



**HAL**  
open science

# Optimisation de formes de structures viscoélastiques sous sollicitations dynamiques

Antoni Joubert

► **To cite this version:**

Antoni Joubert. Optimisation de formes de structures viscoélastiques sous sollicitations dynamiques. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. Institut Polytechnique de Paris, 2022. Français. NNT : 2022IPPAX111 . tel-04449622

**HAL Id: tel-04449622**

**<https://theses.hal.science/tel-04449622v1>**

Submitted on 9 Feb 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT  
POLYTECHNIQUE  
DE PARIS

NNT : 2022IPPAX111

Thèse de doctorat



# Optimisation de formes de structures viscoélastiques sous sollicitations dynamiques

Thèse de doctorat de l'Institut Polytechnique de Paris  
préparée à l'École polytechnique

École doctorale n°626 École doctorale de l'Institut Polytechnique de Paris (EDIPP)  
Spécialité de doctorat : Mécanique des fluides et des solides, acoustique

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 15 décembre 2022, par

**ANTONI JOUBERT**

Composition du Jury :

Rafael Estevez Professeur, Université Grenoble Alpes (SIMaP)	Président du jury
Olivier Pantz Professeur, Université de Nice Sophia-Antipolis (LJAD)	Rapporteur
Julien Yvonnet Professeur, Université Gustave Eiffel (MSME)	Rapporteur
Boris Desmorat Maître de Conférences, Sorbonne Université ( <i>l'Alambert</i> )	Examinateur
Nicole Spillane Chargée de recherche, École Polytechnique (CMAP)	Examinatrice
Julie Diani Directrice de recherche, École Polytechnique (LMS)	Directrice de thèse
Grégoire Allaire Professeur, École Polytechnique (CMAP)	Co-directeur de thèse
Samuel Amstutz Professeur, École Polytechnique (CMAP)	Co-directeur de thèse



*À mon frère David et ma sœur Vanessa*





# Remerciements

Plus qu'un long et passionnant travail, cette thèse représente pour moi une véritable aventure. J'ai eu l'opportunité de rencontrer des personnes exceptionnelles, aussi bien sur le plan scientifique qu'humain, avec qui les échanges furent d'une grande richesse. Je souhaite donc dédier ces quelques lignes à ceux qui ont fait de ces trois années une expérience inoubliable.

Je voudrais commencer par remercier mes encadrants du fond du cœur. Julie, Grégoire et Samuel, les mots me manquent pour exprimer ma gratitude. Je suis comblé d'avoir été guidé par des personnes aussi bienveillantes. Votre diversité de point de vue et d'expertise m'a énormément apportée et m'a permis de donner à ce travail une réelle dimension pluridisciplinaire. Julie, merci de m'avoir donné l'opportunité d'entreprendre cette thèse. Merci pour le temps incroyable que tu m'as accordé et que tu as investi dans ce sujet. Outre les connaissances scientifiques, ce sont des principes et un état d'esprit que tu m'as enseigné. Grégoire, merci d'avoir été aussi disponible et enthousiaste tout au long de ces années. Merci d'avoir partagé ton expérience et tes vastes connaissances, en particulier avec **FreeFem++**, qui ne m'a pas toujours rendu la vie facile! Samuel, merci d'avoir été aussi disponible et patient avec moi. Les heures passées à discuter dans ton bureau m'ont énormément appris. Merci d'avoir répondu à toutes mes questions, même les plus naïves, et de m'avoir initié à l'analyse fonctionnelle.

Je voudrais remercier Olivier Pantz et Julien Yvonnet, les rapporteurs de cette thèse, pour avoir pris le temps de lire et d'établir des rapports détaillés de ce manuscrit. Merci à Rafael Estevez d'avoir présidé ma soutenance aux côtés des examinateurs Boris Desmorat et Nicole Spillane. Vos remarques bienveillantes ont permis d'améliorer la qualité du manuscrit tout en offrant de nouvelles perspectives de travail.

Certains algorithmes de cette thèse n'aurais pu voir le jour sans l'assistance inestimable de Pierre Jolivet. Merci d'avoir répondu à mes nombreuses questions et de m'avoir permis d'utiliser efficacement **PETSc** sous **FreeFem++**. Tes conseils mais aussi tes tutoriels des journées **FreeFem++** ont été d'une grande aide. Grâce à toi, j'ai pu m'initier et apprécier la puissance du calcul parallèle.

Je tiens à remercier certains membres et ex-membres du CMAP pour m'avoir aidé avec différents aspects de **FreeFem++**. Merci à Benjamin Bogosel pour ses conseils pratiques, Florian Feppon pour son aide avec la librairie **PyFreeFem**, Charles Dapogny pour son aide avec **Advect** et Frédéric Hecht pour sa disponibilité et sa réaction sur les forums **FreeFem++**. Je remercie également Dominique Chapelle (M3DISIM-Inria) pour m'avoir apporté son expérience dans l'interprétation de certaines structures mécaniques.

Cette étude est supportée par la chaire “Modelling advanced polymers for innovative material solutions” et sponsorisé par Arkema. Je remercie donc Nessim Ghamri, Quentin Schmid, Thomas Boucheres, Audrey Durin et toute l’équipe du CRRRA pour nos échanges enrichissants et pour m’avoir accueilli chaque année dans vos locaux à Pierre-Bénite. J’ai pu me familiariser avec l’état d’esprit de la recherche en entreprise et le point de vue industriel apporté m’a permis une meilleure mise en contexte de mon travail.

Merci à Estève Ernault et aux techniciens du LMS, Vincent de Greef, Hakim Gharbi et Pascal Marie, pour m’avoir permis de réaliser des essais expérimentaux à une vitesse impressionnante. Je remercie également l’équipe administrative, Alexandra Joly, Anna Johnsson, Christiane Periam et Valérie Jamet pour leur gentillesse et leur patience, ainsi que Adbelfattah Halim pour ses conseils sur Linux.

Cette aventure n’aurait pas été aussi incroyable sans les échanges chaleureux avec les doctorants et postdoc du LMS et du CMAP : mes collègues et anciens collègues de bureau Foucault, Geoffrey, Quentin et Haoming, ainsi que Filippo, Martin, Kübra, Arnaud, Théo, Matheus, Nicolas, Lucas, Nikhil, Pierre, Jeet, Alex et bien d’autres...

Enfin, je conclurai cette courte préface en remerciant ma famille, en particulier mes parents, pour leur soutien indéfectible tout au long de ces années.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>Résumé détaillé</b>	<b>15</b>
<b>I Dynamique des structures</b>	<b>21</b>
1 Dynamique des structures élastiques linéaires . . . . .	21
1.1 Introduction à la mécanique des milieux continus . . . . .	21
1.2 Théorie des plaques . . . . .	25
1.3 Théorie des poutres . . . . .	32
2 Outils d'analyse fonctionnelle . . . . .	36
3 Méthode des éléments finis . . . . .	40
<b>II Comportement viscoélastique linéaire des polymères</b>	<b>47</b>
1 Structure et phénoménologie des polymères . . . . .	48
1.1 Classification des polymères . . . . .	48
1.2 Mobilité moléculaire source de la viscoélasticité . . . . .	50
2 Loi de comportement viscoélastique linéaire . . . . .	52
2.1 Modèles rhéologiques . . . . .	52
2.2 Caractérisation expérimentale de la viscoélasticité . . . . .	55
2.3 Comportement 3D . . . . .	58
<b>III Optimisation de formes</b>	<b>61</b>
1 Introduction à l'optimisation de formes . . . . .	62
2 Analyse de sensibilité . . . . .	65
2.1 Méthode Adjointe . . . . .	65
2.2 Méthode de variation de frontière d'Hadamard . . . . .	67
3 Techniques numériques d'optimisation . . . . .	70
3.1 Algorithme de descente de gradient . . . . .	70
3.2 Méthode de déformation de maillage . . . . .	73
3.3 Méthode level-set . . . . .	74
4 Techniques d'optimisation sous contraintes . . . . .	78
4.1 Méthode de gradient projeté . . . . .	79
4.2 Algorithme d'Uzawa . . . . .	81
4.3 Méthode de pénalisation . . . . .	82
4.4 Méthode du Lagrangien augmenté . . . . .	82

<b>IV</b>	<b>Optimisation de poutres viscoélastiques en vibration</b>	<b>85</b>
1	Introduction . . . . .	85
2	Vibration de poutres d'Euler-Bernoulli en viscoélasticité . . . . .	86
3	Choix de la fonction objectif . . . . .	89
4	Optimisation paramétrique de poutres viscoélastiques . . . . .	90
4.1	Énoncé du problème d'optimisation . . . . .	90
4.2	Analyse des sensibilités . . . . .	91
5	Méthodes numériques . . . . .	92
6	Matériaux d'étude . . . . .	94
7	Résultats numériques . . . . .	96
7.1	Optimisation d'une poutre constituée d'un polymère réaliste . . . . .	96
7.2	Étude des paramètres matériaux . . . . .	99
7.3	Étude des paramètres géométriques . . . . .	101
7.4	Étude de différentes fonctions coûts . . . . .	102
8	Conclusion . . . . .	106
<b>V</b>	<b>Optimisation de plaques viscoélastiques en vibration</b>	<b>107</b>
1	Introduction . . . . .	107
2	Vibration de plaques de Kirchhoff en viscoélasticité . . . . .	108
3	Optimisation couplée de plaques minces viscoélastiques . . . . .	111
3.1	Énoncé du problème d'optimisation . . . . .	111
3.2	Analyse des sensibilités . . . . .	112
4	Méthodes numériques . . . . .	116
5	Résultats numériques . . . . .	118
5.1	Optimisation d'une plaque mince constituée d'un polymère réaliste . . . . .	119
5.2	Étude des paramètres matériaux . . . . .	123
6	Résolution du problème opposé : limiter l'effet amortissant . . . . .	130
7	Conclusion . . . . .	131
<b>VI</b>	<b>Optimisation d'une semelle de chaussure : Application avec hypothèses des plaques</b>	<b>133</b>
1	Introduction . . . . .	133
2	Optimisation topologique sous contraintes de plaques de Kirchhoff viscoélastiques . . . . .	135
3	Méthodes numériques . . . . .	137
4	Résultats numériques . . . . .	142
4.1	Optimisation topologique de structures minces viscoélastiques . . . . .	143
4.2	Optimisation topologique de plaques minces élastiques . . . . .	147
5	Problèmes de vibration de plaques de Mindlin . . . . .	149
6	Optimisation de formes de plaques épaisses . . . . .	153
7	Résultats numériques . . . . .	155
7.1	Optimisation topologique de plaques épaisses en élasticité linéaire . . . . .	155
7.2	Optimisation couplée de plaques épaisses en viscoélasticité linéaire . . . . .	158
8	Conclusion . . . . .	159

---

<b>VII</b>	<b>Optimisation de structures viscoélastiques 3D</b>	<b>161</b>
1	Introduction . . . . .	161
2	Généralisation des problèmes de vibration aux structures 3D . . . . .	162
3	Optimisation topologique de structures viscoélastiques 3D . . . . .	167
4	Méthodes numériques . . . . .	170
4.1	Implémentation de la méthode level-set . . . . .	170
4.2	Calcul haute performance . . . . .	173
5	Résultats numériques . . . . .	180
5.1	Optimisation topologique d'une plaque élastique 3D . . . . .	180
5.2	Optimisation topologique d'une plaque viscoélastique 3D . . . . .	184
5.3	Optimisation topologique d'une semelle de chaussure de course . . . . .	187
6	Conclusion . . . . .	192
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>194</b>
	<b>Annexe</b>	<b>198</b>
A	Expression des formes bilinéaires . . . . .	198
	<b>Bibliographie</b>	<b>201</b>



# Introduction

Les matériaux viscoélastiques amortissants, tels que les élastomères ou les polymères dans leur transition vitreuse, sont largement utilisés pour absorber les vibrations des structures. Un exemple classique est l'utilisation d'amortisseurs viscoélastiques dans les structures parasismiques permettant d'atténuer les vibrations, et donc les dégâts causés par la grande quantité d'énergie relâchée [120]. Ces matériaux ont la particularité de posséder un comportement à la fois élastique et visqueux, c'est à dire qu'une partie de l'énergie stockée dans une structure soumise à un effort sera passivement dissipée sous forme de chaleur.

Ils montrent une réponse mécanique ne dépendant pas seulement de l'état de déformation mais également de l'histoire de chargement pour atteindre cet état de déformation. On les représente communément par des modèles rhéologiques, tels que le modèle de Maxwell généralisé, permettant de prendre en compte les multiples temps de relaxation exhibés par les polymères. Ces temps de relaxation caractérisent le temps nécessaire à la relaxation des contraintes visqueuses. Dans les polymères, ils peuvent être contrôlés par la chimie et la physique du matériau. De plus, ils dépendent de la température, conférant ainsi à ces matériaux une grande variété d'applications [104].

En tant que pièce de contact entre le pied et le sol, les semelles de chaussures sont des produits depuis longtemps utiles à notre vie quotidienne. Leurs capacités d'amortissement, de résistance aux chocs et de dynamisme sont devenues des facteurs de conception importants, en particulier dans le domaine du sport où de hautes performances sont attendues. Les applications d'amortissement usuelles mettent en jeu l'ajout d'amortisseurs ou de revêtements viscoélastiques. Pour exemple, une semelle de chaussure de course est constituée d'un assemblage de différents polymères aux propriétés variées. L'amortissement de la foulée est attribuée au corps de la semelle, la rigidité au renfort intérieure et la résistance à l'usure à la semelle de contact. En se centrant sur la fonction d'amortissement, une première voie peut être de l'améliorer par l'ajout d'amortisseurs ou de revêtements viscoélastiques aux propriétés idéalement choisies en fonction de l'application, marche, course, terrain plat ou accidenté... L'objectif de cette thèse suit une seconde voie, il est de significativement augmenter les capacités d'amortissement d'une semelle de chaussure constituée d'un matériau viscoélastique homogène isotrope donné par la recherche du design optimal. On s'attardera également sur le problème opposé, consistant à réduire l'amortissement pour augmenter le dynamisme d'une telle structure, en pensant notamment à la course à pied.

La distribution optimale de matière est atteinte par des méthodes d'optimisation de formes. Ces méthodes, visant à déterminer le design optimal d'une structure, reposent sur une représentation mathématique de sa forme. L'optimisation topologique, en particulier, est l'optimisation la plus générale. Elle vise à chercher la meilleure répartition de matière sans



restriction sur la topologie. Il existe de nombreuses techniques dans la littérature, celles-ci sont appliquées à des problèmes variés, mécaniques ou multiphysiques, comme par exemple les problèmes fluide-structure [100, 114], thermoélectriques [101, 102], de résistance à la rupture [95, 96], ou encore de résistance à la fatigue [51]... Parmi elles, deux types de méthode sont communément utilisés : les méthodes de densité, où la forme est représentée par une fonction densité, et les méthodes de variation de frontière, remontant à J. Hadamard en 1907 [72], où la forme est représentée par la ligne de niveau zéro d'une fonction appelée level-set. Différents logiciels commerciaux, tels que Altair OptiStruct® [14] ou COMSOL Multiphysics® [107], sont d'ores et déjà capables de réaliser l'optimisation topologique de structures élastiques, et plus récemment, de structures viscoélastiques. Ces logiciels emploient généralement une méthode de densité appelée la méthode SIMP (Solid Isotropic material with Penalization). Dans ce travail, l'optimisation topologique de pièces en polymère est réalisée par la méthode level-set. Contrairement à la méthode SIMP, cette technique a pour avantage de ne pas, ou peu, présenter de zones de densité intermédiaire. Ces dernières ne permettent pas de définir une forme, ce qui pose problème pour la fabrication de la pièce. La complexité des structures optimisées rend difficile la fabrication par des techniques traditionnelles, on a donc naturellement recouru à l'impression 3D. Avec le récent développement des procédés de fabrication additive, les techniques d'optimisation topologiques sont devenues particulièrement attractives puisqu'il devient possible de fabriquer des pièces aux géométries fines et complexes. De nombreuses études exploitent le potentiel de la fabrication additive en réalisant, par exemple, l'optimisation topologiques de structures lattices aux propriétés mécaniques intéressantes [45, 68]. La méthode de fabrication choisie est particulièrement importante puisqu'elle induit de fortes contraintes d'optimisation qui, dans le cas de la fabrication additive, font récemment l'objet de nombreux travaux [2, 3, 4, 5]. Dans ce travail, on omettra ces contraintes de fabrication pour se concentrer sur les problématiques liées aux propriétés viscoélastiques linéaires du matériau supposé homogène en comportement.

L'efficacité de ces méthodes d'optimisation n'est plus à démontrer dans le cadre élastique, pour la minimisation de nombreuses fonctions objectif telles que la compliance, le déplacement maximal, les contraintes de von Mises et bien d'autres [1, 7, 26]. La recherche du design optimal d'une structure élastique par rapport à sa fréquence de vibration est également un sujet classique [9, 103]. L'extension de ces méthodes aux matériaux viscoélastiques est un domaine plutôt récent. Dans le cadre de l'analyse des sensibilités de la réponse vibratoire de systèmes amortis, Yun et Youn [138] ont utilisé la méthode adjointe et, plus récemment, Ding et al. [54] ont utilisé des techniques de réduction de modèle. Plusieurs techniques numériques sont employées dans la recherche du design optimal de structures viscoélastiques, on trouve principalement les méthodes de densité, parmi lesquelles la méthode SIMP est la plus utilisée, les méthodes évolutionnaires BESO et ESO, et les méthodes de variation de frontière telles que la méthode level-set.

Les méthodes de densité sont les plus communes, réalisant l'optimisation topologique de microstructures, matériaux multicouches ou encore de revêtements amortissants. Andreassen et Jensen [18] ont étudié l'optimisation topologique de microstructures périodiques afin de maximiser l'atténuation de la propagation des ondes. Elsabbagh et Baz [56] ont conduit l'optimisation topologique de structures en couches minces, optimisant la distribution de matière du revêtement. Les deux types de structures multicouches communément étudiées sont les structures avec traitement UCLD (Unconstrained Layer Damping), consistant à ajouter un

revêtement amortissant à une base métallique, ou avec traitement CLD (Constrained Layer Damping), où la couche amortissante est recouverte d'une couche supplémentaire (couche de contrainte) formant une structure "sandwich". Zhang et Khandelwal [140] ont proposé l'optimisation topologique de systèmes dissipatifs multimatériaux. Plus particulièrement, la méthode SIMP est une méthode de densité fréquemment choisie dans de nombreux travaux. Kang et al. [87] et Yun et Youn [139] ont conduit l'optimisation topologique de couches amortissantes dans le cas des coques en optimisant la distribution du matériau amortissant. Chen et Liu [40] ont réalisé l'optimisation topologique microstructurale dans un cadre viscoélastique afin de maximiser le module de perte modal (Figure 1). James et Waisman [83, 84] ont proposé l'optimisation topologique de structures viscoélastiques sujettes à des sollicitations dynamiques pour la minimisation de la masse à l'aide d'une méthode adjointe dépendante du temps. Plus récemment, Fang et al. [60] ont proposé l'optimisation topologique de plaques avec traitement CLD en minimisant le module de perte modal.

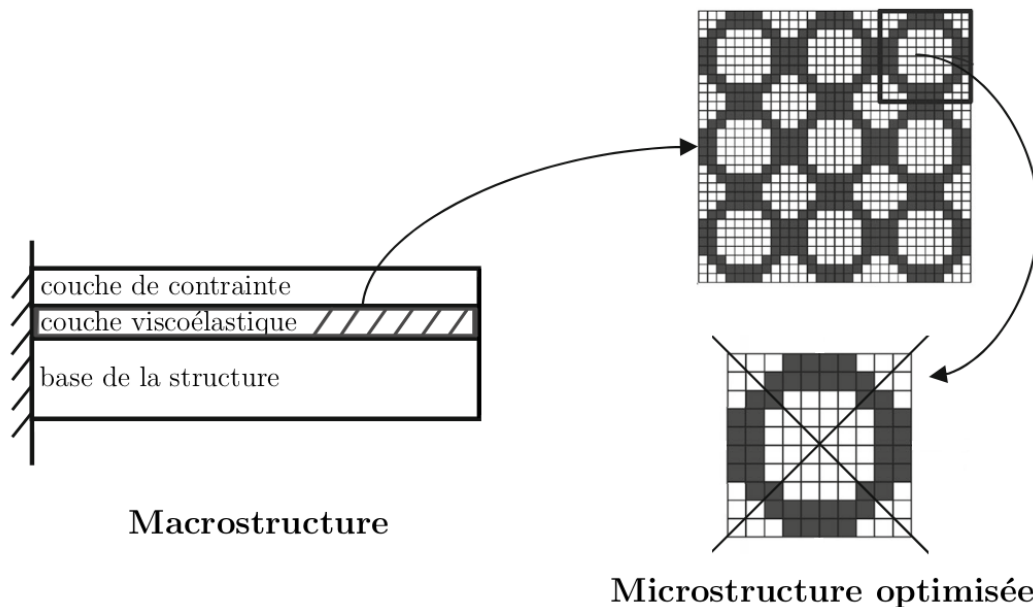


FIGURE 1 – Schéma de l'optimisation de la microstructure d'un traitement CLD, inspiré de [40].

Les méthodes évolutionnaires BESO (Bidirectional Evolutionary Structural Optimization) et ESO (Evolutionary Structural Optimization) ont été appliquées à l'optimisation structurelle de matériaux viscoélastiques. Liu et al. [98] ont choisi la méthode BESO pour maximiser le module de perte modal de matériaux composites, et Fang et Zheng [61] la méthode ESO pour minimiser la réponse en résonance de plaques sous traitement CLD.

Les méthodes de variation de frontière, telles que la méthode level-set, ont également été appliquées aux traitements d'amortissement. Ansari et al. [19] ont utilisé l'approche level-set pour trouver la forme et la position optimale d'un traitement CLD appliqué sur la surface d'une plaque. Enfin, dans un article récent, Delgado et Hamdaoui [50] ont employé la méthode level-set pour réaliser l'optimisation structurelle de matériaux viscoélastiques homogènes ou multicouches.

Cette thèse a pour but d'étendre ces travaux en se concentrant sur l'optimisation de structures viscoélastiques homogènes par la méthode de variation de frontière d'Hadamard, afin d'appliquer ces techniques à l'optimisation de semelles de chaussures, notamment de course. Cette méthode, très peu appliquée aux structures viscoélastiques homogènes dans la littérature, a pour principal avantage de produire des designs dépourvus de gradients de densité, facilitant la fabrication de la pièce. Un exemple de design optimisé d'une structure viscoélastique homogène présenté dans ce manuscrit est donné en Figure 2. Il s'agit de

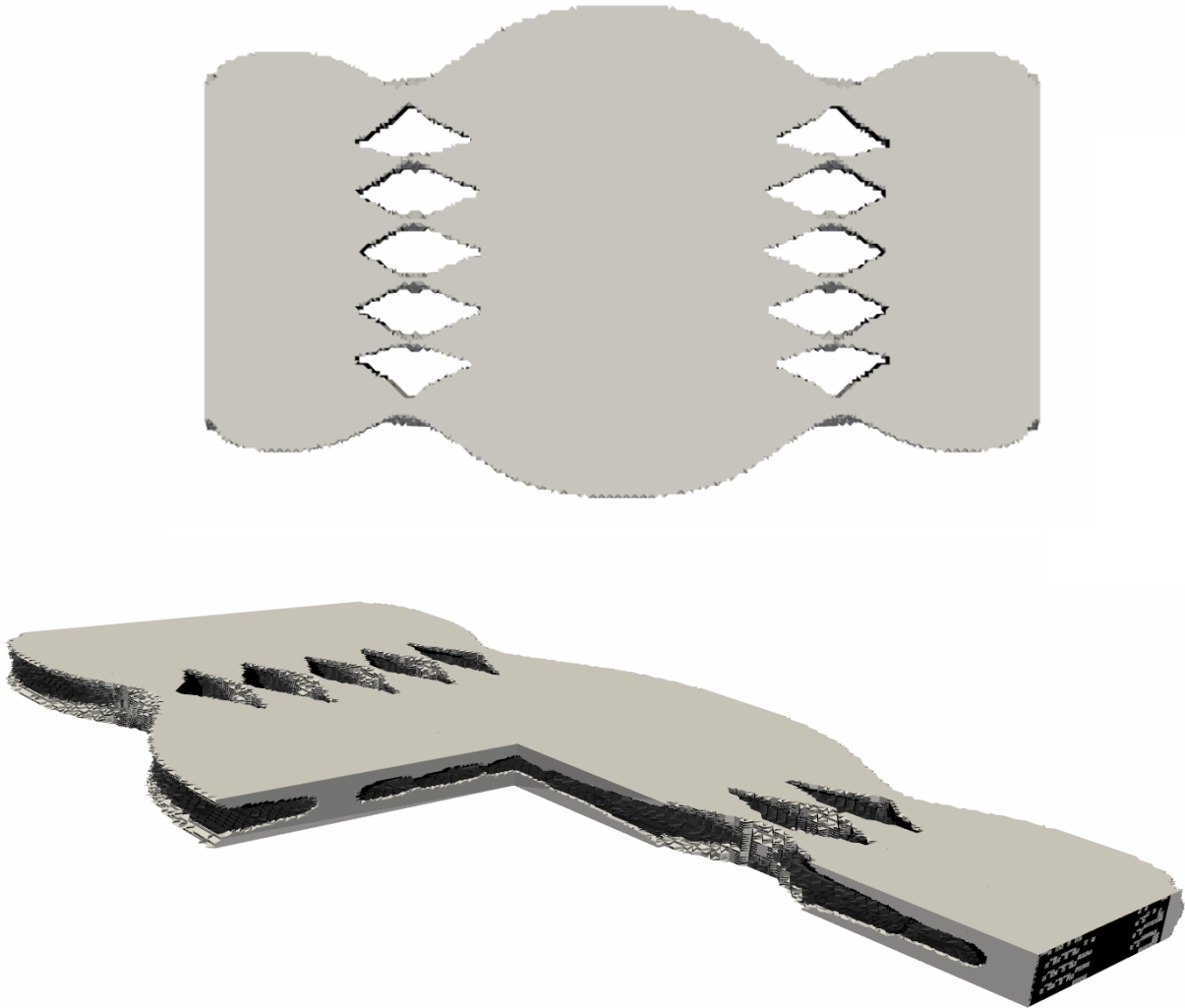


FIGURE 2 – Vue de dessus et en demi-coupe du design optimal d'une plaque viscoélastique rectangulaire homogène pour la maximisation de l'amortissement des vibrations de la structure, avec contrainte de rigidité et de quantité de matière.

l'optimisation de l'amortissement des vibrations libres d'une plaque entièrement constituée de polymère. Dans cette thèse, la stratégie d'étude adoptée est progressive et organisée comme suit.

On commence par considérer des structures simples, telles que les poutres, pour l'optimisation la plus restrictive, l'optimisation paramétrique du profil d'épaisseur, de façon à obtenir un aperçu des difficultés liées à la viscoélasticité du matériau. On passe ensuite à l'optimisation de plaques couplant optimisation paramétrique de l'épaisseur et optimisation géométrique de la forme par une méthode de directions alternées. L'optimisation couplée de plusieurs variables de design, telles que l'épaisseur et la géométrie, est une problématique classique. Mentionnons par exemple l'optimisation géométrique et topologique (couplant par exemple la méthode level-set et le gradient topologique [10]), l'optimisation de la topologie et de l'anisotropie (par exemple, pour les composites [35, 117]), etc... L'apport original de ces premières étapes est l'optimisation couplée de plaques viscoélastiques en vibration libre pour la minimisation du décrétement logarithmique, ainsi que la dérivation rigoureuse des sensibilités par la méthode adjointe dans le cas d'un modèle de Maxwell généralisé prenant en compte la dépendance en fréquence du coefficient de Poisson. De plus, une analyse complète de l'influence des paramètres matériaux sur le design optimisé pour un matériau de Zener montre des tendances impactant significativement les résultats d'optimisation. La connaissance de ces tendances est ensuite transposable à des modèles et structures plus complexes.

Puis, une première application au cas de la semelle de chaussure plane par une optimisation topologique 2D, enrichie par l'ajout de différentes contraintes, permet de mettre en évidence un phénomène particulier lors de l'application de la contrainte de rigidité. Après avoir mis en évidence les limitations liées à la prise en compte de modèles 2D, l'optimisation topologique 3D complète cette étude afin d'atteindre l'application réelle visée. Les performances d'une chaussure de course sont améliorées par l'optimisation topologique de sa semelle, de géométrie complexe. L'emploi de méthodes de calcul parallèle permet de représenter la structure à l'aide de maillages particulièrement fins, capturant avec précision les détails topologiques du design optimisé. L'apport des dernières parties de ce manuscrit est l'approfondissement des problèmes d'optimisation de structures viscoélastiques en vibration, dans le cas 2D et 3D, par l'application de la méthode level-set à un cas pratique : une semelle de chaussure en polymère soumise à différentes contraintes de conception. Par l'ajout d'une contrainte de rigidité en flexion, on met en évidence et détermine l'origine d'un phénomène d'amincissement critique de la section. Par ailleurs, on propose également une comparaison de l'impact des différents modèles de plaques sur les résultats d'optimisation dans un cadre viscoélastique.

La première moitié de ce manuscrit fait l'objet d'un article publié dans le journal *Computers & Structures*. La seconde moitié donnera également lieu à une publication scientifique, actuellement en cours de rédaction.

## Articles scientifiques

- A. Joubert, G. Allaire, S. Amstutz and J. Diani. Damping optimization of viscoelastic cantilever beams and plates under free vibration. *Computers & Structures*, 268(3) :106811, 2022.
- A. Joubert, G. Allaire, S. Amstutz and J. Diani. Damping optimization of viscoelastic thin structures, application and analysis. *yet to be published*

## Communications

- Free vibration optimization of viscoelastic cantilever beams and plates. 14<sup>th</sup> *World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO)*, juin 2021.
- Optimisation de forme de poutres et plaques viscoélastiques en vibration libre. 15<sup>th</sup> *Colloque National en Calcul des Structures (CSMA)*, mai 2022, Giens (France).
- Damping optimization of viscoelastic structures under free vibration. 8<sup>th</sup> *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS)*, juin 2022, Oslo (Norvège).
- Optimisation de formes de structures viscoélastiques sous sollicitations dynamiques. *Symposium Homogénéisation et optimisation des polymères*, septembre 2022, Palaiseau (France).

# Résumé détaillé

Ce manuscrit de thèse s'articule en deux parties. La première, constituée des trois premiers chapitres, est consacrée à l'état de l'art des trois domaines scientifiques abordés, la dynamique des structures, le comportement viscoélastique des polymères et l'optimisation de formes. La seconde partie présente les contributions de cette thèse à travers quatre chapitres distincts. Chacun d'eux correspond à une étape importante de la stratégie d'étude choisie nous menant à répondre à la problématique générale.

Le chapitre I se concentre sur le rappel des principes de la dynamique des solides en élasticité linéaire, des principaux concepts d'analyse fonctionnelle et de la méthode des éléments finis. Ceux-ci constituent les fondations des études réalisées dans ce manuscrit et sont nécessaires à sa bonne compréhension.

Le chapitre II est dédié à la description du comportement viscoélastique linéaire des polymères, matériaux au cœur des problématiques de cette thèse. On présente rapidement les spécificités physiques des polymères, avant d'introduire les principales lois mécaniques viscoélastiques décrivant leur comportement linéaire. Enfin, la caractérisation expérimentale des paramètres de ces lois est brièvement décrite.

Les techniques d'optimisation de formes, abondamment utilisées dans ce manuscrit, sont introduites au chapitre III. On commence par décrire, de façon non exhaustive, les différentes méthodes d'optimisation présentes dans la littérature. Une attention particulière est prêtée aux algorithmes numériques utilisant une approche adjointe. Enfin, les principales techniques d'optimisation sous contrainte, nécessaires pour de nombreuses applications industrielles, sont présentées.

Le chapitre IV aborde un premier problème d'optimisation dans le cas 1D. Celui-ci traite de l'optimisation paramétrique des vibrations libres d'une poutre viscoélastique et fournit un premier aperçu des difficultés et particularités liées à l'optimisation d'une structure en polymère. La poutre étudiée est modélisée par le modèle d'Euler-Bernoulli. Une comparaison des différentes définitions de l'amortissement permet tout d'abord de choisir la fonction objectif la plus pertinente, le décrétement logarithmique. Puis, on développe un algorithme permettant de minimiser cette quantité en optimisant le profil d'épaisseur de la poutre. Deux modèles rhéologiques sont employés, le modèle de Maxwell généralisé, visant à modéliser un matériau réaliste, et le modèle de Zener, plus simple, visant à simplifier les études relatives aux paramètres matériaux. Les profils optimisés pour une poutre constituée d'un matériau réaliste montrent une nette amélioration des capacités d'amortissement (Figure 3). Cette étude 1D permet une analyse simple de l'impact des différents paramètres du problème

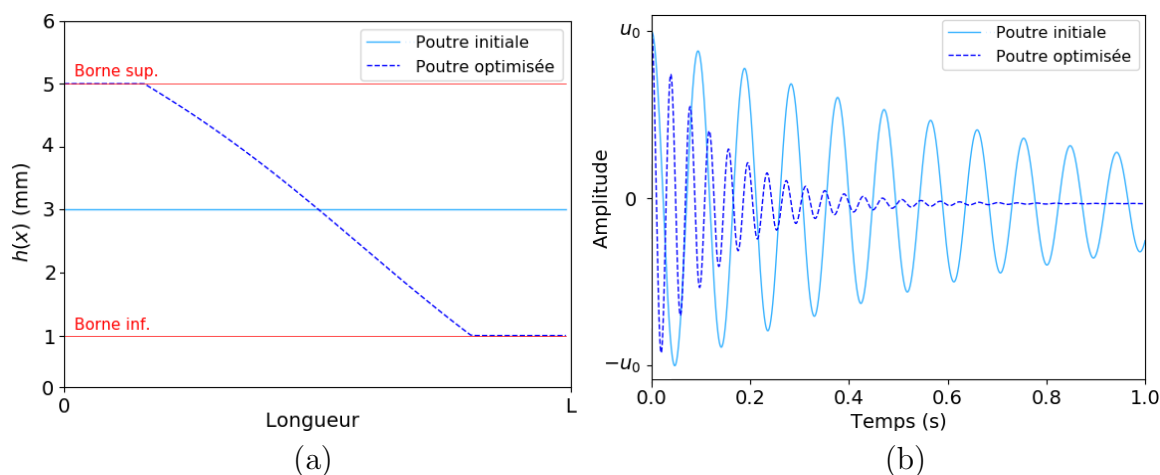


FIGURE 3 – (a) Profil d'épaisseur de la poutre initiale et optimisée et (b) amplitude des vibrations libres pour la maximisation de l'amortissement d'une poutre constituée d'un matériau réaliste modélisé par le modèle de Maxwell généralisé.

sur le design final. On en déduit que les paramètres matériaux sont les plus influents. En particulier, les temps de relaxation du polymère semblent avoir un impact majeur sur les résultats d'optimisation avec une possible inversion du profil d'épaisseur pour les temps longs.

Le deuxième problème, étudié au chapitre V, est centré sur l'optimisation de la vibration de plaques minces viscoélastiques modélisées par le modèle de Kirchhoff-Love. Un algorithme d'optimisation couplée est développé pour optimiser de façon alternée le profil d'épaisseur et la forme de la plaque en combinant une optimisation paramétrique et une optimisation géométrique par la méthode de variation de frontière d'Hadamard. Pour des raisons de précision, appuyées par des études expérimentales [29, 130], on décide de prendre en compte la dépendance en fréquence du coefficient de Poisson dans les modèles rhéologiques. Ce choix induit des non-linéarités dans le problème aux valeurs propres et rend l'étude des sensibilités plus délicate. Une analyse rigoureuse des sensibilités de la fonction objectif par rapport à l'épaisseur et par rapport à la forme est ensuite proposée en utilisant la méthode adjointe. Ce résultat s'est avéré adaptable à différentes modélisations telles que le modèle de plaque épaisse ou le modèle 3D. Les designs optimisés obtenus présentent des capacités d'amortissement bien supérieures aux plaques rectangulaires initiales (Figure 4). De plus, une analyse de l'impact des paramètres matériaux illustre l'importance du choix de l'hypothèse d'un coefficient de Poisson ou d'un module de compressibilité constant. En effet, alors que pour certains matériaux la différence reste marginale, certains cas montrent que le design optimisé ainsi que le comportement en vibration varient de façon non négligeables lorsque la dépendance en fréquence du coefficient de Poisson est prise en compte. Dans le cas d'un matériau possédant une large plage de temps de relaxation, cette hypothèse semble pertinente. En revanche, dans le cas contraire, celle-ci ne paraît pas nécessaire. Une fonction objectif visant à traiter le problème opposé est également proposée, elle représente le taux de décroissance exponentielle de la vibration pénalisé par la fréquence. Ainsi, pour maximiser le "dynamisme" (ou "retour élastique") d'une structure en vibration libre, il suffit d'adapter le coefficient de pénalisation de la fonction pour que l'algorithme minimise le critère souhaité.

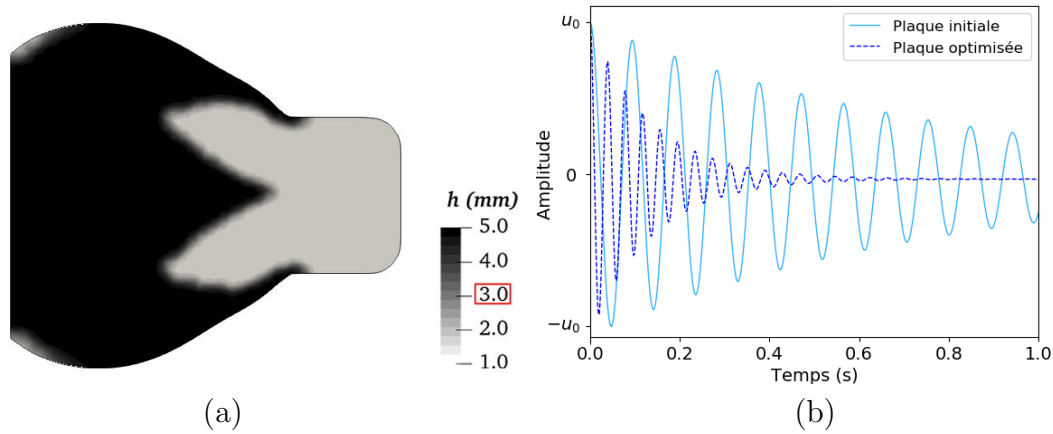


FIGURE 4 – (a) Forme et profil d'épaisseur optimisés pour une plaque initiale rectangulaire d'épaisseur  $h_0 = 3$  mm et (b) comparaison de l'amplitude des vibrations libres du design optimisé et du design initial pour la maximisation de l'amortissement de la structure.

Au chapitre VI, on réalise l'optimisation topologique 2D de structures viscoélastiques par la méthode level-set dans l'optique d'une première application au cas de la semelle de chaussure plane. Les principaux critères de conception sont pris en compte, avec notamment une contrainte de rigidité appliquée par la méthode du Lagrangien augmenté. Les designs finaux obtenus sont étonnamment contre-intuitifs avec la formation de sections fines critiques (Figure 5). Plusieurs études sont ensuite proposées pour tenter de comprendre l'origine

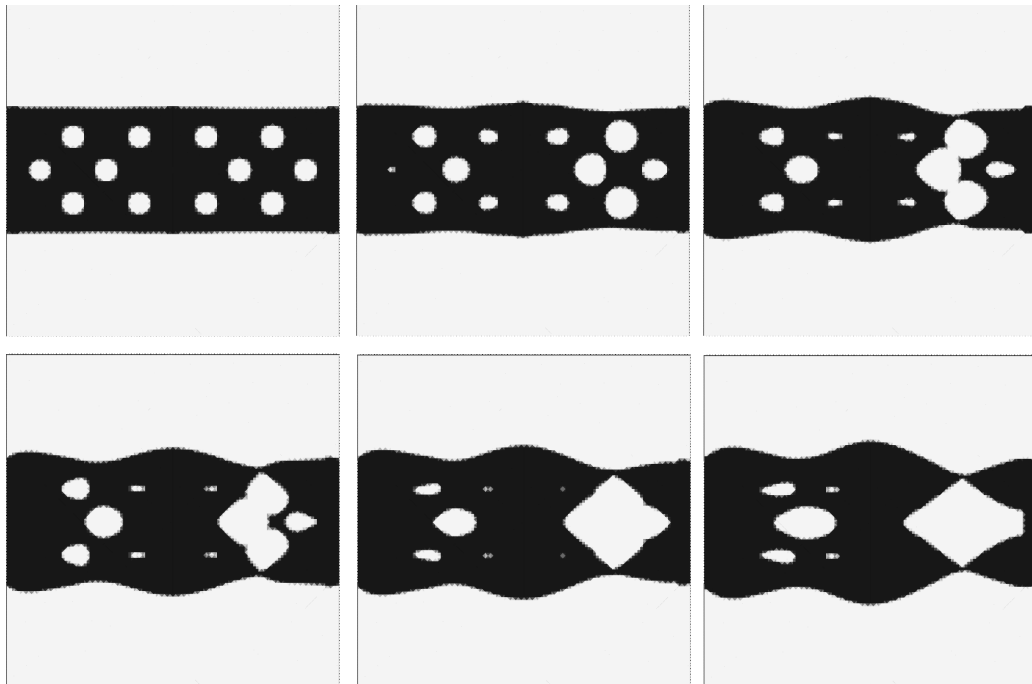


FIGURE 5 – Évolution du design pendant l'optimisation topologique d'une plaque viscoélastique en vibration libre pour la maximisation de l'amortissement, avec contrainte de compliance pour un test de flexion trois points, itérations 1, 5, 20, 30, 50, 65.



de tels résultats. Une étude simple, réalisée en élasticité, permet tout d'abord d'isoler le phénomène. Le modèle de Reissner-Mindlin est ensuite exploré et permet d'étudier l'impact du cisaillement transverse sur le design optimisé. Cette étude met en évidence la pertinence du modèle de Mindlin pour l'optimisation de plaques d'épaisseur plus importante, sans pour autant résoudre le phénomène d'amincissement de section observé.

Enfin, le chapitre VII est dédié à la généralisation des résultats théoriques et des techniques numériques au cas 3D. L'optimisation topologique 3D d'une structure mince en flexion nécessite une représentation par un maillage particulièrement fin. Les calculs, maintenant très volumineux, sont effectués sur un cluster de calcul grâce à l'application de techniques de calcul parallèle. L'optimisation d'une plaque 3D en élasticité linéaire est tout d'abord réalisée en minimisant la compliance de la structure. Ce problème mène à un design à la topologie remarquable, constitué d'une multitude de cantilevers dans le sens de l'épaisseur. On comprend maintenant, grâce à une meilleure représentation du comportement de la plaque, que les zones critiques sont suffisamment rigides pour ne pas impacter la rigidité globale de la structure. Afin de préparer l'application au cas de la semelle de chaussure de course, on optimise ensuite une plaque viscoélastique selon deux problèmes de vibration libre correspondant à deux encastresments différents. Cela permet d'obtenir des designs plus équilibrés, davantage en accord avec les exigences de conception. De plus, on applique deux contraintes : une contrainte sur la compliance pour un test quasi-statique de flexion trois points, afin de s'assurer de la rigidité globale de la structure, et une contrainte sur le volume pour contrôler la quantité de matière utilisée, toutes deux appliquées par la méthode du Lagrangien augmenté. Pour le polymère choisi, le design optimisé obtenu présente non seulement les motifs observables sur les designs de plaques viscoélastiques 2D, mais prend également la forme d'une structure creuse renforcée par de multiples cantilevers, caractéristique du problème de minimisation de la compliance d'une plaque élastique en flexion. La résolution d'un problème d'optimisation similaire, dans le cas d'une semelle de chaussure de course, mène à un design à la topologie complexe (Figure 6 et 7) pour lequel les performances d'amortis-

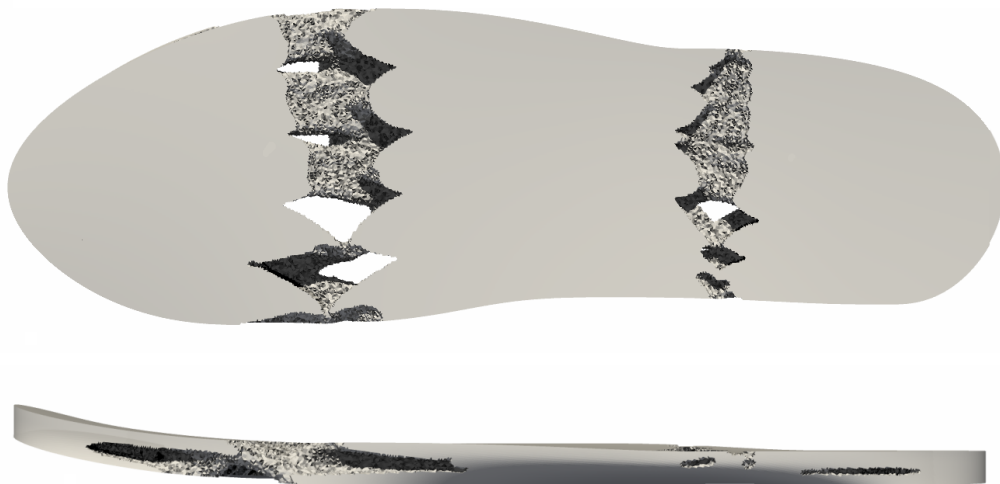


FIGURE 6 – Design optimal d'une semelle en polymère pour la maximisation de l'amortissement des vibrations de la structure, avec contrainte de rigidité et de quantité de matière.

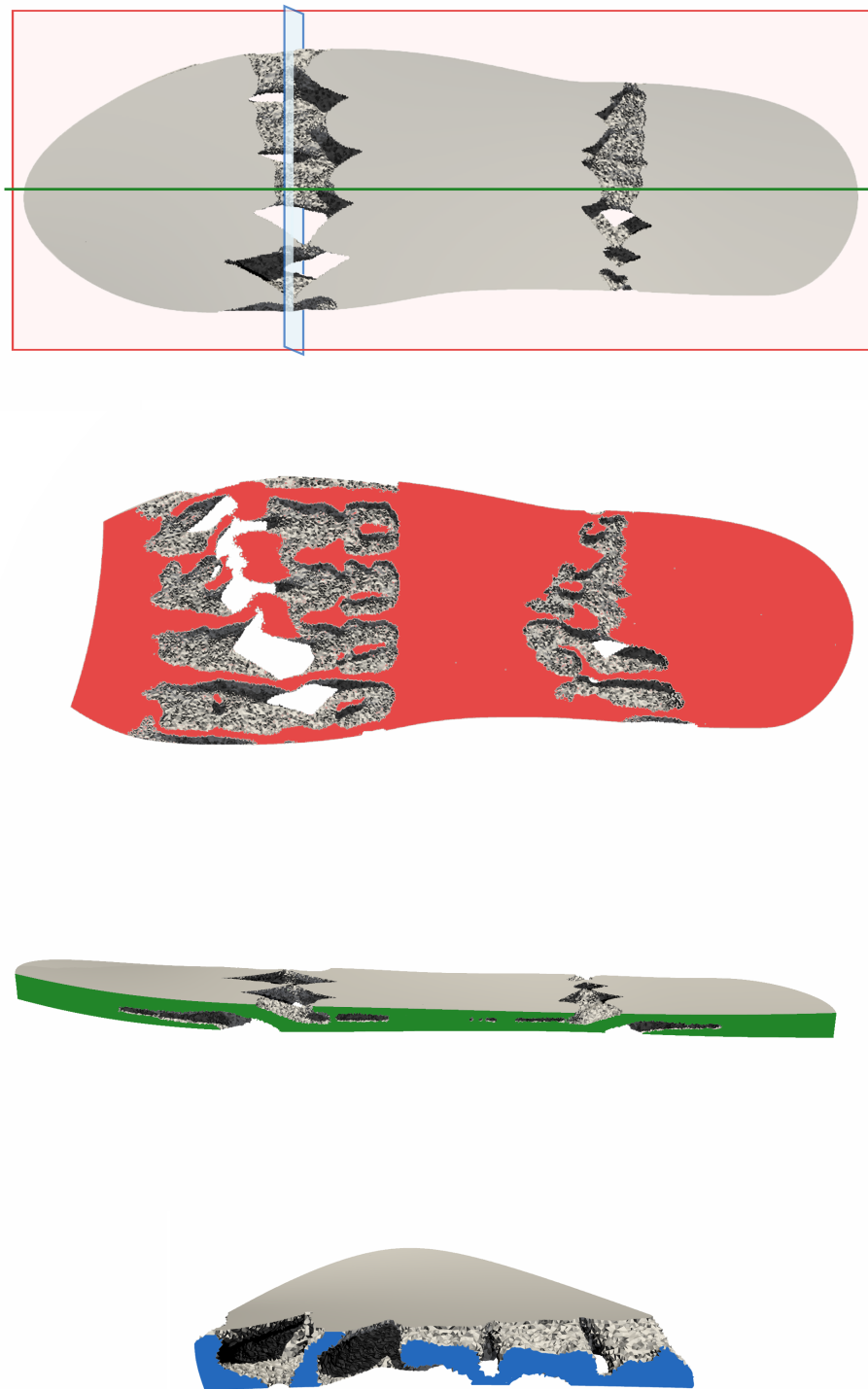


FIGURE 7 – Coupes du design optimal d'une semelle viscoélastique homogène pour la maximisation de l'amortissement des vibrations libres de la structure, avec contrainte de rigidité et de quantité de matière.

sement sont accrues (Figure 8), la rigidité est augmentée et la quantité de matière initiale est conservée. Malgré une implémentation plus lourde et un temps de calcul plus élevé, ces résultats confirment la nécessité d'employer des modèles et techniques d'optimisation 3D, en particulier dans le cas d'une structure mince en flexion soumise à une contrainte de rigidité. En outre, l'utilisation des méthodes 3D est nécessaire à l'optimisation de structures aux géométries complexes et, dans cette thèse, nous a permis de déterminer le design optimal d'une semelle de chaussure de course.

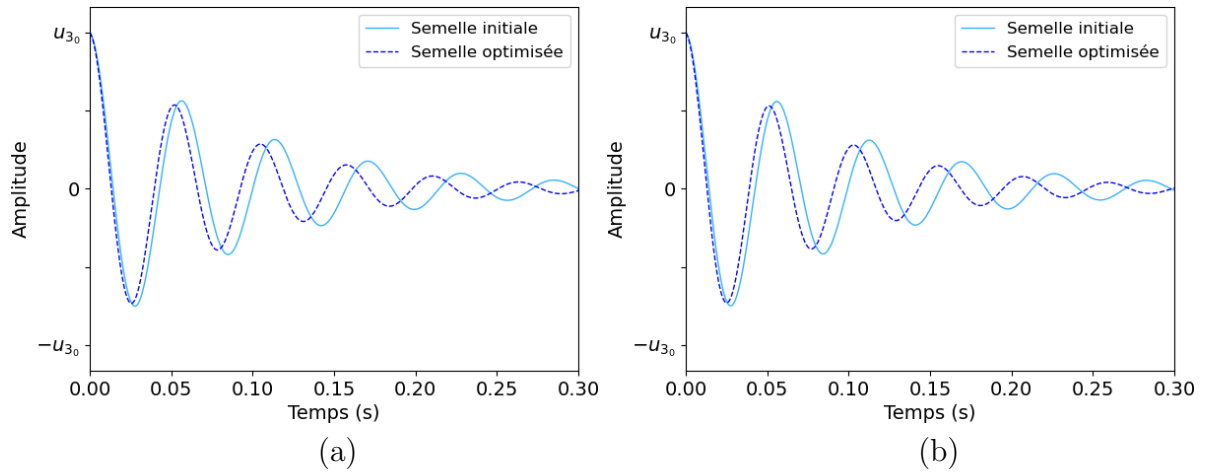


FIGURE 8 – Comparaison des vibrations libres de la semelle initiale et de la semelle optimisée, pour un encastrement (a) à l'extrémité gauche et (b) à l'extrémité droite.

# Chapitre I

## Dynamique des structures

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Dynamique des structures élastiques linéaires</b>	<b>21</b>
1.1	Introduction à la mécanique des milieux continus	21
1.2	Théorie des plaques	25
1.3	Théorie des poutres	32
<b>2</b>	<b>Outils d'analyse fonctionnelle</b>	<b>36</b>
<b>3</b>	<b>Méthode des éléments finis</b>	<b>40</b>

---

Ce chapitre constitue un rappel des principes de la dynamique des solides en élasticité linéaire, ainsi que des concepts d'analyse fonctionnelle utiles à l'analyse des équations de la mécanique. On portera également une attention particulière à la méthode des éléments finis. Cette introduction a pour but de fournir au lecteur les outils permettant d'aborder les problématiques de dynamique des structures viscoélastiques traitées dans ce manuscrit. Il ne s'agit pas d'un cours exhaustif mais d'une introduction aux principes de base nécessaires à la bonne compréhension de ce travail, on ne s'attardera donc pas sur les preuves et justifications. Le lecteur intéressé pourra cependant consulter les écrits classiques en mécanique des solides [71], analyse fonctionnelle [31, 58] et méthode des éléments finis [144, 145].

On introduit tout d'abord les principes fondamentaux de la dynamique des solides déformables ainsi que différentes théories des structures. On rappelle ensuite des éléments importants d'analyse fonctionnelle et la méthode des éléments finis utilisés par la suite.

## 1 Dynamique des structures élastiques linéaires

### 1.1 Introduction à la mécanique des milieux continus

#### Cadre de l'étude

La mécanique des milieux continus est principalement l'étude de la déformation des solides. On utilise ici la description lagrangienne du mouvement. Le solide est déformé par une application  $\Psi$  déplaçant chaque point matériel de position initiale notée  $X \in \mathbb{R}^3$  dans

un espace en un nouveau point de position actuelle notée  $x \in \mathbb{R}^3$ , exprimée par

$$x(t) = \Psi(X, t).$$

On suppose que  $\Psi$  est bijective afin de s'assurer que le solide ne se pénètre pas lui-même. Par la suite, et pour des raisons de clarté, on omet la dépendance en temps. Celle-ci sera réintroduite lorsque nécessaire. Dans ce manuscrit on se place dans le cadre des petites perturbations, on parle aussi des petites déformations ou de déformations infinitésimales. On s'intéresse donc uniquement aux mouvements restant faibles et aux solides s'écartant suffisamment peu de leur configuration initiale, pour pouvoir confondre les configurations de référence et déformée, et linéariser les champs tensoriels mis en jeu.

Le vecteur déplacement noté  $u$  est défini par la différence entre la position actuelle et la position initiale,

$$u = x - X = \Psi(X) - X.$$

La vitesse est alors donnée par  $\frac{\partial u}{\partial t}$  et l'accélération par  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ . On définit également le tenseur des déformations linéarisées noté  $\epsilon$ , mesure des déformations du solide. Il s'agit d'un tenseur symétrique d'ordre 2 qui s'exprime

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T). \quad (\text{I.1.1})$$

Enfin, on introduit le tenseur des contraintes de Cauchy noté  $\sigma$ . Il s'agit également d'un tenseur symétrique d'ordre 2.

### Formulation forte du problème

On étudie un solide déformable de volume noté  $\Omega^{3D}$  et de frontière notée  $\partial\Omega^{3D}$ . Dans cette section, on rappelle l'expression locale des équations de l'élasticité linéaire mettant en relation les champs de déplacements, de déformations et de contraintes. Cet ensemble d'équations, également appelé formulation forte, est vérifié en tout point  $x \in \Omega^{3D}$  du solide.

La théorie de l'élasticité est basé sur plusieurs équations constitutives. La loi de comportement, reliant le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations,

$$\sigma = C\epsilon, \quad (\text{I.1.2})$$

la relation déformation-déplacement (I.1.1), et l'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\operatorname{div}(\sigma(x)) + f(x) = \rho(x) \frac{d^2 u}{dt^2}(x), \quad (\text{I.1.3})$$

où  $f$  représente la densité volumique des efforts extérieurs et  $\rho(x)$  la masse volumique du matériau. On retrouve également l'équation d'équilibre  $\operatorname{div}(\sigma(x)) + f(x) = 0$ , équivalent statique de l'équation (I.1.3). L'application  $C$  représente le tenseur de raideur symétrique d'ordre 4. Ce tenseur possède des petites symétries,  $C_{ijkl} = C_{ijlk}$  et  $C_{ijkl} = C_{jikl}$ , ainsi qu'une grande symétrie  $C_{ijkl} = C_{klij}$ .

La représentation du problème doit être complétée par la description des conditions aux limites. Elles s'expriment sous la forme d'un déplacement  $u_\partial$  imposé sur  $\partial\Omega_u^{3D}$  ou d'une densité surfacique de force  $g$  imposée sur  $\partial\Omega_g^{3D}$ , soit

$$\begin{aligned} u(x) &= u_\partial(x) & \forall x \in \partial\Omega_u^{3D} \\ \sigma(x)n(x) &= g(x) & \forall x \in \partial\Omega_g^{3D} \end{aligned}$$

où  $n(x)$  représente la normale au point  $x$ . Des conditions aux limites doivent être imposées sur toute la frontière, même si celles-ci sont nulles. De plus, on ne peut appliquer une condition de déplacement et de contrainte normales selon les mêmes directions sur la même partie de frontière. En dimension 3, on peut, par exemple, appliquer des contraintes selon 2 directions et un déplacement selon la 3<sup>e</sup> direction sur un même bord. Dans notre cas, on se contente des conditions suivantes

$$\begin{aligned} \partial\Omega_u^{3D} \cup \partial\Omega_g^{3D} &= \partial\Omega^{3D} \\ \partial\Omega_u^{3D} \cap \partial\Omega_g^{3D} &= \emptyset. \end{aligned}$$

En mécanique, on appelle problème de Dirichlet un problème imposant des conditions de déplacement alors qu'un problème de Neumann impose des conditions de contrainte normale.

Enfin, il est important de définir les conditions initiales du problème afin de garantir l'unicité de la solution. On précise ainsi les champs de déplacement  $u_0$  et de vitesse  $v_0$  initiaux.

La formulation forte du problème s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{ll} \epsilon(x) = \frac{1}{2} ((\nabla u(x) + (\nabla u)^T(x))) & \forall x \in \Omega^{3D} \\ \sigma(x) = C\epsilon(x) & \forall x \in \Omega^{3D} \\ \operatorname{div}(\sigma(x)) + f(x) = \rho(x) \frac{d^2 u}{dt^2}(x) & \forall x \in \Omega^{3D} \\ u|_{t=0}(x) = u_0(x) & \forall x \in \Omega^{3D} \\ \frac{du}{dt}|_{t=0}(x) = v_0(x) & \forall x \in \Omega^{3D} \\ u(x) = u_\partial(x) & \forall x \in \partial\Omega_u^{3D} \\ \sigma(x)n(x) = g(x) & \forall x \in \partial\Omega_g^{3D}. \end{array} \right. \quad (\text{I.1.4})$$

On note également une propriété de la théorie de l'élasticité, pour un déplacement rigide infinitésimal, c'est un à dire un déplacement infinitésimal n'impliquant aucune variation de forme, les déformations et contraintes sont nulles.

### Formulation faible du problème

Le calcul variationnel est une branche de l'analyse fonctionnelle permettant de représenter une équation aux dérivées partielles (EDP) par la définition de formes intégrales. En mécanique des milieux continus, cela permet de caractériser l'équilibre de la structure à partir

de l'étude des énergies et travaux mis en jeu. Contrairement à la méthode précédente, le principe des travaux virtuels (PTV), établissant la formulation variationnelle du problème, est une approche globale portant sur le travail qui serait réalisé par les efforts intérieurs et extérieurs dans un champ de déplacement virtuel  $\hat{u}$ . Le PTV est une réécriture du Principe des Puissances Virtuelles en déplacement, il traduit l'égalité entre le travail virtuel des accélérations et les travaux virtuels des efforts intérieurs et extérieurs. Cette formulation, valable pour tout champ virtuel cinématiquement admissible, s'applique à toutes géométries, sollicitations et tous types de modèle de comportement ou de matériau. Pour l'étude de la dynamique des solides, on distingue 3 travaux :

1. Le travail des accélérations, il est donné par

$$\mathcal{W}_a(\hat{u}) = \int_{\Omega^{3D}} \rho(x) \frac{d^2 u}{dt^2}(x) \cdot \hat{u}(x) dx. \quad (\text{I.1.5})$$

2. Le travail des forces intérieurs, il représente les interactions entre les points matériels à l'intérieur du solide. Dans le cadre de la mécanique du solide déformable, il s'exprime en fonction des tenseurs symétriques  $\sigma$  et  $\epsilon$  sous la forme

$$\mathcal{W}_i(\hat{u}) = - \int_{\Omega^{3D}} \sigma \cdot \epsilon(\hat{u}) dx. \quad (\text{I.1.6})$$

On remarque que le travail des efforts intérieurs dû à un mouvement rigide, correspondant à un mouvement sans déformation, est nul.

3. Enfin, le travail des forces extérieures s'exerçant sur le système se distingue en deux catégories. Les efforts exercés à distance sur le volume  $\Omega^{3D}$  par des systèmes extérieurs, caractérisés par une densité volumique de force  $f$ , et les efforts de contact appliqués sur une surface  $\partial\Omega_g^{3D}$ , caractérisés par une densité surfacique d'efforts  $g$ . On définit donc le travail virtuel des efforts extérieurs par

$$\mathcal{W}_e(\hat{u}) = \int_{\Omega^{3D}} f(x) \cdot \hat{u}(x) dx + \int_{\partial\Omega_g^{3D}} g(x) \cdot \hat{u}(x) ds. \quad (\text{I.1.7})$$

Pour tout champ de déplacement virtuel cinématiquement admissible, c'est à dire continu sur le volume et nul sur les surfaces d'application de déplacements réels, on formule l'équation bilan :

$$\mathcal{W}_i(\hat{u}) + \mathcal{W}_e(\hat{u}) = \mathcal{W}_a(\hat{u}) \quad \forall \hat{u}. \quad (\text{I.1.8})$$

Cette équation est valable pour tout domaine, pour toute frontière continue par morceaux et ceci pour tout déplacement virtuel  $\hat{u}$ . On peut ainsi choisir  $\hat{u}$  astucieusement afin d'éliminer certaines intégrales. Par exemple, en prenant  $\hat{u}$  nul sur la frontière ou  $\hat{u}$  nul en tout point du solide sauf sur la frontière.

**Définition I.1.1.** Soit un domaine  $\Omega^{3D}$  et pour tout champ virtuel  $\hat{u}$ , le principe des travaux virtuels permet d'écrire la formulation faible du problème suivante :

$$\int_{\Omega^{3D}} \rho \frac{d^2 u}{dt^2} \cdot \hat{u} dx + \int_{\Omega^{3D}} \sigma \cdot \epsilon(\hat{u}) dx = \int_{\Omega^{3D}} f \cdot \hat{u} dx + \int_{\partial\Omega_g^{3D}} g \cdot \hat{u} ds \quad \forall \hat{u}. \quad (\text{I.1.9})$$

où  $f$  représente la densité de force extérieure volumique et  $g$  la densité de force extérieure surfacique appliquée sur la frontière  $\partial\Omega_g^{3D}$ .

## Décomposition spatio-temporelle

Dans l'étude dynamique des structures il peut être utile de réduire l'espace des solutions. Une méthode consiste à séparer les variables temporelles et spatiales, on obtient alors un problème spatial ainsi qu'un problème temporel découplés, quitte à ne pas prendre en compte les conditions initiales. On suppose qu'un champ de déplacement peut s'écrire

$$u(x, t) = Y(x)T(t). \quad (\text{I.1.10})$$

Dans ce manuscrit, on s'intéresse en particulier à la recherche des modes propres de structures en vibration, on ne cherche pas à étudier l'évolution temporelle du mouvement. Pour ces problèmes, la fonction scalaire  $T$  s'exprime en fonction de  $\omega$  par  $T(t) = e^{i\omega t}$  et la fonction vectorielle  $Y$  est à déterminer. Le problème spatial peut alors être résolu numériquement par discrétisation du domaine, par exemple par la méthode des éléments finis.

## 1.2 Théorie des plaques

Dans cette section, on présente quelques notions de la théorie des plaques pour la modélisation des structures. Le but est de permettre le calcul des déformations et des contraintes au sein d'une plaque soumise à diverses charges. La théorie des plaques est un domaine très large, pour aller plus loin le lecteur pourra se référer à l'ouvrage de Timoshenko et Krieger [128] ou de Reddy [118].

Les modèles de plaques sont essentiellement regroupés en deux catégories. La théorie des plaques minces, faisant usuellement référence à la théorie de Kirchhoff-Love, s'appuyant sur les hypothèses de Kirchhoff. Elle s'applique aux plaques dont le rapport entre l'épaisseur et la plus petite dimension transversale est suffisamment faible. La théorie des plaques épaisses, regroupant différents modèles, permet de traiter les plaques pour lesquelles ce rapport est plus important. On retrouve principalement la théorie de Reissner-Mindlin et plus rarement des théories à ordre élevé telles que le modèle de Reddy. De nombreuses théories sont présentes dans la littérature mais nous nous limiterons à celles de Kirchhoff-Love et Reissner-Mindlin, étant les plus largement utilisées en ingénierie.

Les plaques sont généralement représentées à l'aide des éléments géométriques suivants :

- Plan médian : plan situé à équidistance entre les faces.
- Feuillet moyen : élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan médian.
- Section normale : ensemble des points situés sur une normale au plan médian.

L'épaisseur  $h$  est souvent considérée constante mais peut être variable et est mesurée perpendiculairement au plan médian. En 3 dimensions, la structure est représentée par le domaine

$$\Omega^{3D} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2) \in \Omega, x_3 \in \left( \frac{-h}{2}, \frac{h}{2} \right) \right\}$$

de frontière  $\partial\Omega^{3D}$ . Le plan médian de la plaque est noté  $\Omega$ , de frontière  $\Gamma$ .

Le déplacement  $u = (u_1, u_2, u_3)$  est initialement à 3 dimensions, tout comme en élasticité 3D, mais les hypothèses des plaques permettent de se ramener à un problème bidimensionnel, posé sur le plan moyen. On obtient ce problème en intégrant le problème 3D dans l'épaisseur,



l'expression résultante dépend explicitement de la variable dans le sens de l'épaisseur  $x_3$ . Ces simplifications permettent ainsi de travailler avec un problème bien plus simple à résoudre. Les hypothèses de la théorie des plaques sont les suivantes :

- *On se place dans le cadre des petites déformations.*
- *Le plan médian est initialement plan.*
- *Le feuillet moyen ne subit pas de déformation dans son plan. On ne considère que les déplacements transversaux  $u_3$  des points du feuillet moyen.*
- *L'épaisseur est suffisamment faible, les déformations dans le sens de l'épaisseur  $\epsilon_{33}$  sont nulles et les contraintes  $\sigma_{33}$  peuvent être négligées.*

On peut alors écrire les déplacements sous la forme

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1(x_1, x_2) - x_3\theta_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2(x_1, x_2) - x_3\theta_2(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (\text{I.1.11})$$

où  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont les angles de rotation des vecteurs normaux, ils représentent la rotation des fibres verticales de la plaque. Les déplacements dans le plan,  $u_1$  et  $u_2$ , sont appelés les déplacements de membrane, et le déplacement hors plan (transverse)  $u_3$  est appelé la flèche.

On écrit maintenant le tenseur des déformations, en notation de Voigt, en décomposant le tenseur  $\epsilon$  en 2 parties distinctes

$$\begin{aligned} \epsilon_p = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} & & \\ & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} & \\ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) - x_3 \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1} \right) & & \end{pmatrix} = \epsilon_m(u_1, u_2) + x_3 \kappa(\theta_1, \theta_2) \\ \epsilon_s = \begin{pmatrix} 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{23} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \theta_1 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \theta_2 \end{pmatrix} = \gamma(u_3, \theta_1, \theta_2) \end{aligned} \quad (\text{I.1.12})$$

où  $\epsilon_m$  représente les déformations de membrane,  $\kappa$  les déformations de flexion, ou courbure, et  $\gamma$  les déformations de cisaillement transverse.

Pour un matériau élastique isotrope caractérisé par un module de Young  $E$  et un coefficient de Poisson  $\nu$ . La loi de Hooke s'écrit

$$\sigma = \frac{E}{1 + \nu} \epsilon + \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \text{tr}(\epsilon) \mathbf{I}. \quad (\text{I.1.13})$$

On obtient le modèle général de la théorie des plaques mettant en évidence un comportement membrane-flexion

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_p \\ \sigma_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_p & 0 \\ 0 & D_s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_m + x_3 \kappa \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad (\text{I.1.14})$$

où  $\sigma_p = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12})^T$ ,  $\sigma_s = (\tau_{13}, \tau_{23})^T$  et

$$D_p = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$D_s = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le module de cisaillement  $G$ , rapport des contraintes et déformations de cisaillement, s'exprime, dans le cas des matériaux isotropes, en fonction de  $E$  et  $\nu$  par

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

On cherche maintenant à exprimer la formulation variationnelle du problème d'élasticité pour une plaque mince de domaine  $\Omega^{3D}$ , encadrée sur le bord  $\partial\Omega_D^{3D}$ , simplement supportée sur le bord  $\partial\Omega_S^{3D}$  et libre sur le bord  $\partial\Omega_N^{3D}$ . On suppose qu'aucune condition cinématique sur le déplacement n'est imposée sur la face supérieure et inférieure, inclusent dans  $\partial\Omega_F^{3D}$ . On note  $g$  les forces surfaciques appliquées sur la frontière  $\partial\Omega_g^{3D}$  et  $f$  les forces volumique appliquées dans  $\Omega^{3D}$ . En utilisant la définition (I.1.9) on exprime la formulation variationnelle du problème 3D en quasi-statique

$$\int_{\Omega^{3D}} \sigma \cdot \epsilon(\hat{u}) \, dx = \int_{\Omega^{3D}} f \cdot \hat{u} \, dx + \int_{\partial\Omega_g^{3D}} g \cdot \hat{u} \, ds \quad \forall \hat{u}, \quad (\text{I.1.15})$$

ce qui donne en dynamique

$$\int_{\Omega^{3D}} \rho \frac{d^2 u}{dt^2} \cdot \hat{u} \, dx + \int_{\Omega^{3D}} \sigma \cdot \epsilon(\hat{u}) \, dx = \int_{\Omega^{3D}} f \cdot \hat{u} \, dx + \int_{\partial\Omega_g^{3D}} g \cdot \hat{u} \, ds \quad \forall \hat{u}. \quad (\text{I.1.16})$$

### Théorie des plaques minces

On introduit en premier lieu la théorie des plaques de Kirchhoff, ou théorie classique des plaques. Cette théorie traite de structures tridimensionnelles planes dont le rapport entre l'épaisseur et la plus petite dimension transversale est faible, tel que présenté Figure I.1.1.

