



**HAL**  
open science

# Contributions à l'identification de défaillances dans des systèmes thermiques régis par des équations aux dérivées partielles paraboliques

Mohamed Salim Bidou

► **To cite this version:**

Mohamed Salim Bidou. Contributions à l'identification de défaillances dans des systèmes thermiques régis par des équations aux dérivées partielles paraboliques. Automatique. Université d'Angers, 2023. Français. NNT : 2023ANGE0024 . tel-04448249

**HAL Id: tel-04448249**

**<https://theses.hal.science/tel-04448249>**

Submitted on 9 Feb 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT

DE  
L'UNIVERSITÉ D'ANGERS  
SOUS LE SEAU DE  
LA COMUE ANGERS – LE MANS

ÉCOLE DOCTORALE N° 601  
*Mathématiques et Sciences et Technologies du numérique,  
de l'Information et de la Communication*  
Spécialité : *Automatique, productique et robotique*

Par

**Mohamed Salim BIDOU**

**« Contributions à l'identification de défaillances dans des systèmes thermiques régis par des équations aux dérivées partielles paraboliques »**

Thèse présentée et soutenue à l'Université d'Angers, le 17 octobre 2023  
Unité de recherche : Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (LARIS)  
Thèse N° : 242152

## Rapporteurs avant soutenance :

Thierry Duvaut      Professeur des universités - Université de Reims Champagne-Ardenne  
Marion Gilson-Bagrel      Professeur des universités, Polytech Nancy - CRAN

## Composition du Jury :

Président :	Thierry Poinot	Professeur des universités - ENSI Poitiers
Examineurs :	Sébastien Rouquette	Maître de conférences - Université de Montpellier
Dir. de thèse :	Laurent Autrique	Professeur des universités - Université d'Angers
Co-dir. de thèse :	Laetitia Perez	Maître de conférences titulaire de l'HDR - Polytech Angers
Co-encadrant. de thèse :	Sylvain Verron	Maître de conférences - Université d'Angers



# REMERCIEMENTS

---

Ce mémoire représente l'aboutissement d'un parcours riche et formateur, rendu possible par l'appui et la bienveillance de nombreuses personnes dont je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance.

En premier lieu, ma gratitude va à mon directeur de thèse, Professeur Laurent AUTRIQUE, dont l'encadrement, la patience et les conseils éclairés ont été des piliers tout au long de cette aventure intellectuelle. Je suis également redevable à ma co-directrice, Laetitia PEREZ, pour son accompagnement perspicace, son soutien indéfectible et le partage de son savoir inestimable.

Je tiens à exprimer ma sincère appréciation à Sylvain VERRON, mon encadrant, pour son encadrement remarquable, qui a été un pilier tout au long de ma thèse. Sa présence constante et sa capacité à stimuler la réflexion ont joué un rôle déterminant dans le raffinement de mon travail de recherche. Sa patience éducative et son mentorat ont non seulement façonné ma démarche scientifique, mais ont aussi inspiré ma passion et mon intégrité académique.

Mes pensées reconnaissantes se dirigent vers les éminents membres du jury qui m'ont fait l'honneur de juger mon travail. Un merci particulier à madame Marion GILSON-BAGREL et monsieur Thierry DUVAUT pour leur évaluation rigoureuse en tant que rapporteurs, ainsi qu'au président du jury, monsieur Thierry POINOT, et monsieur Sébastien ROUQUETTE pour l'intérêt porté à mon travail en qualité d'examineurs.

Je souhaite également saluer l'ensemble du personnel du laboratoire LARIS pour leur accueil chaleureux et stimulant. L'atmosphère de camaraderie et d'entraide qui y règne a été un cadre idéal pour l'épanouissement de ma recherche.

Un mot pour mes collègues du LARIS, ceux du passé comme du présent, qui ont jalonné ce parcours de moments de partage et de soutien inoubliables. Leurs qualités humaines, leur esprit d'entraide et la synergie que nous avons créée ensemble ont été le terreau fertile sur lequel ont germé mes idées et mes aspirations. Je chéris particulièrement les souvenirs des pauses café, des débats spontanés qui ont souvent été des sources d'inspiration inattendues et précieuses.

Enfin, mes pensées les plus tendres et mes remerciements les plus affectueux vont à ma famille. À mes parents, Abderrazak et Samira, piliers de ma vie, pour leurs sacrifices sans limites et l'exemple indéfectible de travail acharné et de persévérance qu'ils m'ont offert. L'éducation que vous m'avez donnée est un cadeau dont la valeur est inestimable et pour lequel je vous serai éternellement reconnaissant.



*Je dédie cette thèse  
à Abderrazak et Samira,  
mes chers parents.*



# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Acronymes et Nomenclature</b>	<b>11</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>13</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>16</b>
<b>Introduction</b>	<b>19</b>
<b>1 Problématique générale et état de l'art</b>	<b>23</b>
1.1 Systèmes physiques décrits par des équations aux dérivées partielles paraboliques	23
1.2 Modélisation des transferts thermiques en 3D et problèmes inverses . . . . .	27
1.2.1 Les transferts thermiques et l'équation générale de la conduction . . . . .	28
1.2.2 Au sujet des problèmes inverses . . . . .	32
1.3 Illustration numérique des erreurs de modèles . . . . .	38
1.3.1 Problème direct . . . . .	39
1.3.2 Effet de l'épaisseur : 3D-2D . . . . .	41
1.3.3 Comparaison des résultats différences finies et éléments finis . . . . .	43
1.3.3.1 Approche du problème par la méthode des différences finies . . . . .	44
1.3.3.2 Approche du problème direct par la méthode des éléments finis . . . . .	49
1.3.3.3 Analyse des résultats . . . . .	50
1.4 État de l'art sur l'identification de défaillances dans le cadre des systèmes décrits par des EDPs . . . . .	56
1.5 Bilan du chapitre 1 . . . . .	65
Références bibliographiques . . . . .	66
<b>2 Système non linéaire – Analyse hors ligne de défaillances</b>	<b>71</b>
2.1 Introduction . . . . .	71
2.2 Description du problème direct . . . . .	73
2.3 Identification des instants de défaillance : cas non linéaire . . . . .	77
2.3.1 Le problème inverse . . . . .	77
2.3.2 Problème de sensibilité . . . . .	79
2.3.3 Problème adjoint . . . . .	84
2.3.4 Algorithme . . . . .	87

2.3.5	Exemple . . . . .	88
2.4	Identification des instants de défaillance : cas linéaire . . . . .	89
2.4.1	Le problème inverse . . . . .	89
2.4.2	Problème de sensibilité . . . . .	90
2.4.3	Problème adjoint . . . . .	90
2.4.4	Exemple . . . . .	93
2.5	Résultats numériques . . . . .	93
2.5.1	Seconde configuration – identification de la défaillance et du redémarrage	94
2.5.2	Troisième configuration – séparation de sources . . . . .	95
2.6	Bilan du chapitre 2 . . . . .	97
	Références bibliographiques . . . . .	98
<b>3</b>	<b>Système non linéaire – Analyse en ligne de défaillances</b>	<b>101</b>
3.1	Adaptation de la méthode du gradient conjugué . . . . .	101
3.1.1	Motivations . . . . .	101
3.1.2	Notations . . . . .	102
3.2	Différentes stratégies pour l’identification des instants de défaillances . . . . .	103
3.2.1	Stratégie 1 : décalage à pas constant . . . . .	103
3.2.1.1	Défaillance d’une source . . . . .	103
3.2.1.2	Défaillance deux sources . . . . .	105
3.2.2	Stratégie 2 : . . . . .	107
3.2.3	Stratégie 3 : . . . . .	110
3.3	Résultats numériques . . . . .	112
3.3.1	Défaillance et redémarrage d’une source . . . . .	113
3.3.2	Séparation des sources . . . . .	114
3.4	Bilan du chapitre 3 . . . . .	116
	Références bibliographiques . . . . .	116
<b>4</b>	<b>Système linéaire – Adaptation d’un filtre de Kalman</b>	<b>117</b>
4.1	Introduction . . . . .	117
4.2	Contexte de la théorie de l’estimation . . . . .	119
4.3	Problème d’estimation d’état . . . . .	121
4.4	Le filtre de Kalman . . . . .	124
4.5	Le lissage de Kalman . . . . .	126
4.6	Le filtre de Kalman adapté à l’identification des défaillances . . . . .	128
4.6.1	Modélisation du problème physique . . . . .	128
4.6.2	Application du filtre de Kalman . . . . .	134
4.6.3	Application du lisseur de Kalman . . . . .	137

4.6.4	Stratégie de recherche de panne et de redémarrage . . . . .	139
4.6.5	Approche détection en ligne . . . . .	142
4.7	Mises en oeuvre numériques . . . . .	144
4.7.1	Première configuration – étude de l’influence du bruit de mesure . . . . .	144
4.7.2	Seconde configuration – identification de la défaillance et du redémarrage	145
4.7.3	Troisième configuration – séparation de sources . . . . .	146
4.8	Bilan du chapitre 4 . . . . .	148
	Références bibliographiques . . . . .	149
<b>5</b>	<b>Application : comparaison de deux approches pour l’identification de défaillances dans un système thermique</b>	<b>153</b>
5.1	Identification hors ligne de défaillance : cas de sources fixes et mobiles . . . . .	153
5.1.1	Description du problème direct . . . . .	153
5.1.2	Approche avec une résolution d’un PICC . . . . .	155
5.1.2.1	Le problème de sensibilité . . . . .	155
5.1.2.2	Le problème adjoint . . . . .	156
5.1.2.3	Exemple . . . . .	157
5.1.3	Approche avec le filtre bayésien . . . . .	159
5.2	Résultats numériques . . . . .	162
5.2.1	Sources fixes . . . . .	162
5.2.1.1	Séparation des sources . . . . .	162
5.2.1.2	Identification de la panne et redémarrage avec séparation des sources . . . . .	164
5.2.2	Sources mobiles . . . . .	165
5.2.2.1	Séparation des sources . . . . .	165
5.2.2.2	Identification de la panne et redémarrage avec séparation des sources . . . . .	166
5.3	Identification quasi-en-ligne de défaillance : sources mobiles . . . . .	168
5.4	Résultats numériques . . . . .	168
5.4.1	Identification quasi-en-ligne d’une source mobile . . . . .	168
5.4.2	Identification quasi en ligne de défaillance de deux sources mobiles . . . . .	171
5.5	Bilan du chapitre 5 . . . . .	174
	Références bibliographiques . . . . .	175
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>177</b>
	<b>Liste des publications</b>	<b>179</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>181</b>



# NOMENCLATURE

---

<i>Symbole</i>	<i>Unité</i>	<i>Description</i>
$\theta$	K	Température simulée
$\hat{\theta}$	K	Température mesurée
$\theta_0$	K	Température initiale
$\delta\theta$	K	Variation de température
$\Omega$		Domaine géométrique étudié
$\partial\Omega = \Gamma$		Frontière de $\Omega$
$\vec{n}$		Vecteur unitaire normal
$(x, y, z)$	m	Variable d'espace
$e$	m	Épaisseur de la plaque
$t$	s	Variable de temps
$t_f$	s	Temps final
$T$	s	Intervalle de temps $T = [0, t_f]$
$\lambda$	$\text{W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$	Conductivité thermique du matériau
$\rho c$	$\text{J.m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$	Chaleur volumique
$h$	$\text{W.m}^{-2}\text{K}^{-1}$	Coefficient de convection naturelle
$\Delta t$	s	Le pas de temps
$\Delta t_{obs}$	s	Le pas de temps des observations
$\Delta x, \Delta y$	m	Le pas d'espace
$\Phi$	$\text{W.m}^{-2}$	Source de chaleur
$N_C$		Nombre de capteur
$J$		Fonctionnelle à minimiser
$\nabla J$		Gradient de la fonctionnelle à minimiser $J$
$J_{stop}$		Test d'arrêt
$d$		Direction de descente
$\gamma$		Profondeur de descente
$k$		Nombre d'itérations

**Abréviations :**

EDP	Equations aux Dérivées Partielles
FK	Filtre de Kalman
fdp	fonction de densité de probabilité
FKE	Filtre de Kalman Etendu
KS	Lisseur de Kalman
MGC	Méthode du Gradient Conjugué
PICC	problème Inverse de Conduction de Chaleur
RLSA	Recursive Least square algorithm
RAM	Reliability, Availability and Maintainability

# LISTE DES FIGURES

---

1.1	Différence entre le problème direct et le problème inverse. . . . .	32
1.2	Flux $g_1(t)$ et $g_2(t)$ des deux sources . . . . .	40
1.3	Température finale à $t=3600s$ . . . . .	42
1.4	Comparaison entre les modèles 2D et 3D . . . . .	43
1.5	Bord gauche . . . . .	45
1.6	Points imaginaires pour les conditions aux limites de Neumann . . . . .	46
1.7	Résolution du problème direct par les différences finies à $t=3600s$ . . . . .	49
1.8	Résolution du problème direct par les éléments finis à $t=3600s$ . . . . .	50
1.9	Position des 5 capteurs sur la plaque. . . . .	51
1.10	Températures au centre de $\Phi_1$ par les deux approches numériques. . . . .	51
1.11	Différences de températures par les deux approches numériques. . . . .	52
1.12	Températures au point $\Phi_2$ par les deux approches numériques. . . . .	53
1.13	Différences de températures par les deux approches numériques. . . . .	53
1.14	Mesure aux capteurs par les deux méthodes. . . . .	54
1.15	Les résidus de températures au capteurs $C_i, i = 1, 2, 3$ par les deux approches DF et EF. . . . .	55
1.16	Phases de diagnostic et de pronostic. . . . .	57
1.17	Catégories de défauts présents dans un système physique, extrait de (Isermann, 2005). . . . .	58
1.18	Exemples d'évolution temporelle d'un défaut. . . . .	60
1.19	Catégorisation des méthodes et des modèles de diagnostic, extrait de (Isermann, 2005). . . . .	61
1.20	Processus de diagnostic basé sur les modèles. . . . .	62
2.1	Illustration de la méthode d'identification paramétrique par minimisation de l'erreur de sortie . . . . .	72
2.2	Présentation du système étudié . . . . .	73
2.3	Position des capteurs en étoiles et des sources en cercles . . . . .	74
2.4	Exemples de défaillances $\chi_i(t)$ ; en bleu $\eta = 10$ , en rouge $\eta = 0.1$ . . . . .	75
2.5	Températures : sans défaillance et non bruitées (en continu) et avec défaillance et bruits (points), $\eta = 0.1$ . . . . .	76
2.6	L'évolution du champ de température sur la plaque considérant les densités de flux connues. . . . .	77

2.7	Défaillances des sources ( $\eta = 0.1$ ) . . . . .	78
2.8	Exemple d'évolution du critère dans le cas $\sigma = 1^\circ\text{C}$ . . . . .	89
2.9	Exemple de températures aux trois capteurs avec un bruit de $\sigma = 1^\circ\text{C}$ . . . . .	94
2.10	Exemple de températures aux trois capteurs avec un bruit de $\sigma = 1^\circ\text{C}$ . . . . .	95
3.1	Présentation de méthode d'identification en quasi en ligne . . . . .	102
3.2	Présentation de stratégie 1 : cas de défaillance de la source $\Phi_1$ . . . . .	104
3.3	Présentation de stratégie 1 : cas de défaillance de deux sources $\Phi_1$ et $\Phi_2$ . . . . .	106
3.4	Présentation de stratégie 2 : cas de défaillance de $\Phi_1$ . . . . .	109
3.5	Présentation de stratégie 3 : cas de défaillance de $\Phi_1$ . . . . .	111
3.6	Températures aux trois capteurs : cas de défaillance de $\Phi_1$ avec un bruit de $\sigma = 1^\circ\text{C}$ . . . . .	112
3.7	Températures aux trois capteurs : cas de défaillance et redémarrage de $\Phi_1$ avec un bruit de $\sigma = 1^\circ\text{C}$ . . . . .	113
3.8	Températures aux trois capteurs : cas de défaillance de $\Phi_1$ et $\Phi_2$ avec un bruit de $\sigma = 1^\circ\text{C}$ . . . . .	114
4.1	Étapes de prédiction et de mise à jour pour le filtrage bayésien. . . . .	123
4.2	Illustration de la résolution de problème direct. . . . .	130
4.3	. . . . .	132
4.4	Evolution de température (capteurs $C_{i=1,2,3}$ ), non bruitées en continu, avec bruits en points. . . . .	133
4.5	Illustration de la résolution de problème inverse. . . . .	133
4.6	Estimation de la première source $g_1$ par le filtre de Kalman . . . . .	137
4.7	Estimation de la première source $g_1$ par le lissage de Kalman . . . . .	138
4.8	Figure montre la complexité de choisir l'instant de panne. . . . .	139
4.9	Températures aux capteurs. . . . .	140
4.10	$g_1$ estimé par le filtre de Kalman et le lisseur de Kalman . . . . .	141
4.11	Meilleur candidat de $g_1$ donne $t_{\text{def}} = 1502s$ . . . . .	141
4.12	Illustration de la méthodologie de détection et identification en ligne. . . . .	143
4.13	Carte EWMA avec $\lambda = 0.2$ , $k = 3$ et $\sigma = 0.1^\circ\text{C}$ . . . . .	143
4.14	Carte de détection. . . . .	144
4.15	Exemple de températures aux trois capteurs avec un bruit de $1^\circ\text{C}$ . . . . .	145
4.16	Exemple de températures aux trois capteurs avec un bruit de $1^\circ$ . . . . .	146
4.17	Exemple de températures aux trois capteurs avec un bruit de $1^\circ\text{C}$ . . . . .	147
5.1	Positions des 3 sources et des 4 capteurs sur la plaque. . . . .	154
5.2	Flux $g_1(t)$ , $g_2(t)$ et $g_3(t)$ des trois sources. . . . .	155

---

5.3	Température : sans défaillance et non bruitées (en continu) et avec défaillance et bruits $\sigma = 0.5^\circ\text{C}$ (points). . . . .	158
5.4	Exemple d'évolution du critère dans le cas $\sigma = 0.1^\circ\text{C}$ . . . . .	158
5.5	Estimation du flux de chaleur $g_1(t)$ en utilisant le filtre et le lisseur de Kalman. . . . .	160
5.6	Le candidat choisi fournit son instant de défaillance à $t_{\text{fail}}^1 = 1503\text{s}$ . . . . .	161
5.7	Température : sans défaillance et non bruitées (en continu) et avec défaillance et bruits $\sigma = 0.5^\circ\text{C}$ (points). . . . .	162
5.8	Histogramme et représentation de la fdp de l'estimation de $t_{\text{nok},1}^1$ sur 30 simulations avec $\sigma = 1^\circ$ . . . . .	163
5.9	Évolution de la température : sans défauts et sans bruits (en continu) et avec panne et bruit (points). . . . .	165
5.10	Évolution de la température : sans défauts et sans bruits (en continu) et avec panne et bruit (points). . . . .	166
5.11	Évolution de la température : sans défauts et sans bruits (en continu) et avec panne et bruit (points). . . . .	167
5.12	Illustration de la méthodologie de détection et identification en ligne. . . . .	168
5.13	Carte EWMA avec $\lambda = 0.2$ , $k = 3$ et $\sigma = 0.1^\circ\text{C}$ . . . . .	169
5.14	Carte de détection. . . . .	170
5.15	Illustration de la détection en ligne pour la première défaillance. . . . .	171
5.16	Illustration de la détection en ligne de la deuxième défaillance. . . . .	172

# LISTE DES TABLEAUX

---

1.1	Paramètres d'entrée des modèles (1.29) et (1.30) en unité SI. . . . .	42
1.2	Comparaisons entre les deux modèles. . . . .	43
1.3	Paramètres du modèle . . . . .	49
2.1	Paramètres d'entrées du modèle non linéaire. . . . .	88
2.2	Identification de la défaillance pour différents niveaux de bruit. . . . .	88
2.3	Paramètres d'entrées du modèle linéaire. . . . .	93
2.4	Identification de la défaillance pour différents niveaux de bruit. . . . .	93
2.5	Identification des temps de défaillance et de redémarrage pour différents niveaux de bruit. . . . .	95
2.6	Identification des temps de défaillance des deux sources pour différents niveaux de bruit. . . . .	96
3.1	Temps de calcul de l'algorithme de MGC hors ligne. . . . .	101
3.2	Identification des instants de défaillance pour différents niveaux de bruit. . . . .	113
3.3	Identification des instants de défaillance des deux sources pour différents niveaux de bruit. . . . .	114
3.4	Identification des instants de défaillance des deux sources pour différents niveaux de bruit. . . . .	115
4.1	Paramètres d'entrée de modèle . . . . .	131
4.2	Paramètres d'entrée-modèle . . . . .	136
4.3	Identification de la défaillance pour différents niveaux de bruit. . . . .	145
4.4	Identification des temps de défaillance et de redémarrage pour différents niveaux de bruit . . . . .	146
4.5	Identification des temps de défaillance des deux sources pour différents niveaux de bruit. . . . .	147
5.1	Paramètres d'entrée du modèle mathématique. . . . .	154
5.2	Identification des temps de défaillance pour différents niveaux de bruit. . . . .	158
5.3	Paramètres du modèle mathématique. . . . .	160
5.4	Instants de défaillance pour différents niveaux de bruit. . . . .	161

---

5.5	Identification des instants de défaillance des deux sources avec des niveaux de bruit variables. . . . .	163
5.6	Identification des instants de défaillance des deux sources et redémarrage avec des niveaux de bruit variables. . . . .	164
5.7	Identification des instants de défaillance des deux sources avec différents niveaux de bruit. . . . .	166
5.8	Identification des temps de défaillance des deux sources et redémarrage avec des niveaux de bruit variables. . . . .	167
5.9	Identification quasi-en-ligne des instants de défaillance de la source $\Phi_1$ avec des niveaux de bruit variables. . . . .	170
5.10	Identification quasi-en-ligne des instants de défaillance $\Phi_1$ et $\Phi_2$ des deux sources avec des niveaux de bruit variables. . . . .	172



# INTRODUCTION

---

LES systèmes thermiques sont largement utilisés dans de nombreuses applications, telles que le chauffage, la climatisation, les centrales électriques, les systèmes de refroidissement, les systèmes de production de vapeur, etc. Ces systèmes peuvent être décrits par des équations aux dérivées partielles qui modélisent le comportement de la température et du flux de chaleur à travers le système.

Cependant, ces systèmes peuvent être sujets à des défaillances, telles que la panne d'une source de chaleur, la perte de pression, la dégradation des performances des composants, etc. Ces défaillances peuvent avoir un impact significatif sur le fonctionnement du système et causer des perturbations indésirables. Par conséquent, il est important de détecter et d'identifier rapidement ces défaillances afin de minimiser les conséquences négatives sur le système.

Dans de nombreux secteurs industriels, tels que l'aérospatiale, l'industrie automobile, l'énergie et les processus industriels, la détection et le diagnostic des défaillances dans les systèmes thermiques revêtent une importance cruciale. En effet, ces systèmes sont souvent sujets à des pannes et à des défaillances qui peuvent compromettre leur bon fonctionnement et leur sécurité.

La détection des anomalies ou des changements dans les systèmes thermiques est au cœur du domaine de la détection. Il s'agit de repérer les instants où les sources de chaleur subissent une défaillance ou sont redémarrées. Toutefois, détecter l'anomalie ne suffit pas à résoudre le problème. Il est également essentiel d'identifier avec précision les instants de défaillance ou de redémarrage ainsi que les caractéristiques de la source de l'anomalie.

Dans ce contexte, l'identification de ces instants peut être considérée comme un problème inverse, dans le sens où l'on tente de retrouver les causes à partir des effets observés. En effet, les données mesurées sur le système thermique ne fournissent que des informations partielles et indirectes sur l'état du système, et il est nécessaire d'utiliser des techniques d'analyse pour remonter aux causes sous-jacentes. Les techniques d'identification permettent donc de résoudre les problèmes inverses en génie thermique.

Les problèmes inverses en thermique consistent pour certains à déterminer les propriétés inconnues d'un système à partir de mesures expérimentales, telles que la température ou le flux de chaleur. Ces problèmes sont mal posés, c'est-à-dire qu'il existe plusieurs solutions possibles et que de petites perturbations des données peuvent conduire à des résultats très différents.

Dans ce document de thèse, nous abordons ce domaine en proposant une méthode d'identifi-

cation de défaillances dans un système thermique décrit par un système d'équation aux dérivées partielles. Dans ce contexte, cette thèse propose une approche innovante basée sur la méthode du gradient conjugué pour résoudre un problème inverse, à savoir l'identification de l'instant de panne ou de redémarrage de plusieurs sources chauffantes dans un système thermique. Cette approche itérative vise à estimer les paramètres de défaillance, tels que les instants de panne ou de redémarrage, à partir de mesures de température.

L'approche développée présente plusieurs avantages par rapport à d'autres méthodes existantes. Tout d'abord, elle permet d'identifier simultanément les défaillances de plusieurs sources chauffantes, ce qui est une tâche complexe et difficile à réaliser avec les approches traditionnelles. De plus, elle est basée sur la méthode du gradient conjugué, qui est connue pour sa stabilité numérique, ce qui permet d'obtenir des résultats efficaces et précis en termes de temps de calcul.

Une partie importante de cette thèse est consacrée à la comparaison de l'approche proposée avec une autre approche basée sur le filtre bayésien, en l'occurrence le filtre de Kalman, largement utilisé dans la littérature pour la détection et l'estimation des défaillances dans les systèmes dynamiques. Cette comparaison permet de mettre en évidence les avantages et les limites de l'approche développée, en termes de performance et de complexité.

La structure de ce document est organisée en cinq chapitres, à savoir :

- Le premier chapitre présente une introduction aux équations aux dérivées partielles paraboliques et à la modélisation des transferts thermiques. Il présente également un brève historique des problèmes inverses et de leurs applications. Ce chapitre aborde également la modélisation en géométrie 2D, qui permet une réduction du temps de calcul, et l'évaluation de l'erreur relative liée à la résolution du problème direct. Enfin, le chapitre offre un état de l'art sur l'identification de défaillances dans les systèmes décrits par des EDP.
- Le deuxième chapitre présente une méthode innovante pour identifier les instants de commutation d'un système physique non linéaire décrit par un système d'équations aux dérivées partielles paraboliques. L'objectif est de déterminer, à partir de données bruitées de températures mesurées par trois capteurs fixes, quand et quelle source de chaleur est tombée en panne.

La méthode d'identification est formulée comme un problème de minimisation d'un critère quadratique, résolu par une méthode de régularisation itérative. Étant donné le caractère mal-posé des problèmes inverses de conduction de la chaleur, cette approche est fondée sur trois problèmes bien posés. Le premier problème est un problème direct qui permet de déterminer la température simulée et le critère. Le deuxième problème est un problème adjoint qui permet de déterminer le gradient du critère, c'est-à-dire la direction de descente pour minimiser le critère. Enfin, le troisième problème est un problème de sensibilité qui permet de calculer la profondeur de descente dans la direction du gradient,

afin d'adapter la méthode itérative.

- Le troisième chapitre présente trois stratégies pour la détection et l'identification quasi en ligne des défaillances ou des redémarrages de sources dans un système thermique. La première stratégie utilise une fenêtre de détection et d'identification de même taille. La deuxième stratégie adapte la taille de la fenêtre d'identification en fonction de la fenêtre de détection. La troisième stratégie propose une détection en temps réel avec une fenêtre d'identification adaptée. Cette approche permet une détection plus rapide et une identification plus précise des instants de défaillance ou de redémarrage.
- Le chapitre 4 porte sur l'adaptation du filtre de Kalman pour identifier les instants de défaillance des sources de chauffe fixes dans un système d'équations aux dérivées partielles en deux dimensions. La méthode consiste à estimer un ou deux flux de chauffe à partir d'un filtre bayésien, en intégrant un vecteur de flux dans l'équation d'état pour estimer les températures. Une méthodologie est proposée pour estimer la défaillance et le redémarrage des sources de chaleur à l'aide d'un lisseur de Kalman et d'une stratégie de recherche dans différents signaux candidats de la source. Les résultats montrent que cette approche donne d'excellents résultats malgré l'utilisation de seulement 3 capteurs éloignés des sources pour mesurer la température.

Le chapitre 5 de cette thèse compare deux approches proposées d'identification de pannes ou de redémarrages des sources chauffantes dans les systèmes thermiques, en se concentrant sur les cas d'identification hors ligne et en ligne. Les résultats montrent que pour les cas hors ligne, l'approche basée sur la méthode du gradient conjugué (MGC) est plus précise que l'approche basée sur le filtre bayésien pour l'identification des instants de défaillance ou de redémarrage, malgré un temps de calcul potentiellement élevé. En ce qui concerne l'identification en ligne, la méthode de détection basée sur la carte de contrôle EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) est utilisée pour lancer la procédure dès que les résidus des capteurs dépassent les limites de la carte. Les deux approches sont améliorées en utilisant des fenêtres adaptées ou des observations passées pour une identification plus précise. Cette étude souligne l'importance de comparer différentes approches en fonction des contraintes de temps et de complexité du problème pour résoudre les problèmes d'identification de défaillance dans les systèmes thermiques décrits par des EDPs.



# PROBLÉMATIQUE GÉNÉRALE ET ÉTAT DE L'ART

---

## 1.1 Systèmes physiques décrits par des équations aux dérivées partielles paraboliques

Au cours des dernières années, un très grand nombre de problèmes de physique mathématique ont été modélisés par des équations aux dérivées partielles. Les problèmes de physique sont des problèmes qui nécessitent l'utilisation des modèles mathématiques avancées pour modéliser et résoudre des phénomènes physiques complexes. Par "modèle", on entend un ensemble d'équations (ou d'inéquations) qui, associées à des conditions aux limites (exprimées sur la frontière du domaine spatial où le phénomène est étudié) et, lorsque le phénomène est évolutif, à des conditions initiales, permettent de définir l'état du système. C'est ce qu'on appelle aussi la modélisation par "systèmes distribués".

Naturellement la description du modèle (ou d'un modèle, puisqu'un même phénomène peut souvent être décrit, dans des conditions non nécessairement strictement équivalentes, par des variables d'état différentes) est une étape importante mais non décisive. Il faut ensuite "étudier" le modèle, c'est-à-dire en déduire des propriétés qualitatives ou quantitatives qui d'une part, recouvrent, dans des conditions simples, des observations (mesures) déjà effectuées, et d'autre part, donnent des informations complémentaires sur le système.

On observe depuis longtemps que la plupart des phénomènes de la physique sont non linéaires, parmi les cas les plus célèbres figurent l'équation de Boltzmann en mécanique statistique, les équations de Navier-Stokes en mécanique des fluides (équations qui constituent d'ailleurs une approximation de l'équation de Boltzmann), les équations de Von Karman régissant les grands déplacements des plaques planes, les théories de la gravitation, de l'électromagnétisme (équations de Maxwell), ou des mathématiques financières (équation de Black-Scholes), etc.

Cependant, malgré la possibilité d'utiliser de manière systématique les procédures de calcul de solutions approchées de l'état du système, des résultats précis ne peuvent généralement être obtenus que dans les cas linéaires. Certains problèmes physiques peuvent être modélisés direc-

tement c’est-à-dire sans approximation, par des équations linéaires : c’est notamment le cas de l’équation de transport des neutrons. D’autres phénomènes peuvent être déduits de systèmes ”réellement” non linéaires en négligeant certains termes (ce qui est valable dans certaines situations : ” petits ” déplacements, mouvements ” lents ”...) produits par la linéarisation autour d’une solution particulière.

Par ailleurs, les méthodes mises en œuvre pour la résolution des problèmes linéaires jouent un rôle essentiel dans toutes les situations non linéaires connues à ce jour. En d’autres termes, la compréhension et la résolution des problèmes linéaires sont fondamentales pour aborder les problèmes plus complexes et non linéaires. Les concepts et les techniques utilisées dans la résolution des problèmes linéaires sont souvent la base sur laquelle sont construites les méthodes pour résoudre des problèmes plus compliqués, y compris ceux qui sont non linéaires.

La théorie des équations aux dérivées partielles constitue aujourd’hui l’un des thèmes importants de la compréhension scientifique. Les principales raisons de cet état de fait sont, d’une part, les progrès de l’analyse mathématique et, d’autre part, l’arrivée de la technique du calcul numérique qui est restée, pour les équations aux dérivées partielles, presque totalement inadaptée jusque dans les années 1950. En effet, l’arrivée des ordinateurs, et leurs immenses et incessants progrès, ont permis - pour la première fois dans l’histoire - de calculer, à partir des modèles, des quantités que l’on ne pouvait auparavant qu’estimer très approximativement et, peut-être surtout, de les calculer avec précision et rapidité, d’où la possibilité (fondamentale) pour les chercheurs et les ingénieurs de pouvoir utiliser les résultats numériques pour modifier ou adapter les arguments scientifiques, les expériences ou les constructions en cours.

Les modèles issus de la mécanique ou de la physique sont souvent décrits par une ou plusieurs équations différentielles partielles (ou E.D.P. en abrégé), c’est-à-dire des équations différentielles à plusieurs variables (le temps et l’espace, par exemple) et certaines contraintes. L’équation (ou système d’équations) aux dérivées partielles s’écrit :

$$\mathcal{P}(D)u = f \tag{1.1}$$

où  $u$  est l’inconnue,  $f$  est donnée sur  $\Omega \times T$ , et  $\mathcal{P}(D)$  un opérateur différentiel.

Dans la modélisation mathématique, il sera nécessaire de donner une signification mathématique à cette équation (1.1). Généralement, un modèle mathématique est une représentation ou une interprétation abstraite de la réalité physique qui est accessible à l’analyse et au calcul, ainsi la simulation numérique permet de calculer sur machine les solutions de ces modèles, et finalement de simuler la réalité physique.

On peut distinguer les familles d’opérateurs comme suivant :

— les opérateurs paraboliques souvent rencontrés notamment dans les équations de diffu-

sion ;

- les opérateurs hyperboliques souvent rencontrés dans les équations d’onde ;
- les opérateurs de Schrödinger souvent rencontrés dans les équations du même nom ;
- les opérateurs elliptiques, en particulier, l’opérateur laplacien.

Dans notre cadre, nous nous limitons à décrire des systèmes d’équations paraboliques qui dérivent d’un modèle physique très classique. Pour plus de détails sur ces modèles et d’autres types, nous renvoyons à la bibliographie (Sobolev, 1964), (Evans, 2010), (Dautray and Lions, 2012), (Tikhonov and Samarskii, 2013), (Webster and Plimpton, 2016).

Une équation différentielle partielle (EDP) parabolique est un type d’EDP qui décrit un système évoluant dans le temps et dans une dimension spatiale. Elle est appelée ”parabolique” parce qu’elle a une structure semblable à celle de l’équation de la parabole . La forme générale d’une EDP parabolique est la suivante (Friedman, 2008) :

$$\partial u / \partial t = a(x, t) \partial^2 u / \partial x^2 + b(x, t) \partial u / \partial x + c(x, t) u \quad (1.2)$$

où  $u(x, t)$  est la fonction inconnue qui représente le système, et  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$ , et  $c(x, t)$  sont des coefficients qui dépendent des propriétés du système et peuvent varier dans le temps et l’espace. L’équation (1.2) décrit le taux de variation de  $u$  par rapport au temps, qui est proportionnel à la dérivée seconde de  $u$  par rapport à l’espace, ainsi que des termes linéaires qui peuvent représenter des termes d’advection ou de réaction. Dans ce qui suit, nous présentons quelques exemples d’EDPs paraboliques.

1. **Équation de la chaleur** : l’équation parabolique de la chaleur est une équation aux dérivées partielles qui décrit la distribution de la température en fonction du temps dans un milieu solide homogène et isotrope pour décrire le phénomène physique de conduction thermique, introduite initialement en 1807 par Fourier (Fourier et al., 1822). L’équation est dérivée de la loi de Fourier sur la conduction thermique, qui stipule que le taux de transfert de chaleur est proportionnel au gradient de température dans le milieu. Cette EDP est également appelée équation de la chaleur. L’équation parabolique de Fourier est donnée par :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \frac{f}{\lambda}, \quad (1.3)$$

où la fonction  $u$  représente la température en kelvin K, la dérivée d’ordre 1 par rapport au temps traduit l’irréversibilité du phénomène,  $\Delta u$  est le laplacien de  $u$  et  $f$  correspond aux sources internes en  $W.m^{-3}$ . Le nombre  $\alpha$  est appelé diffusivité thermique du milieu en  $m^2.s^{-1}$  et  $\lambda$  est la conductivité thermique en  $W.m^{-1}.K^{-1}$ .

2. **Équation convection-diffusion** : L’équation de convection-diffusion est une équation aux

dérivées partielles qui découle des lois fondamentales de la physique, notamment les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, dans lequel la diffusion et l’advection sont toutes deux présentes. Elle est utilisée pour modéliser divers phénomènes de transport, tels que la diffusion de substances dans un fluide en mouvement. L’équation de convection-diffusion a la forme générale suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(v \cdot \nabla u) = \operatorname{div}(\alpha \nabla^2 u) + f, \quad (1.4)$$

où  $u$  est la variable d’intérêt (telle que la température en K ou la concentration en  $\text{mol.m}^{-3}$ ),  $t$  est le temps en s,  $v$  est le champ de vitesse de convection en  $\text{m.s}^{-1}$ ,  $\alpha$  est le coefficient de diffusion en  $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$  et  $\nabla$  est l’opérateur de gradient. Le terme  $\frac{\partial u}{\partial t}$  représente le taux de variation temporelle de  $u$ , tandis que  $\operatorname{div}(v \cdot \nabla u)$  représente la convection ou l’advection de  $u$  par la vitesse du fluide  $v$ . La diffusion de  $u$  est représentée par le terme  $\operatorname{div}(\alpha \nabla^2 u)$  et  $f$  est le terme source en  $\text{W.m}^{-3}$ .

3. **Équation de Navier-Stokes** : Claude-Louis Navier et George Gabriel Stokes ont publié séparément les équations de Navier-Stokes pour la première fois en 1822 et 1845, respectivement. Les travaux de Stokes ont été publiés dans son livre "Mathematical and Physical Works" et dans son article "On the theory of oscillatory waves" (Stokes, 1847), tandis que ceux de Navier ont été publiés dans son article "Memoire sur les lois du mouvement des fluides" (Navier, 1823). Les équations de Navier-Stokes sont un ensemble d’équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides en termes de vitesse, de pression, de densité et de viscosité. L’équation parabolique de Navier-Stokes, qui décrit l’évolution du champ de vitesse dans le temps, est l’une des équations de ce système. L’équation parabolique de Navier-Stokes est une équation aux dérivées partielles du second ordre de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p / \rho + \nu \nabla^2 u \quad (1.5)$$

où  $u$  est le champ de vitesse du fluide,  $p$  est la pression,  $\rho$  est la densité,  $\nu$  est la viscosité, et  $\nabla$  est l’opérateur de gradient. Le terme  $\nu \nabla^2 u$  représente la diffusion de la quantité de mouvement, tandis que le terme  $(u \cdot \nabla)u$  représente le transport convectif de la quantité de mouvement. Le terme de pression  $\nabla p / \rho$ , indique l’influence de la pression sur le mouvement du fluide.

4. **Équation d’Allen-Cahn** : c’est une EDP qui a été introduite par Sam Allen et John W. Cahn en 1979 (Allen and Cahn, 1979), qui décrit l’évolution d’une fonction scalaire  $u(x, t)$  au cours du temps  $t$  dans une région de l’espace  $x$ . Elle est couramment utilisée pour modéliser les transitions de phase, telles que la croissance de cristaux solides à partir d’un

liquide, ou la séparation de deux fluides non miscibles. Elle se présente sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon \nabla^2 u - f(u), \quad \text{où } \epsilon > 0 \quad (1.6)$$

où  $\epsilon$  est un paramètre qui caractérise l'échelle de longueur du système et  $f(u)$  est un potentiel à double puits qui représente l'énergie libre du système. L'équation d'Allen-Cahn a des applications importantes en science des matériaux, où elle est utilisée pour modéliser la croissance des couches minces, la formation de motifs sur les surfaces et d'autres phénomènes liés aux transitions de phase. Elle est également utilisée dans le domaine du traitement d'images et de la vision par ordinateur, où elle permet de lisser et de segmenter les images.

5. **Équation de Black-Scholes** : il s'agit d'une EDP parabolique introduite par ([Black and Scholes, 1973](#)), qui décrit l'évolution du prix d'un instrument financier dans le temps. L'équation de Black-Scholes se présente sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + rS \frac{\partial u}{\partial S} - ru = 0 \quad (1.7)$$

où  $u(S, t)$  est la valeur de l'instrument financier à l'instant  $t$  et au prix  $S$ ,  $\sigma$  est la volatilité de l'instrument,  $r$  est le taux d'intérêt sans risque, et  $u$  et  $S$  sont tous les deux positifs. Cette équation décrit comment le prix de l'instrument évolue dans le temps en fonction des variations du prix de l'actif sous-jacent, de la volatilité et des taux d'intérêt. Il est important de noter ici que dans l'équation de Fourier (1.3), le terme  $\frac{\partial u}{\partial t}$  est d'un signe différent de celui de l'équation de Black-Scholes (1.7). Cela s'explique par le fait que l'équation de conduction thermique est une équation parabolique directe (forwards), tandis que l'équation de Black-Scholes est une équation parabolique rétrograde (backwards). La différence entre les deux types d'équations est que les équations directes nécessitent des conditions initiales, tandis que les équations rétrogrades nécessitent des conditions finales.

## 1.2 Modélisation des transferts thermiques en 3D et problèmes inverses

La modélisation du transfert de chaleur est un élément essentiel dans de nombreuses disciplines, notamment l'aérospatiale, l'automobile, la biomédecine et les systèmes énergétiques. Elle permet de construire et d'améliorer des systèmes de transfert de chaleur qui répondent à des objectifs de performance particuliers, tels que l'optimisation de l'efficacité énergétique ou la réduction du poids du système.

La modélisation du transfert de chaleur utilise des équations mathématiques et des simulations numériques pour anticiper la façon dont la chaleur sera transmise entre divers objets ou

systèmes. L’objectif de la modélisation du transfert de chaleur est d’obtenir une compréhension plus approfondie des processus physiques impliqués dans le transfert de chaleur et d’optimiser la conception des systèmes de transfert de chaleur afin d’atteindre des objectifs de performance spécifiques.

### 1.2.1 Les transferts thermiques et l’équation générale de la conduction

Il existe trois principaux modes de transfert de chaleur : conduction, rayonnement et convection, chacun faisant appel à un phénomène physique bien défini. On rappelle brièvement en quoi ils consistent afin d’identifier celui ou ceux qui nous intéresseront dans notre étude, le lecteur peut se référer à (Sacadura, 1978).

- **Transfert de chaleur par conduction** : La conduction est un phénomène de diffusion de la chaleur qui permet à celle-ci de se propager à l’intérieur d’un corps solide. Ce mode de transfert de chaleur résulte d’un transport d’énergie cinétique entre les particules ou groupes de particules à l’échelle atomique. Un flux de chaleur  $\phi$  apparaît entre le milieu chaud et le milieu froid. La densité de flux de chaleur issue de la conduction s’exprime par la loi de Fourier (Fourier et al., 1822) :

$$\phi = -\lambda(\theta)\nabla\theta,$$

où le signe (–) traduit le fait que les échanges tendent à uniformiser la température,  $\theta$  est le champ de température du matériau en K dont dépend la conductivité thermique  $\lambda$  exprimée en  $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\text{K}^{-1}$ .

- **Transfert de chaleur par convection** : La convection est un mode de transfert de chaleur induit par un fluide en mouvement en présence d’un gradient de température. La convection se présente généralement sous deux formes : naturelle (se produit à partir de différence de masse volumique due aux différences de températures), ou forcée (réalisée à partir des moyens mécaniques tels que des ventilateurs, des pompes, ...).
- **Transfert de chaleur par rayonnement** : Le rayonnement est un flux d’ondes électromagnétiques émises par tous les corps quelle que soit leur température. Ce type de transfert de chaleur ne nécessite aucun support matériel. Les gaz, les liquides et les solides sont capables d’émettre et d’absorber les rayonnements thermiques. Ce transfert dépend de la nature des corps : type de matériau, couleur, orientation ou nature de la surface (Sacadura, 1978).

#### Équation générale de la conduction

On considère un domaine  $\Omega$  de l’espace à  $N$  dimension (noté  $\mathbb{R}^N$ , en général  $N = 1, 2$  ou  $3$ ). On note  $x, y$  et  $z$  les variables d’espace, c’est-à-dire  $(x, y, z)$  des points de  $\Omega$ , et  $t$  la variable de temps. La température est une fonction inconnue notée par  $\theta(x, y, z, t)$ . Dans un solide de

volume  $V$  en  $\text{m}^3$ , nous supposons que l'état mécanique et physico-chimique de ce solide reste constant. Les propriétés du solide sont définies comme suit :  $\gamma$  représente sa chaleur volumique en  $\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$ ,  $\lambda$  est sa conductivité thermique en  $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $\vec{\varphi}$  est le vecteur densité de flux de chaleur  $\text{W.m}^{-2}$  et  $p$  désigne la puissance générée par unité de volume en raison des sources internes en  $\text{W.m}^{-3}$ . En appliquant le premier principe de la thermodynamique à un volume  $V$ , avec une surface  $S$  en  $\text{m}^2$  qui est entièrement contenue dans  $V$ , la quantité de chaleur échangée avec l'environnement par unité de temps comprend deux composantes : la puissance échangée à travers la surface  $S$  et la puissance fournie par les sources internes. L'équation exprimant le premier principe peut ainsi être formulée comme suit :

$$\int_S -(\vec{\varphi} \cdot \vec{n}) dS + \int_V p dV = \int_V \gamma \frac{\partial \theta}{\partial t} dV,$$

où  $\vec{n}$  est la normale extérieure à la surface  $S$ .

Le théorème de Green-Ostrogradski ([Arfken and Weber, 1999](#)), permet de transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume :

$$\int_S (\vec{\varphi} \cdot \vec{n}) dS = \int_V \text{div } \vec{\varphi} dvV$$

On obtient alors :

$$\int_V \left[ -\text{div } \vec{\varphi} + p - \gamma \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] dV = 0$$

en utilisant le fait que le volume élémentaire  $V$  est quelconque, on a donc en chaque point de  $V$  :

$$\text{div } \vec{\varphi} + \gamma \frac{\partial \theta}{\partial t} - p = 0 \tag{1.8}$$

qui a lieu en tout point  $x, y, z \in \Omega$  et à tout temps  $t$ . On rappelle que l'opérateur divergence est défini par :

$$\text{div } \varphi = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \quad \text{avec } \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)^t$$

Maintenant, en reliant le flux de chaleur à la température, et en faisant appel à la loi de Fourier ([Fourier et al., 1822](#)) qui relie le flux chaleur de manière proportionnelle au gradient de température, nous avons :

$$\vec{\varphi} = -\lambda(\theta) \nabla \theta \tag{1.9}$$

où  $\lambda(\theta)$  est la conductivité thermique. Rappelons que l’opérateur de gradient est défini par :

$$\nabla\theta = \left( \frac{\partial\theta}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\theta}{\partial x_N} \right)^t$$

En combinant la loi de conservation et la loi constitutive, on obtient alors une équation pour la température  $\theta$  :

$$\gamma \frac{\partial\theta}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda(\theta)\Delta\theta) = p \quad (1.10)$$

Lorsque la conductivité thermique  $\lambda$  est constante, l’équation (1.10) devient :

$$\gamma \frac{\partial\theta}{\partial t} - \lambda\Delta\theta = p$$

où  $\Delta = \operatorname{div} \nabla$  est l’opérateur Laplacien donné par :

$$\Delta\theta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2\theta}{\partial x_i^2}.$$

La résolution des problèmes liés au transfert de chaleur nécessite également la connaissance des conditions spatio-temporelles indiquant ce qui se passe à la frontière ou au bord du domaine  $\Gamma = \partial\Omega$  ainsi que les conditions qui indiquent l’état initial de la température en tout point de  $\Omega$ .

**Condition initiale :** cette condition définit l’état thermique initial, elle est choisie à l’instant  $t = 0$  qui est le temps initial, et on définit la température initiale par

$$\theta(x, y, z, t = 0) = \theta_0(x, y, z),$$

où  $\theta_0$  est la distribution de la température initiale dans le domaine  $\Omega$ .

En ce qui concerne les conditions aux limites, généralement celle-ci dépend du contexte physique. Dans la suite on définit quelques conditions classiques.

**Condition de Dirichlet :** cette condition est aussi dite température imposée. Il s’agit en effet d’imposer l’évolution d’une température sur une ou plusieurs frontières du domaine.

$$\theta(x, y, z, t) = \theta_D, \quad \text{pour tout } (x, y, z) \in \Gamma \text{ et } t > 0$$

**Surface adiabatique :** Lorsqu’il n’y a pas de flux de chaleur à travers la surface limite, les conditions aux limites sont exprimées par :

$$\frac{\partial\theta(x, y, z, t)}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \text{pour tout } (x, y, z) \in \Gamma \text{ et } t > 0$$

**Condition de Neumann :** cette condition est aussi connue sous densité du flux imposée, il s'agit d'imposer une densité de flux sur une ou plusieurs limites de domaine  $\Omega$ .

$$-\lambda \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial \vec{n}} = \phi(t) \quad \text{pour tout } (x, y, z) \in \Gamma \text{ et } t > 0,$$

où  $\phi(t)$  est l'intensité de la densité de flux imposée en  $W.m^{-2}$ ,  $\lambda$  est la conductivité thermique du matériau donnée en  $W.m^{-1}.K^{-1}$  et  $\frac{\partial \theta}{\partial \vec{n}}$  est la dérivée normale de la température  $\theta$  dirigée vers l'extérieur (produit scalaire du gradient  $\nabla$  et du vecteur normal  $\vec{n}$ ). Dans le cas où le domaine est supposé adiabatique ou bien thermiquement isolé de l'extérieur, alors le flux sortant au bord est nul et la température vérifie la condition au limites de Neumann

$$-\lambda \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial \vec{n}} = -\lambda \vec{n} \cdot \nabla \theta(x, y, z, t) = 0 \quad \text{pour tout } (x, y, z) \in \Gamma \text{ et } t > 0,$$

où  $\vec{n}$  est la normale extérieure unité de  $\Omega$ .

**Condition mixte :** cette condition connue sous le nom de condition mixte de Fourier-Robin, il s'agit d'une condition qui combine une condition de type Dirichlet et une condition de type Neumann. Elle est souvent utilisée pour modéliser des problèmes de transfert thermique ou de diffusion avec une condition de convection sur une partie du bord. La température vérifie la condition mixte suivante :

$$\frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial \vec{n}} + \alpha \theta(x, y, z, t) = \theta_D \quad \text{pour tout } (x, y, z) \in \Gamma \text{ et } t > 0,$$

où  $\alpha$  est une constante positive.

Après avoir examiné les différents types de conditions aux limites et la condition initiale, nous pouvons maintenant regrouper le système d'EDP. Pour illustrer cela, nous prendrons l'exemple d'une condition initiale et de conditions aux limites de type Dirichlet. Cela nous conduit à l'équation de la chaleur suivante :

$$\begin{cases} \forall (x, y, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_*^+ & \gamma \frac{\partial \theta}{\partial t} - \lambda \Delta \theta = p \\ \forall (x, y) \in \Omega & \theta(x, y, t = 0) = \theta_0(x, y) \\ \forall (x, y, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}_*^+ & \theta(x, y, t) = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

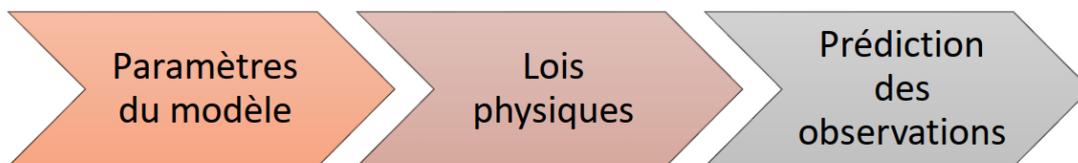
Ce problème (1.11) est constitué d'une équation aux dérivées partielles (EDP) munie d'une condition initiale et d'une condition aux limites. Dans ce qui suit, nous présentons un aperçu état de l'art sur la définition et les propriétés des problèmes inverses.

### 1.2.2 Au sujet des problèmes inverses

Au cours des dernières décennies, les problèmes inverses sont devenus très répandus dans de nombreuses disciplines et dans leurs divers domaines d’application (industriels et/ou universitaires). Commençons d’abord par définir un ”problème inverse”. Nous citons (Keller, 1976) comme ayant fourni l’une des définitions les plus complètes des problèmes inverses dans la littérature : *”Deux problèmes sont dits inverses l’un de l’autre si la formulation de l’un implique tout ou partie de la solution de l’autre. Souvent, pour des raisons historiques, l’un des deux problèmes a été étudié de manière approfondie pendant un certain temps, tandis que l’autre est plus récent et n’est pas aussi bien compris. Dans ce cas, le premier est appelé problème direct, tandis que le second est appelé problème inverse”*

Cette définition montre que deux problèmes sont dits ”inverses” si la formulation de l’un va mettre l’autre en cause. Dans une autre définition (Kern, 2002), un problème inverse est une situation dans laquelle on tente de déterminer les causes d’un phénomène (physique, mathématique, chimique, ...) à partir des observations expérimentales de ses effets (des mesures par exemple). En sismologie, un exemple concret de ”problème inverse” consisterait à identifier la position de l’épicentre d’un tremblement de terre en utilisant les données collectées par plusieurs stations sismiques situées dans différentes régions du monde. Cela représente l’inverse du ”problème direct” qui permet de prédire les effets à partir des causes. Un exemple courant de ”problème direct” est la prédiction de l’état futur d’un système physique en connaissant son état présent. Toutefois, l’étude des problèmes inverses peut être difficile en pratique, car cela requiert souvent une connaissance approfondie du problème direct, nécessitant ainsi une grande variété de concepts physiques et mathématiques.

#### Problème direct



#### Problème inverse



FIGURE 1.1 – Différence entre le problème direct et le problème inverse.

Dans le cadre du génie thermique, la résolution des problèmes inverses est une étape importante pour de nombreuses applications. Expliquons d'abord sur un exemple simple ce que peut être un problème inverse dans le cadre du génie thermique. On considère une barre de fer rectangulaire que nous faisons chauffer à l'une de ces extrémités. La diffusion de la chaleur à l'intérieur de la barre est modélisée par un problème aux limites. Le problème est alors le suivant : pouvons-nous déterminer le coefficient de diffusion en mesurant la température de la barre à l'autre extrémité? La communauté thermique a abordé une variété de problèmes inverses, y compris l'évaluation des propriétés thermophysiques d'un matériau, l'évaluation de géométries inconnues ou mal définies, et la recherche de conditions initiales et limites inconnues. Parmi cette dernière catégorie de problèmes, l'estimation des flux pariétaux ou Problème Inverse de Conduction de Chaleur (PICC) sont particulièrement répandus. Ces types de problèmes inverses peuvent être classifiés en deux catégories : les problèmes d'estimation expérimentale, les problèmes de commande qui consistent à trouver l'entrée à appliquer à un système, à l'aide d'un modèle, afin d'approcher au mieux une valeur spécifiée à l'avance (l'effet désiré). Cette valeur cible peut être déterminée soit en considérant une évolution désirée de l'état, soit une évolution désirée de la sortie du système. Dans notre cadre d'étude, on s'intéresse plutôt à la première catégorie. Dans cette première catégorie, lorsque l'une ou plusieurs des composantes du problème direct sont manquantes, les informations supplémentaires sont collectées en mesurant les quantités produites par le système (effets observés). Les problèmes d'estimation expérimentale peuvent être classés comme suit :

**Les problèmes d'estimation de paramètres :** dans ce type de problème, nous tentons de caractériser les caractéristiques essentielles du système.

Exemple : pour l'identification du paramètre  $\lambda(\theta)$ , on peut prendre, comme mesures, la température à différents moments ainsi qu'en différents points (en supposant également que  $\rho c$ ,  $\theta_0$  et  $\Phi$  sont connus) :

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, y, z, t) - \operatorname{div}(\lambda(\theta(x, y, z, t)) \nabla \theta(x, y, z, t)) = \Phi(x, y, z, t) & \text{dans } \Omega \times T \\ \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \theta(x, y, z, 0) = \theta_0(x, y, z) \end{cases}$$

**Les problèmes d'estimation de sources :** ces problèmes sont courants en génie thermique et visent à déterminer un état de surface (par exemple, la densité de flux) ou un état de volume inaccessible à une mesure directe. Les outils et méthodes d'inversion diffèrent selon que le problème est unidimensionnel ou multidimensionnel, ainsi que selon la géométrie considérée.

**Le problème de reconstruction d'état initial :** le plus souvent, on considère que la distribution initiale du champ de température est connue. La reconstitution d'un état initial à partir d'une observation effectuée après ce point peut toutefois présenter un intérêt pratique.

Exemple : on s’intéresse ici à la répartition de la température  $\theta$  dans un matériau hétérogène occupant un domaine de  $\Omega \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, y, z, t) - \operatorname{div}(\lambda(\theta(x, y, z, t)) \nabla \theta(x, y, z, t)) = \Phi(x, y, z, t) & \text{dans } \Omega \times T \\ \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial \Omega \\ \theta(x, y, z, 0) = \theta_0(x, y, z) \end{cases}$$

On peut essayer de retrouver la condition initiale  $\theta_0(x, y, z)$  à partir d’une mesure de  $\theta$  à un temps donné et en connaissant les paramètres  $\rho c$ , et  $\lambda(\theta)$ .

**Les problèmes d’estimation de formes de domaines :** la majorité des problèmes de transfert de chaleur sont formulés sur des domaines dont la forme géométrique est prédéterminée. Néanmoins, dans certaines circonstances, il est nécessaire d’établir ce paramètre, par exemple lorsqu’on essaie d’estimer la forme de défauts dans une pièce.

Dans le cadre plus spécifique du génie thermique, les problèmes inverses de conduction de la chaleur (PICC) où l’intérêt est de chercher à identifier des propriétés de milieu étudié, flux de chaleur, reconstitution de l’état passé ou encore des conditions initiales, sont généralement mal-posés (Alifanov, 1994). En effet, le critère de stabilité au sens d’Hadamard (Isakov, 2017), (Isakov, 1998) n’est pas satisfait : de faibles erreurs sur la solution (par exemple du bruit de mesures, des erreurs sur le modèle) provoquent de fortes variations sur les paramètres à estimer, ceci rend l’inversion au sens strict délicate à gérer. Cela peut être plus clair dans un cadre matriciel où, lors de la résolution numérique du système d’équations aux dérivées partielles, les matrices d’assemblage obtenues à l’aide des approches numériques, par exemple les éléments finis (Pepper and Heinrich, 2017), sont mal conditionnées. L’inversion de telles matrices n’est pas pertinente en présence d’incertitudes sur les mesures (Abou Khachfe, 2000) (Beddiaf, 2013). Afin de diminuer ces impacts sur les paramètres à estimer, plusieurs techniques de résolution inverse ont été développées qui ont pour objectif de stabiliser la solution du problème mal posé.

Généralement, les problèmes inverses de conduction de la chaleur sont formulés comme des problèmes d’optimisation d’une fonctionnelle, tel que leur résolution numérique nécessite une connaissance approfondie des techniques de base de l’analyse numérique et de la théorie de l’optimisation. Examinons d’abord la notion du problème bien et mal posé.

Dans le système (1.11) le fait d’avoir un modèle mathématique n’implique pas automatiquement que le problème soit bien posé. Le mathématicien Jacques Hadamard (Hadamard, 1932) a donné une définition d’un problème bien posé. Pour comprendre cette définition, on considère "B" les données qui peuvent être le seconde membre, données initiales, "x" est la solution recherchée, et  $\mathcal{A}$  est l’opérateur qui agit sur x. Cet opérateur peut être par exemple une équation aux dérivées partielles et le type de condition aux limites. Le problème s’écrit sous la forme suivante :

$$\mathcal{A}[x] = \mathcal{B}. \tag{1.12}$$

Selon la définition de Hadamard ([Hadamard, 1932](#)), on dit que le problème (1.12) est bien posé si les trois conditions sont respectées :

- La solution  $x$  existe et est solution du problème (1.12).
- La solution est unique.
- La solution dépend continûment des données  $\mathcal{B}$ .

Si l'une de ces conditions n'est pas satisfaite alors on dit que le problème est mal posé. Comme les problèmes inverses en génie thermique s'avèrent généralement mal posés, au sens de Hadamard ([Hadamard, 1932](#)), plusieurs techniques de régularisation ont été développées. La régularisation a pour objectif de stabiliser la solution du problème mal posé. Ainsi toutes les approches de régularisation reposent sur le même principe : le problème initial est remplacé par un problème similaire, bien posé et dont la procédure de résolution est stable. De nombreuses méthodes ont été proposées pour résoudre les PICC : techniques de régularisation de Tikhonov ([Tikhonov et al., 1977](#)), régularisation par décomposition en valeurs singulière ([Van Loan and Golub, 1996](#)), méthode de spécification de Beck ([Beck and Woodbury, 1998](#)) ainsi que les méthodes de régularisations itératives ([Alifanov and Artyukhin, 1975](#)).

La résolution du problème inverse de la conduction de la chaleur (PICC) se réduit souvent à la résolution du système (1.12), où :

- $x$  vecteur représentant la donnée inconnue,
- $\mathcal{B}$  vecteur représentant les mesures de température,
- $\mathcal{A}$  est une matrice mal-conditionnée.

La plupart des méthodes de résolution de PICC consistent à remplacer le problème d'inversion (1.12) par la minimisation de la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{J}(x) = \|\mathcal{A}x - \mathcal{B}\|^2 \tag{1.13}$$

L'objectif de la régularisation est de formuler un nouveau problème en ajoutant un paramètre supplémentaire (dit de régularisation) tel que ce nouveau problème va conduire à diminuer la sensibilité de la solution  $x$  aux erreurs commises sur les données  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ .

**Régularisation de Tikhonov :**

La technique de régularisation de Tikhonov ([Tikhonov et al., 1977](#)) est l'une des techniques les plus répandues et utilisée lors de la résolution des problèmes inverses mal posés. L'idée de la méthode est d'ajouter un terme dit de régularisation ou encore un terme pénalisateur à la fonctionnelle (1.13) à minimiser.

$$\mathcal{J}(x; \mathcal{R}, \mu) = \|\mathcal{A}x - \mathcal{B}\|^2 + \mu \|\mathcal{R}_n x\|^2 \tag{1.14}$$

où  $\mu$  est le coefficient de régularisation et  $\mathcal{R}_n$  est la matrice de régularisation (appelée aussi

matrice de Tikhonov) avec  $n$  l’ordre de la régularisation.

