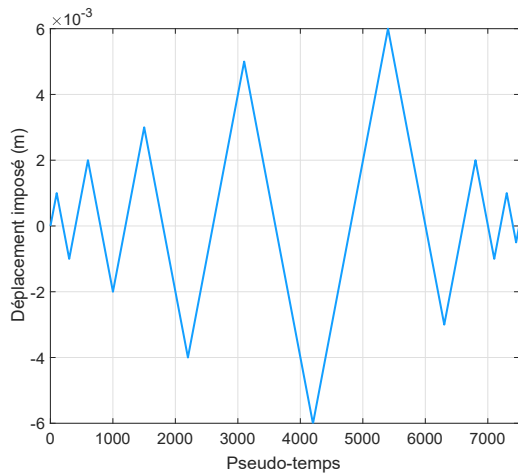


(a)

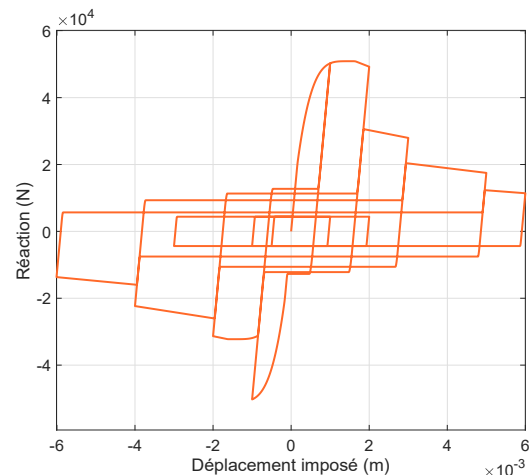


(b)

FIGURE 3.9 – Modèle 1D de pull-out monotone; déplacement imposé (a) et courbe de réaction (b).

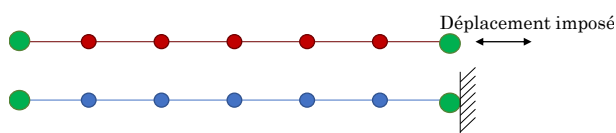


(a)

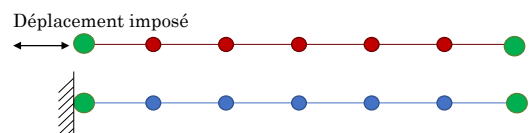


(b)

FIGURE 3.10 – Modèle 1D de pull-out cyclique; déplacement imposé (a) et courbe de réaction (b).



(a)



(b)

FIGURE 3.11 – Configurations (a) and (b) du modèle de pull-out cyclique 1D.

L'avantage de la discrétisation interne est qu'elle permet d'accéder à des valeurs internes telles que les déplacements des nœuds internes et les contraintes internes dans l'acier et le béton. Par exemple, les figures 3.13 et 3.14 montrent les valeurs de forces dans les éléments

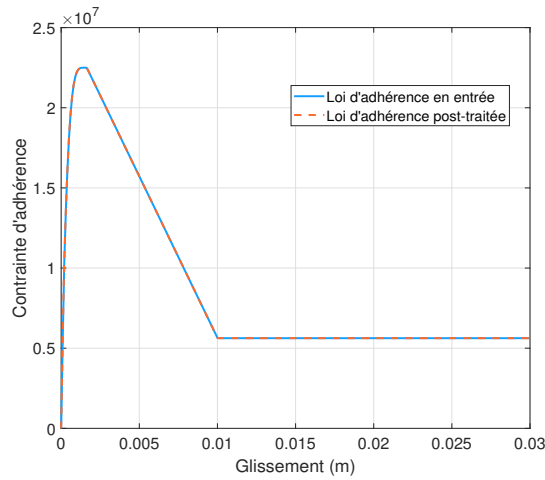


FIGURE 3.12 – Lois d’adhérence d’entrée et de sortie du modèle de pull-out 1D.

de béton et d’acier et les déplacements des nœuds internes et externes de béton et d’acier pour tous les pas de temps de la résolution de l’exemple de pull-out avec un chargement monotone.

Le modèle de pull-out 1D est un modèle simplifié mais néanmoins représentatif de l’essai d’arrachement. Toutefois, ce modèle ne montre pas la distribution d’endommagement dans le volume de béton. C’est pourquoi un modèle de pull-out 3D est présenté dans le paragraphe suivant.

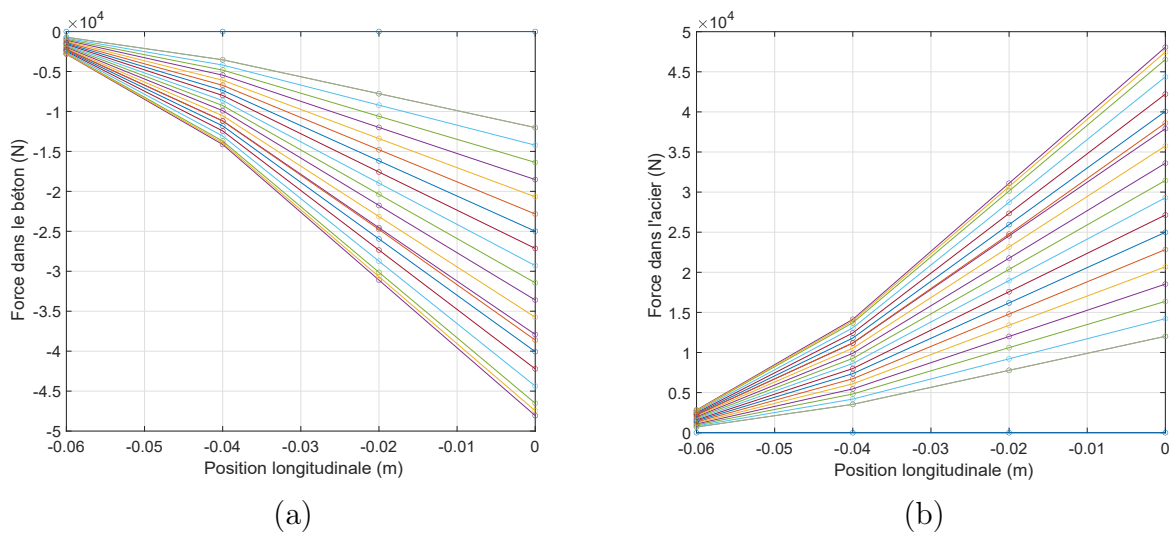


FIGURE 3.13 – Modèle de pull-out 1D ; forces dans le béton (a) et dans l’acier (b).

### 3.7.1.3 Modélisation 3D

Il est possible d’utiliser des macro-éléments pour effectuer une modélisation 3D de l’essai de pull-out. Les macro-éléments représentent dans ce cas des éléments de barres d’acier, une zone d’interface, et des contraintes d’adhérence. Ils sont accrochés avec des relations cinématiques à des éléments volumiques de béton. Dans le modèle de pull-out 1D, la section

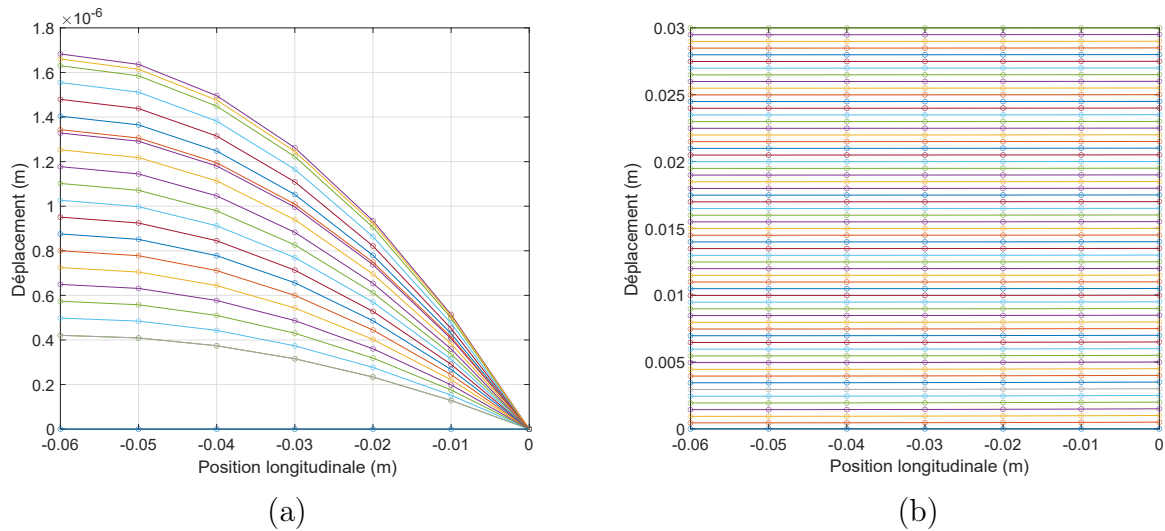


FIGURE 3.14 – Modèle de pull-out 1D ; déplacements longitudinaux des noeuds de béton (a) et d'acier (b).

de la partie d'interface des macro-éléments représentait la section transversale du volume de béton. Pourtant, des éléments volumiques 3D sont utilisés ici pour modéliser le béton. Par ailleurs, la première étape de la modélisation 3D consiste à mener une analyse de sensibilité par rapport à la valeur de l'épaisseur de la partie d'interface du macro-élément.

### 3.7.1.3.1 Propriétés des matériaux

La loi de comportement linéaire de l'acier et la loi d'adhérence sont identiques à celles utilisées pour le modèle de pull-out 1D. Le choix d'associer un comportement linéaire à l'acier est fait puisque la barre d'acier ne se plastifie pas lors de l'essai de [Torre-Casanova, 2012]. Pour ce modèle 3D, une loi d'endommagement nonlinéaire régularisée de Mazars est affectée au béton (voir annexe A). Les propriétés utilisées pour le béton sont résumées dans le tableau 3.3.

Paramètre	Description	Valeur	Unité
$E_c$	Module d'Young	28	GPa
$\nu_c$	Coefficient de poisson	0.22	-
$f_t$	Résistance à la traction	3.12	MPa
$\varepsilon_{d0}$	Déformation seuil	$\frac{f_t}{E_c} = 1.1143 \times 10^{-4}$	-
$A_t$	Paramètre de la loi locale de Mazars	Pas utilisé pour la loi régularisée	-
$B_t$	Paramètre de la loi de Mazars	Régularisé (équation (A.7))	-
$A_c$	Paramètre de la loi de Mazars	1.1	-
$B_c$	Paramètre de la loi de Mazars	700	-
$\beta$	Paramètre de la loi de Mazars	1.06	-
$G_f$	Énergie de fissuration	150	N/m

TABLEAU 3.3 – Paramètres du béton pour le modèle de pull-out 3D.

### 3.7.1.3.2 Maillage

Le maillage illustré dans la figure 3.15 est choisi. La figure 3.16 montre les conditions aux limites présentées sur une section du maillage de la figure 3.15. Un déplacement est imposé à

un nœud externe de la partie acier des macro-éléments. Trois macro-éléments relient l'acier et le béton. Pour cette modélisation 3D, aucune discrétisation interne n'a été effectuée dans chaque macro-élément. Les nœuds d'interface et d'acier des macro-éléments ont les mêmes coordonnées avant l'application du chargement.

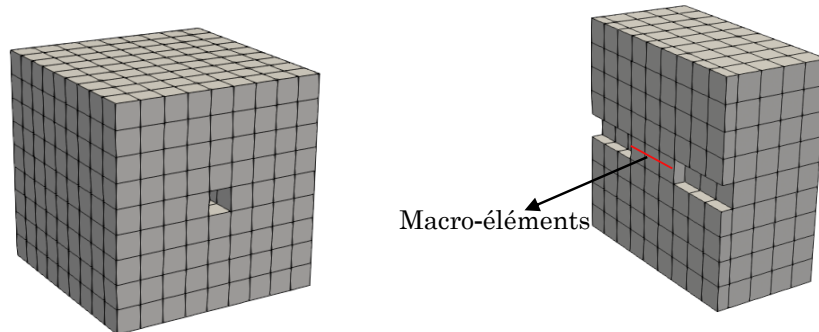


FIGURE 3.15 – Maillage du modèle de pull-out 3D.

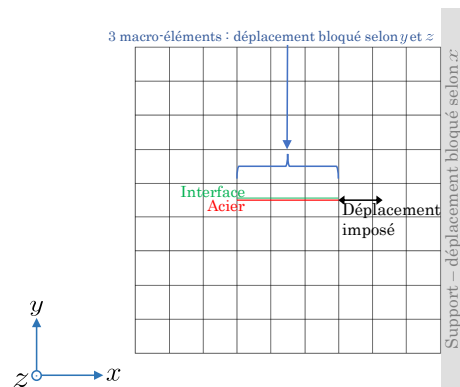


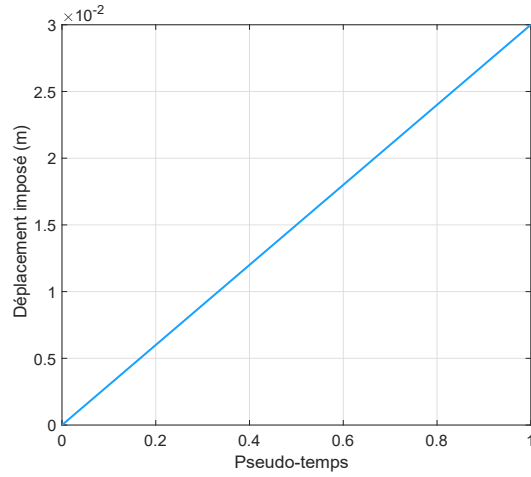
FIGURE 3.16 – Conditions aux limites du modèle de pull-out 3D.

### 3.7.1.3.3 Résultats

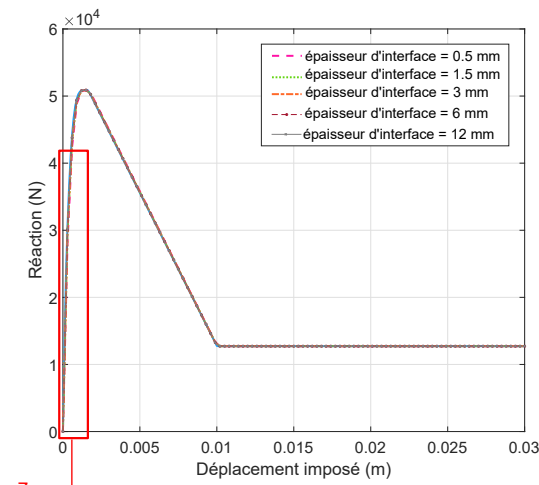
La figure 3.17 montre les courbes de déplacement imposé et de réaction pour un chargement monotone. Une étude de sensibilité est réalisée par rapport à l'épaisseur de l'interface. La figure 3.17(b) montre les courbes de réaction pour différentes valeurs d'épaisseur. Le changement de cette valeur d'épaisseur change légèrement la rigidité initiale de la structure.

La figure 3.18 montre un choix de déplacement imposé cyclique et la courbe de réaction correspondante, avec l'épaisseur de l'interface prise égale au diamètre de la barre d'acier. Les conditions aux limites sont modifiées entre les deux configurations illustrées dans la figure 3.19 à chaque fois que le sens du déplacement imposé est modifié.

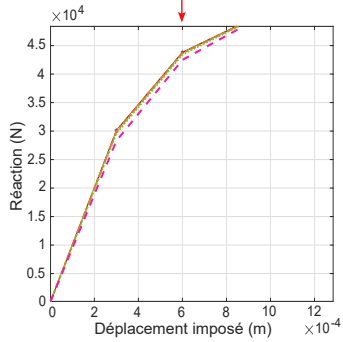
L'avantage de la modélisation 3D par rapport à la modélisation 1D est la possibilité de visualiser le champ d'endommagement dans le volume de béton. Les figures 3.20 et 3.21 montrent la distribution de l'endommagement du béton au dernier pas de temps pour la configuration de chargement monotone, et à différents stades de chargement notés A1, A2 et A3 sur la courbe de réaction de la figure 3.18, pour la configuration de chargement cyclique.



(a)



Zoom

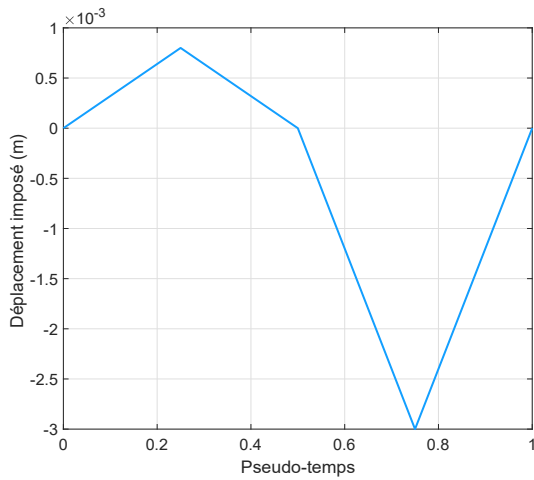


(b)

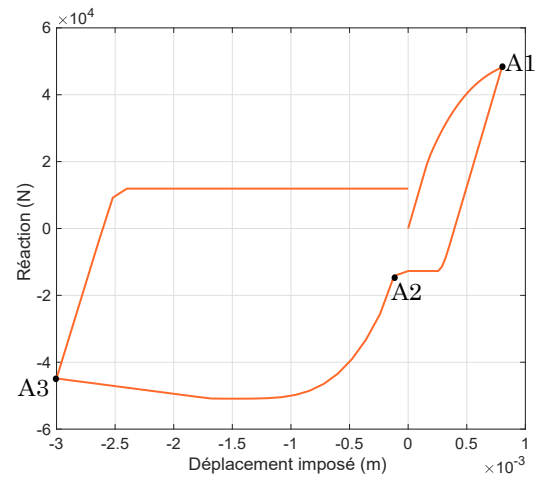
FIGURE 3.17 – Déplacement imposé (a) et courbes de réaction (b) du modèle de pull-out 3D avec un chargement monotone.

#### 3.7.1.3.4 Discussion

Un changement de la rigidité globale de la structure étudiée du au changement de l'épaisseur de l'interface est attendu puisque le changement de l'épaisseur de l'interface modifie sa rigidité. Au niveau global de la structure, cela se traduit par une légère modification de la rigidité initiale globale. Parmi les différentes valeurs d'épaisseur testées pour le cas monotone,

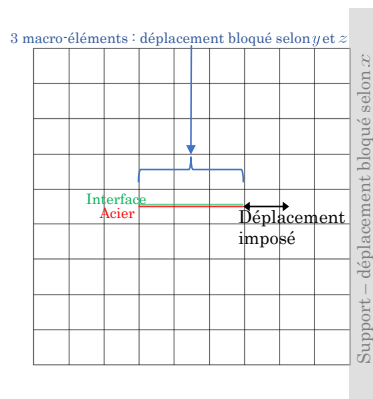


(a)

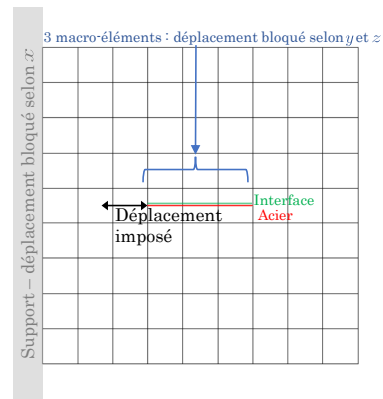


(b)

FIGURE 3.18 – Modèle de pull-out 3D cyclique ; déplacement imposé (a) et courbe de réaction (b).



(a)



(b)

FIGURE 3.19 – Configurations (a) et (b) pour le modèle de pull-out cyclique 3D.

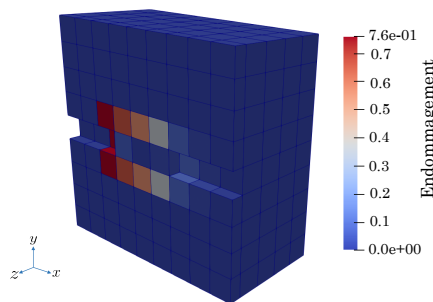


FIGURE 3.20 – Cartographie d'endommagement du béton obtenue en fin de chargement pour l'exemple de pull-out 3D avec un chargement monotone.

une valeur de 12 mm donne la courbe la plus proche de la courbe résultante de la simulation 1D. Cette valeur est équivalente au diamètre de la barre d'acier. En outre, les courbes de réaction sont très proches les unes des autres et presque identiques pour des valeurs d'épais-

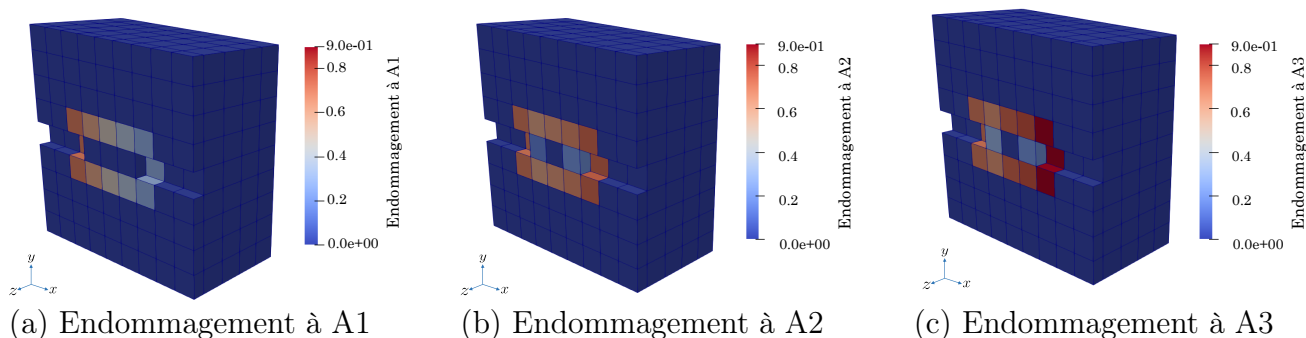


FIGURE 3.21 – Cartographies d’endommagement à différents stades de la courbe de réaction : A1 (a), A2 (b), et A3 (c) du modèle de pull-out 3D cyclique (voir figure 3.18).

seur comprises entre 3 mm et 12 mm. Il est à noter ici que la variabilité de la rigidité initiale, observée par un changement de la pente initiale de la courbe de réaction, reste inférieure à la variabilité expérimentale. En effet, répéter expérimentalement l’essai de pull-out donne des courbes de réaction différentes lors de chaque répétition.

L’endommagement du béton est localisé dans une zone spécifique tout autour de la barre d’acier. Concrètement, pour le modèle de pull-out 3D, deux types de non-linéarités sont mis en jeu : les non-linéarités du modèle d’interface portées par le macro-élément, et l’endommagement du béton. Ainsi, puisqu’une part importante des non-linéarités totales est prise en compte au niveau de l’interface, seule une zone spécifique de béton entourant l’acier est endommagée. Ce résultat justifie le choix d’affecter une loi constitutive linéaire à l’acier et au béton dans le modèle de pull-out 1D. En d’autres termes, si on s’intéresse à reproduire numériquement la loi d’adhérence de l’essai, le modèle de pull-out 1D peut être considéré comme un modèle suffisamment détaillé et représentatif de l’essai de pull-out.

Il est intéressant de visualiser la répartition des contraintes de cisaillement  $\sigma_{xy}$  dans le volume de béton et de l’interpréter. La figure 3.22 montre que les contraintes de cisaillement sont symétriques par rapport à l’axe de la barre, ce qui est prévu parce qu’un déplacement horizontal est imposé au noeud externe de la barre d’acier. Près de l’acier, ces contraintes de cisaillement ont les valeurs maximales, puis leur valeur diminue lorsque la distance par rapport à l’axe de l’acier augmente.

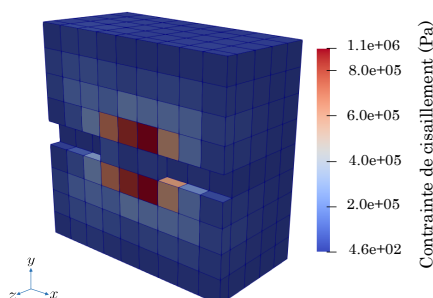


FIGURE 3.22 – Contraintes de cisaillement dans le béton pour le dernier pas de temps du modèle de pull-out 3D monotone.

L’endommagement et les contraintes de cisaillement étant symétriques dans le volume de béton par rapport à l’acier, une représentation plus réaliste de la fissuration expérimentale

de pull-out peut être possible, en définissant des champs aléatoires de propriétés de béton. Une seconde piste d'amélioration du résultat numérique d'endommagement consiste à considérer des contraintes d'adhérence dans la direction normal par rapport à l'acier, en plus des contraintes longitudinales. Dans ce cas, une résultante inclinée de contraintes d'adhérences peut favoriser une propagation diagonale d'endommagement dans le volume du béton, ce qui représente une meilleure reproduction de la fissuration expérimentale de pull-out.

### 3.7.2 Exemple de tirant en béton armé

Les essais de tirants sont généralement étudiés afin de comprendre l'influence de la présence de l'interface acier-béton sur la distribution des fissures dans le béton. Le modèle de macro-élément est ici utilisé pour modéliser un tirant en béton armé. L'essai de tirant expérimentalement étudié par [Farra, 1995] est considéré. Cet essai a été modélisé par [Torre-Casanova, 2012] et [Mang, 2015]. Le but ici est de tester la possibilité de reproduire le comportement expérimental du tirant avec le modèle de macro-élément.

#### 3.7.2.1 Description de l'essai

Le déplacement longitudinal de l'une des extrémités de la barre d'acier est bloqué alors qu'un déplacement longitudinal est imposé à son autre extrémité. La barre est d'un diamètre de 10 mm. Le béton a une section transversale de  $0.1 \times 0.1 \text{ m}^2$ . La figure 3.23 illustre la géométrie et les conditions aux limites du tirant.

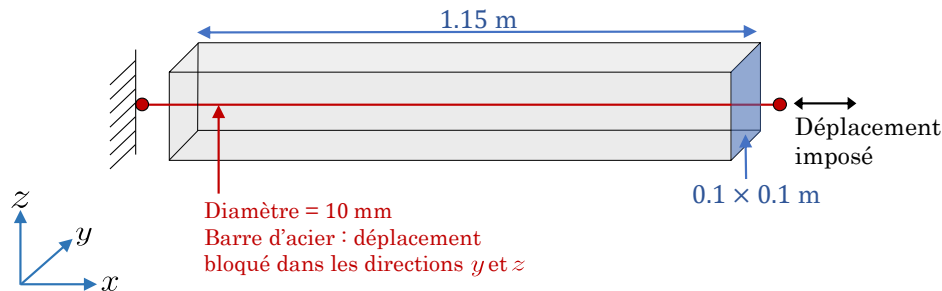


FIGURE 3.23 – Description du tirant de [Farra, 1995].

Deux types de modélisation sont réalisés : l'un avec un comportement linéaire affecté au béton et l'autre avec un comportement nonlinéaire. Pour chaque type de modélisation, les options d'adhérence parfaite acier-béton et d'adhérence imparfaite sont testées. Pour le cas d'adhérence parfaite, la formulation de macro-élément n'est pas utilisée. Des barres d'acier sont parfaitement reliées aux éléments de béton via des relations cinématiques. Cependant, lorsque les non-linéarités de l'interface sont prises en compte dans la modélisation, des macro-éléments sont utilisés pour représenter l'acier et l'interface.

#### 3.7.2.2 Modélisations avec un comportement linéaire de béton

Pour ce type de modélisation, un comportement linéaire est associé au béton, le but étant de concentrer l'étude sur la prise en compte (ou non) d'un comportement nonlinéaire de l'interface.



### 3.7.2.2.1 Propriétés des matériaux

Expérimentalement, l'acier se plastifie à la fin de l'essai de tirant. L'intérêt ici est d'étudier la phase de fissuration de béton durant laquelle le comportement de l'acier est linéaire. Une loi de comportement linéaire est associée à l'acier avec un module d'Young égal à 200 GPa. Le tableau 3.4 résume les propriétés matériau adoptées pour le béton.

Paramètre	Description	Valeur	Unité
$E_c$	Module d'Young	30.4	GPa
$\nu_c$	Coefficient de poisson	0.22	-

TABLEAU 3.4 – Propriétés de béton utilisées pour la modélisations de l'essai de tirant avec un comportement linéaire de béton.

La loi d'adhérence est identique à la loi utilisée par [Mang, 2015] lors de la modélisation de cet exemple de tirant. Cette loi est celle illustrée sur la figure 3.24. Les différents couples de valeurs de la figure 3.24 sont reliés par des segments de droite.

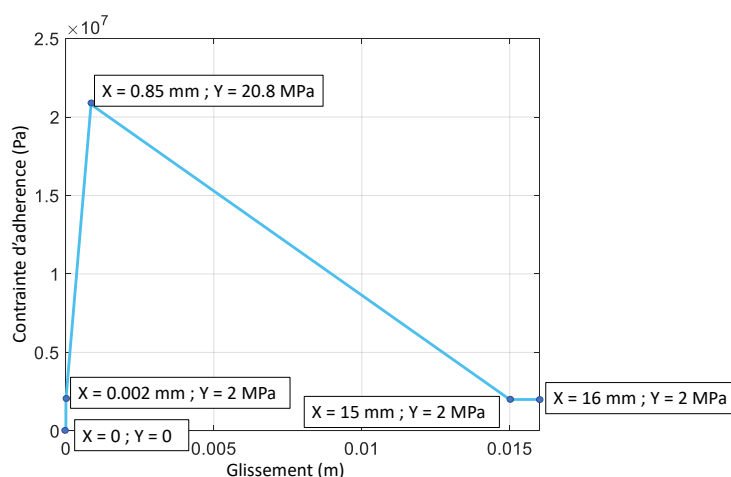


FIGURE 3.24 – Loi non linéaire d'adhérence.

### 3.7.2.2.2 Maillage

Un objectif principal de ce choix de modélisation avec un béton linéaire est de comparer les résultats à ceux issus de la même modélisation réalisée par [Mang, 2015] (qui sont donc des résultats de référence). Cette comparaison permet de valider la représentativité de la formulation de macro-élément. En d'autres termes, la comparaison est faite pour tester la possibilité de reproduire des résultats similaires en remplaçant le modèle d'interface de [Mang, 2015] par l'approche de macro-élément. Le maillage choisi est donc identique à celui utilisé dans [Mang, 2015] pour ce type de modélisation (comportement linéaire pour de béton). Il est généré de manière à avoir  $5 \times 5$  éléments dans la section transversale de béton, et 58 éléments le long de l'axe du tirant. Pour l'option d'adhérence parfaite, des éléments barres sont utilisés pour mailler l'acier. 58 éléments barres représentent l'acier le long de la longueur de contact (égale à la longueur totale de béton de 1.15 m), et deux éléments d'acier supplémentaires sont liés aux extrémités des premiers 58 éléments. Des relations cinématiques de déplacement imposent une adhérence parfaite acier-béton. Lors de l'utilisation d'un modèle

nonlinéaire pour l'interface, 58 macro-éléments sont utilisés le long de la longueur de contact acier-béton. Ces macro-éléments sont discrétisés chacun en deux éléments biphasiques. Deux éléments barres d'acier sont liés aux extrémités de la partie acier des macro-éléments. Les deux options de maillage sont illustrées dans les figures 3.25 et 3.26.

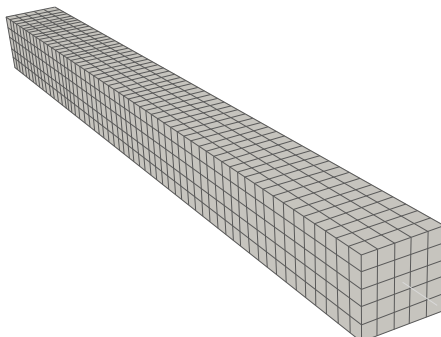


FIGURE 3.25 – Maillage 3D pour la modélisation de tirant avec un comportement linéaire de béton.

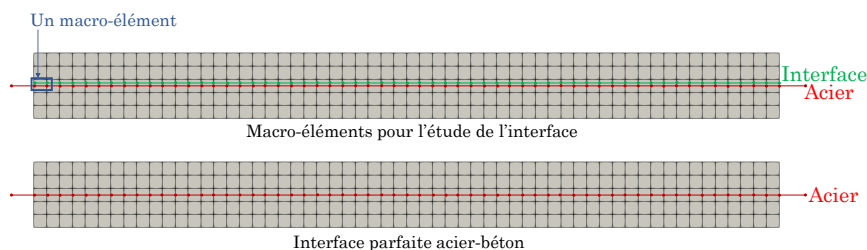


FIGURE 3.26 – Section longitudinale dans le maillage 3D pour la modélisation de tirant avec un comportement linéaire de béton

### 3.7.2.2.3 Résultats

La longueur des deux éléments d'acier ajoutés à l'extérieur du volume de béton n'est pas indiquée dans [Mang, 2015], bien que sa modification change légèrement la rigidité du tirant. La longueur de chacun de ces deux éléments d'acier est ici considérée égale à 0.05 m. Cette valeur est déduite en modélisant le tirant avec un comportement linéaire de béton et une liaison parfaite acier-béton. La courbe de réaction est ensuite tracée et la valeur de 0.05 m est choisie puisqu'elle donne la même courbe de réaction de [Mang, 2015], pour cette même modélisation linéaire d'adhérence parfaite.

La formulation de macro-élément est ensuite introduite à la modélisation tout en conservant le choix d'un comportement linéaire de béton. Ainsi, dans ce cas, la non-linéarité de la modélisation n'est liée qu'à la loi d'adhérence nonlinéaire (figure 3.24).

La figure 3.27 montre différentes courbes de réaction avec ou sans adhérence parfaite, pour plusieurs modèles d'interface. Les courbes associées aux modèles d'interface de [Torre-Casanova, 2012] et de [Mang, 2015] sont présentées dans [Mang, 2015] pour des modélisations identiques aux modélisations réalisées ici (même maillage, même propriétés de matériaux, et

même nombre de pas de temps). La figure 6 montre également différentes courbes de réaction pour une interface imparfaite prise en compte au sein des macro-éléments avec différentes épaisseurs de la zone de gaine d'interface des macro-éléments. Les courbes obtenues avec différentes valeurs d'épaisseur sont très proches.

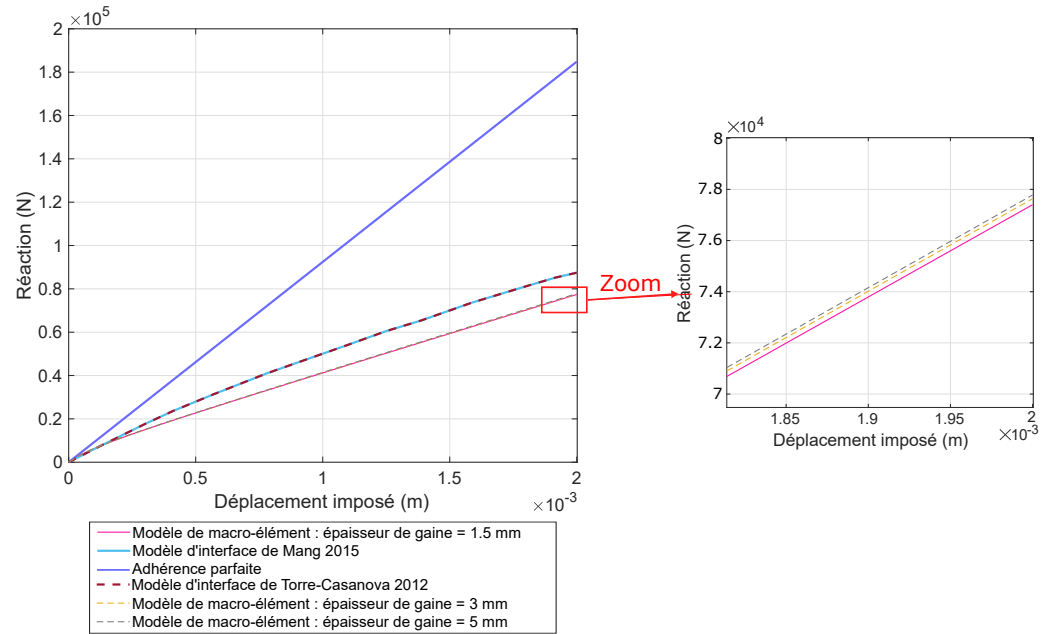


FIGURE 3.27 – Courbes de réaction.

Le modèle de [Mang, 2015] est une extension du modèle de [Torre-Casanova, 2012], selon [Mang, 2015]. Il est donc attendu d'observer des courbes superposées avec ces deux modèles. Les courbes obtenues avec le modèle à macro-éléments sont légèrement plus atténuées que les courbes obtenues par les modèles de [Torre-Casanova, 2012] et [Mang, 2015] pour une même loi d'adhérence. Étant donné que les conditions de modélisations sont les mêmes pour les différents modèles d'interface, une comparaison du nombre d'itérations nécessaire à la convergence de l'algorithme de résolution de Newton-Raphson global est faite (figure 3.28). La modélisation avec le modèle de macro-élément pour une épaisseur d'interface de 5 mm est choisie pour la comparaison.

#### 3.7.2.2.4 Discussion

La figure 3.28 démontre la robustesse numérique du modèle de macro-élément par rapport aux modèles d'interface de [Torre-Casanova, 2012] et de [Mang, 2015]. Pour le modèle de macro-élément qui sous-structure la résolution, le nombre d'itérations est stable et ne dépasse pas trois itérations. Le tableau 3.5 récapitule le nombre total d'itérations associé aux différents modèles d'interface.

Le rapport du nombre total d'itérations associé aux différents modèles d'interface au nombre total d'itérations avec une liaison parfaite est égal à 1.445 en utilisant le modèle d'interface de [Torre-Casanova, 2012] et à 1.495 en utilisant le modèle d'interface de [Mang, 2015]. Pour la modélisation par macro-éléments, ce rapport devient égal à 1.045, ce qui revient à une diminution d'environ 33% par rapport aux modèles de [Torre-Casanova, 2012] et de [Mang, 2015].

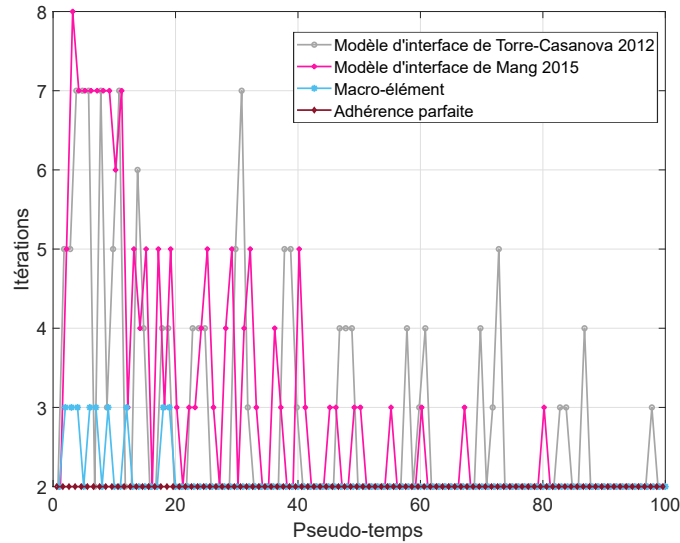


FIGURE 3.28 – Nombre d’itérations en fonction du pseudo-temps pour différents modèles d’interface.

Modèle d’interface	Nombre total d’itérations
Adhérence parfaite	200
Modèle de [Torre-Casanova, 2012]	289
Modèle de [Mang, 2015]	299
Macro-élément	209

TABLEAU 3.5 – Nombre total d’itérations nécessaires pour la convergence.

La raison pour laquelle l’utilisation des macro-éléments implique une meilleure robustesse numérique est qu’un algorithme local est utilisé pour établir l’équilibre interne au niveau de chaque macro-élément. L’algorithme local est appelé à chaque fois que la matrice de rigidité de la structure est calculée ou mise à jour, et lors du calcul des forces internes. Ici, lors de la résolution complète de l’exemple de tirant, l’algorithme local du macro-élément est appelé 519 fois (pour un total de 100 pas de temps) :

- Une première fois lors du calcul de la rigidité initiale de la structure ;
- 100 fois au début de chaque pas de temps lors de la mise à jour de la matrice de rigidité ;
- $209 \times 2$  fois à chaque itération globale lors de la mise à jour de la matrice de rigidité et lors du calcul des forces internes pour estimer le résidu. 209 représente le nombre total des itérations globales (la somme de toutes les itérations des différents pas de temps, voir tableau 3.5).

Les itérations locales ne dépassent que quelques fois une itération avec un maximum de trois itérations. Les macro-éléments sont numérotés de 1 à 58 dans un ordre croissant par rapport à leur position longitudinale. La figure 3.29 montre le nombre d’itérations locales pour les macro-éléments 1, 30 et 40.

Les itérations locales à l’échelle du macro-élément facilitent la convergence globale. Ces itérations locales sont peu coûteuses par rapport aux itérations à l’échelle globale puisqu’elles sont définies à l’échelle locale du macro-élément.

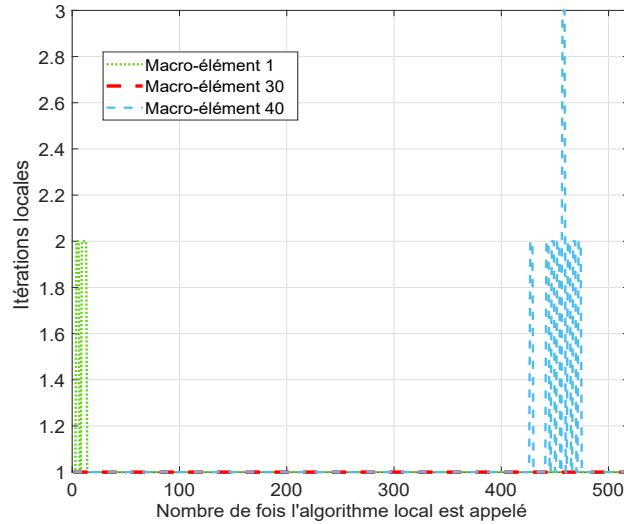


FIGURE 3.29 – Nombre d’itérations locales.

Pour ce test de tirant, le temps de calcul d’une itération locale représente environ 1% du temps de calcul d’une itération globale. Cet exemple donne une idée de l’avantage de la discrétisation interne qui permet d’obtenir une meilleure convergence de la résolution, en contrôlant la cinématique locale interne. En conséquence, cela conduit à une convergence plus rapide par rapport à un calcul 3D complet, où les non-linéarités de l’interface sont prises en compte à l’échelle globale. Cette accélération de la convergence est montrée dans le tableau 3.6 qui compare le ratio du temps de calcul des modélisations d’adhérence imparfaite par rapport à une modélisation d’adhérence parfaite.

Modèle d’interface	Ratio du temps de calcul par rapport à une modélisation d’adhérence parfaite
Modèle de [Torre-Casanova, 2012]	3.4375
Modèle de [Mang, 2015]	2.5
Macro-élément	1.426

TABLEAU 3.6 – Comparaison des ratios de temps de calcul par rapport à une modélisation d’adhérence parfaite.

Les résultats de ce test permettent de prédire un écart plus important du coût de calcul d’une itération locale par rapport à celui d’une itération globale pour des structures à plus grande échelle. Une itération locale est toujours à l’échelle d’un macro-élément, tandis qu’une itération globale est à l’échelle de la structure étudiée.

Il est intéressant ici, toujours dans le cadre de la modélisation avec un comportement linéaire d’acier et de béton, de mener une étude complémentaire portant sur l’influence de la rigidité du modèle d’interface sur la courbe de réaction résultante. Pour cela, une analyse est réalisée en remplaçant la loi d’adhérence de la figure 3.24 par une loi linéaire. La figure 3.30 montre des courbes de réaction avec des lois d’adhérence linéaires ayant différentes valeurs de pentes comparées à la courbe de liaison parfaite.

Le résultat de la figure 3.30 montre que lorsqu’on augmente la pente de la loi d’adhérence

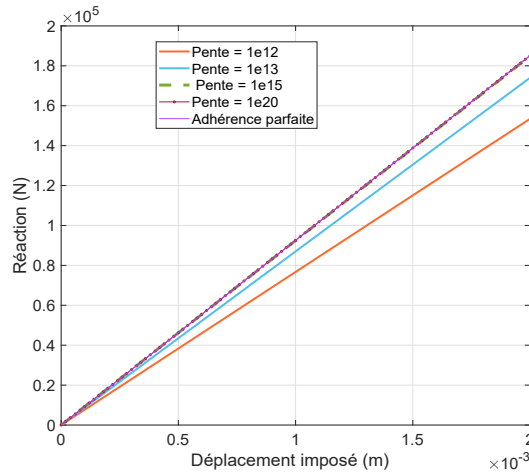


FIGURE 3.30 – Courbes de réaction avec des lois d’adhérence linéaires comparées à la courbe de réaction d’adhérence parfaite.

linéaire, la courbe de réaction se rapproche de la courbe de liaison parfaite. En d’autres termes, le cas d’adhérence parfaite est équivalent à une interface infiniment rigide.

### 3.7.2.3 Modélisations avec un comportement nonlinéaire de béton

L’endommagement du béton est ici pris en considération.

#### 3.7.2.3.1 Propriétés des matériaux

Pour ce choix de modélisation, la loi de comportement d’endommagement de Mazars [Mazars, 1984] régularisée en énergie selon Hillerborg [Hillerborg *et al.*, 1976] est utilisée (voir annexe A).

Les propriétés linéaires de béton ont les mêmes valeurs que celles utilisées pour les simulations avec un comportement linéaire de béton (tableau 3.4). Des paramètres supplémentaires sont définis pour caractériser la loi de Mazars. Ces paramètres sont présentés dans le tableau 3.7. La loi de comportement linéaire de l’acier et la loi d’adhérence de l’interface sont identiques aux lois utilisées pour les modélisation de béton linéaire (paragraphe 3.7.2.2.1).

Paramètre	Description	Valeur	Unité
$f_t$	Résistance à la traction	2.6	MPa
$\varepsilon_{d0}$	Déformation seuil	$\frac{f_t}{E_c} = 8.5526 \times 10^{-5}$	-
$A_t$	Paramètres de la loi locale de Mazars	Pas utilisé pour la loi régularisée	-
$B_t$	Paramètres de la loi de Mazars	Régularisé (équation A.7)	-
$A_c$	Paramètres de la loi de Mazars	1.2	-
$B_c$	Paramètres de la loi de Mazars	700	-
$\beta$	Paramètres de la loi de Mazars	1.06	-
$G_f$	Énergie de fissuration	150	N/m

TABLEAU 3.7 – Paramètres de la loi de Mazars.

### 3.7.2.3.2 Maillage

Pour les modélisations avec un comportement nonlinéaire de béton, un maillage de béton avec  $3 \times 3$  éléments dans la section et 35 éléments le long du tirant est utilisé (figure 3.31). Chaque macro-élément est discrétisé en 5 éléments biphasiques, et une épaisseur de 2 mm est utilisée pour l'interface.

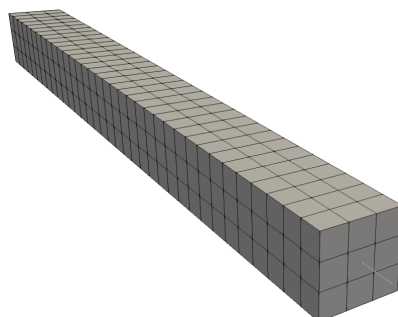


FIGURE 3.31 – Maillage 3D pour la modélisation de tirant avec un comportement nonlinéaire de béton.

Le critère d'endommagement de la loi de Mazars compare la déformation équivalente  $\varepsilon_{eq}$  à la déformation seuil  $\varepsilon_{d0}$ . Une fois la déformation équivalente  $\varepsilon_{eq}$  atteint le seuil  $\varepsilon_{d0}$ , le béton commence à s'endommager. Au début de l'essai étudié, les déformations dans le béton sont constantes dans une zone centrale (le long du tirant sauf des longueurs de redistribution des contraintes entre l'acier et le béton à ses extrémités). Pour cela, il est intéressant d'affecter une variabilité à la déformation seuil pour représenter le comportement expérimental de béton qui fissure en premier dans ses zones de faiblesse.

Une distribution aléatoire de la déformation seuil  $\varepsilon_{d0}$  est considérée avec une loi Gaussienne de moyenne égale à  $8.5526 \times 10^{-5}$  (valeur indiquée dans le tableau 3.7) et d'un coefficient de variation de 5%. La méthode des bandes tournantes est utilisée pour générer la distribution avec une longueur de corrélation égale à la taille des éléments finis [Mantoglou et Wilson, 1982]. La figure 3.32 montre la distribution de la déformation seuil dans le volume de béton.

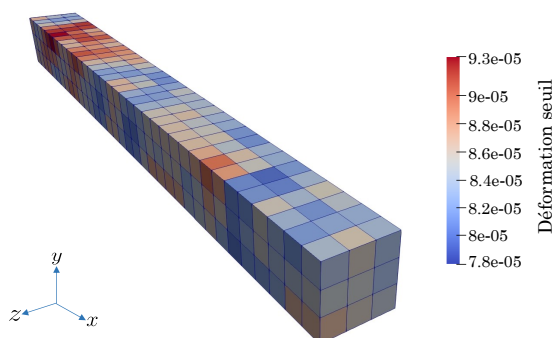


FIGURE 3.32 – Distribution aléatoire du seuil d'endommagement.

### 3.7.2.3.3 Résultats

La figure 3.33 montre les courbes de réaction issues des simulations avec un comportement nonlinéaire de béton, pour les options d'adhérence parfaite et imparfaite.

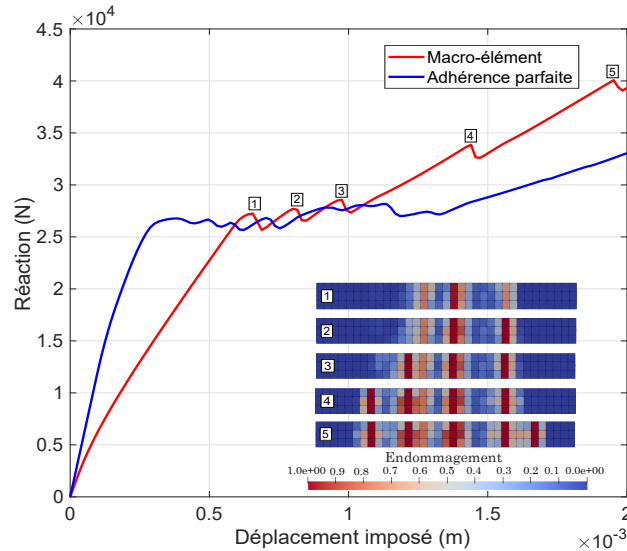


FIGURE 3.33 – Courbes de réaction des modélisations avec un comportement nonlinéaire de béton.

Les numéros 1 à 5 indiqués dans la figure 3.33 désignent l’apparition successive des différentes fissures dans le béton pour la modélisation avec des macro-éléments (comportement nonlinéaire imparfait de l’interface).

La figure 3.34 compare la distribution de l’endommagement dans le béton avec les options d’adhérence parfaite acier-béton et d’adhérence imparfaite (modélisation par macro-éléments). En comparant les distributions d’endommagement illustrés dans cette figure, on peut déduire que lors de l’introduction d’un comportement nonlinéaire d’interface, un nombre plus petit de fissures se produit dans le béton, avec une distance moyenne plus importante entre les différentes fissures.

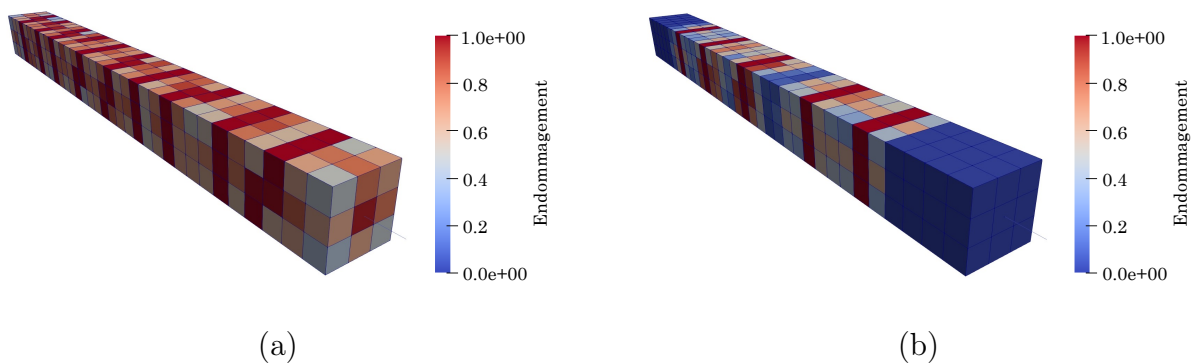


FIGURE 3.34 – Distributions d’endommagement pour l’hypothèse d’adhérence parfaite (a) et imparfaite dans le cadre des macro-éléments (b).

Une déformation moyenne de béton est calculée expérimentalement à partir du déplacement relatif sur une longueur égale à 1 m au centre du tirant [Farra, 1995] (voir figure 3.35).

Numériquement, il est possible de calculer cette déformation moyenne selon les valeurs de déplacement de deux nœuds d’interface A et B des macro-éléments. A et B doivent



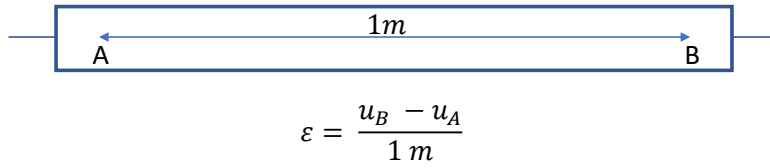


FIGURE 3.35 – Calcul de la déformation moyenne de béton.

être positionnés à une distance de 0,075 m des faces externes droite et gauche de béton, respectivement. Le maillage choisi ne comporte pas des noeuds placés à ces positions exactes. Les deux noeuds du maillage les plus proches à ces positions sont donc choisis.

La figure 3.36 montre l'évolution de la contrainte d'acier au niveau du point d'application du chargement (rapport de la force appliquée à la section de l'acier) en fonction de la déformation moyenne de béton. Les courbes expérimentale et numérique (pour la modélisation avec des macro-éléments) sont comparées dans cette figure.

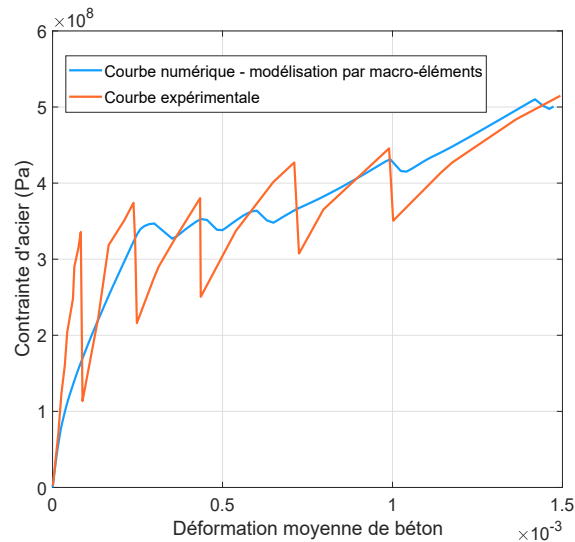


FIGURE 3.36 – Courbes numérique et expérimentale de l'évolution de la contrainte d'acier en fonction de la déformation moyenne de béton.

#### 3.7.2.3.4 Discussion

La figure 3.37 compare les distributions d'endommagement des modélisations d'adhérence parfaite et d'interface imparfaite avec des macro-éléments à la fissuration expérimentale. Elle montre l'importance de la prise en compte du comportement de l'interface acier-béton dans les simulations des éléments en béton armé pour mieux estimer le nombre des fissures et leur espacement. En effet, la distribution de l'endommagement dans le volume de béton représente mieux les faciès de fissuration expérimentale pour la modélisation où le comportement nonlinéaire de l'interface est pris en compte. La valeur moyenne de l'espacement entre les fissures est de 16 cm expérimentalement, et de 18 cm pour la modélisation par macro-éléments, alors qu'elle est d'environ 11.2 cm pour la modélisation d'adhérence parfaite. Expérimentalement, 5 fissures principales sont observées dans le béton. 5 fissures sont obtenues dans

la modélisation par macro-éléments, tandis que 10 fissures sont issues dans la modélisation d'adhérence parfaite (figure 3.37). Il est important de noter ici qu'on suppose numériquement que la position des fissures est détectée par une valeur d'endommagement égale à 1, ou proche de 1.

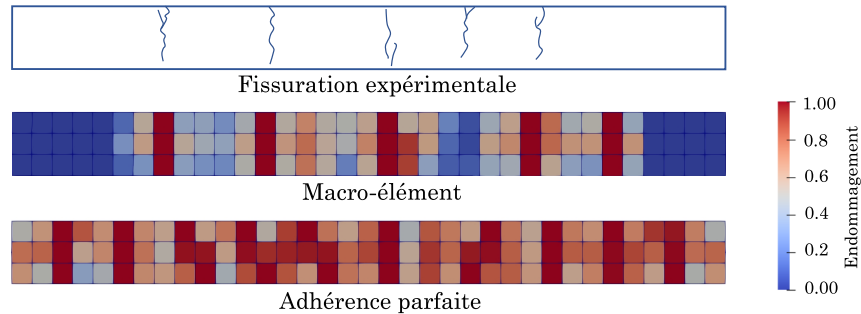


FIGURE 3.37 – Comparaison du chemin de fissuration expérimental à la distribution de l'endommagement dans le béton pour des hypothèses d'interface acier-béton parfaite et imparfaite.

La visualisation du champ de déformation longitudinale au lieu du champ d'endommagement dans le béton facilite le comptage du nombre total de fissures (voir figure 3.38).

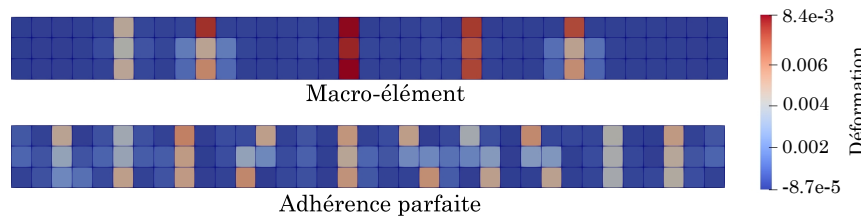


FIGURE 3.38 – Déformation longitudinale de béton.

La modélisation d'un comportement nonlinéaire d'interface permet d'observer des sauts de la valeur de la contrainte d'acier au moment de la fissuration (figure 3.36). L'amplitude de ces sauts est liée, selon [Farra, 1995], au dispositif expérimental. Le dispositif expérimental n'étant pas modélisé ici, il n'est pas intéressant de comparer les amplitudes des sauts expérimentales et numériques. La courbe numérique de la figure 3.36 est considérée représentative de la courbe expérimentale.

Le principal résultat de cette étude de tirant est la validation du modèle de macro-élément. Par ailleurs, une meilleure représentation de la fissuration expérimentale du béton est obtenue en tenant compte du comportement nonlinéaire de l'interface acier-béton. Cela montre l'importance de la modélisation du comportement nonlinéaire de cette interface. En outre, la modélisation de l'essai de tirant montre la robustesse numérique de la formulation de macro-élément, et démontre la capacité de cette approche à reproduire le comportement expérimental de l'interface.

### 3.7.3 Test de bord de poutre

Les essais de bord de poutre peuvent être adoptés comme une alternative aux essais de pull-out pour la caractérisation de l'interface [Cairns et Plizzari, 2003] [A944-10, 2010] [Trujillo *et al.*, 2018] [Rex *et al.*, 2019]. Contrairement à l'essai de pull-out, l'essai de bord de poutre représente l'état de la liaison dans une poutre. Le béton autour de la zone de liaison des barres d'armature est soumis à un effort de cisaillement constant et à un moment de flexion. Par ailleurs, l'enrobage du béton lors d'un essai de pull-out est généralement plus élevé que l'enrobage dans les constructions courantes (sauf dans le cas où le diamètre des barres est relativement petit). L'enrobage dans les essais de bord de poutre est généralement plus représentatif de l'enrobage dans les constructions courantes que celui des essais de pull-out. L'essai de bord de poutre de [Rex *et al.*, 2019] est ici modélisé.

#### 3.7.3.1 Description de l'essai

La configuration et les dimensions de l'essai sont indiqués dans la figure 3.39. La barre d'acier tirée, d'un diamètre de 16 mm, est en contact direct avec le béton pour une distance A2A3 (voir figure 3.40) de 80 mm. Cette distance est égale à 7 fois le diamètre de cette barre.

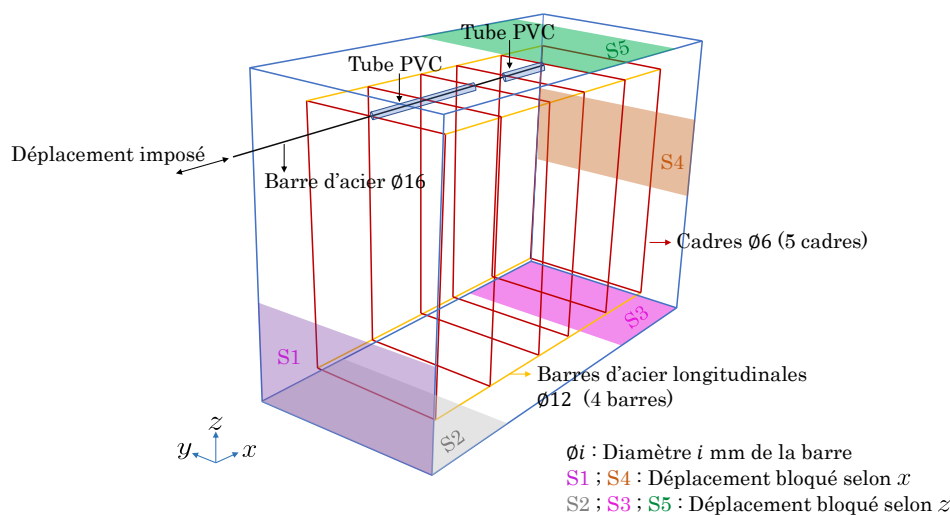


FIGURE 3.39 – Configuration de l'essai de bord de poutre.