L'hypothèse de Kirchhoff s'écrit :

- *Les sections normales restent planes et perpendiculaires au plan médian lors de la déformation, on néglige ainsi le cisaillement.*

Cette hypothèse induit  $\gamma = 0$  et permet donc d'écrire

$$\theta_1(x_1, x_2) = \frac{\partial u_3}{\partial x_1}(x_1, x_2)$$

$$\theta_2(x_1, x_2) = \frac{\partial u_3}{\partial x_2}(x_1, x_2), \quad (\text{I.1.17})$$

simplifiant ainsi l'expression du déplacement (I.1.11) en

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u_1(x_1, x_2) - x_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_1}(x_1, x_2)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = u_2(x_1, x_2) - x_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_2}(x_1, x_2) \quad (\text{I.1.18})$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3(x_1, x_2).$$

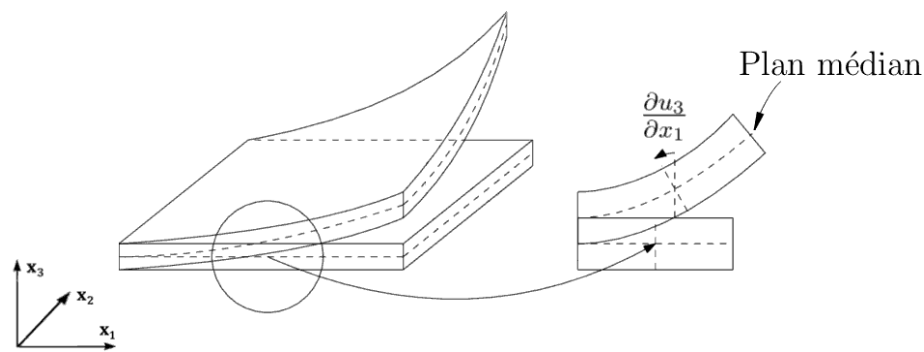


FIGURE I.1.1 – Schéma d'une plaque mince.

En appliquant ces simplifications, on obtient une nouvelle expression du tenseur des déformations (I.1.12),

$$\epsilon_p = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \\ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) - 2x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \end{pmatrix}, \quad \epsilon_s = 0. \quad (\text{I.1.19})$$

Les cisaillements transverses sont également négligés et les contraintes s'expriment alors uniquement à partir des déplacements. On obtient la loi de comportement

$$\sigma = \sigma_p = D_p(\epsilon_m + x_3 \kappa). \quad (\text{I.1.20})$$

On peut à présent déterminer la formulation variationnelle du problème des plaques de Kirchhoff. On applique les conditions aux limites sur le bord  $\Gamma$  du plan médian  $\Omega$ , défini par

$$\Gamma_D \cup \Gamma_S \cup \Gamma_N = \Gamma.$$

tel que  $(\Gamma_D, \Gamma_S, \Gamma_N)$  soient mutuellement disjoints et

$$\begin{aligned} \partial\Omega_D^{3D} &= \Gamma_D \times \left( -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right) \\ \partial\Omega_S^{3D} &= \Gamma_S \times \left( -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right) \\ \partial\Omega_N^{3D} &= \Gamma_N \times \left( -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right). \end{aligned}$$

Pour des raisons de clarté et dans cette section seulement, on décompose la partie dans le plan et hors plan médian des vecteurs mis en jeu. Pour cela on note  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ , ainsi  $u = (\mathbf{u}, u_3)$ . On applique cette notations aux vecteurs lorsque nécessaire. On définit les

efforts  $\hat{f} = (\hat{\mathbf{f}}, \hat{f}_3)$  et moments  $\mathbf{c}$  issus de l'intégration sur l'épaisseur de la force volumique  $f$ , on a

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \hat{f}_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_i dx_3, \quad \forall j \in \{1, 2\}, \mathbf{c}_j = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 f_j dx_3.$$

On définit également les forces  $N = (\mathbf{N}, N_3)$  et moments  $\mathbf{M}$ ,

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, N_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} g_i dx_3, \quad \forall j \in \{1, 2\}, \mathbf{M}_j = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 g_j dx_3.$$

La formulation variationnelle en quasi-statique devient, après intégration explicite selon  $x_3$  :  
Trouver  $u \in \mathcal{U}$  tel que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( h D_p \epsilon_m(\mathbf{u}) \cdot \epsilon_m(\hat{\mathbf{u}}) + \frac{h^3}{12} D_p \kappa(u_3) \cdot \kappa(\hat{u}_3) \right) dx &= \int_{\Omega} \left( \hat{\mathbf{f}} \cdot \hat{\mathbf{u}} + f_3 \hat{u}_3 - \mathbf{c} \cdot \nabla \hat{u}_3 \right) dx \\ + \int_{\Gamma_S} \left( \mathbf{N}_n \cdot \hat{\mathbf{u}}_n - \mathbf{M}_n \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial n} \right) ds + \int_{\Gamma_N} \left( \mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{M} \cdot \nabla \hat{u}_3 + N_3 \hat{u}_3 \right) ds &\quad \forall \hat{u} \in \mathcal{U}_0 \end{aligned} \quad (\text{I.1.21})$$

où  $\mathcal{U}_0$  est l'équivalent homogène de l'ensemble des déplacements admissibles  $\mathcal{U}$ , il est donnée par

$$\mathcal{U}_0 = \left\{ u_3 \in C^2(\bar{\Omega}) \text{ tel que } u_3|_{\Gamma_D} = 0, \frac{\partial u_3}{\partial n} \Big|_{\Gamma_D}, u_3|_{\Gamma_S} = 0 \right\}.$$

On considère pour l'instant que les fonctions sont seulement continûment différentiables, on verra par la suite des espaces plus adéquats, les espaces de Sobolev. Le déplacement  $u$  satisfait les conditions aux limites naturelles exprimées implicitement dans les termes de bords de la formulation variationnelle (I.1.21). Le déplacement satisfait également les conditions aux limites essentielles introduites par l'ensemble  $\mathcal{U}$ . En introduisant les hypothèses du problème de plaque de Kirchhoff et les expressions (I.1.12) et (I.1.2), on décompose le problème en un problème de membrane et un problème de flexion indépendants.

1. Un problème de membrane :

Trouver  $u \in \mathcal{U}_m$  tel que

$$\int_{\Omega} h D_p \epsilon_m(\mathbf{u}) \cdot \epsilon_m(\hat{\mathbf{u}}) dx = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{f}} \cdot \hat{\mathbf{u}} dx + \int_{\Gamma_S} \mathbf{N}_n \cdot \hat{\mathbf{u}}_n ds + \int_{\Gamma_N} \mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{u}} ds \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathcal{U}_{m_0} \quad (\text{I.1.22})$$

où  $\mathcal{U}_m$  et  $\mathcal{U}_{m_0}$  sont, de façon analogue, les ensembles des déplacements admissibles pour le problème de membrane.

2. Un problème de flexion :

Trouver  $u \in \mathcal{U}_f$  tel que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{h^3}{12} D_p \kappa(u_3) \cdot \kappa(\hat{u}_3) dx &= \int_{\Omega} (f_3 \hat{u}_3 - \mathbf{c} \cdot \nabla \hat{u}_3) dx - \int_{\Gamma_S} \mathbf{M}_n \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial n} ds \\ + \int_{\Gamma_N} (N_3 \hat{u}_3 - \mathbf{M} \cdot \nabla \hat{u}_3) ds &\quad \forall \hat{u}_3 \in \mathcal{U}_{f_0} \end{aligned} \quad (\text{I.1.23})$$

où  $\mathcal{U}_f$  et  $\mathcal{U}_{f_0}$  sont les ensembles des déplacements admissibles du problème de flexion et  $\kappa$  les déformations de flexion données par

$$\kappa(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \\ 2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

On remarque que le problème de membrane est un problème d'ordre 2,  $\epsilon_m$  mettant en jeu des dérivées premières. En revanche, le problème de flexion est un problème d'ordre 4 puisque  $\kappa$  est composée de dérivées secondes, ce qui peut poser des difficultés pour sa résolution numérique.

Le problème de flexion dynamique est obtenu à partir de (I.1.23) auquel est ajouté le travail des accélérations :

Trouver  $u \in \mathcal{U}_f$  tel que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \hat{u} \, dx + \int_{\Omega} \frac{h^3}{12} D_p \kappa(u_3) \cdot \kappa(\hat{u}_3) \, dx &= \int_{\Omega} (f_3 \hat{u}_3 - \mathbf{c} \cdot \nabla \hat{u}_3) \, dx - \int_{\Gamma_S} \mathbf{M}_n \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial n} \, ds \\ + \int_{\Gamma_N} (N_3 \hat{u}_3 - \mathbf{M} \cdot \nabla \hat{u}_3) \, ds &\quad \forall \hat{u} \in \mathcal{U}_{f_0} \end{aligned} \tag{I.1.24}$$

La théorie classique des plaques est largement utilisée pour les problèmes de flexion, de vibration ou de stabilité des plaques minces. Elle repose sur des hypothèses négligeant les cisaillements transverses ce qui rend son utilisation peu pertinente dans l'étude des plaques épaisses où ces contraintes ne peuvent être négligées. Plusieurs méthodes permettent de prendre en compte ces cisaillements transverses, la plus commune est d'utiliser la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre, aussi appelée théorie de Reissner-Mindlin pour les plaques épaisses.

### Théorie des plaques épaisses

Le modèle de Reissner-Mindlin propose une première amélioration de la théorie classique des plaques en s'appuyant sur l'hypothèse que les normales au plan médian ne restent pas nécessairement normales à celui-ci après déformation de la plaque. Cette théorie est dite du premier ordre puisque l'évolution du déplacement dans l'épaisseur est linéaire. Les contraintes de cisaillements transverses sont supposées constantes dans l'épaisseur, violant la condition de cisaillement nul au niveau des surfaces inférieures et supérieures. Ceci ne permet pas de représenter le comportement local de façon exacte, mais l'ajout d'un coefficient de correction de cisaillement assure la validité du comportement global. En analyse vibratoire, la théorie de Reissner-Mindlin est généralement suffisante. Elle reprend la théorie classique des plaques à laquelle est ajoutée l'hypothèse suivante :

- *Les sections normales restent planes lors de la déformation, mais ne sont pas perpendiculaire au plan médian.*

L'hypothèse de Mindlin est illustrée Figure I.1.2. Il est également important de préciser que ce modèle est applicable aux plaques d'épaisseur suffisamment importante pour que la prise en compte des cisaillements transverses soit pertinente. En effet, ce modèle est peu performant pour les plaques de faible épaisseur. L'influence des cisaillements transverses provoque dans ce cas un phénomène numérique de blocage, aussi appelé "shear locking" [82], rigidifiant la structure de façon excessive.

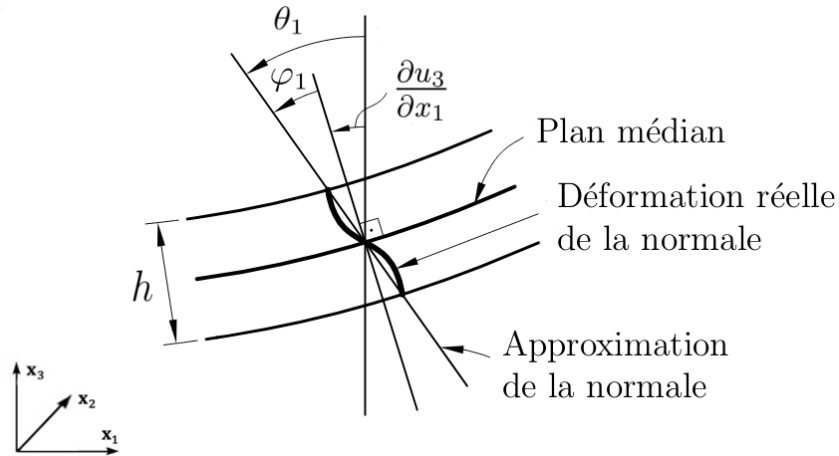


FIGURE I.1.2 – Déformation d'une section de plaque épaisse.

On reprend maintenant l'expression des déplacements (I.1.11) et des déformations (I.1.12) du modèle de Kirchhoff abordé dans la section précédente. D'après les hypothèses du modèle, les angles de rotation des vecteurs normaux s'écrivent maintenant

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \varphi_1 \\ \theta_2 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \varphi_2\end{aligned}\tag{I.1.25}$$

où  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont les angles de rotation illustrés (Figure I.1.2). Contrairement au modèle de Kirchhoff, on ne peut pas exprimer les angles de rotation en fonction de  $x_3$ . Pour le problème de flexion, on traite donc de 3 variables spatiales indépendantes ( $u_3, \theta_1, \theta_2$ ), le déplacement vertical de la plaque ainsi que ses deux angles de rotation. La loi de comportement (I.1.14) est transformée en

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_p \\ \sigma_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_p & 0 \\ 0 & kD_s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_m + x_3 \kappa \\ \gamma \end{pmatrix},\tag{I.1.26}$$

où le paramètre  $k$  représente le coefficient de correction de cisaillement. Ce paramètre peut être déterminé par différentes méthodes, par étude théorique ou par comparaison avec les résultats expérimentaux de tests de référence. De nombreuses valeurs sont utilisées dans la littérature mais la plus courante est  $k = \frac{5}{6}$ . Le lecteur intéressé par le choix de ce coefficient pourra consulter l'article de synthèse [37].

La formulation variationnelle du problème de flexion quasi-statique, pour une plaque épaisse soumise aux forces  $f$  et  $g$ , s'écrit maintenant :

Trouver  $u = (u_3, \theta_1, \theta_2) \in \mathcal{U}_f$  tel que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{h^3}{12} D_p \kappa(u) \cdot \kappa(\hat{u}) \, dx + \int_{\Omega} h k D_s \gamma(u) \cdot \gamma(\hat{u}) \, dx &= \int_{\Omega} (f_3 \hat{u}_3 - \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\theta}) \, dx - \int_{\Gamma_S} \mathbf{M}_n \boldsymbol{\theta}_n \, ds \\ + \int_{\Gamma_N} (N_3 \hat{u}_3 - \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\theta}) \, ds \quad \forall (\hat{u}_3, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) &\in \mathcal{U}_{f_0}. \end{aligned} \tag{I.1.27}$$

Dans le cas dynamique, on prend en compte les inerties de rotation. Le travail des accélérations s'exprime alors

$$\mathcal{W}_a(u_3, \theta_1, \theta_2) = \int_{\Omega} \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \hat{u}_3 \, dx + \int_{\Omega} \rho \frac{h^3}{12} \left( \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} \hat{\theta}_1 + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} \hat{\theta}_2 \right) \, dx.$$

On en déduit la formulation variationnelle :

Trouver  $u = (u_3, \theta_1, \theta_2) \in \mathcal{U}_f$  tel que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \hat{u} \, dx + \int_{\Omega} \rho \frac{h^3}{12} \left( \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} \hat{\theta}_1 + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} \hat{\theta}_2 \right) \, dx + \int_{\Omega} \frac{h^3}{12} D_p \kappa(u) \cdot \kappa(\hat{u}) \, dx \\ + \int_{\Omega} h k D_s \gamma(u) \cdot \gamma(\hat{u}) \, dx = \int_{\Omega} (f_3 \hat{u}_3 - \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\theta}) \, dx - \int_{\Gamma_S} \mathbf{M}_n \boldsymbol{\theta}_n \, ds \\ + \int_{\Gamma_N} (N_3 \hat{u}_3 - \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\theta}) \, ds \quad \forall (\hat{u}_3, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \in \mathcal{U}_{f_0}. \end{aligned} \tag{I.1.28}$$

On se place maintenant dans le cas d'une plaque rectangulaire, de longueur  $L$ , de largeur  $W$  et d'épaisseur  $h$ . Le plan médian de la plaque s'écrit alors

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in (0, L), x_2 \in \left( \frac{-W}{2}, \frac{W}{2} \right) \right\}.$$

Si l'on considère que la longueur est grande par rapport aux deux autres dimensions, on peut effectuer des approximations supplémentaires. Celles-ci sont à la base des modèles de poutre, fréquemment utilisés dans l'étude du design et l'analyse d'une large gamme de structures, on retrouve par exemple les ponts ou les ossatures de bâtiments.

### 1.3 Théorie des poutres

Les deux modèles de poutre principalement utilisés sont le modèle d'Euler-Bernoulli négligeant les cisaillements transverses, analogue unidimensionnel du modèle de Kirchhoff-Love, et le modèle de Timoshenko prenant en compte ces cisaillements, analogue unidimensionnel du modèle de Reissner-Mindlin.

Le terme poutre fait ici référence à une structure destinée à supporter des charges transversales. Une poutre supporte ces efforts par flexion seulement, les autres sollicitations telle que la torsion ne sont pas représentées par ces modèles. Pour cela, on suppose que la poutre,

sa section, ainsi que les efforts soumis, possèdent un plan de symétrie longitudinal. On définit également les éléments caractéristiques de la structure, illustrés Figure I.1.3.

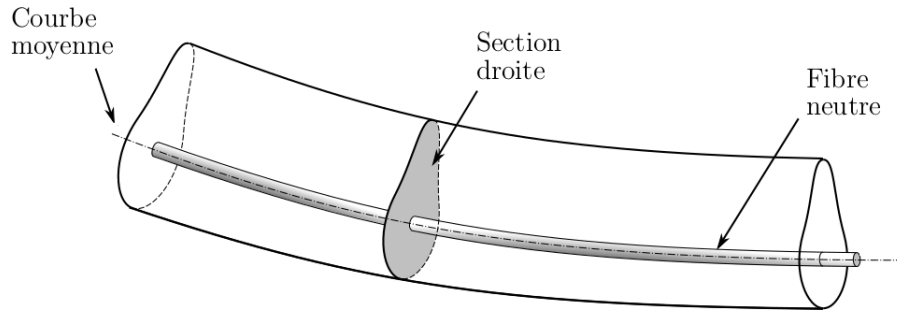


FIGURE I.1.3 – Schéma d'une poutre élancée.

- Courbe moyenne : ligne passant par le centre de gravité des sections droites (équivalent du plan médian pour la plaque).
- Fibre neutre : élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour de la courbe moyenne (équivalent du feuillet moyen pour la plaque).
- Section droite : plan perpendiculaire à la courbe moyenne (équivalent de la fibre normale pour la plaque).

Comme précédemment, on se place dans le cas d'une poutre constituée d'un matériau élastique homogène et isotrope.

Tout comme pour les modèles de plaque, le déplacement est initialement à 3 dimensions. Les hypothèses des modèles de poutre permettent de se ramener à un problème unidimensionnel, posé sur la courbe moyenne de la poutre. On obtient ce problème en intégrant le problème 3D dans l'épaisseur notée  $L$ , et dans la largeur notée  $W$ . La loi de comportement dépend alors d'une seule variable, le déplacement hors plan  $u_3$ , dépendant seulement de  $x_1$  et explicitement de  $x_3$ . Ces hypothèses permettent ainsi de travailler avec un problème unidimensionnel, beaucoup plus simple à étudier. Les hypothèses de la théorie des poutres sont les suivantes :

- *On se place dans le cadre des petites déformations.*
- *La courbe moyenne est continue, différentiable, et son rayon de courbure est grand devant sa longueur.*
- *La surface des sections droites est petite devant la longueur de la courbe moyenne.*

Dans la suite, on suppose que la courbe moyenne de la poutre au repos est la droite  $(Ox_1)$ . Les déplacements s'écrivent alors

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_3) &= -x_3\theta_1(x_1) \\ u_2(x_1, x_3) &= 0 \\ u_3(x_1, x_3) &= u_3(x_1). \end{aligned} \tag{I.1.29}$$

où  $\theta_1$  est l'angle de rotation des sections droites. On en déduit les déformations axiales et



les déformations de cisaillement

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11}(x_1, x_3) = -x_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1}(x_1) \\ \epsilon_{22}(x_1, x_3) = 0 \\ \epsilon_{12}(x_1, x_3) = \frac{\partial u_3}{\partial x_1}(x_1) - \theta_1(x_1), \end{pmatrix} \quad (\text{I.1.30})$$

ainsi que l'expression des contraintes

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 E \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1}(x_1) \\ 0 \\ G \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1}(x_1) - \theta_1(x_1) \right) \end{pmatrix}. \quad (\text{I.1.31})$$

### Théorie d'Euler-Bernoulli

On traite en premier lieu de la théorie d'Euler-Bernoulli, adaptée aux poutres élancées. L'hypothèse de Bernoulli vient alors s'ajouter aux hypothèses générales des poutres :

- *Au cours de la déformation, les sections droites restent planes et perpendiculaires à la courbe moyenne.*

Les déplacements peuvent maintenant s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_3) &= -x_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_1}(x_1) \\ u_2(x_1, x_3) &= 0 \\ u_3(x_1, x_3) &= u_3(x_1). \end{aligned} \quad (\text{I.1.32})$$

les déformations linéaire axiales

$$\epsilon_{11}(x_1, x_3) = -x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}(x_1), \quad (\text{I.1.33})$$

et les contraintes axiales, données par la loi de Hooke,

$$\sigma_1(x_1, x_3) = E \epsilon_{11}(x_1, x_3) = -x_3 E \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}(x_1). \quad (\text{I.1.34})$$

On obtient directement la formulation faible du problème de flexion quasi-statique en intégrant (I.1.9) selon  $x_2$  et  $x_3$ . Pour une force linéique  $f_l$  issue de l'intégration de la force volumique  $f$ , on a :

Trouver  $u_3 \in \mathcal{U}$  tel que

$$\int_0^L EI \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \hat{u}_3}{\partial x_1^2} dx_1 = \int_0^L f_l \hat{u}_3 dx_1 \quad \forall \hat{u}_3 \in \mathcal{U}_0 \quad (\text{I.1.35})$$

où  $I$  représente le moment quadratique de la section droite. En dynamique, le problème devient :

Trouver  $u_3 \in \mathcal{U}$  tel que

$$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \hat{u}_3 dx_1 + \int_0^L EI \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \hat{u}_3}{\partial x_1^2} dx_1 = \int_0^L f_l \hat{u}_3 dx_1 \quad \forall \hat{u}_3 \in \mathcal{U}_0 \quad (\text{I.1.36})$$

où  $A$  représente l'aire de la section.

### Théorie de Timoshenko

La théorie de Timoshenko permet d'étudier la déflexion d'une poutre en prenant en compte les cisaillements et les inerties de rotation en dynamique. Ce modèle est particulièrement pertinent pour l'étude de poutres épaisses. Prendre en compte les cisaillements entraîne une diminution de la rigidité de la structure, réduisant ainsi les déplacements en statique, ainsi que les fréquences de vibration en dynamique.

Tout comme son homologue bidimensionnel, on prend en compte les rotations des sections droites par rapport à la courbe moyenne. L'hypothèse d'Euler-Bernoulli devient :

- *Au cours de la déformation, les sections droites restent planes, mais ne sont pas perpendiculaire à la courbe moyenne.*

L'expression des contraintes (I.1.31) devient

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 E \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1}(x_1) \\ 0 \\ kG \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1}(x_1) - \theta_1(x_1) \right) \end{pmatrix}, \quad (\text{I.1.37})$$

où le facteur correcteur de cisaillement  $k$  dépend ici de la section de la poutre. On intègre (I.1.9) selon  $x_2$  et  $x_3$  pour obtenir la formulation faible du problème de flexion quasi-statique. Pour une force linéique  $f_l$ , on a :

Trouver  $(u_3, \theta_1) \in \mathcal{U}$  tel que

$$\int_0^L EI \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial x_1} dx_1 + \int_0^L kGA \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \theta_1 \right) \left( \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_1} - \hat{\theta}_1 \right) dx_1 = \int_0^L f_l \hat{u}_3 dx_1 \quad \forall (\hat{u}_3, \hat{\theta}_1) \in \mathcal{U}_0. \quad (\text{I.1.38})$$

L'équation résultante est du 4<sup>e</sup> ordre, tout comme dans le modèle d'Euler-Bernoulli, mais possède un terme supplémentaire du 2<sup>e</sup> ordre. En dynamique, le problème devient :

Trouver  $(u_3, \theta_1) \in \mathcal{U}$  tel que

$$\begin{aligned} & \int_0^L \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \hat{u}_3 dx_1 + \int_0^L \rho I \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} \hat{\theta}_1 dx_1 + \int_0^L EI \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial x_1} dx_1 \\ & + \int_0^L kGA \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \theta_1 \right) \left( \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_1} - \hat{\theta}_1 \right) dx_1 = \int_0^L f_l \hat{u}_3 dx_1 \quad \forall (\hat{u}_3, \hat{\theta}_1) \in \mathcal{U}_0. \end{aligned} \quad (\text{I.1.39})$$

On note que l'on peut retrouver le modèle d'Euler-Bernoulli en négligeant les inerties de rotation et en faisant tendre le module de cisaillement  $G$  vers l'infini. C'est à dire quand la plaque devient rigide en cisaillement et  $\theta_1 \approx \frac{\partial u_3}{\partial x_1}$ .

*Remarque I.1.1* Dans ce manuscrit, seule la flexion des structures est étudiée. Pour les problèmes de poutres et de plaques, constituant une large partie de ce manuscrit,  $u_3$  est la seule inconnue de déplacement. Dans ce cas, elle sera simplement notée  $u = u_3$  afin de faciliter la lecture. On reprendra la notation  $u = (u_1, u_2, u_3)$  en dernière partie pour l'étude de structures 3D. •

## 2 Outils d'analyse fonctionnelle

L'analyse fonctionnelle est une branche des mathématiques se concentrant sur l'étude des espaces fonctionnels. L'analyse de tels espaces est nécessaire dans l'étude de nombreux problèmes physiques représentés par des équations aux dérivées partielles. Les espaces de Sobolev en particulier constituent un cadre naturel de l'étude de certains de ces problèmes et sont importants pour établir leur formulation variationnelle. Les espaces de Sobolev d'ordre 1 sont des espaces de Banach dont les fonctions sont  $L^p$  et dont les dérivées sont elles-mêmes  $L^p$ . Plus simplement, il s'agit d'espaces vectoriels de fonctions faiblement dérivables suffisamment de fois pour donner un sens à une EDP et muni d'une norme permettant de mesurer la fonction ainsi que sa régularité. De plus, ils offrent une structure d'espace Hilbertien lorsque  $p = 2$ , ce qui permet l'utilisation de diverses méthodes d'analyse fonctionnelle. On rappelle que ce chapitre est une introduction à la théorie des espaces de Sobolev, il n'est en aucun cas exhaustif et la plupart des définitions et propriétés seront données sans preuve.

### Espaces de Sobolev

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , on rappelle la définition des espaces de Lebesgue. L'espace  $L^p(\Omega)$  est un espace de Banach, c'est à dire un espace vectoriel normé complet. Pour  $p \in [1, +\infty[$ , il est défini comme l'espace des fonctions mesurables dont la puissance d'exposant  $p$  est intégrable sur  $\Omega$ . Il est muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (\text{I.2.1})$$

Dans le cas  $p = 2$ ,  $L^2(\Omega)$  est l'espace des fonctions mesurables de carré intégrable muni du produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$ . L'espace  $L^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions essentiellement bornées sur  $\Omega$ . Il est muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ C \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } |f(x)| \leq C \text{ presque partout dans } \Omega \}. \quad (\text{I.2.2})$$

Pour établir la définition générale de ces espaces, on utilise une notation avec multi-indice. Un tel indice, noté  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ , représente un vecteur d'entiers naturels tel que sa

longueur soit définie par  $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$ . On peut maintenant introduire l'opérateur différentiel, pour tout vecteur  $u$ ,

$$\partial^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}(x).$$

**Définition I.2.1.** Soit  $m \in \mathbb{N}$  et  $p \in [1, +\infty]$ . L'espace de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  est défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq m, \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\} \quad (\text{I.2.3})$$

où  $\partial^\alpha u$  désigne la dérivée partielle de  $u$  au sens faible. Cet espace vectoriel est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty} & \text{si } p = +\infty. \end{cases} \quad (\text{I.2.4})$$

Le cas particulier  $p = 2$  est remarquable puisqu'il s'agit d'espaces de Hilbert que l'on note alors  $H^m$ .

**Définition I.2.2.** Soit  $m \in \mathbb{N}$ , l'espace de Sobolev  $H^m(\Omega)$  est défini par

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \forall \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq m, \partial^\alpha u \in L^2(\Omega)\} \quad (\text{I.2.5})$$

où  $\partial^\alpha u$  désigne la dérivée partielle de  $u$  au sens faible. L'espace  $H^m(\Omega)$  est muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx. \quad (\text{I.2.6})$$

On peut garder à l'esprit que plus  $m$  est grand, plus les fonctions de l'espace sont régulières. Le produit scalaire de  $H^1(\Omega)$

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \int_{\Omega} (u(x)v(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)) dx, \quad (\text{I.2.7})$$

est particulièrement utile en pratique.

Les fonctions d'un espace de Sobolev ne sont généralement pas continues et sont seulement définies presque partout sur  $\Omega$ . Leur restriction sur l'hypersurface  $\partial\Omega$ , qui est donc de mesure nulle, n'a à priori aucun sens. Pour définir la valeur au bord on utilise le théorème de trace. Ce théorème approche la fonction  $u$  par une suite  $(u_n)$  de fonctions  $C_1$  définies sur l'adhérence de  $\Omega$  et utilise la limite de la suite des restrictions  $(u_n|_{\partial\Omega})$  comme définition de la restriction  $u|_{\partial\Omega}$ . Par la suite, on se contente d'énoncer les résultats appliqués à l'espace  $H^1$ , le plus courant dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

**Théorème I.2.1** (de trace). Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier. On définit l'application linéaire continue "trace" de  $H^1(\Omega)$  par :

$$\begin{aligned} \gamma : H^1(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) &\rightarrow L^2(\partial\Omega) \\ u &\mapsto u|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

que l'on prolonge par continuité en

$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega).$$

L'image de  $\gamma$  est notée  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  et est munie d'une structure hilbertienne. On peut également montrer que l'application linéaire surjective

$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \quad (\text{I.2.8})$$

est continue.

En outre, il existe une application linéaire continue dite de relèvement

$$R : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^1(\Omega), \quad (\text{I.2.9})$$

telle que  $\gamma \circ R = Id_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$ . En particulier, il existe une constante  $C \geq 0$  telle que, pour tout fonction  $u \in H^1(\Omega)$ ,

$$\|u|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}. \quad (\text{I.2.10})$$

L'image de l'application  $\gamma$  est notée  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ . Il s'agit en réalité d'espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire, notion sur laquelle on ne s'attardera pas ici. La définition de la trace d'une fonction de  $H^1(\Omega)$  permet d'établir d'importants théorème d'analyse fonctionnelle. On se contente ici de mentionner les plus pertinents pour les études suivantes.

On peut maintenant introduire un espace particulièrement utile dans l'étude des équations aux dérivées partielles, l'espace  $H_0^1$ .

**Définition I.2.3.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné dont le bord  $\partial\Omega$  est régulier. On définit l'espace de Sobolev

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma(u) = 0\}, \quad (\text{I.2.11})$$

sous-espace de  $H^1(\Omega)$  constitué des fonctions "nulles au bord".

Le théorème de trace nous permet également de retrouver les formules d'intégration par parties (ou formule de Green) pour des fonctions de  $H^1(\Omega)$ .

**Théorème I.2.2** (formule de Green). Soit  $\Omega$  un ouvert borné dont le bord  $\partial\Omega$  est régulier. Pour  $u$  et  $v$  des fonctions de  $H^1$ , on a

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) n_i(x) ds, \quad (\text{I.2.12})$$

où  $n = (n_i)_{i \in [1, N]}$  est la normale extérieure au bord  $\partial\Omega$ .

Le théorème de trace et la formule de Green sont des outils particulièrement utiles pour manipuler les formulations variationnelles de nombreux problèmes et permettent, par exemple, de passer de la formulation forte à la formulation faible et inversement.

L'ordre d'une EDP est une caractéristique importante, il s'agit de l'ordre de la dérivée de plus haut degré. Les problèmes de flexion de plaque en particulier, constituant une large partie de ce manuscrit, sont des problèmes du 4<sup>e</sup> ordre. On utilisera alors grandement l'espace  $H^2$  pour définir les déplacements verticaux de la formulation faible, faisant apparaître des dérivées secondes. De manière analogue à l'espace  $H^1$ , on définit la trace de l'espace  $H^2$  [91].

**Définition I.2.4.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier. Il existe un opérateur linéaire continu  $\gamma$ , appelé trace totale, défini par :

$$\begin{aligned}\gamma : H^2(\Omega) &\rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ u &\mapsto (\gamma_0(u), \gamma_1(u))\end{aligned}$$

où  $\gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}$  et  $\gamma_1(u) = \frac{\partial u}{\partial n}$  avec  $n$  la normale extérieure au bord.

On remarque que dans ce cas, deux conditions aux limites doivent être fixées sur le même bord. Une condition sur le déplacement et une condition sur sa dérivée normale. On définit maintenant l'espace  $H_0^2$ .

**Définition I.2.5.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné dont le bord  $\partial\Omega$  est régulier. On définit l'espace de Sobolev

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ u \in H^2(\Omega) : u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}, \quad (\text{I.2.13})$$

sous-espace de  $H^2(\Omega)$  constitué des fonctions "nulles au bord" et de dérivée normale nulle.

### Théorème de Lax-Milgram

On introduit maintenant un théorème fondamental pour la résolution des équations aux dérivées partielles elliptiques linéaires écrites sous forme variationnelle, le théorème de Lax-Milgram. On commence tout d'abord par définir la formulation variationnelle dans le cadre de l'analyse fonctionnelle. Il s'agit de résoudre le problème :

Trouver  $u \in V$  tel que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V \quad (\text{I.2.14})$$

sous les hypothèses de Lax-Milgram :

- $V$  est un espace de Hilbert réel.
- $L : V \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme linéaire continue.
- $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme bilinéaire continue.
- $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  est coercive (ou V-elliptique), c'est à dire qu'il existe une constante  $\nu > 0$  tel que

$$a(v, v) \geq \nu \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V.$$

**Théorème I.2.3** (Lax-Milgram). Soit  $V$  un espace de Hilbert réel, soit  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire, continue, coercive et soit  $L : V \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire continue. Alors il existe un unique  $u \in V$  tel que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V.$$

De plus, cette solution dépend continûment de la forme linéaire  $L$ . En outre, si  $a$  est symétrique, alors  $u$  est l'unique minimum de

$$J : \begin{cases} V \rightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto \frac{1}{2}a(v, v) - L(v). \end{cases} \quad (\text{I.2.15})$$

On remarque à travers ce dernier résultat que sous les hypothèses de Lax-Milgram et si  $a$  est symétrique, la solution de la formulation faible représente le minimum d'une énergie. Ce théorème est d'une grande importance puisqu'il garantit l'existence et l'unicité de la solution d'une formulation faible. Il sert ainsi de fondement à la méthode des éléments finis, utile à la résolution des problèmes mécaniques qui seront abordés.

### 3 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode de résolution numérique de problèmes aux dérivées partielles. Il s'agit de discrétiser spatialement le domaine en éléments, constituant un maillage, afin de pouvoir résoudre le problème sous la forme d'un système linéaire, bien plus simple à traiter.

#### Généralités

On cherche à résoudre la formulation variationnelle (I.2.14) respectant les hypothèses de Lax-Milgram. On sait donc que ce problème admet une solution unique  $u$ . Pour obtenir une approximation numérique de cette solution, on ne va plus chercher la solution dans  $V$ , qui est généralement de dimension infinie, mais une solution  $u_h \in V_h$ , un sous-espace de dimension finie. On cherche alors à résoudre le problème :

Trouver  $u_h \in V_h$  tel que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (\text{I.3.1})$$

En tant que sous-espace d'un espace de Hilbert,  $V_h$  est également un espace de Hilbert. On peut appliquer le théorème de Lax-Milgram au problème approché, assurant l'existence et unicité de  $u_h$ . Cet espace  $V_h$  est en général construit à partir d'un maillage du domaine. On appelle ce nouveau problème une approximation variationnelle interne.

Si on se donne  $(\phi_i)_{i \in [1, N]}$  une base de  $V_h$ , on peut alors montrer que le problème se ramène à la résolution d'un système linéaire du type  $K_h U_h = b_h$ , où les composantes du vecteur  $U_h = (u_h(x_i)_{i \in [1, N]})$  sont les valeurs de  $u_h$  aux sommets  $(x_i)_{i \in [1, N]}$  du maillage et  $u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_h(x_i) \phi_i(x)$ . La matrice  $K_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$ , aussi appelée matrice de rigidité, est a priori pleine, et  $b_i = L(\phi_i)$ . La coercivité de  $a$  permet d'assurer que la matrice de rigidité soit également définie positive, ce qui permet d'inverser la matrice  $K$  et de résoudre le problème. De plus, si  $a$  est symétrique, la matrice de rigidité l'est également.

La résolution numérique du système linéaire utilise 3 principes :

- Pour limiter le coût de calcul, on choisit judicieusement les fonctions de base  $\phi_i$  par morceaux en sélectionnant celles dont le support est petit. En d'autres termes, on choisit les fonction  $\phi_i$  nulles partout sauf sur quelques mailles. En prenant des fonctions de supports disjoints, la matrice  $K$  devient creuse. Généralement, on choisit et ordonne ces fonctions de façon à obtenir une matrice s'approchant le plus possible d'une matrice diagonale.

- Il est également important de travailler avec des "familles affines d'éléments". C'est à dire que l'on se ramène à un maillage tel que toutes les mailles soient identiques à une transformation affine près. Cela permet de réaliser les calculs d'intégrales sur une seule maille de référence à l'aide d'un changement de variable.

- Enfin, le principe d'unisolvance nous permet d'affirmer que toute fonction est entièrement déterminée par ses valeurs aux nœuds.

**Définition I.3.1** (Unisolvance). *Soit  $\Sigma = \{a_1, \dots, a_N\}$  un ensemble de points distincts de  $\mathbb{R}^3$  et  $P$  un espace vectoriel de dimension finie de fonctions réelles. On dit que  $\Sigma$  est  $P$ -unisolvant ssi pour tous réels  $x_1, \dots, x_N$  il existe un unique élément  $p$  de  $P$  tel que  $p(a_i) = x_i \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ .*

### Définition des éléments finis

On introduit à présent, de manière non exhaustive, les éléments finis utiles pour les problèmes traités dans ce manuscrit. On rappelle tout d'abord les éléments finis de Lagrange. Parmi ces éléments usuels on utilisera tout particulièrement les éléments  $\mathbb{P}_1$  et  $\mathbb{P}_2$ . Puis on introduira l'élément non-conforme de Morley.

Les éléments finis sont constitués de plusieurs composants géométriques, ils sont définis comme suit :

**Définition I.3.2.** *On définit un élément fini par un triplet  $(K, \Sigma, P)$  tel quel*

- *$K$  est un élément triangulaire de  $\mathbb{R}^2$ , ou tétraédrique de  $\mathbb{R}^3$ , compact, connexe et d'intérieur non vide.*
- *$\Sigma = \{a_1, \dots, a_N\}$  est un ensemble fini de  $N$  points distincts de  $K$  que l'on appelle **degrés de liberté**.*
- *$P$  est un espace vectoriel de dimension finie de fonctions réelles définies sur  $K$  tel que  $\Sigma$  soit  $P$ -unisolvant.*

Sans rentrer dans les détails, on définit un maillage triangulaire conforme sur  $\Omega$  par un maillage dont les éléments recouvrent la fermeture de  $\Omega$  et dont l'intersection de deux éléments est soit l'ensemble vide, soit un sommet, soit une arête partagée. La Figure I.3.4 présente des exemples de configurations prohibées pour un maillage triangulaire.

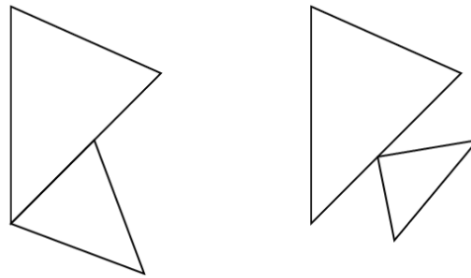


FIGURE I.3.4 – Configurations non conformes pour un maillage triangulaire 2D.

On introduit maintenant les éléments finis  $\mathbb{P}_k$ , les éléments de Lagrange d'ordre  $k$ .

**Définition I.3.3.** *Soit un maillage triangulaire  $T_h$ , les éléments finis de Lagrange d'ordre  $k$  associés à ce maillage sont définis par l'espace discret*

$$V_h = \{v \in C(\bar{\Omega}) : v|_{K_i} \in \mathbb{P}_k \forall K_i \in T_h\}, \quad (\text{I.3.2})$$

où  $h$  désigne communément le maximum des diamètres de  $K_i$ .



**Définition I.3.4.** L'espace  $V_h$  défini par (I.3.2) est un sous-espace de  $H^1(\Omega)$  de dimension finie égale au nombre de degrés de liberté  $N$ . De plus, il existe une base  $(\phi)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$  de  $V_h$  définie par

$$\phi_i(a_j) = \delta_{ij} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$$

telle que

$$v(x) = \sum_{i=1}^N v(a_i) \phi_i(x).$$

Pour les éléments triangulaires, en dimension  $n = 2$ , ou les éléments tétraédriques, en dimension  $n = 3$ , on représente usuellement un point à l'aide de ses coordonnées barycentriques. Ce sont des fonctions affines définies par

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} a_{i,j} \lambda_j = x_i \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1. \end{cases}$$

On en déduit l'expression des polynômes, ou fonctions de base, des éléments  $\mathbb{P}_1$  et  $\mathbb{P}_2$  représentés Figure I.3.5.

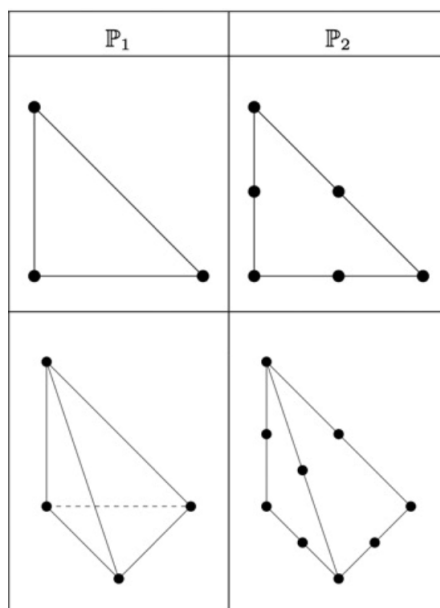
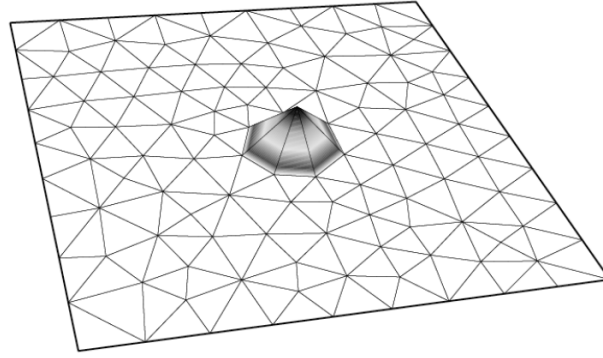


FIGURE I.3.5 – Éléments finis triangulaire  $\mathbb{P}_1$  et triangulaire  $\mathbb{P}_2$  en dimension 2 et 3.

**Proposition I.3.1.** Pour tout polynôme  $p \in \mathbb{P}_1$  et point  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n+1} p(a_j) \lambda_j(x), \quad (\text{I.3.3})$$

où les  $(a_j)_{j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$  sont les sommets de l'élément  $K$ .

FIGURE I.3.6 – Fonction de base de l'élément  $\mathbb{P}_1$  en dimension 2.

La Figure I.3.6 présente l'allure des fonctions de base de l'élément  $\mathbb{P}_1$ .

**Proposition I.3.2.** *Pour tout polynôme  $p \in \mathbb{P}_2$  et point  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a*

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n+1} p(a_j) \lambda_j(x) (2\lambda_j(x) - 1) + \sum_{1 \leq j < j' \leq n+1} 4p(a_{jj'}) \lambda_j(x) \lambda_{j'}(x), \quad (\text{I.3.4})$$

où les  $(a_j)_{j \in [1, n+1]}$  sont les sommets de  $K$  et les  $(a_{jj'})_{1 \leq j < j' \leq n+1}$  les points au milieu des arêtes de  $K$  définis par

$$\lambda_j(a_{jj'}) = \lambda_{j'}(a_{jj'}) = \frac{1}{2}, \quad \lambda_k(a_{jj'}) = 0 \quad \forall k \neq j, j'.$$

A ce stade, il est naturel de se demander quelle doit être la régularité de la solution approchée  $U_h$ . Celle-ci s'exprime à partir des fonctions de bases  $\phi_i$ . Dans une maille, ces fonctions sont  $C^\infty$  puisqu'elles appartiennent à un espace polynomiale. Il s'agit donc de s'interroger sur la régularité des fonctions au niveau des frontières entre mailles. Lorsque le problème nécessite une forte régularité des fonctions, les éléments  $\mathbb{P}_1$  et  $\mathbb{P}_2$  ne sont plus suffisants puisque seulement  $C^0$ . Dans l'optique d'étudier la flexion de plaques, constituant un problème d'ordre 4, la continuité  $C^1$  est nécessaire. C'est à dire que les fonctions de base ainsi que leur dérivées premières doivent être continues. Plusieurs méthodes sont alors à disposition. Il est parfois possible de contourner le problème en reformulant la formulation variationnelle à l'aide d'une formulation mixte. Celle-ci a pour but de réduire la régularité nécessaire des fonctions mises en jeu. La méthode mixte permet d'utiliser des éléments plus simples au prix de l'augmentation de la taille du problème et du nombre de variables. Il est également possible d'utiliser des éléments plus riches, dans le cas de la continuité  $C^1$  on peut utiliser les éléments de Hermite, éléments  $C^1$  issus des éléments  $\mathbb{P}_3$ . Le principal inconvénient de cette méthode est l'augmentation drastique du nombre de paramètres, compliquant ainsi la résolution numérique. Enfin, une dernière alternative est d'utiliser des éléments non-conformes. Dans le cas de la plaque en flexion, on peut utiliser les éléments de Morley [105, 106].

Lorsque l'espace éléments finis est un sous-espace de l'espace solution, on parle de méthode "conforme". Cela nous permet d'invoquer des propriétés d'analyse fonctionnelle

nous assurant que la solution éléments finis converge vers la solution réelle. Une autre approche dite “non-conforme” consiste à utiliser un espace éléments finis qui n’est pas un sous-espace de l’espace solution. De nombreuses études montrent la convergence de certains éléments non-conformes, d’autres en revanche, ne convergent pas. L’une des utilisations les plus classiques de ce genre d’éléments concerne la résolution des problèmes de flexion de plaques avec l’élément de Morley [80, 106], représenté Figure I.3.7. En 2D, il s’agit d’un

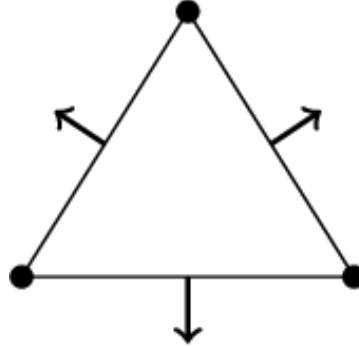


FIGURE I.3.7 – Élément fini de Morley.

simple élément triangulaire dont les fonctions de base sont des polynômes de degré 2, continus aux nœuds du triangle et dont la dérivée normale est continue au milieu des arêtes. L’espace des éléments finis de Morley est donné par

$$M_h = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \forall K_i \in T_h, v|_{K_i} \in \mathbb{P}_2, \left\{ \begin{array}{l} v \text{ est continue aux nœuds} \\ \frac{\partial v}{\partial n} \text{ est continue au milieu des arêtes} \end{array} \right\} \right\}. \quad (\text{I.3.5})$$

Ces fonctions possèdent donc 3 valeurs aux nœuds et 3 valeurs de dérivée normale au milieu des arêtes, ce qui en fait l’élément possédant le moins de degré de liberté pour la résolution de problèmes elliptiques d’ordre 4. Cet élément, pas même  $C^0$ , est cependant convergent pour les problèmes d’ordre 4 [92], contrairement aux éléments usuels. Il permet notamment une bonne approximation des valeurs propres pour les problèmes biharmoniques [66], largement présents dans ce manuscrit. Il faut néanmoins garder à l’esprit que l’utilisation de tels éléments est restreinte à des cas précis. Il a par exemple été démontré que l’élément de Morley n’est pas convergent pour les problèmes d’ordre 2 [129].

Bien que l’utilisation de l’élément de Morley semble indiquée, on cherche à valider ce choix à l’aide d’un cas test en lien avec les problématiques de ce manuscrit. On cherche la fréquence de vibration normalisée du premier mode d’une plaque élastique carrée, de côté  $a$ , d’épaisseur  $h$  et de paramètres  $\nu = 0.3$ . La fréquence normalisée  $\lambda_{1,1}$  dépend de la pulsation  $\omega_{1,1}$  par la relation

$$\lambda_{1,1} = \omega_{1,1} a^2 \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)\rho}{Eh^2}}.$$

Les résultats numériques sont obtenus avec le logiciel open source **FreeFem++** [75], il s’agit d’un solveur d’EDP utilisant la méthode des éléments finis. Le problème est résolu pour un maillage triangulaire 2D fixé, de taille 300x300. Les résultats sont obtenus pour deux

types d'éléments, l'élément de Morley et l'élément de Hermite, tous deux disponibles sous `FreeFem++`. On considère également deux types de conditions aux limites, le cas CFFF où la plaque est encadrée sur un seul côté, et le cas CFCF où la plaque est encadrée sur deux côtés opposés. Dans la table 3.1, on compare les résultats numériques avec les valeurs théoriques extraites de [94], ainsi que les temps de calcul, représentés en bleu. On remarque que l'élément de Morley permet, dans les deux cas, d'obtenir une fréquence proche de la fréquence déterminée de façon analytique. En revanche, l'élément de Hermite présente des

Conditions limites	Valeur théorique	Élément de Morley	Élément de Hermite
CFFF	3.47	3.46	3.34
Temps CPU		20.2s.	40.8s.
CFCF	22.27	22.26	21.44
Temps CPU		21.1s.	48.9s.

TABLE 3.1 – Comparaison des valeurs de  $\lambda_{1,1}$  pour l'élément de Morley et l'élément de Hermite.

résultats bien moins précis et entraîne, comme attendu, une augmentation conséquente du temps de calcul. Cette courte étude nous conforte dans l'utilisation des éléments de Morley pour les problèmes de flexion de plaque. Dans la littérature, l'élément de Hermite n'est habituellement pas utilisé pour ce genre de problème. Il aurait été intéressant de comparer ces résultats pour un autre élément usuel, l'élément DKT (Discrete Kirchhoff Triangle). N'étant pas disponible sous `FreeFem++`, il n'a pas constitué une option pour ce travail.

### Mise en œuvre de la méthode

En pratique, la résolution d'un problème par la méthode des éléments finis se déroule comme suit :

1. Construction du maillage du domaine et définition des différents types de bords.
2. Choix des éléments finis.
3. Assemblage de la matrice  $K_h$  et du vecteur  $b_h$  du problème global.
  - (a) Calcul des valeurs de  $K_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$ .
  - (b) Calcul des valeurs de  $b_j = L(\phi_j)$ .
  - (c) Prise en compte des conditions Dirichlet dans les valeurs aux nœuds des bords concernés.
4. Résolution du système linéaire global  $K_h U_h = b_h$ .

La résolution du système global est l'étape au coût temporel (temps de calcul) et spatial (occupation de la mémoire) le plus élevé, en particulier en dimension 3, où l'utilisation du calcul parallèle est souvent de mise. En revanche, l'assemblage des matrices  $K_h$  et  $b_h$  ne requière qu'un faible temps de calcul. Bien qu'également peu coûteux, le calcul des valeurs de  $K_{ij}$  n'est cependant pas simple.

En pratique, le calcul des intégrales sur les éléments du maillage est réalisé par intégration numérique. Pour cela, on utilise des formules de quadrature, des expressions linéaires permettant de fournir une valeur approchée de l'intégrale sur un segment. On cherche idéalement une formule de quadrature exacte pour l'élément choisi.

Dans ce manuscrit, les résultats numériques sont obtenus avec le logiciel **FreeFem++** [75], ainsi que Python, interphasé avec **FreeFem++** grâce à la librairie **pyFreeFem** [63] développée par F. Feppon. Pour la résolution des problèmes de flexion des structures 2D et 3D avec **FreeFem++**, il est important d’appliquer la méthode de “mass lumping” [143], ou condensation de matrice de masse, afin de s’assurer que l’intégration numérique soit précise. Dans le cas contraire, la qualité des résultats peut se dégrader et la symétrie du problème n’est pas nécessairement respectée. Figure I.3.8 illustre ces problèmes numériques, il s’agit d’un exemple de mode propre d’une plaque élastique encastree au bord gauche, en vibration libre, dans le cas où on néglige les effets du coefficient de Poisson. On observe en particulier des problèmes de symétrie au niveau des bords latéraux.

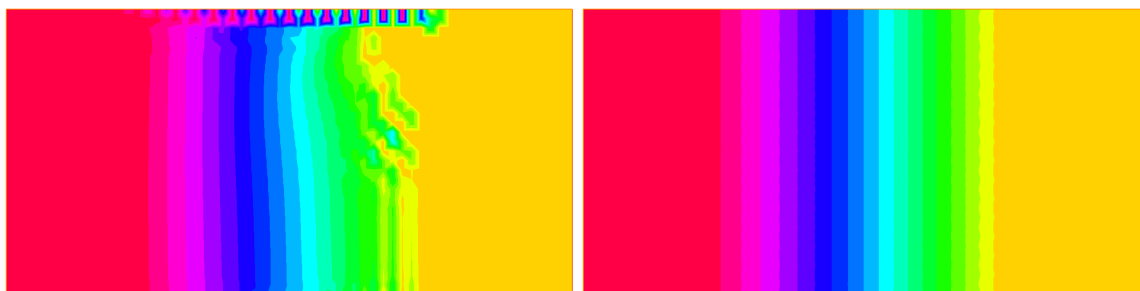


FIGURE I.3.8 – Mode propre d’une plaque élastique calculé sans mass lumping (gauche) et avec mass lumping (droite).

L’objectif de la méthode est de modifier la matrice de masse afin de la diagonaliser, tout en préservant la masse totale. Bien que cette technique ne soit pas recommandée pour tous les problèmes, il existe plusieurs façon de procéder (voir [144] section 16).

1. La méthode de sommation par ligne, elle consiste simplement à sommer les valeurs  $M_{ij}$  de chaque ligne et concentrer le résultat sur les termes diagonaux.
2. La méthode de mise à l’échelle des termes diagonaux, consistant à multiplier les termes diagonaux par une constante  $c$  telle que la masse totale soit conservée.
3. La méthode d’intégration aux nœuds des éléments, consistant à choisir une formule de quadrature dont les points d’intégration sont les nœuds de l’élément et non les points de Gauss habituels.

On utilisera ici la 3<sup>e</sup> méthode, permettant d’obtenir naturellement une matrice de masse diagonale à l’aide de formules de quadrature exactes. Pour les éléments  $\mathbb{P}_1$  par exemple, les points d’intégration sont les nœuds du maillage. Il est donc important de préciser la formule de quadrature utilisée puisque les formules par défaut de **FreeFem++** sont choisies pour convenir à des polynômes d’ordres élevés. Elles ne sont alors pas exactes pour les éléments usuels.

# Chapitre II

## Comportement viscoélastique linéaire des polymères

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Structure et phénoménologie des polymères . . . . .</b>	<b>48</b>
1.1	Classification des polymères . . . . .	48
1.2	Mobilité moléculaire source de la viscoélasticité . . . . .	50
<b>2</b>	<b>Loi de comportement viscoélastique linéaire . . . . .</b>	<b>52</b>
2.1	Modèles rhéologiques . . . . .	52
2.2	Caractérisation expérimentale de la viscoélasticité . . . . .	55
2.3	Comportement 3D . . . . .	58

---

Les matériaux polymères sont largement utilisés dans l'industrie ainsi que dans la vie quotidienne pour des raisons de coût, légèreté, facilité de mise en œuvre... Ils sont généralement privilégiés pour accomplir des tâches d'amortissement du fait de leurs propriétés viscoélastiques. Les problématiques de ce manuscrit sont étroitement liées à leur capacité de dissipation d'énergie, une propriété pertinente dans les problèmes d'atténuation de vibrations et de bruit.

Dans ce manuscrit, on s'intéresse tout particulièrement à l'optimisation de semelles de chaussures de course, structures composées d'un assemblage de différents polymères aux rôles bien distincts. Avant de décrire les propriétés de ces polymères, introduisons la composition d'une semelle type.

Une semelle de chaussure de course dans sa forme la plus simple, représenté Figure II.0.1, est un assemblage de plusieurs types de polymères. Cette application exploite les propriétés de multiples polymères que nous aborderons par la suite, et illustre particulièrement bien la polyvalence de ces matériaux. En contact avec le pied, on retrouve tout d'abord la semelle de propreté, principalement présente pour des raisons d'hygiène. Elle est typiquement composée d'un thermodur, par exemple le polyuréthane à cellules ouvertes, permettant l'évacuation de la transpiration. Puis on atteint le corps de la semelle, souvent constitué d'un élastomère thermoplastique sous forme de mousse, typiquement le Polyuréthane thermoplastique (TPU) expansé ou l'Ethyle Vinyle Acétate (EVA). Cette partie est principalement responsable de l'amortissement et constitue donc la partie dont les performances sont les plus intéressantes

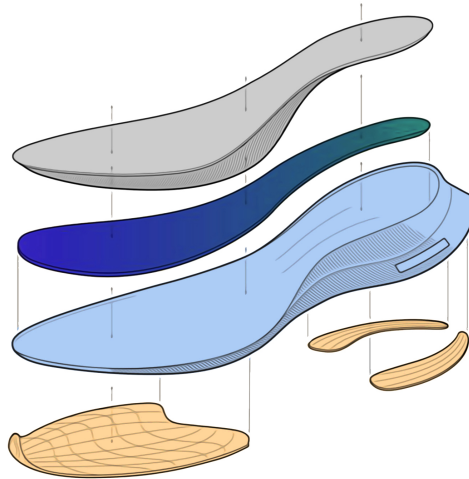


FIGURE II.0.1 – Schéma d'une semelle de chaussure de course simple.

à optimiser. En contact avec le sol on retrouve ensuite la semelle d'usure, constituée d'une couche de caoutchouc, particulièrement résistant à l'usure. C'est également la partie de la semelle responsable de l'adhérence, par conséquent elle contient des motifs particuliers ou bien des emplacements pour crampons. Enfin, des renforts en polymère thermodurcissable sont parfois présents au cœur de la semelle et permettent d'ajuster la rigidité et la stabilité de la semelle en fonction de l'utilisateur.

Ce chapitre est donc dédié à l'introduction des notions fondamentales du comportement viscoélastique linéaire caractérisant le comportement aux petites déformations des polymères. On expliquera tout d'abord l'origine du caractère dissipatif de tels matériaux liée à leur structure moléculaire. On verra ensuite comment la dépendance en temps (ou en fréquence) de ces matériaux doit prendre en compte toute l'histoire de sollicitation. Puis on introduira différents modèles rhéologiques classiques adaptés au comportement viscoélastique linéaire. Ces modèles sont construits à partir d'éléments simples et permettent de bien reproduire la réalité expérimentale. On rappellera comment les paramètres de ces modèles peuvent être identifiés, en particulier à travers des essais harmoniques, l'analyse mécanique dynamique, et de l'utilisation du principe d'équivalence temps-température. Enfin, on discutera de la dépendance en temps du coefficient de Poisson. Pour aller plus loin, le lecteur pourra se référer à l'ouvrage de Ward [134].

## 1 Structure et phénoménologie des polymères

### 1.1 Classification des polymères

Un polymère est un ensemble de chaînes macromoléculaires, d'origine organique ou semi-organique, enchevêtrées, ordonnées sous forme cristallines, ou désordonnées à l'état amorphe.

## Morphologie des polymères

À l'échelle mésoscopique, un polymère peut être entièrement constitué d'une phase amorphe ou d'un mélange de phase amorphe et de phases cristallines (Figure II.1.2).

Les **polymères amorphes** sont uniquement composés de chaînes désordonnées dont la représentation populaire est le plat de spaghettis. En dessous d'une température propre au matériau appelée température de transition vitreuse  $T_g$ , la mobilité des chaînes moléculaires est réduite. Le matériau devient raide, présentant un comportement le plus souvent viscoélastique en petites déformations et viscoplastique en grandes déformations, c'est l'état vitreux. En augmentant progressivement la température, les chaînes moléculaires retrouvent de plus en plus de mobilité, permettant le changement de conformation trans-gauche des liaisons covalentes. Des déformations de plus en plus grandes sont alors possibles jusqu'à atteindre l'état caoutchoutique. Un polymère amorphe dans cet état présente un comportement viscoélastique.

Les **polymères semi-cristallins** sont des polymères qui, lorsque refroidis depuis un état fondu, présentent des lamelles cristallines croissant à partir de points de germination, du fait de l'arrangement ordonné de chaînes. Ces lamelles peuvent s'arranger pour former des mésostructures cristallines plus complexes telles que les sphérolites. La cristallisation est généralement partielle, la phase amorphe restante peut alors se retrouver confiné entre les lamelles et agir comme une matrice dans laquelle est répartie la phase cristalline. C'est encore la phase amorphe qui confère aux polymères semi-cristallins leur comportement viscoélastique aux petites déformations.

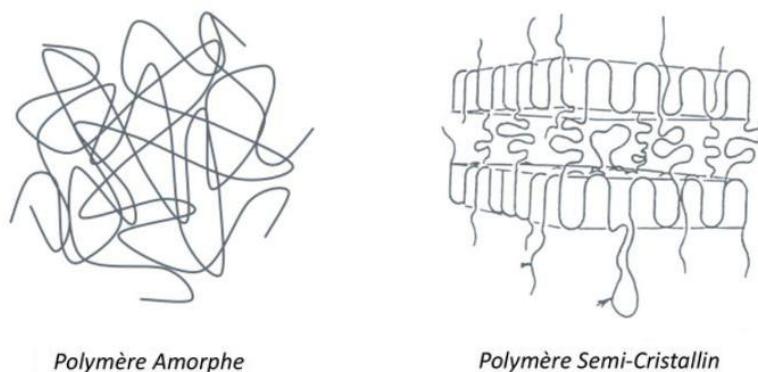


FIGURE II.1.2 – Schéma des différentes microstructures des polymères.

## Polymères thermoplastiques et thermodurcissables

Souvent, les polymères sont classés suivant trois groupes, les thermoplastiques, les thermodurcissables et les élastomères.

Les **thermoplastiques** sont constitués de chaînes linéaires ou ramifiées, non réticulées, c'est à dire non liées par des connections chimiques. On les trouve sous forme amorphe ou semi-cristalline. Ils ont l'intérêt d'être de mise en forme simple à l'état fondu et sont recyclables par une simple montée en température. Pour ces matériaux, les températures de transition vitreuse, de fusion et de dégradation sont souvent relativement basses.



Des exemples courants sont : le Polyéthylène (PE), le Polychlorure de Vinyle (PVC), le Polyéthylène terephthalate (PET), le Polypropylène (PP), le Polystyrène (PS), le Polyamide (PA)...

Les **thermodurcissables**, ou “thermodurs”, sont constitués de chaînes réticulées. De ce fait, ils ne peuvent être mis en forme qu’une seule fois ce qui les rend difficilement recyclables, mais ils ont l’avantage de ne pas s’écouler à haute température. Les résines epoxy sont les polymères thermodurs les plus courants.

Les **élastomères**, ou “caoutchoucs”, sont constitués de très longues chaînes réticulées. On les trouve principalement sous forme amorphe et sont, pour la plupart, d’origine organique. Ce sont des thermodurs dont la température de transition vitreuse est inférieure à la température ambiante et dont les longues chaînes assurent la grande déformabilité (TPU). Il existe aussi des élastomères thermoplastiques (TPE) pour lesquels la présence de cristallites dispersées assurent la fonction des points de réticulation.

Des exemples courants sont : le caoutchouc naturel (NR) et le styrene-butadiene (SBR) pour les élastomères et les TPU et les PEBAX pour les TPE.

Les phases existantes des différents polymères sont synthétisées dans les diagrammes d’état Figure II.1.3. Les plages sombres représentent leurs états d’usage typiques. La très grande diversité des polymères permet ainsi de proposer de nombreux matériaux aux propriétés largement différentes. Cela explique leur utilisation particulièrement fréquente et variée.

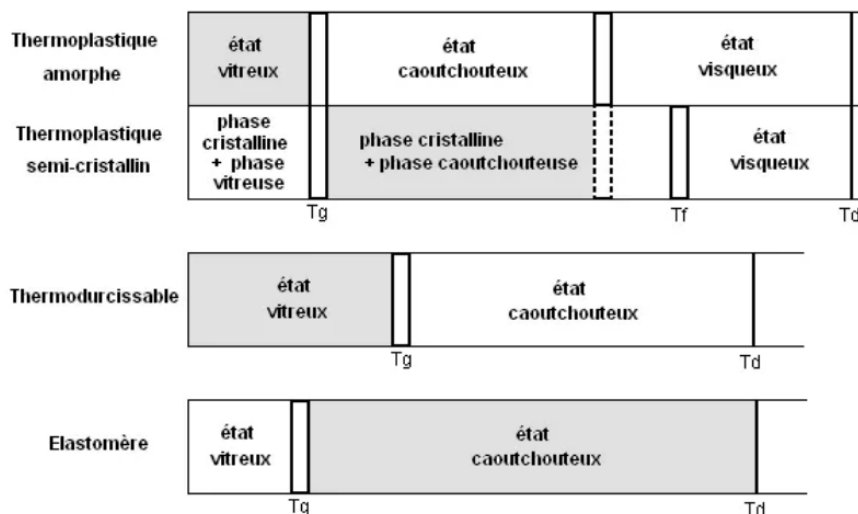


FIGURE II.1.3 – Diagrammes d’états des polymères.

## 1.2 Mobilité moléculaire source de la viscoélasticité

Dans l’optique d’une application en amortissement on s’intéresse au caractère dissipatif des polymères, plus précisément à l’origine de leur écoulement visqueux.

Cet écoulement s’exprime tout d’abord à l’échelle atomique selon le modèle de de Gennes [49]. Sous l’effet de la température, les polymères linéaires enchevêtrés vont effectuer des

mouvements de reptation. Les macromolécules se déplacent à l'intérieur d'un tube virtuel, illustré Figure II.1.4. Ce tube représente les contraintes topologiques imposées par les enchevêtrements avec les chaînes proches. Il est construit à partir de deux hypothèses, le mouvement de chaque molécule est indépendante de ses voisines et on néglige les déplacements latéraux. Bien que les chaînes soient constamment en mouvement, le tube lui reste fixe tant que la molécule ne l'a pas quitté. Le temps caractéristique de désengagement de la chaîne de son tube initial, par reptation, est appelé temps de relaxation et est noté  $\tau$ . Ce temps dépend de la masse moléculaire de la macromolécule  $M$ , plus précisément on a  $\tau \approx M^3$ . Dans un polymère amorphe les chaînes sont naturellement de masse moléculaire différentes, c'est la dispersité. Il est donc nécessaire de caractériser le temps de relaxation du matériau par un spectre de temps.

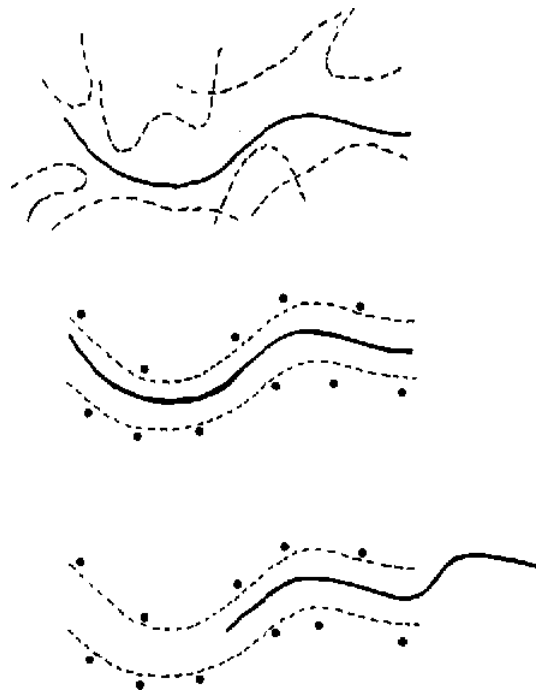


FIGURE II.1.4 – Schéma du modèle de reptation de de Gennes.

À l'échelle moléculaire, l'écoulement visqueux est justifiable par un glissement des chaînes les unes par rapport aux autres sous l'effet d'une sollicitation mécanique. Pour une application en amortissement, il est donc intuitif de penser que les matériaux amorphes faiblement réticulés sont les plus pertinents puisque l'écoulement visqueux y est plus propice. En effet, les phases cristallines et les ponts de réticulation constituent des obstacles à l'écoulement. Ces mouvements macromoléculaires étant dépendants de la température, il est également important que la température d'utilisation soit située dans l'état caoutchoutique. Néanmoins, un matériau à l'état caoutchoutique sera moins rigide qu'un matériau dont l'état se rapproche de l'état vitreux. Des polymères amorphes faiblement réticulés tels que les élastomères, naturellement utilisés à l'état caoutchoutique, constituent donc de bons candidats.

## 2 Loi de comportement viscoélastique linéaire

En viscoélasticité linéaire la réponse du matériau présente à la fois des caractéristiques élastiques et visqueuse. Le comportement d'un matériau viscoélastique dépend de l'état de déformation et du temps, comme illustré Figure II.2.5. Alors qu'en élasticité, l'état des



FIGURE II.2.5 – Influence de la vitesse de déformation et courbes de relaxation typiques.

contraintes dépend uniquement de l'état de déformation, en viscoélasticité, l'histoire du chargement ayant conduit à cet état de déformation doit être pris en compte. Par conséquent, on exprime naturellement le problème par rapport à la variable temporelle. Cependant, il peut être intéressant de travailler dans le domaine fréquentiel. On utilise alors la transformée de Fourier pour passer d'une représentation à une autre.