Dans ce cas, la solution estimée du problème peut s’exprimer comme :

$$\hat{x}_\mu = \text{Arg min}_x \left\{ \|\mathcal{A}x - \mathcal{B}\|^2 + \mu \|\mathcal{R}_n x\|^2 \right\} \quad (1.15)$$

tel que la solution  $\hat{x}_\mu$  proposée dans l’expression précédente est dépendante du paramètre de régularisation  $\mu$ . Le choix de matrice  $\mathcal{R}$  dépend des caractéristiques de la solution recherchée  $x$ . Dans le cadre des problèmes inverses de conduction de chaleur, où l’on essaie de reconstruire par exemple une condition aux limites sur une frontière inaccessible, dans ce cas on choisit  $\mathcal{R}$  telle qu’elle soit égale à une mesure de la dérivée nième de la fonction densité de flux suivant l’abscisse curviligne le long de la frontière ( $n = 0, 1, 2$ , ordre de la régularisation). D’une façon générale, la matrice de régularisation est définie par :

$$\|\mathcal{R}_n x\|^2 = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial^n x}{\partial s^n} \right)^2 d\Gamma \quad (1.16)$$

où  $n$  est l’ordre de la régularisation,  $s$  est la variable par rapport à laquelle on précise la donnée inconnue. D’une manière explicite, la solution du problème (1.15) est donnée sous la forme :

$$x_\mu = \left( \mathcal{A}^t \mathcal{A} + \mu \mathcal{R}_n^t \mathcal{R}_n \right)^{-1} \mathcal{A}^t \mathcal{B} \quad (1.17)$$

La difficulté majeure de cette technique réside souvent en la construction de la matrice  $\mathcal{R}_n$ , et en particulier au choix du coefficient de régularisation  $\mu$ . En effet, lorsque  $\mu$  est choisi trop petit, le terme  $\mu \|\mathcal{R}_n x\|^2$  devient négligeable devant  $\|\mathcal{A}x - \mathcal{B}\|^2$ , alors le caractère mal posé dû à l’instabilité du système n’est plus corrigé et finalement les solutions seront toujours instables. Dans le cas contraire si  $\mu$  est très grand alors l’effet du terme  $\|\mathcal{A}x - \mathcal{B}\|^2$  est négligeable par rapport à  $\mu \|\mathcal{R}_n x\|^2$  lors de la procédure de minimisation, ce qui permet d’éviter le comportement bruité ou mal posé du problème. Cependant, on perd le caractère physique du problème et la solution obtenue sera biaisée. Plusieurs études ont été proposées concernant le choix du paramètre de régularisation  $\mu$ , à titre d’exemple le lecteur peut se référer à ([Scherzer et al., 1993](#)), ([Gejadze and Jarny, 2002](#)), ([Liu and Wu, 2013](#)).

#### Régularisation par décomposition en valeurs singulières :

La décomposition en valeurs singulières (SVD en anglais) fait partie des techniques de régularisation très utilisées pour la factorisation matricielle ([Van Loan and Golub, 1996](#)). Pour bien comprendre le principe, reprenons le système (1.12), où  $\mathcal{A}$  est une matrice de dimension  $n \times p$ ,

$x \in \mathbf{R}^n$  le vecteur d'état du système et  $\mathcal{B}$  le vecteur correspondant aux observations. L'idée de cette technique consiste à décomposer la matrice d'état  $\mathcal{A}$  en trois matrices  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{W}$  et  $\mathcal{V}$  telles que :

$$\mathcal{A}_{n \times p} = \mathcal{U}_{n \times n} \mathcal{W}_{n \times p} \mathcal{V}_{p \times p},$$

$$[\mathcal{A}]_{n \times p} = [\mathcal{U}]_{n \times n} [\mathcal{W}]_{n \times p} [\mathcal{V}]_{p \times p}^T \quad (1.18)$$

où  $\mathcal{U}_{n \times n}$  et  $\mathcal{V}_{p \times p}$  sont deux matrices orthogonales et  $\mathcal{W}_{n \times p}$  est une matrice diagonale contenant les valeurs singulières  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, \min(n, p)$ .

Dans le cas où  $\mathcal{A}$  est une matrice carrée,  $\mathcal{A}^{-1}$  est facilement déduite par :

$$[\mathcal{A}] = [\mathcal{U}] [\mathcal{W}] [\mathcal{V}]^T \Rightarrow [\mathcal{A}]^{-1} = [\mathcal{V}] [\mathcal{W}]^{-1} [\mathcal{U}]^T \quad (1.19)$$

En supposant que  $\mathcal{A}$  n'a pas de valeur singulière nulle, la solution  $x$  du problème (1.12) peut s'exprimer par :

$$x = ([\mathcal{V}] [\mathcal{W}]^{-1} [\mathcal{U}]^T) \mathcal{B} \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{\min(n,p)} \frac{\{u_i\} \{b_i\}}{\{w_i\}} \{v_i\} \quad (1.20)$$

Afin de régulariser, on utilise une troncature sur les valeurs qui sont utilisées dans l'inversion :

$$x = \sum_{i=1}^{N_t} \frac{\{u_i\} \{b_i\}}{\{w_i\}} \{v_i\} \quad (1.21)$$

- $\{u_i\}$  et  $\{v_i\}$  les vecteurs de la base orthogonale des matrices  $[\mathcal{U}]_{n \times n}$  et  $[\mathcal{V}]_{p \times p}$ ,
- $\{w_i\}$  les valeurs singulières de  $[\mathcal{A}]_{n \times p}$ ,
- $N_t$  est l'ordre de troncature.

La technique de régularisation (SVD) consiste à choisir l'ordre de troncature  $N_t$  qui permet d'écrire (1.21). La difficulté de cette méthode est de choisir ce paramètre de régularisation qui dépend de la stabilité de la solution (Hansen, 1990), (Maillet and Petit, 2008). Bien que cette technique de régularisation soit efficace, elle reste limitée aux problèmes linéaires.

#### Régularisation par méthodes itératives :

Pour les problèmes linéaires inverses dans lesquels la taille du vecteur inconnu est importante, le temps de calcul de la matrice  $x^T x$  peut rapidement devenir problématique. Pour la minimisation d'une fonction de coût dans ce scénario, nous utilisons des techniques itératives qui sont extrêmement efficaces. Les méthodes itératives sont des méthodes de régularisation où le nombre d'itérations est le paramètre de régularisation. Ainsi, le critère d'arrêt établit le degré

de régularisation de la solution estimée. Il établit le seuil à partir duquel les "solutions" sont jugées acceptables. (Alifanov and Artyukhin, 1975) et (Walter and Pronzato, 1994) présentent les conditions d’arrêt les plus courantes pour la sélection de la valeur seuil.

Lorsqu’un problème inverse est non linéaire, une approche itérative basée sur un algorithme de minimisation est nécessaire car la solution ne peut plus être calculée explicitement. Le principe des méthodes itératives est relatif à la minimisation d’une fonction coût. La méthode des gradients conjugués en est une illustration. En minimisant une fonction coût qui mesure la différence entre les températures mesurées et prédites, l’approche du gradient conjugué est fréquemment utilisée pour résoudre le PICC. Cette approche consiste à résoudre le PICC de manière itérative en utilisant un ensemble de directions conjuguées qui convergent rapidement vers une solution. La méthode adjointe est également utilisée dans le PICC pour calculer efficacement le gradient de la fonction objective en fonction des paramètres inconnus. En résolvant l’EDP adjointe, on peut obtenir les sensibilités de la fonction objective par rapport aux paramètres inconnus, qui peuvent être utilisées pour mettre à jour les estimations des paramètres de manière itérative. Le principe de la méthode de gradient conjugué (MGC) est introduit ici mais sera détaillé au chapitre 2, ainsi que l’utilisation de la méthode de l’état adjoint pour le calcul du gradient du critère (Jarny et al., 1991) (Özisik and Orlande, 2021) :

$$x^{k+1} = x^k - \gamma^k d^k, \tag{1.22}$$

avec  $x^k$  est l’estimation de  $x$  à l’instant  $k$ ,  $\gamma^k$  est la profondeur de descente à l’itération  $k$  et  $d^k$  est la direction de descente à l’itération  $k$ , telle que :

$$d^k = \nabla J(x^k) + \beta^k d^{k-1} \quad \text{et} \quad \beta^0 = 0, \tag{1.23}$$

avec  $\beta^0$  est le coefficient de conjugaison des directions de descentes.

### 1.3 Illustration numérique des erreurs de modèles

Dans la littérature, il existe plusieurs classifications des erreurs d’estimation. Dans cette section, nous allons étudier quelques types de ces erreurs. Lorsque l’on tente de résoudre un problème inverse, on part d’un ensemble de données et on cherche à en déduire les paramètres qui ont conduit à ces données. Dans le cadre des algorithmes itératifs, ces algorithmes consistent à effectuer une suite d’itérations, où à chaque itération, on calcule une nouvelle estimation des paramètres recherchés. Pour cela, on fait appel de manière répétée au module de résolution du problème direct approprié qui permet de calculer une solution approchée du modèle mathématique. Cependant, la solution obtenue (la solution approchée du problème direct) ne sera pas exacte, mais seulement une approximation. En effet, les approximations successives peuvent en-

traîner une amplification des erreurs numériques et donc une dérive par rapport à la solution exacte. De plus, la qualité de l'approximation peut être affectée par des facteurs tels que la précision du modèle mathématique, la qualité des données expérimentales, etc. L'erreur de résolution du problème direct est une composante de l'erreur d'estimation provoquée par l'utilisation de cette solution (approximative) du modèle direct. Le second élément de l'erreur d'estimation est l'erreur d'hypothèse. Il est lié, généralement, aux suppositions qui ont été faites afin de résoudre le problème direct (exemple : négligence des effets multidimensionnels, uniformité du champ de température initial, invariabilité des propriétés thermophysiques en fonction de la température) et peuvent ne pas correspondre aux conditions expérimentales réelles rencontrées. Enfin, l'erreur liée au bruit dans les mesures provient généralement du dispositif de mesure du signal produit par les capteurs. Ce dispositif peut générer un bruit qui vient s'ajouter au signal utile, ce qui peut affecter l'exactitude de la mesure. Ce bruit est souvent de nature additive, ce qui signifie qu'il peut être modélisé comme une perturbation aléatoire qui est superposée au signal mesuré.

### 1.3.1 Problème direct

Le problème direct de conduction de la chaleur implique le calcul de l'ensemble du champ de température sur tout le domaine en résolvant l'équation de la chaleur. Connaître la géométrie du domaine, les paramètres volumétriques ou surfaciques, une condition aux limites pour chaque contour, et les termes sources permet de compléter cette résolution. Naturellement, du point de vue de la modélisation, une méthode de validation compare les résultats de l'expérience aux résultats du problème direct. Les problèmes directs peuvent être résolus à l'aide de techniques traditionnelles, telles que les techniques analytiques pour les géométries de base ou les techniques numériques pour les géométries compliquées. Différentes techniques de discrétisation, comme les différences finies, les volumes finis et les éléments finis peuvent être trouvées parmi les approches numériques (Özişik et al., 2017), (Pepper and Heinrich, 2017).

La méthode des éléments finis, la méthode des volumes finis et la méthode des éléments de frontière sont les techniques de calcul les plus populaires. Ces techniques numériques permettent la résolution directe d'un système matriciel pour résoudre les problèmes de conduction de la chaleur dans des géométries compliquées. Les solutions itératives doivent être utilisées pour les problèmes de conduction de la chaleur non linéaires dans lesquels le terme source, les paramètres de surface ou les paramètres de volume sont des fonctions de la température. Dans ce qui suit un problème direct de conduction de la chaleur est présenté dans un cas académique (géométrie bidimensionnelle).

Considérons deux sources chauffantes fixes  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  sur une plaque d'aluminium de 1m de côté  $\Omega = [-0.5, 0.5]^2$ , de frontière  $\Gamma \in \mathbf{R}$  et d'épaisseur  $e$ . Les pertes de la chaleur (échanges convectifs) et les flux de chauffe sont formulés dans l'équation de la chaleur (issue du bilan énergétique, considérant la Loi de Fourier). Le flux chauffant  $\Phi(x, y, t)$  est fourni par plusieurs

sources de chauffe :

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{n=1}^{n_{\text{chauff}}} \Phi_n(x, y, t). \quad (1.24)$$

Chaque source chauffante est définie comme suit :

$$\Phi_n(x, y, t) = f_n(x, y)g_n(t). \quad (1.25)$$

La fonction  $f_n(x, y)$  est le support spatial de la source  $n$ , qui suit une distribution gaussienne autour du point  $(x_n, y_n)$  avec un écart-type de  $5 \times 10^{-2}$  :

$$f_n(x, y) = \exp\left(-\frac{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}{(5 \times 10^{-2})^2}\right), \quad (1.26)$$

cette fonction quantifie essentiellement le degré d’influence de chaque source sur la région environnante. La fonction  $g_n(t)$  décrit le flux de chauffe fourni normalement (sans défaillance) par la source  $i$  (Figure 1.2).

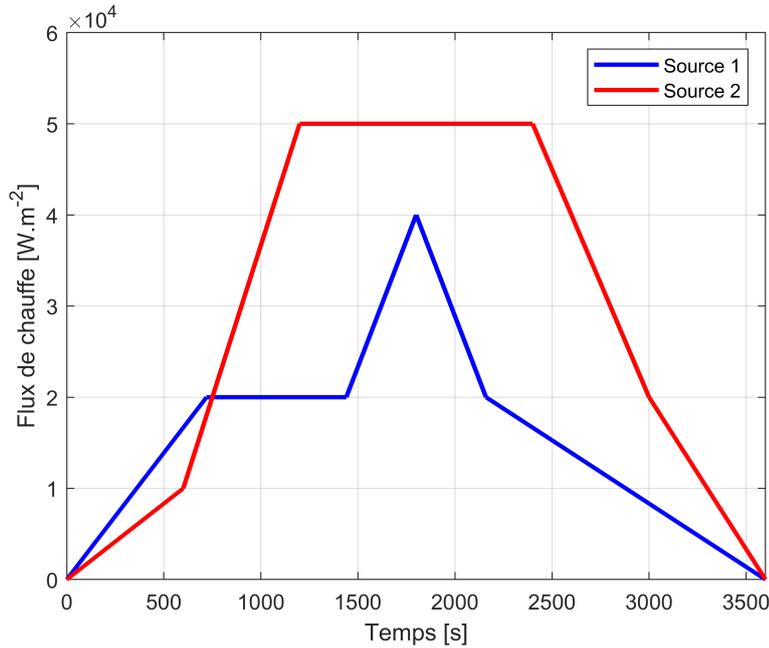


FIGURE 1.2 – Flux  $g_1(t)$  et  $g_2(t)$  des deux sources

La variable de temps est  $t \in T = [0, t_f]$ . La température en tout point de l’espace est notée  $\theta(x, y, t)$ . L’évolution au cours du temps de la température dans le domaine  $\Omega$  est décrit par l’ensemble des équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (x, y, t) \in \Omega \times T \\ \rho C \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial t} - \lambda \Delta \theta(x, y, t) = \frac{\Phi(x, y, t) - 2h(\theta(x, y, t) - \theta_0)}{e} \end{array} \right. \quad (1.27a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (x, y) \in \Omega \\ \theta(x, y, 0) = \theta_0 \end{array} \right. \quad (1.27b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (x, y, t) \in \Gamma \times T \\ -\lambda \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial \vec{n}} = 0 \end{array} \right. \quad (1.27c)$$

Dans l'ensemble de ce manuscrit, ce modèle thermique en géométrie 2D sera considéré et utilisé comme une bonne approximation des transferts thermiques dans une plaque fine. Cependant, afin de valider ce modèle 2D, une étude dont l'objectif est d'étudier les erreurs engendrées par une approximation en géométrie 2D a été traitée et est présentée dans la section suivante.

### 1.3.2 Effet de l'épaisseur : 3D-2D

Afin de réduire les temps de calcul, l'hypothèse d'une géométrie 2D a été considérée. Cette hypothèse est valide si on peut négliger les transferts de chaleurs dans l'épaisseur de la plaque. Pour cette modélisation, il est important de considérer une plaque fine d'un métal de conductivité thermique élevée. L'aluminium a été retenu et cette plaque carrée de 1 m de côté est posée horizontalement sur un support assurant l'isolation.

Dans le but de vérifier que les transferts thermiques sont bien surfaciques sur la plaque d'aluminium, deux modèles mathématiques ont été comparés. Le premier système (1.28) correspond à l'hypothèse retenue : la température  $\theta(x, y, t)$  en chaque point  $(x, y)$  de la plaque  $\Omega$  et à chaque instant  $t \in T$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (x, y, t) \in \Omega \times T \\ \rho C \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial t} - \lambda \Delta \theta(x, y, t) = \Phi(x, y, t) \\ \forall (x, y) \in \Omega \\ \theta(x, y, 0) = \theta_0 \\ \forall (x, y, t) \in \Gamma \times T \\ -\lambda \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial \vec{n}} = 0 \end{array} \right. \quad (1.28)$$

où  $\rho c$  est la chaleur volumique en  $J^{-3} \cdot K^{-1}$ ,  $\lambda$  est la conductivité thermique en  $W \cdot m^{-1}K^{-1}$ ,  $\theta_0$  en  $K$  est la température ambiante (égale à celle du milieu ambiant),  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal à la frontière  $\Gamma$ . Le flux  $\Phi(x, y, t)$  correspond aux sources chauffantes :

$$\Phi(x, y, t) = \frac{f_1(x, y)g_1(t) - 2h(\theta(x, y, t) - \theta_0)}{e}$$

où  $h$  est le coefficient d'échange convectif en  $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$  et  $e$  est l'épaisseur de la plaque en m. Le second système (1.29) correspond à la plaque d'aluminium de 1 m<sup>2</sup>, d'épaisseur  $e$  posée sur une plaque de laine de roche d'épaisseur  $e = 2\text{mm}$ . Le modèle mathématique décrivant les

transferts thermiques en géométrie 3D est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall (x, y, z, t) \in \Omega \times T & \rho c \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial t} - \lambda \Delta \theta(x, y, z, t) = 0 \\ \forall (x, y, z) \in \Omega & \theta(x, y, 0) = \theta_0 \\ \forall (x, y, z, t) \in \partial \Omega_{lat} \times T & -\lambda \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial \vec{n}} = 0 \\ \forall (x, y, z, t) \in \partial \Omega_{sup} \times T & -\lambda \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial \vec{n}} = -\frac{f_1(x, y, z) g_1(t) - h(\theta(x, y, z, t) - \theta_0)}{e} \\ \forall (x, y, z, t) \in \partial \Omega_{inf} \times T & -\lambda \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial \vec{n}} = \frac{1}{h} (\theta - \theta_0) \end{array} \right. \quad (1.29)$$

où  $\partial \Omega_{lat}$  est la surface latérale de la plaque d’aluminium et  $\partial \Omega_{sup}$  (respectivement  $\partial \Omega_{inf}$ ) la face supérieure (inférieure). Afin de considérer si l’hypothèse de transfert thermique bidimensionnelle est valide, les températures prédites par les modèles (1.28) et (1.29) sont comparées pour un jeu de paramètres indiqués dans la tableau (1.1).

$\rho C = 2.421.10^6 \text{ J.m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$	$\lambda = 226 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$	$h = 10 \text{ W.m}^{-2}\text{K}^{-1}$	$\theta_0 = 293 \text{ K}$
------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------	----------------------------------------	----------------------------

TABLEAU 1.1 – Paramètres d’entrée des modèles (1.29) et (1.30) en unité SI.

On peut noter que la configuration 3D étudiée est axisymétrique. Les systèmes d’équations aux dérivées partielles (1.28) et (1.29) sont résolus à l’aide de la méthode des éléments finis mise en œuvre par Comsol interfacé avec Matlab (Figure 1.3). Sur la Figure (1.4), les évolutions de température en différents points de la face supérieure de la plaque sont présentées pour une plaque d’épaisseur  $e = 2\text{mm}$ .

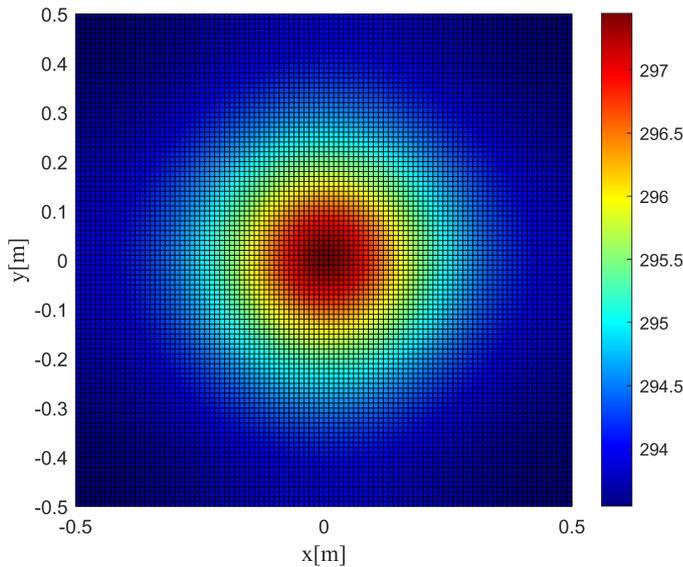


FIGURE 1.3 – Température finale à  $t=3600\text{s}$

La Figure (1.4) illustre que le modèle 2D est très satisfaisant pour des points situés proches de la source chauffante. Pour des points éloignés de la source, des faibles erreurs de modèle seront présentes. Le tableau (1.2) indique en différents points l'erreur relative entre les deux modèles, cette erreur est calculée par :  $\frac{\|C_{sup}^{3D} - C^{2D}\|_2}{\|C_{sup}^{3D}\|_2} = \frac{(\sum_{i \in T} |C_{sup}^{3D}(i) - C^{2D}(i)|^2)^{\frac{1}{2}}}{(\sum_{i \in T} |C_{sup}^{3D}(i)|^2)^{\frac{1}{2}}}$  où  $C_{sup}^{3D}$  et  $C^{2D}$  représentent respectivement, les températures aux capteurs situées dans la face supérieure du problème 3D et températures aux capteurs par le système 2D.

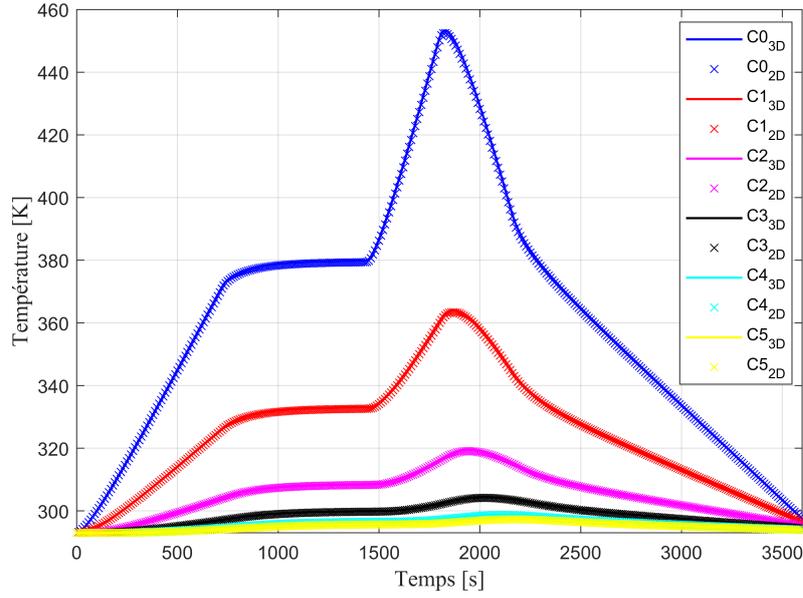


FIGURE 1.4 – Comparaison entre les modèles 2D et 3D

Capteurs	$C_0(0,0)$	$C_1(0.1,0)$	$C_2(0.2,0)$	$C_3(0.3,0)$	$C_4(0.4,0)$	$C_5(0.5,0)$
Erreur relative :	0.014	0.0012	$8.37 \cdot 10^{-4}$	$5.48 \cdot 10^{-4}$	$3.85 \cdot 10^{-4}$	$6.86 \cdot 10^{-4}$

TABLEAU 1.2 – Comparaisons entre les deux modèles.

### 1.3.3 Comparaison des résultats différences finies et éléments finis

En pratique, la comparaison d'une solution obtenue numériquement (méthode des différences finies, volumes finis, éléments finis) à un cas test résolu par une technique analytique dans un cas linéaire à géométrie simple (méthode de séparation des variables, transformée de Fourier, quadripôle thermique) permet de valider une solution obtenue. Cela permet d'estimer la grandeur de l'erreur. Dans la suite, on procède à la résolution du problème direct par deux approches numériques : différences finies et éléments finis (qui seront exploitées dans la suite de ce manuscrit)

afin de comparer la grandeur d'erreur liée à la résolution du problème direct.

### 1.3.3.1 Approche du problème par la méthode des différences finies

La méthode des différences finies (Strikwerda, 2004), (LeVeque, 2007), (Thomas, 2013), (Özişik et al., 2017) est une des nombreuses techniques pour obtenir des solutions numériques de l'équation (1.27a). La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou noeuds du maillage. Dans toutes les solutions numériques, l'équation différentielle est remplacée par une approximation discrète (Özişik et al., 2017).

Dans une géométrie 2D, considérons la température  $\theta(x, y, t)$  définie sur le domaine  $\Omega$ . Ce dernier est décomposé en  $I \times J$  noeuds  $(x_i, y_j)$  répartis régulièrement avec un pas d'espace  $\Delta x$  dans la direction  $x$  et  $\Delta y$  dans l'autre direction  $y$ .  $\theta_{i,j}^k$  est la valeur discrète de la grandeur  $\theta(x, y, t)$  au noeud  $(x_i, y_j)$  et au temps  $k\Delta t$ . De façon similaire, le flux chauffant  $\Phi_{i,j}^k$  est la valeur discrète de la grandeur  $\Phi(x, y, t)$ .

Afin de discrétiser l'équation (1.27a), un schéma explicite est considéré : un schéma avant d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et un schéma centré d'ordre 2 pour approximer les dérivées secondes en espace sont utilisés :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial t} \right]_{i,j}^k &\simeq \frac{\theta_{i,j}^{k+1} - \theta_{i,j}^k}{\Delta t}, & \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right]_{i,j}^k &\simeq \frac{\theta_{i-1,j}^k - 2\theta_{i,j}^k + \theta_{i+1,j}^k}{\Delta x^2} \\ & & \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right]_{i,j}^k &\simeq \frac{\theta_{i,j-1}^k - 2\theta_{i,j}^k + \theta_{i,j+1}^k}{\Delta y^2}, \end{aligned}$$

ainsi, l'équation (1.27a) est équivalente à :

$$\begin{aligned} \rho C \frac{\theta_{i,j}^{k+1} - \theta_{i,j}^k}{\Delta t} - \lambda \frac{\theta_{i-1,j}^k - 2\theta_{i,j}^k + \theta_{i+1,j}^k}{\Delta x^2} - \lambda \frac{\theta_{i,j-1}^k - 2\theta_{i,j}^k + \theta_{i,j+1}^k}{\Delta y^2} &= \frac{\Phi_{i,j}^k}{e} - \frac{2h(\theta_{i,j}^k - \theta_0)}{e} \\ \Leftrightarrow \\ \rho C \frac{\theta_{i,j}^{k+1} - \theta_{i,j}^k}{\Delta t} &= \lambda \frac{\theta_{i-1,j}^k - 2\theta_{i,j}^k + \theta_{i+1,j}^k}{\Delta x^2} + \lambda \frac{\theta_{i,j-1}^k - 2\theta_{i,j}^k + \theta_{i,j+1}^k}{\Delta y^2} + \frac{\Phi_{i,j}^k}{e} - \frac{2h(\theta_{i,j}^k - \theta_0)}{e} \\ \Leftrightarrow \\ \theta_{i,j}^{k+1} - \theta_{i,j}^k &= \Delta t \cdot \lambda \frac{\theta_{i-1,j}^k - 2\theta_{i,j}^k + \theta_{i+1,j}^k}{\rho C \cdot \Delta x^2} + \Delta t \cdot \lambda \frac{\theta_{i,j-1}^k - 2\theta_{i,j}^k + \theta_{i,j+1}^k}{\rho C \cdot \Delta y^2} + \Delta t \cdot \frac{\Phi_{i,j}^k}{\rho C \cdot e} - \Delta t \cdot \frac{2h(\theta_{i,j}^k - \theta_0)}{\rho C \cdot e} \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ 

$$\theta_{i,j}^{k+1} = \theta_{i,j}^k + \Delta t \cdot \lambda \frac{\theta_{i-1,j}^k - 2\theta_{i,j}^k + \theta_{i+1,j}^k}{\rho C \cdot \Delta x^2} + \Delta t \cdot \lambda \frac{\theta_{i,j-1}^k - 2\theta_{i,j}^k + \theta_{i,j+1}^k}{\rho C \cdot \Delta y^2} + \Delta t \cdot \frac{\Phi_{i,j}^k}{\rho C \cdot e} - \Delta t \cdot \frac{2h(\theta_{i,j}^k - \theta_0)}{\rho C \cdot e}$$

 $\Leftrightarrow$ 

$$\begin{aligned} \theta_{i,j}^{k+1} = & \left(1 - \frac{2\Delta t \cdot \lambda}{\rho C \cdot \Delta x^2} - \frac{2\Delta t \cdot \lambda}{\rho C \cdot \Delta y^2} - \frac{2\Delta t \cdot h}{\rho C \cdot e}\right) \theta_{i,j}^k + \left(\frac{\Delta t \cdot \lambda}{\rho C \cdot \Delta x^2}\right) \theta_{i-1,j}^k + \left(\frac{\Delta t \cdot \lambda}{\rho C \cdot \Delta x^2}\right) \theta_{i+1,j}^k \\ & + \left(\frac{\Delta t \cdot \lambda}{\rho C \cdot \Delta y^2}\right) \theta_{i,j-1}^k + \left(\frac{\Delta t \cdot \lambda}{\rho C \cdot \Delta y^2}\right) \theta_{i,j+1}^k + \left(\frac{\Delta t}{\rho C \cdot e}\right) \Phi_{i,j}^k + \left(\frac{\Delta t \cdot 2h \cdot \theta_0}{\rho C \cdot e}\right) \end{aligned}$$

la température à l'itération  $k + 1$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \theta_{i,j}^{k+1} = & \alpha_1 \cdot \theta_{i,j}^k + \alpha_2 \cdot \theta_{i-1,j}^k + \alpha_2 \cdot \theta_{i+1,j}^k + \alpha_3 \cdot \theta_{i,j-1}^k \\ & + \alpha_3 \cdot \theta_{i,j+1}^k + \alpha_4 \cdot \Phi_{i,j}^k + \alpha_5 \end{aligned} \quad (1.30)$$

où les indices  $(i, j)$  désignent le nœud de différence finie à  $x_i = i\Delta x$ ,  $i = 1, \dots, I$  et  $y_j = j\Delta y$ ,  $j = 1, \dots, J$  et l'exposant  $k$  désigne le temps  $t_k = k\Delta t$ ,  $k = 1, \dots, K$ , où  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta t$  sont respectivement les pas d'espace et de temps.  $\alpha_{l=1, \dots, 5}$ , sont des constantes (dépendant des paramètres de l'application et de la discrétisation :  $\Delta t, \Delta x, \Delta y, h, e, \rho, C, \lambda, \theta_0$ ).

La stabilité du schéma (1.30) est due à la condition de Courant, Friedrichs et Lewy (voir (Courant et al., 1967)). Cette condition est nécessaire pour que le schéma numérique produise une solution cohérente lors de la résolution numérique de (1.30).

Afin de discrétiser la condition limite de Neumann (1.27c) sur un bord, par exemple sur le bord gauche :

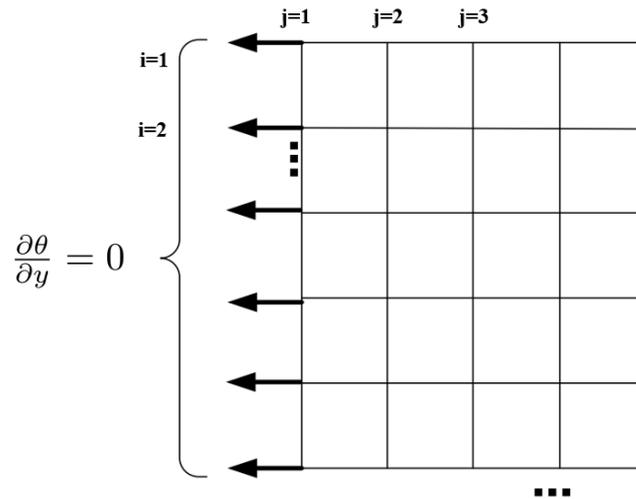


FIGURE 1.5 – Bord gauche

La valeur de l’inconnue  $\theta(x, y)$  n’est pas donnée sur le bord gauche, seule sa dérivée (dans la direction normale au bord, pointant vers l’extérieur) est donnée. Il n’est donc pas possible d’utiliser le Laplacien standard à 5 points sur la première colonne  $j = 1$ , car cela nécessite que  $\theta_{i,1}$  soit connu sur le bord gauche.

Les conditions aux limites de Neumann sont traitées comme suit. En prenant le cas du bord gauche, une frontière imaginaire située  $\Delta x$  à gauche du bord gauche réel est ajoutée comme indiqué ci-dessous :

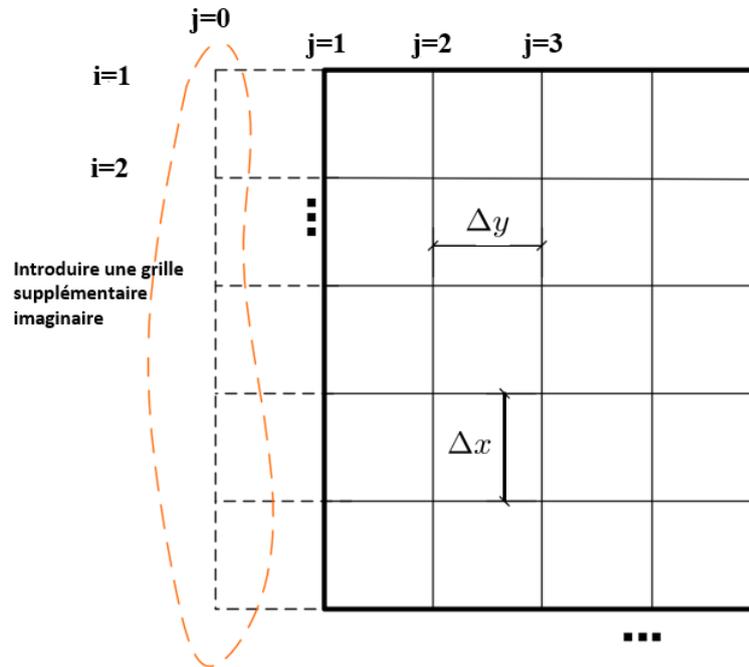


FIGURE 1.6 – Points imaginaires pour les conditions aux limites de Neumann

Une approximation naturelle de la dérivée normale est une différence unilatérale, par exemple :

$$\frac{\partial \theta(x_i, y_1)}{\partial y} = \frac{\theta_{i,2} - \theta_{i,1}}{\Delta y} + \mathcal{O}(\Delta y)$$

Mais il ne s’agit que d’une approximation de premier ordre. Pour traiter les conditions aux limites de Neumann de manière plus précise, nous introduisons les points imaginaires à l’extérieur du domaine et à côté de la limite (Figure 1.6). En autorisant l’indice  $0 \leq i, j \leq J + 1$ . Nous pouvons alors utiliser le schéma de différence centrale :

$$\frac{\partial \theta(x_i, y_1)}{\partial y} = \frac{\theta_{i,2} - \theta_{i,0}}{2\Delta y} + \mathcal{O}(\Delta y^2)$$

La valeur  $\theta_{i,0}$  n'est pas bien définie. Nous devons l'éliminer de l'équation (1.30). Ceci est possible puisque sur le point limite  $(x_i, y_1)$ , nous avons deux équations.

1- D'après la condition limite (1.27c) :

$$\frac{\partial\theta(x_i, y_1)}{\partial y} \simeq \frac{\theta_{i,2} - \theta_{i,0}}{2\Delta y} = 0 \Leftrightarrow \theta_{i,0} = \theta_{i,2} \quad (1.31)$$

2- D'après l'équation (1.30), pour  $j = 1$  on a alors :

$$\theta_{i,1}^{k+1} = \alpha_1 \cdot \theta_{i,1}^k + \alpha_2 \cdot \theta_{i-1,1}^k + \alpha_2 \cdot \theta_{i+1,1}^k + \alpha_3 \cdot \theta_{i,0}^k + \alpha_3 \cdot \theta_{i,2}^k + \alpha_4 \cdot \Phi_{i,1}^k + \alpha_5$$

en utilisant l'équation (1.31), cela donne :

$$\theta_{i,1}^{k+1} = \alpha_1 \cdot \theta_{i,1}^k + \alpha_2 \cdot \theta_{i-1,1}^k + \alpha_2 \cdot \theta_{i+1,1}^k + 2\alpha_3 \cdot \theta_{i,2}^k + \alpha_4 \cdot \Phi_{i,1}^k + \alpha_5 \quad (1.32)$$

On obtient une expression pour  $\theta$  sur le bord gauche qui sera ajoutée à l'ensemble des équations à résoudre. Finalement, nous pouvons traiter les autres points par la même technique, sauf pour les quatre points d'angle.

Aux points d'angle, en prenant le point  $(1, 1)$  comme exemple, nous avons d'après l'équation (1.30) et la condition limite (1.27c) :

$$\theta_{1,1}^{k+1} = \alpha_1 \cdot \theta_{1,1}^k + \alpha_2 \cdot \theta_{0,1}^k + \alpha_2 \cdot \theta_{2,1}^k + \alpha_3 \cdot \theta_{1,0}^k + \alpha_3 \cdot \theta_{1,2}^k + \alpha_4 \cdot \Phi_{1,1}^k + \alpha_5 \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial\theta(x_1, y_1)}{\partial x} \simeq \frac{\theta_{2,1} - \theta_{0,1}}{2\Delta x} = 0 \Leftrightarrow \theta_{0,1} = \theta_{2,1} \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial\theta(x_1, y_1)}{\partial y} \simeq \frac{\theta_{1,2} - \theta_{1,0}}{2\Delta y} = 0 \Leftrightarrow \theta_{1,0} = \theta_{1,2} \quad (1.35)$$

Nous pouvons donc résoudre  $\theta_{0,1}^k$  et  $\theta_{1,0}^k$  à partir de (1.34) et (1.35), et les substituer dans (1.33), cela donne une équation pour le point d'angle  $(x_1, y_1)$  :

$$\theta_{1,1}^{k+1} = \alpha_1 \cdot \theta_{1,1}^k + 2\alpha_2 \cdot \theta_{2,1}^k + 2\alpha_3 \cdot \theta_{1,2}^k + \alpha_4 \cdot \Phi_{1,1}^k + \alpha_5 \quad (1.36)$$

Des techniques similaires seront utilisées pour traiter les autres points d'angle. Finalement, pour les facilités de calcul, en réécrit le problème (1.30) sous la forme d'un modèle d'évolution d'état en réordonnant séquentiellement tous les nœuds  $(i, j)$  avec l'indice  $m = 1, \dots, M$ , où  $M = I \times J$ , ce qui donne l'équation suivante (1.37) :

$$\boldsymbol{\theta}^{k+1} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta}^k + \mathbf{B} \cdot \mathbf{G}^k + \mathbf{H} \quad (1.37)$$

où  $\mathbf{A}$  est une matrice carrée codant la combinaison linéaire des termes  $\theta$  avec les différents

coefficients  $\alpha_l$  correspondants. Afin de faciliter la compréhension, la matrice  $A$  pour une plaque de dimensions  $4 \times 4$  est fournie ci-dessous.

$$\mathbf{A}_{16 \times 16} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_2 & 0 & 0 & 2\alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 & 2\alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 & 2\alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha_2 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 2\alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 2\alpha_2 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 2\alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 2\alpha_2 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha_3 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 2\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha_3 & 0 & 0 & 2\alpha_2 \end{bmatrix}$$

Les flux de chaleur sont supposés être connus à chaque instant  $k$  :

$$\mathbf{G}^k = \begin{pmatrix} g_1^k \\ g_2^k \end{pmatrix},$$

ainsi que leur position, ce qui permet d’avoir un vecteur de flux sur l’ensemble du domaine :

$$\alpha_4 \cdot \Phi^k = \mathbf{B} \cdot \mathbf{G}^k.$$

La matrice  $\mathbf{B}$  contient le support spatial de la source  $f_n$ . Dans ce cas d’étude,  $n_{\text{chauffe}} = 2$  :

$$\mathbf{B} = [f_1; f_2]^{tr},$$

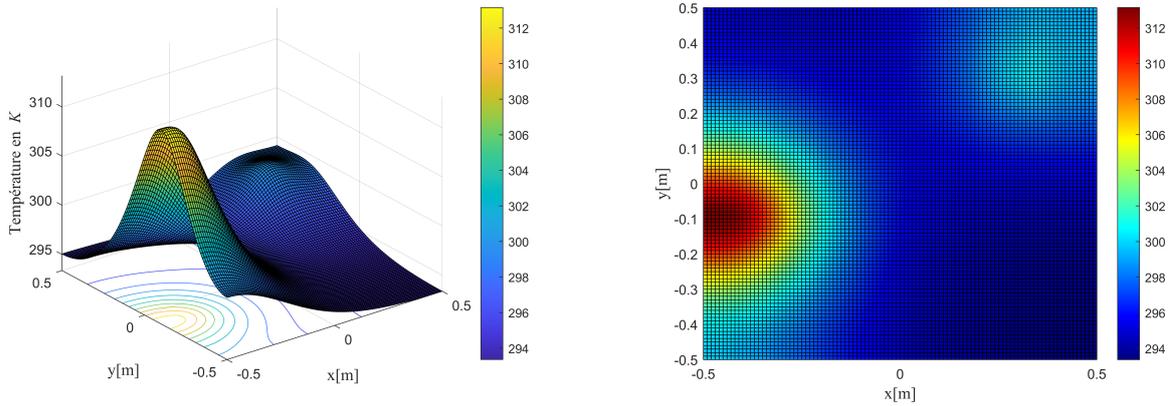
codant les positions de la distribution gaussienne autour des points  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$ .  $H$  est un vecteur constant qui dépend des paramètres du modèle :

$$H = \begin{pmatrix} \alpha_5 \\ \alpha_5 \\ \vdots \\ \alpha_5 \end{pmatrix}.$$

Enfin, connaissant les paramètres d'entrée du modèle (1.37), décrits dans le tableau 1.3, nous pouvons alors résoudre le problème direct. La Figure 1.7 montre l'évolution de la température sur toute la plaque par l'approche des différences finies.

TABLEAU 1.3 – Paramètres du modèle

Symbole	Définition	Valeur
$\Delta t$	Le pas de temps	1 s
$\Delta x, \Delta y$	Le pas d'espace	0.01m
$\rho c$	Chaleur volumique	$2.421 \cdot 10^6 \text{ J.m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$
$h$	Coefficient de convection naturelle	$10 \text{ W.m}^{-2}\text{K}^{-1}$
$\lambda$	Conductivité thermique	$178 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$
$\theta_0$	Température initiale	293 K
$t_f$	Temps final	3600 s



(a) Résultat du problème direct par les différences finies en 3D

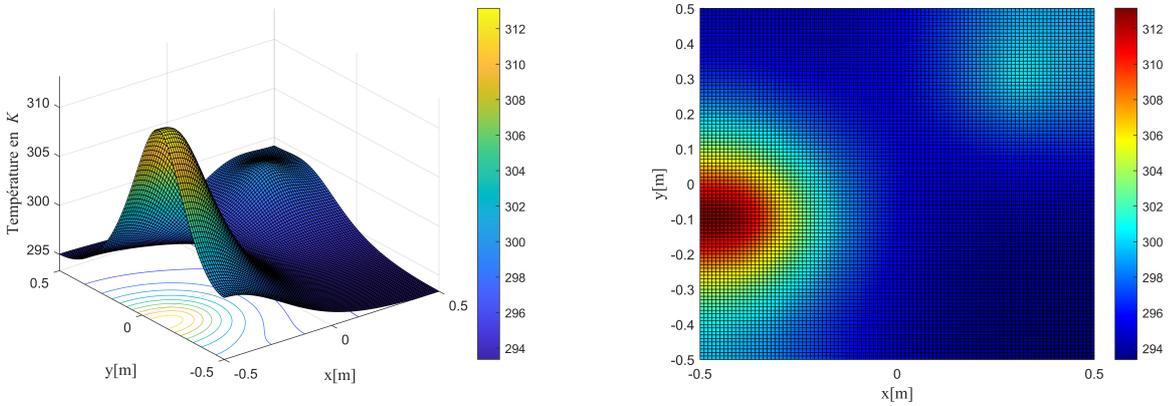
(b) Résultat du problème direct par les différences finies en 2D

FIGURE 1.7 – Résolution du problème direct par les différences finies à  $t=3600$ s.

### 1.3.3.2 Approche du problème direct par la méthode des éléments finis

Les approches par éléments finis, quant à elles, comprennent l'approximation de la solution des EDPs à l'aide de fonctions polynomiales par morceaux définies sur un maillage d'éléments qui ne se chevauchent pas. Ensuite, les EDP sont transformées en une formulation variationnelle, qui nécessite de trouver une solution satisfaisant un ensemble d'équations intégrales sur chaque élément. Après avoir discrétisé la formulation variationnelle, on obtient un système d'équations algébriques qui peut être résolu à l'aide de méthodes numériques.

En général, les méthodes de résolution par éléments finis sont utilisées pour résoudre les EDP sur des domaines irréguliers, tels que ceux présentant des géométries compliquées ou des bords incurvés. Dans le système (1.28), lorsque l’ensemble des paramètres  $\{e, t_f, \rho C, \lambda, \Phi, h, \theta_0\}$  est connu, la résolution du problème est dite directe et permet de connaître l’état  $\theta(x, y, t)$ . Pour ce faire, une approche numérique par la méthode des éléments finis est utilisée à partir du logiciel Cosmol-Multiphysics. Les paramètres d’entrées du modèle sont donnés dans le Tableau 1.3. La Figure 1.8 montre l’évolution de la température sur toute la plaque par l’approche des éléments finis.



(a) Résultat du problème direct par les éléments finis en 3D

(b) Résultat du problème direct par les éléments finis en 2D

FIGURE 1.8 – Résolution du problème direct par les éléments finis à  $t=3600s$ .

### 1.3.3.3 Analyse des résultats

Afin d’évaluer l’écart entre les deux méthodes dans la résolution du problème direct, deux capteurs sont utilisés pour mesurer la température toutes les secondes au niveau de chaque source. On note par  $C_{\Phi_1}$  : le capteur au point  $(0.3, 0.3)$  et  $C_{\Phi_2}$  : le capteur au point  $(-0.4, -0.1)$ . De plus, trois capteurs mesurent la température toutes les secondes aux points  $C_1(0.2, 0)$ ,  $C_2(-0.1, 0.2)$  et  $C_3(-0.1, -0.2)$  (voir Figure 1.9). Pour différencier les résultats obtenus par les deux approches, on note par  $C_{\Phi_1}^{DF}$  les résultats des mesures par les différences finies (DF) et  $C_{\Phi_1}^{EF}$  les résultats des mesures par les éléments finis (EF). La Figure 1.10 correspond à l’évolution des températures par les deux approches DF et EF au point  $(0.3, 0.3)$ , la Figure 1.11 montre la différence de températures mesurées aux deux capteurs.

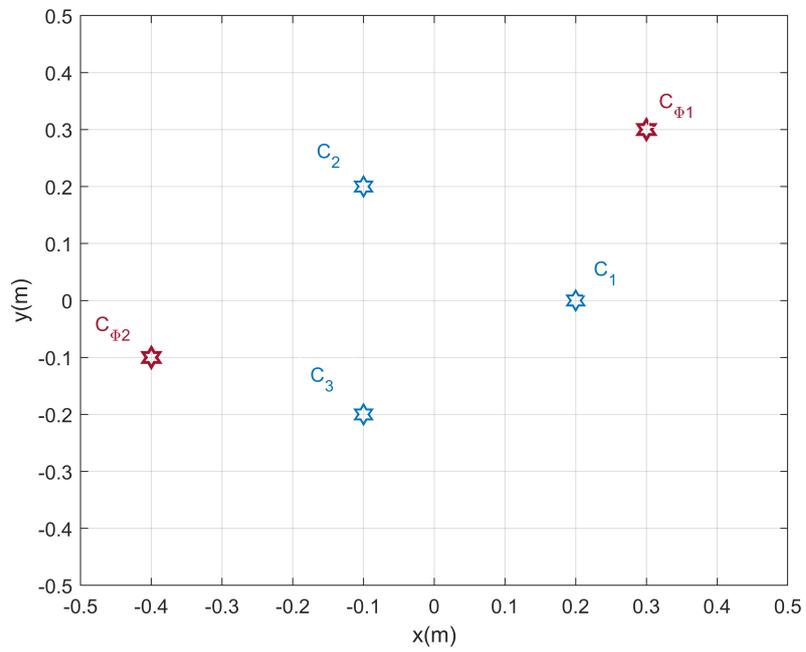


FIGURE 1.9 – Position des 5 capteurs sur la plaque.

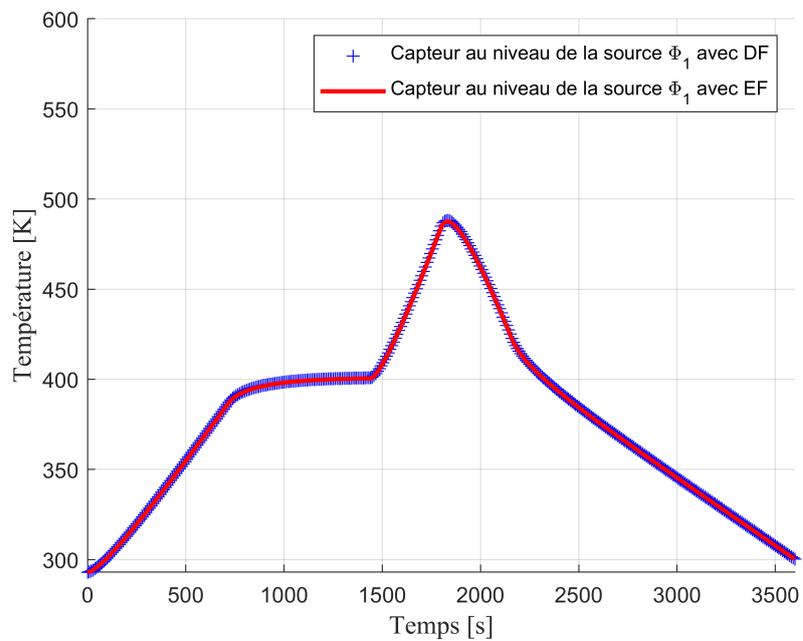


FIGURE 1.10 – Températures au centre de  $\Phi_1$  par les deux approches numériques.

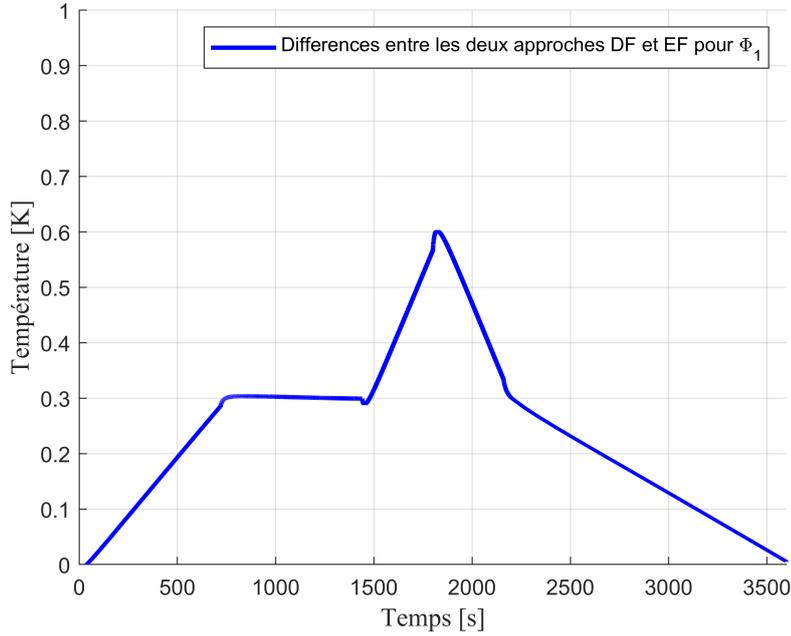


FIGURE 1.11 – Différences de températures par les deux approches numériques.

L’erreur relative au niveau de la source  $\Phi_1$  est calculée en utilisant la norme suivante :

$$\|C_{\Phi_1}^{\text{DF}} - C_{\Phi_1}^{\text{EF}}\|_2 = \left( \sum_{i \in T} |C_{\Phi_1}^{\text{DF}}(i) - C_{\Phi_1}^{\text{EF}}(i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On obtient alors :

$$\frac{\|C_{\Phi_1}^{\text{DF}} - C_{\Phi_1}^{\text{EF}}\|_2}{\|C_{\Phi_1}^{\text{DF}}\|_2} = 7.304 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{\|C_{\Phi_1}^{\text{DF}} - C_{\Phi_1}^{\text{EF}}\|_2}{\|C_{\Phi_1}^{\text{EF}}\|_2} = 7.309 \cdot 10^{-6}.$$

Les résultats des erreurs relatives obtenus au niveau de la source  $\Phi_1$ , montrent que ces erreurs sont très faibles. Ces erreurs d’ordre  $10^{-6}$  peuvent être considérées comme négligeables compte tenu de la valeur maximale de la température  $487[\text{K}]$  (Figure 1.10) .

La Figure 1.12 correspond à l’évolution des températures par les deux approches DF et EF au point  $(-0.4, 0.1)$ , la Figure 1.13 montre la différence de températures mesurées aux deux capteurs  $C_{\Phi_1}^{\text{DF}}$  et  $C_{\Phi_1}^{\text{EF}}$ .

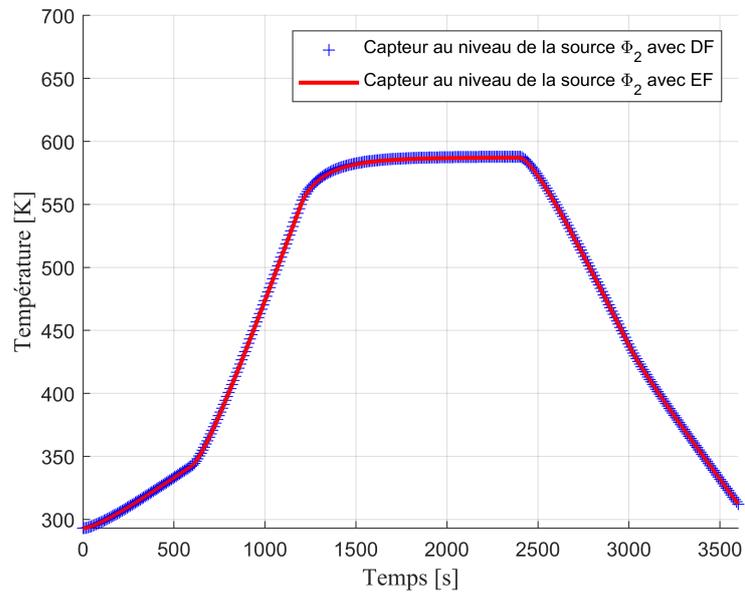


FIGURE 1.12 – Températures au point  $\Phi_2$  par les deux approches numériques.

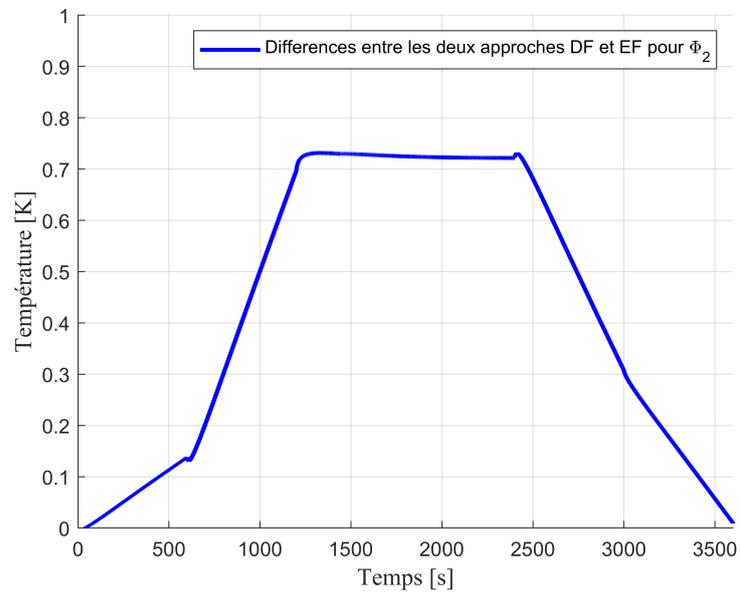


FIGURE 1.13 – Différences de températures par les deux approches numériques.

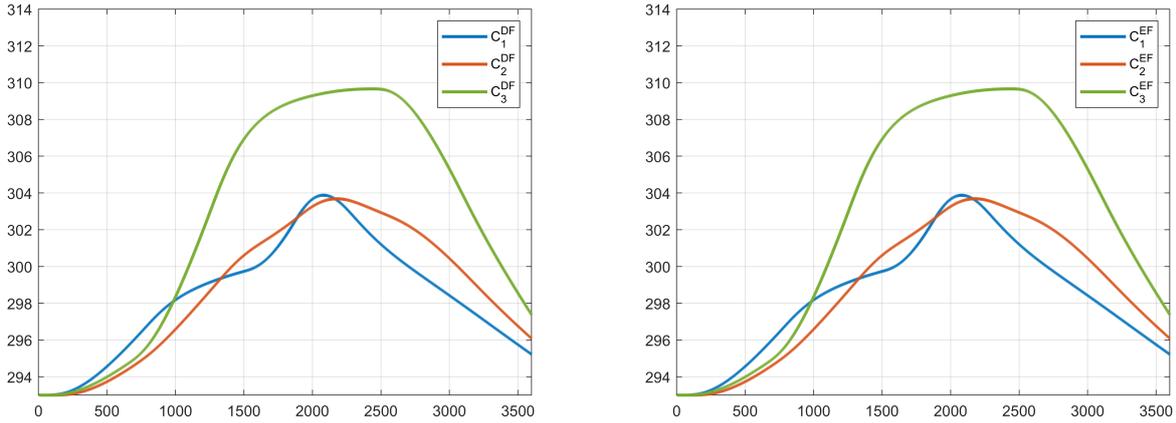
D'une façon similaire que l'étude précédente de la source  $\Phi_1$ , l'erreur relative pour  $\Phi_2$  est

calculée en utilisant trois types de norme :

$$\frac{\|C_{\Phi_1}^{\text{DF}} - C_{\Phi_2}^{\text{EF}}\|_2}{\|C_{\Phi_2}^{\text{DF}}\|_2} = 1.112 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{\|C_{\Phi_2}^{\text{DF}} - C_{\Phi_2}^{\text{EF}}\|_2}{\|C_{\Phi_2}^{\text{EF}}\|_2} = 1.115 \cdot 10^{-3}.$$

Les résultats des erreurs relatives obtenus au niveau de la source  $\Phi_2$ , montrent que ces erreurs sont très faibles. Ces erreurs d'ordre  $10^{-3}$  peuvent être considérées comme négligeables compte tenu de la valeur maximale de la température 587[K] (Figure 1.12) .

Au niveau des trois capteurs, on note par  $C_i^{\text{DF}}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , les capteurs qui présentent les résultats par l'approche DF, et  $C_i^{\text{EF}}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , les capteurs qui présentent les résultats avec l'approche EF. La Figure 1.15 montre la différence de températures mesurées par les capteurs  $C_i^{\text{DF}}$  et  $C_i^{\text{EF}}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .



(a) Mesure aux capteurs par différences finies.

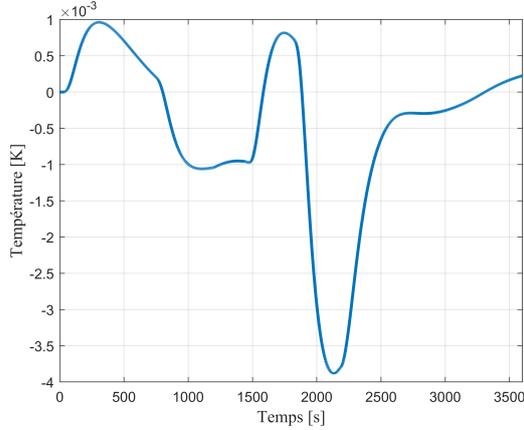
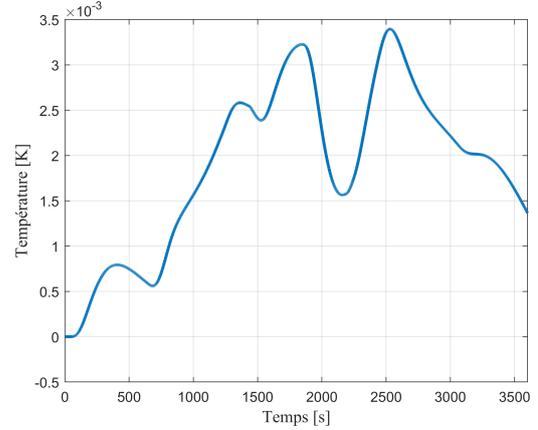
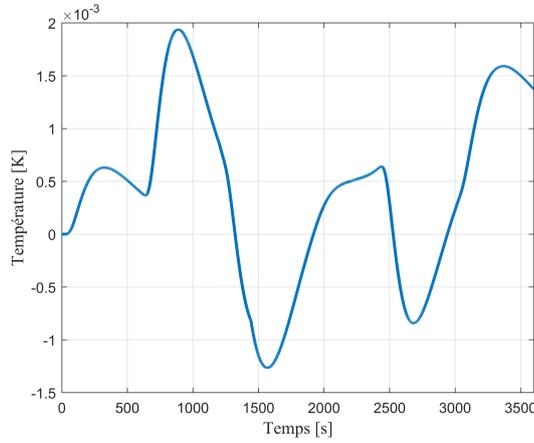
(b) Mesure aux capteurs par élément finis

FIGURE 1.14 – Mesure aux capteurs par les deux méthodes.

D'une façon similaire, l'erreur relative pour  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont calculées en utilisant la norme :

$$\frac{\|C_1^{\text{DF}} - C_1^{\text{EF}}\|_2}{\|C_1^{\text{DF}}\|_2} = 4.219 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{\|C_2^{\text{DF}} - C_2^{\text{EF}}\|_2}{\|C_2^{\text{DF}}\|_2} = 7.023 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{\|C_3^{\text{DF}} - C_3^{\text{EF}}\|_2}{\|C_3^{\text{DF}}\|_2} = 3.083 \cdot 10^{-6}.$$

Les résultats des erreurs relatives obtenus au niveau des trois capteurs  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , montrent que ces erreurs sont très faibles. Ces erreurs d'ordre  $10^{-6}$  peuvent être considérées comme négligeables étant donné les valeurs maximales de température mesurées par les trois capteurs, qui sont respectivement de 303.87[K], 303.68[K], 309.65[K].