#### 3.7.3.2 Modélisation de l'essai de bord de poutre

##### 3.7.3.2.1 Propriétés des matériaux

Les barres d'acier sont supposées avoir un comportement élastique avec un module d'Young de 200 GPa. Cette hypothèse est conforme aux observations expérimentales, étant donné que l'acier ne se plastifie pas au cours de l'essai de bord de poutre étudié. Pour le béton, la loi de Mazars régularisée en énergie présentée dans l'annexe A est utilisée. Le tableau 3.8 résume les paramètres matériau de béton.

La loi d'adhérence de [Murcia-Delso *et al.*, 2011] (figure 2.9) est utilisée. Il est intéressant d'estimer les paramètres de la loi de liaison  $\tau_1$ ,  $g_1$ , et  $g_3$  avant de comparer les résultats de

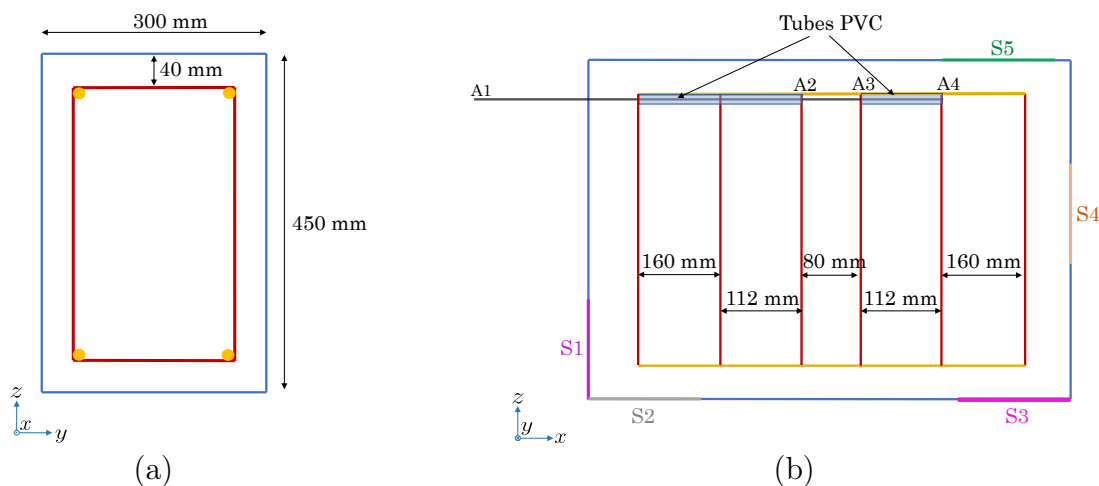


FIGURE 3.40 – Sections transversale (a) et longitudinale (b) dans la géométrie de l'essai de bord de poutre.

Paramètre	Description	Valeur	Unité
$E_c$	Module d'Young	28	GPa
$\nu_c$	Coefficient de poisson	0.2	-
$f_t$	Résistance à la traction	2.565	MPa
$\varepsilon_{d0}$	Déformation seuil	$\frac{f_t}{E_c} = 9.1607 \times 10^{-5}$	-
$A_t$	Paramètre de la loi locale de Mazars	Pas utilisé pour la loi régularisée	-
$B_t$	Paramètre de la loi de Mazars	Régularisé (équation (A.7))	-
$A_c$	Paramètre de la loi de Mazars	1.3	-
$B_t$	Paramètre de la loi de Mazars	650	-
$\beta$	Paramètre de la loi de Mazars	1.06	-
$G_f$	Énergie de fissuration	150	N/m

TABLEAU 3.8 – Paramètres de béton pour la modélisation de l'essai de bord de poutre.

la modélisation avec les résultats expérimentaux. Différentes expressions empiriques sont recommandées dans la littérature pour ces trois paramètres. Le tableau 3.9 présente différentes expressions empiriques pour la contrainte d'adhérence  $\tau_1$  qui est la contrainte d'adhérence maximale de la courbe enveloppe globale initiale de la loi.

Référence	$\tau_1$ (MPa)
[Torre-Casanova, 2012]	$f_t(1.53\frac{c}{d} + 0.36)$ : rupture par éclatement du béton $0.6f_c$ : rupture par arrachement de l'acier
[Gao <i>et al.</i> , 2018]	$2.305f_c^{0.555}$
[Murcia-Delso et Benson Shing, 2015]	$1.163f_c^{0.75}$
[Harajli, 2004]	$2.57f_c^{0.5}$
[Fib, 2010]	tableau 3.10

TABLEAU 3.9 – Expressions empiriques de  $\tau_1$ .

Une seule expression est donnée dans [Gao *et al.*, 2018] [Murcia-Delso et Benson Shing, 2015] [Harajli, 2004] pour  $\tau_1$ , tandis que deux expressions distinctes sont données dans [Torre-

[Casanova, 2012] pour les modes de ruine par arrachement d'acier et par éclatement du béton. Dans [Fib, 2010], plusieurs expressions sont données (tableau 3.10).

Expression de $\tau_1$	Mode de ruine
$2.5\sqrt{f_c}$	rupture par arrachement de l'acier avec des bonnes conditions d'adhérence
$1.25\sqrt{f_c}$	rupture par arrachement de l'acier avec toutes les autres conditions d'adhérence
$7.0 \left(\frac{f_c}{20}\right)^{0.25}$	rupture par éclatement du béton avec des bonnes conditions d'adhérence pour un béton non confiné
$8.0 \left(\frac{f_c}{20}\right)^{0.25}$	rupture par éclatement du béton avec des bonnes conditions d'adhérence pour un béton confiné avec des cadres
$5.0 \left(\frac{f_c}{20}\right)^{0.25}$	rupture par éclatement du béton avec toutes les autres conditions d'adhérence pour un béton non confiné
$5.5 \left(\frac{f_c}{20}\right)^{0.25}$	rupture par éclatement du béton avec avec toutes les autres conditions d'adhérence pour un béton confiné avec des cadres

TABLEAU 3.10 – Expressions empiriques de  $\tau_1$  selon le mode de ruine de l'interface proposées par [Fib, 2010].

$f_c$  et  $f'_c$  sont les valeurs de la résistance à la compression cubique et cylindrique du béton, respectivement. Les indices  $c$  et  $d$  désignent l'enrobage de béton et le diamètre de la barre d'acier (tableau 3.9).

Des propositions d'expressions empiriques sont données pour le glissement  $g_1$  correspondant à la contrainte d'adhérence  $\tau_1$  (tableau 3.11).

Référence	$g_1$ (mm)
[Torre-Casanova, 2012]	$0.17\frac{c}{d}$ : rupture par éclatement du béton 1 : rupture par arrachement de l'acier
[Murcia-Delso et Benson Shing, 2015]	0.07d 1 : rupture par arrachement de l'acier avec des bonnes conditions d'adhérence
[Fib, 2010]	1.8 : rupture par arrachement de l'acier avec toutes les autres conditions d'adhérence Pas de valeur proposée pour une rupture par éclatement du béton

TABLEAU 3.11 – Expressions empiriques de  $g_1$ .

Il est recommandé d'attribuer la valeur de l'espacement  $c_{clear}$  entre les crénelures de l'acier au paramètre  $g_3$  de la loi d'adhérence dans [Murcia-Delso et Benson Shing, 2015] et [Harajli,

1994]. La même valeur est recommandée dans [Fib, 2010] pour une rupture par arrachement de l'acier. Pourtant, une valeur de  $1.2g_1$  est proposée dans [Fib, 2010] pour une rupture par éclatement du béton quand le béton est non confiné. Avec un confinement du à la présence des cadres, cette valeur est remplacée par  $0.5c_{clear}$ .

Pour le calcul de  $\tau_1$  et  $g_1$ , les recommandations de [Torre-Casanova, 2012] semblent être un choix pratique puisque des valeurs distinctes sont données pour les deux mécanismes de défaillance. Ces recommandations sont de plus simples comparées aux recommandations de [Fib, 2010]. En revanche, aucune indication n'est donnée dans [Torre-Casanova, 2012] pour créer une dépendance de la valeur du glissement  $g_3$  au mécanisme de rupture, ce qui doit être le cas selon [Lemnitzer *et al.*, 2009] (voir figure 2.12). Les recommandations de [Fib, 2010] sont donc adoptées pour le calcul de  $g_3$ . Ces choix donnent une méthode simple d'identification des paramètres de la loi d'adhérence qui dépendent du mécanisme de défaillance. La prédiction du mécanisme de rupture le plus susceptible de se produire peut être effectuée en utilisant le critère de [Torre-Casanova, 2012] (équation (3.39)). Pour l'essai de bord de poutre étudié, on s'attend à une rupture par éclatement du béton. Le tableau 3.12 résume les paramètres de la loi d'adhérence adoptés.

$$\begin{cases} \frac{c}{d} < 0.39\frac{f_c}{f_t} - 0.24 : \text{rupture par éclatement du béton} \\ \frac{c}{d} \geq 0.39\frac{f_c}{f_t} - 0.24 : \text{rupture par arrachement de l'acier} \end{cases} \quad (3.39)$$

Paramètre	Valeur	Unité
$\tau_1$	10.7	MPa
$g_1$	0.425	mm
$g_3$	5	mm

TABLEAU 3.12 – Paramètres de la loi d'adhérence utilisés pour la modélisation du test de bord de poutre.

### 3.7.3.2.2 Maillage

La figure 3.41(a) montre le maillage du béton. La figure 3.41(b) détaille la configuration des éléments de barres d'acier et celle des macro-éléments qui relient l'acier et le béton. Aucune discrétisation interne n'est effectuée pour les macro-éléments ; chaque macro-élément est composé d'un seul élément biphasique. Par souci de simplicité, la partie A3A4 de la barre d'acier tirée (voir figure 3.40) n'est pas explicitement modélisée dans la simulation numérique. Il est important de noter que les noeuds d'acier et d'interface des macro-éléments ont la même position dans la configuration initiale (même si des noeuds distinctes sont illustrées dans les figures 3.41(b) et 3.42 pour la représentation du modèle). Une épaisseur de 8 mm est ici associée à la zone d'interface des macro-éléments. Des maillages coïncidents sont choisis pour l'acier et le béton. Les déplacements des barres d'acier, à l'exception de la barre tirée, sont égaux aux déplacements des noeuds de béton correspondants.

Les conditions aux limites indiquées dans la figure 3.39 sont appliquées. Les positions et les dimensions des surfaces de béton bloquées dans les directions  $x$  et  $z$  de la figure 3.39 ne sont pas précisées dans [Rex *et al.*, 2019]. Ces dimensions sont ici approximées comme le montre la figure 3.42.

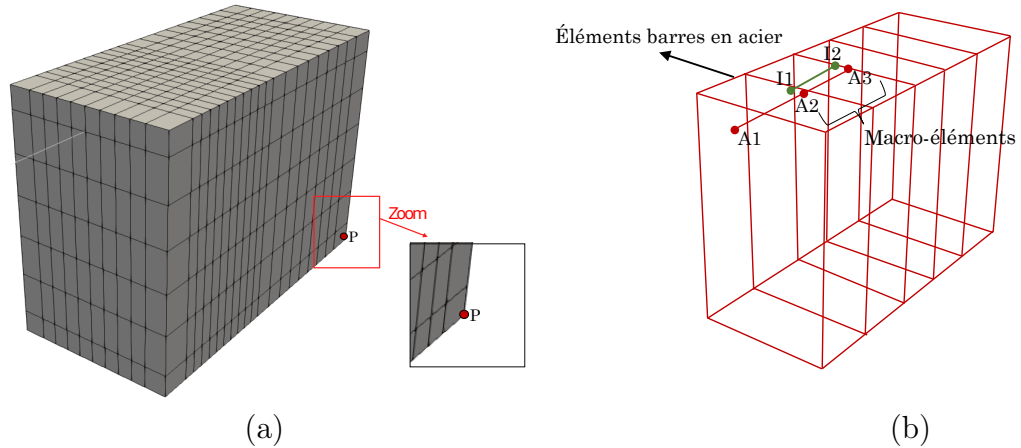


FIGURE 3.41 – Maillage de l'exemple de test de bord de poutre (a) et configuration des barres d'acier et des macro-éléments dans ce maillage (b).

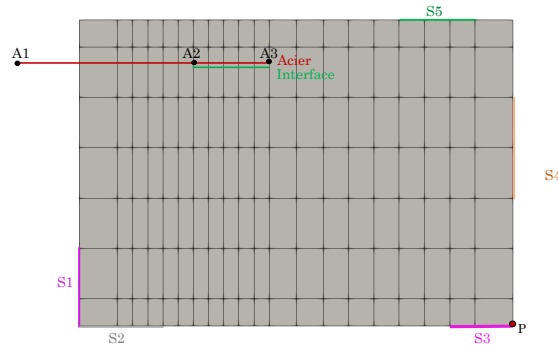


FIGURE 3.42 – Vue latérale du maillage.

Un élément barre d'acier est utilisé entre les nœuds d'acier A1 et A2. Les déplacements du nœud A1 et de l'ensemble des nœuds des macro-éléments sont bloqués selon  $y$  et  $z$ . Les déplacements longitudinaux de la partie d'interface des macro-éléments sont imposés égaux aux déplacements des nœuds de béton correspondants, tandis que la partie d'acier des macro-éléments est libre de glisser par rapport à partie d'interface.

Une condition aux limites supplémentaire est imposée au nœud de béton P indiqué dans les figures 3.41(a) et 3.42. Le déplacement de ce nœud dans la direction  $y$  est bloqué. Cette condition est ajoutée pour empêcher le déplacement de l'ensemble de l'échantillon de béton dans la direction  $y$ .

### 3.7.3.2.3 Résultats

La figure 3.43 montre l'évolution des contraintes d'adhérence en fonction du glissement acier-béton. Cette évolution est comparée à la marge de courbes expérimentales. Le glissement entre l'acier et le béton est calculé à la position longitudinale du nœud A3.

La distribution de l'endommagement dans le volume de béton au dernier de temps pour lequel la valeur de glissement est égale à 5 mm est illustrée dans la figure 3.44.

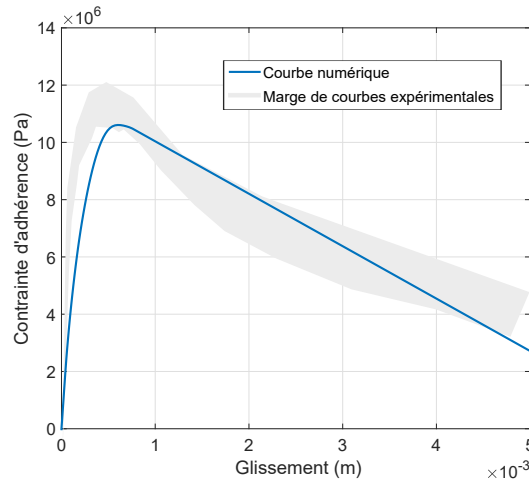


FIGURE 3.43 – Évolutions numérique et expérimentale des contraintes d’adhérence en fonction du glissement acier-béton.

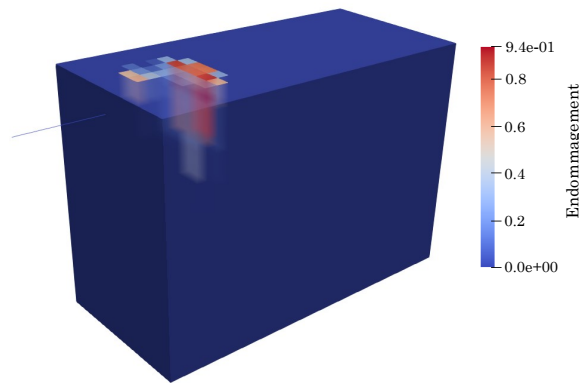


FIGURE 3.44 – Cartographie d’endommagement du béton.

#### 3.7.3.2.4 Discussion

La figure 3.43 montre que l’approche adoptée pour identifier les paramètres de la loi d’adhérence donne un accord satisfaisant avec les résultats expérimentaux. L’endommagement atteint la face supérieure de béton (figure 3.44) similairement au comportement expérimental de l’essai de bord de poutre. La figure 3.45 compare la fissuration expérimentale vue au niveau de la face supérieure de béton à la distribution numérique d’endommagement sur cette face. Cette figure montre que la position du point A où les fissures superficielles de différentes directions sont initiées est numériquement bien estimée. Les fissures expérimentales longitudinales et inclinées à 45 degrés sont numériquement représentées par le champ d’endommagement. Cependant, la distribution numérique d’endommagement ne représente pas la totalité des fissures expérimentales. Cela est dû au fait que dans la simulation numérique, les non-linéarités de l’essai de bord de poutre sont distribuées au niveau de l’interface par les macro-éléments (expression nonlinéaire de la loi d’adhérence) et dans les éléments de béton sous forme de champ de d’endommagement. Autrement dit, l’endommagement du béton ne représente pas l’ensemble des non-linéarités du modèle numérique. De plus, une meilleure représentation numérique de la rupture expérimentale par éclatement du béton est possible en incorporant des contraintes d’adhérence dans la direction normale par rapport



à l'acier au sein de la formulation de macro-élément. Cela est envisageable en remplaçant les éléments barres à trois noeuds constituant la version actuelle de macro-élément par des éléments poutres.

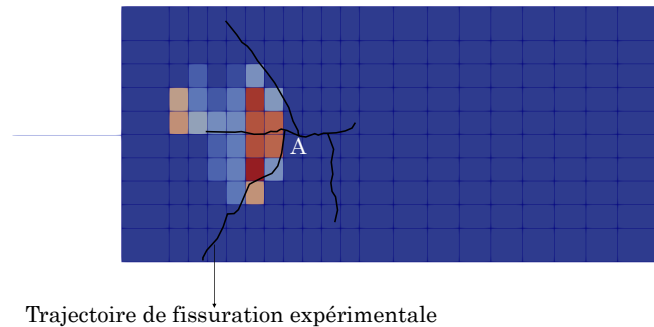


FIGURE 3.45 – Cartographie d'endommagement comparée à la fissuration expérimentale au niveau de la face supérieure du béton.

Finalement, il est possible que le choix de la loi d'endommagement à adopter pour le béton, ainsi que le calibrage des paramètres de la loi choisie, jouent un rôle dans l'amélioration de la concordance entre les résultats numériques et expérimentales. Cet exemple d'application se focalise pourtant sur le choix des paramètres de la loi d'adhérence acier-béton. Seule la loi d'endommagement de Mazars de l'annexe A est testée pour le béton.

### 3.7.4 Exemple de poutre en flexion 3 points

Afin d'évaluer la performance du modèle de macro-élément dans le cadre d'un élément structural en flexion, la poutre en flexion trois points de [Ragueneau, 1999] est modélisée.

Dans un premier temps, l'essai de flexion trois points est modélisé en attribuant un comportement nonlinéaire à l'acier et à l'interface et un comportement linéaire au béton. Dans un second temps, un comportement nonlinéaire endommageant est attribué au béton. Le but est de comparer la distribution du glissement le long de la poutre pour les deux choix de modélisation.

#### 3.7.4.1 Description de l'essai

Il s'agit d'une poutre en béton armé d'une longueur totale de 1.5 m et d'une portée de 1.4 m. La poutre est d'une section transversale de  $0.15 \times 0.22$  m. Deux barres d'acier longitudinales de diamètre 14 mm chacune sont positionnées dans la zone tendue de la poutre. Ces deux armatures sont ancrées au béton à leurs extrémités. Deux barres longitudinales de diamètre 8 mm chacune sont placées dans la zone comprimée de la poutre. Des cadres de diamètre 6 mm relient les barres longitudinales le long de la poutre. La géométrie de l'essai de [Ragueneau, 1999] est présentée dans la figure 3.46.

#### 3.7.4.2 Modélisation avec un comportement linéaire de béton

À cause de la double symétrie de la poutre, un quart de la géométrie est modélisé.

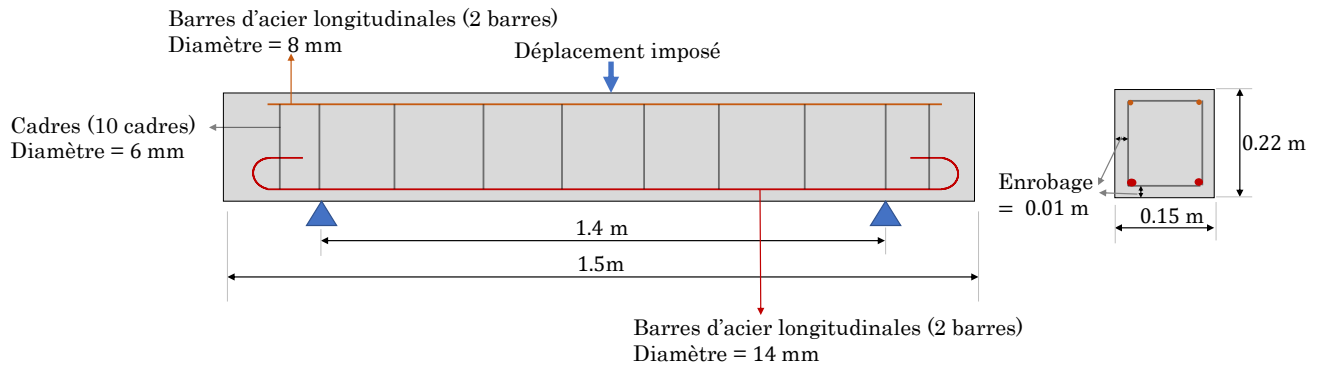


FIGURE 3.46 – Exemple de poutre en flexion 3 points étudié [Ragueneau, 1999].

### 3.7.4.2.1 Propriétés des matériaux

Pour la modélisation avec un comportement linéaire de béton, ce comportement est caractérisé par les propriétés du tableau 3.13.

Paramètre	Description	Valeur	Unité
$E_c$	Module d'Young	28	GPa
$\nu_c$	Coefficient de poisson	0.22	-

TABLEAU 3.13 – Paramètres de béton pour la modélisation de l'essai de poutre en flexion trois points avec un comportement linéaire de béton.

La loi d'adhérence de [Murcia-Delso *et al.*, 2011] est utilisée avec les paramètres résumés dans le tableau 3.14.

Paramètre	Valeur	Unité
$\tau_1$	12.59	MPa
$g_1$	1	mm
$g_3$	8	mm

TABLEAU 3.14 – Paramètres de la loi d'adhérence pour la modélisation de l'essai de poutre en flexion trois points.

Un comportement élastique plastique à écrouissage linéaire est attribué à l'acier avec les paramètres du tableau 3.15.

Paramètre	Description	Valeur	Unité
$E_a$	Module d'Young	200	GPa
$f_y$	Limite élastique	500	MPa
$E_h$	Pente d'écrouissage	4000	MPa

TABLEAU 3.15 – Paramètres d'acier pour la modélisation de l'essai poutre en flexion trois points.

### 3.7.4.2.2 Maillage

Le maillage de la figure 3.47 est choisi pour le béton. Les choix d'adhérence parfaite acier-béton et d'adhérence imparfaite sont examinés. Pour le premier choix d'adhérence parfaite les maillages d'acier et de béton sont coïncidents. En conséquence, les déplacements des nœuds d'acier sont automatiquement imposés égaux aux déplacements des nœuds de béton. Pour le deuxième choix d'adhérence imparfaite, des macro-éléments sont utilisés pour établir ce comportement non linéaire d'interface. La partie interface des macro-éléments possède le même déplacement que celui des nœuds de béton dans toutes les directions. Pour la partie acier, elle a les mêmes déplacements que le béton dans les directions normales (via des relations cinématiques) mais pas dans la direction longitudinale (ici c'est le long de l'axe des  $x$ ). Le long de cette direction longitudinale, l'acier peut glisser par rapport à l'interface, l'interface étant parfaitement accrochée au béton. Au total, 16 macro-éléments sont utilisés. Chaque macro-élément est discrétisé en 10 éléments biphasiques chacun.

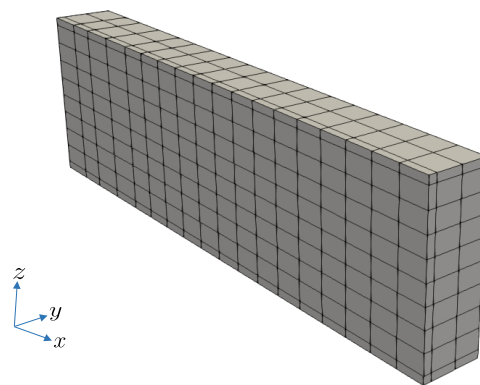


FIGURE 3.47 – Maillage de béton pour l'exemple de poutre en flexion trois points.

La figure 3.48 montre la configuration des barres d'acier et des macro-éléments. Pour le choix d'adhérence parfaite, les macro-éléments sont remplacés par des barres d'acier.

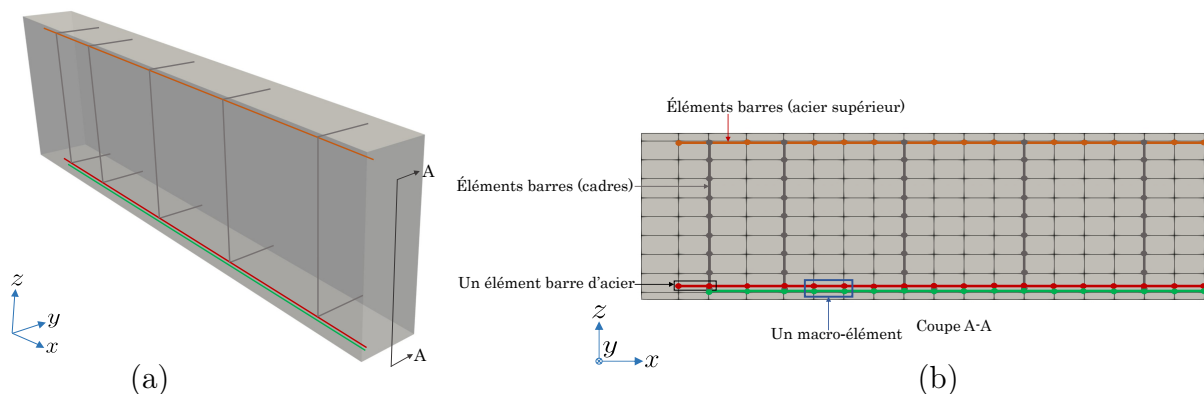


FIGURE 3.48 – Configuration des éléments d'acier et des macro-éléments du modèle de poutre en flexion trois points dans le volume 3D du béton (a) et au niveau d'une coupe A-A dans ce volume (b).

La figure 3.49 montre les conditions aux limites appliquées au volume de béton. Les conditions imposées aux surfaces S1 et S2 de cette figure établissent les conditions de double

symétrie de la poutre.

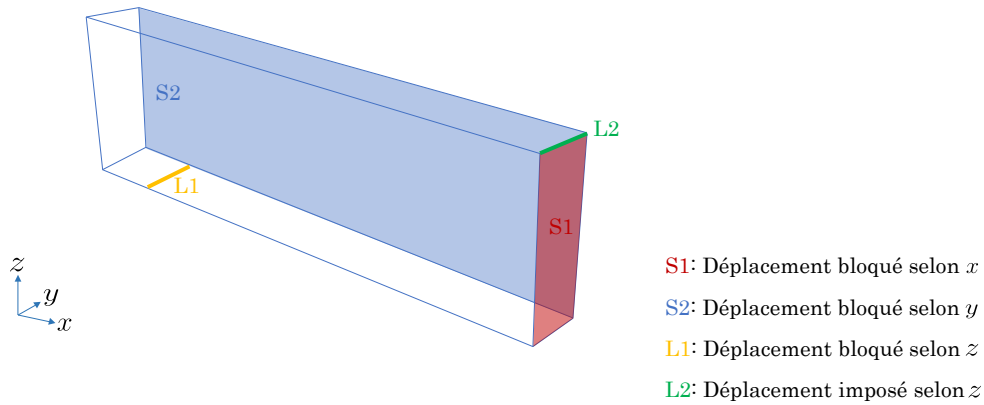


FIGURE 3.49 – Conditions aux limites appliquées au béton.

Les conditions aux limites imposées aux éléments d’acier et aux macro-éléments sont illustrées dans la figure 3.50 pour les cas d’adhérence parfaite et imparfaite. L’extrémité de la barre d’acier inférieure ancrée au béton est représentée par une imposition d’un déplacement du noeud externe de cette barre égal au déplacement de béton dans toutes les directions (figure 3.50 (b)). Les noeuds d’acier et d’interface appartenant aux surfaces S1 et S2 de la figure 3.49 ont les mêmes conditions aux limites imposées à ces surfaces.

Il est à noter qu’avec le choix de macro-éléments des éléments d’acier parfaitement ancrés au béton sont toujours utilisés pour les barres d’acier supérieures de la poutre et pour les cadres. Une fissuration initiée dans les zones tendues de la poutre est attendue. Pour cela, des macro-éléments sont utilisés au niveau de l’acier inférieur de cette poutre. Pour le choix de modélisation de béton linéaire, une épaisseur de  $0.08d$  est associée à la partie interface des macro-éléments,  $d$  étant le diamètre de la barre longitudinale inférieure.

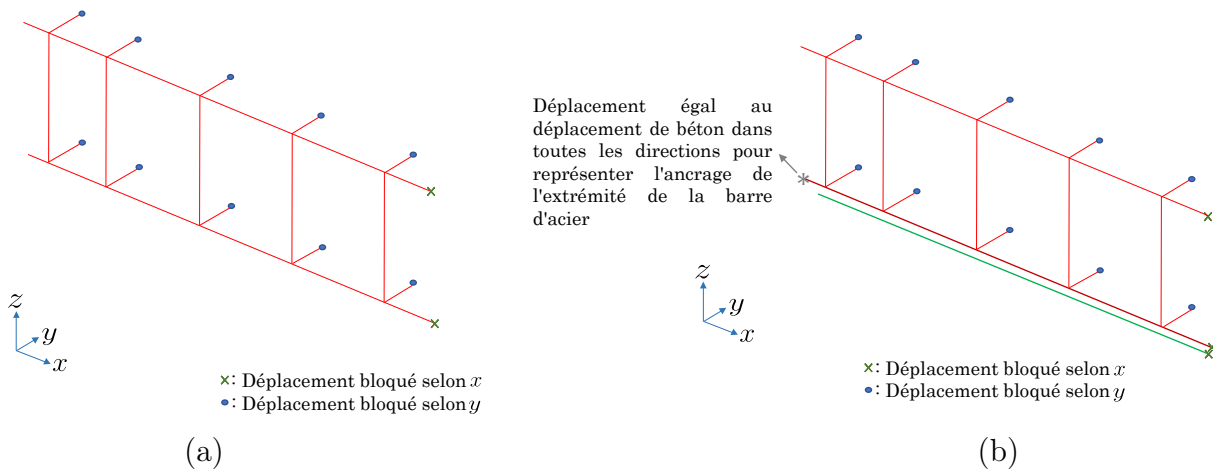


FIGURE 3.50 – Conditions aux limites appliquées aux éléments d’acier et aux macro-éléments pour les choix d’adhérence parfaite (a) et imparfaite avec des macro-éléments (b).

### 3.7.4.2.3 Résultats

La figure 3.51 montre les courbes de déplacement imposé et de réaction de ce premier modèle de poutre avec un comportement linéaire de béton. Les courbes de réactions avec les choix d'adhérence parfaite et imparfaite via les macro-éléments sont presque superposées (la courbe avec une adhérence imparfaite est légèrement plus atténuée avec un écart de 0.1 % par rapport à la courbe d'adhérence parfaite).

La figure 3.52 montre les courbes de contraintes-déformations des parties d'acier des macro-éléments pour la modélisation d'interface imparfaite. La figure 3.53 montre la distribution de la valeur de la contrainte d'acier des parties d'acier des macro-éléments selon leur position longitudinale, pour les différents pas de chargement. Les macro-éléments sont numérotés de 1 à 16 selon leur position longitudinale.

Le comportement nonlinéaire de l'interface est caractérisé par les valeurs de glissement acier-béton et de contraintes d'adhérence.

Lors de la résolution, les déplacements des noeuds externes d'acier et d'interface des macro-éléments sont calculés par l'algorithme de résolution global. Les déplacements des noeuds d'acier et d'interface internes de la discrétisation des macro-éléments en éléments biphasiques sont calculés par l'algorithme de résolution local. Pour le calcul du vecteur de forces internes des éléments biphasique (équation (3.29)), le glissement interface-acier ( $y_i - y_s$ ) et ensuite la contrainte d'adhérence sont calculés aux points de gauss des macro-éléments. La figure 3.54 montre les courbes de contraintes d'adhérence et de glissement selon la position longitudinale des macro-éléments. Chaque macro-élément étant discrétisé en 10 éléments biphasiques, une valeur moyenne de contrainte d'adhérence par macro-élément est représentée au centre de chaque macro-élément dans la figure 3.54(a). Les valeurs de glissement de la figure 3.54(b) sont calculées et représentées au niveau des noeuds externes des macro-éléments (soustraction des déplacements des noeuds externes d'acier et ceux des noeuds externes d'interface des macro-éléments).

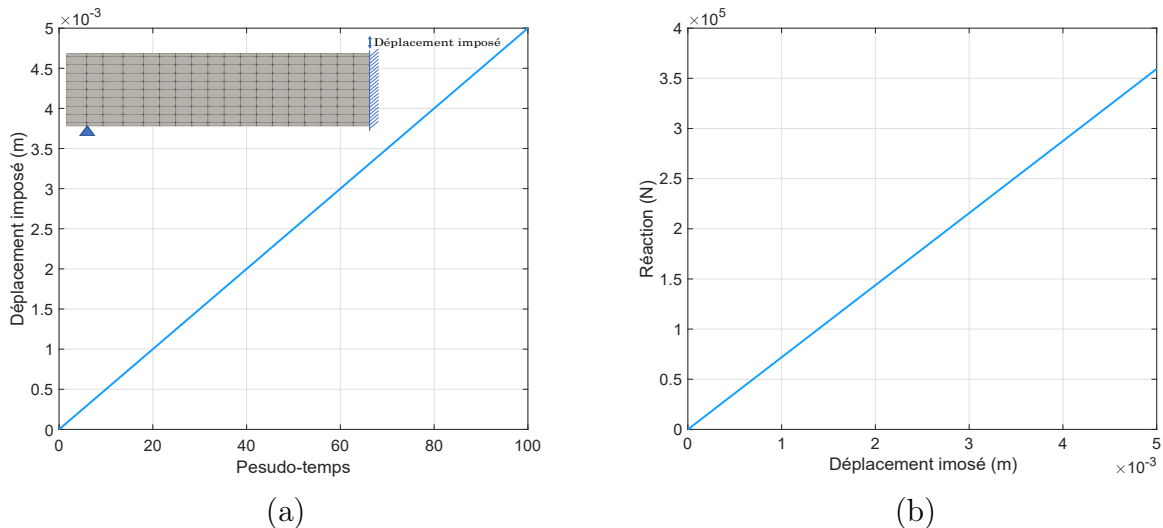


FIGURE 3.51 – Courbes de déplacement imposé (a) et de réaction (b) de l'essai de poutre en flexion trois points avec un comportement linéaire de béton.

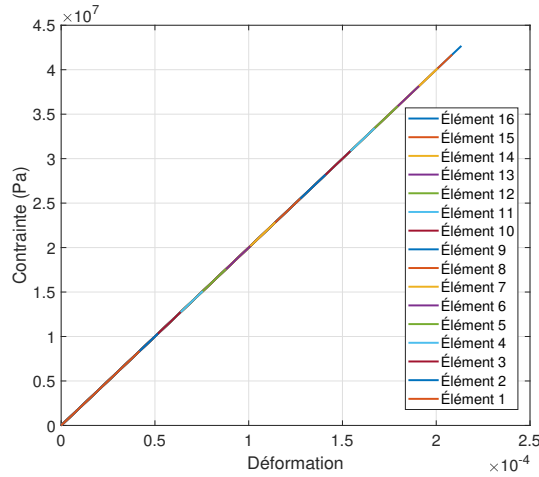


FIGURE 3.52 – Courbes de contraintes-déformations des parties d’acier des macro-éléments.

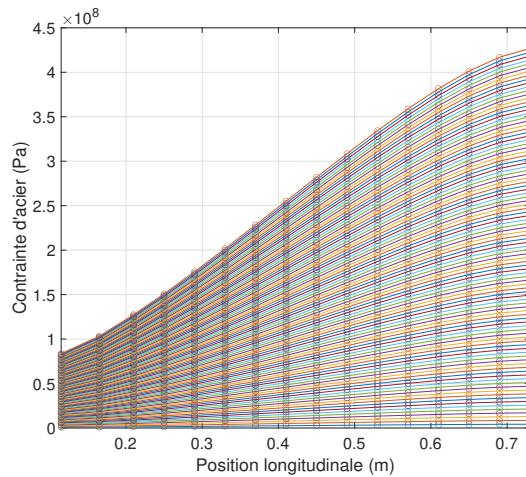


FIGURE 3.53 – Courbes des contraintes des parties d’acier des macro-éléments en fonction de leur position longitudinale pour les différents pas de temps de la résolution.

#### 3.7.4.2.4 Discussion

Le moment étant maximal au milieu de la longueur de la poutre, l’élément d’acier le plus proche du milieu de la poutre est le plus sollicité, comme le montre les figures 3.52 et 3.53. Le glissement au milieu de la poutre est nul à cause de la symétrie de géométrie et de chargement (figure 3.54 (b)). Le glissement est maximale pour une position longitudinale de 0.4 m, avec une valeur de  $5.6 \times 10^{-5}$  m. Cette valeur étant très petite, la courbes globale de réaction (figure 3.51 (b)) n’est pas affectée par la prise en compte du comportement de l’interface.

#### 3.7.4.3 Modélisation avec un comportement nonlinéaire de béton

L’endommagement du béton est pris en compte dans cette modélisation.

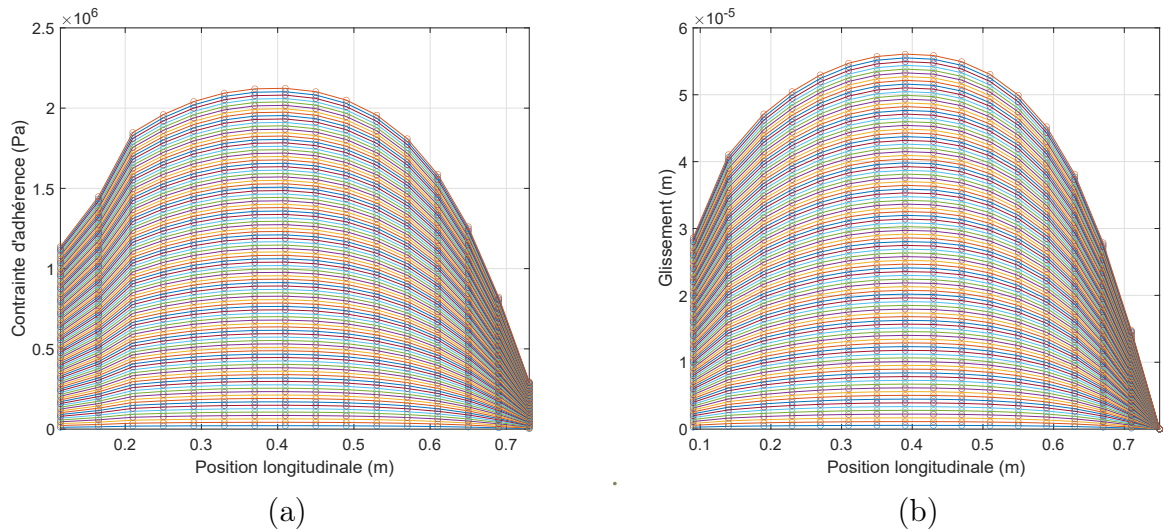


FIGURE 3.54 – Courbes de contraintes d’adhérence (a) et de glissement acier-béton (b) en fonction de la position longitudinale.

#### 3.7.4.3.1 Propriétés des matériaux

La loi d’adhérence de l’interface et la loi constitutive de l’acier sont identiques aux lois utilisées pour les modélisation de béton linéaire (tableaux 3.14 et 3.15).

La loi de comportement d’endommagement de Mazars [Mazars, 1984] régularisée en énergie selon Hillerborg [Hillerborg *et al.*, 1976] décrite dans l’annexe A est utilisée.

Les propriétés linéaires de béton ont les mêmes valeurs que celles utilisées pour la modélisation avec un comportement linéaire de béton (tableau 3.13). Des paramètres supplémentaires sont définis pour caractériser la loi de Mazars. Ces paramètres sont présentés dans le tableau 3.16.

Paramètre	Description	Valeur	Unité
$f_t$	Résistance à la traction	2.7	MPa
$\varepsilon_{d0}$	Déformation seuil	$\frac{f_t}{E_c} = 9.6429 \times 10^{-5}$	-
$A_t$	Paramètre de la loi locale de Mazars	Pas utilisé pour la loi régularisée	-
$B_t$	Paramètre de la loi de Mazars	Régularisé (équation A.7)	-
$A_c$	Paramètre de la loi de Mazars	1.2	-
$B_c$	Paramètre de la loi de Mazars	700	-
$\beta$	Paramètre de la loi de Mazars	1.06	-
$G_f$	Énergie de fissuration	150	N/m

TABLEAU 3.16 – Paramètres de la loi de Mazars.

#### 3.7.4.3.2 Maillage

Le maillage reste inchangé par rapport aux modélisations avec un comportement linéaire de béton (paragraphe 3.7.4.2.2).

#### 3.7.4.3.3 Résultats

La figure 3.55 montre les courbes de réaction avec les choix d’adhérence parfaite et imparfaite comparées à la courbe de réaction expérimentale. Différentes valeurs d’épaisseur

d'interface pour la modélisation par macro-éléments sont testées.

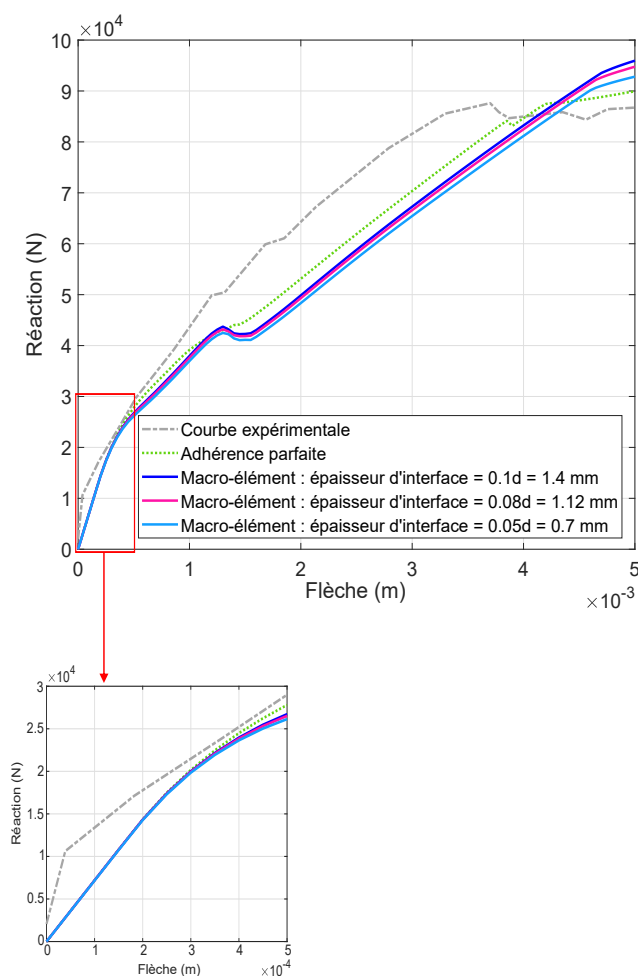


FIGURE 3.55 – Courbes de réaction avec des choix d’adhérence parfaite et imparfaite comparées à la courbe expérimentale.

La figure 3.56 montre les courbes contraintes-déformations des parties d’acier des macro-éléments, pour une modélisation avec une épaisseur d’interface égale à 1.12 mm. L’élément d’acier (au sein d’un macro-élément) le plus proche du centre de la poutre est le seul élément d’acier qui se plastifie. La distribution des contraintes d’acier le long de la position longitudinale des macro-éléments est illustrée dans la figure 3.57.

L’avantage de la modélisation de l’interface est qu’elle fournit une description fine du comportement local à l’interface entre l’acier et le béton. Avec cette modélisation, on a accès à des valeurs locales de glissement et de contraintes d’adhérence. Avec la même épaisseur d’interface de 1.12 mm, les courbes de la figure 3.58 décrivent la distribution des contraintes d’adhérence et du glissement acier-interface le long des macro-éléments pour les différents pas de chargement.

La cartographie d’endommagement dans le volume de béton est illustrée dans la figure 3.59. L’endommagement apparaît dans la zone centrale de béton où le moment de flexion est maximal. Il est initié dans la zone tendue et une propagation de l’endommagement des fibres inférieures vers les fibres supérieures de la poutre est ensuite réalisée.



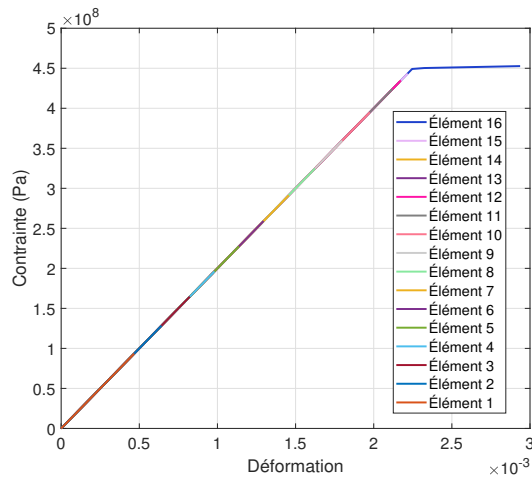


FIGURE 3.56 – Courbes de contraintes-déformations des parties d’acier des macro-éléments.

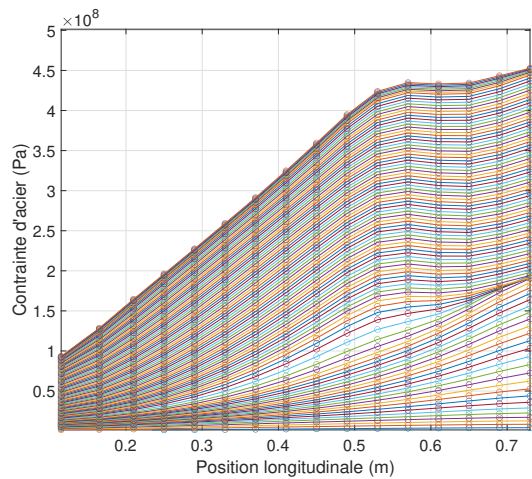


FIGURE 3.57 – Courbes de contraintes des parties d’acier des macro-éléments en fonction de leur position longitudinale pour les différents pas de temps de la résolution.

#### 3.7.4.3.4 Discussion

Les figures 3.56 et 3.58 montrent le bon comportement numérique de la formulation de macro-élément. En effet, ces courbes montrent la coexistence de deux types de non-linéarité incluses au sein du macro-élément ayant la position longitudinale le plus proche du milieu de la poutre : un comportement nonlinéaire d’interface, et un comportement élastique plastique de l’acier.

La cartographie d’endommagement du béton montre que deux fissures principales sont développées dans son volume : une fissure verticale au centre de la poutre, et une deuxième fissure qui s’initie verticalement et se propage inclinée à 45 degrés. La comparaison des figure 3.53 et 3.57 et celle des figures 3.54 et 3.58 montre que l’initiation des fissures dans le béton tout autour de l’acier est caractérisée par :

- une concentration des contraintes d’acier au niveau de l’élément de béton fissuré ;
- une discontinuité des valeurs de glissement aux extrémités de l’élément fissuré.

Cette caractérisation de la fissuration est montrée dans la figure 3.60.

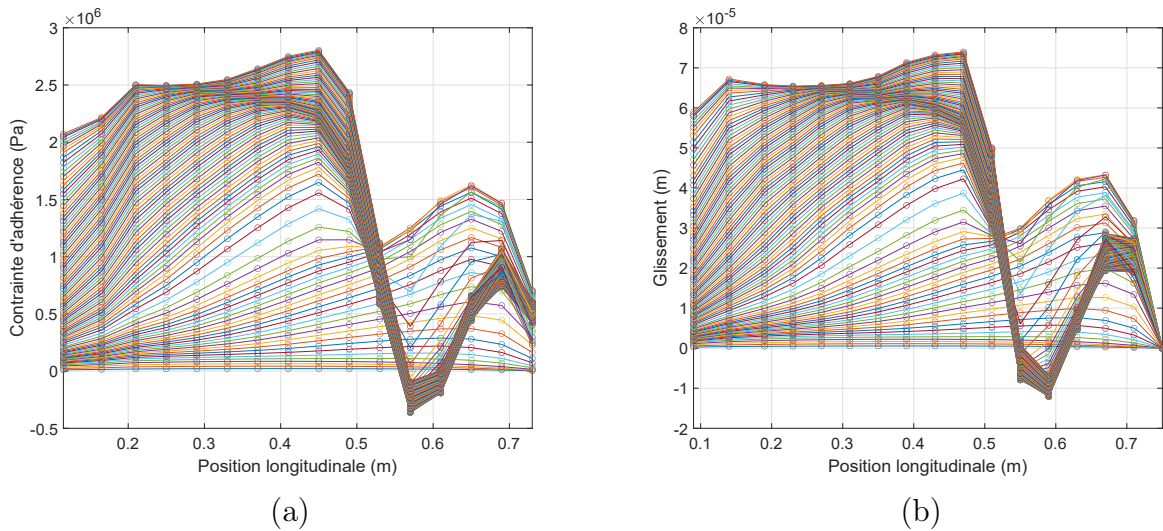


FIGURE 3.58 – Courbes de contraintes d’adhérence (a) et de glissement acier-béton (b) en fonction de la position longitudinale.

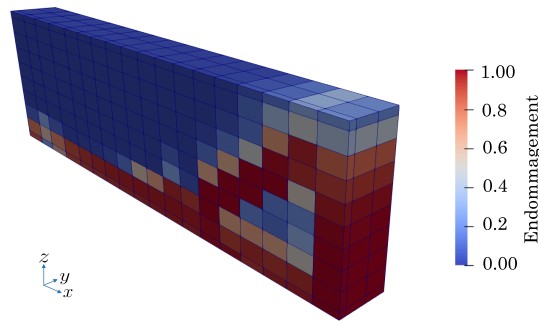


FIGURE 3.59 – Cartographie d’endommagement dans le volume de béton : modélisation de l’essai de flexion trois points avec un comportement nonlinéaire de béton et d’interface, avec une épaisseur d’interface de 1.12 mm.

Il est intéressant de réaliser une étude de sensibilité à la finesse du maillage pour étudier l’influence de ce paramètre sur le comportement de la poutre. Pour cela, les trois maillages de la figure 3.61 sont définis. Le maillage de taille moyenne est le maillage initial choisi (paragraphe 3.7.4.2.2).

La figure 3.62 montre les courbes de réaction associées aux différents maillages. Les courbes des maillages de tailles moyenne et fine sont très proches l’une de l’autre. La courbe du maillage grossier est légèrement plus rigide. Pourtant, les mêmes observations concernant la caractérisation locale de la fissuration sont issues des modélisations avec les différentes tailles de maillages (figures 3.63 et 3.64).

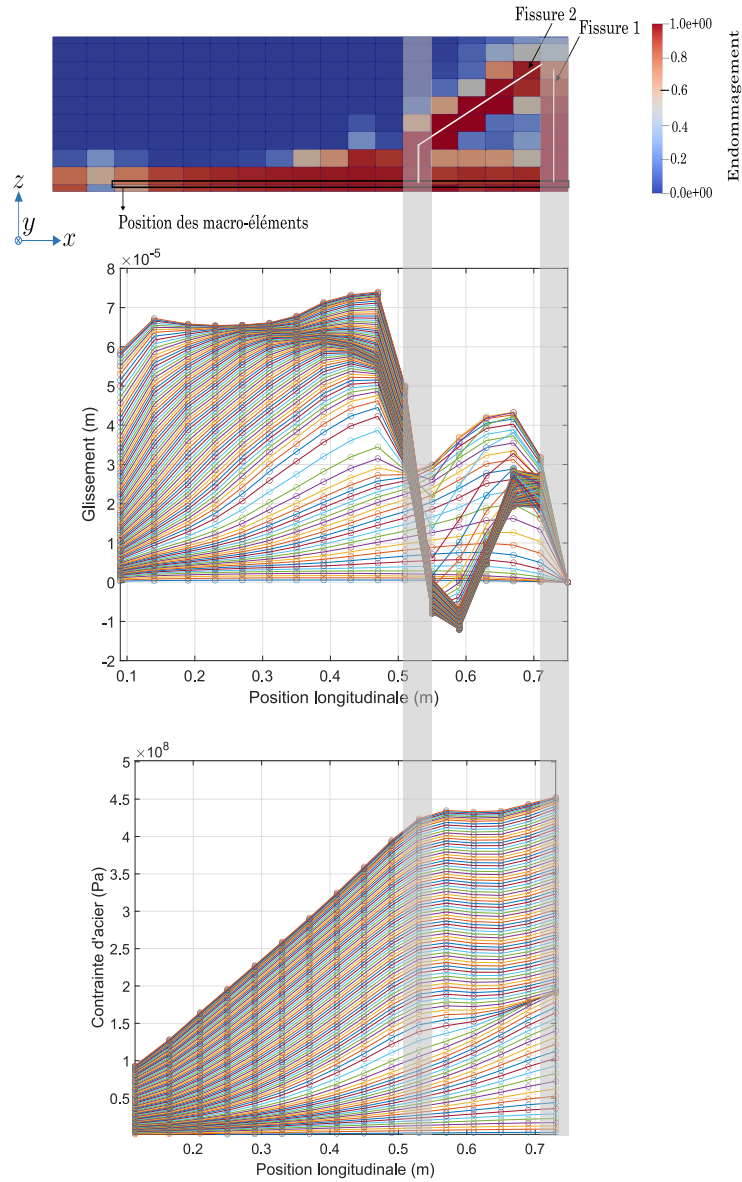


FIGURE 3.60 – Caractérisation locale de la fissuration du béton.

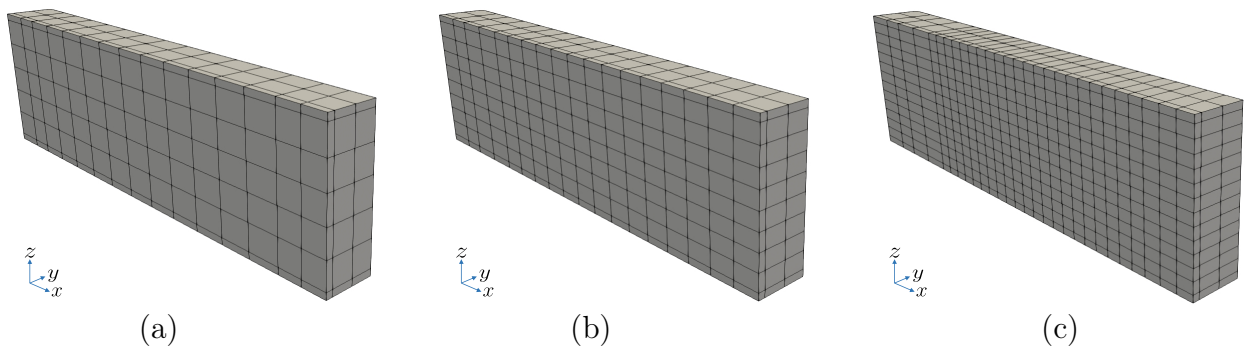


FIGURE 3.61 – Différents maillages testés : maillage grossier (a), maillage de taille moyenne (b), et maillage fin (c).

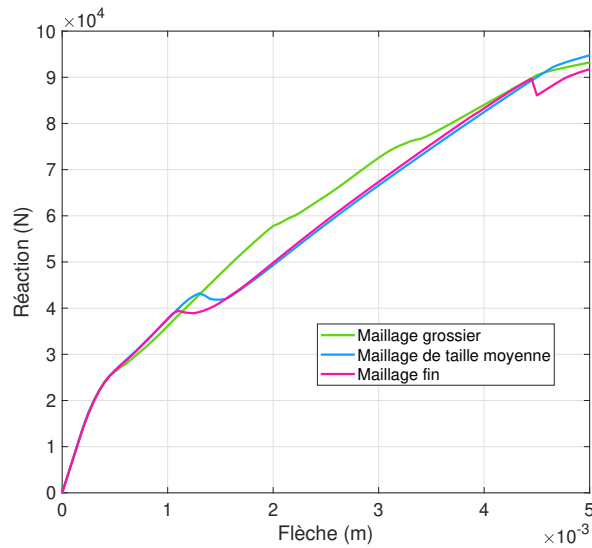


FIGURE 3.62 – Courbes de réaction associées aux différents maillages.

Il est indispensable de préciser que pour un comportement numérique optimal du modèle de macro-élément, il est intéressant d’initier la résolution à l’échelle locale avec une première estimation de la solution pour une loi constitutive linéaire d’acier. Cela est particulièrement un intérêt lorsqu’une loi constitutive nonlinéaire est accordée à la partie d’acier du macro-élément.

Une explication de cette astuce consiste à imaginer l’exemple de macro-élément de la figure 3.65. Les déplacements longitudinaux des noeuds de bord du macro-élément sont fournis par l’algorithme de résolution global et restent constants lors de l’algorithme local. Dans la configuration de la figure 3.65, les déplacements de ces noeuds de bord sont nuls pour la partie d’interface (déplacement des noeuds  $1i$  et  $7i$  de l’interface). Pour la partie d’acier, le déplacement du noeud de bord  $1a$  est nul et celui du noeud  $7a$  est égal à  $d$ . Pour une valeur de  $d$  positive, la partie d’acier du macro-élément est en traction.

La résolution locale consiste à chercher les valeurs des déplacements longitudinaux des noeuds internes (tous les noeuds du macro-élément à part les noeuds de bord). Lors de la première itération de la résolution locale, les valeurs de ces déplacements sont supposés avoir les valeurs trouvées lors du dernier pas de temps convergé. Les itérations locales consistent à chercher des incréments de déplacement ajoutés à cette estimation pour chercher une nouvelle estimation. En d’autres termes, l’estimation des déplacements longitudinaux internes est égale à l’estimation de l’itération précédente plus les incréments de déplacement de l’itération courante. On itère jusqu’à trouver les bonnes valeurs de déplacements internes pour lesquels l’équation d’équilibre interne (équation (3.33)) est vérifiée.

Il peut arriver que, pour la configuration de la figure 3.65 à titre d’exemple, pour une première itération d’un certain pas de temps, la valeur du déplacement imposé  $d$  est mise à jour par l’algorithme global. Mais pourtant, les déplacements des noeuds internes de la partie d’acier sont estimés égaux à ceux du pas de temps précédent. Pour cela, la déformation de l’élément  $6a-7a$  peut dépasser le seuil de déformation élastique, et cet élément va se plastifier alors qu’il ne devrait pas. Dans ce cas, une première itération avec un comportement linéaire

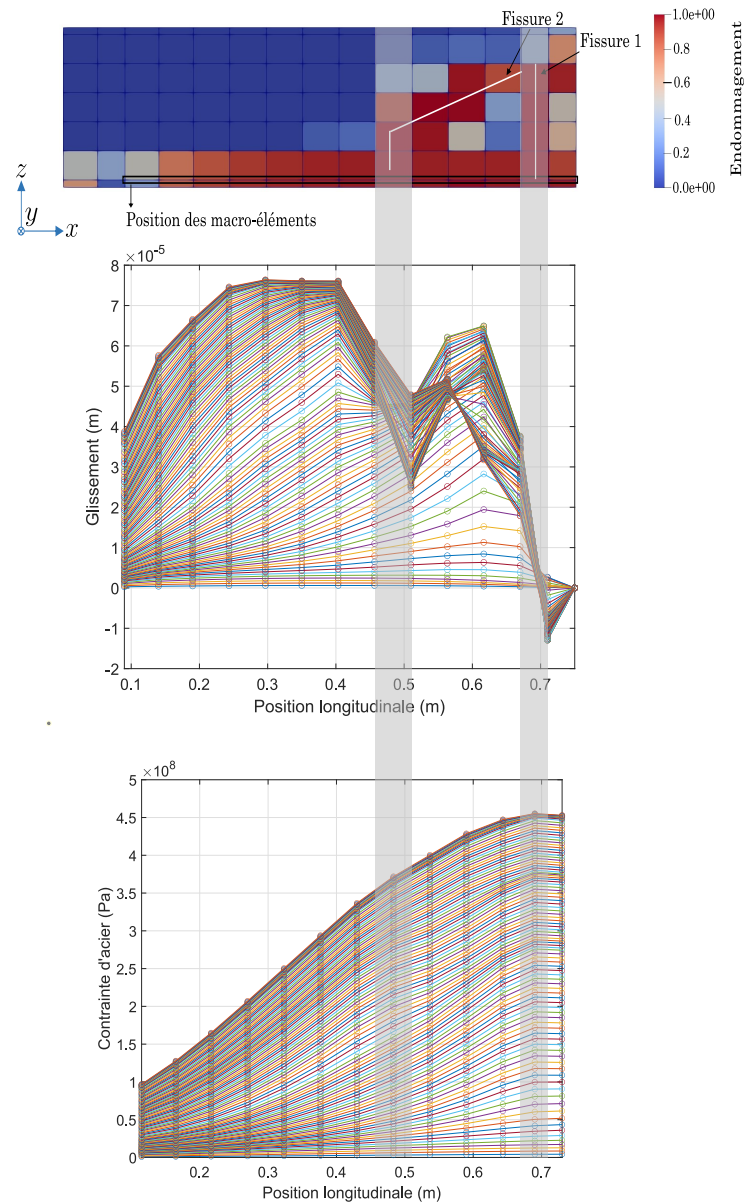


FIGURE 3.63 – Observations locales de la distribution du champ de glissement et de la contrainte d’acier le long de la position longitudinale due à l’endommagement de béton ; maillage grossier.

d’acier peut donner une première estimation des déplacements internes et diminuer l’écart entre les déplacements des noeuds 6a et 7a, et par la suite la déformation de l’élément 6a-7a. Cette astuce empêche de faire une fausse estimation que l’élément 6a-7a est déjà dans son comportement plastique. Si on a besoin de plus d’itérations locales pour la convergence, une loi nonlinéaire est affectée à l’acier dès la deuxième itération.