On se place une fois de plus dans l'hypothèse des petites déformations pour un matériau isotrope, afin de prédire la réponse à une sollicitation élémentaire uniaxiale. La linéarité se traduit par le principe de superposition de Boltzmann énonçant que la réponse du matériau dépend linéairement de l'histoire des sollicitations. Ce principe donne la loi de comportement suivante

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t - \tau) \frac{d\epsilon}{d\tau}(\tau) d\tau \quad (\text{II.2.1})$$

où  $E(t)$  représente le module de relaxation, ou fonction de relaxation, défini par le modèle rhéologique choisi. Il s'agit en réalité d'une généralisation de la somme des contraintes résultantes des multiples chargements soumis au matériau durant sa vie.

### 2.1 Modèles rhéologiques

En viscoélasticité linéaire, il existe de nombreux modèles rhéologiques adaptés à différents matériaux, les plus communs sont présentés dans cette section. Ils sont tous constitués de deux modèles élémentaires, le ressort élastique linéaire, de raideur  $E$  défini par

$$\sigma(t) = E\epsilon(t)$$

et l'amortisseur visqueux linéaire, de viscosité  $\eta$  défini par

$$\sigma(t) = \eta \frac{d\epsilon}{dt}(t).$$

À partir de ces deux éléments on compose deux modèles simples, de Maxwell et de Voigt, représentés Figure II.2.6.

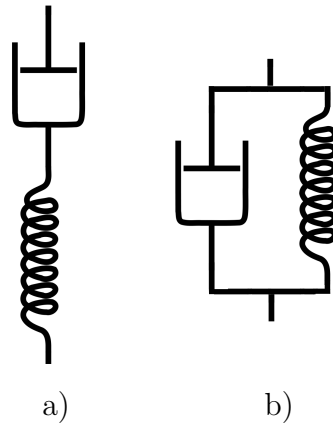


FIGURE II.2.6 – a) Modèle rhéologique de Maxwell, b) modèle rhéologique de Kelvin-Voigt.

On définit tout d'abord le modèle de Maxwell, particulièrement intéressant pour les essais de relaxation, constitué d'un ressort et d'un amortisseur en série. Dans ce modèle, on suppose donc que la contrainte est identique dans les deux éléments rhéologiques et que la déformation totale est la somme des déformations du ressort et de l'amortisseur. On obtient la relaxation, de comportement

$$\dot{\epsilon}(t) = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt}(t) + \frac{1}{\eta} \sigma(t). \quad (\text{II.2.2})$$

Dans le cas d'un essai de relaxation, on montre que pour une contrainte initiale  $\sigma_0$  on a

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{E}{\eta}t}. \quad (\text{II.2.3})$$

La contrainte décroît donc exponentiellement avec le temps caractéristique  $\tau = \frac{\eta}{E}$  appelé temps de relaxation. Ce modèle n'est cependant pas satisfaisant puisqu'on remarque que pour une contrainte constante, le matériau se comporte comme un fluide newtonien,

$$\frac{d\epsilon}{dt}(t) = \frac{1}{\eta} \sigma(t),$$

ce qui n'est pas correct pour un solide. De plus, on sait que les contraintes de relaxation ne peuvent être exprimées par un simple terme exponentielle et que celles-ci ne tendent pas nécessairement vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini.

On définit maintenant le modèle de Kelvin-Voigt, particulièrement intéressant pour les essais de fluage, constitué d'un ressort et d'un amortisseur en parallèle. Dans ce modèle, on suppose que la déformation est constante dans les deux éléments et que la contrainte totale est la somme des contraintes des deux éléments. On obtient la loi

$$\sigma(t) = E\epsilon(t) + \eta \frac{d\epsilon}{dt}(t). \quad (\text{II.2.4})$$

Dans le cas d'un essai de fluage où l'on applique une contrainte constante  $\sigma_0$ , on a

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left( 1 - e^{-\frac{E}{\eta}t} \right).$$

De même, on peut définir le temps de relaxation  $\tau = \frac{\eta}{E}$ . Ce modèle ne permet pas de représenter un essai de relaxation puisqu'à vitesse de déformation nulle on obtient la relation  $\sigma(t) = E\epsilon(t)$ .

Les deux modèles précédents sont insuffisant pour représenter convenablement la relaxation et le fluage du matériau, essais caractéristiques du comportement viscoélastique linéaire. Le modèle le plus simple capturant ces deux phénomènes est appelé le modèle de Zener ou modèle du solide linéaire standard, représenté Figure II.2.7. Il est constitué d'un élément de Maxwell et d'un ressort assemblés en parallèle. La loi de comportement du modèle s'écrit

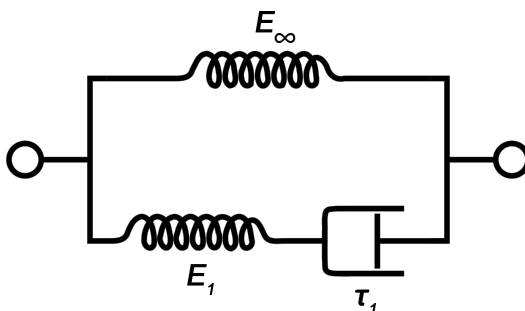


FIGURE II.2.7 – Modèle rhéologique de Zener.

$$\sigma(t) + \tau \frac{d\sigma}{dt} = E_\infty \epsilon(t) + (E_\infty + E_1) \tau \frac{d\epsilon}{dt}(t), \quad (\text{II.2.5})$$

où  $\tau = \frac{\eta}{E_1}$ . Pour des temps courts par rapport au temps de relaxation, la branche de Maxwell se comporte alors comme un simple ressort. En revanche, pour des temps longs, la branche de Maxwell se comporte comme un amortisseur et le comportement du matériau tend vers le comportement du ressort simple associé à  $E_\infty$ . On note que du fait de la prise en compte d'un seul temps de relaxation, ce modèle simple ne peut rendre compte des phénomènes de relaxation de façon précise.

Cela nous amène à la construction d'un modèle plus riche, le modèle de Maxwell généralisé, présenté Figure II.2.8. Il s'agit d'une généralisation du modèle de Zener. Ce modèle couramment utilisé est composé de  $n$  branches de Maxwell. Un ressort simple est ajouté en parallèle dans le cas des thermdurcissables. Pour les thermoplastiques, ce ressort n'est pas pris en compte puisque le polymère s'écoule aux temps longs. Ce modèle permet de caractériser la relaxation par un spectre de temps. En relaxation, pour une déformation constante  $\epsilon$  la  $i$ ème branche de Maxwell contribue à la contrainte selon

$$\sigma(t) = \epsilon E_i e^{-\frac{t}{\tau_i}}. \quad (\text{II.2.6})$$

La loi de comportement du modèle en relaxation est donc obtenue à partir de la somme des expressions de chacune des branches

$$\sigma(t) = \epsilon E_\infty + \epsilon \sum_{i=1}^n E_i e^{-\frac{t}{\tau_i}}, \quad (\text{II.2.7})$$

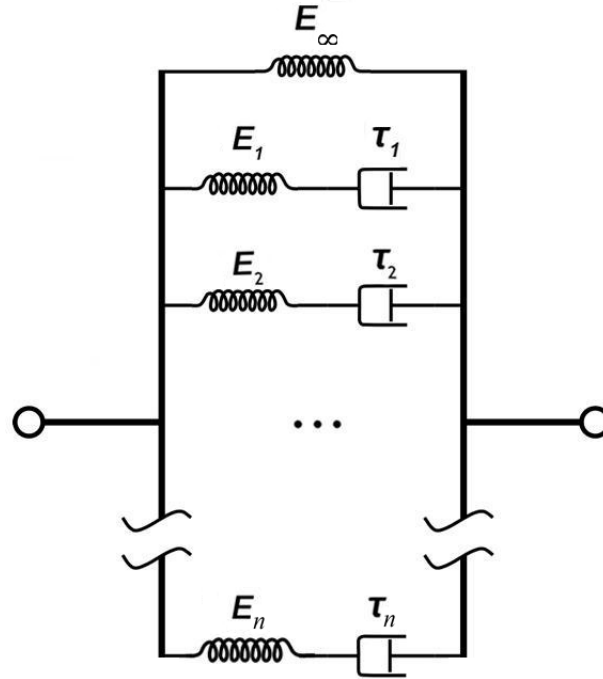


FIGURE II.2.8 – Modèle rhéologique de Maxwell généralisé.

d'où l'expression du module de relaxation en série de Prony

$$E(t) = E_{\infty} + \sum_{i=1}^n E_i e^{-\frac{t}{\tau_i}}, \quad (\text{II.2.8})$$

que l'on peut alors injecter dans la loi de comportement (II.2.1). Il reste maintenant à caractériser les paramètres  $E_{\infty}$ ,  $E_i$  et  $\tau_i$  des polymères.

## 2.2 Caractérisation expérimentale de la viscoélasticité

Dans le but de caractériser les paramètres de la viscoélasticité linéaire, on cherche à déterminer le module de relaxation  $E(t)$ . Dans le domaine temporel, un essai de relaxation (ou de fluage) permet d'obtenir une partie du module. En effet, pour le test de relaxation, on impose une déformation constante  $\epsilon_0$  et on mesure la décroissance de la contrainte  $\sigma(t)$  en fonction du temps. On obtient le module de relaxation

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0}.$$

Il est cependant difficile d'obtenir les temps courts du spectre de relaxation du polymère avec précision. On utilise plutôt des essais dynamiques. Pour cela on soumet le matériau à une déformation sinusoïdale de fréquence angulaire  $\omega$ , d'amplitude  $\epsilon_0$ ,

$$\epsilon = \epsilon_0 \sin(\omega t), \quad (\text{II.2.9})$$

et on mesure la contrainte résultante. A l'équilibre, la contrainte va également varier de façon sinusoïdale, à la même pulsation, mais sera en retard par rapport à la déformation. En appliquant

$$\sigma(t) = \int_0^{\infty} E(s) \omega \epsilon_0 \cos(\omega(t-s)) ds \quad (\text{II.2.10})$$

qui peut s'écrire aussi sous la forme

$$\sigma(t) = \epsilon_0 E' \sin(\omega t) + \epsilon_0 E'' \cos(\omega t) \quad (\text{II.2.11})$$

avec

$$\begin{aligned} E' &= \omega \int_0^{\infty} E(s) \sin(\omega s) ds \\ E'' &= \omega \int_0^{\infty} E(s) \cos(\omega s) ds. \end{aligned} \quad (\text{II.2.12})$$

où  $E'$  est le module de stockage, en phase avec la déformation, et  $E''$  le module de perte, déphasé de  $\frac{\pi}{2}$  par rapport à la déformation.

Pour exprimer ce problème en fréquentiel, on utilise naturellement la notation complexe. Dans le cas du modèle de maxwell généralisé, le module dynamique s'écrit sous la forme  $E^*(\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega)$  avec

$$\begin{aligned} E'(\omega) &= E_{\infty} + \sum_{i=1}^n \frac{E_i \omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \\ E''(\omega) &= \sum_{i=1}^n \frac{E_i \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}. \end{aligned} \quad (\text{II.2.13})$$

En faisant tendre le nombre de branches de Maxwell vers l'infini, on peut réécrire ces sommes sous forme intégrale et retrouver les expressions continues.

Expérimentalement, la contrainte enregistrée peut s'écrire sous la forme

$$\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta), \quad (\text{II.2.14})$$

où  $\delta$  représente le déphasage, et

$$\begin{aligned} E' &= \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \cos(\delta) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \operatorname{Re}(e^{i\delta}) \\ E'' &= \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \sin(\delta) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \operatorname{Im}(e^{i\delta}). \end{aligned} \quad (\text{II.2.15})$$

La grandeur  $\tan(\delta)$ , appelée facteur de perte, représente le rapport entre l'énergie dissipée et l'énergie stockée. Il s'exprime

$$\tan(\delta) = \frac{E''}{E'} = \frac{1}{2\pi} \frac{E_{\text{dissipée}}}{E_{\text{stockée}}}. \quad (\text{II.2.16})$$

On répète cet essai pour la plus large gamme de fréquence angulaire possible, typiquement entre 0,01 et 100 Hz. Un exemple de réponse au cisaillement, obtenue par torsion de barreau fin parallélépipédique sur un réseau acrylate amorphe, est présenté Figure (II.2.9).

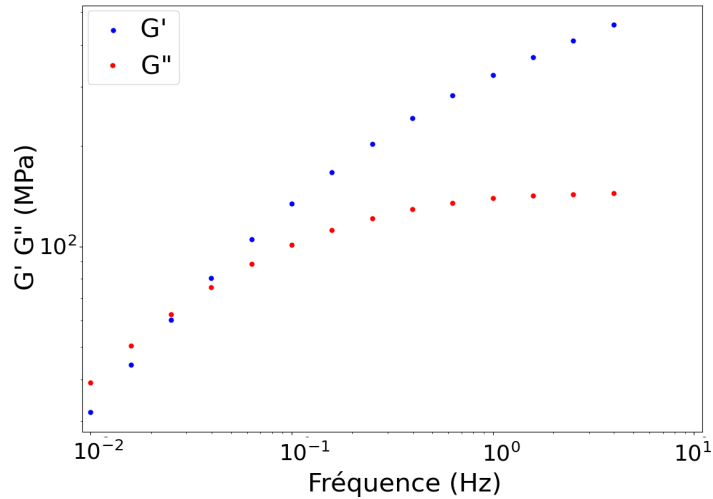


FIGURE II.2.9 – Module dynamique en fonction de la fréquence angulaire.

Afin d'obtenir le spectre complet, on a recouru à une propriété fondamentale des polymères, l'équivalence temps-température. Cette propriété s'exprime par le fait que la variable temps peut être transformée par une simple homothétie lorsque la température varie. Le temps s'étend aux basses températures et se contracte aux hautes températures. Il suffit donc de réaliser les essais dynamiques à différentes températures pour ensuite construire, par simple translation, la courbe maîtresse du polymère caractérisant sa viscoélasticité complète. Figure II.2.10 illustre ce procédé de caractérisation pour le même polymère réel. Les essais dynamiques ont été réalisés en cisaillement avec un rhéomètre Anton Paar et la courbe maîtresse est construite pour une température de référence de 24°C. Ensuite, dans le cas du modèle

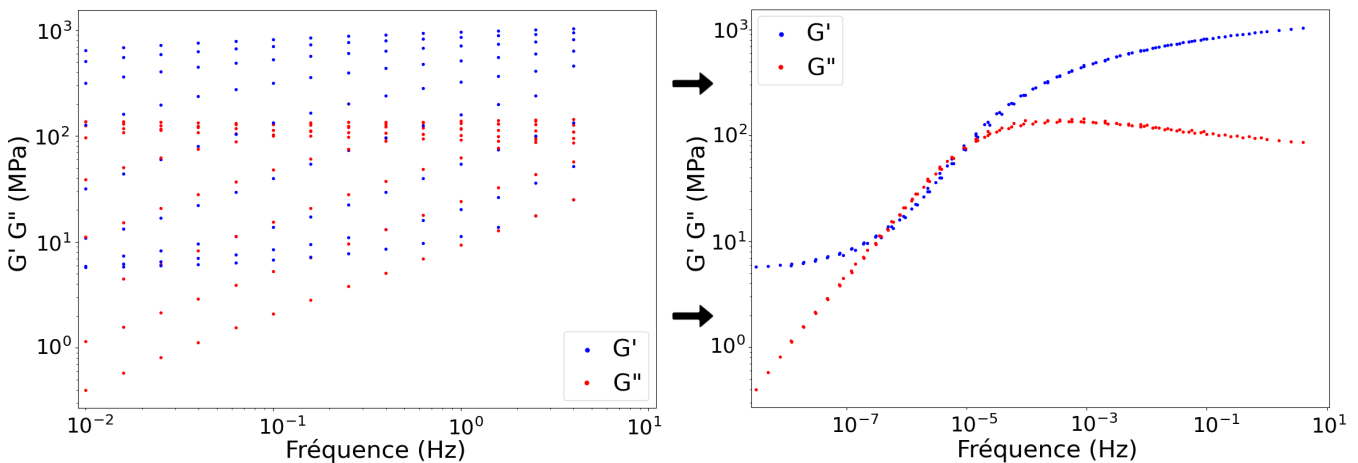


FIGURE II.2.10 – Construction de la courbe maîtresse du comportement d'un réseau acrylate amorphe.

de Maxwell généralisé à  $n$  branches viscoélastiques, on détermine numériquement [122] le meilleur spectre de temps  $(\tau_i)_{i \in [1, n]}$  permettant d'approcher les courbes expérimentales.

On note que la description 1D de la viscoélasticité linéaire s'étend sans problème à la description tensorielle 3D, on peut alors définir le tenseur de relaxation  $R(t)$  et le tenseur



de retard  $J(t)$ . Pour un matériau isotrope, la viscoélasticité linéaire 3D est simplement la combinaison du modèle 1D appliqué indépendamment à la partie sphérique (compression hydrostatique) et déviatorique (cisaillement) du problème.

### 2.3 Comportement 3D

On souhaite maintenant connaître  $K(t)$  ou  $\nu(t)$  pour connaître le comportement viscoélastique 3D de nos matériaux. Cependant il est difficile de mesurer  $K(t)$  et  $\nu(t)$  et la mesure de  $G^*$  et  $E^*$  n'est pas suffisamment précise pour retrouver  $K^*$ . En revanche, en choisissant  $K^*$  constant et élastique, et à l'aide des mesures de  $E^*$ , on remarque que l'on peut retrouver les mesures de  $G^*$ . Habituellement, le module de compressibilité est donc considéré élastique constant, en effet, alors que le module de Young varie d'environ 3 ou 4 ordres de grandeur, le module de compressibilité varie seulement d'un facteur 2 ou 3 [29], comme illustré Figure II.2.11.

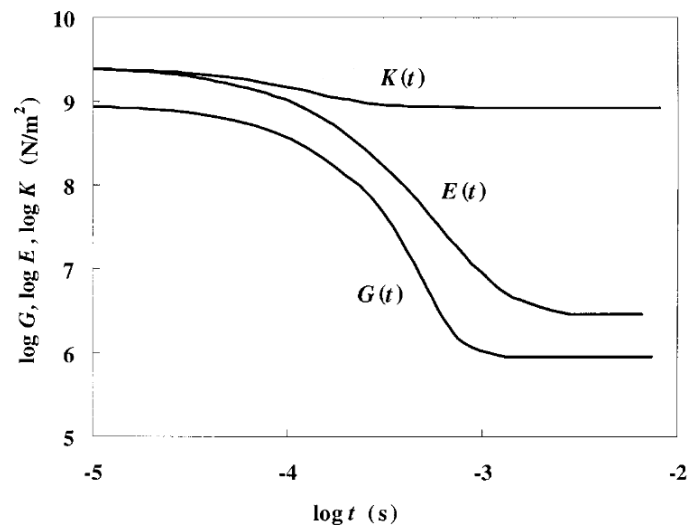


FIGURE II.2.11 – Évolution du module de compressibilité  $K(t)$ , du module de Young  $E(t)$  et du module de cisaillement  $G(t)$  pour un polymère classique.

En élasticité linéaire, le coefficient de Poisson d'un matériau homogène isotrope est une constante déterminée par le rapport entre la déformation latérale et la déformation longitudinale lors d'un essai de traction uniaxiale. En revanche, pour un matériau viscoélastique, le coefficient de Poisson est dépendant du temps (ou de la fréquence). Plus le matériau exhibe des propriétés viscoélastiques, plus la prise en compte de cette dépendance est importante. Ce n'est donc pas un effet à négliger dans l'étude de structures en polymère. L'un des exemples les plus communs illustrant l'impact de ce phénomène est l'étude des lignes de soudure entre plusieurs polymères lors d'une injection multimatériaux. En particulier, la zone d'adhésion entre deux polymères de modules considérablement différents est de pauvre qualité. Les différences de déformations latérales entre les deux matériaux provoquent l'apparition de fissures. Le coefficient de Poisson des polymères mis en jeu est donc un paramètre primordial dans la compréhension de ces phénomènes de fissuration.

Dans la littérature, de nombreuses définitions du coefficient de Poisson existent en viscoélasticité, [90, 130]. La détermination théorique d'un coefficient de Poisson aboutit généralement à des données éloignées des résultats expérimentaux. Cependant, en réalisant une étude expérimentale rigoureuse, effectuée sur le même spécimen et dans le même environnement, on peut déduire le coefficient de Poisson des modules de Young ou de cisaillement, grandeurs dépendant du temps. En prenant  $K$  constant, on peut rendre compte de la dépendance en temps du coefficient de Poisson. On obtient

$$\nu^* = \frac{3K - E^*}{6K}. \quad (\text{II.2.17})$$

De manière analogue au module de Young, on associe au modèle rhéologique un spectre de coefficients de Poisson approchant  $\nu^*$ . On obtient, dans le cas du modèle de Maxwell généralisé, le modèle enrichi représenté Figure II.2.12. On retrouve bien les valeurs de  $\nu < 0.5$  à l'état vitreux et proche de 0.5 à l'état caoutchoutique.

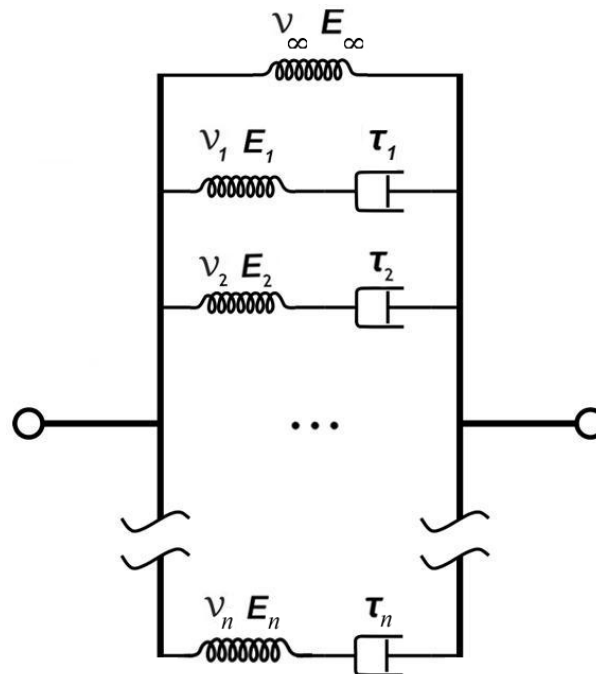


FIGURE II.2.12 – Modèle de Maxwell généralisé avec prise en compte de la dépendance en fréquence du coefficient de Poisson.



# Chapitre III

## Optimisation de formes

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction à l'optimisation de formes . . . . .</b>	<b>62</b>
<b>2</b>	<b>Analyse de sensibilité . . . . .</b>	<b>65</b>
2.1	Méthode Adjointe . . . . .	65
2.2	Méthode de variation de frontière d'Hadamard . . . . .	67
<b>3</b>	<b>Techniques numériques d'optimisation . . . . .</b>	<b>70</b>
3.1	Algorithme de descente de gradient . . . . .	70
3.2	Méthode de déformation de maillage . . . . .	73
3.3	Méthode level-set . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Techniques d'optimisation sous contraintes . . . . .</b>	<b>78</b>
4.1	Méthode de gradient projeté . . . . .	79
4.2	Algorithme d'Uzawa . . . . .	81
4.3	Méthode de pénalisation . . . . .	82
4.4	Méthode du Lagrangien augmenté . . . . .	82

---

La conception d'une pièce mécanique repose initialement sur l'expérience de l'ingénieur et est conçue de façon empirique, par essai-erreur, pour respecter certains critères. Cette méthode, longue et parfois coûteuse, n'assure pas l'optimalité du design final. Il y a plusieurs dizaines d'années, des méthodes numériques d'optimisation basées sur une représentation mathématiques des problèmes ont émergé. Celles-ci permettent de renforcer les processus de développement de produits en proposant des designs optimaux et en guidant la conception dans la bonne direction, en particulier dans les domaines où l'intuition manque. Les problèmes d'optimisation les plus courants mettent en jeu des paramètres tels que les propriétés matériaux par exemple. Les techniques d'optimisation de formes, quant à elles, permettent d'optimiser la géométrie, voire la topologie de la structure sous d'éventuelles contraintes. Dans ce chapitre sur l'optimisation de formes, on introduit les concepts fondamentaux des principales techniques existantes. Ces méthodes ont pour but premier d'optimiser la répartition de matière dans un domaine donné afin de minimiser une certaine fonctionnelle choisie, améliorant ainsi les performances de la structure. Il s'agit de méthodes algorithmiques itératives dont l'efficacité n'est maintenant plus à démontrer.

L'objectif de ce chapitre est tout d'abord de donner une brève vue d'ensemble des différentes techniques d'optimisation de formes. Puis on détaillera les différentes méthodes théoriques et numériques utilisées dans ce manuscrit, dans le but de fournir au lecteur les outils nécessaires à la bonne compréhension de ce travail. On portera ainsi une attention particulière aux algorithmes utilisant une approche adjointe. On détaillera l'étude théorique des problèmes d'optimisation, notamment à travers une analyse de sensibilité, ainsi que les méthodes numériques employées. Enfin, on s'intéressera aux techniques d'optimisation sous contrainte, notion nécessaire à l'étude d'un problème de design optimal réel. Pour une description plus complète, le lecteur est invité à se référer aux ouvrages d'optimisation de formes [1, 7, 26, 76, 126].

## 1 Introduction à l'optimisation de formes

L'optimisation de forme est la recherche du design optimal d'une pièce afin que ses performances soient optimales. Il s'agit de problèmes où les variables d'optimisation sont les paramètres de forme de la structure. Naturellement, ces problématiques sont présentes dans la conception de pièces de très nombreux domaines industriels. Citons par exemple l'industrie aéronautique, spatiale, l'architecture, l'optique, l'électronique... Dans le cas de structures mécaniques on parle également d'optimisation structurelle.

Un problème d'optimisation de structures est généralement défini par les éléments suivants :

- Un **modèle physique** décrivant le comportement mécanique de la structure, souvent sous forme d'équations aux dérivées partielles.
- Un **critère** d'optimisation, ou fonction objectif, issu d'une représentation mathématique de la forme.
- Un **ensemble admissible** de variables d'optimisation (paramètres géométriques, fonction de densité...), prenant en compte des éventuelles contraintes.

Ces données, fortement dépendantes les unes des autres, sont bien sûr choisies en accord avec l'application étudiée. Un problème d'optimisation de forme s'écrira alors

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{V}_{ad}} \mathcal{J}(\Omega) \quad (\text{III.1.1})$$

où  $\mathcal{J}$  est une fonctionnelle appelée fonction objectif (ou fonction coût),  $\Omega$  désigne la forme, ou ses paramètres de définition, et  $\mathcal{V}_{ad}$  l'ensemble des formes admissibles soumises à d'éventuelles contraintes.

Dans ce manuscrit, différents types de problèmes sont considérés. On détaille ici les 3 principales catégories qui, dans ce manuscrit, seront appliquées à l'optimisation du comportement de structures viscoélastiques en vibration.

1. L'optimisation **paramétrique** est l'approche la plus simple mais également la plus restrictive. La représentation de la forme repose ici sur des variables appartenant naturellement à un espace vectoriel (longueurs, profil d'épaisseur...).
2. L'optimisation **géométrique** permet les variations de la position de la frontière. Ici le paramètre d'optimisation est la frontière elle-même. En revanche, on ne change pas la topologie de la structure. En d'autres termes, on ne peut pas changer le nombre de "trous".

3. L'optimisation **topologique** est l'optimisation la plus générale mais également la plus difficile à mettre en œuvre. On cherche cette fois-ci une forme optimale sans restriction sur la topologie, ce qui remédie aux limitations des méthodes précédentes.

En pratique, il est fréquent d'avoir recourt à une utilisation successive de ces différentes méthodes. Par exemple, on peut utiliser l'optimisation topologique afin d'obtenir une première idée de la topologie visée. Puis le résultat est raffiné en utilisant l'optimisation géométrique ou paramétrique. Dans ce travail, on verra un exemple différent, une optimisation couplée réalisant simultanément l'optimisation paramétrique et géométrique d'une structure.

La mise en œuvre numérique des algorithmes d'optimisation topologique peut s'effectuer selon différentes méthodes, notamment à travers des descriptions différentes de la forme. On décrit par la suite les principales techniques existantes.

### Méthodes de densité

La méthode la plus ancienne est l'homogénéisation [27, 73]. Elle repose sur la description de la forme par une fonction densité  $\rho$  à valeur dans  $[0, 1]$  et une fonction tensorielle  $A$  rendant compte de la microstructure locale. On transforme alors le problème d'optimisation en un problème d'optimisation de densité de matière et de propriété effective. Un exemple de résultat est présenté Figure III.1.1. On remarque que la frontière de la forme obtenue n'est pas clairement identifiable puisque les niveaux de gris recouvrent des zones étendues. Cela pose bien sûr problème en pratique pour la fabrication de la pièce. Pour y remédier, il est possible d'utiliser une méthode d'homogénéisation dont les niveaux de gris sont pénalisés. En pratique, on a communément recourt à une autre procédure, la méthode SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization). C'est la technique la plus couramment utilisée dans la littérature mais également dans l'industrie, couplée à des outils de simulation éléments finis tels que ANSYS. Elle consiste à supposer que la microstructure est isotrope et que la loi de comportement est proportionnelle à  $\rho^p$ , avec habituellement  $p = 3$ . Cela a pour effet de pénaliser les valeurs intermédiaires de  $\rho$  afin de forcer la fonction à prendre des valeurs proches de 0 ou 1, représentant respectivement le vide ou la matière pleine. On obtient ainsi des résultats dont la frontière est plus nettement identifiable, voir Figure III.1.1. Un inconvénient de cette méthode est la persistance de certaines zones de densité intermédiaire. L'une des méthodes complémentaires consiste à filtrer la densité afin d'éviter certaines instabilités numériques [30].

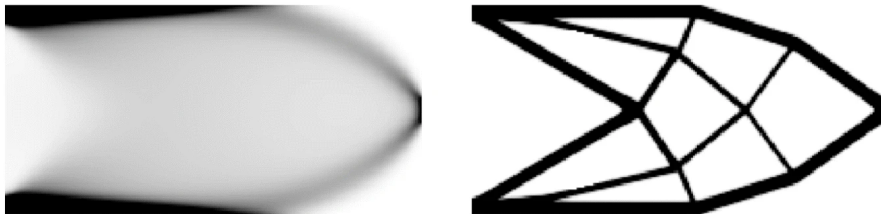


FIGURE III.1.1 – Optimisation d'une poutre par la méthode SIMP pour  $p = 1$  (gauche) et  $p = 3$  (droite). Résultats extraits de [137].

## Méthodes heuristiques

Bien que moins employées, on peut brièvement mentionner les méthodes ESO (Evolutionary Structural Optimization) et BESO (Bi-Evolutionary Structural Optimization). Ce sont des méthodes heuristiques reposant sur le concept simple de suppression des éléments non efficaces. Cette suppression, supposée faire tendre le design vers un optimum, est guidée par les champs mécaniques de la structure. La méthode BESO est une extension de la méthode ESO et permet de simultanément supprimer les éléments non efficaces du design et d'y intégrer des éléments efficaces. L'avantage de ces méthodes est la facilité avec laquelle on peut changer la topologie de la pièce, on crée des trous par simple suppression d'éléments. Elles ne sont cependant pas toujours robustes, comme l'a mis en évidence Zhou et Rozvany [142] à travers des exemples où le design obtenu est non optimal.

## Méthodes de variation de frontière

Les méthodes de variation de frontière sont des méthodes reposant directement sur l'advection de la frontière de la forme. Elles sont basées sur la méthode de variation de frontière d'Hadarnard [72], définissant la notion de différentiation par rapport à la forme. Le gradient de forme obtenu permet ensuite d'alimenter des algorithmes numériques de type descente. On retrouve par exemple la méthode level-set, proposée par Allaire et al. [11] et Wang et al [133]. Cette technique utilise une fonction ligne de niveaux (level-set) pour capturer la forme numériquement et réalise l'advection de celle-ci par la résolution d'une équation de transport. En transportant la fonction level-set, on transporte également la ligne de niveau zéro représentant la frontière de la forme. Dans la version la plus simple de cette méthode, il est impossible de "nucléer des trous", en particulier en 2D. Il est cependant aisé de les refermer. On initialise donc habituellement l'optimisation par une forme contenant déjà des trous. Un exemple d'une telle optimisation est fourni Figure III.1.2. Le principal avantage de la méthode level-set par rapport à la méthode SIMP est la description naturellement précise des frontières de la forme. Par ailleurs, cette méthode permet d'effectuer tous les calculs sur un maillage fixe.

Dans la plupart des techniques mentionnées, la minimisation de la fonction objectif est réalisée par une méthode itérative de descente de gradient. Il s'agit d'une méthode permettant d'approcher le point stationnaire d'une fonction, c'est à dire le point pour lequel son gradient est nul. Il peut s'agir d'un minimum local ou global. On approche ce point en effectuant des petits déplacements incrémentaux dans une direction de descente, issue du gradient de la fonction. C'est une méthode d'ordre 1, c'est à dire qu'elle exploite les dérivées premières de la fonction objectif. D'autres méthodes d'ordre plus élevés existent mais reposent sur les dérivées supérieures, pas toujours disponibles en pratique. On distingue ensuite plusieurs variantes d'algorithme de gradient. On les différencie par exemple par la méthode de détermination du pas, constante pilotant la vitesse de convergence. On cite les algorithmes de gradient à pas fixe et à pas optimal. On distingue également les algorithmes de gradient sous contrainte. Par exemple, l'algorithme de gradient projeté ou l'algorithme d'Uzawa.

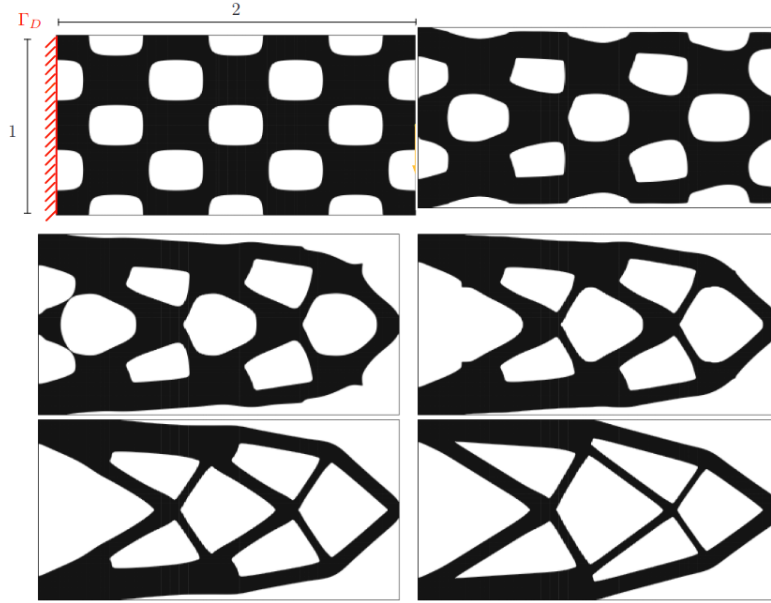


FIGURE III.1.2 – Optimisation d’une poutre  $2 \times 1$  par la méthode level-set, itérations 5, 10, 15, 25, 200. Résultats extraits de [7].

## 2 Analyse de sensibilité

Quelque soient les techniques d’optimisation utilisées dans ce manuscrit, on a recourt à des techniques de type descente de gradient. Il est donc nécessaire d’étudier les sensibilités de la fonction objectif par rapport aux variables du problème pour pouvoir alimenter les algorithmes numériques.

### 2.1 Méthode Adjointe

On s’intéresse dans un premier temps au calcul de dérivées par la méthode adjointe dans le cadre de l’optimisation paramétrique. En particulier, on définit les notions importantes de Lagrangien et d’état adjoint. Cette technique sera également adaptée pour le calcul des dérivées de formes.

Afin d’illustrer la méthode, on s’appuie sur un exemple académique classique, l’optimisation de l’épaisseur d’une membrane élastique. Le problème d’optimisation est le suivant :

$$\inf_{h \in \mathcal{H}_{ad}} \mathcal{J}(h) \quad (\text{III.2.1})$$

où on prend, par exemple,

$$\mathcal{H}_{ad} = \{h \in L^2(\Omega) \mid h_{min} \leq h \leq h_{max}\} \quad (\text{III.2.2})$$

avec  $h_{min}$  et  $h_{max}$  représentant les bornes de  $h$ . Par ailleurs, on a  $\mathcal{H}_{ad} \subset L^\infty(\Omega)$ . Dans la suite, le produit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  représente le produit scalaire de  $L^2$ . On cherche à optimiser l’épaisseur en minimisant la fonction objectif

$$\mathcal{J}(h) = \int_{\Omega} j(u(h)) dx, \quad (\text{III.2.3})$$



dépendant du déplacement  $u$ . Ce déplacement dépend de l'épaisseur à travers le problème aux limites

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(h\nabla u(h)) = f & \text{dans } \Omega \\ u(h) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{III.2.4})$$

où  $f \in L^2(\Omega)$  représente la force verticale et  $u(h) \in H_0^1(\Omega)$ . Une première idée est d'exprimer la dérivée directionnelle de  $\mathcal{J}$  par rapport à  $h$  dans la direction  $k \in L^2(\Omega)$ . On utilise la formule de dérivée composée et on calcul donc la dérivée directionnelle de l'application  $h \mapsto u(h)$ , notée  $\langle u'(h), k \rangle = v$ . On en déduit une expression de  $\langle J'(h), k \rangle$  qui n'est cependant pas explicite puisqu'elle dépend de  $v$ , une fonction linéaire de  $k$ . Cette méthode simple est donc inutilisable en pratique si on cherche à explorer une infinité (ou un grand nombre) de directions.

On utilise alors le Lagrangien, un outil issu du contrôle optimal, très important en optimisation. Pour cet exemple il est défini comme suit :

**Définition III.2.1.** Soit  $\mathcal{H}$  un espace vectoriel normé. On considère le problème

$$\inf_{h \in \mathcal{H}, v \in H_0^1(\Omega), F(h,v)=0} \mathcal{J}(h, v)$$

et on définit le Lagrangien par

$$\mathcal{L}(h, v, q) = \mathcal{J}(h, v) + \langle F(h, v), q \rangle \quad \forall (v, q) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega), \quad (\text{III.2.5})$$

où  $q$  est appelé multiplicateur de Lagrange pour la contrainte  $F(h, v) = 0$  avec  $F$  une application dérivable de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $H^{-1}(\Omega)$ , son espace dual.

*Remarque III.2.1* Le problème de minimisation est donc équivalent à

$$\inf_{h \in \mathcal{H}, v \in H_0^1(\Omega), F(h,v)=0} \mathcal{J}(h, v) = \inf_{h \in \mathcal{H}, v \in H_0^1(\Omega)} \sup_{q \in H_0^1(\Omega)} \mathcal{L}(h, v, q). \quad (\text{III.2.6})$$

Le Lagrangien permet ainsi de transformer un problème d'optimisation sous contrainte, parfois difficile à résoudre, en un problème sans contrainte. Sous certaines hypothèses, il s'agit d'une recherche de point selle. C'est une technique à partir de laquelle est construit l'algorithme d'Uzawa qui sera détaillé par la suite. •

Dans cet exemple, on introduit un multiplicateur de Lagrange pour l'équation d'état (III.2.4), considérée ici comme une contrainte. On définit alors le Lagrangien du problème comme la somme de la fonction objectif et de l'équation d'état multiplié par un multiplicateur de Lagrange  $q$ . Pour le problème de membrane on a formellement

$$\mathcal{L}(h, v, q) = \int_{\Omega} j(v) dx + \int_{\Omega} q (-\operatorname{div}(h\nabla v) - f) dx. \quad (\text{III.2.7})$$

pour  $(h, v, q) \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  des variables indépendantes. Par intégration par parties on obtient l'expression rigoureuse du Lagrangien

$$\mathcal{L}(h, v, q) = \int_{\Omega} j(v) dx + \int_{\Omega} (h\nabla q \cdot \nabla v - fq) dx.$$

Les conditions d'optimalité sont atteintes au point stationnaire du Lagrangien, c'est à dire lorsque les dérivées directionnelles dans les directions  $k \in L^2(\Omega)$  et  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  sont nulles, i.e.

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}(h, v, q), k \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(h, v, q), \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}(h, v, q), \varphi \right\rangle = 0 \quad \forall (k, \varphi) \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

On remarque que la dérivée par rapport à  $p$  permet, lorsqu'elle s'annule, de retrouver naturellement l'équation d'état (III.2.4). La dérivée par rapport à  $u$  permet d'obtenir la formulation variationnelle du problème adjoint

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(h, v, q), \varphi \right\rangle = \int_{\Omega} j'(v)\varphi \, dx + \int_{\Omega} h \nabla q \cdot \nabla \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (\text{III.2.8})$$

Et enfin, la dérivée par rapport à  $h$  donne l'expression du gradient  $\mathcal{J}'(h)$ . Pour  $p$  solution de l'équation adjointe, on obtient l'expression

$$\langle \mathcal{J}'(h), k \rangle = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h}(h, u, p), k \right\rangle = \int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla p \, dx \quad \forall k \in \mathcal{H}. \quad (\text{III.2.9})$$

Notons que  $h$  ne doit pas nécessairement être optimal pour calculer  $\mathcal{J}'(h)$ , il ne s'agit donc pas toujours d'un point selle.

Pour résumer, le calcul du gradient de la fonction objectif consiste à construire le Lagrangien du problème afin d'obtenir une expression dépendante de  $u$ , solution de l'équation d'état, et de  $p$ , solution de l'état adjoint. C'est une méthode très efficace en pratique, où le calcul de  $\mathcal{J}'(h)$  nécessite la résolution de deux problèmes.

Lorsque l'équation d'état et l'équation adjointe sont égales, à une constante multiplicative près, on parle d'un problème auto-adjoint. C'est un cas particulier permettant d'exprimer  $p$  directement à partir de  $u$ , et ainsi de ne pas avoir à résoudre l'équation adjointe. L'exemple le plus classique est la compliance (ou souplesse)

$$\mathcal{J}(h) = \int_{\Omega} f u \, dx, \quad (\text{III.2.10})$$

où on obtient  $p = -u$ . On en déduit directement  $\langle \mathcal{J}'(h), k \rangle = - \int_{\Omega} k |\nabla u|^2 \, dx$ , d'où l'expression  $\mathcal{J}'(h) = -|\nabla u|^2$ . Le cas auto-adjoint est particulièrement intéressant dans le cadre de ce travail puisque les problèmes d'optimisation de structures en vibration en font partie.

## 2.2 Méthode de variation de frontière d'Hadamard

Le gradient, dans le contexte de l'optimisation géométrique et topologique, est basé sur la notion de gradient de forme. Pour déterminer ce gradient, on se place dans le cadre de l'analyse de Murat et Simon [125], basée sur la méthode de variation de frontière d'Hadamard [72], voir aussi [1, 77].

## Différentiation par rapport à la forme

On part d'un domaine de référence  $\Omega$  régulier, et on considère le domaine perturbé

$$\Omega_\theta = (\text{Id} + \theta)\Omega,$$

représenté Figure III.2.3, où  $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ . Ce  $\theta$  peut être vu comme un champ vectoriel (lipschitzien borné) transportant le domaine de référence. Pour  $\theta$  suffisamment petit pour la norme de  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ , l'application  $(\text{Id} + \theta)$  est une bijection de  $\mathbb{R}^d$ . On va maintenant

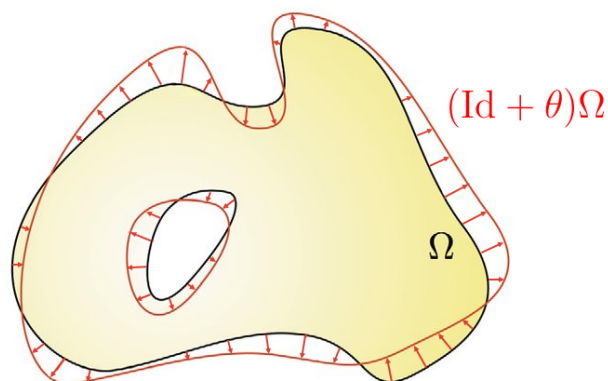


FIGURE III.2.3 – Perturbation du domaine de référence par la méthode de variation de frontière d'Hadamard.

définir une notion de différentiation par rapport à  $\theta$ . Les formes admissibles sont issues de transformations bicontinues du domaine de référence ( $\theta$  petit) et possèdent donc la même topologie. À partir de ce cadre d'étude, on définit la notion de dérivée de forme. On rappelle au préalable la définition de la dérivée de Fréchet.

**Définition III.2.2.** La dérivée de Fréchet d'une fonction  $f: E \subset X \rightarrow Y$ , pour  $X$  et  $Y$  des espaces vectoriels normés, à un point  $h$  est l'application linéaire continue  $Df(h): X \rightarrow Y$  telle que

$$\lim_{\|\tilde{h}\| \rightarrow 0} \frac{\|f(h + \tilde{h}) - f(h) - Df(h)\tilde{h}\|_Y}{\|\tilde{h}\|_X} = 0.$$

La dérivée partielle de Fréchet par rapport à  $h$  est notée  $D_h$ .

**Définition III.2.3.** La dérivée de forme d'une fonctionnelle  $F(\Omega_\theta)$  en  $\Omega$  est la dérivée de Fréchet de l'application  $\theta \mapsto F((\text{Id} + \theta)\Omega)$  à  $\theta = 0$ , s'exprimant :

$$F((\text{Id} + \theta)\Omega) = F(\Omega) + D_\Omega F(\Omega)\theta + o(\theta) \quad \text{avec} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{|o(\theta)|}{\|\theta\|_{W^{1,\infty}}} = 0 \quad (\text{III.2.11})$$

pour tout  $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ , où  $D_\Omega F(\Omega)$  est une forme linéaire continue sur  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  appelée la dérivée de forme de  $F$ .

On rappelle un résultat classique sur les dérivées de forme, voir [1] pour la preuve.

**Lemme III.2.1.** *Soit  $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ , on considère la fonctionnelle*

$$F(\Omega) = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

*Alors  $F$  est différentiable par rapport à  $\Omega$  et sa dérivée de forme est donnée par*

$$D_{\Omega}F(\Omega)\theta = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\theta(x)f(x)) dx = \int_{\partial\Omega} f(s)\theta(s).n(s) ds. \quad (\text{III.2.12})$$

*où  $n$  est la normale extérieure à la frontière.*

En pratique, on applique le gradient de forme pour transporter la frontière par une méthode de descente de gradient. Lorsque l'algorithme converge, on obtient généralement un minimum local, dépendant de l'initialisation et en particulier de la topologie choisie.

Le Lemme III.2.1 donne la dérivée de forme de fonctions dont l'intégrande ne dépend pas du domaine  $\Omega$ . Cependant, on est souvent amené à étudier des fonctions dépendante du domaine, puisque solutions d'EDP définies sur  $\Omega$ . Dans la littérature, il existe pour cela deux types de dérivées, la dérivée eulérienne et la dérivée lagrangienne. Ces notions ne seront pas développées ici puisqu'en pratique on se satisfait d'une méthode formelle, moins fastidieuse, la technique de dérivation rapide développée par Céa [36].

### Technique de Céa

La méthode de Céa est couramment utilisée en optimisation de forme, elle suppose que la forme est suffisamment régulière et que les fonctions mise en jeu sont différentiables. Il s'agit d'une utilisation astucieuse du Lagrangien, adaptée aux dérivées de forme.

Dans l'exemple suivant, on considère le cas d'un problème sans condition de Dirichlet, de formulation variationnelle :

Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  tel que

$$\langle F(\Omega, u), \hat{u} \rangle = 0 \quad \forall \hat{u} \in H^1(\Omega) \quad (\text{III.2.13})$$

et on cherche le gradient de forme de la fonction objectif

$$\mathcal{J}(\Omega, u) = \int_{\Omega} j(u) dx.$$

On construit le Lagrangien en tant que somme de la fonction objectif et de la formulation variationnelle :

$$\mathcal{L}(\Omega, v, q) = \mathcal{J}(\Omega, v) + \langle F(\Omega, v), q \rangle$$

où  $(v, q) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ . Notons que ces espaces ne dépendent pas de  $\Omega$ . On trouve l'état adjoint en dérivant tout d'abord par rapport à  $v$  dans la direction  $\varphi \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$ ,

$$D_v \mathcal{L}(\Omega, v, q)(\varphi) = D_v \mathcal{J}(\Omega, v)(\varphi) + D_v F(\Omega, v, q)(\varphi). \quad (\text{III.2.14})$$

En évaluant l'expression du Lagrangien pour  $u(\Omega)$  solution de l'équation d'état, on obtient

$$\mathcal{L}(\Omega, u, q) = \mathcal{J}(\Omega, u) \quad \forall q \in H_0^1(\mathbb{R}^N).$$

Comme  $u(\Omega)$  dépend maintenant de  $\Omega$ , on en déduit la dérivée par rapport à la forme dans la direction  $\theta$ , par dérivation en chaîne,

$$D_\Omega \mathcal{J}(\Omega)(\theta) = D_\Omega \mathcal{L}(\Omega, u, q)(\theta) + D_v \mathcal{L}(\Omega, u, q)(D_\Omega u(\Omega)(\theta)).$$

En choisissant  $p$  solution de l'état adjoint (III.2.14), on a  $D_v \mathcal{L}(\Omega, u, p)(\varphi) = 0$ ,  $\forall \varphi \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$ , d'où

$$D_\Omega \mathcal{J}(\Omega)(\theta) = D_\Omega \mathcal{L}(\Omega, u, p)(\theta). \quad (\text{III.2.15})$$

Cette technique permet ainsi d'obtenir la dérivée de forme de la fonction objectif en calculant l'état adjoint et en dérivant le Lagrangien par rapport à la forme. Bien que simple et efficace, ce calcul n'est que formel dans le sens où, pour pouvoir dériver le Lagrangien par rapport à  $\Omega$ , on suppose que la solution  $u(\Omega)$  de l'EDP est différentiable par rapport à la forme. Dans les problèmes d'optimisation de ce manuscrit, on se contentera d'admettre cette hypothèse.

Notons tout de même le cas particulier des EDP aux conditions aux limites de Dirichlet. En effet, ces conditions essentielles sont inscrites dans le domaine de définition de  $u$  et non pas dans la formulation variationnelle, contrairement aux conditions de Neumann. Dans ce cas, les variables  $(v, q)$  du Lagrangien ne sont plus indépendantes puisqu'elles sont dans des espaces dépendants de la forme. En effet, ces espaces contiennent les conditions aux limites sur le bord de  $\Omega$ . Il existe une manière de traiter ce cas, voir par exemple le chapitre 6 de [1]. Celle-ci ne sera pas détaillée ici puisque ce cas d'étude n'est pas présent dans les travaux de ce manuscrit. Les seules conditions de Dirichlet présentes ne concernent que des bords non optimisés.

L'analyse des sensibilités de la fonction objectif est un élément crucial pour la résolution du problème d'optimisation. En particulier, les dérivées par rapport aux variables du problème sont indispensables pour l'utilisation de méthodes numériques à base de gradient.

### 3 Techniques numériques d'optimisation

Dans cette section on s'intéresse à la résolution des problèmes d'optimisation sans contrainte à l'aide d'algorithmes de descente de gradient. On introduira ensuite les méthodes numériques permettant de représenter la forme et ses variations. Pour des raisons de simplicité, on supposera que les fonctions mises en jeu sont différentiables et, puisque l'optimisation est sans contrainte, que le domaine admissible  $\mathcal{H}_{ad}$  est l'espace de Hilbert tout entier  $\mathcal{H}$ .

#### 3.1 Algorithme de descente de gradient

Les algorithmes d'optimisation numérique, dans le cas de l'optimisation paramétrique de l'épaisseur, visent à construire une suite  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  qui, en partant d'une valeur initiale  $h_0 \in \mathcal{H}$ , converge vers un minimum, solution du problème d'optimisation. Dans la méthode de descente de gradient, cette suite est construite de façon à diminuer la fonction objectif

$\mathcal{J}(h)$  du problème selon la direction de plus grande pente, donnée par le gradient  $\mathcal{J}'(h_k)$ . Elle est de la forme

$$h_{k+1} = h_k - t_k d_k \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (\text{III.3.1})$$

où  $t_k \in \mathbb{R}^+$  représente le pas de descente et  $d_k \in \mathcal{H}$  la direction de descente, tel que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{J}(h_{k+1}) \leq \mathcal{J}(h_k) \text{ et } h_{k+1} \in \mathcal{H}. \quad (\text{III.3.2})$$

Il y a plusieurs manières de procéder à l'implémentation de ce type d'algorithme. En particulier, on doit préciser la direction de descente, le pas et le critère d'arrêt.

### Direction de descente

Dans notre cas, la direction de descente sera définie par les dérivées premières de la fonction objectif, par exemple

$$d_k = \frac{\mathcal{J}'(h_k)}{\|\mathcal{J}'(h_k)\|}, \quad (\text{III.3.3})$$

ce qui en fait un algorithme d'ordre 1. Pour obtenir la direction de descente, on doit d'abord déduire le gradient de la fonction objectif  $\mathcal{J}'(\Omega)$  à partir des dérivées établies dans la section précédente. Pour cela on doit choisir une structure de Hilbert  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$  afin de pouvoir appliquer le théorème de représentation de Riesz. Dans la suite, on considère la fonction objectif

$$\mathcal{J}(h) = \int_{\Omega} j(h) dx \quad \text{et} \quad D_h \mathcal{J}(h)(k) = \langle \mathcal{J}'(h), k \rangle$$

pour  $k \in \mathcal{H}$ .

Un premier choix simple consiste à utiliser l'espace  $L^2(\Omega)$ . On obtient dans ce cas

$$D_h \mathcal{J}(h)(k) = \langle \mathcal{J}'(h), k \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} j'(h) k \, dx. \quad (\text{III.3.4})$$

d'où  $\mathcal{J}'(h) = j'(h)$ . Bien que fréquemment utilisée en pratique, cette solution n'est pas satisfaisante car elle n'apporte pas assez de régularité. Plusieurs phénomènes numériques se présentent lors de l'utilisation de l'espace  $L^2$  et motivent la recherche d'un espace plus adéquat. On peut citer par exemple, en optimisation paramétrique, l'obtention de designs dont l'épaisseur oscille lorsque l'on raffine le maillage, voir Figure (III.3.4). Ou encore les instabilités "checkerboard" [53, 124], ou instabilités en damier, observables notamment pour les problèmes de plaque en flexion traités dans ce manuscrit. La Figure III.3.5 illustre ce phénomène dans le cas de l'optimisation paramétrique de l'épaisseur  $h$  d'une plaque élastique en flexion, encadrée à une extrémité. La fonction objectif porte ici sur la fréquence de vibration de la plaque, et son gradient est calculé dans l'espace  $L^2(\Omega)$ . Ces instabilités numériques peuvent parfois disparaître en utilisant des éléments plus riches, ce qui a également pour effet d'augmenter le temps de calcul, en particulier en dimension 3.

Un autre choix consiste à utiliser la structure de  $H^1(\Omega)$ . Le produit scalaire de cet espace régularise le problème et permet, dans le cas du gradient de forme, de réaliser l'extension du gradient sur tout le domaine. On a

$$D_h \mathcal{J}(h)(k) = \langle \mathcal{J}'(h), k \rangle_{H^1} = \int_{\Omega} (\nabla \mathcal{J}'(h) \cdot \nabla k + \mathcal{J}'(h) k) \, dx. \quad (\text{III.3.5})$$

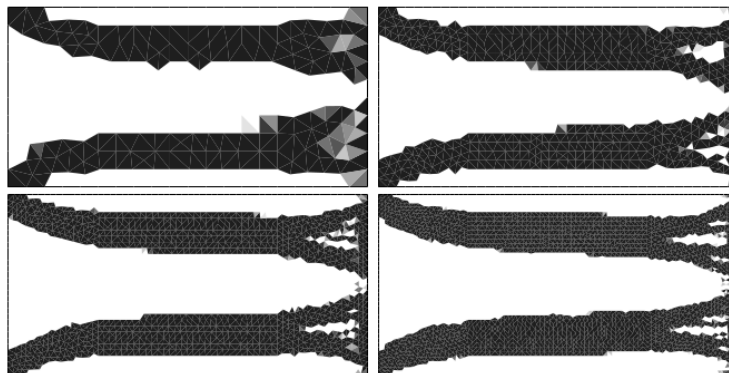


FIGURE III.3.4 – Non convergence de l'épaisseur d'une structure obtenue par optimisation paramétrique lors d'un raffinement de maillage. Résultats extraits de [1].

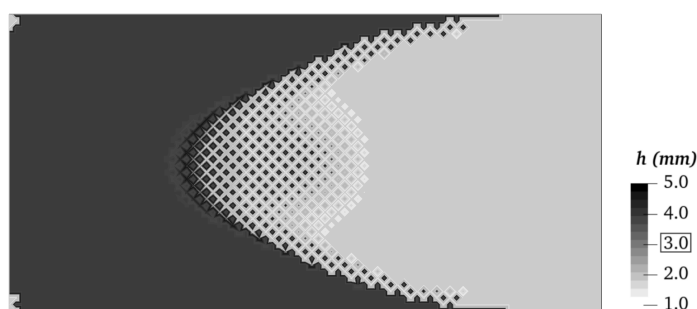


FIGURE III.3.5 – Instabilité “checkerboard” observée lors de l'optimisation paramétrique d'une plaque en flexion, encadrée à gauche, avec utilisation du produit scalaire de  $L^2(\Omega)$ .

On en déduit que  $\mathcal{J}'(h)$  est solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta \mathcal{J}'(h) + \mathcal{J}'(h) = j'(h) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial \mathcal{J}'}{\partial n}(h) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{III.3.6})$$

Ce problème permet d'étendre sur le domaine tout entier le gradient de forme, initialement défini seulement sur le bord. Le produit scalaire de  $H^1(\Omega)$  assure la régularité, en particulier au voisinage du bord. On verra dans la section suivante que cette méthode est très intéressante dans l'implémentation numérique.

### Pas de descente

Le pas est également un élément important des méthodes de gradient puisque le choix de celui-ci peut grandement impacter la vitesse de convergence de l'algorithme. En choisissant un pas trop petit, le nombre d'itérations et donc le coût de calcul sera trop élevé. Si le pas est choisi trop grand, l'algorithme de minimisation peut ne pas converger. On donne ici quelques exemples de méthodes de descente de gradient sans contrainte parmi les plus classiques.

- La méthode de gradient à pas optimal consiste à construire une suite minimisante  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que

$$h_{k+1} = h_k - t_k d_k \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (\text{III.3.7})$$

où le pas  $t_k \in \mathbb{R}^+$  est défini par

$$t_k = \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \mathcal{J}(h_k - t d_k). \quad (\text{III.3.8})$$

Cette méthode assure la convergence pour  $\mathcal{J}$  strictement convexe mais est, en contrepartie, plutôt coûteuse puisqu'on doit résoudre le problème (III.3.8) à chaque itération.

- Une autre possibilité est la méthode de gradient à pas fixe. Cette approche simple consiste à construire une suite  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que

$$h_{k+1} = h_k - t d_k \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (\text{III.3.9})$$

où  $t \in \mathbb{R}^+$  est un pas fixé. Moins coûteuse que les autres techniques, cette démarche est cependant bien moins efficace car elle converge lentement et peut, dans certain cas, ne pas converger.

- Dans ce manuscrit, on utilise la méthode de descente de gradient à pas variable. Il s'agit d'une technique permettant une convergence plus rapide que l'algorithme de gradient à pas fixe, sans avoir à résoudre de problème supplémentaire, comme dans la méthode à pas optimal. À chaque itération, on se contente de comparer  $\mathcal{J}(h_{k+1})$  et  $\mathcal{J}(h_k)$  et de faire varier le pas en conséquence afin de converger plus vite. Si  $\mathcal{J}(h_{k+1}) < \mathcal{J}(h_k)$ , on multiplie le pas par une constante (typiquement comprise en entre 1 et 2), si  $\mathcal{J}(h_{k+1}) > \mathcal{J}(h_k)$ , on rejette le pas (et on le divise typiquement par 2) pour assurer la décroissance.

### Critère d'arrêt

Pour des raisons de temps de calcul, on se contente généralement d'une approximation du minimum du problème d'optimisation. En pratique, on cherche à limiter le nombre d'itérations en choisissant un critère d'arrêt. Parmi les plus courants, on trouve un critère sur le gradient de la fonction objectif,  $\|\nabla \mathcal{J}(h_k)\| \leq \xi$ , avec  $\xi$  fixé. Dans ce manuscrit, on utilise soit un critère sur les variations relatives de la fonction objectif  $\frac{|\mathcal{J}(h_k) - \mathcal{J}(h_{k+1})|}{\mathcal{J}(h_{k+1})} \leq \xi$ , soit un critère basé sur le nombre maximal d'itérations. Ce dernier est simple mais nécessite de l'expérience sur le problème d'optimisation étudié pour être correctement choisi. Dans les deux cas, le critère est combiné à une condition d'arrêt sur le pas. Lorsque celui-ci atteint une valeur trop faible,  $t_k < \epsilon$ , l'algorithme s'arrête.

## 3.2 Méthode de déformation de maillage

Dans le cas de l'optimisation géométrique et topologique, on minimise la fonction coût

$$\mathcal{J}(\Omega) = \int_{\Omega} j(\Omega) dx,$$

de dérivée de forme

$$D_{\Omega} \mathcal{J}(\Omega)(\theta) = \int_{\partial \Omega} b(\Omega) \theta \cdot n \, ds,$$



en appliquant une méthode de gradient pour la variable  $\theta$ . On construit une suite minimisante de formes  $(\Omega^k)_{k \in \mathbb{N}}$  où chaque  $\Omega^k$  est construit à partir de  $\Omega^{k-1}$ , selon un champ de vecteurs  $\theta$ , où  $\Omega^k = (Id + \theta)(\Omega^{k-1})$ . Dans la méthode de déformation de maillage, on représente la forme par un maillage et, à chaque itération, on perturbe la forme en déformant le maillage. C'est une méthode adaptée à l'optimisation géométrique puisqu'il est difficile de changer la topologie d'un maillage en cours d'optimisation. Il s'agit donc de la méthode utilisée pour les problèmes d'optimisation géométrique présents dans ce manuscrit.

Une première précision doit être apportée sur le champ de vecteur  $\theta$  puisqu'il n'est initialement défini que sur le bord de la forme. On pourrait se contenter de construire la forme  $\Omega^k$  en déterminant une nouvelle frontière  $\partial\Omega^k$  à partir de la trace normale au bord  $\theta_{k-1} \cdot n_{k-1}$ . Cela pose problème en pratique puisque seuls les nœuds situés sur la frontière sont déplacés. Les éléments contenant ces nœuds deviennent alors très vite de mauvaise qualité. Il est alors nécessaire de remailler très souvent, voire à chaque itération. Le remaillage (par des outils génériques) est une opération très coûteuse, en particulier en dimension 3. Il existe néanmoins des outils de remaillage local (au voisinage de la frontière) qui sont plus efficaces (comme le logiciel **MMG** [6]) mais cette opération reste toujours un peu plus chère qu'une simple déformation de maillage. En pratique, on étend la définition de  $\theta$  à l'intérieur de  $\Omega$  afin de pouvoir déformer la forme en déplaçant tous les nœuds du maillage. Cela a l'avantage de conserver une meilleure qualité de maillage d'une itération à une autre, et donc de grandement diminuer les opérations de remaillage. On peut maintenant remailler toutes les 10 itérations par exemple. En contrepartie, on doit résoudre le système supplémentaire

$$\begin{cases} -\eta^2 \Delta \mathcal{J}'(\Omega) + \mathcal{J}'(\Omega) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \eta^2 \frac{\partial \mathcal{J}'}{\partial n}(\Omega) = b(\Omega)n & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{III.3.10})$$

construit similairement au système (III.3.6). Notons que le gradient  $\mathcal{J}'$  peut être étendu sous forme scalaire ou vectorielle. Le produit scalaire de  $H^1(\Omega)$  assure la régularité au voisinage du bord et on ajoute un paramètre de régularisation  $\eta$ . Il est typiquement de l'ordre de la taille d'une maille et permet de contrôler la magnitude de la régularisation afin de l'adapter au problème étudié.

Dans ce manuscrit, les champs  $\theta$  et  $u$  sont discrétisés sur deux maillages différents [13]. C'est une méthode courante où le champ de déplacement  $\theta$  est défini sur un maillage grossier alors que le déplacement  $u$  est défini sur un maillage plus fin. Travailler avec un maillage plus grossier pour  $\theta$  permet d'éviter les phénomènes d'oscillation de frontière et réduit également le temps de calcul. C'est donc le maillage grossier que l'on déforme à chaque itération, puis on fait suivre le maillage fin en l'interpolant sur le maillage grossier.

### 3.3 Méthode level-set

La méthode level-set est la méthode d'optimisation topologique employée dans ce travail. Il s'agit d'une approche reposant sur la représentation de la forme par une fonction level-set (ou fonction ligne de niveaux), définie sur un maillage fixe. Plutôt que d'utiliser le gradient de forme pour déformer un maillage, on s'en sert pour transporter la fonction level-set à travers la résolution d'une équation de transport. On reste dans le cadre de la méthode

d'Hadamard mais avec l'avantage de ne pas nécessiter de remaillage et de très bien supporter les changements de topologie, excepté pour la nucléation de trous. La méthode level-set a été introduite par Osher et Sethian [112] pour la capture d'interfaces. Elle est utilisée dans bien des domaines, par exemple en mécanique de la rupture ou en dynamique des fluides. En particulier, cette méthode a été adaptée à l'optimisation de formes [11, 111].

### Représentation par la fonction level-set

Le principe est d'utiliser la ligne de niveau zéro de la level-set pour représenter la frontière  $\partial\Omega$  de la forme (Figure III.3.6). La fonction level-set  $\phi: D \mapsto \mathbb{R}$  vérifie

$$\begin{cases} \phi(x) < 0 & \text{si } x \in \Omega \\ \phi(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \\ \phi(x) > 0 & \text{si } x \in D \setminus \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (\text{III.3.11})$$

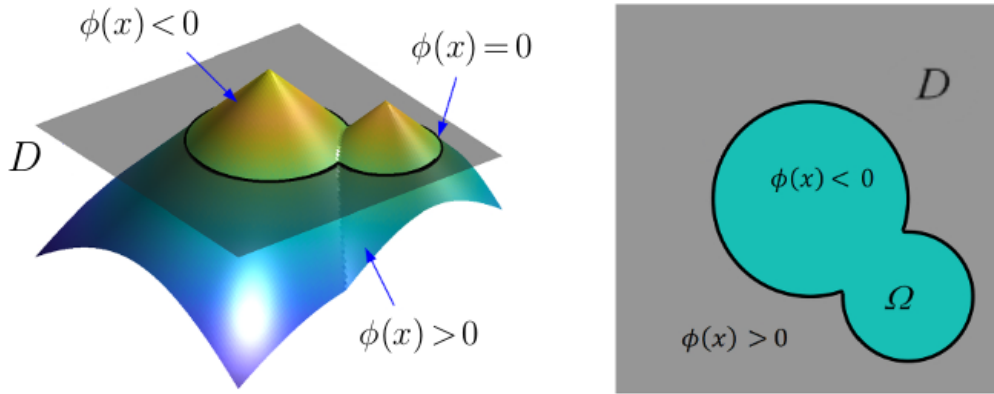


FIGURE III.3.6 – Représentation de la forme  $\Omega$  par la méthode level-set.

où  $D$  représente le domaine d'optimisation contenant la forme  $\Omega$ . Dans ce manuscrit, on se limite au cas d'un matériau bi-phasé, constitué d'un matériau "dur" et d'une phase constituée d'un matériau "mou", représentant le vide. Dans ce cas  $\phi(x) < 0$  représente le matériau et  $\phi(x) > 0$  le vide. Cette méthode s'étend également très bien à l'étude des structures multi-matériaux. On assimile l'optimisation à un problème temporel où chaque itération est représentée par un pseudo temps  $t$ . La forme  $\Omega(t)$  évolue donc avec le temps suivant une vitesse normale scalaire  $v(t, x)$ . On résout pour cela une équation de transport de type Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) + v(t, x)n(t, x) \cdot \nabla \phi = 0$$

où  $n(t, x) = \frac{\nabla \phi(t, x)}{|\nabla \phi(t, x)|}$ . On obtient l'équation

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + v(t, x)|\nabla \phi| = 0,$$

on choisit naturellement  $v = b(\Omega)$ , l'intégrande de la dérivée de forme de la fonction objectif, préalablement étendue à tout le domaine  $D$  par la résolution d'un système du type (III.3.10). Sous **FreeFem++**, l'advection de la level-set est réalisée à l'aide du module **advect** développé par C. Dapogny [33].

Au cours de l'optimisation, l'advection de la level-set est fréquemment accompagnée de changement de topologie, en d'autres termes, certains trous fusionnent ou disparaissent. Ces changements de topologie peuvent engendrer des sauts de la fonction objectif, que l'on souhaite autoriser, dans l'espoir d'obtenir un meilleur design par la suite. En pratique, lorsque l'on teste si une itération permet bien de diminuer la fonction objectif, on ajoute une tolérance, typiquement de 2%, que l'on diminue au cours des itérations. Cela permet de faciliter les changements de topologie en début d'optimisation. Le test pour accepter une itération devient alors, pour  $k$  l'indice des itérations de l'optimisation,  $\mathcal{J}(\Omega_{k+1}) < tol \mathcal{J}(\Omega_k)$  où, par exemple,  $tol = 1.02$  et tend vers 1 lorsque  $k$  augmente.

Bien que la représentation de la forme par une fonction level-set autorise les changements de topologie en supprimant des trous, elle ne permet pas d'en créer. On initialise donc généralement par une fonction level-set contenant déjà des trous. En effet, cette méthode repose sur l'utilisation du gradient de forme, un objet mathématique ne permettant pas de mesurer la sensibilité de la fonction à la création d'un petit trou. Cet inconvénient peut être pallié par l'utilisation conjointe du gradient de forme et du gradient topologique [8]. Ce dernier permet de déterminer, lorsque qu'il est négatif, les positions idéales de nucléation de petits trous, de façon à réduire la fonction objectif. Cette technique moins commune, que l'on ne détaillera pas ici, n'est pas toujours réalisable car le calcul du gradient topologique n'est pas toujours aisé.