(a) les résidus entre  $C_1^{\text{DF}}$  et  $C_1^{\text{EF}}$ (b) les résidus entre  $C_2^{\text{DF}}$  et  $C_2^{\text{EF}}$ (c) les résidus entre  $C_3^{\text{DF}}$  et  $C_3^{\text{EF}}$ FIGURE 1.15 – Les résidus de températures au capteurs  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  par les deux approches DF et EF.

Considérons les mêmes configurations du tableau 1.3, en modifions le pas de discrétisation spatial  $\Delta x = \Delta y = 0.05\text{m}$ , on obtient :

$$\frac{\|C_1^{\text{DF}} - C_1^{\text{EF}}\|_2}{\|C_1^{\text{DF}}\|_2} = 3.384 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{\|C_2^{\text{DF}} - C_2^{\text{EF}}\|_2}{\|C_2^{\text{DF}}\|_2} = 1.983 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{\|C_3^{\text{DF}} - C_3^{\text{EF}}\|_2}{\|C_3^{\text{DF}}\|_2} = 6.710 \cdot 10^{-6}.$$

Les résultats des erreurs relatives obtenus au niveau des trois capteurs  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , montrent que ces erreurs sont très faibles. Ces erreurs d'ordre  $10^{-4}$ ,  $10^{-5}$  et  $10^{-6}$  peuvent être considérées comme négligeables compte tenu de la valeur maximale de température mesurées par les trois capteurs, qui sont respectivement de 303.87[K], 303.68[K], 309.65[K].

D'après les résultats de comparaison entre les deux approches numériques (différences finies

et éléments finis) montrent une très faible différence lors de la résolution du problème direct de conduction de chaleur en géométrie 2D avec une condition de Neumann. Lorsque le pas de discrétisation est fixé à  $\Delta x = \Delta y = 0.01\text{m}$ , les erreurs obtenues sont très faibles, et elles restent également faibles lorsque  $\Delta x = \Delta y = 0.05\text{m}$ . Ces résultats confirment la validité de la résolution du problème direct dans le manuscrit de thèse en utilisant ces deux approches numériques.

Après avoir examiné les erreurs relatives d’approximation du modèle direct, nous allons maintenant passer à l’étude de l’état de l’art sur l’identification de défaillances dans les systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles.

## 1.4 État de l’art sur l’identification de défaillances dans le cadre des systèmes décrits par des EDPs

L’étude des méthodes de détection et de diagnostic suscite un intérêt croissant en raison de son importance économique et sécuritaire. En ingénierie des systèmes, les défauts se manifestent par des dysfonctionnements au niveau des installations, des capteurs, des actionneurs, ou par des pannes de composants, de sous-systèmes ou de systèmes qui empêchent le bon fonctionnement du système selon sa conception.

L’origine étymologique du terme ”diagnostic” peut être retracée aux mots grecs ”dia” (à travers) et ”gnosis” (connaissance). Il se réfère à la recherche et à l’analyse des causes d’une défaillance ou d’une détérioration survenue sur un équipement. En revanche, le terme ”pronostic” concerne la prédiction ou l’estimation du comportement futur d’un équipement en se basant sur des analyses et des données pertinentes disponibles. Le processus de diagnostic englobe les activités de surveillance, de détection et d’identification de la cause sous-jacente. Lorsque le diagnostic confirme la présence d’une défaillance, cela indique que l’équipement est en panne et nécessite une maintenance corrective, et dans ce cas, aucun pronostic n’est effectué. Cependant, si le diagnostic révèle une détérioration du système, il devient crucial de suivre son évolution et d’estimer sa durée de vie restante (Simani et al., 2003), (Zwingelstein. 2020a), (Puig and Simani 2021).

Dans la littérature, il est évident que la terminologie utilisée dans ce domaine n’est pas constante, ce qui rend difficile la compréhension des objectifs des différentes contributions et la comparaison des approches. Pour remédier à cela, le comité technique de SAFEPROCESS (Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes) s’est penché sur la question et a tenté de trouver des définitions généralement acceptées. Certaines définitions de base peuvent être trouvées, par exemple, dans le dictionnaire RAM (Reliability, Availability and Maintainability) (Omdahl, 1988), (Isermann, 2005) et (Puig and Simani 2021) :

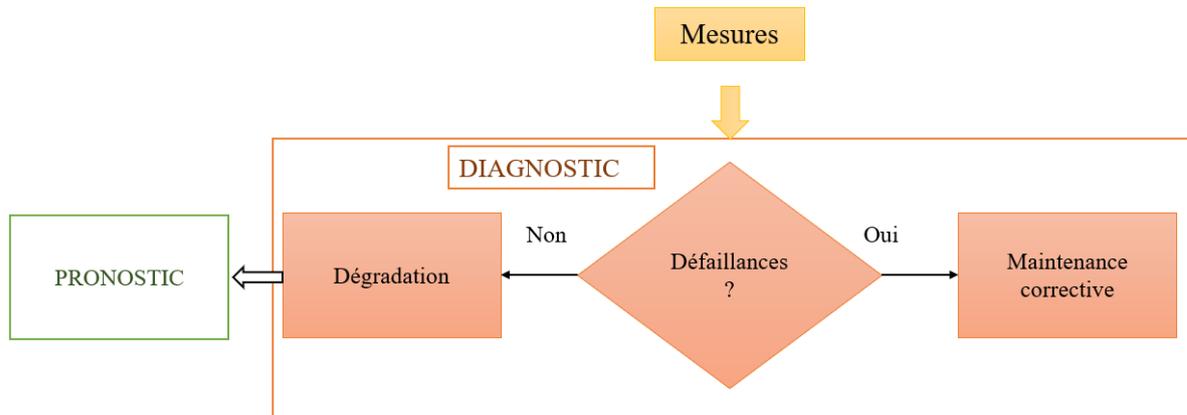


FIGURE 1.16 – Phases de diagnostic et de pronostic.

1) États et signaux :

- Défaut : écart non autorisé d'au moins une propriété caractéristique ou d'un paramètre du système par rapport à l'état acceptable, habituel ou standard.
- Défaillance : interruption permanente de la capacité d'un système à accomplir une fonction requise dans des conditions de fonctionnement spécifiées.
- Dysfonctionnement : irrégularité intermittente dans l'accomplissement de la fonction souhaitée d'un système.
- Erreur : écart entre la valeur mesurée ou calculée d'une variable de sortie et sa valeur réelle ou théoriquement correcte.
- Perturbation : entrée inconnue et non contrôlée agissant sur un système.
- Résidu : indicateur de défaut basé sur un écart entre les mesures et les calculs basés sur l'équation du modèle.
- Symptôme : changement d'une quantité observable par rapport au comportement normal.

2) Fonctions :

- Détection des défauts : détermination des défauts présents dans un système et du moment de leur détection.
- Isolation des défauts : détermination du type, de l'emplacement et du moment de la détection d'un défaut. Elle suit la détection des défauts.
- Identification des défauts : détermination de la taille et du comportement variable dans le temps d'un défaut. Elle suit l'isolation des défauts.
- Diagnostic des défauts : détermination du type, de la taille, de l'emplacement et du moment de la détection d'un défaut. Il s'ensuit que le diagnostic des défauts comprend la détection et l'identification des défauts.
- Surveillance : tâche continue en temps réel consistant à déterminer les conditions d'un

système physique en enregistrant des informations, en reconnaissant et en indiquant les anomalies dans le comportement.

- Supervision : surveillance d’un système physique et prise de mesures appropriées pour maintenir le fonctionnement en cas de défaillance.

3) Modèles :

- Modèle quantitatif : utilisation de relations statiques et dynamiques entre les variables et les paramètres du système afin de décrire le comportement d’un système en termes quantitatifs et mathématiques.
- Modèle qualitatif : utilisation de relations statiques et dynamiques entre les variables du système afin de décrire le comportement d’un système en termes qualitatifs tels que des causalités et des règles Si-Alors.
- Modèle de diagnostic : ensemble de relations statiques ou dynamiques qui relient des variables d’entrée spécifiques, les symptômes, à des variables de sortie spécifiques, les défauts.
- Redondance analytique : utilisation de plusieurs méthodes (pas nécessairement identiques) pour déterminer une variable, dont l’une utilise un modèle mathématique de processus sous une forme analytique.

Un défaut est caractérisé par un écart non autorisé entre la valeur réelle d’une caractéristique du système et sa valeur nominale. Comme illustré dans la Figure (1.17), on distingue trois types de défauts : les défauts au niveau des actionneurs, les défauts au niveau des capteurs et les défauts au niveau du procédé (ou des composants) :

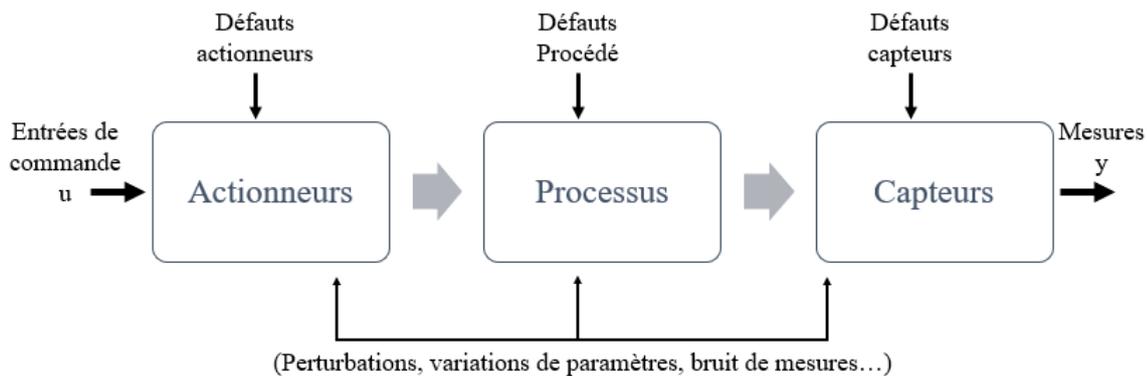


FIGURE 1.17 – Catégories de défauts présents dans un système physique, extrait de (Isermann, 2005).

- **Défauts actionneurs** : les actionneurs sont essentiels pour convertir les signaux de commande en diverses formes d’énergie, tels que le mouvement mécanique, la chaleur ou le champ magnétique. Les défauts au niveau des actionneurs entraînent des problèmes dans le fonctionnement global du système, perturbant la correspondance entre les com-

mandes et les réponses en sortie. Une défaillance totale se produit lorsque l'actionneur perd complètement sa capacité à contrôler le système, par exemple lorsque qu'une vanne reste bloquée. Une défaillance partielle se produit lorsque l'actionneur fonctionne avec une efficacité réduite, même s'il est encore en régime nominal. Ce type de défaillance est souvent associé à une perte d'énergie.

- **Défauts capteurs** : les capteurs sont essentiels pour convertir les grandeurs physiques en signaux utilisables par les calculateurs. Ils agissent comme des interfaces entre le système et son environnement extérieur. Les défauts des capteurs se traduisent par un écart entre la valeur réelle de la grandeur mesurée et sa mesure effective. Ces défauts affectent les sorties du système et englobent les problèmes liés à l'acquisition d'informations sur l'état du système. Comme les défauts des actionneurs, les défauts des capteurs peuvent être totaux ou partiels. Un défaut partiel d'un capteur peut se présenter sous forme de saturation, de calibrage défectueux, de biais ou de bruit indésirable. De plus, la relation entre le signal généré par le capteur et celui du système réel peut varier en termes d'adéquation. En cas de défaut total, le signal du capteur ne peut pas être utilisé de manière fiable.
- **Défauts composants** : les défauts composants affectent les composants internes du système et ne peuvent être classés comme des défauts au niveau des actionneurs ou des capteurs. Ils modifient la dynamique du système en raison de changements dans leurs paramètres. La représentation mathématique de ces défauts est complexe et nécessite des essais expérimentaux approfondis. Ils se manifestent généralement par des altérations dans les équations d'état du système, pouvant être paramétriques ou structurelles/fonctionnelles.

Les défauts peuvent être catégorisés en fonction de leur évolution dans le temps, selon la classification de (Isermann, 2005) :

1. Défaut abrupt : ce genre de défaut se distingue par un comportement temporel discontinu. Si cette évolution ne correspond pas aux changements dynamiques normalement attendus pour la variable (tels que des changements de consigne), cela indique une défaillance soudaine de l'élément concerné : une coupure totale ou partielle de la connexion. Une représentation mathématique de ce défaut est décrite par :

$$\chi(t - t_{\text{def}}) = \begin{cases} \eta & t > t_{\text{def}} \\ 0 & t < t_{\text{def}} \end{cases} \quad (1.38)$$

où  $\chi(t - t_{\text{def}})$  est le comportement temporelle du défaut,  $t_{\text{def}}$  est l'instant d'occurrence d'un défaut et  $\eta$  est un seuil constant.

2. Défaut intermittent : il s'agit d'un défaut typique associé à des faux contacts ou des pannes intermittentes des capteurs. Ce type de défaut est une variation particulière du défaut abrupt, avec la particularité qu'il revient de manière aléatoire à sa valeur

normale.

3. Défaut graduel : ce défaut présente une évolution temporelle lente, ce qui le rend difficile à détecter. Il est associé à des phénomènes tels que l’encrassement ou l’usure d’une pièce. L’évolution de ce défaut au fil du temps peut être exprimée par la relation suivante :

$$\chi(t - t_{\text{def}}) = \begin{cases} \eta \left(1 - e^{-\alpha(t-t_{\text{def}})}\right) & t \geq t_{\text{def}} \\ 0 & t < t_{\text{def}} \end{cases} \quad (1.39)$$

où  $\eta$  et  $\alpha$  sont des constantes positives.

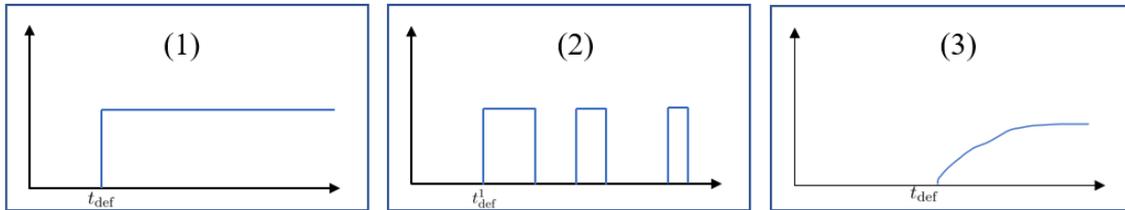


FIGURE 1.18 – Exemples d’évolution temporelle d’un défaut.

Les approches de diagnostic et de pronostic sont généralement regroupées en trois catégories en fonction des modèles utilisés (Zwingelstein, 2020a), (Zwingelstein, 2020b), (Puig and Simani 2021) :

- Approches basées sur les modèles (model-driven) : ces méthodes reposent sur la construction de modèles qui sont fondés sur des principes physiques, des équations mathématiques ou des données expérimentales provenant d’essais physiques ou de retours d’expérience, décrivent le comportement normal du système.
- Approches basées sur les données (data-driven) : ces méthodes exploitent directement les données provenant des capteurs ou celles stockées dans des bases de données, telles que le big data ou le cloud. Ces données sont ensuite analysées à l’aide d’algorithmes statistiques puissants, d’outils d’intelligence artificielle, de techniques de data mining ou de cloud computing.
- Approches hybrides ou mixtes : ces méthodes combinent les deux approches précédentes. Elles intègrent à la fois des modèles basés sur des principes physiques et des techniques d’analyse des données. Cela permet de tirer parti des avantages des deux approches et d’améliorer la précision et la fiabilité du diagnostic et du pronostic.

La Figure 1.19 représente un exemple de classification des modèles et méthodes précédents.

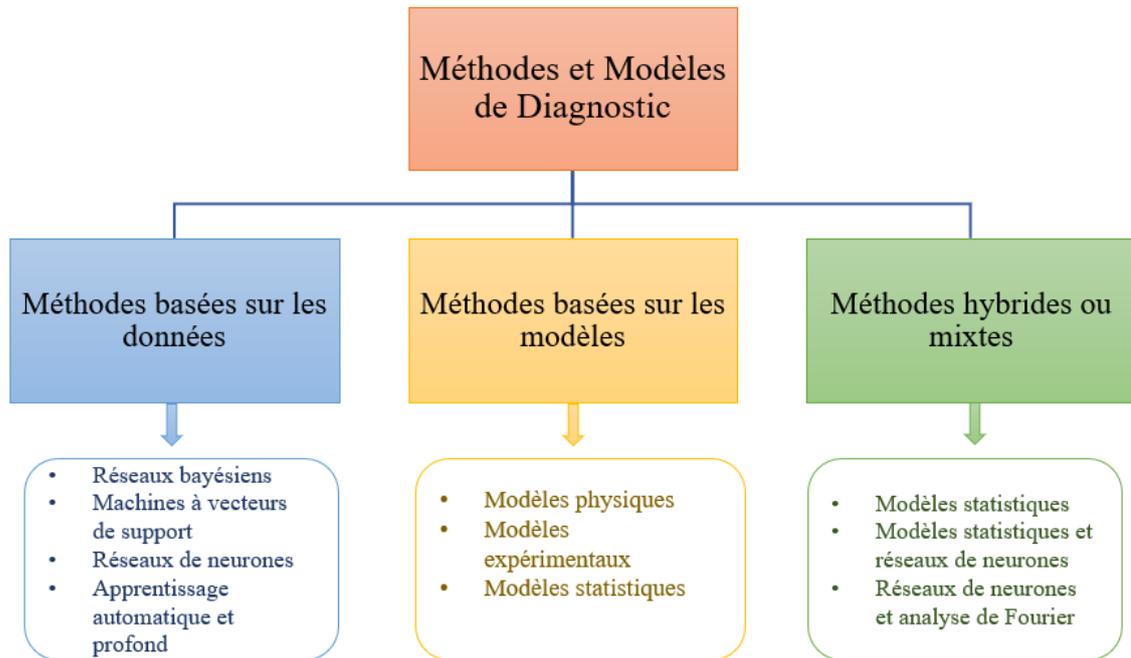


FIGURE 1.19 – Catégorisation des méthodes et des modèles de diagnostic, extrait de (Isermann, 2005).

Dans ce manuscrit de thèse, nous allons étudier uniquement les méthodes basées sur les modèles. L'utilisation de modèles dans le domaine du diagnostic a été abordée dès les années 1970 par des chercheurs tels que (Willsky, 1976), (Chow and Willsky, 1984), (Isermann and Balle, 1997), (Basseville, 1988), (Chow and Willsky, 1984). Depuis lors, de nombreux travaux ont été entrepris pour évaluer les progrès réalisés dans les différentes approches, qui peuvent être regroupées en deux principales catégories : les approches qualitatives et les approches quantitatives (Mansouri et al. 2020), (Puig and Simani 2021). Nous nous concentrerons uniquement sur les méthodes quantitatives. L'objectif central des méthodes basées sur les modèles est de détecter les écarts entre le système réel et son modèle. Ces méthodes reposent sur l'utilisation de modèles comportementaux explicites du système dans le processus de diagnostic :

1. méthodes quantitatives : ces approches se fondent sur les relations mathématiques qui existent entre les variables. Les modèles sont construits en appliquant les principes fondamentaux de la physique tels que les bilans de masse, d'énergie, de quantité de mouvement, ainsi que des relations d'entrée et de sortie. Les techniques de détection, d'isolation et d'identification des défauts (FDI) reposent sur l'utilisation d'un modèle mathématique du système et impliquent une comparaison entre les mesures réelles du système et les informations fournies par le modèle. Ces activités de surveillance sont essentielles pour déterminer la présence de défauts, ainsi que pour identifier leur origine, qu'il s'agisse d'un

dysfonctionnement du système ou d’une défaillance des capteurs ou des actionneurs.

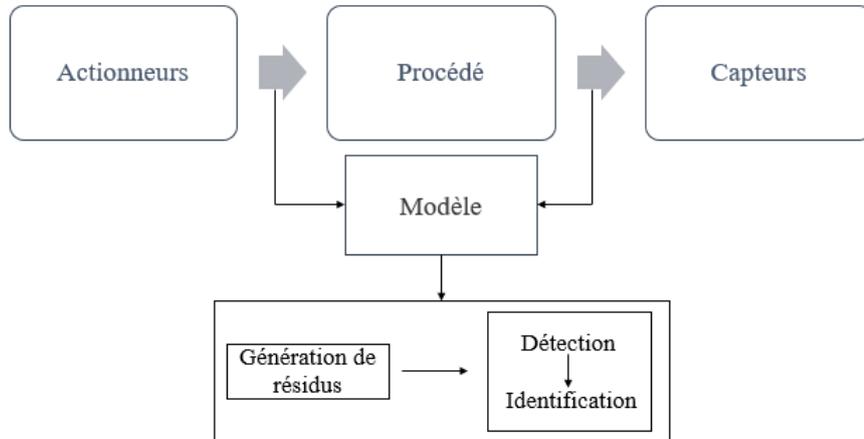


FIGURE 1.20 – Processus de diagnostic basé sur les modèles.

- Génération des résidus : un résidu est défini comme la différence entre la sortie mesurée et la sortie observée. L’amplitude du signal résidu obtenu à partir du générateur indique la présence ou l’absence d’un défaut. La détection de défauts repose ensuite sur l’évaluation de ces résidus générés.
- Évaluation des résidus : les résidus sont des signaux qui fournissent des informations sur la durée et la présence de défauts en comparant les mesures réelles aux calculs basés sur le modèle. Ces résidus sont ensuite comparés à des seuils préalablement établis. Le défi de l’évaluation réside dans la détermination du seuil requis pour détecter les changements. En situation normale, les résidus sont nuls, mais en présence de défauts, ils présentent des valeurs non nulles.
- Décision : la prise de décision représente l’étape finale du processus de diagnostic, dont l’objectif est l’identification des défauts et la localisation de leur origine dans le système.

Pour obtenir les expressions analytiques des résidus, diverses techniques peuvent être mises en œuvre. Les approches couramment utilisées incluent l’utilisation de l’estimation paramétrique, l’estimation d’état :

- Estimation paramétrique : le concept de l’estimation paramétrique repose sur l’estimation des paramètres du système en utilisant les mesures des entrées et des sorties. Le résidu est ensuite calculé comme la différence entre cette estimation et les valeurs de référence correspondant à l’état normal du processus. Les premières applications de cette approche ont été réalisées par (Isermann, 1984). L’estimation paramétrique offre l’avantage de fournir des indications sur l’importance des écarts. Néanmoins, l’un des principaux inconvénients de cette méthode réside dans l’augmentation de la taille du vecteur de paramètres lorsqu’il y a une multiplication des défauts, ce qui rend l’esti-

mation de ce vecteur plus complexe en termes de calcul.

- Estimation d'états : ces méthodes reposent sur l'utilisation d'observateurs d'état, qui nécessitent une bonne connaissance du modèle et de ses paramètres. L'objectif est d'estimer les variables d'état à l'aide de l'observateur pour reconstruire l'information. Un observateur est un système dynamique qui présente une structure similaire à celle du modèle du système étudié, mais il diffère par l'ajout d'un terme adaptatif. Ce terme d'adaptation vise à corriger l'écart entre la sortie de l'observateur et celle du système réel, assurant ainsi la stabilité du processus. Le principe fondamental du diagnostic par observateur consiste à estimer les sorties du système en utilisant un observateur ou un filtre de Kalman (Kalman, 1960). Ensuite, les résidus sont générés en calculant la différence entre les sorties mesurées et leurs estimations.

La recherche en matière de diagnostic pour les systèmes décrits par ces EDPs est encore à un stade préliminaire. Pour aborder cette problématique, une approche indirecte basée sur des modèles a été proposée. Elle consiste à approximer le système EDP par des équations différentielles ordinaires (ODE) dans des études telles que (Demetriou, 2002), (Ghantasala and El-Farra, 2009), (Baniamerian and Khorasani, 2012) et (Dey et al., 2019) dans le but de diagnostiquer les défauts dans des systèmes paraboliques.

Cependant, cette approche présente plusieurs limitations qu'il convient de prendre en compte. Tout d'abord, l'approximation du système EDP par des équations ODE peut conduire à des résultats imprécis, car elle ne capture qu'une partie de la dynamique du système. En effet, les EDP décrivent des phénomènes plus complexes et prennent en compte des caractéristiques telles que la diffusion, la convection et la réaction, qui ne sont pas pleinement représentées dans les équations ODE simplifiées.

De plus, lorsqu'un défaut se produit dans le système, la dynamique de l'EDP est modifiée, ce qui rend le modèle ODE encore plus imprécis et peu fiable pour le diagnostic. Les changements dans la dynamique du système peuvent affecter les interactions entre les différentes variables et rendre l'approximation ODE inadaptée pour détecter et localiser les défauts avec précision.

Dans l'approche directe basée sur des modèles, une méthode consiste à concevoir un observateur en utilisant la représentation des EDPs du système. Cet observateur est conçu pour estimer les états du système à partir des mesures disponibles. Ensuite, les résidus de détection sont calculés en comparant les sorties de l'observateur aux sorties réelles du système physique. Ces résidus représentent les écarts entre les valeurs estimées et les valeurs observées.

En utilisant les résidus, il est possible de détecter la présence d'un défaut dans le système. Cette détection est réalisée en comparant le résidu à un seuil prédéfini. Si le résidu dépasse ce seuil, cela indique la présence d'un défaut. Par conséquent, cette méthode permet d'identifier les défauts au niveau des actionneurs, des capteurs ou même du système lui-même.

Dans certains cas, il est également possible d'estimer l'amplitude du défaut en utilisant un

observateur adaptatif. Cela permet d’évaluer la gravité du défaut et d’obtenir des informations supplémentaires sur son impact sur le système.

Cette approche basée sur des observateurs a été appliquée avec succès aux systèmes paraboliques dans des travaux de recherche tels que (Ferdowsi and Jagannathan, 2014), (Cai et al., 2016), (Feng et al., 2021), (Feng et al., 2022), (Lei et al., 2022) (Ferdowsi et al., 2023). Ces études démontrent l’efficacité de cette méthode dans la détection et l’estimation des défauts dans de tels systèmes.

La présente thèse propose une approche visant à identifier les défaillances des sources chauffantes dans un système thermique en utilisant une méthode d’identification paramétrique. Dans le contexte de l’identification paramétrique, il est naturel de considérer que la recherche de défaillances dans un système, dont le comportement en l’absence de défaut est décrit par un système d’EDP, peut être abordée comme un problème inverse. Ainsi, dans le domaine thermique, une approche basée sur la résolution d’un PICC peut être utilisée pour minimiser l’erreur entre les sorties observées du système en présence de défaillances et les sorties prédites par le modèle. Cette minimisation de l’erreur permet d’identifier les moments où les défaillances se produisent.

L’utilisation de techniques d’identification paramétrique dans le cadre de l’identification de défaillances offre des avantages, notamment la possibilité de modéliser les comportements normaux et défaillants du système à l’aide d’un modèle mathématique précis. Cela permet une identification plus fiable des défaillances et une meilleure compréhension de leur impact sur le système thermique.

Dans le chapitre suivant, nous examinerons de manière approfondie l’approche proposée pour l’identification des défaillances des sources chauffantes dans un système thermique. Nous passerons en revue les étapes clés de cette méthode, en mettant particulièrement l’accent sur l’identification paramétrique et la résolution du PICC.

## **1.5 Bilan du chapitre 1**

Dans ce chapitre, une présentation rapide de quelques types d'équations aux dérivées partielles (EDP) paraboliques ainsi qu'une brève introduction à la modélisation des transferts thermiques ont été réalisées. L'état de l'art sur la définition et les propriétés des problèmes inverses, ainsi que les diverses applications de ces problèmes, a également été présenté.

Un modèle thermique en géométrie 2D a été considéré dans le but de réduire le temps de calcul. Ce modèle a été validé à partir d'une étude des erreurs engendrées par une approximation en géométrie 2D. Cette modélisation est valide si l'on peut négliger les transferts de chaleur dans l'épaisseur de la plaque. La résolution du problème direct en géométrie 2D a été effectuée en utilisant deux approches numériques : les différences finies et les éléments finis. Pour évaluer l'erreur liée à la résolution du problème direct, une analyse des erreurs relatives a été réalisée. Enfin, nous avons proposé un état de l'art ainsi que des rappels concernant l'identification de défaillances dans le contexte des systèmes décrits par des EDPs.

Le chapitre suivant propose une méthode originale d'identification des instants de défaillance dans un système décrit par une EDP parabolique non linéaire. Cette méthode sera développée dans le chapitre suivant et sera basée sur une approche de régularisation itérative pour résoudre le problème inverse d'identification des pannes de sources de chaleur dans le système étudié. Cette approche constitue une contribution novatrice à la littérature existante sur l'identification de défaillances dans les systèmes décrits par des EDPs paraboliques non linéaires, et offre de nouvelles perspectives de recherche dans ce domaine passionnant.

## Références bibliographiques

- [1] Abou Khachfe, R. [2000], Résolution numérique de problèmes inverses 2D non linéaires de conduction de la chaleur par la méthode des éléments finis et l’algorithme du gradient conjugué : Validation expérimentale, PhD thesis.
- [2] Alifanov, O. and Artyukhin, E. A. [1975], ‘Regularized numerical solution of nonlinear inverse heat-conduction problem’, *Journal of Engineering Physics* **29**, 934–938.
- [3] Alifanov, O. M. [1994], Iterative regularization of inverse problems, in ‘Inverse Heat Transfer Problems’, Springer, pp. 227–328.
- [4] Allen, S. M. and Cahn, J. W. [1979], ‘A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening’, *Acta metallurgica* **27**(6), 1085–1095.
- [5] Arfken, G. B. and Weber, H. J. [1999], ‘Mathematical methods for physicists’.
- [6] Baniamerian, A. and Khorasani, K. [2012], Fault detection and isolation of dissipative parabolic pdes : Finite-dimensional geometric approach, in ‘2012 American Control Conference (ACC)’, IEEE, pp. 5894–5899.
- [7] Basseville, M. [1988], ‘Detecting changes in signals and systems—a survey’, *Automatica* **24**(3), 309–326.
- [8] Beck, J. V. and Woodbury, K. A. [1998], ‘Inverse problems and parameter estimation : integration of measurements and analysis’, *Measurement Science and Technology* **9**(6), 839.
- [9] Beddiaf, S. [2013], Identification paramétrique de systèmes d’EDP paraboliques non linéaires en géométrie 3D par une méthode de régularisation itérative, PhD thesis, Thesis of the University of Angers, LARIS.
- [10] Black, F. and Scholes, M. [1973], ‘The pricing of options and corporate liabilities’, *Journal of political economy* **81**(3), 637–654.
- [11] Cai, J., Ferdowsi, H. and Sarangapani, J. [2016], ‘Model-based fault detection, estimation, and prediction for a class of linear distributed parameter systems’, *Automatica* **66**, 122–131.
- [12] Chow, E. and Willsky, A. [1984], ‘Analytical redundancy and the design of robust failure detection systems’, *IEEE Transactions on automatic control* **29**(7), 603–614.
- [13] Courant, R., Friedrichs, K. and Lewy, H. [1967], ‘On the partial difference equations of mathematical physics’, *IBM journal of Research and Development* **11**(2), 215–234.

- [14] Dautray, R. and Lions, J.-L. [2012], *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology : volume 1 physical origins and classical methods*, Springer Science & Business Media.
- [15] Demetriou, M. A. [2002], ‘A model-based fault detection and diagnosis scheme for distributed parameter systems : A learning systems approach’, *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* **7**, 43–67.
- [16] Dey, S., Perez, H. E. and Moura, S. J. [2019], ‘Robust fault detection of a class of uncertain linear parabolic pdes’, *Automatica* **107**, 502–510.
- [17] Evans, L. C. [2010], *Partial differential equations*, Vol. 19, American Mathematical Soc.
- [18] Feng, Y., Wang, Y., Wang, J.-W. and Li, H.-X. [2021], ‘Abnormal spatio-temporal source estimation for a linear unstable parabolic distributed parameter system : An adaptive pde observer perspective’, *Journal of the Franklin Institute* **358**(2), 1656–1672.
- [19] Feng, Y., Wang, Y., Wang, J.-W. and Li, H.-X. [2022], ‘Backstepping-based distributed abnormality localization for linear parabolic distributed parameter systems’, *Automatica* **135**, 109930.
- [20] Ferdowsi, H., Cai, J. and Jagannathan, S. [2023], ‘Filter-based fault detection and isolation in distributed parameter systems modeled by parabolic partial differential equations’, *IEEE Access* .
- [21] Ferdowsi, H. and Jagannathan, S. [2014], Fault diagnosis of a class of distributed parameter systems modeled by parabolic partial differential equations, in ‘2014 american control conference’, IEEE, pp. 5434–5439.
- [22] Fourier, J. B. J., Darboux, G. et al. [1822], *Théorie analytique de la chaleur*, Vol. 504, Didot Paris.
- [23] Friedman, A. [2008], *Partial differential equations of parabolic type*, Courier Dover Publications.
- [24] Gejadze, I. and Jarny, Y. [2002], ‘An inverse heat transfer problem for restoring the temperature field in a polymer melt flow through a narrow channel’, *International Journal of Thermal Sciences* **41**(6), 528–535.
- [25] Ghantasala, S. and El-Farra, N. H. [2009], ‘Robust actuator fault isolation and management in constrained uncertain parabolic pde systems’, *Automatica* **45**(10), 2368–2373.
- [26] Hadamard, J. [1932], ‘Le problème de cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques’, *Paris* **11**, 243–264.

- [27] Hansen, P. C. [1990], ‘Truncated singular value decomposition solutions to discrete ill-posed problems with ill-determined numerical rank’, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* **11**(3), 503–518.
- [28] Isakov, V. [1998], *Inverse problems for partial differential equations / Victor Isakov.*, Applied mathematical sciences ; 127, Springer, New York.
- [29] Isakov, V. [2017], *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer International Publishing.  
**URL:** <https://books.google.fr/books?id=lj02DgAAQBAJ>
- [30] Isermann, R. [1984], ‘Process fault detection based on modeling and estimation methods—a survey’, *automatica* **20**(4), 387–404.
- [31] Isermann, R. [2005], *Fault-diagnosis systems : an introduction from fault detection to fault tolerance*, Springer Science & Business Media.
- [32] Isermann, R. and Balle, P. [1997], ‘Trends in the application of model-based fault detection and diagnosis of technical processes’, *Control engineering practice* **5**(5), 709–719.
- [33] Jarny, Y., Ozisik, M. and Bardon, J. [1991], ‘A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction’, *International journal of heat and mass transfer* **34**(11), 2911–2919.
- [34] Kalman, R. E. [1960], ‘A new approach to linear filtering and prediction problems’.
- [35] Keller, J. B. [1976], ‘The american mathematical monthly’, *Inverse Problems* **83**, 107–118.
- [36] Kern, M. [2002], ‘Problèmes inverses : aspects numériques’.
- [37] Lei, Y., Li, J. and Zhao, A. [2022], ‘Spatiotemporal fault detection, estimation and control for nonlinear reaction-diffusion equations’, *Applied Mathematics and Computation* **418**, 126859.
- [38] LeVeque, R. J. [2007], *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations : steady-state and time-dependent problems*, SIAM.
- [39] Liu, W. and Wu, C. [2013], ‘A predictor–corrector iterated tikhonov regularization for linear ill-posed inverse problems’, *Applied Mathematics and Computation* **221**, 802–818.
- [40] Maillet, D. and Petit, D. [2008], ‘Techniques inverses et estimations de paramètres’, *Techniques de l’Ingénieur, TI AF4515 and AF4516* .
- [41] Mansouri, M., Harkat, M.-F., Nounou, H. and Nounou, M. N. [2020], *Data-driven and model-based methods for fault detection and diagnosis*, Elsevier.

- [42] Navier, C. [1823], ‘Mémoire sur les lois du mouvement des fluides’, *Mémoires de l’Académie Royale des Sciences de l’Institut de France* **6**(1823), 389–440.
- [43] Omdahl, T. P. [1988], *Reliability, Availability, and Maintainability : RAM : Dictionary*, American Society for Quality Control.
- [44] Özişik, M. N. and Orlande, H. R. [2021], *Inverse heat transfer : fundamentals and applications*, CRC press.
- [45] Özişik, M. N., Orlande, H. R., Colaco, M. J. and Cotta, R. M. [2017], *Finite difference methods in heat transfer*, CRC press.
- [46] Pepper, D. W. and Heinrich, J. C. [2017], *The Finite Element Method : Basic Concepts and Applications with MATLAB®, MAPLE, and COMSOL*, CRC press.
- [47] Puig, V. and Simani, S. [2021], *Diagnosis and Fault-tolerant Control 1 : Data-driven and Model-based Fault Diagnosis Techniques*, John Wiley & Sons.
- [48] Sacadura, J.-F. [1978], ‘Initiation aux transferts thermiques’.
- [49] Scherzer, O., Engl, H. W. and Kunisch, K. [1993], ‘Optimal a posteriori parameter choice for tikhonov regularization for solving nonlinear ill-posed problems’, *SIAM journal on numerical analysis* **30**(6), 1796–1838.
- [50] Simani, S., Fantuzzi, C., Patton, R. J., Simani, S., Fantuzzi, C. and Patton, R. J. [2003], *Model-based fault diagnosis techniques*, Springer.
- [51] Sobolev, S. [1964], *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Dover Books on Mathematics, Pergamon Press [U.S.A. ed. distributed by Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass.].  
**URL:** <https://books.google.fr/books?id=hQGvUcT-h0cC>
- [52] Stokes, G. G. [1847], ‘On the theory of oscillatory waves’, *Trans. Cam. Philos. Soc.* **8**, 441–455.
- [53] Strikwerda, J. C. [2004], *Finite difference schemes and partial differential equations*, SIAM.
- [54] Thomas, J. W. [2013], *Numerical partial differential equations : finite difference methods*, Vol. 22, Springer Science & Business Media.
- [55] Tikhonov, A. and Samarskii, A. [2013], *Equations of Mathematical Physics*, Dover Books on Physics, Dover Publications.  
**URL:** <https://books.google.fr/books?id=PTmoAAAAQBAJ>

- [56] Tikhonov, A., Tikhonov, A., Tikhonov, A., Arsenin, V., Arsenin, V., Arsenin, V., Arsenin, V. and John, F. [1977], *Solutions of Ill-posed Problems*, Halsted Press book, Winston.  
**URL:** <https://books.google.fr/books?id=ECrvAAAAMAAJ>
- [57] Van Loan, C. F. and Golub, G. [1996], ‘Matrix computations (johns hopkins studies in mathematical sciences)’, *Matrix Computations* .
- [58] Walter, É. and Pronzato, L. [1994], *Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales*, Masson.
- [59] Webster, A. and Plimpton, S. [2016], *Partial Differential Equations of Mathematical Physics : Second Edition*, Dover Books on Mathematics, Dover Publications.  
**URL:** <https://books.google.fr/books?id=9sDiCwAAQBAJ>
- [60] Willsky, A. S. [1976], ‘A survey of design methods for failure detection in dynamic systems’, *Automatica* **12**(6), 601–611.
- [61] Zwingelstein, G. [2020a], ‘Méthodes de diagnostic et de pronostic de défaillance basées sur les modèles physiques’, *Techniques de l’ingénieur Maintenance base documentaire : TIP095WEB*.(ref. article : mt9133). fre.  
**URL:** <https://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/genie-industriel-th6/methodes-et-management-de-la-maintenance-42647210/methodes-de-diagnostic-et-de-pronostic-de-defaillance-basees-sur-les-modeles-physiques-mt9133/>
- [62] Zwingelstein, G. [2020b], ‘Méthodes de diagnostic et de pronostic de défaillances basées sur les données – état de l’art’, *Techniques de l’ingénieur Maintenance base documentaire : TIP095WEB*.(ref. article : mt9134). fre.  
**URL:** <https://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/genie-industriel-th6/methodes-et-management-de-la-maintenance-42647210/methodes-de-diagnostic-et-de-pronostic-de-defaillances-basees-sur-les-donnees-etat-de-l-art-mt9134/>

# SYSTÈME NON LINÉAIRE – ANALYSE HORS LIGNE DE DÉFAILLANCES

---

## 2.1 Introduction

Dans le contexte des systèmes physiques complexes, de nombreux phénomènes sont décrits par des modèles de connaissance basés sur des équations aux dérivées partielles. Dans le cadre du génie thermique par exemple, les échanges de chaleur sont décrits par la loi de Fourier qui conduit à un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) paraboliques éventuellement non linéaires. Le développement d'outils prédictifs de simulation numérique est un enjeu important. Il peut permettre l'optimisation des procédés, l'identification de paramètres clés ou encore la définition de stratégies optimales de contrôle.

Dans le contexte de l'identification de paramètres thermiques inconnus, les systèmes sont généralement décrits par des équations aux dérivées partielles (EDP) et plusieurs études peuvent être citées ([Alifanov, 1994](#)) et ([Isakov, 1998](#)). De nombreuses références liées à l'estimation de paramètres à partir de problèmes inverses sont également présentées dans ([Huang and Özişik, 1990](#)), ([Xu et al., 2019](#)), ([Zeng et al., 2019](#)), ([Sassine et al., 2019](#)), ([Wang et al., 2020](#)), ([Samadi et al., 2021](#)), ([Fries et al., 2022](#)), ([Jiang et al., 2022](#)). Du point de vue expérimental, de récentes applications en génie thermique sont proposées dans ([Hussain et al., 2019](#)), ([Liu et al., 2019](#)), ([Huang et al., 2019](#)), ([Feng et al., 2020](#)), ([Lai et al., 2021](#)), ([He et al., 2021](#)), ([Duda and Konieczny, 2022](#)).

La plupart des modèles physiques utilisés dans l'ingénierie pratique ont des caractéristiques d'évolution spatio-temporelle qui rendent les équations différentielles ordinaires (ODE) incapables de décrire leurs comportements dynamiques avec précision. Au cours des dernières décennies, le développement de méthodes de détection de fautes (FD) basées sur des modèles a reçu de plus en plus d'attention. Les défauts peuvent être considérés comme des dysfonctionnements de l'installation, des capteurs ou des actionneurs. Si ces systèmes présentent des défauts en cours de fonctionnement, et que ces défauts ne sont pas détectés et éliminés à temps, le fonctionnement global de l'ensemble du système sera sérieusement affecté, ce qui peut conduire à une paralysie du système, voire à de graves pertes humaines et matérielles.

Dans le cadre de l'identification paramétrique, il est naturel de considérer que la recherche des défaillances dans un système dont le comportement en mode "sans défaut" est modélisé par un système d'EDP, puisse être traitée comme un problème inverse. Ainsi, dans le cadre thermique, la résolution d'un problème inverse de conduction de la chaleur (PICC) conduisant à une minimisation de l'erreur de sortie à partir d'observations du système défaillant peut permettre d'identifier les instants de panne (voir l'illustration Figure 2.1 qui sera détaillée ultérieurement).

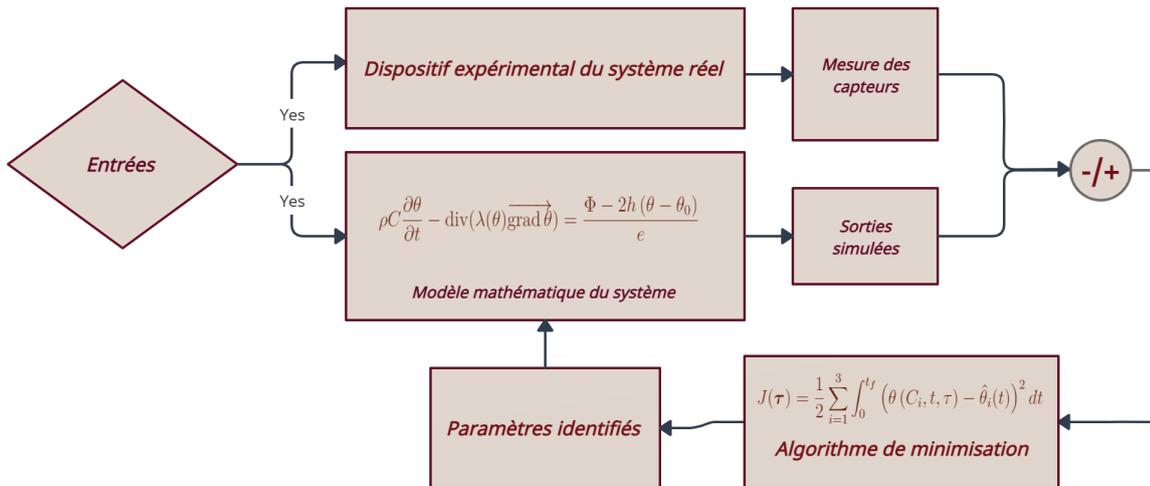


FIGURE 2.1 – Illustration de la méthode d'identification paramétrique par minimisation de l'erreur de sortie

Plusieurs difficultés doivent être mentionnées. Tout d'abord, les EDPs non linéaires sont difficiles à traiter mais demeurent indispensables pour des situations physiques réalistes. Ensuite, le caractère mal posé des PICC les rend particulièrement sensibles aux erreurs de mesure. Enfin les défaillances traitées ci-après sont de type "tout ou rien" et de telles commutations discontinues associées au phénomène de transport de la chaleur place le cadre de l'étude proche de celui des systèmes hybrides avec retard. Afin de résoudre ce problème et réussir à identifier les défaillances de une ou plusieurs sources thermiques à partir d'observations bruitées, la méthode de régularisation itérative du gradient conjugué a été développée et mise en œuvre.

Dans la prochaine section, la formulation du problème direct au sein d'une géométrie 2D est détaillée. Une attention particulière est portée à la définition des instants de défaillance et de redémarrage de sources chauffantes. Le problème inverse est ensuite présenté. Sa résolution nécessite la détermination itérative de la température, du gradient du critère et de la profondeur de descente. Diverses configurations sont étudiées et l'effet du bruit de mesure est particulièrement analysé. Enfin un bilan et quelques perspectives clôturent ce chapitre.

## 2.2 Description du problème direct

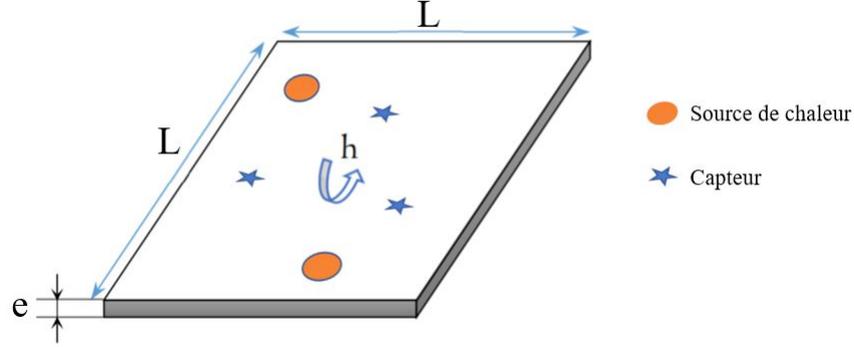


FIGURE 2.2 – Présentation du système étudié

Les notations suivantes sont considérées. Le domaine géométrique est  $\Omega \subset \mathfrak{R}^2$  et chaque point de l'espace a pour coordonnées  $(x, y) \in \Omega$ . Dans ce qui suit  $\Omega = [-0.5, 0.5]^2$  est une plaque de 1 m de côté dont l'épaisseur  $e$  est négligeable (Figure 2.2). La frontière de  $\Omega$  est notée  $\Gamma$ . La variable de temps est  $t \in T = [0, t_f]$ . La température en tout point de l'espace est notée  $\theta(x, y; t)$ . L'évolution au cours du temps de la température dans le domaine  $\Omega$  est décrite par l'équation suivante (Vergnaud et al., 2016) :

$$\forall (x, y, t) \in \Omega \times T$$

$$\rho C \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial t} - \operatorname{div} \left( \lambda(\theta(x, y, t)) \overrightarrow{\operatorname{grad} \theta(x, y, t)} \right) = \frac{\Phi(x, y, t) - 2h(\theta(x, y, t) - \theta_0)}{e} \quad (2.1)$$

où  $\rho C$  est la chaleur volumique (produit de la chaleur spécifique en  $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  et de la masse volumique en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ),  $\lambda$  est la conductivité thermique (en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ),  $\Phi(x, y, t)$  le flux chauffant (en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ),  $h$  le coefficient d'échange convectif en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$  et  $\theta_0(x, y)$  la température ambiante (en K). Les conditions aux bords sont de type Neumann homogène et correspondent à des échanges adiabatiques (situation réaliste compte tenu de l'épaisseur  $e$  extrêmement fine de la plaque considérée) :

$$\forall (x, y, t) \in \Omega \times T \quad - \lambda(\theta(x, y, t)) \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial \vec{n}} = 0. \quad (2.2)$$

L'opérateur  $\frac{\partial}{\partial n}$  est la dérivée à la frontière  $\Gamma$  et dirigée vers l'extérieur. L'équation suivante

décrit l'état initial de la température dans le domaine  $\Omega$  :

$$\forall (x, y) \in \Omega \quad \theta(x, y, 0) = \theta(x, y). \quad (2.3)$$

Le problème direct se formule comme suit : connaissant l'ensemble des paramètres  $\{e, t_f, \rho C, \lambda, \Phi, h, \theta_0\}$ , trouver  $\theta(x, y, t)$  solution de (2.1-2.3). Le problème direct peut être résolu à l'aide de la méthode des éléments finis (Pepper and Heinrich, 1992), (Zimmerman, 2006), (Baker, 2012). Dans ce qui suit, le code Comsol interfacé avec Matlab a été mis en œuvre.

Le flux chauffant  $\Phi(x, y, t)$  est fourni par plusieurs sources de chauffe :

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{i=1}^{n_{\text{chauff}}} \Phi_i(x, y, t), \quad (2.4)$$

tel que, chaque source chauffante est définie comme suit :

$$\Phi_i(x, y, t) = f_i(x, y)g_i(t)\chi_i(t), \quad (2.5)$$

où la fonction  $f_i(x, y)$  et  $g_i(t)$  sont définis dans la section 1.3.1 du chapitre 1. La Figure 2.3 montre la position des sources et des capteurs.

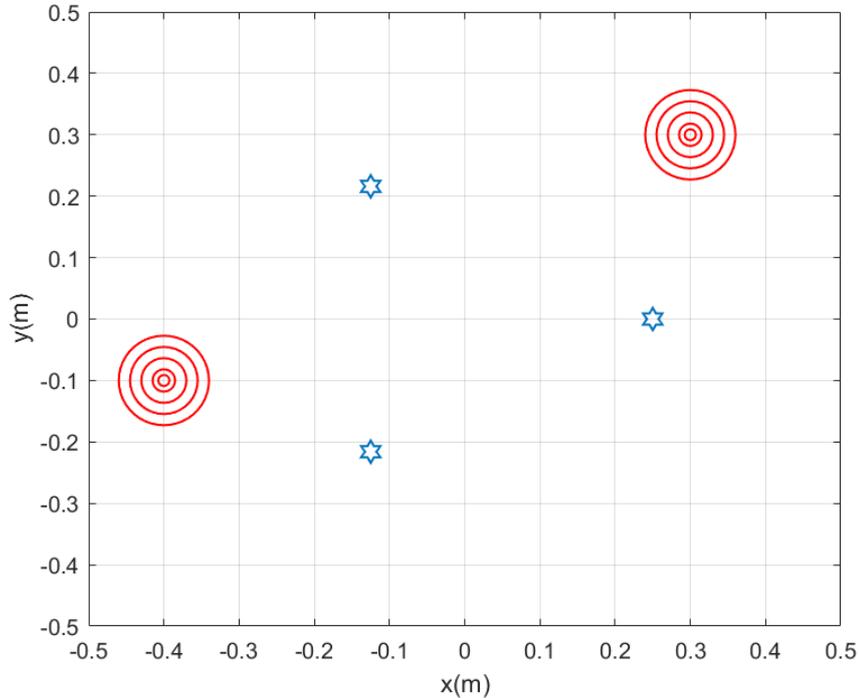


FIGURE 2.3 – Position des capteurs en étoiles et des sources en cercles

La fonction  $\chi_i(t)$  décrit les éventuelles défaillances de la source chauffante  $i$

$$\chi_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{sans défaillance} \\ 0 & \text{en cas de défaillance} \end{cases} \quad (2.6)$$

La fonction  $\chi_i(t)$  est une fonction discontinue constituée de paliers à 1 ou 0 . Un palier à 1 est suivi d'un palier à 0 en cas de défaillance. Un palier à 0 est suivi d'un palier à 1 en cas de redémarrage en fonctionnement normal de la source  $i$ . On suppose que les sources chauffantes fonctionnent à  $t = 0$  et à  $t = t_f$  :

$$\chi_i(0) = \chi_i(t_f) = 1, \quad \forall i = 1, \dots, n_{\text{chauff}},$$

cette hypothèse implique qu'il y a autant d'extinction (modes défaillants) que d'allumage pour chaque source chauffante.

Considérons que la source  $i$  a connu  $n_i$  défaillances alors la fonction  $\chi_i$  est décrite de manière continue par la fonction suivante :

$$\chi_i(t) = 1 - \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n_i} \left( \text{atan} \left( \frac{t - t_{\text{nok},j}^i}{\eta} \right) - \text{atan} \left( \frac{t - t_{\text{ok},j}^i}{\eta} \right) \right). \quad (2.7)$$

Les instants  $t_{\text{nok},j}^i$  correspondent aux moments où la source  $i$  tombe en panne ( $\chi_i(t)$  passe de 1 à 0 : front descendant) alors que  $t_{\text{ok},j}^i$  sont les instants où  $\chi_i(t)$  passe de 0 à 1 (front montant). Le paramètre  $\eta$  est un paramètre de régularisation dont l'effet est représenté sur la Figure 2.4.

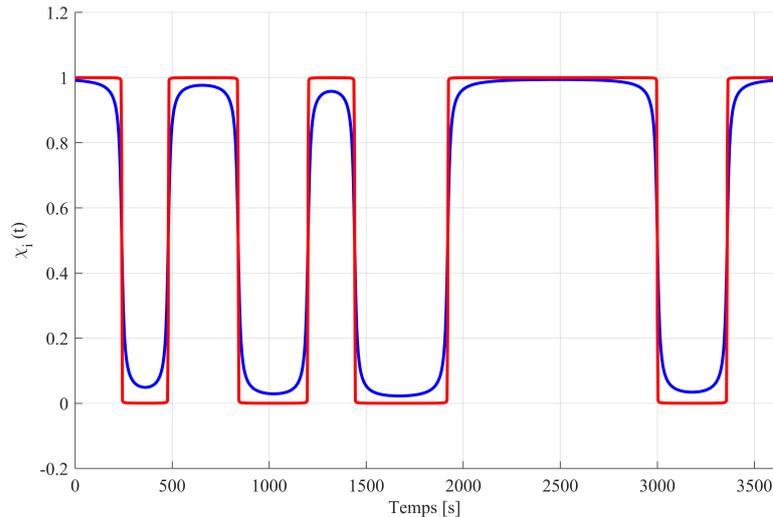


FIGURE 2.4 – Exemples de défaillances  $\chi_i(t)$  ;  
en bleu  $\eta = 10$ , en rouge  $\eta = 0.1$

Plus  $\eta$  est petit, plus le caractère discontinu de la défaillance tout-ou-rien est correctement modélisé. Sur la Figure 2.4, les défaillances ont eu lieu aux instants 240s, 840s, 1440s et 3360s. Elles ont duré 240s, 360s, 480s et 360s.

Dans ce qui suit un exemple de configuration est montré considérant les paramètres suivants :

- plaque en aluminium :  $\rho C = 2.421 \times 10^6 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
- $\lambda(\theta) = 178 - 0.08\theta \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- épaisseur :  $e = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$
- Coefficient de transfert convectif :  $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
- température initiale :  $\theta_0(x, y) = 293\text{K}$
- temps final :  $t_f = 3600 \text{ s}$
- deux sources chauffantes centrées en  $(x_1, y_1) = (0.3, 0.3)$  et  $(x_2, y_2) = (-0.4, -0.1)$ .
- trois capteurs qui mesurent la température toutes les neuf secondes aux points  $C_1(0.25, 0)$ ,  $C_2(-0.125, 0.216)$  et  $C_3(-0.125, -0.216)$

Les positions des capteurs et des sources sont montrées sur la Figure 2.3. Les flux chauffants des sources 1 et 2 sont montrés sur la Figure 1.2.

L'ensemble des paramètres  $\{e, t_f, \rho C, \lambda, \Phi, h, \theta_0\}$  étant connu il est possible de résoudre numériquement le système d'EDP non linéaire (2.1-2.3) pour évaluer  $\theta(x, y; t)$  en chacun des trois capteurs  $C_1, C_2, C_3$ .

On suppose qu'une défaillance de la source 1 a eu lieu à  $t = 1500\text{s}$ . Les évolutions des températures aux trois capteurs  $C_1, C_2, C_3$  sont montrées sur la Figure 2.5 en supposant que les observations sont entachées d'un bruit gaussien de moyenne nulle et d'écart type  $\sigma = 1^\circ\text{C}$ .

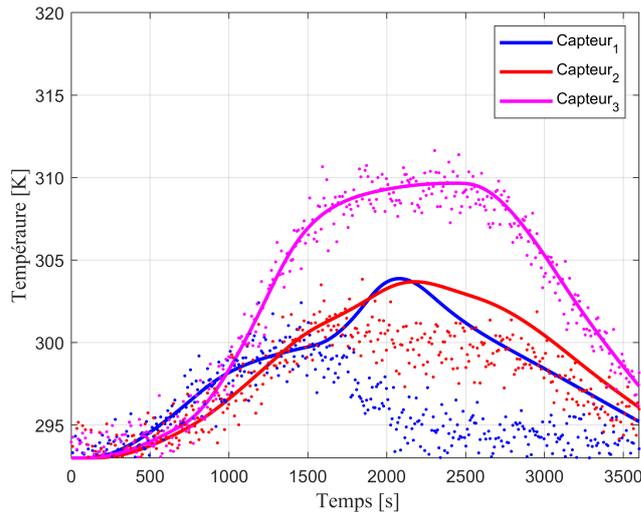
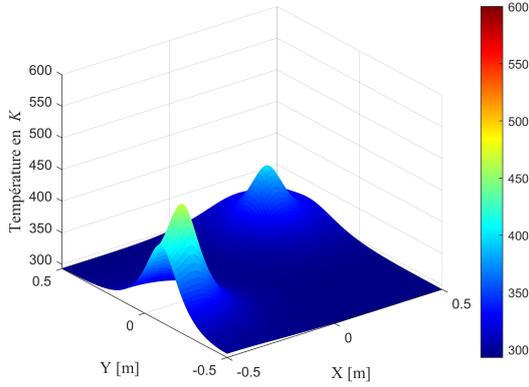
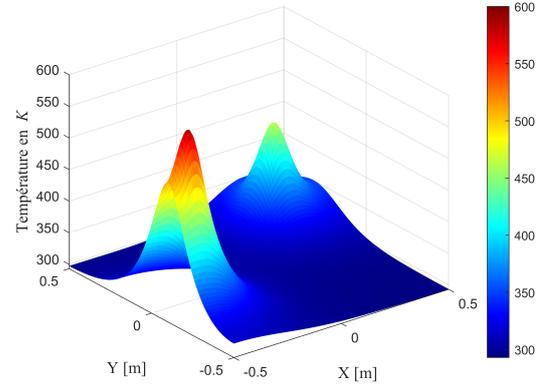


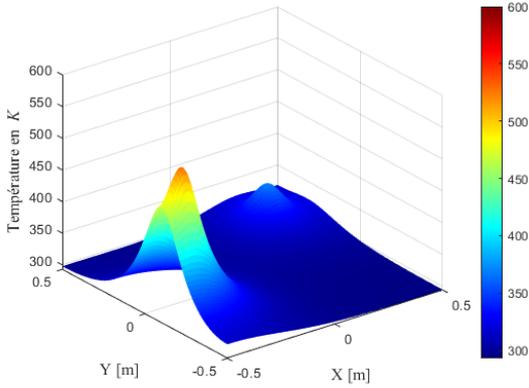
FIGURE 2.5 – Températures : sans défaillance et non bruitées (en continu) et avec défaillance et bruits (points),  $\eta = 0.1$



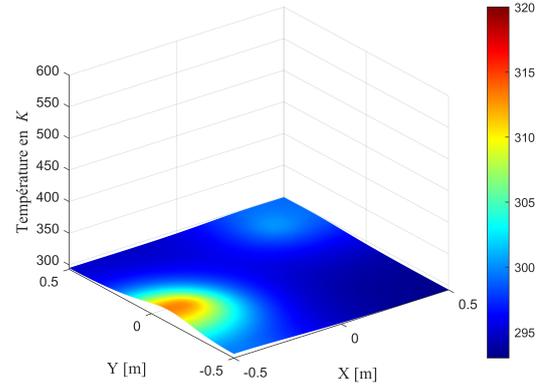
(a) Distribution spatiale de la température à  $t=1000$  s



(b) Distribution spatiale de la température à  $t=2000$  s



(c) Distribution spatiale de la température à  $t=2800$  s



(d) Distribution spatiale de la température à  $t=3600$  s

FIGURE 2.6 – L'évolution du champ de température sur la plaque considérant les densités de flux connues.

L'objectif est de déterminer à partir des observations bruitées aux trois capteurs (Figure 2.5) l'instant où la source 1 est tombée en panne. Dans ce qui suit, une formulation du problème inverse est détaillée. Une identification des instants de commutation est étudiée à partir des observations bruitées des températures mesurées par 3 capteurs fixes.

## 2.3 Identification des instants de défaillance : cas non linéaire

### 2.3.1 Le problème inverse

Pour chaque source  $i = 1, \dots, n_{\text{chauff}}$  il s'agit d'identifier les instants de commutation  $t_{nok,j}^i$  et  $t_{ok,j}^i$  (pour  $j = 1, \dots, n_i$ ) qui interviennent dans la définition des fonctions  $\chi_i(t)$ , (voir équation

(2.7)). Dans ce qui suit, on suppose que le nombre de défaillances  $n_i$  pour chaque source est connu. Dans le cas contraire, il s'agit d'une difficulté supplémentaire mais qui sera aisément résolu par une adaptation de la méthode présentée ci après. Le vecteur de paramètres inconnus est noté :

$$\boldsymbol{\tau} = \left[ \boldsymbol{\tau}^1, \dots, \boldsymbol{\tau}^{n_{\text{chauff}}} \right],$$

avec  $\boldsymbol{\tau}^i = \left[ t_{\text{nok},1}^i, t_{\text{ok},1}^i, \dots, t_{\text{nok},n_i}^i, t_{\text{ok},n_i}^i \right]$ . (2.8)

Le nombre de paramètres inconnus est  $N = \sum_{i=1}^{n_{\text{chauff}}} \left( \sum_{j=1}^{n_i} 2n_j \right) : \boldsymbol{\tau} = \left( \tau_j^i \right)_{\substack{i=1, \dots, n_{\text{chauff}} \\ j=1, \dots, 2n_i}}$ . Les composantes  $j$  impaires de  $\boldsymbol{\tau}$  correspondent aux défaillances alors que les paires correspondent aux redémarrages. Sur l'exemple précédent, deux sources sont considérées ( $n_{\text{chauff}} = 2$ ) avec 4 défaillances pour chacune ( $n_1 = n_2 = 4$ ). Il est ainsi nécessaire d'identifier 16 commutations (dont 8 correspondent à des défaillances : 4 pour chaque source).