Finalement, il est important de noter que pour cet exemple de poutre en flexion 3 points, la prise en compte du comportement nonlinéaire de l’interface acier-béton n’affecte pas la distribution d’endommagement dans le béton. Ce résultat est logique car le béton se fissure dans la zone centrale de la longueur de la poutre. À cause de la symétrie de la poutre

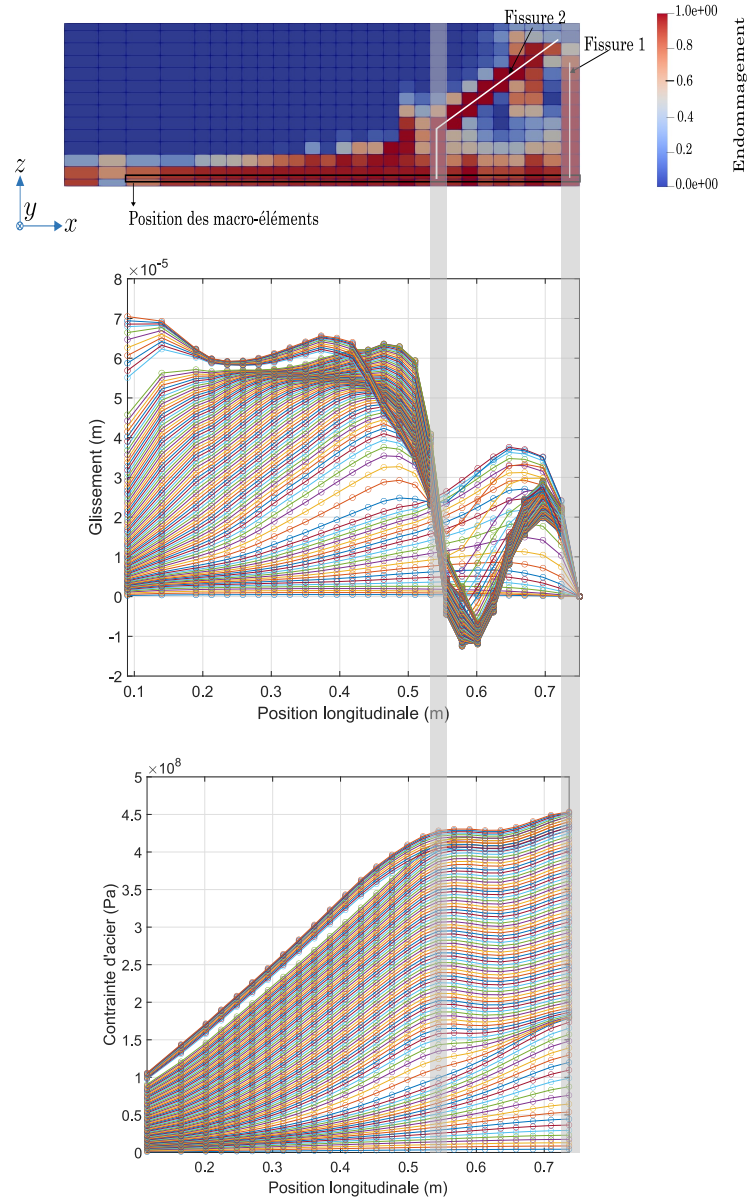


FIGURE 3.64 – Observations locales de la distribution du champ de glissement et de la contrainte d’acier le long de la position longitudinale due à l’endommagement de béton ; maillage fin.

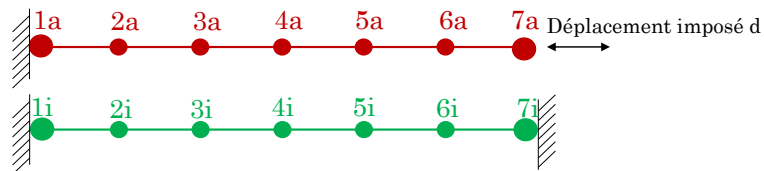


FIGURE 3.65 – Exemple de macro-élément.

étudiée, le noeud d'acier et le noeud d'interface ayant une position longitudinale au milieu de la longueur de la poutre ont un déplacement longitudinal bloqué. Le déplacement du béton est également bloqué à ce niveau (condition appliquée à la surface S1 de la figure 3.49). Autrement dit, l'acier est ancré au béton au lieu du moment de flexion maximal de la poutre, qui est l'endroit d'initiation de son endommagement. Une hypothèse d'adhérence parfaite y est donc systématiquement appliquée. En conséquence, la modélisation nonlinéaire du comportement de l'interface n'affecte pas la cartographie d'endommagement du béton.

Cet exemple valide pourtant la formulation de macro-élément dans le cadre d'un élément structural en flexion dans lequel l'endommagement du béton, la plastification de l'acier, et le comportement nonlinéaire de l'interface sont pris en compte.

### 3.7.5 Exemple de poutre en flexion 4 points

La formulation de macro-élément est utilisée pour modéliser un essai de flexion quatre points d'une poutre en béton armé réalisé dans [Gilbert et Nejadi, 2004].

#### 3.7.5.1 Description de l'essai

La configuration de l'essai considéré est décrite dans la figure 3.66.

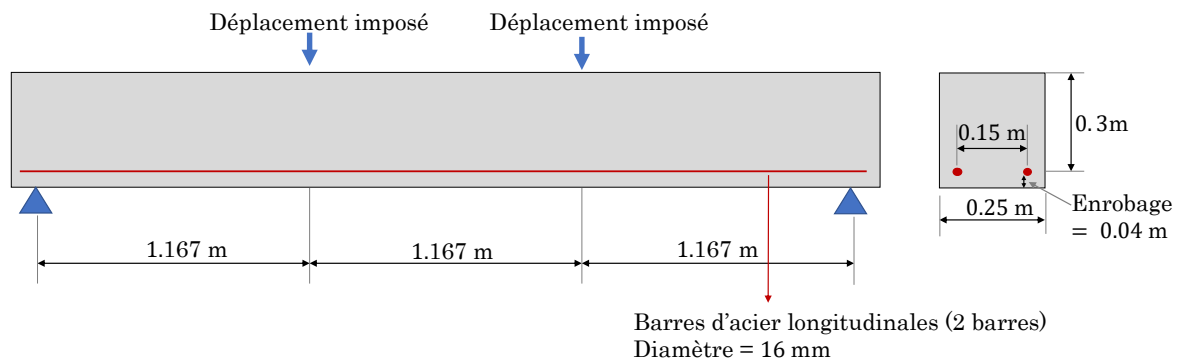


FIGURE 3.66 – Exemple de poutre en flexion 4 points étudié.

#### 3.7.5.2 Modélisation

Une hypothèse de contraintes planes est choisie pour la modélisation de l'essai.

##### 3.7.5.2.1 Propriétés des matériaux

Un comportement élastique plastique avec un écrouissage linéaire est considéré pour l'acier, avec les paramètres du tableau 3.17.

Paramètre	Description	Valeur	Unité
$E_a$	Module d'Young	210	GPa
$f_y$	Limite élastique	450	MPa
$E_h$	Module d'écrouissage	2100	MPa

TABLEAU 3.17 – Paramètres d'acier de l'essai de flexion quatre points.

Une loi révisée régularisée de Mazars est associées au béton, avec les paramètres du tableau 3.18. Cette loi est présentée dans l'annexe B.

Paramètre	Description	Valeur	Unité
$f_t$	Résistance à la traction	2.6	MPa
$f_c$	Résistance à la compression	56.9	MPa
$\varepsilon_{t0}$	Paramètres de la loi de Mazars révisée	$\frac{f_t}{E_c} = 1.1429 \times 10^{-4}$	-
$\varepsilon_{c0}$	Paramètres de la loi de Mazars révisée	$\frac{f_c}{E_c} = 1.9 \times 10^{-3}$	-
$A_t$	Paramètres de la loi de Mazars révisée	0.99	-
$B_t$	Paramètres de la loi de Mazars révisée	8000	-
$A_c$	Paramètres de la loi de Mazars révisée	1.2	-
$B_c$	Paramètres de la loi de Mazars révisée	400	-
$\beta$	Paramètres de la loi de Mazars	1.06	-

TABLEAU 3.18 – Paramètres de la loi de Mazars révisée pour l'exemple de poutre en flexion quatre points.

La loi d'interface de [Murcia-Delso *et al.*, 2011] est utilisée pour caractériser le comportement d'adhérence acier-béton. Afin de déterminer les paramètres de cette loi, on prédit tout d'abord le mode de ruine de l'interface selon le critère de [Torre-Casanova, 2012]. Avec ce critère, on calcule le rapport  $\frac{c}{d}$ ,  $c$  et  $d$  étant l'enrobage de béton et le diamètre d'acier, respectivement. Ce rapport est ensuite comparé à la valeur du calcul de  $0.39\frac{f_c}{f_t} - 0.24$ . Dans ce cas d'étude on a :

$$\frac{c}{d} < 0.39\frac{f_c}{f_t} - 0.24 : \text{donc ruine par éclatement du béton} \quad (3.40)$$

Étant donné que le mode de ruine prédit est par éclatement du béton, on estime les paramètres  $\tau_1$  et  $g_1$  de la loi d'adhérence qui représentent la contrainte d'adhérence maximale et le glissement correspondant comme suit :

$$g_1 = 0.17\frac{c}{d} = 0.17 \times 2.5 = 0.425 \text{ mm} \quad (3.41)$$

$$\tau_1 = ft \left( 1.53\frac{c}{d} + 0.36 \right) = 3.2(1.53 \times 2.5 + 0.36) = 13.392 \text{ Pa} \quad (3.42)$$

Le travail de [Torre-Casanova, 2012] ne donnant pas de précisions sur le calcul du troisième terme  $g_3$  définissant la loi d'adhérence, les recommandations de [Fib, 2010] sont suivies pour le calcul de ce paramètre.  $g_3$  est un paramètre de glissement la loi monotone de [Murcia-Delso *et al.*, 2011]. Pour un glissement plus grand que  $g_3$ , la contrainte d'adhérence est supposée constante, d'une valeur de  $0.25\tau_1$ . Pour un béton non confiné tout autour de l'acier (ce qui est le cas pour ce test qui ne comporte pas de cadres d'acier),  $g_3$  est estimé égal à  $1.2g_1$ , donc 0.51 mm.

### 3.7.5.2.2 Maillage

Le maillage et les conditions limites considérés sont détaillés dans la figure 3.67. Chaque macro-élément est composé d'un seul élément biphasique. La partie acier des macro-éléments est définie avec une section équivalente à la section des deux barres (de 16 mm de diamètre chacune) de la figure 3.66. Pourtant lors du calcul des forces internes des éléments biphasiques



(équation (3.29)), le périmètre d'acier est considéré égal à la somme des périmètres des deux barres d'acier de cette figure. Une épaisseur de 1.6 mm est associée à la partie interface des macro-éléments. Cette valeur d'épaisseur est égale à  $0.1d$ ,  $d$  étant le diamètre des barres d'acier de 16 mm (voir figure 3.66).

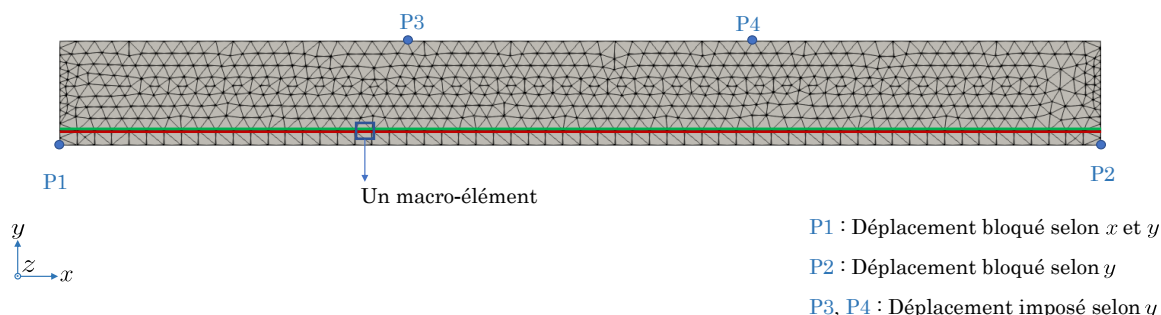


FIGURE 3.67 – Maillage et conditions limites de l'essai de flexion quatre points.

### 3.7.5.2.3 Résultats

La figure 3.68 montre les courbes de réaction avec une adhérence parfaite acier-béton et un comportement d'interface non linéaire, comparées à la courbe de réaction expérimentale. Il convient de souligner que pour modéliser une adhérence parfaite, les macro-éléments sont remplacés par des éléments d'acier parfaitement reliés au béton avec des relations cinématiques. Cette figure 3.68 montre que la considération du comportement non linéaire de l'interface n'apporte pas de véritable différence à la courbe de réaction. Néanmoins, la prise en compte du comportement non linéaire de l'interface fournit une meilleure représentation de la fissuration expérimentale du béton, comme le montre la figure 3.69. En effet, la prise en compte du comportement d'interface permet une meilleure localisation de l'endommagement tout autour de l'acier.

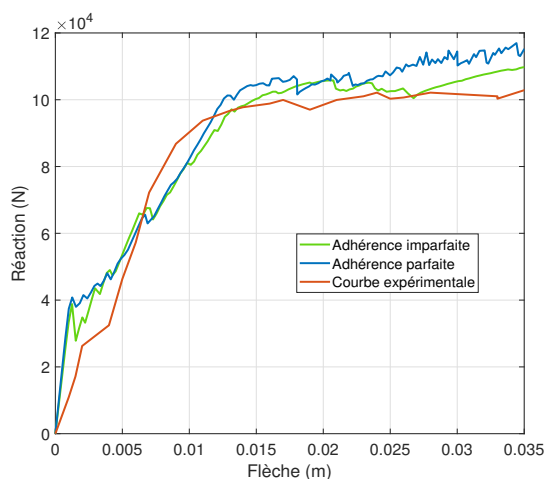


FIGURE 3.68 – Courbes de réaction de l'essai de flexion quatre points.

### 3.7.5.2.4 Discussion

La prise en compte du comportement de l'interface permet de localiser l'endommagement autour de l'acier, et donne une meilleure représentation de la fissuration expérimentale du

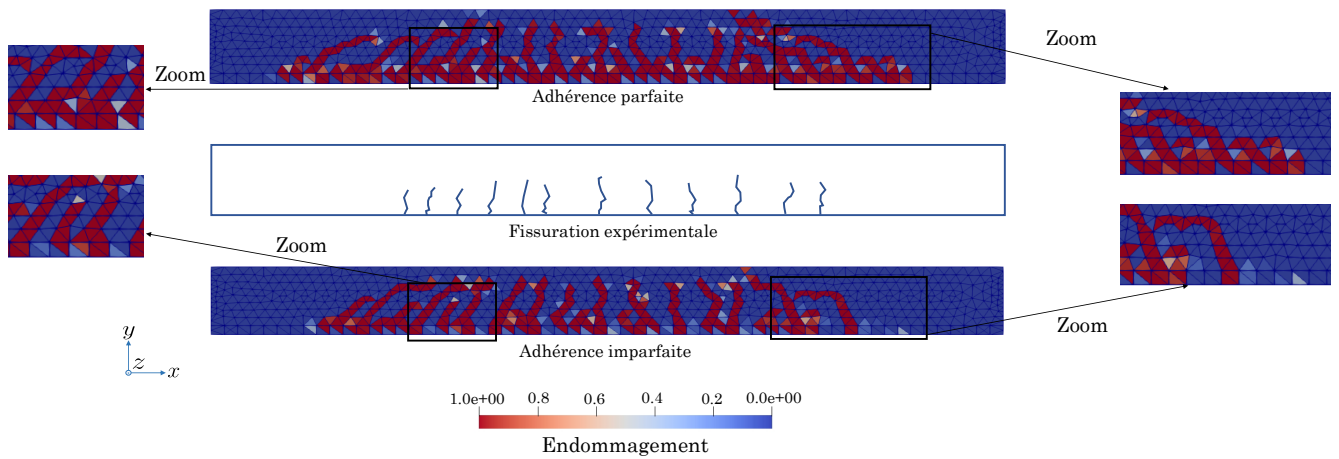


FIGURE 3.69 – Cartographies d’endommagement de l’essai de poutre en flexion quatre points avec des comportements d’interface parfaite et imparfaite, comparées à la fissuration expérimentale.

béton.

La description locale du processus de fissuration du béton est caractérisée par une concentration de contrainte d’acier, et une discontinuité du champ de glissement, comme le montre la figure 3.70 qui présente les valeurs des contraintes d’acier et celles du glissement acier-béton, pour les différents pas de temps de résolution. Les observations sur la description de la fissuration de la figure 3.70 sont similaires aux observations des figures 3.60, 3.63, et 3.64.

### 3.8 Conclusions

Dans ce chapitre, une approche de modélisation de l’interface acier-béton est proposée. Cette approche multi-échelle consiste à définir des macro-éléments capables de représenter le comportement de l’acier, d’une zone d’interface et des contraintes d’adhérence entre l’acier et l’interface. Le macro-élément est défini à l’échelle globale de la structure en béton armé étant un élément fini à 4 noeuds. Une échelle locale est définie afin de réaliser une discrétisation interne au niveau du macro-élément, indépendamment de la taille du maillage global. À cette échelle locale, chaque macro-élément est défini étant un assemblage de plusieurs éléments biphasiques. Chaque élément biphasique comporte deux éléments barres parallèles à trois noeuds chacun : un élément barre pour représenter l’interface et un autre pour décrire l’acier, avec des lois d’adhérence reliant les noeuds des deux éléments barres. Une résolution interne est effectuée au niveau de chaque macro-élément où les degrés de liberté internes sont condensés sur les quatre noeuds externes. Ce chapitre montre que la mise en œuvre de cette formulation de macro-élément n’a pas d’impact sur l’architecture principale d’un code aux éléments finis classique.

Des exemples numériques de modèles de pull-out 1D et 3D sont réalisés à l’aide de la formulation des macro-éléments. Ces modèles valident la formulation de macro-élément qui est capable de reproduire le comportement de l’interface pour des configurations de chargement monotones et cycliques.

Dans un deuxième exemple, les macro-éléments sont utilisés pour modéliser un essai de tirant. Cette application démontre la robustesse numérique du macro-élément par rapport

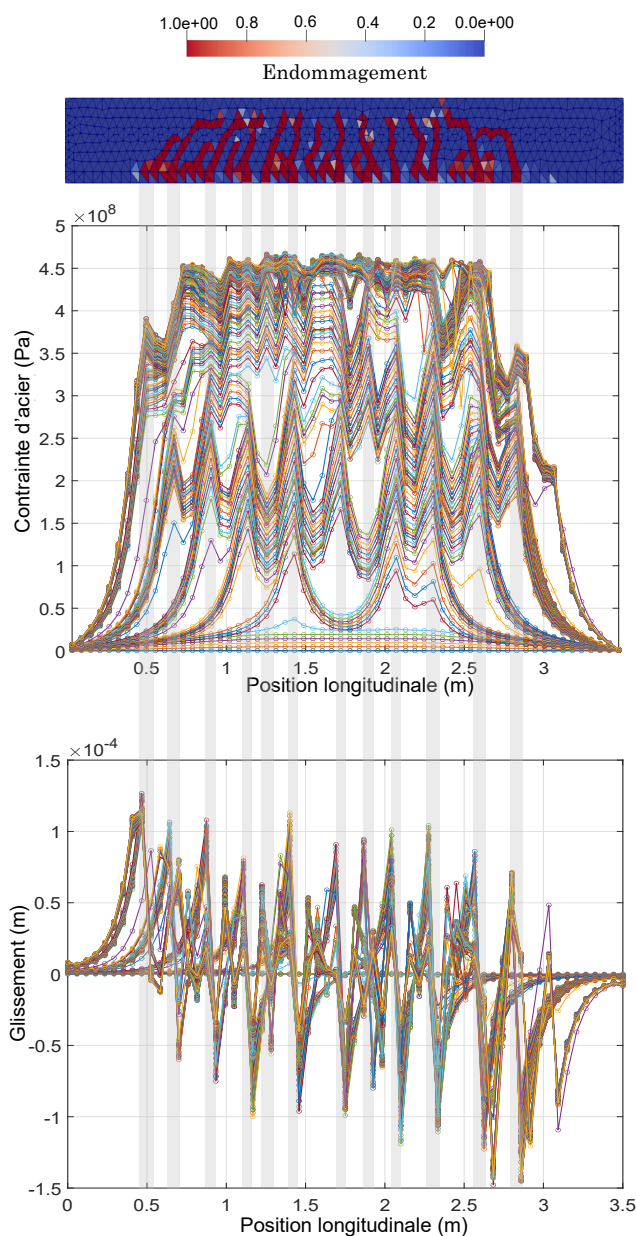


FIGURE 3.70 – Description locale de la fissuration de l'essai de flexion quatre points.

à des approches de modélisation de l'interface acier-béton de la littérature [Torre-Casanova, 2012] [Mang, 2015]. En effet, pour démontrer la robustesse numérique du modèle de macro-élément, le nombre d'itérations nécessaires à la convergence est comparé au nombre d'itérations pour la même modélisation avec ces modèles. Il a été démontré que la formulation de macro-élément est capable de réduire le nombre d'itérations de l'algorithme principal de Newton-Raphson. De plus, la prise en compte du comportement de l'interface dans la modélisation conduit à une meilleure représentation de la fissuration expérimentale de béton. En comparant les courbes numériques et expérimentales de la contrainte de l'acier par rapport à la déformation du béton, on peut déduire que le macro-élément peut reproduire le comportement expérimental du tirant.

Le modèle de macro-élément est ensuite utilisé pour reproduire le comportement d'un essai de bord de poutre. Les paramètres de la loi d'adhérence sont identifiés sur la base d'expressions empiriques proposées dans la littérature. Pour cet essai, un mode de ruine expérimental d'éclatement de l'enrobage de béton est observé. Ce mode de ruine est prédit avec ces expressions empiriques.

Le modèle est ensuite utilisé pour modéliser un essai de flexion trois points d'une poutre en béton armé. Cet exemple montre qu'une fissuration du béton au voisinage de l'acier est accompagnée d'une concentration de contrainte dans l'acier et d'une discontinuité au niveau de la valeur du glissement acier-béton. Un essai de flexion quatre points d'une poutre en béton armé est ensuite réalisé, fournissant les mêmes observations sur la caractérisation locale du comportement de fissuration du béton tout autour de l'acier.

En ce qui concerne la valeur d'épaisseur d'interface à adapter pour définir le maillage de macro-éléments, il est important de tirer une conclusion basée sur les exemples d'application de ce chapitre, et sur les recommandations proposées dans la littérature. Le tableau 3.19 résume plusieurs valeurs d'épaisseur d'interface utilisées et/ou recommandées dans le cadre de plusieurs modèles numériques d'interface de la littérature.

Référence	Épaisseur d'interface utilisée et/ou recommandée
[Reinhardt <i>et al.</i> , 1984]	$2d$
[Ramirez, 2005]	$0.01d$ : barres d'acier commerciales lisses $0.08d$ : barres d'acier commerciales nervurées
[Giry, 2011]	$d$

TABLEAU 3.19 – Valeurs d'épaisseur d'interface utilisées dans la littérature en fonction du diamètre des barres d'acier  $d$ .

Le tableau 3.19 montre qu'une grande variabilité est associée à la valeur d'épaisseur d'interface dans la littérature, et que cette valeur diffère d'un cadre de calcul à un autre.

En ce qui concerne la valeur à associer aux macro-éléments, les différents exemples de ce chapitre montrent qu'une valeur d'épaisseur d'interface comprise entre  $0.1d$  et  $0.5d$ ,  $d$  étant la valeur de diamètre d'acier, donne des résultats logiques et représentatifs. La variation de la rigidité de la structure dans le cadre de cette intervalle de valeurs reste faible en comparaison avec la variabilité expérimentale.

Dans ce travail de thèse, il est recommandé d'attribuer une valeur nominale de  $0.3d$  à l'épaisseur d'interface.

La version actuelle du modèle de macro-élément suppose que la phase de gaine d'interface, qui relie les macro-éléments aux éléments de béton, est d'une épaisseur suffisamment faible pour ne pas affecter de manière significative le comportement de la structure étudiée. Cette interface présente un comportement linéaire et ne dissipe pas de l'énergie. La dissipation d'énergie du béton est considérée dans la loi nonlinéaire de béton, et la dissipation d'énergie d'adhérence est incorporée dans la loi d'adhérence entre l'acier et la gaine d'interface. Il est pourtant toujours possible de tester une version du modèle de macro-élément dans laquelle une loi nonlinéaire est associée au comportement d'interface. Dans ce cas, un critère énergétique pourra être défini afin de déterminer son épaisseur.

Le modèle de macro-élément est objectif par rapport au nombre d'éléments biphasiques qui définissent un macro-élément. Ce nombre représente une finesse de maillage locale à choisir par l'utilisateur.

Le chapitre 4 présente en détail une méthodologie numérique originale basée sur une technique de projection cinématique. Cette méthodologie vise à imposer des relations cinématiques pour relier les macro-éléments aux éléments 2D et 3D de béton.

# Chapitre 4

## Méthode de projection cinématique

Soient A et B deux solides, et a et b deux parties de leurs bords externes. Dans ce chapitre, une approche originale est proposée afin de modéliser le comportement d'ensemble composé de A et B, avec des conditions de relations cinématiques reliant les degrés de liberté  $\mathbf{u}_a$  de a aux degrés de liberté  $\mathbf{u}_b$  de b, tel que  $\mathbf{u}_b = f(\mathbf{u}_a)$ . À cet effet, une technique de calcul basée sur une approche de projection cinématique est proposée. Il est possible de distinguer trois types de supports de contact a et b possibles entre A et B : un point, une ligne, ou une surface de contact

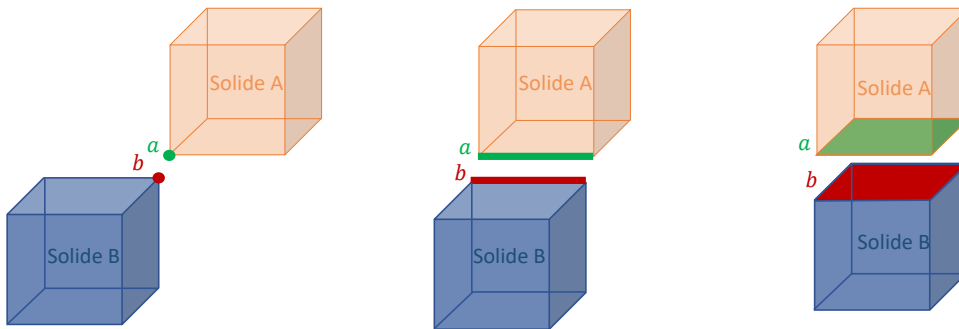


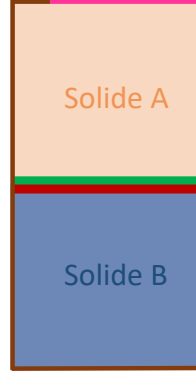
FIGURE 4.1 – Configuration de contact entre les deux solides A et B.

### 4.1 Problème aux limites

Soit  $\Omega$  l'union de A et B. A et B peuvent avoir des propriétés matérielles et géométriques identiques ou différentes.  $\partial\Omega$  est le bord de  $\Omega$ . Des forces de densité  $\mathbf{f}$  sont appliquées à  $\Omega$ .  $\partial\Omega$  est composé de deux parties complémentaires  $\Omega_f$  et  $\Omega_u$ . Des forces de surface  $\mathbf{t}$  sont appliquées à  $\Omega_f$  et des valeurs de déplacement  $\mathbf{U}_d$  sont imposées le long de  $\Omega_u$ .

### 4.2 Formulation faible

Similairement au raisonnement présenté dans le sous-chapitre 3.1, il est possible d'exprimer le principe des puissances virtuelles appliqué au problème de contact comme suit :



$$\partial\Omega = \partial\Omega_f \cup \partial\Omega_u$$

FIGURE 4.2 – Conditions aux limites de l’assemblage des deux solides A et B.

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^* : \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{U}^* dV + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{t} \mathbf{U}^* dS \quad (4.1)$$

avec :

- $\mathbf{U}^*$  : le vecteur de degrés de liberté virtuels de l’assemblage des deux solides A et B, égal à  $\mathbf{U}_d^*$  le long de  $\partial\Omega_u$  ;
- $\mathbf{n}$  : un vecteur unitaire normal à  $\partial\Omega_u$  ;
- $\boldsymbol{\sigma}$  : le tenseur des contraintes ;
- $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  : le tenseur de déformations associé à  $\mathbf{U}^*$  ;
- $\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^* : \boldsymbol{\sigma} dV$  : la puissance virtuelle des forces internes ;
- $\int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{U}^* dV + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{t} \mathbf{U}^* dS$  : la puissance virtuelle des forces externes.

### 4.3 Discrétisation

Une discrétisation aux éléments finis de  $\Omega$  est considérée lors de l’étude de son comportement pour différentes configurations de chargement. Le bord  $\partial\Omega$  est donc aussi discrétisé. On désigne par  $\Omega_e$  un élément de la discrétisation de  $\Omega$  et par  $\partial\Omega_e$  une partie élémentaire de la discrétisation de  $\partial\Omega$ . Le déplacement  $\mathbf{U}_i$  en tous points de  $\Omega$  peut être déduit des déplacements des nœuds du maillage aux éléments finis considéré selon l’équation suivante :

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{N} \mathbf{U} \quad (4.2)$$

avec :

- $\mathbf{N}$  : la matrice contenant l’ensemble des fonctions d’interpolation attribuées aux éléments finis utilisés pour construire le maillage.
- $\mathbf{U}$  : le vecteur de tous les degrés de liberté des nœuds du maillage.

Le champ de déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est dérivé du champ de déplacement généralisé  $\mathbf{U}$  comme suit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{U}_i = \mathbf{B} \mathbf{U} \quad (4.3)$$

où  $\mathbf{B}$  désigne la matrice des dérivées des fonctions d'interpolation  $\mathbf{N}$ , et  $\nabla^s$  est la partie symétrique de l'opérateur gradient.

Les lois du comportement des éléments finis établissent des relations entre les contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et les champs de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.4)$$

Ainsi, le principe des puissances virtuelles s'exprime comme suit :

$$\mathbf{U}^{*T} \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) = \mathbf{U}^{*T} \mathbf{F}_{ext} \quad \forall \mathbf{U}^* \quad (4.5)$$

tel que :

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{A}_e \left[ \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV \right] \quad (4.6)$$

Le symbole  $\mathbf{A}$  désigne l'opérateur d'assemblage. Le vecteur  $\mathbf{F}_{ext}$  des forces externes est exprimé comme suit :

$$\mathbf{F}_{ext} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{A}_e \int_{\Omega_e} \mathbf{f} dV + \sum_{e=1}^{N_{\Omega_e}} \mathbf{A}_e \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{t} dS \quad (4.7)$$

donc :

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}_{ext} \quad (4.8)$$

L'équation (4.8) énonce l'équilibre entre les forces internes  $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{U})$  et les forces externes  $\mathbf{F}_{ext}$  de la structure étudiée.

## 4.4 Mise en œuvre de la projection cinématique

La projection cinématique est une méthodologie permettant d'imposer des relations cinématiques dans un système à résoudre. Elle consiste à classer les degrés de liberté totaux  $\mathbf{U}$  en deux vecteurs complémentaires tels que :

$$\mathbf{U} = [ \mathbf{U}_c \quad \mathbf{U}_i ]^T \quad (4.9)$$

avec :

- $\mathbf{U}_c$  : le vecteur des degrés de liberté dépendants (ou liés).
- $\mathbf{U}_i$  le vecteur des degrés de liberté indépendants (ou libres).

et à relier les vecteurs des valeurs incrémentales des degrés de liberté totaux  $\delta\mathbf{U}$  et celles des degrés indépendants  $\delta\mathbf{U}_i$  par le moyen d'une matrice de projection cinématique  $\mathbf{P}$  :

$$\delta\mathbf{U} = [ \delta\mathbf{U}_c \quad \delta\mathbf{U}_i ]^T = \mathbf{P}\delta\mathbf{U}_i \quad (4.10)$$

Les relations cinématiques considérées peuvent être classées en deux catégories :

- des relations entre les degrés de liberté de a et ceux de b ;
- des conditions aux limites de Dirichlet le long de  $\Omega_u$ .

Les relations cinématiques entre a et b imposent que les valeurs des degrés de liberté des nœuds de la discrétisation de b dépendent des valeurs des degrés de liberté des nœuds de la discrétisation de a, tel que  $\mathbf{u}_b = f(\mathbf{u}_a)$ . Cela permet de classer l'ensemble des degrés de liberté des nœuds de b comme étant des degrés de liberté liés qui font partie du vecteur  $\mathbf{U}_c$ .



Il est à noter qu'il est possible d'imaginer des relations cinématiques telles que  $\mathbf{u}_a = f'(\mathbf{u}_b)$ . Les degrés de liberté de a sont dans ce cas des degrés liés.

Les degrés de liberté associés aux conditions de Dirichlet sont également des degrés liés. Le vecteur des degrés de liberté libres  $\mathbf{U}_i$  est constitué de l'ensemble des degrés de liberté de la structure, à part les degrés liés.

Les termes de la matrice  $\mathbf{P}$  reliant les vecteurs  $\delta\mathbf{U}_c$  et  $\delta\mathbf{U}_i$  sont définis à partir de la dérivation des relations cinématiques par rapport aux degrés de liberté indépendants  $\mathbf{U}_i$ .

Afin de clarifier l'approche, on va prendre l'exemple d'une structure ayant un ensemble de 4 degrés de liberté tels que :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Cette structure est constitué d'un assemblage de deux solides A et B.  $u_1$  et  $u_3$  sont les degrés de liberté du maillage considéré pour A.  $u_2$  et  $u_4$  sont cependant les degrés de liberté du maillage considéré pour B. a et b (deux bords de A et B reliés avec des relations cinématiques) sont deux noeuds ayant comme degrés de liberté  $u_2$  et  $u_1$ , respectivement. La première catégorie de relations cinématiques (relations entre les degrés de liberté de a et ceux de b) est définie avec une seule relation cinématique tel que :

$$u_2 = u_1^2 + d_1 \quad (4.12)$$

La deuxième catégorie de relations cinématiques (conditions de Dirichlet) est définie avec une relation cinématique tel que :

$$u_3 = d_2 \quad (4.13)$$

Dans ce cas, on définit les degrés de liberté liés tels que :

$$\mathbf{U}_c = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Le vecteur des degrés de liberté libres est constitué de l'ensemble des degrés de liberté du système à part les degrés liés tel que :

$$\mathbf{U}_i = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

On définit par la suite la matrice de projection comme suit :

$$\delta\mathbf{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \delta\mathbf{U}_i \quad (4.16)$$

Similairement à la méthodologie adoptée pour cet exemple, une fois les vecteurs  $\mathbf{U}_i$  et  $\mathbf{U}_c$  sont identifiés et la matrice  $\mathbf{P}$  est calculée, la résolution consiste à multiplier l'équation (4.8) par la transposée du vecteur  $\delta\mathbf{U}$  :

$$\delta \mathbf{U}_i^T \mathbf{P}^T \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) = \delta \mathbf{U}_i^T \mathbf{P}^T \mathbf{F}_{ext} \quad (4.17)$$

donc :

$$\mathbf{P}^T \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}^T \mathbf{F}_{ext} \quad (4.18)$$

L'équation (4.18) représente la nouvelle équation d'équilibre à résoudre, qui prend en compte les relations cinématiques qui relient les degrés de liberté de  $\mathbf{b}$  à ceux de  $\mathbf{a}$  et les conditions aux limites de Dirichlet. Le résidu  $\mathbf{R}$  associé à cette équation d'équilibre est défini comme suit :

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}^T \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{P}^T \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) \quad (4.19)$$

La dérivée du résidu est calculée comme suit :

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}_i} = \frac{\partial (\mathbf{P}^T \mathbf{F}_{ext})}{\partial \mathbf{U}_i} - \frac{\partial (\mathbf{P}^T \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}))}{\partial \mathbf{U}_i} \quad (4.20)$$

Le résidu  $\mathbf{R}$  est dérivé par rapport à  $\mathbf{U}_i$ . L'avantage de l'approche de projection cinématique est que seul  $\mathbf{U}_i$  est calculé à chaque itération de la résolution.  $\mathbf{U}_c$  est déduit à l'aide des relations cinématiques. L'équation (4.20) peut être développée comme suit :

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}_i} = \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \mathbf{U}_i} \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{P}^T \frac{\partial (\mathbf{F}_{ext})}{\partial \mathbf{U}_i} - \left[ \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \mathbf{U}_i} \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) + \mathbf{P}^T \frac{\partial \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{U}_i} \right] \quad (4.21)$$

En supposant que le terme  $\mathbf{F}_{ext}$  est indépendant de  $\mathbf{U}_i$  (les forces externes appliquées sont prédéfinies pour chaque pas de temps de la résolution et n'évoluent pas en fonction de l'évolution des valeurs de degrés de liberté indépendants  $\mathbf{U}_i$ ), il est possible de simplifier l'équation (4.21) comme suit :

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}_i} = \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \mathbf{U}_i} \mathbf{F}_{ext} - \left[ \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \mathbf{U}_i} \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) + \mathbf{P}^T \frac{\partial \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{U}_i} \right] \quad (4.22)$$

Le terme  $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{U}_i}$  de l'équation (4.22) est égal à la matrice  $\mathbf{P}$  (voir équation (4.10)). Le terme  $\frac{\partial \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}$  de l'équation (4.22) est calculé comme suit :

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{A} \left[ \int_{e=1}^{N_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \right] \quad (4.23)$$

Le calcul du terme  $\frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \mathbf{U}_i}$  de l'équation (4.22) est réalisé tel que :

$$\frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \mathbf{U}_i} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \mathbf{P}_{jk}}{\partial \mathbf{U}_i} \quad (4.24)$$

$m$  est le nombre de colonnes de la matrice  $\mathbf{P}$ .  $\mathbf{P}_{jk}$  est sa colonne numéro  $k$ . La dérivée de cette colonne par rapport à  $\mathbf{U}_i$  est calculée tel que :

$$\frac{\partial \mathbf{P}_{jk}}{\partial \mathbf{U}_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{P}_{1k}}{\partial \mathbf{U}_{i1}} & \frac{\partial \mathbf{P}_{1k}}{\partial \mathbf{U}_{i2}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{P}_{1k}}{\partial \mathbf{U}_{is}} \\ \frac{\partial \mathbf{P}_{2k}}{\partial \mathbf{U}_{i1}} & \frac{\partial \mathbf{P}_{2k}}{\partial \mathbf{U}_{i2}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{P}_{2k}}{\partial \mathbf{U}_{is}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{P}_{nk}}{\partial \mathbf{U}_{i1}} & \frac{\partial \mathbf{P}_{nk}}{\partial \mathbf{U}_{i2}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{P}_{nk}}{\partial \mathbf{U}_{is}} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

sachant que  $n$  est le nombre de lignes de la matrice  $\mathbf{P}$ .  $s$  est la taille du vecteur de degrés de liberté indépendants  $\mathbf{U}_i$  tel que  $\mathbf{U}_i = [U_{i_1} \ U_{i_2} \ \dots \ U_{i_s}]^T$ .

Les termes non nuls de la dérivation de la matrice  $\mathbf{P}$  par rapport au vecteur  $\mathbf{U}_i$  proviennent des dérivées secondes des relations cinématiques reliant a et b. Avec des relations cinématiques linéaires, l'équation (4.22) se simplifie tel que :

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}_i} = - \left[ \mathbf{P}^T \frac{\partial \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{P} \right] \quad (4.26)$$

$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}_i}$  est l'opérateur tangent de la résolution globale non linéaire de Newton Raphson (où les conditions aux limites de Dirichlet et les relations cinématiques entre a et b sont prises en compte).

## 4.5 Couplage de la méthode de projection cinématique avec les méthodes de simples et de doubles multiplicateurs de Lagrange

Le choix de présenter dans ce sous-chapitre le couplage de la méthode de projection cinématique avec les méthodes de simples et doubles multiplicateurs de Lagrange provient de l'intention de respecter l'architecture d'un code aux éléments finis dans lequel une de ces méthodes est utilisée pour établir des conditions aux limites de Dirichlet. Cela rend l'implémentation de l'approche de projection très peu intrusive par rapport à un code existant. Dans cette configuration, la projection cinématique relie des degrés de liberté d'interface entre les deux solides A et B. En parallèle, les conditions aux limites de Dirichlets sont gérées avec la méthode des simples ou doubles multiplicateurs de Lagrange.

Le but de ce chapitre n'est pas de mener une discussion sur le choix optimal de la méthodologie de calcul à adopter pour vérifier les conditions de Dirichlet. Le choix de la méthode des doubles multiplicateurs de Lagrange est fait à titre d'exemple pour le développement des équations, sachant que n'importe quelle autre méthode aurait pu être choisie.

Les conditions aux limites de Dirichlet le long de  $\partial\Omega_u$  s'expriment tel que :

$$\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{U}_d \quad (4.27)$$

$\mathbf{L}$  étant une matrice de blocage. Les conditions aux limites de Dirichlet sont considérées dans un premier temps. Avec la méthode des doubles multiplicateurs de Lagrange, il s'agit donc de définir le système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) + \mathbf{L}^T \boldsymbol{\lambda}^1 + \mathbf{L}^T \boldsymbol{\lambda}^2 \\ \mathbf{L}\mathbf{u} - \beta \boldsymbol{\lambda}^1 + \beta \boldsymbol{\lambda}^2 \\ \mathbf{L}\mathbf{u} + \beta \boldsymbol{\lambda}^1 - \beta \boldsymbol{\lambda}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{ext} \\ \mathbf{U}_d \\ \mathbf{U}_d \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$\boldsymbol{\lambda}^1$  et  $\boldsymbol{\lambda}^2$  sont deux vecteurs de multiplicateurs de Lagrange à déterminer.  $\beta$  est un paramètre à saisir lors de la résolution numérique. Les valeurs des degrés de liberté cherchés ne dépendent pas de  $\beta$ . Seules les valeurs des multiplicateurs de Lagrange dépendent de  $\beta$ .

L'équation (4.28) peut être formulée sous une expression plus condensée tel que :

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_{tot}) = \mathbf{F}_{tot} \quad (4.29)$$

avec :

$$\mathbf{U}_{tot} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \lambda^1 \\ \lambda^2 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{tot} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{ext} \\ \mathbf{U}_d \\ \mathbf{U}_d \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$\mathbf{U}_{tot}$  est le nouveau vecteur de degrés de liberté totaux de la structure.

Dans un deuxième temps, on considère les relations cinématiques entre a et b avec la méthode de projection cinématique en définissant les vecteurs  $\mathbf{U}_c$  et  $\mathbf{U}_i$ .  $\mathbf{U}_c$  représente les degrés de liberté de a (reliés aux degrés de liberté de b).  $\mathbf{U}_i$  est le vecteur de l'ensemble des degrés de liberté à part des degrés liés. L'équation (4.9) est remplacée par l'équation suivante :

$$\mathbf{U}_{tot} = [ \mathbf{U}_c \quad \mathbf{U}_i ]^T \quad (4.31)$$

La matrice de projection  $\mathbf{P}$  relie dans ce cas les vecteurs  $\delta\mathbf{U}_{tot}$  et  $\delta\mathbf{U}_i$  :

$$\delta\mathbf{U}_{tot} = [ \delta\mathbf{U}_c \quad \delta\mathbf{U}_i ]^T = \mathbf{P}\delta\mathbf{U}_i \quad (4.32)$$

$\delta\mathbf{U}_{tot}$  est le vecteur des valeurs incrémentales des degrés de liberté totaux (degrés de liberté du système et multiplicateurs de Lagrange).  $\delta\mathbf{U}_i$  est le vecteur des valeurs incrémentales des degrés indépendants.

Afin de clarifier cette approche, on reprend l'exemple donné dans le sous-chapitre 4.4, (équation (4.11) à (4.16)). Vu qu'une relation cinématique est mise en jeu, le vecteur  $\mathbf{U}_{tot}$  comporte deux multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , en plus des degrés de liberté :

$$\mathbf{U}_{tot} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

On définit par la suite les vecteurs  $\mathbf{U}_i$  et  $\mathbf{U}_c$  :

$$\mathbf{U}_c = [ u_2 ] \quad (4.34)$$

$$\mathbf{U}_i = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_4 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

et la matrice de projection  $\mathbf{P}$  :

$$\delta\mathbf{U}_{tot} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \delta\mathbf{U}_i \quad (4.36)$$

Une fois les expressions de  $\mathbf{U}_c$ ,  $\mathbf{U}_i$ , et  $\mathbf{P}$  sont identifiées, similairement à l'approche adoptée pour cet exemple de clarification, on définit le résidu de la résolution tel que :

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}^T \mathbf{F}_{tot} - \mathbf{P}^T \mathbf{F}(\mathbf{U}_{tot}) \quad (4.37)$$

On définit par la suite la dérivée du résidu par rapport au vecteur de degrés de liberté libres :

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}_i} = \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \mathbf{U}_i} \mathbf{F}_{tot} + \mathbf{P}^T \frac{\partial (\mathbf{F}_{tot})}{\partial \mathbf{U}_i} - \left[ \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \mathbf{U}_i} \mathbf{F}(\mathbf{U}_{tot}) + \mathbf{P}^T \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}_{tot})}{\partial \mathbf{U}_{tot}} \frac{\partial \mathbf{U}_{tot}}{\partial \mathbf{U}_i} \right] \quad (4.38)$$

En supposant que le terme  $\mathbf{F}_{tot}$  est indépendant de  $\mathbf{U}_i$  (les forces externes appliquées et les déplacements imposés sont prédéfinies pour chaque pas de temps de la résolution et n'évoluent pas en fonction de l'évolution des valeurs de degrés de liberté indépendants  $\mathbf{U}_i$ ), il est possible de simplifier l'équation (4.38) comme suit :

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}_i} = \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \mathbf{U}_i} \mathbf{F}_{tot} - \left[ \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \mathbf{U}_i} \mathbf{F}(\mathbf{U}_{tot}) + \mathbf{P}^T \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}_{tot})}{\partial \mathbf{U}_{tot}} \frac{\partial \mathbf{U}_{tot}}{\partial \mathbf{U}_i} \right] \quad (4.39)$$

Avec des relations cinématiques linéaires :

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}_i} = - \left[ \mathbf{P}^T \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}_{tot})}{\partial \mathbf{U}_{tot}} \mathbf{P} \right] \quad (4.40)$$

Le terme  $\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}_{tot})}{\partial \mathbf{U}_{tot}}$  est calculé comme suit :

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}_{tot})}{\partial \mathbf{U}_{tot}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} & \mathbf{L}^T & \mathbf{L}^T \\ \mathbf{L} & -\beta \mathbf{I} & \beta \mathbf{I} \\ \mathbf{L} & \beta \mathbf{I} & -\beta \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

ce qui donne :

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}_{tot})}{\partial \mathbf{U}_{tot}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{e=1}^{N_e} \left[ \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \right] & \mathbf{L}^T & \mathbf{L}^T \\ \mathbf{L} & -\beta \mathbf{I} & \beta \mathbf{I} \\ \mathbf{L} & \beta \mathbf{I} & -\beta \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Le paramètre  $\beta$  est numériquement choisi afin de garantir un bon conditionnement de la matrice  $\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}_{tot})}{\partial \mathbf{U}_{tot}}$ .

## 4.6 Exemples de validation

Une série d'exemples de validation de la méthodologie de projection cinématique est présentée dans ce chapitre : des exemples de ressorts en série, et des exemples 3D de modélisation d'un essai de pull-out.

### 4.6.1 Ressorts en série

Il s'agit d'étudier deux ressorts en série avec des relations cinématiques reliant les déplacements des noeuds qui se situent entre ces deux ressorts. Différents choix de modélisation sont réalisés, affectant des comportements linéaires ou nonlinéaires aux ressorts, et adoptant des expressions linéaires ou nonlinéaires des relations cinématiques.

### 4.6.1.1 Comportement de ressorts linéaires et relations cinématiques linéaires

Des configurations de forces imposées et déplacements imposés au niveau des noeuds des ressorts sont étudiées.

#### 4.6.1.1.1 Forces imposées

L'exemple de la figure 4.3 est étudié.

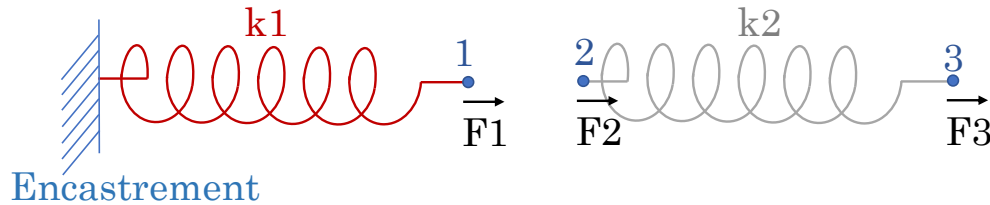


FIGURE 4.3 – Exemple d'application unidirectionnel - forces imposées.

La relation cinématique reliant les déplacements  $u_1$  du noeud 1 et  $u_2$  du noeud 2 est supposée linéaire tel que :

$$u_1 = \alpha u_2 \quad (4.43)$$

Les noeuds 1 et 2 de la figure 4.3 sont géométriquement identiques dans la configuration initiale. Le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{bmatrix} k1 & -k1 & 0 & 0 \\ -k1 & k1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k2 & -k2 \\ 0 & 0 & -k2 & k2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\text{Encastrement}} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Sachant que  $u_{\text{Encastrement}}$  est le déplacement au niveau de l'encastrement représenté dans la figure 4.3, et  $R$  est la force de réaction au niveau de cet encastrement.  $u_i$  est le déplacement du noeud  $i$  de la figure 4.3. Du fait que la valeur de  $u_{\text{Encastrement}}$  est nulle, après simplification, le système devient :

$$\begin{bmatrix} k1 & 0 & 0 \\ 0 & k2 & -k2 \\ 0 & -k2 & k2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Afin de valider l'approche par projection cinématique et de démontrer l'intérêt de son utilisation, l'introduction de la relation cinématique de l'équation (4.43) dans la résolution est réalisée via trois approches : la méthode des simples multiplicateurs de Lagrange, la méthode des doubles multiplicateurs de Lagrange, et la méthode de projection cinématique. Une comparaison des résolutions menées avec les différentes approches est ensuite réalisée.

#### 4.6.1.1.1.1 Méthode des simples multiplicateurs de Lagrange

La condition cinématique imposée est exprimée comme suit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.46)$$

L'ajout de l'équation (4.46) dans le système de résolution avec la méthode des simples multiplicateurs de Lagrange donne :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k2 & -k2 & -\alpha \\ 0 & -k2 & k2 & 0 \\ 1 & -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}_{\text{tot}}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

d'où :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k1} & \frac{1}{\alpha k1} & \frac{1}{\alpha k1} & 0 \\ \frac{1}{\alpha k1} & \frac{1}{\alpha^2 k1} & \frac{1}{\alpha^2 k1} & \frac{-1}{\alpha} \\ \frac{1}{\alpha k1} & \frac{1}{\alpha^2 k1} & \frac{\alpha^2 k1 + k2}{\alpha^2 k1 k2} & \frac{-1}{\alpha} \\ 0 & \frac{-1}{\alpha} & \frac{-1}{\alpha} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

La taille de la matrice à inverser  $\mathbf{k}_{\text{tot}}$  est  $4 \times 4$ .

#### 4.6.1.1.1.2 Méthode des doubles multiplicateurs de Lagrange

On associe deux multiplicateurs de Lagrange à la condition cinématique tels que :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & k2 & -k2 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & -k2 & k2 & 0 & 0 \\ 1 & -\alpha & 0 & -\beta & \beta \\ 1 & -\alpha & 0 & \beta & -\beta \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}_{\text{tot}}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \lambda^1 \\ \lambda^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Avec la méthode des doubles multiplicateurs de Lagrange, le paramètre  $\beta$  est numériquement choisi afin d'avoir un bon conditionnement de la matrice  $\mathbf{k}_{\text{tot}}$ . Les valeurs de déplacement cherchées ne dépendent pas de  $\beta$  comme le montre l'équation (4.50).

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \lambda^1 \\ \lambda^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k1} & \frac{1}{\alpha k1} & \frac{1}{\alpha k1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha k1} & \frac{1}{\alpha^2 k1} & \frac{1}{\alpha^2 k1} & \frac{-1}{2\alpha} & \frac{-1}{2\alpha} \\ \frac{1}{\alpha k1} & \frac{1}{\alpha^2 k1} & \frac{\alpha^2 k1 + k2}{\alpha^2 k1 k2} & \frac{-1}{2\alpha} & \frac{-1}{2\alpha} \\ 0 & \frac{-1}{2\alpha} & \frac{-1}{2\alpha} & \frac{2\alpha}{4\beta} & \frac{2\alpha}{4\beta} \\ 0 & \frac{-1}{2\alpha} & \frac{-1}{2\alpha} & \frac{1}{4\beta} & \frac{-1}{4\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

La taille de la matrice à inverser  $\mathbf{k}_{\text{tot}}$  est  $5 \times 5$ .

#### 4.6.1.1.1.3 Méthode de projection cinématique

En supposant que  $u_1$  est un degré de liberté lié, et que  $u_2$  et  $u_3$  sont des degrés libres, les vecteurs  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{U}_i$  sont définis selon l'équation (4.51) :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \mathbf{U}_i = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

d'où l'expression de la matrice de projection  $\mathbf{P}$  :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta u_3 \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_2 \\ \delta u_3 \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{U}_i} \quad (4.52)$$

Tel que  $\delta u_i$  est un incrément de déplacement du noeud  $i$ . L'équation (4.45) d'équilibre peut être écrite sous une forme plus condensée tel que :

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}_{ext} \quad (4.53)$$

avec :

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} k1 & 0 & 0 \\ 0 & k2 & -k2 \\ 0 & -k2 & k2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{ext} = \begin{bmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Avec la méthode de projection cinématique, l'équation (4.53) est multipliée par la transposée de la matrice de projection  $\mathbf{P}$  tel que :

$$\mathbf{P}^T \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}^T \mathbf{F}_{ext} \quad (4.55)$$

Dans le cas de relations cinématiques linéaires, la matrice de projection qui relie  $\delta \mathbf{U}_{tot}$  et  $\delta \mathbf{U}_i$  relie également les vecteurs  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{U}_i$ . Cela n'est par contre pas applicable dans le cas de relations cinématiques nonlinéaires. Pour cet exemple de ressorts, il est donc possible de dire que :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}_i} \quad (4.56)$$

On obtient :

$$\mathbf{P}^T \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k1 & 0 & 0 \\ 0 & k2 & -k2 \\ 0 & -k2 & k2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 k1 + k2 & -k2 \\ -k2 & k2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

et :

$$\mathbf{P}^T \mathbf{F}_{ext} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha F1 + F2 \\ F3 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Finalement :

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 k1 + k2 & -k2 \\ -k2 & k2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha F1 + F2 \\ F3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha F1 + F2 + F3}{\alpha^2 k1} \\ \frac{\alpha^2 F3 k1 + \alpha F1 k2 + (F2 + F3) k2}{\alpha^2 k1 k2} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$



La valeur de  $u_1$  est déduite en multipliant celle de  $u_2$  par  $\alpha$ .

La taille de la matrice à inverser avec la méthode de projection cinématique est donc  $2 \times 2$ .

#### 4.6.1.1.1.4 Interprétation des résultats analytiques

En comparant les tailles des matrices à inverser en utilisant chacune des trois méthodologies de calcul, on peut constater que la méthode de projection cinématique a l'avantage de diminuer la taille du système à résoudre. La matrice à inverser appartient pour les différents cas de calcul à l'ensemble  $R^{n \times n}$ . Pour l'exemple étudié, la valeur de  $n$  est égale à 4 avec la méthode des simples multiplicateurs de Lagrange et est égale à 5 avec la méthode des doubles multiplicateurs de Lagrange. Cette valeur de  $n$  se réduit à 2 avec la méthode de projection cinématique. Pour un grand calcul avec beaucoup de relations cinématiques mises en jeu dans différentes directions, le gain apporté par la méthode de projection cinématique peut être important.

Les relations cinématiques de type déplacement imposé (conditions de Dirichlet) sont souvent traitées dans les codes aux éléments finis avec des approches classiques comme la méthode des simples ou doubles multiplicateurs de Lagrange. Pour respecter cette pratique, la méthode de projections cinématique peut être proposée seulement au niveau de l'interface entre les solides A et B, tout en conservant le principe des multiplicateurs de Lagrange pour gérer les déplacements imposés aux frontières du domaine (assemblage de A et B).

#### 4.6.1.1.2 Déplacement imposé

L'exemple de la figure 4.4 est étudié.

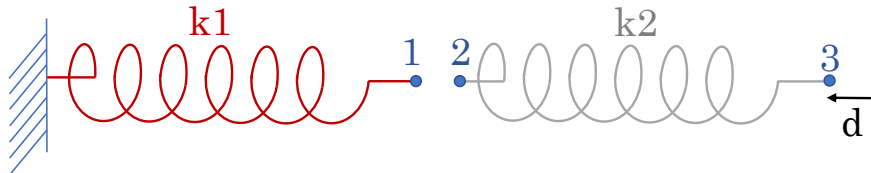


FIGURE 4.4 – Exemple d'application unidirectionnel.

La relation cinématique de l'équation (4.43) est utilisée pour relier  $u_1$  et  $u_2$ .

Avec la méthode des simples multiplicateurs de Lagrange, la prise en compte de la condition de Dirichlet appliquée au noeud 3 consiste à définir une inconnue  $\lambda$  à déterminer tel que :

$$\begin{bmatrix} k1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k2 & -k2 & 0 \\ 0 & -k2 & k2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Afin d'introduire la relation  $u_1 = \alpha u_2$ , on effectue un couplage méthode de simple multiplicateur de Lagrange-méthode de projection cinématique et  $\mathbf{U}_{tot}$  et  $\mathbf{U}_i$  sont définis comme suit :

$$\mathbf{U}_{tot} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \lambda \end{bmatrix}; \mathbf{U}_i = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

d'où l'expression de la matrice de projection  $\mathbf{P}$  :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta u_3 \\ \delta \lambda \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{U}_{tot}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_2 \\ \delta u_3 \\ \delta \lambda \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{U}_i} \quad (4.62)$$

Du fait que la relation cinématique prise en compte est linéaire (équation (4.43)), la matrice de projection  $\mathbf{P}$  relie également les vecteurs  $\mathbf{U}_{tot}$  et  $\mathbf{U}_i$  :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \lambda \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}_{tot}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \lambda \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}_i} \quad (4.63)$$

Finalement, la résolution avec la méthode de projection cinématique consiste à remplacer  $\mathbf{U}_{tot}$  par son expression en fonction de  $\mathbf{U}_i$  (équation (4.63)) dans l'équation (4.60) et à multiplier cette équation par la transposée de la matrice de projection  $\mathbf{P}$  tel que :

$$\mathbf{P}^T \mathbf{F}(\mathbf{U}_{tot}) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k2 & -k2 & 0 \\ 0 & -k2 & k2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

donc :

$$\mathbf{P}^T \mathbf{F}(\mathbf{U}_{tot}) = \begin{bmatrix} \alpha^2 k1 + k2 & -k2 & 0 \\ -k2 & k2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

et :

$$\mathbf{P}^T \mathbf{F}_{tot} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

d'où :

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 k1 + k2 & -k2 & 0 \\ -k2 & k2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dk_2}{\alpha^2 k1 + k2} \\ d \\ \frac{-\alpha^2 dk1 k2}{\alpha^2 k1 + k2} \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

La même démarche de calcul peut être adoptée afin de prendre en compte le déplacement imposé au noeud 3 avec la méthode des doubles multiplicateurs de Lagrange. Il suffit dans ce cas de remplacer l'équation (4.60) par l'équation suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k2 & -k2 & 0 & 0 \\ 0 & -k2 & k2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\beta & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \beta & -\beta \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}_{tot}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

et de définir la matrice de projection telle que :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta u_3 \\ \delta \lambda_1 \\ \delta \lambda_2 \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{U}_{tot}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_2 \\ \delta u_3 \\ \delta \lambda_1 \\ \delta \lambda_2 \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{U}_i} \quad (4.69)$$

$\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont deux multiplicateurs de Lagrange dont  $\delta \lambda_1$  et  $\delta \lambda_2$  sont les valeurs incrémentales. Le paramètre  $\beta$  est numériquement choisi afin d'établir un bon conditionnement de la matrice  $\mathbf{k}_{tot}$ .

Il est tout à fait possible d'utiliser la méthode de projection cinématique pour mettre en place tous les types de relations cinématiques dans la résolution (relations entre les solides A et B, et conditions aux limites de Dirichlet). Pour introduire des conditions de déplacement imposé avec la méthode de projection cinématique, il suffit de définir les degrés de liberté associés comme des degrés de liberté liés, et de déduire par la suite la matrice de projection correspondante. Afin d'appliquer ce principe pour l'exemple de ressorts de la figure 4.3, on définit la matrice de projection telle que :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta u_3 \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_2 \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{U}_i} \quad (4.70)$$

donc :

$$\mathbf{P}^T \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k1 & 0 & 0 \\ 0 & k2 & -k2 \\ 0 & -k2 & k2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha u_2 \\ u_2 \\ d \end{bmatrix} = \alpha^2 k1 u_2 - dk2 + k2 u_2 \quad (4.71)$$

$\mathbf{F}_{tot}$  est dans ce cas un vecteur de trois composantes nulles (égales aux valeurs de forces appliquées aux noeuds. Il en ressort que :

$$\mathbf{P}^T \mathbf{F}_{ext} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

La résolution de l'égalité des équations (4.71) et (4.72) donne la valeur de  $u_2$ . On déduit la valeur de  $u_1$  en multipliant celle de  $u_2$  par  $\alpha$ . La valeur de  $u_3$  est égale à  $d$ .