### Fonction distance signée

En théorie, on pourrait initialiser la fonction level-set de façon arbitraire, par exemple à l'aide de fonctions sinus, permettant d'obtenir une level-set initiale contenant déjà des trous. En pratique, la level-set ne doit pas présenter de pente trop grande au niveau de la frontière de la forme, ce qui entraînerait une perte de précision sur la localisation de la frontière de la forme [7, 42]. Elle ne doit pas être trop faible non plus, cela entraînerait des instabilités notamment dans le calcul du vecteur normal  $n$ . On met donc en place une procédure de redistanciation de la level-set, à renouveler typiquement toutes les 10 itérations, à l'aide de la fonction distance signée  $d_\Omega$  définie par

$$\forall x \in D, d_\Omega(x) = \begin{cases} -d(x, \partial\Omega) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \\ d(x, \partial\Omega) & \text{si } x \in D \setminus \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (\text{III.3.12})$$

où  $d(x, \partial\Omega) = \min_{p \in \partial\Omega} |x - p|$  représente la distance euclidienne du point  $x$  par rapport au bord  $\partial\Omega$ . Il existe différentes façons de calculer la distance signée. On se contente ici de décrire la méthode préférentielle dans le cas de la méthode level-set. La distance signée par rapport à l'initialisation de la level-set  $\phi_0(x)$  sera calculée par la résolution du problème de

redistanciation suivant,

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) + \text{sign}(\phi_0)(x)(|\nabla \phi(t, x)| - 1) = 0 & \text{pour } t > 0, x \in D \\ \phi(0, x) = \phi_0(x) & \text{pour } x \in D. \end{cases} \quad (\text{III.3.13})$$

La fonction  $d_\Omega$  est un outil très utile permettant d'appliquer des contraintes variées [46], comme par exemple une contrainte d'épaisseur minimale, ou encore pour représenter l'interface entre deux matériaux [62, 131]. En pratique, on a souvent besoin d'imposer une zone de matière non-optimisable  $\Omega_f$  dans le domaine, en particulier pour les problèmes d'optimisation de valeurs propres. On décide habituellement de fixer les zones d'application des forces, ou proches des bords fixes comme les bords encastres. Dans ce manuscrit, on se servira de cette fonction pour déterminer une bande de matière fixe située le long des bords curvilignes d'une semelle de chaussure de course. Cette bande de matière agit comme un revêtement, cela permet d'optimiser l'intérieur de la structure en conservant la forme générale. Pour cela, on projette la forme sur l'espace des formes admissibles en mettant simplement à jour la level-set  $\phi_{k+1}$  à l'aide d'une fonction  $\phi_d$ , construite à partir de la distance signée, dont la ligne de niveau zéro correspond à  $\partial\Omega_f$ . La projection s'écrit

$$P_{ad}(\phi_{k+1}) = \min(\phi_{k+1}, \phi_d). \quad (\text{III.3.14})$$

La fonction distance signée est intégrée dans **FreeFem++** dans le module **distance**.

### Approche “Ersatz”

Dans sa forme la plus simple, la méthode level-set est utilisée sur un domaine  $D$  représenté par un maillage fixe. On réalise alors les calculs sur tout le domaine  $D$  plutôt qu'uniquement sur la forme  $\Omega$ . Pour cela, on donne au vide, zone où  $\phi(x) > 0$ , les propriétés d'un matériau Ersatz. En élasticité isotrope, on peut choisir un matériau de rigidité faible  $E_E$ , de l'ordre de  $E_E \approx 10^{-5}E$  où  $E$  est la raideur du matériau d'intérêt. Dans notre cas, on optimisera des valeurs propres, on devra donc aussi définir une densité  $\rho_E$ , elle aussi, très faible. La densité doit être beaucoup plus faible que la rigidité [9], tel que  $\frac{\rho}{\rho_E} < \frac{E}{E_E}$ , et ceci pour éviter les instabilités numériques sachant que, en élasticité par exemple, la valeur propre du problème, égal à la pulsation propre au carré, est proportionnel à  $\frac{E}{\rho}$ . En viscoélasticité, on prendra des valeurs très faibles pour tous les modules associés au modèle rhéologique. Les valeurs des coefficients de Poisson restent inchangées et les valeurs  $E_E$  et  $\rho_E$  doivent être choisis avec soin pour éviter l'apparition de modes parasites.

L'approche Ersatz présente le net avantage de travailler sur le même maillage au cours des itérations, et donc de ne pas nécessiter de remaillage. Elle présente cependant deux inconvénients. Tout d'abord, la résolution de l'équation d'état et de l'équation adjointe est plus coûteuse puisque effectuée sur le domaine  $D$  tout entier plutôt que sur la forme  $\Omega$ . Il est également nécessaire de définir des densités intermédiaires sur les mailles traversées par le niveau zéro de la level-set. En pratique, cette densité sera proportionnelle à la fraction volumique intérieure à la forme (volume où  $\phi < 0$ ). Bien qu'elles ne soient pas utilisées dans ce manuscrit, d'autres méthodes numériques existent. On pourrait par exemple envisager

d'enrichir les éléments finis en représentant correctement la frontière de la forme, pour cela on coupe les mailles suivant le niveau zéro de la level-set. Cela a pour inconvénient de parfois créer des éléments distordus. Les méthodes les plus courantes sont les approches XFEM [132] et CutFEM [34]. Il est également possible de réaliser un remaillage de façon à créer un maillage "body-fitted", capturant la forme définie par une fonction level-set. Cette méthode [6] est appliquée à l'aide de la librairie **MMG**.

L'optimisation topologique, dans le cas des problèmes aux valeurs propres, est toujours délicate. En fonction de la méthode utilisée, des modes parasites peuvent apparaître dans le matériau Ersatz, empêchant une résolution numérique stable. Contrairement à la méthode SIMP par exemple, la méthode level-set est assez peu propice à ce genre de phénomène, ce qui en fait une méthode de choix pour ce travail.

On résume ci-dessous l'algorithme d'optimisation topologique (version sans contrainte) employé dans ce manuscrit.

```

1 Initialisation de la forme  $\Omega_0$  par la fonction level-set  $\phi_0$ 
2 Redistanciation de  $\phi_0$ 
3 Résolution de l'équation d'état
4 Calcul de  $\mathcal{J}(\Omega_0)$ 
5 Calcul du gradient de forme (cas auto-adjoint) et de la direction de descente  $d_0$ 
6 Pour  $k \geq 1$  jusqu'à convergence :
7   | Advection de  $\phi_k$ 
8   | Si (it%10==0) alors :
9   |   | Redistanciation de  $\phi_{k+1}$ 
10  |   | Fin
11  |   | Calcul de  $\mathcal{J}(\Omega_{k+1})$ 
12  |   | Si  $\mathcal{J}(\Omega_{k+1}) < tol\mathcal{J}(\Omega_k)$  alors :
13  |   |   | "Itération acceptée"
14  |   |   | Calcul de  $\mathcal{J}'(\Omega_{k+1})$  et  $d_{k+1}$ 
15  |   |   |  $t_{k+1} = 1.1t_k$ 
16  |   | Sinon :
17  |   |   | "Itération refusée"
18  |   |   |  $\phi_{k+1} = \phi_k$ 
19  |   |   |  $d_{k+1} = d_k$ 
20  |   |   |  $t_{k+1} = 0.5t_k$ 
21  |   | Fin
22 Fin

```

**Algorithme III.3.1** : Optimisation topologique sans contrainte

## 4 Techniques d'optimisation sous contraintes

Les algorithmes présentés dans la section précédente se concentrent sur des problèmes sans contrainte, où l'espace admissible  $\mathcal{H}_{ad}$  est égal à l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  tout entier. Dans les problèmes d'optimisation rencontrés dans ce travail, et, de manière générale, pour la plupart des systèmes réels, des contraintes doivent être prises en compte et viennent

ainsi enrichir les espaces admissibles. Il peut s'agir, par exemple, de contraintes liées aux performances de la structure ou au procédé de fabrication de la pièce. Dans ce manuscrit, on pourra trouver des contraintes de volume, de fréquence de vibration, de rigidité et de géométrie. On les rencontrera sous la forme de contraintes d'égalité ou d'inégalité.

On s'intéresse à la résolution du problème sous contrainte

$$\min_{h \in \mathcal{H}_{ad}} \mathcal{J}(h) \quad (\text{III.4.1})$$

avec

$$\mathcal{H}_{ad} = \{h \in \mathcal{H} \mid f(h) = 0, g(h) \leq 0\}$$

où  $h$  représente l'épaisseur en tant que variable de design,  $f$  une contrainte d'égalité et  $g$  une contrainte d'inégalité. On introduit dans la suite les principales méthodes utilisées, la méthode du gradient projeté et la méthode du Lagrangien augmenté. Il s'agit d'algorithmes d'ordre 1, c'est à dire utilisant seulement le gradient de la fonction objectif. Afin de comprendre les principes du Lagrangien augmenté, on détaillera au préalable la méthode de pénalisation et l'algorithme d'Uzawa.

## 4.1 Méthode de gradient projeté

L'algorithme de gradient projeté, largement utilisé dans ce manuscrit, est une variante très proche de l'algorithme de descente de gradient sans contrainte. Cette méthode simple permet de projeter les solutions de l'espace sans contrainte  $\mathcal{H}$  sur l'espace sous contrainte  $\mathcal{H}_{ad}$ . Ceci n'est possible que pour  $\mathcal{H}_{ad}$  convexe et si l'opérateur de projection orthogonale  $P_{ad}$  est connu explicitement, ce qui n'est pas souvent le cas.

En pratique, on utilisera cette technique pour les contraintes de boîte (contrainte d'épaisseur bornée), les contraintes géométriques, et, dans certains cas, pour les contraintes de volume constant. Pour chaque problème de ce manuscrit employant une projection, on détaillera, dans les chapitres concernés, l'expression de l'opérateur  $P_{ad}$ .

### Projection en optimisation paramétrique

Dans le cas simple de l'optimisation paramétrique de l'épaisseur  $h \in L^2(\Omega)$  d'une structure, la mise à jour de la solution devient

$$h_{k+1} = P_{ad}(h_k - t\mathcal{J}'(h_k)) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pour les contraintes de boîte, on utilisera les fonctions min et max pour projeter orthogonalement sur l'espace admissible  $\mathcal{H}_{ad}$ . Pour la contrainte  $h \in [h_{min}, h_{max}]$ , l'opérateur est donné par la troncature :

$$(P_{ad}(h))(x) = \max(h_{min}, \min(h_{max}, h(x))).$$

Notons que, si l'épaisseur  $h$  appartient à un espace de solution régularisé  $\mathcal{H}_{ad}^{reg}(\Omega)$  où  $h \in H^1(\Omega)$ , on projette tout de même en minimisant la distance  $L^2$  et non la distance  $H^1$ . Pour des raisons de simplicité, on se contentera donc d'approximer la projection sur  $\mathcal{H}_{ad}^{reg}$  par la projection sur  $\mathcal{H}_{ad}$ .

Pour les contraintes de volume constant, on projette par l'ajout d'une constante  $l$  déterminée par dichotomie sur le volume. À chaque itération de l'optimisation, on calcule  $\mathcal{J}(h)$  pour le profil d'épaisseur  $h(x) + l$  et on itère en ajustant  $l$  par dichotomie jusqu'à ce que le volume soit assez proche du volume initial. De cette manière, la contrainte de volume est respectée à chaque itération de l'optimisation.

### Projection en optimisation géométrique

Dans le cas de l'optimisation géométrique, les contraintes sur la forme sont effectuées en projetant  $\Omega$  sur l'ensemble des formes admissibles  $\mathcal{V}_{ad}$ . Cet espace n'est pas un espace de Hilbert, la notion d'orthogonalité n'y est donc pas définie. Cependant, pour des raisons de simplicité, on omettra cette difficulté dans le cas géométrique. Pour une approche plus rigoureuse, se référer à [7]. Dans ce travail en particulier, on rencontrera des contraintes de formes fixes, où la matière n'est pas soumise à l'optimisation. Il s'agit de zones incluses dans la forme initiale dans lesquelles la frontière  $\partial\Omega$  ne doit jamais se trouver. Pour cela, il y a plusieurs possibilités, on peut, par exemple, pour les nœuds de  $\partial\Omega$  violant la contrainte, réaliser une projection orthogonale sur la frontière de la forme fixée. Pour des raisons numériques, la projection des nœuds sera plutôt effectuée le long de leur vecteur déplacement.

En optimisation géométrique 2D, la contrainte de volume constant sera traitée à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange  $\ell$ , dans l'esprit de l'algorithme d'Uzawa, présenté dans la section suivante. Plutôt que de résoudre le problème sous contrainte

$$\min_{\Omega \in \mathcal{V}_{ad}} \mathcal{J}(\Omega) \quad \text{tel que } V = \int_{\Omega} h \, dA = V_0,$$

où  $h$  désigne l'épaisseur constante de la forme 2D et  $V_0$  le volume initial cible, on se ramène à un problème sans contrainte

$$\min_{\Omega \in \mathcal{V}_{ad}} (\mathcal{J} + \ell V)(\Omega).$$

Contrairement à l'algorithme d'Uzawa, le multiplicateur  $\ell$  sera ici déterminé par dichotomie de façon à respecter la contrainte à chaque itération. Cela implique une déformation du maillage à chaque itération de la dichotomie afin de déterminer le nouveau volume.

### Projection en optimisation topologique

En optimisation topologique, on projettera la level-set  $\phi_k$  à l'aide des fonctions *min* et *max*, à chaque itération  $k$ . On peut, par exemple, utiliser une fonction level-set  $\phi_f$  pour représenter la contrainte de forme fixée  $\Omega_f$ . On projette ensuite  $\phi_{k+1}$  sur son ensemble admissible en calculant simplement

$$P_{ad}(\phi_{k+1}) = \min(\phi_{k+1}, \phi_f).$$

Cette projection est habituellement effectuée juste après l'obtention de  $\phi_{k+1}$  par l'advection de  $\phi_k$ . La fonction  $\phi_f$  peut être construite à partir de simples fonctions algébriques ou bien encore à l'aide de la fonction distance signée.

L'application de la contrainte de volume constant par projection est une méthode plutôt coûteuse, elle ne sera utilisée qu'en optimisation paramétrique et géométrique 2D. En optimisation topologique, le respect de la contrainte à chaque itération peut empêcher certains

changements de topologie et réduire l'efficacité de l'algorithme. On préfère alors utiliser une autre méthode permettant au volume de varier en début d'optimisation, la méthode du Lagrangien augmenté.

## 4.2 Algorithme d'Uzawa

L'algorithme d'Uzawa repose sur la résolution d'un problème de point selle, obtenu à partir du Lagrangien. L'idée est de remplacer le problème de minimisation sous contrainte (III.4.1) par la minimisation du Lagrangien, défini par (III.2.1). On obtient

$$\mathcal{L}(h, \lambda, \mu) = \mathcal{J}(h) + \lambda f(h) + \mu g(h) \quad (\text{III.4.2})$$

où  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  est fixé et représente le multiplicateur de Lagrange associé aux contraintes  $f$  et  $g$ , fonctions de  $\mathcal{V}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On cherche à minimiser le Lagrangien pour diminuer la fonction objectif tout en satisfaisant les contraintes  $f$  et  $g$ . On est donc amené à construire, pour une initialisation  $\lambda_0$  et  $\mu_0$ , les suites  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$  à partir de

$$\begin{cases} \mathcal{L}(h_k, \lambda_k, \mu_k) = \min_{h \in \mathcal{V}} \mathcal{L}(h, \lambda_k, \mu_k) \\ \lambda_{k+1} = \lambda_k + \tau f(h_k) \\ \mu_{k+1} = P_{\mathcal{R}_+}(\mu_k + \tau g(h_k)) \end{cases} \quad (\text{III.4.3})$$

où  $\tau$  est le pas de temps, à choisir avec précaution, et  $P_{\mathcal{R}_+}$  est la projection permettant d'obtenir  $\mu_{k+1} = 0$  quand la contrainte n'est pas active. Elle est simplement définie par

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{R}_+} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \max(0, x). \end{aligned}$$

Si  $g(h) < 0$ , on dit que la contrainte est inactive. Dans ce cas on a  $\mu = 0$  et on retombe sur la simple minimisation de  $\mathcal{J}(h) + \lambda f(h)$ . En revanche, si  $g(h) = 0$ , la contrainte est active (ou saturée) et  $\mu \geq 0$ . Pour des contraintes d'égalité, la contrainte est toujours active, on n'utilise donc pas de projection.

L'idée de l'algorithme est de simultanément minimiser  $h$  à  $\lambda$  et  $\mu$  fixé et maximiser  $\lambda$  et  $\mu$  à  $h$  fixé. Pour cela on utilise deux algorithmes de gradient. On optimise le multiplicateur de Lagrange par une méthode de gradient projeté en construisant des suites  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$  où, à chaque itération, on calcule la solution  $h_k$ , à  $\lambda_k$  et  $\mu_k$  fixé, en minimisant le Lagrangien par une méthode de gradient.

Cet algorithme peut être assez coûteux, en pratique on utilise plutôt une variante classique, l'algorithme d'Arrow-Hurwicz. Au lieu de mettre à jour les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_k$  et  $\mu_k$  à chaque fois que l'on converge vers un  $h_k$ , on le met à jour à chaque itération de l'algorithme permettant de trouver  $h_k$ . En d'autre terme, il n'y a qu'un seul pas de gradient pour la minimisation en  $h$ . On présente, algorithme III.4.1, un exemple typique d'implémentation d'une telle méthode. La minimisation en  $h$  est effectuée par descente de gradient à pas variable  $t_k$ . On effectue la minimisation en  $\lambda$  et  $\mu$  de la même façon, pour des pas  $\tau_{\lambda,k}$  et  $\tau_{\mu,k}$ . Il est important de préciser que ces types d'algorithmes ne permettent de vérifier la contrainte qu'à convergence. De plus, le respect de la contrainte, même à convergence, n'est pas toujours garanti.



```

1 Initialisation des multiplicateurs  $\lambda_0, \mu_0$ , et des pas  $t_0, \tau_{\lambda,0}, \tau_{\mu,0}$ 
2 Initialisation de l'épaisseur  $h_0$ 
3 Pour  $k \geq 1$  jusqu'à convergence :
4   Calcul de  $h_{k+1} = h_k - t_k \mathcal{L}'(h_k, \lambda_k, \mu_k)$ 
5    $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \tau_{\lambda,k} f(h_k)$ 
6    $\mu_{k+1} = P_{\mathcal{R}_+}(\mu_k + \tau_{\mu,k} g(h_k))$ 
7   Mise à jour des pas  $t_{k+1}, \tau_{\lambda,k+1}$  et  $\tau_{\mu,k+1}$ 
8 Fin

```

**Algorithme III.4.1** : Algorithme d'Arrow-Hurwicz

### 4.3 Méthode de pénalisation

La méthode de pénalisation est une méthode très simple à mettre en œuvre, souvent utilisée comme méthode rapide pour imposer une contrainte. On cherche à remplacer le problème sous contrainte par un problème sans contrainte, plus simple à résoudre, où on a pénalisé les contraintes par des paramètres  $\epsilon_f$  et  $\epsilon_g$  faibles. Le problème d'optimisation (III.4.1) devient le problème pénalisé

$$\min_{h \in \mathcal{V}} \left( \mathcal{J}(h) + \frac{1}{\epsilon_f} f(h)^2 + \frac{1}{\epsilon_g} P_{\mathcal{R}_+}(g(h)^2) \right). \quad (\text{III.4.4})$$

Généralement, on diminue la valeur des paramètres de pénalisation afin de s'assurer de la convergence. Cette méthode rapide présente cependant des problèmes de conditionnement, en particulier pour  $\epsilon_f$  et  $\epsilon_g$  petits. Le choix des paramètres de pénalisation est donc très important et se fait généralement par un simple procédé d'essai-erreur.

### 4.4 Méthode du Lagrangien augmenté

On peut maintenant introduire la méthode du Lagrangien augmenté, elle combine les avantages de l'algorithme d'Uzawa et de la méthode de pénalisation.

**Définition III.4.1.** Pour  $h \in \mathcal{H}$ , on définit le Lagrangien augmenté correspondant au problème (III.4.1) par

$$\mathcal{L}_c(h, \lambda, \mu) = \mathcal{J}(h) + \left( \lambda f(h) + \frac{c}{2} \|f(h)\|^2 \right) + \frac{1}{2c} \left( (P_{\mathcal{R}_+}(\mu + c g(h)))^2 - \mu^2 \right) \quad (\text{III.4.5})$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\mu \in \mathbb{R}$  sont des multiplicateurs de Lagrange et  $c \in \mathbb{R}_+$  est un paramètre de pénalisation fixé.

L'idée de la méthode est de procéder comme l'algorithme d'Uzawa, en calculant un point selle de  $\mathcal{L}_c(h, \lambda, \mu)$ , mais cette fois, on met à jour les multiplicateurs de Lagrange avec les formules

$$\begin{cases} \lambda_{k+1} = \lambda_k + c f(h_k) \\ \mu_{k+1} = P_{\mathcal{R}_+}(\mu_k + c g(h_k)). \end{cases} \quad (\text{III.4.6})$$

Dans le cas convexe, le Lagrangien augmenté a les mêmes points selles que le Lagrangien ordinaire, voir [44]. Dans les cas non convexes, sous certaines hypothèses, utiliser le Lagrangien augmenté avec  $c$  assez grand permet de garantir l'existence d'un point selle local. Remarquons que  $c$  joue le rôle du pas dans la construction des suites maximisantes  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . On remarque également que le terme du Lagrangien augmenté associé à la contrainte d'inégalité n'est pas nul si la contrainte n'est pas active. En effet, il vaut

$$\begin{cases} -\frac{\mu^2}{2c} & \text{si } g(h) \leq -\frac{\mu}{c} \\ \mu g(h) + \frac{c}{2}g(h)^2 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{III.4.7})$$

On vérifie cependant que le gradient de ce terme est bien nul lorsque la contrainte n'est pas active.

Cet algorithme a l'avantage de converger plus vite que celui d'Uzawa et est bien plus robuste que la méthode de pénalisation. Il est cependant nécessaire de prendre le temps de choisir  $\lambda_0$ ,  $\mu_0$  et  $c$  de façon judicieuse pour que l'algorithme converge. On présente ci-dessous une implémentation typique de la méthode du Lagrangien augmenté.

```

1 Initialisation des multiplicateurs  $\lambda_0$ ,  $\mu_0$ , du paramètre de pénalisation  $c$  et du pas  $t_0$ 
2 Initialisation de l'épaisseur  $h_0$ 
3 Pour  $k \geq 1$  jusqu'à convergence :
4   Calcul de  $h_{k+1} = h_k - t_k \mathcal{L}'_c(h_k, \lambda_k, \mu_k)$ 
5   Si  $\mathcal{L}_c(h_{k+1}, \lambda_k, \mu_k) < tol \mathcal{L}_c(h_k, \lambda_k, \mu_k)$  alors :
6     "Itération acceptée"
7      $t_{k+1} = 1.1t_k$ 
8      $\lambda_{k+1} = \lambda_k + cf(h_k)$ 
9      $\mu_{k+1} = P_{\mathcal{R}_+}(\mu_k + cg(h_k))$ 
10    Si  $(it \% 5 == 0)$  alors :
11      |  $c = 2c$ 
12    Fin
13    Calcul de  $\mathcal{L}_c(h_{k+1}, \lambda_{k+1}, \mu_{k+1})$  et  $\mathcal{L}'_c(h_{k+1}, \lambda_{k+1}, \mu_{k+1})$ 
14  Sinon :
15    "Itération refusée"
16     $t_{k+1} = 0.5t_k$ 
17  Fin
18 Fin

```

#### Algorithme III.4.2 : Algorithme du Lagrangien augmenté

Tout comme l'algorithme d'Uzawa, la contrainte n'est respectée qu'à convergence. Cette propriété est intéressante en optimisation topologique. En effet, autoriser de grandes variations de la fonction objectif en début d'optimisation permet de faciliter les changements de topologie, contrairement à une méthode par projection.

Dans ce manuscrit, on appliquera fréquemment un algorithme de descente de gradient projeté avec Lagrangien augmenté pour les problèmes présentant plusieurs contraintes. Il s'agit simplement de l'utilisation simultanée de la technique du gradient projeté, pour les contraintes "simples" pour lesquelles l'opérateur de projection est connu, et du Lagrangien augmenté.



# Chapitre IV

## Optimisation de poutres viscoélastiques en vibration

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>85</b>
<b>2</b>	<b>Vibration de poutres d'Euler-Bernoulli en viscoélasticité</b> . . .	<b>86</b>
<b>3</b>	<b>Choix de la fonction objectif</b> . . . . .	<b>89</b>
<b>4</b>	<b>Optimisation paramétrique de poutres viscoélastiques</b> . . . . .	<b>90</b>
4.1	Enoncé du problème d'optimisation . . . . .	90
4.2	Analyse des sensibilités . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Méthodes numériques</b> . . . . .	<b>92</b>
<b>6</b>	<b>Matériaux d'étude</b> . . . . .	<b>94</b>
<b>7</b>	<b>Résultats numériques</b> . . . . .	<b>96</b>
7.1	Optimisation d'une poutre constituée d'un polymère réaliste . . . .	96
7.2	Étude des paramètres matériaux . . . . .	99
7.3	Étude des paramètres géométriques . . . . .	101
7.4	Étude de différentes fonctions coûts . . . . .	102
<b>8</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>106</b>

---

## 1 Introduction

L'optimisation de formes de structures viscoélastiques complexes en vibration est un sujet peu abordé dans la littérature dans le cas des méthodes explicites à base de gradient. Afin de parvenir à optimiser une semelle de chaussure de course, plusieurs études préliminaires menées sur des structures plus simples sont préalablement effectuées. Celles-ci permettent de résoudre progressivement les difficultés liées à l'intégration des modèles viscoélastiques dans les problèmes d'optimisation. Ces études permettent également une meilleure interprétation de l'analyse des sensibilités du problème vis-à-vis des paramètres mis en jeu et viennent donc considérablement enrichir ce travail. Dans l'optique de proposer une étude complète

de ce type d'optimisation, on s'intéresse tout d'abord au cas le plus simple, l'optimisation paramétrique d'une poutre viscoélastique en vibration.

L'étude des poutres d'Euler-Bernoulli est un sujet présent depuis longtemps dans la littérature [57, 127]. Bien que d'autres méthodes plus avancées aient vu le jour, cette théorie de poutres reste largement appliquée dans de nombreux domaines de l'ingénierie, tout particulièrement en génie civil depuis la construction de la tour Eiffel à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, notamment pour sa simplicité et sa pertinence dans le cas des poutres élancées. Dans ce chapitre introductif, on cherche à combiner le modèle d'Euler-Bernoulli et les modèles rhéologiques des polymères afin de les appliquer à l'optimisation des vibrations libres d'une poutre viscoélastique à épaisseur variable. Dans ce cas 1D, on se contentera de chercher la répartition optimale de matière à travers une optimisation paramétrique portée sur l'épaisseur de la poutre.

Ce chapitre présente tout d'abord, en section 2, le problème vibratoire de poutres d'Euler-Bernoulli en viscoélasticité. En section 3, on s'attardera sur les différentes fonctions objectif relatives à l'amortissement de structures viscoélastiques. Puis, en section 4, on énoncera le problème d'optimisation et on effectuera une étude des sensibilités de la fonction objectif choisie. On décrit ensuite en section 5 et 6 les méthodes numériques employées pour résoudre le problème d'optimisation ainsi que les matériaux étudiés dans ce manuscrit avant de présenter les résultats numériques en section 7. Dans le cas de la poutre, on proposera une analyse approfondie des résultats numériques, en particulier sur l'impact des paramètres du problème sur l'optimisation.

## 2 Vibration de poutres d'Euler-Bernoulli en viscoélasticité

Le problème d'intérêt porte sur la vibration libre d'une poutre viscoélastique, représentée Figure IV.2.1, satisfaisant les hypothèses du modèle d'Euler-Bernoulli. Par conséquent, cette étude est limitée aux poutres élancées dont les effets du cisaillement transverse peuvent être négligés. Dans ce travail, on considère les déformations infinitésimales. On note  $L$  la longueur de la poutre,  $W$  sa largeur et  $h$  son épaisseur. Afin de traiter le cas le plus général,

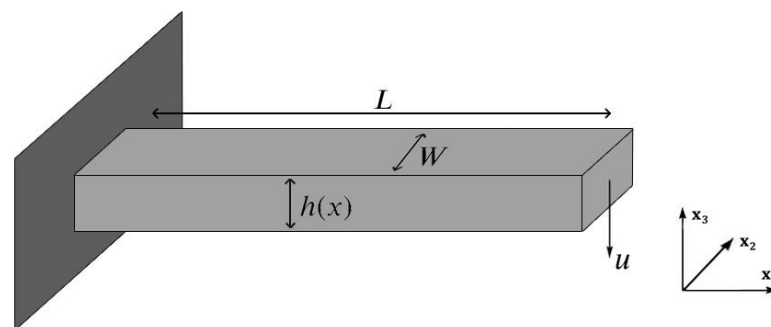


FIGURE IV.2.1 – Représentation d'une poutre d'Euler-Bernoulli encastree à une extrémité.

la viscoélasticité linéaire du matériau constitutif est représentée par un modèle de Maxwell généralisé, dont le schéma type est rappelé Figure IV.2.2. Il est constitué de branches

élémentaires de Maxwell en parallèles ainsi que d'une branche élastique représentant l'élasticité aux temps longs. On rappelle qu'en 3 dimensions, la poutre est représentée par le do-

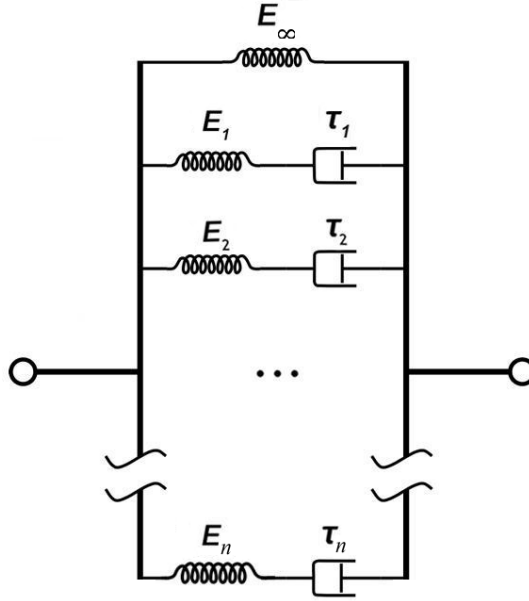


FIGURE IV.2.2 – Schéma du modèle de Maxwell généralisé.

maine

$$\Omega^{3D} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \in (0, L), x_2 \in \left(-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}\right), x_3 \in \left(\frac{-h}{2}, \frac{h}{2}\right) \right\}$$

de frontière  $\partial\Omega^{3D}$ .

On s'intéresse uniquement à la flexion de la poutre en vibration libre, donc à son déplacement vertical  $U(x_1, x_2, x_3, t)$ . Avant de chercher à optimiser les vibrations de la poutre, on doit tout d'abord déterminer la formulation variationnelle du problème. On écrit pour cela le principe des travaux virtuels. Sans force extérieure, on obtient

$$\int_{\Omega^{3D}} \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \hat{u} dV + \int_{\Omega^{3D}} \sigma \cdot \epsilon(\hat{u}) dV = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad (\text{IV.2.1})$$

pour tout déplacement admissible  $\hat{u}(x_1, x_2, x_3)$ . On considère maintenant la poutre comme une structure 1D, ce qui veut dire que la seule variable spatiale dont dépend  $U$  et  $\hat{u}$  est  $x_1$ . La poutre est encastree à l'extrémité  $x_1 = 0$  et libre d'effort à l'autre extrémité  $x_1 = L$ . En 1D, les contraintes et déformations de flexion sont simplement des scalaires et, d'après le modèle de Maxwell généralisé, vérifient

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, t) = E_\infty \epsilon(U)(x_1, x_2, x_3, t) + \sum_{j=1}^n E_j \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-\tau}{\tau_j}} \frac{\partial \epsilon(U)}{\partial \tau}(x_1, x_2, x_3, \tau) d\tau. \quad (\text{IV.2.2})$$

Pour des poutres élancées, la déformation de flexion et la déformation virtuelle sont exprimées par

$$\epsilon(U)(x_1, x_2, x_3, t) = -x_3 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}(x_1, t) \quad \text{et} \quad \epsilon(\hat{u})(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \frac{d^2 \hat{u}}{dx_1^2}(x_1). \quad (\text{IV.2.3})$$

De plus, la solution  $U$  est supposée harmonique et s'écrit

$$U(x_1, t) = u(x_1)e^{i\omega t}, \quad (\text{IV.2.4})$$

où le nombre complexe  $\omega$  représente la pulsation du système. En injectant  $\epsilon(U)$  et  $U$  dans (IV.2.2), on obtient la contrainte de flexion

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, t) = -x_3 e^{i\omega t} \left( E_\infty + \sum_{j=1}^n E_j \frac{i\omega\tau_j}{1+i\omega\tau_j} \right) \frac{d^2 u}{dx_1^2}(x_1).$$

En substituant maintenant  $\sigma$ ,  $\epsilon(\hat{u})$  et  $U$  dans (IV.2.1), le problème devient :

Trouver  $u \in \mathcal{U}_0$ , tel que

$$\int_0^L \frac{h^3}{12\rho} \frac{d^2 u}{dx_1^2} \frac{d^2 \hat{u}}{dx_1^2} dx = \frac{\omega^2}{E_\infty + \sum_{j=1}^n E_j \frac{i\omega\tau_j}{1+i\omega\tau_j}} \int_0^L hu\hat{u} dx \quad \forall \hat{u} \in \mathcal{U}_0, \quad (\text{IV.2.5})$$

avec

$$\mathcal{U}_0 = \left\{ u \in H^2([0, L], \mathbb{C}) \mid u|_{x_1=0} = 0, \frac{du}{dx_1} \Big|_{x_1=0} = 0 \right\}. \quad (\text{IV.2.6})$$

La présence de dérivées secondes dans la formulation variationnelle justifie la recherche de solutions dans l'espace  $H^2$ . À partir de la formulation (IV.2.5), on en déduit la formulation forte correspondante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{12\rho} \frac{d^2}{dx_1^2} (h^3 \frac{d^2 u}{dx_1^2}) = \frac{\omega^2}{E_\infty + \sum_{j=1}^n E_j \frac{i\omega\tau_j}{1+i\omega\tau_j}} hu & \text{sur } (0, L), \\ u = 0 & \text{en } x_1 = 0, \\ \frac{du}{dx_1} = 0 & \text{en } x_1 = 0, \\ \frac{d^2 u}{dx_1^2} = 0 & \text{en } x_1 = L, \\ \frac{d}{dx_1} (h^3 \frac{d^2 u}{dx_1^2}) = 0 & \text{en } x_1 = L. \end{array} \right. \quad (\text{IV.2.7})$$

Ainsi, la paire  $(\omega, u)$  est solution du problème aux valeurs propres non linéaire complexe ci-dessus, où  $\omega \in \mathbb{C}$  et  $u: [0, L] \rightarrow \mathbb{C}$ . Dans le cas 1D, une stratégie de résolution consiste à simplifier le système en un problème aux valeurs propres linéaire réel en posant

$$\lambda = \frac{\omega^2}{E_\infty + \sum_{j=1}^n E_j \frac{i\omega\tau_j}{1+i\omega\tau_j}}. \quad (\text{IV.2.8})$$

Puisque ce problème met en jeu le bilaplacien, un opérateur défini positif auto-adjoint, les valeurs propres sont nécessairement réelles. Par conséquent, la pulsation complexe  $\omega$

est obtenue par la résolution du problème aux valeurs propres linéaire réel pour la valeur  $\lambda$ , suivie de la résolution d'une équation polynomiale complexe de degré  $(n + 2)$  issue de (IV.2.8). La pulsation d'intérêt correspondant au premier mode de vibration est sélectionnée dans l'ensemble

$$F = \{\omega \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\omega) > 0 \text{ et } \operatorname{Im}(\omega) > 0\}.$$

Comme illustré Figure IV.2.3 pour un matériau test, les fonctions  $\lambda \mapsto \operatorname{Re}(\omega) \in F$  et  $\lambda \mapsto \operatorname{Im}(\omega) \in F$  sont monotones. On verra par la suite que leurs évolutions dépendent des paramètres matériaux. La pulsation correspondant au premier mode de vibration est donc

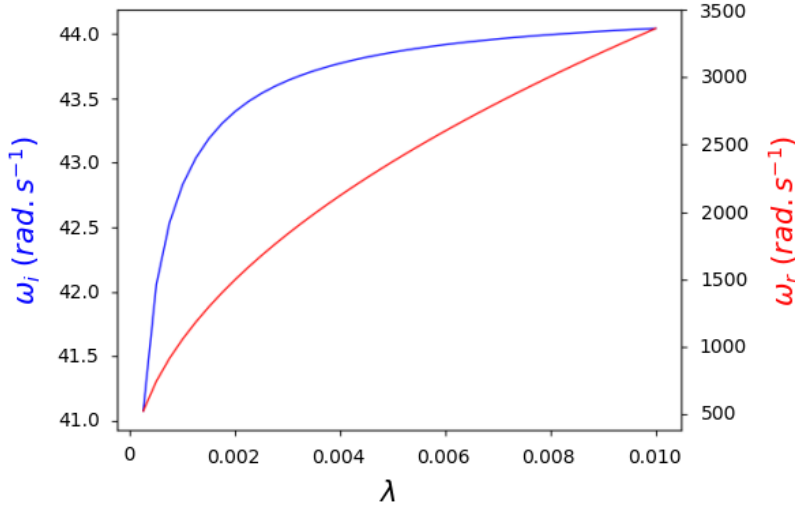


FIGURE IV.2.3 – Variations de  $\omega$  en fonction de  $\lambda$  pour un matériau modélisé par un modèle de Maxwell généralisé.

obtenue à partir de la première valeur propre du problème aux valeurs propres linéaire en  $\lambda$ , c'est à dire la plus petite valeur de  $\lambda$ . Pour des raisons de différentiabilité, on suppose que  $\lambda$  est simple, et les parties réelle et imaginaire de la pulsation  $\omega$  sont notées

$$\omega_r = \operatorname{Re}(\omega), \quad \omega_i = \operatorname{Im}(\omega).$$

Dans les rares cas où la valeur propre est multiple, on perd la différentiabilité (au sens de Fréchet) de la valeur propre. D'autres méthodes existent, tout du moins en élasticité, pour traiter ces problèmes particuliers. Citons par exemple les méthodes [74, 110] basées sur la théorie des sous-gradients de Clarke [43]. Dans ce manuscrit, on se contente de vérifier que la valeur propre est simple, et le reste au cours de l'optimisation. Dans les problèmes de maximisation étudiés dans ce travail, les parties réelle et imaginaire de la première valeur propre ne dépasse jamais celles des valeurs propres suivantes.

### 3 Choix de la fonction objectif

Dans ce manuscrit, on s'intéresse à deux quantités que l'on cherchera à optimiser dans le cas de la semelle de chaussure, l'amortissement et le retour élastique. La majeure partie de



ce travail sera centrée sur la maximisation de l'amortissement, des études complémentaires sur la maximisation du retour élastique seront proposées dans le cas de la plaque 2D.

Pour l'optimisation paramétrique de poutres viscoélastiques en vibration, on s'intéresse uniquement à l'amortissement, il est donc nécessaire de définir cette notion afin de choisir une fonction objectif pertinente. Plusieurs quantités caractérisant les propriétés amortissantes d'une structure viscoélastique sont présents dans la littérature. Les trois principales options sont détaillées ci-dessous.

1. Le module de perte modal, ou module de perte structurel, est probablement la quantité la plus utilisée. Elle est donnée par

$$\eta = \frac{\text{Im}(\omega^2)}{\text{Re}(\omega^2)} = \frac{2\omega_i\omega_r}{\omega_r^2 - \omega_i^2}, \quad (\text{IV.3.1})$$

et défini le rapport entre l'énergie dissipée et l'énergie stockée [70, 98]. Cependant, il est possible que la minimisation de ce rapport mène à une simple égalisation de  $\omega_r$  et  $\omega_i$ , faisant tendre le dénominateur vers 0. Ce phénomène apparaît plus fréquemment pour les structures dont on autorise de plus grandes variations d'épaisseur et de forme, ou lorsque la partie réelle et imaginaire de la fréquence propre sont initialement proches. Pour éviter les problèmes numériques, ce choix a été écarté.

2. On peut également évaluer l'amortissement par un critère en amplitude de vibration défini par le décrétement logarithmique [119]. Il est défini comme le rapport entre le coefficient de décroissance exponentielle et la fréquence de vibration,

$$\delta = \frac{\omega_i}{\omega_r}. \quad (\text{IV.3.2})$$

3. Enfin, une troisième option est de simplement utiliser le coefficient de décroissance exponentielle comme fonction objectif [17, 64],

$$\alpha = \omega_i. \quad (\text{IV.3.3})$$

Dans la suite, les quantités  $\delta$  et  $\alpha$  seront considérées comme potentielles fonctions objectif. Cependant nous démontrerons rapidement que la quantité  $\delta$  est la plus intéressante et finalement, la plupart des résultats numériques seront donnés pour la maximisation du décrétement logarithmique.

## 4 Optimisation paramétrique de poutres viscoélastiques

### 4.1 Enoncé du problème d'optimisation

Le premier problème d'optimisation de ce manuscrit porte sur l'optimisation du profil d'épaisseur d'une poutre viscoélastique, d'épaisseur initialement constante  $h_0$ , dans l'optique d'obtenir les meilleures propriétés d'amortissement possibles pour un matériau fixé. La fonction coût du problème s'écrit :

$$\mathcal{J}(\lambda) = -\frac{\omega_i(\lambda)}{\omega_r(\lambda)} \text{ ou } \mathcal{J}(\lambda) = -\omega_i(\lambda), \quad (\text{IV.4.1})$$

et sera également notée  $\mathcal{J}(\lambda) = j(h)$  afin de mettre en évidence la dépendance à la variable de design  $h$ . De plus, on ajoute deux contraintes classiques que l'on retrouvera également dans les problèmes des sections suivantes.

- Une contrainte de volume constant permet de s'assurer de travailler avec la même quantité de matière au cours de l'optimisation. On ne cherche pas à minimiser la matière mais à trouver la meilleure répartition de matériau tout en conservant le même volume.

- Une contrainte de boîte sur l'épaisseur impose que celle-ci soit comprise entre deux bornes  $h_{min}$  et  $h_{max}$ . Le principal objectif est d'éviter certains résultats pour lesquels l'épaisseur est localement proche de 0. Sans borne inférieure, l'algorithme peut virtuellement sectionner la poutre en faisant tendre  $h$  vers 0 au milieu de la structure. La borne supérieure sera principalement nécessaire en 2D pour s'assurer que le design final soit cohérent avec l'application souhaitée, une épaisseur maximale de semelle de chaussure par exemple.

Le problème de minimisation s'écrit alors

$$\inf_{h \in \mathcal{H}_{ad}} j(h) \quad (\text{IV.4.2})$$

pour l'espace des profils d'épaisseur admissibles donné par

$$\mathcal{H}_{ad} = \left\{ h \in L^\infty(0, L) \mid h_{min} \leq h(x_1) \leq h_{max} \forall x_1 \in [0, L], V(h) = \int_0^L h(x_1) dx_1 = V_0 \right\}. \quad (\text{IV.4.3})$$

où  $V_0$  représente le volume initial de la poutre.

## 4.2 Analyse des sensibilités

Afin d'appliquer les méthodes numériques à base de gradient, on cherche à étudier les sensibilités de la fonction objectif par rapport à  $h$ . L'utilisation du Lagrangien nécessiterait ici des précautions supplémentaires puisque la variable  $u$  est complexe. Plutôt que d'introduire les propriétés associées aux formes sesquilineaires, on tire partie de la symétrie du problème en procédant comme suit,

On dérive directement l'équation (IV.2.5) par rapport à  $h$ . Pour des raisons de clarté, l'équation est réécrite

$$a(h, u, \hat{u}) = \lambda(h)b(h, u, \hat{u}) \quad \forall \hat{u} \in \mathcal{U}_0,$$

avec  $a$  et  $b$  des formes bilinéaire par rapport à leur 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> argument, en gardant à l'esprit que  $u$  est une fonction de  $h$ . L'espace  $\mathcal{U}_0$  est défini en section 2, équation (IV.2.6). La règle de dérivation composée donne

$$D_h a(h, u, \hat{u}) \tilde{h} + a(h, D_h u \tilde{h}, \hat{u}) = D\lambda(h) \tilde{h} b(h, u, \hat{u}) + \lambda(h) \left( D_h b(h, u, \hat{u}) \tilde{h} + b(h, D_h u \tilde{h}, \hat{u}) \right) \quad \forall \hat{u} \in \mathcal{U}_0.$$

On utilise ensuite la symétrie de  $a$  et  $b$  et, en choisissant  $\hat{u} = u$ , on obtient

$$D_h a(h, u, u) \tilde{h} = D\lambda(h) \tilde{h} b(h, u, u) + \lambda(h) D_h b(h, u, u) \tilde{h},$$

d'où

$$D\lambda(h) \tilde{h} = \frac{D_h a(h, u, u) \tilde{h} - \lambda(h) D_h b(h, u, u) \tilde{h}}{b(h, u, u)}. \quad (\text{IV.4.4})$$

L'application de la règle des fonctions composées à la fonction coût  $j(h)$  ainsi que l'équation (IV.4.4) mènent à l'expression

$$Dj(h)\tilde{h} = -\frac{\omega_r(\lambda(h))\frac{\partial\omega_i}{\partial\lambda}(\lambda(h)) - \omega_i(\lambda(h))\frac{\partial\omega_r}{\partial\lambda}(\lambda(h))}{\omega_r^2(\lambda(h))} \int_0^L \left( \frac{1}{4\rho} h^2 \frac{\left(\frac{d^2u}{dx_1^2}\right)^2}{\int_0^L hu^2 dx_1} - \lambda(h) \frac{u^2}{\int_0^L hu^2 dx_1} \right) \tilde{h} dx_1. \quad (\text{IV.4.5})$$

La partie réelle et imaginaire de la dérivée de  $\omega$  par rapport à  $\lambda$  est obtenue en réécrivant (IV.2.8) comme

$$\omega^2 = \lambda \left( E_\infty + \sum_{j=1}^n E_j \frac{i\omega\tau_j}{1 + i\omega\tau_j} \right),$$

on en déduit

$$2\omega \frac{d\omega}{d\lambda} = E_\infty + \sum_{j=1}^n E_j \frac{i\omega\tau_j}{1 + i\omega\tau_j} + \lambda \sum_{j=1}^n E_j \left( \frac{i\tau_j}{1 + i\omega\tau_j} \frac{d\omega}{d\lambda} + i\omega\tau_j \frac{-i\tau_j \frac{d\omega}{d\lambda}}{(1 + i\omega\tau_j)^2} \right).$$

Après simplification, on obtient le résultat

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{E_\infty + \sum_{j=1}^n E_j \frac{i\omega\tau_j}{1 + i\omega\tau_j}}{2\omega - \lambda \sum_{j=1}^n E_j \frac{i\tau_j}{(1 + i\omega\tau_j)^2}},$$

en rappelant que

$$\frac{d\omega_r}{d\lambda} = \operatorname{Re} \left( \frac{d\omega}{d\lambda} \right) \quad \text{et} \quad \frac{d\omega_i}{d\lambda} = \operatorname{Im} \left( \frac{d\omega}{d\lambda} \right).$$

Dans ce manuscrit, on se limite à des problèmes d'optimisation de valeurs propres qui sont auto-adjoints. Cependant, ce travail pourrait être étendu à d'autres fonctions objectif à travers la résolution d'un problème adjoint.

## 5 Méthodes numériques

Le problème de flexion de poutres viscoélastiques est un problème d'ordre 4 défini sur l'espace  $H^2(0, L)$ , ainsi, les éléments finis conformes doivent être  $\mathcal{C}^1$ . Cette continuité  $\mathcal{C}^1$  est une restriction plutôt forte nécessitant l'utilisation d'éléments finis plus complexes. En 1D, on contourne cette difficulté en établissant la formulation mixte du problème.

La formulation mixte est basée sur l'introduction d'une variable supplémentaire définie par  $v = -\frac{h^3}{12\rho} \frac{d^2u}{dx_1^2}$ . On peut alors réécrire la formulation forte (IV.2.7) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{d^2v}{dx_1^2} = \lambda hu & \text{sur } (0, L), \\ -\frac{d^2u}{dx_1^2} = 12\rho h^{-3}v & \text{sur } (0, L), \\ u = 0 & \text{à } x_1 = 0, \\ v = 0 & \text{à } x_1 = L, \\ \frac{du}{dx_1} = 0 & \text{à } x_1 = 0, \\ \frac{dv}{dx_1} = 0 & \text{à } x_1 = L. \end{array} \right.$$

En posant

$$\mathcal{U}_1 = \left\{ (u, v) \in H^1([0, L], \mathbb{C}) \times H^1([0, L], \mathbb{C}) \mid u|_{x_1=0} = 0, v|_{x_1=L} = 0 \right\},$$

on exprime la formulation faible correspondante :

Trouver  $(u, v) \in \mathcal{U}_1$ , tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^L \frac{dv}{dx_1} \frac{d\hat{u}}{dx_1} dx_1 = \lambda \int_0^L hu\hat{u} dx_1 \\ \int_0^L \frac{du}{dx_1} \frac{d\hat{v}}{dx_1} dx_1 - \int_0^L 12\rho h^{-3}v\hat{v} dx_1 = 0 \end{array} \right. \quad \forall (\hat{u}, \hat{v}) \in \mathcal{U}_1. \quad (\text{IV.5.1})$$

Dans la formulation mixte, les fonctions propres appartiennent à  $H^1$ , par conséquent, le problème peut être résolu à l'aide d'éléments finis classiques, les éléments  $P_1$ . Le problème aux valeurs propres linéaire réel est résolu avec la librairie **ARPACK** [93], incluse dans **FreeFem++**. Bien que suffisant pour le moment, cette librairie est d'une efficacité limitée et ne couvre que les problèmes aux valeurs propres linéaires. Les racines du polynôme complexe issu de (IV.2.8) sont déterminées par les solveurs polynomiaux de **Python** auxquels on accède grâce à la librairie **PyFreeFem**.

L'optimisation est réalisée par une méthode de descente de gradient projeté avec recherche linéaire de pas. On effectue également la régularisation de l'épaisseur à l'aide du produit scalaire de  $H^1$ , comme décrit au chapitre III. L'épaisseur  $h$  appartient maintenant à l'espace des profils d'épaisseur admissibles régularisé

$$\mathcal{H}_{ad}^{reg} = \left\{ h \in H^1(0, L) \mid h_{min} \leq h(x_1) \leq h_{max} \quad \forall x_1 \in [0, L], V(h) = \int_0^L h(x_1) dx_1 = V_0 \right\}.$$

On identifie alors le gradient  $j'(h)$  à travers

$$\langle j'(h), \tilde{h} \rangle_{H^1} = Dj(h)\tilde{h} \quad \forall \tilde{h} \in H^1(0, L),$$

à l'aide du produit scalaire de  $H^1$  que l'on rappelle

$$\langle j'(h), \tilde{h} \rangle_{H^1} = \int_0^L \left( \eta^2 \frac{dj'(h)}{dx} \frac{d\tilde{h}}{dx} + j'(h)\tilde{h} \right) dx,$$

où  $\eta$  peut être interprété comme une échelle de longueur régularisante, typiquement de l'ordre de la taille d'une maille.

La contrainte de volume et la contrainte de boîte sont ici appliquées par projection. Pour des raisons de simplicité, l'opérateur de projection sur  $\mathcal{H}_{ad}^{reg}$  est approximé par la projection sur  $\mathcal{H}_{ad}$ . L'utilisation d'un produit scalaire différent de celui utilisé pour l'identification de la méthode de gradient induit par conséquent une légère erreur. L'opérateur de projection est donné par

$$(P_{ad}(h))(x_1) = \max(h_{min}, \min(h_{max}, h(x_1) + \ell)),$$

où  $\ell$  est déterminé par dichotomie tel que

$$\int_0^L P_{ad}(h) dx_1 = V_0,$$

en s'appuyant sur la monotonie de la fonction

$$\ell \rightarrow V(\ell) = \int_0^L \max(h_{min}, \min(h_{max}, h(x_1) + \ell)) dx_1.$$

En pratique, on se contente d'un volume suffisamment proche du volume initial tel que

$$\frac{\left| \int_0^L P_{ad}(h) dx_1 - V_0 \right|}{V_0} < \xi$$

avec typiquement  $\xi = 10^{-5}$ . On rappelle que cette méthode par projection assure le respect de la contrainte à chaque itération, au prix d'un coût de calcul assez économe.

Il y a deux possibilités pour résoudre un problème 1D sous **FreeFem++**, soit avoir recourt à des éléments 1D, soit à des éléments 2D en appliquant une condition d'invariance selon la largeur. Pour résoudre ce problème d'optimisation, on utilise un maillage 2D de taille  $200 \times 1$  avec condition d'invariance selon  $x_2$ . L'algorithme d'optimisation s'arrête quand les changements relatifs de la fonction objectif  $\frac{\mathcal{J}_n - \mathcal{J}_{n+1}}{\mathcal{J}_{n+1}}$ , où  $\mathcal{J}_n$  est la valeur de la fonction objectif à l'itération  $n$ , atteignent une valeur  $\xi_0 = 10^{-4}$ . Dans le cas d'un matériau caractérisé par un spectre de taille élevée, l'optimisation ne dure pas plus d'une minute. En effet, pour un spectre contenant 25 temps par exemple, il faut résoudre un problème aux valeurs propres linéaire réel ainsi qu'un polynôme complexe de degré 27 à chaque itération, ce qui, en 1D, reste peu coûteux.

## 6 Matériaux d'étude

Les polymères sont de bons candidats pour les applications d'amortissement structural, en effet, ils exhibent des propriétés viscoélastiques linéaires pour des déformations infinitésimales pouvant être adaptées au cas étudié en modifiant la chimie du matériau. Leur viscoélasticité linéaire peut être caractérisée par de simples essais dynamiques en torsion ou en traction uniaxiale. Ces techniques expérimentales, décrites au chapitre II, donnent accès aux modules de cisaillement ou aux modules de Young. En fréquentiel, ces modules sont des

grandeurs complexes composées d'une partie réelle, le module de stockage, et d'une partie imaginaire, le module de perte. Les paramètres du modèle de Maxwell généralisé (Figure IV.2.2) sont obtenus en ajustant les valeurs du modèle aux courbes expérimentales. Afin d'effectuer des simulations proches d'applications réalistes, on considère un modèle de Maxwell généralisé dont les paramètres sont déterminés par rapport au comportement viscoélastique linéaire, mesuré en traction uniaxiale, d'un réseau acrylate amorphe réel (Figure IV.6.4) [52]. Le modèle est caractérisé par l'ensemble de paramètres donné table 6.1.

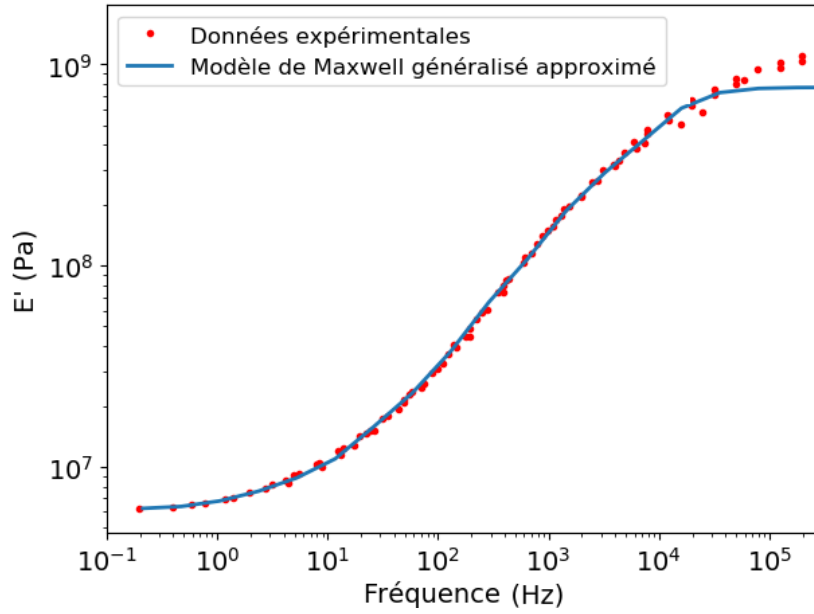


FIGURE IV.6.4 – Courbe maîtresse du module de stockage et modèle de maxwell généralisé approximé d'un réseau acrylate amorphe.

$E_{\infty} = 6.2 \text{ MPa}$	
$E_j \text{ (MPa)}$	$\tau_j \text{ (s)}$
$4.761 \times 10^2$	$1.396 \times 10^{-7}$
$2.126 \times 10^2$	$1.054 \times 10^{-6}$
58.665	$7.231 \times 10^{-6}$
12.255	$6.001 \times 10^{-5}$
2.012	$4.526 \times 10^{-4}$
$7.866 \times 10^{-1}$	$1.582 \times 10^{-3}$

TABLE 6.1 – Paramètres du modèle de Maxwell généralisé utilisés pour l'ajustement aux données expérimentales.

Pour les applications 2D et 3D des chapitres suivants, le module de compressibilité  $K$  sera considéré élastique constant égal à 3000 MPa. Bien que cette hypothèse, discutée au chapitre II, ne soit pas rigoureusement juste, elle est souvent admise [38, 39]. Cela permet

de calculer simplement le coefficient de Poisson de chaque branche viscoélastique,  $j$ , par la formule  $\nu_j = \frac{3K - E_j}{6K}$ .

De manière générale, plusieurs temps de relaxation  $\tau_j$  sont nécessaires pour représenter de façon précise la viscoélasticité linéaire d'un polymère réel conduisant à la prise en compte de nombreux paramètres matériaux. Par conséquent, pour faciliter l'étude de l'impact de ces paramètres sur le design optimal de la structure, le modèle de Zener, simplement constitué d'une branche de Maxwell et d'une branche élastique en parallèles, sera aussi considéré. Cela permettra de limiter les paramètres du modèle à  $E_\infty$ ,  $E_1$  et  $\tau_1$  pour la poutre, auxquels s'ajoutent  $\nu_\infty$  et  $\nu_1$  pour les structures 2D et 3D.

## 7 Résultats numériques

Dans cette section, on propose une analyse complète des résultats d'optimisation d'une poutre viscoélastique en vibration libre. Cette étude est composée de l'optimisation d'une poutre constituée d'un matériau réaliste, un réseau acrylate amorphe, et d'une analyse approfondie de l'impact des paramètres du problème sur le design optimal d'une poutre pour un matériau test, modélisé par un modèle de Zener. On retrouvera l'impact des paramètres matériaux, des paramètres géométriques et des paramètres d'optimisation. Les résultats sont donnés pour  $j(h) = \delta(h)$ , cependant, on proposera également l'étude et la comparaison des résultats pour la fonction  $j(h) = \alpha(h)$ .

La poutre de référence possède une longueur  $L = 60$  mm, une épaisseur initiale  $h_0 = 3$  mm, variant entre  $h_{min} = 1$  mm et  $h_{max} = 5$  mm durant l'optimisation. La densité vaut  $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ , les propriétés mécaniques du matériau réel sont décrites Figure IV.6.4 et les propriétés du matériau test,  $E_\infty = 18$  MPa,  $E_1 = 30$  MPa et  $\tau_1 = 0.001$  s, sont judicieusement choisies afin de pouvoir convenablement observer le comportement amortissant de la structure.

### 7.1 Optimisation d'une poutre constituée d'un polymère réaliste

#### Résultats d'optimisation

On présente ici les résultats d'optimisation d'une poutre rectangulaire constituée d'un matériau réaliste. Le spectre de temps caractéristique du matériau étudié est de petite taille, le calcul est donc très rapide et ne prend que 12 s. Le profil d'épaisseur final ainsi que l'amplitude de la vibration libre de la poutre sont donnés et comparés aux valeurs initiales Figure IV.7.5, pour une impulsion initiale d'amplitude  $u_0$  effectuée à l'extrémité libre de la poutre. La meilleure géométrie est obtenue en redistribuant la matière depuis l'extrémité libre au bord encasté, saturant les bornes supérieures et inférieures. La poutre optimisée démontre une augmentation significative de l'amortissement comparé à la poutre initiale, assurant l'efficacité de la méthode. De plus, les bonnes performances de l'algorithme peuvent être observés Figure IV.7.6.

Traçons maintenant, Figure IV.7.7, l'évolution des pulsations propres au cours de l'optimisation. En particulier, on vérifie que la première valeur propre est simple et qu'elle le reste jusqu'à convergence. Cela permet de s'assurer de la différentiabilité de la pulsation propre,

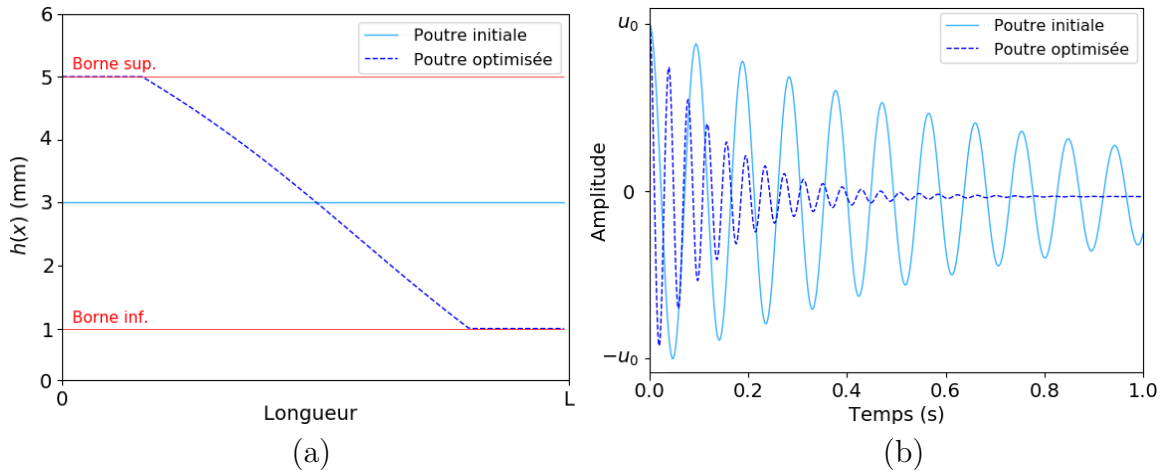


FIGURE IV.7.5 – (a) Profil d'épaisseur de la poutre initiale et optimisée et (b) amplitude des vibrations libres des poutres considérées à  $x_1 = L$  pour des paramètres matériaux listés en table 6.1.

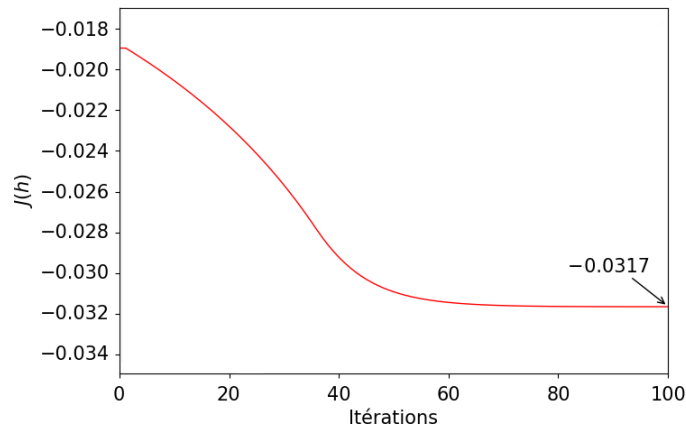


FIGURE IV.7.6 – Convergence de la fonction coût au cours de l'optimisation de l'amortissement d'une poutre rectangulaire constituée d'un matériau réaliste.

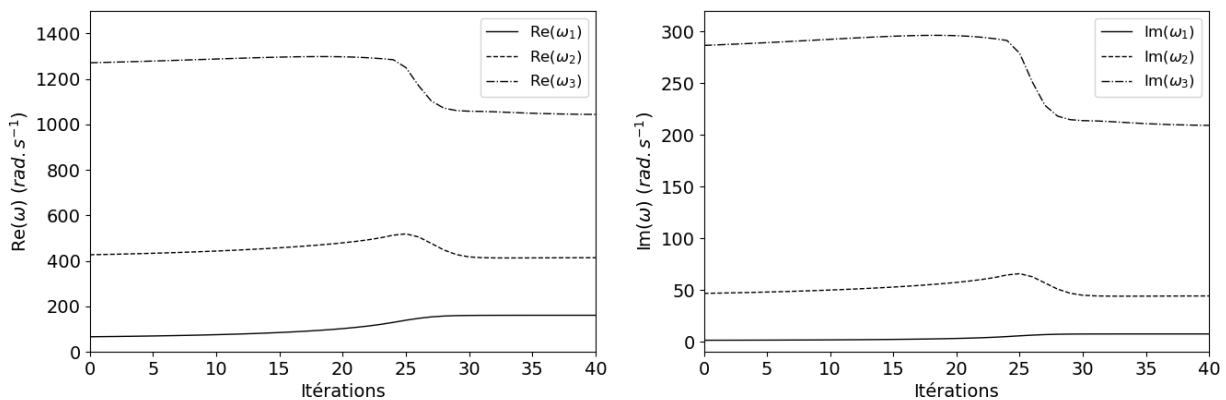


FIGURE IV.7.7 – Évolution des parties réelle et imaginaire des 3 premières pulsations propres au cours de l'optimisation.



ce qui est une hypothèse à la base de notre algorithme. Pour les parties réelles ainsi que les parties imaginaires des trois premières pulsations, on ne remarque pas de croisement pendant l'optimisation.

On note que les minima de la fonction objectif obtenus en 1D sont des minima globaux. En effet, l'initialisation de l'algorithme par des profils variés à épaisseur non constante mène au même design final. De plus, l'allure des modes de vibrations est indépendant de l'optimisation et des paramètres du problème. Par conséquent, on ne s'attardera pas dessus dans ce manuscrit.

### Impact de la température

On a vu dans le chapitre II qu'une variation de température peut se traduire par une variation des temps de relaxation du fait du principe d'équivalence temps-température. Dans ce travail, l'étude de l'impact des temps de relaxation couvrira donc également l'impact de la température sur l'optimisation. On propose tout de même, pour cet exemple seulement, de vérifier le comportement en vibration de la poutre initiale et de la poutre optimisée lorsque la température varie (Figure IV.7.8).

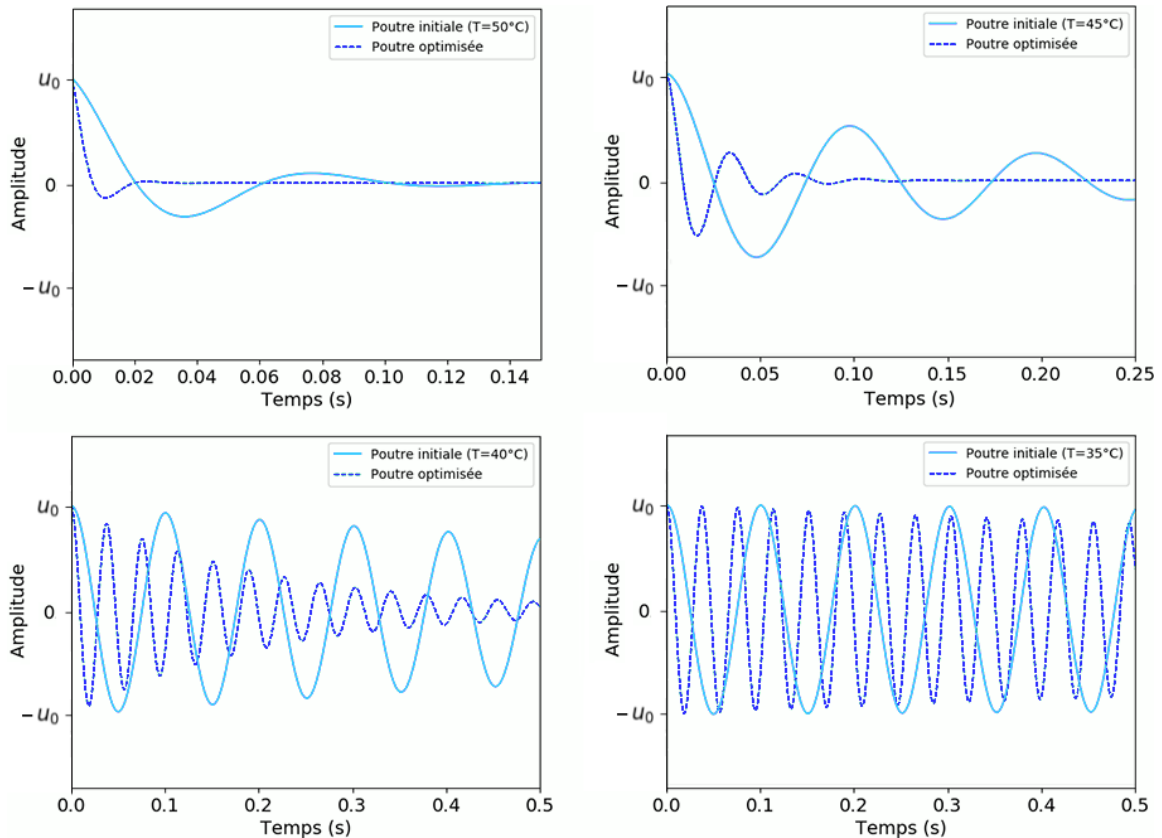


FIGURE IV.7.8 – Comportement en vibration libre à différentes températures (avec échelle de temps variable).

Pour prendre en compte les variations de température, on effectue la translation de la courbe maîtresse du polymère en multipliant tous les temps de relaxation par  $10^{\log(a_T)}$ . Pour

déterminer le “shift factor”  $a_T$ , on utilise communément la loi Williams-Landel-Ferry [136] :

$$\log(a_T)(T, T_0) = \frac{-C_1^0(T - T_0)}{C_2^0 + T - T_0} \quad (\text{IV.7.1})$$

où  $C_1^0$  et  $C_2^0$  sont des constantes positives dépendant du polymère considéré et  $T_0$  la température de référence. En choisissant comme température de référence la température de transition vitreuse du matériau, on peut utiliser les constantes universelles  $C_1 = 17$  et  $C_2 = 51$  K, sinon, il faut consulter des abaques. Pour le polymère d'étude, on prend  $T_0 = 64$  °C,  $C_1^0 = 17$  et  $C_2^0 = 124$  °C.