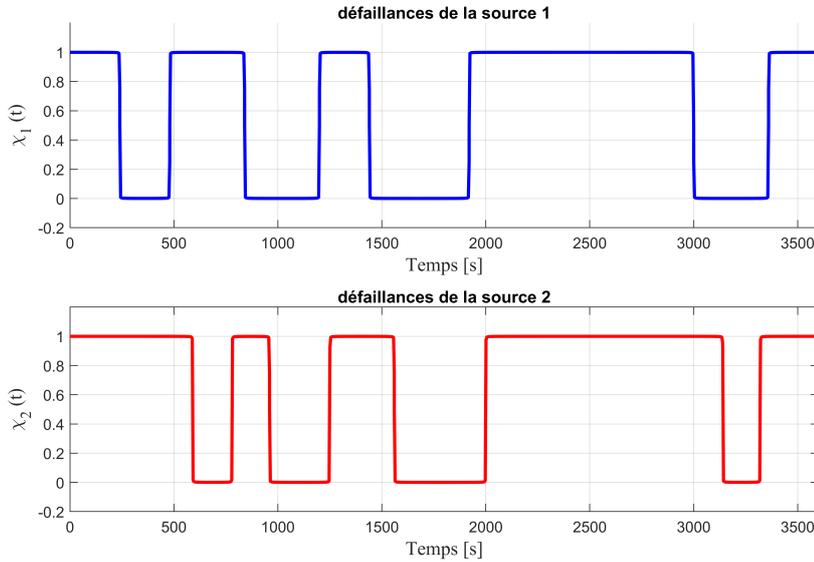


FIGURE 2.7 – Défaillances des sources ( $\eta = 0.1$ )

Afin de réaliser cette identification paramétrique, la méthode de minimisation par erreur de sortie est mise en œuvre. Elle consiste à faire varier les paramètres inconnus  $\boldsymbol{\tau}$  jusqu'à ce que les données prédites par le modèle mathématique soit en adéquation avec les observations. Il est

ainsi nécessaire d'introduire un critère quadratique :

$$J(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{t_f} \left( \theta(C_i, t, \boldsymbol{\tau}) - \hat{\theta}_i(t) \right)^2 dt, \quad (2.9)$$

où  $\theta(C_i, t)$  est la température simulée au capteur  $C_i$  et  $\hat{\theta}_i(t)$  est la température mesurée au capteur  $C_i$  (voir courbes continues de la Figure 2.5).

Ce problème inverse de conduction de la chaleur (PICC) s'écrit : connaissant l'ensemble des paramètres  $\{e, t_f, \rho C, \lambda, \Phi, h, \theta_0\}$ , trouver  $\boldsymbol{\tau}$  tel que le critère (2.9) soit minimum, sous la contrainte :  $\theta(x, y, t)$  est solution du problème direct (2.1 – 2.3).

Les PICCs sont des problèmes mal posés du fait que de faibles bruits de mesure peuvent entraîner des erreurs importantes sur les paramètres estimés. Il convient donc de mettre en œuvre une méthode adaptée comme la méthode de régularisation itérative du gradient conjugué (Jarny et al., 1991). Cette méthode s'avère particulièrement pertinente lorsque le nombre de paramètres inconnus est grand ou encore lorsque le modèle ou les mesures sont incertains (bruités). Finalement la méthode du gradient conjugué consiste à calculer à chaque itération  $k$  le gradient de la fonctionnelle  $\nabla J(\boldsymbol{\tau}^k)$ , ce qui permet par la suite de calculer la direction de descente notée  $\vec{d}^k$ , la profondeur de descente  $\gamma^k$  et la nouvelle valeur de l'itéré  $\boldsymbol{\tau}^{k+1}$ .

L'ensemble de ces démarches nécessite la résolution itérative de trois problèmes successifs (considérés comme bien posés au sens d'Hadamard (Hadamard, 1932)).

1. Résoudre le problème direct pour calculer le champ de température prédit par le modèle mathématique et la valeur du critère à minimiser  $J(\boldsymbol{\tau}^k)$  à l'itération  $k$ .
2. Résoudre le problème adjoint associé au paramètre inconnu  $\phi^k$  afin de calculer l'expression du gradient  $\nabla J(\boldsymbol{\tau})$  et la prochaine direction de descente  $\vec{d}^k$ .
3. Résoudre le problème de sensibilité dans la direction  $\vec{d}^k$  pour calculer la profondeur de descente  $\gamma^k$ , puis déduire la nouvelle valeur de l'itéré  $\boldsymbol{\tau}^{k+1}$ .

### 2.3.2 Problème de sensibilité

La résolution de ce problème permet de calculer la profondeur de descente  $\gamma$  et d'évaluer la sensibilité notée par  $\delta\theta(x, y, t)$  provoquée par une variation des éventuelles défaillances  $\delta\chi_i(t)$ .

Cette méthode consiste à formuler un nouvel ensemble d'équations aux dérivées partielles satisfait par les fonctions dites de sensibilité.

Soit  $\varepsilon\delta\boldsymbol{\tau}$  une variation de  $\boldsymbol{\tau}$ , tel que  $\boldsymbol{\tau}^+ = \boldsymbol{\tau} + \varepsilon\delta\boldsymbol{\tau}$ , donc la variation des éventuelles défaillances  $\chi_i$  par rapport au paramètre  $\boldsymbol{\tau}^i$  :

$$\frac{d\chi_i}{d\boldsymbol{\tau}^i} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\chi_i(\boldsymbol{\tau}^i + \varepsilon\delta\boldsymbol{\tau}^i) - \chi_i(\boldsymbol{\tau}^i)}{\varepsilon\delta\boldsymbol{\tau}^i},$$

donc lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, cette relation devient :

$$\chi_i^+(t) = \chi_i(t) + \varepsilon \delta \tau^i \frac{d\chi_i}{d\tau^i} = \chi_i(t) + \sum_{j=1}^{2n_i} \left( \varepsilon \delta \tau_j^i \frac{d\chi_i(t)}{d\tau_j^i} \right).$$

D'après la définition de  $\chi_i(t)$  :

$$\chi_i(t) = 1 - \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n_i} \left( \operatorname{atan} \left( \frac{t - t_{nok,j}^i}{\eta} \right) - \operatorname{atan} \left( \frac{t - t_{ok,j}^i}{\eta} \right) \right),$$

on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\chi_i(t)}{d\tau_j^i} &= -\frac{1}{\pi} \left[ \frac{(-1)^j}{\eta} \times \frac{1}{\left(\frac{t-t_{nok,j}^i}{\eta}\right)^2 + 1} + \frac{(-1)^j}{\eta} \times \frac{1}{\left(\frac{t-t_{ok,j}^i}{\eta}\right)^2 + 1} \right], \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[ \frac{(-1)^j}{\eta} \times \frac{\eta^2}{(t-t_{nok,j}^i)^2 + \eta^2} + \frac{(-1)^j}{\eta} \times \frac{\eta^2}{(t-t_{ok,j}^i)^2 + \eta^2} \right], \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[ \frac{\eta(-1)^j}{(t-t_{nok,j}^i)^2 + \eta^2} + \frac{\eta(-1)^j}{(t-t_{ok,j}^i)^2 + \eta^2} \right], \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\eta(-1)^{j+1}}{\eta^2 + (t-\tau_j^i)^2}. \end{aligned}$$

Finalement, on trouve :

$$\chi_i^+(t) = \chi_i(t) + \varepsilon \sum_{j=1}^{2n_i} \left( \delta \tau_j^i \frac{1}{\pi} \frac{\eta(-1)^{j+1}}{\eta^2 + (t-\tau_j^i)^2} \right).$$

La température obtenue lors de la variation du  $\chi_i$  est notée par  $\theta^+(x, y; t) = \theta(x, y; \chi_i + \varepsilon \delta \chi_i)$ , et satisfait le système suivant en posant  $(\cdot) = (x, y; t)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall(\cdot) \in \Omega \times T \\ \rho C \frac{\partial \theta^+(\cdot)}{\partial t} - \operatorname{div} \left( \lambda(\theta^+(\cdot)) \overrightarrow{\operatorname{grad} \theta^+(\cdot)} \right) = \frac{\left( \sum_{i=1}^{n_{\text{chauff}}} f_i g_i \chi_i^+ \right) - 2h(\theta^+(\cdot) - \theta_0)}{e} \end{array} \right. \quad (2.10a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall(\cdot) \in \Gamma \times T \\ -\lambda(\theta^+(\cdot)) \frac{\partial \theta^+(\cdot)}{\partial \vec{n}} = 0 \end{array} \right. \quad (2.10b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall(x, y) \in \Omega \\ \theta^+(x, y, 0) = \theta_0(x, y) \end{array} \right. \quad (2.10c)$$

Par comparaison avec l'équation du problème direct non varié, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (\cdot) \in \Omega \times T \\ \rho C \frac{\partial(\theta^+(\cdot) - \theta(\cdot))}{\partial t} - \operatorname{div} \left( \lambda(\theta^+(\cdot)) \overrightarrow{\operatorname{grad} \theta^+(\cdot)} - \lambda(\theta(\cdot)) \overrightarrow{\operatorname{grad} \theta(\cdot)} \right) = \\ \quad \frac{\left( \sum_{i=1}^{n_{\text{chauff}}} f_i g_i (\chi_i^+ - \chi_i) \right) - 2h(\theta^+(\cdot) - \theta)}{e} \end{array} \right. \quad (2.11a)$$

$$\forall (\cdot) \in \Gamma \times T \quad -\lambda(\theta^+(\cdot)) \frac{\partial \theta^+(\cdot)}{\partial \vec{n}} + \lambda(\theta(\cdot)) \frac{\partial \theta(\cdot)}{\partial \vec{n}} = 0 \quad (2.11b)$$

$$\forall (x, y) \in \Omega \quad \theta^+(x, y, 0) - \theta(x, y, 0) = 0 \quad (2.11c)$$

De plus la variation de la conductivité par rapport à la température peut s'écrire :

$$\frac{d\lambda}{d\theta} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda(\theta(x, y, t) + \varepsilon \delta\theta(x, y, t)) - \lambda(\theta(x, y, t))}{\varepsilon \delta\theta(x, y, t)},$$

ainsi lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, cette relation devient :

$$\lambda(\theta^+(x, y, t)) = \lambda(\theta(x, y, t)) + \varepsilon \delta\theta(x, y, t) \frac{d\lambda}{d\theta}$$

Considérons le terme de divergence de l'équation volumique (2.11a), on a alors :

$$\operatorname{div} \left( \lambda(\theta^+(\cdot)) \overrightarrow{\operatorname{grad}(\theta^+(\cdot))} \right) = \operatorname{div} \left[ \left( \lambda(\theta(\cdot)) + \varepsilon \delta\theta(\cdot) \frac{d\lambda}{d\theta} \right) \left( \overrightarrow{\operatorname{grad}(\theta(\cdot))} + \overrightarrow{\operatorname{grad}(\delta\theta(\cdot))} \right) \right],$$

comme  $\varepsilon$  tend vers 0, les termes  $\varepsilon^2$  peuvent être négligés :

$$\operatorname{div} \left( \lambda(\theta^+(\cdot)) \overrightarrow{\operatorname{grad}(\theta^+(\cdot))} \right) = \operatorname{div} \left[ \lambda(\theta(\cdot)) \overrightarrow{\operatorname{grad}(\theta(\cdot))} + \varepsilon \lambda(\theta(\cdot)) \overrightarrow{\operatorname{grad}(\delta\theta(\cdot))} + \varepsilon \delta\theta(\cdot) \frac{d\lambda}{d\theta} \overrightarrow{\operatorname{grad}(\theta(\cdot))} \right].$$

En comparaison avec le terme non varié du problème direct :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left( \lambda(\theta^+(\cdot)) \overrightarrow{\operatorname{grad}(\theta^+(\cdot))} - \lambda(\theta(\cdot)) \overrightarrow{\operatorname{grad}(\theta(\cdot))} \right) &= \operatorname{div} \left[ \lambda(\theta(\cdot)) \overrightarrow{\operatorname{grad}(\theta(\cdot))} + \varepsilon \lambda(\theta(\cdot)) \overrightarrow{\operatorname{grad}(\delta\theta(\cdot))} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \delta\theta(\cdot) \frac{d\lambda}{d\theta} \overrightarrow{\operatorname{grad}(\theta(\cdot))} - \lambda(\theta(\cdot)) \overrightarrow{\operatorname{grad}(\theta(\cdot))} \right], \\ &= \operatorname{div} \left[ \varepsilon \lambda(\theta(\cdot)) \overrightarrow{\operatorname{grad}(\delta\theta(\cdot))} + \varepsilon \delta\theta(\cdot) \frac{d\lambda}{d\theta} \overrightarrow{\operatorname{grad}(\theta(\cdot))} \right]. \end{aligned}$$



$$J(\theta; \vec{\tau}^k - \gamma \vec{d}^{k+1}) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \sum_{i=0}^3 \left( \theta(C_i, t; \vec{\tau}^k - \gamma \vec{d}^{k+1}) - \hat{\theta}(C_i, t) \right)^2 dt.$$

L'expression de  $\theta(C_i, t; \vec{\tau}^k - \gamma \vec{d}^{k+1})$  peut se mettre sous la forme :

$$\theta(C_i, t; \vec{\tau}^k - \gamma \vec{d}^{k+1}) \simeq \theta(C_i, t; \vec{\tau}^k) - \gamma \delta\theta(C_i, t; \vec{\tau}^k),$$

où  $\delta\theta(C_i, t; \vec{\tau}^k)$  est la variation de température induite par la variation du paramètre  $\tau$  dans la direction de descente  $\vec{d}^{k+1}$ . En remplaçant l'équation précédente dans l'expression de  $J(\theta; \vec{\tau}^k - \gamma \vec{d}^{k+1})$ , il vient :

$$\begin{aligned} J(\theta; \vec{\tau}^k - \gamma \vec{d}^{k+1}) &= \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \sum_{i=0}^3 \left( \theta(C_i, t; \vec{\tau}^k) - \gamma \delta\theta(C_i, t; \vec{\tau}^k) - \hat{\theta}(C_i, t) \right)^2 dt, \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \sum_{i=0}^3 \left\{ \left( \theta(C_i, t; \vec{\tau}^k) - \hat{\theta}(C_i, t) \right)^2 + \left( \gamma \delta\theta(C_i, t; \vec{\tau}^k) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2\gamma \delta\theta(C_i, t; \vec{\tau}^k) \left( \theta(C_i, t; \vec{\tau}^k) - \hat{\theta}(C_i, t) \right) \right\} dt. \end{aligned}$$

Comme mentionné précédemment, la valeur de profondeur de descente  $\gamma^{k+1}$  est obtenue en minimisant le critère :

$$\gamma^{k+1} = \underset{\gamma \in \mathbb{R}}{\text{Arg min}} J(\theta; \vec{\tau}^k - \gamma \vec{d}^{k+1}).$$

Il s'agit donc de résoudre :  $\frac{\partial J(\theta; \vec{\tau}^k - \gamma \vec{d}^{k+1})}{\partial \gamma} = 0$ , ce qui est équivalent à écrire :

$$\int_0^{t_f} \sum_{i=0}^3 \left\{ \left( \gamma \delta\theta(C_i, t; \vec{\tau}^k) \right)^2 - \delta\theta(C_i, t; \vec{\tau}^k) \left( \theta(C_i, t; \vec{\tau}^k) - \hat{\theta}(C_i, t) \right) \right\} dt = 0.$$

Ce qui implique que la profondeur de descente  $\gamma^{k+1}$  calculée à chaque itération  $k + 1$  doit être :

$$\gamma^{k+1} = \frac{\int_0^{t_f} \sum_{i=1}^3 \left( \theta(C_i, t; \vec{\tau}^k) - \hat{\theta}_i(t) \right) \delta\theta(C_i, t; \vec{\tau}^k) dt}{\int_0^{t_f} \sum_{i=1}^3 \left( \delta\theta(C_i, t; \vec{\tau}^k) \right)^2 dt}. \quad (2.14)$$

### 2.3.3 Problème adjoint

L'objectif de ce problème est de construire une fonction dite adjointe  $\psi(x, y, t)$  qui permet de déterminer l'expression du gradient  $\nabla J = \left( \frac{\partial J}{\partial \tau_j^i} \right)$ ,  $i = 1, \dots, n_{\text{chauff}}$ ,  $j = 1, \dots, 2n_i$ , de la fonctionnelle à minimiser  $J$ .

Soit  $\mathcal{L}(\theta, \boldsymbol{\tau}, \psi)$  le Lagrangien associé au problème direct de la conduction de chaleur, défini par :

$$\mathcal{L}(\theta(\cdot), \boldsymbol{\tau}, \psi) = J(\theta(\cdot), \boldsymbol{\tau}) + \iint_{\Omega \times T} \left( \rho c \frac{\partial \theta(\cdot)}{\partial t} - \text{div}(\lambda(\theta) \text{grad}(\theta(\cdot))) - \frac{\Phi(\cdot)}{e} + \frac{2h(\theta(\cdot) - \theta_0)}{e} \right) \psi dt d\Omega. \quad (2.15)$$

La variation du Lagrangien peut s'écrire telle que :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}(\theta, \boldsymbol{\tau}, \psi) &= \frac{\partial \mathcal{L}(\theta(x, y, t), \boldsymbol{\tau}, \psi)}{\partial \theta(x, y, t)} \delta \theta + \frac{\partial \mathcal{L}(\theta(x, y, t), \boldsymbol{\tau}, \psi)}{\partial \boldsymbol{\tau}} \delta \boldsymbol{\tau} + \frac{\partial \mathcal{L}(\theta(x, y, t), \boldsymbol{\tau}, \psi)}{\partial \psi} \delta \psi, \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}(\theta(x, y, t), \boldsymbol{\tau}, \psi)}{\partial \theta(x, y, t)} \delta \theta + \sum_{i=1}^{n_{\text{chauff}}} \left( \sum_{j=1}^{2n_i} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\theta(x, y, t), \boldsymbol{\tau}, \psi)}{\partial \tau_j^i} \delta \tau_j^i \right) \right) + \frac{\partial \mathcal{L}(\theta(x, y, t), \boldsymbol{\tau}, \psi)}{\partial \psi} \delta \psi. \end{aligned}$$

Si  $\psi(x, y, t)$  est fixé, alors  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi(x, y, t)} \delta \psi(x, y, t) = 0$  et donc :

$$\delta \mathcal{L}(\theta(x, y, t), \boldsymbol{\tau}, \psi) = \frac{\partial \mathcal{L}(\theta(x, y, t), \boldsymbol{\tau}, \psi)}{\partial \theta(x, y, t)} \delta \theta + \sum_{i=1}^{n_{\text{chauff}}} \left( \sum_{j=1}^{2n_i} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\theta(x, y, t), \boldsymbol{\tau}, \psi)}{\partial \tau_j^i} \delta \tau_j^i \right) \right). \quad (2.16)$$

Le multiplicateur de Lagrange  $\psi(x, y, t)$  est choisi pour que  $\frac{\partial \mathcal{L}(x, y, t)}{\partial \theta} \delta \theta(x, y, t) = 0$  soit satisfaite de plus si  $\theta(x, y, t)$  est solution du problème direct (2.1) alors :

$$\delta \mathcal{L}(\theta(x, y, t), \boldsymbol{\tau}, \psi) = \sum_{i=1}^{n_{\text{chauff}}} \left( \sum_{j=1}^{2n_i} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\theta(x, y, t), \boldsymbol{\tau}, \psi)}{\partial \tau_j^i} \delta \tau_j^i \right) \right).$$

La variation Lagrangienne peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, t)}{\partial \theta} \delta \theta &= \iint_{\Omega \times T} \left( \sum_{i=1}^3 (\theta(C_i, t) - \hat{\theta}_i(t)) \delta \theta D_i \right) dx dy dt + \rho c \iint_{\Omega \times T} \frac{\partial \delta \theta(\cdot)}{\partial t} \psi dx dy dt \\ &\quad + \iint_{\Omega \times T} \left( -\Delta(\lambda(\theta(\cdot)) \delta \theta(\cdot)) + \frac{2h}{e} \delta \theta(\cdot) \right) \psi dx dy dt. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Dans l'équation (2.17) le  $D_i$  représente la distribution de Dirac au capteur  $C_i$ . Ainsi, on peut décomposer (2.18) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}(\theta(x, y; t), \boldsymbol{\tau}, \psi) &= \iint_{\Omega \times T} \left( \sum_{i=1}^3 (\theta(C_i, t) - \hat{\theta}_i(t)) \delta \theta D_i \right) dx dy dt + \rho C \iint_{\Omega \times T} \frac{\partial \delta \theta(\cdot)}{\partial t} \psi dx dy dt, \\ &+ \iint_{\Omega \times T} \left( -\Delta(\lambda(\theta(\cdot)) \delta \theta(\cdot)) + \frac{2h}{e} \delta \theta(\cdot) \right) \psi dx dy dt + \sum_{i=1}^{n_{\text{chauff}}} \left( \sum_{j=1}^{2n_i} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\theta, \boldsymbol{\tau}, \psi)}{\partial \boldsymbol{\tau}_j^i} \delta \boldsymbol{\tau}_j^i \right) \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

On note alors par :

$$\begin{aligned} E(x, y; t) &= \sum_{i=1}^3 (\theta(C_i, t) - \hat{\theta}_i(t)) \delta \theta D_i. \\ \delta \mathcal{L}_1 &= \rho C \iint_{\Omega \times T} \frac{\partial \delta \theta(\cdot)}{\partial t} \psi dx dy dt. \\ \delta \mathcal{L}_2 &= \iint_{\Omega \times T} \left( -\Delta(\lambda(\theta(\cdot)) \delta \theta(\cdot)) + \frac{2h}{e} \delta \theta(\cdot) \right) \psi dx dy dt. \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration en partie, il vient :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_1 &= \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left[ \rho C \frac{\partial \delta \theta(\cdot)}{\partial t} \right] \psi(\cdot) d\Omega dt = \rho C \int_{\Omega} \left\{ [\delta \theta(\cdot) \psi(\cdot)]_0^{t_f} - \int_0^{t_f} \delta \theta(\cdot) \frac{\partial \psi(\cdot)}{\partial t} dt \right\} d\Omega, \\ &= \rho C \int_{\Omega} [\delta \theta(\cdot) \psi(\cdot)]_0^{t_f} d\Omega - \rho C \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \delta \theta(\cdot) \frac{\partial \psi(\cdot)}{\partial t} d\Omega dt, \\ &= \rho C \int_{\Omega} \delta \theta(x, y; t_f) \psi(x, y; t_f) d\Omega - \rho C \int_{\Omega} \delta \theta(x, y; 0) \psi(x, y; 0) d\Omega - \rho C \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \delta \theta(\cdot) \frac{\partial \psi(\cdot)}{\partial t} d\Omega dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_2 &= \iint_{\Omega \times T} \left( -\Delta(\lambda(\theta(\cdot)) \delta \theta(\cdot)) + \frac{2h}{e} \delta \theta(\cdot) \right) \psi d\Omega dt, \\ &= \iint_{\Omega \times T} -\Delta(\lambda(\theta(\cdot)) \delta \theta(\cdot)) d\Omega dt + \iint_{\Omega \times T} \frac{2h}{e} \delta \theta(\cdot) \psi d\Omega dt, \\ &= - \left\{ \int_0^{t_f} [\nabla(\lambda(\theta(\cdot)) \delta \theta(\cdot)) \psi(\cdot)]_{\partial \Omega} - \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \nabla(\lambda(\theta(\cdot)) \delta \theta(\cdot)) \nabla \psi(\cdot) d\Omega dt \right\} + \iint_{\Omega \times T} \frac{2h}{e} \delta \theta(\cdot) \psi(\cdot) d\Omega dt, \\ &= - \left\{ \int_0^{t_f} \left[ \frac{\partial}{\partial n} (\lambda(\theta(\cdot)) \delta \theta(\cdot)) \psi(\cdot) \right]_{\partial \Omega} - \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \nabla(\lambda(\theta(\cdot)) \delta \theta(\cdot)) \nabla \psi(\cdot) d\Omega dt \right\} + \iint_{\Omega \times T} \frac{2h}{e} \delta \theta(\cdot) \psi(\cdot) d\Omega dt, \\ &= - \left\{ \int_0^{t_f} \left[ \frac{\partial}{\partial n} (\lambda(\theta(\cdot)) \delta \theta(\cdot)) \psi(\cdot) \right]_{\partial \Omega} - \int_0^{t_f} \left[ \lambda(\theta(\cdot)) \delta \theta(\cdot) \frac{\partial \psi(\cdot)}{\partial n} \right]_{\partial \Omega} d\Omega dt + \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \lambda(\theta(\cdot)) \delta \theta(\cdot) \Delta \psi(\cdot) d\Omega dt \right\} \\ &\quad + \iint_{\Omega \times T} \frac{2h}{e} \delta \theta(\cdot) \psi(\cdot) d\Omega dt. \end{aligned}$$

En utilisant les données des conditions aux limites et la condition initiale du problème de

sensibilité,  $\frac{\partial}{\partial n}(\lambda(\theta((x, y, t)))\delta\theta((x, y, t))) = 0$ ,  $\forall(x, y, t) \in \Gamma \times T$  et  $\delta\theta(x, y; 0) = 0 \forall(x, y) \in \Omega$ , nous avons donc :

$$\delta\mathfrak{L}_1 = \rho c \int_{\Omega} \delta\theta(x, y; t_f) \psi(x, y; t_f) d\Omega - \rho c \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \delta\theta(\cdot) \frac{\partial\psi(\cdot)}{\partial t} d\Omega dt.$$

$$\delta\mathfrak{L}_2 = \int_0^{t_f} [\lambda(\theta(\cdot))\delta\theta(\cdot) \frac{\partial\psi(\cdot)}{\partial n}]_{\partial\Omega} d\Omega dt - \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \lambda(\theta(\cdot))\delta\theta(\cdot) \Delta\psi(\cdot) d\Omega dt + \iint_{\Omega \times T} \frac{2h}{e} \delta\theta(\cdot) \psi(\cdot) d\Omega dt.$$

Finalement en injectant  $\mathfrak{L}_1$ ,  $\mathfrak{L}_2$  dans l'équation (2.18) caractérisant  $\delta\mathfrak{L}(\theta(x, y; t), \boldsymbol{\tau}, \psi)$ , il est possible d'écrire :

$$\begin{aligned} \delta\mathfrak{L}(\theta(x, y; t), \boldsymbol{\tau}, \psi) &= \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left[ E(x, y; t) - \rho c \frac{\partial\psi(\cdot)}{\partial t} - \lambda(\theta(\cdot)) \Delta\psi(\cdot) + \frac{2h\psi(\cdot)}{e} \right] \delta\theta(\cdot) d\Omega dt \\ &+ \rho c \int_{\Omega} \delta\theta(x, y; t = t_f) \psi(\cdot) d\Omega + \int_0^{t_f} \left[ \lambda(\theta(\cdot)) \delta\theta(\cdot) \frac{\partial\psi(\cdot)}{\partial \vec{n}} \right]_{\partial\Omega} dt \\ &+ \sum_{i=1}^{n_{\text{chauff}}} \left( \sum_{j=1}^{2n_i} \left( \frac{\partial\mathfrak{L}(\theta(x, y; t), \boldsymbol{\tau}, \psi)}{\partial \boldsymbol{\tau}_j^i} \delta\boldsymbol{\tau}_j^i \right) \right). \end{aligned}$$

Pour que  $\frac{\partial\mathfrak{L}(\theta(x, y; t), \boldsymbol{\tau}, \psi)}{\partial\theta(x, y; t)} \delta\theta(\cdot) = 0 \quad \forall\delta\theta(x, y; t)$ , il faut que tous les termes qui multiplient  $\theta(x, y; t)$  soient nuls. Il est donc nécessaire que la fonction adjointe  $\psi(x, y; t)$  soit solution du problème :

$$\begin{cases} \forall(x, y, t) \in \Omega \times T & \rho c \frac{\partial\psi(x, y; t)}{\partial t} + \lambda(\theta) \Delta\psi(x, y; t) = E + \frac{2h}{e} \psi(x, y; t) & (2.19a) \\ \forall(x, y, t) \in \Gamma \times T & \frac{\partial\psi(x, y; t)}{\partial \vec{n}} = 0 & (2.19b) \\ \forall(x, y) \in \Omega & \psi(x, y, t_f) = 0 & (2.19c) \end{cases}$$

Lorsque  $\psi$  est solution du problème adjoint décrit par les EDPs (2.19a - 2.19c) alors que  $\theta(x, y; t)$  est solution du problème direct décrit par les EDPs (2.1 - 2.3) alors l'équation (2.16) devient :

$$\delta\mathfrak{L}(\theta(x, y; t), \boldsymbol{\tau}, \psi) = \sum_{i=1}^{n_{\text{chauff}}} \left( \sum_{j=1}^{2n_i} \left( \frac{\partial\mathfrak{L}(\theta(x, y; t), \boldsymbol{\tau}, \psi)}{\partial \boldsymbol{\tau}_j^i} \delta\boldsymbol{\tau}_j^i \right) \right).$$

De plus, comme  $\delta J(\theta, \boldsymbol{\tau}) = \delta \mathcal{L}(\theta, \boldsymbol{\tau}, \psi)$  et :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\tau}_j^i} \delta \boldsymbol{\tau}_j^i = \iint_{\Omega \times T} \left( \frac{f_i g_i \eta}{\pi e} \left( \frac{(-1)^{j+1} \delta \boldsymbol{\tau}_j^i}{\eta^2 + (t - \boldsymbol{\tau}_j^i)^2} \right) \right) \psi d\Omega dt,$$

finalemt, l'expression du gradient est alors :

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\tau}_j^i} = \iint_{\Omega \times T} \left( \frac{f_i g_i \eta}{\pi e} \left( \frac{(-1)^{j+1}}{\eta^2 + (t - \boldsymbol{\tau}_j^i)^2} \right) \right) \psi d\Omega dt. \quad (2.20)$$

### 2.3.4 Algorithme

La méthode de régularisation itérative du gradient conjugué se présente comme suit :

---

**Algorithm 1** Algorithme MGC.

---

- i. Choisir une initialisation  $\boldsymbol{\tau}^k$  pour l'itération  $k = 0$  pour les instants de commutation (défaillances et redémarrages).
- ii. résolution du problème direct (2.1-2.3) pour estimer la température  $\theta^k$  et estimer le critère  $J(\theta^k)$  selon (2.9).
- iii. résolution du problème adjoint (2.19a-2.19c) pour calculer le gradient  $\overrightarrow{\nabla J^k} = \left( \frac{\partial J^k}{\partial \boldsymbol{\tau}_j^i} \right)_{\substack{i=1, \dots, n_{\text{chauff}} \\ j=1, \dots, 2n_i}}$  selon (2.20) . En déduire la direction de descente :

$$\mathbf{d}^{k+1} = -\overrightarrow{\nabla J^k} + \beta_k \mathbf{d}^k, \quad \text{avec : } \beta_k = \frac{\|\overrightarrow{\nabla J^k}\|^2}{\|\overrightarrow{\nabla J^{k-1}}\|^2},$$

(excepté à l'itération  $k = 0$  pour laquelle  $\beta_0 = 0$ ).

- iv. résolution du problème de sensibilité (2.12b-2.12d) pour calculer les fonctions de sensibilité  $\delta \theta^k$  et en déduire la direction de descente  $\boldsymbol{\gamma}^{k+1}$  selon (2.14).
- v. Détermination du nouvel estimateur pour les instants de commutation :

$$\boldsymbol{\tau}^{k+1} = \boldsymbol{\tau}^k - \boldsymbol{\gamma}^{k+1} \mathbf{d}^{k+1}$$

puis retour à l'étape ii.

---

L'algorithme est stoppé à l'étape (ii) lorsque le critère est jugé suffisamment petit. Le critère d'arrêt est choisi en fonction du bruit de mesure sur les observations  $\hat{\theta}_i(t)$ , températures mesurée aux capteur  $C_i$ .

L'ensemble de cette méthode d'identification basée sur une approche numérique rigoureuse a été mise en œuvre avec succès dans plusieurs études antérieures, telles que celles menées par

(Autrique et al., 2005), (Beddiaf et al., 2014), (Beddiaf et al., 2015). Dans le contexte original de l'identification des instants de commutation, les résultats sont présentés dans la section suivante.

### 2.3.5 Exemple

Considérons le contexte illustratif précédent où l'identification de la défaillance de la source 1 doit être effectuée à partir des observations obtenues Figure 2.5. Dans cette section, les mesures aux trois capteurs sont entachées d'une incertitude décrite par un bruit gaussien de moyenne nulle et différents écarts types  $\sigma$  sont pris en compte. Sur la Figure 2.5, il s'agit d'un écart type  $\sigma = 1^\circ\text{C}$ . Le critère d'arrêt pour arrêter la minimisation itérative du critère est choisi selon le critère proposé par (Alifanov, 1994) et (Morozov, 2012) :

$$J_{\text{stop}} = \Delta t N_c N_t \sigma^2, \quad (2.21)$$

où  $N_c = 3$  est le nombre de capteurs,  $N_t = 400$  est le nombre de mesures par capteurs,  $\Delta t = 9$  s est le pas d'échantillonnage temporel entre chaque mesure et  $\sigma^2$  est la variance du bruit de mesure gaussien. Dans ce qui suit on considère les résultats obtenus avec une initialisation du temps de la défaillance de  $t_{\text{nok},1}^1 = 500\text{s}$  et un problème de sensibilité linéarisé avec  $\lambda = 178 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Cette dernière hypothèse introduit une erreur de modèle mais permet de réduire les temps de calcul. En effet, le problème de sensibilité nécessite une discrétisation plus fine. Les paramètres d'entrées du modèle sont donnés dans le tableau 2.1 et la fonction coût en fonction du nombre d'itérations est présentée dans la Figure 2.8. Le tableau 2.2 montre les résultats de l'identification pour 20 simulations compte tenu de différents niveaux de bruits. Les résultats sont donnés en termes de moyenne et d'écart-type (entre parenthèses).

TABLEAU 2.1 – Paramètres d'entrées du modèle non linéaire.

Symbole	Définition	Valeur
$\rho c$	Chaleur volumique	$2.421 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$
$h$	Coefficient de convection naturelle	$10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \text{K}^{-1}$
$\lambda$	Conductivité thermique	$\lambda(\theta) = 178 - 0.08\theta \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \text{K}^{-1}$
$\theta_0$	Température initiale	293 K
$t_f$	Temps final	3600 s

TABLEAU 2.2 – Identification de la défaillance pour différents niveaux de bruit.

	$J_{\text{stop}}$	Instant $t_{\text{nok},1}^1$	Instant réel de défaillance
$\sigma = 0.1^\circ\text{C}$	108	1503.4(3.53)	1500
$\sigma = 0.5^\circ\text{C}$	2700	1504.6(6.28)	1500
$\sigma = 1^\circ\text{C}$	10800	1484.6(28.84)	1500

La dernière ligne du tableau précédent correspond à l'identification du temps de défaillance pour les données de la Figure 2.5.

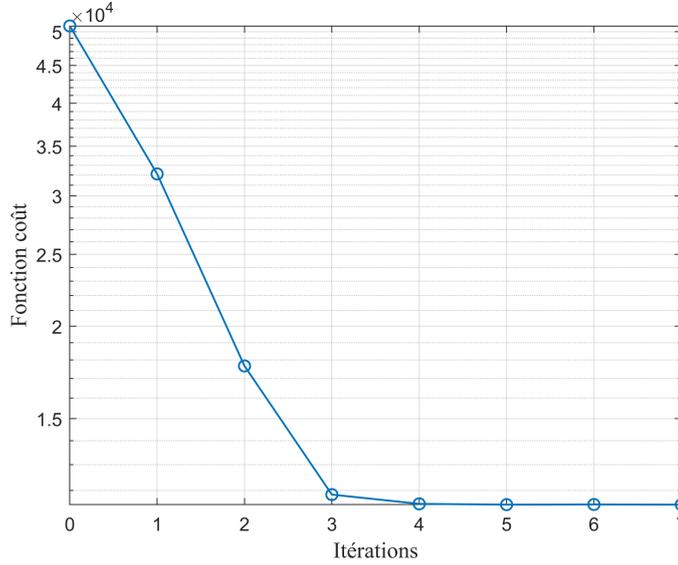


FIGURE 2.8 – Exemple d'évolution du critère dans le cas  $\sigma = 1^\circ\text{C}$ .

## 2.4 Identification des instants de défaillance : cas linéaire

Dans cette section, afin de voir l'impact de la non-linéarité du système d'EDPs décrit dans la section précédente sur l'identification des instants de défaillances, nous allons résoudre de nouveau le problème inverse associé au cas linéaire. Il s'agit du cas où la conductivité thermique est constante. L'évolution de la température  $\theta(x, y, t)$  dans le domaine  $\Omega$  est solution du problème direct décrit par le nouveau système d'équations aux dérivées partielles considérant les paramètres indiqués dans la section précédente.

$$\rho C \frac{\partial \delta \theta(x, y, t)}{\partial t} - \lambda \Delta \theta(x, y, t) = \frac{\Phi(x, y, t) - 2h(\theta(x, y, t) - \theta_0)}{e}, \quad (x, y, t) \in \Omega \times T, \quad (2.22a)$$

$$\theta(x, y, 0) = \theta_0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2.22b)$$

$$-\lambda \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (x, y, t) \in \Gamma \times T. \quad (2.22c)$$

### 2.4.1 Le problème inverse

Afin d'estimer les instants de défaillances des sources chauffantes, un critère quadratique à minimiser peut-être écrit de la manière suivante :

$$J(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_0^{t_f} \left( \theta(C_i, t, \boldsymbol{\tau}) - \hat{\theta}_i(t) \right)^2 dt. \quad (2.23)$$

La résolution du problème direct avec les données exactes donne les températures mesurées  $\hat{\theta}_i(t)$ . Comme expliqué dans la section précédente, la méthode du gradient conjugué est construite à partir de la résolution de trois problèmes bien posés (direct, adjoint et sensibilité).

### 2.4.2 Problème de sensibilité

La résolution de ce problème permet de calculer la profondeur de descente  $\gamma$  ainsi d'évaluer la sensibilité noté par  $\delta\theta(x, y, t)$  provoquée par une variation des éventuelles défaillances  $\delta\chi_i(t)$ . En se basant sur le principe de construction décrit dans la section précédente pour ce problème, le système d'EDPs décrivant le problème de sensibilité peut être écrit comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall(\cdot) \in \Omega \times T \\ \rho C \frac{\partial \delta\theta(\cdot)}{\partial t} - \lambda \Delta \delta\theta(\cdot) = \frac{\left( \sum_{i=1}^{n_{\text{chauff}}} \left( \frac{f_i g_i \eta}{\pi} \sum_{j=1}^{2n_i} \left( \frac{(-1)^{j+1} \delta\tau_j^i}{\eta^2 + (t - \tau_j^i)^2} \right) \right) \right)}{e} - 2h\delta\theta(\cdot) \\ \forall(x, y) \in \Omega \quad \delta\theta(x, y, 0) = 0 \\ \forall(\cdot) \in \Gamma \times T \quad -\lambda \frac{\partial \delta\theta(\cdot)}{\partial \vec{n}} = 0 \end{array} \right. \quad (2.24a)$$

$$\forall(x, y) \in \Omega \quad \delta\theta(x, y, 0) = 0 \quad (2.24b)$$

$$\forall(\cdot) \in \Gamma \times T \quad -\lambda \frac{\partial \delta\theta(\cdot)}{\partial \vec{n}} = 0 \quad (2.24c)$$

La profondeur de descente est exprimée à l'aide de l'expression (2.14). La formulation du problème adjoint présentée ci-dessous permet de calculer le gradient de la fonction à minimiser, et donc de calculer les prochaines directions de descente des vecteurs de paramètres inconnus.

### 2.4.3 Problème adjoint

Afin de résoudre ce problème, une formulation lagrangienne  $\mathfrak{L}(\theta, \boldsymbol{\tau}, \psi)$  du problème de minimisation de la fonction quadratique et une fonction adjointe  $\psi$  pour calculer le gradient

$\nabla J^k = \left( \frac{\partial J^k}{\partial \tau_j^i} \right)_{\substack{i=1, \dots, n_{\text{chauff}} \\ j=1, \dots, 2n_i}}$  doivent être introduites.

Soit  $\mathfrak{L}(\theta, \boldsymbol{\tau}, \psi)$  le Lagrangien associé au problème direct de la conduction de chaleur, défini par :

$$\mathfrak{L}(\theta, \boldsymbol{\tau}, \psi) = J(\boldsymbol{\tau}) + \iint_{\Omega \times T} \left( \rho C \frac{\partial \theta}{\partial t} - \lambda \Delta \theta - \frac{\Phi - 2h(\theta - \theta_0)}{e} \right) \psi d\Omega dt. \quad (2.25)$$

La variation du Lagrangien peut s'écrire telle que :

$$\delta \mathcal{L}(\theta, \boldsymbol{\tau}, \psi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \delta \theta + \sum_{i=1}^{n_{\text{chauff}}} \left( \sum_{j=1}^{2n_i} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\tau}_j^i} \delta \boldsymbol{\tau}_j^i \right) \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta \psi, \quad (2.26)$$

tel que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \delta \theta &= \iint_{\Omega \times T} \left( \sum_{i=1}^3 \left( \theta(C_i, t) - \hat{\theta}_i(t) \right) \delta \theta D_i \right) d\Omega dt + \rho C \iint_{\Omega \times T} \frac{\partial \delta \theta}{\partial t} \psi d\Omega dt \\ &\quad + \iint_{\Omega \times T} \left( -\lambda \Delta \delta \theta + \frac{2h}{e} \delta \theta \right) \psi d\Omega dt, \end{aligned}$$

où  $D_i$  représente la distribution de Dirac au capteur  $C_i$ . Si  $\psi(x, y; t)$  est fixé, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta, \boldsymbol{\tau}, \psi) &\iint_{\Omega \times T} \left( \sum_{i=1}^3 \left( \theta(C_i, t) - \hat{\theta}_i(t) \right) \delta \theta D_i \right) d\Omega dt + \rho C \iint_{\Omega \times T} \frac{\partial \delta \theta}{\partial t} \psi d\Omega dt \\ &\quad + \iint_{\Omega \times T} \left( -\lambda \Delta \delta \theta + \frac{2h}{e} \delta \theta \right) \psi d\Omega dt + \sum_{i=1}^{n_{\text{chauff}}} \left( \sum_{j=1}^{2n_i} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\tau}_j^i} \delta \boldsymbol{\tau}_j^i \right) \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

On note alors par :

$$\begin{aligned} E(x, y; t) &= \sum_{i=1}^3 \left( \theta(C_i, t) - \hat{\theta}_i(t) \right) \delta \theta D_i. \\ \delta \mathcal{L}_1 &= \rho C \iint_{\Omega \times T} \frac{\partial \delta \theta(\cdot)}{\partial t} \psi dx dy dt. \\ \delta \mathcal{L}_2 &= \iint_{\Omega \times T} -\lambda \Delta \delta \theta(\cdot) + \frac{2h}{e} \delta \theta(\cdot) \psi dx dy dt. \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration en partie, il vient :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_1 &= \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left[ \rho C \frac{\partial \delta \theta(\cdot)}{\partial t} \right] \psi(\cdot) d\Omega dt = \rho C \int_{\Omega} \left\{ [\delta \theta(\cdot) \psi(\cdot)]_0^{t_f} - \int_0^{t_f} \delta \theta(\cdot) \frac{\partial \psi(\cdot)}{\partial t} dt \right\} d\Omega, \\ &= \rho C \int_{\Omega} [\delta \theta(\cdot) \psi(\cdot)]_0^{t_f} d\Omega - \rho C \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \delta \theta(\cdot) \frac{\partial \psi(\cdot)}{\partial t} d\Omega dt, \\ &= \rho C \int_{\Omega} \delta \theta(x, y; t_f) \psi(x, y; t_f) d\Omega - \rho C \int_{\Omega} \delta \theta(x, y; 0) \psi(x, y; 0) d\Omega - \rho C \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \delta \theta(\cdot) \frac{\partial \psi(\cdot)}{\partial t} d\Omega dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta \mathfrak{L}_2 &= \iint_{\Omega \times T} \left( -\lambda \Delta \delta \theta(\cdot) + \frac{2h}{e} \delta \theta(\cdot) \right) \psi d\Omega dt, \\
 &= \iint_{\Omega \times T} -\lambda \Delta \delta \theta(\cdot) d\Omega dt + \iint_{\Omega \times T} \frac{2h}{e} \delta \theta(\cdot) \psi d\Omega dt, \\
 &= - \left\{ \int_0^{t_f} [\lambda \nabla \delta \theta(\cdot) \psi(\cdot)]_{\partial \Omega} - \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \lambda \nabla \delta \theta(\cdot) \nabla \psi(\cdot) d\Omega dt \right\} + \iint_{\Omega \times T} \frac{2h}{e} \delta \theta(\cdot) \psi(\cdot) d\Omega dt, \\
 &= - \left\{ \int_0^{t_f} \left[ \lambda \frac{\partial}{\partial n} \delta \theta(\cdot) \psi(\cdot) \right]_{\partial \Omega} - \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \lambda \nabla \delta \theta(\cdot) \nabla \psi(\cdot) d\Omega dt \right\} + \iint_{\Omega \times T} \frac{2h}{e} \delta \theta(\cdot) \psi(\cdot) d\Omega dt, \\
 &= - \left\{ \int_0^{t_f} \left[ \lambda \frac{\partial}{\partial n} \delta \theta(\cdot) \psi(\cdot) \right]_{\partial \Omega} - \int_0^{t_f} \int_{\Omega} [\lambda \delta \theta(\cdot) \frac{\partial \psi(\cdot)}{\partial n}]_{\partial \Omega} d\Omega dt + \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \lambda \delta \theta(\cdot) \Delta \psi(\cdot) d\Omega dt \right\} \\
 &\quad + \iint_{\Omega \times T} \frac{2h}{e} \delta \theta(\cdot) \psi(\cdot) d\Omega dt.
 \end{aligned}$$

En utilisant les données des conditions aux limites et la condition initiale du problème de sensibilité, en injectant  $\mathfrak{L}_1$ ,  $\mathfrak{L}_2$  dans l'équation (2.27) caractérisant  $\delta \mathfrak{L}(\theta(x, y, t), \boldsymbol{\tau}, \psi)$ , il est possible d'écrire :

$$\begin{aligned}
 \delta \mathfrak{L}(\theta(x, y, t), \boldsymbol{\tau}, \psi) &= \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left[ E(x, y, t) - \rho c \frac{\partial \psi(\cdot)}{\partial t} - \lambda \Delta \psi(\cdot) + \frac{2h\psi(\cdot)}{e} \right] \delta \theta(\cdot) d\Omega dt \\
 &\quad + \rho c \int_{\Omega} \delta \theta(x, y, t = t_f) \psi(\cdot) d\Omega + \int_0^{t_f} \left[ \lambda \delta \theta(\cdot) \frac{\partial \psi(\cdot)}{\partial \vec{n}} \right]_{\partial \Omega} dt \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{n_{\text{chauff}}} \left( \sum_{j=1}^{2n_i} \left( \frac{\partial \mathfrak{L}(\theta(x, y, t), \boldsymbol{\tau}, \psi)}{\partial \boldsymbol{\tau}_j^i} \delta \boldsymbol{\tau}_j^i \right) \right).
 \end{aligned}$$

Pour que  $\frac{\partial \mathfrak{L}(\theta, \boldsymbol{\tau}, \psi)}{\partial \theta} \delta \theta(\cdot) = 0 \quad \forall \delta \theta$ , il faut que tous les termes qui multiplient  $\theta(x, y, t)$  soient nuls. Il est donc nécessaire que la fonction adjointe  $\psi(x, y, t)$  soit solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (x, y, t) \in \Omega \times T \\ \rho c \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial t} + \lambda \Delta \psi(x, y, t) = E + \frac{2h}{e} \psi(x, y, t) \end{array} \right. \quad (2.28a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (x, y, t) \in \Gamma \times T \\ \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial \vec{n}} = 0 \end{array} \right. \quad (2.28b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (x, y) \in \Omega \\ \psi(x, y, t_f) = 0 \end{array} \right. \quad (2.28c)$$

De plus, comme  $\delta J(\theta, \boldsymbol{\tau}) = \delta \mathfrak{L}(\theta, \boldsymbol{\tau}, \psi)$  et :

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \boldsymbol{\tau}_j^i} \delta \boldsymbol{\tau}_j^i = \iint_{\Omega \times T} \left( \frac{f_i g_i \eta}{\pi e} \left( \frac{(-1)^{j+1} \delta \boldsymbol{\tau}_j^i}{\eta^2 + (t - \boldsymbol{\tau}_j^i)^2} \right) \right) \psi d\Omega dt,$$

Alors le gradient de la fonctionnelle  $\nabla J$ , peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\frac{\partial J}{\partial \tau_j^i} = \iint_{\Omega \times T} \left( \frac{f_i g_i \eta}{\pi e} \left( \frac{(-1)^{j+1}}{\eta^2 + (t - \tau_j^i)^2} \right) \right) \psi d\Omega dt. \quad (2.29)$$

#### 2.4.4 Exemple

Reprenons la situation illustrative précédente, à savoir l'identification d'une défaillance de la source  $\Phi_1$  à partir des observations obtenues dans la Figure 2.5. Le critère d'arrêt pour arrêter la minimisation itérative du critère est similaire à (2.21). Les paramètres d'entrées du modèle sont donnés dans le tableau 2.1. Dans ce qui suit on considère les résultats obtenus avec une initialisation du temps de la défaillance de  $t_{\text{nok},1}^1 = 500\text{s}$ . Les résultats d'identification pour 20 simulations, en tenant compte de différents niveaux de bruit, sont présentés dans le tableau 2.4. Les valeurs moyennes et les écarts-types sont indiqués (entre parenthèses) pour chaque résultat.

TABLEAU 2.3 – Paramètres d'entrées du modèle linéaire.

Symbole	Définition	Valeur
$\rho c$	Chaleur volumique	$2.421.10^6 \text{ J.m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$
$h$	Coefficient de convection naturelle	$10 \text{ W.m}^{-2}\text{K}^{-1}$
$\lambda$	Conductivité thermique	$\lambda = 178 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$
$\theta_0$	Température initiale	293 K
$t_f$	Temps final	3600 s

TABLEAU 2.4 – Identification de la défaillance pour différents niveaux de bruit.

	$J_{\text{stop}}$	Instant $t_{\text{nok},1}^1$	Instant réel de défaillance
$\sigma = 0.1^\circ\text{C}$	108	1502.2(3.03)	1500
$\sigma = 0.5^\circ\text{C}$	2700	1503.2(6.13)	1500
$\sigma = 1^\circ\text{C}$	10800	1492.1(22.34)	1500

La dernière ligne du tableau 2.4 précédent correspond à l'identification du temps de défaillance pour les données de la Figure 2.5.

## 2.5 Résultats numériques

Afin de démontrer la pertinence de l'approche proposée, différentes configurations ont été simulées. Les données observées ont été extraites d'une simulation avec le logiciel Comsol interfacé par Matlab afin d'éviter le crime inverse. Le crime inverse est une situation dans laquelle,

nous entendons que les méthodes numériques contiennent des caractéristiques qui rendent effectivement le problème inverse moins mal posé qu'il ne l'est en réalité, donnant ainsi des résultats optimistes. Nous comparons dans la suite les résultats obtenus par les deux cas (linéaire et non linéaire) pour voir l'impact de ce facteur sur les résultats obtenus.

Comme dans un système réel, les mesures aux trois capteurs sont soumises à une incertitude décrite par un bruit gaussien de moyenne nulle et différents écarts types  $\sigma$  sont pris en compte. Ainsi, les résultats sont donnés pour 3 niveaux de bruit différents :  $\sigma = 0.1^\circ$ ,  $\sigma = 0.5^\circ$  et  $\sigma = 1^\circ$ . Finalement, afin de voir l'impact d'un tel paramètre, pour chaque configuration, nous donnons les résultats en termes de moyenne et d'écart-type (entre parenthèses) sur 20 simulations.

### 2.5.1 Seconde configuration – identification de la défaillance et du redémarrage

Pour cette configuration, on considère que la première source tombe en panne à  $t_{\text{nok},1}^1 = 1000s$  puis redémarre à  $t_{\text{ok},1}^1 = 2500s$ . En se basant sur les mêmes paramètres que précédemment, on obtient les résultats présentés dans le tableau ci-après en partant de l'initialisation  $t_{\text{nok},1}^1 = 500s$  et  $t_{\text{ok},1}^1 = 1500s$ .

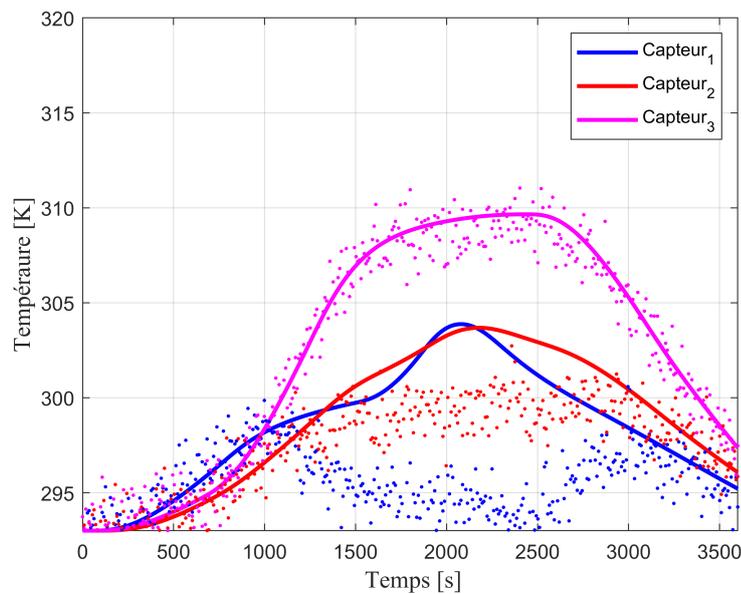


FIGURE 2.9 – Exemple de températures aux trois capteurs avec un bruit de  $\sigma = 1^\circ\text{C}$ .

TABLEAU 2.5 – Identification des temps de défaillance et de redémarrage pour différents niveaux de bruit.

		Défaillance $t_{\text{nok},1}^1$	Redémarrage $t_{\text{ok},1}^1$
$\sigma = 0.1^\circ\text{C}$	Cas linéaire	1001s (3.71)	2501.7s (3.57)
	Cas non-linéaire	1000.2s (3.83)	2502.2s (2.93)
$\sigma = 0.5^\circ\text{C}$	Cas linéaire	1003s (7.95)	2499.4s (10.13)
	Cas non-linéaire	998.8s (6.94)	2498.8s (13.13)
$\sigma = 1^\circ\text{C}$	Cas linéaire	1001.3s (19.17)	2498.8s (16.40)
	Cas non-linéaire	999.12s (22.65)	2498.5s (21, 22)

Dans le tableau précédent, on note que lorsque le bruit de mesure est moins important, les instants de défaillance et de redémarrage sont bien identifiés dans les deux cas. Cependant, lorsque le bruit de mesure est plus important, les instants de défaillance sont un peu moins bien identifiés. Toutefois, le tableau précédent montre que la méthode est pertinente pour identifier les instants de défaillance et de redémarrage d'une source.

### 2.5.2 Troisième configuration – séparation de sources

Pour cette dernière configuration, on considère que la première source tombe en panne à  $t_{\text{nok},1}^1 = 1000\text{s}$  puis que la seconde source tombe en panne à  $t_{\text{nok},1}^2 = 2000\text{s}$ . En se basant sur les mêmes paramètres que précédemment, on obtient les résultats présentés dans le tableau ci-après en partant de l'initialisation  $t_{\text{nok},1}^1 = 500\text{s}$  et  $t_{\text{nok},1}^2 = 500\text{s}$ .

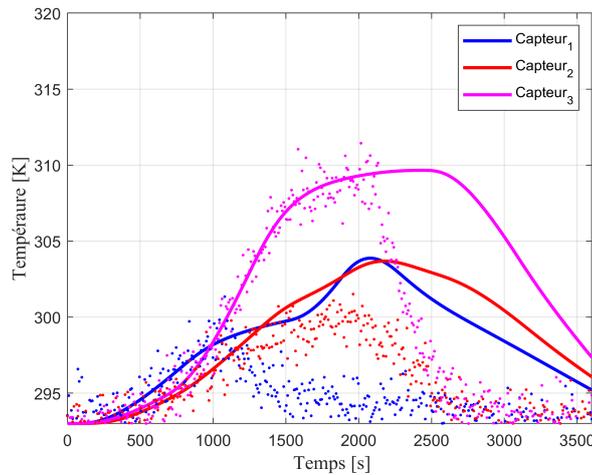
FIGURE 2.10 – Exemple de températures aux trois capteurs avec un bruit de  $\sigma = 1^\circ\text{C}$

TABLEAU 2.6 – Identification des temps de défaillance des deux sources pour différents niveaux de bruit.

		Défaillance $t_{\text{nok},1}^1$	Défaillance $t_{\text{nok},2}^1$
$\sigma = 0.1^\circ\text{C}$	Cas linéaire	1000.8s (2.89)	1997.7s (2.07)
	Cas non-linéaire	1002.4s (6.18)	1999.6s (2.94)
$\sigma = 0.5^\circ\text{C}$	Cas linéaire	999.79s (11.06)	1998.4s (3.93)
	Cas non-linéaire	999.48s (10.38)	1999.8s (3.65)
$\sigma = 1^\circ\text{C}$	Cas linéaire	999.45s (23.93)	1998.6s (5.93)
	Cas non-linéaire	1007.4s (27.66)	2001s (7, 29)

Dans le tableau 2.6, on note que lorsque le bruit de mesure est moins important, les instants de défaillance pour les deux sources sont bien identifiés pour les deux cas. Cependant, lorsque le bruit de mesure est plus important, les instants de défaillance sont un peu moins bien identifiés, avec un petit avantage au cas linéaire. En effet, lorsque le bruit de mesure est important, le cas non linéaire peut donner des résultats moins précis pour l'identification des instants de défaillance en raison de la dépendance complexe entre le paramètre à estimer et les autres paramètres du modèle, tels que la température  $\theta$  et la conductivité  $\lambda(\theta)$ . Lorsque le bruit de mesure est important, il peut y avoir des variations plus significatives dans les valeurs mesurées de la température, ce qui rend la tâche d'estimation du paramètre plus difficile dans le cas non linéaire. En revanche, dans le cas linéaire, la relation entre les mesures et les valeurs réelles du paramètre à estimer est plus simple et moins dépendant d'autres paramètres du modèle, ce qui peut conduire à une meilleure précision dans l'identification des instants de défaillance, même en présence du bruit de mesure important. Toutefois, le tableau précédent montre que la méthode est pertinente pour identifier les instants de défaillance de deux sources distinctes pour ce problème décrit par une équation aux dérivées partielles parabolique.

## 2.6 Bilan du chapitre 2

Dans ce chapitre, une méthode originale d'identification des instants de commutation a été proposée et mise en oeuvre dans le contexte d'un système physique décrit par un ensemble d'équations aux dérivées partielles paraboliques non linéaires. L'objectif est de déterminer, à partir d'observations bruitées des températures mesurées par 3 capteurs fixes, quand et quelle source chauffante est tombée en panne.

La procédure d'identification est formulée comme un problème de minimisation d'un critère quadratique, et elle est résolue par une méthode de régularisation itérative. Cette approche de régularisation itérative est nécessaire en raison du caractère mal-posé des problèmes inverses de conduction de la chaleur, et elle repose sur trois problèmes bien posés. Le premier problème est un problème direct qui permet de déterminer la température simulée et le critère. Le deuxième problème est un problème adjoint qui permet de déterminer le gradient du critère, c'est-à-dire la direction de descente pour minimiser le critère. Enfin, le troisième problème est un problème de sensibilité qui permet de calculer la profondeur de descente dans la direction du gradient, afin d'adapter la méthode itérative.

Les résultats obtenus ont montré que cette méthode permet d'identifier la panne d'une source, son redémarrage, ainsi que les instants de panne de deux sources, malgré un bruit de mesure important. Les instants de commutation des sources peuvent être déterminés avec une bonne précision grâce à cette méthode de régularisation itérative, même dans des conditions de mesure bruitées.

Dans le prochain chapitre, une adaptation quasi-en ligne de la méthode de régularisation itérative du gradient conjugué sera étudiée. Cette adaptation vise à permettre une identification en temps réel, où la détection des pannes de sources et des redémarrages pourrait être effectuée de manière quasi-en ligne, avec une fenêtre de détection et d'identification adaptée. Cette approche pourrait améliorer la performance de l'identification en permettant une détection plus rapide des instants de panne ou de redémarrage, tout en maintenant la précision de l'identification même en présence de bruit de mesure.

## Références bibliographiques

- [1] Alifanov, O. M. (1994). Iterative regularization of inverse problems. In *Inverse Heat Transfer Problems*, pages 227–328. Springer.
- [2] Autrique, L., Ramdani, N., and Rodier, S. (2005). Mobile source estimation with an iterative regularization method. In *5th International Conference on Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice, Cambridge, UK*, volume 11, page 1. Citeseer.
- [3] Baker, A. J. (2012). *Finite elements : computational engineering sciences*, volume 43. Wiley Online Library.
- [4] Beddiaf, S., Perez, L., Autrique, L., and Jolly, J.-C. (2014). Simultaneous determination of time-varying strength and location of a heating source in a three-dimensional domain. *Inverse problems in science and engineering*, 22(1) :166–183.
- [5] Beddiaf, S., Perez, L., Autrique, L., and Jolly, J.-C. (2015). Parametric identification of a heating mobile source in a three-dimensional geometry. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 23(1) :93–111.
- [6] Duda, P. and Konieczny, M. (2022). An iterative algorithm for the estimation of thermal boundary conditions varying in both time and space. *Energies*, 15(7) :2686.
- [7] Feng, S., Tao, Y., Ma, Z., Krolczyk, G., and Li, Z. (2020). Transient nonlinear heat transfer analysis using a generic grid refinement for structure parameter variations. *International Journal of Thermal Sciences*, 153 :106357.
- [8] Fries, W. D., He, X., and Choi, Y. (2022). Lasdi : Parametric latent space dynamics identification. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 399 :115436.
- [9] Hadamard, J. (1932). Le problème de cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques. *Paris*, 11 :243–264.
- [10] He, Z., Ni, F., Wang, W., and Zhang, J. (2021). A physics-informed deep learning method for solving direct and inverse heat conduction problems of materials. *Materials Today Communications*, 28 :102719.
- [11] Huang, C. and Özişik, M. (1990). A direct integration approach for simultaneously estimating spatially varying thermal conductivity and heat capacity. *International journal of heat and fluid flow*, 11(3) :262–268.
- [12] Huang, S., Tao, B., Li, J., and Yin, Z. (2019). On-line heat flux estimation of a nonlinear heat conduction system with complex geometry using a sequential inverse method and artificial neural network. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 143 :118491.