### 4.6.1.2 Comportement de ressorts linéaires et relation cinématique non linéaire

L'expression de la relation cinématique de l'équation (4.73) est testée afin relier les déplacements  $u_1$  et  $u_2$  des noeuds 1 et 2 de la figure 4.3.

$$u_1 = 3u_2^2 + 3u_2 \quad (4.73)$$

d'où l'expression de la matrice de projection  $\mathbf{P}$  tel que :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta u_3 \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6u_2 + 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_2 \\ \delta u_3 \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{U}_i} \quad (4.74)$$

Par conséquent, la résolution avec la méthode de projection cinématique consiste à multiplier l'équation (4.53) par la transposée de la matrice de projection  $\mathbf{P}$ . De plus, on remplace  $u_1$  par sa valeur en fonction de  $u_2$  dans  $\mathbf{U}_{tot}$ . Le résidu de la résolution itérative est défini tel que :

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}^T \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{P}^T \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} (6u_2 + 3) F_1 + F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (6u_2 + 3) k_1 (3u_2^2 + 3u_2) - k_2 (u_3 - u_2) \\ k_2 (u_3 - u_2) \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

La dérivée du résidu  $\mathbf{R}$  par rapport à  $\mathbf{U}_i$  utilisée dans la résolution itérative est calculée comme suit :

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}_i} = \begin{bmatrix} 54u_2^2 k_1 + 54u_2 k_1 + 9k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

La dérivée du résidu constitue la matrice tangente de résolution aux éléments finis. La méthode de résolution itérative de Newton Raphson peut être utilisée.

Les valeurs suivantes sont utilisées pour l'application numérique :

- $F_1 = 100$  N ;
- $F_2 = 200$  N ;
- $F_3 = 300$  N ;
- $k_1 = 40$  N/m ;
- $k_2 = 80$  N/m.

Les résultats sont illustrés sur la figure 4.5 en termes de forces en fonction des déplacements. Ces résultats valident l'approche de projection cinématique pour des expressions de relations cinématiques non linéaires.

### 4.6.1.3 Comportement de ressorts non linéaires et relation cinématique non linéaire

Un couplage de deux types de non-linéarités est testé : des non-linéarités provenant des expressions non linéaires des relations cinématiques et un autre type de non-linéarités dû à l'utilisation de lois de comportement matériaux non linéaires.

Pour l'exemple de la figure 4.4, une loi de comportement non linéaire est introduite pour les ressorts. La loi de comportement Marigo 1D détaillée dans l'annexe C est choisie pour sa simplicité.

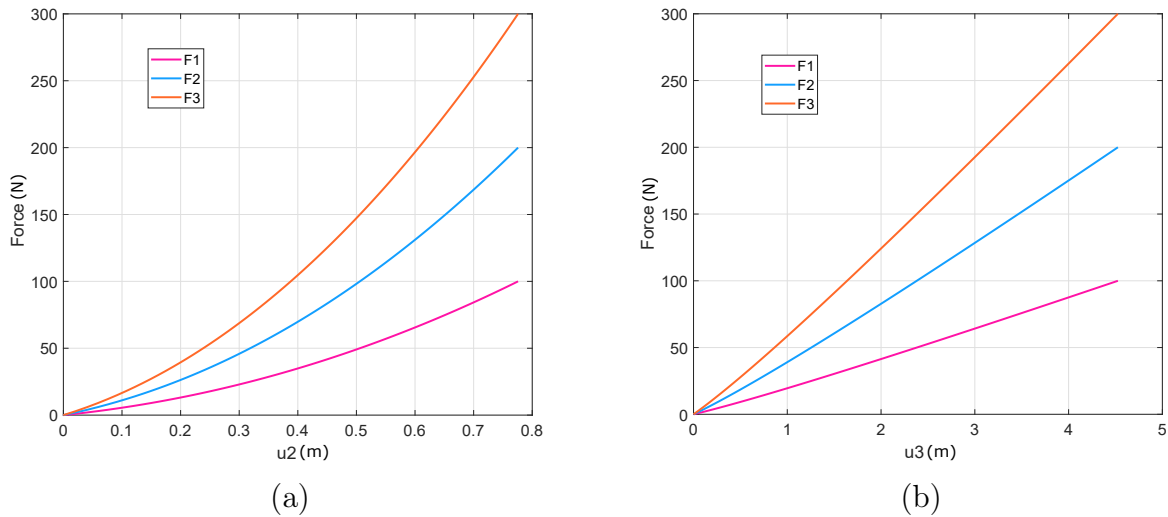


FIGURE 4.5 – Résultat – forces en fonction des déplacements  $u_2$  (a) ; et  $u_3$  (b).

La relation cinématique de l'équation (4.77) relie les déplacements  $u_1$  et  $u_2$  des noeuds 1 et 2.

$$u_1 = 2u_2^2 \quad (4.77)$$

Pour l'application numérique, les valeurs suivantes sont utilisées :

- $d = 0.3$  m ;
- $k_1 = 62.5$  N.m ;
- $k_2 = 62.5$  N/m ;
- $YD = 0.1$  Pa ;
- $SM = 500$  Pa ;

La figure 4.6 illustre les valeurs des contraintes en fonction des déformations des ressorts 1 et 2.

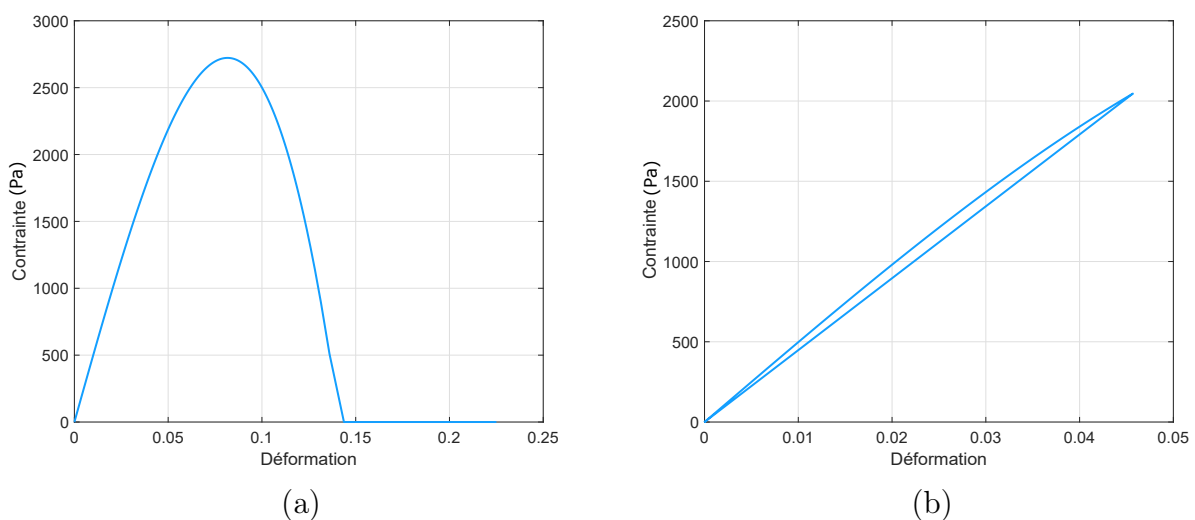


FIGURE 4.6 – Contraintes en fonction des déformations pour les éléments 1 (a) ; et 2 (b).

Cet exemple élémentaire montre qu'il est possible de coupler les deux types de non-linéarité issues des lois de comportement matériaux non linéaires et des relations cinématiques non linéaires dans un même calcul.

Afin de tester la méthodologie de projection cinématique pour un exemple plus physique que celui des ressorts en série, elle est appliquée dans la section 4.6.2 suivante afin d'étudier en 3D un essai de pull-out. Cette étude a le but de modéliser le comportement de l'interface acier-béton d'une toute nouvelle manière, afin d'explorer la faisabilité de prendre en compte le comportement de cette interface au moyen d'expressions de relations cinématiques non linéaires.

## 4.6.2 Modélisation pull-out 3D

Il s'agit de modéliser l'essai de pull-out de [Torre-Casanova, 2012] décrit dans la figure 3.6 du chapitre 3. La méthode de projection cinématique est appliquée afin de relier les déplacements d'acier et de béton. Deux choix de modélisation sont effectués : modélisation avec des éléments volumiques d'acier et de béton, et modélisation avec des éléments barres d'acier et des éléments volumiques de béton.

### 4.6.2.1 Modélisation avec des éléments volumiques d'acier et de béton

Des éléments finis 3D sont associés à l'acier et au béton.

#### 4.6.2.1.1 Propriétés des matériaux

Un comportement linéaire est associé à l'acier et au béton avec un module d'Young de 200 GPa pour l'acier et un module d'Young de 28 GPa pour le béton. Un coefficient de Poisson de 0.22 est associé au béton. Les non-linéarités de cet essai de pull-out sont concentrées au niveau de l'interface acier-béton et sont représentées par des expressions de relations cinématiques non linéaires. Ce choix de lois de comportement linéaires d'acier et de béton est justifié dans le chapitre 3 lors de la modélisation de ce même essai avec la formulation de macro-élément (voir paragraphe 3.7.1.3.4).

#### 4.6.2.1.2 Maillage

Le maillage de la figure 4.7 est choisi. Ce que cette figure ne montre pas, c'est que l'acier et le béton ont deux mailles distinctes. Les déplacements de la surface externe de la partie centrale du maillage d'acier (Acier 2 dans la figure 4.8) sont liés par des relations cinématiques aux déplacements de la surface interne de la partie centrale du maillage de béton (Béton 2 dans la figure 4.8).

Les conditions aux limites sont résumées dans la figure 4.9. Il n'est pas nécessaire de modéliser le support en téflon de la figure 3.6 puisqu'il n'est utilisé que pour assurer l'alignement entre la barre d'acier et la direction du déplacement imposé dans le dispositif expérimental.

#### 4.6.2.1.3 Résultats

Le modèle numérique est calibré dans le but de reproduire la loi d'adhérence expérimentale. Deux expressions différentes pour les relations cinématiques reliant les déplacements longitudinaux d'acier et de béton le long de la longueur de contact sont proposées. Les déplacements normaux sont imposés égaux pour l'acier et le béton le long de la longueur de contact.

La première expression proposée, appelé expression 1, est la suivante :

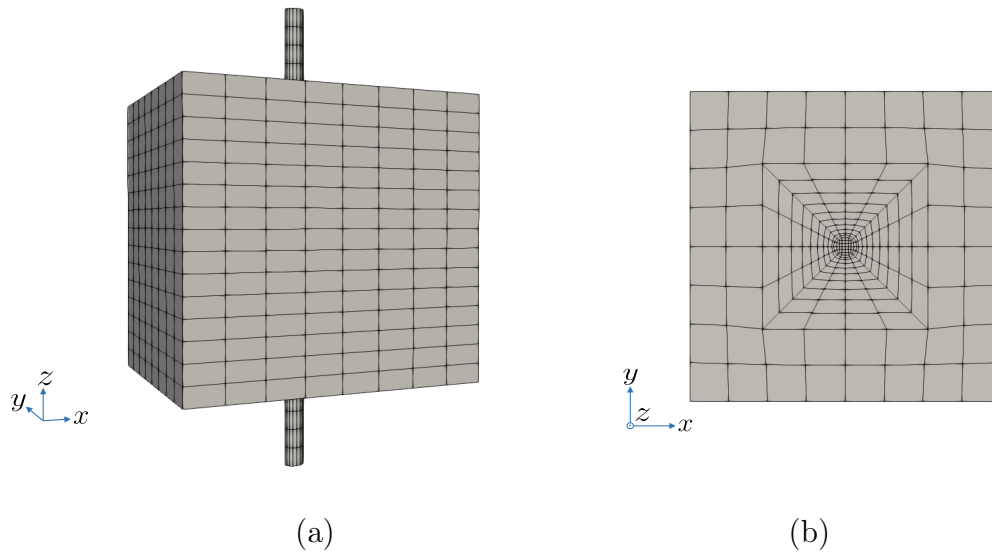


FIGURE 4.7 – Maillage de l’essai de pull-out : (a) vue 3D du maillage, (b) vue de dessus du maillage.

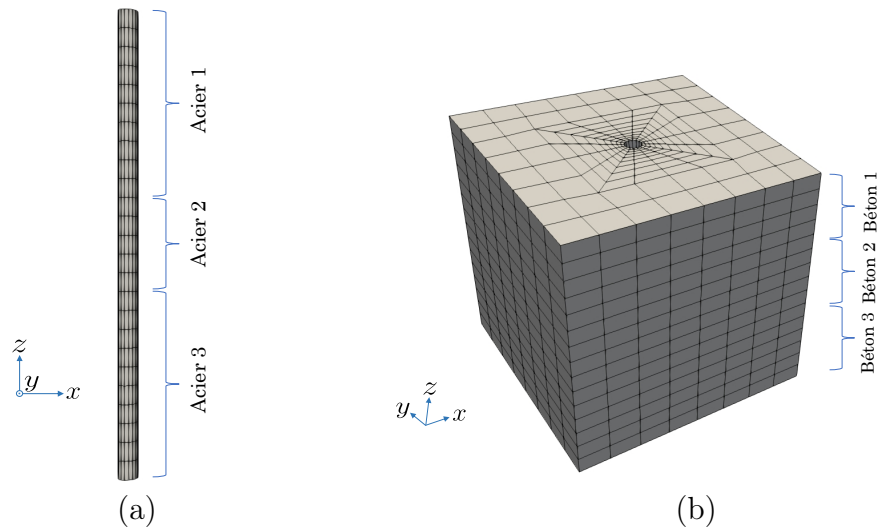


FIGURE 4.8 – Maillages d’acier et de béton reliés avec des relations cinématiques de déplacement.

$$u_b = \frac{u_a}{a + bu_a} \quad (4.78)$$

avec :

- $a = 5$ ;
- $b = 1400$ .

sachant que  $u_b$  et  $u_a$  sont les déplacements longitudinaux des nœuds de béton et d’acier, respectivement.

En utilisant cette expression 1 (équation (4.78)), la courbe de réaction et la courbe de glissement résultantes sont représentées dans la figure 4.10.

La deuxième expression, appelé expression 2, est définie avec trois paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$  :

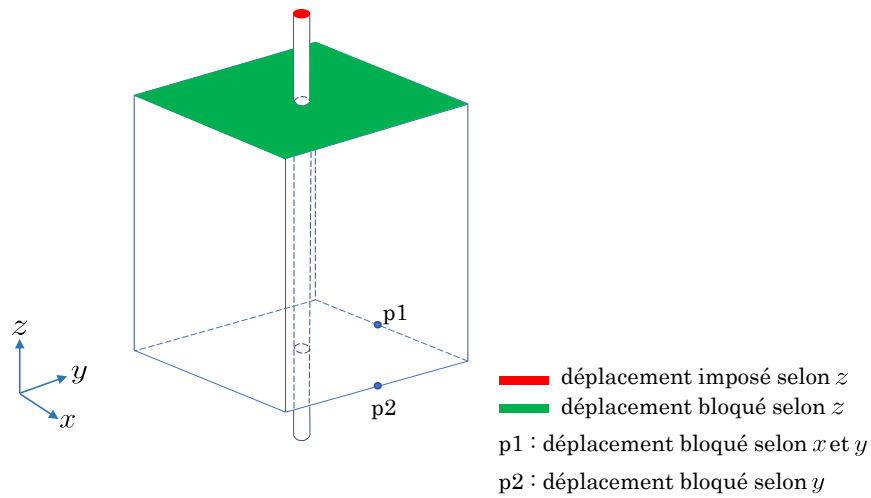


FIGURE 4.9 – Conditions aux limites.

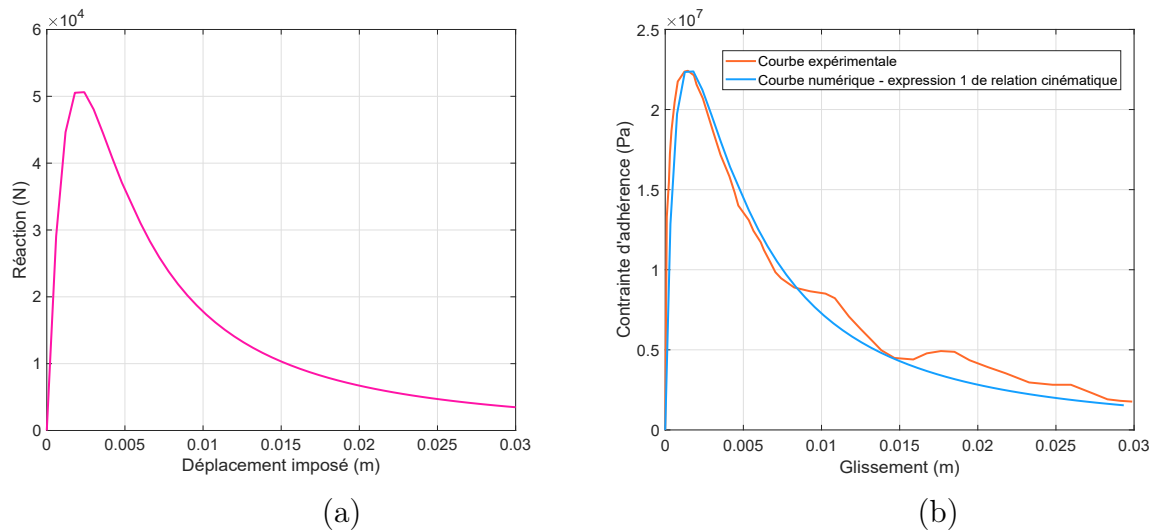


FIGURE 4.10 – Courbe de réaction issue de l'utilisation de l'expression 1 (a) et loi d'adhérence de la modélisation utilisant l'expression 1 comparée à la loi d'adhérence expérimentale (b).

$$u_b = a - ae^{-bu_a^c} \quad (4.79)$$

avec :

- $a = 6.4 \times 10^{-4}$  ;
- $b = 49.5$  ;
- $c = 0.72$ .

La courbe de réaction et la courbe d'adhérence sont représentées dans la figure 4.11.

L'expression 2 présente l'inconvénient d'avoir une valeur de dérivée infinie pour un glissement proche de zéro. En fonction de la valeur du pas de temps, cela peut entraîner des problèmes de convergence. Pour éviter ces problèmes numériques, il est donc possible de modifier légèrement l'expression 2 comme suit :



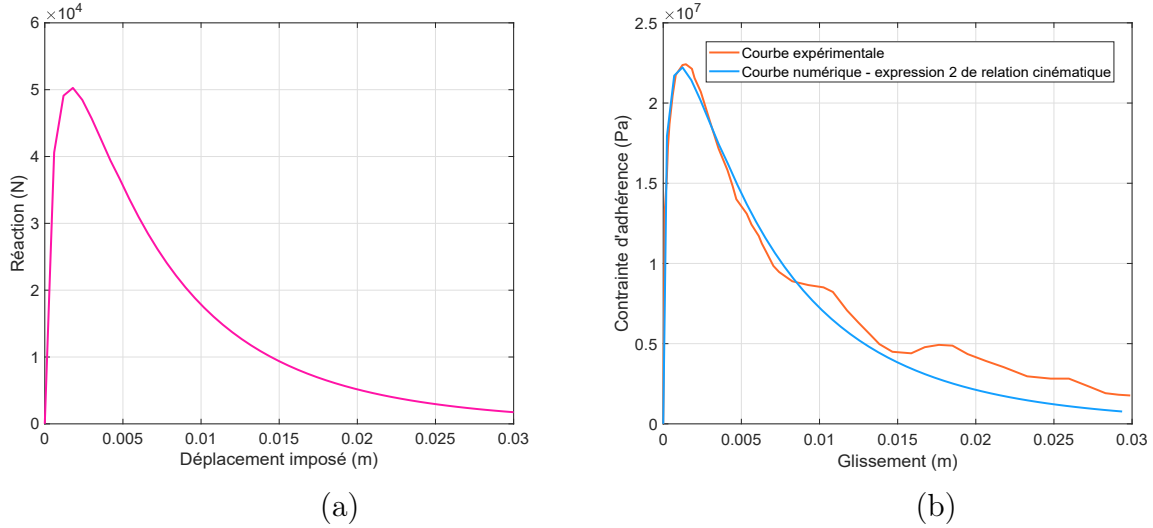


FIGURE 4.11 – Courbe de réaction issue de l’utilisation de l’expression 2 (a) et loi d’adhérence de la modélisation utilisant l’expression 2 comparée à la loi d’adhérence expérimentale (b).

$$u_b = 0.53u_a \text{ pour } u_a < 10^{-5} \quad (4.80)$$

$$u_b = a - ae^{-bu_a^c} + \left( a - ae^{-b \times (10^{-5})^c} - 0.53 \times 10^{-5} \right) \text{ pour } u_a \geq 10^{-5} \quad (4.81)$$

Pour la valeur de glissement de  $10^{-5}$  m, les deux expressions pour  $u_a < 10^{-5}$  m et  $u_a \geq 10^{-5}$  m (équation (4.80) et (4.81)) donnent la même valeur de contrainte de liaison et présentent une continuité de la valeur de leur dérivée.

#### 4.6.2.1.4 Discussion

Les deux expressions donnent des résultats de courbes d’adhérence comparables à la courbe d’adhérence expérimentale. Cependant, l’utilisation de l’expression 2 estime mieux la partie pré-pic de la courbe expérimentale, comme le montre la figure 4.12.

L’expression 2 est définie avec trois paramètres alors que l’expression 1 n’en a que deux, ce qui signifie que l’expression 1 est plus simple que l’expression 2. L’ajout de paramètres supplémentaires peut conduire à une meilleure estimation de toutes les parties de la courbe expérimentale de loi d’adhérence.

Les courbes des expressions 1 et 2 sont illustrées dans la figure 4.13.

La dérivée des deux expressions 1 et 2 tend vers zéro pour des grandes valeurs de déplacement d’acier  $u_a$ . Cela signifie qu’à la fin de l’essai de pull-out l’acier est arraché par rapport au béton. En d’autres termes, le déplacement de l’acier  $u_a$  continue à augmenter alors que le déplacement du béton  $u_b$  reste constant.

### 4.6.2.2 Modélisation avec des éléments barres d’acier et des éléments volumiques de béton

Des éléments finis 1D sont associés à l’acier au lieu que des éléments finis 3D sont associés au béton.

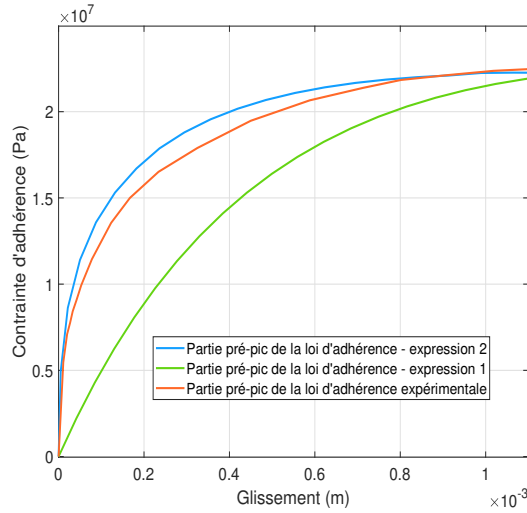


FIGURE 4.12 – Zoom au niveau des parties pré-pic des courbes d’adhérence numériques et expérimentale.

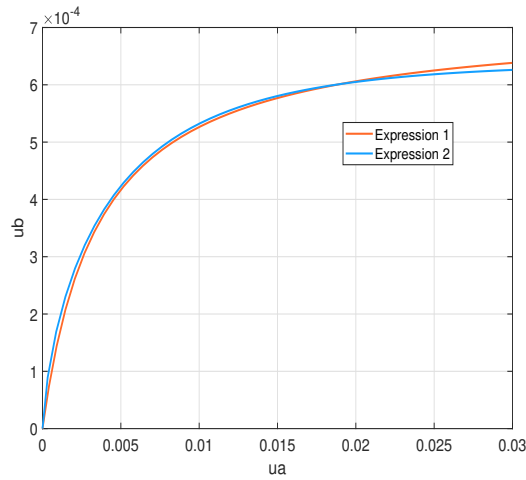


FIGURE 4.13 – Expressions 1 et 2 de relations cinématiques.

Avec une hypothèse d’adhérence parfaite, les expressions utilisées pour relier les déplacements de chaque nœud d’acier à ceux des nœuds de béton sont exprimées tel que :

$$u_{a,x} = \sum_{i=1}^8 N_i u_{bi,x}, u_{a,y} = \sum_{i=1}^8 N_i u_{bi,y}, u_{a,z} = \sum_{i=1}^8 N_i u_{bi,z} \quad (4.82)$$

$N_i$  sont les fonctions de forme de l’élément volumique de béton dans lequel se situe le nœud d’acier.  $u_{a,m}$  est le déplacement du nœud d’acier selon la direction  $m$  de l’espace.  $u_{bi,m}$  est le déplacement du nœud de béton  $bi$  selon la direction  $m$  de l’espace.

Afin de relier les déplacements d’acier et de béton avec des relations cinématiques non linéaires, pour imposer un déplacement relatif acier-béton dans la direction longitudinale, les expressions 1 et 2 sont respectivement réécrite sous la forme  $u_a = f(u_b)$  au lieu de  $u_b = f(u_a)$ , tel que :

$$u_a = \frac{au_b}{1 - bu_b} \quad (4.83)$$

$$u_a = \left[ -\frac{1}{b} \ln \left( \frac{a - u_b}{a} \right) \right]^{\frac{1}{c}} \quad (4.84)$$

$u_b$  est ensuite remplacé par  $\sum_{i=1}^8 N_i u_{bi}$  dans la direction longitudinale, tout en conservant une liaison parfaite acier-béton dans les directions normales ( $u_a = \sum_{i=1}^8 N_i u_{bi}$  dans les directions normales).

Cette approche est testée pour l'expression 1 (équation (4.78)).

#### 4.6.2.2.1 Propriétés des matériaux

Les propriétés des matériaux sont égales à celles utilisées pour la modélisation avec des éléments volumiques d'acier et de béton (voir paragraphe 4.6.2.1.1).

#### 4.6.2.2.2 Maillage

Le maillage 3D choisi est illustré dans la figure 4.14. La figure 4.15 montre la vue de dessus du maillage. Le long de la longueur de contact acier-béton de l'essai, les déplacements des noeuds d'acier sont reliés aux déplacements des noeuds de béton tel que :

$$u_{a,z} = \frac{a \sum_{i=1}^8 N_i u_{bi,z}}{1 - b \sum_{i=1}^8 N_i u_{bi,z}} \quad (4.85)$$

$$u_{a,x} = \sum_{i=1}^8 N_i u_{bi,x} \quad (4.86)$$

$$u_{a,y} = \sum_{i=1}^8 N_i u_{bi,y} \quad (4.87)$$

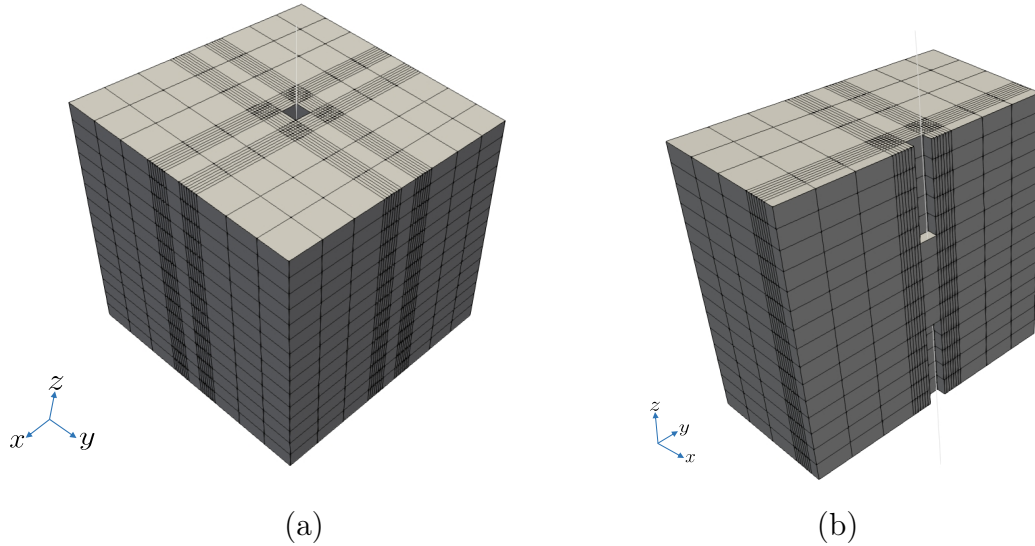


FIGURE 4.14 – Maillage 3D (a) et coupe 3D dans le maillage (b).

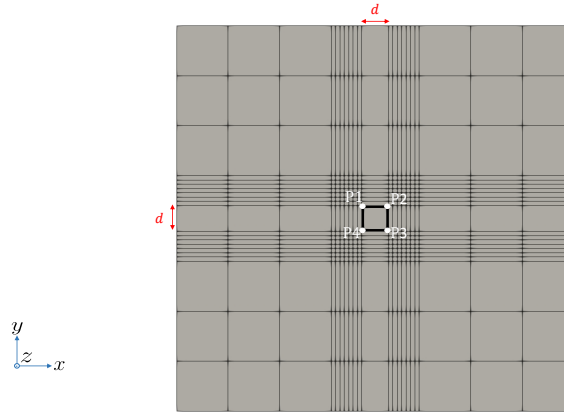


FIGURE 4.15 – Vue de dessus du maillage de pull-out.

#### 4.6.2.2.3 Résultats

Une étude de sensibilité est réalisée par rapport à la distance  $d$  de la figure 4.15. Les courbes de réaction et de loi d'adhérence sont illustrées dans la figure 4.16.

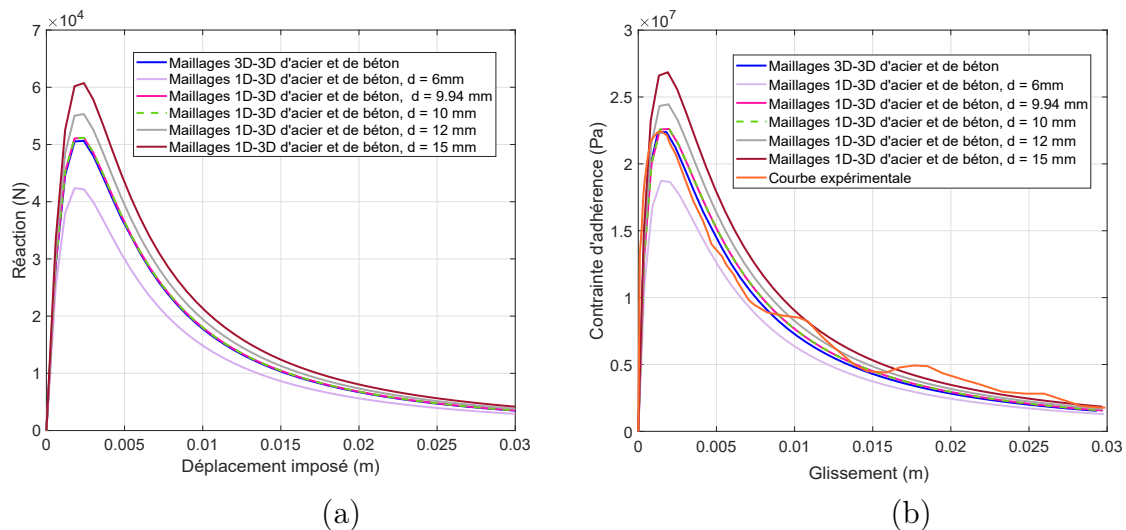


FIGURE 4.16 – Superposition des courbes de réaction des différents choix de modélisation (a) et superposition des courbes d'adhérence comparées à la courbe expérimentale.

Les valeurs de  $d$  de 9.94 mm et 10 mm reproduisent le comportement le plus proche de celui de la simulation 3D-3D avec des éléments finis volumiques d'acier et de béton (voir figures 4.7 et 4.8). Pour la simulation 3D-3D, les relations cinématiques relient les déplacements de deux surfaces cylindriques : la surface extérieure de la barre d'acier et la surface intérieure du béton le long de la longueur de contact. À chaque position longitudinale, les relations cinématiques relient deux cercles. Pour la simulation 1D-3D avec des éléments barres d'acier et des éléments volumiques de béton (voir figure 4.14), l'acier est représenté par un seul point à chaque position longitudinale, où un carré est associé au béton (P1P2P3P4 dans la figure 4.15). Plus ce carré est proche du cercle de la simulation 3D-3D, la concordance entre les résultats numériques de la simulation 1D-3D et ceux de la simulation 3D-3D s'accroît.

#### 4.6.2.2.4 Discussion

À ce stade, il est important de préciser que l'objectif de cet exemple structural avec des relations cinématiques non linéaires est de valider la méthodologie de projection cinématique. Toutefois, la représentation du comportement non linéaire d'interface acier-béton via des relations cinématiques non linéaires de déplacement est une piste qui reste à explorer en détail, ce qui n'est pas fait dans ce travail de thèse. Pour le faire, il serait intéressant de répondre aux questions suivantes :

- Comment créer une approche d'identification de l'expression de relation cinématique à adopter pour relier les déplacements d'acier et de béton ?
- Comment créer une dépendance de la relation cinématique aux paramètres matériaux et géométriques affectant le comportement d'interface ?
- Comment étendre la méthodologie pour représenter un comportement cyclique d'interface ?
- L'expression de la relation cinématique est-elle dépendante de la loi de comportement à associer au béton ? La loi de béton est considérée linéaire lors des modélisations de pull-out de ce chapitre. Il est pourtant intéressant d'évaluer la possibilité de détecter une influence du choix d'une loi de béton non linéaire sur la forme et l'expression de la relation cinématique à adopter.

Ces questions constituent une ouverture de perspectives pour ce travail de thèse sur les relations cinématiques non linéaires pouvant représenter le comportement de l'interface acier-béton. Cette piste n'est pas adoptée pour le reste de ce manuscrit, vu qu'elle nécessite des réponses à ces questions.

L'intérêt s'est porté dans ce travail sur l'utilisation de la méthodologie de projection cinématique pour relier les macro-éléments présentés dans le chapitre 3 à des éléments 2D/3D de béton. Cela est détaillé dans le sous-chapitre 4.7 suivant.

Il convient finalement d'indiquer que plus de détails concernant la méthodologie de projection cinématique présentée dans ce chapitre sont abordés dans [Grange, 2023].

## 4.7 Application du principe de projection cinématique pour relier des macro-éléments à des éléments de béton

Afin de relier les déplacements des macro-éléments présentés dans le chapitre 3 à des éléments 2D/3D de béton, en utilisant la méthode de projection cinématique, il faut définir les degrés de liberté dépendants  $\mathbf{U}_c$  comme étant les degrés de liberté des noeuds d'interface des macro-éléments dans toutes les directions de l'espace, et ceux des noeuds d'acier des macro-éléments dans les directions normales par rapport à la direction de l'acier. Ces degrés de liberté dépendent des degrés de liberté des noeuds de béton. Les degrés de liberté indépendants  $\mathbf{U}_i$  constituent le reste des degrés de liberté de la structure étudiée.

Il convient de souligner que la méthode de doubles multiplicateurs de Lagrange est utilisée dans ce travail pour le cadre de calcul avec des macro-éléments afin d'imposer des conditions aux limites de Dirichlet. La projection cinématique établit le lien entre les macro-éléments et les éléments de béton. Autrement dit, un couplage méthode de doubles multiplicateurs de Lagrange-méthode de projection cinématique est adopté.

Le résidu de la résolution globale est défini par l'équation (4.37) en remplaçant  $\mathbf{F}(\mathbf{U}_{tot})$  par l'expression suivante :

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_{tot}) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{int}(\mathbf{U}) + \mathbf{L}^T \boldsymbol{\lambda}^1 + \mathbf{L}^T \boldsymbol{\lambda}^2 \\ \mathbf{L}\mathbf{U} - \beta \boldsymbol{\lambda}^1 + \beta \boldsymbol{\lambda}^2 \\ \mathbf{L}\mathbf{U} + \beta \boldsymbol{\lambda}^1 - \beta \boldsymbol{\lambda}^2 \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

tel que  $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{U})$  est le vecteur de forces internes de la structure en béton armé étudiée rassemblant les forces internes des macro-éléments et ceux des éléments de béton. Ce vecteur est défini dans le chapitre 3 par l'équation (3.9).

De plus, l'équation (4.40) doit être utilisée pour calculer la dérivée du résidu. Afin de calculer cette dérivée, l'équation (4.41) est adoptée pour la dérivation de  $\mathbf{F}(\mathbf{U}_{tot})$  par rapport à  $\mathbf{U}_{tot}$ .

La dérivation des forces internes  $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{U})$  par rapport à  $\mathbf{U}$  est calculée selon l'équation (3.12) du chapitre 3. Cette équation prend en compte les contributions des éléments 2D/3D de béton et des macro-éléments constituant le maillage de la structure en béton armé. L'algorithme 1 de résolution globale est remplacé donc par l'algorithme 3. L'algorithme 2 demeure inchangé.

---

**Algorithme 3** Algorithme de résolution global avec la méthode de projection cinématique

---

$\mathbf{U}_{tot_{n+1}} \leftarrow \mathbf{U}_{tot_n}$  (= 0 pour le premier pas de temps)

$\mathbf{U}_{i_{n+1}} \leftarrow \mathbf{U}_{i_n}$  (= 0 pour le premier pas de temps)

$conv \leftarrow 0$

$k \leftarrow 0$

$\mathbf{U}_{tot_k} = \mathbf{U}_{tot_{n+1}}$

$\mathbf{U}_{i_k} = \mathbf{U}_{i_{n+1}}$

**tant que**  $conv = 0$  **faire**

**Calcul** de  $\mathbf{R}_k = \mathbf{P}^T \mathbf{F}_{tot_n} - \mathbf{P}^T \mathbf{F}_k(\mathbf{U}_{tot_k})$ . À cette étape, l'algorithme local 2 est appelé pour calculer la contribution de chaque macro-élément dans  $\mathbf{F}_k$  (représentée par le vecteur  $\mathbf{f}_b$  dans l'algorithme 2)

**Calcul** de  $\mathbf{U}_{i_{k+1}} = \mathbf{U}_{i_k} - \left( \frac{\partial \mathbf{R}_k}{\partial \mathbf{U}_i} \right)^{-1} \mathbf{R}_k$ . À cette étape, l'algorithme local 2 est appelé pour calculer la contribution de chaque macro-élément dans  $\frac{\partial \mathbf{R}_k}{\partial \mathbf{U}_i}$  (représentée par la matrice  $\mathbf{k}_{em}$  dans l'algorithme 2)

**Calcul** de  $\mathbf{U}_{c_{k+1}}$  qui sont les degrés de liberté dépendants (degrés de liberté de l'interface dans toutes les directions et de l'acier dans les directions normales) selon les relations cinématiques

**Calcul** de  $\mathbf{U}_{tot_{k+1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{c_{k+1}} & \mathbf{U}_{i_{k+1}} \end{bmatrix}^T$

**Calcul** de  $\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{P}^T \mathbf{F}_{tot_n} - \mathbf{P}^T \mathbf{F}_{k+1}(\mathbf{U}_{tot_{k+1}})$

**si**  $\mathbf{R}_{k+1} < tolerance$  **alors**

$conv \leftarrow 1$

$\mathbf{U}_{tot_n} = \mathbf{U}_{tot_{k+1}}$

**sinon**

$k \leftarrow k + 1$

**fin si**

**fin tant que**

---

## 4.8 Conclusions

Dans ce chapitre, une technique permettant d'imposer des relations cinématiques dans le cadre d'une résolution aux éléments finis est proposée. Cette technique est basée sur un principe de projection cinématique. Elle permet d'imposer des expressions de relations cinématiques linéaires et non linéaires.

Cette approche est validée pour un exemple de ressorts en série avec différentes expressions de relations cinématiques, et différentes lois de comportement associées aux ressorts. Ces tests démontrent l'avantage de l'utilisation de la méthodologie de projection cinématique en comparaison avec des techniques classiques d'imposition de relations cinématiques (méthodes de simples et de doubles multiplicateurs de Lagrange). En effet, la méthode de projection cinématique a l'avantage de diminuer la taille du système à résoudre.

Un second test de validation de l'approche est étudié. Ce test a pour but de reproduire une courbe expérimentale de loi d'adhérence d'un essai de pull-out. Deux expressions de relations cinématiques sont identifiées pour relier les déplacements des noeuds d'acier à ceux des noeuds de béton. Deux configurations de maillages sont étudiées : l'une avec des maillages volumiques d'acier et de béton, et l'autre avec des éléments barres associés à l'acier et des éléments volumiques de béton.

La finalité de la proposition de l'approche de projection cinématique dans ce travail de thèse consiste principalement à établir le lien entre les macro-éléments du chapitre 3 et les éléments 2D/3D de béton. Il est donc à noter que cette approche de projection est utilisée dans les exemples d'application de ce chapitre 3, et relie les macro-éléments des maillages utilisés aux éléments de béton. Cela est discuté dans le sous-chapitre 4.7.

Le chapitre 5 suivant présente une partie de ce travail de thèse dans laquelle le comportement non linéaire de l'interface acier-béton est incorporé au sein d'éléments semi-globaux poutres et plaques.

# Chapitre 5

## Modèles de poutres et de plaques enrichies

La modélisation du comportement de l'interface acier-béton au sein d'éléments poutres et plaques est particulièrement intéressante puisque ces types d'éléments finis semi-globaux sont connus pour leur avantage de fournir des résultats numériques représentatifs avec des temps de calcul raisonnables [Capdevielle, 2016] [Gurov, 2022]. Dans ce chapitre, une technique d'enrichissement cinématique est proposée pour la prise en compte du comportement d'interface acier-béton dans le cadre d'éléments semi-globaux poutres et plaques. Ainsi, le principe de l'approche proposée est de définir un élément enrichi dans lequel plusieurs contributions sont assemblées : la contribution d'un élément fini poutre ou plaque en béton, la contribution d'un élément fini de type barre pour représenter l'acier, et la contribution de contraintes d'adhérence acier-béton.

Les sous-chapitres 5.1 et 5.2 rappellent des formulations de poutres et de plaques proposées dans la littérature. Le sous-chapitre 5.3 présente des techniques d'enrichissement qui peuvent être appliquées aux cinématiques de poutres et de plaques.

### 5.1 Modèles de poutres

Les poutres sont généralement des éléments élancés dont l'une des dimensions est significativement plus grande que les deux autres. Elles peuvent être conçues pour résister à des chargements de flexion, pouvant être composée ou déviée, selon le fonctionnement de la structure. Plusieurs modèles de poutres plus ou moins complexes sont proposés dans la littérature [Bitar, 2017]. On peut notamment distinguer les formulations d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko, basées sur des relations cinématiques de déplacements et de déformations. En parallèle, une incorporation plus aisée des lois de comportement non linéaires des matériaux est possible dans le cadre des modèles de poutres multifibres. Les formulations des théories de poutres d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko, et celle des poutres multifibres, sont brièvement rappelées dans ce sous-chapitre.

#### 5.1.1 Modèles basés sur des relations cinématiques

Les théories de poutres d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko définissent une poutre par sa ligne moyenne et sa section. Ces deux théories sont présentées ici.



### 5.1.1.1 Hypothèses cinématiques

Les hypothèses cinématiques proposent des relations cinématiques qui relient les déplacements d'un point M de la poutre au déplacement du point G, la projection de M sur la fibre moyenne de la poutre.

#### 5.1.1.1.1 Poutre Euler-Bernoulli

Cette théorie suppose que la section plane de la poutre perpendiculaire à sa fibre moyenne reste plane après déformation, et reste également perpendiculaire à la fibre moyenne (voir figure 5.1). Elle néglige en outre les déformations de cisaillement. Seules les déformations axiales sont prises en compte.

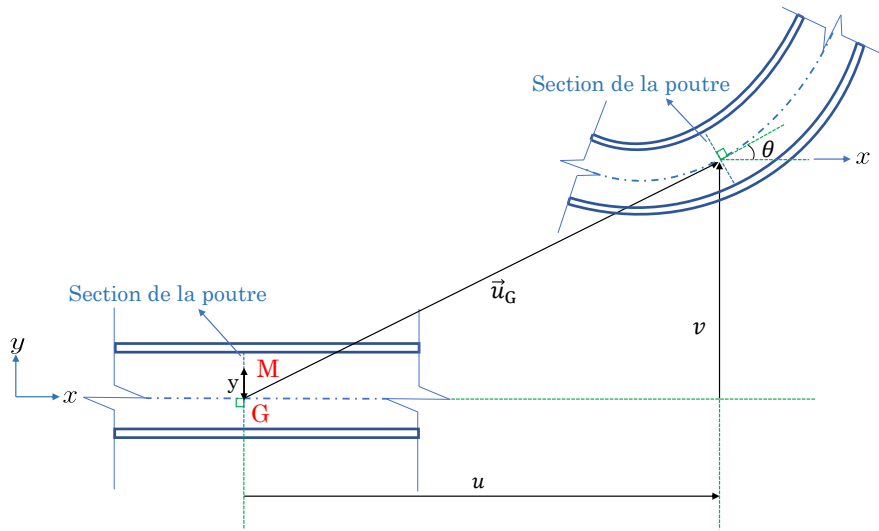


FIGURE 5.1 – Cinématique de la poutre d'Euler Bernoulli.

Soit M un point arbitraire de la poutre, et G sa projection sur la ligne moyenne de cette poutre. L'excentricité de M par rapport à l'axe neutre est égale à y. Le déplacement du point G est décrit par un vecteur de composantes u et v selon les directions horizontale et verticale respectivement. Les vecteurs de déplacement de  $\mathbf{u}_M(x)$  M et  $\mathbf{u}_G(x)$  de G sont liés comme suit :

$$\mathbf{u}_M(x) = \mathbf{u}_G(x) + \theta(x) \wedge \overrightarrow{GM} = \begin{bmatrix} u - y\theta \\ v \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

tel que :

$$\theta(x) = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5.2)$$

ce qui donne :

$$\mathbf{u}_M(x) = \mathbf{u}_G(x) + \theta(x) \wedge \overrightarrow{GM} = \begin{bmatrix} u - y \frac{\partial v}{\partial x} \\ v \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

La déformation longitudinale  $\varepsilon_x(x, y)$  en M est déduite en dérivant la première ligne de l'équation (5.3) par rapport à la direction longitudinale x de la poutre. Étant donné que la section de la poutre est supposée rester droite et perpendiculaire à la fibre moyenne, la déformation de cisaillement  $\gamma_{xy}(x, y)$  est nulle.

$$\varepsilon_x(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (5.4)$$

#### 5.1.1.1.2 Poutre Timoshenko

Cette théorie suppose que la section plane de la poutre perpendiculaire à sa fibre moyenne reste plane après déformation, mais ne reste pas forcément perpendiculaire à la fibre moyenne (voir figure 5.2). De plus, les déformations de cisaillement  $\gamma_{xy}(x, y)$  sont considérées, de fait des hypothèses cinématiques considérées et rappelées ci-avant.

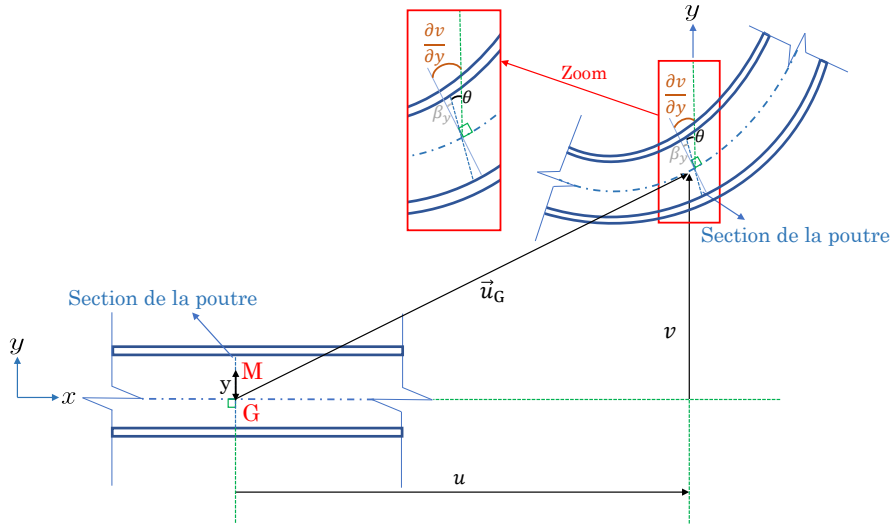


FIGURE 5.2 – Cinématique d'une poutre de Timoshenko.

La relation cinématique de l'équation (5.1) est valable pour la théorie de poutre de Timoshenko. L'équation (5.2) n'est pourtant pas applicable.

La déformation longitudinale  $\varepsilon_x$  et la déformation de cisaillement  $\gamma_{xy}$  en M sont liées aux dérivées du déplacement de G et à la rotation de la section  $\theta$ .

$$\varepsilon_x(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (5.5)$$

$$\gamma_x(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} - \theta = \beta_y \quad (5.6)$$

#### 5.1.1.2 Formulation faible

Soit P une poutre de longueur  $L$  et de section  $S$ . Un vecteur  $\mathbf{f}$  de densité volumique de forces et de moments est appliqué au volume de la poutre. Un vecteur de forces  $\mathbf{F}_{\text{tot}}$  est appliqué aux bords de la poutre (voir figure 5.3). La résolution de l'équilibre de cette poutre consiste à trouver le vecteur de déplacements généralisés  $\mathbf{u} = [ u \ v \ \theta ]^T$  en tous points de la poutre.

Un vecteur de déformations généralisées est défini au niveau de chaque section de la poutre tel que :

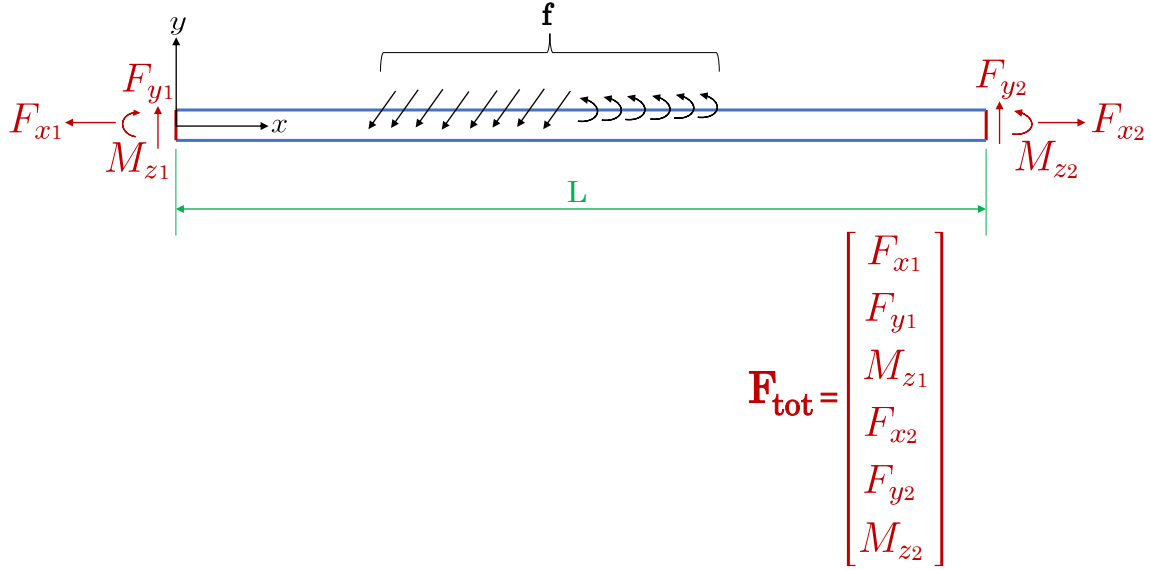


FIGURE 5.3 – Élément poutre.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u(x)}{\partial x} \\ \beta_y \\ \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

sachant que la théorie d'Euler-Bernoulli néglige la déformation de cisaillement  $\beta_y$ .

Un vecteur de forces généralisées  $\mathbf{F}_s$  est défini pour chaque section de la poutre. Cette section est soumise à trois types de sollicitations : un effort normal  $F_x$ , un effort tranchant  $F_y$ , et un moment de flexion  $M_z$ .

$$\mathbf{F}_s = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

tel que :

$$F_x = \int_S \sigma_x dS, F_y = \int_S \tau_{xy} dS, M_z = - \int_S y \sigma_x dS \quad (5.9)$$

sachant que  $\sigma_x$  et  $\tau_{xy}$  sont les contraintes normales et tangentielles de la poutre. Les contraintes tangentielles  $\tau_{xy}$  ne sont pas prises en compte dans la théorie d'Euler-Bernoulli.

Le vecteur  $\mathbf{F}_s$  est exprimé en fonction du vecteur de déformations généralisées  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Pour un comportement élastique linéaire de la poutre, cette expression est formulée comme suit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_s} = \underbrace{\begin{bmatrix} \int_S E dS & 0 & - \int_S E y dS \\ 0 & \int_S k_c G dS & 0 \\ - \int_S E y dS & 0 & \int_S E y^2 dS \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}_s} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u(x)}{\partial x} \\ \beta_y \\ \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{k}_s \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.10)$$

$E$  est le module d'Young de la poutre.  $G$  est son module de cisaillement.  $k_c$  est un facteur de correction du cisaillement. [Cowper, 1966] propose de relier la valeur de  $k_c$  au coefficient de

poisson  $\nu$  de la poutre. Pour une section transversale de poutre rectangulaire,  $k_c$  est estimé comme suit :

$$k_c = \frac{10(1 + \nu)}{12 + 11\nu} \quad (5.11)$$

Le principe des puissances virtuelles de la poutre se présente ainsi :

$$\int_x \boldsymbol{\varepsilon}^{*T} \mathbf{F}_s dx = \mathbf{u}^{*T} \int_V \mathbf{f} dV + \mathbf{u}^{*T} \mathbf{F}_{\text{tot}} \quad (5.12)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^{*T}$  et  $\mathbf{u}^{*T}$  sont deux champs de déformation et de déplacement virtuels de la poutre. Les forces généralisées  $\mathbf{F}_s$  sont intégrées le long de la poutre (selon son axe  $x$ ). Les densités de forces volumiques  $\mathbf{f}$  sont intégrées sur le volume de la poutre. Dans l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire, l'équation (5.12) est exprimée de la façon suivante :

$$\int_x \boldsymbol{\varepsilon}^{*T} \mathbf{k}_s \boldsymbol{\varepsilon} dx = \mathbf{u}^{*T} \int_V \mathbf{f} dV + \mathbf{u}^{*T} \mathbf{F}_{\text{tot}} \quad (5.13)$$

### 5.1.1.3 Discrétisation

Pour résoudre l'équilibre de la poutre, sa longueur est discrétisée en plusieurs éléments finis. Chaque élément est composé de deux nœuds à trois degrés de liberté chacun (voir figure 5.4).

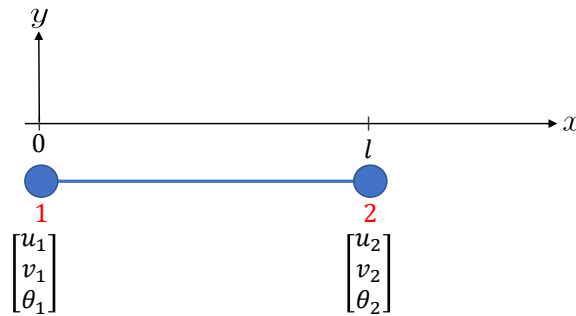


FIGURE 5.4 – Degrés de liberté de l'élément poutre.

$u_i$  est le déplacement du nœud  $i$  selon  $x$ .  $v_i$  est son déplacement selon  $y$ .  $\theta_i$  représente la rotation de la section de la poutre ayant la position longitudinale du nœud  $i$ .  $\mathbf{u}_{el} = [u_1 \ v_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ \theta_2]^T$  est le vecteur des degrés de liberté de l'élément. Une matrice de fonctions d'interpolation  $\mathbf{N}$  permet de calculer le vecteur de degrés de liberté  $\mathbf{u}(x) = [u(x) \ v(x) \ \theta(x)]^T$  d'un point de l'élément poutre en fonction du vecteur de degrés de liberté élémentaire  $\mathbf{u}_{el}$ .

$$\begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \\ \theta(x) \end{bmatrix} = \mathbf{N} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Des expressions différentes de la matrice  $\mathbf{N}$  sont définies selon la théorie de poutre adoptée.

### 5.1.1.3.1 Poutre Euler-Bernoulli

Avec la théorie d'Euler-Bernoulli, la matrice  $\mathbf{N}$  est exprimée comme suit :

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & 0 & 0 & \frac{x}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} & x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} & 0 & \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} & -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \\ 0 & -\frac{6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3} & 1 - \frac{4x}{l} + \frac{3x^2}{l^2} & 0 & \frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3} & -\frac{2x}{l} + \frac{3x^2}{l^2} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

La dérivation de l'équation (5.15) permet d'exprimer  $\frac{\partial u(x)}{\partial x}$  étant la dérivée  $\mathbf{B}'$  de  $\mathbf{N}$  multipliée par  $\mathbf{u}_{el}$ .

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \end{bmatrix} = \mathbf{B}' \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

avec :

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3} & 1 - \frac{4x}{l} + \frac{3x^2}{l^2} & 0 & \frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3} & -\frac{2x}{l} + \frac{3x^2}{l^2} \\ 0 & -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} & -\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2} & 0 & \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} & -\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

La déformation de cisaillement  $\beta_y$  étant nulle dans la théorie d'Euler-Bernoulli, le vecteur de déformations généralisées  $\boldsymbol{\varepsilon}$  peut être réduit à :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u(x)}{\partial x} \\ \beta_y \\ \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}'_1 \\ 0 \\ \mathbf{B}'_3 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{el} = \mathbf{B} \mathbf{u}_{el} \quad (5.18)$$

$\mathbf{B}'_i$  est la ligne  $i$  de la matrice  $\mathbf{B}'$ .

En remplaçant  $\boldsymbol{\varepsilon}$  par son expression en fonction de  $\mathbf{u}_{el}$ , et en assemblant les contributions des éléments de la discrétisation, le principe des puissances virtuelles de l'équation (5.12) s'écrit comme suit :

$$\mathbf{A}_{e=1}^{N_e} \left[ \int_l \mathbf{u}_{el}^{*T} \mathbf{B}^T \mathbf{k}_s \mathbf{B} \mathbf{u}_{el} dl \right] = \mathbf{A}_{e=1}^{N_e} \left[ \mathbf{u}_{el}^{*T} \int_{\Omega_e} \mathbf{f} d\Omega_e \right] + \mathbf{A}_{e=1}^{N_e} \left[ \mathbf{u}_{el}^{*T} \right] \mathbf{F}_{\text{tot}} \quad (5.19)$$

$l$  et  $\Omega_e$  désignent la longueur élémentaire et le volume élémentaire d'un élément fini poutre.  $\mathbf{u}_{el}^*$  est un vecteur élémentaire virtuel de degrés de liberté.  $\mathbf{A}$  désigne l'opérateur d'assemblage. Le maillage constitué est formé de  $N_e$  élément poutres. D'où :

$$\mathbf{U}^{*T} \underbrace{\mathbf{A}_{e=1}^{N_e} \left[ \int_l \mathbf{B}^T \mathbf{k}_s \mathbf{B} dl \right]}_{\mathbf{k}} \mathbf{U} = \mathbf{U}^{*T} \mathbf{A}_{e=1}^{N_e} \left[ \int_{\Omega_e} \mathbf{f} d\Omega_e \right] + \mathbf{U}^{*T} \mathbf{F}_{\text{tot}} \quad (5.20)$$

$\mathbf{U}$  est le vecteur de l'ensemble des degrés de liberté du maillage.  $\mathbf{U}^*$  est un champ virtuel de degrés de liberté. L'équation (5.20) est simplifiée par  $\mathbf{U}^{*T}$  pour établir l'équilibre entre les vecteurs des forces internes  $\mathbf{F}_{int}$  et externes  $\mathbf{F}_{ext}$  :

$$\mathbf{F}_{int} = \mathbf{F}_{ext} \quad (5.21)$$

avec :

$$\mathbf{F}_{int} = \underbrace{\mathbf{A} \left[ \int_l^{N_e} \mathbf{B}^T \mathbf{k}_s \mathbf{B} dl \right]}_{\mathbf{k}} \mathbf{U} = \mathbf{kU} \quad (5.22)$$

et :

$$\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{A} \left[ \int_{\Omega_e} \mathbf{f} d\Omega_e \right] + \mathbf{F}_{tot} \quad (5.23)$$

$\mathbf{k}$  est la rigidité de l'élément poutre. Avec la théorie d'Euler-Bernoulli, elle est exprimée en fonction du module d'Young  $E$  de la poutre, de sa section  $S$ , de sa longueur  $l$ , et du moment d'inertie  $I$  de sa section.