Comme illustré Figure IV.7.8, une baisse de température entraîne une baisse de l'amortissement, le matériau tend peu à peu vers un comportement élastique. À l'inverse, le matériau devient de plus en plus visqueux à mesure que la température augmente. En augmentant suffisamment la température, le matériau passe à l'état caoutchoutique, on peut donc s'attendre à ce que le comportement redeviennet élastique.

## 7.2 Étude des paramètres matériaux

Dans le but d'étudier plus facilement l'impact des paramètres du problème, on considère maintenant une poutre constituée d'un matériau test, modélisé par un modèle de Zener. On fait donc varier les trois paramètres  $E_\infty$ ,  $E_1$  et  $\tau_1$ .

La Figure IV.7.9 présente et compare le comportement en vibration de la poutre de référence pour différentes valeurs de  $E_\infty$ . Naturellement, en augmentant  $E_\infty$ , le comportement du matériau tend vers celui d'un matériau élastique, par conséquent l'amortissement de la structure baisse. À l'inverse, si on augmente  $E_1$ , le module de la branche viscoélastique, l'amortissement augmente, voir Figure IV.7.10. Dans le cas 1D, en traçant les designs on remarque que les paramètres  $E_\infty$ ,  $E_1$  n'influencent que très peu le design final, seule la pulsation, et donc le comportement en vibration, varie significativement.

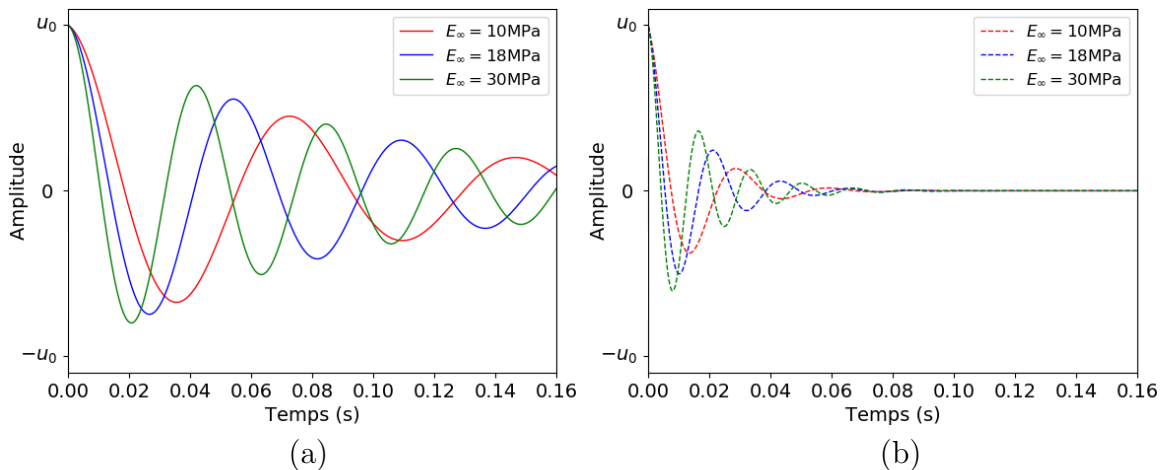


FIGURE IV.7.9 – Impact du module  $E_\infty$  sur le comportement en vibration des poutres (a) rectangulaires et (b) optimisée à  $E_1$  et  $\tau_1$  fixés.

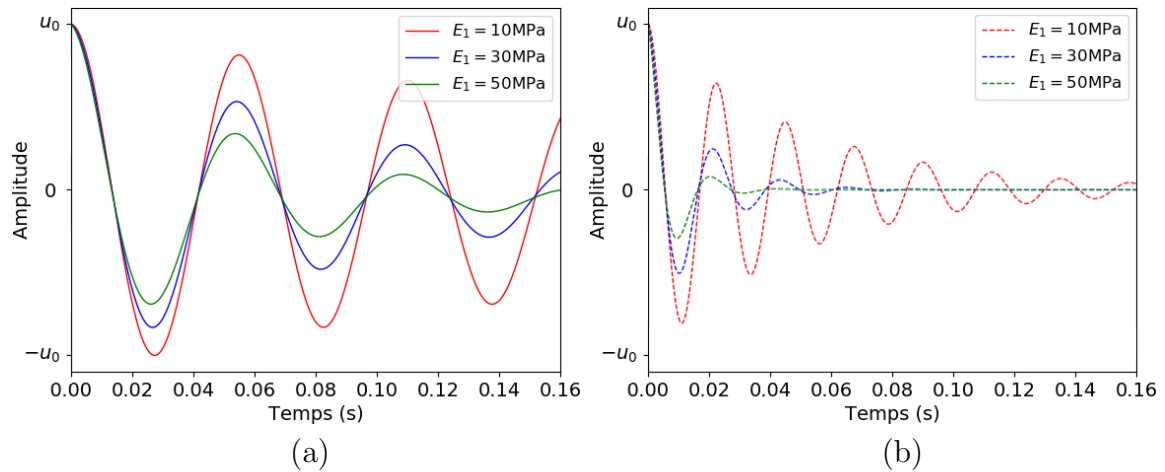


FIGURE IV.7.10 – Impact du module  $E_1$  sur le comportement en vibration des poutres (a) initiales et (b) optimisées à  $E_\infty$  et  $\tau_1$  fixés.

Comme on le verra dans les chapitres suivants, le temps de relaxation est un paramètre particulièrement intéressant dans le cadre de l'optimisation de formes. On commence par mettre en évidence son impact sur l'optimisation de structures 1D. Quand le temps de relaxation  $\tau_1$  tend vers 0 ou  $+\infty$ , le matériau se comporte comme un matériau purement élastique correspondant aux cas théoriques d'un matériau vitreux élastique et d'un matériau caoutchoutique élastique respectivement. Ces cas s'écartent des applications reposant sur l'amortissement viscoélastique et ne seront donc pas traités ici. Les Figures IV.7.11 et IV.7.12 montrent le comportement en vibration des poutres initiales et optimisées ainsi que leurs profils pour différentes valeurs de  $\tau_1$ . La vibration libre et le profil de la poutre

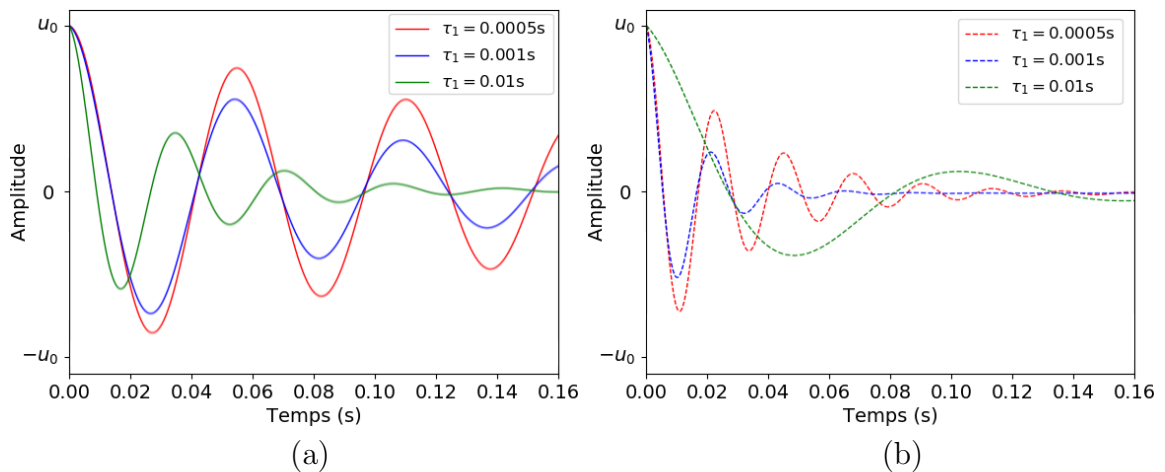


FIGURE IV.7.11 – Impact du temps de relaxation  $\tau_1$  sur le comportement en vibration des poutres (a) initiales et (b) optimisées à  $E_\infty$  et  $E_1$  fixés.

sont considérablement différents, en particulier pour de grandes valeurs de  $\tau_1$ . On remarque Figure IV.7.12 que, pour  $\tau_1 = 0.01$ , la matériau est redistribué à l'extrémité libre, formant un design proche de celui d'un pendule. On rappelle que la fréquence  $\omega_r$  et le coefficient

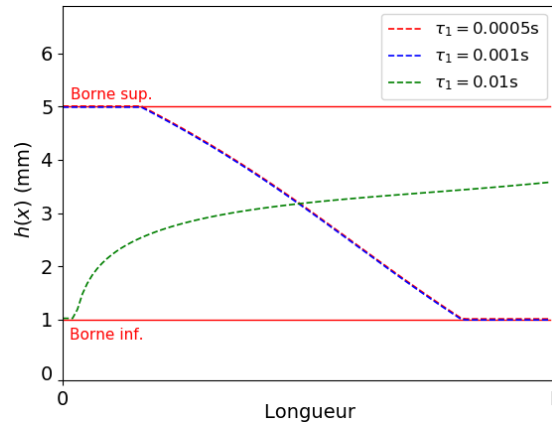


FIGURE IV.7.12 – Impact du temps de relaxation sur les designs finaux pour une poutre initiale d'épaisseur constante  $h_0 = 3mm$ .

de décroissance exponentiel  $\omega_i$  sont des grandeurs liées, on ne peut en augmenter une sans augmenter l'autre. Le problème revient donc à choisir judicieusement le couple  $(\omega_r, \omega_i)$  permettant de maximiser le rapport  $\frac{\omega_i}{\omega_r}$ . Pour des temps de relaxation élevés, il semble plus efficace de diminuer  $\omega_r$  au détriment de  $\omega_i$ , contrairement aux cas que nous avons vu jusqu'à présent où l'on procède en augmentant  $\omega_i$  au détriment de  $\omega_r$ . Pour ce faire, l'algorithme inverse le profil d'épaisseur de la poutre et on vérifie, Figure IV.7.11, que la fréquence de vibration a bien diminué.

### 7.3 Étude des paramètres géométriques

On s'intéresse maintenant aux différents paramètres géométriques mis en jeu, à matériau fixé. On étudie l'impact des dimensions de la poutre initiale ainsi que du choix de la borne supérieure de la contrainte de boîte sur l'épaisseur.

On observe en premier lieu, à travers la Figure IV.7.13, que l'allongement et l'affinement de la poutre initiale entraînent une diminution du coefficient de décroissance exponentielle ainsi que de la fréquence. Ces tendances sont conservées pour les poutres optimisées. De plus, si on travaille sans borne sur l'épaisseur et que l'on normalise les dimensions, on remarque que le profil d'épaisseur optimisé ne dépend pas des paramètres géométriques. Notons tout de même que l'épaisseur initiale  $h_0$  a un impact considérable sur le design final puisqu'on optimise la structure à volume constant.

En revanche, l'application de la contrainte de boîte sur l'épaisseur influence le design final. La Figure IV.7.14 présente les profils d'épaisseur optimisés pour différentes bornes supérieures. Naturellement, le respect des bornes entraîne une détérioration des propriétés de la poutre optimisée. Dans cet exemple, la borne la plus restrictive  $h_{max} = 4$  mm entraîne une perte d'amortissement. La borne  $h_{max} = 5$  mm, n'étant que peu fréquemment atteinte par la fonction  $h(x)$ , n'engendre qu'une très faible différence d'amortissement par rapport à l'optimisation sans borne supérieure.

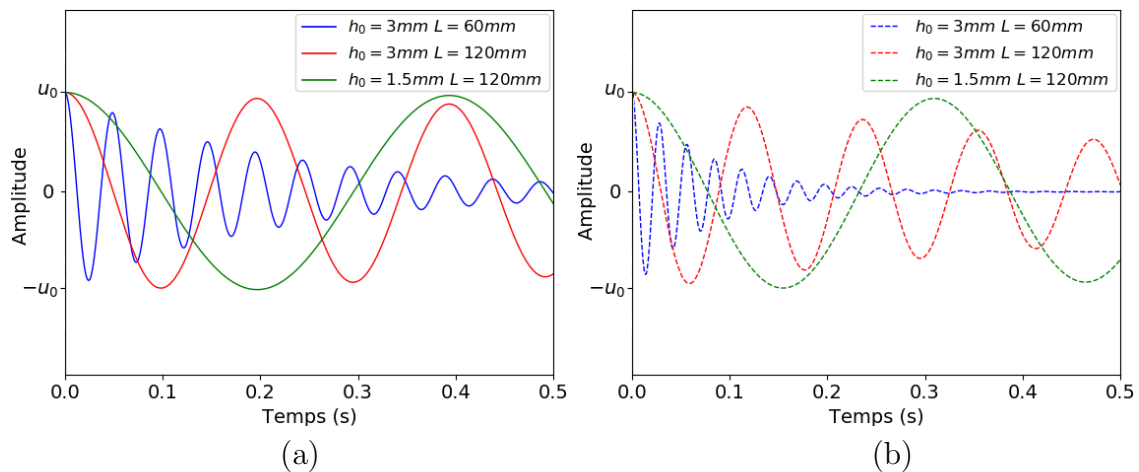


FIGURE IV.7.13 – Comportement en vibration des poutres (a) initiales et (b) optimisées pour différentes dimensions initiales.

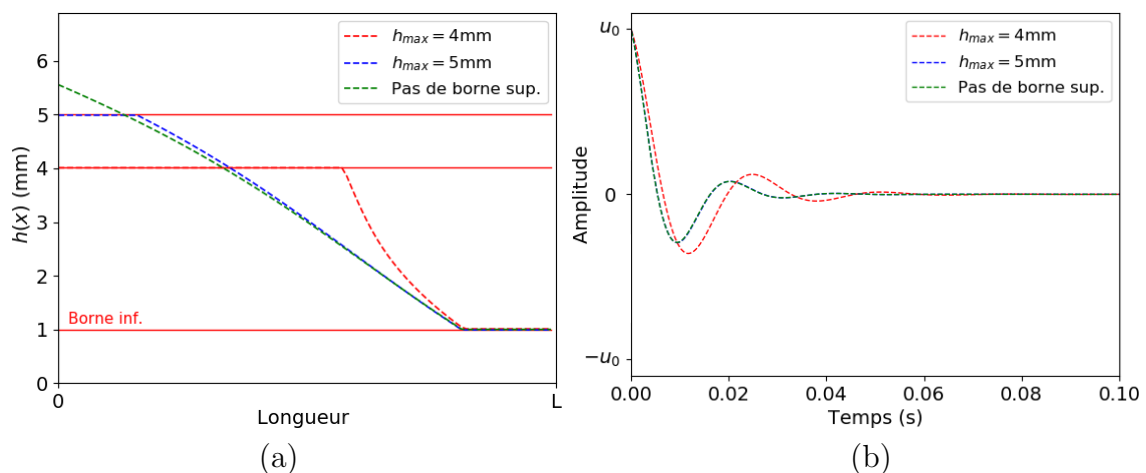


FIGURE IV.7.14 – (a) Profil et (b) comportement en vibration des poutres optimisées pour différentes bornes supérieures.

## 7.4 Étude de différentes fonctions coûts

Enfin, on propose une optimisation pour différentes fonctions objectif. On s'intéresse tout d'abord aux autres quantités définies en section 3, puis à une optimisation avec contrainte d'inégalité sur la fréquence.

### Optimisation de l'amortissement $\alpha$

On cherche à maximiser le coefficient de décroissance  $\alpha = \omega_i$ . Pour  $\mathcal{J}(h) = -\omega_i(h)$ , on obtient un design et un comportement en vibration proche de l'optimisation du décrément logarithmique pour  $\mathcal{J}(h) = -\frac{\omega_i(h)}{\omega_r(h)}$ . Afin mettre en évidence la différence de profil d'épaisseur, on réalise l'optimisation sans borne supérieure. La Figure IV.7.15 compare les designs légèrement différents obtenus pour ces deux fonctions objectif. On remarque, Figure IV.7.16,

qu'en maximisant  $\alpha$  l'algorithme est amené à dépasser la valeur  $\omega_i$  permettant d'atteindre le maximum de  $\delta$ , d'où la différence de profil. Contrairement à la minimisation de la fonction

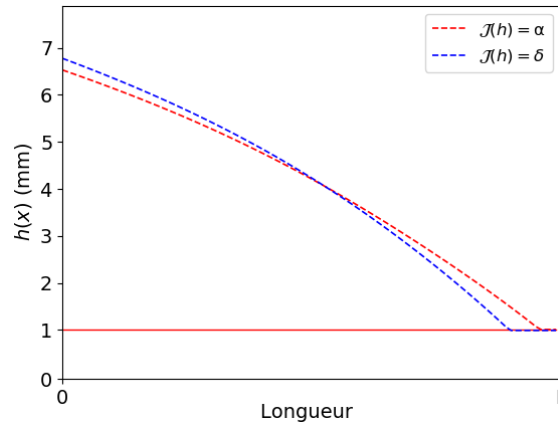


FIGURE IV.7.15 – Comparaison des profils d'épaisseur d'une poutre optimisée pour  $\mathcal{J}(h) = -\alpha$  et  $\mathcal{J}(h) = -\delta$ .

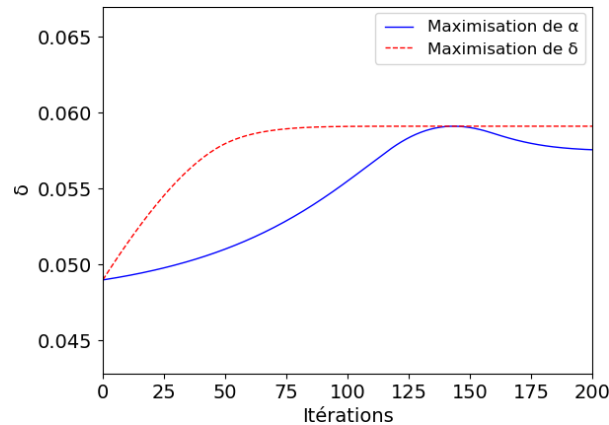


FIGURE IV.7.16 – Évolution du décrement logarithmique  $\delta$  au cours de l'optimisation pour  $\mathcal{J}(h) = -\alpha$  et  $\mathcal{J}(h) = -\delta$ .

$\delta$ , la minimisation de la fonction  $\alpha$  mène toujours au même design, quelque soit le polymère étudié, pour des bornes  $h_{min}$  et  $h_{max}$  fixées. En effet, plutôt que de chercher le meilleur compromis entre  $\omega_r$  et  $\omega_i$ , l'algorithme va chercher à atteindre la valeur maximale possible de  $\omega_i$ , obtenue pour un unique design indépendant du matériau, ce qui est moins intéressant d'un point de vue applicatif.

Dans l'optique de pouvoir maximiser le retour élastique d'une structure plutôt que son amortissement, une première idée naïve serait de minimiser la grandeur  $\delta$ . Comme illustré Figure IV.7.17, on obtient un profil d'épaisseur prenant la forme d'un pendule, maximisant la fréquence de vibration. Contrairement aux profils précédents, la variation d'épaisseur est abrupte. Cette fonction objectif mène à une variété de designs très restreinte, peu pertinente pour les applications souhaitées. Une fonction objectif plus raffinée, visant à maximiser le retour élastique, sera proposée au chapitre suivant dans le cadre de l'optimisation des plaques.

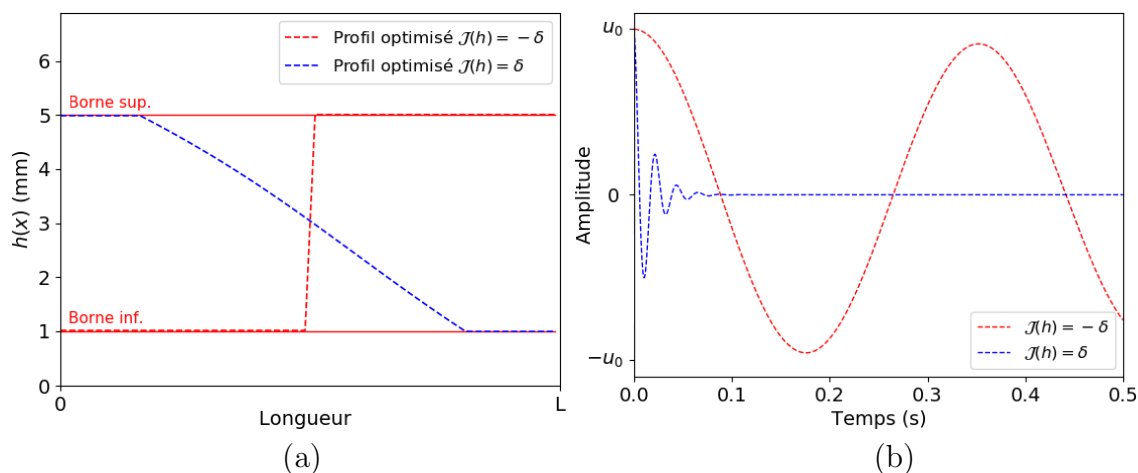


FIGURE IV.7.17 – (a) Profil et (b) comportement en vibration des poutres optimisées pour  $\mathcal{J}(h) = \delta$ .

### Optimisation avec contrainte d'inégalité sur la fréquence de vibration

La minimisation du rapport  $\delta = -\frac{\omega_i}{\omega_r}$  est souvent réalisée par l'augmentation de coefficient de décroissance  $\omega_i$  au prix d'une augmentation conséquente de la fréquence de vibration. En pratique, cela pourrait constituer un problème pour certaines applications. Il est donc intéressant d'imposer une contrainte supplémentaire portant sur la fréquence de vibration de la structure.

Dans l'exemple suivant, on minimise le décrément logarithmique  $\delta$  en optimisant le profil d'épaisseur d'une poutre viscoélastique sous contrainte d'inégalité sur la fréquence. On souhaite obtenir une structure optimisée dont la fréquence ne dépasse pas  $\omega_r = 200 \text{ rad.s}^{-1}$ . Cette contrainte sera mise en œuvre par un Lagrangien augmenté. On obtient le design et le comportement en vibration représentés Figure IV.7.18. Le profil optimisé avec contrainte sur

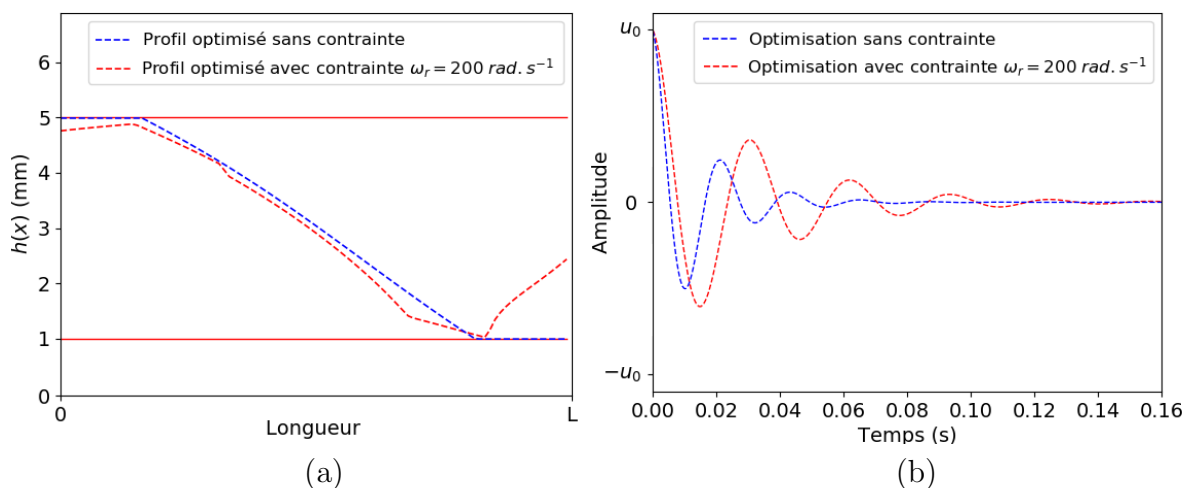


FIGURE IV.7.18 – (a) Profil et (b) comportement en vibration des poutres optimisées avec et sans contrainte sur la fréquence.

la fréquence diffère considérablement du profil sans contrainte. En particulier, on remarque que le profil  $h(x)$  n'est plus monotone. On obtient  $(\omega_r, \omega_i) = (199.27, 32.87) \text{ rad.s}^{-1}$ , respectant la contrainte, au lieu de  $(\omega_r, \omega_i) = (285.80, 65.17) \text{ rad.s}^{-1}$  pour l'optimisation sans contrainte. On vérifie également, Figure IV.7.19, que la contrainte sur la fréquence est bien respectée. On note que l'utilisation du Lagrangien augmenté permet une résolution efficace du problème d'optimisation sous contrainte mais que celle-ci n'est respectée qu'à convergence. Dans cet exemple, la borne est rapidement violée dès les premières itérations.

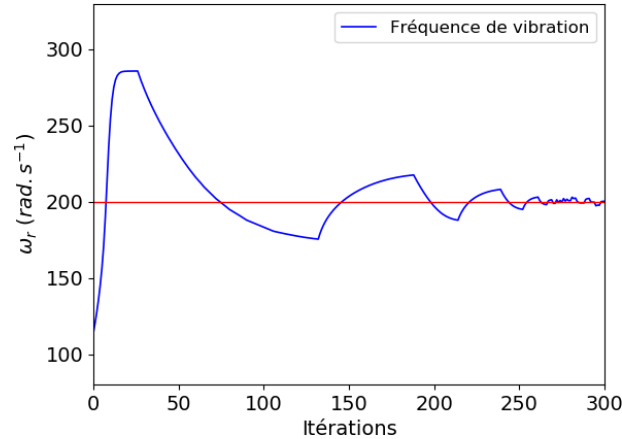


FIGURE IV.7.19 – Évolution de la fréquence de vibration au cours de l'optimisation pour la contrainte  $\omega_r \leq 200 \text{ rad.s}^{-1}$ .

Afin de faciliter le choix de la contrainte vis-à-vis d'une application donnée, on peut construire le front de Pareto associé au problème d'optimisation sous contrainte. Dans la Figure IV.7.20, on trace l'évolution de  $\frac{1}{\omega_i}$  en fonction de  $\omega_r$ . Chaque point de la courbe est

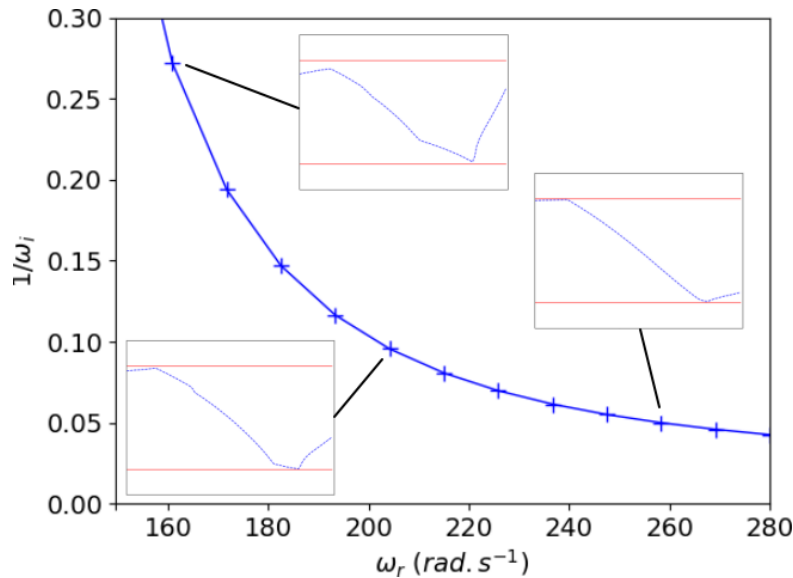


FIGURE IV.7.20 – Front de Pareto associé au problème de maximisation de  $\delta$  sous contrainte d'inégalité sur la fréquence.



associé à un profil d'épaisseur optimal différent. Cette courbe fournit donc toute une variété de designs parmi lesquels choisir afin d'adapter l'optimisation à l'application étudiée.

## 8 Conclusion

L'optimisation paramétrique de la vibration de poutres viscoélastiques a permis d'obtenir un premier aperçu des particularités inhérentes aux problèmes viscoélastiques. L'algorithme développé dans ce chapitre permet d'optimiser des structures 1D constituées de matériaux réalistes dont les propriétés rhéologiques ont été déterminées à partir de résultats expérimentaux. Les résultats d'optimisation montrent un gain d'amortissement significatif et la possibilité d'ajouter des contraintes sur la vibration afin de s'adapter à l'application souhaitée. Par exemple, l'ajout d'une contrainte sur la fréquence de vibration a permis de fournir tout une variété de profils d'épaisseur correspondant chacun à une fréquence limite donnée.

En particulier, cette étude est un moyen simple de comprendre l'influence des différents paramètres du problème et de mettre en évidence les plus pertinents. Les paramètres matériaux sont les plus impactant, le comportement en vibration et le design final sont particulièrement sensibles aux temps de relaxation. Pour des temps longs, on observe une inversion du profil d'épaisseur ainsi qu'une inversion de l'évolution de la fréquence et du coefficient de décroissance de la vibration. Le comportement en vibration des poutres viscoélastiques dépend naturellement des paramètres géométriques, mais le design optimal s'est avéré très peu sensible à ces paramètres. La comparaison de différentes fonctions objectifs a également permis de confirmer le choix de la grandeur d'intérêt à étudier, le décrement logarithmique de la vibration. Par la suite, on s'intéressera uniquement à l'impact des propriétés matériaux, les paramètres ayant la plus grande influence sur les résultats d'optimisation.

Pour s'approcher du cas de la semelle de chaussure de course, il est nécessaire d'étudier des structures plus complexes, en 2D dans un premier temps. Le chapitre suivant porte donc sur l'optimisation de formes de plaques minces viscoélastiques.

# Chapitre V

## Optimisation de plaques viscoélastiques en vibration

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>107</b>
<b>2</b>	<b>Vibration de plaques de Kirchhoff en viscoélasticité</b>	<b>108</b>
<b>3</b>	<b>Optimisation couplée de plaques minces viscoélastiques</b>	<b>111</b>
3.1	Énoncé du problème d'optimisation	111
3.2	Analyse des sensibilités	112
<b>4</b>	<b>Méthodes numériques</b>	<b>116</b>
<b>5</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>118</b>
5.1	Optimisation d'une plaque mince constituée d'un polymère réaliste	119
5.2	Étude des paramètres matériaux	123
<b>6</b>	<b>Résolution du problème opposé : limiter l'effet amortissant</b>	<b>130</b>
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>131</b>

---

## 1 Introduction

L'étape suivante de ce travail est l'optimisation de structures viscoélastiques 2D. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'optimisation des vibrations de plaques minces en polymère. En particulier, on effectuera l'optimisation simultanée de l'épaisseur et de la forme de la plaque à travers une optimisation paramétrique couplée à une optimisation géométrique. Bien que le modèle de plaque mince soit insuffisant pour modéliser une semelle de chaussure de course haute performance aux formes complexes, on espère pouvoir traiter les semelles plates des chaussures traditionnelles.

Le modèle de plaque utilisé suit la théorie des plaques minces de Kirchhoff-Love. Ce modèle, très classique, s'inspire historiquement de la théorie des poutres d'Euler et considère les plaques comme des éléments structurels plans de faible épaisseur. La théorie des plaques minces a été développée par Love en 1888 [99]. Il applique les hypothèses de Kirchhoff pour représenter la plaque 3D par son plan médian, similairement à la théorie des poutres, et

y associe des courbures. Tout comme le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli, le modèle de Kirchhoff-Love est largement utilisé en ingénierie, par exemple pour le revêtement des ailes en aérospatial, la carrosserie en automobile, ou encore les parois des bâtiments en génie civil... Par ailleurs, elle permet d'étudier les vibrations des structures planes afin de prévoir les phénomènes de résonance et de rupture. Dans ce chapitre, c'est précisément la vibration en flexion des plaques minces que nous allons étudier, dans le cadre de la viscoélasticité, et appliquer à l'optimisation de formes.

On énonce d'abord le problème de vibration de plaques minces viscoélastiques en section 2. Puis, en section 3, on établit le problème d'optimisation couplant optimisation paramétrique et géométrique. Une analyse des sensibilités de la fonction objectif choisie sera ensuite effectuée avant d'aborder, en section 4, les méthodes numériques utilisées dans ce chapitre. En section 5, on discutera des résultats d'optimisation et de l'impact des paramètres matériaux sur le design final. Enfin, ces résultats sont étendus en choisissant de résoudre le problème opposé afin de maximiser le retour élastique de la structure.

## 2 Vibration de plaques de Kirchhoff en viscoélasticité

Dans cette section, on présente le problème d'intérêt, la vibration libre d'une plaque viscoélastique satisfaisant les hypothèses du modèle de Kirchhoff-Love. Par conséquent, les contraintes normales ainsi que les contraintes de cisaillement sont négligées. La viscoélasticité linéaire du matériau est modélisée par un modèle de Maxwell Généralisé représenté Figure V.2.1 qui, en 2D, permet de prendre en compte la dépendance en fréquence du coefficient de Poisson.

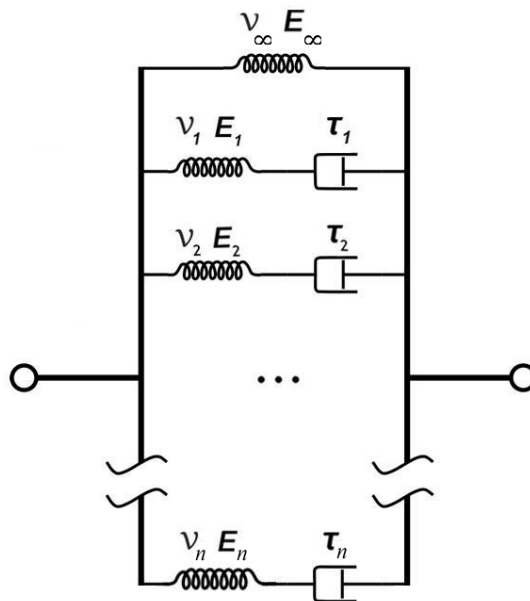


FIGURE V.2.1 – Schéma du modèle de Maxwell généralisé avec coefficients de Poisson.

On cherche à calculer la loi de comportement 2D de la plaque, pour cela on se ramène au plan moyen défini par

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in (0, L), x_2 \in \left( -\frac{W}{2}, \frac{W}{2} \right) \right\}. \quad (\text{V.2.1})$$

On applique des conditions de Dirichlet au bord encastré, noté  $\Gamma_D$ , à  $x_1 = 0$  et des conditions de Neumann libre d'effort aux bords restants, notés  $\Gamma_N$ . On reprend l'équation 1D (IV.2.1) issue du principe des travaux virtuels et on l'adapte au cas 2D où  $U(x_1, x_2, t)$  reste une quantité scalaire représentant le déplacement perpendiculaire au plan de la plaque. On note que, dû à la structure de plaque, la vibration libre est maintenant non seulement dépendant du module de Young  $E$  mais aussi du coefficient de Poisson  $\nu$ . On adapte également l'équation (IV.2.2) en 2D, le tenseur des déformations linéarisé  $\epsilon(U)$  est exprimé comme un vecteur à 3 composantes

$$\epsilon(U)(x_1, x_2, x_3, t) = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \\ -x_3 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \\ -x_3 \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \\ -2x_3 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \end{pmatrix},$$

et le déplacement  $U(x_1, x_2, t)$ , avec  $(x_1, x_2) \in \Omega$ , est supposé harmonique. La vibration libre de la plaque s'écrit donc

$$U(x_1, x_2, t) = u(x_1, x_2)e^{i\omega t}.$$

La contrainte de flexion de la plaque, qui est aussi un vecteur à 3 composantes, est donnée par

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, t) = C_\infty \epsilon(U)(x_1, x_2, x_3, t) + \int_{-\infty}^t R(t - \tau) \frac{\partial \epsilon(U)}{\partial \tau}(x_1, x_2, x_3, \tau) d\tau,$$

où le premier terme représente les contraintes relaxées, c'est à dire aux temps longs, avec  $C_\infty$  le tenseur de rigidité à l'équilibre. Le second terme représente quant à lui l'histoire des contraintes visqueuses de la structure avec  $R$  le tenseur des fonctions de relaxation. Ces tenseurs du second ordre sont exprimés comme suit :

$$C_\infty = \begin{pmatrix} \frac{E_\infty}{1-\nu_\infty^2} & \nu_\infty \frac{E_\infty}{1-\nu_\infty^2} & 0 \\ \nu_\infty \frac{E_\infty}{1-\nu_\infty^2} & \frac{E_\infty}{1-\nu_\infty^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_\infty}{2(1+\nu_\infty)} \end{pmatrix}, \quad R(\tau) = \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} \frac{E_j}{1-\nu_j^2} & \nu_j \frac{E_j}{1-\nu_j^2} & 0 \\ \nu_j \frac{E_j}{1-\nu_j^2} & \frac{E_j}{1-\nu_j^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_j}{2(1+\nu_j)} \end{pmatrix} e^{-\frac{\tau}{\tau_j}}.$$

Après intégration par parties, l'expression devient

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, t) = C_0 \epsilon(U)(x_1, x_2, x_3, t) + \int_{-\infty}^t \frac{\partial R}{\partial \tau}(t - \tau) \epsilon(U)(x_1, x_2, x_3, \tau) d\tau, \quad (\text{V.2.2})$$

où le premier terme représente la réponse instantanée, il est donné par

$$C_0 \epsilon(U)(x_1, x_2, x_3, t) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11} = c_{22} = \frac{E_\infty}{1 - \nu_\infty^2} + \sum_{j=1}^n \frac{E_j}{1 - \nu_j^2}, \\ c_{12} = \nu_\infty \frac{E_\infty}{1 - \nu_\infty^2} + \sum_{j=1}^n \nu_j \frac{E_j}{1 - \nu_j^2}, \\ c_{33} = \frac{E_\infty}{2(1 + \nu_\infty)} + \sum_{j=1}^n \frac{E_j}{2(1 + \nu_j)}. \end{array} \right.$$

Le second terme vaut

$$\int_{-\infty}^t \frac{\partial R}{\partial \tau}(t - \tau) \epsilon(U)(x_1, x_2, x_3, \tau) d\tau = - \int_{-\infty}^t \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{12} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} d\tau$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11} = r_{22} = \sum_{j=1}^n \frac{E_j}{(1 - \nu_j^2)\tau_j} e^{\frac{\tau-t}{\tau_j}}, \\ r_{12} = \sum_{j=1}^n \frac{\nu_j E_j}{(1 - \nu_j^2)\tau_j} e^{\frac{\tau-t}{\tau_j}}, \\ r_{33} = \sum_{j=1}^n \frac{E_j}{2(1 + \nu_j)\tau_j} e^{\frac{\tau-t}{\tau_j}}, \end{array} \right.$$

ce qui devient, dans le domaine fréquentiel,

$$\int_{-\infty}^t \frac{\partial R}{\partial \tau}(t - \tau) \epsilon(U)(x_1, x_2, x_3, \tau) d\tau = \begin{bmatrix} \tilde{r}_{11} & \tilde{r}_{12} & 0 \\ \tilde{r}_{12} & \tilde{r}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{r}_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \\ x_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \\ x_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \\ 2x_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{r}_{11} = \tilde{r}_{22} = \sum_{j=1}^n \frac{E_j}{(1 + i\omega\tau_j)(1 - \nu_j^2)}, \\ \tilde{r}_{12} = \sum_{j=1}^n \nu_j \frac{E_j}{(1 + i\omega\tau_j)(1 - \nu_j^2)}, \\ \tilde{r}_{33} = \sum_{j=1}^n \frac{E_j}{2(1 + i\omega\tau_j)(1 + \nu_j)}. \end{array} \right.$$

L'ensemble des déplacements admissibles est défini par

$$\mathcal{U}_2 = \left\{ u \in H^2(\Omega, \mathbb{C}) \mid u|_{\Gamma_D} = 0, \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_D} = 0 \right\}. \quad (\text{V.2.3})$$

Soient  $u, \hat{u} \in \mathcal{U}_2$ , les expressions de  $\sigma$  et  $\epsilon(\hat{u})$  sont substituées dans (IV.2.1), et après intégration explicite selon  $x_3$ , on obtient l'équation spatiale :

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \rho h \int_{\Omega} u \hat{u} \, dx + \frac{h^3}{12} \int_{\Omega} \left( (c_{11} - \tilde{r}_{11}) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_2^2} \right) + (c_{12} - \tilde{r}_{12}) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_1^2} \right) \right. \\ & \left. + 4(c_{33} - \tilde{r}_{33}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) dx = 0. \end{aligned}$$

Cette équation est ensuite réécrite en tant que problème aux valeurs propres polynomial complexe de la forme :

Trouver  $\omega \in \mathbb{C}$  et  $u \neq 0$  dans  $\mathcal{U}_2$  tel que

$$\sum_{j=0}^{n+2} \omega^j a_j(h, u, \hat{u}) = 0 \quad \forall \hat{u} \in \mathcal{U}_2, \quad (\text{V.2.4})$$

où la pulsation  $\omega$  représente la valeur propre complexe du problème de vibration et les  $a_j$  sont des formes bilinéaires symétriques complexes indépendantes de  $\omega$ , données explicitement en annexe A. Notons que l'on parle bien de formes symétriques complexes et non de formes Hermitiennes.

Lorsque le coefficient de Poisson est identique dans chaque branche de Maxwell, l'équation (V.2.4) peut être factorisée d'une façon similaire au cas de la poutre et être simplement résolue en tant que problème aux valeurs propres réel linéaire suivi d'une équation polynomiale complexe. Cependant, considérer un module de compressibilité constant entraîne la dépendance en fréquence du coefficient de Poisson, introduisant des non-linéarités dans le problème aux valeurs propres. Par conséquent, la factorisation n'est plus valide puisque la relation entre les tenseurs des contraintes et des déformations se complique considérablement. Le cas général sera considéré dans la suite de ce chapitre.

## 3 Optimisation couplée de plaques minces viscoélastiques

### 3.1 Énoncé du problème d'optimisation

Cette section présente le problème d'optimisation couplée de la forme et de l'épaisseur d'une plaque mince rectangulaire modélisée par le modèle de Maxwell généralisé. Les variables de design sont  $(h, \Omega) \in \mathcal{H}_{ad} \times \mathcal{V}_{ad}$ . Le bord encastré  $\Gamma_D$  est fixé alors que la position des bords libres  $\Gamma_N$  est soumise à l'optimisation. Une contrainte géométrique est imposée : toute forme admissible doit contenir une forme fixée et non-optimisable, notée  $\Omega_f$ , intérieure au domaine de travail, voir Figure V.3.2. Le rôle de cette contrainte est d'éviter les éventuels résultats triviaux où la matière s'accumule au bord encastré, souvent sous forme circulaire. Dans ce cas, on perd complètement la forme rectangulaire de la structure, ce qui est moins intéressant pour de potentielles applications. L'ensemble des formes admissibles  $\mathcal{V}_{ad}$  est défini par

$$\mathcal{V}_{ad} = \{ \Omega \in \mathbb{R}^2 \mid \Gamma_D \subset \partial\Omega, \Omega_f \subset \Omega \}, \quad (\text{V.3.1})$$

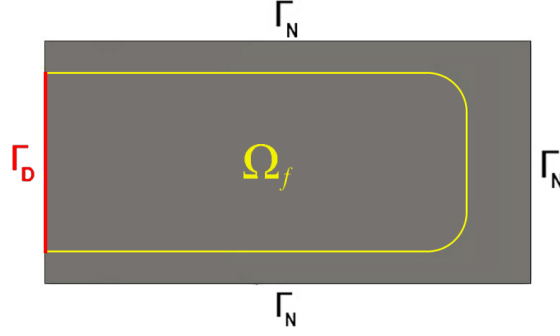


FIGURE V.3.2 – Représentation de la plaque initiale et de la contrainte géométrique.

et l'ensemble des profils d'épaisseur admissibles devient

$$\mathcal{H}_{ad} = \left\{ h \in L^\infty(\Omega) \mid h_{min} \leq h(x_1, x_2) \leq h_{max} \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega, V(h) = \int_{\Omega} h(x_1, x_2) dx = V_0 \right\}, \quad (\text{V.3.2})$$

pour  $V_0$  le volume initial de la structure. Pour ce problème, notons que la pulsation complexe  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  dépend implicitement de  $h$  et  $\Omega$ . On utilise la fonction objectif suivante

$$\mathcal{J}(h, \Omega) = -\frac{\omega_i(h, \Omega)}{\omega_r(h, \Omega)}. \quad (\text{V.3.3})$$

Le problème de minimisation s'écrit alors :

$$\inf_{(h, \Omega) \in \mathcal{H}_{ad} \times \mathcal{V}_{ad}} \mathcal{J}(h, \Omega). \quad (\text{V.3.4})$$

### 3.2 Analyse des sensibilités

La méthode de résolution proposée est une optimisation couplée alternant optimisation paramétrique sur l'épaisseur et optimisation géométrique sur la forme, à l'aide d'un algorithme de gradient dans les deux cas.

#### Sensibilité par rapport à l'épaisseur

Pour réaliser l'optimisation paramétrique, calculons la dérivée de  $\mathcal{J}$  par rapport à l'épaisseur. Dans la suite, la forme  $\Omega$  est fixée et la pulsation est notée  $\omega(h)$ . On commence par établir la dérivée de (V.2.4). Puisque les  $a_j$  sont des formes bilinéaires, on obtient

$$\sum_{j=0}^{n+2} j\omega(h)^{j-1} D\omega(h)\tilde{h} a_j(h, u, \hat{u}) + \omega(h)^j \left( D_h a_j(h, u, \hat{u})\tilde{h} + a_j(h, D_h u\tilde{h}, \hat{u}) \right) = 0 \quad \forall \hat{u} \in \mathcal{U}_2.$$

En utilisant la symétrie des  $a_j$  et en choisissant  $\hat{u} = u$ , on arrive à

$$\sum_{j=0}^{n+2} j\omega(h)^{j-1} D\omega(h)\tilde{h} a_j(h, u, u) + \omega(h)^j D_h a_j(h, u, u)\tilde{h} = 0,$$

d'où

$$D\omega(h)\tilde{h} = -\frac{\sum_{j=0}^{n+2} \omega(h)^j D_h a_j(h, u, u)\tilde{h}}{\sum_{j=1}^{n+2} j\omega(h)^{j-1} a_j(h, u, u)}. \quad (\text{V.3.5})$$

En écrivant les formes bilinéaires comme suit

$$a_j(h, u, \hat{u}) = \int_{\Omega} g_j(h(x), u(x), \hat{u}(x)) dx, \quad (\text{V.3.6})$$

l'équation (V.3.5) peut être réécrite sous la forme

$$D\omega(h)\tilde{h} = \int_{\Omega} W(h, u, u)\tilde{h} dx, \quad W(h, u, u)\tilde{h} = -\frac{\sum_{j=0}^{n+2} \omega(h)^j D_h g_j(h, u, u)\tilde{h}}{\sum_{j=1}^{n+2} j\omega(h)^{j-1} a_j(h, u, u)}, \quad (\text{V.3.7})$$

où la forme linéaire  $D_h g_j(h, u, u)\tilde{h}$  est un simple produit algébrique. La règle de dérivation composée appliquée à la fonction coût  $\mathcal{J}(h)$  donne l'expression

$$D\mathcal{J}(h)\tilde{h} = -\frac{\omega_r(h)D\omega_i(h)\tilde{h} - \omega_i(h)D\omega_r(h)\tilde{h}}{\omega_r(h)^2}. \quad (\text{V.3.8})$$

En injectant (V.3.7) dans (V.3.8) on obtient

$$D\mathcal{J}(h)\tilde{h} = \int_{\Omega} -\frac{\omega_r(h) \operatorname{Im}(W(h, u, u)) - \omega_i(h) \operatorname{Re}(W(h, u, u))}{\omega_r(h)^2} \tilde{h} dx, \quad (\text{V.3.9})$$

expression à partir de laquelle le gradient relatif au produit scalaire de  $L^2$  est immédiatement déduit.

### Sensibilité par rapport à la forme

L'optimisation géométrique est effectuée à l'aide du concept de dérivée de forme, introduit au chapitre III. On se place dans le cadre de Murat et Simon suivant la méthode d'Hadamard. Pour un domaine de référence  $\Omega$  donné, on considère le domaine perturbé

$$\Omega_{\theta} = (Id + \theta)\Omega \text{ avec } \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2).$$

On rappelle que  $\theta$  peut être vu comme un champ vectoriel dérivable (au sens faible), de dérivée uniformément bornée, réalisant l'advection du domaine de référence. De plus, pour  $\theta$  suffisamment petit pour la norme  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ , l'application  $(Id + \theta)$  est une bijection  $\mathbb{R}^2$ . On rappelle également le Lemme III.2.1, important pour la suite :

**Lemme III.2.1.** *Soit  $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ , on considère la fonctionnelle*

$$F(\Omega) = \int_{\Omega} f(x) dx.$$



Alors  $F$  est différentiable par rapport à  $\Omega$  et sa dérivée de forme est donnée par

$$D_{\Omega}F(\Omega)\theta = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\theta(x)f(x))dx = \int_{\partial\Omega} f(s)\theta(s) \cdot n(s)ds. \quad (\text{V.3.10})$$

où  $n$  est la normale extérieure à la frontière.

Avant de calculer la dérivée de forme dans le contexte étudié, l'évolution de l'épaisseur durant l'optimisation de forme doit être spécifiée. En suivant la méthode de [67], le profil d'épaisseur  $h$  sera transporté par le même difféomorphisme pendant la déformation de la forme :

$$h_{\theta} = h \circ (Id + \theta)^{-1}.$$

Sans adopter cette méthode, il est nécessaire de préciser comment  $h$  est étendu en dehors de  $\Omega$  lorsque l'on déforme celui-ci. Pour alléger les écritures, la fonction objectif est maintenant notée

$$j(\Omega) = \mathcal{J}(h_{\theta}, \Omega), \quad (\text{V.3.11})$$

et la pulsation  $\omega(h_{\theta}, \Omega)$  sera simplement notée  $\omega$ . On réécrit le problème (V.2.4) comme suit :

$$\sum_{j=0}^{n+2} \omega^j a_j(h, \Omega, u, \hat{u}) = 0 \quad \forall \hat{u} \in \mathcal{U}_2,$$

où les formes bilinéaires symétriques complexes sont exprimées par

$$a_j(h, \Omega, u, \hat{u}) = \int_{\Omega} g_j(h, u, \hat{u})dx \quad \forall j \in \llbracket 0, n+2 \rrbracket.$$

**Proposition V.3.1.** *Pour tout  $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  tel que  $\theta = 0$  sur  $\Gamma_D$  et  $\Omega_f \subset \Omega$ , la dérivée de forme de  $j(\Omega)$  est donnée par*

$$\begin{aligned} D_{\Omega}j(\Omega)\theta &= - \int_{\Gamma_N} \frac{\omega_r \operatorname{Im}(f(\omega, h, u)) - \omega_i \operatorname{Re}(f(\omega, h, u))}{\omega_r^2} \theta \cdot n ds \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\omega_r D_h \omega_i - \omega_i D_h \omega_r}{\omega_r^2} \theta \cdot \nabla h dx, \end{aligned} \quad (\text{V.3.12})$$

où  $f(\omega, h, u)$  est définie par

$$f(\omega, h, u) = - \frac{\sum_{j=0}^{n+2} \omega^j g_j(h, u, u)}{\sum_{j=1}^{n+2} j \omega^{j-1} a_j(h, \Omega, u, u)}. \quad (\text{V.3.13})$$

La première intégrale de (V.3.12) est le terme classique d'une dérivée de forme, la seconde est un terme venant du fait que la déformation de la forme change la distribution de l'épaisseur à l'intérieur.

*Preuve.* En utilisant la règle de dérivation composée et la linéarité des  $a_j$ , la dérivée du problème (V.2.4) par rapport à la forme avec  $u$  et  $\hat{u}$  fixés, suivant la méthode de Céa, s'écrit :

$$\sum_{j=0}^{n+2} j\omega^{j-1} D_\Omega \omega \theta a_j(h, \Omega, u, \hat{u}) + \omega^j \left( D_\Omega a_j(h, \Omega, u, \hat{u}) \theta + a_j(h, \Omega, D_\Omega u \theta, \hat{u}) \right) = 0 \quad \forall \hat{u} \in \mathcal{U}_2.$$

Par symétrie des  $a_j$  et en choisissant  $\hat{u} = u$ , on obtient

$$\sum_{j=0}^{n+2} j\omega^{j-1} D_\Omega \omega \theta a_j(h, \Omega, u, u) + \omega^j D_\Omega a_j(h, \Omega, u, u) \theta = 0,$$

ainsi

$$D_\Omega \omega \theta = - \frac{\sum_{j=0}^{n+2} \omega^j D_\Omega a_j(h, \Omega, u, u) \theta}{\sum_{j=1}^{n+2} j\omega^{j-1} a_j(h, \Omega, u, u)}.$$

En appliquant le Lemme (III.2.1), la dérivée de forme de  $\omega$  est exprimée par

$$D_\Omega \omega \theta = \int_{\Gamma_N} - \frac{\sum_{j=0}^{n+2} \omega^j g_j(h, u, u)}{\sum_{j=1}^{n+2} j\omega^{j-1} a_j(h, \Omega, u, u)} \theta \cdot n \, ds = \int_{\Gamma_N} f(\omega, h, u) \theta \cdot n \, ds. \quad (\text{V.3.14})$$

Pour  $\theta$  petit, le développement de Taylor de  $\theta \mapsto h_\theta$  donne

$$h_\theta = h \circ (Id + \theta)^{-1} = h - \theta \cdot \nabla h + o(\theta),$$

la dérivée de forme de la fonction coût s'écrit alors

$$D_\Omega j(\Omega) \theta = D_\Omega \mathcal{J}(h, \Omega) \theta - \int_\Omega D_h \mathcal{J}(h, \Omega) \theta \cdot \nabla h \, dx.$$

La règle de dérivation composée permet d'en déduire

$$D_\Omega j(\Omega) \theta = - \frac{\omega_r D_\Omega \omega_i - \omega_i D_\Omega \omega_r}{\omega_r^2} \theta + \int_\Omega \frac{\omega_r D_h \omega_i - \omega_i D_h \omega_r}{\omega_r^2} \theta \cdot \nabla h \, dx.$$

En substituant la dérivée de forme de  $\omega$  à l'aide de (V.3.14), on obtient le résultat.  $\square$

En suivant la même méthode, on établit le Lemme suivant :

**Lemme V.3.1.** *La dérivée de forme du volume*

$$v(\Omega) = \int_\Omega h_\theta(x) \, dx$$

est donnée par

$$D_\Omega v(\Omega) \theta = \int_\Gamma h \theta \cdot n \, ds - \int_\Omega \theta \cdot \nabla h \, dx. \quad (\text{V.3.15})$$

## 4 Méthodes numériques

Le problème de flexion d'une plaque mince viscoélastique est un problème d'ordre 4, cependant, en 2D, la formulation mixte requière un travail supplémentaire considérable [116]. Comme discuté au chapitre 3, on résout ce problème en utilisant des éléments non conformes, les éléments de Morley. Afin de résoudre le problème aux valeurs propres polynomiales complexes (V.2.4), on emploie les solveurs polynomiaux de la librairie **SLEPc** [79], interfacée sur **FreeFem++** par P.Jolivet. Afin de permettre au solveur une recherche efficace de la valeur propre d'intérêt, il est nécessaire de donner une valeur initiale de  $\omega$ , assez proche de la première pulsation propre, afin de localiser la recherche de valeur propre. L'initialisation demande donc une courte période d'essai-erreur, en vérifiant toujours qu'il s'agisse bien de la première valeur propre en traçant le mode correspondant. Puis, à chaque itération de l'algorithme, le solveur cherche une valeur propre dont la partie réelle est proche de celle de la pulsation de l'itération précédente. De plus, on ne demande qu'une seule valeur propre, cela permet de réduire le temps de calcul et d'éviter les éventuels points d'accumulation parfois présents pour les modes suivants. La bonne convergence du solveur est ensuite vérifiée à chaque itération par le calcul du résidu.

La procédure générale de l'optimisation couplée est d'utiliser une méthode de directions alternées, optimisant l'épaisseur et la forme à l'aide d'algorithmes de descente de gradient à pas variable. Le profil d'épaisseur  $h$  est mis à jour à chaque itération à l'aide de la méthode utilisée dans le chapitre IV, adaptée ici au cas de la plaque. La forme  $\Omega$  est mise à jour toutes les  $m$  itérations en utilisant la méthode de variation de frontière d'Hadamard ainsi que la méthode de déformation de maillage. Changer  $m$  affecte la vitesse de convergence mais peut également mener à différents minima locaux. Les résultats présentés dans la section suivante ont pour paramètre  $m = 3$ , ce qui semble être le plus efficace. Contrairement au cas de la poutre, l'optimisation couplée est sujette aux minima locaux. Plusieurs optimisations avec différentes initialisations ont donc été effectuées et comparées afin de réduire la possibilité d'obtenir un design suboptimal. On présente les résultats de l'optimisation paramétrique seule, puis de l'optimisation géométrique seule, et enfin de l'optimisation couplée. Un maillage triangulaire structuré 100x50 est utilisé pour la résolution numérique du problème d'optimisation paramétrique et un maillage triangulaire non structuré est utilisé pour le problème d'optimisation géométrique ainsi que pour l'optimisation couplée. Des résultats similaires sont observés pour des maillages plus fins.

Afin de déformer le maillage, le champ de déplacement  $\theta \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , réalisant l'advection de la forme, est construit à partir de la combinaison linéaire de la dérivée de forme de la fonction objectif (V.3.12) et de la dérivée de forme du volume (V.3.15) :

$$\begin{aligned}
 D_{\Omega}(j + \ell v)(\Omega)\theta &= \int_{\Gamma_N} \left( -\frac{\omega_r \operatorname{Im}(f(\omega, h, u)) - \omega_i \operatorname{Re}(f(\omega, h, u))}{\omega_r^2} + \ell h \right) \theta \cdot n \, ds \\
 &+ \int_{\Omega} \left( \frac{\omega_r D_h \omega_i - \omega_i D_h \omega_r}{\omega_r^2} - \ell \right) \theta \cdot \nabla h \, dx,
 \end{aligned} \tag{V.4.1}$$

où  $\ell$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de volume et  $f$  est définie par l'équation (V.3.13). Comme discuté au chapitre III, on réalise la régularisation de  $\theta$  afin d'augmenter la régularité de la solution et d'éviter de potentielles oscillations de la

frontière. De plus, cela permet d'assurer la continuité  $\theta$  au voisinage de la frontière, ce qui n'est pas nécessairement le cas lorsque l'on étend la définition de  $\theta$  à l'intérieur de  $\Omega$ . Cette régularisation repose sur le produit scalaire de  $H^1$  que l'on rappelle et applique à notre cas d'étude

$$\int_{\Omega} (\eta^2 \nabla \theta \cdot \nabla \hat{\theta} + \theta \cdot \hat{\theta}) dx = -D_{\Omega} (j + \ell v) (\Omega) \hat{\theta} \quad \forall \hat{\theta} \in H^1(\Omega), \quad (\text{V.4.2})$$

ce qui implique que le champ de déplacement  $\theta$  est solution du système suivant :

$$\begin{cases} -\eta^2 \Delta \theta + \theta = \left( -\frac{\omega_r D_h \omega_i - \omega_i D_h \omega_r}{\omega_r^2} + \ell \right) \nabla h & \text{dans } \Omega \\ \theta = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \eta^2 \frac{\partial \theta}{\partial n} = \left( \frac{\text{Im}(f(\omega)) \omega_r - \omega_i \text{Re}(f(\omega))}{\omega_r^2} - \ell h \right) n & \text{on } \Gamma_N. \end{cases} \quad (\text{V.4.3})$$

Le paramètre de régularisation  $\eta$  est ici de l'ordre de la taille d'une maille. Finalement, le maillage tout entier est déformé par le champ  $\theta$ , solution de (V.4.3). Le coût de calcul de l'optimisation reste raisonnable en 2D. Pour un spectre de 25 temps par exemple, la durée de l'optimisation ne dépasse pas 15 minutes. On se permet donc de remailler à chaque mise à jour de la forme pour s'assurer de la bonne qualité du maillage.

Les contraintes sont appliquées en projetant respectivement  $h$  et  $\theta$  sur les ensembles  $\mathcal{H}_{ad}$  et  $\mathcal{V}_{ad}$  tel que  $V(h, \Omega) = V_0$ . La projection de  $h$  sur  $\mathcal{H}_{ad}$  consiste simplement à ajuster le multiplicateur de Lagrange  $\ell$  par dichotomie, similairement au cas 1D. La projection de la forme sur  $\mathcal{V}_{ad}$  est effectuée en projetant les nœuds du bord sur  $\Omega_f$ , si ceux-ci traversent la frontière de  $\Omega_f$ , ou sur la droite  $x_1 = 0$  s'ils la traversent. Il existe plusieurs façons de réaliser cette projection. Plutôt que d'effectuer une projection orthogonale, prenant le risque de retourner les mailles, on effectue une projection selon le vecteur déplacement  $\theta$  (Figure V.4.3).

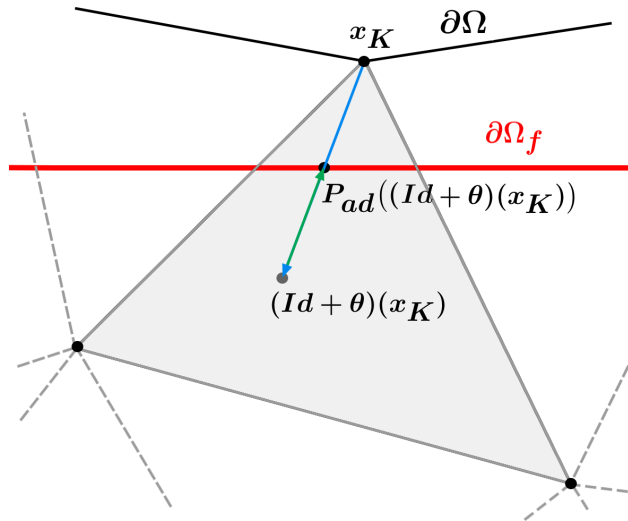


FIGURE V.4.3 – Schéma de la projection de la forme sur l'ensemble admissible appliquée selon la direction  $\theta$ .

Le retournement des mailles lors de l'optimisation géométrique par déformation de maillage est une difficulté à ne pas négliger. Ce phénomène peut être causé par différents aspects du problème, la projection en est un exemple. Pour ce travail, on choisit de projeter selon  $\theta$  par rapport à une forme  $\Omega_f$  aux angles arrondis. Pour une forme aux angles droits, la procédure est plus délicate. En effet, il est bien plus difficile de projeter les nœuds proches des angles tout en conservant un maillage de qualité. En outre, un pas trop grand peut également provoquer des retournements de mailles. Ainsi, avant d'effectuer le test vérifiant la diminution de la fonction objectif, on vérifie la présence de maille retournée. Dans ce cas, le pas est réduit jusqu'à l'obtention d'un maillage dépourvu de tels défauts.

Comme détaillé au chapitre III, l'optimisation géométrique par déformation de maillage est réalisée à l'aide de deux maillages. Un maillage grossier permettant de déformer la forme, et un maillage plus fin, suivant ce dernier, sur lequel on résout le problème de vibration. La régularisation de  $\theta$  par le produit scalaire de  $H^1$  n'est parfois pas suffisant pour obtenir une frontière de régularité satisfaisante. Pour s'assurer de la bonne qualité du maillage, en particulier des éléments proches des frontières, on utilise la fonction `adaptmesh` de `FreeFem++` pour réaliser une adaptation de maillage accompagnée d'une régularisation. On doit pour cela préciser plusieurs paramètres, citons les plus importants : la taille minimum et maximum d'une maille, le seuil d'erreur de l'adaptation de maillage, le ratio de la métrique de régularisation et le nombre d'itération de la procédure de régularisation. La fonction `adaptmesh` permet de réaliser un remaillage automatique à métrique variable. Dans notre cas, la métrique sera la hessienne de la fonction  $\theta$ .

Dans ce travail, on considère principalement des polymères thermodurcissables puisque  $E_\infty$  a été choisi différent de zéro. Cependant, on pourrait aisément appliquer ce problème d'optimisation aux polymères thermoplastiques. Dans ce cas  $E_\infty$  est nul, tout comme  $a_0$ , le terme de degré zéro du problème aux valeurs propres polynomial. Cela peut présenter des difficultés numériques pour la convergence du solveur spectral. Une simple factorisation par  $\omega$  de (V.2.4), réalisée en amont, permet de réduire le degré du polynôme et améliore ainsi la précision du solveur.

## 5 Résultats numériques

On présente dans cette section les résultats de différents problèmes d'optimisation. On commence par étudier une plaque composée d'un matériau réaliste, modélisé par le modèle de Maxwell généralisé, en découplant tout d'abord les optimisations puis en effectuant l'optimisation simultanée de l'épaisseur et de la forme. Ensuite, on effectuera une analyse de l'impact des paramètres matériaux sur le design optimisé et ses performances pour un matériau simple, modélisé par le modèle de Zener.

La plaque de référence est rectangulaire, de longueur  $L = 60$  mm, largeur  $W = 30$  mm et épaisseur initiale  $h_0 = 3$  mm. L'épaisseur varie entre les bornes  $h_{min} = 2$  mm et  $h_{max} = 4$  mm durant l'optimisation. La contrainte de boîte est ici choisie plus stricte afin de clairement mettre en évidence l'influence des paramètres sur l'optimisation. La densité vaut  $\rho = 1000$   $kg.m^{-3}$ , les propriétés mécaniques du matériau réel sont celles décrites au chapitre IV et on suppose que le module de compressibilité est constant égal à 3 GPa. On en déduit ensuite

le coefficient de Poisson en déterminant les valeurs associées à chaque branche du modèle. Les propriétés du matériau de Zener sont  $E_\infty = 18$  MPa,  $E_1 = 30$  MPa,  $\tau_1 = 0.002$  s et, en considérant le module de compressibilité constant  $K = 3$  GPa, on obtient les coefficients de Poisson  $\nu_\infty = 0.499$  et  $\nu_1 = 0.498$ .

## 5.1 Optimisation d'une plaque mince constituée d'un polymère réaliste

### Optimisation paramétrique

Commençons par effectuer l'optimisation paramétrique de l'épaisseur de la plaque. Le profil final de la plaque optimisée ainsi que l'amplitude des vibrations libres sont représentés et comparés à l'état initial, Figure V.5.4. Similairement au cas de la poutre, le matériau est distribué au bord encastré, augmentant le décrément logarithmique de la vibration de

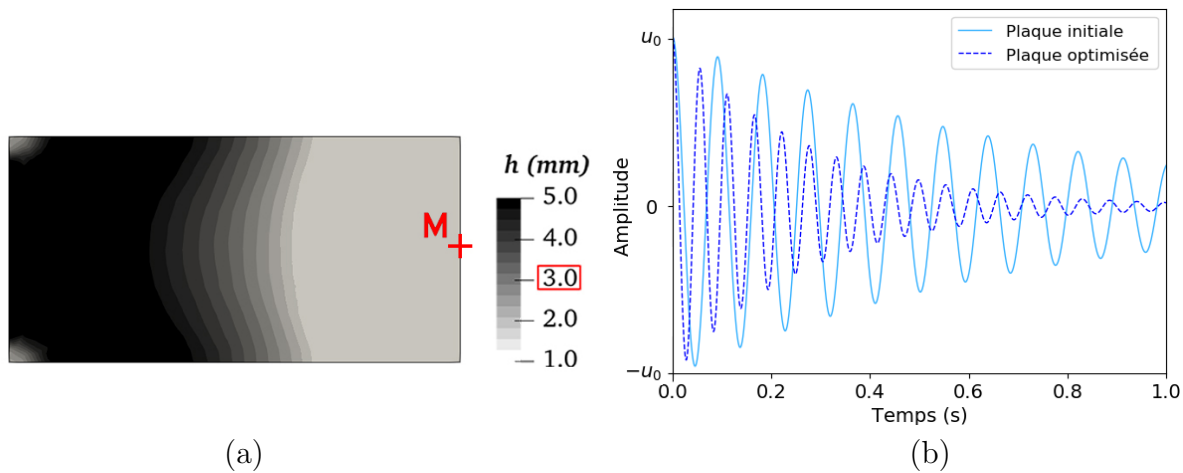


FIGURE V.5.4 – (a) Profil d'épaisseur de la plaque optimisée et (b) comparaison de l'amplitude des vibrations libres au point M de la plaque initiale et de la plaque optimisée en épaisseur, pour le matériau modélisé par le modèle de Maxwell généralisé (table 6.1).

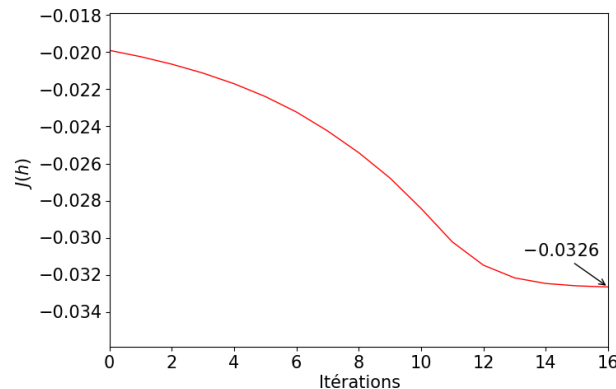


FIGURE V.5.5 – Convergence de la fonction coût par rapport au nombre d'itérations pour l'optimisation en épaisseur de l'amortissement d'une plaque viscoélastique rectangulaire.

façon significative. La fonction objectif converge, validant l'efficacité de l'algorithme, comme illustré Figure V.5.5. Notons que les modes propres, présentés Figure V.5.6, sont quasiment indépendants de l'optimisation et des propriétés matériau, tout comme le cas de la poutre.