- [13] Hussain, A., Malik, M. Y., Khan, M., and Salahuddin, T. (2019). Application of generalized fourier heat conduction law on mhd viscoelastic fluid flow over stretching surface. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*.
- [14] Isakov, V. (1998). Applied mathematical sciences.
- [15] Jarny, Y., Ozisik, M., and Bardon, J. (1991). A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction. *International journal of heat and mass transfer*, 34(11) :2911–2919.
- [16] Jiang, W.-W., Jiang, G.-H., Tan, C.-H., Yang, K., and Gao, X.-W. (2022). A new method for identifying temperature-dependent thermal conductivity in transient heat conduction problems based on element differential method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 137 :65–77.
- [17] Lai, J.-F., Yan, Z.-Z., and He, J.-H. (2021). Bayesian inference for solving a class of heat conduction problems. *Thermal Science*, 25(3 Part B) :2135–2142.
- [18] Liu, Y., Dinh, N. T., Smith, R. C., and Sun, X. (2019). Uncertainty quantification of two-phase flow and boiling heat transfer simulations through a data-driven modular bayesian approach. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 138 :1096–1116.
- [19] Morozov, V. A. (2012). *Methods for solving incorrectly posed problems*. Springer Science & Business Media.
- [20] Pepper, D. and Heinrich, J. (1992). The finite element method : basic concepts and applications, hemisphere pub. In *Corp. Library of Congress, Cataloguing-in-Publication Data*.
- [21] Samadi, F., Woodbury, K., and Kowsary, F. (2021). Optimal combinations of tikhonov regularization orders for ihcps. *International Journal of Thermal Sciences*, 161 :106697.
- [22] Sassine, E., Cherif, Y., and Antczak, E. (2019). Parametric identification of thermophysical properties in masonry walls of buildings. *Journal of Building Engineering*, 25 :100801.
- [23] Vergnaud, A., Perez, L., and Autrique, L. (2016). Quasi-online parametric identification of moving heating devices in a 2d geometry. *International Journal of Thermal Sciences*, 102 :47–61.
- [24] Wang, L., Liao, W., Xie, Y., and Du, Y. (2020). An efficient inverse algorithm for load identification of stochastic structures. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 16(4) :869–882.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

---

- [25] Xu, H. J., Xing, Z. B., Wang, F., and Cheng, Z. (2019). Review on heat conduction, heat convection, thermal radiation and phase change heat transfer of nanofluids in porous media : Fundamentals and applications. *Chemical Engineering Science*, 195 :462–483.
- [26] Zeng, Y., Wang, H., Zhang, S., Cai, Y., and Li, E. (2019). A novel adaptive approximate bayesian computation method for inverse heat conduction problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 134 :185–197.
- [27] Zimmerman, W. B. (2006). *Multiphysics modeling with finite element methods*, volume 18. World Scientific Publishing Company.

# SYSTÈME NON LINÉAIRE – ANALYSE EN LIGNE DE DÉFAILLANCES

---

## 3.1 Adaptation de la méthode du gradient conjugué

### 3.1.1 Motivations

Dans le chapitre 2, une analyse de défaillance hors ligne a été réalisée. Les résultats mettent en évidence l'efficacité de la méthode du gradient conjugué (MGC) lors de l'identification des instants de défaillance des sources chauffantes. Cependant, ces instants ont été identifiés après la phase d'acquisition des données. Le temps de calcul total est indiqué dans le Tableau 3.1.

TABLEAU 3.1 – Temps de calcul de l'algorithme de MGC hors ligne.

Configuration pour l'identification	Temps de calcul
Identification de panne d'une source	10 minutes
Identification de panne et de redémarrage d'une source	13 minutes
Séparation des sources	16 minutes

L'inconvénient majeur de cette méthode d'identification dite hors ligne est qu'il faut attendre jusqu'à la fin de l'expérimentation avant de pouvoir commencer l'identification des paramètres inconnus, de plus le temps de convergence peut être très long en fonction de la complexité des problèmes selon le nombre des paramètres inconnus à identifier, ainsi que l'intervalle de temps sur lequel l'identification est réalisée. Afin de pallier cet inconvénient, on traite les températures mesurées au cours de l'acquisition en adaptant la méthode du gradient conjugué pour une mise en œuvre en continu, c'est-à-dire quasi en ligne. La Figure 3.1 montre la procédure d'identification quasi en ligne.

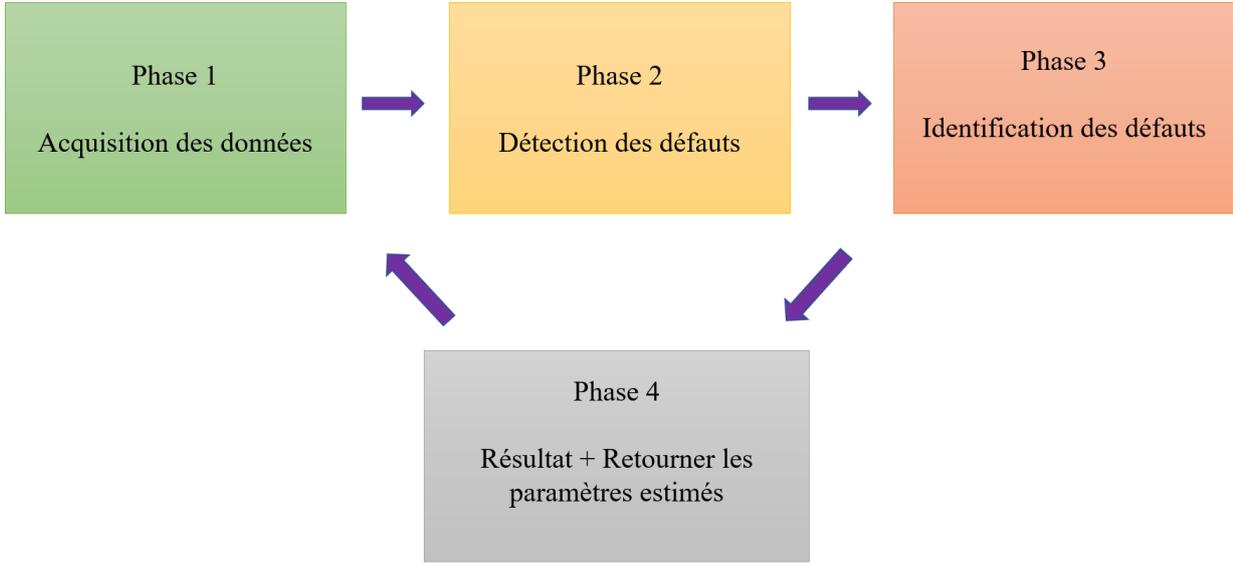


FIGURE 3.1 – Présentation de méthode d'identification en quasi en ligne

Dans le cadre de l'identification hors ligne, les résultats des instants de défaillance des sources chauffantes sont obtenus en réalisant séparément les deux phases "acquisition des données" et ensuite "algorithme d'identification", l'objectif de ce chapitre est de combiner séquentiellement les deux phases (phase 1 et phase 3 alternativement) en passant par une deuxième phase (phase 2) intermédiaire. Pour ce faire, une adaptation de la méthode du gradient conjugué (MGC) est réalisée en se basant sur les travaux présentés dans (Vergnaud et al., 2016), (Azar, 2021). Dans les travaux de Alban Vergnaud, une adaptation de la méthode de régularisation itérative du gradient conjugué est proposée afin d'identifier quasi en ligne des paramètres thermo-physiques intervenant dans une EDP parabolique linéaire. La méthode proposée est basée sur des intervalles de temps successifs (pour l'identification) qui glissent sur l'horizon temporel afin de mettre à jour de manière continue les observations. Les travaux de Thérèse Azar sont dédiés à une problématique de commande, il s'agit d'analyser progressivement et au fur et à mesure de l'évolution de l'état du système pour définir le contrôle qui devrait être appliqué au système.

### 3.1.2 Notations

Dans ce qui suit, les notations suivantes sont considérées :

- $T_i = [t_i, t_{i+1}]$  est l'intervalle de temps courant qui correspond au temps durant lequel le procédé évolue. Son état (la température) est la solution du problème direct (décrit par un système d'équations aux dérivées partielles paraboliques linéaires ou non) sur l'intervalle de temps  $[t_i, t_{i+1}]$ .
- $T_i^* = [t_i^*, t_{i+1}^*]$  est l'intervalle de temps pris en compte pour la résolution du problème inverse.

- $t_{\text{detect}}$  est la durée pour détecter un défaut (phase 2). Ce temps est donc disponible à l'instant  $t_{i+1} + t_{\text{detect}}$ .
- $\Delta t_{\text{rés}}$  est la durée de la résolution d'un problème direct.
- $t_{\text{id}}$  est le temps de calcul nécessaire pour identifier une défaillance (phase 3). Ce temps est donc disponible à l'instant  $t_{i+1} + t_{\text{detect}} + t_{\text{id}}$ .
- $t_{\text{def}}$  est le résultat de l'instant de panne obtenu après la procédure. Ce résultat est obtenu à l'instant  $t_{i+1} + t_{\text{detect}} + t_{\text{id}}$ .

## 3.2 Différentes stratégies pour l'identification des instants de défaillances

### 3.2.1 Stratégie 1 : décalage à pas constant

#### 3.2.1.1 Défaillance d'une source

Dans cette première approche, la fenêtre utilisée pour la détection et l'identification de la défaillance ou du redémarrage des sources est de taille égale. Cela signifie que la période sur laquelle les mesures issues des capteurs sont utilisées pour la détection et l'identification est la même, sans distinction entre ces deux processus. Cette approche considère que la défaillance ou le redémarrage d'une source peut être détecté et identifié avec la même fenêtre temporelle, sans nécessiter une adaptation de la taille de la fenêtre en fonction du processus de détection ou d'identification. Dans ce qui suit, on suppose que la première source chauffante  $\Phi_1$  tombe en panne à l'instant  $t = 1000\text{s}$ , les valeurs numériques ont pour objet de faciliter la présentation de la méthode (ces valeurs sont prises des vraies simulations). Afin d'éviter les calculs inutiles, et de ne pas enclencher de fausse alerte, un critère d'arrêt est utilisé pour la détection de défaillance :

$$J(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left( \theta(C_i, t, \boldsymbol{\tau}) - \hat{\theta}_i(t) \right)^2 dt. \quad (3.1)$$

Ainsi, dès que le comportement du système s'éloigne du comportement normal (sans défaillance), c'est-à-dire :  $J(\theta(\boldsymbol{\tau})) > J_{\text{stop}}$ , alors une défaillance est détectée dans la fenêtre en cours de traitement et une procédure d'identification est lancée.

En pratique, en fonction des notations précédentes :

1. Le processus démarre à  $t_0 = 0$  secondes et on attend  $t_1 = 450$  seconds pour observer la température sur l'intervalle  $T_0 = [t_0, t_1] = [t_0, t_0 + 450]$ . La température « finale » est alors connue dans tout le domaine  $\Omega$ .
2. Le programme de détection de défaut est donc lancé sur l'intervalle  $T_0 = [t_0, t_1]$ , on calcule donc le critère selon (3.1). Cette détection de défaut a duré  $t_{\text{detect}} = 2\text{s}$ , et elle est disponible à l'instant  $t_1 + t_{\text{detect}} = 450 + 2 = 452\text{s}$ .

3. Si  $J(\tau) < J_{stop}$  cela veut dire qu'il n'a pas eu de défaillance sur cette fenêtre  $T_0$ , on passe alors aux prochaines fenêtres.
4. Sur la fenêtre  $T_1 = [t_1, t_2] = [t_1, t_1 + 450] = [450, 900]$ , le programme de détection de défaut est donc lancé sur l'intervalle  $T_1 = [450, 900]$ . On calcule le critère selon (3.1). Cette détection de défaut a duré  $t_{detect} = 2s$ , et elle est disponible à l'instant  $t_2 + t_{detect} = 900 + 2 = 902s$ . Si  $J(\tau) < J_{stop}$  alors il n'y a pas eu de défaillance sur cette fenêtre  $T_2$ , on passe alors aux prochaines fenêtres.
5. Sur la fenêtre  $T_2 = [t_2, t_3] = [t_2, t_2 + 450] = [900, 1350]$ , le programme de détection de défaut est donc lancé sur l'intervalle  $T_2 = [900, 1350]$ , et on calcule le critère selon (3.1). Cette détection de défaut a duré  $t_{detect} = 2s$  et elle est disponible à l'instant  $t_2 + t_{detect} = 1350 + 2 = 1352s$ .  
 Dans cette fenêtre  $J(\tau) > J_{stop}$ , cela signifie qu'il y a eu une défaillance sur cette fenêtre  $T_2$ .
6. Un programme d'identification (phase 3) est lancé sur la fenêtre  $T_2^* = T_2 = [900, 1350]$ , avec une initialisation  $t_{nok,1}^1 = \frac{(1350+900)}{2} = 1125s$ . Cette identification de panne a duré  $t_{id} = 41s$ .
7. On trouve un instant de défaillance  $t_{id} = 999.5s$  et cet instant est disponible à  $t_3 + t_{detect} + t_{id} = 1350 + 2 + 41 = 1393s$ .

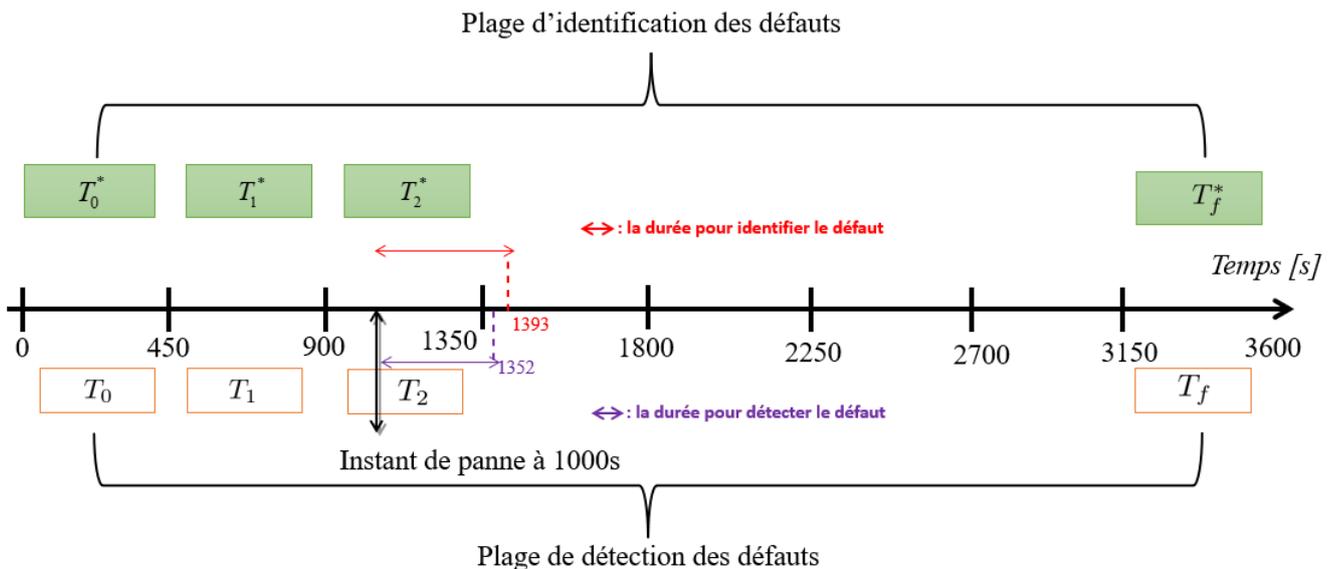


FIGURE 3.2 – Présentation de stratégie 1 : cas de défaillance de la source  $\Phi_1$

### 3.2.1.2 Défaillance deux sources

Dans ce dernier scénario, on suppose deux sources en dysfonctionnement. La première source chauffante  $\Phi_1$  tombe en panne à l'instant  $t=1000s$ , puis la deuxième source  $\Phi_2$  tombe en panne à l'instant  $t=2000s$ .

1. Le processus démarre à  $t_0 = 0$  secondes et on attend  $t_1 = 450$  secondes pour observer la température sur l'intervalle  $T_0 = [t_0, t_1] = [0, 450]$ . La température « finale » est alors connue dans tout le domaine  $\Omega$ .
2. Le programme de détection de défaut est donc lancé sur l'intervalle  $T_0 = [t_0, t_1]$ , on calcule alors le critère selon (3.1). Cette détection de défaut a duré  $t_{\text{detect}} = 2s$ , et il est disponible à l'instant  $t_1 + t_{\text{detect}} = 450 + 2 = 452s$ .
3. Si  $J(\boldsymbol{\tau}) < J_{\text{stop}}$  c.-à-d. qu'il n'y a pas eu de panne sur cette fenêtre  $T_0$ , on passe alors aux prochaines fenêtres.
4. Sur la fenêtre  $T_1 = [t_1, t_2] = [t_1, t_1 + 450] = [450, 900]$ , le programme de détection de défaut est donc lancé sur l'intervalle  $T_1 = [450, 900]$  et on calcule le critère selon (3.1). Cette détection de défaut a duré  $t_{\text{detecte}} = 2s$ , et il est disponible à l'instant  $t_2 + t_{\text{detect}} = 900 + 2 = 902s$ . Si  $J(\boldsymbol{\tau}) < J_{\text{stop}}$  c.-à-d. qu'il n'y a pas eu de panne sur cette fenêtre  $T_2$ , on passe alors aux prochaines fenêtres.
5. Sur la fenêtre  $T_2 = [t_2, t_3] = [t_2, t_2 + 450] = [900, 1350]$ , le programme de détection de défaut est donc lancé sur l'intervalle  $T_2 = [900, 1350]$ , on calcule le critère selon (3.1). Cette détection de défaut a duré  $t_{\text{detect}} = 2s$ , et il est disponible à l'instant  $t_2 + t_{\text{detect}} = 1350 + 2 = 1352s$ .

Dans cette fenêtre  $J(\boldsymbol{\tau}) > J_{\text{stop}}$  c.-à-d. un panne sur cette fenêtre  $T_2$ .

6. Un programme d'identification (phase3) est lancé sur la fenêtre  $T_2^* = [900, 1350]$ , avec une initialisation  $t_{\text{nok},1}^1 = \frac{(1350+900)}{2} = 1125s$ . Cette identification de panne a duré  $t_{\text{id}} = 44s$ .
7. On trouve un instant de défaillance  $t_{\text{def}}^1 = 1004s$  et cet instant est disponible à  $t_3 + t_{\text{detect}} + t_{\text{id}} = 1350 + 2 + 44 = 1396s$ .
8. Un problème direct est résolu sur l'intervalle  $T=[900,3600]$  avec l'instant de défaillance trouver  $t_{\text{def}}^1 = 1004s$ . Cette résolution va mettre à jour le comportement attendu du vrai système. Cette résolution a duré  $\Delta t_{\text{rés}} = 21s$
9. Sur la fenêtre  $T_3 = [t_3, t_4] = [t_3, t_3 + 450] = [1350, 1800]$ , le programme de détection de défaut est donc lancé sur l'intervalle  $T_3 = [1350, 1800]$ , on calcule le critère selon (3.1). Cette détection de défaut a duré  $t_{\text{detecte}} = 2s$ , et il est disponible à l'instant  $t_2 + t_{\text{detect}} + \Delta t_{\text{rés}} = 1800 + 2 + 21 = 1823s$ . Si  $J(\boldsymbol{\tau}) < J_{\text{stop}}$  c.-à-d. qu'il n'y a pas eu de panne sur cette fenêtre  $T_3$ , on passe alors aux prochaines fenêtres.

10. Sur la fenêtre  $T_4 = [t_4, t_5] = [t_4, t_4 + 450] = [1800, 2250]$ , Le programme de détection de défaut est donc lancé sur l'intervalle  $T_4 = [1800, 2250]$ , on calcule le critère selon (3.1). Cette détection de défaut a duré  $t_{\text{detect}} = 2\text{s}$ , et il est disponible à l'instant  $t_5 + t_{\text{detect}} + \Delta t_{\text{rés}} = 2250 + 2 + 21 = 2273\text{s}$ .

Dans cette fenêtre  $J(\tau) > J_{\text{stop}}$ , cela signifie qu'il y a eu une défaillance sur cette fenêtre  $T_4$ .

11. Un programme d'identification (phase 3) est lancé sur la fenêtre  $T_4^* = [1800, 2250]$ , avec une initialisation  $t_{\text{nok},1}^2 = \frac{(2250+1800)}{2} = 2025\text{s}$ . Cette identification de panne a duré  $t_{\text{id}} = 45\text{s}$ .

12. On trouve un instant de défaillance  $t_{\text{def}}^2 = 1998\text{s}$  et cette instant est disponible à  $t_5 + t_{\text{detect}} + t_{\text{id}} + \Delta t_{\text{rés}} = 2250 + 2 + 44 + 21 = 2317\text{s}$ .

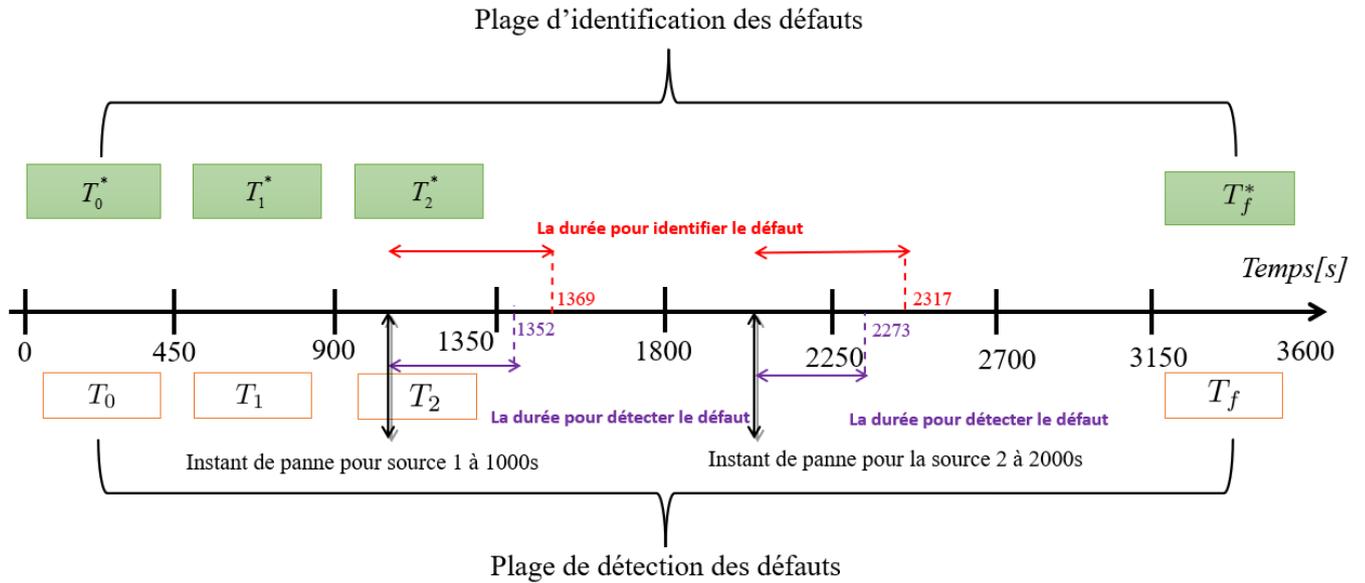


FIGURE 3.3 – Présentation de stratégie 1 : cas de défaillance de deux sources  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ .

Finalement, l'adaptation de l'algorithme de la méthode du gradient conjugué avec la première stratégie est ainsi présentée dans l'algorithme (2).

Un inconvénient de cette première stratégie est que si une défaillance survient au début de l'intervalle  $T_i$ , il faut attendre jusqu'à la fin de cet intervalle pour détecter la défaillance et lancer la procédure d'identification. De même, si une défaillance ou un redémarrage survient vers la fin de l'intervalle  $T_i$ , les capteurs ne détecteront l'effet de la défaillance ou du redémarrage qu'à partir du prochain intervalle  $T_{i+1}$ , ce qui peut entraîner une identification moins précise, car la vraie panne ou le redémarrage a eu lieu pendant l'intervalle  $T_i$ . Pour résoudre ce problème, une deuxième stratégie a été développée pour améliorer la procédure de détection et d'identification.

---

**Algorithm 2** Algorithme MGC quasi en ligne : stratégie 1

---

- i. Étape 1 : résolution du problème direct sur l'intervalle de temps  $T_i$ .
  - ii. Étape 2 : calcul de la fonction coût avec les valeurs de température estimées sur intervalle de temps  $T_i$  et des mesures associées (Phase 2) :
    1. si le critère est inférieur au critère d'arrêt, cela signifie qu'il n'y a pas eu de défaillance sur cette fenêtre, la procédure de détection est arrêtée et un nouvel intervalle de temps est considéré  $T_{i+1}$  (aller à l'étape 1 avec  $i = i + 1$ )
    2. si le critère est supérieur au critère d'arrêt, cela signifie qu'une défaillance a eu lieu sur cette fenêtre  $T_i$ . Une procédure d'identification est réalisée sur  $T_i^* = T_i$  (Phase 3) :
      - (a) choisir une initialisation  $\tau^k$  pour l'itération  $k = 0$  pour les instants de commutations.
      - (b) résolution du problème adjoint sur l'intervalle de temps  $T_i^*$ .
      - (c) calcul de la direction de descente sur l'intervalle  $T_i^*$  considérant le gradient de la fonction coût issue des résolutions précédentes du problème adjoint.
      - (d) résolution du problème de sensibilité sur l'intervalle de temps  $T_i^*$  afin de calculer la profondeur de descente (dans la direction de la descente).
      - (e) Mise à jour des estimations des paramètres inconnus estimées sur l'intervalle de temps  $T_i^*$
      - (f) (retour à l'étape 1 avec  $i = i + 1$ )
- 

### 3.2.2 Stratégie 2 :

La deuxième stratégie représente une amélioration de la précédente, basée sur une modification de la taille de l'intervalle utilisé pour la détection des défaillances ou redémarrages, ainsi qu'une adaptation de l'intervalle associé à l'identification. Dans cette approche, l'intervalle d'identification  $T_i^*$  est égal à deux fois la taille de la fenêtre utilisée pour la détection. Cela signifie que la période sur laquelle les mesures issues des capteurs sont utilisées pour la détection est plus courte, ce qui permet de détecter plus rapidement les défaillances ou les redémarrages des sources. En revanche, la période sur laquelle les mesures sont utilisées pour l'identification est plus longue, car elle couvre deux fois la taille de la fenêtre de détection. Cette adaptation de l'intervalle d'identification permet d'améliorer la précision de l'identification en prenant en compte les mesures sur une période plus longue, ce qui peut conduire à une meilleure estimation des défaillances ou des redémarrages des sources.

En pratique, en fonction des notations précédentes :

1. Le processus démarre à  $t_0 = 0$  secondes et on attend  $t_1 = 180$  seconde pour observer la température sur l'intervalle  $T_0 = [t_0, t_1] = [t_0, t_0 + 180]$ . La température « finale » est alors connue dans tout le domaine  $\Omega$ . Le programme de détection de défaut est donc lancé sur l'intervalle  $T_0 = [t_0, t_1]$  c.-à-d., on calcule le critère selon (3.1). Cette détection

de défaut a duré  $t_{\text{detect}} = 2s$ , et elle est disponible à l'instant  $t_1 + t_{\text{detect}} = 180 + 2 = 182s$ .

2. Si  $J(\boldsymbol{\tau}) < J_{\text{stop}}$  c.-à-d. qu'il n'y a pas eu de défaillance sur cette fenêtre  $T_0$ , on passe alors aux prochaines fenêtres.
3. Sur la fenêtre  $T_1 = [t_1, t_2] = [t_1, t_1 + 180] = [180, 360]$ , le programme de détection de défaut est donc lancé sur l'intervalle  $T_1 = [180, 360]$ , on calcule le critère selon (3.1). Cette détection de défaut a duré  $t_{\text{detect}} = 2s$  et elle est disponible à l'instant  $t_2 + t_{\text{detect}} = 360 + 2 = 362s$ . Si  $J(\boldsymbol{\tau}) < J_{\text{stop}}$  c.-à-d. qu'il n'y a pas eu de défaillance sur cette fenêtre  $T_2$ , en passe alors aux prochaines fenêtres.
4. Sur la fenêtre  $T_2 = [t_2, t_3] = [t_2, t_2 + 180] = [360, 540]$ , le programme de détection de défaut est donc lancé sur l'intervalle  $T_2 = [360, 540]$ , on calcule le critère selon (3.1). Cette détection de défaut a duré  $t_{\text{detect}} = 2s$  et elle est disponible à l'instant  $t_3 + t_{\text{detect}} = 540 + 2 = 542s$ . Si  $J(\boldsymbol{\tau}) < J_{\text{stop}}$  c.-à-d. qu'il n'y a pas eu de défaillance sur cette fenêtre  $T_2$ , en passe alors aux prochaines fenêtres.
5. Sur la fenêtre  $T_3 = [t_3, t_4] = [t_3, t_3 + 180] = [540, 720]$ , le programme de détection de défaut est donc lancé sur l'intervalle  $T_3 = [540, 720]$ , on calcule le critère selon (3.1). Cette détection de défaut a duré  $t_{\text{detect}} = 2s$  et elle est disponible à l'instant  $t_4 + t_{\text{detect}} = 720 + 2 = 722s$ . Si  $J(\boldsymbol{\tau}) < J_{\text{stop}}$  c.-à-d. qu'il n'y a pas eu de défaillance sur cette fenêtre  $T_3$ , en passe alors aux prochaines fenêtres.
6. etc ..
7. Sur la fenêtre  $T_6 = [t_6, t_7] = [t_6, t_6 + 180] = [1080, 1260]$ , le programme de détection de défaut est donc lancé sur l'intervalle  $T_3 = [1080, 1260]$ , on calcule le critère selon (3.1). Cette détection de défaut a duré  $t_{\text{detect}} = 2s$  et elle est disponible à l'instant  $t_7 + t_{\text{detect}} = 1260 + 2 = 1262s$ . Dans cette fenêtre  $J(\boldsymbol{\tau}) > J_{\text{stop}}$ , cela signifie qu'il y a eu une défaillance sur cette fenêtre  $T_6$ .
8. Un programme d'identification (phase 3) est lancé sur la fenêtre  $T^* = T_5 \cup T_6 = [900, 1080] \cup [1080, 1260] = [900, 1260]$ , avec une initialisation  $t_{\text{nok},1}^1 = \frac{(1260+90)}{2} = 1080s$  Cette identification de panne a duré  $t_{\text{id}} = 57s$ .
9. On trouve un instant de défaillance  $t_{\text{def}} = 1002.3s$  et cet instant est disponible à  $t_7 + t_{\text{detect}} + t_{\text{id}} = 1260 + 2 + 57 = 1319s$ .

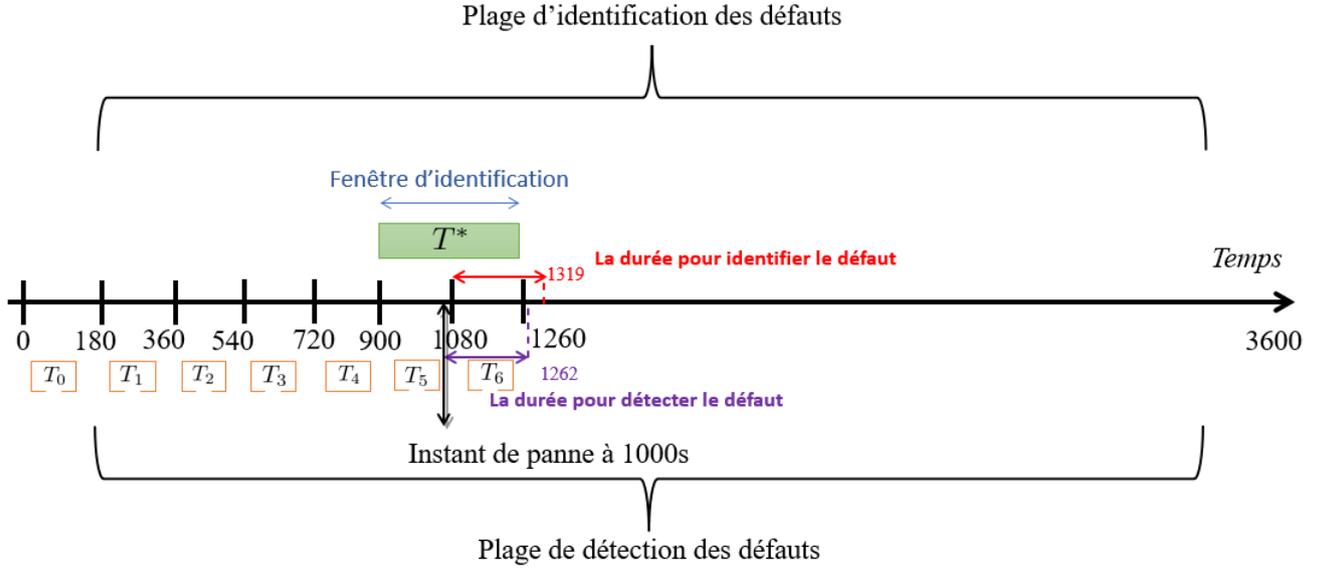


FIGURE 3.4 – Présentation de stratégie 2 : cas de défaillance de  $\Phi_1$ .

Finalement, l'adaptation de l'algorithme de la méthode du gradient conjugué pour la deuxième stratégie est ainsi présentée dans l'algorithme (3).

---

**Algorithm 3** Algorithme MGC quasi en ligne : stratégie 2

---

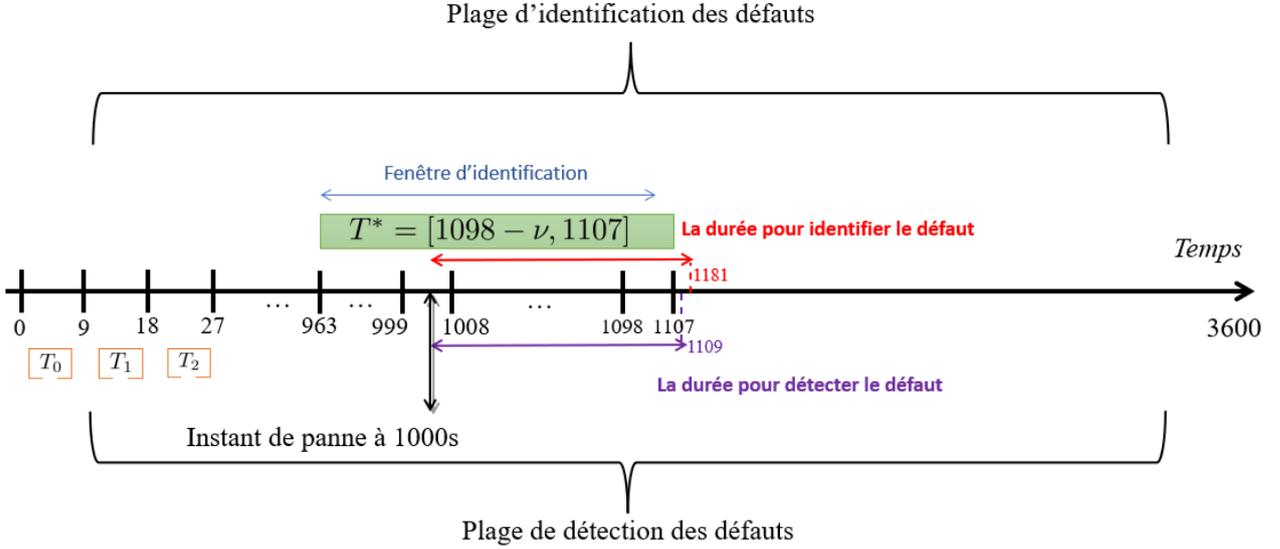
- i. Étape 1 : résolution du problème direct sur l'intervalle de temps  $T_i$ .
  - ii. Étape 2 : calcul de la fonction coût avec les valeurs de température estimées sur intervalle de temps  $T_i$  et des mesures associées (Phase 2) :
    1. si le critère est inférieur au critère d'arrêt, cela signifie qu'il n'y a pas eu de défaillance sur cette fenêtre, la procédure de détection est arrêtée et un nouvel intervalle de temps est considéré  $T_{i+1}$  (aller à l'étape 1 avec  $i = i + 1$ )
    2. si le critère est supérieur au critère d'arrêt, cela signifie qu'une défaillance a eu lieu sur cette fenêtre  $T_i$ . Une procédure d'identification est réalisée sur  $T_i^* = T_{i-1} \cup T_i$  (Phase 3) :
      - (a) choisir une initialisation  $\tau^k$  pour l'itération  $k = 0$  pour les instants de commutations.
      - (b) résolution du problème adjoint sur l'intervalle de temps  $T_i^*$ .
      - (c) calcul de la direction de descente sur l'intervalle  $T_i^*$  considérant le gradient de la fonction coût issue des résolutions précédentes du problème adjoint.
      - (d) résolution du problème de sensibilité sur l'intervalle de temps  $T_i^*$  afin de calculer la profondeur de descente (dans la direction de la descente).
      - (e) Mise à jour des estimations des paramètres inconnus estimées sur l'intervalle de temps  $T_i^*$
      - (f) (retour à l'étape 1 avec  $i = i + 1$ )
-

### 3.2.3 Stratégie 3 :

Dans cette dernière stratégie, une détection en temps réel est proposée. Les mesures des capteurs sont obtenues à chaque intervalle de 9 secondes, ce qui permet de lancer la phase de détection plus fréquemment, rendant ainsi la détection plus rapide. En ce qui concerne l'identification, la fenêtre utilisée est définie comme  $T_i^* = [t_i - \nu, t_{i+1}]$ . Cette fenêtre adaptée permet d'améliorer la précision de l'identification des instants de défaillance ou de redémarrage des sources. En effet, en soustrayant la valeur de  $\nu$  de la fenêtre d'identification, on obtient une période plus longue sur laquelle les mesures sont prises en compte, ce qui permet d'obtenir une estimation plus précise des instants de défaillance ou de redémarrage des sources. Cette approche combinant une détection en temps réel et une fenêtre d'identification adaptée contribue à améliorer la performance globale de la stratégie en permettant une détection plus rapide et une identification plus précise des instants de défaillance ou de redémarrage.

En pratique, en fonction des notations précédentes :

1. Le processus démarre à  $t_0 = 0$  secondes et on attend  $t_1 = 9$  seconde pour observer la température sur l'intervalle  $T_0 = [t_0, t_1] = [t_0, t_0 + 9]$ . La température « finale » est alors connue dans tout le domaine  $\Omega$ . Le programme de détection de défaut est donc lancé sur l'intervalle  $T_0 = [t_0, t_1]$  c.-à-d., on calcule le critère selon (3.1). Cette détection de défaut a duré  $t_{\text{detect}} = 2s$ , et elle est disponible à l'instant  $t_1 + t_{\text{detect}} = 9 + 2 = 11s$ .
2. Si  $J(\boldsymbol{\tau}) < J_{\text{stop}}$  c.-à-d. qu'il n'y a pas eu de défaillance sur cette fenêtre  $T_0$ , on passe alors aux prochaines fenêtres.
3. Sur la fenêtre  $T_1 = [t_1, t_2] = [t_1, t_1 + 9] = [9, 18]$ , le programme de détection de défaut est donc lancé sur l'intervalle  $T_1 = [9, 18]$ , on calcule le critère selon (3.1). Cette détection de défaut a duré  $t_{\text{detect}} = 2s$  et elle est disponible à l'instant  $t_2 + t_{\text{detect}} = 18 + 2 = 20s$ . Si  $J(\boldsymbol{\tau}) < J_{\text{stop}}$  c.-à-d. qu'il n'y a pas eu de défaillance sur cette fenêtre  $T_2$ , on passe alors aux prochaines fenêtres.
4. etc ..
5. Sur la fenêtre  $T_{123} = [t_{123}, t_{124}] = [t_{123}, t_{123} + 9] = [1098, 1107]$ , le programme de détection de défaut est donc lancé sur l'intervalle  $T_2 = [1098, 1107]$ , on calcule le critère selon (3.1). Cette détection de défaut a duré  $t_{\text{detect}} = 2s$  et elle est disponible à l'instant  $t_{124} + t_{\text{detect}} = 1107 + 2 = 1109s$ . Dans cette fenêtre  $J(\boldsymbol{\tau}) > J_{\text{stop}}$ , cela signifie qu'il y a eu une défaillance sur cette fenêtre  $T_{123}$ .
6. Un programme d'identification (phase 3) est lancé sur la fenêtre  $T^* = [1098 - \nu, 1107] = [963, 1107]$ , avec  $\nu = 135s$  et une initialisation  $t_{\text{nok},1}^1 = \frac{(1107+963)}{2} = 1035s$ . Cette identification de panne a duré  $t_{\text{id}} = 72s$ .
7. On trouve un instant de défaillance  $t_{\text{def}} = 1002.3s$  et cet instant est disponible à  $t_{124} + t_{\text{detect}} + t_{\text{id}} = 1107 + 2 + 72 = 1181s$ .


 FIGURE 3.5 – Présentation de stratégie 3 : cas de défaillance de  $\Phi_1$ .

Finalement, l'adaptation de l'algorithme de la méthode du gradient conjugué pour la troisième stratégie est ainsi présentée dans l'algorithme (4).

---

**Algorithm 4** Algorithme MGC quasi en ligne : stratégie 3
 

---

- i. Étape 1 : résolution du problème direct sur l'intervalle de temps  $T_i$ .
  - ii. Étape 2 : calcul de la fonction coût avec les valeurs de température estimées sur intervalle de temps  $T_i$  et des mesures associées (Phase 2) :
    1. si le critère est inférieur au critère d'arrêt, cela signifie qu'il n'y a pas eu de défaillance sur cette fenêtre, la procédure de détection est arrêtée et un nouvel intervalle de temps est considéré  $T_{i+1}$  (aller à l'étape 1 avec  $i = i + 1$ )
    2. si le critère est supérieur au critère d'arrêt, cela signifie qu'une défaillance a eu lieu sur cette fenêtre  $T_i$ . Une procédure d'identification est réalisée sur  $T_i^* = [t_i - \nu, t_{i+1}]$  (Phase 3) :
      - (a) choisir une initialisation  $\tau^k$  pour l'itération  $k = 0$  pour les instants de commutations.
      - (b) résolution du problème adjoint sur l'intervalle de temps  $T_i^*$ .
      - (c) calcul de la direction de descente sur l'intervalle  $T_i^*$  considérant le gradient de la fonction coût issue des résolutions précédentes du problème adjoint.
      - (d) résolution du problème de sensibilité sur l'intervalle de temps  $T_i^*$  afin de calculer la profondeur de descente (dans la direction de la descente).
      - (e) Mise à jour des estimations des paramètres inconnus estimées sur l'intervalle de temps  $T_i^*$
      - (f) (retour à l'étape 1 avec  $i = i + 1$ )
-

Le choix de la valeur  $\nu$  dans la fenêtre d'identification dépend du niveau de bruit présent dans les mesures des capteurs. Lorsque le bruit est élevé, cela entraîne une détection tardive. Donc, il est possible d'ajuster la valeur de  $\nu$  de manière appropriée. En augmentant la valeur de  $\nu$ , la fenêtre d'identification s'étend sur une période plus longue, ce qui permet de mieux prendre en compte les variations provoquées par la défaillance. Dans la prochaine section, les résultats numériques obtenus en utilisant les trois stratégies proposées seront présentés, en se basant sur les scénarios décrits dans le chapitre 2.

### 3.3 Résultats numériques

Afin d'illustrer les stratégies d'identification quasi-en lignes proposées dans la section précédente, trois scénarios sont considérés. Ces scénarios sont basés sur les mêmes configurations que le chapitre 2. Rappelons le premier scénario où la première source  $\Phi_1$  tombe en panne à l'instant  $t = 1500s$ , l'identification est réalisée à partir des observations obtenues dans la Figure 3.6. Les paramètres d'entrée du modèle sont donnés dans le tableau 2.1. Dans ce qui suit on considère les résultats obtenus avec une initialisation du temps de la défaillance par la moitié de la fenêtre en cours de traitement. Comme exemple, sur la fenêtre  $T_i = [t_i, t_{i+1}]$ ,  $t_{\text{nok},1}^1 = \frac{t_{i+1} + t_i}{2}$ . Le tableau 3.2 montre les résultats de l'identification par les deux stratégies compte tenu de différents niveaux de bruit.

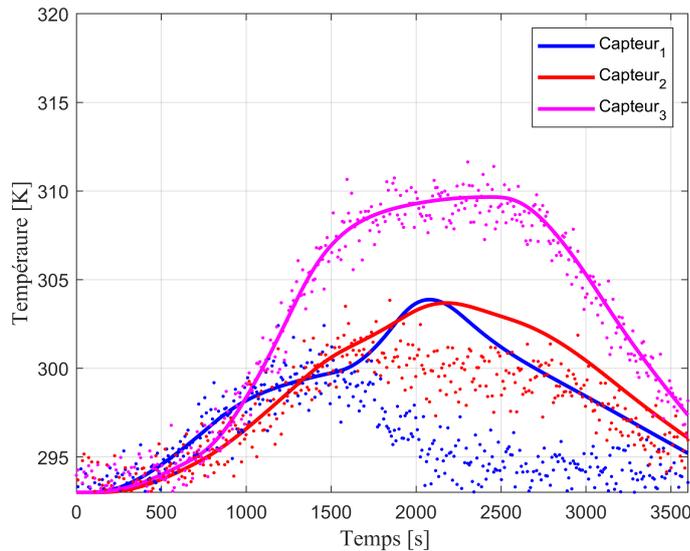


FIGURE 3.6 – Températures aux trois capteurs : cas de défaillance de  $\Phi_1$  avec un bruit de  $\sigma = 1^\circ\text{C}$ .

TABLEAU 3.2 – Identification des instants de défaillance pour différents niveaux de bruit.

		$J_{stop}$	Défaillance $t_{nok,1}^1$	Détection	Disponibilité du diagnostic
$\sigma = 0.1^\circ\text{C}$	stratégie 1	13.5	1499.2s	1802s	1845s
	stratégie 2	10.8	1495.2s	1622s	1717s
	stratégie 3	5.4	1499.4s	1604s	1687s
$\sigma = 0.5^\circ\text{C}$	stratégie 1	337.5	1497.8s	1802s	1859s
	stratégie 2	270	1498.7s	1802s	1847s
	stratégie 3	175.5	1508.8s	1647s	1767s
$\sigma = 1^\circ\text{C}$	stratégie 1	1350	1506.4s	1802s	1872s
	stratégie 2	1080	1505.1s	1802s	1844s
	stratégie 3	972	1503.8s	1683s	1789s

### 3.3.1 Défaillance et redémarrage d'une source

Dans ce deuxième scénario, on considère que la première source tombe en panne à  $t = 1000\text{s}$  puis redémarre à  $t = 2500\text{s}$ . En se basant sur les mêmes paramètres d'entrées du modèle du Tableau 2.1, on obtient les résultats présentés dans le tableau (3.3) en partant d'une initialisation par la moitié de la fenêtre pour  $t_{nok,1}^1$  et  $t_{ok,1}^1$  sur l'intervalle de l'identification.

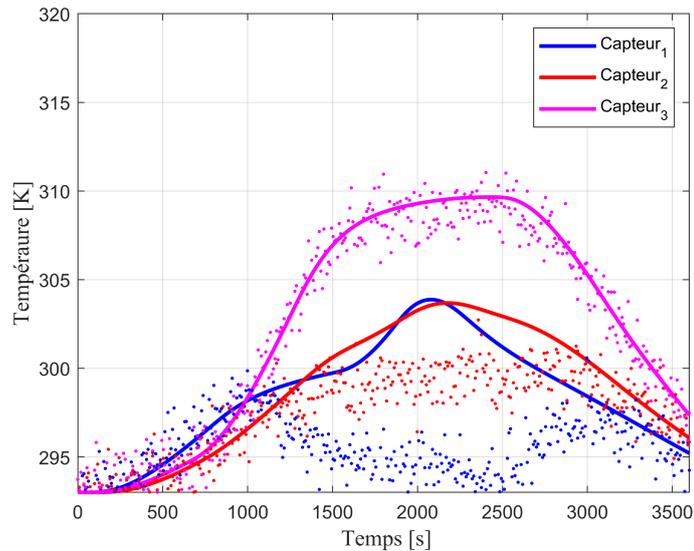


FIGURE 3.7 – Températures aux trois capteurs : cas de défaillance et redémarrage de  $\Phi_1$  avec un bruit de  $\sigma = 1^\circ\text{C}$ .

TABLEAU 3.3 – Identification des instants de défaillance des deux sources pour différents niveaux de bruit.

		$J_{stop}$	Défaillance $t_{nok,1}^1$	Détection et Disponibilité du diagnostic	Redémarrage $t_{ok,1}^1$	Détection et Disponibilité du diagnostic
$\sigma = 0.1^\circ\text{C}$	stratégie 1	13.5	998.1s	1352s/1395s	2498s	2702s/2764s
	stratégie 2	10.8	1002.4s	1262s/1347s	2501.4s	2702s/2773s
	stratégie 3	5.4	1000.3s	1116s/1188s	2501.5s	2628s/2710s
$\sigma = 0.5^\circ\text{C}$	stratégie 1	337.5	996s	1352s/1400s	2657s	2702s/2767s
	stratégie 2	270	995.1s	1262s/1348s	2507s	2702s/2791s
	stratégie 3	175.5	999.7s	1179s/1259s	2502.4s	2664s/2768s
$\sigma = 1^\circ\text{C}$	stratégie 1	1350	1010.3s	1352s/1413s	2678s	2702s/2788s
	stratégie 2	1080	992.1s	1352s/1368s	2495.7s	2702s/2797s
	stratégie 3	972	996.2s	1188s/1263s	2492s	2682s/2756s

### 3.3.2 Séparation des sources

Dans ce dernier scénario, on considère que les deux sources  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  tombent en panne à l'instant  $t_{nok,1}^1 = 1000\text{s}$  et  $t_{nok,1}^2 = 2000\text{s}$  respectivement.

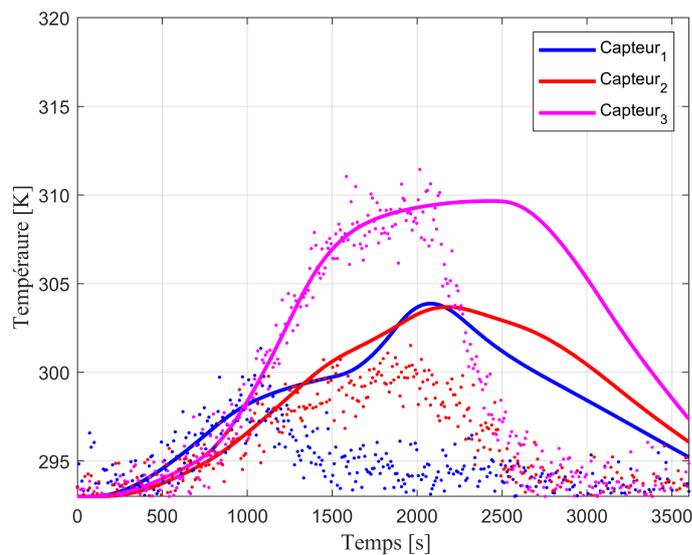

 FIGURE 3.8 – Températures aux trois capteurs : cas de défaillance de  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  avec un bruit de  $\sigma = 1^\circ\text{C}$ .

TABLEAU 3.4 – Identification des instants de défaillance des deux sources pour différents niveaux de bruit.

		$J_{stop}$	Défaillance $t_{nok,1}^1$	Détection et Disponibilité du diagnostic	Défaillance $t_{ok,1}^2$	Détection et Disponibilité du diagnostic
$\sigma = 0.1^\circ\text{C}$	stratégie 1	13.5	998.3s	1352s/1395s	1998.5s	2252s/2299s
	stratégie 2	10.8	1001.7s	1262s/1332s	1997.4s	2162s/2246s
	stratégie 3	5.4	997.18s	1116s/1186s	2000.8s	2088s/2136s
$\sigma = 0.5^\circ\text{C}$	stratégie 1	337.5	992s	1352s/1407s	1998.3s	2252s/2307s
	stratégie 2	270	995.8s	1262s/1344s	2003.7s	2162s/2261s
	stratégie 3	175.5	995.3s	1143s/1221s	2002.1s	2115s/2285s
$\sigma = 1^\circ\text{C}$	stratégie 1	1350	1005.8s	1352s/1412s	2005.7s	2252s/2311s
	stratégie 2	1080	1002.1s	1262s/1348s	2003.6s	2162s/2265s
	stratégie 3	972	1002.5s	1188s/1267s	1997.2s	2160s/2258s

Les résultats numériques obtenus par les trois stratégies montrent que lorsque le bruit de mesure des capteurs est faible, les trois stratégies produisent d'excellents résultats pour l'identification des instants de défaillances. Cela suggère que les méthodes utilisées dans les trois approches sont fiables et peuvent bien fonctionner dans des conditions de mesure précises.

Cependant, lorsque le bruit de mesure est élevé, la deuxième et la troisième stratégie montrent une meilleure précision pour l'identification des instants de panne par rapport à la première stratégie. Cela peut être attribué à l'adaptation des intervalles de détection et d'identification des défaillances dans ces deux approches.

En tenant compte de ces résultats, on peut conclure que la troisième stratégie est la plus performante en termes de temps de détection et de précision du diagnostic, particulièrement lorsque le bruit de mesure est élevé. C'est pourquoi cette stratégie sera utilisée dans la suite de ce manuscrit de thèse pour l'aspect d'identification quasi en ligne.

### 3.4 Bilan du chapitre 3

Le chapitre aborde en détail trois stratégies d'identification quasi-en ligne pour la détection et l'identification des défaillances ou des redémarrages de sources. La première stratégie repose sur l'utilisation d'une fenêtre de détection et d'identification de taille égale. Cela signifie que la même période est utilisée pour la détection et l'identification, sans distinction entre ces deux processus. Cette approche considère que la défaillance ou le redémarrage d'une source peut être détecté et identifié avec la même fenêtre temporelle, sans nécessiter une adaptation de la taille de la fenêtre en fonction du processus de détection ou d'identification.

La deuxième stratégie propose une amélioration de la première en modifiant la taille de l'intervalle utilisé pour la détection et en adaptant l'intervalle associé à l'identification. Dans cette approche, l'intervalle d'identification est défini comme étant deux fois la taille de l'intervalle de détection. Cela permet d'améliorer la précision de l'identification des instants de défaillance ou de redémarrage, car une fenêtre d'identification plus large permet de mieux capturer les événements de défaillance ou de redémarrage qui se produisent à proximité de la fenêtre de détection.

Enfin, la troisième stratégie propose une détection en temps réel, où la détection est lancée à chaque intervalle de mesure de 9 secondes. Cela permet une détection plus rapide des événements de défaillance ou de redémarrage, car la détection est effectuée de manière plus fréquente. Pour l'identification, une fenêtre d'identification adaptée est utilisée, en soustrayant une valeur fixe de la fenêtre de détection. Cette approche combinant une détection en temps réel et une fenêtre d'identification adaptée contribue à améliorer la performance globale de la stratégie en permettant une détection plus rapide et une identification plus précise des instants de défaillance ou de redémarrage.

En conclusion, les trois stratégies d'identification quasi-en ligne présentées dans ce chapitre offrent des approches différentes pour la détection et l'identification des défaillances ou des redémarrages de sources.

### Références bibliographiques

- [1] Azar, T. (2021). *Développement de stratégies de commandes pour des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles paraboliques non linéaires*. PhD thesis, Université d'Angers.
- [2] Vergnaud, A., Perez, L., and Autrique, L. (2016). Quasi-online parametric identification of moving heating devices in a 2d geometry. *International Journal of Thermal Sciences*, 102 :47–61.

# SYSTÈME LINÉAIRE – ADAPTATION D’UN FILTRE DE KALMAN

---

Dans les précédents chapitres, l’approche innovante pour l’identification de défaillances dans les systèmes thermiques basés sur la méthode du gradient conjugué a été présentée dans le chapitre 2, tandis que son adaptation quasi en ligne a été discutée dans le chapitre 3. Le présent chapitre se concentre sur une méthode alternative qui se base sur le filtre bayésien. L’objectif de cette méthode est de mettre en évidence l’approche innovante présentée dans les chapitres précédents en la comparant à une méthode différente. Ainsi, cette méthode permet d’élargir le champ de vision sur les différentes possibilités d’identification de défaillances dans les systèmes thermiques.

## 4.1 Introduction

Dans le cadre du domaine statistique, la théorie de l’inversion statistique permet de résoudre les problèmes inverses de manière systématique, de telle sorte que toutes les informations disponibles soient correctement incorporées dans le modèle.

En effet, cette théorie permet de reformuler les problèmes inverses en problèmes d’inférence au moyen de la statistique bayésienne. Dans la statistique bayésienne, toutes les quantités sont modélisées comme des variables aléatoires. Le caractère aléatoire, qui reflète l’incertitude de l’observateur concernant leurs valeurs, est codé dans la distribution de probabilité des quantités. Du point de vue de la théorie de l’inversion statistique, la solution d’un problème inverse est la distribution de probabilité de la quantité d’intérêt lorsque toutes les informations disponibles ont été incorporées dans le modèle. Cette distribution, appelée distribution a posteriori, décrit le degré de confiance dans la quantité après que la mesure ait été effectuée.

La plupart des difficultés rencontrées lors de la résolution des problèmes inverses viennent du fait que ces problèmes sont souvent mal posés. Les approches déterministes telle que les techniques de régularisation décrites dans le premier chapitre sont concentrés sur deux types de questions : l’unicité et la stabilité des problèmes, et la convergence de la solution vers la solution de norme minimale lorsque la norme du bruit tend vers zéro ce qui permet de produire une

estimation raisonnable des quantités d’intérêt sur la base des données disponibles. Contrairement à l’approche déterministe et aux méthodes de régularisation associées, l’inférence bayésienne offre une approche différente pour la résolution des problèmes inverses en modélisant la solution inconnue comme une variable aléatoire et en la décrivant au moyen de sa distribution plutôt qu’en recherchant une valeur spécifique. En d’autres termes, plutôt que d’essayer de le résoudre pour un  $\mathbf{x}$  spécifique, le problème inverse est reformulé sous la forme d’une inférence bayésienne : étant donné une observation d’une quantité dépendante  $\mathbf{y}$  avec une description de son incertitude (bruit), trouver la distribution des valeurs de la quantité  $\mathbf{x}$ , étant donné le problème direct et les éventuelles informations ou informations complémentaires, ou a priori. La formule de Bayes fournit l’outil permettant de combiner l’information obtenue par la mesure avec l’information a priori (Kaipio and Somersalo, 2006), (Idier, 2013), (Dashti and Stuart, 2017).

Les problèmes d’estimation d’état, également appelés problèmes inverses non stationnaires (Kaipio and Somersalo, 2006), présentent un grand intérêt dans plusieurs champs d’applications pratiques. Dans ce type de problèmes, les données mesurées disponibles sont utilisées avec des connaissances préalables sur les phénomènes d’intérêt et les dispositifs de mesure afin de produire séquentiellement des estimations des variables dynamiques souhaitées. Ceci est achevé de manière à ce que l’erreur soit statistiquement minimisée (Maybeck, 1982). Par conséquent, les problèmes d’estimation d’état permettent de traiter les prédictions du modèle contenant des incertitudes en combinaison avec des mesures qui sont également incertaines, afin d’obtenir des estimations plus précises des variables du système.

Les problèmes d’estimation d’état sont résolus à l’aide de filtres dits bayésiens (Doucet et al., 2001), (Kaipio and Somersalo, 2006), (Özisik and Orlande, 2021). Généralement, dans l’approche bayésienne, l’idée est d’essayer d’utiliser toutes les informations disponibles afin de réduire la quantité d’incertitude présente dans un problème d’inférence ou de prise de décision. Au fur et à mesure que de nouvelles informations sont obtenues, elles sont combinées aux informations précédentes pour former la base des procédures statistiques. Le mécanisme formel utilisé pour combiner les nouvelles informations avec les informations précédemment disponibles est connu sous le nom de théorème de Bayes (Kaipio and Somersalo, 2006).

La méthode de filtre bayésien la plus connue est le filtre de Kalman (Kalman, 1960), (Maybeck, 1982), (Doucet et al., 2001), (Kaipio and Somersalo, 2006). Cependant, l’application du filtre de Kalman est limitée aux modèles linéaires avec des bruits gaussiens additifs. Des extensions du filtre de Kalman ont été développées dans le passé pour des cas moins restrictifs en utilisant des techniques de linéarisation et d’échantillonnage (Ristic et al., 2003), (Chen et al., 2003), (Kaipio and Somersalo, 2006). De même, des méthodes de Monte Carlo ont été développées afin de représenter la densité a posteriori en termes d’échantillons aléatoires et de poids associés. Ces méthodes de Monte Carlo, généralement appelées filtres particulières parmi

d'autres désignations trouvées dans la littérature, ne nécessitent pas les hypothèses restrictives du filtre de Kalman. Par conséquent, les filtres particuliers peuvent être appliqués aux modèles non linéaires avec des erreurs non gaussiennes (Doucet et al., 2001), (Arulampalam et al., 2002), (Kaipio and Somersalo, 2006), (Özisik and Orlande, 2021).

## 4.2 Contexte de la théorie de l'estimation

La théorie bayésienne est une branche de la théorie mathématique des probabilités qui permet de modéliser l'incertitude et les résultats d'intérêt en incorporant des connaissances préalables à des observations. L'analyse bayésienne est considérée comme l'une des méthodes populaires pour résoudre les problèmes inverses, dont les résolutions peuvent être complexes, elle nécessite certaines connaissances préalables. Pour une introduction détaillée à la perspective bayésienne, le lecteur est invité à se reporter à (Chen et al., 2003), (Wikle and Berliner, 2007), (Özisik and Orlande, 2021).