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{ES}{l} & 0 & 0 & \frac{-ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{-12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{-ES}{l} & 0 & 0 & \frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{-6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

#### 5.1.1.3.2 Poutre Timoshenko

Différentes formulations sont proposées dans la littérature pour les poutres Timoshenko, avec différentes expressions pour les fonctions d'interpolation [Pegon, 1994] [Guedes *et al.*, 1994] [Donea et Lamain, 1987] [Tessler et Dong, 1981] [Caillerie *et al.*, 2015]. Une option de formulation est présentée ici (formulation FLI (Full-Linear-Independent) avec des fonctions d'interpolation linéaires indépendantes pour les champs de déplacement transversal et de rotation) [Pegon, 1994] [Guedes *et al.*, 1994]. Une présentation détaillée des différentes formulations avec des études de comparaison est présentée dans [Bitar, 2017]. La matrice  $\mathbf{N}$  des fonctions de forme de la formulation FLI est la suivante :

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & 0 & 0 & \frac{x}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{x}{l} & 0 & 0 & \frac{x}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{x}{l} & 0 & 0 & l \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Les déformations généralisées sont exprimées tel que :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{u}_{el} \quad (5.26)$$

avec :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{l} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Pour l'estimation de  $\beta_y$ , les termes multipliant  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont considérés égaux à  $\frac{1}{2}$  et ne sont donc pas directement calculés en dérivant les fonctions de forme. Cela permet d'éviter les problèmes de blocage par cisaillement [Pegon, 1994].

Les équations d'équilibre (5.20) et (5.21) sont valables pour la théorie de Timoshenko. La matrice de rigidité est exprimée comme suit :

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{ES}{l} & 0 & 0 & -\frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_c GS}{l} & \frac{k_c GS}{2} & 0 & -\frac{k_c GS}{l} & \frac{k_c GS}{2} \\ 0 & \frac{k_c GS}{2} & \frac{EI}{l} + \frac{k_c GS}{4} & 0 & -\frac{k_c GS}{2} & -\frac{EI}{l} + \frac{k_c GS}{4} \\ -\frac{ES}{l} & 0 & 0 & \frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_c GS}{2} & -\frac{k_c GS}{2} & 0 & \frac{k_c GS}{l} & -\frac{k_c GS}{2} \\ 0 & \frac{k_c GS}{2} & -\frac{E_b I_b}{l} + \frac{k_c GS}{4} & 0 & -\frac{k_c GS}{2} & \frac{E_b I_b}{l} + \frac{k_c GS}{4} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

### 5.1.2 Modèles de poutres multifibres

L'approche de poutres multifibres consiste à définir une section de la poutre au niveau de ses points de Gauss. Cette section est discrétisée. Des déformations généralisées sont calculées aux points de Gauss de l'élément. En parallèle, et en utilisant une hypothèse cinématique basée sur la théorie d'Euler-Bernoulli ou de Timoshenko, ces déformations généralisées sont utilisées pour calculer les déformations totales au niveau des fibres de la section transversale. De plus, des lois de comportement non linéaires sont attribuées à chaque fibre de la section, ce qui permet de représenter des éléments décrivant des matériaux hétérogènes. Les relations contrainte-déformation conduisent ensuite au calcul des contraintes à chaque point de Gauss de la section. Les forces généralisées sont finalement calculées par intégration numérique sur la section transversale, puis interpolées en tant que forces nodales au niveau des éléments.

La figure 5.5 décrit le principe de l'approche multifibre.

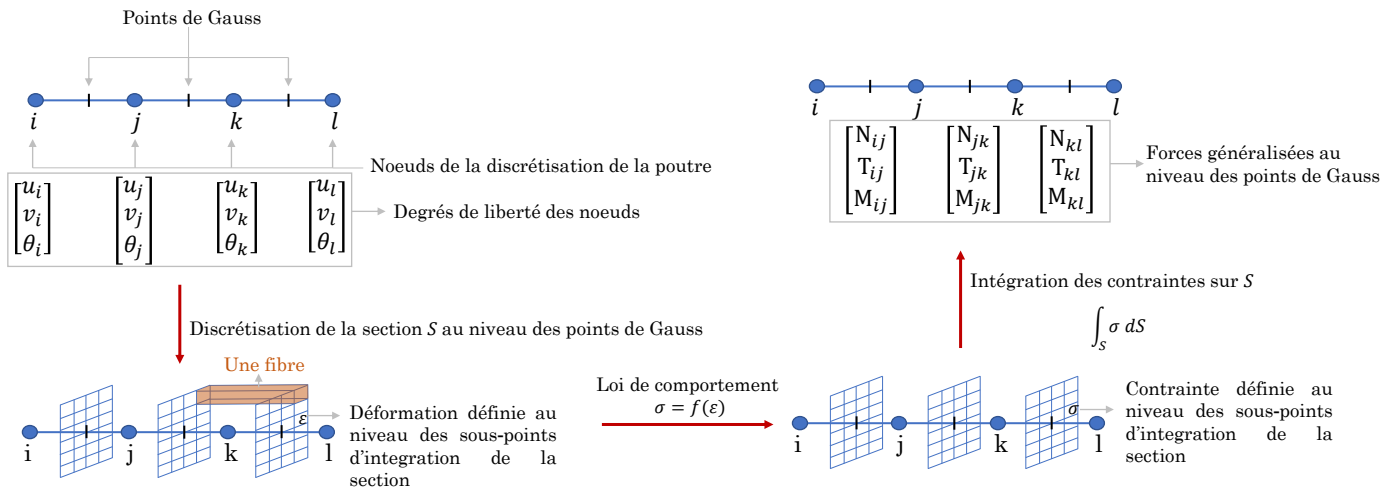


FIGURE 5.5 – Principe de l'approche de poutre multifibre.

Pour le cas particulier d'un comportement linéaire des fibres de la poutre, les termes de la matrice  $\mathbf{k}_s$  de l'équation (5.10) peuvent être exprimés comme suit :

$$\int_S E dS = \sum_{i=1}^n E_i S_i, \int_S E y dS = \sum_{i=1}^n E_i y_i S_i, \int_S k G dS = \sum_{i=1}^n k_i G_i S_i, \int_S E y^2 dS = \sum_{i=1}^n E_i y_i^2 S_i \quad (5.29)$$

$n$  est le nombre de fibres de la poutre.  $E_i$  et  $S_i$  sont les modules d'Young et les sections des fibres  $i$ .  $y_i$  désigne l'ordonnée des lignes centrales des fibres par rapport à l'axe de la poutre.

Pour une poutre composée d'un matériau homogène ayant un comportement élastique linéaire, les intégrales de l'équation (5.29) peuvent facilement être calculés en considérant des points de Gauss dans la section de la poutre. Cela peut conduire à un calcul plus précis des intégrales, sans la nécessité de discrétiser cette section.

## 5.2 Modèles de plaques

Les plaques sont généralement des éléments dont l'une des dimensions est significative-ment plus petite que les 2 autres. Ce sous-chapitre rappelle des formulations de plaques monocouches et multicouches bien connues de la littérature. Ces formulations seront enrichies selon les principes présentés dans le chapitre 5.3 pour représenter le comportement de l'interface acier-béton.

### 5.2.1 Modèles de plaques monocouches

Une plaque est définie par son plan médian  $\Omega$  et une épaisseur  $h$ , comme le montre la figure 5.6.

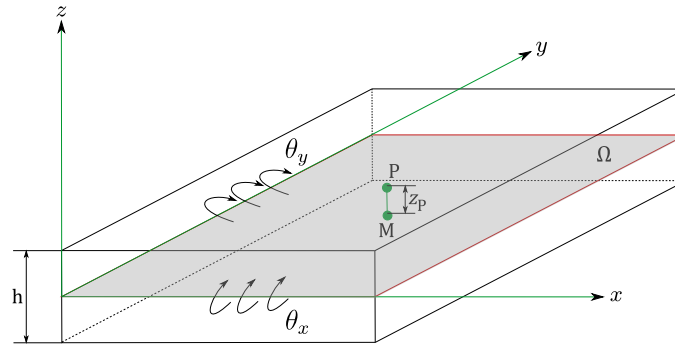


FIGURE 5.6 – Illustration de la plaque.

#### 5.2.1.1 Cinématique d'un élément plaque

Si  $P$  est un point arbitraire appartenant à la plaque et  $M$  sa projection sur le plan médian, la cinématique de la plaque impose que :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, z_P) = \begin{bmatrix} u_x(\mathbf{x}, z_P) \\ v_y(\mathbf{x}, z_P) \\ w_z(\mathbf{x}, z_P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x(\mathbf{x}) \\ v_y(\mathbf{x}) \\ w_z(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + z_P \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x(\mathbf{x}) \\ \theta_y(\mathbf{x}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$\mathbf{x}$  est le vecteur position dans le plan  $xy$  du point  $M$ .  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, z_P)$  est le vecteur déplacement du point  $P$  selon les 3 directions  $x, y$ , et  $z$ . L'équation (5.30) peut être réécrite sous une forme condensée comme suit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, z_P) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + z_P \mathbf{R} \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}) \quad (5.31)$$

avec :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} u_x(\mathbf{x}) \\ v_y(\mathbf{x}) \\ w_z(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_x(\mathbf{x}) \\ \theta_y(\mathbf{x}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$



$\mathbf{u}(\mathbf{x})$  est le vecteur déplacement du point M.  $\theta_x(\mathbf{x})$  et  $\theta_y(\mathbf{x})$  sont les rotations de la section de la plaque par rapport aux axes  $x$  et  $y$ . Il est possible de définir trois champs de déformation comme suit :

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ e_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ 2e_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \end{bmatrix}, \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \kappa_x = \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \kappa_y = -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ 2\kappa_{xy} = \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_x = \frac{\partial w_z}{\partial x} + \theta_y \\ \gamma_y = \frac{\partial w_z}{\partial y} - \theta_x \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

avec :

- $\mathbf{e}$  : champ de déformations membranaires.
- $\mathbf{k}$  : champ de déformations de flexion.
- $\boldsymbol{\gamma}$  : champ de déformations de cisaillement.

Le champ de déformations de cisaillement  $\boldsymbol{\gamma}$  est supposé nul avec la théorie des plaques minces Kirchhoff-Love. La théorie des plaques épaisses de Mindlin-Reissner considère quant-à elle ce champ de déformations et suppose qu'il peut être non nul. Les équations de compatibilité cinématique s'expriment comme suit :

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, z_P) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, z_P) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{x}, z_P)) \quad (5.34)$$

avec :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} + z_P \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x + z_P \kappa_x \\ e_y + z_P \kappa_y \\ 2e_{xy} + 2z_P \kappa_{xy} \\ \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Une loi de comportement est utilisée pour définir un lien entre le champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et le champ de déformations  $\boldsymbol{\epsilon}$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (5.36)$$

Pour un comportement élastique linéaire :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} \quad (5.37)$$

La matrice  $\mathbf{C}$  est constituée de deux parties  $\mathbf{C}_m$  et  $\mathbf{C}_f$  tel que :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_m & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_f \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

$\mathbf{C}_m$  est la matrice de comportement membranaire de la plaque. Pour ce comportement, une hypothèse de contraintes planes est utilisée. La matrice  $\mathbf{C}_f$  est associée au comportement de flexion hors plan de la plaque. Pour une plaque constituée d'un matériau homogène isotrope ayant un comportement élastique linéaire,  $\mathbf{C}_m$  et  $\mathbf{C}_f$  sont définis comme suit :

$$\mathbf{C}_m = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_f = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{k(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{k(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

avec :

- $E$  : le module d'Young de la plaque.
- $\nu$  : le coefficient de poisson de la plaque.
- $k$  : un coefficient de correction de cisaillement.

d'où :

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Le vecteur de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  est composé d'une partie de contraintes dans le plan  $\boldsymbol{\sigma}_m$  (contraintes de membrane) et d'une partie hors plan  $\boldsymbol{\sigma}_f$  (contraintes de flexion), tel que :

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[ \underbrace{\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy}}_{\boldsymbol{\sigma}_m^T} \ \underbrace{\sigma_{xz} \ \sigma_{yz}}_{\boldsymbol{\sigma}_f^T} \right]^T \quad (5.41)$$

Pour l'élément plaque un vecteur de forces généralisés  $\mathbf{F} = [\mathbf{N} \ \mathbf{M} \ \mathbf{T}]^T$  est défini tel que :

$$\mathbf{N} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma}_m dz, \quad \mathbf{M} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \boldsymbol{\sigma}_m dz, \quad \mathbf{T} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma}_f dz \quad (5.42)$$

Avec la théorie des plaques on s'intéresse à relier le vecteur de forces généralisées  $\mathbf{F}$  au vecteur de déformations généralisé  $\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbf{e} \ \mathbf{k} \ \boldsymbol{\gamma}]^T$  tel que :

$$\mathbf{F} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

La matrice  $\mathbf{D}$  est calculée comme suit :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m & \mathbf{D}_{mf} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{mf} & \mathbf{D}_f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_t \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

avec :

$$\mathbf{D}_m = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{C}_m dz, \quad \mathbf{D}_{mf} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \mathbf{C}_m dz, \quad \mathbf{D}_f = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \mathbf{C}_m dz, \quad \mathbf{D}_t = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{C}_f dz \quad (5.45)$$

La matrice  $\mathbf{D}_m$  décrit le comportement membranaire de la plaque. La matrice  $\mathbf{D}_{mf}$  permet de décrire le couplage membrane-flexion, et la matrice  $\mathbf{D}_t$  décrit le cisaillement hors plan.

### 5.2.1.2 Principe des puissances virtuelles

Le bord du plan moyen  $\Omega$  de la plaque est noté  $\partial\Omega$ . Il est composé de deux parties complémentaires  $\partial\Omega_f$  et  $\partial\Omega_d$ . Des valeurs de déplacements et de rotations sont imposées le long de  $\partial\Omega_d$ . Des forces et des moments linéiques sont imposés le long de  $\partial\Omega_f$ . Des forces (et des moments) surfaciques d'une densité  $\mathbf{p}$  sont appliqués sur  $\Omega$ .  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à  $\partial\Omega_d$  (dirigé vers l'extérieur de la plaque).

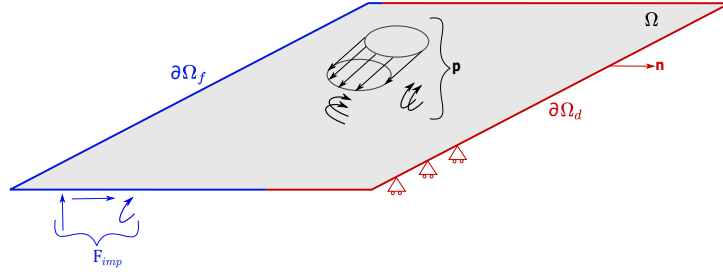


FIGURE 5.7 – Plan médian de la plaque et conditions aux limites.

La résolution de l'équilibre d'une plaque consiste à trouver un vecteur de déplacements généralisés  $\mathbf{u}_p = [u_x(\mathbf{x}) \ v_y(\mathbf{x}) \ w_z(\mathbf{x}) \ \theta_x(\mathbf{x}) \ \theta_y(\mathbf{x}) \ \theta_z(\mathbf{x})]^T$  pour tout point  $p$  de la plaque.

Le principe de puissances virtuelles de la plaque s'écrit comme suit :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^{*T} \mathbf{F} d\Omega = \mathbf{u}_p^{*T} \int_{\Omega} \mathbf{p} d\Omega + \mathbf{u}_p^{*T} \int_{\Omega_f} \mathbf{F}_{imp} d\Omega_f + \mathbf{u}_p^{*T} \int_{\Omega_d} \mathbf{F}_d d\Omega_d \quad (5.46)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^*$  et  $\mathbf{u}_p^*$  sont deux champs virtuels de déformations généralisées et de déplacements généralisés, respectivement.  $\mathbf{F}_d$  est la projection des forces généralisées  $\mathbf{F}$  le long de  $\partial\Omega_d$  sur  $\mathbf{n}$ .  $\mathbf{F}_{imp}$  est le vecteur de forces (et de moments) imposés le long de  $\partial\Omega_f$ . D'une manière condensée, la dernière équation s'écrit comme suit :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^{*T} \mathbf{F} d\Omega = \mathbf{u}_p^{*T} \mathbf{F}_{ext} \quad (5.47)$$

avec :

$$\mathbf{F}_{ext} = \int_{\Omega} \mathbf{p} d\Omega + \int_{\Omega_f} \mathbf{F}_{imp} d\Omega_f + \int_{\Omega_d} \mathbf{F}_d d\Omega_d \quad (5.48)$$

### 5.2.1.3 Discrétisation

Pour résoudre l'équation d'équilibre, la géométrie de la plaque est discrétisée en plusieurs éléments finis. Pour chaque élément fini, il est possible d'écrire que :

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{N} \mathbf{u}_{el} = [u_x \ v_y \ w_z \ \theta_x \ \theta_y \ \theta_z]^T \quad (5.49)$$

$\mathbf{u}_{el}$  est le vecteur regroupant les déplacements généralisés des nœuds de l'élément fini plaque. Un degré de liberté  $\theta_z$  de rotation par rapport à  $z$  est souvent considéré pour des raisons de compatibilité cinématique [Bitar et Richard, 2020], même si on ne définit pas de rigidité associée. Autrement dit, si on veut assembler, à titre d'exemple, des éléments plaques à des éléments poutres 3D ayant des degrés de liberté de rotation par rapport à  $z$ , il convient par commodité de définir des degrés de liberté de rotation par rapport à  $z$  pour les éléments plaques.  $\mathbf{N}$  est la matrice des fonctions de forme de l'élément. Le vecteur de déformations généralisées est calculé comme suit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{u}_{el} \quad (5.50)$$

$\mathbf{B}$  est la matrice des dérivées des fonctions de forme. Le principe des puissances virtuelles appliqué à un seul élément fini plaque  $\Omega_e$  ayant un comportement élastique linéaire est exprimé comme suit :

$$\mathbf{u}_{el}^{*T} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega_e \mathbf{u}_{el} = \mathbf{u}_{el}^{*T} \mathbf{F}_e \quad (5.51)$$

$\mathbf{F}_e$  représente l'ensemble des forces externes appliquées à l'élément.  $\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega_e$  est la matrice de rigidité d'un élément plaque. Pour la structure complète, l'opérateur d'assemblage  $\mathbf{A}$  est introduit tel que :

$$\mathbf{A}_{e=1}^{N_{el}} \left[ \int_{\Omega_e} \mathbf{u}_{el}^{*T} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u}_{el} d\Omega_e \right] = \mathbf{A}_{e=1}^{N_{el}} [\mathbf{u}_{el}^{*T} \mathbf{F}_e] \quad (5.52)$$

$N_{el}$  est le nombre d'éléments plaques de la discrétisation. L'assemblage des vecteurs  $\mathbf{u}_{el}$  est un vecteur rassemblant tous les degrés de liberté des nœuds du maillage (six degrés par nœud). Ce vecteur d'assemblage est ici noté  $\mathbf{U}$ . Il est donc possible de dire que :

$$\mathbf{U}^{*T} \mathbf{A}_{e=1}^{N_{el}} \left[ \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega_e \right] \mathbf{U} = \mathbf{U}^{*T} \mathbf{F}_{ext} \quad (5.53)$$

avec :

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}_{e=1}^{N_{el}} \mathbf{u}_{el} \quad (5.54)$$

$\mathbf{F}_{ext}$  est un assemblage des vecteurs de forces  $\mathbf{F}_e$ .  $\mathbf{A}_{e=1}^{N_{el}} \left[ \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega_e \right]$  est la matrice de rigidité de la structure de plaque. Sous une forme plus condensée, l'équation (5.53) est exprimée comme suit :

$$\mathbf{F}_{int} = \mathbf{F}_{ext} \quad (5.55)$$

avec :

$$\mathbf{F}_{int} = \mathbf{A}_{e=1}^{N_{el}} \left[ \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega_e \right] \mathbf{U} \quad (5.56)$$

$\mathbf{F}_{int}$  est le vecteur de forces internes issu de l'assemblage des efforts internes élémentaires après intégration des contraintes.

## 5.2.2 Modèles de plaques multicouches

L'approche de plaques multicouches est l'équivalent de l'approche de poutres multifibres, pour les plaques. Elle consiste à définir plusieurs couches superposées pour chaque section de la plaque étudiée. Les différentes couches peuvent avoir des hauteurs différentes et des propriétés matérielles différentes. Il est possible d'identifier plusieurs modèles aux éléments finis de plaques multicouches plus ou moins complexes avec des interfaces parfaites ou imparfaites entre les différentes couches [Nguyen, 2004] [Zoghipour *et al.*, 2023] [Carrera *et al.*, 2023].

Pour une plaque multicouche avec une adhérence parfaite entre les différentes couches, et un comportement linéaire des couches, il est possible de calculer les termes de la matrice  $\mathbf{D}$  de l'équation (5.44) tels que :

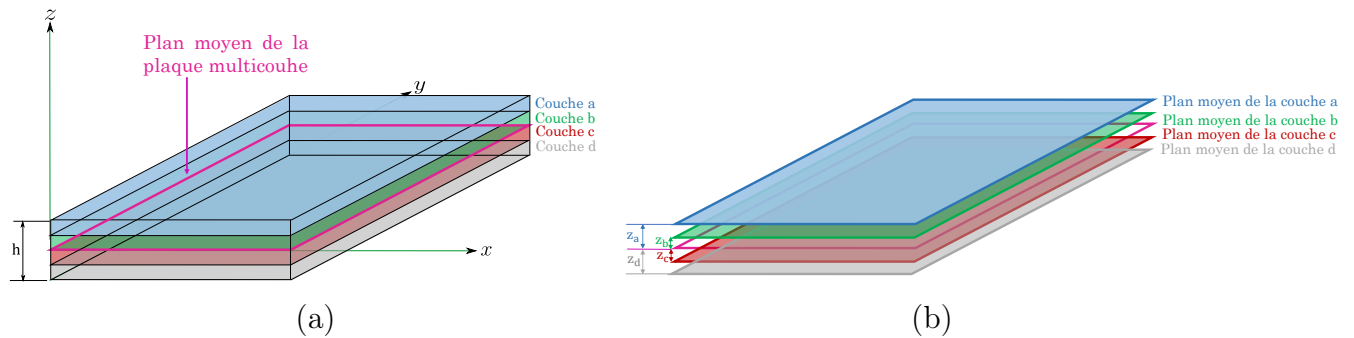


FIGURE 5.8 – Configuration d'une plaque multicouche (a) et des plans moyens de ses différentes couches (b).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_m &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{C}_m dz = \sum_{i=1}^n h_i \mathbf{C}_{mi} \\
 \mathbf{D}_{mj} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \mathbf{C}_m dz = \sum_{i=1}^n h_i z_i \mathbf{C}_{mi} \\
 \mathbf{D}_f &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \mathbf{C}_m dz = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \left( \left( z_i + \frac{h_i}{2} \right)^3 - \left( z_i - \frac{h_i}{2} \right)^3 \right) \mathbf{C}_{mi} \\
 \mathbf{D}_t &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{C}_f dz = \sum_{i=1}^n h_i \mathbf{C}_{fi}
 \end{aligned} \tag{5.57}$$

$n$  est le nombre des couches.  $h_i$  est la hauteur de la couche  $i$  et  $z_i$  est la coordonnée du plan moyen de la couche  $i$  selon l'axe  $z$  (voir figure 5.8).  $\mathbf{C}_{mi}$  et  $\mathbf{C}_{fi}$  sont les matrices  $\mathbf{C}_m$  et  $\mathbf{C}_f$  de la couche  $i$  (équation (5.39)).

## 5.3 Enrichissement des modèles de poutres et de plaques pour la prise en compte du comportement d'interface

Ce sous-chapitre détaille la notion d'enrichissement pour prendre en compte le comportement de l'interface acier-béton. Le principe de l'approche et sa formulation faible sont présentés. Des cas particuliers d'enrichissement introduisant une définition de noeuds internes au sein de l'élément enrichi nécessitent d'appliquer un principe de condensation statique. Ce principe est donc également présenté. Deux configurations de poutres enrichies et une configuration de plaque enrichie sont ensuite détaillées.

### 5.3.1 Principe de l'enrichissement

Le principe d'enrichissement consiste à introduire des degrés de libertés supplémentaires représentant les déplacements des barres d'acier. Ainsi la réponse de l'élément enrichi sera la somme de plusieurs contributions :

- un ou plusieurs éléments fins poutres ou plaques en béton. Les éléments fins poutres peuvent être des éléments élastiques selon les théories d'Euler-Bernoulli ou de Timo-

shenko. Ils peuvent également être des éléments poutres multifibres qui permettent de prendre en compte un comportement non linéaire de béton. Les éléments finis plaques peuvent être des éléments plaques monocouches ou multicouches ;

- un ou plusieurs éléments finis barres pour représenter l'acier. Ces éléments peuvent être des éléments barres à deux ou à trois noeuds ;
- des contraintes d'adhérence acier-béton.

Cet assemblage permet de constituer des éléments finis poutre enrichies (poutres en béton+barres d'acier+contraintes d'adhérence acier-béton dans la direction longitudinale des barres) et plaques enrichies (plaques en béton+barres d'acier+contraintes d'adhérence acier-béton dans la direction longitudinale des barres).

Les barres d'acier des éléments poutres enrichies ont la même direction que celle des poutres, avec des excentricités différentes par rapport à la fibre moyenne de la poutre en béton. Pour les éléments plaques enrichies, les lignes des barres d'acier sont parallèles au plan moyen de la plaque, avec des excentricités différentes par rapport à ce plan.

Les noeuds externes des éléments poutres enrichies et ceux du bord des éléments plaques enrichies relient ces éléments aux autres éléments finis de la structure étudiée. Selon les choix d'assemblage réalisés, si des noeuds supplémentaires internes de béton et d'acier sont définis, une condensation statique de la matrice de raideur de l'élément enrichi sera appliquée.

Les figures 5.9 et 5.10 montrent des exemples de configurations d'assemblages constituant des éléments poutres et plaques enrichies. Les assemblages incorporant des noeuds internes nécessitent l'application d'une condensation statique étant donné que ces noeuds internes de chaque élément enrichi ne seront pas connectés à d'autres éléments finis lors de la construction du maillage de la structure étudiée.

La construction de l'élément enrichi consiste à étudier le choix d'assemblage (comportement d'acier et de béton) et à représenter le comportement d'interface acier-béton au sein de cet assemblage par des contraintes d'adhérence. Ces contraintes sont déterminées, selon les valeurs de glissement acier-béton, à partir des lois d'adhérence.

### 5.3.2 Formulation faible d'un élément enrichi

Les degrés de liberté de l'élément enrichi englobent à la fois les degrés de liberté de l'acier et du béton. Le principe des puissances virtuelles d'un élément enrichi s'exprime comme selon l'équation (5.58) suivante :

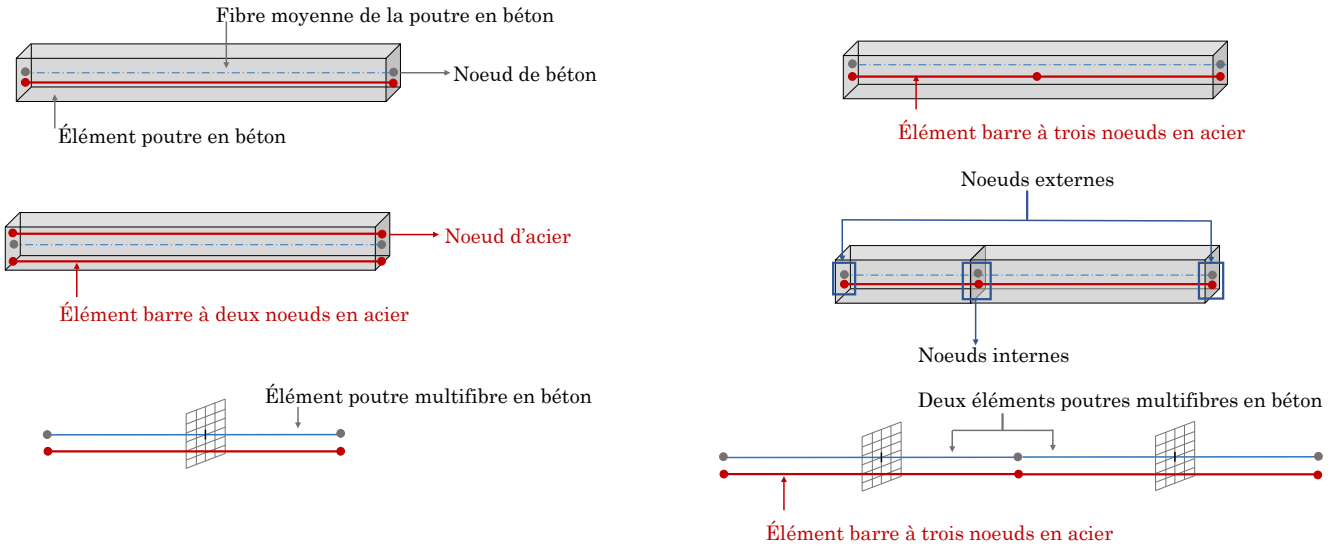
$$\mathbf{A}_{e=1}^{N_b} \mathbf{P}_{intb}^e + \mathbf{A}_{e=1}^{N_a} \mathbf{P}_{inta}^e + \mathbf{A}_{e=1}^{N_a} \mathbf{P}_{intg}^e = \mathbf{A}_{e=1}^{N_b} \mathbf{P}_{extb}^e + \mathbf{A}_{e=1}^{N_a} \mathbf{P}_{exta}^e \quad (5.58)$$

avec :

- $\mathbf{P}_{intb}^e$  : la puissance des forces internes d'un élément de béton (poutre ou plaque) ;
- $\mathbf{P}_{inta}^e$  : la puissance des forces internes d'un élément d'acier ;
- $\mathbf{P}_{intg}^e$  : la puissance des forces internes d'interface tout autour d'un élément d'acier ;
- $\mathbf{P}_{extb}^e$  : la puissance des forces externes appliquées à un élément de béton ;
- $\mathbf{P}_{exta}^e$  : la puissance des forces externes appliquées à un élément d'acier ;
- $N_b$  : le nombre d'éléments poutres ou plaques de béton assemblés ;
- $N_a$  : le nombre d'éléments barres d'acier assemblés.

Il est possible de calculer les différents termes de l'équation (5.58) comme suit :

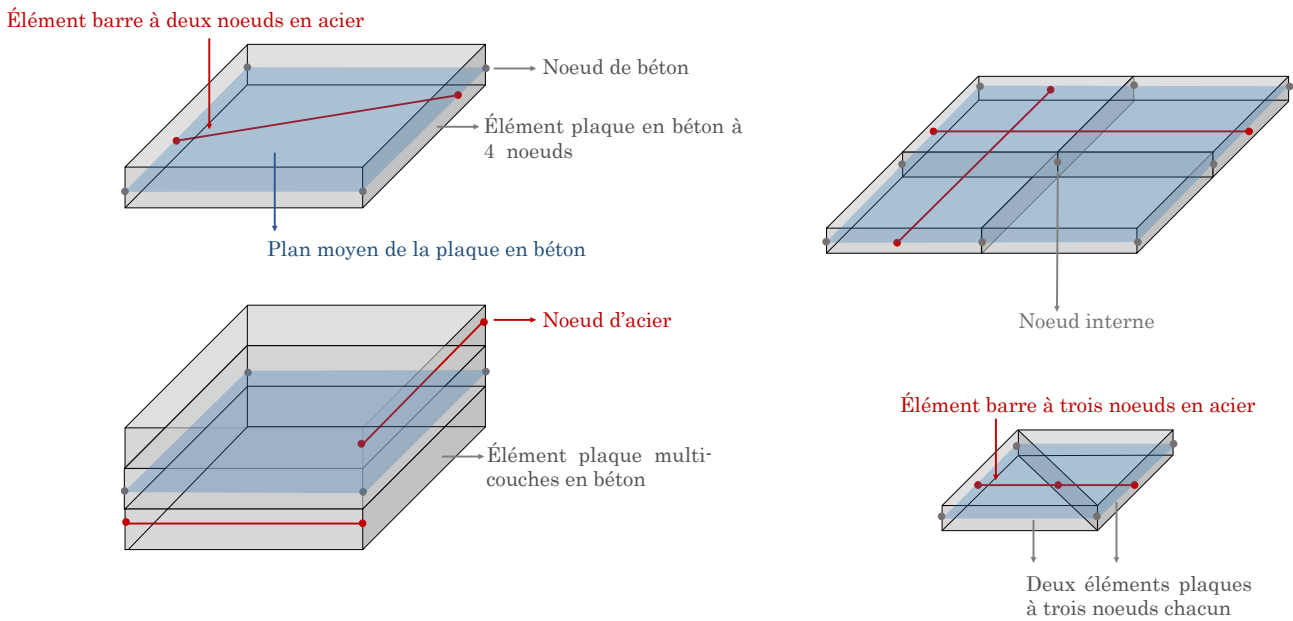
$$\mathbf{P}_{intb}^e = \mathbf{u}_{el}^{*T} \mathbf{F}_{intb}^e \quad (5.59)$$



Configurations d'assemblages qui ne nécessitent pas de condensation statique

Configurations d'assemblages qui nécessitent une condensation statique

FIGURE 5.9 – Configurations de construction d'éléments poutres enrichies.



Configurations d'assemblages qui ne nécessitent pas de condensation statique

Configurations d'assemblages qui nécessitent une condensation statique

FIGURE 5.10 – Configurations de construction d'éléments plaques enrichies.

$$\mathbf{P}_{inta}^e = \int_0^{L_a} \varepsilon_a^* \sigma_a(\varepsilon_a) S_a dL \quad (5.60)$$

$$\mathbf{P}_{intg}^e = \int_0^{L_a} u_g^* \tau(u_g) P dL \quad (5.61)$$

$$\mathbf{P}_{extb}^e = \mathbf{u}_{el}^{*T} \mathbf{F}_{extb}^e \quad (5.62)$$

$$\mathbf{P}_{exta}^e = \mathbf{u}_{el}^{*T} \mathbf{F}_{exta}^e \quad (5.63)$$

avec :

- $\mathbf{u}_{el}^*$  : un champ virtuel de degrés de liberté de l'élément enrichi.
- $\mathbf{F}_{intb}^e$  : le vecteur de forces internes d'un élément de béton. Pour le cas particulier d'un comportement élastique linéaire,  $\mathbf{F}_{intb}^e$  est calculé selon l'équation (5.22) pour des poutres en béton, et selon l'équation (5.56) pour des plaques en béton. Il convient de souligner que ces équations donnent les composantes de ce vecteur de forces internes associées aux degrés de liberté de béton. Les composantes associées aux degrés de liberté d'acier sont nulles ;
- $\varepsilon_a^*$  : un champ de déformation virtuel de chaque barre d'acier de l'assemblage ;
- $S_a$  : la section de chaque barre d'acier de l'assemblage ;
- $\sigma_a(\varepsilon_a)$  : la contrainte de chaque barre d'acier qui dépend de sa déformation  $\varepsilon_a$  ;
- $L_a$  : la longueur de chaque barre d'acier ;
- $u_g^*$  : un champ virtuel de glissement acier-béton ;
- $\tau(u_g)$  : la contrainte d'adhérence acier-béton qui dépend, selon la loi d'adhérence utilisée, du glissement acier-béton  $u_g$  ;
- $P$  : le périmètre de chaque barre d'acier ;
- $\mathbf{F}_{extb}^e$  : le vecteur de forces externes de chaque élément de poutre/plaque en béton ;
- $\mathbf{F}_{exta}^e$  : le vecteur de forces externes de chaque élément barre en acier ;

Le champ de déformation des barres d'acier  $\varepsilon_a$  est exprimé, selon les propriétés de l'élément barre, en fonction du vecteur de degrés de liberté d'acier  $\mathbf{u}_a$  tel que :

$$\varepsilon_a = \mathbf{B}_a \mathbf{u}_a \quad (5.64)$$

de même :

$$\varepsilon_a^* = \mathbf{B}_a \mathbf{u}_a^* \quad (5.65)$$

Le glissement  $u_g$  peut être exprimé en fonction des vecteurs de déplacement d'acier et de béton  $\mathbf{u}_a$  et de  $\mathbf{u}_b$  en calculant la différence entre le déplacement d'acier et celui de béton, au niveau des points de gauss des barres d'acier. Au final, il est possible définir le vecteur de degrés de liberté  $\mathbf{u}_{el}$  de l'élément enrichi qui rassemble tous les degrés de liberté d'acier ( $\mathbf{u}_a$ ) et de béton ( $\mathbf{u}_b$ ) et d'écrire l'équation (5.58) sous une forme plus condensée telle que :

$$\mathbf{u}_{el}^{*T} \mathbf{F}_i^e(\mathbf{u}_{el}) = \mathbf{u}_{el}^{*T} \mathbf{F}_e \quad (5.66)$$

$\mathbf{F}_i^e(\mathbf{u}_{el})$  est le vecteur rassemblant toutes les forces internes (acier+béton+forces internes dues au comportement d'interface acier-béton) de l'élément enrichi qui dépend du vecteur de degrés de liberté  $\mathbf{u}_{el}$ .  $\mathbf{F}_e$  est le vecteur de forces externes de l'élément enrichi.



### 5.3.3 Condensation statique

Pour les choix d'assemblages présentant des noeuds internes et qui nécessitent donc une condensation statique, on décrit  $\mathbf{u}_{el}$  tel que :

$$\mathbf{u}_{el} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

$\mathbf{u}_e$  et  $\mathbf{u}_i$  désignent les degrés de liberté externes (de bord) et internes, respectivement. La linéarisation de l'équation (5.66) donne :

$$\mathbf{k}_{ba} d\mathbf{u}_{el} = d\mathbf{F}_i^e \quad (5.68)$$

$\mathbf{k}_{ba}$  étant la matrice de rigidité de l'élément enrichi. Le vecteur  $d\mathbf{u}_{el}$  regroupe l'ensemble des valeurs incrémentales des degrés de liberté totaux de l'élément enrichi (internes et externes).  $d\mathbf{F}_i^e$  est un vecteur de valeurs incrémentales des forces résistantes de cet élément, tel que  $d\mathbf{F}_i^{eT} = [d\mathbf{f}_e \quad d\mathbf{f}_i]^T$ .  $d\mathbf{f}_e$  représente les valeurs incrémentales des forces résistantes des noeuds externes de l'élément enrichi.  $d\mathbf{f}_i$  représente pourtant les valeurs incrémentales de forces résistantes des noeuds internes. À convergence,  $d\mathbf{f}_i$  est égal à zéro (équilibre interne). Ainsi, l'équation (5.68) est exprimée sous une forme développée comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ee} & \mathbf{k}_{ei} \\ \mathbf{k}_{ie} & \mathbf{k}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{u}_e \\ d\mathbf{u}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\mathbf{f}_e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

La condensation statique fournit un lien entre les vecteurs incrémentaux  $d\mathbf{u}_e$  et  $d\mathbf{f}_e$  tel que :

$$(\mathbf{k}_{ee} - \mathbf{k}_{ei}\mathbf{k}_{ii}^{-1}\mathbf{k}_{ie}) d\mathbf{u}_e = d\mathbf{f}_e \quad (5.70)$$

Sous une forme plus condensée, l'équation (5.70) s'écrit comme suit :

$$\mathbf{k}_{en} d\mathbf{u}_e = d\mathbf{f}_e \quad (5.71)$$

$\mathbf{k}_{en}$  est la matrice de rigidité condensée de l'élément enrichi.

Similairement au principe de condensation statique appliqué aux macro-éléments du chapitre 3, les assemblages d'éléments poutres et plaques enrichis nécessitant une condensation statique impliquent l'utilisation d'un algorithme de Newton Raphson local (algorithme 4), au niveau de chaque élément enrichi, complémentaire à l'algorithme global classique de résolution au niveau de la structure étudiée. Au niveau de l'algorithme 4 local,  $conv_i$  est un indicateur de convergence, et  $k_i$  est un compteur d'itérations locales.

### 5.3.4 Élément enrichi avec une poutre Euler-Bernoulli

On présente ici un choix d'assemblage avec un élément poutre en béton d'une cinématique de type Euler-Bernoulli assemblé à un élément barre à deux noeuds d'acier. L'élément d'acier peut être excentré par rapport à la fibre moyenne de la poutre en béton.

#### 5.3.4.1 Principe

La figure 5.11 illustre l'élément poutre enrichi. Il est défini avec deux noeuds possédant chacun 4 degrés de liberté (3 degrés de liberté de béton et un degré de liberté de déplacement longitudinal d'acier), comme le montre la figure 5.12.

---

**Algorithme 4** Algorithme de résolution local de l'élément enrichi
 

---

$conv_i \leftarrow 0$

$k_i \leftarrow 0$

$\mathbf{u}_{el}^T = [\mathbf{u}_e \quad \mathbf{u}_i]^T$ .  $\mathbf{u}_e$  est donné par l'algorithme global de Newton Raphson (algorithme de résolution classique). Il reste constant dans cet algorithme local. Une première estimation de la valeur de  $\mathbf{u}_i$  est égale à sa valeur pour dernier pas de temps convergé

**tant que**  $conv_i = 0$  **faire**

  Calcul de  $\mathbf{F}_i^e(\mathbf{u}_{el})$  et de  $\mathbf{k}_{ba}$

  Calcul de  $\mathbf{f}_i = \mathbf{F}_{ii}^e$  (partie de  $\mathbf{F}_i^e$  au niveau des noeuds internes)

  Calcul  $\mathbf{R}_{k_i} = -\mathbf{f}_i$

**si**  $\mathbf{R}_{k_i} < tolerance$  **alors**

$conv_i \leftarrow 1$

**Condensation statique** :  $\mathbf{k}_{en} = \mathbf{k}_{ee} - \mathbf{k}_{ei}\mathbf{k}_{ii}^{-1}\mathbf{k}_{ie}$  (voir équation (5.70)) et  $\mathbf{f}_e = \mathbf{F}_{ie}^e$  (partie de  $\mathbf{F}_i^e$  au niveau des noeuds externes).  $\mathbf{k}_{en}$  et  $\mathbf{f}_e$  représentent la matrice de rigidité et le vecteur de forces internes de l'élément enrichi renvoyés à l'algorithme global

**sinon**

$\mathbf{u}_{i_{k_i+1}} = \mathbf{u}_{i_{k_i}} + \mathbf{k}_{ii}^{-1}\mathbf{R}_{k_i}$

$k_i \leftarrow k_i + 1$

**fin si**

**fin tant que**

---

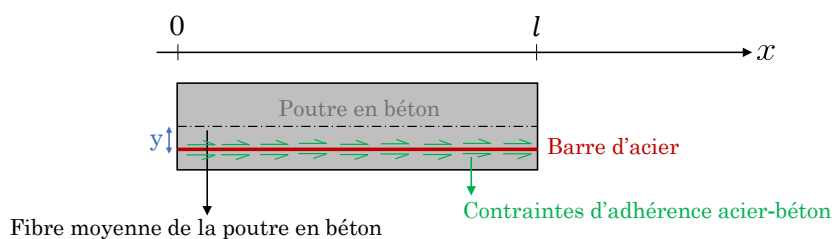


FIGURE 5.11 – Illustration de la poutre Euler-Bernoulli enrichie.

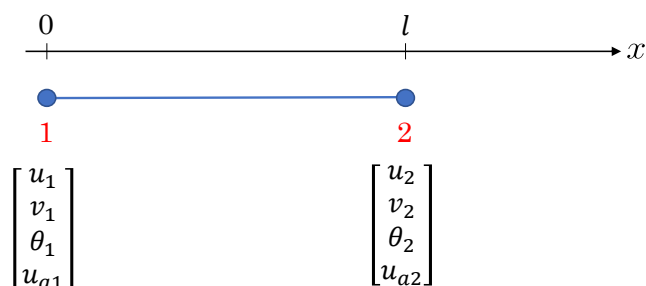


FIGURE 5.12 – Degrés de liberté de la poutre Euler-Bernoulli enrichie.

Le vecteur de degrés de liberté élémentaire  $\mathbf{u}_{el}$  de l'élément enrichi est défini selon l'équation (5.72) suivante :

$$\mathbf{u}_{el} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_{a1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_{a2} \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

Les degrés de liberté d'un noeud de la poutre d'une position longitudinale  $x$  sont interpolés via la matrice des fonctions de forme  $\mathbf{N}$  comme suit :

$$\begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \\ \theta(x) \\ u_a(x) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{x}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} & x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} & 0 & 0 & \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} & -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} & 0 \\ 0 & -\frac{6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3} & x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} & 0 & 0 & \frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3} & -\frac{2x}{l} + \frac{3x^2}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{x}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{x}{l} \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_{a1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_{a2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_{el}} \quad (5.73)$$

L'interpolation du champ de déplacement d'acier est basée sur l'utilisation des fonctions de forme d'un élément barre à deux noeuds qui relie ce champ  $u_a(x)$  aux déplacements nodaux d'acier  $u_{a1}$  et  $u_{a2}$ . La déformation  $\varepsilon_a$  de l'acier est calculée en dérivant le champ de déplacement  $u_a(x)$  par rapport à  $x$  :

$$\varepsilon_a = \frac{\partial u_a(x)}{\partial x} = \mathbf{B}_a \mathbf{u}_a \quad (5.74)$$

avec :

$$\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_a = \begin{bmatrix} u_{a1} \\ u_{a2} \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

et donc :

$$\varepsilon_a = \mathbf{B}_a \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} \mathbf{u}_{el} = \mathbf{B}_a \mathbf{a} \mathbf{u}_{el} \quad (5.76)$$

Étant donné que la théorie d'Euler-Bernoulli néglige les déformations de cisaillement, le vecteur  $\boldsymbol{\varepsilon}$  comportant les termes non nuls de déformations généralisées est calculé comme suit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{N}_{13}}{\partial x} \mathbf{u}_{el} = \mathbf{B}_p \mathbf{u}_{el} \quad (5.77)$$

$\mathbf{N}_{13}$  est une matrice comportant la première et de la troisième ligne de la matrice d'interpolation  $\mathbf{N}$ . Pour un comportement élastique linéaire de la poutre en béton, la matrice de rigidité  $\mathbf{k}_s$  de sa section est calculée telle que :

$$\mathbf{k}_s = \begin{bmatrix} E_b S_b & 0 \\ 0 & E_b I_b \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

$E_b$  étant le module d'Young du béton,  $S_b$  la section de la poutre en béton, et  $I_b$  son inertie.

### 5.3.4.2 Calcul du glissement acier-béton

Le glissement  $u_g(x)$  est calculé tel que :

$$u_g(x) = u_a(x) - u_b(x) \quad (5.79)$$

Sachant que  $u_b(x)$  représente le déplacement du béton au voisinage de la barre d'acier, calculé selon la cinématique de la poutre (voir figure 5.1 et équation (5.1)). Donc :

$$u_b(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -y \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_s} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{x}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3} & x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} & 0 & 0 & \frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3} & -\frac{2x}{l} + \frac{3x^2}{l^2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{el} \quad (5.80)$$

$y$  étant l'excentricité de la barre d'acier par rapport à la fibre moyenne de la poutre en béton. Il en ressort que :

$$u_g(x) = (\mathbf{N}_4 - \mathbf{a}_s \mathbf{N}_{13}) \mathbf{u}_{el} \quad (5.81)$$

$\mathbf{N}_4$  est la quatrième ligne de la matrice  $\mathbf{N}$ .

### 5.3.4.3 Principe des puissances virtuelles

Le principe des puissances virtuelles tient compte du comportement de béton, d'acier, et d'interface au sein de l'élément enrichi :

$$\mathbf{u}_{el}^{*T} \mathbf{F}_{intb}^e + \int_0^{L_a} \varepsilon_a^* \sigma_a(\varepsilon_a) S_a dx + \int_0^{L_a} u_g^* \tau(u_g) P dx = \mathbf{u}_{el}^{*T} \mathbf{F}_e \quad (5.82)$$

$\mathbf{F}_{intb}^e$  représente le vecteur de forces internes de la poutre en béton. La longueur  $L_a$  de la barre d'acier est ici égale à la longueur  $l$  de la poutre.

Avec un comportement linéaire d'acier, la contrainte  $\sigma_a(\varepsilon_a)$  est égale à  $E_a S_a$ ,  $E_a$  étant le module d'Young de la barre d'acier et  $S_a$  sa section.

Ainsi, le principe des puissances virtuelles pour un comportement linéaire d'acier et de béton s'exprime tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{el}^{*T} \int_0^L \mathbf{B}_p^T \mathbf{k}_s \mathbf{B}_p dx \mathbf{u}_{el} + \mathbf{u}_{el}^{*T} \int_0^L \mathbf{a}^T \mathbf{B}_a^T E_a S_a \mathbf{B}_a \mathbf{a} dx \mathbf{u}_{el} \\ + \mathbf{u}_{el}^{*T} \int_0^L \left( \mathbf{N}_4^T - (\mathbf{a}_s \mathbf{N}_{13})^T \right) \tau(u_g) P dx = \mathbf{u}_{el}^{*T} \mathbf{F}_e \end{aligned} \quad (5.83)$$

Après simplification de l'équation (5.83) par le terme  $\mathbf{u}_{el}^{*T}$ , on décrit l'équilibre des forces internes et externes de l'élément enrichi tel que :

$$\mathbf{F}_i^e = \mathbf{F}_e \quad (5.84)$$

Le terme  $\mathbf{F}_i^e$  rassemble les contributions des forces internes de la poutre de béton, celles de la barre d'acier, et des forces internes issues du comportement d'adhérence acier-béton :

$$\mathbf{F}_i^e = \int_0^L \underbrace{\mathbf{B}_p^T \mathbf{k}_s \mathbf{B}_p}_{\mathbf{k}_b^e} dx \mathbf{u}_{el} + \int_0^L \underbrace{\mathbf{a}^T \mathbf{B}_a^T E_a S_a \mathbf{B}_a \mathbf{a}}_{\mathbf{k}_a^e} dx \mathbf{u}_{el} + \int_0^L \left( \mathbf{N}_4^T - (\mathbf{a}_s \mathbf{N}_{13})^T \right) \tau(u_g) P dx \quad (5.85)$$

Lors de la résolution itérative aux éléments finis d'une structure maillée en totalité ou en partie avec des éléments de poutre enrichies, le calcul de l'opérateur tangent d'un élément enrichi consiste à dériver le vecteur  $\mathbf{F}_i^e$  par rapport au vecteur de degrés de liberté  $\mathbf{u}_{el}$  :

$$\frac{\partial \mathbf{F}_i^e}{\partial \mathbf{u}_{el}} = \mathbf{k}_{ba}^e = \mathbf{k}_b^e + \mathbf{k}_a^e + \mathbf{k}_r^e \quad (5.86)$$

$\mathbf{k}_b^e$  et  $\mathbf{k}_a^e$  représentent les matrices de rigidité de béton et d'acier, respectivement.  $\mathbf{k}_r^e$  est la contribution du comportement d'interface dans le calcul de l'opérateur tangent  $\mathbf{k}_{ba}^e$  de l'élément enrichi calculée comme suit :

$$\mathbf{k}_r^e = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{el}} \left( \int_0^L \left( \mathbf{N}_4^T - (\mathbf{a}_s \mathbf{N}_{13})^T \right) \tau(u_g) P dx \right) \quad (5.87)$$

donc :

$$\mathbf{k}_r^e = \int_0^L \left( \mathbf{N}_4^T - (\mathbf{a}_s \mathbf{N}_{13})^T \right) \frac{\partial \tau(u_g)}{\partial \mathbf{u}_{el}} P dx \quad (5.88)$$

Le calcul du terme  $\frac{\partial \tau(u_g)}{\partial \mathbf{u}_{el}}$  se fait tel que :

$$\frac{\partial \tau(u_g)}{\partial u_e} = \frac{\partial \tau(u_g)}{\underbrace{\partial u_g}_{k_{int}}} \frac{\partial u_g}{\partial u_e} = k_{int} (N_1 - a_s N_{13}) \quad (5.89)$$

$k_{int}$  étant la pente de la loi d'adhérence.

### 5.3.5 Élément enrichi avec deux poutres

Ce choix d'assemblage regroupe deux éléments poutres en béton et un élément barre d'acier à trois noeuds. Les équations présentées sont applicables pour des cinématiques de poutres Euler-Bernoulli et Timoshenko.

#### 5.3.5.1 Principe

L'élément enrichi (deux éléments poutres en béton + un élément barre à 3 noeuds d'acier + des contraintes d'adhérence acier-béton) comporte deux noeuds externes (noeuds 1 et 2 de la figure 5.14) et un noeud interne (noeud  $i$  de la figure 5.14). Le vecteur des degrés de liberté  $\mathbf{u}_{el}$  de l'élément enrichi est défini tel que :

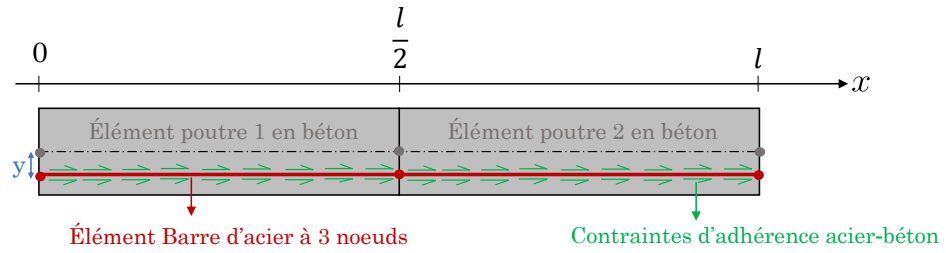


FIGURE 5.13 – Illustration de la configuration d’assemblage présentée avec deux éléments poutres en béton et un élément barre à trois noeuds d’acier.

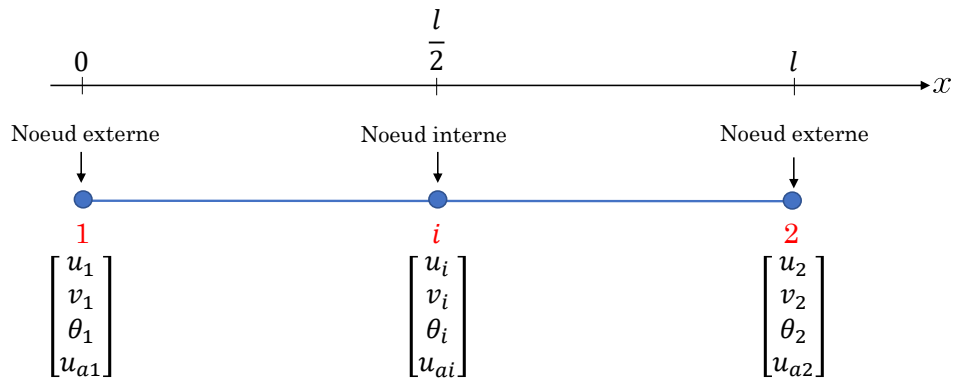


FIGURE 5.14 – Degrés de liberté de la configuration d’assemblage présentée avec deux éléments poutres en béton et un élément barre à trois noeuds d’acier..

$$\mathbf{u}_{el} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_{a1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_{a2} \\ u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_{ai} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} \quad (5.90)$$

avec :

$$\mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_{a1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_{a2} \end{bmatrix}, \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_{ai} \end{bmatrix} \quad (5.91)$$

$\mathbf{u}_e$  étant les degrés de liberté des deux noeuds externes, et  $\mathbf{u}_i$  ceux du noeud interne.

### 5.3.5.2 Calcul du glissement acier-béton

Le glissement  $u_g(x)$  est calculé tel que :

$$u_g(x) = u_a(x) - u_b(x) \quad (5.92)$$

$u_a(x)$  représente le déplacement de l'acier pour une position longitudinale égale à  $x$ . Ce déplacement d'acier est calculé tel que :

$$u_a(x) = \mathbf{N}_a(x) \begin{bmatrix} u_{a1} \\ u_{ai} \\ u_{a2} \end{bmatrix} = \mathbf{N}_a(x) \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_a \mathbf{u}_{el} \quad (5.93)$$

$\mathbf{N}_a(x)$  représente la matrice des fonctions d'interpolation d'un élément barre à trois noeuds.  $u_b(x)$  représente le déplacement du béton au voisinage de la barre d'acier pour une position longitudinale égale à  $x$ . On propose deux méthodologies de calcul de  $u_b(x)$  détaillées dans ce qui suit.

#### 5.3.5.2.1 Méthode 1 pour le calcul de $u_b(x)$

Avec cette première méthode on calcul  $u_b(x)$  comme suit :

$$u_b(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -y \end{bmatrix}}_{a_s} \begin{bmatrix} u_{b0}(x) \\ \theta(x) \end{bmatrix} \quad (5.94)$$

$u_{b0}(x)$  représente le déplacement longitudinal de béton pour une position longitudinale égale à  $x$ , et une excentricité nulle par rapport à la fibre moyenne de la poutre en béton correspondante.  $\theta(x)$  représente la rotation de la section de cette poutre pour la position longitudinale égale à  $x$ .

$u_{b0}(x)$  et  $\theta(x)$  sont calculés en fonction des degrés de liberté nodaux des poutres selon leurs fonctions de forme. Si  $0 \leq x < \frac{l}{2}$ , les degrés de liberté nodaux et les fonctions de forme de la poutre 1 sont considérés. Pour  $\frac{l}{2} \leq x < l$ , les degrés de liberté nodaux et les fonctions de forme de la poutre 2 sont considérés (voir figure 5.13 qui illustre les deux poutres 1 et 2).

La méthode 1 nécessite d'identifier à quelle poutre appartient le noeud pour lequel le glissement est calculé. Une seconde méthode, appelée méthode 2, est donc proposée. La méthode 2 ne nécessite pas cette étape d'identification.

### 5.3.5.2.2 Méthode 2 pour le calcul de $u_b(x)$

Afin de calculer le déplacement  $u_b(x)$  de béton, on calcul tout d'abord un vecteur  $\mathbf{u}_f$  qui représente les déplacements de béton au niveau de la barre acier (excentricité  $y$  par rapport à la fibre moyenne de béton) pour les positions longitudinales des points nodaux, tel que :

$$\mathbf{u}_f = \begin{bmatrix} 1 & -y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \\ u_i \\ \theta_i \end{bmatrix} \quad (5.95)$$

donc :

$$\mathbf{u}_f = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -y \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \mathbf{u}_{el} \quad (5.96)$$

$u_b(x)$  est ensuite déduit selon une interpolation du champ de déplacement de béton au niveau de l'acier. Cette interpolation utilise les valeurs du vecteur  $\mathbf{u}_f$  qui est un vecteur à trois composantes. On peut donc faire le choix d'utiliser les fonctions de forme  $\mathbf{N}_a(x)$  d'un élément barre à trois noeuds et de dire que :

$$u_b(x) = \mathbf{N}_a(x)\mathbf{u}_f = \mathbf{N}_a(x)\mathbf{b}\mathbf{u}_{el} \quad (5.97)$$

d'où :

$$u_g(x) = \mathbf{N}_a(x)\mathbf{a}\mathbf{u}_{el} - \mathbf{N}_a(x)\mathbf{b}\mathbf{u}_{el} = \mathbf{N}_a(x)(\mathbf{a} - \mathbf{b})\mathbf{u}_{el} \quad (5.98)$$

### 5.3.5.3 Principe des puissances virtuelles

Le principe des puissances virtuelles tient compte du comportement des deux poutres en béton, de la barre à trois noeuds d'acier, et du comportement d'interface acier-béton :

$$\mathbf{u}_{el}^{*T} \sum_{e=1}^2 \mathbf{A} \mathbf{F}_{intb}^e + \int_0^l \varepsilon_a^* \sigma_a(\varepsilon_a) S_a dx + \int_0^l u_g^* \tau(u_g) P dx = \mathbf{u}_{el}^{*T} \mathbf{F}_e \quad (5.99)$$

Les forces internes  $\mathbf{F}_{intb}^e$  des deux poutres de béton dépendent de la formulation de ces poutres pouvant être, à titre d'exemple, des poutres élastiques avec des cinématiques de type Euler-Bernoulli ou Timoshenko ou des poutres multifibres.

Le vecteur de forces externes  $\mathbf{F}_e$  rassemble l'ensemble des efforts (et moments) appliqués au noeuds externes de l'élément enrichi. En remplaçant les vecteurs  $\varepsilon_a^*$  et  $u_g^*$  par leurs expressions en fonction de  $\mathbf{u}_{el}$ , on peut exprimer le principe des puissances virtuelles tel que :

$$\mathbf{u}_{el}^{*T} \sum_{e=1}^2 \mathbf{A} \mathbf{F}_{intb}^e + \mathbf{u}_{el}^{*T} \int_0^l \mathbf{a}^T \mathbf{B}_a^T \sigma_a(\varepsilon_a) S_a dx + \mathbf{u}_{el}^{*T} \int_0^l (\mathbf{a} - \mathbf{b})^T \mathbf{N}_a(x)^T \tau(u_g) P dx = \mathbf{u}_{el}^{*T} \mathbf{F}_e \quad (5.100)$$

ce qui donne :



$$\sum_{e=1}^2 \mathbf{A} \mathbf{F}_{intb}^e + \int_0^l \mathbf{a}^T \mathbf{B}_a^T \sigma_a(\varepsilon_a) S_a dx + \int_0^l (\mathbf{a} - \mathbf{b})^T \mathbf{N}_a(x)^T \tau(u_g) P dx = \mathbf{F}_e \quad (5.101)$$

$\mathbf{B}_a$  étant la dérivée de la matrice  $\mathbf{N}_a$  par rapport à la position longitudinale  $x$ .

Il est à noter ici que la méthode 2 pour le calcul de  $u_b(x)$  (et par la suite le calcul de  $u_g(x)$ ) est utilisée. Si on utilise la méthode 1, il va falloir diviser le calcul de l'intégral  $\int_0^l u_g^* \tau(u_g) P dx$  en deux parties : une intégration pour  $0 \leq x < \frac{l}{2}$ , et une intégration pour  $\frac{l}{2} \leq x < l$  (voir paragraphes 5.3.5.2.1 et 5.3.5.2.2).