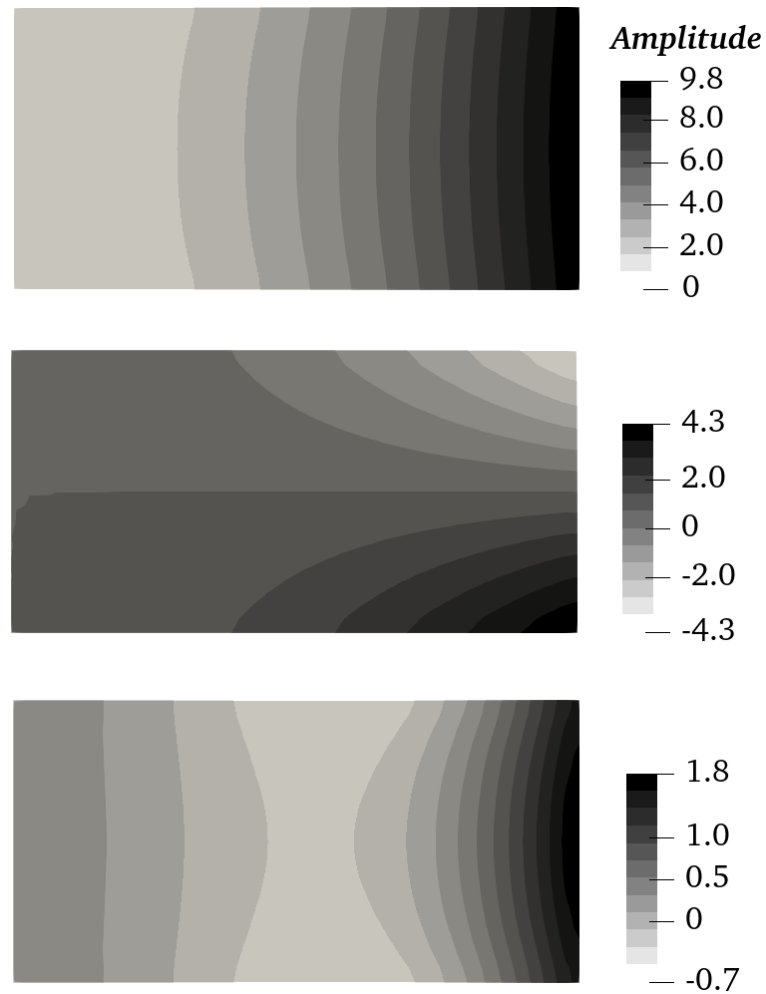


FIGURE V.5.6 – Représentation des trois premiers modes propres de la plaque optimisée.

### Optimisation géométrique

On effectue ensuite l'optimisation géométrique de la plaque de référence en maintenant l'épaisseur constante. De la même façon, le matériau est redistribué au bord encastré de la plaque, augmentant la fréquence et le coefficient de décroissance exponentielle de la vibration, voir Figure V.5.7. La forme de la plaque change considérablement afin d'atteindre les performances optimales. De plus, pour cet exemple, la valeur finale de la fonction objectif pour l'optimisation géométrique est proche de la valeur finale de l'optimisation paramétrique. La comparaison des courbes de convergence Figures V.5.5 et V.5.8 montre des gains similaires pour les paramètres d'optimisation choisis.

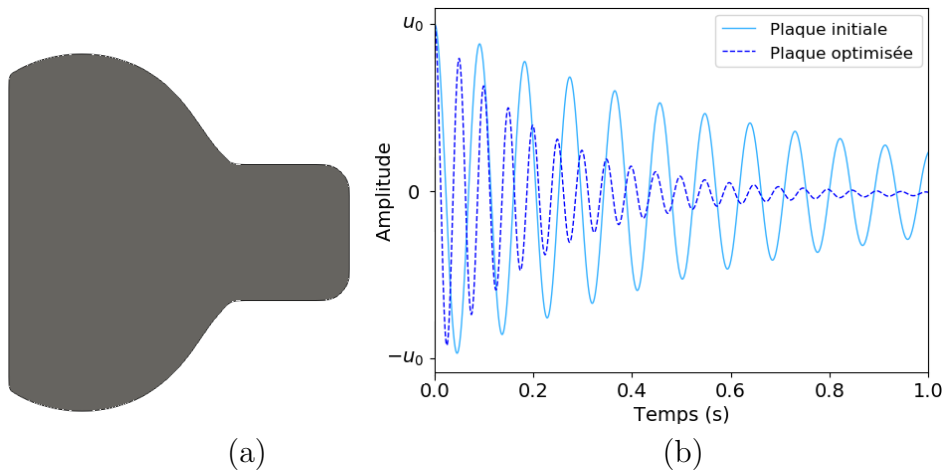


FIGURE V.5.7 – (a) Forme optimisée d'une plaque d'épaisseur constante 3 mm et (b) comparaison de l'amplitude des vibrations libres résultantes comparées aux vibrations de la plaque rectangulaire initiale.

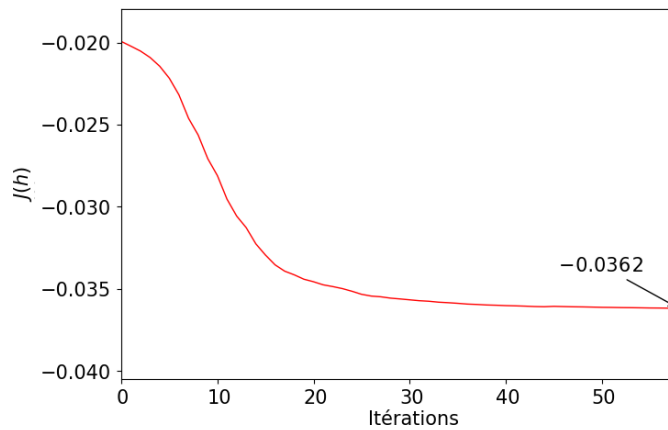


FIGURE V.5.8 – Convergence de la fonction coût par rapport au nombre d'itérations de l'optimisation de forme pour un matériau réaliste.



### Optimisation couplée

Enfin, on optimise alternativement le profil d'épaisseur et la forme de la plaque pour  $m = 3$ , c'est à dire en mettant à jour le profil d'épaisseur 3 fois entre chaque mise à jour de la forme. Pour le matériau viscoélastique modélisé par le modèle de Maxwell généralisé, le design final est représenté Figure V.5.9. L'optimisation couplée permet d'obtenir un gain d'amortissement substantiel, illustré par les courbes de vibration. Grâce à l'optimisation combinée des deux paramètres précédents, la valeur finale de fonction objectif est maintenant considérablement plus basse, voir Figure V.5.10. On remarque qu'à partir de la 20<sup>e</sup> itération, l'évolution de la fonction objectif est en escalier. En effet, l'optimisation du profil d'épaisseur est alors presque complète, et c'est principalement l'optimisation géométrique qui permet ensuite de diminuer la fonction coût. Cette observation est cohérente avec le nombre d'itérations nécessaires aux précédentes optimisations, 15 pour l'optimisation de l'épaisseur et 30 pour l'optimisation de la géométrie.

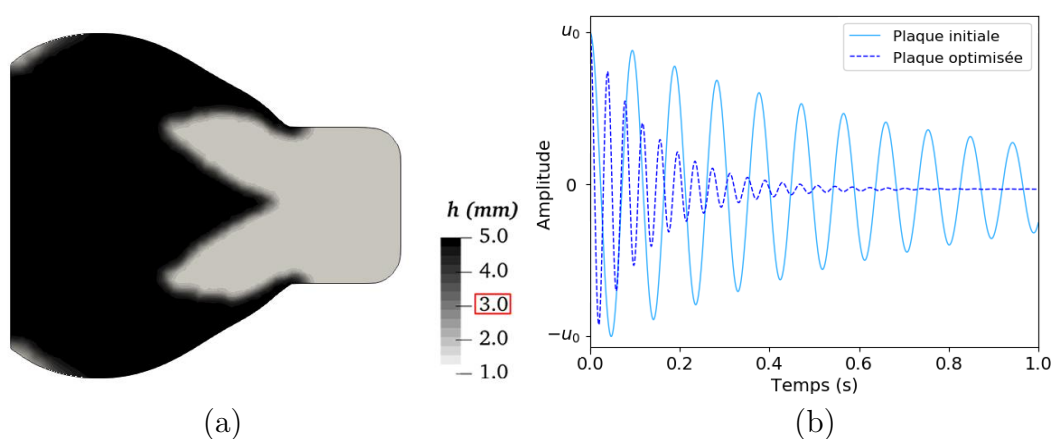


FIGURE V.5.9 – (a) Forme et profil d'épaisseur optimisé pour une plaque initiale rectangulaire d'épaisseur  $h_0 = 3$  mm et (b) comparaison de l'amplitude des vibrations libres du design optimisé et du design initial.

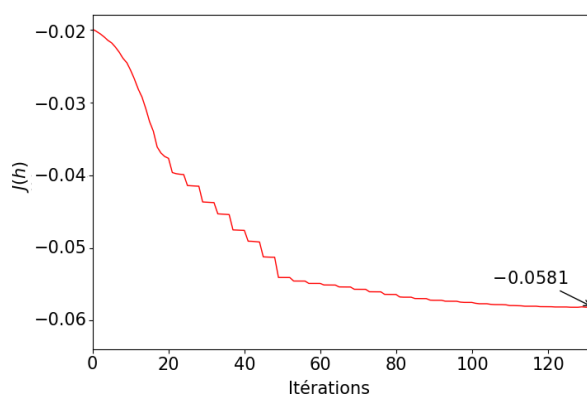


FIGURE V.5.10 – Convergence de la fonction objectif par rapport au nombre d'itérations pour l'optimisation couplée d'une plaque rectangulaire constituée d'un matériau réaliste.

Les résultats des différentes optimisations réalisées dans le cas d'étude choisi sont comparés en table 5.1. Comme attendu, l'optimisation couplée permet d'obtenir un design bien plus performant que les optimisations précédentes, proposant un gain relatif de 192% par rapport à la valeur du décrement logarithmique de la plaque initiale.

Type d'optimisation	Valeur finale de la fonction coût	Gain relatif	Nombre d'itérations avant convergence
Paramétrique	-0.0326	63 %	15
Géométrique	-0.0362	82 %	30
Couplée	-0.0581	192 %	120

TABLE 5.1 – Comparaison des résultats de l'optimisation paramétrique, géométrique et couplée et évaluation des gains d'amortissement relatifs.

## 5.2 Étude des paramètres matériaux

On utilise maintenant le modèle de Zener pour l'analyse des paramètres matériaux. Le module de la branche élastique  $E_\infty$  (Figure V.5.11) et celui de la branche viscoélastique  $E_1$  (Figure V.5.12) ont un impact considérable sur le profil d'épaisseur mais également sur la forme. Lorsque  $E_\infty$  augmente, la vibration des plaques initiales et optimisées tend vers celle d'un matériau purement élastique. Entre  $E_\infty = 18$  MPa et  $E_\infty = 40$  MPa en particulier, on remarque que le profil d'épaisseur du design final ne change plus, seule la forme varie. À l'inverse, quand le module de la branche viscoélastique  $E_1$  augmente, les vibrations deviennent de plus en plus amorties et les variations d'épaisseurs sont de moins en moins abruptes. On passe d'un profil composé presque exclusivement des deux valeurs,  $h_{min}$  et  $h_{max}$ , à un gradient régulier d'épaisseur. La Figure V.5.13 présente les design optimisés pour différentes valeurs de  $\tau_1$  à  $E_\infty$  et  $E_1$  fixés. Le profil est très sensible aux variations du temps de relaxation, plus  $\tau_1$  augmente, plus le matériau est redistribué au bord libre jusqu'à l'inversion du profil et de la géométrie. D'un point de vue applications mécaniques, cela veut aussi dire que le design optimal ainsi que le comportement en vibration sont sensibles à la température d'utilisation de la pièce.

Le dernier paramètre d'intérêt est le coefficient de Poisson. Dans un premier exemple,  $\nu_0$  est fixé et on étudie l'impact de  $\nu_1$  sur l'optimisation. Comme présenté Figure V.5.14, ce paramètre a un impact fort sur la géométrie de la plaque optimisée. Bien que la valeur du coefficient de Poisson ne diffère que de 0.02, les designs obtenus dans les cas (a) et (b) sont significativement différents. Cependant, l'amplitude des vibrations libres montre que l'amortissement reste presque inchangé, seuls les designs finaux varient. On obtient donc différents designs menant à des comportements vibratoires similaires, ce qui peut être intéressant pour s'adapter à d'éventuelles contraintes d'ingénierie. Pour comparer l'impact sur le comportement en vibration, on compare Figure V.5.15 les vibrations des profils (a) et (c) pour la même valeur  $\nu_1 = 0.4$ . Malgré des designs considérablement différents, la différence de décrement logarithmique reste faible, d'environ 5%. On met maintenant en perspective les hypothèses de coefficient de Poisson constant ou de module de compressibilité constant. Tandis que choisir  $\nu$  constant est le choix le plus commun et constitue un moyen de

simplifier la résolution numérique, choisir  $K$  constant permet une représentation plus précise du comportement d'un matériau réel. Considérons dans un premier temps que les coefficients de Poisson de chaque branche du modèle sont égaux. En fonction du couple  $(E_j, \tau_j)$ , deux configurations différentes peuvent survenir, soit le design présente des variations abruptes d'épaisseur (Figure V.5.16), saturant les bornes, soit il présente une répartition régulière de l'épaisseur (Figure V.5.17). Quand les profils abruptes sont obtenus, le même minimum local est atteint pour un intervalle de valeurs de coefficient de Poisson, où deux designs d'optimisation différents sont obtenus pour un coefficient de Poisson de chaque coté de la valeur seuil 0.465 (Figure V.5.16). En revanche, lorsque que des profils réguliers sont obtenus, le coefficient de Poisson impacte le design final, mais sans modifier le comportement en vibration de manière significative. La magnitude de ces variations dépend du matériau, celles-ci peuvent être importantes, comme discuté précédemment, ou plus légères (Figure V.5.17). Dans tous les cas, le design final est sensible aux variations du coefficient de Poisson malgré des modes propres et des amplitudes de vibration similaires.

Enfin, le module de compressibilité est supposé constant et la dépendance en fréquence du coefficient de Poisson est prise en compte. Pour les profils d'épaisseur finaux abruptes, tels que ceux présentés Figure V.5.16, l'algorithme peut mener à des minima locaux différents du cas  $\nu$  constant, c'est à dire à des designs différents. Pour les profils finaux réguliers, tels que ceux obtenus Figure V.5.17, plus l'intervalle des coefficients de Poisson  $\nu_i$  est grand, plus la différence avec le cas  $\nu$  constant sera importante. Dans la suite, on considérera toujours l'hypothèse d'un module de compressibilité constant puisque, de l'état vitreux à l'état caoutchoutique, celle-ci semble la plus proche de la réalité.

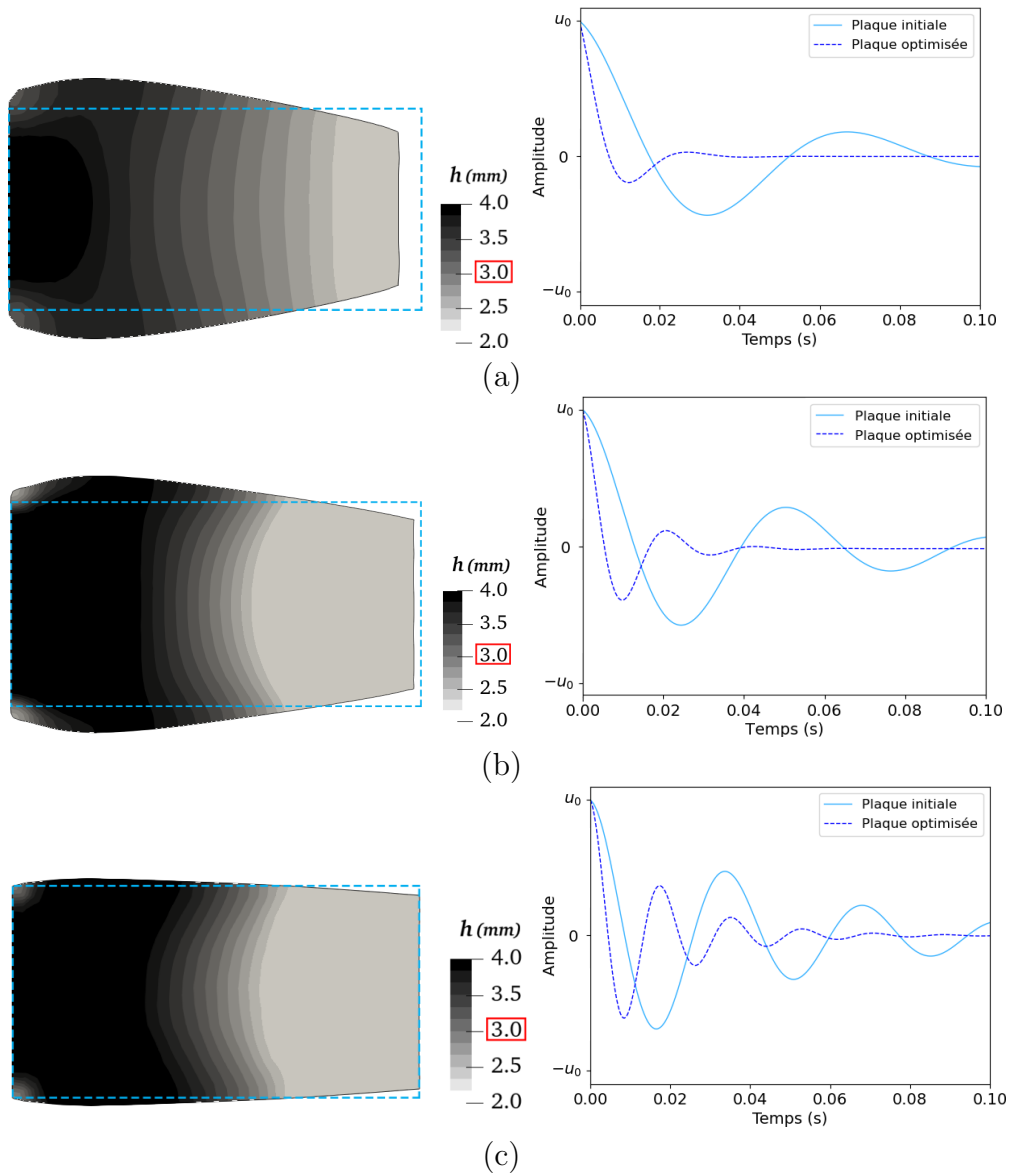


FIGURE V.5.11 – Profil d'épaisseur et amplitude des vibrations libres de la plaque initiale et de la plaque optimisée modélisées par un modèle de Zener pour différents modules (a)  $E_\infty = 10$  MPa (b)  $E_\infty = 18$  MPa (c)  $E_\infty = 40$  MPa.

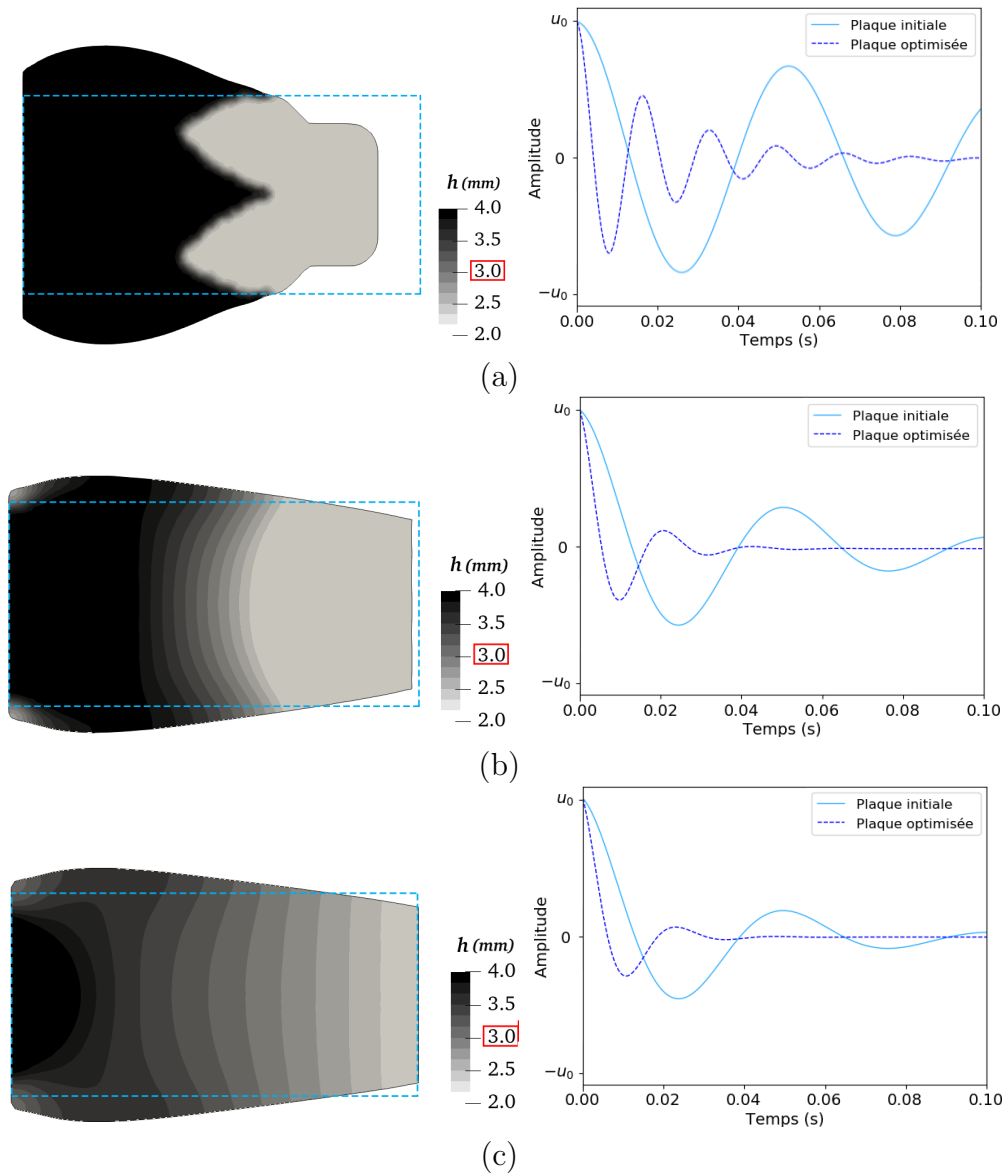


FIGURE V.5.12 – Profil d'épaisseur et amplitude des vibrations libres des plaques considérées pour différents modules (a)  $E_1 = 10$  MPa (b)  $E_1 = 30$  MPa (c)  $E_1 = 40$  MPa.

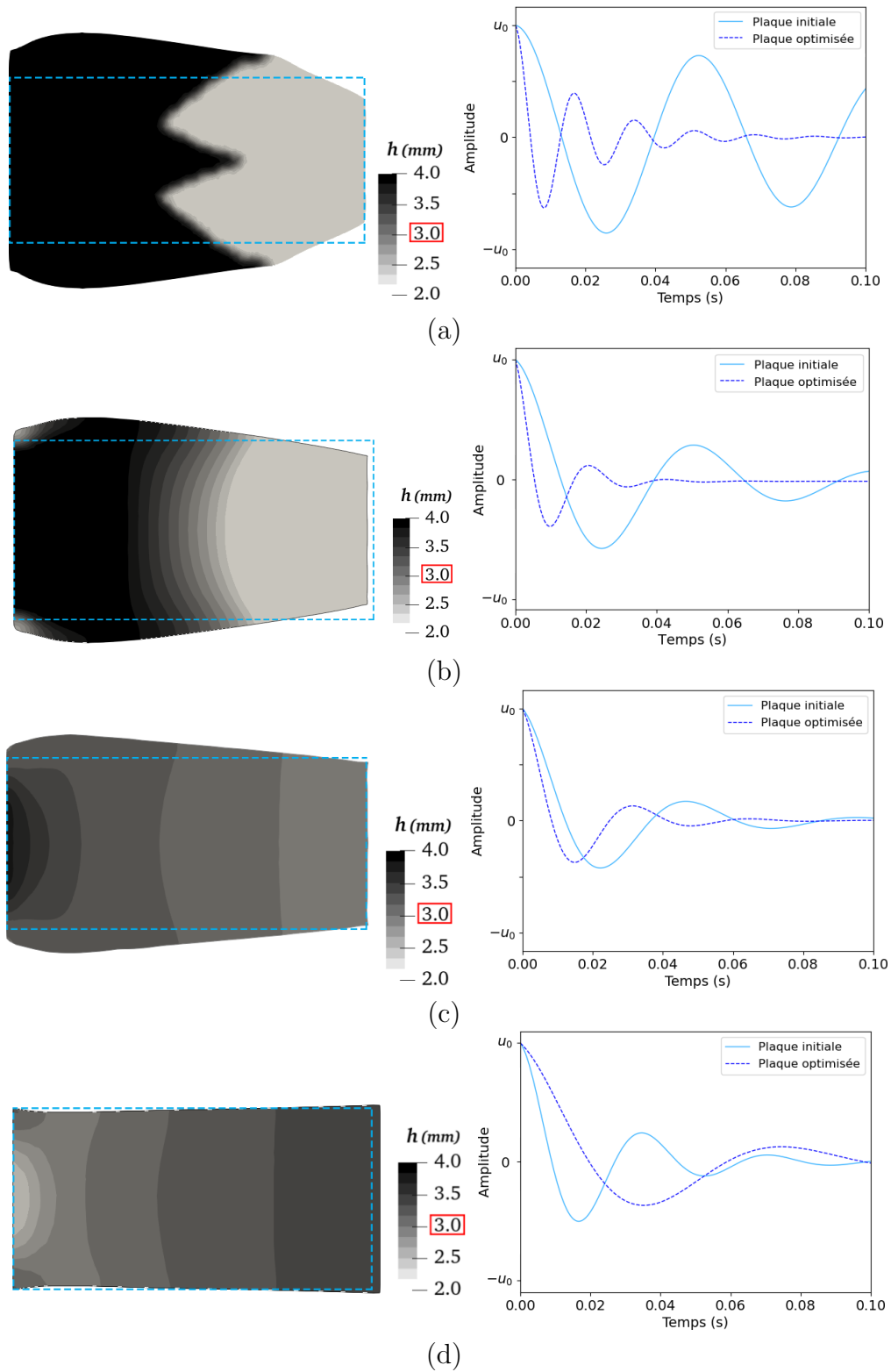


FIGURE V.5.13 – Profil d'épaisseur et amplitude des vibrations libres des plaques initiales et optimisées pour différents temps de relaxation (a)  $\tau_1 = 0.0005$  s (b)  $\tau_1 = 0.002$  s (c)  $\tau_1 = 0.003$  s (d)  $\tau_1 = 0.007$  s.

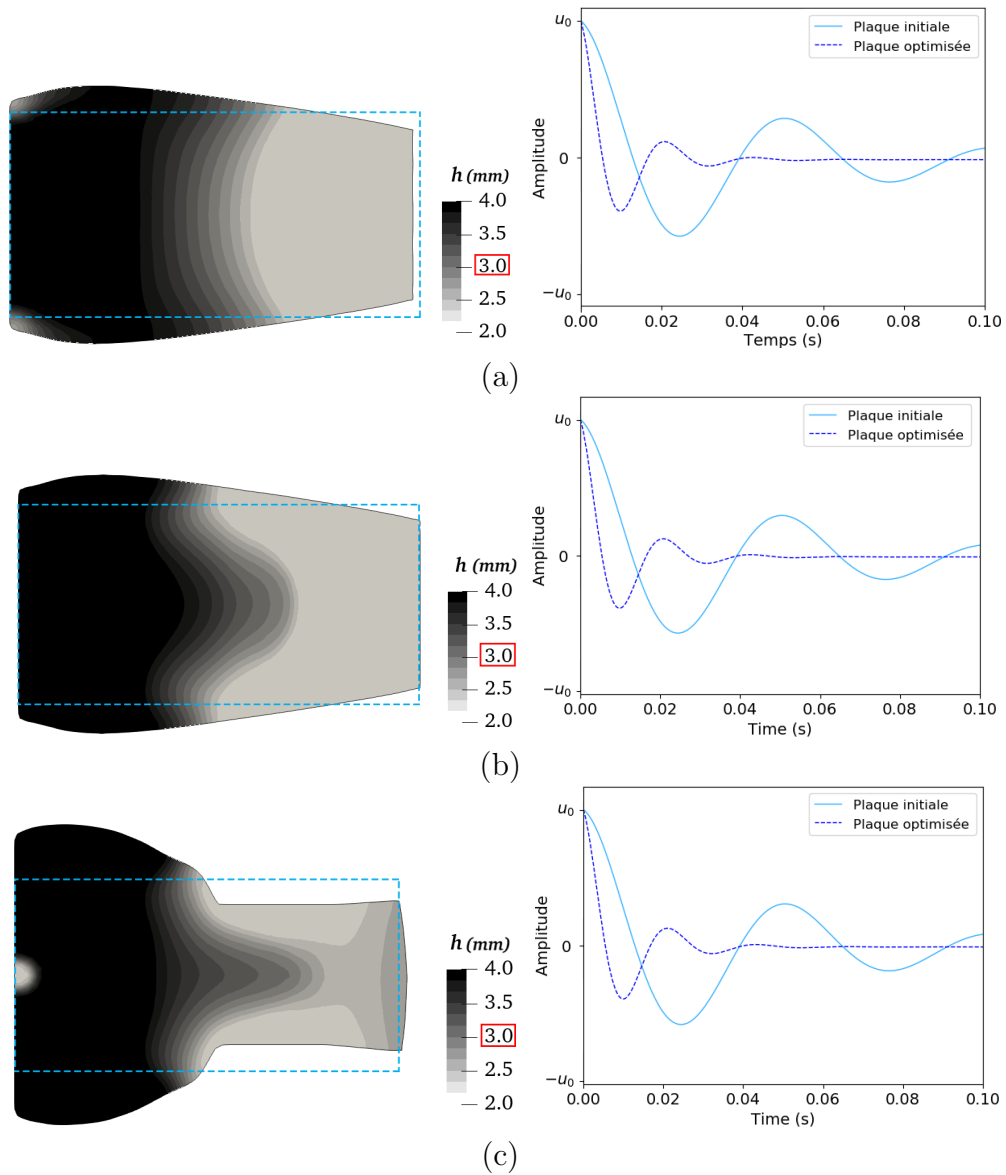


FIGURE V.5.14 – Profil d'épaisseur et amplitude des vibrations libres de la plaque initiale et de la plaque optimisée constituées d'un matériau de Zener pour différents coefficients de Poisson (a)  $\nu_1 = 0.498$  (b)  $\nu_1 = 0.48$  (c)  $\nu_1 = 0.4$ .

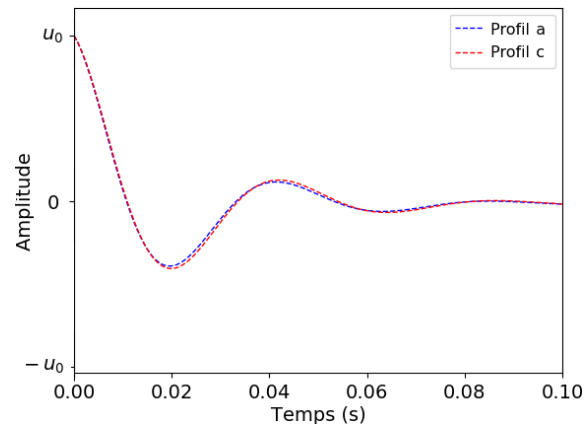


FIGURE V.5.15 – Comparaison des comportements en vibration libre des profils (a) et (c) issus de la Figure V.5.14 pour  $\nu_1 = 0.4$ .

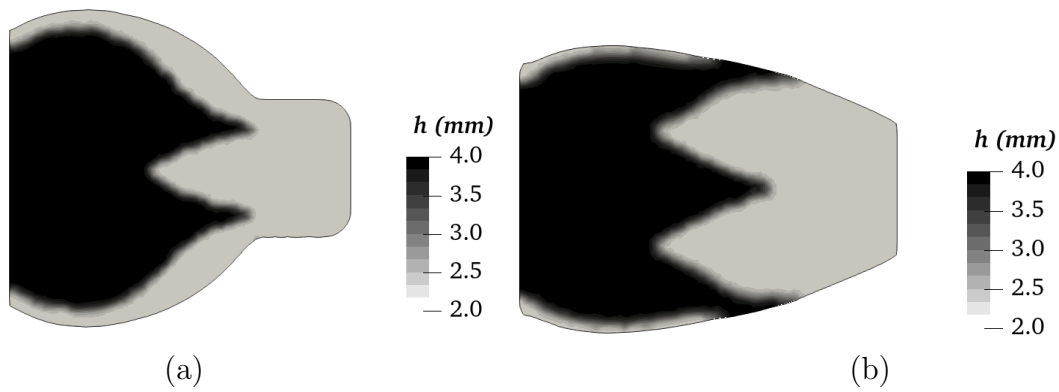


FIGURE V.5.16 – Exemples de designs fins de plaques modélisées par un modèle de Zener pour différents intervalles de valeurs de coefficient de Poisson (a)  $\nu \leq 0.465$  (b)  $\nu > 0.465$ .

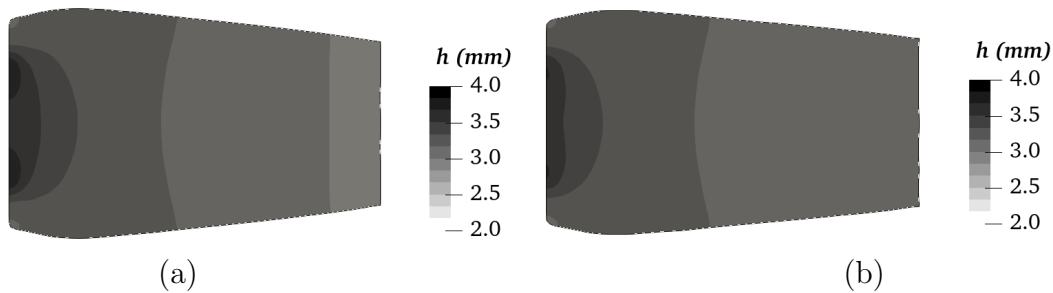


FIGURE V.5.17 – Designs optimisés possibles de plaques constituées d'un matériau de Zener pour différents coefficients de Poisson (a)  $\nu = 0.2$  (b)  $\nu = 0.4$ .



## 6 Résolution du problème opposé : limiter l'effet amortissant

Lors de la conception de semelles de chaussure de marche, il est naturel de chercher à obtenir une structure amortissante. En revanche, pour certaines applications comme les chaussures de course à pied où le "dynamisme" est un critère important, les hautes fréquences de vibration ainsi que les coefficients de décroissance élevés sont recherchés. Limiter l'amortissement, par exemple en minimisant le décrément logarithmique de la plaque viscoélastique, mène à une structure dont la matière est répartie à l'extrémité libre, saturant les bornes d'épaisseur tout en augmentant la fréquence de vibration ainsi que le coefficient de décroissance. Dans l'intervalle des propriétés viscoélastiques communément exhibées par les polymères, la distribution de matière de la plaque optimisée ne dépend pas des paramètres matériaux et est similaire d'une optimisation à une autre.

Pour satisfaire aux besoins industriels, une fonction objectif plus flexible peut être utilisée, telle que,

$$\mathcal{J}(h, \Omega) = \omega_i(h, \Omega) + q \frac{1}{\omega_r(h, \Omega)} \quad (\text{V.6.1})$$

où  $q$  est la constante correspondant à la pénalisation sur la fréquence et on rappelle que  $\omega_r$  et  $\omega_i$  sont les parties réelle et imaginaire de la première pulsation propre de la structure. Ce paramètre de pénalisation permet de donner la priorité à l'obtention d'un design à fréquence élevée ou à coefficient de décroissance faible, en fonction de l'application. La Figure V.6.18

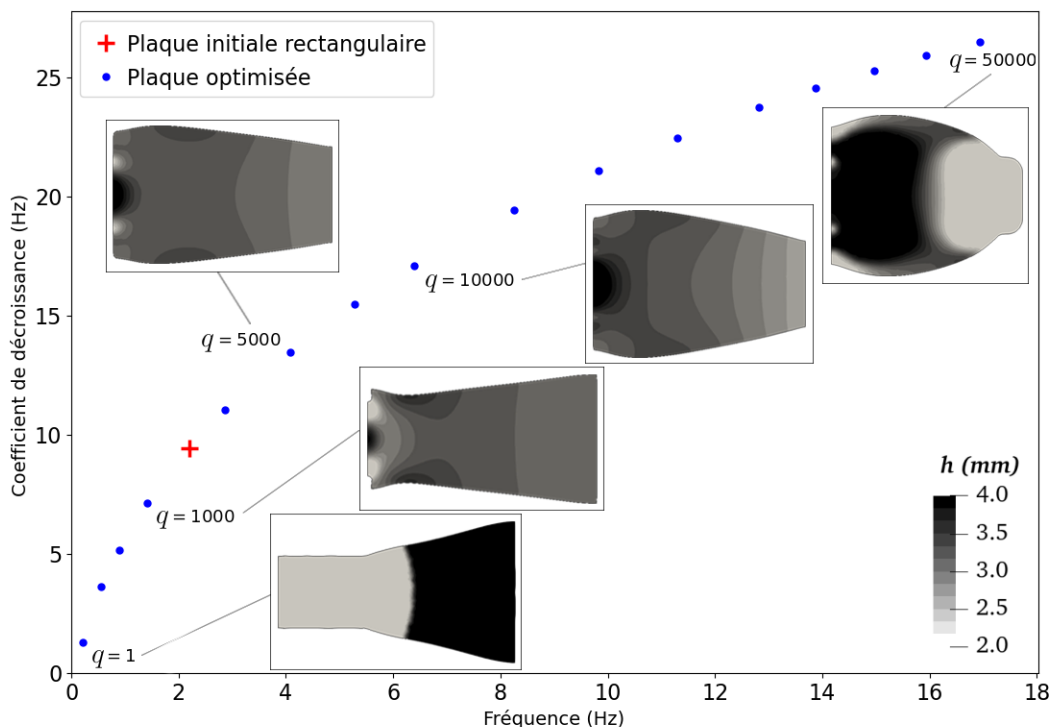


FIGURE V.6.18 – Coefficient de décroissance par rapport à la fréquence de vibration et représentation des designs associés pour la minimisation de  $\mathcal{J}(h, \Omega) = \omega_i(h, \Omega) + q \frac{1}{\omega_r(h, \Omega)}$ .

présente les variations des coefficients de décroissance par rapport à la fréquence pour différentes valeurs de  $q$  ainsi que les différents designs finaux obtenus. Pour  $q = 1$ , la forme est identique au cas précédent et la matière est accumulée à l'extrémité libre de la plaque. Puis, quand  $q$  augmente, la matière est progressivement redistribuée au bord encastré. Idéalement, on souhaiterait que le design possède une fréquence élevée et un coefficient de décroissance faible, cependant, ces deux grandeurs sont liées, il faut donc faire un choix. Cette fonction objectif permet de pondérer l'importance de ces deux quantités lors de l'optimisation et permet de proposer toute une variété de designs adaptés à différents critères.

## 7 Conclusion

Dans ce chapitre, on a développé des algorithmes d'optimisation couplée optimisant simultanément le profil d'épaisseur ainsi que la géométrie de structures 2D modélisées par le modèle de Kirchhoff. Les structures planes minces optimisées par les algorithmes proposés montrent de sérieux gains d'amortissement. Les résultats d'optimisation ont également illustrés l'impact des paramètres matériaux sur le design final ainsi que le comportement en vibration. Le modèle de Maxwell généralisé utilisé dans ce manuscrit permet de prendre en compte la dépendance en fréquence des paramètres matériaux. Le coefficient de Poisson en particulier, souvent considéré constant dans la plupart des travaux, s'est avéré un paramètre impactant dans certains cas. Le design optimal est sensible au coefficient de Poisson malgré de faibles variations du comportement en vibration et des modes propres similaires. De plus, le comportement en vibration ainsi que le design optimal de la structure sont sensibles aux modules et aux temps de relaxation du modèle rhéologique. Les résultats sont particulièrement sensibles aux temps de relaxation du polymère et on observe une inversion de la répartition de matière pour des temps élevés.

La résolution du problème d'optimisation à l'aide de solveurs spectraux polynomiaux permet d'appliquer les algorithmes d'optimisation à des matériaux réels dont les paramètres ont été déterminés expérimentalement. Ainsi, cela permet d'utiliser de tels algorithmes pour les applications industrielles utilisant des données expérimentales. Le design optimal et les performances d'amortissement étant très sensibles aux paramètres matériau, il semble important, en pratique, de soigner la caractérisation du polymère afin d'obtenir des résultats pertinents. Il paraît également intéressant de choisir judicieusement l'hypothèse d'un module de compressibilité ou d'un coefficient de Poisson constant, en fonction du matériau étudié et de la précision recherchée. Pour une plage de temps de relaxation importante, la prise en compte de la dépendance en fréquence du coefficient de Poisson semble indiquée car la différence serait non négligeable. Dans le cas contraire, on pourrait se contenter de choisir  $\nu$  constant. Considérer la dépendance en fréquence du coefficient de Poisson permet également, dans certains cas, de proposer plusieurs designs possédant des performances proches, ce qui peut être intéressant pour certaines applications.

L'étude du problème opposé, portant sur le "dynamisme" de la structure, montre des résultats similaires quelque soit le polymère choisi. À travers la minimisation d'une nouvelle fonction objectif, développée dans le but de s'adapter à la flexibilité requise dans un cadre industriel, on obtient toute une gamme de designs, couvrant de larges intervalles de fréquences et de coefficients de décroissance, permettant d'adapter l'optimisation à l'application désirée.

Dans le chapitre suivant, on tentera d'appliquer ces algorithmes au cas de la semelle de chaussure de course dans un cadre industriel. De par le modèle choisi, on se contentera pour l'instant de semelles planes classiques.

# Chapitre VI

## Optimisation d'une semelle de chaussure : Application avec hypothèses des plaques

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>133</b>
<b>2</b>	<b>Optimisation topologique sous contraintes de plaques de Kirchhoff viscoélastiques</b> . . . . .	<b>135</b>
<b>3</b>	<b>Méthodes numériques</b> . . . . .	<b>137</b>
<b>4</b>	<b>Résultats numériques</b> . . . . .	<b>142</b>
	4.1 Optimisation topologique de structures minces viscoélastiques . . .	143
	4.2 Optimisation topologique de plaques minces élastiques . . . . .	147
<b>5</b>	<b>Problèmes de vibration de plaques de Mindlin</b> . . . . .	<b>149</b>
<b>6</b>	<b>Optimisation de formes de plaques épaisses</b> . . . . .	<b>153</b>
<b>7</b>	<b>Résultats numériques</b> . . . . .	<b>155</b>
	7.1 Optimisation topologique de plaques épaisses en élasticité linéaire	155
	7.2 Optimisation couplée de plaques épaisses en viscoélasticité linéaire	158
<b>8</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>159</b>

---

## 1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est double. Tout d'abord, on cherche à optimiser la forme d'une semelle plane en appliquant les techniques d'optimisation 2D du chapitre précédent, tout en introduisant des contraintes liées à l'utilisation de la semelle. Puis, afin d'enrichir l'algorithme et d'anticiper sur l'optimisation de formes plus complexes, on applique les techniques d'optimisation topologique au cas viscoélastique. Il est à noter que toutes les optimisations présentées dans ce chapitre utilisent l'hypothèse d'un comportement de plaque. Cependant, contrairement au chapitre précédent limité au cas des plaques de Kirchhoff, nous aborderons

également les plaques de Mindlin permettant ainsi une analyse comparative des résultats en fonction des hypothèses de comportement retenues.

Il est important de préciser que ce travail porte sur l'optimisation des performances de la semelle du point de vue de tests amonts réalisés par le fabricant, c'est à dire que l'on ne cherche pas à reproduire les conditions d'utilisation réelles. Pour les semelles de chaussure, 3 tests mécaniques simples sont effectués afin de déterminer les performances de la structure.

1. Un test de vibration libre avec encastrement à une extrémité. Il s'agit du tout premier critère pris en compte dans ce manuscrit et c'est naturellement ce qui a motivé le choix des problèmes optimisation jusqu'à maintenant. Pour une chaussure de course, on espère des propriétés d'amortissement limitées pour un rebond efficace.
2. Un test de flexion trois points permettant de vérifier la rigidité de la structure sollicitée en flexion. Cet essai veut reproduire le type de sollicitation qu'un client peut exercer sur une chaussure de course avant de l'acheter. Ce critère, indispensable pour la durée de vie de la pièce, sera pris en compte dans la suite et constituera l'un des principaux objets de discussion de ce chapitre. En pratique, on réalise ce test de flexion par un test Bennewart (Figure VI.1.1) qui permet également d'étudier la résistance à la fatigue de la pièce, une problématique importante mais qui ne sera pas traitée ici.



FIGURE VI.1.1 – Test de flexion Bennewart réalisé sur des semelles de chaussure de course.

3. Un test de torsion permettant de vérifier la rigidité de la structure sous des sollicitations de torsion selon l'axe dans la longueur de la semelle. De même que pour la flexion, il s'agit d'un test assurant la résistance de la semelle à une sollicitation qui peut être appliquée par un client. D'un point de vue optimisation, ce critère se traite à priori de la même manière que le critère en flexion. Il ne sera pas pris en compte pour le moment.

Dans ce chapitre, une contrainte associée au test de flexion trois points est ajoutée. Elle représente la condition la plus importante pour assurer la fonctionnalité de la pièce. On verra que l'introduction de cette contrainte suffit à soulever de sérieuses interrogations liées au modèle de plaque et à la contrainte choisie.

La conception d'une semelle de chaussure de course est communément réalisée de façon découplée, en cherchant d'une part le meilleur design dans un cas élastique, où l'intuition et les techniques de modélisation sont généralement suffisantes, et, d'autre part, en y associant le polymère le plus performant pour un critère donné. Le matériau est alors choisi en effectuant des tests de vibration sur de simples poutres rectangulaires (test 1). Le principal intérêt de mon travail est de prendre en compte les propriétés viscoélastiques du polymère dès la recherche du design optimal. Cet aspect est d'une grande importance au vu des résultats présentés aux chapitres précédents montrant l'impact significatif des paramètres matériaux sur le design final et sur le comportement en vibration. En effet, il est possible qu'un polymère moins performant lors d'un simple test de vibration sur poutre, s'avère le plus pertinent pour un design de semelle optimisée.

Ce chapitre est organisé ainsi. En section 2, l'optimisation topologique sous contrainte d'une structure plane viscoélastique dans le cas du modèle de Kirchhoff est présentée. La méthode et les résultats numériques sont donnés en section 3 et 4. Les problématiques soulevées par ce problème d'optimisation nous amènent, en section 5, à introduire le modèle de Mindlin. Le problème d'optimisation dans le cas de plaques épaisses satisfaisant à ce modèle est décrit en section 6, suivi de l'étude numérique en section 7.

## 2 Optimisation topologique sous contraintes de plaques de Kirchhoff viscoélastiques

Afin d'appliquer les algorithmes développés au cas de la semelle de chaussure plane, on commence par reprendre le problème d'optimisation du chapitre précédent, auquel on ajoute une contrainte de rigidité. Pour cela, on décide de soumettre la plaque à une force verticale  $g$ , répartie au centre de la plaque (VI.2.2), et d'ajouter un critère sur la compliance de la structure. Il s'agit d'un critère très classique en optimisation dans le cadre de l'élasticité. La compliance,

$$C = \int_{\Omega} g u_g dx,$$

est une mesure du travail des forces extérieures. Moins la structure travaille, plus elle est rigide. Notons que ce critère est global et dépend explicitement du déplacement vertical  $u_g$ . Puisque le problème d'intérêt est quasi-statique, le déplacement permettant d'obtenir la compliance sera déterminé par la résolution d'un problème élastique dont les paramètres matériaux sont ceux du polymère aux temps longs,  $E_{\infty}$  et  $\nu_{\infty}$ , ou aux temps courts,  $E_0 = E_{\infty} + \sum_{i=1}^n E_i$  et  $\nu_0$ , en fonction de la température. En effet, pour ces temps, un matériau viscoélastique se comporte comme un matériau élastique. Dans la suite on choisit de se placer aux temps longs. Le problème d'optimisation nécessite ainsi la résolution de deux problèmes mécaniques, un problème vibratoire complexe, similaire au chapitre précédent, pour lequel la plaque est modélisée par un modèle de Maxwell généralisé à  $n$  branches viscoélastiques, encastrée à une seule extrémité  $\Gamma_{D_1}$ , et dont la formulation variationnelle

est donnée par

$$\sum_{j=0}^{n+2} \omega^j a_j(\Omega, u, \hat{u}) = 0 \quad \forall \hat{u} \in \mathcal{U}_3, \quad (\text{VI.2.1})$$

où

$$a_j(\Omega, u, \hat{u}) = \int_D g_j(u, \hat{u}) dx \quad \forall j \in \llbracket 0, n+2 \rrbracket,$$

avec

$$\mathcal{U}_3 = \left\{ u \in H^2(D, \mathbb{C}) \mid u|_{\Gamma_{D_1}} = 0, \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{D_1}} = 0 \right\},$$

et un problème élastique décrivant un test de flexion trois points, pour lequel la plaque est encastrée aux deux extrémités  $\Gamma_{D_1} \cup \Gamma_{D_2}$  et dont la formulation variationnelle s'écrit

$$\int_D \frac{h^3}{12} D_p \kappa(u_g) \cdot \kappa(\hat{u}_g) dx = \int_D g u_g dx \quad \forall \hat{u}_g \in \mathcal{U}_{g1}, \quad (\text{VI.2.2})$$

où

$$D_p = \frac{E_0}{1 - \nu_0^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_0 & 0 \\ \nu_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_0}{2} \end{bmatrix}, \quad \kappa(u_g) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_g}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 u_g}{\partial x_2^2} \\ 2 \frac{\partial^2 u_g}{\partial x_1 \partial x_2} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.2.3})$$

et

$$\mathcal{U}_{g1} = \left\{ u \in H^2(D, \mathbb{C}) \mid u|_{\Gamma_{D_1} \cup \Gamma_{D_2}} = 0, \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{D_1} \cup \Gamma_{D_2}} = 0 \right\}.$$

La contrainte de rigidité empêche l'obtention de designs triviaux, la contrainte géométrique du chapitre précédent est donc supprimée. En revanche, on fixe la matière au voisinage des bords encastrés et de la zone d'application de la force afin que ces conditions aux limites restent inchangées durant l'optimisation. Puisqu'il s'agit d'une optimisation topologique par méthode level-set, la plaque sera initialement trouée et la forme  $\Omega$  sera optimisée dans un domaine  $D \in \mathbb{R}^2$ . La Figure VI.2.2 montre un exemple d'initialisation possible et illustre la nouvelle contrainte géométrique  $\Omega_t$ . Les différents designs mis en jeu dans ce chapitre seront représentés par une fonction densité, directement obtenue à partir de la level-set. Le vide sera représenté en blanc et la matière pleine en noir.

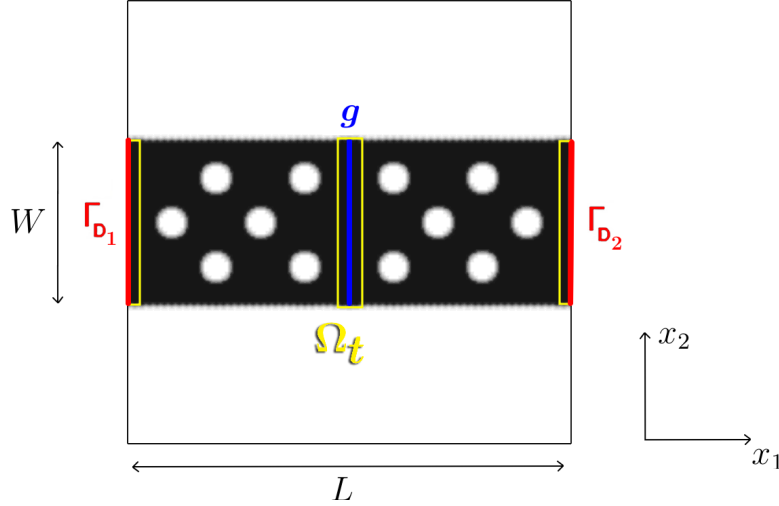


FIGURE VI.2.2 – Exemple d’initialisation de l’algorithme d’optimisation topologique 2D.

Tout comme au chapitre précédent, il est possible de coupler optimisation topologique 2D et optimisation paramétrique de l’épaisseur. Pour cette application au cas de la semelle de chaussure, considérons dans un premier temps que l’épaisseur  $h$  est constante. On cherche donc uniquement à optimiser les bords libres  $\Gamma_N$ .

Le problème d’optimisation devient :

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{V}_{ad}} \mathcal{J}(\Omega) \text{ tel que } C(\Omega) \leq C_l. \quad (\text{VI.2.4})$$

pour

$$\mathcal{J}(\Omega) = -\frac{\omega_i(\Omega)}{\omega_r(\Omega)} \text{ et } C(\Omega) = \int_{\Omega} g u_g(x_1, x_2) dx \quad (\text{VI.2.5})$$

où  $C_l$  représentent la compliance limite. L’ensemble des formes admissibles est donné par

$$\mathcal{V}_{ad} = \left\{ \Omega \in D \mid (\Gamma_{D_1} \cup \Gamma_{D_2}) \subset \partial\Omega, \Omega_t \subset \Omega, V(\Omega) = \int_{\Omega} h dx = V_l \right\}.$$

où  $V_l$  représente le volume cible. Pour une contrainte de volume constant, on a  $V_l = V_0$ , où  $V_0$  est le volume initial de la structure.

Tout comme pour la déformation de maillage, l’optimisation topologique exploite le gradient de forme de la fonction objectif. Il suffit donc de reprendre les expressions du chapitre précédent. Il faut cependant calculer la dérivée de forme liée à la contrainte de rigidité, un résultat classique obtenu à l’aide du Lemme III.2.1 et du caractère auto-adjoint du problème. Soit  $u_g \in \mathcal{U}_{g1}$  solution de (VI.2.2), on a

$$D_{\Omega} C(\Omega) \theta = - \int_{\partial\Omega} \frac{h^3}{12} D_p \kappa(u_g) \cdot \kappa(u_g) \theta \cdot n ds. \quad (\text{VI.2.6})$$

### 3 Méthodes numériques

Le problème d’optimisation nécessite toujours la résolution de problèmes de flexion d’ordre 4, on garde donc les éléments de Morley ainsi que les solveurs polynomiaux de



SLEPc pour le calcul des fréquences propres. Le problème d'élasticité linéaire sera résolu par le solveur UMFPACK, le solveur par défaut de FreeFem++. Contrairement à la méthode de déformation de maillage, la méthode level-set ne déforme pas le maillage mais transporte une fonction ligne de niveaux sur un maillage fixe. On décide de mailler un domaine carré  $D$  de coté égal à la longueur de la plaque  $L$ , par un maillage régulier de taille  $100 \times 100$ . De plus, on représente la forme par une fonction level-set  $\phi$ , dont les valeurs négatives représentent la matière pleine, les valeurs positives le vide, et les valeurs nulles la frontière de la forme  $\Omega$ . Plutôt que de déformer le maillage selon le vecteur  $\theta$ , obtenu en calculant le gradient de forme, on réalise l'advection de  $\phi$  selon la vitesse  $v$  par la résolution de l'équation de transport

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + v(t, x)|\nabla \phi| = 0, \quad (\text{VI.3.1})$$

où  $t$  représente un pseudo pas. En pratique, on réalise l'advection de  $\phi$  grâce au module `advect` [33]. Le vecteur normal extérieur à la frontière  $\partial\Omega$  est donné par

$$n(x) = \frac{\nabla \phi(x)}{|\nabla \phi(x)|}.$$

Pour l'implémentation numérique on souhaite éviter les divisions par zéro, on utilise donc l'expression

$$n(x) = \frac{\nabla \phi(x)}{|\nabla \phi(x)| + \eta_0} \quad (\text{VI.3.2})$$

où  $\eta_0 = 10^{-3}$  par exemple.

Comme discuté au chapitre III, on ajoute une tolérance au critère d'acceptation de l'itération  $k$  afin d'accepter les écarts causés par d'éventuels changements de topologie, en particulier en début d'algorithme. À chaque itération, on effectuera donc le test  $\mathcal{J}(\Omega_{k+1}) < \text{tol} \mathcal{J}(\Omega_k)$ , où  $\text{tol} = 1.02$  et tend vers 1 lorsque  $k$  augmente.

### Initialisation de la fonction level-set

Pour initialiser l'algorithme d'optimisation, on cherche une fonction  $\phi_0$  négative pour  $x_1 \in [0, L]$  et  $x_2 \in \left[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}\right]$ , contenant des valeurs positives représentant les trous et respectant les contraintes géométriques. La fonction level-set correspondant à l'exemple d'initialisation représenté Figure VI.2.2, est construite à l'aide de plusieurs fonctions :

- Une fonction

$$\phi_{\text{Plaque}} = \left(x_2 - \frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{W}{2}\right)^2$$

à valeur négative à l'intérieur de la plaque de longueur  $L$  (égal au coté du domaine  $D$ ) et de largeur  $W$ .

- Une fonction

$$\phi_{\text{Dirichlet}} = \max \left( \min \left( x_1^2 - (qL)^2, (x_1 - L)^2 - (qL)^2 \right), \left(x_2 - \frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{W}{2}\right)^2 \right)$$

à valeur négative au voisinage des bords  $\Gamma_{D_1}$  et  $\Gamma_{D_2}$ . Le paramètre  $q$  permet de faire varier l'épaisseur de la bande de matière fixée. On choisit ici  $q = 0.02$ , c'est à dire que l'épaisseur de la bande est égale à 2% de la longueur de la plaque.

- Une fonction

$$\phi_{Trous} = \cos\left(2n_t\pi\frac{x_1}{L}\right)\cos\left(2n_t\pi\frac{x_2}{L}\right) - 0.5,$$

typiquement constituée d'un produit de fonctions sinusoïdales. Ses valeurs positives représentent les trous de la structure. Augmenter le facteur  $n_t$  permet d'augmenter le nombre de trous de l'initialisation. Dans cet exemple, possédant peu de trous,  $n_t = 5$ .

- Une fonction

$$\phi_g = \max\left(\left(x_1 - \frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{qL}{2}\right)^2, \left(x_2 - \frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{W}{2}\right)^2\right)$$

à valeur négative au voisinage de la zone d'application de la force linéique  $g$ .

- Une fonction

$$\phi_{Latéral} = \min\left(\left(x_2 - \frac{1}{2}(L + W - qL)\right)^2 - \left(\frac{qL}{2}\right)^2, \left(x_2 - \frac{1}{2}(L - W + qL)\right)^2 - \left(\frac{qL}{2}\right)^2\right)$$

facultative, à valeur négative au voisinage des bords latéraux de la plaque, permettant d'avoir une initialisation de forme rectangulaire.

La fonction level-set initiale s'écrit alors

$$\phi_0 = \min\left(\phi_{Dirichlet}, \phi_g, \phi_{Latéral}, \max(\phi_{Trous}, \phi_{Plaque})\right). \quad (\text{VI.3.3})$$

Enfin, on utilise la fonction distance signée pour réaliser la redistanciation de la fonction level-set initiale. On rappelle que cette fonction est définie par

$$\forall x \in D, d_\Omega(x) = \begin{cases} -d(x, \partial\Omega) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \\ d(x, \partial\Omega) & \text{si } x \in D \setminus \bar{\Omega}, \end{cases}$$

où  $d(x, \partial\Omega) = \min_{p \in \partial\Omega} |x - p|$  représente la distance euclidienne du point  $x$  par rapport au bord  $\partial\Omega$ . Cela a pour but d'éviter les problèmes numériques mentionnés au chapitre III liés aux pentes trop faibles ou trop élevées au voisinage de la frontière  $\partial\Omega$ . Cette procédure est ensuite appliquée toutes les 10 itérations afin de s'assurer de la bonne régularité de  $\phi$ . Le calcul de la distance signée est effectuée par le module `distance` de `FreeFem++`.

### Application des contraintes

Les contraintes géométriques sont appliquées à l'aide des fonctions  $\phi_{Dirichlet}$  et  $\phi_g$  afin que  $\Omega_t \subset \Omega$  à chaque itération. Pour cela on utilise la projection

$$P_{ad}(\phi) = \min\left(\phi_{Dirichlet}, \phi_g, \phi\right). \quad (\text{VI.3.4})$$

La contrainte de volume est toujours appliquée par projection à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange ajusté par dichotomie. En revanche, la contrainte d'inégalité sur la compliance sera appliquée à l'aide d'un Lagrangien augmenté. Le problème d'optimisation se réécrit :

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{V}_{ad}} \sup_{\mu \geq 0} \mathcal{L}(\Omega, \mu), \quad (\text{VI.3.5})$$

pour

$$\mathcal{L}(\Omega, \mu) = -\frac{\omega_i(\Omega)}{\omega_r(\Omega)} + \frac{1}{2c} \left( (P_{\mathcal{R}_+}(\mu + c(C(\Omega) - C_l)))^2 - \mu^2 \right) \quad (\text{VI.3.6})$$

où  $\mu \in \mathbb{R}$  est un multiplicateur de Lagrange,  $c \in \mathbb{R}_+$  un paramètre de pénalisation fixé, et  $P_{\mathcal{R}_+}$  la projection définie par

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{R}_+} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \max(0, x). \end{aligned}$$

On transforme le problème avec contrainte sur la compliance en un problème sans contrainte et on cherche maintenant à minimiser le Lagrangien  $\mathcal{L}$ . À chaque itération, on alterne entre la minimisation du Lagrangien à multiplicateur fixé et la mise à jour du multiplicateur de Lagrange suivant la formule

$$\mu_{k+1} = P_{\mathcal{R}_+}(\mu_k + c(C_k(\Omega) - C_l)). \quad (\text{VI.3.7})$$

De plus, on multiplie  $c$  par deux toutes les 10 itérations. Dans l'algorithme du Lagrangien augmenté, le coefficient de pénalisation n'a pas besoin d'être très grand pour assurer la convergence. On augmente  $c$  de façon à imposer la contrainte de plus en plus strictement, mais à partir d'un certain nombre d'itérations, il est préférable d'arrêter d'augmenter  $c$  afin de ne pas introduire de perturbation en fin d'optimisation et d'éviter d'entraver la convergence. Dans notre cas, on augmente  $c$  jusqu'à l'itération 70. Le choix des valeurs initiales  $\mu_0$  et  $c_0$  doit être fait soigneusement puisqu'ils conditionnent la bonne convergence de l'algorithme et le respect de la contrainte. Pour les résultats à suivre, les valeurs  $\mu_0 = 10^{-3}$  et  $c_0 = 10^{-3}$  semblent les plus adaptées.

### Calcul du gradient de forme

La dérivée de forme du Lagrangien est obtenu par simple combinaison linéaire des dérivées de  $\mathcal{J}(\Omega)$  et de  $V(\Omega)$ , calculées au chapitre précédent, ainsi que de  $C(\Omega)$ , équation (VI.2.6). On en déduit l'expression

$$\begin{aligned} D_{\Omega}(\mathcal{L} + \ell V)(\Omega)\theta &= \int_{\Gamma_N} \left( -\frac{\omega_r \operatorname{Im}(f(\omega, u)) - \omega_i \operatorname{Re}(f(\omega, u))}{\omega_r^2} \right. \\ &\quad \left. - P_{\mathcal{R}_+}(\mu + c(C(\Omega) - C_l)) \frac{h^3}{12} D_p \kappa(u_g) \cdot \kappa(u_g) + \ell h \right) \theta \cdot n \, ds \end{aligned} \quad (\text{VI.3.8})$$

où

$$f(\omega, u) = - \frac{\sum_{j=0}^{n+2} \omega^j g_j(u, u)}{\sum_{j=1}^{n+2} j \omega^{j-1} a_j(\Omega, u, u)}$$

et  $\ell$  représente le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de volume constant. Lors du calcul du gradient de forme régularisé par le système

$$\begin{cases} -\eta^2 \Delta \theta + \theta = 0 & \text{dans } D \\ \theta = 0 & \text{sur } \Gamma_{D_1} \cup \Gamma_{D_2} \\ \eta^2 \frac{\partial \theta}{\partial n} = \left( \frac{\operatorname{Im}(f(\omega)) \omega_r - \omega_i \operatorname{Re}(f(\omega))}{\omega_r^2} + P_{\mathcal{R}_+} \left( \mu + c(C(\Omega) - C_l) \right) \frac{h^3}{12} D_p \kappa(u_g) \cdot \kappa(u_g) - \ell h \right) n & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (\text{VI.3.9})$$

il est nécessaire de localiser la forme ainsi que sa frontière afin de pouvoir calculer les intégrales sur  $\Omega$  et sur  $\partial\Omega$  sous forme d'intégrales sur le domaine  $D$ . En pratique, on a recours à une approximation de la fonction caractéristique [7], définie par

$$\forall x \in D, \chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour cela, on construit une fonction  $H_{\eta_H}$  tel que

$$H_{\eta_H}(\phi(x)) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\phi(x)}{|\phi(x)| + \eta_H} \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad (\text{VI.3.10})$$

où  $\chi_\Omega \approx H_{\eta_H}(\phi(x))$ . La fonction  $H_{\eta_H}$  est une approximation de  $\chi_\Omega$  où  $\eta_H$  agit comme une constante de régularisation, typiquement de l'ordre de  $10^{-3}$ , voir Figure VI.3.3. À l'aide de

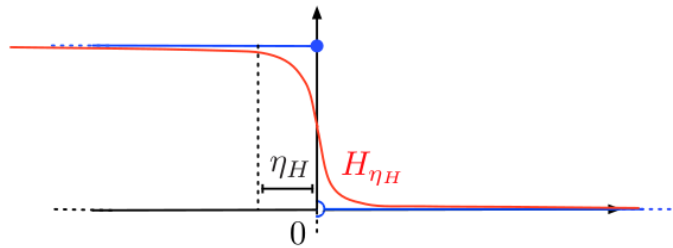


FIGURE VI.3.3 – Approximation et régularisation de la fonction caractéristique, extrait de [7].

cette approximation, on peut maintenant écrire pour toute fonction  $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ,

$$\int_{\Omega} f(x) dx \approx \int_D H_{\eta_H}(\phi(x)) f(x) dx. \quad (\text{VI.3.11})$$

On utilise également la fonction  $H_{\eta_H}$  pour calculer les intégrales aux bords en tant qu'intégrales surfaciques sur une fine couche  $\delta_{\partial\Omega} \approx -\frac{\partial}{\partial n}(H_{\eta_H}(\phi))$  au voisinage de  $\partial\Omega$ . Soit  $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ , l'intégrale sur  $\partial\Omega$  s'écrit

$$\int_{\partial\Omega} f(x)dx \approx \int_D \nabla(H_{\eta_H}(\phi(x))) \cdot n(x)f(x)dx. \quad (\text{VI.3.12})$$

La force  $g$  n'étant pas définie sur un bord du maillage, on applique une idée similaire en considérant que la force est définie sur une fine surface au voisinage de l'application de la force.

### Approche "Ersatz" en viscoélasticité

Dans la méthode utilisée dans ce manuscrit, on donne au vide les propriétés d'un matériau ersatz, ou matériau "mou", et les calculs sont effectués sur tout le domaine  $D$ . En viscoélasticité, on doit définir une densité et des modules viscoélastiques. On choisit de laisser les coefficients  $\nu_\infty$ ,  $(\nu_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  et les temps de relaxation  $(\tau_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  constants sur tout le domaine.

Dans notre cas, le maillage ne suit pas la forme, il est donc nécessaire de calculer des valeurs intermédiaires lorsque la ligne de niveau zéro de la level-set traverse un élément. Dans les algorithmes employées, les modules  $E_\infty^D$  et  $(E_j^D)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  sont des fonctions  $\mathbb{P}_0$  définies sur  $D$  par une relation du type :

$$E_k^D(\Omega) = f_v(\Omega)E_k + (1 - f_v(\Omega))E_E \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \cup \{\infty\}, \quad (\text{VI.3.13})$$

où les  $E_\infty$  et  $(E_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  sont les modules du polymère,  $E_E = 10^{-5}E$  MPa correspond à la valeur des modules du matériau ersatz et  $f_v(\Omega)$  la fraction volumique de la maille intérieure à la forme. De même, la densité  $\rho^D$  est une fonction éléments finis  $\mathbb{P}_0$  définie sur  $D$  par :

$$\rho^D(\Omega) = f_v(\Omega)\rho + (1 - f_v(\Omega))\rho_E, \quad (\text{VI.3.14})$$

où  $\rho$  représente la densité du polymère et  $\rho_E = 10^{-10}\rho \text{ kg.m}^{-3}$  la densité ersatz.

## 4 Résultats numériques

Cette section est dédiée à l'étude des résultats numériques obtenus pour le problème d'optimisation topologique de plaques minces viscoélastiques en amortissant les vibrations avec contrainte de rigidité. Ces résultats permettent également de mettre en évidence de surprenants résultats liées à la contrainte sur la compliance et marquent le début d'une étude visant à en comprendre l'origine.

La plaque étudiée est initialement rectangulaire et possède une topologie suffisamment riche, décrite en Figure VI.2.2. On applique une contrainte de volume constant, c'est à dire  $V_l = V_0$  avec  $V_0$  le volume initiale de la plaque. La contrainte d'inégalité sur la compliance sera appliquée pour une force  $g = 100 \text{ N}$  et deux valeurs limites,  $C_l = 0.85C_0$ , où l'on cherche une structure optimisée dont la compliance est inférieure ou égale à 85% de la compliance initiale, et  $C_l = C_0$ , où l'on cherche à conserver la rigidité initiale. La plaque possède une longueur  $L = 60 \text{ mm}$ , une largeur  $W = 30 \text{ mm}$  et est incluse dans un domaine carré  $D$ , de

coté  $L$ . Dans ce problème d'optimisation, l'épaisseur n'est pas une variable de design et est donc choisie constante  $h = 3$  mm. Ces premiers résultats d'optimisation topologique sont réalisés pour le matériau de Zener, de densité  $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ . Les paramètres rhéologiques sont toujours  $E_\infty = 18$  MPa,  $E_1 = 30$  MPa,  $\tau_1 = 0.002$  s,  $\nu_\infty = 0.499$  et  $\nu_1 = 0.498$ .