Avant d'aborder l'inférence bayésienne et l'estimation bayésienne, nous allons d'abord présenter quelques statistiques bayésiennes fondamentales.

**Le théorème de Bayes :** Le théorème de Bayes établit des relations entre des variables aléatoires en probabilité conditionnelle. Le cas de base de ce théorème est énoncé comme suit :

**Théorème 4.2.1** (Théorème de Bayes). *Étant donné deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , nous avons*

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X) * P(X)}{P(Y)} \propto P(Y|X) * P(X). \quad (4.1)$$

où  $P(X|Y)$  est la probabilité de l'événement  $X$  sachant l'événement  $Y$ ,  $P(Y|X)$  est la probabilité de l'événement  $Y$  sachant l'événement  $X$ ,  $P(X)$  est la probabilité a priori de l'événement  $X$  et  $P(Y)$  est la probabilité de l'événement  $Y$ . En pratique, le dénominateur n'est qu'un facteur de normalisation. Avec la formule présentée dans le théorème (4.2.1), dans le cadre de l'inférence bayésienne, nous appellerons  $P(X)$  comme a priori,  $P(Y|X)$  comme vraisemblance (likelihood), et  $P(X|Y)$  comme a posteriori.

**Règle de marginalisation :** Cette règle est utilisée pour calculer la fonction de densité de probabilité (fdp) d'un vecteur aléatoire  $X$  à partir de la fdp conjointe de deux ou plusieurs vecteurs (dont  $X$ ) :

$$\pi(X) = \int \pi(X, Y) dY = \int \pi(X|Y) \pi(Y) dY. \quad (4.2)$$

où  $\pi(X, Y)$  est la fdp commune de deux vecteurs aléatoires  $X$  et  $Y$ , et peut être factorisée comme :  $\pi(X, Y) = \pi(X|Y) \pi(Y)$ .

**Propriété de Markov :** La propriété de Markov peut être comprise intuitivement comme une propriété ”sans mémoire”. En effet, la distribution future que nous souhaitons prédire ne dépend que de l’état actuel. L’état que nous avons précédemment ne nous révèle aucune information supplémentaire. Ceci reflète bien le système d’advection-diffusion vu dans le précédent chapitre. Pour tout instant  $t_m$  donné, notre objectif est de prédire  $t_n$  où  $t_n > t_m$ . Tout ce qui nous intéresse, c’est l’état à l’instant  $t_m$  et les effets du système étudié sur l’état à l’instant  $t_m$ .

Propriété de Markov pour le temps discret : soit  $\{x_i\}$  une suite d’états.

$$\pi(x_{i+1} = j | x_i) = \pi(x_{i+1} = j | x_i, x_{i-1}, \dots, x_0). \quad (4.3)$$

Soit  $X$  une variable aléatoire représentant l’inconnue  $\mathbf{x}$ . Suivant le paradigme bayésien, le caractère aléatoire reflète l’absence de certitude sur la valeur de la variable  $\mathbf{x}$ , plutôt que de faire référence à un processus aléatoire générant les valeurs. De même, que  $Y$  soit un modèle probabiliste de la quantité observée. Pour simplifier, nous supposons que les variables prennent des valeurs dans des espaces euclidiens,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ . On considère le modèle stochastique suivant :

$$Y = f(X) + \varepsilon,$$

où  $\varepsilon$  représente le bruit additif dans l’observation. Nous supposons que  $\varepsilon$  a une distribution de probabilité dans  $\mathbb{R}^m$  notée par  $\pi_\varepsilon$ . En supposant que  $\varepsilon$  et  $X$  sont indépendants, la fdp de  $Y$ , conditionnelle à  $X = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , est obtenue en décalant la densité  $\pi_\varepsilon$  autour de  $f(X)$ , ce qui conduit à la densité de vraisemblance :

$$\pi_{Y|X}(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = \pi_\varepsilon(\mathbf{y} - f(X)).$$

Soit  $\pi_X$  la densité de probabilité a priori de  $X$ . Pour mettre à jour cette a priori par l’information fournie par la mesure de  $Y = \mathbf{y}_{obs}$ , nous utilisons la formule de Bayes :

$$\pi_{X|Y}(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \frac{\pi_{Y|X}(\mathbf{y} | \mathbf{x})\pi_X(\mathbf{x})}{\pi_Y(\mathbf{y})}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}_{obs}, \quad (4.4)$$

où le dénominateur est la densité marginale :

$$\pi_Y(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} \pi_{Y|X}(\mathbf{y} | \mathbf{x})\pi_X(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

La densité a posteriori (4.4) représente la solution complète du problème inverse dans le cadre bayésien. Cependant, en pratique, elle ne fournit qu’un point de départ pour extraire des informations sur l’inconnue  $\mathbf{x}$ .

Finalement, pour conclure cette section, dans l'inférence bayésienne, toutes les incertitudes y compris les états, les paramètres qui varient dans le temps ou qui sont fixes, sont traités comme des variables aléatoires. L'inférence est réalisée dans le cadre bayésien compte tenu de toutes les informations disponibles, telle que son objectif est d'utiliser les informations a priori et les connaissances causales, quantitativement et qualitativement, pour déduire la probabilité conditionnelle, étant donné des observations finies. Dans la prochaine section, une introduction sur les problèmes d'estimation de l'état sera étudiée ainsi que sa réalisation dans le cadre bayésien.

### 4.3 Problème d'estimation d'état

Les problèmes d'estimation d'état sont écrits en termes de deux processus stochastiques, à savoir le modèle d'évolution et le modèle d'observation (Doucet et al., 2001), (Arulampalam et al., 2002), (Kaipio and Somersalo, 2006), (Özisik and Orlande, 2021). Le vecteur  $\mathbf{X}_k$ , appelé vecteur d'état, contient toutes les variables d'état qui décrivent le système à un instant donné  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . De plus, le vecteur  $\mathbf{Y}_k$  qui contient les mesures est considéré comme disponible.

Le modèle d'évolution est donné en formulant mathématiquement le problème analysé et en considérant tous les phénomènes qui influencent l'évolution dynamique du vecteur d'état  $\mathbf{X}_k$ . De même, le modèle d'observation est la formulation mathématique des phénomènes impliqués dans le processus de mesure et qui permet de relier les variables mesurées  $\mathbf{Y}_k$  au vecteur d'état  $\mathbf{X}_k$ . Le modèle d'évolution et le modèle d'observation peuvent être, respectivement, écrits sous les formes générales suivantes :

$$\text{Modèle d'évolution : } \mathbf{X}_k = \mathbf{f}_k (\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{w}_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.5a)$$

$$\text{Modèle d'observation : } \mathbf{Y}_k = \mathbf{g}_k (\mathbf{X}_k, \mathbf{v}_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.5b)$$

où  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  sont des fonctions vectorielles connues,  $\mathbf{Y}_k$  est la prédiction des mesures obtenues avec le modèle d'observation, tandis que  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{v}_k$  représentent respectivement, les bruits dans le modèle d'évolution de l'état et dans le modèle d'observation.

Le filtrage stochastique est considéré comme un problème inverse : en effet, étant donné les observations  $\mathbf{Y}_k$ , pourvu que  $\mathbf{f}_k$  et  $\mathbf{g}_k$  soient connus, on cherche à trouver le  $\hat{\mathbf{X}}_k$  optimal. Dans le chapitre précédent, on a vu la définition d'un problème qui est dit bien posé s'il satisfait les trois conditions : existence, unicité et stabilité, sinon il est dit mal posé. Dans ce contexte, le problème du filtrage stochastique est considéré comme mal posé, pour plus de détails, le lecteur est invité à se reporter à (Chen et al., 2003). Avant d'aborder la formulation mathématique du problème du filtrage stochastique, il est nécessaire de définir certains concepts de base :

- La prédiction est une forme d'estimation a priori, dont l'objectif est de déduire des informations sur ce que sera la quantité d'intérêt à un certain moment  $t + \tau$  dans le futur

( $\tau > 0$ ) en utilisant des données mesurées jusqu’à l’instant  $t$  inclus.

- Le filtrage est une opération qui consiste à extraire des informations sur une quantité d’intérêt au temps  $t$  en utilisant des données mesurées jusqu’à  $t$  inclus.
- Le lissage est une forme d’estimation a posteriori dans la mesure où les données mesurées après le moment d’intérêt sont utilisées pour l’estimation. Plus précisément, l’estimation lissée au moment  $t'$  est obtenue en utilisant des données mesurées sur l’intervalle  $[0, t]$ , où  $t' < t$ .

La densité de probabilité  $\pi(\mathbf{X}_0|\mathbf{Y}_0) = \pi(\mathbf{X}_0)$  à l’état initial  $t = t_0$  est considérée comme connue. Ainsi, le problème d’estimation d’état vise à obtenir séquentiellement des informations sur  $\mathbf{X}_k$  en se basant sur le modèle d’évolution d’état (4.5a), ainsi que sur le modèle de mesure (4.5b).

Les deux modèles d’évolution et d’observation (4.5a, 4.5b) comprennent les hypothèses suivantes (Kaipio and Somersalo, 2006), (Özisik and Orlande, 2021) :

1. le vecteur d’état  $\mathbf{X}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , suit un processus Markovien :

$$\pi(\mathbf{X}_k|\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_{k-1}) = \pi(\mathbf{X}_k|\mathbf{X}_{k-1}). \quad (4.6)$$

2. la prédiction des données mesurées  $\mathbf{Y}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , suit un processus Markovien par rapport à l’historique de  $\mathbf{X}_k$  :

$$\pi(\mathbf{Y}_k|\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_k) = \pi(\mathbf{Y}_k|\mathbf{X}_k). \quad (4.7)$$

3. le vecteur d’état  $\mathbf{X}_k$  dépend des observations passées à travers son propre historique :

$$\pi(\mathbf{X}_k|\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Y}_{1:k-1}) = \pi(\mathbf{X}_k|\mathbf{X}_{k-1}). \quad (4.8)$$

En plus des hypothèses ci-dessus pour les modèles d’évolution et d’observation (4.5a, 4.5b), on suppose que les vecteurs de bruit  $\mathbf{v}_i$  et  $\mathbf{v}_j$ , ainsi que  $\mathbf{n}_i$  et  $\mathbf{n}_j$ , sont indépendants pour  $i \neq j$  et également indépendants de l’état initial  $\mathbf{X}_0$ . Les vecteurs  $\mathbf{v}_i$  et  $\mathbf{n}_j$  sont également mutuellement indépendants pour tout  $i$  et  $j$  (Kaipio and Somersalo, 2006), (Özisik and Orlande, 2021). Finalement, on peut résumer les problèmes d’estimation d’état comme suivant :

1. Le problème de prédiction, qui concerne la détermination de  $\pi(\mathbf{X}_k|\mathbf{Y}_{1:k-1})$  ;
2. Le problème de filtrage, qui concerne la détermination de  $\pi(\mathbf{X}_k|\mathbf{Y}_{1:k})$  ;
3. Le problème de lissage à retard fixe, concernant la détermination de  $\pi(\mathbf{X}_k|\mathbf{Y}_{1:k+p})$ , où  $p \geq 1$  est le retard fixe ;

4. Le problème de lissage sur l'ensemble du domaine, concernant la détermination de  $\pi(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:K})$ , où  $\mathbf{Y}_{1:K} = \{\mathbf{Y}_k, k = 1, \dots, K\}$  est l'ensemble complet des mesures.

La densité de probabilité a posteriori  $\pi(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:k})$  est obtenue séquentiellement avec des filtres bayésiens en deux étapes : la prédiction et la mise à jour. A partir de la distribution au temps initial  $t_0$ ,  $\pi(\mathbf{X}_0 | \mathbf{Y}_0) = \pi(\mathbf{X}_0)$ , une information préalable pour les variables d'état au temps suivant,  $t_1$ , est prédite en utilisant le modèle d'évolution d'état donné par l'équation (4.5a). Ensuite, les mesures  $\mathbf{Y}_1$  sont utilisées pour mettre à jour cette information préalable, ainsi que le modèle d'observation donné par l'équation (4.5b), dans la fonction de vraisemblance (le modèle statistique pour les erreurs de mesure), de sorte que la densité de probabilité a posteriori  $\pi(\mathbf{X}_1 | \mathbf{Y}_1)$  est obtenue. Ce processus est ensuite répété pour l'estimation des variables d'état à des moments ultérieurs, au fur et à mesure que les données mesurées sont séquentiellement assimilées nous permettant de construire le schéma de mise à jour récursif présenté par la Figure 4.1 :

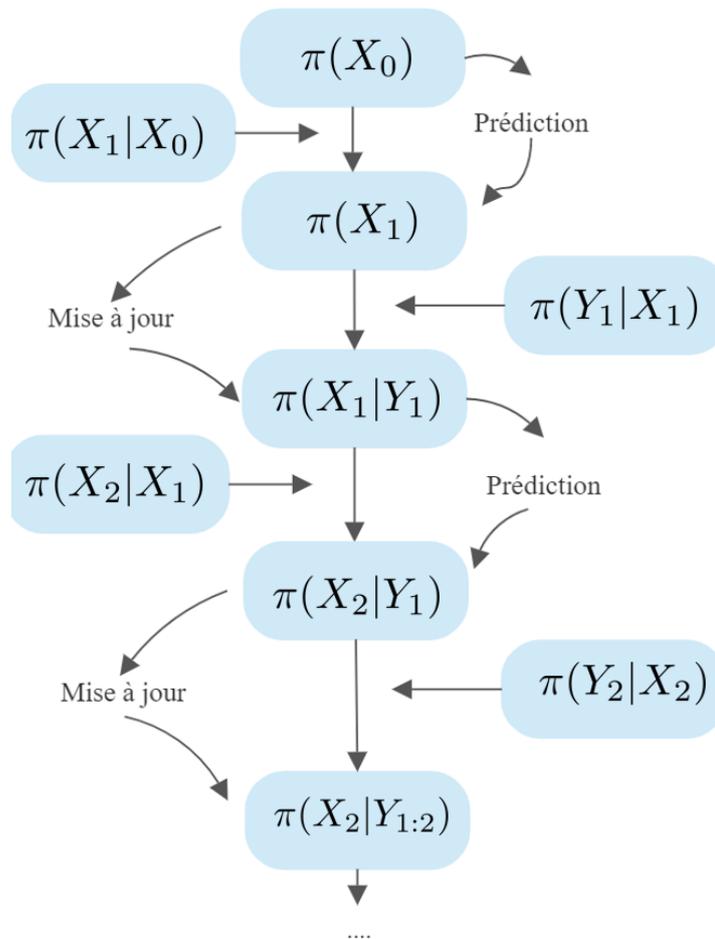


FIGURE 4.1 – Étapes de prédiction et de mise à jour pour le filtrage bayésien.

## 4.4 Le filtre de Kalman

Le filtre de Kalman (FK) est un algorithme stochastique récursif, basé sur la notion d’état dont les performances ont été largement démontrées à partir de l’estimation d’état pour différents types de systèmes linéaires. Pour la mise en œuvre, le filtre de Kalman exige que les modèles d’évolution et d’observation donnés par les équations (4.5a, 4.5b) soient linéaires et avec des bruits gaussiens additifs. L’algorithme de Kalman présente plusieurs avantages, il s’agit d’une technique statistique qui permet de décrire d’une manière convenable la structure aléatoire des mesures expérimentales. En effet, dans sa procédure d’estimation, le FK extrait efficacement l’information des observations des sorties du système et il est puissant pour traiter le caractère aléatoire du bruit de mesure lorsqu’il est gaussien et blanc. La version originale du FK (Kalman, 1960), (Kalman and Bucy, 1961), (Haykin, 2004) s’applique aux systèmes dynamiques linéaires où l’équation d’état est linéaire et les mesures sont également liées à l’état par une équation linéaire (Wan et al., 2001), (Murphy, 2012). Ensuite, une extension du FK de base a été introduite (Chen, Liu, Jang and Tuan, 2007) afin de traiter les systèmes non linéaires largement rencontrés dans la pratique. Le filtre résultant est appelé le filtre de Kalman étendu (FKE)<sup>1</sup>.

Dans la littérature, la méthode d’estimation par filtre de Kalman est utilisée avec succès pour prédire les PICC unidimensionnels, bidimensionnels, multidimensionnels et non linéaires. (Scarpa and Milano, 1995) et (Kaipio and Somersalo, 1999) ont tenté de résoudre les problèmes de transferts thermiques inverses unidimensionnels. Au cours des dernières années, une grande majorité des articles ont porté sur la résolution de problèmes inverses de conduction thermique visant à récupérer un flux de chaleur, une température ou un historique de source de chaleur. Dans ces études, l’association du filtre de Kalman avec l’algorithme des moindres carrés récursifs (RLSA) a été fréquemment utilisée. Par exemple, les travaux de (Tuan et al., 1996), (Chen, Liu, Jang and Tuan, 2007), (Noh et al., 2018) traitent de problèmes unidimensionnels et bidimensionnels. Dans le prolongement de ces travaux, (Jang et al., 2006) ont tenté d’utiliser un RLSA basé sur le filtre de Kalman pour estimer le flux de chaleur à la frontière variant de manière impulsive avec le temps en utilisant le schéma à éléments finis au lieu du schéma à différences finies pour discrétiser le problème dans l’espace, ce qui permet de traiter des problèmes multidimensionnels de différentes géométries.

Cette technique (FK-RLSA) a également été appliquée pour la résolution de problèmes de conduction-rayonnement inverse (Wen et al., 2017b), (Wen et al., 2018). (Wang et al., Wang et al.) et (Chen, Cheng, Jang and Tuan, 2007) ont combiné l’EKF avec le RLSA pour récupérer une source de chaleur transitoire. La même combinaison (FKE-RLSA) a été adoptée par (Jang and Cheng, 2009) pour l’estimation d’une source de chaleur variable dans le temps générée par

---

1. Dans le contexte du FK étendu (FKE), il n’est pas requis que les modèles d’évolution et d’observation soient des fonctions linéaires de l’état. Au lieu de cela, ces modèles peuvent être des fonctions générales qui possèdent une propriété de différentiabilité.

un dispositif électronique à semi-conducteurs. (LeBreux et al., 2013) ont utilisé la méthode FK sans parfum (Unscented Kalman filter, UKF)<sup>2</sup> pour identifier l'épaisseur variable dans le temps du rebord à changement de phase dans le réacteur. Ils ont démontré que le FK sans parfum donne de meilleurs résultats que le FK étendu et le FK original. (Daouas and Radhouani, 2004) ont adapté le (FKE) basé sur le concept d'état augmenté pour la reconstruction d'une perturbation thermique de surface, variable dans le temps et l'espace.

Dans (Ijaz et al., 2007), un estimateur adaptatif a été développé pour estimer le flux de chaleur limite dépendant du temps dans un domaine de conduction thermique bidimensionnel avec des parois chauffées et isolées. (Pacheco et al., 2015) ont estimé un flux de chaleur de haute magnitude dépendant de l'emplacement et du temps, appliqué sur une surface d'une plaque plane, à l'aide de mesures de température transitoires prises sur la surface opposée de la plaque par un FK et un modèle d'erreur d'approximation. (Wen et al., 2019) ont comparé différentes méthodes de FK pour l'inversion de l'interface de changement de phase et du flux de chaleur dans un milieu participant unidimensionnel. Comme la conclusion de (LeBreux et al., 2013), le FK non parfumé a montré des performances satisfaisantes. Ils ont couplé le FK avec l'estimateur récursif des moindres carrés (RLSA) pour estimer l'épaisseur de fusion variable et le flux thermique d'entrée dans un milieu semi-transparent unidimensionnel (Wen et al., 2018). Ils ont également adopté le FK non parfumé et le FK-RLSA pour réaliser l'estimation des paramètres couplés de conduction-radiation (Wen et al., 2017a), (Wen, Qi, Wang, Ren, Wei and Ruan, 2020). (Wang et al., 2020) ont proposé et développé une méthode en temps réel basée sur le FK pour identifier la source de chaleur mobile dans un système de transfert de chaleur tridimensionnel. (Jamei et al., 2021) ont développé un nouvel algorithme hybride d'apprentissage automatique, le filtre de Kalman étendu, est utilisé pour fournir une prédiction précise des nanofluides à base d'huile. Dans (Alaeian et al., 2022) une estimation de la température par FK avec un modèle d'observation photoacoustique pendant le traitement du cancer par hyperthermie, en couplant le traitement par hyperthermie laser du cancer à la mesure photoacoustique de la température des tissus internes, en résolvant un problème d'estimation d'état avec le filtre de Kalman.

Après avoir vu différents exemples d'application du FK au domaine de la thermique, il est temps de se pencher sur les équations qui régissent son fonctionnement. On suppose que les bruits dans ces modèles (4.5a, 4.5b) ont des moyennes nulles et des matrices de covariance respectivement connues  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$ . De plus, on suppose que la distribution des variables d'état à l'instant initial  $\pi(\mathbf{X}_0|\mathbf{Y}_0) = \pi(\mathbf{X}_0)$  est gaussienne. Par conséquent, la densité a posteriori  $\pi(\mathbf{X}_k|\mathbf{Y}_{1:k})$  à  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ , est gaussienne, ainsi le filtre de Kalman donne la solution optimale au problème de l'estimation de l'état.

---

2. Le FK sans parfum effectue une estimation approximative de la densité a posteriori en utilisant une approche similaire au filtre de Kalman étendu, mais au lieu d'approximer les fonctions non linéaires du modèle d'évolution et du modèle de mesure, il approxime la densité de probabilité à l'aide d'un ensemble de points pondérés soigneusement sélectionnés de manière déterministe.

Avec les hypothèses ci-dessus, les modèles d'évolution et d'observation peuvent être écrits, respectivement, comme :

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{S}_k + \mathbf{w}_k, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k + \mathbf{v}_k, \quad (4.10)$$

où  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{H}$  sont des matrices connues qui peuvent varier dans le temps mais ne dépendent pas de  $\mathbf{X}$ . Alors que  $\mathbf{F}$  donne l'évolution linéaire du vecteur d'état  $\mathbf{X}$  qui est également une gaussienne avec une moyenne calculable  $\boldsymbol{\mu}$  et une matrice de covariance  $\boldsymbol{\Sigma}$ ,  $\mathbf{H}$  fournit la relation linéaire entre le vecteur d'état et les mesures dans le modèle d'observation. Dans l'équation (4.9),  $\mathbf{S}$  est un vecteur connu d'entrées pour le modèle d'évolution.

Les étapes de prédiction et de mise à jour du filtre de Kalman sont données par :

**Prédiction :**

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \hat{\boldsymbol{\mu}}_{k-1|k-1} + \mathbf{S}_k, \quad (4.11)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k. \quad (4.12)$$

**Mise à jour :**

$$\mathbf{K}_k = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \left( \mathbf{H}_k \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \right)^{-1}, \quad (4.13)$$

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{\mu}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \left( \mathbf{Y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\boldsymbol{\mu}}_{k|k-1} \right), \quad (4.14)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1}. \quad (4.15)$$

La matrice  $\mathbf{K}_k$  donnée par l'équation (4.13) est appelée matrice de gain de Kalman. Dans l'équation (4.14),  $\mathbf{K}_k$  multiplie la différence entre les mesures  $\mathbf{Y}_k$ , et la sortie du modèle d'observation,  $\mathbf{H}_k \hat{\boldsymbol{\mu}}_{k|k-1}$ , pour actualiser les variables d'état prédites par l'équation (4.11). Ainsi, après avoir prédit la variable d'état  $\mathbf{X}_k$  (moyenne  $\boldsymbol{\mu}$  et matrice de covariance  $\boldsymbol{\Sigma}$ ) avec les équations (4.11, 4.12), des estimations a posteriori de ces quantités sont obtenues dans l'étape de mise à jour avec les équations (4.14, 4.15).

## 4.5 Le lissage de Kalman

Le lisseur de Kalman (Chen et al., 2003), (Kaipio and Somersalo, 2006), (Murphy, 2012), (Özisik and Orlando, 2021) également connu sous le nom de lisseur Rauch-Tung-Striebel (RTS) (Rauch et al., 1965) fournit un moyen intelligent de calculer la moyenne et la matrice de covariance de  $\pi(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{1:K})$  sans inverser d'énormes matrices. Le lissage permet d'exploiter les informations plus que le filtrage et conduit ainsi à des résultats plus performants. Fondamentalement,

le lisseur de Kalman part des résultats du filtre de Kalman en utilisant toutes les mesures à disposition (futures, présentes et passées) et opère à reculons dans le temps, c'est-à-dire qu'il obtient  $\mu_{k|K}$  et  $\Sigma_{k|K}$  sur la base de  $\mu_{k+1|K}$  et  $\Sigma_{k+1|K}$ . On peut voir qu'une fois cet algorithme terminé, on peut obtenir  $\mu_{k|K}$  et  $\Sigma_{k|K}$  pour tous les  $k$  de manière récursive en partant de  $\pi(\mathbf{X}_K|\mathbf{Y}_{1:K}) = N(\mu_{K|K}, \Sigma_{K|K})$  de telle sorte que  $\mu_{K|K}$  et  $\Sigma_{K|K}$  sont obtenus à partir du filtre de Kalman.

Dans la littérature du domaine de la thermique, on retrouve fréquemment le KS. Le concept d'état augmenté a été appliqué avec succès pour la résolution d'un PICC non linéaire avec un temps de calcul court (Daouas and Radhouani, 2000). Avec un ajustement approprié des paramètres accordables de l'FKE, la stabilité de la procédure d'estimation a été assurée malgré la présence de données bruyantes réelles. Cependant, le flux thermique de surface récupéré a montré un décalage temporel, par rapport à la solution exacte, qui dépend notamment de l'emplacement de la mesure. Sur la base de ces résultats, les mêmes auteurs ont tenté par la suite d'introduire le concept d'informations de mesures futures dans l'algorithme FKE (Daouas and Radhouani, 2004). Ils ont proposé une nouvelle formulation de la technique de lissage de Kalman, étendue à un modèle non linéaire, et l'ont appliquée à la solution d'un PICC unidimensionnel transitoire comprenant la reconstruction du flux de chaleur et de la température variant dans le temps à la surface d'un solide cylindrique conducteur de chaleur. Ce lisseur de Kalman étendu (EKS) a considérablement réduit le décalage temporel de la solution et a également amélioré sa stabilité. La technique EKS a également été testée en présence d'un ensemble réel de mesures de température expérimentales bruitées (Daouas and Radhouani, 2007) et a fourni des estimations symétriques et stables des historiques de flux de chaleur et de température à la surface d'un cylindre conducteur de chaleur. En adoptant les informations de température future de la surface arrière, (Gaaloul and Daouas, 2018) ont utilisé le lisseur de Kalman pour estimer de manière inverse le flux de chaleur sur l'avant et l'arrière d'un système bidimensionnel non linéaire cylindrique. En couplant le filtre de Kalman et le lissage de Rauch-Tung-Striebel, (Wen, Qi, Niu, Wei and Ren, 2020) ont construit la technique de lissage de Kalman pour résoudre l'estimation inverse du problème de conduction-rayonnement.

Pour cet algorithme, nous supposons que nous avons déjà appliqué le filtre de Kalman, le lisseur de Kalman peut alors être obtenu en rajoutant aux équations du filtre de Kalman les équations suivantes :

$$\text{Entrées : } \hat{\boldsymbol{\mu}}_{K|K}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{K|K}$$

1. Pour  $k = K - 1, K - 2, \dots, 1$  :

$$\mathcal{P}_k = \hat{\Sigma}_{k|k} \mathbf{F}_k^T \hat{\Sigma}_{k+1|k}^{-1} \quad (4.16)$$

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{k|K} = \hat{\boldsymbol{\mu}}_{k|k} + \mathcal{P}_k (\boldsymbol{\mu}_{k+1|\tau} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{k+1|k}), \quad (4.17)$$

$$\hat{\Sigma}_{k|K} = \hat{\Sigma}_{k|k} + \mathcal{P}_k (\Sigma_{k+1|\tau} - \hat{\Sigma}_{k+1|k}) \mathbf{C}_k^T. \quad (4.18)$$

Finalement, après avoir vu le contexte de la théorie de l'estimation et les différents types du filtre bayésien, en particulier le filtrage et le lissage de Kalman, la prochaine section a pour objectif de faire une adaptation du filtre puis du lisseur de Kalman pour la détection de défaillance dans un système physique décrit par des EDPs. Une présentation et modélisation du système physique sont étudiées.

## 4.6 Le filtre de Kalman adapté à l'identification des défaillances

Dans le contexte de diagnostic des défauts, l'adaptation du FK pour l'identification des défaillances dans des systèmes thermiques offre une solution prometteuse. Le FK, qui est une méthode couramment utilisée pour l'estimation et la prédiction des états dans les systèmes dynamiques, peut être utilisé pour estimer l'état d'un système thermique et détecter les défaillances éventuelles. En combinant les mesures des capteurs avec les modèles mathématiques du système, le FK peut fournir des estimations précises de l'état du système, même en présence de bruit et d'incertitudes.

Dans cette section, nous étudions la résolution numérique d'un problème inverse thermique dans une géométrie 2D. L'objectif est d'appliquer l'adaptation du FK pour identifier les défaillances dans le système thermique étudié. En utilisant les mesures des capteurs et les modèles mathématiques du système, le FK nous permettra d'estimer l'état du système thermique et d'identifier les défaillances éventuelles, améliorant ainsi la fiabilité et la sécurité du système.

### 4.6.1 Modélisation du problème physique

Afin de résoudre le problème direct, une approche avec la méthode des différences finies est effectuée (Strikwerda, 2004), (LeVeque, 2007), (Thomas, 2013), (Özişik et al., 2017). Cette dernière consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage. L'ensemble de la modélisation du problème physique par la méthode des différences finies ainsi que l'adaptation de l'application sont détaillées dans la section 1.3.3.1 du chapitre 1. Pour éviter toute redondance, nous ne rappelons ici que les notations nécessaires. Dans la suite de cette section, nous nous concentrerons sur la modélisation du cadre général des sources mobiles.

Dans une géométrie 2D, considérons la température  $\theta(x, y, t)$  définie sur le domaine  $\Omega$ . Ce

dernier est décomposé en  $I \times J$  nœuds  $(x_i, y_j)$  répartis régulièrement avec un pas d'espace  $\Delta x$  dans la direction  $x$  et  $\Delta y$  dans la direction  $y$ .  $\theta_{i,j}^k$  est la valeur discrète de la grandeur  $\theta(x, y, t)$  au nœud  $(x_i, y_j)$  et au temps  $k\Delta t$ . De façon similaire, le flux chauffant  $\Phi_{i,j}^k$  est la valeur discrète de la grandeur  $\Phi(x, y, t)$ .

Finalement, afin de faciliter le calcul, une mise en forme du modèle d'évolution d'état a été effectuée en réordonnant séquentiellement tous les nœuds  $(i, j)$  avec l'indice  $m = 1, \dots, M$ , où  $M = I \times J$  (voir chapitre 1 section 1.3.3.1). Cette mise en forme conduit à l'équation suivante (4.19) :

$$\boldsymbol{\theta}^{k+1} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta}^k + \mathbf{B}^k \cdot \mathbf{G}^k + \mathbf{H}, \quad (4.19)$$

où  $\mathbf{A}$  est la matrice de transition, qui code la combinaison linéaire de  $\boldsymbol{\theta}^k$ , qui relie l'état  $k$  à l'état  $k+1$ , la matrice  $\mathbf{B}^k$  code les coordonnées de la distribution gaussienne entourant le point  $(x_i(t), y_i(t))$  sur la base du support spatial de la source mobile  $f_n^k$ . Le flux thermique  $g_n^k$ , est codé par la matrice  $\mathbf{G}^k$ . Enfin,  $\mathbf{H}$  est un vecteur constant qui dépend de la discrétisation et des paramètres du modèle.

A certains moments, nous avons la possibilité de mesurer la température en certains points, ces mesures réelles (donc soumises à une incertitude / erreur de mesure) seront nommées  $\theta_{obs}^k$  :

$$\theta_{obs}^k = \begin{cases} \theta_{C_1}^k \\ \theta_{C_2}^k \\ \theta_{C_3}^k \end{cases}$$

avec  $\theta_{C_h}^k$ ,  $h = 1, 2, 3$  la valeur scalaire donnée par le capteur  $C_h$  au temps  $k$ . Logiquement, ces observations reflètent les températures réelles de la plaque, on peut donc écrire :

$$\theta_{obs}^k = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\theta}^k.$$

La matrice  $\mathbf{C}$  est une matrice composée de 0, sauf dans l'indice  $h$  (3 dans notre cas) élément codant les positions des capteurs (la colonne donne la position du capteur  $C_1, C_2, C_3$ ). Par exemple :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

et comme dernière étape,  $\mathbf{H}$  un vecteur de longueur  $M$  dont tous les éléments sont égaux à  $\alpha_5$ .

Finalement, l'application est modélisée comme une représentation d'état d'un système linéaire invariant en temps discret :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta}^{k+1} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta}^k + \mathbf{B}^k \cdot \mathbf{G}^k + \mathbf{H} \\ \boldsymbol{\theta}_{obs}^k = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\theta}^k \end{cases} \quad (4.20)$$

Après avoir formulé le problème direct en terme d'équations d'évolution et d'observation, nous sommes en mesure de le résoudre numériquement. Il est à noter que l'application présentée dans le chapitre 2 suppose que les deux sources chauffantes sont considérées comme fixes, c'est-à-dire que leur distribution spatiale reste constante tout au long de la simulation (voir 2.2). Cette propriété se traduit par la matrice  $\mathbf{B}^k = \mathbf{B}$  qui ne dépend pas de l'instant  $k$ . En rappelant cette application, nous pouvons ainsi poursuivre notre analyse sur les performances des filtres de Kalman pour l'estimation des états du système.

La Figure (4.2) montre un récapitulatif de la résolution du problème direct en utilisant l'approximation numérique par les différences finies.

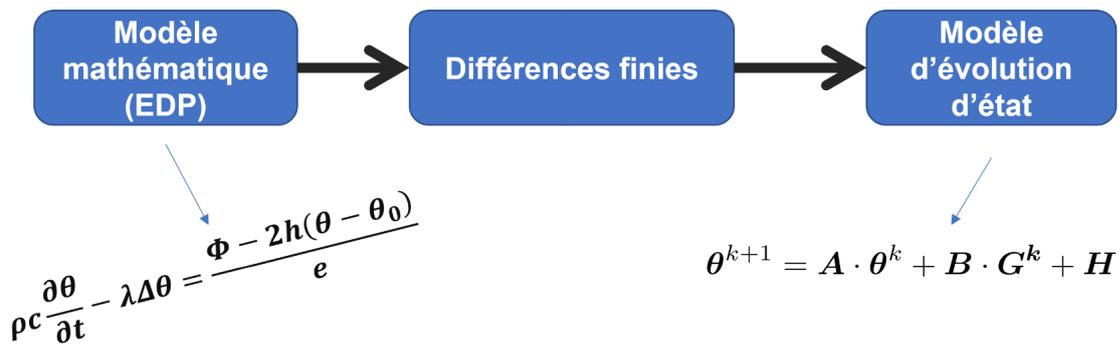
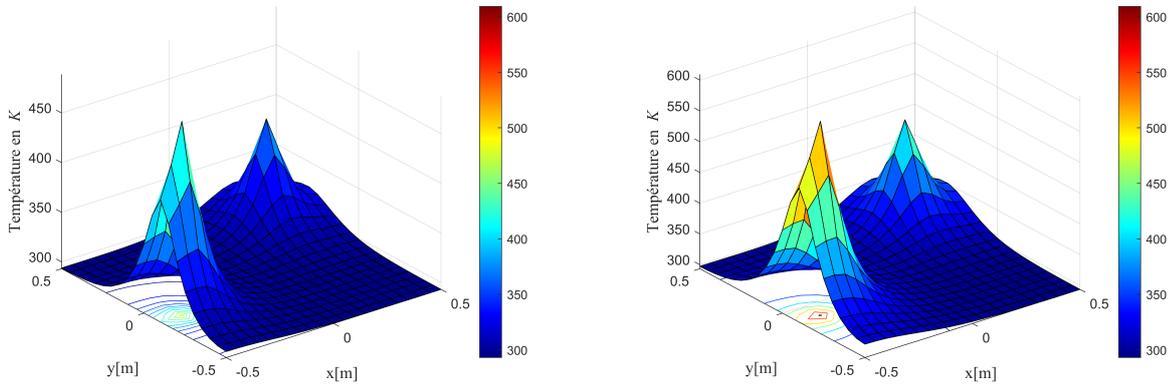


FIGURE 4.2 – Illustration de la résolution de problème direct.

Dans la suite, une résolution du problème direct est effectuée à partir des configurations du tableau 4.1

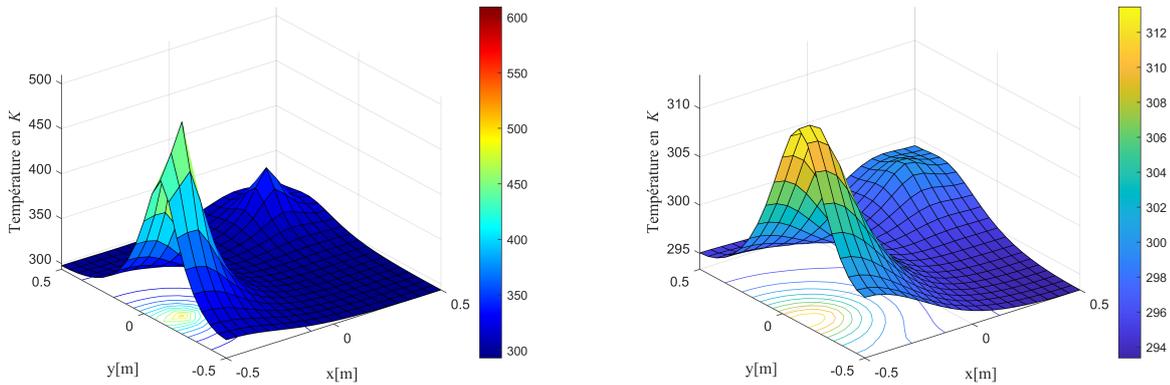
TABLEAU 4.1 – Paramètres d'entrée de modèle

Symbole	Définition	Valeur
$\Delta t$	Le pas de temps	1 s
$\Delta t_{obs}$	Le pas de temps des observations	9 s
$\Delta x, \Delta y$	Le pas d'espace	0.05m
$\rho c$	Chaleur volumique	$2.421 \cdot 10^6 \text{ J.m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$
$h$	Coefficient de convection naturelle	$10 \text{ W.m}^{-2}\text{K}^{-1}$
$\lambda$	Conductivité thermique	$178 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$
$\theta_0$	Température initiale	293 K
$t_f$	Temps final	3600 s



(a) Distribution spatiale de la température à  $t=1000$  s

(b) Distribution spatiale de la température à  $t=2000$  s



(c) Distribution spatiale de la température à  $t=2800$  s

(d) Distribution spatiale de la température à  $t=3600$  s

FIGURE 4.3 – L'évolution du champ de température sur la plaque considérant les deux densités de flux connues.

À partir des observations  $\theta_{obs}^k$  données par l'équation (4.20), la Figure (4.4) présente l'évolution de température aux trois capteurs.

Finalement, le problème inverse ( Figure 4.5), considéré dans ce chapitre, consiste à extraire les informations des vecteurs d'état  $\theta^k$  à partir des mesures observées  $\theta_{obs}^k$  (Figure 4.4). Cette formulation du problème inverse est faite dans un cadre bayésien à l'aide du filtre de Kalman (Chen et al., 2003), (Kaipio and Somersalo, 2006), (Özisik and Orlande, 2021).

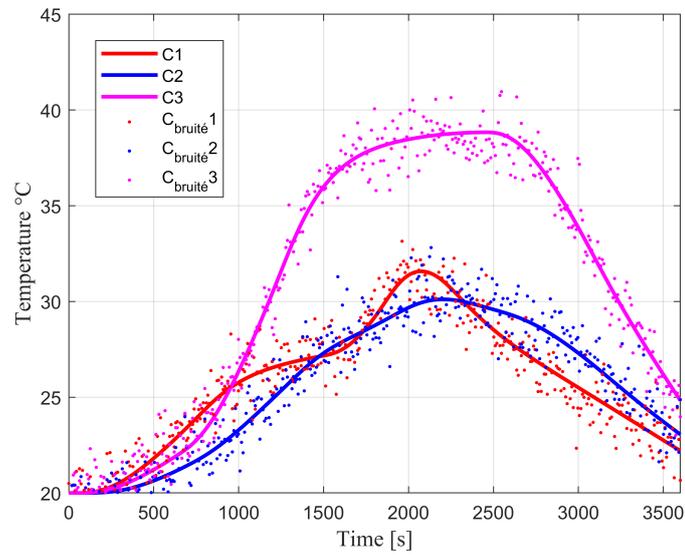


FIGURE 4.4 – Evolution de température (capteurs  $C_{i=1,2,3}$ ), non bruitées en continu, avec bruits en points.

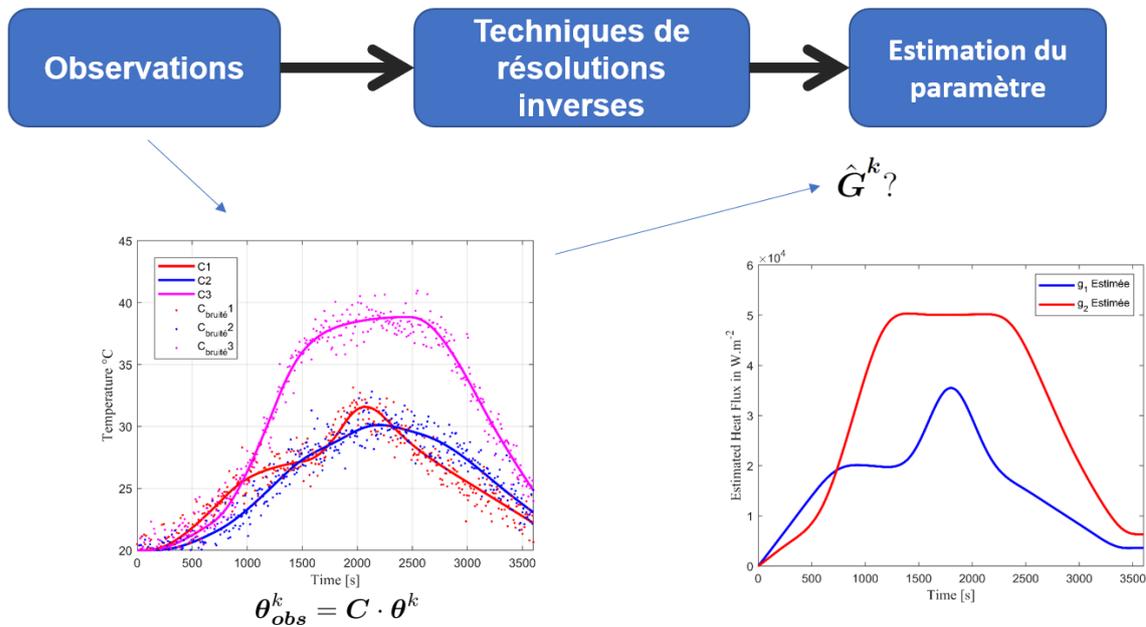


FIGURE 4.5 – Illustration de la résolution de problème inverse.

### 4.6.2 Application du filtre de Kalman

Dans l'équation (4.20), le fait que les matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  soient constantes dans le temps, nous pouvons réécrire l'équation (4.20) comme suit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta}^{k+1} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta}^k + \mathbf{B} \cdot \mathbf{G}^k + \mathbf{H} + \mathbf{w}_k \\ \boldsymbol{\theta}_{obs}^k = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\theta}^k + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (4.21)$$

Dans ce qui suit, nous voulons estimer, non seulement  $\boldsymbol{\theta}^k$ , mais surtout l'entrée  $\mathbf{G}^k$  (on peut facilement prendre en compte la constante),  $\mathbf{v}_k$  et  $\mathbf{w}_k$  permettront de prendre en compte respectivement les bruits du capteur et les bruits du modèle.

Afin d'estimer le vecteur d'entrée  $\mathbf{G}^k$ , une approche consiste à reformuler le filtre de Kalman de sorte que le vecteur d'entrée soit inclus dans le vecteur d'état :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta}^{k+1} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta}^k + \mathbf{B} \cdot \mathbf{G}^k + \mathbf{H} + \mathbf{w}_k \\ \boldsymbol{\theta}_{obs}^k = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\theta}^k + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (4.22)$$

↓

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^{k+1} \\ \mathbf{G}^{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A}' \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^k \\ \mathbf{G}^k \end{bmatrix} + \mathbf{H}' + \mathbf{w}'_k \\ \boldsymbol{\theta}_{obs}^k = \mathbf{C}' \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^k \\ \mathbf{G}^k \end{bmatrix} + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (4.23)$$

avec :

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}' = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Pour  $\mathbf{v}_k$ , il peut être défini comme une variable gaussienne multivariée (de dimension 3), de moyenne nulle et de matrice de variance-covariance dépendant des capteurs

$$\boldsymbol{\mu}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_v = \begin{bmatrix} \sigma_{C_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{C_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{C_3}^2 \end{bmatrix}.$$

Pour  $\mathbf{w}_k$ , nous pouvons la définir comme une variable gaussienne multivariée (de dimension  $\boldsymbol{\theta}$  en ajoutant la dimension  $\mathbf{G}$ ), avec une moyenne de zéro et la matrice de variance-covariance suivante :

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{w}'} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}'} &= \begin{bmatrix} \sigma_{\theta_{1,1}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta_{i,j}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\theta_{I,J}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{g1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{g2}^2 \end{bmatrix} \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

Finalement, après avoir reformulé le système (4.22) en (4.23) avec l'intégration du vecteur d'entrée  $\mathbf{G}$  dans le vecteur d'état, nous pouvons maintenant appliquer le filtre de Kalman. Pour l'application du filtre de Kalman, on suppose que les modèles d'évolution et d'observation sont linéaires. De même, on suppose que les bruits dans ces modèles sont gaussiens, avec des moyennes et des covariances connues, et qu'ils sont additifs. Par conséquent, la densité a posteriori est gaussienne et le filtre de Kalman donne la solution optimale au problème de l'estimation de l'état. Pour faciliter la compréhension, dans le système (4.23) on note  $\boldsymbol{\Theta}^{k+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^{k+1} \\ \mathbf{G}^{k+1} \end{bmatrix}$ , ainsi les modèles d'évolution et d'observation peuvent être écrits, respectivement, comme suit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Theta}^{k+1} = \mathbf{A}' \cdot \boldsymbol{\Theta}^k + \mathbf{H}' + \mathbf{w}'_k, & (4.26a) \\ \boldsymbol{\theta}_{obs}^k = \mathbf{C}' \cdot \boldsymbol{\Theta}^k + \mathbf{v}_k, & (4.26b) \end{cases}$$

où  $\mathbf{A}'$  et  $\mathbf{C}'$  sont des matrices connues pour les évolutions linéaires de l'état  $\boldsymbol{\Theta}$  et de l'observation  $\boldsymbol{\theta}_{obs}$ , respectivement, et  $\mathbf{H}'$  est un vecteur constant connu pour le modèle d'évolution de l'état.  $\boldsymbol{\Theta}$  est également une gaussienne avec une moyenne calculable  $\boldsymbol{\mu}$  et une covariance  $\boldsymbol{\Sigma}$ . En supposant que les bruits  $\mathbf{w}'$  et  $\mathbf{v}$  ont une moyenne nulle et des matrices de covariance  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$ , respectivement, les étapes de prédiction et de mise à jour du filtre de Kalman, pour chaque  $k = 1, \dots, \tau$ , où  $\tau = t_f / \Delta t_{obs}$  sont données par :

1. Initialiser :  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{0|0}$  et  $\boldsymbol{\Sigma}_{0|0}$ .
2. Pour  $k = 1, 2, \dots, \tau$  :

**Prédiction :**

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{k|k-1} = \mathbf{A}' \hat{\boldsymbol{\mu}}_{k-1|k-1} + \mathbf{H}', \quad (4.27)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1} = \mathbf{A}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k-1|k-1} \mathbf{A}'^T + \mathbf{Q}. \quad (4.28)$$

**Mise à jour :**

$$\mathbf{K}_k = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1} \mathbf{C}'^T \left( \mathbf{C}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1} \mathbf{C}'^T + \mathbf{R} \right)^{-1}, \quad (4.29)$$

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{\mu}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \left( \boldsymbol{\theta}_{obs}^k - \mathbf{C}' \hat{\boldsymbol{\mu}}_{k|k-1} \right), \quad (4.30)$$

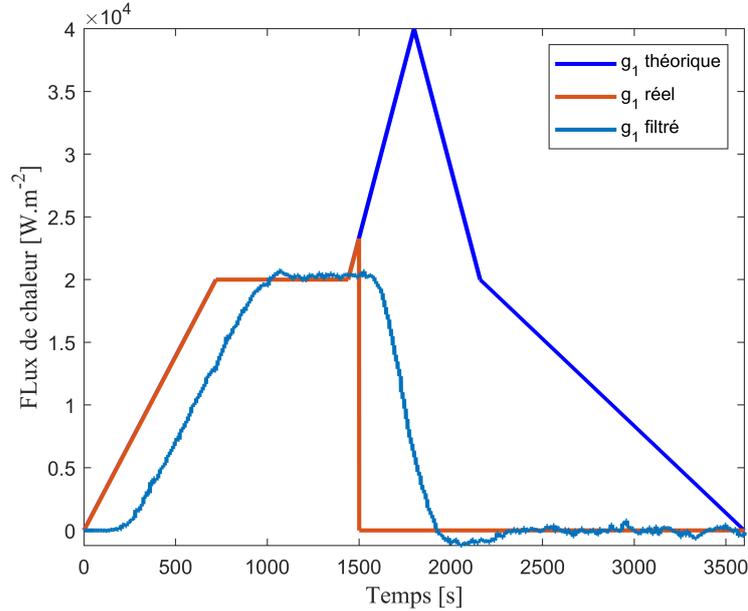
$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}') \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1}, \quad (4.31)$$

où  $\mathbf{K}_k$  est la matrice de gain de Kalman, et  $\boldsymbol{\theta}_{obs}^k$  est le vecteur d'observation à l'instant  $k$ . Rappelons que dans notre application, les températures ne sont pas observées à chaque instant (seulement toutes les 9 secondes), et donc dans le cas d'une absence d'observation à l'instant  $k$ , alors  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{\mu}}_{k|k-1}$ .

Après avoir adapté le filtre de Kalman en intégrant le vecteur de flux  $\mathbf{G}^k$  dans l'équation d'état, nous allons dans la suite mettre en œuvre l'algorithme de filtrage. Dans cette configuration, nous supposons que la première source  $\Phi_1$  tombe en panne à l'instant  $t = 1500s$ . Pour cette configuration on utilise les paramètres suivants (tableau 4.2) :

TABLEAU 4.2 – Paramètres d'entrée-modèle

Symbole	Définition	Valeur
$\Delta t$	Le pas de temps	1 s
$\Delta t_{obs}$	Le pas de temps des observations	9 s
$\Delta x, \Delta y$	Le pas d'espace	0.05m
$\rho c$	Chaleur volumique	$2.421 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$
$h$	Coefficient de convection naturelle	$10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \text{K}^{-1}$
$\lambda$	Conductivité thermique	$178 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \text{K}^{-1}$
$\theta_0$	Température initiale	293 K
$t_f$	Temps final	3600 s

FIGURE 4.6 – Estimation de la première source  $g_1$  par le filtre de Kalman

Après la mise en œuvre de l'algorithme de filtre du Kalman, d'après les résultats figurant en (4.6), nous remarquons que le filtre arrive à détecter un dysfonctionnement de la source  $\Phi_1$  (flux  $g_1$ ) avec un retard estimé de 200 à 300 secondes, ce retard est dû aux manques des observations données par l'équation (4.26b) puisqu'on ne dispose que des mesures de trois capteurs seulement toutes les 9 secondes. Dans le but d'améliorer ces résultats, une approche hors ligne sera considérée dans la prochaine section en utilisant le lisseur de Kalman.

### 4.6.3 Application du lisseur de Kalman

Afin d'estimer les différents instants de défaillance et de redémarrage des sources, nous supposons que nous étudions cette application hors ligne. Dans ce cas, une meilleure estimation du vecteur d'état pourrait être obtenue par le lisseur de Kalman (Chen et al., 2003), (Murphy, 2012), (Özisik and Orlande, 2021).

Pour cet algorithme, nous supposons que nous avons déjà appliqué le filtre de Kalman, les étapes en arrière sont décrites comme suit :

$$\text{Entrées : } \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\tau|\tau}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\tau|\tau}$$

1. Pour  $k = \tau - 1, \tau - 2, \dots, 1$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k &= \hat{\Sigma}_{k|k} \mathbf{A}'_k{}^T \hat{\Sigma}_{k+1|k}^{-1} \\ \hat{\boldsymbol{\mu}}_{k|\tau} &= \hat{\boldsymbol{\mu}}_{k|k} + \mathcal{P}_k (\boldsymbol{\mu}_{k+1|\tau} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{k+1|k}) \\ \hat{\Sigma}_{k|\tau} &= \hat{\Sigma}_{k|k} + \mathcal{P}_k (\Sigma_{k+1|\tau} - \hat{\Sigma}_{k+1|k}) \mathcal{P}_k^T \end{aligned}$$

Avec la même configuration que précédemment, en se basant sur les mêmes paramètres du modèle (tableau 4.2) , l'algorithme de lissage de Kalman est mis en œuvre, ce qui nous donne les résultats suivants :

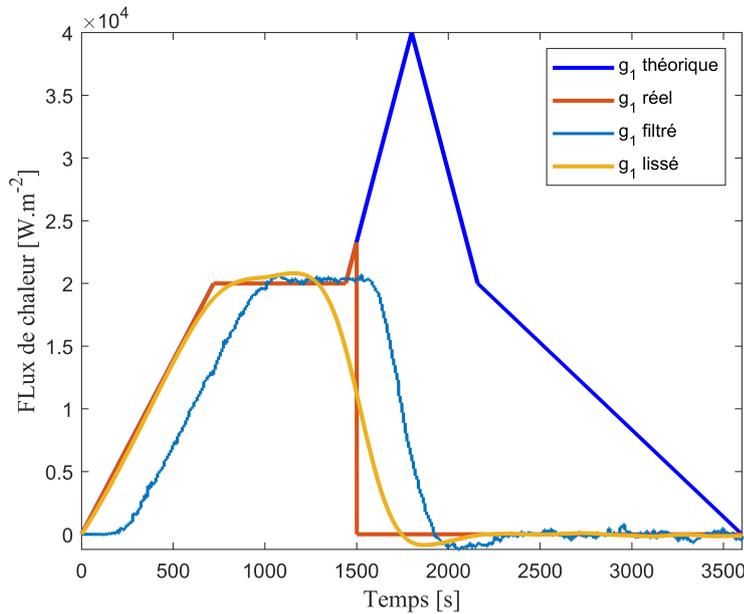


FIGURE 4.7 – Estimation de la première source  $g_1$  par le lissage de Kalman

Après la mise en œuvre de l'algorithme de lissage de Kalman, d'après les résultats figurant en (4.7), on remarque que le lisseur arrive à estimer le flux de chauffe  $g_1$  mieux que le filtre classique de Kalman, ceci traduit le fait que le lissage permet d'exploiter plus d'informations que le filtrage, qui conduit ainsi à des résultats plus performants. Cependant, avec le lisseur de Kalman, l'algorithme estime le dysfonctionnement de  $\Phi_1$  en avance par rapport à la panne réelle, ce qui rendra la détection d'instant de défaillance plus délicat à déterminer. La Figure (4.8) montre le comportement théorique du signal de la source  $g_1$  en bleu, et l'estimé de  $\hat{g}_1$  par le lissage de Kalman en jaune. Finalement, dans la suite, nous proposons une méthodologie qui permet d'estimer les instants de défaillance des sources de chaleur. Ceci est réalisé en appliquant le lisseur de Kalman et la stratégie de recherche dans différents signaux candidats de la source.

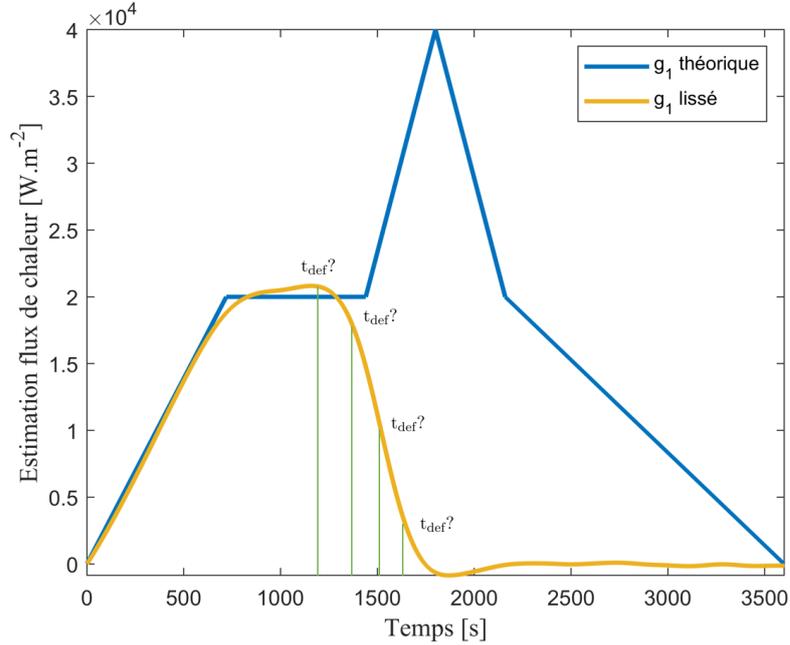


FIGURE 4.8 – Figure montre la complexité de choisir l'instant de panne.

#### 4.6.4 Stratégie de recherche de panne et de redémarrage

Pour estimer l'instant de défaillance  $t_{\text{def}}$  et l'instant de redémarrage  $t_{\text{rest}}$ , une hypothèse a été formulée selon laquelle les défaillances des sources sont des événements indépendants, ce qui permet de les traiter individuellement. De plus, l'utilisation de la connaissance du signal théorique de chaque source sans défaillance  $g_n(t)$ , qui est représenté graphiquement dans la Figure 1.2, a été exploitée. Étant donné un ensemble de vecteurs candidats  $\chi_{\text{cand}}$ , le problème consiste à trouver le vecteur candidat  $\chi_{\text{opt}}$  qui minimise l'erreur carrée (SE) entre  $g_n(t) \times \chi_{\text{cand}}$  et  $\hat{g}_n(t)$ . Mathématiquement, cela peut être exprimé comme suit :

$$\chi_{\text{opt}}^n = \underset{\chi_{\text{cand}}}{\text{Arg min}} \sum_t^{\tau} (g_n(t) \times \chi_{\text{cand}}^n - \hat{g}_n(t))^2, \quad (4.32)$$

où  $\chi_{\text{cand}}^n$  représente le vecteur candidat  $\chi_{\text{cand}}$  qui correspond à la source  $n$ ,  $g_n(t)$  est signal théorique de chaque source sans défaillance et  $\hat{g}_n(t)$  est le flux estimée de  $g_n(t)$ .

Ainsi, pour chaque source, nous pouvons utiliser l'algorithme suivant :

**Algorithm 5** Algorithme de stratégie de recherche.

- i. Initialiser et définir les bornes du vecteur candidat  $\chi_{cand}$ .
- ii. Calculer l’erreur quadratique (SE) entre  $g_n(t) \times \chi_{cand}$  et  $\hat{g}_n(t)$
- iii. Résoudre le problème (4.32) en effectuant une recherche itérative pour trouver la valeur de  $\chi_{opt}$  qui minimise l’erreur quadratique, tout en respectant les contraintes définies par les bornes.
- iv. Retourner à la valeur optimale de  $\chi_{cand}$  qui minimise l’erreur quadratique, ainsi que la valeur minimale de l’erreur quadratique.

Nous proposons d’illustrer la méthodologie proposée avec l’exemple d’une panne sur la première source à  $t = 1000s$  et d’un redémarrage à  $t = 2500s$ , pour un suivi de 1 heure (3600s). Les paramètres sont les suivants :  $\Delta x = \Delta y = 0,05m$ ,  $\Delta t = 1s$ ,  $\Delta t_{obs} = 9s$ . Les sources sont les mêmes que celles décrites dans la Figure 1.2.

Tout d’abord, nous pouvons tracer les mesures données par les trois capteurs (voir Figure 4.9). Une fois que nous avons les mesures, nous pouvons appliquer le filtre de Kalman puis le lisseur de Kalman. On obtient, pour  $g_1^k$ , les signaux de la Figure 4.10. Avec les  $\hat{g}_1$  estimés par le lisseur de Kalman, nous pouvons appliquer la stratégie de recherche décrite ci-dessus. La Figure 4.11 montre les différents signaux de  $g_1^k$  : théorique (sans défaillance), réel (le théorique avec défaillance), l’estimation par lissage, et le meilleur candidat calculé. On peut voir que dans cet exemple, l’instant estimé de défaillance est :  $t_{def} = 1502s$ .

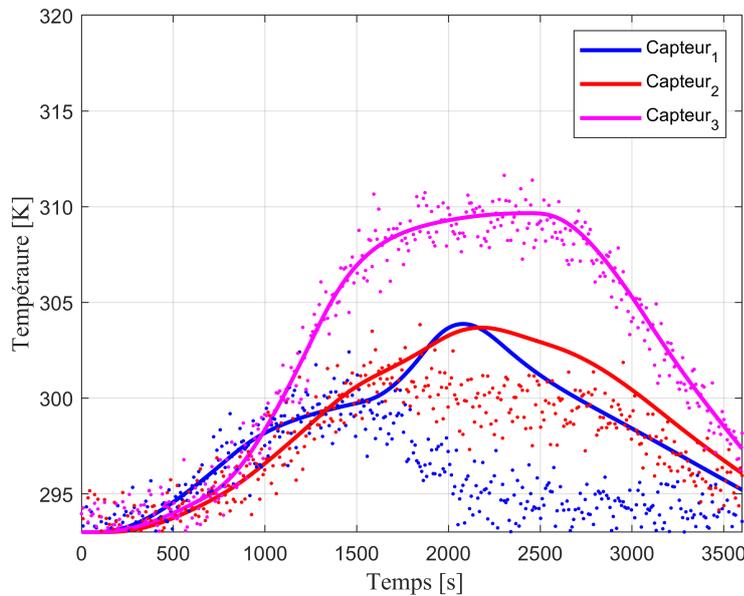


FIGURE 4.9 – Températures aux capteurs.