L'équation (5.101) exprime l'égalité des forces internes  $\mathbf{F}_i$  et externes  $\mathbf{F}_e$  de l'élément enrichi avec :

$$\mathbf{F}_i^e = \sum_{e=1}^2 \mathbf{A} \mathbf{F}_{intb}^e + \int_0^l \mathbf{a}^T \mathbf{B}_a^T \sigma_a(\varepsilon_a) S_a dx + \int_0^l (\mathbf{a} - \mathbf{b})^T \mathbf{N}_a(x)^T \tau(u_g) P dx \quad (5.102)$$

L'opérateur tangent  $\mathbf{k}_{ba}$  de l'élément enrichi est calculé lors de la résolution itérative en dérivant le vecteur  $\mathbf{F}_i^e$  par rapport au vecteur des degrés de liberté  $\mathbf{u}_{el}$ .

$$\frac{\partial \mathbf{F}_i^e}{\partial \mathbf{u}_{el}} = \mathbf{k}_{ba}^e = \sum_{e=1}^2 \mathbf{k}_b^e + \mathbf{k}_a^e + \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{el}} \left( \int_0^L (\mathbf{a} - \mathbf{b})^T \mathbf{N}_a(x)^T \tau(u_g) P dx \right) \quad (5.103)$$

donc :

$$\mathbf{k}_{ba}^e = \sum_{e=1}^2 \mathbf{k}_b^e + \mathbf{k}_a^e + \int_0^L (\mathbf{a} - \mathbf{b})^T \mathbf{N}_a(x)^T \frac{\partial \tau(u_g)}{\partial \mathbf{u}_{el}} P dx \quad (5.104)$$

Les matrice tangente des poutre en béton  $\mathbf{k}_b^e$  sont assemblées afin de créer la partie de la matrice tangente  $\mathbf{k}_{ba}^e$  due au comportement de béton.  $\mathbf{k}_a^e$  est la matrice tangente du comportement de la barre d'acier.  $\frac{\partial \tau(u_g)}{\partial \mathbf{u}_{el}}$  est calculé tel que :

$$\frac{\partial \tau(u_g)}{\partial u_e} = \underbrace{\frac{\partial \tau(u_g)}{\partial u_g}}_{k_{int}} \frac{\partial u_g}{\partial u_e} = k_{int} \mathbf{N}_a(x) (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \quad (5.105)$$

$k_{int}$  étant la pente de la loi d'adhérence. On suppose ici que cette loi d'adhérence est différentiable sur son domaine de définition.

Étant donné que le choix d'assembler deux poutres en béton et un élément barre d'acier à trois noeuds comporte un noeud interne, une condensation statique est appliquée lors de la résolution. Un algorithme local (voir algorithme 4) complémentaire à l'algorithme global de résolution est accordé à cet élément enrichi.

L'avantage du choix d'assemblage de deux poutres et un élément barre à trois noeuds d'acier par rapport au choix rassemblant un élément poutre et un élément barre à deux noeuds d'acier réside dans la discrétisation interne au niveau de l'élément enrichi, permettant de créer un maillage plus grossier à l'échelle de la structure. De plus, les fonctions de forme d'un élément barre à trois noeuds étant non linéaires, ce choix d'assemblage permet d'avoir une meilleure interpolation du champ de glissement acier-béton.

### 5.3.6 Élément plaque enrichie

Le choix de plaque enrichie présenté ici assemble un élément plaque en béton à huit noeuds et deux éléments barres d'acier à deux noeuds chacun, tout en tenant compte du comportement d'adhérence acier-béton.

#### 5.3.6.1 Principe

L'idée est d'assembler un élément plaque à 8 noeuds (noté QUA8) avec deux éléments barres à deux noeuds (un élément barre à deux noeuds est noté SEG2) et avec les contraintes d'adhérence entre les SEG2 et le QUA8.

Une plaque QUA8 classique est enrichie avec 4 degrés de liberté supplémentaires : les déplacements longitudinaux des noeuds 9, 10, 11, et 12 (voir figure 5.15) des barres d'acier.

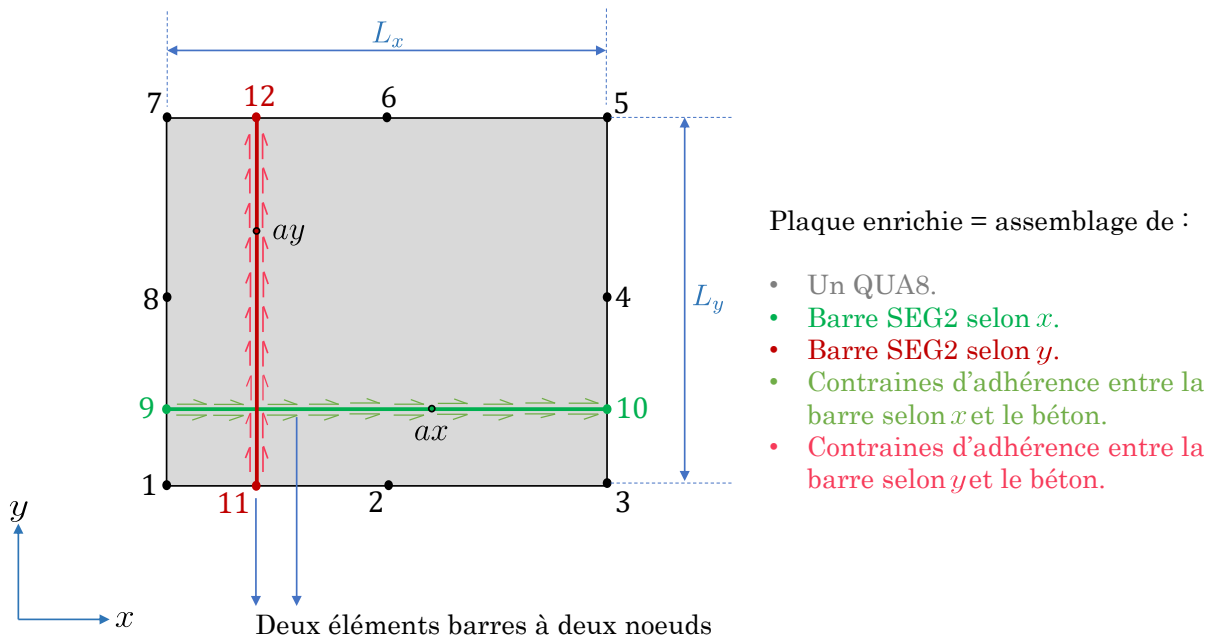


FIGURE 5.15 – Plaque enrichie.

Pour un élément enrichi le vecteur de degrés de liberté élémentaire est le suivant :

$$\mathbf{u}_{el} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{z2} \\ \vdots \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\text{plaque}} \\ \mathbf{u}_{\text{acierx}} \\ \mathbf{u}_{\text{aciery}} \end{bmatrix} \quad (5.106)$$

avec :

$$\mathbf{u}_{\text{acierx}} = \begin{bmatrix} u_9 \\ u_{10} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{\text{aciery}} = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} \quad (5.107)$$

Pour les degrés de liberté classiques de la plaque on a :

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{N}_{\text{plaque}} \mathbf{u}_{\text{plaque}} \quad (5.108)$$

$\mathbf{N}_{\text{plaque}}$  est la matrice des fonctions de forme de la plaque discrétisée en QUA8 standards.  $\mathbf{u}_p$  est le vecteur de degrés de liberté classiques d'un point  $p$  qui appartient à un élément plaque (trois déplacements et trois rotations).

On peut calculer  $u_{ax}$  (le déplacement longitudinal d'un nœud d'acier qui appartient à la barre d'acier selon  $x$ ) comme suit :

$$u_{ax} = \mathbf{N}_{\text{acierx}} \mathbf{u}_{\text{acierx}} \quad (5.109)$$

Pareil, on calcule  $u_{ay}$  (le déplacement longitudinal d'un nœud d'acier qui appartient à la barre d'acier selon  $y$ ) :

$$u_{ay} = \mathbf{N}_{\text{aciery}} \mathbf{u}_{\text{aciery}} \quad (5.110)$$

$ax$  et  $ay$  sont deux points qui appartiennent aux barres d'acier selon  $x$  et selon  $y$ , respectivement (voir figure 5.15) et qui ne coïncident pas forcément avec les nœuds de ces barres.  $\mathbf{N}_{\text{acierx}}$  et  $\mathbf{N}_{\text{aciery}}$  sont les matrices des fonctions d'interpolation des éléments barres à deux nœuds d'acier, avec :

$$\mathbf{N}_{\text{acierx}} = \begin{bmatrix} \frac{1-x}{L_x} & \frac{x}{L_x} \end{bmatrix} \quad \text{pour } 0 \leq x \leq L_x \quad (5.111)$$

et :

$$\mathbf{N}_{\text{aciery}} = \begin{bmatrix} \frac{1-y}{L_y} & \frac{y}{L_y} \end{bmatrix} \quad \text{pour } 0 \leq y \leq L_y \quad (5.112)$$

### 5.3.6.2 Calcul du glissement acier-béton

On peut calculer séparément les glissements des deux barres selon  $x$  et selon  $y$  par rapport au béton (déplacement relatif longitudinal entre l'acier et le béton).

Pour la barre  $x$  (selon  $x$ ), le glissement correspond au déplacement longitudinal (selon  $x$ ) d'acier moins celui du béton dans la même direction :

$$u_{gx} = u_{ax} - u_{bx} \quad (5.113)$$

Pour le calcul de  $u_{ax}$ , on le fait avec l'équation (5.109). Pour  $u_{bx}$  :

$$u_{bx} = [ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ z_{ax} \ 0 ] \mathbf{N}_{\text{plaque}} \mathbf{u}_{\text{plaque}} \quad (5.114)$$

$z_{ax}$  est l'excentrement de la barre  $x$  selon  $z$  par rapport au plan médian de la plaque (voir figure 5.16).

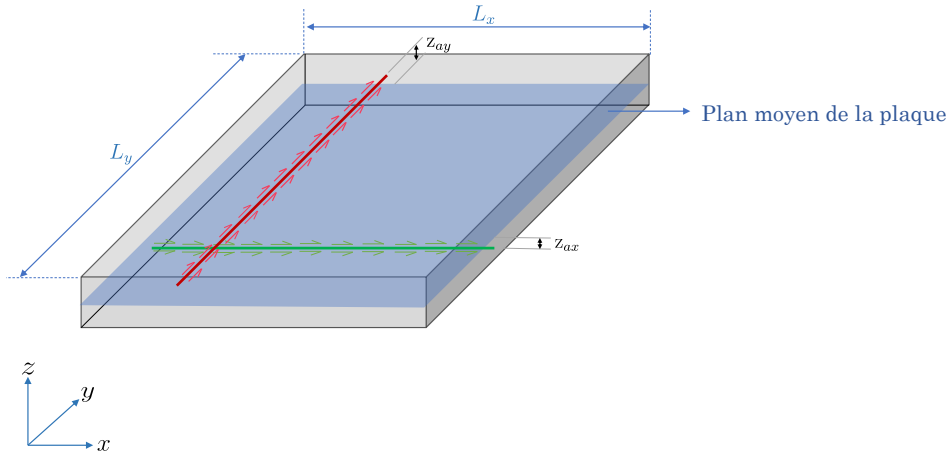


FIGURE 5.16 – Excentrement des barres d'acier par rapport au plan moyen de la plaque de béton.

Afin d'exprimer  $u_{ax}$  en fonction de  $\mathbf{u}_{el}$ , on définit une matrice  $\mathbf{I}_x$  tel que  $\mathbf{u}_{\text{acierx}} = \mathbf{I}_x \mathbf{u}_{el}$  avec :

$$\mathbf{I}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.115)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{0}_{2 \times 48}}$

$\mathbf{0}_{2 \times 48}$  étant une matrice nulle (2 lignes et 48 colonnes). Donc :

$$u_{ax} = \mathbf{N}_{\text{acierx}} \mathbf{I}_x \mathbf{u}_{el} \quad (5.116)$$

On définit également une matrice  $\mathbf{I}_c$  tel que  $\mathbf{u}_{\text{plaque}} = \mathbf{I}_c \mathbf{u}_{el}$  :

$$\mathbf{I}_c = [ \mathbf{I}_{d_{48 \times 48}} \quad \mathbf{0}_{48 \times 4} ] \quad (5.117)$$

$\mathbf{I}_{d_{48 \times 48}}$  est la matrice identité (48 lignes et 48 colonnes).  $\mathbf{0}_{48 \times 4}$  est une matrice nulle (48 lignes et 4 colonnes). donc :

$$u_{bx} = [ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ z_{ax} ] \mathbf{N}_{\text{plaque}} \mathbf{I}_c \mathbf{u}_{el} = \mathbf{a}_x \mathbf{N}_{\text{plaque}} \mathbf{I}_c \mathbf{u}_{el} \quad (5.118)$$

Finalement on a :

$$u_{gx} = u_{ax} - u_{bx} = \mathbf{N}_{\text{acier}} \mathbf{I}_x \mathbf{u}_{el} - \mathbf{a}_x \mathbf{N}_{\text{plaque}} \mathbf{I}_c \mathbf{u}_{el} = (\mathbf{N}_{\text{acier}} \mathbf{I}_x - \mathbf{a}_x \mathbf{N}_{\text{plaque}} \mathbf{I}_c) \mathbf{u}_{el} \quad (5.119)$$

Pour la barre selon  $y$ , la même démarche est effectuée :

$$u_{gy} = u_{ay} - u_{by} = \mathbf{N}_{\text{acier}} \mathbf{I}_y \mathbf{u}_{el} - \mathbf{a}_y \mathbf{N}_{\text{plaque}} \mathbf{I}_c \mathbf{u}_{el} = (\mathbf{N}_{\text{acier}} \mathbf{I}_y - \mathbf{a}_y \mathbf{N}_{\text{plaque}} \mathbf{I}_c) \mathbf{u}_{el} \quad (5.120)$$

tel que :

$$\mathbf{I}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.121)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{0}_{2 \times 48}}$

et :

$$\mathbf{a}_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -z_{ay} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.122)$$

### 5.3.6.3 Principe des puissances virtuelles

Le calcul des déformations  $\varepsilon_{ax}$  et  $\varepsilon_{ay}$  des barres d'acier selon  $x$  et selon  $y$  se fait tel que :

$$\varepsilon_{ax} = \frac{du_{ax}}{dx} = \mathbf{B}_{\text{acierx}} \mathbf{u}_{\text{acierx}} = \mathbf{B}_{\text{acierx}} \mathbf{I}_x \mathbf{u}_{el} \quad (5.123)$$

et :

$$\varepsilon_{ay} = \frac{du_{ay}}{dy} = \mathbf{B}_{\text{aciery}} \mathbf{u}_{\text{aciery}} = \mathbf{B}_{\text{aciery}} \mathbf{I}_y \mathbf{u}_{el} \quad (5.124)$$

avec :

$$\mathbf{B}_{\text{acierx}} = \frac{\partial \mathbf{N}_{\text{acierx}}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{L_x} & \frac{1}{L_x} \end{bmatrix} \quad (5.125)$$

et :

$$\mathbf{B}_{\text{aciery}} = \frac{\partial \mathbf{N}_{\text{aciery}}}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{L_y} & \frac{1}{L_y} \end{bmatrix} \quad (5.126)$$

Le vecteur de déformations généralisées  $\boldsymbol{\varepsilon}$  de la plaque en béton est calculé comme suit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{u}_{\text{plaque}} = \mathbf{B} \mathbf{I}_c \mathbf{u}_{el} \quad (5.127)$$

$\mathbf{B}$  est la matrice des dérivées des fonctions de forme de la plaque en béton (exprimées dans  $\mathbf{N}_{\text{plaque}}$ ). Finalement, on exprime  $\boldsymbol{\varepsilon}$  en fonction de  $\mathbf{u}_{el}$  tel que :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_p \mathbf{u}_{el} \quad (5.128)$$

avec :

$$\mathbf{B}_p = \mathbf{B} \mathbf{I}_c \quad (5.129)$$

Le principe des puissances virtuelles appliqué à un seul élément fini plaque enrichie  $\Omega_e$  est exprimé comme suit :

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_{el}^{*T} \mathbf{F}_{intb}^e + \int_0^{L_x} \varepsilon_{ax}^* \sigma_{ax}(\varepsilon_{ax}) \varepsilon_{ax} dx + \int_0^{L_y} \varepsilon_{ay}^* \sigma_{ay}(\varepsilon_{ay}) \varepsilon_{ay} dy \\ & + \int_0^{L_x} u_{gx}^* \tau(u_{gx}) P_x dx + \int_0^{L_y} u_{gy}^* \tau(u_{gy}) P_y dy = \mathbf{u}_{el}^{*T} \mathbf{F}_e \end{aligned} \quad (5.130)$$

$\mathbf{F}_{intb}^e$  est le vecteur de forces internes de la plaque en béton.  $\varepsilon_{ax}^*$  et  $\varepsilon_{ay}^*$  sont deux champs virtuels de déformation des barres d'acier  $x$  et  $y$ .  $u_{gx}^*$  et  $u_{gy}^*$  sont deux champs virtuels de glissement des barres  $x$  et  $y$ , par rapport au béton.  $P_y$  et  $P_x$  sont les périmètres de ces barres.  $\mathbf{F}_e$  est le vecteur de forces externes de l'élément enrichi.

Avec des comportements linéaires d'acier et de béton on peut dire que :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{el}^{*T} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_p^T \mathbf{D} \mathbf{B}_p d\Omega_e \mathbf{u}_{el} + \int_0^{L_x} \varepsilon_{ax}^* E_{ax} S_{ax} \varepsilon_{ax} dx + \int_0^{L_y} \varepsilon_{ay}^* E_{ay} S_{ay} \varepsilon_{ay} dy \\ + \int_0^{L_x} u_{gx}^* \tau(u_{gx}) P_x dx + \int_0^{L_y} u_{gy}^* \tau(u_{gy}) P_y dy = \mathbf{u}_{el}^{*T} \mathbf{F}_e \end{aligned} \quad (5.131)$$

$\mathbf{D}$  est la matrice qui relie le vecteur de forces généralisées de la plaque en béton à son vecteur de déformations généralisées (voir équation (5.43)).  $E_{ax}$  et  $E_{ay}$  représentent les modules d'Young des barres d'acier  $x$  et  $y$ .  $S_{ax}$  et  $S_{ay}$  sont les sections de ces barres. D'une manière un peu plus détaillée, l'équation (5.131) peut être exprimée tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{el}^{*T} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_p^T \mathbf{D} \mathbf{B}_p d\Omega_e \mathbf{u}_{el} + \mathbf{u}_{el}^{*T} \int_0^{L_x} \mathbf{I}_x^T \mathbf{B}_{acierx}^T E_a S_a \mathbf{B}_{acierx} \mathbf{I}_x \mathbf{u}_{el} dx \\ + \mathbf{u}_{el}^{*T} \int_0^{L_y} \mathbf{I}_y^T \mathbf{B}_{aciery}^T E_a S_a \mathbf{B}_{aciery} \mathbf{I}_y \mathbf{u}_{el} dy \\ + \mathbf{u}_{el}^{*T} \int_0^{L_x} [\mathbf{N}_{acierx} \mathbf{I}_x - \mathbf{a}_x \mathbf{N}_{plaque} \mathbf{I}_c]^T \tau((\mathbf{N}_{acierx} \mathbf{I}_x - \mathbf{a}_x \mathbf{N}_{plaque} \mathbf{I}_c) \mathbf{u}_{el}) P_x dx \\ + \mathbf{u}_{el}^{*T} \int_0^{L_y} [\mathbf{N}_{aciery} \mathbf{I}_y - \mathbf{a}_y \mathbf{N}_{plaque} \mathbf{I}_c]^T \tau((\mathbf{N}_{aciery} \mathbf{I}_y - \mathbf{a}_y \mathbf{N}_{plaque} \mathbf{I}_c) \mathbf{u}_{el}) P_y dy \\ = \mathbf{u}_{el}^{*T} \mathbf{F}_e \end{aligned} \quad (5.132)$$

On peut simplifier l'équation (5.132) par  $\mathbf{u}_{el}^{*T}$  pour établir l'équilibre entre les forces internes et les forces externes tel que :

$$\mathbf{F}_i^e = \mathbf{F}_e \quad (5.133)$$

$\mathbf{F}_i^e$  représente l'ensemble des forces internes de l'élément enrichi :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_p^T \mathbf{D} \mathbf{B}_p d\Omega_e \mathbf{u}_{el} + \int_0^{L_x} \mathbf{I}_x^T \mathbf{B}_{acierx}^T E_a S_a \mathbf{B}_{acierx} \mathbf{I}_x \mathbf{u}_{el} dx \\ + \int_0^{L_y} \mathbf{I}_y^T \mathbf{B}_{aciery}^T E_a S_a \mathbf{B}_{aciery} \mathbf{I}_y \mathbf{u}_{el} dy \\ + \int_0^{L_x} [\mathbf{N}_{acierx} \mathbf{I}_x - \mathbf{a}_x \mathbf{N}_{plaque} \mathbf{I}_c]^T \tau((\mathbf{N}_{acierx} \mathbf{I}_x - \mathbf{a}_x \mathbf{N}_{plaque} \mathbf{I}_c) \mathbf{u}_{el}) P_x dx \\ + \int_0^{L_y} [\mathbf{N}_{aciery} \mathbf{I}_y - \mathbf{a}_y \mathbf{N}_{plaque} \mathbf{I}_c]^T \tau((\mathbf{N}_{aciery} \mathbf{I}_y - \mathbf{a}_y \mathbf{N}_{plaque} \mathbf{I}_c) \mathbf{u}_{el}) P_y dy \end{aligned} \quad (5.134)$$

Le calcul de  $\mathbf{F}_i^e$  consiste à sommer les valeurs de cinq termes tel que :

$$\mathbf{F}_i^e = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \quad (5.135)$$

avec :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_p^T \mathbf{D} \mathbf{B}_p d\Omega_e \mathbf{u}_{el} \\
I_2 &= \int_0^{L_x} \mathbf{I}_x^T \mathbf{B}_{acierx}^T E_a S_a \mathbf{B}_{acierx} \mathbf{I}_x \mathbf{u}_{el} dx \\
I_3 &= \int_0^{L_y} \mathbf{I}_y^T \mathbf{B}_{acieri}^T E_a S_a \mathbf{B}_{acieri} \mathbf{I}_y \mathbf{u}_{el} dy \\
I_4 &= \int_0^{L_x} [\mathbf{N}_{acierx} \mathbf{I}_x - \mathbf{a}_x \mathbf{N}_{plaque} \mathbf{I}_c]^T \tau ((\mathbf{N}_{acierx} \mathbf{I}_x - \mathbf{a}_x \mathbf{N}_{plaque} \mathbf{I}_c) \mathbf{u}_{el}) P_x dx \\
I_5 &= \int_0^{L_y} [\mathbf{N}_{acieri} \mathbf{I}_y - \mathbf{a}_y \mathbf{N}_{plaque} \mathbf{I}_c]^T \tau ((\mathbf{N}_{acieri} \mathbf{I}_y - \mathbf{a}_y \mathbf{N}_{plaque} \mathbf{I}_c) \mathbf{u}_{el}) P_y dy
\end{aligned} \tag{5.136}$$

$I_1$  représente la contribution du comportement de la plaque en béton dans le calcul de  $\mathbf{F}_i^e$ .  $I_2$  et  $I_3$  représentent les contributions des comportements des deux barres d'acier  $x$  et  $y$ .  $I_4$  et  $I_5$  représentent les contributions dues au comportement d'interface des deux barres d'acier avec le béton. Le calcul de l'opérateur tangent consiste à dériver le vecteur  $\mathbf{F}_i^e$  par rapport au vecteur de degré de liberté  $\mathbf{u}_{el}$  tel que :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{u}_{el}} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega_e \\
\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{u}_{el}} &= \int_0^{L_x} \mathbf{I}_x^T \mathbf{B}_{acierx}^T E_a S_a \mathbf{B}_{acierx} \mathbf{I}_x dx \\
\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{u}_{el}} &= \int_0^{L_y} \mathbf{I}_y^T \mathbf{B}_{acieri}^T E_a S_a \mathbf{B}_{acieri} \mathbf{I}_y dy \\
\frac{\partial I_4}{\partial \mathbf{u}_{el}} &= \int_0^{L_x} [\mathbf{N}_{acierx} \mathbf{I}_x - \mathbf{a}_x \mathbf{N}_{plaque} \mathbf{I}_c]^T \frac{\partial \tau(u_{gx})}{\partial \mathbf{u}_{el}} P_x dx \\
\frac{\partial I_5}{\partial \mathbf{u}_{el}} &= \int_0^{L_y} [\mathbf{N}_{acieri} \mathbf{I}_y - \mathbf{a}_y \mathbf{N}_{plaque} \mathbf{I}_c]^T \frac{\partial \tau(u_{gy})}{\partial \mathbf{u}_{el}} P_y dy
\end{aligned} \tag{5.137}$$

sachant que :

$$\frac{\partial \tau(u_{gx})}{\partial \mathbf{u}_{el}} = \frac{\partial \tau(u_{gx})}{\partial u_{gx}} \frac{\partial u_{gx}}{\partial \mathbf{u}_{el}} = \frac{\partial \tau(u_{gx})}{\partial u_{gx}} (\mathbf{N}_{acier} \mathbf{I}_x - \mathbf{a}_x \mathbf{N}_{plaque} \mathbf{I}_c) \tag{5.138}$$

$\frac{\partial \tau(u_{gx})}{\partial u_{gx}}$  est l'opérateur tangent de la loi d'adhérence qui relie la barre d'acier  $x$  au béton. De même :

$$\frac{\partial \tau(u_{gy})}{\partial \mathbf{u}_{el}} = \frac{\partial \tau(u_{gy})}{\partial u_{gy}} \frac{\partial u_{gy}}{\partial \mathbf{u}_{el}} = \frac{\partial \tau(u_{gy})}{\partial u_{gy}} (\mathbf{N}_{acier} \mathbf{I}_y - \mathbf{a}_y \mathbf{N}_{plaque} \mathbf{I}_c) \tag{5.139}$$

$\frac{\partial \tau(u_{gy})}{\partial u_{gy}}$  est l'opérateur tangent de la loi d'adhérence qui relie la barre d'acier  $y$  au béton.

Finalement, on calcule l'opérateur tangent de l'élément enrichi  $\frac{\partial \mathbf{F}_i^e}{\partial \mathbf{u}_{el}}$  tel que :

$$\frac{\partial \mathbf{F}_i^e}{\partial \mathbf{u}_{el}} = \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{u}_{el}} + \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{u}_{el}} + \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{u}_{el}} + \frac{\partial I_4}{\partial \mathbf{u}_{el}} + \frac{\partial I_5}{\partial \mathbf{u}_{el}} + \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{u}_{el}} \tag{5.140}$$

La formulation de plaque enrichie est présentée ici avec un élément plaque QUA8 en béton et deux éléments SEG2 en acier. L'enrichissement permet pourtant de superposer

des contributions d'éléments finis d'acier et de béton, et notamment l'effet du glissement. Ainsi, la même démarche peut être effectuée avec des plaques multicouches et des éléments non linéaires d'acier, permettant de représenter des formes complexes du renforcement (des poutres courbées par exemple), sans rien changer à la structuration multi-échelle de l'approche d'enrichissement.

## 5.4 Exemples de validation

Dans ce sous-chapitre, des exemples de validation des formulations de poutres et de plaques enrichies sont présentés.

### 5.4.1 Validation de l'approche de plaque enrichie

Deux tests de validation du comportement membranaire et hors plan de la formulation de plaque enrichie sont étudiés.

#### 5.4.1.1 Test unitaire de comportement membranaire de l'élément plaque enrichie

On étudie dans ce test le comportement membranaire d'un élément plaque enrichi comportant : un QUA8 en béton, et une barre d'acier à deux noeuds dans la direction de l'axe des  $x$ . Les contraintes d'adhérence entre cette barre d'acier et le béton sont également pris en compte au sein de l'élément enrichi.

Une plaque carrée en béton d'une section de  $10 \times 10 \text{ m}^2$  est considérée. Cette plaque est d'une épaisseur de 0.25 m. La barre d'acier est dans le plan médian de la plaque (on s'intéresse ici au comportement membranaire). C'est une barre d'acier d'un diamètre égal à 16 mm.

##### 5.4.1.1.1 Propriétés des matériaux

Un comportement linéaire est associé à l'acier et au béton, avec les propriétés du tableau 5.1.

Paramètre	Description	Valeur	Unité
$E_c$	Module d'Young du béton	30	GPa
$E_s$	Module d'Young de l'acier	210	GPa
$\nu_c$	Coefficient de poisson du béton	0.22	-

TABLEAU 5.1 – Paramètres d'acier et de béton du test membranaire de plaque enrichie.

##### 5.4.1.1.2 Maillage

Le maillage est constitué d'un seul élément enrichi. Les conditions aux limites décrites dans la figure 5.17 sont appliquées.

Dans ce test, une traction est appliquée sur le bord de la barre d'acier. Une loi d'adhérence acier-béton linéaire est considérée.



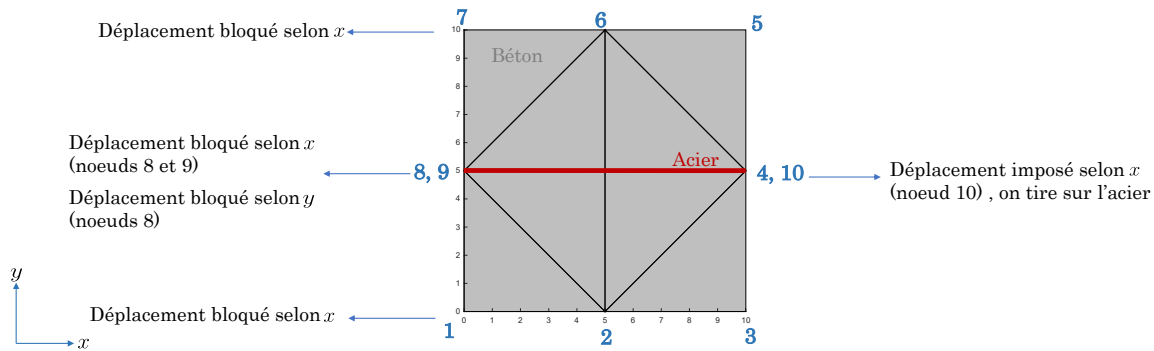


FIGURE 5.17 – Conditions aux limites de la plaque enrichie.

#### 5.4.1.1.3 Résultats

On mène une étude paramétrique sur la variation de raideur de cette loi, dans le but d’observer l’incidence de sa valeur sur la déformation de la plaque. Il s’agit d’un essai qualitatif, permettant de tester si la barre d’acier est susceptible d’entraîner avec elle le béton environnant.

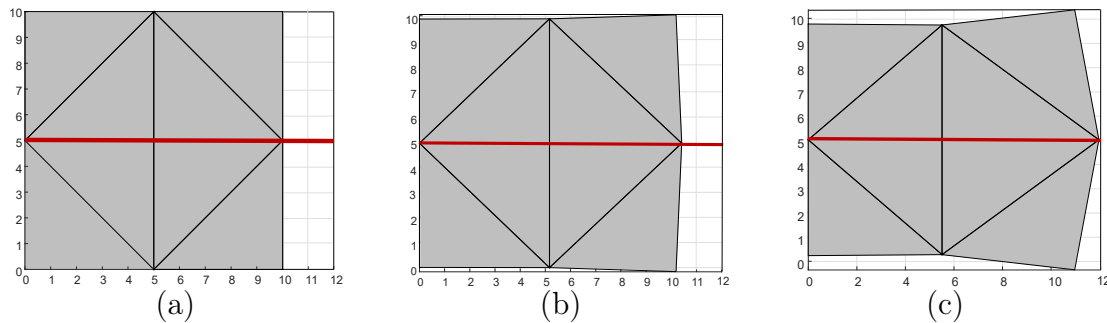


FIGURE 5.18 – Déformée de la plaque enrichie pour une raideur de la loi linéaire d’adhérence =  $10^5$  (a),  $10^{10}$  (b),  $10^{20}$  (c) Pa/m.

#### 5.4.1.1.4 Discussion

Les déformations observées dans la figure 5.18 se révèlent cohérentes. En effet, une augmentation de la pente de la loi d’adhérence induit une diminution du glissement de l’acier par rapport au béton, réduisant ainsi le déplacement relatif entre les deux matériaux. Par conséquent, en imposant un déplacement au bord de l’acier, une augmentation de la pente de la loi d’adhérence favorise un entraînement accru du béton par l’acier (un glissement plus petit).

### 5.4.1.2 Exemple de plaque bi-appuyée : validation du comportement hors plan de l’élément plaque enrichi

On étudie dans ce test le comportement en flexion d’une plaque enrichie avec des barres d’acier dans les directions  $x$  et  $y$  (voir figure 5.19). La plaque possède une épaisseur de 0.2 m. Toutes les barres sont excentrées selon  $z$  vers le bas (par rapport au plan moyen de la plaque en béton) d’une distance de 0.05 m et ont un diamètre de 16 mm.

#### 5.4.1.2.1 Propriétés des matériaux

Un comportement linéaire est associé à l'acier et au béton, avec les paramètres du tableau 5.2.

Paramètre	Description	Valeur	Unité
$E_b$	Module d'Young du béton	30	GPa
$E_a$	Module d'Young de l'acier	210	GPa
$\nu_b$	Coefficient de poisson du béton	0.2	-

TABLEAU 5.2 – Paramètres d'acier et de béton du test de plaque bi-appuyée.

La loi d'adhérence nonlinéaire acier-béton de [Murcia-Delso *et al.*, 2011] est utilisée, avec les paramètres du tableau 5.3.

Paramètre	Valeur	Unité
$\tau_1$	10	MPa
$g_1$	1	mm
$g_3$	8	mm

TABLEAU 5.3 – Paramètres de la loi d'adhérence utilisés pour le test de plaque bi-appuyée.

#### 5.4.1.2.2 Maillage

Le maillage considéré est constitué de  $10 \times 10$  éléments plaques enrichies, chaque élément enrichi étant constitué d'un QUA8 et de deux éléments barres d'acier selon  $x$  et  $y$ , à deux noeuds chacun, avec une modélisation du comportement d'adhérence acier-béton. La plaque

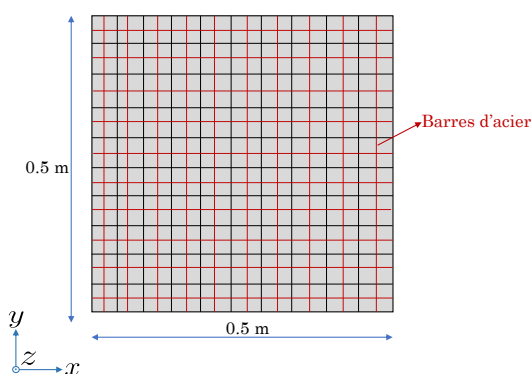


FIGURE 5.19 – Maillage de la plaque bi-appuyée.

est simplement appuyée (selon  $z$ ) au niveau de ses 4 bords. Un déplacement selon  $z$  (vers le bas) est imposé au point central de la plaque.

#### 5.4.1.2.3 Résultats

La figure 5.20 montre la courbe de réaction. La figure 5.21 illustre la déformée du plan moyen de la plaque.

La figure 5.22 montre les glissements des barres d'acier  $x$  et  $y$  par rapport au béton, pour les différents pas de temps de la résolution.

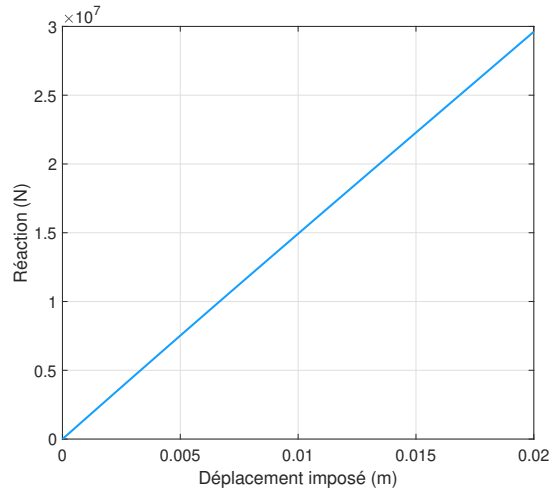


FIGURE 5.20 – Courbe de réaction.

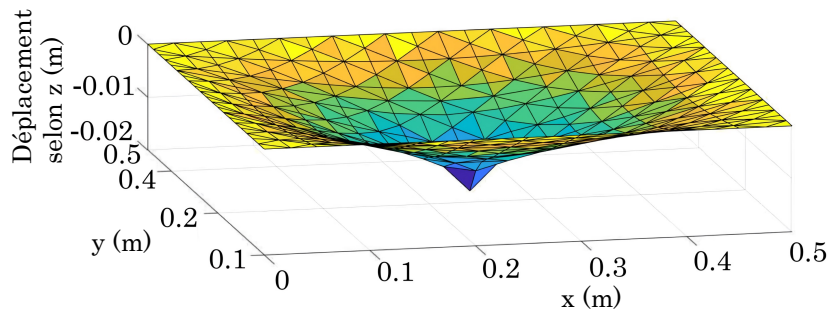


FIGURE 5.21 – Forme de la déformée.

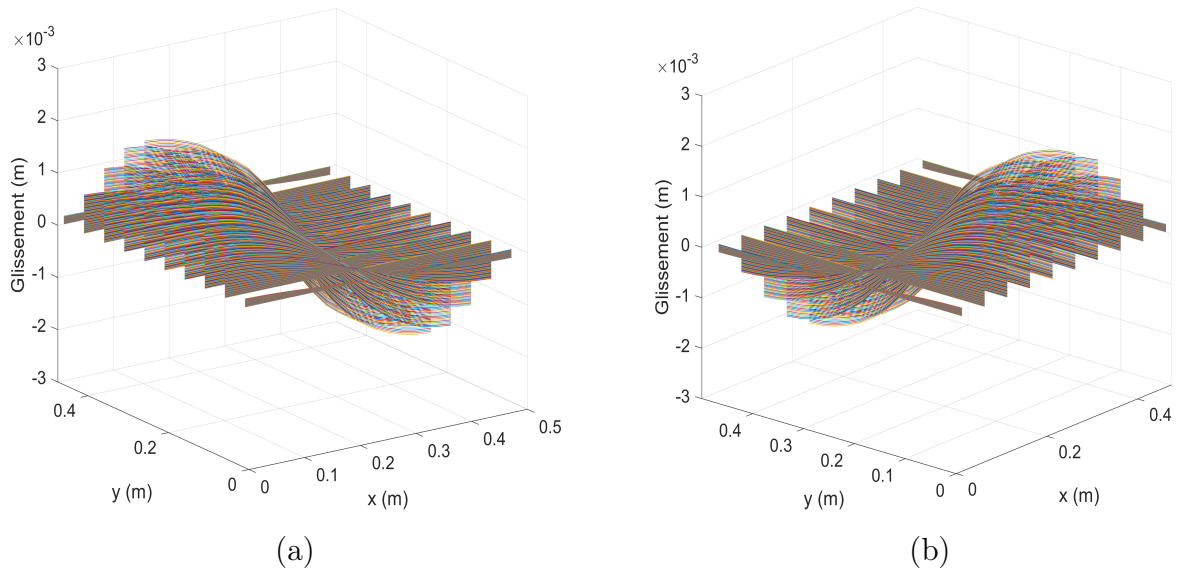


FIGURE 5.22 – Glissements selon  $x$  (a) et selon  $y$  (b).

#### 5.4.1.2.4 Discussion

Les glissements sont identiques selon  $x$  et  $y$ , et sont symétriques. Cette observation s'avère logique et cohérente avec le type de résultats attendus, vu que les conditions aux limites de géométrie et de chargement sont symétriques. Ce test valide le comportement hors plan de la plaque enrichie avec des barres d'acier pouvant glisser, dans les deux directions du plan de la plaque, par rapport au béton.

### 5.4.2 Validation de l'approche de poutre enrichie

L'approche de poutre enrichie est utilisée pour modéliser l'essai de pull-out de [Torre-Casanova, 2012] précédemment modélisé dans les chapitres 3 (sous-chapitre 3.7) et 4 (sous-chapitre 4.6) de ce mémoire, avec différentes techniques de modélisation.

#### 5.4.2.0.1 Propriétés des matériaux

Des comportements linéaires d'acier et de béton, et la loi nonlinéaire d'adhérence acier-béton de [Murcia-Delso *et al.*, 2011] sont considérés (paramètres du tableau 3.2 du chapitre 3).

#### 5.4.2.0.2 Maillage

Le maillage choisi et les conditions aux limites sont illustrés dans la figure 5.23.

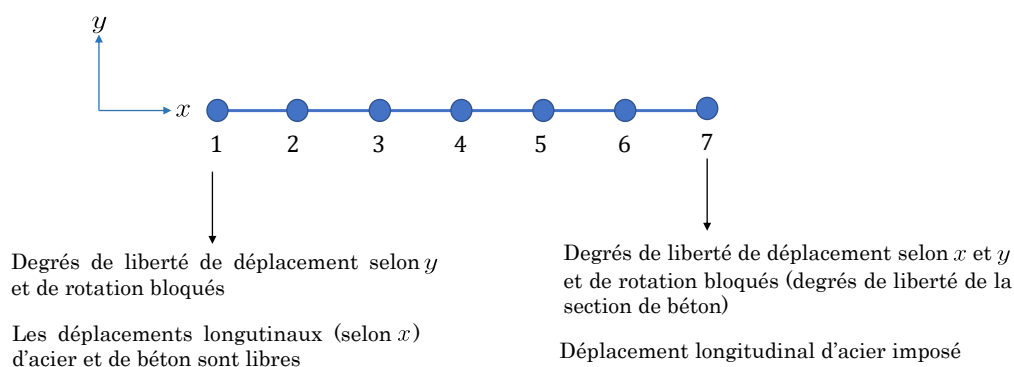


FIGURE 5.23 – Exemple de pull-out 1D étudié avec des éléments poutres enrichies.

Deux types d'éléments finis enrichis sont choisis pour étudier cet exemple de pull-out :

- un premier type d'éléments finis constitué, pour chaque élément, d'un assemblage d'un élément poutre Euler-Bernoulli pour représenter la section de béton, et d'un élément barre à deux noeuds pour représenter la barre d'acier ayant une excentricité nulle par rapport à la fibre moyenne de la poutre en béton. À cet assemblage est ajoutée la contribution des contraintes d'adhérence acier-béton. Avec cet type d'éléments finis, 6 éléments sont utilisés pour construire la géométrie de pull-out ;
- un deuxième type d'éléments finis constitué, pour chaque élément, d'un assemblage de deux éléments poutres Euler-Bernoulli pour représenter la section de béton, et d'un élément barre à trois noeuds pour représenter la barre d'acier. À cet assemblage est ajoutée la contribution des contraintes d'adhérence acier-béton. Une condensation statique est réalisée au sein de chaque élément enrichi afin de décrire l'évolution des degrés de liberté de ses noeuds de bord en fonction de l'évolution des degrés de liberté internes (déplacements et rotation de béton et déplacement longitudinal d'acier au

niveau du noeud central). Avec cet type d'éléments finis, 3 éléments sont utilisés pour construire la géométrie de pull-out.

#### 5.4.2.0.3 Résultats

La figure 5.24 illustre la courbe de réaction, avec un chargement monotone de déplacement imposé. Les déplacements des noeuds d'acier et de béton pour les différents pas de temps sont illustrés dans la figure 5.25.

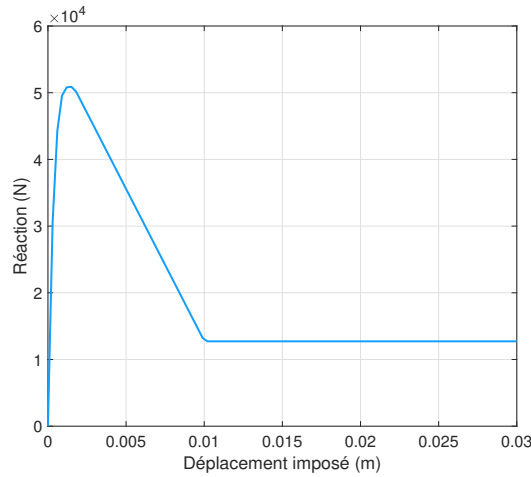


FIGURE 5.24 – Courbe de réaction.

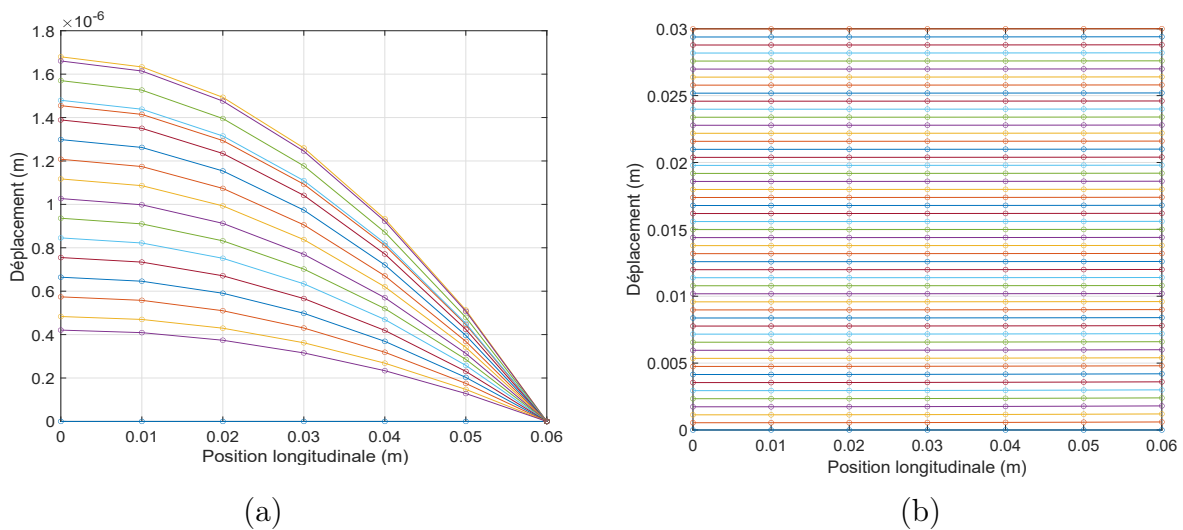


FIGURE 5.25 – Déplacements de béton (a) et d'acier (b) en fonction de la position longitudinale, pour les différents pas de temps.

Les résultats de la figure 5.25 correspondent à ceux de la figure 3.14 du chapitre 3 pour la même simulation de pull-out, à une valeur de 5% près.

Un calcul cyclique est également réalisé. Le chemin de déplacement imposé choisi et la courbe de réaction correspondante sont illustrés dans la figure 5.26.

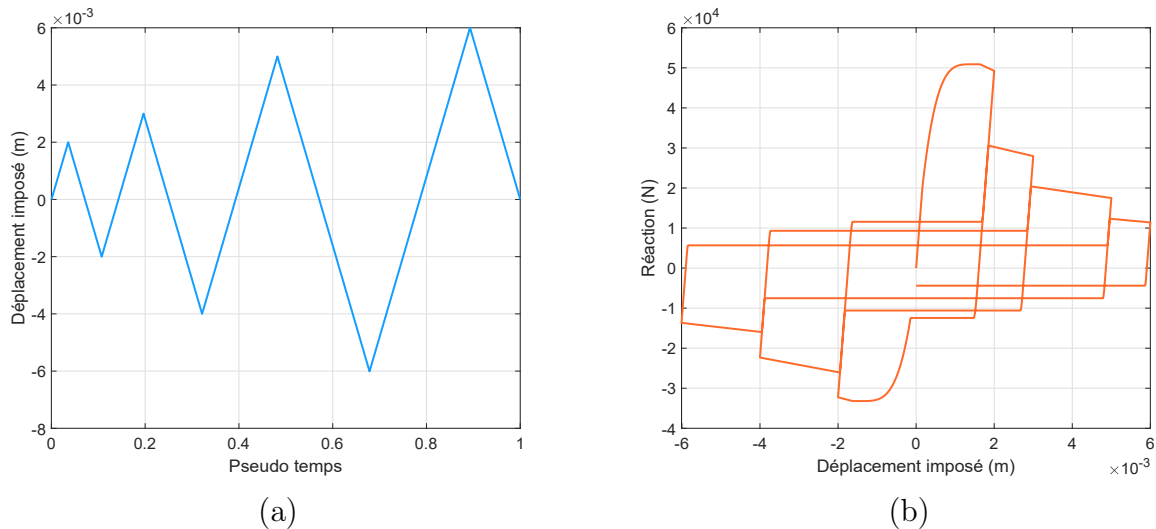


FIGURE 5.26 – Déplacement imposé cyclique (a) et courbe de réaction correspondante (b).

#### 5.4.2.0.4 Discussion

Il convient de souligner que les modélisations avec les deux types d'éléments finis fournissent les mêmes résultats. Pour la modélisation avec un élément enrichi composé de deux poutres de béton et d'un élément barre à trois noeuds d'acier, les deux méthodes 1 et 2 d'interpolation du glissement (voir paragraphes 5.3.5.2.1 et 5.3.5.2.2) sont testées, donnant les mêmes résultats. Pourtant, l'utilisation des éléments poutres enrichies constituées d'un assemblage de 2 poutres Euler-Bernoulli, d'un élément barre à trois noeuds d'acier, et de contributions de contraintes d'adhérence acier-béton, mets en valeur l'aspect polyvalent de la philosophie de poutre et de plaques enrichies proposée dans ce travail de thèse. De plus, utiliser des barres d'acier à trois noeuds permet en général d'avoir une meilleure interpolation du champ de glissement acier-béton étant donné qu'elles possèdent des fonctions de forme non linéaires, et donc d'ordre supérieur par rapport à des barres à deux noeuds. En outre, la condensation statique peut potentiellement accélérer le calcul global étant donné qu'elle introduit des itérations de résolution locales. Cela peut potentiellement être intéressant lorsque les éléments poutres enrichies sont utilisées pour modéliser une structure à grande échelle où le coût de calcul des itérations locales devient relativement moins coûteux que celui des itérations globales. Pourtant, cet aspect n'est pas regardé en détails dans ce travail de thèse.

### 5.4.3 Validation et comparaison des approches de poutres et de plaques enrichies

Des géométries de poutres en flexion sont modélisées, avec des éléments poutres et plaques enrichies.

#### 5.4.3.1 Exemple de poutre console

Il s'agit de modéliser une poutre console avec des éléments poutres et plaques enrichies. La poutre console étudiée est d'une section de  $0.1 \times 0.1 \text{ m}^2$ . Une barre d'acier longitudinale inférieure, d'un diamètre de 14 mm, est excentrée d'une distance de 0.03 m par rapport à la fibre moyenne de la poutre en béton (voir figure 5.27).

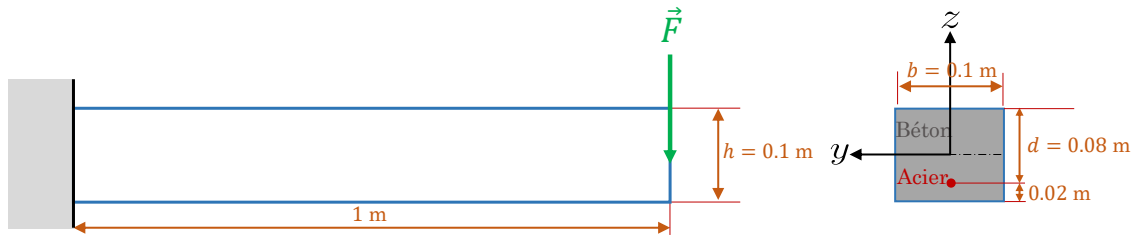


FIGURE 5.27 – Poutre console étudiée.

#### 5.4.3.1.1 Propriétés des matériaux

Des comportements linéaires sont accordés à l'acier et au béton, avec les propriétés du tableau 5.4.

Paramètre	Description	Valeur	Unité
$E_b$	Module d'Young du béton	30	GPa
$E_a$	Module d'Young de l'acier	210	GPa
$\nu_b$	Coefficient de poisson du béton	0.22	-

TABLEAU 5.4 – Paramètres de l'exemple de poutre console.

#### 5.4.3.1.2 Maillages

Le maillage du plan moyen de la plaque de béton et les conditions aux limites qui lui sont appliquées sont illustrés dans la figure 5.28. La ligne  $L_2$  de cette figure comporte trois noeuds. Un tiers de la forces imposée totale  $F$  est imposé au niveau ce chacun de ces 3 noeuds. La force  $F$  est égale à  $10^4$  N. Pour la modélisation avec des poutres enrichies, le maillage et les conditions aux limites de la figure 5.29 sont considérés.

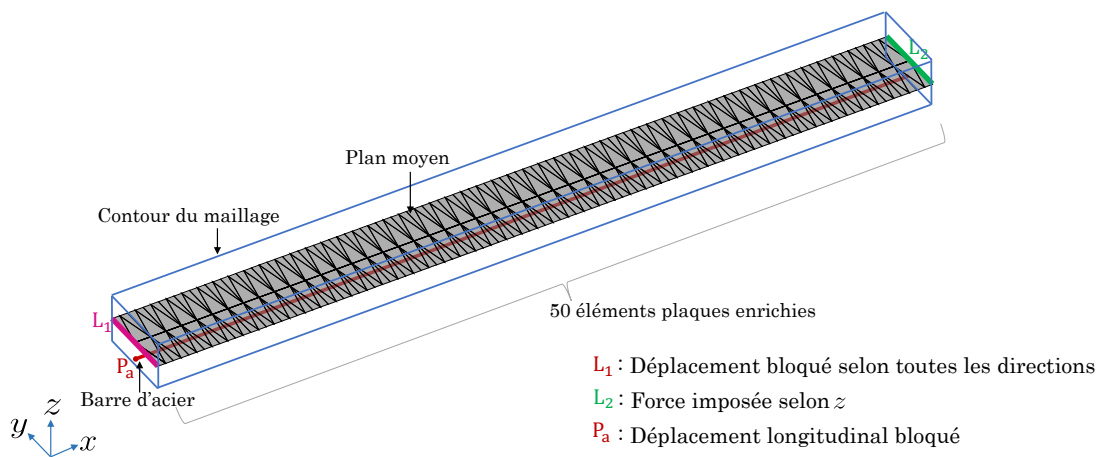


FIGURE 5.28 – Maillage et conditions aux limites : modèle de plaque enrichie.

Deux calculs sont réalisés : un avec une section de  $10^{-9}$  m<sup>2</sup> associée à la barre d'acier (valeur jugée suffisamment négligeable pour supposer qu'on modélise une poutre en béton ;

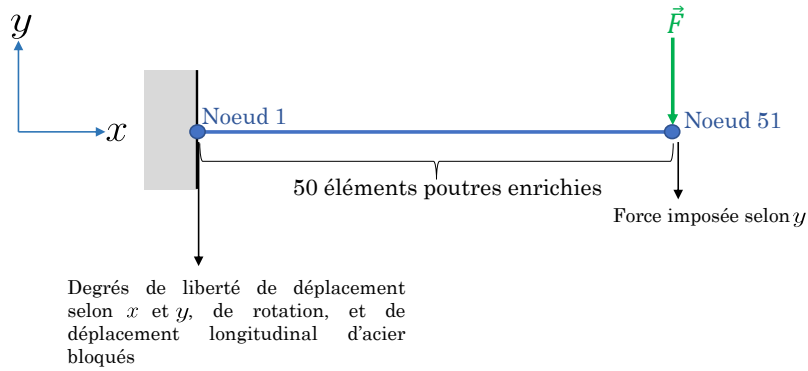


FIGURE 5.29 – Maillage et conditions aux limites : modèle de poutre enrichie.

l'inversion de la matrice de rigidité de l'élément enrichi implique une division par cette section d'acier qu'on ne suppose pas égale à zéro étant donné qu'on est incapable de diviser numériquement par un zéro), et un deuxième calcul avec une barre d'acier de 14 mm de diamètre et une loi d'adhérence linéaire acier-béton d'une pente de  $10^{20}$  Pa/m (valeur jugée suffisamment importante pour pouvoir supposer qu'on modélise un comportement d'adhérence parfaite; on associe une grande valeur à cette rigidité de la loi d'adhérence étant donné qu'on est incapable de définir numériquement une rigidité infinie pour représenter une adhérence parfaite).

#### 5.4.3.1.3 Résultats

Les résultats des deux calculs sont comparés à un résultat d'un calcul analytique. Le calcul analytique est détaillé dans l'annexe D de ce travail.

Les tableaux 5.5 et 5.6 comparent les valeurs de flèche pour les calculs numériques et analytiques.

Configuration de calcul	Flèche sans acier	Écart versus solution analytique
Plaque Mindlin-Reissner enrichie	0.01439 m	$1.09774 \times 10^{-4}$ m
Poutre Euler-Bernoulli enrichie	0.01428 m	$3.24365 \times 10^{-7}$ m
Poutre Timoshenko enrichie	0.01438 m	$1.01559 \times 10^{-4}$ m
Calcul analytique	0.01428 m	-

TABLEAU 5.5 – Comparaison des résultats des calculs numérique et analytique-poutre en béton.

Configuration de calcul	Flèche avec acier	Écart versus solution analytique
Plaque Mindlin-Reissner enrichie	0.01298 m	$7.49569 \times 10^{-5}$ m
Poutre Euler-Bernoulli enrichie	0.01285 m	$5.69313 \times 10^{-5}$ m
Poutre Timoshenko enrichie	0.01295 m	$4.60484 \times 10^{-5}$ m
Calcul analytique	0.0129 m	-

TABLEAU 5.6 – Comparaison des résultats des calculs numérique et analytique-poutre en béton armé.



#### 5.4.3.1.4 Discussion

Les résultats du tableau 5.5 issus des différents modèles sont jugés être représentatifs de la solution analytique. Ces résultats valident donc le comportement de flexion de l'approche de poutre enrichie, et le comportement hors plan de l'approche de plaque enrichie. La faible différence des résultats issus des différents modèles provient de la différence de l'ordre et des expressions des fonctions de forme associées.

Il est à noter que les résultats numériques dépendent toutefois de la finesse de la discrétisation, de la pente à accorder à la loi d'interface représentant l'adhérence parfaite (supposée égale à  $10^{20}$  Pa/m), et de la faible valeur accordée à la section de l'acier pour représenter une poutre en béton (supposée égale à  $10^{-9}$  m<sup>2</sup>).

#### 5.4.3.2 Flexion trois points - acier non ancré

Dans cet exemple, on étudie le comportement d'une poutre en flexion 3 points ayant une section de béton de  $0.1 \times 0.1$  m<sup>2</sup>. Cette poutre comporte une barre d'acier dans la direction longitudinale avec un diamètre de 14 mm. Cette barre est au milieu de la poutre selon la direction de sa largeur, et elle est excentrée vers le bas d'une distance de 0.0375 m selon la direction de sa hauteur. Une loi d'adhérence acier-béton non linéaire est adoptée. Ce calcul est réalisé avec 3 approches de modélisation différentes, le but étant de comparer les différents résultats :

- une modélisation 3D (la moitié de la géométrie de poutre est modélisée, avec des conditions de symétrie) en utilisant le modèle de macro-élément pour prendre en compte le comportement d'interface ;
- une modélisation avec des éléments poutres Timoshenko enrichies ;
- une modélisation avec des éléments plaques Mindlin-Reissner QUA8 enrichis.

##### 5.4.3.2.1 Propriétés des matériaux

Un comportement linéaire d'acier et de béton est considéré, avec les paramètres du tableau 5.7.

Paramètre	Description	Valeur	Unité
$E_b$	Module d'Young du béton	28	GPa
$E_a$	Module d'Young de l'acier	200	GPa
$\nu_b$	Coefficient de poisson du béton	0.22	-

TABLEAU 5.7 – Paramètres de le test de poutre en flexion.

La loi d'interface de [Murcia-Delso *et al.*, 2011] pilote le comportement d'adhérence acier-béton, avec les paramètres du tableau 5.8.

Paramètre	Valeur	Unité
$\tau_1$	12.6	MPa
$g_1$	1	mm
$g_3$	8	mm

TABLEAU 5.8 – Paramètres de la loi d'adhérence utilisés pour le test de poutre en flexion.

### 5.4.3.2.2 Maillages

Les figures 5.30, 5.31, et 5.32 montrent les maillages et les conditions aux limites utilisés pour les trois types de modélisation.

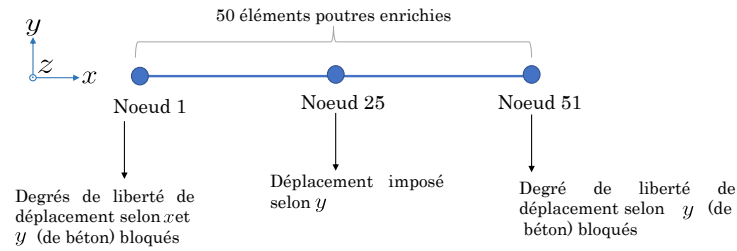


FIGURE 5.30 – Conditions aux limites de l’essai de flexion 3 points modélisé avec des éléments poutres enrichies.

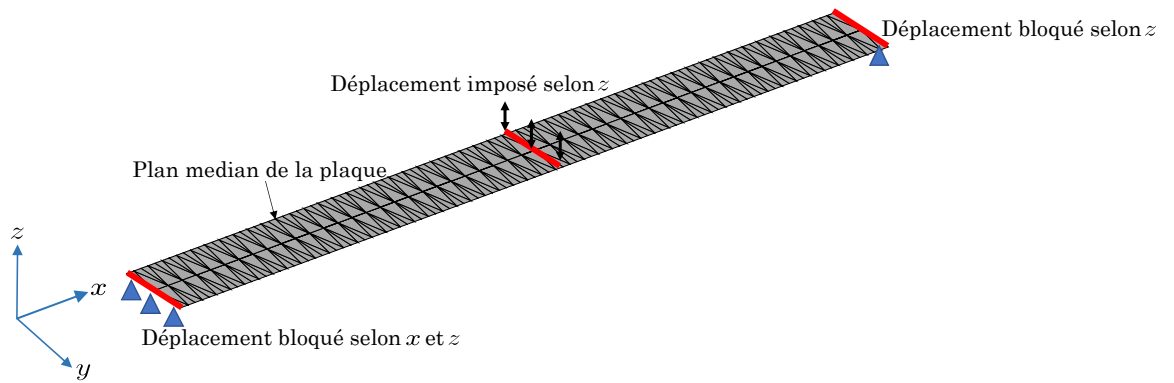


FIGURE 5.31 – Conditions aux limites de l’essai de flexion 3 points modélisé avec des éléments plaques enrichies.