#### 4.1 Optimisation topologique de structures minces viscoélastiques

Les résultats d'optimisation du problème (VI.2.4) pour  $C_l = 0.85C_0$  sont présentés Figures VI.4.4, illustrant l'évolution du design pendant l'optimisation, et Figure VI.4.5, illustrant et comparant le comportement en vibration des plaques initiale optimisée. On remarque

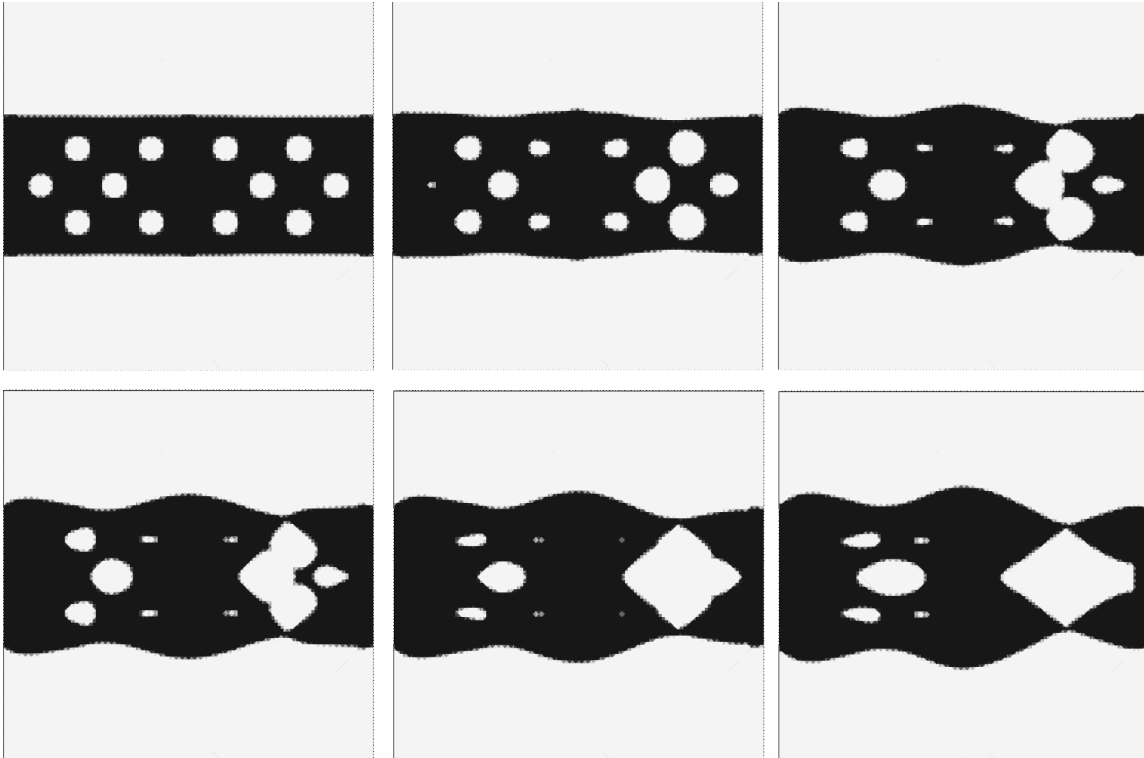


FIGURE VI.4.4 – Évolution du design pendant l'optimisation topologique, pour la contrainte de compliance  $C_l = 0.85C_0$ , itérations 1, 5, 20, 30, 50, 65.

toujours une accumulation de matière au bord gauche  $\Gamma_{D_1}$ , encastrement du test de vibration libre, mais on observe également un renforcement de la structure au niveau de la zone d'application de la force  $g$  et du bord encasté droit  $\Gamma_{D_2}$ . En revanche, on remarque la présence de sections fines entre la zone d'application de la force et le bord  $\Gamma_{D_2}$  qui peuvent introduire des points de faiblesse. Ce phénomène n'est pas observable du côté du bord  $\Gamma_{D_1}$ , correspondant à l'encastrement du problème de vibration. Le gain d'amortissement des vibrations obtenu après optimisation est mis en évidence Figure VI.4.5. La Figure VI.4.6, représentant l'évolution du Lagrangien et de la compliance au cours de l'optimisation, permet de s'assurer de la décroissance du Lagrangien et de la bonne convergence de l'algorithme. Malgré un design surprenant, on vérifie également que la contrainte sur la compliance est respectée. Les oscillations visibles sont principalement dues à l'algorithme du Lagrangien augmenté et,

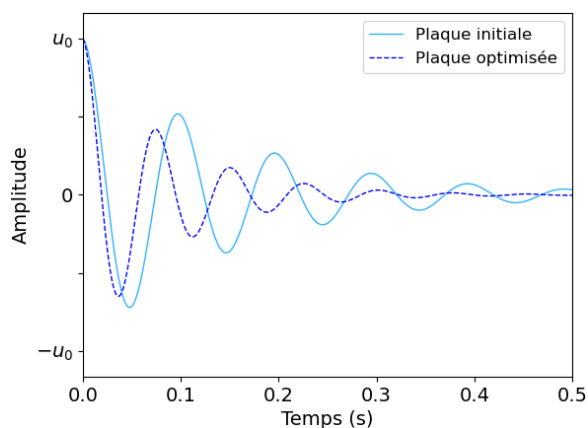


FIGURE VI.4.5 – Comparaison du comportement en vibration de la plaque initiale et de la plaque optimisée dans le cas de l'optimisation topologique en viscoélasticité, pour la contrainte de compliance  $C_l = 0.85C_0$ .

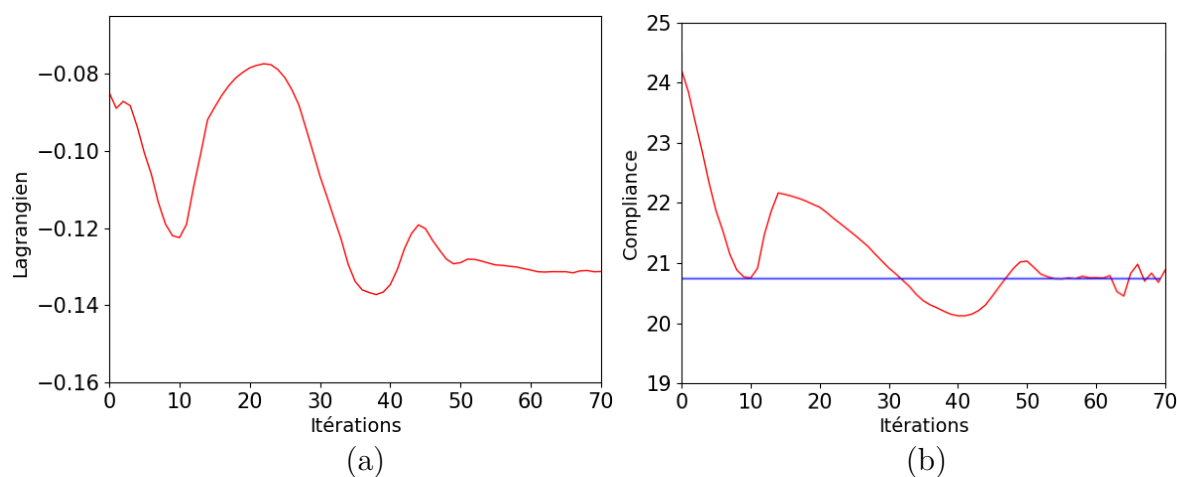


FIGURE VI.4.6 – Évolution (a) du Lagrangien et (b) de la compliance au cours de l'optimisation dans le cas  $C_l = 0.85C_0$ .

dans une moindre mesure, aux changements de topologie.

Les Figures VI.4.7 et VI.4.8 illustrent les résultats d'optimisation pour  $C_l = C_0$ . On observe un design bien différent du cas précédent. On remarque cependant les mêmes tendances. Le design est renforcé au niveau des bords encastres et de la zone d'application de la force, et les sections fines critiques sont toujours présentes et localisées dans la même région du domaine. La contrainte sur la compliance étant moins stricte, la plaque optimisée possède de meilleures propriétés d'amortissement que le cas précédent (Figure VI.4.8). On vérifie, en Figure VI.4.9, que la fonction objectif converge et que la contrainte de rigidité est bien respectée en fin d'optimisation.

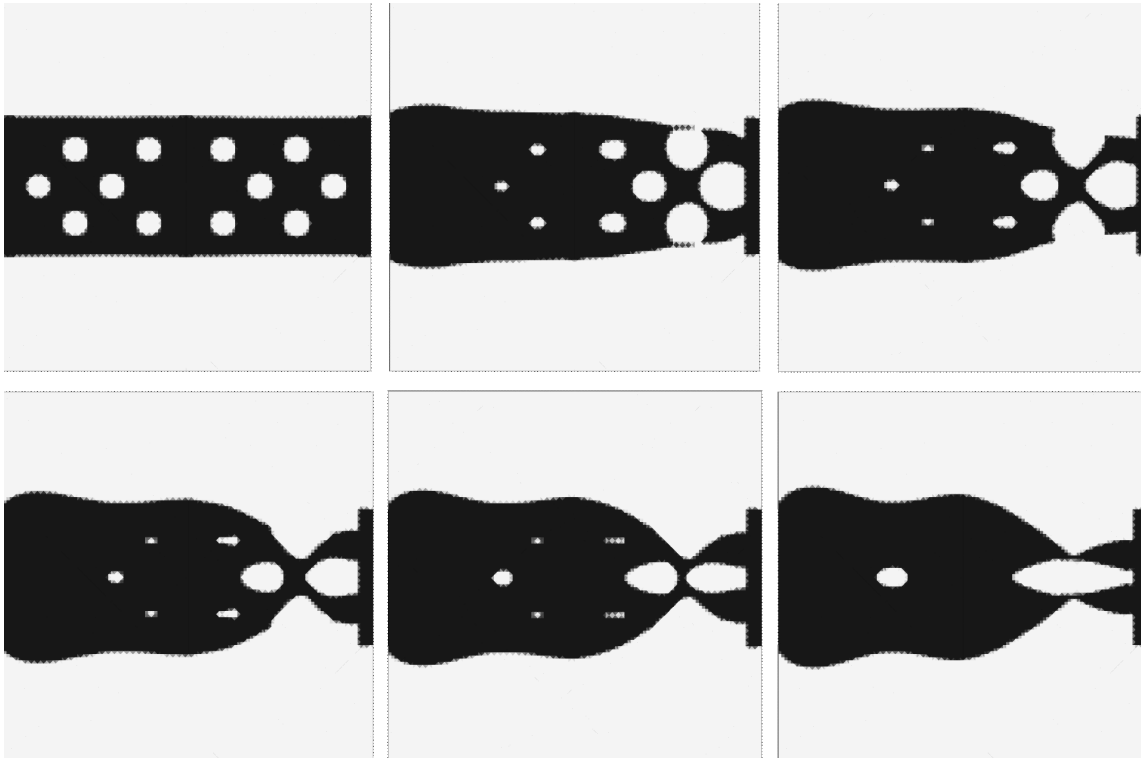


FIGURE VI.4.7 – Évolution du design d’une plaque de Kirchhoff encastée pendant l’optimisation topologique d’une semelle de chaussure plane, pour la contrainte de compliance  $C_l = C_0$  et la fonction objectif  $\mathcal{J}(\Omega) = -\frac{\omega_i(\Omega)}{\omega_r(\Omega)}$ , itérations 1, 5, 8, 10, 13, 30.

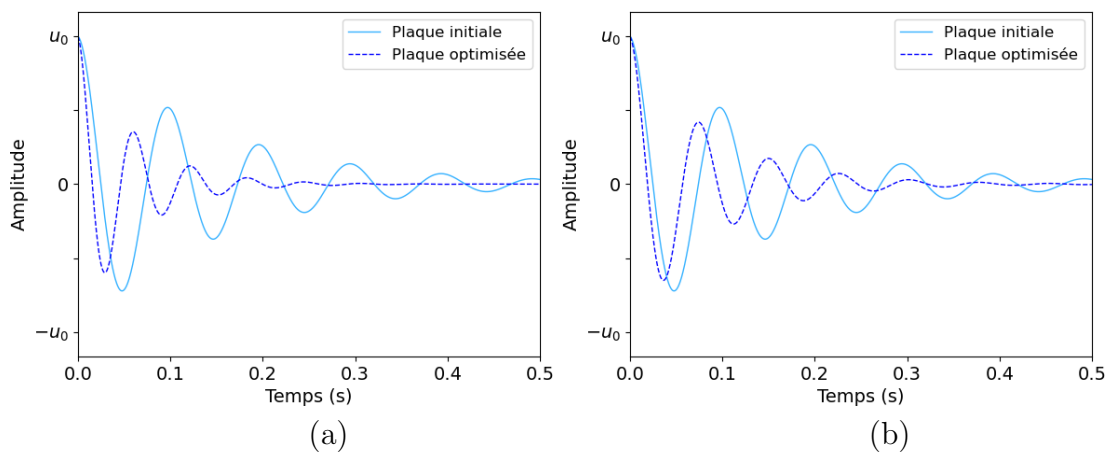


FIGURE VI.4.8 – Comportements en vibration de la plaque initiale viscoélastique et de la plaque optimisée par la méthode level-set, pour (a)  $C_l = C_0$  comparés à (b)  $C_l = 0.85C_0$ .

On réalise maintenant une optimisation similaire pour un domaine  $D$  prenant la forme d’une semelle de chaussure de dimensions  $L = 250$  mm et  $W = 100$  mm, représenté en Figure VI.4.11 dans le cas d’un maillage grossier pour simple visualisation. Le maillage a été réalisé à l’aide du logiciel open source *Gmsh* [69]. Le maillage utilisé en pratique est bien



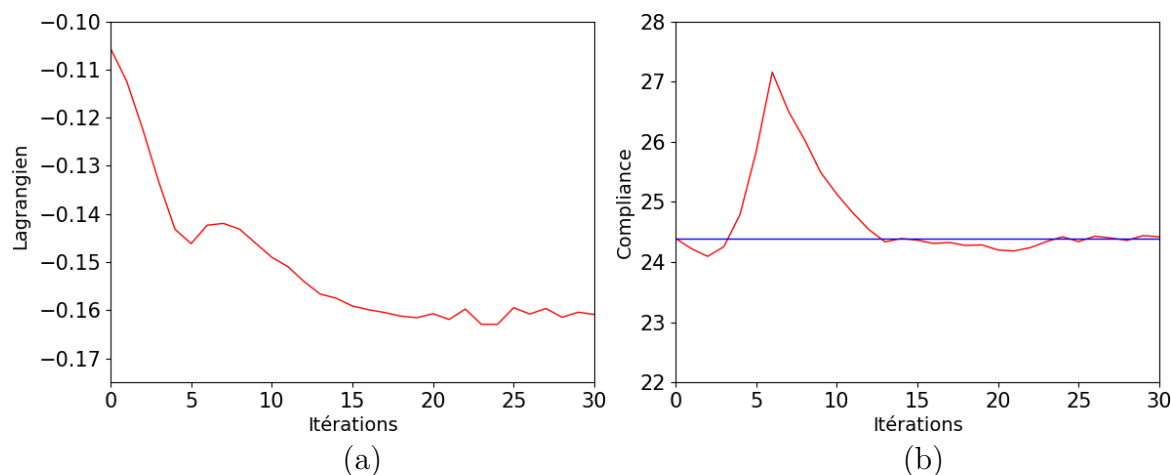


FIGURE VI.4.9 – Évolution (a) du Lagrangien et (b) de la compliance par rapport au nombre d'itérations dans le cas  $C_l = C_0$ .

plus raffiné afin d'obtenir des résultats plus précis. On représente en rouge les bords  $\Gamma_{D_1}$  et  $\Gamma_{D_2}$ . On cherche toujours à maximiser le décrement logarithmique et on applique une

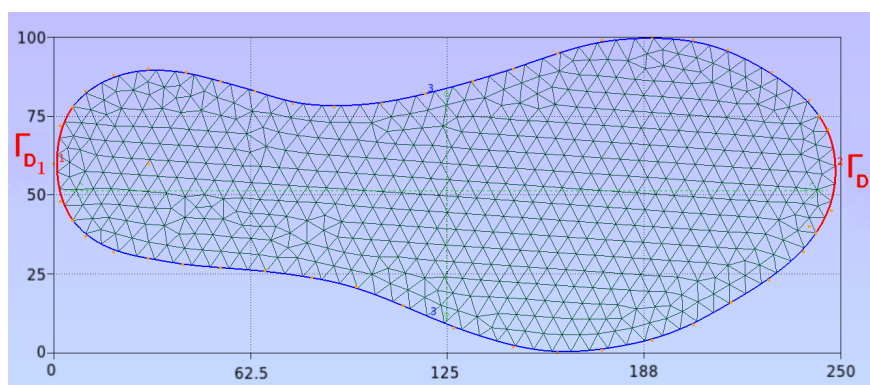


FIGURE VI.4.10 – Représentation de la semelle de chaussure plane utilisé pour l'optimisation topologique.

contrainte de rigidité  $C_l = 0.85C_0$  pour une force  $g$  appliquée au centre de la semelle. On garde des contraintes géométriques similaires, c'est à dire que la matière n'est pas optimisée au niveau des bords encastrés et de la zone d'application de la force. On ajoute également une contrainte géométrique de "revêtement" au voisinage de la frontière du domaine à l'aide de la projection

$$P_{ad}(\phi) = \min(\phi_{Rev}, \phi). \quad (\text{VI.4.1})$$

La frontière du domaine  $\partial D$  prendra ici la forme de la semelle dont le voisinage doit nécessairement contenir de la matière. En effet, on souhaite garder la forme générale de la semelle en optimisant uniquement l'intérieure de la structure. Pour cela, on utilise une projection similaire à (VI.3.4), où la fonction  $\phi_{Rev}$  représente une bande de matière fixée le long des frontières du domaine et est obtenue à l'aide de la fonction distance signée par :

$$\phi_{Rev}(x, D) = -(d(x, D) + e) \quad (\text{VI.4.2})$$

où  $e$  représente l'épaisseur de la bande désirée. Pour cet exemple numérique, on choisit  $e = 3$  mm. Le design optimisé, illustré Figure VI.4.11, présente les mêmes points faibles que dans le cas de la plaque. De manière générale, l'optimisation de l'amortissement des vibrations libres d'une structure encastrée sur  $\Gamma_{D_1}$  provoque un renforcement global au niveau de ce bord, ce qui réduit inévitablement les performances d'amortissement pour un test de vibration réalisé en encastrant sur le bord opposé  $\Gamma_{D_2}$ . Il semble donc pertinent, dans les algorithmes plus avancés développés au chapitre suivant, de considérer deux problèmes vibratoires, l'un au bord encastré  $\Gamma_{D_1}$ , l'autre au bord encastré  $\Gamma_{D_2}$ .

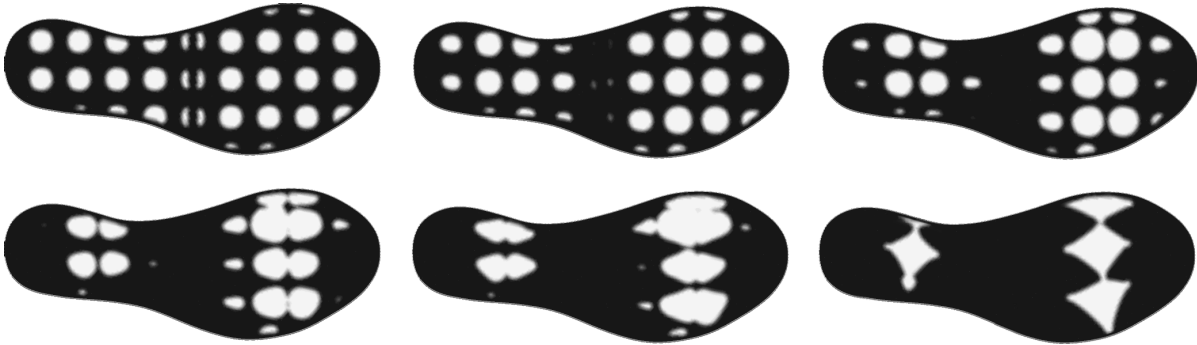


FIGURE VI.4.11 – Évolution du design pendant l'optimisation topologique d'une semelle de chaussure plane, pour la contrainte de compliance  $C_l = 0.85C_0$ , itérations 1, 10, 15, 20, 25, 40.

Avant de poursuivre, rappelons que les designs finaux obtenus peuvent varier en fonction de l'initialisation choisie, en particulier pour des topologies initiales différentes. Il est donc nécessaire d'effectuer l'optimisation pour différentes formes initiales, avec, par exemple, différentes configurations de trous, et de comparer les résultats. Dans les exemples étudiés dans cette section, les résultats d'optimisation sont similaires si le nombre de trous initiaux est suffisant. L'initialisation utilisée Figure VI.2.2 possède un nombre de trous proche du nombre limite en dessous duquel la topologie du design final devient sous optimale.

## 4.2 Optimisation topologique de plaques minces élastiques

Afin de mieux comprendre l'origine du phénomène de points faibles apparaissant dans les exemples précédents, on propose d'effectuer une optimisation dans le cas très classique de la minimisation de la compliance en élasticité. On réalise donc l'optimisation topologique de la plaque mince de référence, constituée d'un matériau élastique isotrope de paramètres choisis arbitrairement  $E = 18$  MPa et  $\nu = 0.499$ . La plaque est encastrée en  $\Gamma_{D_1}$  et la force  $g = 100$  N est répartie à l'extrémité  $\Gamma_{D_2}$ , maintenant libre. Afin d'éviter les designs triviaux, on considère des contraintes géométriques bloquant la matière au niveau du bord encastré et de l'extrémité libre, voir Figure VI.4.12.a. Le résultat d'optimisation pour ce problème, à priori simple, est présenté Figure VI.4.12.b. On observe toujours la présence de sections très fines, proches de la région non optimisée de l'extrémité libre. Cette fonction objectif dépend directement du déplacement, tracé Figure VI.4.13. On remarque que ces zones de

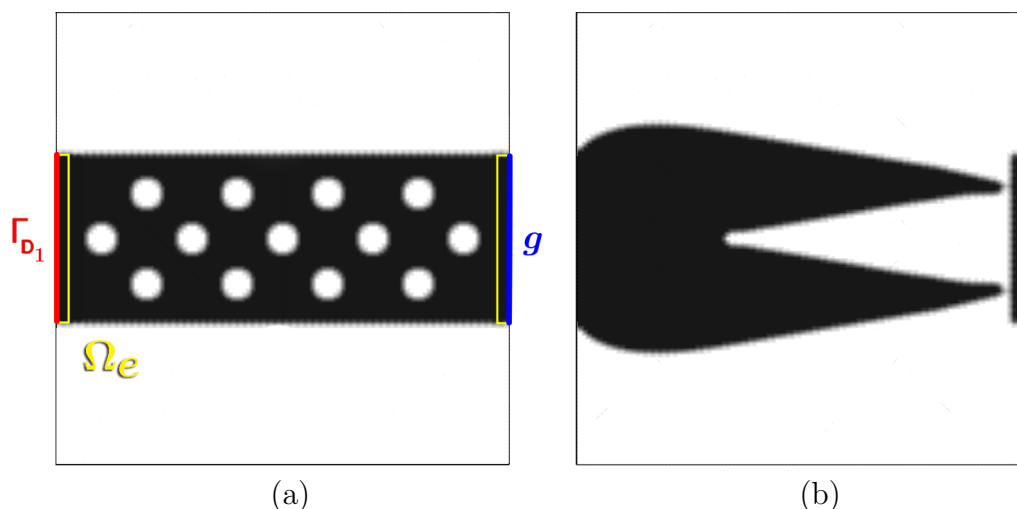


FIGURE VI.4.12 – Design de (a) la plaque initiale et (b) optimisée pour la minimisation de la compliance dans le cas élastique.

section fine n'engendre pas d'augmentation importante du déplacement à l'extrémité libre de la plaque, l'augmentation reste en effet plutôt régulière.

*Remarque VI.4.1* Similairement à l'instabilité “checkerboard” évoquée au chapitre III, l'utilisation d'éléments  $\mathbb{P}_1$  peut provoquer un phénomène numérique induisant une rigidité supplémentaire au niveau des angles des éléments triangulaires. C'est la raison pour laquelle la structure maintient une certaine rigidité malgré une section extrêmement mince. Cet artefact numérique disparaît avec l'utilisation d'éléments finis  $\mathbb{P}_2$ , bien que le phénomène d'aminçissement critique de la section persiste. De plus, l'utilisation des éléments  $\mathbb{P}_2$  augmente considérablement le temps de calcul et n'est donc pas une bonne option en dimension 3. •

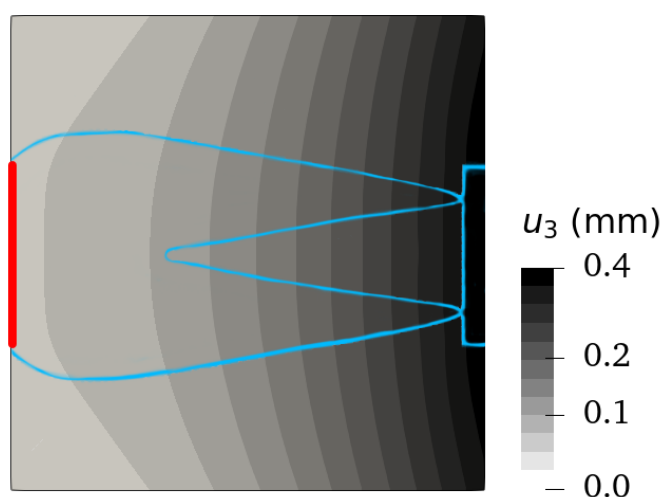


FIGURE VI.4.13 – Déplacement de la plaque élastique soumise à une force  $g$  répartie à l'extrémité libre  $\Gamma_{D2}$ .

Une première piste est d'étudier l'influence des cisaillements transverses. Ceux-ci sont négligés dans le modèle de Kirchhoff utilisé jusqu'à maintenant et pourraient justifier le fait que les zones de sections faibles n'impactent pas la rigidité de la structure. On cherche donc à réaliser la même optimisation en utilisant un modèle de plaque épaisse prenant en compte les effets du cisaillement transverse, le modèle de Reissner-Mindlin.

## 5 Problèmes de vibration de plaques de Mindlin

Dans les sections suivantes, nous énonçons les équations nécessaires pour traiter le problème d'optimisation topologique 2D illustré en Figure VI.4.12 ainsi que le problème d'optimisation couplée de plaques en vibrations dans les hypothèses de Reissner-mindlin.

### Énoncé du problème élastique linéaire

Plaçons nous tout d'abord dans le cadre élastique de l'exemple numérique de la section précédente (Figure VI.4.12), la plaque étudiée est encastree à l'extrémité  $\Gamma_{D_1}$  et une force  $g$  est soumise à l'extrémité libre  $\Gamma_{D_2}$ . Dans la théorie de Mindlin, on rappelle que l'évolution du déplacement dans l'épaisseur est linéaire et que les contraintes de cisaillements transverses sont supposées constantes dans l'épaisseur, corrigées par un coefficient  $k$ .

Commençons par rappeler l'expression des tenseurs des déformations et des contraintes du problème de plaque en flexion.

On écrit :

$$\epsilon_p = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \\ -x_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \\ -x_3 \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1} \right) \end{pmatrix} = x_3 \kappa(\theta_1, \theta_2) \quad (\text{VI.5.1})$$

$$\epsilon_s = \begin{pmatrix} 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_g}{\partial x_1} - \theta_1 \\ \frac{\partial u_g}{\partial x_2} - \theta_2 \end{pmatrix} = \gamma(u_g, \theta_1, \theta_2)$$

et

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_p \\ \sigma_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_p & 0 \\ 0 & kD_s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \kappa \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad (\text{VI.5.2})$$

où  $\sigma_p = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12})^T$ ,  $\sigma_s = (\tau_{13}, \tau_{23})^T$  et

$$D_p = \frac{E_\infty}{1 - \nu_\infty^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_\infty & 0 \\ \nu_\infty & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_\infty}{2} \end{bmatrix}$$

$$D_s = \frac{E_\infty}{2(1 + \nu_\infty)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en prenant  $k = \frac{5}{6}$ . Contrairement au modèle de Kirchhoff, on ne peut pas exprimer les angles de rotation des vecteurs normaux  $\theta_1$  et  $\theta_2$  en fonction du déplacement vertical  $u_g$ . Le problème dépend alors de 3 variables spatiales indépendantes  $\underline{u}_g = (u_g, \theta_1, \theta_2)$ . On établit la formulation variationnelle mixte du problème de flexion quasi-statique :

$$\int_{\Omega} \frac{h^3}{12} D_p \kappa(\underline{u}_g) \cdot \kappa(\hat{\underline{u}}_g) dx + \int_{\Omega} h k D_s \gamma(\underline{u}_g) \cdot \gamma(\hat{\underline{u}}_g) dx = \int_{\Gamma_{D_2}} g \hat{u}_g dx \quad \forall \hat{\underline{u}}_g \in \mathcal{U}_4 \quad (\text{VI.5.3})$$

où

$$\mathcal{U}_4 = \left\{ (u_g, \theta_1, \theta_2) \in (H^1(\Omega))^3 \mid u_g|_{\Gamma_{D_1}} = 0, \theta_1|_{\Gamma_{D_1}} = 0, \theta_2|_{\Gamma_{D_1}} = 0 \right\}. \quad (\text{VI.5.4})$$

Notons que  $u_g$  appartient maintenant à  $H^1$  puisque la formulation mixte présente uniquement des dérivées d'ordre 1. Par conséquent, les éléments de Morley ne seront plus nécessaires pour résoudre ce problème par la méthode des éléments finis. On pourra donc utiliser les éléments usuels tels que les éléments  $\mathbb{P}_1$ .

### Énoncé du problème viscoélastique linéaire

Pour exprimer la formulation variationnelle du problème viscoélastique, on se place dans le cas d'une plaque modélisée par le modèle de Mindlin, encadrée au bord  $\Gamma_{D_1}$  et libre sur  $\Gamma_{D_2}$ . Le polymère constituant la plaque est encore modélisé par le modèle de Maxwell généralisé. Pour écrire la formulation variationnelle du problème, on suppose tout d'abord les déplacements  $\underline{U} = (U, \Theta_1, \Theta_2)$  harmoniques tels que

$$\begin{cases} U(x_1, x_2, t) = u(x_1, x_2) e^{i\omega t} \\ \Theta_1(x_1, x_2, t) = \theta_1(x_1, x_2) e^{i\omega t} \\ \Theta_2(x_1, x_2, t) = \theta_2(x_1, x_2) e^{i\omega t}. \end{cases} \quad (\text{VI.5.5})$$

On reprend ensuite l'expression du tenseur des déformations, équation (VI.5.1), et on détermine le tenseur des contraintes donné par

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, t) = C_{\infty} \epsilon(\underline{U})(x_1, x_2, x_3, t) + \int_{-\infty}^t R(t - \tau) \frac{\partial \epsilon(\underline{U})}{\partial \tau}(x_1, x_2, x_3, \tau) d\tau,$$

où on rappelle que le premier terme représente les contraintes relaxées, avec  $C_{\infty}$  le tenseur de rigidité à l'équilibre. Le second terme représente l'histoire des contraintes visqueuses de la structure avec  $R$  le tenseur des fonctions de relaxation.

Ces tenseurs du second ordre sont exprimés :

$$C_{\infty} = \begin{pmatrix} \frac{E_{\infty}}{1-\nu_{\infty}^2} & \nu_{\infty} \frac{E_{\infty}}{1-\nu_{\infty}^2} & 0 & 0 & 0 \\ \nu_{\infty} \frac{E_{\infty}}{1-\nu_{\infty}^2} & \frac{E_{\infty}}{1-\nu_{\infty}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{\infty}}{2(1+\nu_{\infty})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E_{\infty}}{2(1+\nu_{\infty})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_{\infty}}{2(1+\nu_{\infty})} \end{pmatrix},$$

$$R(\tau) = \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} \frac{E_j}{1-\nu_j^2} & \nu_j \frac{E_j}{1-\nu_j^2} & 0 & 0 & 0 \\ \nu_j \frac{E_j}{1-\nu_j^2} & \frac{E_j}{1-\nu_j^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_j}{2(1+\nu_j)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E_j}{2(1+\nu_j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_j}{2(1+\nu_j)} \end{pmatrix} e^{-\frac{\tau}{\tau_j}}.$$

Après intégration par parties, l'expression devient

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, t) = C_0 \epsilon(\underline{U})(x_1, x_2, x_3, t) + \int_{-\infty}^t \frac{\partial R}{\partial \tau}(t - \tau) \epsilon(\underline{U})(x_1, x_2, x_3, \tau) d\tau, \quad (\text{VI.5.6})$$

où le premier terme représente la réponse instantanée, il est donné par

$$C_0 \epsilon(\underline{U})(x_1, x_2, x_3, t) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} c_{11} = c_{22} = \frac{E_\infty}{1-\nu_\infty^2} + \sum_{j=1}^n \frac{E_j}{1-\nu_j^2}, \\ c_{12} = \nu_\infty \frac{E_\infty}{1-\nu_\infty^2} + \sum_{j=1}^n \nu_j \frac{E_j}{1-\nu_j^2}, \\ c_{33} = c_{44} = c_{55} = \frac{E_\infty}{2(1+\nu_\infty)} + \sum_{j=1}^n \frac{E_j}{2(1+\nu_j)}. \end{cases}$$

Le second terme vaut

$$\int_{-\infty}^t \frac{\partial R}{\partial \tau}(t - \tau) \epsilon(\underline{U})(x_1, x_2, x_3, \tau) d\tau = - \int_{-\infty}^t \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & 0 & 0 \\ r_{12} & r_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} d\tau$$

avec

$$\begin{cases} r_{11} = r_{22} = \sum_{j=1}^n \frac{E_j}{(1-\nu_j^2)\tau_j} e^{-\frac{\tau-t}{\tau_j}}, \\ r_{12} = \sum_{j=1}^n \frac{\nu_j E_j}{(1-\nu_j^2)\tau_j} e^{-\frac{\tau-t}{\tau_j}}, \\ r_{33} = r_{44} = r_{55} = \sum_{j=1}^n \frac{E_j}{2(1+\nu_j)\tau_j} e^{-\frac{\tau-t}{\tau_j}}, \end{cases}$$

ce qui devient, dans le domaine fréquentiel,

$$\int_{-\infty}^t \frac{\partial R}{\partial \tau} (t - \tau) \epsilon(\underline{U})(x_1, x_2, x_3, \tau) d\tau = \begin{bmatrix} \tilde{r}_{11} & \tilde{r}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{r}_{12} & \tilde{r}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{r}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{r}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{r}_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \\ x_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \\ x_3 \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1} \right) \\ \theta_1 - \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \theta_2 - \frac{\partial u}{\partial x_2} \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{r}_{11} = \tilde{r}_{22} = \sum_{j=1}^n \frac{E_j}{(1 + i\omega\tau_j)(1 - \nu_j^2)}, \\ \tilde{r}_{12} = \sum_{j=1}^n \nu_j \frac{E_j}{(1 + i\omega\tau_j)(1 - \nu_j^2)}, \\ \tilde{r}_{33} = \tilde{r}_{44} = \tilde{r}_{55} = \sum_{j=1}^n \frac{E_j}{2(1 + i\omega\tau_j)(1 + \nu_j)}. \end{cases}$$

L'ensemble des déplacements admissibles est  $\mathcal{U}_4$ , défini équation (VI.5.4). Reprenons le principe des travaux virtuels en dynamique dans le cas d'un problème de flexion de plaque sans force extérieure :

Trouver  $\underline{U} = (U, \Theta_1, \Theta_2) \in \mathcal{U}_4$  tel que

$$\int_{\Omega^{3D}} \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \hat{U} dx + \int_{\Omega^{3D}} \rho x_3^2 \left( \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial t^2} \hat{\Theta}_1 + \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial t^2} \hat{\Theta}_2 \right) dx + \int_{\Omega^{3D}} \sigma \cdot \epsilon(\hat{U}) dx = 0 \quad \forall \hat{U} \in \mathcal{U}_4. \quad (\text{VI.5.7})$$

Les expressions des déplacements, des tenseurs des contraintes et des déformations sont ensuite substituées dans l'équation (VI.5.7), avant d'intégrer explicitement selon  $x_3$ . On obtient la formulation mixte du problème viscoélastique :

$\forall \hat{u} \in \mathcal{U}_4$ ,

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \rho h \int_{\Omega} \hat{u} dx - \omega^2 \rho \frac{h^3}{12} \int_{\Omega} \theta_1 \hat{\theta}_1 + \theta_2 \hat{\theta}_2 dx + \frac{h^3}{12} \int_{\Omega} \left( (c_{11} - \tilde{r}_{11}) \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial x_2} \right) \right. \\ & + (c_{12} - \tilde{r}_{12}) \left( \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial x_2} \right) + (c_{33} - \tilde{r}_{33}) \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial x_1} \right) \left. \right) dx \\ & + kh \int_{\Omega} (c_{33} - \tilde{r}_{33}) \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} - \theta_1 \right) \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1} - \hat{\theta}_1 \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} - \theta_2 \right) \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_2} - \hat{\theta}_2 \right) \right) dx = 0. \end{aligned} \quad (\text{VI.5.8})$$

Tout comme dans le cas des plaques de Kirchhoff, on peut réécrire cette expression en tant

que problème aux valeurs propres polynomial complexe de la forme

$$\sum_{j=0}^{n+2} \omega^j a_j(h, \underline{u}, \hat{u}) = 0 \quad \forall \hat{u} \in \mathcal{U}_4, \quad (\text{VI.5.9})$$

où la pulsation  $\omega$  représente la valeur propre complexe du problème de vibration et les  $a_j$  sont des formes bilinéaires symétriques complexes indépendantes de  $\omega$  dont les expressions sont considérablement plus lourdes que les formes bilinéaires associées au modèle de Kirchhoff. Celles-ci sont données explicitement en annexe A.

## 6 Optimisation de formes de plaques épaisses

### Problème d'optimisation en élasticité

À travers le premier problème, on cherche à optimiser la forme  $\Omega$  d'une plaque élastique encastrée au bord  $\Gamma_{D_1}$  et soumise à une force  $g$  au bord libre  $\Gamma_{D_2}$ . Le comportement en flexion de la plaque est gouverné par l'équation (VI.5.3) et l'objectif est de minimiser la compliance de la structure. Le problème d'optimisation s'écrit :

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{V}_{ad}} \mathcal{J}_1(\Omega) \quad (\text{VI.6.1})$$

où

$$\mathcal{J}_1(\Omega) = \int_{\Omega} g u_g dx.$$

L'ensemble des formes admissibles est donné par

$$\mathcal{V}_{ad} = \left\{ \Omega \in D \mid (\Gamma_{D_1} \cup \Gamma_{D_2}) \subset \partial\Omega, \Omega_e \subset \Omega, V(\Omega) = \int_{\Omega} h dx = V_l \right\}.$$

On applique une contrainte de volume constant en prenant un volume cible  $V_l = V_0$ , où  $V_0$  est le volume initial de la structure, et on reprend la contrainte géométrique  $\Omega_e$  (Figure VI.4.12) que l'on applique par projection.

Le calcul de la dérivée de forme de  $\mathcal{J}_1(\Omega)$  est classique. De la même façon que pour l'équation (VI.2.6), on utilise le Lemme III.2.1 et la propriété auto-adjointe du problème pour obtenir

$$D_{\Omega} \mathcal{J}_1(\Omega) \theta = - \int_{\partial\Omega} \left( \frac{h^3}{12} D_p \kappa(\underline{u}_g) \cdot \kappa(\underline{u}_g) + h \mathbf{k} D_s \gamma(\underline{u}_g) \cdot \gamma(\underline{u}_g) \right) \theta \cdot \mathbf{n} ds. \quad (\text{VI.6.2})$$

Le problème sera résolu numériquement à l'aide d'un algorithme d'optimisation topologique par la méthode level-set. Les contraintes sont appliquées par projection, similairement aux problèmes des sections précédentes.



### Problème d'optimisation en viscoélasticité

Le problème d'optimisation de l'amortissement des vibrations libres de la plaque encastrée est également traité. Pour cela, on reprend la méthode numérique utilisée au chapitre V pour réaliser l'optimisation couplée de l'épaisseur et de la géométrie de la structure dans le cas du modèle de Mindlin. On cherche à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{V}_{ad}} \mathcal{J}_2(\Omega) \quad (\text{VI.6.3})$$

où la fonction objectif choisie est le décrément logarithmique

$$\mathcal{J}_2(h, \Omega) = -\frac{\omega_i(h, \Omega)}{\omega_r(h, \Omega)}.$$

L'ensemble des formes admissibles est donné par

$$\mathcal{V}_{ad} = \left\{ \Omega \in D \mid \Gamma_{D_1} \subset \partial\Omega, \Omega_f \subset \Omega, V(\Omega) = \int_{\Omega} h \, dx = V_l \right\}.$$

On applique toujours la contrainte de volume constant en prenant  $V_l = V_0$  et on reprend la contrainte géométrique  $\Omega_f$  du chapitre V. Pour rappel, l'initialisation de l'optimisation est illustré Figure V.3.2.

La formulation variationnelle des plaques de Mindlin, équation (VI.5.9), jouit des mêmes propriétés que la formulation variationnelle des plaques de Kirchhoff, en particulier, les applications  $a_j(h, \underline{u}, \hat{\underline{u}}) = \int_{\Omega} g_j(h(x), \underline{u}(x), \hat{\underline{u}}(x)) dx$  sont des formes bilinéaires symétriques indépendantes de la pulsation  $\omega$ . On peut alors réaliser l'analyse de sensibilité de  $\mathcal{J}_2(h, \Omega)$  en utilisant les méthodes du chapitre V. La dérivée par rapport à  $h$  est obtenue similairement à l'équation (VI.6.4), on a

$$D_h \mathcal{J}_2(h, \Omega) \tilde{h} = \int_{\Omega} -\frac{\omega_r(h) \operatorname{Im}(W(h, \underline{u}, \underline{u})) - \omega_i(h) \operatorname{Re}(W(h, \underline{u}, \underline{u}))}{\omega_r(h)^2} \tilde{h} \, dx, \quad (\text{VI.6.4})$$

où

$$W(h, \underline{u}, \underline{u}) \tilde{h} = -\frac{\sum_{j=0}^{n+2} \omega(h)^j D_h g_j(h, \underline{u}, \underline{u}) \tilde{h}}{\sum_{j=1}^{n+2} j \omega(h)^{j-1} a_j(h, \underline{u}, \underline{u})}. \quad (\text{VI.6.5})$$

Pour obtenir la dérivée de forme, il suffit d'appliquer la proposition V.3.1, rappelée ci-dessous, au cas de la plaque de Mindlin.

**Proposition V.3.1.** *Pour tout  $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  tel que  $\theta = 0$  sur  $\Gamma_{D_1} \cup \Gamma_{D_2}$  et  $\Omega_e \subset \Omega$ , la dérivée de forme de  $\mathcal{J}_2(h, \Omega)$  est donnée par*

$$\begin{aligned} D_{\Omega} \mathcal{J}_2(h, \Omega) \theta &= - \int_{\Gamma_N} \frac{\omega_r \operatorname{Im}(f(\omega, h, u)) - \omega_i \operatorname{Re}(f(\omega, h, u))}{\omega_r^2} \theta \cdot n \, ds \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\omega_r D_h \omega_i - \omega_i D_h \omega_r}{\omega_r^2} \theta \cdot \nabla h \, dx, \end{aligned} \quad (\text{VI.6.6})$$

où  $f(\omega, h, u)$  est définie par

$$f(\omega, h, u) = -\frac{\sum_{j=0}^{n+2} \omega^j g_j(h, u, u)}{\sum_{j=1}^{n+2} j \omega^{j-1} a_j(h, \Omega, u, u)}. \quad (\text{VI.6.7})$$

## 7 Résultats numériques

### 7.1 Optimisation topologique de plaques épaisses en élasticité linéaire

Les résultats d'optimisation sont obtenus en minimisant la compliance d'une plaque épaisse constituée d'un matériau élastique isotrope similaire à celui choisi en section 5. Les paramètres matériau sont  $E = 18$  MPa et  $\nu = 0.499$ . La plaque est toujours d'épaisseur constante, de dimensions  $L = 60$  mm,  $W = 30$  mm,  $h = 3$  mm et est soumise à une force  $g = 100$  N.

Le design optimisé, donné en Figure VI.7.14, est très proche du résultat obtenu Figure VI.4.12 dans le cas du modèle de Kirchhoff. Les zones de section fine présentent des concentrations de contraintes de cisaillement  $\sigma_{13}$ , mises en évidence en Figure VI.7.15, donnant l'évolution des composantes du tenseur des contraintes au sein de la structure. Cependant,

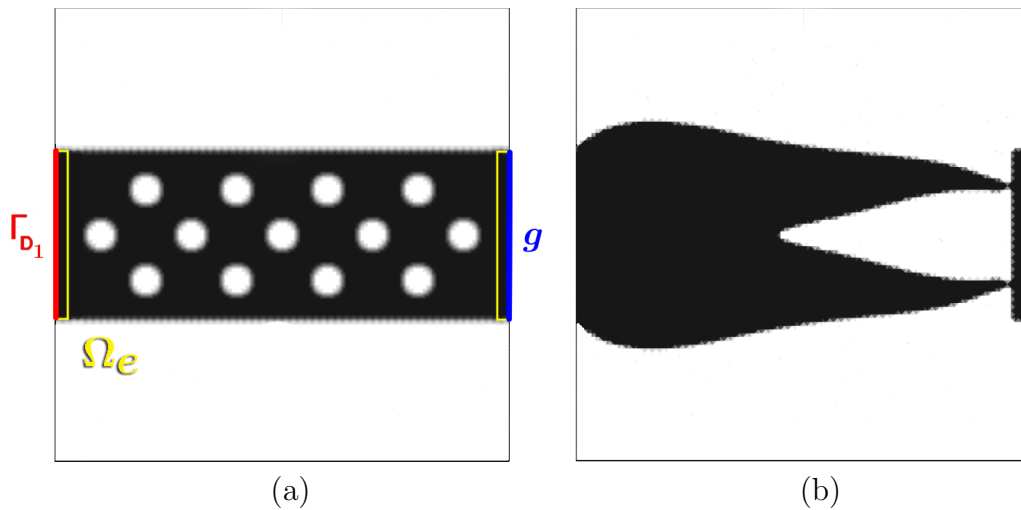


FIGURE VI.7.14 – (a) Initialisation et (b) design optimisé d'une plaque élastique modélisée par le modèle de Mindlin pour la minimisation de la compliance.

compte tenu de la finesse de la structure au voisinage de la zone d'application de la force, on pourrait s'attendre à des concentrations de contraintes plus importantes. La minimisation de la compliance en élasticité est une problématique très classique en optimisation de formes. On peut donc s'appuyer sur la littérature pour vérifier la qualité de l'algorithme développé dans ce chapitre. Pour cela, une d'optimisation topologique est effectuée pour un problème similaire existant dans la littérature. La Figure VI.7.16 illustre la nouvelle initialisation et le design optimisé pour une force verticale ponctuelle arbitraire appliquée au centre de la

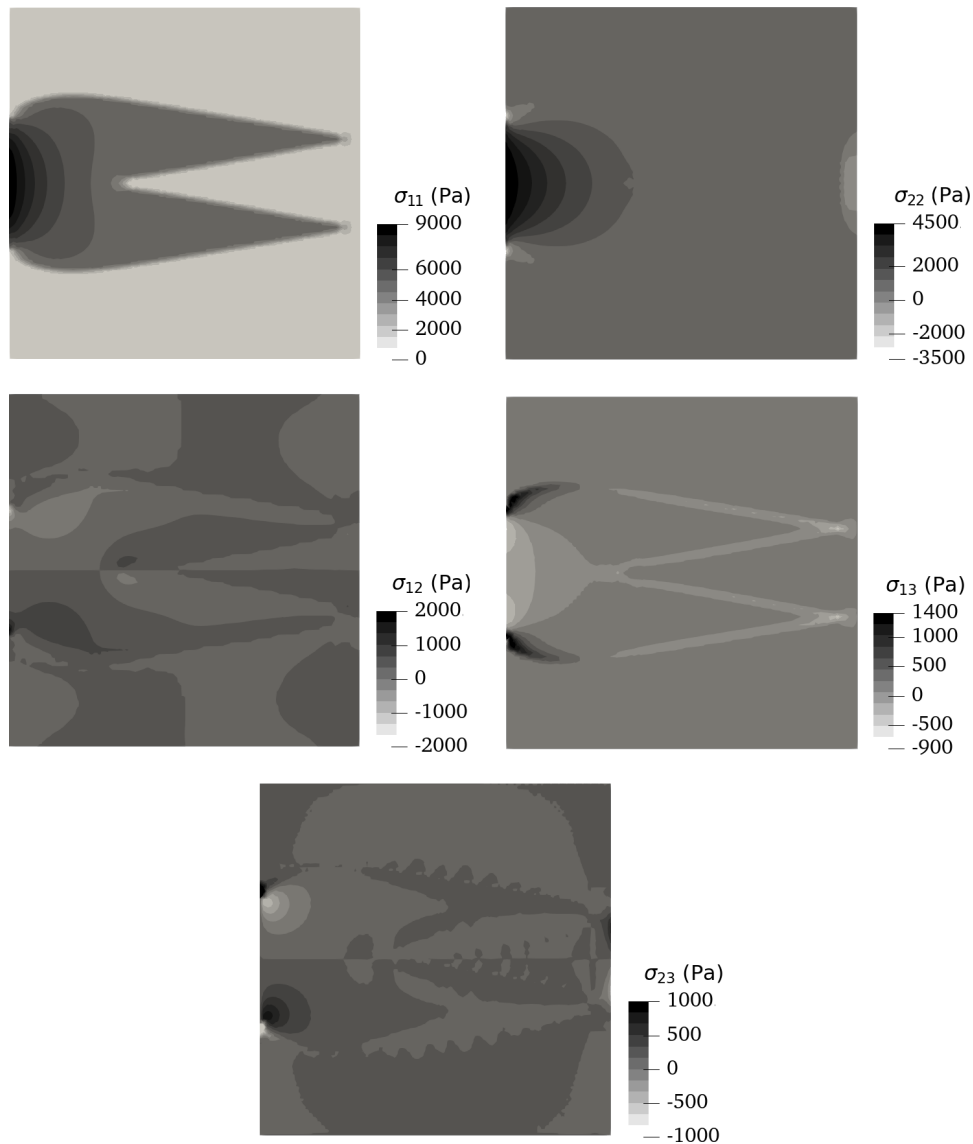


FIGURE VI.7.15 – Composantes du tenseur des contraintes du design optimisé dans le cas d'une plaque épaisse élastique soumise à une force linéique verticale à son extrémité libre (Figure VI.7.14).

plaque. On retrouve des designs semblables aux résultats de [89], voir Figure VI.7.16.c, ainsi que de [25, 81, 97], attestant de l'efficacité de l'algorithme.

Une première explication de ce phénomène d'amincissement de section pourrait être leur proximité par rapport à la zone d'application de la force. Ces points faibles, s'assimilant à des pivots, n'engendreraient qu'une faible augmentation du déplacement à l'extrémité de la poutre. Cependant, en réalisant le même test tout en allongeant la zone de matière fixe, on remarque, Figure VI.7.17, que le problème persiste même lorsque les zones fines sont éloignées du chargement.

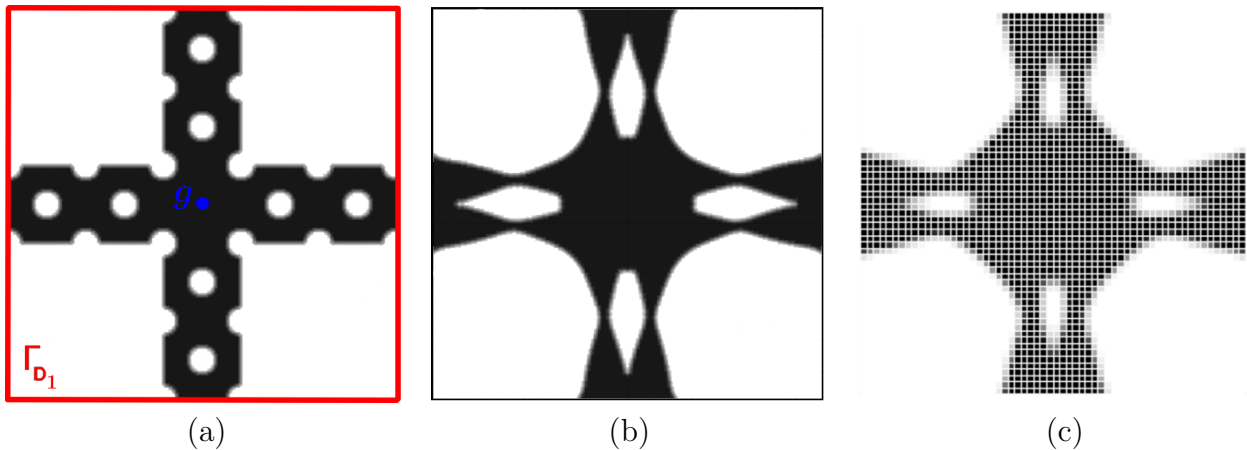


FIGURE VI.7.16 – (a) Initialisation et (b) design optimisé d’une plaque élastique soumise à une force ponctuelle en son centre, modélisée par le modèle de Mindlin, pour la minimisation de la compliance, comparés aux (c) résultats extraits de [89].

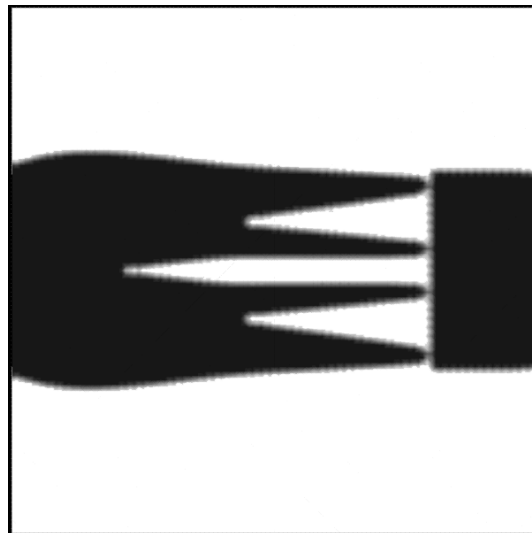


FIGURE VI.7.17 – Design optimisé d’une plaque élastique dont la zone fixée d’application de la force a été allongée.

Plusieurs autres raisons possibles peuvent être évoquées :

- Il peut s’agir d’une limitation des modèles de plaques. Ceux-ci ne permettent pas de représenter la rigidité de la structure de façon fidèle dans le sens de l’épaisseur. Cela ne semble pas se limiter au cas du modèle de Kirchhoff puisque le modèle de Mindlin, plus complet, présente également le même phénomène.
- Comme attendu, la dérivée de la rotation  $\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1}$  augmente drastiquement au niveau de la singularité, voir Figure VI.7.18. En effet, en assimilant la section fine à une poutre, on a  $\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \propto \frac{1}{I}$ , avec  $I$  le moment quadratique de la poutre. Pour le modèle

de Kirchhoff par exemple, puisque  $\theta_1 \approx \frac{\partial u_g}{\partial x_1}$ , le champ  $u_g$  est beaucoup plus régulier que  $\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1}$ . Or, la compliance possède une dépendance directe avec le déplacement vertical  $u_g$ . Par conséquent, il est possible que l'impact de cette singularité sur les performances finales ait été lissé, dû au choix de la fonction objectif.

- Enfin, rappelons que la compliance est un critère global. Il n'est donc pas impossible de voir apparaître des zones de rigidité faible, de façon locale, si la rigidité globale de la structure n'est pas compromise.

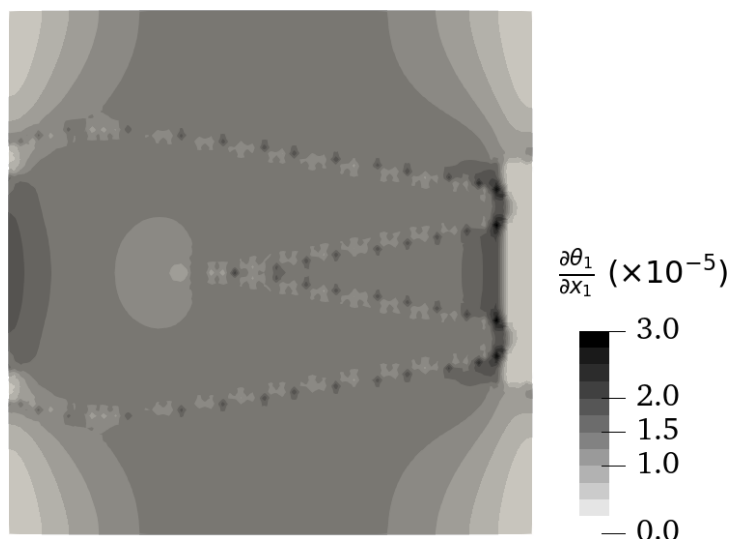


FIGURE VI.7.18 – Dérivée de  $\theta_1$  selon  $x_1$  pour le design optimisé dans le cas de la minimisation de la compliance d'une plaque élastique modélisé par le modèle de Mindlin.

Il semble donc possible que cette singularité provienne d'une limitation des modèles de plaques, ou d'une limitation de la fonction objectif. Cette discussion motive alors l'extension des problèmes d'optimisation au cas 3D afin d'avoir une meilleure compréhension du phénomène.

## 7.2 Optimisation couplée de plaques épaisses en viscoélasticité linéaire

Cette section clôture l'étude des plaques viscoélastique 2D par la comparaison des résultats de l'optimisation couplée, détaillée au chapitre V, de plaques de Mindlin en vibration par rapport aux résultats obtenus dans le cas du modèle de Kirchhoff. Le polymère choisi correspond au matériau de Zener utilisé jusqu'à présent. Pour rappel, les paramètres sont :  $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $E_\infty = 18 \text{ MPa}$ ,  $E_1 = 30 \text{ MPa}$ ,  $\tau_1 = 0.002 \text{ s}$ ,  $\nu_\infty = 0.499$  et  $\nu_1 = 0.498$ .

La Figure VI.7.19 compare les designs finaux de plaques de Mindlin (haut) et de Kirchhoff (bas) pour différentes épaisseurs et contraintes de boîte,  $h_0 = 3 \text{ mm}$  et  $h_0 \in [2, 4]$  (gauche),  $h_0 = 7.5 \text{ mm}$  et  $h_0 \in [5, 10]$  (droite). Pour des plaques de faible épaisseur, les résultats d'optimisation dans le cas du modèle de Mindlin et du modèle de Kirchhoff sont proches. En revanche, lorsque l'épaisseur augmente, l'impact des cisaillements transverses

devient non négligeable et change considérablement les résultats d'optimisation. À partir d'une certaine épaisseur, il devient plus pertinent d'utiliser le modèle de Mindlin afin d'optimiser les capacités d'amortissement de la structure. Bien que les designs finaux varient pour  $h_0 = 7.5$ , les comportements en vibration restent similaires. En d'autres termes, on atteint le même minimum de la fonction objectif pour des designs différents.

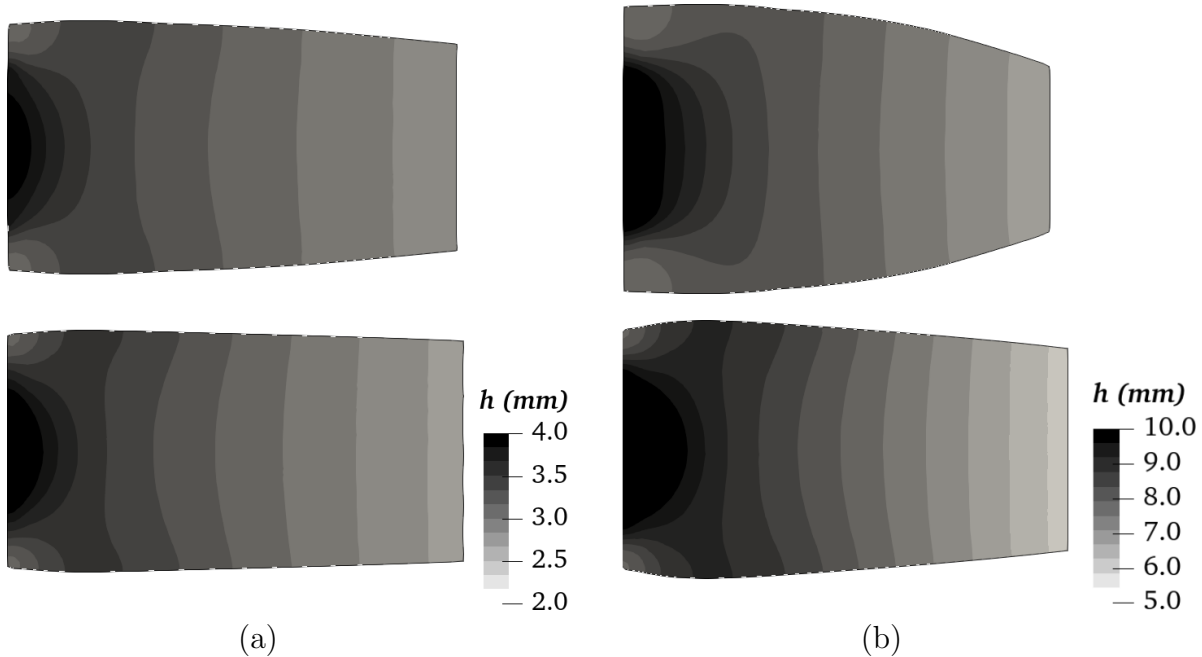


FIGURE VI.7.19 – Comparaison des designs optimisé de plaques viscoélastique modélisées par le modèle de Mindlin (haut) et par le modèle de Kirchhoff (bas) pour (a)  $h_0 = 3$  mm et (b)  $h_0 = 7.5$  mm, pour la maximisation du décrément logarithmique à volume constant.

## 8 Conclusion

Ce chapitre apporte une première vision des difficultés rencontrées lors de l'application aux semelles de chaussures planes. Une première prise en compte des contraintes, focalisée sur les critères les plus importants, met en évidence des résultats d'optimisation surprenants. En particulier, la contrainte de rigidité sur la compliance, appliquée à l'aide d'un Lagrangien augmenté, impacte grandement le design final et provoque l'apparition de zones de faible section, ce qui est contraire à l'intuition. Les structures viscoélastiques soumises aux algorithmes d'optimisation topologique par la méthode level-set développés dans ce chapitre montrent des gains considérables d'amortissement. Malgré un design semblant peu rigide en flexion, la contrainte sur la compliance de la structure optimisée est cependant bien satisfaite.

L'étude portant sur le modèle de Reissner-Mindlin a ensuite permis d'explorer l'impact du cisaillement transverse, initialement négligé par le modèle de Kirchhoff. On obtient des résultats proches entre les modèles de plaques minces et de plaques épaisses. La singularité

engendrée par la contrainte de rigidité est toujours observable, ne disqualifiant pas l'hypothèse de Kirchhoff dans le cas des plaques minces. L'application du modèle de Mindlin au cas viscoélastique expose l'influence des effets des cisaillements transverses sur le design optimal lors de la maximisation de l'amortissement d'une structure en polymère. Cette étude permet ainsi d'affiner le choix du modèle en montrant la pertinence du modèle de Mindlin pour des plaques d'épaisseur plus importante.

Dans ce travail, la recherche du design optimal vise à obtenir le meilleur couple (*design optimal, matériau*). Bien que les résultats proposés soient obtenus à matériau fixé, on peut aisément comparer les performances du couple (*design optimal, matériau*) pour plusieurs matériaux viscoélastiques donnés. La maîtrise de la chimie des polymères permettant une grande liberté dans le choix des paramètres matériaux, il serait intéressant de poursuivre cette étude par une optimisation du design couplée à une recherche des paramètres viscoélastiques optimaux.

Le phénomène d'amincissement critique de section mis en évidence dans ce chapitre reste partiellement incompris, il devient alors naturel d'effectuer l'optimisation dans un cadre plus général, 3D, afin d'écartier les incertitudes provenant du modèle 2D choisi et de comprendre ce qui a lieu dans l'épaisseur de la plaque. Cela permettra également d'effectuer l'optimisation de structures à la topologie plus riche et de pouvoir appliquer les algorithmes développés en viscoélasticité aux semelles de chaussures de course, possédant des géométries plus complexes.

# Chapitre VII

## Optimisation de structures viscoélastiques 3D

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>161</b>
<b>2</b>	<b>Généralisation des problèmes de vibration aux structures 3D</b>	<b>162</b>
<b>3</b>	<b>Optimisation topologique de structures viscoélastiques 3D</b>	<b>167</b>
<b>4</b>	<b>Méthodes numériques</b>	<b>170</b>
4.1	Implémentation de la méthode level-set	170
4.2	Calcul haute performance	173
<b>5</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>180</b>
5.1	Optimisation topologique d'une plaque élastique 3D	180
5.2	Optimisation topologique d'une plaque viscoélastique 3D	184
5.3	Optimisation topologique d'une semelle de chaussure de course	187
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>192</b>

---

## 1 Introduction

Ce dernier chapitre est dédié à la généralisation des problèmes d'optimisation topologique aux structures 3D et vise à accomplir deux études. La première portera sur l'optimisation topologique d'une plaque 3D élastique afin de comprendre le phénomène de zones faibles obtenu au chapitre VI. Une seconde étude traitera de l'optimisation topologique de structures 3D viscoélastiques, avec tout d'abord l'optimisation d'une plaque en vibration, puis l'optimisation d'une semelle de chaussure de course fournissant des designs 3D répondant aux problématiques industrielles choisies.

Dans ce chapitre, on écartera les modèles de plaques utilisés jusqu'à maintenant pour adopter une formulation plus générale permettant de traiter tout type de structure. Cela permettra d'optimiser des semelles de chaussure de course réelles sans être limité par des besoins de planéité dus au modèle. Afin de modéliser de telles structures, les modèles de coques furent tout d'abord envisagés mais rapidement abandonnés pour plusieurs raisons.



Bien que le modèle général 3D entraîne des calculs plus volumineux, il permet de plus grandes libertés d'un point de vue topologie. De plus, les éléments coques, tel que l'élément solide-coque SB9DK25 [24], ne sont pas présents dans `FreeFem++`, ce qui aurait nécessité un changement de logiciel ou une implémentation d'éléments, ce qui sort du cadre de ce travail.

L'emploi des lois 3D n'introduit aucune difficulté théorique supplémentaire dans l'étude du problème viscoélastique, en revanche, un travail numérique considérable est nécessaire afin de rendre le calcul réalisable. En effet, pour pouvoir capturer le comportement de la semelle dans l'épaisseur, le maillage doit être particulièrement fin, rendant le calcul numérique volumineux. On a alors recourt à des techniques de calcul parallèle reposant sur la méthode de décomposition de domaine et la librairie `PETSc` [21, 141].

Ce chapitre est organisé comme suit. On présente en premier lieu, en section 2, les problèmes généraux associés au comportement de structures élastiques 3D et de structures viscoélastiques 3D en vibration libre. La section 3 est ensuite dédiée à l'expression des deux problèmes d'optimisation topologique étudiés. Les méthodes numériques employées sont détaillées en section 4, avec une attention particulière portée sur les techniques de calcul haute performance. Enfin, les résultats finaux dans le cas élastique, pour la plaque en flexion, et viscoélastique, pour la plaque et la semelle de chaussure en vibration, sont donnés et discutés en section 5.

## 2 Généralisation des problèmes de vibration aux structures 3D

Tout comme au chapitre VI, les problèmes d'optimisation traités dans ce chapitre mettent en jeu une équation de flexion quasi-statique en élasticité et une équation dynamique en viscoélasticité. Exprimer ces deux modèles est nécessaire pour la résolution du problème d'optimisation topologique de la semelle de chaussure de course prenant en compte des contraintes industrielles.

### Énoncé du problème élastique linéaire

Pour établir la formulation variationnelle du problème de flexion en élasticité 3D, on reprend les notations générales introduites dans le chapitre I. La plaque est considérée comme un solide de volume  $\Omega^{3D}$ . Dans ce chapitre, pour des raisons de clarté,  $\Omega^{3D}$  sera simplement noté  $\Omega$ . La plaque est encadrée à l'extrémité  $\partial\Omega_{D1}$ , soumise à une force  $g$  à l'extrémité opposée  $\partial\Omega_{D2}$  et libre sinon. Le bord libre  $\partial\Omega_N$  sera soumis à l'optimisation de formes.

Sans modèle de plaque, nous ne séparons plus le problème en un problème de membrane et un problème de flexion. De plus, on prend désormais en compte les déformations et contraintes dans le sens de l'épaisseur,  $\epsilon_{33}$  et  $\sigma_{33}$ . On exprime alors les tenseurs des déformations et des contraintes en fonction des déplacements dans les trois directions de l'espace. On s'intéresse toujours au déplacement vertical, maintenant noté  $u_3$ , composante du déplacement  $u = (u_1, u_2, u_3)$ .

Pour un matériau élastique isotrope de module de Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ , on a

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (\text{VII.2.1})$$

et

$$\sigma = D\epsilon, \quad (\text{VII.2.2})$$

où

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

On exprime directement la formulation variationnelle en quasi-statique en reprenant l'équation (I.1.16) du chapitre I, et on obtient l'expression classique :

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \epsilon(\hat{u}) \, dx = \int_{\partial\Omega_{D_2}} g \cdot \hat{u} \, ds \quad \forall \hat{u} \in \mathcal{U}_5. \quad (\text{VII.2.3})$$

où les tenseurs  $\epsilon(\hat{u})$  et  $\sigma$  sont exprimés équations (VII.2.1) et (VII.2.2). L'ensemble des déplacements admissibles est donné par

$$\mathcal{U}_5 = \left\{ (u_1, u_2, u_3) \in (H^1(\Omega))^3 \mid u_1|_{\partial\Omega_{D_1}} = 0, u_2|_{\partial\Omega_{D_1}} = 0, u_3|_{\partial\Omega_{D_1}} = 0 \right\}. \quad (\text{VII.2.4})$$

Tout comme le modèle de plaque épaisse, la formulation variationnelle ne contient que des dérivées d'ordre 1. On peut donc continuer à utiliser les éléments usuels  $\mathbb{P}_1$  pour la résolution numérique du problème.