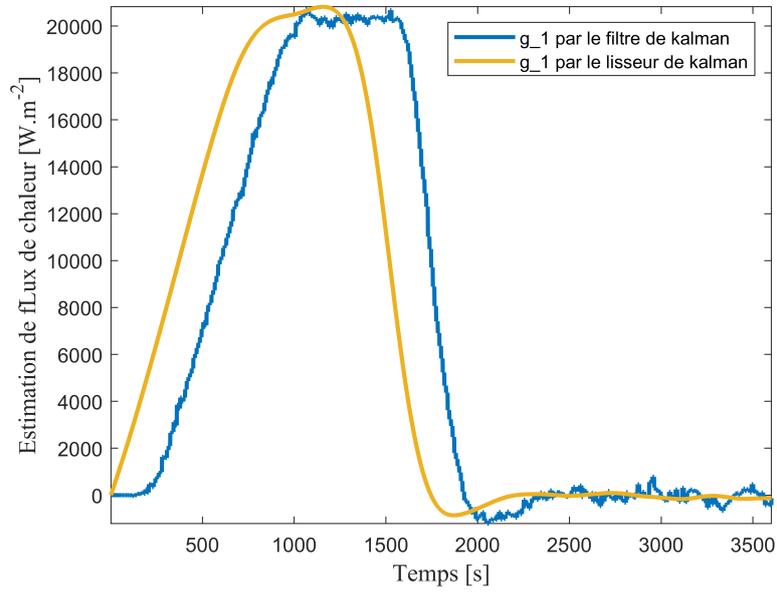


FIGURE 4.10 –  $g_1$  estimé par le filtre de Kalman et le lisseur de Kalman

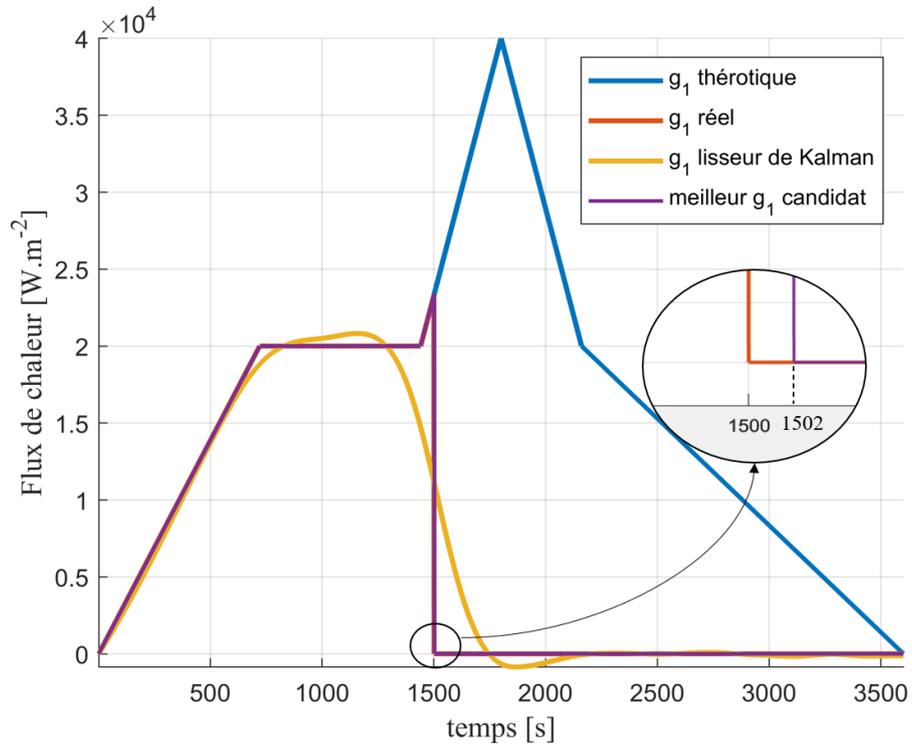


FIGURE 4.11 – Meilleur candidat de  $g_1$  donne  $t_{\text{def}} = 1502s$ .

Dans la section suivante, nous explorerons en détails la mise en œuvre de la carte de contrôle EWMA et son application spécifique à la détection en ligne des défaillances dans les systèmes thermiques.

#### 4.6.5 Approche détection en ligne

Après avoir examiné l'adaptation du filtre et du lisseur de Kalman pour l'identification des défaillances, ainsi que la stratégie de recherche adoptée, cette section se concentrera sur l'aspect de la détection en temps réel. Dans le cadre de cette approche en ligne, nous avons recours à la carte de contrôle EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) pour détecter les instants de pannes ou redémarrages du système (phase 2 du chapitre 3). Cette méthode de détection implique le calcul des résidus entre les températures simulées et les températures mesurées.

La carte de contrôle EWMA (Lu and Reynolds Jr, 1999) est une méthode statistique pour détecter des changements dans un processus en utilisant des poids exponentiels pour donner plus de poids aux observations récentes. Cela permet de détecter rapidement les changements dans un processus et d'alerter l'opérateur pour qu'il prenne des mesures correctives.

La formulation mathématique de la carte de contrôle EWMA est la suivante :

$$Z_t = \lambda \theta_t^{\text{résidus}} + (1 - \lambda) Z_{(t-1)} \quad \text{pour } t = 1, 2, \dots, n, \quad (4.33)$$

où :

- $Z_0$  est la moyenne des données historiques (cible).
- $\theta_t^{\text{résidus}}$  sont les résidus au temps  $t$ .
- $n$  est le nombre d'observations à surveiller.
- $0 < \lambda \leq 1$  est le facteur de lissage, qui détermine la pondération de la valeur observée par rapport à la moyenne pondérée précédente.

Les limites de contrôle supérieure et inférieure de la carte EWMA sont calculées comme suit :

$$\text{LCS} = k\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}}, \quad \text{LCI} = -k\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}},$$

où :

- LCS est la limite de contrôle supérieure.
- LCI est la limite de contrôle inférieure.
- $\sigma$  est l'écart type du processus.
- $k$  représente la largeur de contrôle de la carte EWMA et permet de régler le taux de fausses alarmes.

La Figure 4.12 présente le schéma qui sera utilisé dans la procédure de détection et d'identification basée sur le filtre bayésien.

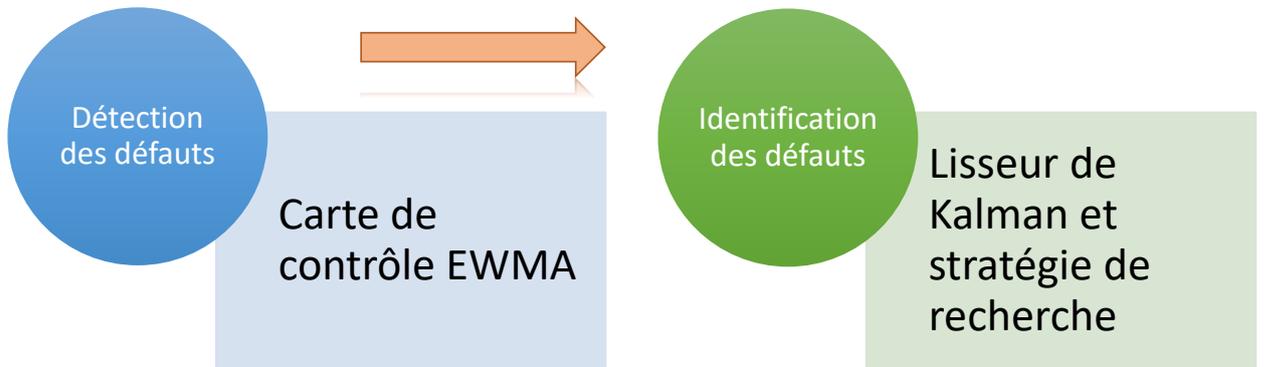
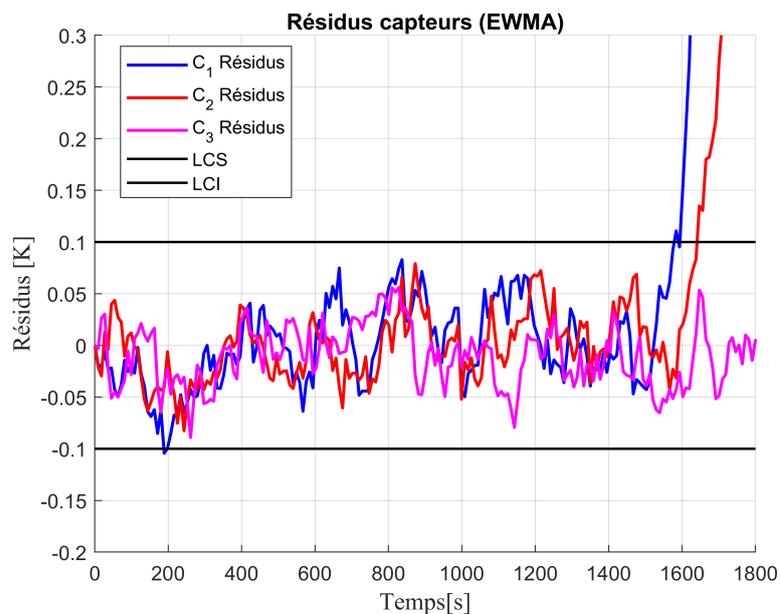


FIGURE 4.12 – Illustration de la méthodologie de détection et d'identification en ligne.

Dans le but d'illustrer cette étape de détection, nous pouvons prendre l'exemple où la source  $\Phi_1$  tombe en panne à l'instant  $t = 1500$ s. Après la détection de cette panne, c'est-à-dire lorsque les limites de la carte EWMA sont dépassées (telles que présentées dans la Figure 4.13), la procédure d'identification peut alors être lancée. Cette procédure est basée sur l'utilisation de KS ainsi que sur la stratégie de recherche. La Figure 4.14 illustre la carte de décision utilisée pour déterminer l'instant de détection, en se basant sur l'hypothèse selon laquelle la panne est détectée lorsque deux capteurs dépassent les limites de la carte de contrôle EWMA. Selon cette carte, l'instant de détection est de 1656 secondes.

FIGURE 4.13 – Carte EWMA avec  $\lambda = 0.2$ ,  $k = 3$  et  $\sigma = 0.1^\circ\text{C}$ .

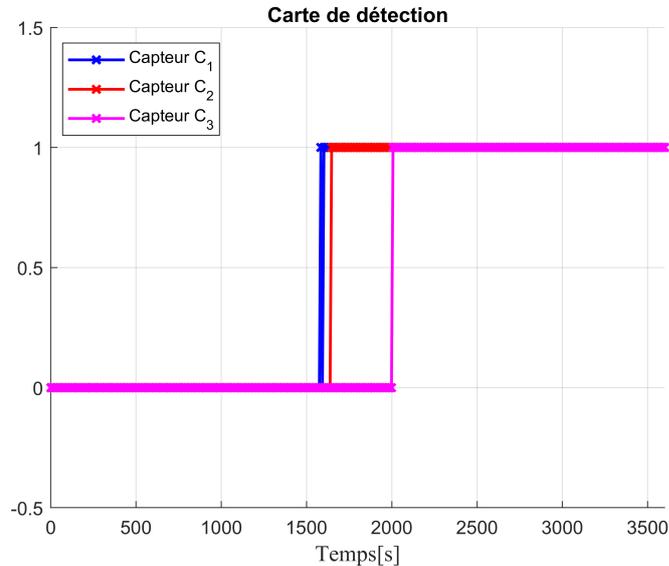


FIGURE 4.14 – Carte de détection.

## 4.7 Mises en oeuvre numériques

Afin de démontrer la pertinence de l'approche proposée, différentes configurations ont été simulées. Dans cette étude, nous nous concentrons uniquement sur le cas de l'identification hors ligne, tandis que les résultats pour l'aspect en ligne seront présentés dans le chapitre 5. Les données observées ont été extraites d'une simulation avec le logiciel Comsol interfacé par Matlab afin d'éviter le crime inverse. Comme dans un système réel, les mesures aux trois capteurs sont soumises à une incertitude décrite par un bruit gaussien de moyenne nulle et différents écarts types  $\sigma$  sont pris en compte. Ainsi, les résultats sont donnés pour 3 niveaux de bruit différents :  $\sigma = 0.1^\circ$ ,  $\sigma = 0.5^\circ$  et  $\sigma = 1^\circ$ .

Finalement, afin de voir l'impact d'un tel paramètre, pour chaque configuration, nous donnons les résultats en termes de moyenne et d'écart-type (entre parenthèses) sur 30 simulations.

### 4.7.1 Première configuration – étude de l'influence du bruit de mesure

La première configuration est la simulation d'une défaillance de la première source  $g_1$  à  $t = 1500s$ . Les résultats sont donnés dans le tableau 4.3. Nous pouvons clairement voir que notre approche donne de bonnes estimations de l'instant de la défaillance, mais, comme prévu, plus le bruit des capteurs est important, moins les performances sont bonnes.

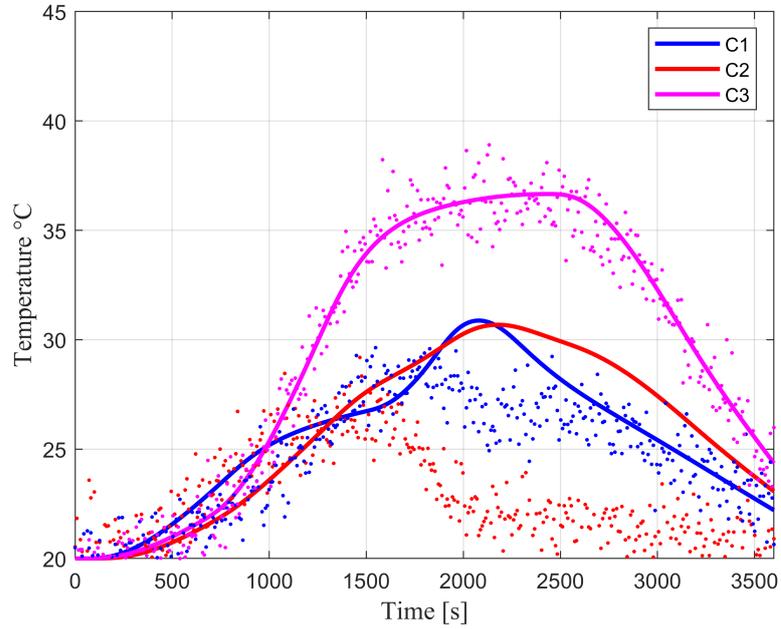
FIGURE 4.15 – Exemple de températures aux trois capteurs avec un bruit de  $1^{\circ}\text{C}$ .

TABLEAU 4.3 – Identification de la défaillance pour différents niveaux de bruit.

	Défaillance $t_{\text{fail},1}^1$
$\sigma = 0.1^{\circ}\text{C}$	1500.03(1.426)
$\sigma = 0.5^{\circ}\text{C}$	1499.57(6.961)
$\sigma = 1^{\circ}\text{C}$	1501.30(13.63)

#### 4.7.2 Seconde configuration – identification de la défaillance et du redémarrage

La deuxième configuration est la simulation d'une panne de la première source  $g_1$  à  $t = 1000\text{s}$  et d'un redémarrage à  $t = 2500\text{s}$ . Les résultats sont donnés dans le tableau 4.4.

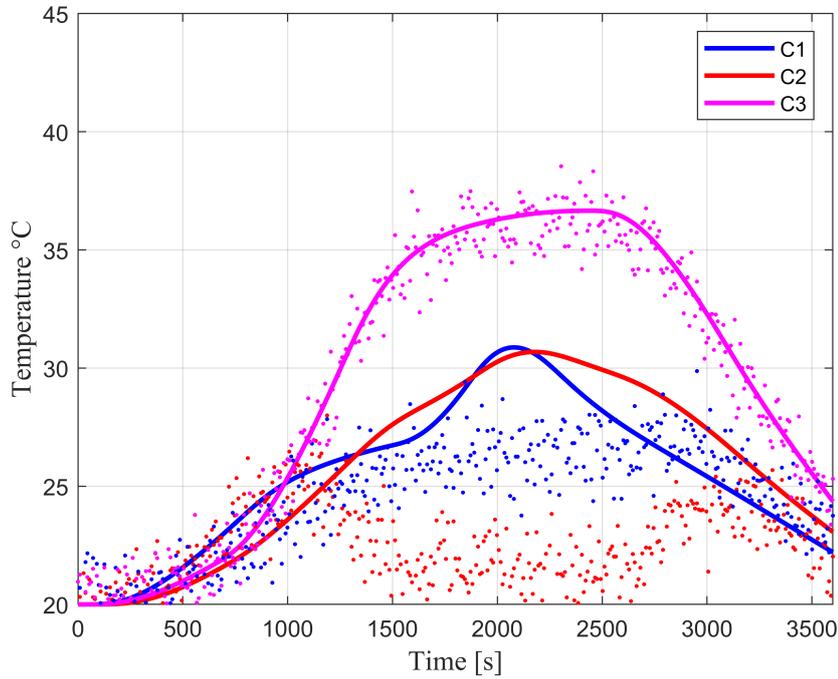


FIGURE 4.16 – Exemple de températures aux trois capteurs avec un bruit de  $1^\circ$ .

TABLEAU 4.4 – Identification des temps de défaillance et de redémarrage pour différents niveaux de bruit

	Défaillance $t_{\text{fail},1}^1$	Redémarrage $t_{\text{rest},1}^1$
$\sigma = 0.1^\circ\text{C}$	1011.63(1.79)	2514.60(2.27)
$\sigma = 0.5^\circ\text{C}$	1013.43(8.29)	2513.27(10.87)
$\sigma = 1^\circ\text{C}$	1009.67(16.49)	2518.03(19.74)

Dans le tableau 4.4, nous pouvons clairement voir que notre approche donne de bonnes estimations des instants de défaillance et de redémarrage, lorsque les niveaux de bruit des capteurs sont moins importants. Cependant, la précision de la détection du temps de défaillance est considérablement réduite en raison de l'augmentation du bruit de mesure des capteurs.

### 4.7.3 Troisième configuration – séparation de sources

Dans la dernière configuration, le but est de démontrer que la séparation des sources est possible. Ainsi, les défaillances sur les 2 sources sont simulées à 2 instants différents : on considère

une défaillance de la première source  $g_1$  à  $t = 1000s$  et un instant de défaillance de la seconde source  $g_2$  à  $t = 2000s$ . Les résultats sont donnés dans le tableau 4.5.

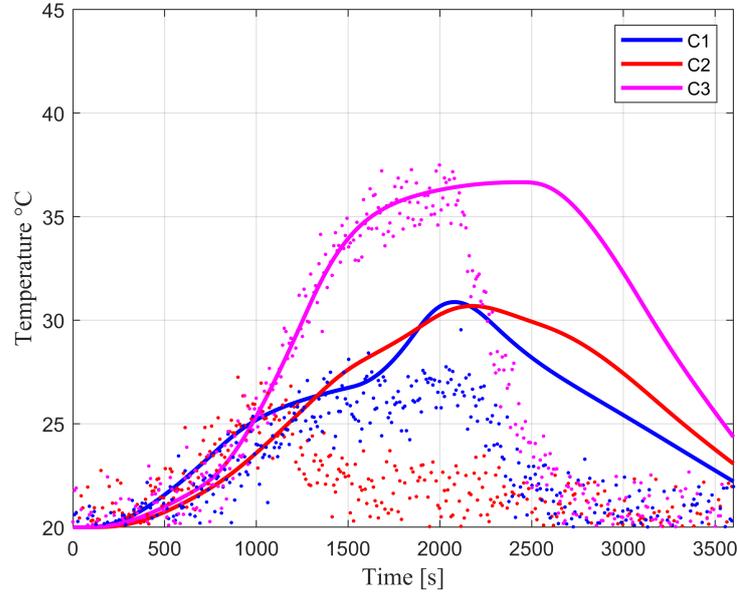


FIGURE 4.17 – Exemple de températures aux trois capteurs avec un bruit de  $1^\circ C$ .

TABLEAU 4.5 – Identification des temps de défaillance des deux sources pour différents niveaux de bruit.

	Défaillance $t_{\text{fail},1}^1$	Défaillance $t_{\text{fail},2}^1$
$\sigma = 0.1^\circ C$	1011.87(1.61)	2010.03(0.81)
$\sigma = 0.5^\circ C$	1009.67(8.78)	2009.63(3.69)
$\sigma = 1^\circ C$	1021.60(18.51)	2013.67(4.69)

Dans le tableau 4.5, il est évident que la méthode a réussi à identifier les instants de défaillance pour deux sources distinctes. Lorsque les bruits de mesure sont moins importants, les méthodes donnent d'excellents résultats. Cependant, lorsque le bruit de mesure des capteurs augmente, il devient plus difficile d'identifier les instants de défaillance des deux sources.

## 4.8 Bilan du chapitre 4

Dans ce quatrième chapitre, l’adaptation du filtre de Kalman a été utilisée pour l’identification des instants de défaillance dans un système d’équations aux dérivées partielles (EDP) en deux dimensions, impliquant une ou plusieurs sources de chauffe fixes. Le processus a commencé par la résolution du problème direct, qui consiste à résoudre un système d’EDP parabolique linéaire en utilisant une méthode numérique basée sur les différences finies.

Ensuite, le problème inverse a été abordé dans un cadre bayésien en mettant en œuvre le filtre de Kalman, un filtre bayésien bien connu. L’objectif était d’estimer un ou deux flux de chauffe à partir des mesures observées. Pour cela, le filtre de Kalman a été adapté en introduisant un vecteur de flux dans l’équation d’état, permettant ainsi l’estimation précise des températures et des flux de chauffe correspondants. Une méthodologie a été développée pour estimer les instants de défaillance et de redémarrage des sources de chaleur. Cette approche combine l’utilisation d’un lisseur de Kalman et d’une stratégie de recherche dans différents signaux candidats de la source. En intégrant ces approches, les instants de défaillance et de redémarrage des sources de chauffe ont pu être identifiés avec précision. Ensuite, la détection en ligne des défaillances a été abordée en utilisant la carte de contrôle EWMA. Cette méthode se base sur le calcul des résidus entre les températures simulées et les températures mesurées, permettant une détection rapide des défaillances potentielles.

Malgré le fait que seuls trois capteurs, éloignés des sources de chauffe, aient été utilisés pour surveiller les températures, cette approche a donné d’excellents résultats. Dans le chapitre suivant, une comparaison sera effectuée entre cette approche et l’approche novatrice développée dans les chapitres 2 et 3.

## Références bibliographiques

- [1] Alaeian, M., Orlande, H. R. and Lamien, B. [2022], ‘Kalman filter temperature estimation with a photoacoustic observation model during the hyperthermia treatment of cancer’, *Computers & Mathematics with Applications* **119**, 193–207.
- [2] Arulampalam, M. S., Maskell, S., Gordon, N. and Clapp, T. [2002], ‘A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking’, *IEEE Transactions on signal processing* **50**(2), 174–188.
- [3] Chen, T.-C., Cheng, C.-H., Jang, H.-Y. and Tuan, P.-C. [2007], ‘Using input estimation to estimate heat source in nonlinear heat conduction problem’, *Journal of thermophysics and heat transfer* **21**(1), 166–172.
- [4] Chen, T.-C., Liu, C.-C., Jang, H.-Y. and Tuan, P.-C. [2007], ‘Inverse estimation of heat flux and temperature in multi-layer gun barrel’, *International journal of heat and mass transfer* **50**(11-12), 2060–2068.
- [5] Chen, Z. et al. [2003], ‘Bayesian filtering : From kalman filters to particle filters, and beyond’, *Statistics* **182**(1), 1–69.
- [6] Daouas, N. and Radhouani, M.-S. [2000], ‘Version étendue du filtre de kalman discret appliquée à un problème inverse de conduction de chaleur non linéaire’, *International journal of thermal sciences* **39**(2), 191–212.
- [7] Daouas, N. and Radhouani, M.-S. [2004], ‘A new approach of the kalman filter using future temperature measurements for nonlinear inverse heat conduction problems’, *Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals* **45**(6), 565–585.
- [8] Daouas, N. and Radhouani, M.-S. [2007], ‘Experimental validation of an extended kalman smoothing technique for solving nonlinear inverse heat conduction problems’, *Inverse Problems in Science and Engineering* **15**(7), 765–782.
- [9] Dashti, M. and Stuart, A. M. [2017], The bayesian approach to inverse problems, in ‘Handbook of uncertainty quantification’, Springer, pp. 311–428.
- [10] Doucet, A., De Freitas, N., Gordon, N. J. et al. [2001], *Sequential Monte Carlo methods in practice*, Vol. 1, Springer.
- [11] Gaaloul, N. and Daouas, N. [2018], ‘An extended approach of a kalman smoothing technique applied to a transient nonlinear two-dimensional inverse heat conduction problem’, *International Journal of Thermal Sciences* **134**, 224–241.

- [12] Haykin, S. [2004], *Kalman filtering and neural networks*, Vol. 47, John Wiley & Sons.
- [13] Idier, J. [2013], *Bayesian approach to inverse problems*, John Wiley & Sons.
- [14] Ijaz, U. Z., Khambampati, A. K., Kim, M.-C., Kim, S. and Kim, K.-Y. [2007], ‘Estimation of time-dependent heat flux and measurement bias in two-dimensional inverse heat conduction problems’, *International Journal of Heat and Mass Transfer* **50**(21-22), 4117–4130.
- [15] Jamei, M., Olumegbon, I. A., Karbasi, M., Ahmadianfar, I., Asadi, A. and Mosharaf-Dehkordi, M. [2021], ‘On the thermal conductivity assessment of oil-based hybrid nanofluids using extended kalman filter integrated with feed-forward neural network’, *International Journal of Heat and Mass Transfer* **172**, 121159.  
**URL:** <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931021002623>
- [16] Jang, H.-Y. and Cheng, C.-H. [2009], ‘Nonlinear optimal on-line heat-dissipation control methodology in electronic devices’, *International Journal of Heat and Mass Transfer* **52**(7), 2049–2058.  
**URL:** <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931008006212>
- [17] Jang, H.-Y., Tuan, P.-C., Chen, T.-C. and Chen, T.-S. [2006], ‘Input estimation method combined with the finite-element scheme to solve ihcp hollow-cylinder inverse heat conduction problems’, *Numerical Heat Transfer, Part A : Applications* **50**(3), 263–280.
- [18] Kaipio, J. and Somersalo, E. [1999], ‘Nonstationary inverse problems and state estimation’.
- [19] Kaipio, J. and Somersalo, E. [2006], *Statistical and computational inverse problems*, Vol. 160, Springer Science & Business Media.
- [20] Kalman, R. E. [1960], ‘A new approach to linear filtering and prediction problems’.
- [21] Kalman, R. E. and Bucy, R. S. [1961], ‘New results in linear filtering and prediction theory’.
- [22] LeBreux, M., Desilets, M. and Lacroix, M. [2013], ‘An unscented kalman filter inverse heat transfer method for the prediction of the ledge thickness inside high-temperature metallurgical reactors’, *International Journal of Heat and Mass Transfer* **57**(1), 265–273.
- [23] LeVeque, R. J. [2007], *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations : steady-state and time-dependent problems*, SIAM.
- [24] Lu, C.-W. and Reynolds Jr, M. R. [1999], ‘Ewma control charts for monitoring the mean of autocorrelated processes’, *Journal of Quality technology* **31**(2), 166–188.
- [25] Maybeck, P. S. [1982], *Stochastic models, estimation, and control*, Academic press.

- [26] Murphy, K. P. [2012], *Machine learning : a probabilistic perspective*, MIT press.
- [27] Noh, J.-H., Cha, K.-U., Ahn, S.-T. and Yook, S.-J. [2016], ‘Prediction of time-varying heat flux along a hollow cylindrical tube wall using recursive input estimation algorithm and thermal resistance network method’, *International Journal of Heat and Mass Transfer* **97**, 232–241.  
**URL:** <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931015312849>
- [28] Noh, J.-H., Kwak, D.-B., Kim, K.-B., Cha, K.-U. and Yook, S.-J. [2018], ‘Inverse heat conduction modeling to predict heat flux in a hollow cylindrical tube having irregular cross-sections’, *Applied Thermal Engineering* **128**, 1310–1321.  
**URL:** <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359431117322755>
- [29] Özisik, M. N. and Orlande, H. R. [2021], *Inverse heat transfer : fundamentals and applications*, CRC press.
- [30] Özisik, M. N., Orlande, H. R., Colaco, M. J. and Cotta, R. M. [2017], *Finite difference methods in heat transfer*, CRC press.
- [31] Pacheco, C. C., Orlande, H. R., Colaço, M. J. and Dulikravich, G. S. [2015], ‘Estimation of a location-and time-dependent high-magnitude heat flux in a heat conduction problem using the kalman filter and the approximation error model’, *Numerical Heat Transfer, Part A : Applications* **68**(11), 1198–1219.
- [32] Rauch, H. E., Tung, F. and Striebel, C. T. [1965], ‘Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems’, *AIAA journal* **3**(8), 1445–1450.
- [33] Ristic, B., Arulampalam, S. and Gordon, N. [2003], *Beyond the Kalman filter : Particle filters for tracking applications*, Artech house.
- [34] Scarpa, F. and Milano, G. [1995], ‘Kalman smoothing technique applied to the inverse heat conduction problem’, *Numerical Heat Transfer, Part B Fundamentals* **28**(1), 79–96.
- [35] Strikwerda, J. C. [2004], *Finite difference schemes and partial differential equations*, SIAM.
- [36] Thomas, J. W. [2013], *Numerical partial differential equations : finite difference methods*, Vol. 22, Springer Science & Business Media.
- [37] Tuan, P.-C., Ji, C.-C., Fong, L.-W. and Huang, W.-T. [1996], ‘An input estimation approach to on-line two-dimensional inverse heat conduction problems’, *Numerical Heat Transfer* **29**(3), 345–363.
- [38] Wan, E. A., Van Der Merwe, R. and Haykin, S. [2001], ‘The unscented kalman filter’, *Kalman filtering and neural networks* **5**(2007), 221–280.

- [39] Wang, H.-M., Chen, T.-C., Tuan, P.-C. and Den, S.-G. [2005], ‘Adaptive-weighting input-estimation approach to nonlinear inverse heat-conduction problems’, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer* **19**(2), 209–216.
- [40] Wang, X., Zhang, D. and Zhang, L. [2020], ‘Estimation of moving heat source for an instantaneous three-dimensional heat transfer system based on step-renewed kalman filter’, *International Journal of Heat and Mass Transfer* **163**, 120435.
- [41] Wen, S., Qi, H., Niu, Z.-T., Ren, Y.-T. and Ruan, L.-M. [2019], ‘Fast non-intrusive estimation of liquid-phase interface and boundary heat flux in participating media by the kalman filtering methods’, *International Journal of Heat and Mass Transfer* **142**, 118418.  
**URL:** <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931019313894>
- [42] Wen, S., Qi, H., Niu, Z.-T., Wei, L.-Y. and Ren, Y.-T. [2020], ‘Efficient and robust prediction of internal temperature distribution and boundary heat flux in participating media by using the kalman smoothing technique’, *International Journal of Heat and Mass Transfer* **147**, 118851.
- [43] Wen, S., Qi, H., Ren, Y.-T., Sun, J.-P. and Ruan, L.-M. [2017a], ‘Solution of inverse radiation-conduction problems using a kalman filter coupled with the recursive least-square estimator’, *International Journal of Heat and Mass Transfer* **111**, 582–592.
- [44] Wen, S., Qi, H., Ren, Y.-T., Sun, J.-P. and Ruan, L.-M. [2017b], ‘Solution of inverse radiation-conduction problems using a kalman filter coupled with the recursive least-square estimator’, *International Journal of Heat and Mass Transfer* **111**, 582–592.  
**URL:** <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931016339953>
- [45] Wen, S., Qi, H., Ren, Y.-T., Yu, X.-Y. and Ruan, L.-M. [2018], ‘Application of kf-rlse algorithm for on-line estimating the time-dependent melting thickness and input heat flux in participating media’, *International Journal of Thermal Sciences* **125**, 1–10.
- [46] Wen, S., Qi, H., Wang, Y., Ren, Y., Wei, L. and Ruan, L. [2020], ‘Prediction of the coupled heat radiation and conduction parameters and boundary condition using the unscented kalman filter’, *Science China Technological Sciences* **63**(3), 422–433.
- [47] Wikle, C. K. and Berliner, L. M. [2007], ‘A bayesian tutorial for data assimilation’, *Physica D : Nonlinear Phenomena* **230**(1-2), 1–16.

# APPLICATION : COMPARAISON DE DEUX APPROCHES POUR L'IDENTIFICATION DE DÉFAILLANCES DANS UN SYSTÈME THERMIQUE

---

## Introduction

Ce chapitre se concentre sur la comparaison de deux approches différentes pour l'identification des instants de défaillance et de redémarrage des sources dans un système thermique. La première approche, présentée dans les chapitres 2 et 3, est basée sur la méthode du gradient conjugué (MGC). La seconde approche, présentée dans le chapitre 4, est basée sur le filtre bayésien, plus précisément le filtre de Kalman. La comparaison est effectuée dans un cadre d'identification hors ligne pour les cas des sources fixes et mobiles, ainsi qu'une identification quasi en ligne pour le cas des sources mobiles.

### 5.1 Identification hors ligne de défaillance : cas de sources fixes et mobiles

#### 5.1.1 Description du problème direct

L'application présentée ici est une plaque d'aluminium de 1 m de long, 1 m de large et de 2 mm d'épaisseur. Quatre capteurs de température et trois sources de chaleur sont disposés sur celle-ci. Sur la plaque, les emplacements des trois sources et des quatre capteurs sont connus. Définissons le domaine géométrique comme étant  $\Omega = [-0.5, 0.5]^2 \subset \mathfrak{R}^2$  et chaque point de l'espace possède des coordonnées  $(x, y) \in \Omega$ . La variable temporelle est  $t \in T = [0, t_f]$ .  $\theta(x, y, t)$  représente la température en chaque point de l'espace. L'ensemble des équations mathématiques suivantes (Vergnaud et al., 2016) décrit l'évolution temporelle de la température dans le domaine  $\Omega$  :

$$\rho C \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial t} - \lambda \Delta \theta(x, y, t) = \frac{\Phi(x, y, t) - 2h(\theta(x, y, t) - \theta_0)}{e}, \quad (x, y, t) \in \Omega \times T, \quad (5.1a)$$

$$\theta(x, y, 0) = \theta_0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (5.1b)$$

$$-\lambda \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (x, y, t) \in \Gamma \times T. \quad (5.1c)$$

Les paramètres d'entrée du modèle sont présentés dans le tableau 5.1. Le problème direct précédent décrit par (5.1a) - (5.1c) peut être résolu numériquement en utilisant une approche numérique si les paramètres d'entrée du modèle sont fixés. Les positions des sources et des capteurs ainsi que le flux thermique normal (c'est-à-dire sans défaillance) généré par les trois sources sont représentés dans les Figures 5.1 et 5.2, respectivement.

TABLEAU 5.1 – Paramètres d'entrée du modèle mathématique.

Symbole	Définition	Valeurs
$\rho c$	Chaleur volumique	$2.421 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$
$h$	Coefficient de convection naturelle	$10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
$\lambda$	Conductivité thermique	$178 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
$\theta_0$	Température initiale	293 K
$t_f$	Temps final	3600 s
$e$	Épaisseur	$2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

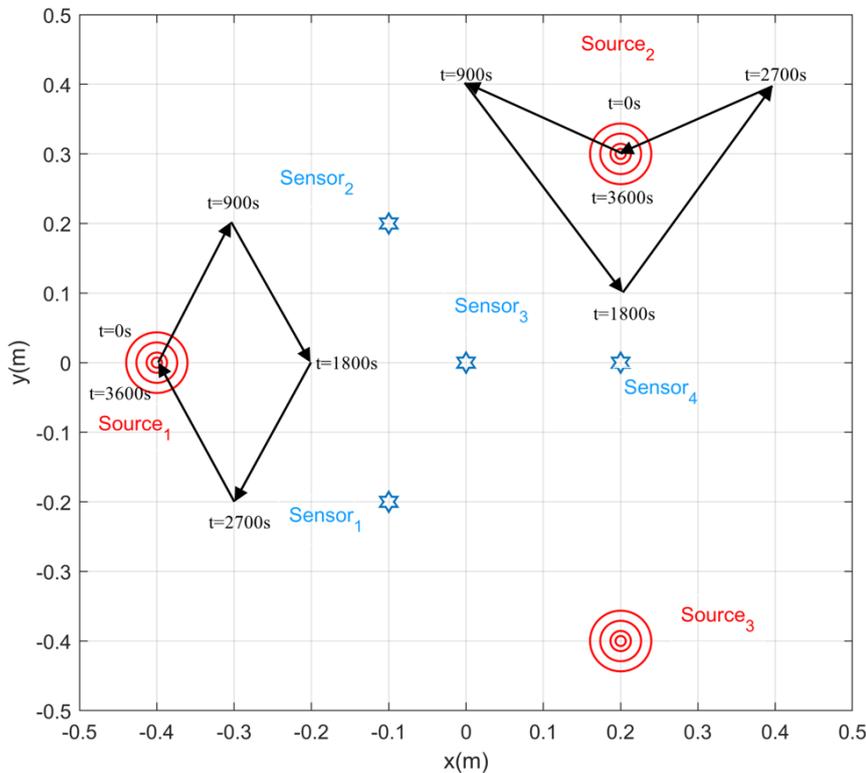
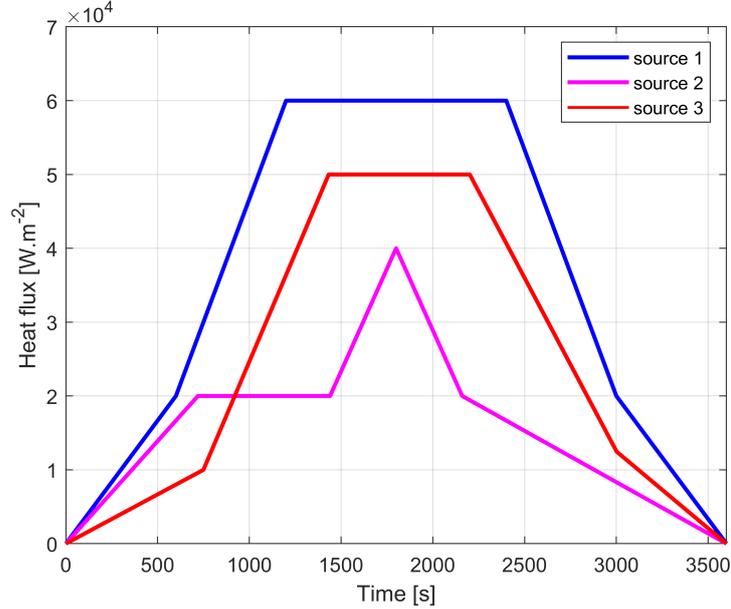


FIGURE 5.1 – Positions des 3 sources et des 4 capteurs sur la plaque.


 FIGURE 5.2 – Flux  $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$  et  $g_3(t)$  des trois sources.

Dans le but d'identifier les instants de défaillance ou de redémarrage d'une ou plusieurs sources, deux approches sont proposées dans ce qui suit sur la base des méthodologies décrites dans les chapitres précédents.

### 5.1.2 Approche avec une résolution d'un PICC

Afin de réaliser cette identification paramétrique, une méthode basée sur la minimisation de l'erreur de sortie est mise en œuvre. Cette méthode décrite dans le chapitre 2, consiste à faire varier les paramètres inconnus  $\tau$  jusqu'à ce que les données prédites par le modèle mathématique correspondent aux observations. Dans un tel objectif, considérons le critère quadratique :

$$J(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_0^{t_f} \left( \theta(C_i, t, \tau) - \hat{\theta}_i(t) \right)^2 dt. \quad (5.2)$$

Dans (5.2),  $\theta(C_i, t, \tau)$  est la température simulée au niveau du capteur  $C_i$  et  $\hat{\theta}_i(t)$  est la température mesurée au niveau du capteur  $C_i$ . La méthode MGC est construite alors, à partir de la résolution de trois problèmes bien posés (direct, adjoint et sensibilité) présentés ci-dessous.

#### 5.1.2.1 Le problème de sensibilité

La résolution de ce problème permet de calculer la profondeur de descente  $\gamma$  ainsi d'évaluer la sensibilité noté par  $\delta\theta(x, y, t)$  provoquée par une variation des éventuelles défaillances  $\delta\chi_i(t)$ .

En se basant sur le principe de construction décrit dans la section 2.4.2 du chapitre 2, le système d'EDPs décrivant le problème de sensibilité peut être écrit comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho C \frac{\partial \delta \theta}{\partial t} - \lambda \Delta \delta \theta = \frac{\left( \sum_{i=1}^{n_{chauff}} \left( \frac{f_i g_i \eta}{\pi} \sum_{j=1}^{2n_i} \left( \frac{(-1)^{j+1} \delta \tau_j^i}{\eta^2 + (t - \tau_j^i)^2} \right) \right) \right)}{e} - 2h \delta \theta, \quad \text{dans } \Omega \times T, \end{array} \right. \quad (5.3a)$$

$$\delta \theta(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (5.3b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda \frac{\partial \delta \theta(x, y, t)}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \text{dans } \Gamma \times T. \end{array} \right. \quad (5.3c)$$

À chaque itération, l'expression de la profondeur de descente est similaire à celle du chapitre 2 (équation 2.14).

La formulation du problème adjoint présentée ci-dessous permet de calculer le gradient de la fonction à minimiser, et donc de calculer les prochaines directions de descente des vecteurs de paramètres inconnus.

### 5.1.2.2 Le problème adjoint

La résolution du problème adjoint présenté ci-dessous permet de calculer le gradient de la fonctionnelle à minimiser suivante  $\nabla J^k = \left( \frac{\partial J^k}{\partial \tau_j^i} \right)_{\substack{i=1, \dots, n_{chauff} \\ j=1, \dots, 2n_i}}$ . L'ensemble de la démarche présenté dans le chapitre 2 section 2.4.3 est mis en œuvre. Le problème adjoint associé est décrit par le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho C \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial t} + \lambda \Delta \psi(x, y, t) = E(x, y, t) + \frac{2h}{e} \psi(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Omega \times T, \end{array} \right. \quad (5.4a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(x, y, t_f) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \end{array} \right. \quad (5.4b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (x, y, t) \in \Gamma \times T. \end{array} \right. \quad (5.4c)$$

Si  $\psi$  est une solution du problème adjoint décrit par les EDP (5.4a) - (5.4a) alors que  $\theta$  est une solution du problème direct décrit par les EDP (5.1a) - (5.1c), l'expression du gradient est donc :

$$\frac{\partial J}{\partial \tau_j^i} = \iint_{\Omega \times T} \left( \frac{f_i g_i \eta}{\pi e} \left( \frac{(-1)^j}{\eta^2 + (t - \tau_j^i)^2} \right) \right) \psi \, d\Omega dT. \quad (5.5)$$

Finalement, la résolution du PICC est basée sur la résolution successive de trois problèmes bien posés (à chaque itération  $k$  de l'algorithme) :

- Le problème direct (5.1a)-(5.1c) pour calculer le critère (5.2).
- Le problème adjoint (5.4a) - (5.4a) pour estimer le gradient du critère (5.5).
- Le problème de sensibilité pour déterminer la profondeur de descente dans la direction de la descente.

La méthode de régularisation itérative du gradient conjugué est mise en œuvre dans l'algorithme 1. L'algorithme s'arrête à l'étape (ii) lorsque le critère est jugé suffisamment petit. Le critère d'arrêt est choisi en fonction du bruit de mesure sur les observations  $\hat{\theta}_i(t)$ , températures mesurées aux capteurs  $C_i$ .

### 5.1.2.3 Exemple

En considérant le contexte illustratif où la première source  $\Phi_1$  tombe en panne à l'instant  $t = 1500s$ , l'identification doit être effectuée à partir des observations obtenues sur la Figure 5.3. Dans cette partie, les mesures obtenues à partir des quatre capteurs sont soumises à une incertitude caractérisée par un bruit gaussien de moyenne nulle et des écarts types distincts  $\sigma$ . Dans la Figure 5.3, il s'agit d'un écart-type  $\sigma = 0.5^\circ C$ . Afin d'implémenter l'algorithme MGC, un seuil  $J_{\text{stop}}$  doit être défini. Le critère d'arrêt pour stopper la minimisation itérative du critère est choisi selon le critère proposé par (Alifanov, 1994), (Morozov, 2012) :

$$J_{\text{stop}} = \Delta t N_c N_t \sigma^2, \quad (5.6)$$

où  $N_c = 4$  est le nombre de capteurs,  $N_t = 400$  est le nombre de mesures par capteur,  $\Delta t = 9$  s est le pas d'échantillonnage temporel entre chaque mesure et  $\sigma^2$  est la variance du bruit de mesure gaussien. Les résultats numériques sont obtenus en utilisant le solveur Comsol-Multiphysics interfacé avec le logiciel Matlab avec un ordinateur personnel ayant les caractéristiques suivantes : CPU : Intel<sup>®</sup> Core<sup>(TM)</sup> i5-10210U CPU 2.11 GHz, RAM : 8.00 Go, OS : Windows 10 (64).

Dans ce qui suit, nous considérons les résultats obtenus avec une initialisation du temps de défaillance de  $t_{\text{nok},1}^1 = 500$  s. Par exemple, la fonction coût en fonction du nombre d'itérations est présentée dans la Figure 5.4. L'identification a convergé en 13 min en une seule simulation, avec un critère d'arrêt (5.6). Le tableau suivant 5.2 montre les résultats du processus d'identification pour différents niveaux de bruit. Sur 30 simulations, les résultats sont présentés comme la moyenne et l'écart-type (entre parenthèses).

La dernière ligne du tableau 5.2 correspond à l'identification des temps de défaillance pour les données de la Figure 5.3, avec l'algorithme MGC (basé sur la résolution itérative de trois problèmes bien posés : problèmes direct, adjoint et de sensibilité). Lorsque les niveaux de bruit des capteurs sont moins importants, cette approche donne un résultat satisfaisant pour l'identification des temps de défaillance de la première source. Lorsque le bruit de mesure des capteurs

devient plus important, le MGC donne toujours un excellent résultat avec une précision supérieure.

TABLEAU 5.2 – Identification des temps de défaillance pour différents niveaux de bruit.

	$J_{stop}$	Instant $t_{nok,1}^1$
$\sigma = 0.1^\circ\text{C}$	144	1500.1s (1.01)
$\sigma = 0.5^\circ\text{C}$	3600	1501.7s (1.57)
$\sigma = 1^\circ\text{C}$	14400	1500,8s (4.01)

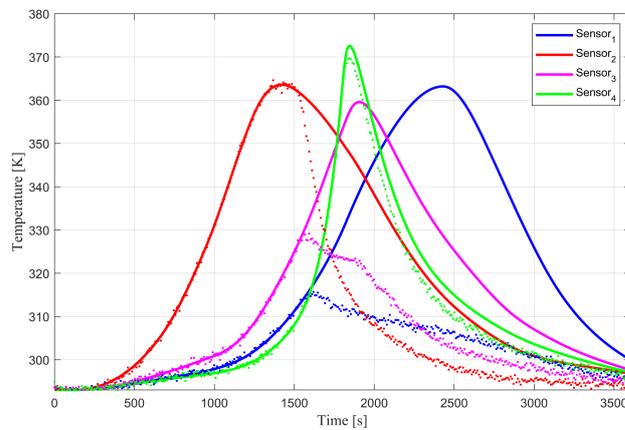


FIGURE 5.3 – Température : sans défaillance et non bruitées (en continu) et avec défaillance et bruits  $\sigma = 0.5^\circ\text{C}$  (points).

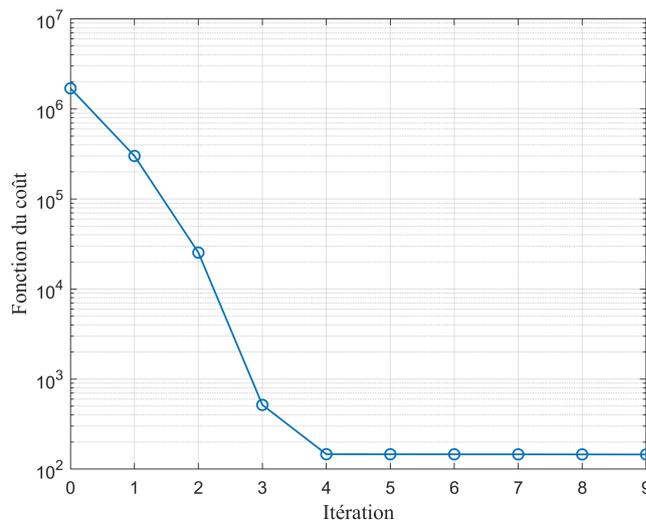


FIGURE 5.4 – Exemple d'évolution du critère dans le cas  $\sigma = 0.1^\circ\text{C}$ .

La section suivante présente un bref rappel sur la deuxième approche basée sur le filtre bayésien.

### 5.1.3 Approche avec le filtre bayésien

Le filtre de Kalman est utilisé, avec l'hypothèse que les modèles d'évolution et d'observation sont linéaires. En suivant la même méthodologie décrite dans la section 4.6.2 du chapitre 4, les modèles d'évolution et d'observation peuvent être représentés respectivement comme suit :

$$\begin{cases} \Theta^{k+1} = L^k \cdot \Theta^k + H' + w'_k, \\ \theta_{obs}^k = C' \cdot \Theta^k + v_k, \end{cases} \quad (5.7)$$

où :

$$\Theta^{k+1} = \begin{bmatrix} \theta^{k+1} \\ \mathbf{G}^{k+1} \end{bmatrix}, \quad L^k = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^k \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad C' = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}.$$

où  $L^k$  est la matrice de transition, qui code la combinaison linéaire de  $\Theta^k$ , qui relie l'état  $k$  à l'état  $k + 1$ , la matrice  $\mathbf{B}^k$  code les coordonnées de la distribution gaussienne entourant le point  $(x_i(t), y_i(t))$  sur la base du support spatial de la source mobile  $\Phi_i^k$ . Le flux thermique  $g_i^k$   $i = 1, \dots, 3$ , est codé par la matrice  $\mathbf{G}^k$ , et la position des capteurs fixes est codée par la matrice  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{H}$  un vecteur constant dépendant du paramètres de discrétisation et du modèle.

#### Exemple :

Pour revenir sur la méthodologie exposée dans le chapitre 4, prenons l'exemple précédent où la source mobile  $g_1$  subit une panne à l'instant  $t = 1500s$ . Les paramètres d'entrées du modèle sont donnés dans le tableau 5.3 et l'évolution des températures aux quatre capteurs  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  sont montrés dans la Figure 5.3. Nous pouvons alors appliquer le filtre de Kalman, puis le lisseur de Kalman après avoir obtenu les observations. les signaux obtenus sont illustrés sur la Figure 5.5 pour  $g_1$ . Enfin, avec les  $\hat{g}_1$  estimés par le lisseur de Kalman, nous pouvons utiliser la stratégie de recherche. La Figure 5.6 représente les multiples  $g_1$  : le flux thermique théorique, la défaillance réelle, l'estimation par le lisseur de Kalman, et le candidat optimal calculé. Le meilleur candidat sélectionné donne son instant de défaillance à  $t_{def}^1 = 1503s$ .

TABLEAU 5.3 – Paramètres du modèle mathématique.

Symbole	Définition	Valeurs
$\rho c$	Chaleur volumique	$2.421 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$
$h$	Coefficient de convection naturelle	$10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \text{K}^{-1}$
$\lambda$	Conductivité thermique	$178 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
$\theta_0$	Température initiale	293 K
$t_f$	Temps final	3600 s
$e$	Épaisseur	$2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
$\Delta t$	Pas de temps	3 s
$\Delta t_{obs}$	Pas de temps des observations	9 s
$\Delta x, \Delta y$	Pas d'espace	0.05m

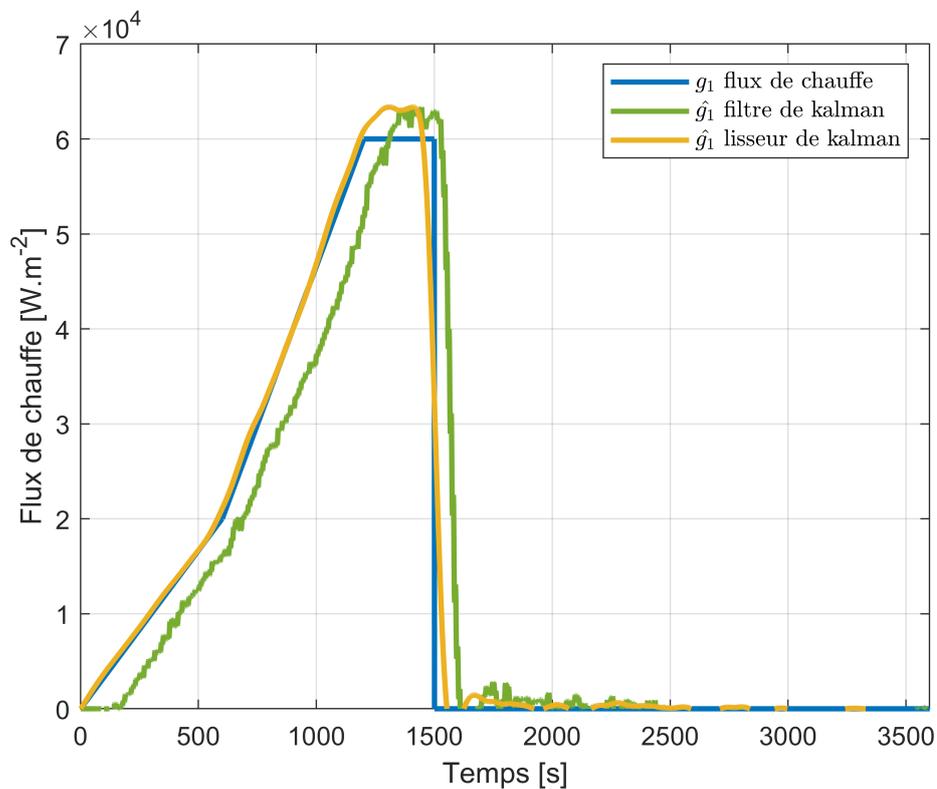
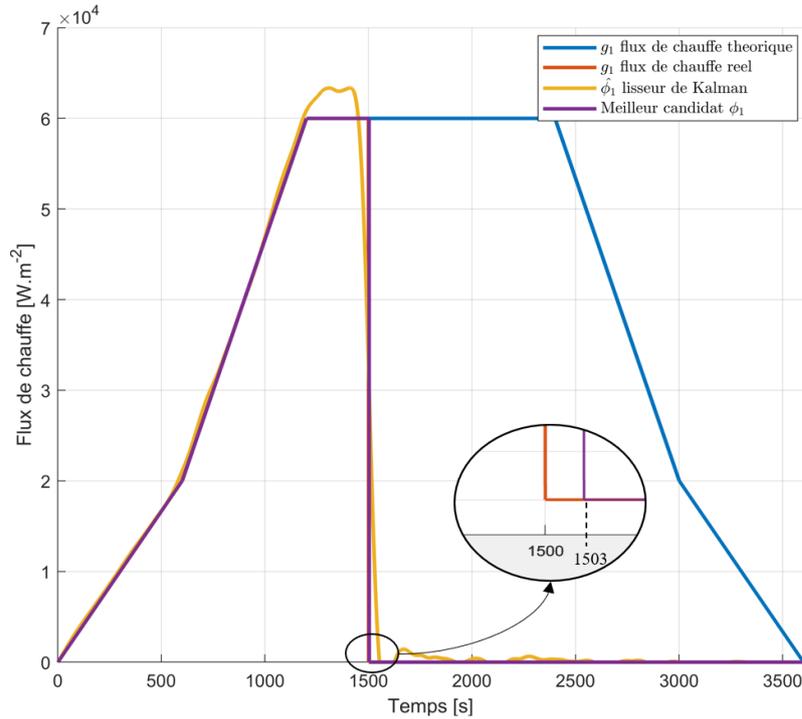


FIGURE 5.5 – Estimation du flux de chaleur  $g_1(t)$  en utilisant le filtre et le lisseur de Kalman.


 FIGURE 5.6 – Le candidat choisi fournit son instant de défaillance à  $t_{\text{fail}}^1 = 1503\text{s}$ .

Les résultats de 30 simulations sont donnés dans le tableau 5.4 avec différents niveaux de bruit. Avec cette approche, il est clair que la stratégie de recherche donne de bons résultats pour l'estimation des instants de défaillance, lorsque les niveaux de bruit des capteurs sont moins importants. Cependant, même avec une augmentation du bruit de mesure des capteurs, l'approche donne toujours de bons résultats.

TABLEAU 5.4 – Instants de défaillance pour différents niveaux de bruit.

	Failure $t_{\text{fail},1}^1$
$\sigma = 0.1^\circ\text{C}$	1503s (0.319)
$\sigma = 0.5^\circ\text{C}$	1505.9s (0.844)
$\sigma = 1^\circ\text{C}$	1505.2s (1.315)

La section suivante présente les résultats des tests de comparaison de performances entre les deux approches. L'efficacité de l'approche innovatrice en identifiant avec précision les instants de défaillance et de redémarrage des sources dans un système thermique sera démontrée. Les avantages et les inconvénients de chaque approche seront également discutés.

## 5.2 Résultats numériques

Afin d'illustrer la pertinence des deux approches proposées, analysons d'abord le cadre où les 3 sources sont fixes. Plusieurs configurations ont été simulées. Les données des simulations Comsol-Multiphysics ont été collectées, et analysées par Matlab (pour éviter le crime inverse). Les paramètres de discrétisation sont les suivants :  $\Delta t = 1s$ ,  $\Delta x = \Delta y = 0,01m$ . Les résultats sont obtenus pour 3 niveaux de bruit distincts :  $\sigma = 0.1^\circ C$ ,  $\sigma = 0.5^\circ C$  et  $\sigma = 1^\circ C$  (moyenne et écart-type (entre parenthèses sur 30 simulations)).

### 5.2.1 Sources fixes

#### 5.2.1.1 Séparation des sources

L'objectif dans ce scénario est d'identifier les instants de défaillance de deux sources distinctes. Dans cette configuration, nous considérons que la première source tombe en panne à  $t_{\text{nok},1}^1 = 1000s$  et que la deuxième source tombe en panne à  $t_{\text{nok},1}^2 = 2000s$ . Par exemple, les mesures des quatre capteurs sont indiquées sur la Figure 5.7 avec un écart-type  $\sigma = 0,5^\circ$ . En utilisant les mêmes paramètres dans le tableau 5.3, on obtient les résultats présentés dans le tableau 5.5, en commençant par l'initialisation  $t_{\text{nok},1}^1 = 500s$  et  $t_{\text{nok},1}^2 = 1000s$ . Enfin, nous désignons les résultats donnés par la première approche par (MGC) et la deuxième approche par (KS), respectivement. Dans la Figure 5.8, un exemple représentant la fdp pour les deux approches lorsque la première source subit une défaillance, sur la base d'un échantillon de 30 simulations. Le résultat de la fdp est obtenu en utilisant la distribution normale.

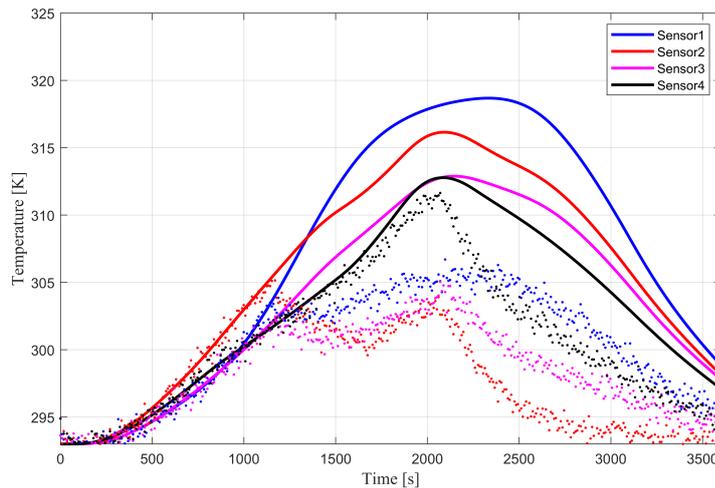


FIGURE 5.7 – Température : sans défaillance et non bruitées (en continu) et avec défaillance et bruits  $\sigma = 0.5^\circ C$  (points).

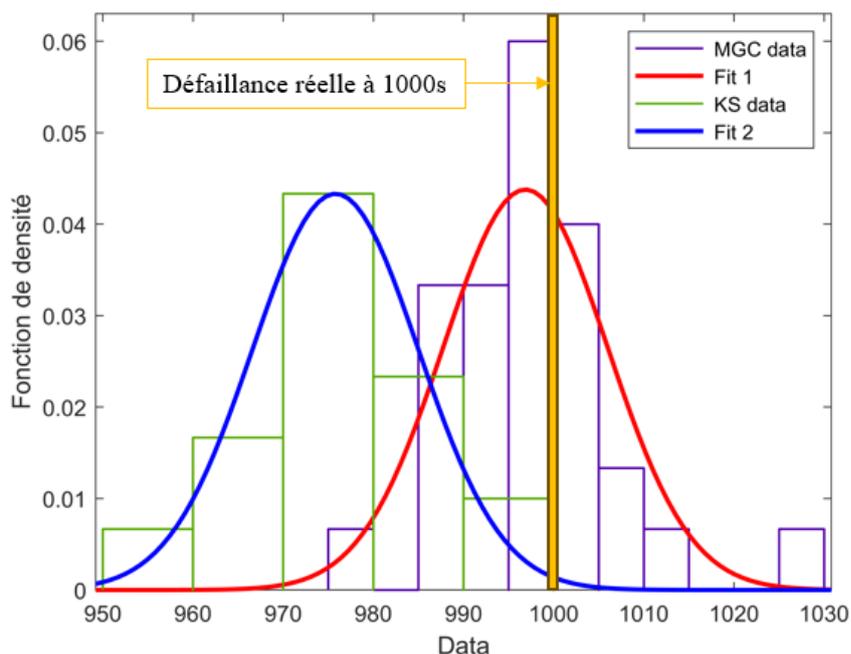


FIGURE 5.8 – Histogramme et représentation de la fdp de l'estimation de  $t_{\text{nok},1}^1$  sur 30 simulations avec  $\sigma = 1^\circ$ .

TABLEAU 5.5 – Identification des instants de défaillance des deux sources avec des niveaux de bruit variables.

		Instant $t_{\text{nok},1}^1$	Instant $t_{\text{nok},1}^2$
$\sigma = 0.1^\circ\text{C}$	MGC	997s (1.95)	1997s (2.54)
	KS	1001s (2.17)	2003s (2.31)
$\sigma = 0.5^\circ\text{C}$	MGC	998.76s (4.40)	1997.4s (4.60)
	KS	1003.2s (5.06)	2008.9s (4.41)
$\sigma = 1^\circ\text{C}$	MGC	996.8s (9.1)	2000.7s (13.37)
	KS	975.8s (9.21)	2041.7s (7.68)

Dans le tableau 5.5, il est évident que les deux approches ont réussi à identifier les instants de défaillance pour deux sources distinctes. Lorsque les bruits de mesure sont moins importants, les deux méthodes produisent d'excellents résultats. Les résultats avec les deux approches KS et MGC sont obtenus après 40 min et 420 min respectivement sur 30 simulations. Nous observons que la deuxième approche donne des résultats plus rapidement. Cependant, lorsque le bruit de mesure des capteurs est augmenté, les instants de défaillance des deux sources sont mieux

identifiés avec l'approche MGC que la seconde KS. Le principal inconvénient de l'approche MGC est son temps de calcul, qui peut être crucial en fonction de la complexité du problème.