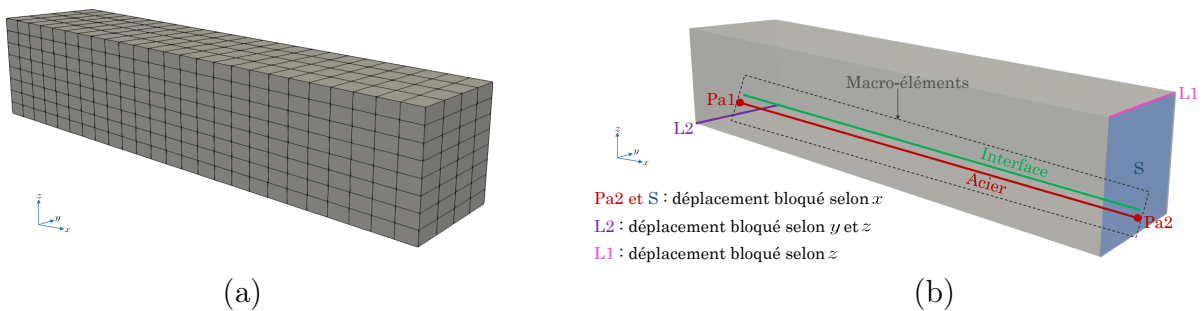


FIGURE 5.32 – Maillage (a) et conditions aux limites (b) de la modélisation 3D de l’exemple de poutre en flexion 3 points.

Pour la modélisation 3D, la partie d’interface des macro-éléments est parfaitement ancré au béton. L’acier l’est également selon  $y$  et  $z$ , mais peut pourtant glisser par rapport au béton selon  $x$ .

### 5.4.3.2.3 Résultats

La figure 5.33 compare les différentes courbes de réaction. Avec le calcul 3D, la pente de la courbe de réaction change légèrement en changeant la valeur de l'épaisseur de la gaine d'interface. Les valeurs testées d'épaisseur d'interface sont indiquées dans la figure 5.33 en fonction de  $d$ ,  $d$  étant le diamètre de la barre d'acier.

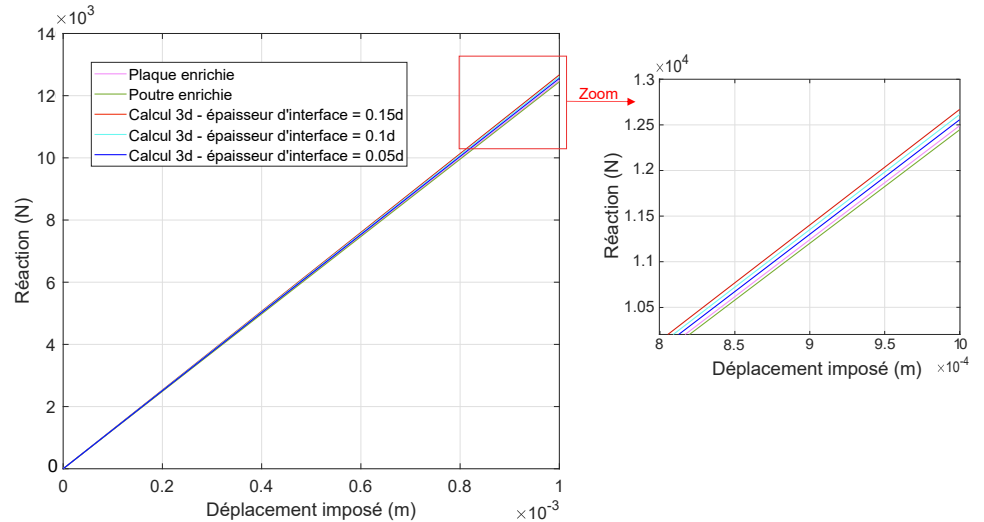


FIGURE 5.33 – Courbes de réaction de l'exemple de poutre en flexion 3 points.

La figure 5.34 compare les valeurs de glissement pour différents pas de chargement le long de la poutre. Pour le cas 3D, le calcul avec une épaisseur d'interface de  $0.15d$  est choisi.

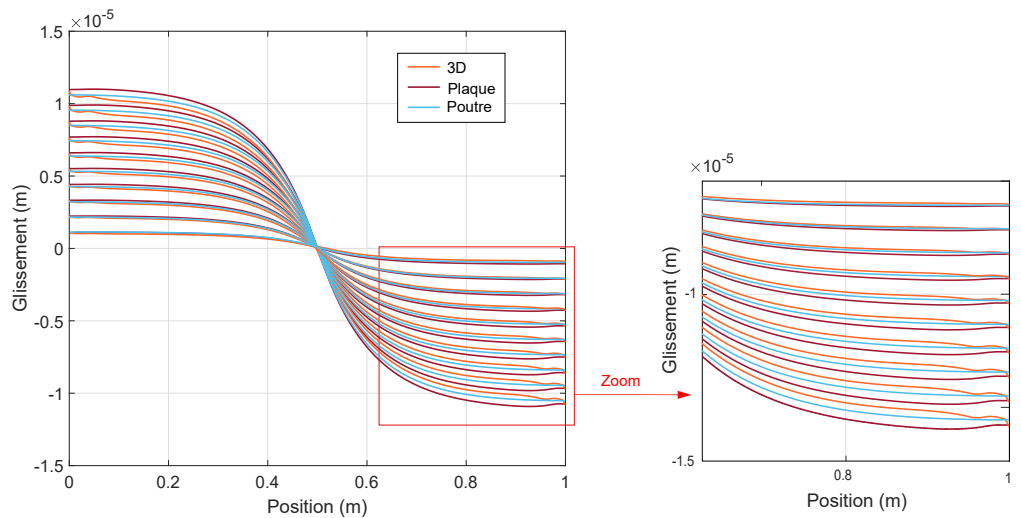


FIGURE 5.34 – Valeurs de glissement - barre d'acier non ancrée.

### 5.4.3.2.4 Discussion

Les courbes de glissement sont très proches les unes des autres. Le modèle de poutre enrichie donne des courbes plus proches aux courbes du calcul 3D que le modèle de plaque enrichie. Il est pourtant à noter que la légère différence des résultats issus des différents

calculs est due au fait que les trois techniques de modélisation utilisent des différents types d'éléments finis et donc par la suite différentes expressions, et différents ordres, de fonctions d'interpolation.

### 5.4.3.3 Flexion trois points - acier ancré aux extrémités

En imposant des conditions de relations cinématiques, le calcul du test de flexion trois points peut être refait en ancrant les extrémités de l'acier au béton.

#### 5.4.3.3.1 Propriétés des matériaux

Les mêmes propriétés des matériaux utilisées lors de l'exemple de flexion trois points avec une barre d'acier non ancrée (voir paragraphe 5.4.3.2.1).

#### 5.4.3.3.2 Maillages

Les maillages des figures 5.30, 5.31, et 5.32 sont considérés.

Pour la modélisation avec des poutres enrichies, on ancre l'acier au béton en établissant une relation cinématique qui impose que le déplacement de l'acier soit égal au déplacement du béton au voisinage de l'acier. Donc :

$$u_a = u - y\theta \quad (5.141)$$

$u_a$  est le déplacement longitudinal de la barre d'acier.  $y$  est l'excentricité de cette barre par rapport à la fibre moyenne de béton.  $u$  représente le déplacement longitudinal du béton au niveau de la fibre moyenne de la poutre, et  $\theta$  représente la rotation de la section de la poutre par rapport à l'axe  $z$  de la figure 5.30. La condition d'ancrage de l'équation (5.141) est imposée pour les noeuds d'extrémité de l'acier.

Pour la modélisation avec des plaques enrichies, l'équation (5.141) est également appliquée afin d'ancrer l'acier au béton. Dans ce cas,  $u$  représente le déplacement selon la direction de la barre d'acier du point de béton représentant la projection du noeud d'acier sur le plan moyen de la plaque. Pour les noeuds extrêmes d'acier du maillage choisi (voir figure 5.31), leur projection sur le plan moyen de la plaque est un noeud de la plaque de béton.  $u$  est donc calculée au niveau de la résolution. Dans le cas général où la projection du noeud d'acier ne correspond pas forcément à un noeud de béton,  $u$  doit être calculé en fonction des déplacements des noeuds de béton selon les fonctions de forme des éléments plaques. De plus,  $\theta$  représente dans ce cas la rotation de la plaque par rapport à l'axe  $y$  de la figure 5.31.

#### 5.4.3.3.3 Résultats

Les courbes de réaction de la figure 5.33 ne sont pas affectées par l'ancrage des extrémités d'acier. La figure 5.35 montre les valeurs de glissement.

#### 5.4.3.3.4 Discussion

On retrouve avec les différentes techniques de modélisation d'interface dans les différents cadres de calcul, similairement à l'exemple de flexion sans l'ancrage d'acier (figure 5.34)), des courbes de glissement très proches les unes des autres, avec des légères différences.

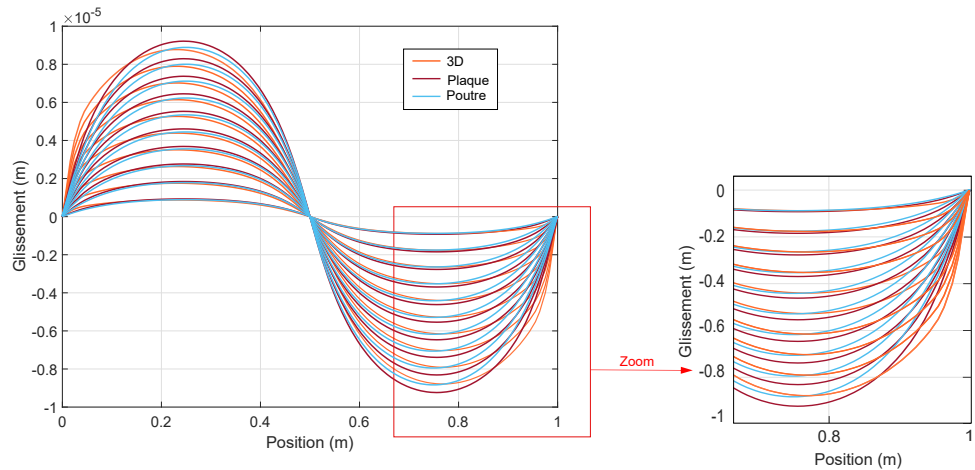


FIGURE 5.35 – Valeurs de glissement.

## 5.5 Exemples d'application

Deux exemples d'application sont étudiés avec des modèles de poutres et de plaques enrichies : un essai de tirant en béton armé, et un essai de flexion quatre points d'un poutre en béton armé.

### 5.5.1 Essai de tirant

Un essai de tirant réalisé dans [Farra, 1995] est considéré.

#### 5.5.1.1 Description de l'essai

L'essai de tirant considéré a été modélisé antérieurement en 3D dans le sous-chapitre 3.7 du chapitre 3 de ce mémoire. Il est modélisé ici avec des poutres enrichies et des plaques enrichies (deux choix distincts de modélisation).

Un comportement linéaire est associé à l'acier. Un premier calcul est réalisé avec un comportement linéaire de béton. Un comportement non linéaire de béton est activé dans un second temps. Un comportement non linéaire d'interface est considéré.

#### 5.5.1.2 Modélisations avec un comportement linéaire de béton

On concentre ici les non-linéarités de l'exemple de tirant au niveau du comportement non linéaire d'adhérence acier-béton.

##### 5.5.1.2.1 Propriétés des matériaux

Les propriétés d'acier, de béton, et d'interface sont identiques à celles utilisées pour la modélisation 3D de cet essai de tirant présentée dans le chapitre 3 de ce manuscrit, pour une modélisation avec un comportement linéaire de béton (la barre d'acier est d'un module d'Young de 200 GPa, les propriétés de béton et d'adhérence sont indiquées dans le tableau 3.4 et la figure 3.24 du chapitre 3, respectivement).

### 5.5.1.2.2 Maillages

La figure 5.36 montre le maillage et les conditions aux limites associés à la modélisation de l'essai de tirant avec des plaques enrichies. Le comportement membranaire des plaques est sollicité.

Pour la modélisation avec des poutres enrichies, on assemble des poutres multifibres d'une cinématique de Timoshenko à la barre d'acier, tout en prenant en compte le comportement d'adhérence acier-béton. La figure 5.37 illustre les différentes fibres du maillage de béton considéré.

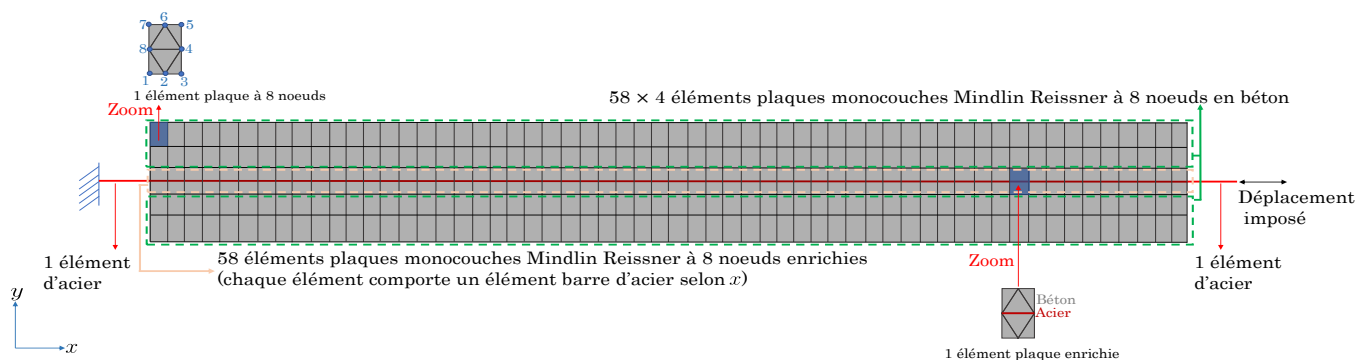


FIGURE 5.36 – Modélisation de l'essai de tirant avec des éléments plaques enrichies.

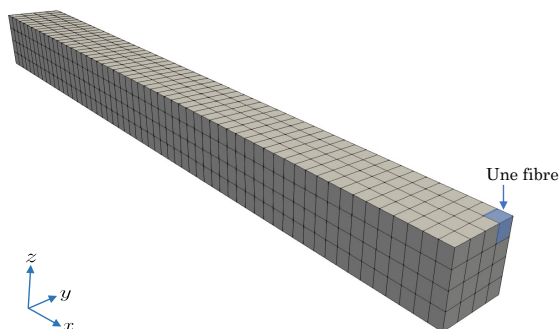


FIGURE 5.37 – Maillage choisi pour la modélisation de l'essai de tirant avec des éléments poutres enrichies.

### 5.5.1.2.3 Résultats

Les courbes de réactions sont illustrées dans la figure 5.38. La courbe de réaction du calcul 3D avec une adhérence imparfaite est issue d'une modélisation avec des macro-éléments d'une épaisseur d'interface de 5 mm.

On remarque que les courbes issues du calcul avec des éléments plaques enrichies sont plus atténuées que celles avec des poutre enrichies, mais plus rigides que celles du calcul 3D.

### 5.5.1.2.4 Discussion

Les écarts des rigidités des différentes courbes de réaction peuvent être justifiés en comparant la forme de la déformée du tirant résultante des différents calculs.

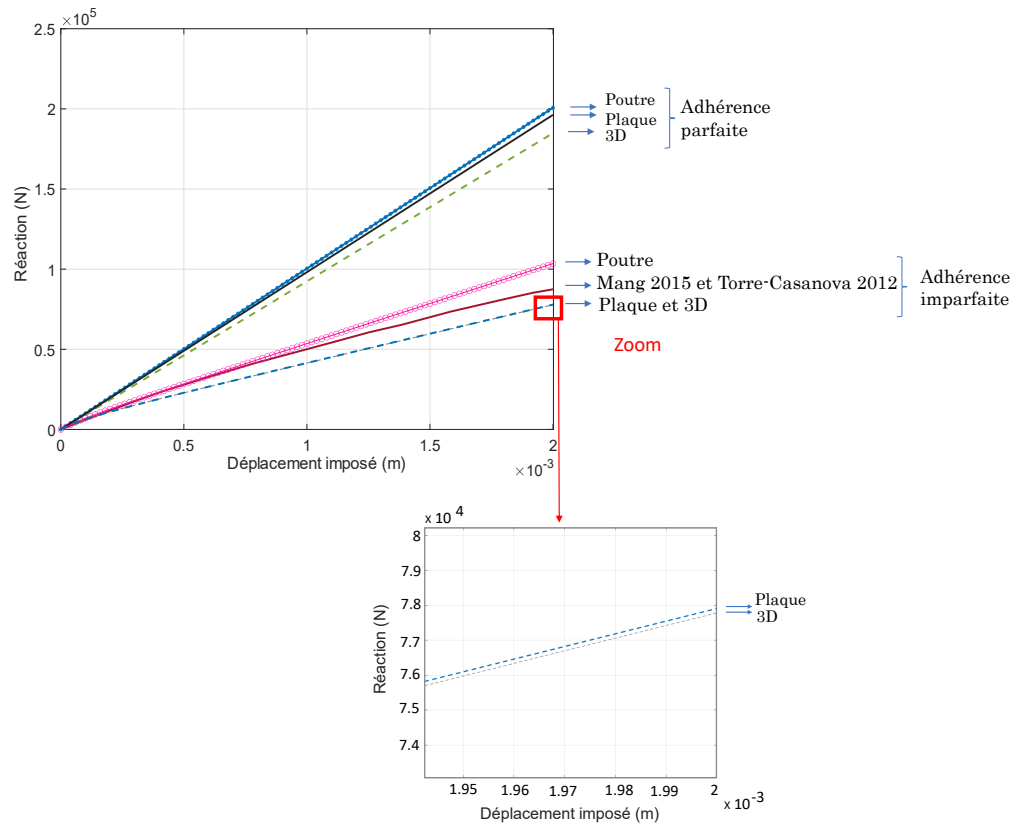


FIGURE 5.38 – Courbes de réaction.

Les figures 5.39, 5.40, et 5.41 montrent la forme de la déformée de la face latérale du tirant située au voisinage de l'extrémité tirée de la barre d'acier.

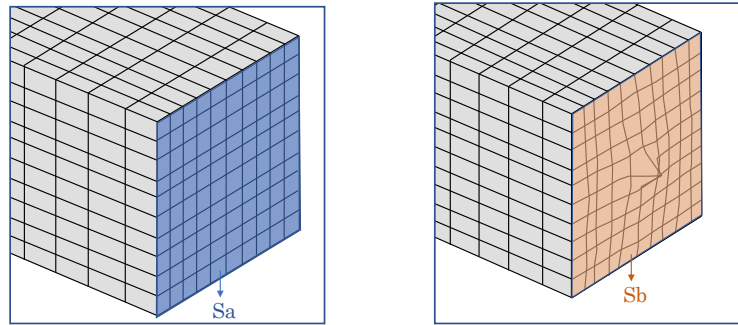
On peut remarquer que la section du tirant n'est pas plane après déformation dans le résultat du calcul 3D, ce qui n'est pas le cas dans le modèle de poutre (où la section plane reste plane après déformation). Cela justifie le fait que la courbe de réaction obtenue avec le modèle de poutre est plus rigide que celle obtenue avec le calcul 3D. La courbe de réaction obtenue avec le modèle de plaque enrichie est plus atténuée que celle du calcul avec des poutres, mais plus rigide que la courbe issue du calcul 3D. Si on regarde la forme de la déformée du calcul 3D, on voit qu'on a un poinçonnement au milieu de la section est observé (voir figure 5.39). Bien que la section latérale du tirant ne reste pas plane après déformation avec le modèle de plaque enrichie (voir figure 5.40), ce poinçonnement n'est pas reproduit.

### 5.5.1.3 Modélisations avec un comportement non linéaire de béton

L'endommagement du béton est ici pris en considération.

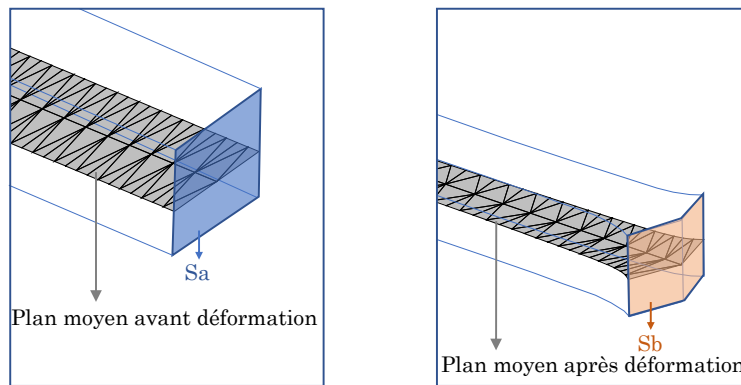
#### 5.5.1.3.1 Propriétés des matériaux

Par rapport à la modélisation avec un comportement linéaire de béton, les propriétés d'acier et d'interface demeurent inchangés. Avec la modélisation poutre multifibre enrichie du tirant, on considère pour chaque fibre en béton une version 1D de la loi de Mazars régularisée de l'annexe A, avec les propriétés associées au comportement du béton lors de la modélisation de cet essai de tirant dans le chapitre 3 (tableau 3.7).



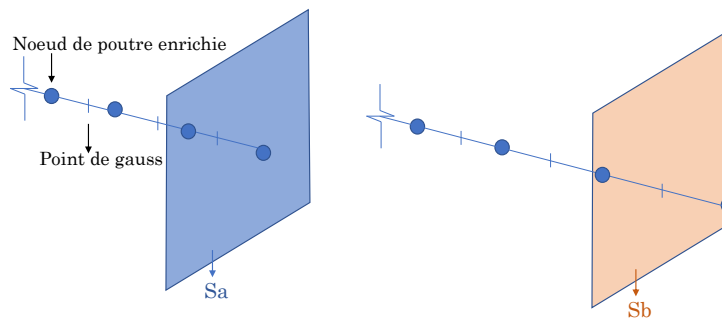
Sa : face latérale du tirant avant déformation  
 Sb : face latérale du tirant après déformation

FIGURE 5.39 – Déformée de la face latérale du tirant - modélisation 3D.



Sa : face latérale du tirant avant déformation  
 Sb : face latérale du tirant après déformation

FIGURE 5.40 – Déformée de la face latérale du tirant - modélisation avec des éléments plaques enrichies.



Sa : face latérale du tirant avant déformation  
 Sb : face latérale du tirant après déformation

FIGURE 5.41 – Déformée de la face latérale du tirant - modélisation avec des éléments poutres enrichies.



Pour la modélisation avec des plaques enrichies, le choix s’est porté sur l’utilisation d’une loi révisée régularisée de Mazars présentée dans l’annexe B. Les paramètres du tableau 5.9 sont utilisés pour caractériser cette loi.

Paramètre	Description	Valeur	Unité
$f_t$	Résistance à la traction	2.6	MPa
$f_c$	Résistance à la compression	56.9	MPa
$\varepsilon_{t0}$	Paramètre de la loi de Mazars révisée	$\frac{f_t}{E_c} = 8.5526 \times 10^{-5}$	-
$\varepsilon_{c0}$	Paramètre de la loi de Mazars révisée	$\frac{f_c}{E_c} = 1.9 \times 10^{-3}$	-
$A_t$	Paramètre de la loi de Mazars révisée	0.99	-
$B_t$	Paramètre de la loi de Mazars révisée	6000	-
$A_c$	Paramètre de la loi de Mazars révisée	1.2	-
$B_c$	Paramètre de la loi de Mazars révisée	700	-
$\beta$	Paramètre de la loi de Mazars révisée	1.06	-

TABLEAU 5.9 – Paramètres de la loi de Mazars révisée pour l’exemple de tirant.

Des distributions aléatoires de la déformation seuil  $\varepsilon_{d0}$  de la loi 1D associée aux fibres de la formulation multifibre enrichie et du paramètre  $\varepsilon_{t0}$  de la loi de Mazars révisée attribuée aux éléments plaques enrichies sont considérées, avec une loi Gaussienne de moyenne égale à  $8.5526 \times 10^{-5}$  (valeur indiquée dans les tableaux 3.7 et 5.9) et d’un coefficient de variation de 5%. La méthode des bandes tournantes est utilisée pour générer la distribution avec une longueur de corrélation égale à la taille des éléments finis [Mantoglou et Wilson, 1982].

#### 5.5.1.3.2 Maillages

Les mêmes maillages utilisés pour les modélisations avec un comportement linéaire de béton sont considérés (voir figures 5.36 et 5.37).

La figure 3.32 montre la distribution de  $\varepsilon_{d0}$  dans le volume de béton pour la modélisation avec des poutres multifibres. La cinématique de Timoshenko adoptée définit un point de gauss pour chaque fibre. Pour cela, une seule valeur de  $\varepsilon_{d0}$  est associée à chaque fibre, au niveau de son point de gauss.

La distribution de  $\varepsilon_{t0}$  pour les plaques en béton est illustrée dans la figure 5.43. Chaque plaque en béton, définie au sein des plaques enrichies, est un élément à huit noeuds comportant quatre points de gauss. Ces plaques sont d’une cinématique de Mindlin Reissner.

Étant donné que cette étude consiste à modéliser le même essai de tirant avec des poutres et des plaques enrichies et à comparer les résultats issus des deux calculs, et vu qu’une valeur de déformation seuil est affectée à chaque fibre de la formulation multifibre, un choix d’attribuer une valeur du seuil  $\varepsilon_{t0}$  à chaque élément plaque est fait. Autrement dit, la valeur de  $\varepsilon_{t0}$  est constante par élément plaque.

#### 5.5.1.3.3 Résultats

Les courbes de réaction des calculs poutres et plaques enrichies sont illustrées dans la figure 5.44, avec des hypothèses d’adhérence parfaite et imparfaite. Il est à noter que pour les calculs d’adhérence parfaite, on associe une expression linéaire à la loi d’adhérence d’une pente jugée suffisamment élevée ( $10^{20}$  Pa/m).

Des sauts des valeurs de réaction sont bien distingués sur les courbes de réaction d’adhérence imparfaite. Ces sauts correspondent à l’apparition successive des fissures dans le béton. Les courbes de réaction d’adhérence parfaite sont pourtant plus lisses. Avec une hypothèse

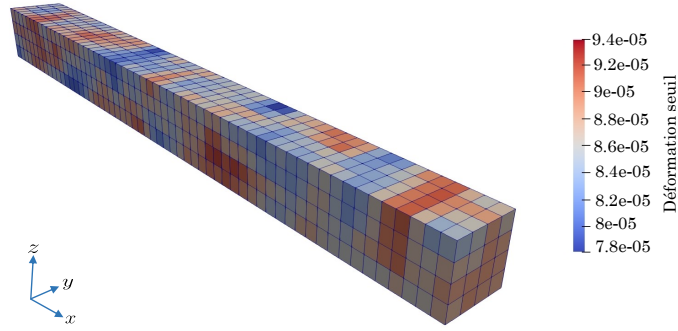


FIGURE 5.42 – Distribution du seuil d’endommagement - modélisation de l’essai de tirant avec des éléments poutres enrichies.

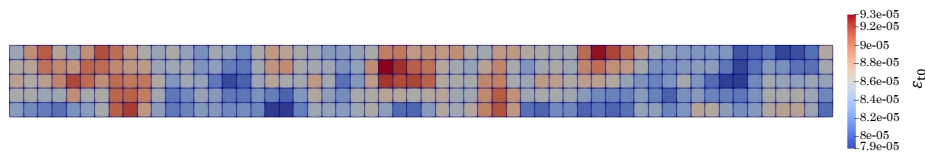


FIGURE 5.43 – Distribution du seuil  $\varepsilon_{t0}$  - modélisation de l’essai de tirant avec des éléments plaques enrichies.

d’adhérence parfaite, on obtient des cartographies d’endommagement plus diffuse dans le volume de béton. Ces observations sont validés dans les figures 5.45 et 5.46.

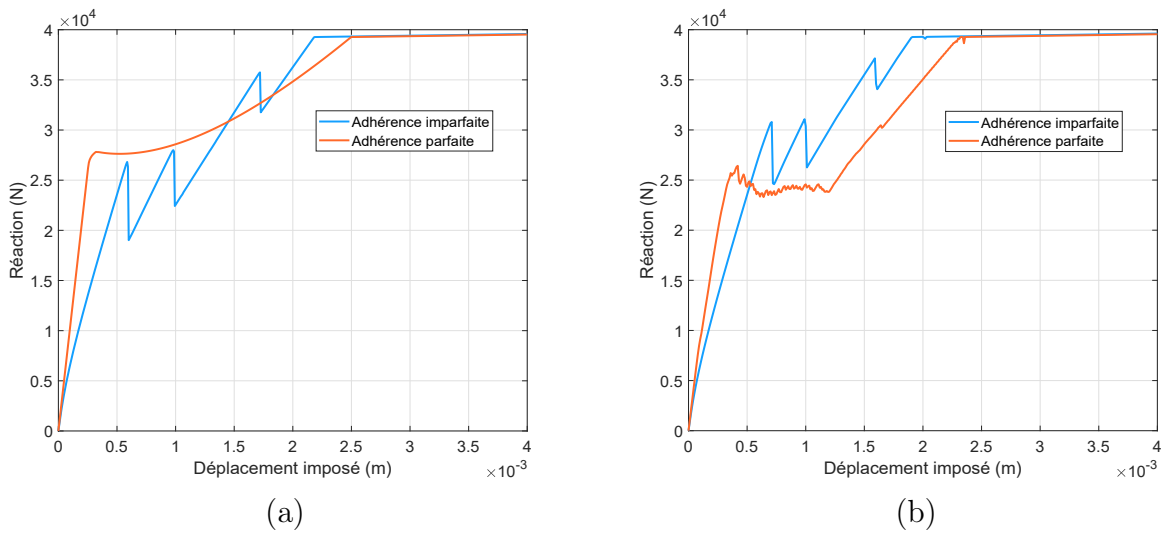


FIGURE 5.44 – Courbes de réaction - éléments poutres (a) et plaques (b) enrichies.

#### 5.5.1.3.4 Discussion

On observe le développement de trois fissures dans le béton avec les modélisations d’adhérence imparfaite. Ce nombre ne correspond pas au nombre de fissures observé avec la modélisation 3D de ce test de tirant dans le chapitre 3 (voir figure 3.34). Pour cette modélisation 3D, on observe l’apparition de 5 fissures dans le béton (qui est également le nombre de fissures

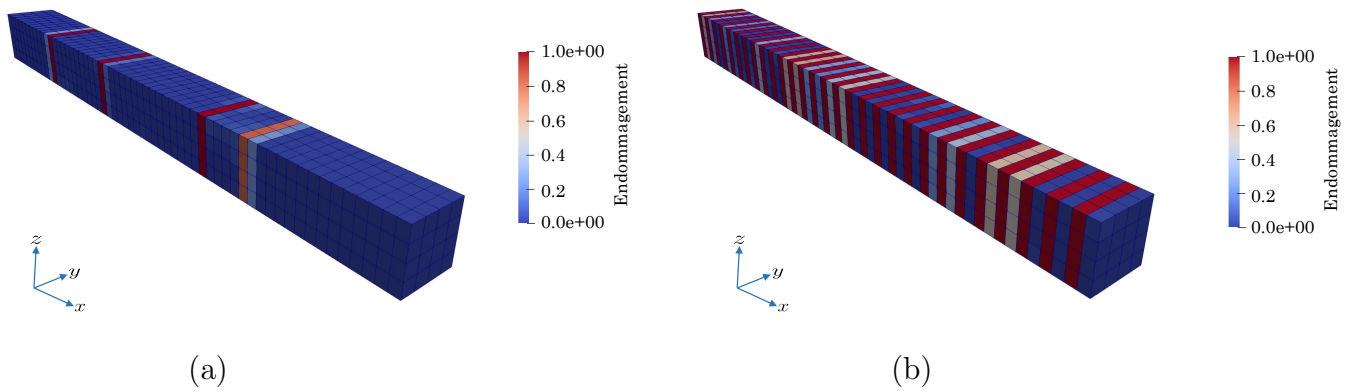


FIGURE 5.45 – Distribution du champ d’endommagement - modélisation de l’essai de tirant avec des éléments poutres enrichies : adhérence imparfaite (a) et adhérence parfaite (b).

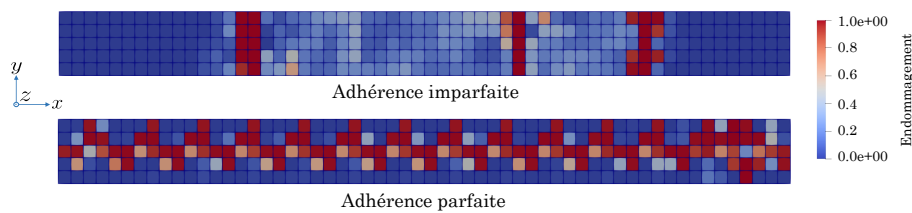


FIGURE 5.46 – Distribution du champ d’endommagement - modélisation de l’essai de tirant avec des éléments plaques enrichies : cas d’adhérence imparfaite et parfaite.

observé expérimentalement). Cependant, la distribution aléatoire du seuil d’endommagement dans le volume de béton joue un rôle important sur l’apparition des fissures qui vont se localiser, selon cette distribution, dans les zones des plus faibles valeurs de ce seuil. La modélisation avec des poutres multifibre attribue une valeur de ce seuil à chaque fibre, et celle avec des plaques attribue une valeur de seuil à chaque élément plaque. En parallèle, la modélisation 3D attribue à chaque point de gauss une valeur de seuil (8 valeurs par élément volumique). Cette nuance peut donc expliquer la différence du nombre de fissures 3D-poutres et plaques. Pourtant, l’aspect de la reproduction d’un nombre bien défini de fissures avec une modélisation non linéaire d’interface par rapport à une modélisation d’adhérence parfaite où un nombre bien plus important de fissure est distribuée le long du tirant est bien capté pour tous les choix de modélisation.

Une description fine du comportement de fissuration du béton caractérisée par une discontinuité du champ de glissement et une concentration de contrainte dans l’acier est observée avec les modélisation de poutres et plaques enrichies, comme le montrent les figures 5.47 et 5.48. Dans ces figures, on calcule le glissement acier-béton au niveau des noeuds du maillage. La contrainte d’acier est calculée au niveau des points de gauss des éléments barres d’acier. Ces valeurs de glissement et de contraintes d’acier sont présentées dans ces deux figures pour les différents pas de temps des résolutions associées.

## 5.5.2 Poutre en flexion quatre points

Un essai de flexion quatre points d’une poutre en béton armé réalisé dans [Gilbert et Nejadi, 2004] est considéré.

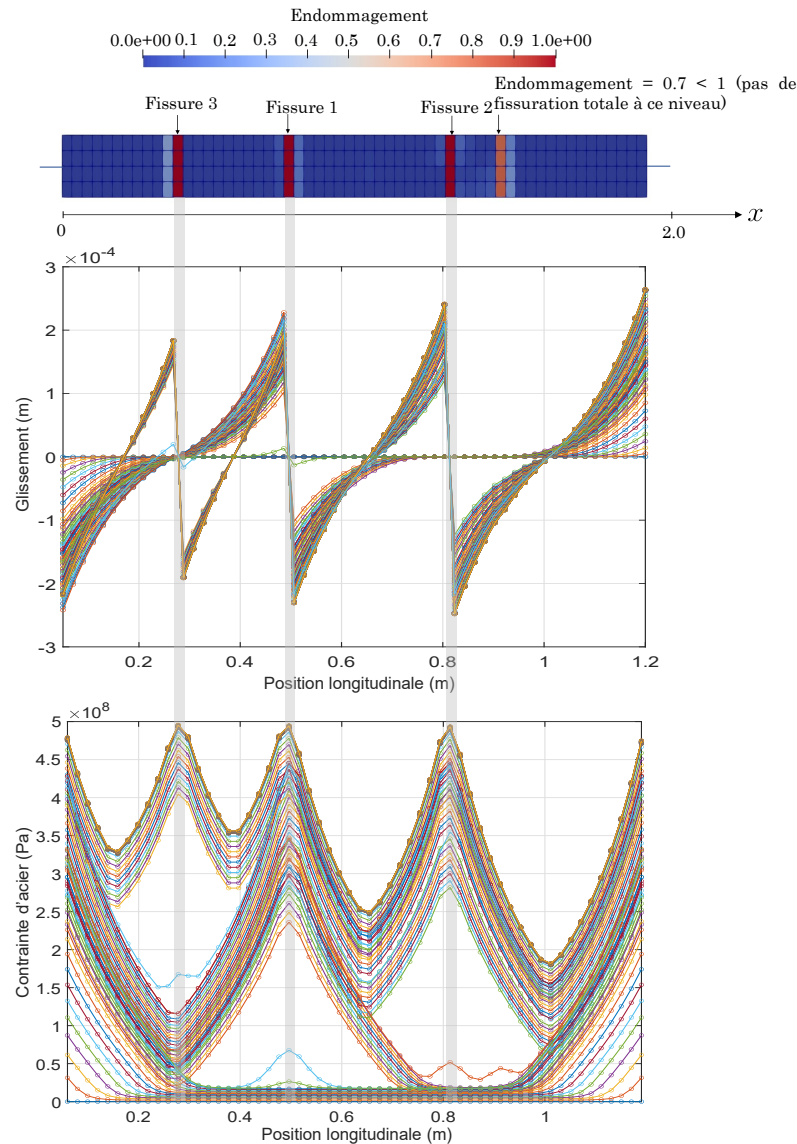


FIGURE 5.47 – Description locale de la fissuration du tirant - modélisation avec des éléments poutres enrichies.

### 5.5.2.1 Description de l'essai

Le test considéré est modélisé dans le chapitre 3 de ce mémoire avec l'approche de macro-élément. Ce test est décrit dans la figure 3.66 de chapitre.

### 5.5.2.2 Modélisation de l'essai de flexion quatre points

La modélisation avec des poutres enrichies définit chaque élément poutre enrichie comme étant un assemblage de trois contributions :

- un élément poutre multifibre Timoshenko en béton ;
- un élément barre d'acier à deux noeuds ;
- des contraintes d'adhérence acier-béton.

La modélisation avec des plaques enrichies définit chaque élément plaque enrichie comme étant un assemblage de trois contributions :

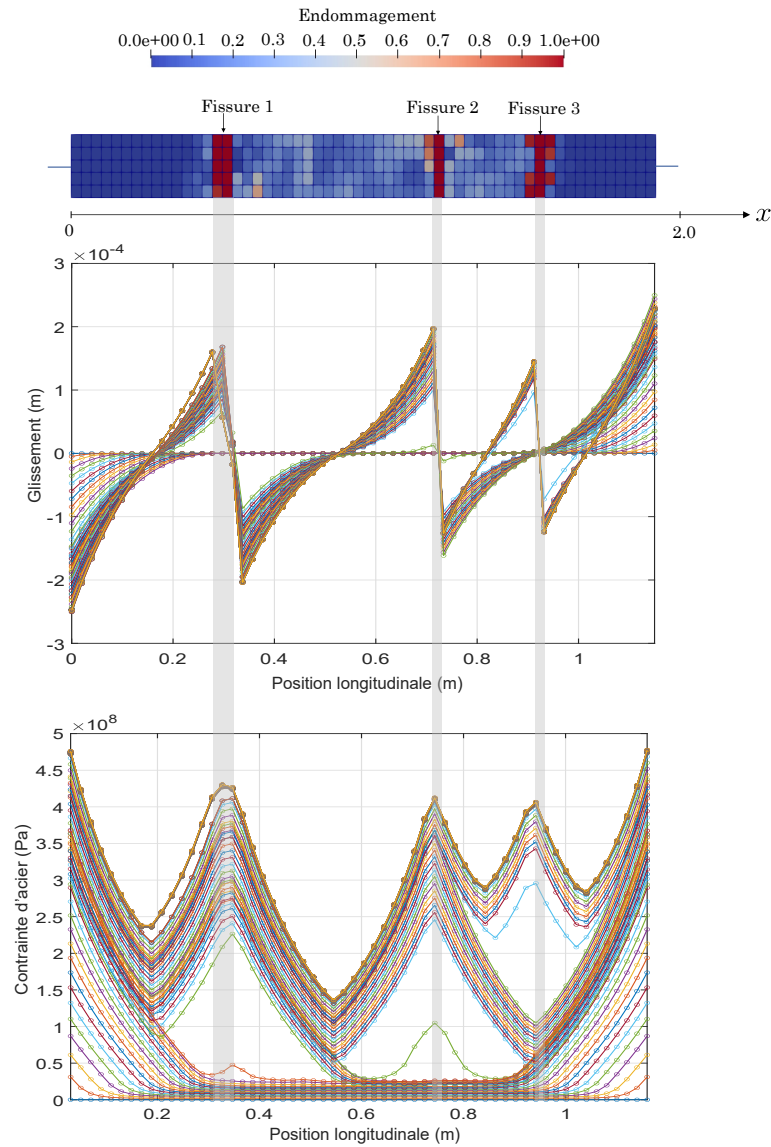


FIGURE 5.48 – Description locale de la fissuration du tirant - modélisation avec des éléments plaques enrichies.

- un élément plaque monocouche Mindlin Reissner en béton ;
- un élément barre d'acier à deux noeuds ;
- des contraintes d'adhérence acier-béton.

#### 5.5.2.2.1 Propriétés des matériaux

Les propriétés d'acier et d'interface sont identiques à celles considérées dans le chapitre 3 pour modéliser ce même essai de flexion quatre points (voir paragraphe 3.7.5.2.1 du chapitre 3).

Une loi de Mazars classique 1D régularisée en énergie (voir annexe A) est associée aux fibres des poutres multifibres, avec les propriétés du tableau 5.10.

Pour la modélisation avec des plaques enrichies, la loi de Mazars révisée régularisée de Mazars présentée dans l'annexe B est accordée au béton, identiquement à la modélisation par macro-éléments de cet essai. Les propriétés du tableau 3.18 du chapitre 3 sont donc

Paramètre	Description	Valeur	Unité
$E_c$	Module d'Young	28	GPa
$f_t$	Résistance à la traction	3.2	MPa
$\varepsilon_{d0}$	Déformation seuil	$\frac{f_t}{E_c} = 1.1429 \times 10^{-4}$	-
$A_t$	Paramètres de la loi locale de Mazars	Pas utilisé pour la loi régularisée	-
$B_t$	Paramètres de la loi de Mazars	Régularisé (équation A.7)	-
$A_c$	Paramètres de la loi de Mazars	1.2	-
$B_c$	Paramètres de la loi de Mazars	400	-
$\beta$	Paramètres de la loi de Mazars	1.06	-
$G_f$	Énergie de fissuration	150	N/m

TABLEAU 5.10 – Paramètres de la loi de Mazars - modélisation de l'essai de poutre en flexion quatre points avec des poutres multifibres enrichies.

utilisées.

#### 5.5.2.2.2 Maillage

La figure 5.49 illustre les différentes fibres qui constituent le maillage de béton des poutres multifibres. Les conditions aux limites des poutres multifibres enrichies sont détaillées dans la figure 5.50.

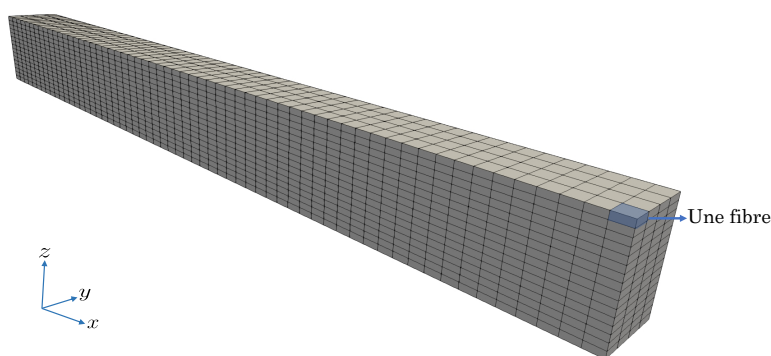


FIGURE 5.49 – Maillage choisi pour la modélisation de l'essai de flexion 4 points avec des éléments poutres enrichies.

Le maillage et les conditions aux limites de la modélisation réalisée avec des plaques enrichies sont illustrés dans la figure 5.51. On s'intéresse au comportement membranaire des plaques. La construction du maillage est réalisée avec des plaques enrichies au niveau de la barre d'acier. Le reste de la structure est maillé avec des plaques classiques en béton.

#### 5.5.2.2.3 Résultats

La figure 5.52 illustre les courbes de réaction des deux types de modélisation (poutres et plaques enrichies) avec des hypothèses d'adhérence parfaite et imparfaite. Ces courbes sont comparées à la courbe de réaction expérimentale.

La prise en compte du comportement non linéaire d'interface n'affecte pas significativement la courbe de réaction par rapport à un calcul avec une hypothèse d'adhérence parfaite. Pourtant, la cartographie de fissuration expérimentale est mieux représentée avec un comportement d'interface non linéaire, comme le montre la figure 5.53. Tout autour de l'acier,

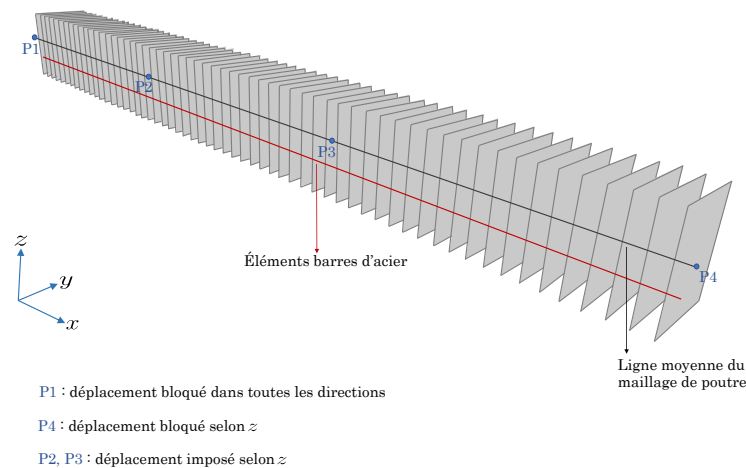


FIGURE 5.50 – Conditions aux limites de la modélisation de l’essai de flexion 4 points avec des éléments poutres enrichies.

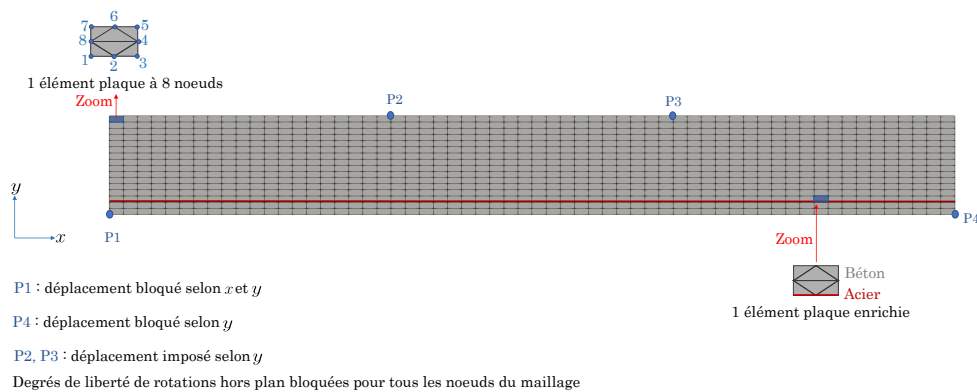


FIGURE 5.51 – Conditions aux limites de la modélisation de l’essai de flexion 4 points avec des éléments plaques enrichies.

on détecte mieux la localisation des fissures et leur espacement avec les calculs pour lesquels le comportement d’interface est pris en compte.

Il est possible de remarquer qu’une différence significative entre les cartographies d’endommagement avec et sans prise en compte du comportement de l’interface acier-béton est obtenue avec des poutres enrichies. Cette différence est moins prononcée lors de la modélisation avec des plaques enrichies. Elle est encore moins visible pour la modélisation 2D de cet essai présentée dans le chapitre 3 de ce mémoire (voir figure 3.69). En effet, l’hypothèse de section plane qui reste plane après déformation adoptée pour les éléments poutres en béton étale l’endommagement dans le volume de la poutre étudiée. Une prise en compte du comportement non linéaire d’interface permet de surmonter cette limitation des éléments poutres. Les cinématiques des plaques étant moins contraintes par rapport aux cinématiques des poutres, une différence moins importante des cartographies d’endommagement avec et sans prise en compte de l’interface est obtenue. Les éléments 2D bénéficient d’une cinématique encore moins contrainte, entraînant une différence encore moins visible.

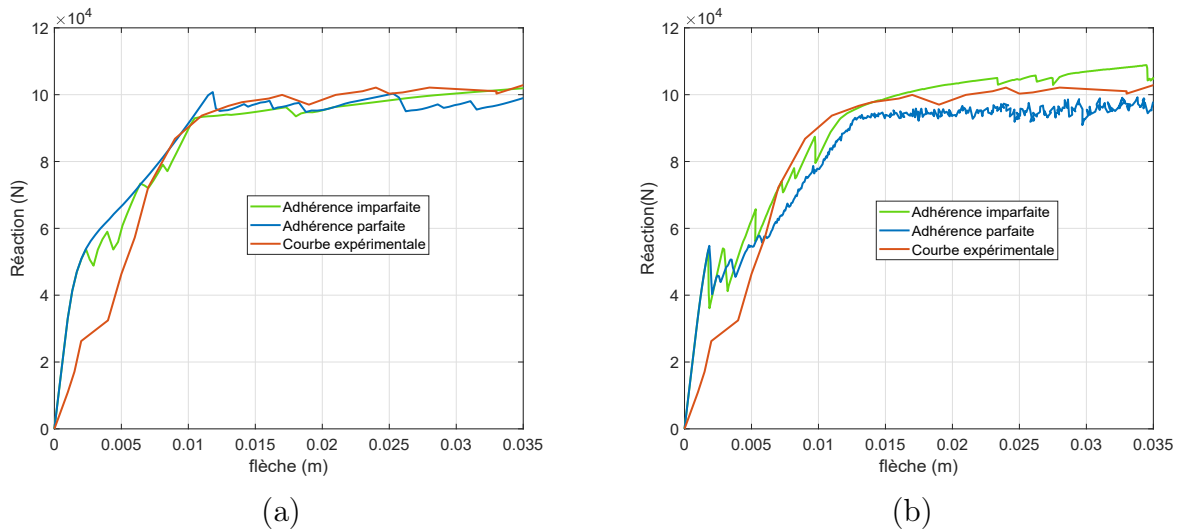


FIGURE 5.52 – Courbes de réaction de l'exemple de poutre en flexion 4 points avec des poutres enrichies (a) et des plaques enrichies (b).

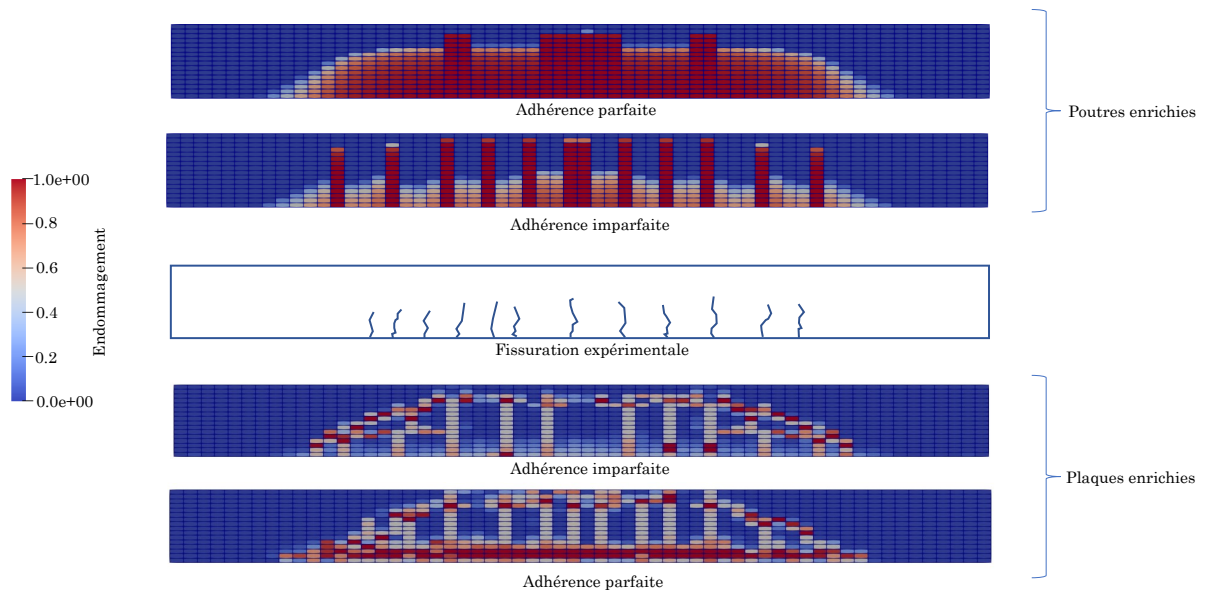


FIGURE 5.53 – Cartographies d'endommagement issues des différentes modélisations comparées à la fissuration expérimentale.

#### 5.5.2.2.4 Discussion

Une description locale de la fissuration caractérisée par une concentration de contrainte au niveau de l'acier et une discontinuité du champ de glissement est détectée avec les modélisations de poutres et de plaques enrichies. Cette caractérisation de la fissuration est illustrée dans les figures 5.54 et 5.55. Les glissements dans ces figures sont calculés au niveau des noeuds des éléments barres d'acier. Les contraintes d'acier sont calculés au niveau des points de gauss de ces éléments.



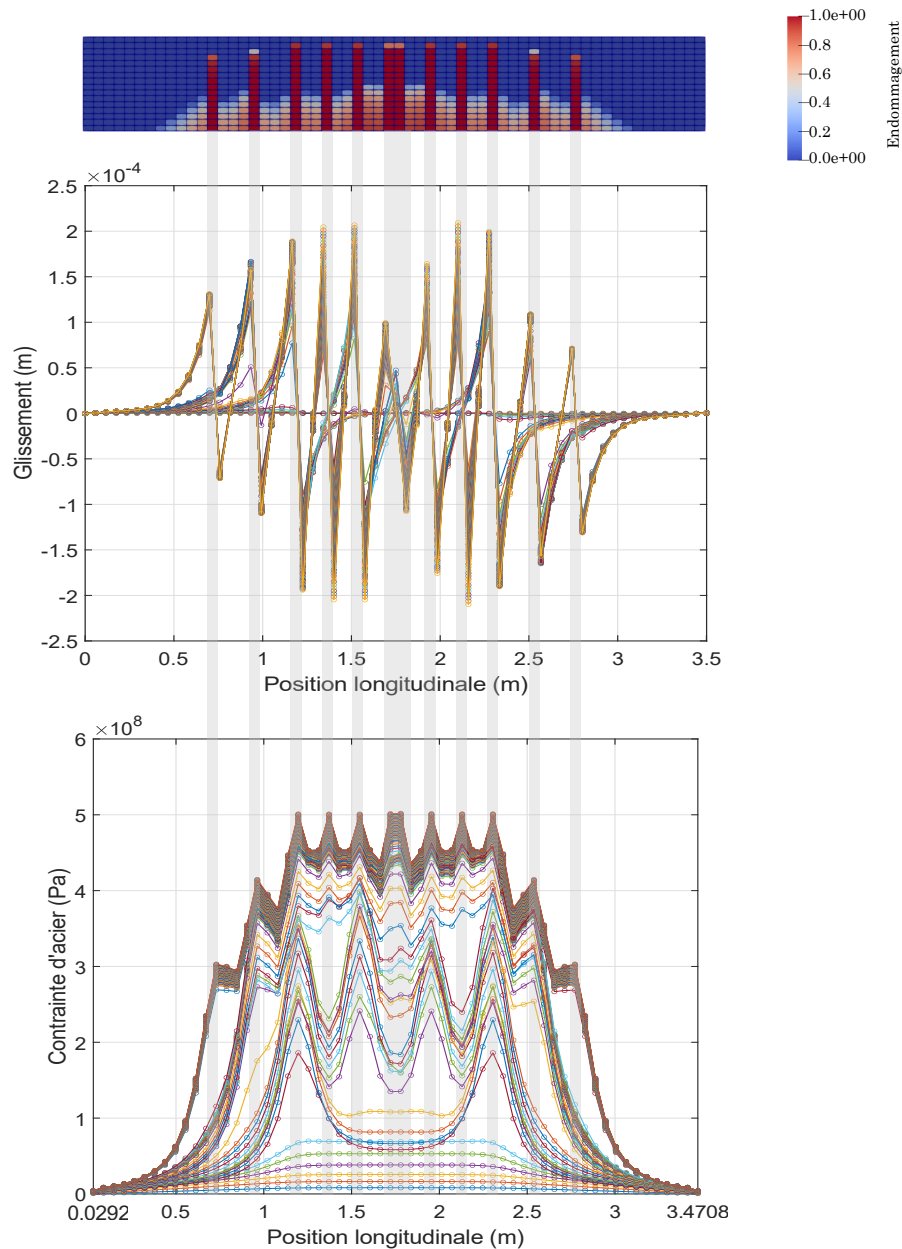


FIGURE 5.54 – Description locale de la fissuration de l’essai de poutre en flexion 3 points pour les différents pas de temps de la résolution - modélisation avec des éléments poutres enrichies.

## 5.6 Conclusions

Dans ce chapitre, une méthodologie polyvalente permettant de modéliser le comportement de l’interface acier-béton au sein des éléments semi-globaux poutres et plaques est proposée. La philosophie de l’approche est applicable à un modèle de poutre ou de plaque selon les besoins de l’utilisateur. Elle consiste à définir un élément enrichi constitué d’un assemblage d’un ou de plusieurs éléments poutres ou plaques en béton, d’un ou de plusieurs éléments

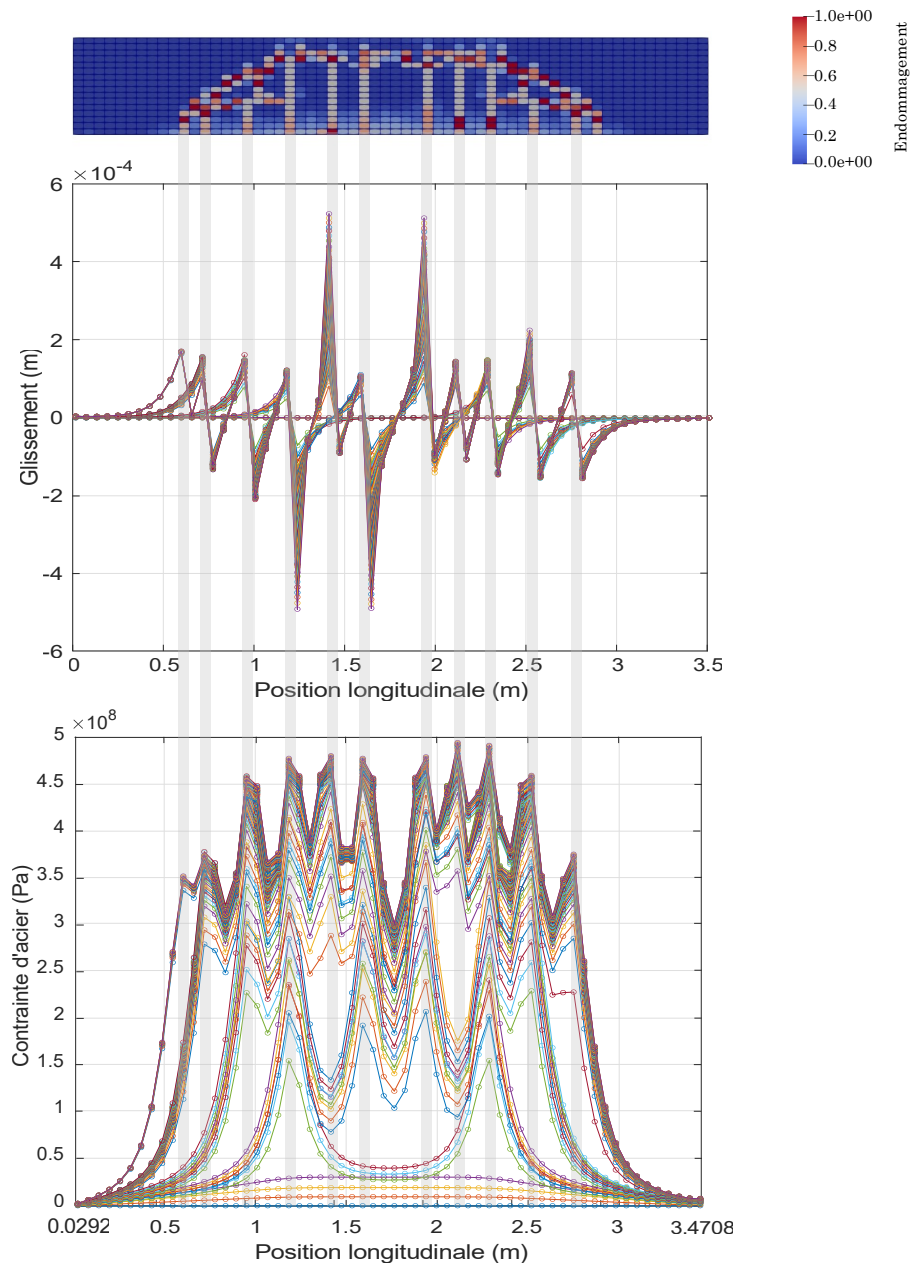


FIGURE 5.55 – Description locale de la fissuration de l’essai de poutre en flexion 3 points pour les différents pas de temps de la résolution - modélisation avec des éléments plaques enrichies.

barres en acier, et d’une contribution de contraintes d’adhérence acier-béton définies tout autour de chaque élément barre d’acier. Les éléments d’acier et de béton à disposition au sein du code aux éléments finis utilisé peuvent être appelés au niveau de l’assemblage de l’élément enrichi.