### 5.2.1.2 Identification de la panne et redémarrage avec séparation des sources

Après avoir identifié les instants de défaillance de deux sources distinctes à l'aide des deux approches, le défi dans ce nouveau scénario est d'identifier non seulement les instants de défaillance, mais aussi le redémarrage des sources. Pour cette dernière configuration, nous considérons que la première source tombe en panne à  $t_{\text{nok},1}^1 = 1000\text{s}$  puis redémarre à  $t_{\text{ok},1}^1 = 2500\text{s}$  et que la seconde source tombe en panne à  $t_{\text{nok},1}^2 = 2000\text{s}$ . Par exemple, les mesures aux quatre capteurs sont données dans la Figure 5.9 avec un écart type  $\sigma = 0.5^\circ\text{C}$ . En utilisant les mêmes paramètres que précédemment, nous obtenons les résultats présentés dans le Tableau 5.6, en commençant par l'initialisation  $t_{\text{nok},1}^1 = 500\text{s}$ ,  $t_{\text{ok},1}^1 = 1500\text{s}$  et  $t_{\text{nok},1}^2 = 1000\text{s}$ . Les résultats avec les deux approches KS et MGC sont respectivement obtenus après 41 min et 600 min sur 30 simulations.

TABLEAU 5.6 – Identification des instants de défaillance des deux sources et redémarrage avec des niveaux de bruit variables.

		Instant $t_{\text{nok},1}^1$	Instant $t_{\text{nok},1}^2$	Instant $t_{\text{ok},1}^1$
$\sigma = 0.1^\circ\text{C}$	MGC	997s (2, 26)	1996, 7s (2, 23)	2498, 7s (1, 91)
	KS	1001, 4s (1, 4)	2005s (1, 4)	2504, 5s (1, 14)
$\sigma = 0.5^\circ\text{C}$	MGC	996, 5s (5, 45)	1995s (5, 75)	2499, 3s (3, 45)
	KS	999, 5s (3, 92)	2014s (5, 15)	2513, 8s (4, 09)
$\sigma = 1^\circ\text{C}$	MGC	999, 46s (8, 92)	1993s (10, 45)	2494, 4s (10, 42)
	KS	976, 7s (8, 41)	2041, 2s (6, 44)	2539, 4s (5, 68)

Dans le tableau 5.6, il est clair que les deux approches ont bien identifié les instants de défaillance et de redémarrage. Lorsque le bruit de mesure est moins important, les deux approches donnent un bon résultat, lorsque le bruit de mesure est plus important, les instants de commutation sont légèrement moins bien identifiés. L'approche MGC donne un meilleur résultat pour identifier les instants de commutation et la séparation des sources, que l'approche KS avec une meilleure précision. En conclusion, le tableau précédent démontre que les deux méthodes sont applicables pour identifier les instants de défaillance et de redémarrage avec séparation des sources, en particulier l'approche MGC pour ce problème décrit par des équations différentielles partielles paraboliques.

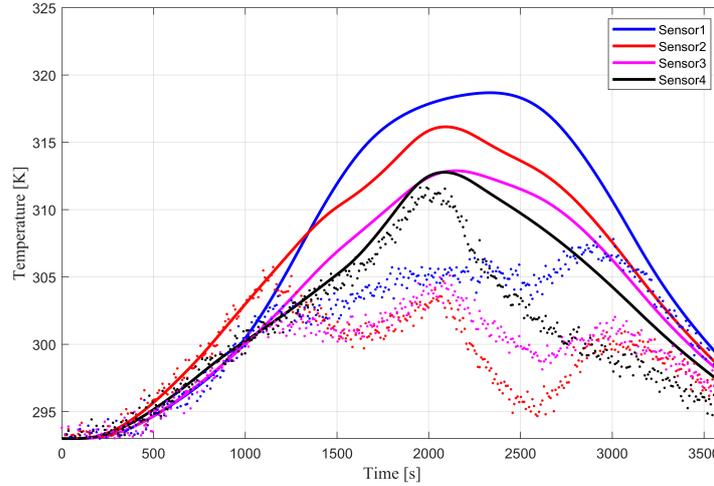


FIGURE 5.9 – Évolution de la température : sans défauts et sans bruits (en continu) et avec panne et bruit (points).

## 5.2.2 Sources mobiles

Après avoir étudié le cas des sources fixes et évalué les performances des deux méthodes, nous allons maintenant étudier le cas plus complexe où les sources de chaleur sont mobiles. La trajectoire exacte de chaque source de chaleur est connue (voir Figure 5.1) avec une vitesse constante. Le principal défi consiste à déterminer les instants de défaillances et de redémarrage de ces sources de chaleur mobiles, à partir des mesures bruitées fournies par les capteurs fixes.

### 5.2.2.1 Séparation des sources

L'objectif dans ce scénario est d'identifier les instants de défaillance de deux sources distinctes. Dans cette configuration, nous considérons que la première source  $\Phi_1$  tombe en panne à  $t_{\text{fail}}^1 = 1000\text{s}$  et la seconde source  $\Phi_2$  tombe en panne à  $t_{\text{fail}}^2 = 2000\text{s}$ . Les mesures des quatre capteurs sont indiquées sur la Figure 5.10 avec un écart-type  $\sigma = 0.5^\circ\text{C}$ . En utilisant les mêmes paramètres dans le tableau 5.3, nous obtenons les résultats présentés dans le tableau 5.7 pour 20 simulations pour chaque configuration.

Il est clair, d'après le tableau 5.7, que les deux méthodes ont réussi à identifier les instants de défaillance pour deux sources distinctes. Lorsque les bruits de mesure sont insignifiants, les deux approches donnent d'excellents résultats. Cependant, lorsque le bruit de mesure des capteurs augmente, les instants de défaillance des deux sources ont été identifiés avec une plus grande précision par rapport aux sources fixes, démontrant clairement l'impact de la distance dans les résultats obtenus.

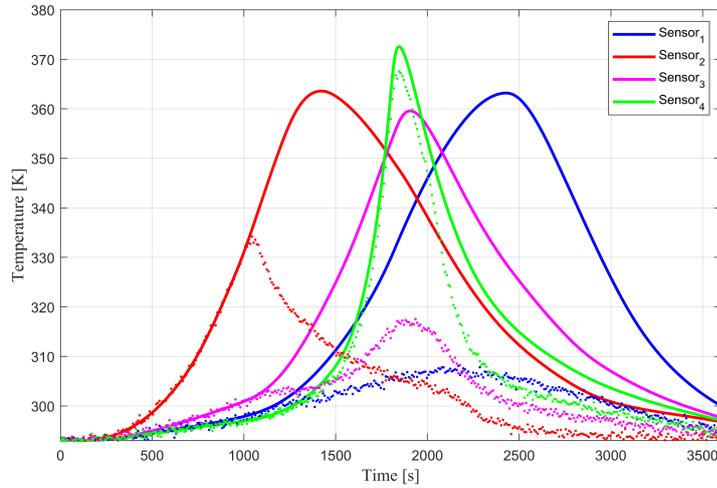


FIGURE 5.10 – Évolution de la température : sans défauts et sans bruits (en continu) et avec panne et bruit (points).

TABLEAU 5.7 – Identification des instants de défaillance des deux sources avec différents niveaux de bruit.

		Instant $t_{\text{nok},1}^1$	Instant $t_{\text{nok},1}^2$
$\sigma = 0.1^\circ\text{C}$	MGC	999.78s (1.80)	1998.9s (2.23)
	KS	1002.7s (0.606)	2004.1s (0.48)
$\sigma = 0.5^\circ\text{C}$	MGC	998,83s (1,91)	1998s (3,40)
	KS	999.4s (1.52)	2007.7s (1,30)
$\sigma = 1^\circ\text{C}$	MGC	1000.7s (6,02)	2001,1s (11,97)
	KS	999.8s (3.98)	2009.8s (2.8)

### 5.2.2.2 Identification de la panne et redémarrage avec séparation des sources

Après avoir identifié les instants de défaillance de deux sources distinctes à l'aide des approches proposées, le challenge dans ce nouveau scénario est d'identifier non seulement les instants de défaillance, mais aussi le redémarrage (remise en chauffe) des sources. Pour cette dernière configuration, nous considérons que la première source  $\Phi_1$  tombe en panne à  $t_{\text{fail}}^1 = 1000\text{s}$  puis redémarre à  $t_{\text{rest}}^1 = 2500\text{s}$  et que la seconde source  $\Phi_2$  tombe en panne à  $t_{\text{fail}}^2 = 2000\text{s}$ . Par exemple, les mesures aux quatre capteurs sont données dans la Figure 5.11 avec un écart type  $\sigma = 0.5^\circ\text{C}$ . En utilisant les mêmes paramètres que précédemment, nous obtenons les résultats

présentés dans le Tableau 5.8

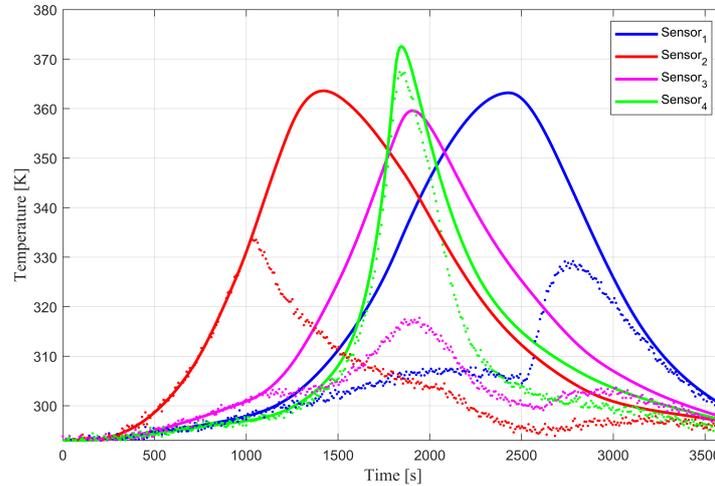


FIGURE 5.11 – Évolution de la température : sans défauts et sans bruits (en continu) et avec panne et bruit (points).

TABLEAU 5.8 – Identification des temps de défaillance des deux sources et redémarrage avec des niveaux de bruit variables.

		Instant $t_{\text{nok},1}^1$	Instant $t_{\text{nok},1}^2$	Instant $t_{\text{ok},1}^1$
$\sigma = 0.1^\circ\text{C}$	MGC	1001.4s (2.57)	1996.4s (2, 98)	2498.8s (1, 18)
	KS	998.6s (0.498)	2009.6s (0.5)	2509.2s (0.406)
$\sigma = 0.5^\circ\text{C}$	MGC	999.93s (3, 23)	1995.9s (3, 80)	2500.7s (2.49)
	KS	989.4s (1.79)	2027.4s (1.1)	2512.7s (0.98)
$\sigma = 1^\circ\text{C}$	MGC	1000.9s (4.31)	1992.9s (5, 49)	2499, 3s (2, 59)
	KS	984.1s (3.19)	2042.9s (3.82)	2514.6s (1.65)

Les deux approches ont permis d'identifier les temps de défaillance et de redémarrage dans le tableau ci-dessus. Lorsque le bruit de mesure est moins important, nous obtenons un résultat satisfaisant ; lorsqu'il devient plus important, les instants de commutation sont marginalement mieux identifiés par rapport au cas fixe précédent. En conclusion, le tableau précédent démontre l'impact du facteur de distance afin d'obtenir un résultat satisfaisant et l'applicabilité de la méthode d'identification des instants de défaillance et de redémarrage pour ce problème décrit par des équations différentielles partielles paraboliques.

### 5.3 Identification quasi-en-ligne de défaillance : sources mobiles

#### Analyse de détection en ligne

Dans cette approche, nous utilisons la carte de contrôle EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) pour la détection de panne ou de redémarrage (phase détection en ligne du chapitre 4). Cette approche de détection consiste à calculer les résidus entre les températures simulées et les températures mesurées, comme expliqué en détail dans la sous-section 4.6.5. Pour évaluer la performance des deux approches, la phase de détection en temps réel sera étudiée à l'aide d'une carte de contrôle EWMA. Cela permettra d'analyser la durée de détection des deux méthodes en utilisant la même approche de détection.

Pour l'identification, les deux approches sont utilisées : la première approche basée sur MGC en se basant sur la stratégie N°3 (section 3.2.3 du chapitre 3), et la deuxième approche basée sur le filtre de Kalman. L'objectif de ce chapitre est de démontrer l'efficacité de l'approche innovante basée sur la MGC pour identifier les instants de défaillance et de redémarrage des sources dans un système thermique, en comparaison avec l'approche basée sur le filtre bayésien. La Figure 5.12 présente les deux phases de détection ainsi que l'identification réalisée à l'aide des deux approches.

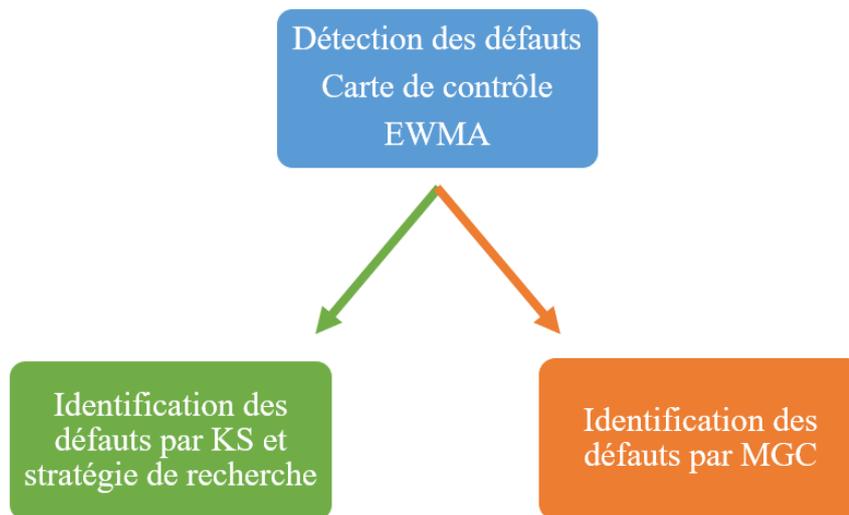


FIGURE 5.12 – Illustration de la méthodologie de détection et d'identification en ligne.

### 5.4 Résultats numériques

#### 5.4.1 Identification quasi-en-ligne d'une source mobile

Afin d'illustrer la phase de détection et d'identification des pannes de sources thermiques en utilisant les approches de détection en ligne, nous reprenons l'exemple où la source mobile  $\Phi_1$

tombe en panne à l'instant  $t = 1500$ s, l'évolution des températures aux capteurs sont montrées dans la Figure 5.3. La phase de détection en ligne est initiée en utilisant la méthode EWMA. Ainsi, une fois que la panne est détectée, c'est-à-dire lorsque les limites de la carte EWMA sont dépassées (Figure 5.13), la procédure d'identification est lancée. Il est à noter que dans cette application, quatre capteurs de températures sont utilisés (mesures prise toutes les 9 secondes), et l'hypothèse est que lorsque trois de ces capteurs dépassent les limites de la carte EWMA, la procédure d'identification est lancée (Figure 5.14). Le choix de cette hypothèse se base sur un compromis entre la sensibilité et la spécificité de la méthode. En effet, si on lance la procédure d'identification dès qu'un seul capteur dépasse la limite de la carte EWMA, la méthode sera très sensible et détectera les défaillances assez rapidement, mais elle sera également sujette à des fausses alarmes, c'est-à-dire qu'elle peut signaler une défaillance alors qu'il n'y en a pas réellement, cela peut avoir un impact négatif sur la précision de l'identification. D'un autre côté, si on attend que tous les capteurs dépassent la limite pour lancer la procédure d'identification, la méthode sera moins sujette aux fausses alarmes, mais elle sera moins sensible et détectera les défaillances avec un certain délai. En choisissant le seuil de trois capteurs, on trouve un compromis raisonnable entre la sensibilité et la spécificité de la méthode.

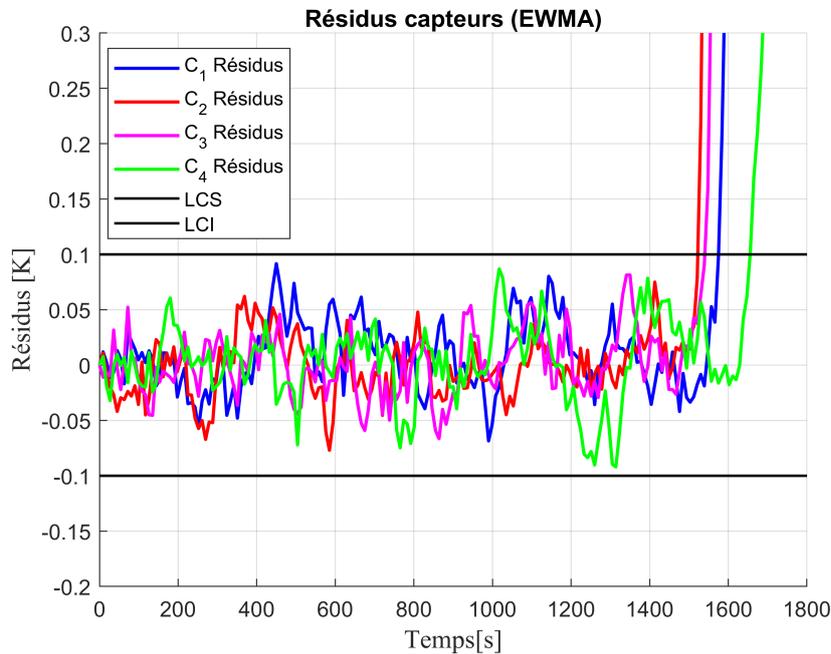


FIGURE 5.13 – Carte EWMA avec  $\lambda = 0.2$ ,  $k = 3$  et  $\sigma = 0.1^\circ\text{C}$ .

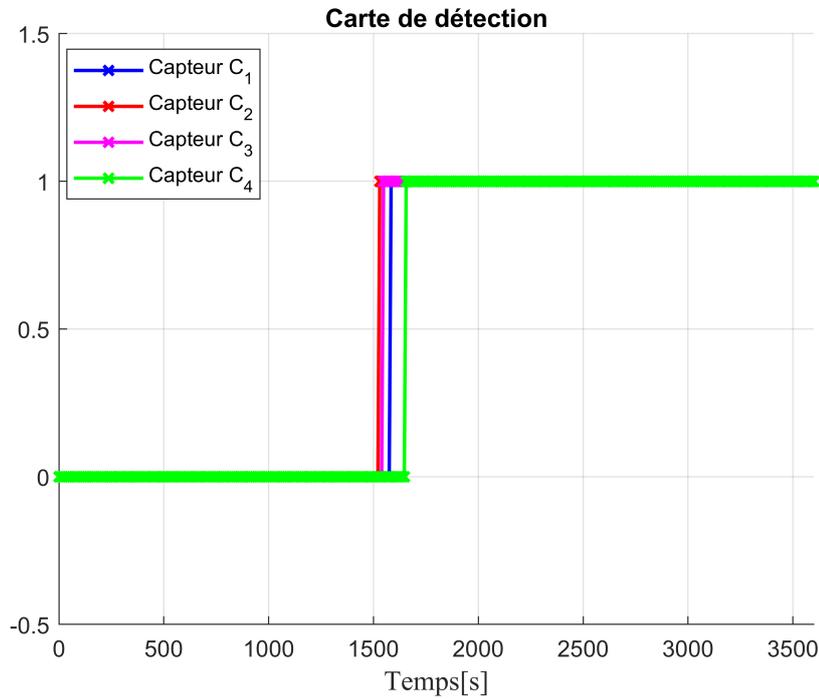


FIGURE 5.14 – Carte de détection.

TABLEAU 5.9 – Identification quasi-en-ligne des instants de défaillance de la source  $\Phi_1$  avec des niveaux de bruit variables.

		Résultat d'identification $t_{\text{nok},1}^1$	Instant de détection $t_{\text{detect}}$	Instant de diagnostic $t_{\text{diag}}$
$\sigma = 0.1^\circ\text{C}$	MGC	1501.8s (1.64)	1578.1s (0.87)	1645.7s (5.95)
	KS	1506s (0.608)	1566s (0)	1641.5s (3.6)
$\sigma = 0.5^\circ\text{C}$	MGC	1502.7s (2.69)	1607s (0.60)	1696.9s (13.4)
	KS	1505.7s (1.52)	1613.2s (1.01)	1671.7s (9.8)
$\sigma = 1^\circ\text{C}$	MGC	1503.2s (2.59)	1624.5s (1.35)	1714.3s (21.4)
	KS	1505.6s (2.82)	1629s (1.52)	1688.4s (16.37)

Le tableau 5.9 présente les résultats d'identification obtenus par les deux approches pour 20 simulations où  $t_{\text{nok},1}^1$ ,  $t_{\text{detect}}$  et  $t_{\text{diag}}$  représentent respectivement le résultat d'identification, l'instant de détection et de diagnostic. Lorsque le bruit de mesure est faible, les deux approches donnent d'excellents résultats pour l'identification des défaillances. Cependant, lorsque le bruit de mesure est élevé, l'approche novatrice (MGC) offre des résultats plus précis que la deuxième

approche (KS). Il est important de noter que dans le cas de détection tardive, la deuxième approche basée sur le FK produit des résultats d'identification plus précis. En effet, le principe du FK consiste à utiliser les observations passées pour améliorer les estimations futures. Ainsi, lorsqu'une détection de panne est tardive, le filtre dispose de plus d'observations pour estimer le flux de chaleur, ce qui peut conduire à une identification plus précise des instants de défaillance. En d'autres termes, plus il y a de données disponibles pour le FK, plus les estimations sont précises.

#### 5.4.2 Identification quasi en ligne de défaillance de deux sources mobiles

Dans cette nouvelle étude, deux sources mobiles  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  tombent en panne. La carte de contrôle EWMA est utilisée pour détecter en temps réel les défaillances à partir des mesures des capteurs qui sont prises toutes les 9 secondes. Une fois qu'une défaillance est détectée, la phase d'identification est déclenchée pour déterminer quelle source a subi une panne. Pour faciliter la compréhension de la procédure de détection et d'identification dans le cas particulier de la panne de deux sources, le lecteur est rappelé à l'illustration présentée dans la section 3.2.1.2 du chapitre 3. Cette illustration a pour objectif de fournir une visualisation plus claire de la manière dont l'identification est effectuée dans ce scénario spécifique de défaillance de deux sources.

Les résultats de la phase de détection sont présentés dans les Figures 5.15a et 5.16a, tandis que les décisions de lancement de la procédure d'identification sont affichées sur les cartes 5.15b et 5.16b. Ces cartes permettent de visualiser les moments où la détection de défaillance est activée et de déclencher ainsi la procédure d'identification.

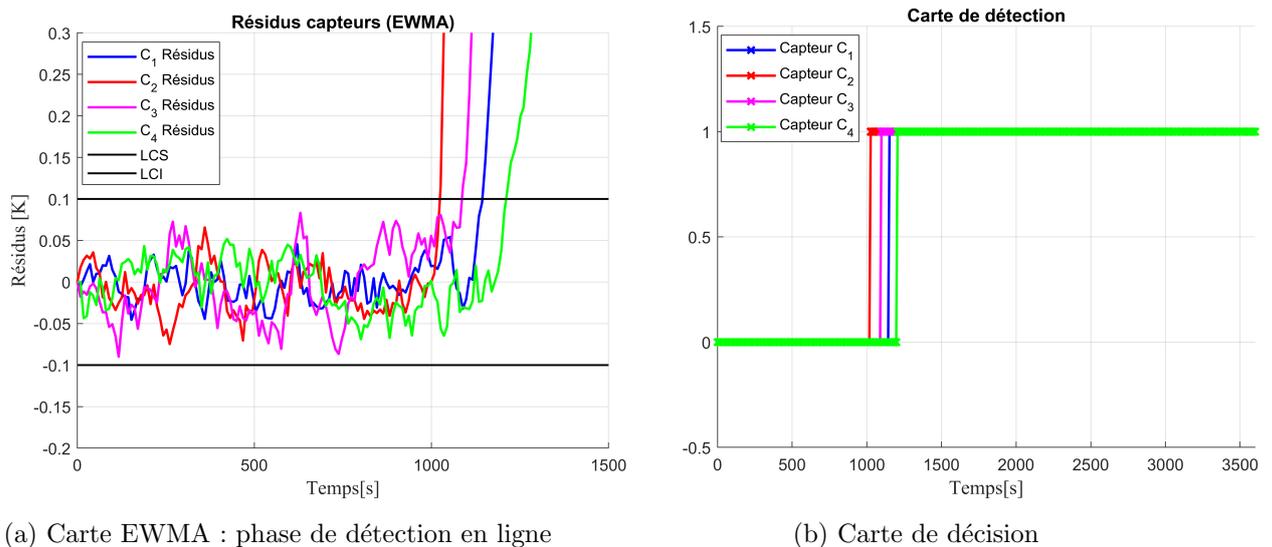
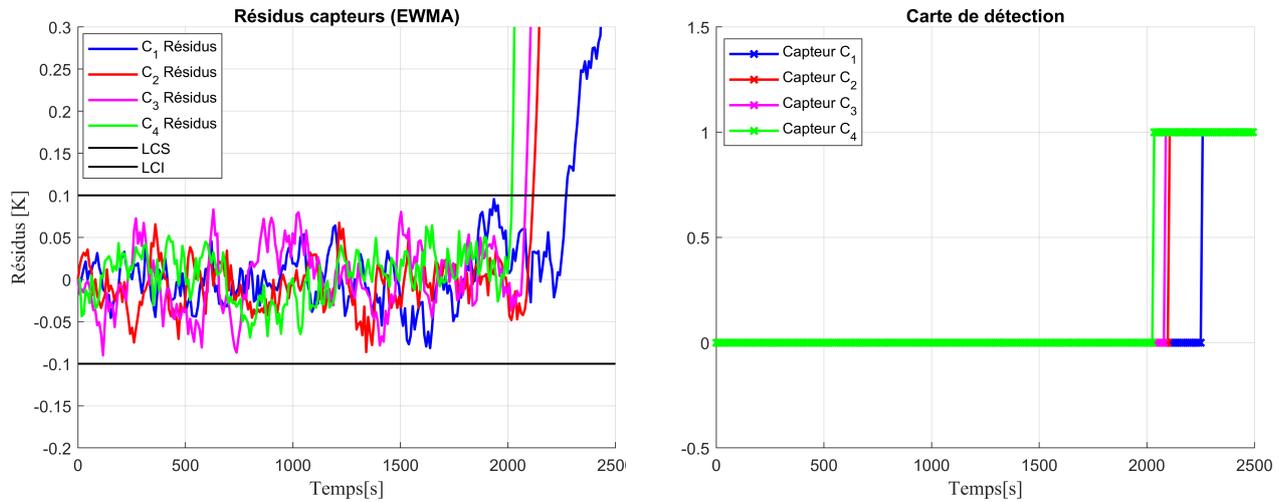


FIGURE 5.15 – Illustration de la détection en ligne pour la première défaillance.



(a) Carte EWMA : phase de détection en ligne

(b) Carte de décision

FIGURE 5.16 – Illustration de la détection en ligne de la deuxième défaillance.

TABLEAU 5.10 – Identification quasi-en-ligne des instants de défaillance  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  des deux sources avec des niveaux de bruit variables.

		Instant $t_{\text{nok},1}^1$	$t_{\text{detect}}$ et $t_{\text{diag}}$	Instant $t_{\text{nok},1}^2$	$t_{\text{detect}}$ et $t_{\text{diag}}$
$\sigma = 0.1^\circ\text{C}$	MGC	1003.9s (1.36)	1154.3s(0.96) 1203.9s(10.77)	2001.6s (1.79)	2119.5s(1.19) 2228.4s(12.2)
	KS	1015.7s (2.88)	1147s(2.23) 1191.7s (11.24)	2003.9s (0.71)	2135.2s(0.44) 2211.9s (4.7)
$\sigma = 0.5^\circ\text{C}$	MGC	1004.2s (3.64)	1206s(2.27) 1271.8s (25.7)	1999.1s (2.1)	2175.8s(1.91) 2301.1s (22.07)
	KS	1008.6s (4.5)	1211s(1.84) 1257.5s (16.28)	2004s (2.52)	2182.2s(1.2) 2277.8s (12.4)
$\sigma = 1^\circ\text{C}$	MGC	1004.7s (3.28)	1240.6s (3.19) 1336.6s (31.77)	1999.3s (3.71)	2221.1s(4.1) 2348s (31.1)
	KS	1007.3s (8.99)	1242s(3.29) 1290s (30.33)	2005.1s (5.3)	2228.8s(3.52) 2329.8s (34.54)

Le tableau 5.10 présente les résultats de l'identification des défaillances obtenus à partir

1. Une fois que la première défaillance a été détectée et identifiée, une nouvelle résolution du problème direct est résolue pour mettre à jour le comportement du système. Les figures (5.16a) et (5.16b) illustrent ensuite la phase de détection de la deuxième défaillance après avoir mise à jour le comportement du système.

de deux approches différentes pour 20 simulations. Lorsque le bruit de mesure est faible, les deux approches ont montré d'excellents résultats pour l'identification des défaillances. Cependant, lorsque le bruit de mesure est élevé, l'approche innovatrice (MGC) a fourni des résultats plus précis que la deuxième approche (KS). En outre, de manière similaire à l'étude précédente, lorsque la détection est tardive, les deux approches ont montré d'excellents résultats pour l'identification des défaillances. Cela est dû au fait qu'avec la détection tardive, il y a plus d'observations disponibles, ce qui permet une identification plus précise des défaillances.

## 5.5 Bilan du chapitre 5

Le présent chapitre étudie la comparaison de deux approches dans le cadre de l'identification des pannes ou redémarrages des sources chauffantes dans les systèmes thermiques. Cette comparaison a été effectuée pour les cas d'identification hors ligne et en ligne. Dans le cas hors ligne, les résultats des deux approches sont satisfaisants pour les sources fixes et mobiles. L'approche basée sur la méthode du gradient conjugué (MGC) montre une grande précision dans l'identification des instants de défaillance ou de redémarrage, même en présence d'un bruit de mesure important, comparativement à la deuxième approche basée sur le filtre bayésien. Toutefois, cette approche peut être confrontée à un temps de calcul élevé en fonction de la complexité du problème.

Dans le cas d'identification en ligne, une méthode de détection basée sur la carte de contrôle EWMA a été utilisée pour lancer la procédure dès que les résidus des capteurs dépassent les limites de la carte. Pour la première approche MGC, la stratégie d'identification repose sur la stratégie 3 (voir section 3.2.3) basée sur l'utilisation d'une fenêtre adaptée pour une identification plus précise des instants de défaillance ou de redémarrage. Pour la deuxième approche basée sur le filtre de Kalman, l'idée est de revenir à une estimation plus précise du flux de chauffe grâce au lissage de Kalman dès qu'une panne ou un redémarrage est détecté. Cependant, en cas de détection tardive, l'identification est améliorée. En effet, le filtre de Kalman utilise les observations passées pour améliorer les estimations futures, et donc en cas de détection tardive, il dispose de plus d'observations pour estimer le flux de chaleur. Cette observation s'applique également à l'approche MGC lorsqu'on dispose de plus d'observations, cela peut conduire à une identification plus précise des instants de défaillance ou de redémarrage.

**Références bibliographiques**

- [1] Alifanov, O. M. (1994). *Iterative Regularization of Inverse Problems*, pages 227–328. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- [2] Morozov, V. A. (2012). *Methods for solving incorrectly posed problems*. Springer Science & Business Media.
- [3] Vergnaud, A., Perez, L., and Autrique, L. (2016). Quasi-online parametric identification of moving heating devices in a 2d geometry. *International Journal of Thermal Sciences*, 102 :47–61.



# CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

---

Les systèmes thermiques sont largement utilisés dans de nombreux domaines, tels que l'industrie, le bâtiment, l'énergie, etc. L'un des défis majeurs dans la gestion et le contrôle de ces systèmes est la détection et la gestion des défaillances des sources chauffantes. La défaillance de ces sources peut entraîner une baisse de performances, une augmentation de la consommation d'énergie et une détérioration de la qualité du confort thermique. Il est donc essentiel de détecter rapidement les défaillances et de prendre les mesures appropriées pour minimiser les impacts négatifs.

Cette thèse propose une approche itérative basée sur la méthode du gradient conjugué pour résoudre le problème inverse de l'identification des défaillances des sources chauffantes dans un système thermique défini par des équations aux dérivées partielles. L'objectif est d'identifier l'instant de panne ou de redémarrage de plusieurs sources chauffantes, ce qui est essentiel pour assurer un fonctionnement optimal et économique des systèmes thermiques.

Le chapitre 1 traite de l'introduction aux équations aux dérivées partielles paraboliques et à la modélisation des transferts thermiques. Une vue d'ensemble de l'état de l'art, de la définition et des propriétés des problèmes inverses a également été présentée. Ensuite, un modèle thermique en géométrie 2D a été considéré pour réduire le temps de calcul, avec une validation et une analyse des erreurs liées à l'approximation 2D. Deux approches numériques, les différences finies et les éléments finis, ont été utilisées pour résoudre le problème direct, avec une analyse des erreurs relatives. Le chapitre se termine par une présentation de l'historique et des rappels sur l'identification de défaillances dans les systèmes décrits par des EDPs paraboliques.

Le chapitre 2 présente une méthode originale pour identifier les instants de commutation des sources chauffantes dans un système physique décrit par un ensemble d'équations aux dérivées partielles paraboliques non linéaires. La méthode est basée sur une procédure de minimisation d'un critère quadratique, résolue par une méthode de régularisation itérative, en raison de la nature mal-posée du problème inverse de conduction de la chaleur. La méthode a été testée avec succès pour identifier les pannes de source, les redémarrages et les instants de panne de deux sources, même en présence de bruit de mesure important.

Le chapitre 3 décrit trois stratégies d'identification quasi en ligne pour la détection et l'identification des défaillances ou des redémarrages de sources. La première stratégie utilise une fenêtre de détection et d'identification de même taille, la deuxième stratégie adapte la taille de la fenêtre d'identification à deux fois la taille de la fenêtre de détection, tandis que la troisième stratégie

---

propose une détection en temps réel et une fenêtre d'identification adaptée en soustrayant une valeur fixe de la fenêtre de détection. Chacune de ces stratégies a ses avantages et ses inconvénients et il est important de choisir celle qui convient le mieux aux besoins spécifiques de l'application.

Le quatrième chapitre de l'étude présente une adaptation du filtre de Kalman pour identifier les instants de défaillance d'une ou plusieurs sources de chauffe fixes dans un système d'équations aux dérivées partielles en deux dimensions. Une résolution du problème direct a d'abord été effectuée à l'aide d'une approche numérique basée sur la méthode des différences finies. Ensuite, une résolution du problème inverse dans un cadre bayésien a été mise en œuvre pour estimer un ou deux flux de chauffe à partir d'un filtre bayésien, notamment le filtre de Kalman. Une méthodologie a été proposée pour estimer la défaillance et le redémarrage des sources de chaleur à l'aide d'un lisseur de Kalman et d'une stratégie de recherche dans différents signaux candidats de la source. Cette approche a donné d'excellents résultats malgré l'utilisation de seulement 3 capteurs éloignés des sources pour surveiller la température.

Le chapitre 5 se concentre sur la comparaison de deux approches d'identification de pannes ou de redémarrages des sources chauffantes dans les systèmes thermiques, pour les cas d'identification hors ligne et en ligne. Les résultats obtenus pour les sources fixes et mobiles sont satisfaisants dans le cas hors ligne, où l'approche basée sur la méthode du gradient conjugué (MGC) a montré une grande précision dans l'identification des instants de défaillance ou de redémarrage, même en présence d'un bruit de mesure important, comparativement à l'approche basée sur le filtre bayésien. Cependant, cette approche peut être confrontée à un temps de calcul élevé en fonction de la complexité du problème.

Dans le cas d'identification en ligne, une méthode de détection basée sur la carte de contrôle EWMA a été utilisée pour lancer la procédure dès que les résidus des capteurs dépassent les limites de la carte. Pour la première approche MGC, la stratégie d'identification repose sur l'utilisation d'une fenêtre adaptée pour une identification plus précise des instants de défaillance ou de redémarrage. Pour la deuxième approche basée sur le filtre de Kalman, l'idée est de revenir à une estimation plus précise du flux de chauffe grâce au lissage de Kalman dès qu'une panne ou un redémarrage est détecté. Cependant, en cas de détection tardive, l'identification est améliorée grâce à l'utilisation des observations passées par le filtre de Kalman. Ces résultats de comparaison soulignent l'importance de l'approche innovatrice pour l'identification des pannes ou des redémarrages des sources chauffantes dans les systèmes thermiques décrits par des EDPs, en fonction des contraintes de temps et de complexité du problème.

En terme de perspectives, une utilisation future de capteurs mobiles pourrait être envisagée pour améliorer la précision de l'estimation des instants de défaillance ou de suivre les trajectoires des sources. Les capteurs mobiles pourraient être positionnés à des endroits stratégiques

---

dans le système thermique pour collecter des données supplémentaires qui peuvent être utilisées pour mieux identifier les instants de défaillance ou de redémarrage des sources mobiles. Cela pourrait conduire à une meilleure gestion et un contrôle plus efficace du système thermique. Par ailleurs, l'identification des trajectoires des sources peut également être utilisée pour optimiser la gestion énergétique du système thermique. En effet, en connaissant les trajectoires des sources, il est possible de prédire leur comportement futur et d'ajuster les paramètres du système en conséquence pour maximiser l'efficacité énergétique.

En outre, il serait intéressant d'étudier l'intégration de l'approche proposée dans des outils d'aide à la décision pour la gestion des systèmes thermiques. Les résultats de l'estimation des instants de défaillance pourraient être utilisés comme entrée pour des algorithmes d'optimisation qui déterminent les actions à prendre pour minimiser les impacts négatifs des défaillances sur le système thermique. Cela permettrait une gestion plus proactive et une meilleure planification des interventions de maintenance.

Enfin, à partir des résultats obtenus au cours des recherches menées au sein de cette thèse, il serait possible de développer un dispositif expérimental capable de mesurer les températures à différents points du système et d'identifier les instants de défaillance ou de redémarrage des sources chauffantes, qu'elles soient fixes ou mobiles.

# LISTE DES PUBLICATIONS

---

## International Conferences

Bidou, M. S., Verron, S., Perez, L., and Autrique, L. (2022). Kalman smoother for detection of heat sources defects. In 2022 International Conference on Control, Automation and Diagnosis (ICCAD), pages 1–6. IEEE.

BIDOU, M. S., PEREZ, L., VERRON, S., and AUTRIQUE, L. (2022). Identification of failure times for a system governed by a non-linear parabolic partial differential equation. IFAC-PapersOnLine, 55(40) :37–42. 1st IFAC Workshop on Control of Complex Systems COSY 2022.

Verron, S., Bidou, M. S., Perez, L., and Autrique, L. (2023) Heat sources failure instant estimation : comparison of Kalman smoothing and supervised learning. The International Congress on Measurement, Quality and Data Science (MQDS).

# BIBLIOGRAPHIE

---

- Abou Khachfe, R. (2000). *Résolution numérique de problèmes inverses 2D non linéaires de conduction de la chaleur par la méthode des éléments finis et l'algorithme du gradient conjugué : Validation expérimentale*. PhD thesis.
- Alaeian, M., Orlande, H. R. and Lamien, B. [2022], 'Kalman filter temperature estimation with a photoacoustic observation model during the hyperthermia treatment of cancer', *Computers & Mathematics with Applications* 119, 193207.
- Alifanov, O. and Artyukhin, E. A. (1975). Regularized numerical solution of nonlinear inverse heat-conduction problem. *Journal of Engineering Physics*, 29 :934-938.
- Alifanov, O. M. (1994). Iterative regularization of inverse problems. In *Inverse Heat Transfer Problems*, pages 227-328. Springer.
- Allen, S. M. and Cahn, J. W. (1979). A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening. *Acta metallurgica*, 27(6) :1085-1095.
- Arfken, G. B. and Weber, H. J. (1999). *Mathematical methods for physicists*.
- Arulampalam, M. S., Maskell, S., Gordon, N. and Clapp, T. [2002], 'A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking', *IEEE Transactions on signal processing* 50(2), 174188.
- Autrique, L., Ramdani, N., and Rodier, S. (2005). Mobile source estimation with an iterative regularization method. In *5 th International Conference on Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice, Cambridge, UK*, volume 11, page 1. Citeseer.
- Azar, T. (2021). *Développement de stratégies de commandes pour des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles paraboliques non linéaires*. PhD thesis, Université d'Angers.
- Baker, A. J. (2012). *Finite elements : computational engineering sciences*, volume 43. Wiley Online Library.
- Beck, J. V. and Woodbury, K. A. (1998). Inverse problems and parameter estimation : integration of measurements and analysis. *Measurement Science and Technology*, 9(6) :839.
- Beddiaf, S. (2013). *Identification paramétrique de systèmes d'EDP paraboliques non linéaires en géométrie 3D par une méthode de régularisation itérative*. PhD thesis, Thesis of the Univer-

---

sity of Angers, LARIS.

Beddiaf, S., Perez, L., Autrique, L., and Jolly, J.-C. (2014). Simultaneous determination of time-varying strength and location of a heating source in a three-dimensional domain. *Inverse problems in science and engineering*, 22(1) :166-183.

Beddiaf, S., Perez, L., Autrique, L., and Jolly, J.-C. (2015). Parametric identification of a heating mobile source in a three-dimensional geometry. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 23(1) :93-111.

Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3) :637-654.

Cai, .J., Ferdowsi, H., and Sarangapani, J. (2016). Model-based fault detection, estimation, and prediction for a class of linear distributed parameter systems. *Automatica*, 66 :122-131.

Chen, T.-C., Cheng, C.-H., Jang, H.-Y. and Tuan, P.-C. [2007], 'Using input estimation to estimate heat source in nonlinear heat conduction problem', *Journal of thermophysics and heat transfer* 21(1), 166 – 172.

Chen, T.-C., Liu, C.-C., Jang, H.-Y. and Tuan, P.-C. [2007], 'Inverse estimation of heat flux and temperature in multi-layer gun barrel', *International journal of heat and mass transfer* 50(11 – 12), 20602068.

Chen, Z. et al. [2003], 'Bayesian filtering : From kalman filters to particle filters, and beyond', *Statistics* 182(1), 169.

Chiang, L. H., Russell, E. L., and Braatz, R. D. (2000). *Fault detection and diagnosis in industrial systems*. Springer Science & Business Media.

Courant, R., Friedrichs, K., and Lewy, H. (1967). On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM journal of Research and Development*, 11(2) :215-234.

Daouas, N. and Radhouani, M.-S. [2000], 'Version étendue du filtre de kalman discret appliquée à un problème inverse de conduction de chaleur non linéaire', *International journal of thermal sciences* 39(2), 191212.

Daouas, N. and Radhouani, M.-S. [2004], 'A new approach of the kalman filter using future temperature measurements for nonlinear inverse heat conduction problems', *Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals* 45(6), 565585.

Daouas, N. and Radhouani, M.-S. [2007], 'Experimental validation of an extended kalman smoothing technique for solving nonlinear inverse heat conduction problems', *Inverse Problems in Science and Engineering* **15**(7), 765782.

- 
- Dashti, M. and Stuart, A. M. [2017], The bayesian approach to inverse problems, in 'Handbook of uncertainty quantification', *Springer*, pp. 311 – 428.
- Dautray, R. and Lions, J.-L. (2012). *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology : volume 1 physical origins and classical methods*. Springer Science & Business Media.
- Doucet, A., De Freitas, N., Gordon, N. J. et al. [2001], Sequential Monte Carlo methods in practice, Vol. 1, *Springer*.
- Dey, S., Perez, H. E., and Moura, S. J. (2019). Robust fault detection of a class of uncertain linear parabolic pdes. *Automatica*, 107 : 502 – 510.
- Duda, P. and Konieczny, M. (2022). An iterative algorithm for the estimation of thermal boundary conditions varying in both time and space. *Energies*, 15(7) :2686.
- Evans, L. C. (2010). *Partial differential equations*, volume 19. American Mathematical Soc.
- Fourier, J. B. J., Darboux, G., et al. (1822). *Théorie analytique de la chaleur*, volume 504. Didot Paris.
- Feng, S., 'hao, Y., Ma, Z., Krolczyk, G., and Li, Z. (2020). 'ransient nonlinear heat transfer analysis using a generic grid refinement for structure parameter variations. *International Journal of Thermal Sciences*, 153 : 106357.
- Feng, Y., Li, H.-X., and Yang, H.-D. (2019). Abnormal source identification for parabolic distributed parameter systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics : Systems*, 51(9) :5698-5707.
- Feng, Y., Wang, Y., Wang, J.-W., and Li, H.-X. (2022). Backstepping-based distributed abnormality localization for linear parabolic distributed parameter systems. *Automatica*, 135 = 109930.
- Ferdowsi, H., Cai, J., and Jagannathan, S. (2022). Actuator and sensor fault detection and failure prediction for systems with multi-dimensional nonlinear partial differential equations. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 20(3) :789-802.
- Friedman, A. (2008). *Partial differential equations of parabolic type*. Courier Dover Publications.
- Fries, W. D., He, X., and Choi, Y. (2022). Lasdi : Parametric latent space dynamics identification. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 399 :115436.
- Gaaloul, N. and Daouas, N. [2018], 'An extended approach of a kalman smoothing technique applied to a transient nonlinear two-dimensional inverse heat conduction problem', *International*

---

*Journal of Thermal Sciences* 134, 224241.

Gejadze, I. and Jarny, Y. (2002). An inverse heat transfer problem for restoring the temperature field in a polymer melt flow through a narrow channel. *International Journal of Thermal Sciences*, 41(6) :528-535.

Hadamard, J. (1932). Le problème de cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques. *Paris*, 11 :243-264.

Hansen, P. C. (1990). Truncated singular value decomposition solutions to discrete ill-posed problems with ill-determined numerical rank. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 11(3) :503-518.

Haykin, S. [2004], *Kalman filtering and neural networks*, Vol. 47, John Wiley & Sons.

He, Z., Ni, F., Wang, W., and Zhang, J. (2021). A physics-informed deep learning method for solving direct and inverse heat conduction problems of materials. *Materials Today Communications*, 28 : 102719.

Huang, C. and Özişik, M. (1990). A direct integration approach for simultaneously estimating spatially varying thermal conductivity and heat capacity. *International journal of heat and fluid flow*, 11(3) : 262 – 268.

Huang, S., 'aao, B., Li, J., and Yin, Z. (2019). On-line heat flux estimation of a nonlinear heat conduction system with complex geometry using a sequential inverse method and artificial neural network. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 143 : 118491.

Hussain, A., Malik, M. Y., Khan, M., and Salahuddin, T. (2019). Application of generalized fourier heat conduction law on mhd viscoinelastic fluid flow over stretching surface. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*.

Idier, J. [2013], *Bayesian approach to inverse problems*, John Wiley & Sons.

Ijaz, U. Z., Khambampati, A. K., Kim, M.-C., Kim, S. and Kim, K.-Y. [2007], 'Estimation of time-dependent heat flux and measurement bias in two-dimensional inverse heat conduction problems', *International Journal of Heat and Mass Transfer* 50(21-22), 41174130.

Isakov, V. (1998). *Inverse problems for partial differential equations / Victor Isakov*. Applied mathematical sciences ; 127. Springer, New York.

Isakov, V. (2017). *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences. Springer International Publishing.

Isermann, R. (2005). *Fault-diagnosis systems : an introduction from fault detection to fault tolerance*. Springer Science & Business Media.

---

Jamei, M., Olumegbon, I. A., Karbasi, M., Ahmadianfar, I., Asadi, A. and MosharafDehkordi, M. [2021], 'On the thermal conductivity assessment of oil-based hybrid nanofluids using extended kalman filter integrated with feed-forward neural network', *International Journal of Heat and Mass Transfer* 172, 121159.

**URL** : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931021002623>

Jang, H.-Y. and Cheng, C.-H. [2009], 'Nonlinear optimal on-line heat-dissipation control methodology in electronic devices', *International Journal of Heat and Mass Transfer* 52(7), 20492058.

**URL** : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931008006212>

Jang, H.-Y., Tuan, P.-C., Chen, T.-C. and Chen, T.-S. [2006], 'Input estimation method combined with the finite-element scheme to solve ihcp hollow-cylinder inverse heat conduction problems', *Numerical Heat Transfer, Part A : Applications* 50(3), 263280.

Jarny, Y., Ozisik, M., and Bardou, J. (1991). A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction. *International journal of heat and mass transfer*, 34(11) :2911-2919.

Jiang, W.-W., Jiang, G.-H., Tan, C.-H., Yang, K., and Gao, X.-W. (2022). A new method for identifying temperature-dependent thermal conductivity in transient heat conduction problems based on element differential method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 137 : 65 – 77.

Kaipio, J. and Somersalo, E. [1999], 'Nonstationary inverse problems and state estimation'.

Kaipio, J. and Somersalo, E. [2006], *Statistical and computational inverse problems*, Vol. 160, Springer Science & Business Media.

Kalman, R. E. [1960], 'A new approach to linear filtering and prediction problems'.

Kalman, R. E. and Bucy, R. S. [1961], 'New results in linear filtering and prediction theory'.

Keller, J. B. (1976). The american mathematical monthly. *Inverse Problems*, 83 : 107 – 118.

Kern, M. (2002). Problèmes inverses : aspects numériques.

Lai, J.-F., Yan, Z.-Z., and He, J.-H. (2021). Bayesian inference for solving a class of heat conduction problems. *Thermal Science*, 25(3 Part B) :2135-2142.

LeBreux, M., Desilets, M. and Lacroix, M. [2013], 'An unscented kalman filter inverse heat transfer method for the prediction of the ledge thickness inside high-temperature metallurgical reactors', *International Journal of Heat and Mass Transfer* 57(1), 265273.

- 
- LeVeque, R. J. (2007). *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations : steady-state and time-dependent problems*. SIAM.
- Lei, Y., Li, J., and Zhao, A. (2022). Spatiotemporal fault detection, estimation and control for nonlinear reaction-diffusion equations. *Applied Mathematics and Computation*, 418 : 126859.
- Liu, Y., Dinh, N. T., Smith, R. C., and Sun, X. (2019). Uncertainty quantification of two-phase flow and boiling heat transfer simulations through a data-driven modular bayesian approach. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 138 : 1096 – 1116.
- Liu, W. and Wu, C. (2013). A predictor-corrector iterated tikhonov regularization for linear ill-posed inverse problems. *Applied Mathematics and Computation*, 221 : 802 – 818.
- Lu, C.-W. and Reynolds Jr, M. R. (1999). Ewma control charts for monitoring the mean of autocorrelated processes. *Journal of Quality technology*, 31(2) :166-188.
- Maillet, D. and Petit, D. (2008). Techniques inverses et estimations de paramètres. *Techniques de l'Ingénieur, TI AF4515 and AF4516*.
- Mansouri, M., Harkat, M.-F., Nounou, H., and Nounou, M. N. (2020). *Data-driven and model-based methods for fault detection and diagnosis*. Elsevier.
- Maybeck, P. S. [1982], *Stochastic models, estimation, and control*, Academic press.
- Morozov, V. A. (2012). *Methods for solving incorrectly posed problems*. Springer Science & Business Media.
- Murphy, K. P. [2012], *Machine learning : a probabilistic perspective*, MIT press.
- Navier, C. (1823). Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, 6(1823) :389-440.
- Murphy, K. P. [2012], *Machine learning : a probabilistic perspective*, MIT press.
- Noh, J.-H., Cha, K.-U., Ahn, S.-T. and Yook, S.-J. [2016], 'Prediction of time-varying heat flux along a hollow cylindrical tube wall using recursive input estimation algorithm and thermal resistance network method', *International Journal of Heat and Mass Transfer* **97**,232241.  
**URL** : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931015312849>
- Noh, J.-H., Kwak, D.-B., Kim, K.-B., Cha, K.-U. and Yook, S.-J. [2018], 'Inverse heat conduction modeling to predict heat flux in a hollow cylindrical tube having irregular crosssections', *Applied Thermal Engineering* 128, 1310 – 1321.  
**URL** : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359431117322755>
- Özisik, M. N. and Orlande, H. R. (2021). *Inverse heat transfer : fundamentals and applica-*

---

tions. CRC press.

Özişik, M. N., Orlande, H. R., Colaco, M. J., and Cotta, R. M. (2017). *Finite difference methods in heat transfer*. CRC press.

Pacheco, C. C., Orlande, H. R., Colaço, M. J. and Dulikravich, G. S. [2015], 'Estimation of a location-and time-dependent high-magnitude heat flux in a heat conduction problem using the kalman filter and the approximation error model', *Numerical Heat Transfer, Part A : Applications* 68(11), 11981219.

Pepper, D. and Heinrich, J. (1992). The finite element method : basic concepts and applications, hemisphere pub. In *Corp. Library of Congress, Cataloguing-in-Publication Data*.

Pepper, D. W. and Heinrich, J. C. (2017). *The Finite Element Method : Basic Concepts and Applications with MATLAB(R), MAPLE, and COMSOL*. CRC press.

Puig, V. and Simani, S. (2021). *Diagnosis and Fault-tolerant Control 1 : Data-driven and Model-based Fault Diagnosis Techniques*. John Wiley & Sons.

Rauch, H. E., Tung, F. and Striebel, C. T. [1965], 'Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems', *AIAA journal* 3(8), 14451450.

Ristic, B., Arulampalam, S. and Gordon, N. [2003], *Beyond the Kalman filter : Particle filters for tracking applications*, Artech house.

Russell, E., Chiang, L., and Braatz, R. (2000). *Data-driven Methods for Fault Detection and Diagnosis in Chemical Processes*. Advances in Industrial Control. Springer London.

Saberi, A., Stoorvogel, A. A., and Sannuti, P. (2007). *Filtering theory : with applications to fault detection, isolation, and estimation*. Springer.

Sacadura, J.-F. (1978). Initiation aux transferts thermiques.

Samadi, F., Woodbury, K., and Kowsary, F. (2021). Optimal combinations of tikhonov regularization orders for ihcps. *International Journal of Thermal Sciences*, 161 : 106697.

Sassine, E., Cherif, Y., and Antczak, E. (2019). Parametric identification of thermophysical properties in masonry walls of buildings. *Journal of Building Engineering*, 25 :100801.

Scarpa, F. and Milano, G. [1995], 'Kalman smoothing technique applied to the inverse heat conduction problem', *Numerical Heat Transfer, Part B Fundamentals* 28(1), 7996.

Scherzer, O., Engl, H. W., and Kunisch, K. (1993). Optimal a posteriori parameter choice for tikhonov regularization for solving nonlinear ill-posed problems. *SIAM journal on numerical analysis*, 30(6) :1796-1838.

- 
- Sobolev, S. (1964). *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. Dover Books on Mathematics. Pergamon Press [U.S.A. ed. distributed by Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass.] [38] Stokes, G. G. (1847). On the theory of oscillatory waves. *Trans. Cam. Philos. Soc.*, 8 :441455.
- Strikwerda, J. C. (2004). *Finite difference schemes and partial differential equations*. SIAM.
- Thomas, J. W. (2013). *Numerical partial differential equations : finite difference methods*, volume 22. Springer Science & Business Media.
- Tikhonov, A. and Samarskii, A. (2013). *Equations of Mathematical Physics*. Dover Books on Physics. Dover Publications.
- Tikhonov, A., Tikhonov, A., Tikhonov, A., Arsenin, V., Arsenin, V., Arsenin, V., Arsenin, V., and John, F. (1977). *Solutions of Ill-posed Problems. Halsted Press book*. Winston.
- Tuan, P.-C., Ji, C.-C., Fong, L.-W. and Huang, W.-T. [1996], 'An input estimation approach to on-line two-dimensional inverse heat conduction problems', *Numerical Heat Transfer* 29(3), 345363.
- Van Loan, C. F. and Golub, G. (1996). Matrix computations (johns hopkins studies in mathematical sciences). *Matrix Computations*.
- Vergnaud, A., Perez, L., and Autrique, L. (2016). Quasi-online parametric identification of moving heating devices in a 2d geometry. *International Journal of Thermal Sciences*, 102 : 47 – 61.
- Walter, É. and Pronzato, L. (1994). *Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales*. Masson.
- Wan, E. A., Van Der Merwe, R. and Haykin, S. [2001], 'The unscented kalman filter', *Kalman filtering and neural networks* 5(2007), 221280.
- Wang, H.-M., Chen, T.-C., Tuan, P.-C. and Den, S.-G. [2005], 'Adaptive-weighting input estimation approach to nonlinear inverse heat-conduction problems', *Journal of Thermophysics and Heat Transfer* 19(2), 209216.
- Wang, L., Liao, W., Xie, Y., and Du, Y. (2020). An efficient inverse algorithm for load identification of stochastic structures. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 16(4) :869-882.
- Wang, X., Zhang, D. and Zhang, L. [2020], 'Estimation of moving heat source for an instantaneous three-dimensional heat transfer system based on step-renewed kalman filter', *International Journal of Heat and Mass Transfer* 163, 120435.
- Webster, A. and Plimpton, S. (2016). *Partial Differential Equations of Mathematical Physics :*

---

*Second Edition.* Dover Books on Mathematics. Dover Publications.

Wen, S., Qi, H., Niu, Z.-T., Ren, Y.-T. and Ruan, L.-M. [2019], 'Fast non-intrusive estimation of liquid-phase interface and boundary heat flux in participating media by the kalman filtering methods', *International Journal of Heat and Mass Transfer* 142, 118418.

**URL** : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931019313894>

Wen, S., Qi, H., Niu, Z.-T., Wei, L.-Y. and Ren, Y.-T. [2020], 'Efficient and robust prediction of internal temperature distribution and boundary heat flux in participating media by using the kalman smoothing technique', *International Journal of Heat and Mass Transfer* 147, 118851.

Wen, S., Qi, H., Ren, Y.-T., Sun, J.-P. and Ruan, L.-M. [2017a], 'Solution of inverse radiation-conduction problems using a kalman filter coupled with the recursive least square estimator', *International Journal of Heat and Mass Transfer* 111, 582592.

Wen, S., Qi, H., Ren, Y.-T., Sun, J.-P. and Ruan, L.-M. [2017b], 'Solution of inverse radiation-conduction problems using a kalman filter coupled with the recursive least square estimator', *International Journal of Heat and Mass Transfer* 111, 582592.

**URL** : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931016339953>

Wen, S., Qi, H., Ren, Y.-T., Yu, X.-Y. and Ruan, L.-M. [2018], 'Application of kf-rlse algorithm for on-line estimating the time-dependent melting thickness and input heat flux in participating media', *International Journal of Thermal Sciences* 125, 110.

Wen, S., Qi, H., Wang, Y., Ren, Y., Wei, L. and Ruan, L. [2020], 'Prediction of the coupled heat radiation and conduction parameters and boundary condition using the unscented kalman filter', *Science China Technological Sciences* 63(3), 422433. [46] Wikle, C. K. and Berliner, L. M. [2007], 'A bayesian tutorial for data assimilation', *Physica D : Nonlinear Phenomena* 230(1-2), 1 – 16.

Xu, H. J., Xing, Z. B., Wang, F., and Cheng, Z. (2019). Review on heat conduction, heat convection, thermal radiation and phase change heat transfer of nanofluids in porous media : Fundamentals and applications. *Chemical Engineering Science*, 195 :462-483.

Zeng, Y., Wang, H., Zhang, S., Cai, Y., and Li, E. (2019). A novel adaptive approximate bayesian computation method for inverse heat conduction problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 134 : 185 – 197.

Zhang, J., Yuan, C., Zeng, W., Stegagno, P., and Wang, C. (2020). Fault detection of a class of nonlinear uncertain parabolic pde systems. *IEEE Control Systems Letters*, 5(4) :1459-1464.

Zimmerman, W. B. (2006). *Multiphysics modeling with finite element methods*, volume 18. World Scientific Publishing Company.

**Titre :** Contributions à l'identification de défaillances dans des systèmes thermiques régis par des équations aux dérivées partielles paraboliques

**Mot clés :** Identification des instants de défaillance, Problème inverse, Méthode du gradient conjugué, Filtre de Kalman, Équation aux dérivées partielles.

**Résumé :** Cette thèse porte sur l'importance de la détection et du diagnostic des défaillances dans les systèmes thermiques décrits par des équations aux dérivées partielles (EDPs). Ces systèmes thermiques sont largement utilisés dans de nombreuses applications, telles que le chauffage, la climatisation, les systèmes de refroidissement, etc. Cependant, ces systèmes peuvent être sujets à des défaillances qui peuvent avoir un impact significatif sur le fonctionnement du système et causer des perturbations indésirables. Par conséquent, il est important de détecter et d'identifier rapidement ces défaillances afin de minimiser les conséquences négatives sur le système. L'identification de ces instants et caractéristiques peut être

considérée comme un problème inverse, dans le sens où l'on tente de retrouver les causes à partir des effets observés. Pour résoudre ce problème, cette thèse propose une méthode innovante basée sur la méthode du gradient conjugué pour identifier les instants de défaillance ou de redémarrage de plusieurs sources chauffantes dans un système thermique. Cette approche permet d'identifier simultanément les défaillances de plusieurs sources chauffantes et est connue pour sa rapidité et sa stabilité numérique. Cette thèse offre ainsi une contribution importante dans le domaine de la modélisation et d'identification dans des systèmes thermiques, en particulier dans la résolution des problèmes inverses en génie thermique.

**Title:** Contributions to the identification of failures in thermal systems governed by parabolic partial differential equations

**Keywords:** Identification of failure instants, Inverse problem, Conjugate gradient method, Kalman filter, Partial differential equation

**Abstract:** This thesis focuses on the importance of fault detection and diagnosis in thermal systems described by partial differential equations (PDEs). These thermal systems are widely used in many applications, such as heating, air conditioning, cooling systems, etc. However, these systems can be prone to failures that can have a significant impact on the system operation and cause undesirable disturbances. Therefore, it is important to detect and identify these failures early in order to minimize the negative consequences on the system. The identification of these instants and characteristics can be considered as an inverse problem, in

the sense that one tries to find the causes from the observed effects. To solve this problem, this thesis proposes an innovative method based on the conjugate gradient method to identify the failure or restart instants of several heating sources in a thermal system. This approach allows to identify simultaneously the failures of several heating sources and is known for its speed and numerical stability. This thesis thus offers an important contribution in the field of modeling and identification in thermal systems, in particular in the resolution of inverse problems in thermal engineering.