Il convient de souligner que des travaux antérieurs de la littérature visant à modéliser le comportement d’interface dans le cadre des éléments poutres multifibres, comme le travail

de [Yousefi *et al.*, 2020] à titre d'exemple, constituent un cas particulier d'assemblage de l'approche proposée dans ce travail. De plus, ces travaux présentent les équations de l'élément en question avec toutes les contributions (acier+béton+interface). L'avantage de l'approche proposée dans ce travail réside dans sa simplicité de formulation, beaucoup plus polyvalente car elle permet d'utiliser n'importe quel type d'élément plaque ou poutre déjà présent dans la littérature et de l'enrichir. En outre, le modèle fait appel à des éléments existants. Ces contributions sont vues comme des comportement d'éléments finis distincts. En effet, le travail de [Yousefi *et al.*, 2020] prend en compte des grands déplacements. Cet aspect pourra être pris en compte avec l'approche proposée dans ce travail en assemblant des contributions de comportement d'éléments finis poutres corotationnelles, sans pour autant complexifier de manière disproportionnée la formulation du principe des puissances virtuelles de l'élément enrichi. De plus, la simplicité de l'approche et son caractère polyvalent la rendent applicable pour des éléments poutres et des éléments plaques.

Dans ce chapitre, des exemples de validation du comportement de plusieurs configurations d'assemblage poutres et plaques enrichies sont présentés. Deux exemples d'application sont par la suite étudiés : un essai de tirant en béton armé, et un essai de poutre en béton armé en flexion 4 points.

Ces exemples d'application décrivent le comportement de fissuration du béton au voisinage des barres d'acier. Ce comportement est caractérisé par une concentration de contrainte dans les barres d'acier qui vont reprendre de l'effort au niveau des fissures. En effet, aux endroits des fissures, le béton perd sa capacité à supporter des efforts internes (en cas de fissuration totale). De plus, on observe une discontinuité du champ de glissement aux bords de l'élément fissuré. La figure 5.56 fournit une description physique de ce saut de glissement. Enfin, il est important de souligner que cette discontinuité n'est pas nécessairement centrée à zéro et ne relie pas forcément des valeurs de glissement de sens opposés.

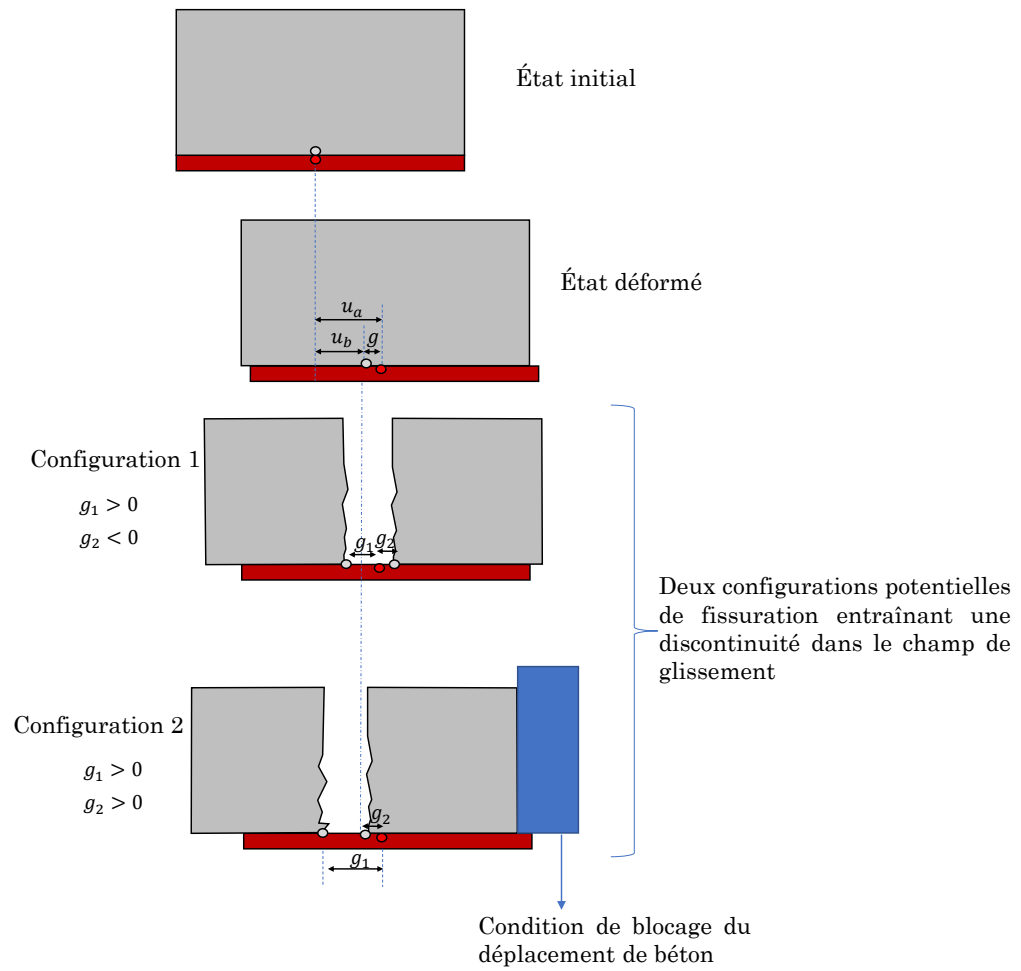


FIGURE 5.56 – Discontinuité de glissement due à la fissuration du béton au voisinage de l'acier.

# Chapitre 6

## Conclusions et perspectives

Ce chapitre fait le bilan du travail présenté dans ce mémoire et propose des perspectives qui peuvent constituer une suite de ce travail.

### 6.1 Bilan général

La modélisation numérique du comportement de l'interface acier-béton constitue un aspect important dans l'étude des structures en béton armé. Cette modélisation est primordiale afin de pouvoir reproduire d'une manière pertinente et réaliste le phénomène de fissuration du béton, et de réaliser une meilleure estimation de l'énergie matérielle dissipée au sein de ces structures.

Afin de dépasser les limites de la plupart des modèles d'interface proposés dans la littérature, ce travail propose des nouvelles stratégies de modélisation de cette interface. Ces approches présentent un compromis entre : une bonne représentation du comportement d'interface, et un coût de calcul numérique raisonnable. Dans le cadre des calculs 1D, 2D, et 3D, un modèle de macro-élément est proposé. Ce macro-élément, qui prend en compte le comportement de l'acier et de l'interface, peut être relié à des éléments de béton afin de modéliser une structure en béton armé. En parallèle, pour les calculs basés sur des éléments semi-globaux poutres et plaques, une technique d'enrichissement cinématique est établie afin d'incorporer l'étude du comportement d'interface au sein de ce type d'éléments.

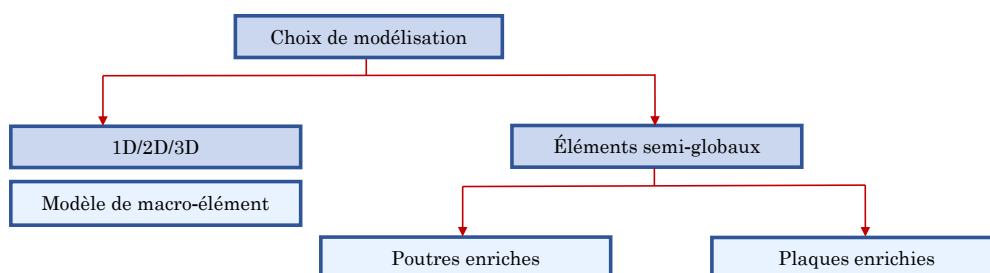


FIGURE 6.1 – Méthodologies de prise en compte du comportement d'interface acier-béton proposées dans cette thèse pour différents choix de modélisation des structures en béton armé.

Après une introduction du sujet dans le chapitre 1, le chapitre 2 présente une étude bibliographique menée sur le comportement de l'interface acier-béton, ainsi que sur les différents

essais expérimentaux visant à identifier et à caractériser ce comportement. Les différentes stratégies de modélisation numérique du comportement de l'interface ont également été présentées. Une attention particulière a été accordée aux avantages et inconvénients des différents essais et types de modèles numériques.

Le chapitre 3 présente une approche originale de modélisation de l'interface acier-béton. Cette approche multi-échelle consiste à définir des macro-éléments capables de représenter le comportement de l'acier, d'une zone d'interface et des contraintes d'adhérence entre l'acier et l'interface. Le macro-élément est défini à l'échelle globale de la structure en béton armé. Une échelle locale est définie afin de réaliser une discrétisation interne spécifique au macro-élément, indépendamment de la taille du maillage global. Une technique de condensation statique est utilisée pour coupler les deux échelles. Des exemples numériques de modélisation d'un essai pull-out 1D et 3D sont réalisés en utilisant la formulation de macro-élément. Ces exemples valident la formulation de macro-élément qui est capable de reproduire le comportement de l'interface pour des configurations de chargement monotone et cyclique. Dans un deuxième exemple, les macro-éléments sont utilisés pour modéliser un essai de tirant. Cette application démontre la robustesse numérique du macro-élément par rapport à des approches de modélisation de l'interface acier-béton de la littérature [Torre-Casanova, 2012] [Mang, 2015], et justifie l'importance de la prise en compte de cette interface sur l'évaluation de la fissuration. La formulation de macro-élément est également utilisée pour modéliser un essai de bord de poutre ayant l'avantage d'être plus représentatif qu'une configuration classique d'un essai de pull-out pour la caractérisation du comportement d'interface. Deux applications supplémentaires sont présentées avec des modélisations d'un essai de flexion trois points et d'un essai de flexion quatre points de deux poutres en béton armé.

Afin de connecter des macro-éléments à des éléments 2D/3D de béton pour étudier une structure en béton armé, une technique d'imposition de relations cinématiques basée sur des principes de projection cinématique est utilisée. Cette technique est détaillée dans le chapitre 4.

Le chapitre 5 propose une méthodologie d'enrichissement cinématique applicable à des éléments poutres et plaques dans le but de représenter le comportement d'interface acier-béton. L'approche proposée se distingue par sa polyvalence, permettant son application au choix à un modèle de poutre ou de plaque. Un élément fini (poutre ou plaque) choisi en béton peut être appelé de la bibliothèque d'éléments du code aux éléments finis utilisé. Un élément barre d'acier est également appelé. Les deux éléments (acier et béton) sont assemblés afin de créer un seul élément enrichi. Cet élément tient compte, en plus des contributions d'acier et de béton, des contraintes d'adhérence acier-béton. En outre, l'élément enrichi peut assembler plusieurs éléments poutres ou plaques en béton et plusieurs éléments barres d'acier. La manière dont est formulé et programmé l'élément enrichi permet donc d'appeler n'importe quel type d'élément fini plaque ou poutre et n'importe quel élément barre d'acier. Des tests de validation des approches de plaques et de poutres enrichies sont présentés dans ce chapitre, accompagnés d'études comparatives entre les deux approches. Deux exemples d'application sont étudiés : un exemple de tirant en béton armé et un exemple d'une poutre en béton armé en flexion quatre points, démontrant la grande robustesse de la méthode.

## 6.2 Perspectives

Ce travail de thèse ouvre plusieurs perspectives de recherche. Ces dernières peuvent être classées en deux catégories : d'une part, les perspectives liées au modèle de macro-élément, et d'autre part, les perspectives liées à l'approche de poutres et de plaques enrichies.

Pour améliorer la version actuelle de la formulation de macro-élément, les suggestions suivantes peuvent être considérées :

- la version actuelle du macro-élément se focalise sur le comportement longitudinal de l'adhérence acier-béton. Les noeuds internes des macro-éléments possèdent des degrés de liberté de déplacement dans la direction longitudinale d'acier, mais ne disposent pas de degrés de liberté dans la direction normale. Une discrétisation des zones d'acier et d'interface des macro-éléments avec des éléments poutres au lieu de choisir des éléments barres peut être une piste de développement intéressante. Cela permettra de définir des degrés de liberté internes de déplacement normal et d'ajouter des contraintes entre les deux domaines (acier et interface) perpendiculairement à la direction des macro-éléments. Ces contraintes pourront être calculées à l'aide d'une loi de comportement qui définit une contrainte normale en fonction du déplacement relatif dans la direction normale (voir [Murcia-Delso et Benson Shing, 2015]). Cela peut être particulièrement intéressant afin de fournir une représentation plus réaliste de l'éclatement de l'enrobage du béton [Murcia-Delso et Benson Shing, 2015] ;
- dans le présent travail, un comportement linéaire est attribué à la zone d'interface du macro-élément. Cependant, un comportement non linéaire peut également être attribué à cette zone. Une étude de comportement non linéaire de la zone d'interface pourra permettre d'explorer l'effet de cette non-linéarité sur le comportement global du macro-élément.

Il peut être également intéressant de réaliser des exemples numériques supplémentaires en utilisant le modèle macro-élément afin de représenter éléments structuraux, voir des structures à grande échelle. Ces applications pourraient permettre de mieux comprendre l'effet de l'épaisseur de la zone d'interface du modèle de macro-élément sur la réponse structurale des éléments en béton armé.

En ce qui concerne l'approche de poutres et de plaques enrichies, plusieurs pistes de recherche peuvent être explorées :

- brancher un élément plaque multicouche. Cela permettra d'étudier le comportement non linéaire hors plan de béton ;
- brancher un élément poutre ou plaque corotationnelle en béton. Cela permettra de prendre en compte des grands déplacements. L'intérêt des éléments corotationnels est de découpler la gestion des grands déplacements portée au sein des éléments de béton et appelés au sein de l'élément enrichi. En d'autres termes, l'aspect de grands déplacements ne sera pas traité directement au sein de l'élément enrichi, mais plutôt au sein des éléments corotaionnels assemblés dans le cadre de l'élément enrichi. C'est donc une approche multi-échelle cohérente avec le principe d'enrichissement proposé dans ce travail ;
- tester plusieurs configurations d'assemblages de poutres et de plaques enrichies à part celles étudiées dans ce travail, et mener des études comparatives entre les différents choix d'assemblage ;
- développer l'approche de plaques enrichies pour pouvoir permettre un transfert d'effort entre les différentes barres d'acier quand elles sont positionnées à des excentricités

égales par rapport au plan moyen de la plaque de béton (afin de modéliser des treillis soudés par exemple). Une première approche consistera à utiliser des éléments poutres d'acier au lieu des éléments barres, et de faire des choix d'assemblage qui définissent des noeuds en commun entre les différentes poutres d'acier. La figure 6.2 montre un exemple d'assemblage qui peut être testé dans cette optique ;

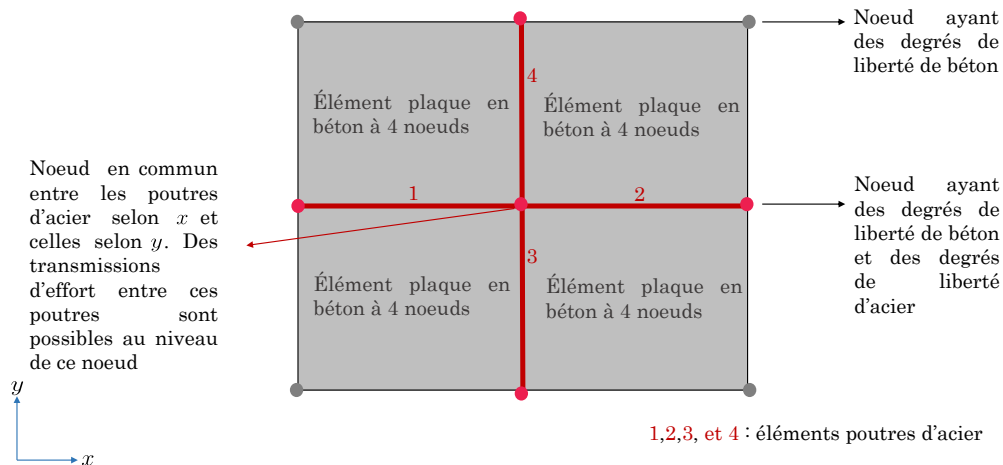


FIGURE 6.2 – Exemple de choix d'assemblage d'un élément plaque enrichi permettant un transfert d'efforts entre deux éléments d'acier.

- considérer des contraintes acier-béton dans la direction normal aux barres d'acier (voir [Murcia-Delso et Benson Shing, 2015]).

Il est de plus possible de considérer finement l'effet du confinement passif et actif sur le comportement de l'interface acier-béton au sein des approches de macro-élément et d'enrichissement cinématique des poutres et des plaques. Dans ce travail, les paramètres de la loi d'adhérence sont identifiés selon l'état de confinement du béton au voisinage de l'acier, conformément aux recommandations de [Torre-Casanova, 2012] et de [Fib, 2010]. Cependant, l'état de confinement peut évoluer au cours du chargement. Ainsi, il serait possible d'évaluer le taux de confinement au cours du calcul, et de modifier par la suite les paramètres de la loi d'adhérence [Turgut, 2018].

Enfin, les différentes techniques de calcul présentées dans ce travail modélisent la dégradation de l'interface acier-béton due à un chargement mécanique. Les perspectives à long terme seront de prendre en compte également la dégradation due à d'autres facteurs. Parmi ceux-ci, il convient de mentionner spécifiquement la considération d'un chargement thermique et de la corrosion des armatures. À cet effet, il sera envisageable de rendre les paramètres de la loi d'adhérence dépendants de l'influence de ces facteurs [Tran, 2011] [Lejouad, 2020].



# Bibliographie

- [A944-10, 2010] A944-10, A. (2010). Standard test method for comparing bond strength of steel reinforcing bars to concrete using beam-end specimens. *ASTM International*.
- [Abrams, 1913] ABRAMS, D. A. (1913). Tests of bond between concrete and steel.
- [Abtahi et Li, 2023] ABTAHI, S. et LI, Y. (2023). Efficient modeling of steel bar slippage effect in reinforced concrete structures using a newly implemented nonlinear element. *Computers & Structures*, 279:106958.
- [Almusallam et al., 1996] ALMUSALLAM, A. A., AL-GAHTANI, A. S., AZIZ, A. R. et al. (1996). Effect of reinforcement corrosion on bond strength. *Construction and building materials*, 10(2):123–129.
- [Ameen et al., 2009] AMEEN, M., PRASAD, B. R. et GOPALAKRISHNAN, A. (2009). Boundary element analysis of reinforced concrete structural elements. *Engineering analysis with boundary elements*, 33(3):263–270.
- [Aour et al., 2007] AOUR, B., RAHMANI, O. et NAIT-ABDELAZIZ, M. (2007). A coupled fem/bem approach and its accuracy for solving crack problems in fracture mechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 44(7-8):2523–2539.
- [ACI Committee 408, 1964] ACI COMMITTEE 408 (1964). A guide for determination of bond strength in beam specimens. *ACI Journal*, 61(2):129–136.
- [Babuška, 1973] BABUŠKA, I. (1973). The finite element method with penalty. *Mathematics of computation*, 27(122):221–228.
- [Banholzer et al., 2005] BANHOLZER, B., BRAMESHUBER, W. et JUNG, W. (2005). Analytical simulation of pull-out tests - the direct problem. *Cement and Concrete Composites*, 27(1):93–101.
- [Bazant et Sener, 1988] BAZANT, Z. P. et SENNER, S. (1988). Size effect in pullout tests. *ACI Materials Journal*, 85(5):347–351.
- [Bitar, 2017] BITAR, I. (2017). *Modélisation de la rupture dans les structures en béton armé par des éléments finis poutres généralisées et multifibres*. Thèse de doctorat, École centrale de Nantes.
- [Bitar et Richard, 2020] BITAR, I. et RICHARD, B. (2020). Mindlin-reissner plate formulation with enhanced kinematics : Theoretical framework and numerical applications. *Engineering Fracture Mechanics*, 225:106839.
- [Bonnet, 1999] BONNET, M. (1999). Boundary integral equation methods for solids and fluids.
- [Bouazaoui et Li, 2008] BOUZAOU, L. et LI, A. (2008). Analysis of steel/concrete interfacial shear stress by means of pull out test. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 28(3):101–108.

- [Boumaiza et Aour, 2014] BOUMAIZA, D. et AOUR, B. (2014). On the efficiency of the iterative coupling fem–bem for solving the elasto-plastic problems. *Engineering Structures*, 72:12–25.
- [Brisotto *et al.*, 2012] BRISOTTO, D. d. S., BITTENCOURT, E. et BESSA, V. M. d. (2012). Simulating bond failure in reinforced concrete by a plasticity model. *Computers & structures*, 106:81–90.
- [Caillerie *et al.*, 2015] CAILLERIE, D., KOTRONIS, P. et CYBULSKI, R. (2015). A timoshenko finite element straight beam with internal degrees of freedom. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 39(16):1753–1773.
- [Cairns et Plizzari, 2003] CAIRNS, J. et PLIZZARI, G. A. (2003). Towards a harmonised european bond test. *Materials and Structures*, 36:498–506.
- [Calixte, 2021] CALIXTE, R. (2021). *Simulation du comportement de structures" steel-concrete-steel" sous chargement mécanique*. Thèse de doctorat, Paris 10.
- [Capdevielle, 2016] CAPDEVIELLE, S. (2016). *Introduction du gauchissement dans les éléments finis multifibres pour la modélisation non linéaire des structures en béton armé*. Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes (ComUE).
- [Carrera *et al.*, 2023] CARRERA, E., AUGELLO, R., PAGANI, A. et SCANO, D. (2023). Refined multilayered beam, plate and shell elements based on jacobi polynomials. *Composite Structures*, 304:116275.
- [Chessa *et al.*, 2002] CHESSA, J., SMOLINSKI, P. et BELYTSCHKO, T. (2002). The extended finite element method (xfem) for solidification problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(8):1959–1977.
- [Clément, 1987] CLÉMENT, J.-L. (1987). *Interface acier-béton et comportement des structures en béton armé : Caractérisation, Modélisation*. Thèse de doctorat, Paris 6.
- [Combescure, 2013] COMBESCURE, C. (2013). *Formulation d'un modèle homogénéisé de plaque en béton armé pour des applications sismiques*. Thèse de doctorat, UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE.
- [Cowper, 1966] COWPER, G. (1966). The shear coefficient in timoshenko's beam theory. *Journal of applied mechanics*, 33(2):335–340.
- [Dancygier et Katz, 2012] DANCYGIER, A. N. et KATZ, A. (2012). Bond over direct support of deformed rebars in normal and high strength concrete with and without fibers. *Materials and structures*, 45:265–275.
- [Daoud et Lorrain, 2003] DAOUD, A. et LORRAIN, M. (2003). Influence de la position des armatures sur l'adhérence des bétons autoplaçants : interprétation par analyse d'image. *Materials and Structures*, 36(4):231.
- [Dehestani et Mousavi, 2015] DEHESTANI, M. et MOUSAVI, S. (2015). Modified steel bar model incorporating bond-slip effects for embedded element method. *Construction and Building Materials*, 81:284–290.
- [Desnerck *et al.*, 2010] DESNERCK, P., SCHUTTER, G. D. et TAERWE, L. (2010). A local bond stress-slip model for reinforcing bars in self-compacting concrete. *Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures–Assesment, Durability, Monitoring and Retrofitting of Concrete Structures*, Korea Concrete Institute, Seoul.

- [Diederchs et Schneider, 1981] DIEDERCHS, U. et SCHNEIDER, U. (1981). Bond strength at high temperature. *Mag Concr Res*, 33(115):75–84.
- [Donea et Lamain, 1987] DONEA, J. et LAMAIN, L. G. (1987). A modified representation of transverse shear in c0 quadrilateral plate elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 63(2):183–207.
- [Eligehausen *et al.*, 1982] ELIGEHAUSEN, R., POPOV, E. P. et BERTERO, V. V. (1982). Local bond stress-slip relationships of deformed bars under generalized excitations.
- [Farra, 1995] FARRA, B. (1995). Influence de la résistance du béton et de son adhérence avec l’armature sur la fissuration. Rapport technique, EPFL.
- [Farra et Jaccoud, 1994] FARRA, B. et JACCOUD, J.-P. (1994). Influence du béton et de l’armature sur la fissuration des structures en béton : rapport des essais de tirants sous déformation imposée de courte durée. Rapport technique.
- [Fib, 2010] FIB (2010). Fib model code for concrete structures. *Structural Concrete*, 14.
- [Frantzeskakis, 1987] FRANTZESKAKIS, C. (1987). *Contribution à la modélisation des structures en béton armé par la méthode des éléments finis*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- [Gao *et al.*, 2013] GAO, W., DAI, J.-G., TENG, J. et CHEN, G. (2013). Finite element modeling of reinforced concrete beams exposed to fire. *Engineering structures*, 52:488–501.
- [Gao *et al.*, 2018] GAO, X., REN, X., LI, J. et ZHANG, Y. (2018). Bond behavior between steel reinforcing bars and concrete under dynamic loads. *Structural Concrete*, 19(6):1806–1817.
- [Gilbert et Nejadi, 2004] GILBERT, R. I. et NEJADI, S. (2004). *An experimental study of flexural cracking in reinforced concrete members under short term loads*. University of New South Wales, School of Civil and Environmental Engineering.
- [Giry, 2011] GIRY, C. (2011). *Modélisation objective de la localisation des déformations et de la fissuration des structures en béton soumises à des chargements statiques ou dynamiques*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble.
- [Grange, 2008] GRANGE, S. (2008). *Modélisation simplifiée 3D de l’interaction sol-structure : application au génie parasismique*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG.
- [Grange, 2023] GRANGE, S. (2023). Atl4s—a tool and language for simplified structural solution strategy. Rapport technique, GEOMAS INSA-Lyon : Villeurbanne, France.
- [Grange et Bertrand, 2021] GRANGE, S. et BERTRAND, D. (2021). Implicit coupling of heterogeneous and asynchronous time-schemes using a primal approach based on velocity continuity at the subdomain interface. *Finite Elements in Analysis and Design*, 196:103604.
- [Guedes *et al.*, 1994] GUEDES, J., PEGON, P. et PINTO, A. (1994). A fibre timoshenko beam element in castem 2000. *special publication Nr. 1*, 94:55.
- [Gurov, 2022] GUROV, N. (2022). Shell vs solid elements : are they similar? Rapport technique, GUROV FEA Training.
- [Gutiérrez *et al.*, 2018] GUTIÉRREZ, R., STEMPNIEWSKI, L. et FLEMING, W. (2018). Modeling steel-concrete interaction using the extended finite element method. *Obras y proyectos*, 24:6–12.

- [Haddad *et al.*, 2008] HADDAD, R. H., AL-SALEH, R. J. et AL-AKHRAS, N. M. (2008). Effect of elevated temperature on bond between steel reinforcement and fiber reinforced concrete. *Fire Safety Journal*, 43(5):334–343.
- [Harajli, 2004] HARAJLI, M. (2004). Comparison of bond strength of steel bars in normal- and high-strength concrete. *Journal of materials in Civil Engineering*, 16(4):365–374.
- [Harajli, 1994] HARAJLI, M. H. (1994). Development/splice strength of reinforcing bars embedded in plain and fiber reinforced concrete. *Structural Journal*, 91(5):511–520.
- [Haskett *et al.*, 2008] HASKETT, M., OEHLERS, D. J. et ALI, M. M. (2008). Local and global bond characteristics of steel reinforcing bars. *Engineering Structures*, 30(2):376–383.
- [Hillerborg *et al.*, 1976] HILLERBORG, A., MODÉER, M. et PETERSSON, P.-E. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and concrete research*, 6(6):773–781.
- [Hortigon *et al.*, 2022] HORTIGON, B., ANCIO, F. et RODRIGUEZ-MAYORGA, E. (2022). Parameterization of stainless steel rebars to improve bonding strength in masonry repairing. In *Protection of Historical Constructions : Proceedings of PROHITECH 2021 4*, pages 146–155. Springer.
- [Hu, 1989] HU, K. (1989). Researches on the bond-slip behaviour between concrete and steel bar at elevated temperatures and the fire resistance of reinforced concrete portal frames. *Tongji University, China*, 96:500–22.
- [Huguet Aguilera, 2016] HUGUET AGUILERA, M. (2016). *Un modèle global homogénéisé pour la fissuration des voiles en béton armé sous chargements sismiques*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes.
- [Jang *et al.*, 2019] JANG, S.-J., KIM, J.-H., KIM, S.-W., PARK, W.-S. et YUN, H.-D. (2019). The effect of shrinkage-compensation on the performance of strain-hardening cement composite (shcc). *Sustainability*, 11(5):1453.
- [Khalfallah et Ouchenane, 2007] KHALFALLAH, S. et OUCHENANE, M. (2007). A numerical simulation of bond for pull-out tests : the direct problem.
- [KHEBIZI *et al.*, 2014] KHEBIZI, M., GUENFOUD, H. et GUENFOUD, M. (2014). Modélisation des poutres en béton arme par des éléments multicouches.
- [Kwak et Kim, 2001] KWAK, H.-G. et KIM, S.-P. (2001). Bond-slip behavior under monotonic uniaxial loads. *Engineering structures*, 23(3):298–309.
- [Laterza *et al.*, 2017] LATERZA, M., D’AMATO, M. et GIGLIOTTI, R. (2017). Modeling of gravity-designed rc sub-assemblages subjected to lateral loads. *Engineering Structures*, 130:242–260.
- [Leibovich *et al.*, 2018] LEIBOVICH, O., YANKELEVSKY, D. Z. et DANCYGIER, A. N. (2018). Direct digital image analysis of local displacements and strains in a pull-out test. In *Structures*, volume 14, pages 230–242. Elsevier.
- [Lejouad, 2020] LEJOUAD, C. (2020). *Compréhension du fonctionnement dynamique de structures en béton armé en présence de corrosion*. Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay.
- [Lemnitzer *et al.*, 2009] LEMNITZER, L., SCHRÖDER, S., LINDORF, A. et CURBACH, M. (2009). Bond behaviour between reinforcing steel and concrete under multiaxial loading

- conditions in concrete containments. *In 20th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SmiRT 20), Espoo, Technical Research Centre of Finland*, pages 557–566.
- [Limkatanyu et Spacone, 2002] LIMKATANYU, S. et SPACONE, E. (2002). Reinforced concrete frame element with bond interfaces. i : Displacement-based, force-based, and mixed formulations. *Journal of Structural Engineering*, 128(3):346–355.
- [Lin et Ostertag, 2017] LIN, A. et OSTERTAG, C. (2017). Multi-scale pull-out resistance of steel reinforcing bar embedded in hybrid fiber reinforced concrete (hyfrc). *In IOP Conference Series : Materials Science and Engineering*, volume 246, page 012022. IOP Publishing.
- [Lutz et Gergely, 1967] LUTZ, L. A. et GERGELY, P. (1967). Mechanics of bond and slip of deformed bars in concrete. *In Journal Proceedings*, volume 64, pages 711–721.
- [Malvar, 1991] MALVAR, L. J. (1991). Bond of reinforcement under controlled confinement. Rapport technique, Naval Civil Engineering Laboratory Port Hueneme Ca.
- [Mang, 2015] MANG, C. (2015). *Prise en compte de la liaison acier-béton pour le calcul des structures industrielles*. Thèse de doctorat, Paris 10.
- [Mantoglou et Wilson, 1982] MANTOGLOU, A. et WILSON, J. L. (1982). The turning bands method for simulation of random fields using line generation by a spectral method. *Water Resources Research*, 18(5):1379–1394.
- [Marigo et al., 1981] MARIGO, J.-J. et al. (1981). Mécanique des solides anélastiques : formulation d’une loi d’endommagement d’un matériau élastique.
- [Matallah et al., 2010] MATALLAH, M., LA BORDERIE, C. et MAUREL, O. (2010). A practical method to estimate crack openings in concrete structures. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 34(15):1615–1633.
- [Mazars, 1984] MAZARS, J. (1984). Application de la mécanique de l’endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure. *Thèse de docteur des sciences présentée à l’université Pierre et Marie Curie-Paris 6*.
- [Mazars, 1986] MAZARS, J. (1986). A description of micro-and macroscale damage of concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 25(5-6):729–737.
- [Mazars et al., 2015] MAZARS, J., HAMON, F. et GRANGE, S. (2015). A new 3d damage model for concrete under monotonic, cyclic and dynamic loadings. *Materials and structures*, 48:3779–3793.
- [Mazars et al., 2005] MAZARS, J., NGUYEN, X. H., KOTRONIS, P., ILE, N. et REYNOUARD, J. M. (2005). Etude sur le fonctionnement sismique de structures à murs à cellules contre-ventées. Rapport technique, 3S-R.
- [Mazzarolo et al., 2012] MAZZAROLO, E., ZORDAN, T., BRISEGHIELLA, B. et al. (2012). Bond slip model for generalized excitations. *In Proceedings of bridge maintenance, safety, management, resilience and sustainability, the sixth international IABMAS conference, Stresa, Lake Maggiore, Italy*, pages 1851–58.
- [Mezher, 2022] MEZHER, A. (2022). *Amélioration des performances pour le calcul des structures à comportement non linéaire de grandes dimensions*. Thèse de doctorat, Université de Nanterre-Paris X ; Centre d’études nucléaires (Saclay, Essonne . . .

- [Mezhoud *et al.*, 2017] MEZHOU, D., SALIBA, J., SBARTAÏ, Z. et SAAD, M. (2017). Etude expérimentale de l'adhérence acier-béton à l'aide de la technique d'émission acoustique. *Academic Journal of Civil Engineering*, 35(1):759–762.
- [Milovanovf et Salmanov, 1954] MILOVANOV, A. et SALMANOV, G. (1954). The influence of high temperatures upon the properties of reinforcing steels and upon bond strength between reinforcement and concrete. *Issledovanija po zharoupornym betonu i zhelezobetonu*, pages 203–223.
- [Mivelaz, 1996] MIVELAZ, P. (1996). Etanchéité des structures en béton armé. Rapport technique, EPFL.
- [Monti et Spacone, 2000] MONTI, G. et SPACONE, E. (2000). Reinforced concrete fiber beam element with bond-slip. *Journal of structural engineering*, 126(6):654–661.
- [Morley et Royles, 1983] MORLEY, P. et ROYLES, R. (1983). Response of the bond in reinforced concrete to high temperatures. *Magazine of concrete research*, 35(123):67–74.
- [Moumnassi, 2011] MOUMNASSI, M. (2011). *La représentation implicite des volumes pour l'analyse par éléments finis avec XFEM et Level-sets*. Thèse de doctorat, Université Paul Verlaine-Metz.
- [Murcia-Delso et Benson Shing, 2015] MURCIA-DELISO, J. et BENSON SHING, P. (2015). Bond-slip model for detailed finite-element analysis of reinforced concrete structures. *Journal of Structural Engineering*, 141(4):04014125.
- [Murcia-Delso *et al.*, 2011] MURCIA-DELISO, J., STAVRIDIS, A. et SHING, B. (2011). Modeling the bond-slip behavior of confined large-diameter reinforcing bars. In *III ECCOMAS thematic conference on computational methods in structural dynamics and earthquake engineering*, pages 25–28.
- [Ngo et Scordelis, 1967] NGO, D. et SCORDELIS, A. C. (1967). Finite element analysis of reinforced concrete beams. In *Journal Proceedings*, volume 64, pages 152–163.
- [Nguyen, 2004] NGUYEN, V. T. (2004). *Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaque*. Thèse de doctorat, École nationale des ponts et chaussées.
- [Nilson, 1968] NILSON, A. H. (1968). Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method. In *Journal Proceedings*, volume 65, pages 757–766.
- [Nishimura, 2002] NISHIMURA, N. (2002). Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. *Appl. Mech. Rev.*, 55(4):299–324.
- [Pegon, 1994] PEGON, P. (1994). A timoshenko simple beam element in castem 2000, special publication nr. i. 94.04. italy : Applied mechanics unit. *Institute for Safety Technology, Joint Research Centre, Commission of the European Communities, I-21020 ISPRA (VA)*.
- [Phan *et al.*, 2015] PHAN, T. S., ROSSI, P. et TAILHAN, J.-L. (2015). Numerical modelling of the concrete/rebar bond. *Cement and Concrete Composites*, 59:1–9.
- [Pian, 1995] PIAN, T. H. (1995). State-of-the-art development of hybrid/mixed finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 21(1):5–20.
- [Ragueneau, 1999] RAGUENEAU, F. (1999). *Fonctionnement dynamique des structures en béton : influence des comportements hystériques locaux*. Thèse de doctorat, Cachan, Ecole normale supérieure.

- [Ramirez, 2005] RAMIREZ, N. D. (2005). *Etude de la liaison acier-béton : de la modélisation du phénomène à la formulation d'un élément fini enrichi " béton armé "*. Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure de Cachan-ENS Cachan.
- [Raous et Ali Karray, 2009] RAOUS, M. et ALI KARRAY, M. (2009). Model coupling friction and adhesion for steel-concrete interfaces. *International journal of computer applications in technology*, 34(1):42–51.
- [Reichel, 1978] REICHEL, V. (1978). How fire affects steel-to-concrete bond.
- [Reinhardt *et al.*, 1984] REINHARDT, H., BLAAUWENDRAAD, J. et VOS, E. (1984). Prediction of bond between steel and concrete by numerical analysis. *Matériaux et construction*, 17:311–320.
- [Rex *et al.*, 2019] REX, J., SHARMA, A. et HOFMANN, J. (2019). A new test specimen to investigate the bond behavior of post-installed reinforcing bars. *Structural Concrete*, 20(2):583–596.
- [Richard, 2010] RICHARD, B. (2010). *Modélisation d'éléments de structure en béton armé dégradés par corrosion : la problématique de l'interface acier/béton en présence de corrosion*. Thèse de doctorat, Université Paris-Est.
- [Richard *et al.*, 2010] RICHARD, B., RAGUENEAU, F., CREMONA, C., ADELAIDE, L. et TAILHAN, J. L. (2010). A three-dimensional steel/concrete interface model including corrosion effects. *Engineering Fracture Mechanics*, 77(6):951–973.
- [Richard *et al.*, 2019] RICHARD, B., RASTIELLO, G., GIRY, C., RICCARDI, F., PAREDES, R., ZAFATI, E., KAKARLA, S. et LEJOUAD, C. (2019). Castlab : an object-oriented finite element toolbox within the matlab environment for educational and research purposes in computational solid mechanics. *Advances in Engineering Software*, 128:136–151.
- [RILEM, 1970a] RILEM (1970a). Essai portant sur l'adhérence des armatures du béton i. essai par flexion. *Materials and structures*, 3:169–174.
- [RILEM, 1970b] RILEM (1970b). Essais portant sur l'adhérence des armatures du béton ii. essai par traction. *Materials and structures*, 3:175–178.
- [Sahyouni *et al.*, 2022] SAHYOUNI, A., GRANGE, S., BRIANCON, L., BURTIN, P., RACINAIS, J., PRUNIER, F. et QUANDALLE, B. (2022). Développement d'un macro-élément pour modéliser un massif renforcé par des inclusions rigides-étape 1, essai de chargement. *In 11èmes journées nationales de géotechnique et de géologie de l'ingénieur*.
- [Saliba, 2014] SALIBA, J. (2014). Béton armé : Principes et bases de dimensionnement - adhérence acier/béton. Cours de béton armé.
- [Sanz *et al.*, 2018] SANZ, B., PLANAS, J. et SANCHO, J. (2018). Simulation of interface behavior between steel and concrete to study loss of bond due to reinforcement corrosion. *In Computational Modelling of Concrete Structures*, pages 785–793. CRC Press.
- [Seghir, ] SEGHIR, A. Couplage fem/bem-symétrique en interaction fluide-structure.
- [Seghir, 2014] SEGHIR, A. (2014). Couplage fem/bem-symétrique en interaction fluide-structure.
- [Sellier et Millard, 2019] SELLIER, A. et MILLARD, A. (2019). A homogenized formulation to account for sliding of non-meshed reinforcements during the cracking of brittle matrix composites : Application to reinforced concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 213:182–196.

- [Soroshian *et al.*, 1991] SOROSHIAN, P., CHOI, K.-B., PARK, G.-H. et ASLANI, F. (1991). Bond of deformed bars to concrete : effects of confinement and strength of concrete. *Materials Journal*, 88(3):227–232.
- [Tepfers, 1973] TEPFERS, R. (1973). A theory of bond applied to overlapped tensile reinforcement splices for deformed bars. *Division of concrete structures*.
- [Tepfers, 1979] TEPFERS, R. (1979). Cracking of concrete cover along anchored deformed reinforcing bars. *Magazine of concrete research*, 31(106):3–12.
- [Tessler et Dong, 1981] TESSLER, A. et DONG, S. (1981). On a hierarchy of conforming timoshenko beam elements. *Computers & structures*, 14(3-4):335–344.
- [Techniques de l'ingénieur, 2006] TECHNIQUES DE L'INGÉNIEUR (2006). L'adhérence béton - acier. Rapport technique.
- [Tixier, 2013] TIXIER, A. (2013). *Analyse du comportement de l'interface acier-béton pas essai push-in. Mesures par fibres optiques et modélisation par éléments finis*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble.
- [Torre-Casanova, 2012] TORRE-CASANOVA, A. T. (2012). *Prise en compte de la liaison acier-béton pour le calcul de structures industrielles*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan-ENS Cachan.
- [Tran *et al.*, 2007] TRAN, B. H., BERTHAUD, Y. et RAGUENEAU, F. (2007). Essais pif : Pour identifier l'adhérence et le frottement. In *CFM 2007-18ème Congrès Français de Mécanique*. AFM, Maison de la Mécanique, 39/41 rue Louis Blanc-92400 Courbevoie.
- [Tran, 2011] TRAN, N. C. (2011). *Développement d'un modèle d'interface acier-béton à haute température : modélisation des structures en béton exposées au feu*. Thèse de doctorat, Paris Est.
- [Trujillo *et al.*, 2018] TRUJILLO, P. B., JOLIN, M., MASSICOTTE, B. et BISSONNETTE, B. (2018). Bond strength of reinforcing bars with varying encapsulation qualities. *ACI Structural Journal*, 115(6).
- [Turgut, 2018] TURGUT, C. (2018). *Prise en compte de la liaison acier béton dans le comportement d'éléments de structure en béton armé*. Thèse de doctorat, Paris 10.
- [Turgut *et al.*, 2020] TURGUT, C., JASON, L. et DAVENNE, L. (2020). Structural-scale modeling of the active confinement effect in the steel-concrete bond for reinforced concrete structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, 172:103386.
- [Vasilev *et al.*, 2015] VASILEV, G., PARVANOV, S., DINEVA, P. et WUTTKE, F. (2015). Soil-structure interaction using bem-fem coupling through ansys software package. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 70:104–117.
- [Verderame *et al.*, 2009] VERDERAME, G. M., DE CARLO, G., RICCI, P. et FABBROCINO, G. (2009). Cyclic bond behaviour of plain bars. part ii : Analytical investigation. *Construction and Building Materials*, 23(12):3512–3522.
- [Verpeaux et Charras, 2011] VERPEAUX, P. et CHARRAS, T. (2011). Multiplicateur de lagrange, condensation statique et conditions unilatérales. In *10e colloque national en calcul des structures*, pages Clé–USB.
- [Von Estorff et Firuziaan, 2000] VON ESTORFF, O. et FIRUZIAAN, M. (2000). Coupled bem/fem approach for nonlinear soil/structure interaction. *Engineering analysis with boundary elements*, 24(10):715–725.



- [Walraven *et al.*, 2012] WALRAVEN, J. C. *et al.* (2012). *Model Code 2010-Final Draft : Volume 1*, volume 65. fib Fédération internationale du béton.
- [Wang *et al.*, 2019] WANG, Z.-H., LI, L., ZHANG, Y.-X. et ZHENG, S.-S. (2019). Reinforcement model considering slip effect. *Engineering Structures*, 198:109493.
- [Yankelevsky, 1997] YANKELEVSKY, D. Z. (1997). A two-phase one dimensional model for steel-concrete interaction. *Computers & structures*, 65(6):781–794.
- [Yankelevsky *et al.*, 1992] YANKELEVSKY, D. Z., ADIN, M. A. et FARHEY, D. N. (1992). Mathematical model for bond-slip behavior under cyclic loading. *Structural Journal*, 89(6): 692–698.
- [Yousefi *et al.*, 2020] YOUSEFI, B., ESFAHANI, M. R. et TAVAKKOLIZADEH, M. (2020). A multi-fiber approach with directional stiffness matrix in reinforced concrete structures. *Engineering Computations*.
- [Yuan *et al.*, 2020] YUAN, W., GUO, A. et LI, H. (2020). Equivalent elastic modulus of reinforcement to consider bond-slip effects of coastal bridge piers with non-uniform corrosion. *Engineering Structures*, 210:110382.
- [Zoghi pour *et al.*, 2023] ZOGHIPOUR, P., HASIM, K., KEFAL, A. et YILDIZ, M. (2023). Implementation of shear-locking-free triangular refined zigzag element for structural analysis of multilayered plates with curvilinear fibers. *Composite Structures*, 305:116462.

# Annexe A : Loi d'endommagement de Mazars régularisée

La loi d'endommagement de Mazars consiste à déterminer deux variables d'endommagement en traction et en compression  $D_t$  et  $D_c$  [Mazars, 1984]. L'endommagement total est une combinaison de  $D_t$  et  $D_c$ . Une déformation équivalente  $\varepsilon_{eq}$  est définie à partir des valeurs propres positives du tenseur de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , tel que :

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+} \quad (\text{A.1})$$

$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+$  étant la partie positive de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Lorsque  $\varepsilon_{eq}$  atteint la valeur de  $\varepsilon_{d0}$ , le béton commence à s'endommager. Les variables d'endommagement  $D_t$  et  $D_c$  sont décrites comme suit :

$$\begin{cases} D_t = 1 - \frac{(1 - A_t) \varepsilon_{d0}}{\varepsilon_{eq}} - A_t \exp(-B_t (\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0})) \\ D_c = 1 - \frac{(1 - A_c) \varepsilon_{d0}}{\varepsilon_{eq}} - A_c \exp(-B_c (\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0})) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

L'endommagement total  $D$  est calculé comme suit :

$$D = \alpha_t^\beta D_t + \alpha_c^\beta D_c \quad (\text{A.3})$$

$\beta$  est un paramètre, généralement utilisé égal à 1.06, qui permet d'optimiser le comportement en cisaillement de la loi. Les coefficients  $\alpha_t$  et  $\alpha_c$  font le lien entre l'endommagement et l'état du matériau de traction ou de compression.  $A_t$ ,  $B_t$ ,  $A_c$  et  $B_c$  sont des propriétés du béton qui peuvent être identifiées expérimentalement.

Cette loi d'endommagement locale peut être régularisée en traction avec la méthode de régularisation de Hillerborg [Hillerborg *et al.*, 1976]. Pour cela, l'expression initiale de  $D_t$  de l'équation (A.2) est remplacée par :

$$D_t = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}}{\varepsilon_{eq}} \exp(B_t (\varepsilon_{d0} - \varepsilon_{eq})) \quad (\text{A.4})$$

En absence d'autres mécanismes dissipatifs, l'aire sous la courbe contrainte-déformation représente l'énergie volumique dissipée par la fissuration. La multiplication de cette surface par la largeur  $h$  de la zone de localisation de l'endommagement représente l'énergie de fissuration  $G_f$ .

$$G_f = h \int_0^\infty \sigma d\varepsilon \quad (\text{A.5})$$

Pour le cas simple de traction 1D, il est possible d'exprimer  $G_f$  comme suit :

$$G_f = h \int_0^\infty E (1 - D_t) \varepsilon d\varepsilon = h \int_0^\infty E \frac{\varepsilon_{d0}}{\varepsilon_{eq}} \exp(B_t (\varepsilon_{d0} - \varepsilon_{eq})) \varepsilon d\varepsilon = h \frac{E \varepsilon_{d0}^2}{2} + h \frac{E \varepsilon_{d0}}{B_t} \quad (\text{A.6})$$

Ce qui donne l'expression régularisée de  $B_t$  :

$$B_t = \frac{h E \varepsilon_{d0}}{G_f - h \left( \frac{\varepsilon_{d0}^2 E}{2} \right)} \quad (\text{A.7})$$

$B_t$  est calculé pour chaque élément fini. Une façon simple de calculer  $h$  est de supposer qu'il est égal à la taille de l'élément fini. Plusieurs méthodologies peuvent être utilisées pour calculer la taille des éléments, dont une des plus simples est de calculer la racine carrée de l'aire des éléments en 2D et la racine cubique du volume des éléments en 3D. Plus de détails sur le principe de régularisation décrit ici sont fournis dans [Matallah *et al.*, 2010].

Il est important d'indiquer que la partie traction du modèle est régularisée.  $D_c$  conserve son expression donnée par l'équation (A.2). Selon l'application étudiée, une régularisation en compression peut parfois être nécessaire [Calixte, 2021].

# Annexe B : Loi de comportement de Mazars Révisée régularisée

La loi de comportement révisée de Mazars [Mazars *et al.*, 2015] définit une seule variable d'endommagement  $D$  telle que :

$$D = 1 - \frac{(1 - A)Y_0}{Y} - A \exp(-B(Y - Y_0)) \quad (\text{B.1})$$

$Y$  est une variable interne introduite par rapport à la loi initiale de Mazars [Mazars, 1986] afin d'améliorer son comportement en cisaillement :

$$Y = rY_t + (1 - r)Y_c \quad (\text{B.2})$$

tel que :

$$r = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \bar{\sigma}_i \rangle_+}{\sum_{i=1}^3 |\bar{\sigma}_i|} \quad (\text{B.3})$$

$\langle \bar{\sigma}_i \rangle_+$  et  $|\bar{\sigma}_i|$  représentent respectivement la partie positive et la valeur absolue de la contrainte principale  $\bar{\sigma}_i$ . La matrice  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  des contraintes effectives prend en compte l'état endommagé du matériau tel que :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{(1 - D)} \quad (\text{B.4})$$

$\boldsymbol{\sigma}$  étant la matrice de contraintes du matériau non endommagé. Les variables  $Y_t$  et  $Y_c$  de l'équation (B.2) sont associées aux surfaces de chargement. Deux surfaces de traction et de compression sont définies tel que :

$$f_t = \varepsilon_t - Y_t \quad (\text{B.5})$$

et :

$$f_c = \varepsilon_c - Y_c \quad (\text{B.6})$$

avec :

$$\varepsilon_t = \frac{I_\varepsilon}{2(1 - 2\nu)} + \frac{\sqrt{J_\varepsilon}}{2(1 + \nu)} \quad (\text{B.7})$$

et :

$$\varepsilon_c = \frac{I_\varepsilon}{5(1-2\nu)} + \frac{6\sqrt{J_\varepsilon}}{5(1+\nu)} \quad (\text{B.8})$$

tel que :

$$I_\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (\text{B.9})$$

$$J_\varepsilon = 0.5 [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2] \quad (\text{B.10})$$

où  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ , et  $\varepsilon_3$  représentent les composantes principales du tenseur de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .  $Y_t$  et  $Y_c$  sont définis comme suit :

$$Y_t = \text{Sup} [\varepsilon_{0t}, \max(\varepsilon_t)] , Y_c = \text{Sup} [\varepsilon_{0c}, \max(\varepsilon_c)] \quad (\text{B.11})$$

Le symbole Sup signifie qu'on sélectionne la valeur supérieure.  $\varepsilon_{0t}$  et  $\varepsilon_{0c}$  sont les valeurs seuils associées de  $\varepsilon_t$  et  $\varepsilon_c$ , respectivement.

Les paramètres  $A$  et  $B$  de l'équation (B.1) définissent la forme de la loi :

$$A = A_t (2r^2(1-2k) - r(1-4k)) + A_c (2r^2 - 3r + 1) \quad (\text{B.12})$$

$$B = r^{(r^2-2r+2)} B_t + \left(1 - r^{(r^2-2r+2)}\right) B_c \quad (\text{B.13})$$

Pour un comportement en traction pure,  $A$  est égale à  $A_t$  et  $B$  est égale à  $B_t$ . En compression pure,  $A$  est égale à  $A_c$  et  $B$  est égale à  $B_c$ .

La régularisation du comportement en traction de cette loi de Mazars révisée consiste à identifier les bonnes valeurs à associer à  $A_t$  et à  $B_t$ . L'équation (A.5) définit l'énergie de fissuration étant égale à la largeur de localisation  $h$  multipliée par l'aire sous la courbes  $\sigma - \varepsilon$ . En 1D, il est possible de tracer un triangle ayant la même valeur d'aire que la loi de Mazars révisée régularisée, comme le montre la figure B.1.

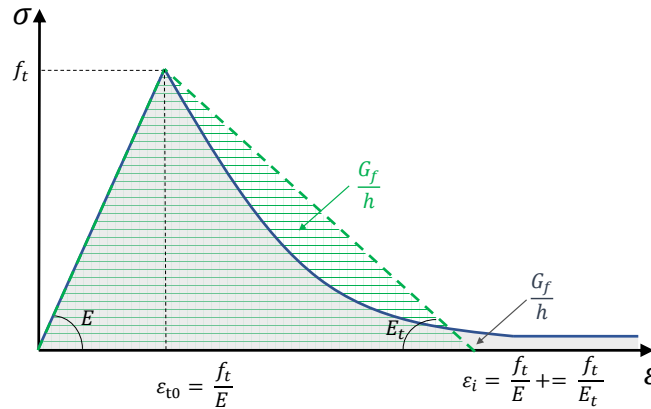


FIGURE B.1 – Principe du calcul de l'énergie de fissuration.

D'après la figure B.1, il est possible de déduire le suivant :

$$h = 2 \frac{G_f}{f_t^2} \left( \frac{1}{E} - \frac{1}{E_t} \right)^{-1} \quad (\text{B.14})$$

$h$  peut être considérée égale à la taille des éléments finis du maillage considéré.  $G_f$ ,  $E$ , et  $f_t$  sont des paramètres matériau. Il est donc possible de déduire la valeur de  $E_t$  selon l'équation (B.14). La régularisation consiste donc à tracer le triangle à aire équivalent de la loi, et de chercher les bonnes valeurs de  $A_t$  et  $B_t$  de la loi régularisée. Il s'agit de tracer le comportement en traction de la loi de chaque couple de valeurs  $(A_t, B_t)$  et de calculer l'aire sous cette courbe, le but étant de trouver le couple de valeurs qui donne un aire qui soit le plus proche de l'aire du triangle tracé dans un premier temps.

La valeur de  $A_t$  définit l'asymptote de la loi pour des grandes valeurs de déformation.  $A_t = 1$  est associée à une asymptote pour une contrainte nulle. Cette valeur de  $A_t$  donne la meilleure représentation du comportement de béton, pourtant elle peut amener à des problèmes numériques de convergence. Dans ce cas, une valeur inférieure est utilisée.  $A_t$  est comprise entre 0 et 1.

# Annexe C : Loi de comportement de Marigo 1D

Cette loi est basée sur l'hypothèse que l'endommagement évolue en fonction du taux de restitution de l'énergie élastique du matériau [Marigo *et al.*, 1981]. C'est un modèle basé sur un critère énergétique dont la fonction seuil est la suivante :

$$f = Y - Y_D - SM D \quad (\text{C.1})$$

avec :

- $Y = \frac{1}{2}E\varepsilon^2$  : le taux de restitution d'énergie élastique ;
- $SM$  : l'évolution de la fonction seuil en fonction de l'endommagement ;
- $Y_D$  : le seuil initial d'endommagement qui dépend du matériau qu'on utilise. Une proposition de sa formulation est :  $Y_D = \frac{1}{2}\frac{f_t^2}{E}$ , avec  $f_t$  la résistance à la traction du béton ;
- $D$  : le facteur d'endommagement.

La loi d'évolution d'endommagement  $D$  combinée à la condition de consistance  $\dot{f} = 0$  donne :

$$D = \max\left(\frac{Y_{max} - Y_D}{SM}, 0\right) \quad (\text{C.2})$$

avec :

$$Y_{max} = \max(Y, Y_D) \quad (\text{C.3})$$

Le symbole  $\max$  signifie qu'on sélectionne la valeur maximale atteinte.

Pour un taux de restitution d'énergie élastique  $Y \leq Y_D$ , l'endommagement  $D$  est nul : c'est le cas d'un comportement élastique linéaire. En revanche, pour  $Y > Y_D$ , le facteur d'endommagement n'est plus nul et on aura un comportement non linéaire du matériau étudié.

# Annexe D : Calcul analytique de la flèche d'une poutre console en béton armé

La flèche  $f$  au bout d'une poutre console en béton est analytiquement calculée telle que :

$$f = \frac{FL^3}{3EI} \quad (\text{D.1})$$

$L$  est la longueur de la poutre,  $E$  est son module d'Young, et  $I$  est son inertie. Pour une poutre en béton avec une barre d'acier excentrée, la flèche  $f$  est analytiquement calculée comme suit :

$$f = \frac{FL^3}{3E_b I_{eq}} \quad (\text{D.2})$$

$E_b$  est le module d'Young du béton.  $I_{eq}$  est l'inertie équivalente en béton la section de poutre. Afin de calculer  $I_{eq}$ , il faut calculer la section équivalente de la poutre dans un premier temps. Une homogénéisation par rapport au béton donne :

$$E_b S_{eq} = E_b bh + E_a S_a \quad (\text{D.3})$$

$b$  et  $h$  étant la largeur et la hauteur de la poutre, respectivement. Donc :

$$S_{eq} = bh + n(S_a) \quad (\text{D.4})$$

$E_a$  et  $S_a$  représentent le modules d'Young et la section de la barre d'acier, respectivement.  $n$  est de rapport  $\frac{E_a}{E_b}$ . Le centre de gravité  $y_G$  de la section équivalente est ensuite calculé tel que :

$$E_b S_{eq} y_G = E_b bh \frac{h}{2} + E_a (S_a d) \quad (\text{D.5})$$

$d$  étant la distance entre le centre de la barre d'acier et la face supérieure de la section de béton. Ce qui donne :

$$y_G = \frac{1}{S_{eq}} \left( \frac{bh^2}{2} + n S_a d \right) \quad (\text{D.6})$$

Finalement, l'inertie équivalente  $I_{eq}$  est calculée tel que :

$$I_{eq} = I_b + n I_{aeq} \quad (\text{D.7})$$

$I_b$  et  $I_{aeq}$  sont les inerties de béton et d'acier par rapport à fibre moyenne de la section équivalente (ayant la position  $y = y_G$ ). Donc :



$$I_{eq} = \frac{bh^3}{12} + bh \left( \frac{h}{2} - y_G \right)^2 + n (S_a (d - y_G)^2) \quad (\text{D.8})$$



## FOLIO ADMINISTRATIF

### THESE DE L'INSA LYON, MEMBRE DE L'UNIVERSITE DE LYON.

NOM : TRAD

DATE de SOUTENANCE : 03/10/2023

Prénom : Maryam

TITRE : Techniques de modélisation multi-échelle de l'interface acier-béton pour le calcul de structures en béton armé à grande échelle

NATURE : Doctorat

École doctorale : MEGA (Mécanique, Énergie, Génie Civil, Acoustique)

Spécialité : Génie Civil

#### RÉSUMÉ :

La caractérisation du comportement mécanique des structures en béton armé est un défi majeur, en particulier lorsque des sollicitations au-delà du niveau de dimensionnement sont considérées. Dans ce cas, des informations locales sur le comportement de fissuration du béton sont indispensables pour évaluer la performance structurale. Cela est observé dans le cas où les ouvrages de génie civil présentent des exigences d'étanchéité. La prise en compte de l'interaction entre le béton et les armatures en acier dans les simulations numériques joue un rôle important dans l'estimation du phénomène de fissuration. Les approches existantes de modélisation numérique de cette interface acier-béton restent peu satisfaisantes principalement car elles demandent des temps de calcul élevés. Leur application à l'échelle d'un bâtiment industriel reste toujours fastidieuse (Phan et al., 2015). Le but de ce travail de thèse est de proposer des stratégies de modélisation de l'interface acier-béton ayant le coût numérique le plus bas possible et étant applicables à l'échelle de l'ouvrage. Pour cela, une approche multi-échelle est proposée. Cette approche consiste à définir un macro-élément capable de reproduire le comportement de l'acier et de l'interface acier-béton reliés au moyen d'une densité d'efforts d'adhérence. Le macro-élément de (Sahyouni et al., 2022) initialement développé pour lier une inclusion rigide à un domaine de sol qui l'entoure est développé et adapté à la problématique de l'interface acier-béton. Cette approche est intégrée dans des calculs de structures bidimensionnels (2D) et tridimensionnels (3D). En parallèle, une méthode de modélisation de l'interface dans le cadre d'éléments poutres inspirée des travaux de (Yousefi et al., 2020) et de (Abtahi et Li, 2023) est présentée. Une extension de cette approche vers des éléments plaques est réalisée. Les différentes techniques proposées dans ce travail sont utilisées pour modéliser des tests expérimentaux de caractérisation du comportement de l'interface. Des exemples structuraux de poutres en flexion trois et quatre points sont également modélisés. Les applications présentées démontrent la robustesse des approches proposées et leur capacité à reproduire le comportement expérimental d'éléments structuraux en béton armé.

#### MOTS-CLÉS :

Béton armé, Interface acier-béton, Adhérence acier-béton, Lois d'adhérence, Macro-élément, Enrichissement cinématique, Fissuration du béton

#### Laboratoire(s) de recherche :

LMAPS (Laboratoire de modélisation et d'analyse de la performance des structures)  
GEOMAS (Géomécanique, Matériaux, Structures)

Directeur de thèse : Stéphane GRANGE

#### Composition du jury :

Christian La Borderie (Professeur des universités, Directeur, ISA BTP)  
Elias Bou Said (Expert-Directeur d'activité nucléaire, EGIS/EAS)  
Delphine Brancherie (Professeure des universités, UTC)  
Ludovic Jason (Directeur de recherche, HDR, CEA)  
Stéphane Grange (Professeur des universités, INSA Lyon)  
Benjamin Richard (Chef de laboratoire, HDR, IRSN)  
Ibrahim Bitar (Ingénieur-chercheur, IRSN)  
Sylvie Michel-Ponnelle (Ingénieure-chercheuse, Experte, EDF)