### Énoncé du problème viscoélastique linéaire

La formulation variationnelle du problème viscoélastique 3D est déterminée similairement aux cas 2D des chapitres V et VI et ne présente aucune difficulté théorique additionnelle. On détaille tout de même le calcul dans le cas général. On considère une plaque encastree aux bords  $\partial\Omega_{D1}$  et  $\partial\Omega_{D2}$ , libre sinon, sur  $\partial\Omega_N$ . Le matériau viscoélastique constituant la plaque est modélisé par le modèle de Maxwell généralisé, les modules sont notés  $E_\infty$  et  $(E_j)_{j \in [1, n]}$ , les temps de relaxation  $(\tau_j)_{j \in [1, n]}$ , et les coefficients  $\nu_\infty$  et  $(\nu_j)_{j \in [1, n]}$  associés aux branches élastiques et viscoélastiques du modèle. On suppose que les déplacements  $U = (U_1, U_2, U_3)$  sont harmoniques tels que

$$\begin{cases} U_1(x_1, x_2, x_3, t) = u_1(x_1, x_2, x_3)e^{i\omega t} \\ U_2(x_1, x_2, x_3, t) = u_2(x_1, x_2, x_3)e^{i\omega t} \\ U_3(x_1, x_2, x_3, t) = u_3(x_1, x_2, x_3)e^{i\omega t}. \end{cases} \quad (\text{VII.2.5})$$

L'expression du tenseur des déformations (VII.2.1) permet d'obtenir le tenseur des contraintes exprimé par

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, t) = C_\infty \epsilon(U)(x_1, x_2, x_3, t) + \int_{-\infty}^t R(t - \tau) \frac{\partial \epsilon(U)}{\partial \tau}(x_1, x_2, x_3, \tau) d\tau.$$

Ces tenseurs du second ordre sont exprimés :

$$C_\infty = \begin{pmatrix} \frac{E_\infty}{1-\nu_\infty^2} & \nu_\infty \frac{E_\infty}{1-\nu_\infty^2} & \nu_\infty \frac{E_\infty}{1-\nu_\infty^2} & 0 & 0 & 0 \\ \nu_\infty \frac{E_\infty}{1-\nu_\infty^2} & \frac{E_\infty}{1-\nu_\infty^2} & \nu_\infty \frac{E_\infty}{1-\nu_\infty^2} & 0 & 0 & 0 \\ \nu_\infty \frac{E_\infty}{1-\nu_\infty^2} & \nu_\infty \frac{E_\infty}{1-\nu_\infty^2} & \frac{E_\infty}{1-\nu_\infty^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E_\infty}{2(1+\nu_\infty)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_\infty}{2(1+\nu_\infty)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_\infty}{2(1+\nu_\infty)} \end{pmatrix},$$

$$R(\tau) = \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} \frac{E_j}{1-\nu_j^2} & \nu_j \frac{E_j}{1-\nu_j^2} & \nu_j \frac{E_j}{1-\nu_j^2} & 0 & 0 & 0 \\ \nu_j \frac{E_j}{1-\nu_j^2} & \frac{E_j}{1-\nu_j^2} & \nu_j \frac{E_j}{1-\nu_j^2} & 0 & 0 & 0 \\ \nu_j \frac{E_j}{1-\nu_j^2} & \nu_j \frac{E_j}{1-\nu_j^2} & \frac{E_j}{1-\nu_j^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E_j}{2(1+\nu_j)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_j}{2(1+\nu_j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_j}{2(1+\nu_j)} \end{pmatrix} e^{-\frac{\tau}{\tau_j}}.$$

Après intégration par parties, l'expression devient

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, t) = C_0 \epsilon(U)(x_1, x_2, x_3, t) + \int_{-\infty}^t \frac{\partial R}{\partial \tau}(t - \tau) \epsilon(U)(x_1, x_2, x_3, \tau) d\tau, \quad (\text{VII.2.6})$$

où le premier terme, représentant la réponse instantanée, est donné par

$$C_0 \epsilon(U)(x_1, x_2, x_3, t) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} c_{11} = c_{22} = c_{33} = \frac{E_\infty}{1 - \nu_\infty^2} + \sum_{j=1}^n \frac{E_j}{1 - \nu_j^2}, \\ c_{12} = c_{13} = c_{23} = \nu_\infty \frac{E_\infty}{1 - \nu_\infty^2} + \sum_{j=1}^n \nu_j \frac{E_j}{1 - \nu_j^2}, \\ c_{44} = c_{55} = c_{66} = \frac{E_\infty}{2(1 + \nu_\infty)} + \sum_{j=1}^n \frac{E_j}{2(1 + \nu_j)}. \end{cases}$$

Le second terme vaut

$$\int_{-\infty}^t \frac{\partial R}{\partial \tau} (t - \tau) \epsilon(U)(x_1, x_2, x_3, \tau) d\tau = - \int_{-\infty}^t \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 & 0 & 0 \\ r_{12} & r_{22} & r_{23} & 0 & 0 & 0 \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} d\tau$$

avec

$$\begin{cases} r_{11} = r_{22} = r_{33} = \sum_{j=1}^n \frac{E_j}{(1 - \nu_j^2) \tau_j} e^{\frac{\tau-t}{\tau_j}}, \\ r_{12} = r_{13} = r_{23} = \sum_{j=1}^n \frac{\nu_j E_j}{(1 - \nu_j^2) \tau_j} e^{\frac{\tau-t}{\tau_j}}, \\ r_{44} = r_{55} = r_{66} = \sum_{j=1}^n \frac{E_j}{2(1 + \nu_j) \tau_j} e^{\frac{\tau-t}{\tau_j}}, \end{cases}$$

ce qui devient, dans le domaine fréquentiel,

$$\int_{-\infty}^t \frac{\partial R}{\partial \tau}(t - \tau) \epsilon(U)(x_1, x_2, x_3, \tau) d\tau = \begin{bmatrix} \tilde{r}_{11} & \tilde{r}_{12} & \tilde{r}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{r}_{12} & \tilde{r}_{22} & \tilde{r}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{r}_{13} & \tilde{r}_{23} & \tilde{r}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{r}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{r}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{r}_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{r}_{11} = \tilde{r}_{22} = \tilde{r}_{33} = \sum_{j=1}^n \frac{E_j}{(1+i\omega\tau_j)(1-\nu_j^2)}, \\ \tilde{r}_{12} = \tilde{r}_{13} = \tilde{r}_{23} = \sum_{j=1}^n \nu_j \frac{E_j}{(1+i\omega\tau_j)(1-\nu_j^2)}, \\ \tilde{r}_{44} = \tilde{r}_{55} = \tilde{r}_{66} = \sum_{j=1}^n \frac{E_j}{2(1+i\omega\tau_j)(1+\nu_j)}. \end{cases}$$

L'ensemble des déplacements admissibles est  $\mathcal{U}_5$ , défini par (VII.2.4). Le principe des travaux virtuels dans le cas dynamique donne :

Trouver  $U = (U_1, U_2, U_3) \in \mathcal{U}_5$  tel que

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \cdot \hat{U} \, dx + \int_{\Omega} \sigma \cdot \epsilon(\hat{U}) dV = 0 \quad \forall \hat{U} \in \mathcal{U}_5. \quad (\text{VII.2.7})$$

Il suffit maintenant de substituer les expressions des déplacements, des tenseurs des contraintes et des déformations pour obtenir la formulation du problème viscoélastique :

$\forall \hat{u} \in \mathcal{U}_5$ ,

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \rho \int_{\Omega} u \cdot \hat{u} \, dx + \int_{\Omega} (c_{11} - \tilde{r}_{11}) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_3} \right) \\ & + (c_{12} - \tilde{r}_{12}) \left( \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_1} + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2} + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_3} \right) \\ & + (c_{44} - \tilde{r}_{44}) \left( \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_1} \right) + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_1} \right) \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \left( \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_2} \right) \right) dx = 0. \end{aligned} \quad (\text{VII.2.8})$$

Afin de pouvoir appliquer les résultats des chapitres précédents, et en particulier la proposition V.3.1 permettant d'obtenir la dérivée de forme, on réécrit l'équation (VII.2.8) en tant que problème aux valeurs propres polynomial complexe :

$$\sum_{j=0}^{n+2} \omega^j a_j(h, u, u) = 0 \quad \forall \hat{u} \in \mathcal{U}_5, \quad (\text{VII.2.9})$$

où les  $a_j$  sont encore des formes bilinéaires symétriques complexes indépendantes de la pulsation  $\omega$ , dont les nouvelles expressions dans le cas 3D sont données en annexe A.

### 3 Optimisation topologique de structures viscoélastiques 3D

#### Problème d'optimisation en élasticité linéaire

Ce premier problème d'optimisation vise à étendre l'étude réalisée au chapitre VI. On cherche à réaliser l'optimisation topologique d'une plaque en élasticité 3D, encastrée à l'extrémité  $\partial\Omega_{D_1}$  et soumise à une force verticale  $g$  répartie à l'extrémité libre  $\partial\Omega_{D_2}$ . L'objectif est de minimiser la compliance et de comprendre l'origine de l'apparition des zones de faiblesse obtenues dans le cas des modèles de plaque.

Le problème d'optimisation s'écrit

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{V}_{ad}} \mathcal{J}_1(\Omega) \quad (\text{VII.3.1})$$

où, pour  $u$  solution du problème de flexion,

$$\mathcal{J}_1(\Omega) = \int_{\partial\Omega_{D_2}} g \cdot u \, dx.$$

On rappelle l'ensemble des formes admissibles

$$\mathcal{V}_{ad} = \{\Omega \in D \mid (\partial\Omega_{D_1} \cup \partial\Omega_{D_2}) \subset \partial\Omega, \Omega_e \subset \Omega, V(\Omega) = V_l\}$$

où la forme  $\Omega$  et le domaine de travail  $D$  sont maintenant des parties de l'espace tridimensionnel. Une contrainte de volume constant est de nouveau appliquée pour un volume cible  $V_l$ , ainsi que la contrainte géométrique  $\Omega_e$  (Figure VI.4.12) adaptée en 3D. La figure VII.3.1 illustre les conditions aux limites, les contraintes géométriques et le domaine de calcul  $D$  utilisés.

La dérivée de forme de  $\mathcal{J}_1(\Omega)$  est exprimée de la même façon qu'au chapitre VI. En appliquant le Lemme III.2.1 et en utilisant la propriété auto-adjointe du problème, on obtient

$$D_\Omega \mathcal{J}_1(\Omega) \theta = - \int_{\partial\Omega} (\sigma(u) \cdot \epsilon(u)) \theta \cdot n \, ds. \quad (\text{VII.3.2})$$

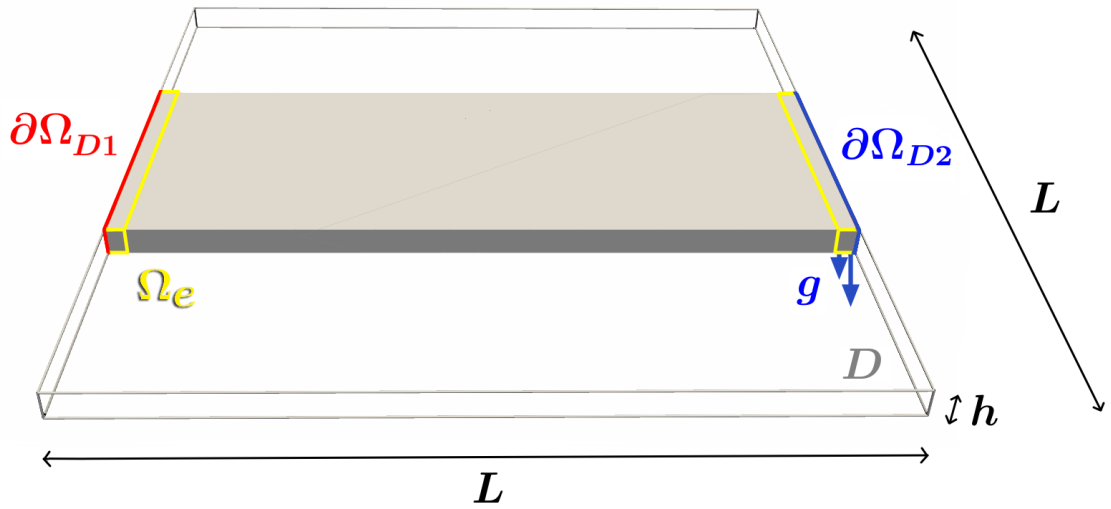


FIGURE VII.3.1 – Représentation du domaine d’optimisation  $D$ , des conditions aux limites et des contraintes géométriques dans le cas de la minimisation de la compliance d’une plaque élastique en flexion.

### Problème d’optimisation de la semelle de chaussure

Ce deuxième problème d’optimisation topologique 3D vise à trouver le design optimal d’une semelle de chaussure de course. Par conséquent, on cherche à choisir la fonction objectif la plus pertinente tout en regroupant toutes les contraintes prises en compte jusqu’à maintenant. Le problème décrit dans cette section sera tout d’abord appliqué à une plaque 3D avant d’être utilisé pour obtenir le design optimal d’une semelle de chaussure de course.

Comme discuté au chapitre VI, la fonction objectif sera enrichie afin de prendre en compte le comportement en vibration libre de la structure pour deux configurations d’encastements. Le problème d’optimisation s’écrit

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{V}_{ad}} \mathcal{J}_2(\Omega), \quad (\text{VII.3.3})$$

où la fonction objectif choisie est la somme des décréments logarithmiques correspondant à deux tests de vibration libre. Un premier test pour une structure encastée sur  $\partial\Omega_{D1}$  et un second pour un encastement au bord opposé  $\partial\Omega_{D2}$ . La fonction objectif est donnée par

$$\mathcal{J}_2(\Omega) = -\frac{\omega_i^{D1}(\Omega)}{\omega_r^{D1}(\Omega)} - \frac{\omega_i^{D2}(\Omega)}{\omega_r^{D2}(\Omega)} \quad (\text{VII.3.4})$$

où  $\omega^{D1}$  et  $\omega^{D2}$  font références aux pulsations propres associées respectivement aux tests de vibration pour une structure encastée en  $\partial\Omega_{D1}$  et  $\partial\Omega_{D2}$ . Nous avons appris dans les chapitres précédents que le design optimisé pour un encastement donné permet d’obtenir de sérieux gains d’amortissement. Cependant, la répartition de matière résultante entraîne des pertes de performances pour un test de vibration réalisé en encastant au bord opposé. En prenant en compte deux problèmes de vibration pour ces deux conditions aux limites, on espère obtenir des designs plus fidèles aux exigences industrielles.

L'ensemble des formes admissibles est donné par

$$\mathcal{V}_{ad} = \{\Omega \in D \mid \partial\Omega_{D_1} \cup \partial\Omega_{D_2} \subset \partial\Omega, \Omega_t \subset \Omega, V(\Omega) = V_l, C(\Omega) \leq C_l\}$$

où la contrainte géométrique  $\Omega_t$ , illustrée Figure VII.3.2 pour la plaque et Figure VII.3.3 pour la semelle, est l'équivalent 3D de la contrainte du chapitre VI. Une contrainte d'égalité sur le volume et une contrainte d'inégalité sur la compliance sont appliquées pour un volume cible  $V_l$  et une compliance limite  $C_l$ .

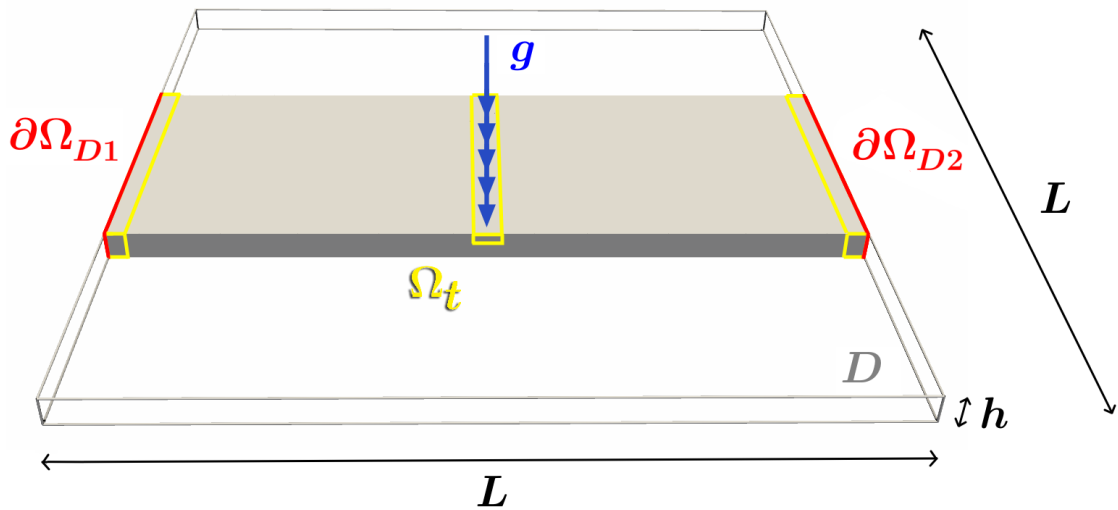


FIGURE VII.3.2 – Schéma du domaine de calcul  $D$ , des conditions aux limites et des contraintes géométriques dans le cas de l'optimisation d'une plaque viscoélastique.

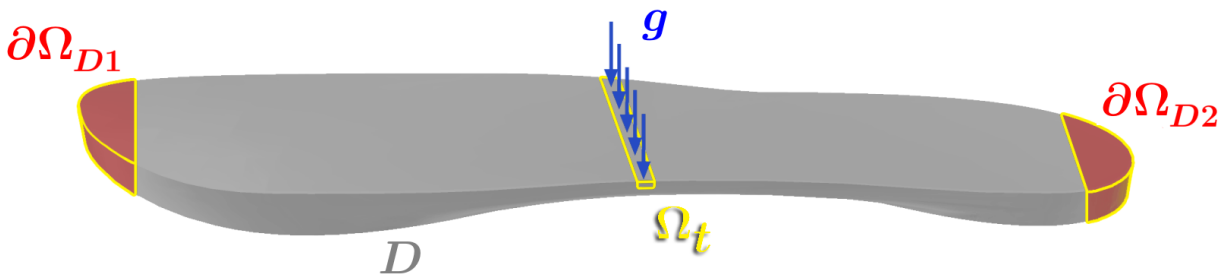


FIGURE VII.3.3 – Représentation du domaine d'optimisation  $D$ , des conditions aux limites et des contraintes géométriques pour l'exemple de l'optimisation d'une semelle de chaussure de foot.

Durant cette optimisation, nous sommes donc amenés à résoudre deux problèmes vibratoires viscoélastiques 3D, de la forme

$$\sum_{j=0}^{n+2} \omega^j a_j(h, u, u) = 0,$$



où  $\omega = \omega^{D1} \in \mathbb{C}$  et  $u = u^{D1} \in \mathcal{U}_{D1}$  pour le problème vibratoire avec encastrement en  $\partial\Omega_{D1}$ ,  $\omega = \omega^{D2} \in \mathbb{C}$  et  $u = u^{D2} \in \mathcal{U}_{D2}$  pour le problème avec encastrement en  $\partial\Omega_{D2}$ . Les ensembles admissibles s'expriment

$$\mathcal{U}^{D1} = \left\{ (u_1, u_2, u_3) \in (H^1(D))^3 \mid u_1|_{\partial\Omega_{D1}} = 0, u_2|_{\partial\Omega_{D1}} = 0, u_3|_{\partial\Omega_{D1}} = 0 \right\} \quad (\text{VII.3.5})$$

et

$$\mathcal{U}^{D2} = \left\{ (u_1, u_2, u_3) \in (H^1(D))^3 \mid u_1|_{\partial\Omega_{D2}} = 0, u_2|_{\partial\Omega_{D2}} = 0, u_3|_{\partial\Omega_{D2}} = 0 \right\}. \quad (\text{VII.3.6})$$

Il est également nécessaire de résoudre un problème de flexion trois points en élasticité linéaire : Trouver  $u_g \in \mathcal{U}_{g2}$  tel que

$$\int_D \sigma \cdot \epsilon(\hat{u}_g) dx = \int_{\partial\Omega_g} g \cdot \hat{u}_g ds \quad \forall \hat{u}_g \in \mathcal{U}_{g2} \quad (\text{VII.3.7})$$

où l'ensemble des déplacements admissibles est donné par

$$\mathcal{U}_{g2} = \left\{ (u_1, u_2, u_3) \in (H^1(D))^3 \mid u_1|_{\partial\Omega_{D1} \cup \partial\Omega_{D2}} = 0, u_2|_{\partial\Omega_{D1} \cup \partial\Omega_{D2}} = 0, u_3|_{\partial\Omega_{D1} \cup \partial\Omega_{D2}} = 0 \right\} \quad (\text{VII.3.8})$$

et  $\partial\Omega_g$  représente la frontière soumise à la force verticale  $g$ .

## 4 Méthodes numériques

La mise en œuvre de la méthode level-set et de l'algorithme du Lagrangien augmenté est détaillée dans cette section. On portera ensuite notre attention sur les techniques de calcul haute performance nécessaires à la résolution numérique de problèmes appliquée à des maillages très fins. Trois exemples numériques seront étudiés, l'optimisation d'une plaque élastique 3D, l'optimisation d'une plaque viscoélastique et l'optimisation d'une semelle de chaussure viscoélastique. Dans cette section, on s'attarde uniquement sur les problèmes d'optimisation dans le cas viscoélastique puisque les méthodes utilisées dans ce cas couvrent les besoins numériques du problème élastique.

### 4.1 Implémentation de la méthode level-set

La résolution des problèmes 3D est effectuée sous **FreeFem++** à l'aide des bibliothèques **PETSc**, pour les solveurs usuels, et **SLEPc**, pour les solveurs spectraux, toutes deux interfacées sur **FreeFem++** par P. Jolivet [55, 86]. L'optimisation de la plaque viscoélastique est effectuée dans un domaine tridimensionnel  $D$ , de dimensions  $L \times L \times h$ , avec  $L$  la longueur de la plaque et  $h$  l'épaisseur maximale désirée. Dans le cas de l'optimisation d'une semelle de chaussure, le domaine suivra la forme de la semelle afin de conserver la forme générale de la chaussure. La forme est représentée par une fonction level-set définie sur  $D$ , que l'on déplace à chaque itération par la résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi (VI.3.1). La tolérance d'acceptation des itérations est maintenue à  $tol = 1.02$  et on considère la même approche "Ersatz" viscoélastique décrite au chapitre VI.

L'utilisation des outils mis à disposition par **PETSc** et les maillages employés seront précisés et discutés dans la sous-section suivante, pour chaque exemple numérique, lorsque le calcul haute performance sera abordé.

### Initialisation de la fonction level-set

L'initialisation de la fonction level-set est obtenue de la même façon qu'au chapitre VI. On souhaite cependant que celle-ci possède plusieurs trous selon l'axe  $x_3$  afin de faciliter les changements topologiques dans l'épaisseur. Pour cela, il suffit de transformer  $\phi_{Trous}$  en

$$\phi_{Trous3D} = \cos\left(2n_t\pi\frac{x_1}{L}\right) \cos\left(2n_t\pi\frac{x_2}{L}\right) \cos\left(2n_h\pi\frac{x_3}{h}\right) - 0.5,$$

où  $n_h$  permet de faire varier le nombre de trous dans la direction  $x_3$ . Dans le cas du problème viscoélastique, la force est répartie au centre de la face supérieure de la plaque sur la surface  $\partial\Omega_g$ . On décide de fixer la matière proche de l'application de la force sur un volume d'épaisseur  $0.05h$ . La fonction  $\phi_g$  devient

$$\phi_{g3D} = \max\left(\left(x_1 - \frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{qL}{2}\right)^2, \left(x_2 - \frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{W}{2}\right)^2, 0.95h - x_3\right).$$

En reprenant les fonctions définies au chapitre VI, la fonction level-set initiale s'exprime finalement par

$$\phi_0 = \min\left(\phi_{Dirichlet}, \phi_{g3D}, \phi_{Latéral}, \max(\phi_{Trous3D}, \phi_{Plaque})\right). \quad (\text{VII.4.1})$$

### Application des contraintes

Les contraintes géométriques sont toujours appliquées par projection à l'aide de la formule

$$P_{ad}(\phi) = \min\left(\phi_{Dirichlet}, \phi_{g3D}, \phi\right)$$

pour la plaque et

$$P_{ad}(\phi) = \min\left(\phi_{Rev}, \phi_{g3D}, \phi\right)$$

pour la semelle de chaussure où  $\phi_{Rev}$  désigne un éventuel revêtement, équivalent 3D de celui utilisé au chapitre VI. La contrainte de volume sera maintenant appliquée à l'aide d'un Lagrangien augmenté. Contrairement aux méthodes de projection, la contrainte d'égalité sur le volume n'est pas vérifiée à chaque itération mais seulement à convergence. Cette méthode autorise des variations de volume en début d'optimisation ce qui rend les changements topologiques plus aisés. La méthode par projection reste néanmoins une option possible. En effet, à chaque itération de dichotomie, seule la résolution du problème d'extension du gradient et la procédure d'advection sont nécessaires pour évaluer le nouveau volume et le comparer au volume cible. Pour des maillages très fins, ces étapes de calcul ont un coût négligeable comparé à la résolution des problèmes élastiques et viscoélastiques. La contrainte d'inégalité sur la compliance sera également appliquée par un Lagrangien augmenté. Le problème d'optimisation devient

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{V}_{ad}} \sup_{\substack{\mu_1 \geq 0 \\ \mu_2 \geq 0}} \mathcal{L}(\Omega, \mu), \quad (\text{VII.4.2})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Omega, \mu_1, \mu_2) = & -\frac{\omega_i^{D1}(\Omega)}{\omega_r^{D1}(\Omega)} - \frac{\omega_i^{D2}(\Omega)}{\omega_r^{D2}(\Omega)} \\ & + \frac{1}{2c_1} \left( (P_{\mathcal{R}_+}(\mu_1 + c_1(C(\Omega) - C_l)))^2 - \mu_1^2 \right) \\ & + \mu_2(V(\Omega) - V_l) + \frac{c_2}{2}(V(\Omega) - V_l)^2 \end{aligned} \quad (\text{VII.4.3})$$

où  $\mu_1 \in \mathbb{R}$  et  $c_1 \in \mathbb{R}_+$  sont respectivement le multiplicateur de Lagrange et le paramètre de pénalisation associés à la contrainte de compliance, et  $\mu_2 \in \mathbb{R}$  et  $c_2 \in \mathbb{R}_+$  sont associés à la contrainte de volume. L'algorithme d'optimisation alterne entre la minimisation du Lagrangien à multiplicateurs fixés et la mise à jour des multiplicateurs suivant les formules

$$\begin{cases} \mu_{1_{k+1}} = P_{\mathcal{R}_+}(\mu_{1_k} + c_1(C_k(\Omega) - C_l)) \\ \mu_{2_{k+1}} = \mu_{2_k} + c_2(V_k(\Omega) - V_l). \end{cases} \quad (\text{VII.4.4})$$

On retrouve, en première ligne de l'équation (VII.4.3), la fonction objectif composée de la somme des décrets logarithmiques des deux problèmes aux valeurs propres polynomiaux complexes. En deuxième ligne, on a le terme associé à la contrainte d'inégalité sur la compliance et en troisième ligne le terme associé à la contrainte d'égalité sur le volume. Les paramètres de pénalisation  $c_1$  et  $c_2$  sont multipliés par deux toutes les 10 itérations jusqu'à l'itération 70.

### Calcul du gradient de forme

Le calcul de la dérivée de forme du Lagrangien est obtenu en composant les dérivées de  $\mathcal{J}_2(\Omega)$ , de  $C(\Omega)$  et de  $V(\Omega)$ . On en déduit l'expression suivante :

$$\begin{aligned} D_\Omega \mathcal{L}(\Omega)\theta = & \int_{\partial\Omega_N} \left( -\frac{\omega_r^{D1} \text{Im}(f(\omega^{D1}, u^{D1})) - \omega_i^{D1} \text{Re}(f(\omega^{D1}, u^{D1}))}{(\omega_r^{D1})^2} \right. \\ & - \frac{\omega_r^{D2} \text{Im}(f(\omega^{D2}, u^{D2})) - \omega_i^{D2} \text{Re}(f(\omega^{D2}, u^{D2}))}{(\omega_r^{D2})^2} \\ & \left. - P_{\mathcal{R}_+}(\mu_1 + c_1(C(\Omega) - C_l))(\sigma(u_g) \cdot \epsilon(u_g)) \right. \\ & \left. + (\mu_2 + c_2(V(\Omega) - V_l)) \right) \theta \cdot n \, ds, \end{aligned} \quad (\text{VII.4.5})$$

où

$$f(\omega, u) = -\frac{\sum_{j=0}^{n+2} \omega^j g_j(u, u)}{\sum_{j=1}^{n+2} j \omega^{j-1} a_j(\Omega, u, u)}.$$

Les déplacements  $u^{D1} \in \mathcal{U}^{D1}$  et  $u^{D2} \in \mathcal{U}^{D2}$  correspondent aux modes propres, solutions des deux problèmes vibratoires. Enfin, le déplacement  $u_g \in \mathcal{U}_{g2}$  est associé au problème élastique de flexion trois points. Calculons ensuite le gradient de forme régularisé à l'aide du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\eta^2 \Delta \theta + \theta = 0 & \text{dans } D \\ \theta = 0 & \text{sur } \partial\Omega_{D1} \cup \partial\Omega_{D2} \\ \eta^2 \frac{\partial \theta}{\partial n} = \left( \frac{\omega_r^{D1} \operatorname{Im}(f(\omega^{D1}, u^{D1})) - \omega_i^{D1} \operatorname{Re}(f(\omega^{D1}, u^{D1}))}{(\omega_r^{D1})^2} \right. & \\ \quad \left. + \frac{\omega_r^{D2} \operatorname{Im}(f(\omega^{D2}, u^{D2})) - \omega_i^{D2} \operatorname{Re}(f(\omega^{D2}, u^{D2}))}{(\omega_r^{D2})^2} \right) & \text{sur } \partial\Omega_N. \\ \quad + P_{\mathcal{R}_+} \left( \mu_1 + c_1 (C(\Omega) - C_l) \right) \left( \sigma(u_g) \cdot \epsilon(u_g) \right) & \\ \quad - \left( \mu_2 + c_2 (V(\Omega) - V_l) \right) n & \end{array} \right. \quad (\text{VII.4.6})$$

Rappelons que la résolution de ce problème permet d'étendre le gradient de forme à l'intérieur de la forme  $\Omega$  et d'effectuer une régularisation, à l'aide du produit scalaire de  $H^1$ , dont la magnitude est pilotée par le paramètre  $\eta$ . Tout comme au chapitre VI, les intégrales volumiques sur  $\Omega$  et surfaciques sur  $\partial\Omega_N$  sont approximées par des intégrales sur  $D$ .

*Remarque VII.4.1* Il peut être intéressant d'obtenir des designs invariants selon une direction. Pour la semelle de chaussure par exemple, il est possible de considérer  $\eta$  comme une matrice diagonale et d'attribuer une grande valeur à la composante selon  $x_3$ . De cette façon, une régularité très importante est imposée dans le sens de l'épaisseur et induit l'obtention de designs invariants selon  $x_3$ . •

## 4.2 Calcul haute performance

### Choix du maillage

L'extension des algorithmes du chapitre VI au cas 3D a pour principal objectif de permettre les changements topologiques dans l'épaisseur. Pour que le comportement de la structure soit correctement modélisé, il est nécessaire de travailler sur un maillage fin, possédant suffisamment d'éléments dans l'épaisseur. Les calculs 3D seront chacun effectués avec des éléments tétraédriques linéaires  $\mathbb{P}_1$ .

Pour avoir une première idée de la taille du maillage nécessaire dans le cas d'une plaque en flexion, on réalise l'étude d'un cas test pour une plaque rectangulaire de dimensions  $L = 80$  mm,  $W = 30$  mm et  $h = 4$  mm. Celle-ci est constituée d'un matériau élastique isotrope, encastrée sur  $\partial\Omega_{D1}$  et soumise à une force verticale arbitraire  $g = 100$  N répartie sur l'extrémité libre opposée  $\partial\Omega_{D2}$ . Un exemple de maillage grossier d'une telle plaque est illustré Figure VII.4.4.

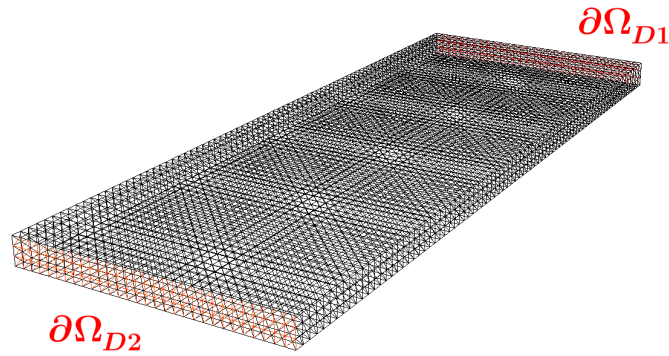


FIGURE VII.4.4 – Maillage 3D de la plaque test, encadrée à une extrémité, soumise à une force verticale répartie sur l'extrémité opposée, pour  $n_m = 3$  mailles dans l'épaisseur.

En prévision de l'utilisation de la méthode level-set, on décide de mailler un domaine  $D$ , de dimensions  $L \times L \times h$ , dans lequel la plaque sera représentée par une fonction level-set. Le déplacement résultant est calculé pour différents maillages tétraédriques structurés de taille  $20n_m \times 20n_m \times n_m$ . Afin de permettre les calculs sur des maillages très fins, l'algorithme utilisé est parallélisé et exécuté sur un cluster de calcul. La méthode employée sera détaillée par la suite. Les déplacements verticaux moyens sur la face soumise à la force et l'évolution du temps de calcul sont présentés Figure VII.4.5, pour différentes valeurs de  $n_m$ . Les valeurs obtenues sont données en table 4.1. On remarque qu'un nombre important de mailles

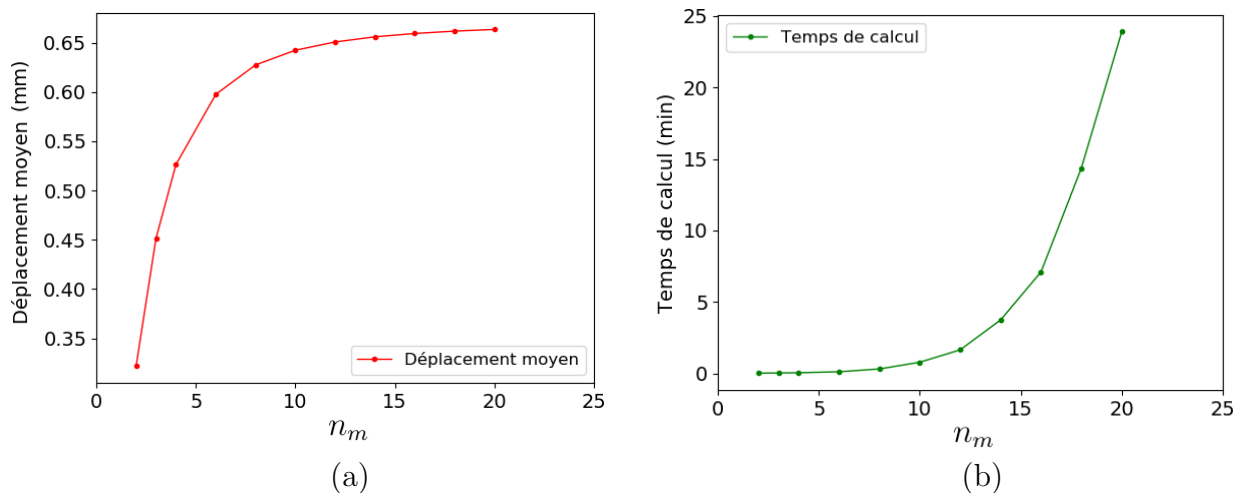


FIGURE VII.4.5 – (a) Déplacements verticaux moyens du bord soumis à la force répartie  $g$  et (b) évolution du temps de calcul pour différentes valeurs de  $n_m$  (calculs sur 400 cœurs et 400 sous-domaines).

dans l'épaisseur est nécessaire pour que la solution converge. Considérons que  $n_m = 18$  est un minimum pour obtenir un résultat satisfaisant. Cependant, le temps de calcul augmente considérablement et pour  $n_m = 20$  par exemple, ce qui correspond à un maillage de 19 200 000 éléments et 3 376 821 nœuds, le temps de résolution du problème élastique en parallèle est proche de 24 minutes pour l'utilisation de 400 cœurs et en décomposant le domaine en 400 sous-domaines.

$n_m$	Déplacement vertical moyen	Temps de calcul
2	0.3218	2''
3	0.4515	3''
4	0.5263	4''
6	0.5975	8''
8	0.6274	20''
10	0.6423	48''
12	0.6507	1' 40''
14	0.6559	3' 45''
16	0.6593	7' 06''
18	0.6617	14' 22''
20	0.6634	23' 53''

TABLE 4.1 – Valeurs des déplacements moyens à l'extrémité libre et temps de calcul pour différentes tailles de maillage ( $20n_m \times 20n_m \times n_m$ ), sur 400 cœurs et 400 sous-domaines.

Notons que la représentation du domaine de dimensions  $80 \times 80 \times 4$  mm par un maillage de taille  $20n_m \times 20n_m \times n_m$  permet d'obtenir des mailles de taille uniforme. En effet, on ne souhaite pas travailler avec des éléments trop étirés afin d'éviter de dégrader la solution numérique. En revanche, sans rentrer dans des problématiques d'adaptation de maillage, il est intéressant d'utiliser des éléments modérément allongés dans les directions  $x_1$  et  $x_2$ . Cela permet de diminuer le nombre de degrés de liberté sans réduire le nombre d'éléments dans l'épaisseur, et donc de réduire le temps de calcul sans impacter les résultats de façon majeure. Pour les problèmes d'optimisation topologiques de plaques, un maillage tétraédrique structuré de taille  $10n_m \times 10n_m \times n_m$  sera utilisé. Dans le cas élastique, on prend  $n_m = 25$ , ce qui correspond à un maillage  $250 \times 250 \times 25$  possédant 9 375 000 éléments et 1 638 026 nœuds (4 914 078 degrés de liberté). Dans le cas du problème d'optimisation en viscoélasticité, l'algorithme contient deux problèmes aux valeurs propres polynomiaux complexes de degré élevé et un problème de flexion en élasticité linéaire. Pour conserver un temps de calcul raisonnable, on se contentera de prendre  $n_m = 20$ , ce qui correspond à un maillage  $200 \times 200 \times 20$  possédant 4 800 000 éléments et 848 421 nœuds (2 545 263 degrés de liberté). Enfin, pour l'optimisation de la vibration d'une semelle de chaussure, on utilise un maillage tétraédrique non structuré, construit à l'aide du logiciel *Gmsh* [69] et d'un modèle CAO réalisé sur *CATIA V5* [47] à l'aide de l'atelier de génération de surfaces (Generative shape design). Le maillage obtenu possède 2 292 472 éléments et 444 828 nœuds (1 334 484 degrés de liberté). Il est représenté Figure VII.4.6, pour un raffinement grossier, aux cotés du modèle CAO utilisé. Les bords encastres sont mis en évidence en rouge et la force  $g$ , représentée par la fonction  $\phi_{g3D}$ , en jaune. Dans l'exemple numérique proposé, la semelle est une reproduction d'une semelle de chaussure de foot. Bien que non pris en compte dans cet exemple, il serait aisé de fixer des zones de matières de forme annulaire, à l'aide de projections, afin de bloquer les emplacements de fixation des crampons.

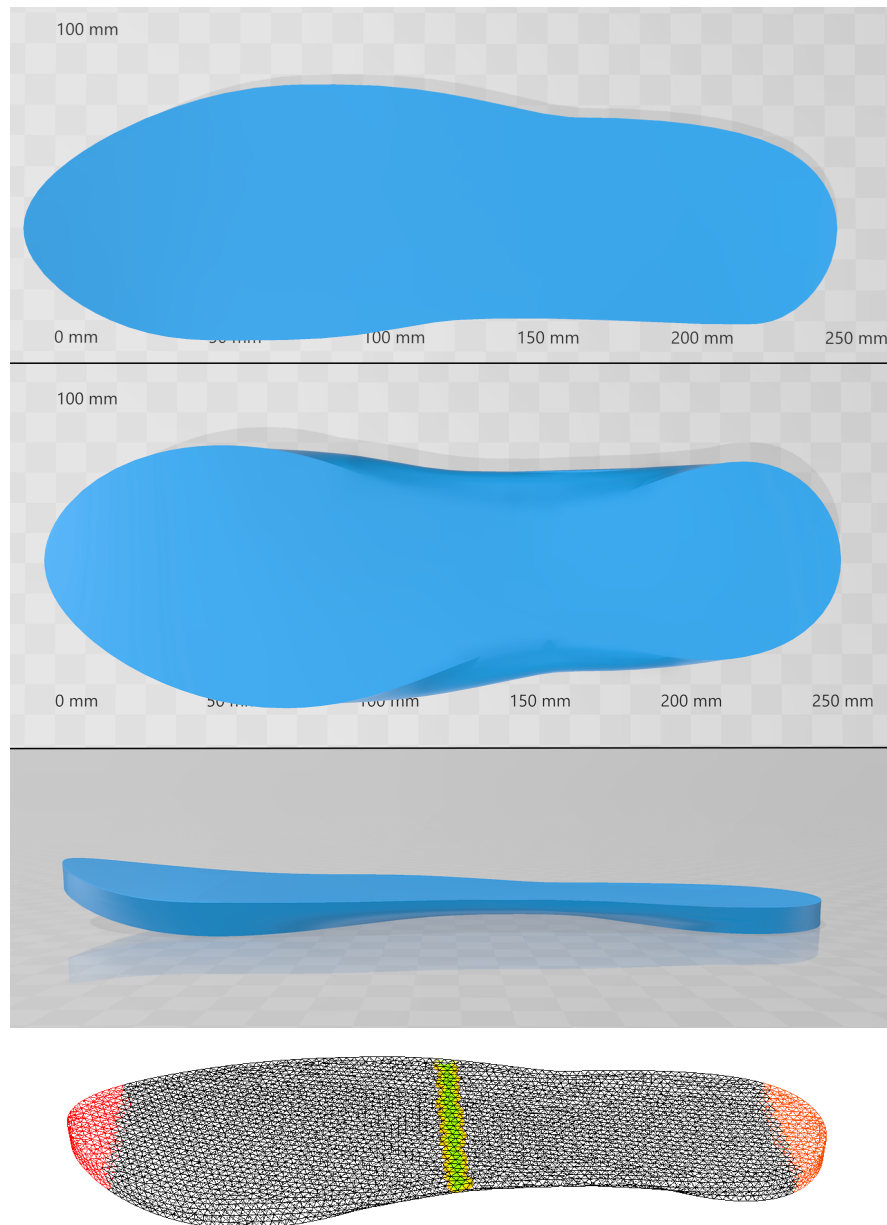


FIGURE VII.4.6 – Modèle CAO et maillage grossier de la semelle de chaussure étudiée.

### Implémentation des techniques de calcul haute performance

Le calcul haute performance, ou calcul parallèle, est un ensemble de méthodes permettant d'associer un grand nombre de processeurs pour construire des architectures de calcul en parallèle dans le but de réduire le temps de calcul. Afin de tirer partie de cette technologie, les scripts parallélisés sont usuellement exécutés sur un supercalculateur, ou cluster de calcul, mettant à disposition de nombreux CPU. Dans notre cas, on utilise le cluster Cholesky de l'école polytechnique possédant 136 CPU de 20 cœurs, chacun ayant une fréquence de 2.1GHz, et 16 GPU. Dans ce travail, les calculs sont réalisés avec 20 CPU, pour un total de 400 cœurs, et une décomposition du domaine en 400 sous-domaines.

L'algorithme d'optimisation topologiques de la semelle de chaussure employé dans ce chapitre est principalement constitué des étapes suivantes :

1. Résolution du problème élastique linéaire
2. Résolution de deux problèmes aux valeurs propres polynomiaux complexes en visco-élasticité linéaire
3. Interpolation avec “mass lumping” des dérivées spatiales des déplacements et modes propres.
4. Mise à jours des paramètres d'optimisation (multiplicateurs de Lagrange, pas...)
5. Résolution du problème d'extension du gradient de forme
6. Advection de la fonction level-set
7. Redistanciation de la level-set (toutes les 10 itérations)

Notons que les problèmes mis en jeu sont tous auto-adjoints, il n'y a donc pas besoin de résoudre d'état adjoint. Les étapes de résolution du problème élastique et des deux problèmes aux valeurs propres complexes sont largement les plus coûteuses. L'advection et la résolution de l'extension du gradient de forme sont des étapes étonnamment peu coûteuses. L'objectif principal est donc de paralléliser l'étape 1 et 2 de l'algorithme en gardant à l'esprit que l'advection, faite par `Advect`, et la redistanciation, faite par le module `distance`, ne sont pour l'instant pas compatibles avec le calcul parallèle.

La parallélisation est entièrement réalisée sous `FreeFem++` puisque le logiciel est directement interfacé avec `OpenMPI` [65], une implémentation de `MPI` (Message Passing Interface) permettant d'effectuer des calculs parallèles sur de multiples systèmes ou processeurs. Cela permet aux processeurs de travailler sur des mémoires locales et de pouvoir échanger des informations entre eux.

Il y a deux façons de procéder :

- Séparer les problèmes des étapes 1 et 2 dans des scripts que l'on parallélise. L'algorithme principal reste donc séquentiel et fait appel aux scripts parallèles au moment de résoudre les problèmes élastiques et viscoélastiques.
- Le script est entièrement parallélisé, seuls les procédures d'advection et de redistanciation sont effectuées en séquentiel sur un seul processeur.

Dans ce travail, l'algorithme sera entièrement parallélisé. Cette méthode, plus lourde à implémenter, présente l'avantage d'effectuer l'intégralité des calculs en parallèle, ce qui se traduit par un gain de temps. De plus, cela permet d'éviter l'écriture sur le disque des multiples fichiers nécessaires à la communications des différents scripts, ce qui est non négligeable pour un calcul de taille importante et peut causer des difficultés.

*Remarque VII.4.2* Notons que dans le cas de maillages très fins, l'écriture des fichiers d'entrée d'`advect` est un processus lent et source de problème. En effet, l'algorithme peut continuer son exécution avant d'avoir terminé l'écriture du fichier. Pour éviter ce problème, on utilise la commande `MPI_Barrier` permettant de s'assurer que tous les processus soient terminés avant de continuer. De plus, dans le cas de la semelle de chaussure, le domaine d'optimisation  $D$  prend la forme de la semelle pour que le design optimisé garde la forme générale souhaitée. Ceci engendre des erreurs numériques lors du processus d'advection. En effet, `advect` emploie la méthode des caractéristiques pour laquelle certaines hypothèses doivent être respectées



[23, 32]. En particulier, les surfaces doivent évoluer suffisamment loin de la frontière du domaine. Plus précisément, pour un domaine borné, il y a un problème d'extension de la vitesse et donc des caractéristiques hors du domaine. Afin d'éviter de considérer un domaine plus large, ce qui augmenterait considérablement le coût de calcul, on peut appliquer un revêtement en fixant une fine bande de matière au bord de la semelle tout en imposant une vitesse régularisée nulle sur la frontière du domaine. De plus, pour modérer l'advection, on ajoute un critère lors de l'augmentation du pas. À chaque itération  $k$ , pour  $d_s$  une dimension caractéristique de la semelle, le pas  $t_k$  vérifie

$$\|\mathcal{J}'(\Omega)\|_{H^1} t_k < d_s.$$

•

Plutôt que d'utiliser les solveurs usuels de `FreeFem++`, on utilise les solveurs de `PETSc` pour résoudre tous les problèmes, en gardant les solveurs polynomiaux de `SLEPc`. Les solveurs par défaut de `FreeFem++` sont issus de la librairie `UMFPACK` [48] et montrent des problèmes de mémoire pour des calculs trop volumineux. Détaillons maintenant les solveurs et préconditionneurs choisis pour la résolution des différents problèmes numériques. L'utilisation de préconditionneurs [28] est motivée par des gains de performance mais également par la présence de matrices mal conditionnées. En effet, dans le cas de l'approche ersatz, les matrices de rigidité contiennent des termes résiduels dus au matériau ersatz, ce qui participe à leur mauvais conditionnement. La librairie `PETSc` propose de nombreux solveurs, directs et itératifs, ainsi que des préconditionneurs pour les solveurs itératifs [22]. La majeure partie des préconditionneurs requièrent une décomposition de domaine. Il s'agit de méthodes basées sur un découplage des EDP en plusieurs sous-problèmes couplés, définis sur des sous-domaines formant une partition du domaine global. Le nombre de sous-domaines choisi est généralement égal au nombre de processeurs disponibles. Il existe principalement deux méthodes. La méthode de décomposition de domaine avec recouvrement [121] (méthode Schwarz), employé dans ce manuscrit, et la méthode sans recouvrement [115]. Un exemple de décomposition de domaine pour le maillage de la semelle de chaussure avec 8 processeurs est présenté en Figure VII.4.7. Sous `FreeFem++`, la décomposition de domaine [85] est réalisée à l'aide de `SCOTCH` [41, 113] ou `METIS` [88]. Ces outils rendent l'implémentation de la décomposition de domaine particulièrement simple et rapide.



FIGURE VII.4.7 – Exemple de décomposition de domaine de la semelle de chaussure pour 8 processeurs.

Dans les algorithmes numériques de ce chapitre, les solveurs et préconditionneurs choisis sont les suivants. Pour les problèmes “simples”, tels que les interpolations avec mass lumping, les problèmes sont très bien conditionnés, on utilise le solveur itératif **CG** (Conjugate Gradient) avec le préconditionneur **Jacobi**. Pour les problèmes scalaires, comme l’extension du gradient de forme, on utilise le solveur **CG** et le préconditionneur **BoomerAMG** de la librairie **HYPRE** [59] pour résoudre le problème par une méthode multigrille algébrique. Cette librairie n’est pas reconnue par **PETSc** pour des problèmes à valeurs complexes, on utilisera donc plutôt **GAMG** [135] dans le cas viscoélastique. Pour les problèmes vectoriels, comme le problème d’élasticité linéaire, on utilise le solveur itératif **GMRES** avec les préconditionneurs de la librairie **GAMG** pour résoudre le problème par une méthode multigrille algébrique avec lissage. Les problèmes aux valeurs propres polynomiaux complexes seront résolus par le solveur **TOAR** (Two-level Orthogonal Arnoldi), utilisable pour des polynômes de degré arbitraire. Ce solveur résout le problème aux valeurs propres par linéarisation, le problème linéarisé est ensuite résolu par un solveur linéaire classique. Dans notre cas, on utilise les solveurs directs de la librairie **MUMPS** [15, 16]. Le solveur **cholesky** permet ici un gain de temps considérable par rapport à la résolution standard par le solveur **LU**. Par ailleurs, afin de pouvoir trouver une valeur propre proche d’une valeur cible, il est nécessaire de réaliser une transformation spectrale [20]. Celle-ci est effectuée par la méthode “shift-invert”.

*Remarque VII.4.3* Lors de l’utilisation du calcul parallèle, en particulier pour un script hybride contenant des parties parallèles et séquentielles, il est important de distinguer les grandeurs locales et globales. Les macros disponibles sous **FreeFem++** permettent de créer, de façon simple, une correspondance entre le maillage global et le maillage local. Toutes les opérations sont alors effectuées localement mais il est possible de reconstruire les solutions globales sans grande difficulté. Il est en fait nécessaire de reconstruire certaines solutions globales lors du passage aux parties séquentielles du script, exécutées sur le processeur de rang 0. Pour repasser en parallèle, il faut ensuite partager aux autres processeurs les données obtenues sur le processeur 0. D’autre part, un regard vigilant doit être porté sur certaines quantités issues d’intégrales réalisées sur le domaine tout entier. C’est le cas par exemple de la fonction  $f$  présente dans la dérivée de forme du décrement logarithmique

$$f(\omega, u) = -\frac{\sum_{j=0}^{n+2} \omega^j g_j(u, u)}{\sum_{j=1}^{n+2} j \omega^{j-1} a_j(\Omega, u, u)}.$$

Le dénominateur est ici un scalaire calculé à partir d’une somme d’intégrales sur le maillage global et non sur le maillage local. Ces quantités doivent donc être calculées à partir des modes propres reconstruits sur le maillage global. ●

Sous **FreeFem++**, il est possible faire appel aux versions réelles ou complexes des librairies **PETSc** et **SLEPc** en fonction des problèmes traités, mais celles-ci ne peuvent être appelées dans le même script. Cela pose problème puisque les algorithmes présentés dans ce chapitre contiennent différentes résolutions réelles et complexes. Trois possibilités d’implémentation sont à priori possibles :

1. Tout l'algorithme est écrit en complexe. Cette solution, plus simple à implémenter, rend cependant l'exécution plus longue puisqu'il est plus coûteux de résoudre un problème complexe.
2. L'algorithme est séparé en un script réel et un script complexe. Plus lourd à implémenter, cette méthode présente l'avantage de ne pas avoir d'impact sur le temps de calcul mais nécessite de nombreuses écritures sur le disque afin de transmettre les variables d'un script à un autre.
3. Les problèmes complexes sont reformulés en un problème réel contenant deux fois plus de degrés de liberté. Cette technique est également plus lourde à implémenter et il est difficile de prédire son impact sur les performances de l'algorithme.

Pour des raisons de simplicité, la méthode 1 est employée. Le temps de calcul est principalement dépendant du choix des solveurs et des préconditionneurs, néanmoins, on tente de réduire le coût global grâce à plusieurs astuces. Notons tout d'abord que l'assemblage d'une matrice réelle est beaucoup moins coûteux que l'assemblage d'une matrice complexe. Par conséquent, pour les problèmes réels traités en tant que problèmes complexes, on construit les matrices réelles au format `FreeFem++`, que l'on passe ensuite en complexe avant de les copier dans des matrices au format `PETSc`. On remarque que, dans notre cas, pour un problème aux valeurs propres polynomial complexe

$$\sum_{j=0}^{n+2} \omega^j A_j = 0,$$

les matrices  $A_j$  sont réelles, pour  $j$  pair, et imaginaires pures, pour  $j$  impair. Dans l'esprit de la remarque précédente, on construit ces matrices en tant que matrices réelles que l'on passe ensuite en complexe. Si  $j$  est impair, la matrice est mise à l'échelle en la multipliant par l'imaginaire pur  $1i$ , puis ces matrices sont copiées au format `PETSc`. Remarquons également que  $A_{n+1} = iA_{n+2}$ , on peut donc réduire le nombre d'assemblage et obtenir  $A_{n+1}$  en copiant simplement  $A_{n+2}$  multipliée par  $1i$ .

## 5 Résultats numériques

Les résultats présentés dans cette dernière section sont issus des problèmes d'optimisation établis en section 3. Le premier exemple consiste à résoudre le problème de flexion de plaque en élasticité linéaire, le second à résoudre le problème d'optimisation d'une plaque en vibration libre. Enfin, ce même problème est appliqué au cas de la semelle de chaussure de course.

### 5.1 Optimisation topologique d'une plaque élastique 3D

Cet exemple représente l'équivalent 3D du problème d'optimisation topologique de la section 7.1 du chapitre VI, ce dernier présentant un phénomène d'amincissement local critique de la section. La structure étudiée est une plaque en flexion de dimensions  $L = 80$  mm,  $W = 30$  mm,  $h = 3$  mm, soumise à une force  $g = 100$  N, incluse dans un domaine de

travail  $D$  illustré Figure VII.3.1. Le matériau constitutif est élastique isotrope de module  $E = 18$  MPa et de coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . Rappelons que l'on cherche à minimiser la compliance de la structure tout en conservant un volume constant. La contrainte de volume, contrairement aux chapitres précédents, est appliquée à l'aide d'un Lagrangien augmenté. Les paramètres initiaux semblant mener aux meilleurs résultats sont  $\mu_{1_0} = 10^{-3}$  et  $c_{1_0} = 10^{-5}$ . Pour cet exemple, le critère d'arrêt de l'algorithme est un nombre limite de 100 itérations, nécessitant environ 8h de calcul. On s'assure tout de même que la fonction objectif n'évolue quasiment plus après ces 100 itérations.

L'initialisation utilisée et le design optimisé sont représentés en Figure VII.5.8. Des coupes selon des plans de normale  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  sont données en Figure VII.5.9, respectivement réalisées en  $x_1 = 40$  mm,  $x_2 = 40$  mm et  $x_3 = 1.5$  mm, ce qui permet une meilleure visualisation de la structure intérieure de la plaque. La plaque initiale est obtenue à partir de la level-set initiale  $\phi_0$ , définie équation (VII.4.1). Les paramètres  $n_t$  et  $n_h$  contrôlent le nombre de trous dans la longueur et dans l'épaisseur respectivement. Lorsque ces paramètres varient, la topologie de la plaque initiale change, ce qui peut impacter le design final. Des designs finaux différents, mais présentant des performances proches, ont été obtenus pour différentes initialisations. Les observations étant similaires d'un design à un autre, on choisit d'illustrer les résultats d'optimisation pour  $n_t = 10$  et  $n_h = 1$ .

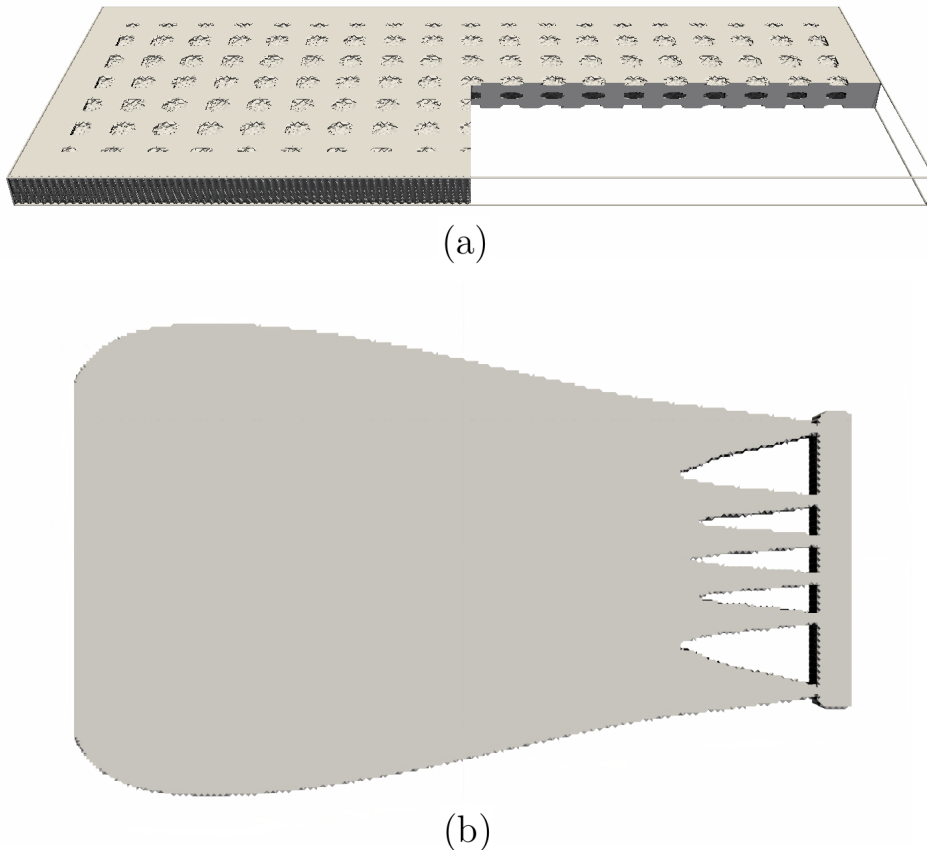


FIGURE VII.5.8 – (a) Plaque initiale ( $n_t = 10$  et  $n_h = 1$ ) et (b) design optimisé de la plaque élastique en flexion pour la minimisation de la compliance à volume constant.

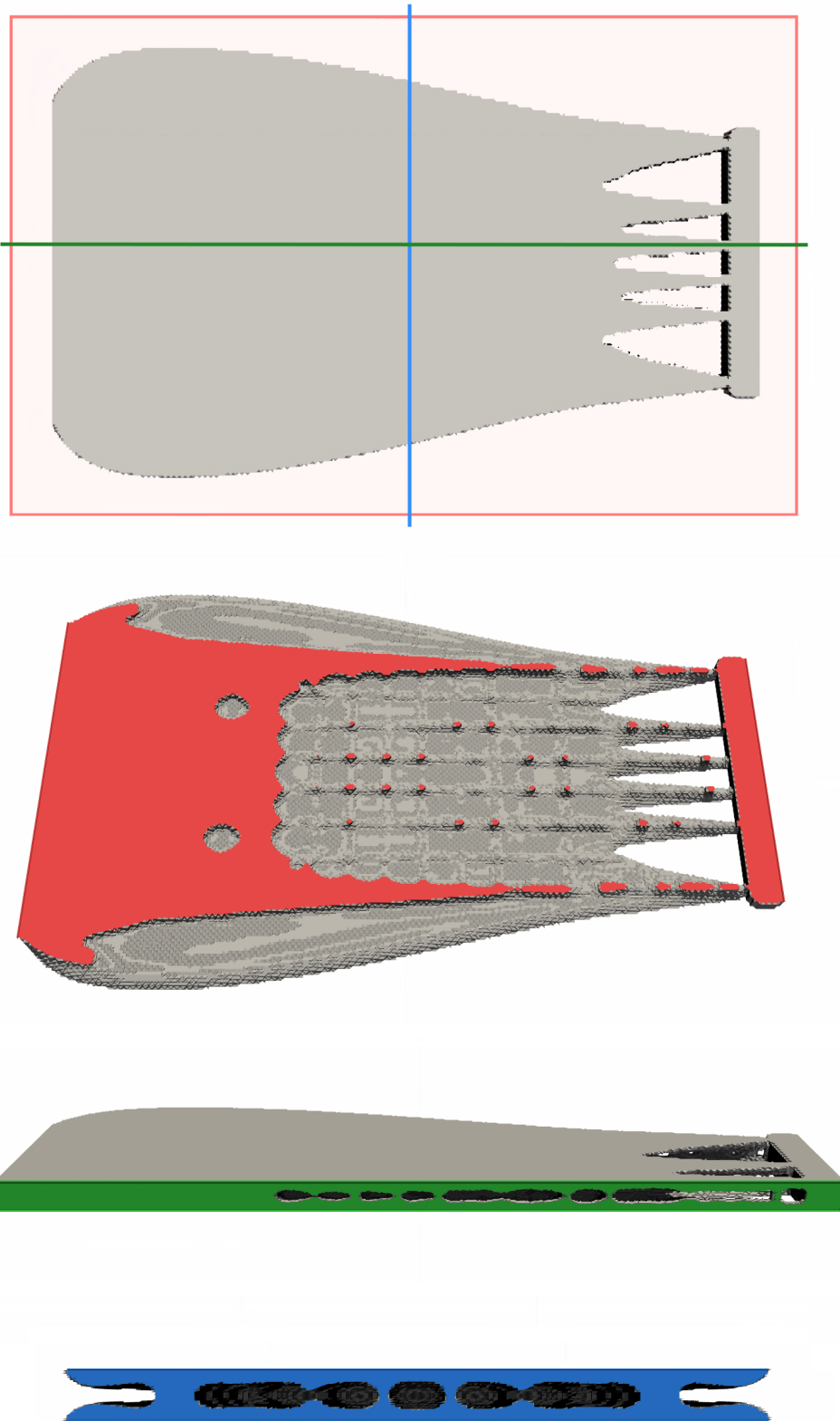


FIGURE VII.5.9 – Coupes selon  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  du design final obtenu dans le cas de l'optimisation topologique d'une plaque élastique.

Le design obtenu, semblant à première vue similaire aux résultats 2D (Figures VI.7.14 et VI.7.17), est en réalité creux et possède une topologie surprenante. En effet, on remarque la présence de nombreux cantilevers dans le sens de l'épaisseur, assurant la rigidité globale de la structure. Les points critiques présents en 2D sont ici correctement représentés par des zones de sections faibles, mais suffisamment rigides pour avoir un sens physique. Plutôt que d'être réparties sur toute l'épaisseur, les jonctions entre la plaque et la zone fixée sont réalisées par des couples de branches, en  $x_3 \approx 0$  et  $x_3 \approx h$ , voir Figure VII.5.10. On vérifie,



FIGURE VII.5.10 – Zoom sur les jonctions entre la plaque optimisée et la zone fixe d'application de la force verticale  $g$ .

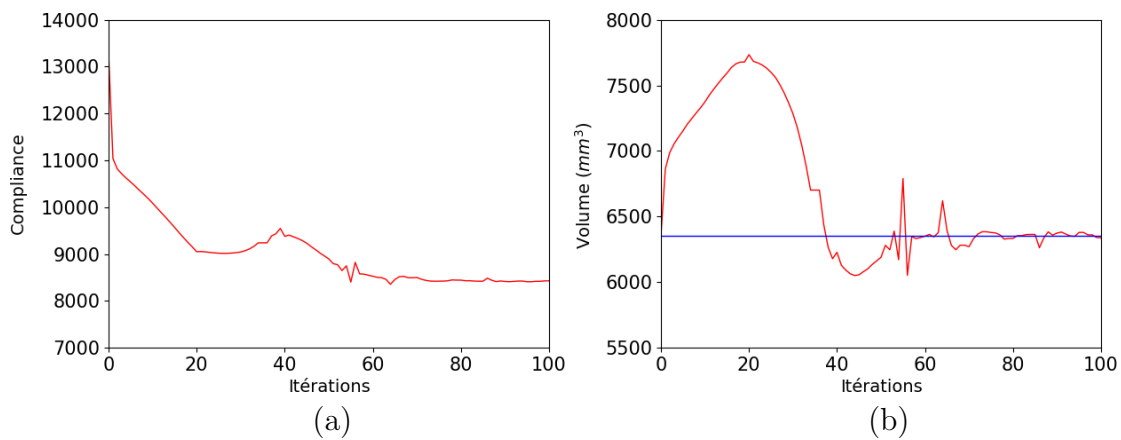


FIGURE VII.5.11 – Évolution (a) de la compliance et (b) du volume, pour une cible  $V_l = V_0$ , pour la minimisation de la compliance d'une plaque élastique en flexion.

en Figure VII.5.11, que l'on a bien minimisé la compliance de la structure et que la contrainte de volume constant est bien respectée.

Le design optimal est un design 3D à la topologie complexe, impossible à obtenir pour une plaque modélisée par un modèle 2D. La formation de structures en cantilever dans le sens de l'épaisseur est un résultat remarquable pour une fonction objectif aussi classique. Ainsi, la modélisation et l'optimisation 3D semblent particulièrement pertinentes pour la minimisation de la compliance dans le cas d'une plaque élastique en flexion.

## 5.2 Optimisation topologique d'une plaque viscoélastique 3D

L'exemple suivant est une extension au cas 3D du problème d'optimisation topologique de la plaque viscoélastique en vibration du chapitre VI (Figure VI.4.4). Dans cette étude, la fonction objectif a été enrichie par la résolution de deux problèmes de vibration libre pour deux encastremets opposés.

La plaque initiale possède les mêmes dimensions  $L = 80$  mm,  $W = 30$  mm,  $h = 3$  mm, est soumise à une force verticale  $g = 100$  N répartie au centre de la plaque et est incluse dans un domaine de travail illustré Figure VII.3.2. Pour cet exemple, la contrainte de compliance imposée est de  $C_l = 0.7C_0$  et la contrainte de volume est de  $V_l = V_0$ . Les paramètres du Lagrangien augmenté sont  $\mu_{10} = 10^{-8}$ ,  $\mu_{20} = 10^{-2}$ ,  $c_{10} = 10^{-9}$  et  $c_{20} = 10^{-1}$ . La plaque est constituée d'un polymère de densité  $\rho = 1000$   $kg.m^{-3}$  qui, pour des raisons de simplicité et de temps de calcul, est modélisé par un modèle de Zener de paramètres  $E_\infty = 18$  MPa,  $E_1 = 30$  MPa,  $\tau_1 = 0.001$  s,  $\nu_0 = 0.4$  et  $\nu_1 = 0.35$ . Néanmoins, l'algorithme développé est applicable à des matériaux modélisés par le modèle de Maxwell généralisé. Les problèmes aux valeurs propres polynomiaux étant de degré bien supérieur, le temps de calcul augmente considérablement. Le critère d'arrêt est toujours fixé à 100 itérations et, malgré un maillage moins raffiné, le calcul dure environ 20h. La majeure partie de cette durée étant consacrée à la résolution des problèmes aux valeurs propres complexes.

La level-set est initialisée à l'aide de la même fonction que l'exemple précédent (Figure VII.5.8). Le design final obtenu est donné en Figure VII.5.12, et des coupes selon des plans

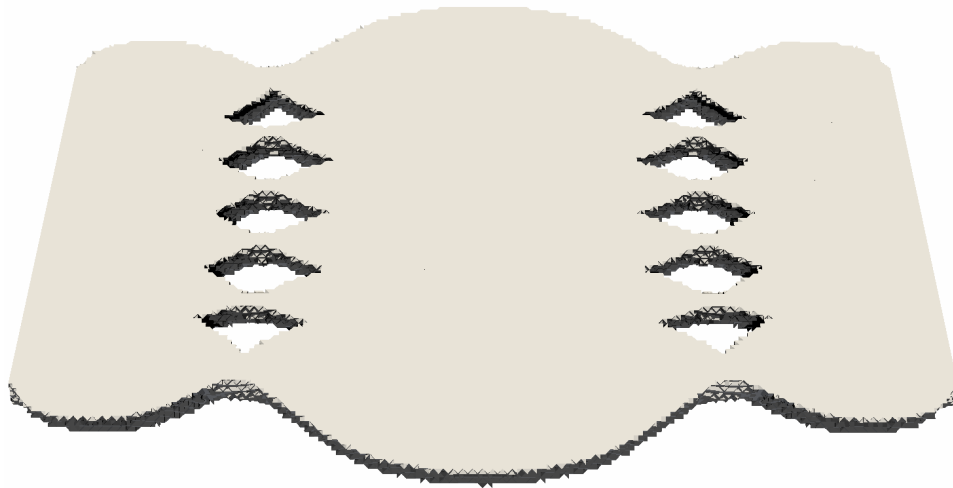


FIGURE VII.5.12 – Design final de la plaque viscoélastique en vibration pour la maximisation du décrétement logarithmique à volume constant, sous contrainte de compliance  $C_l = 0.7C_0$ .

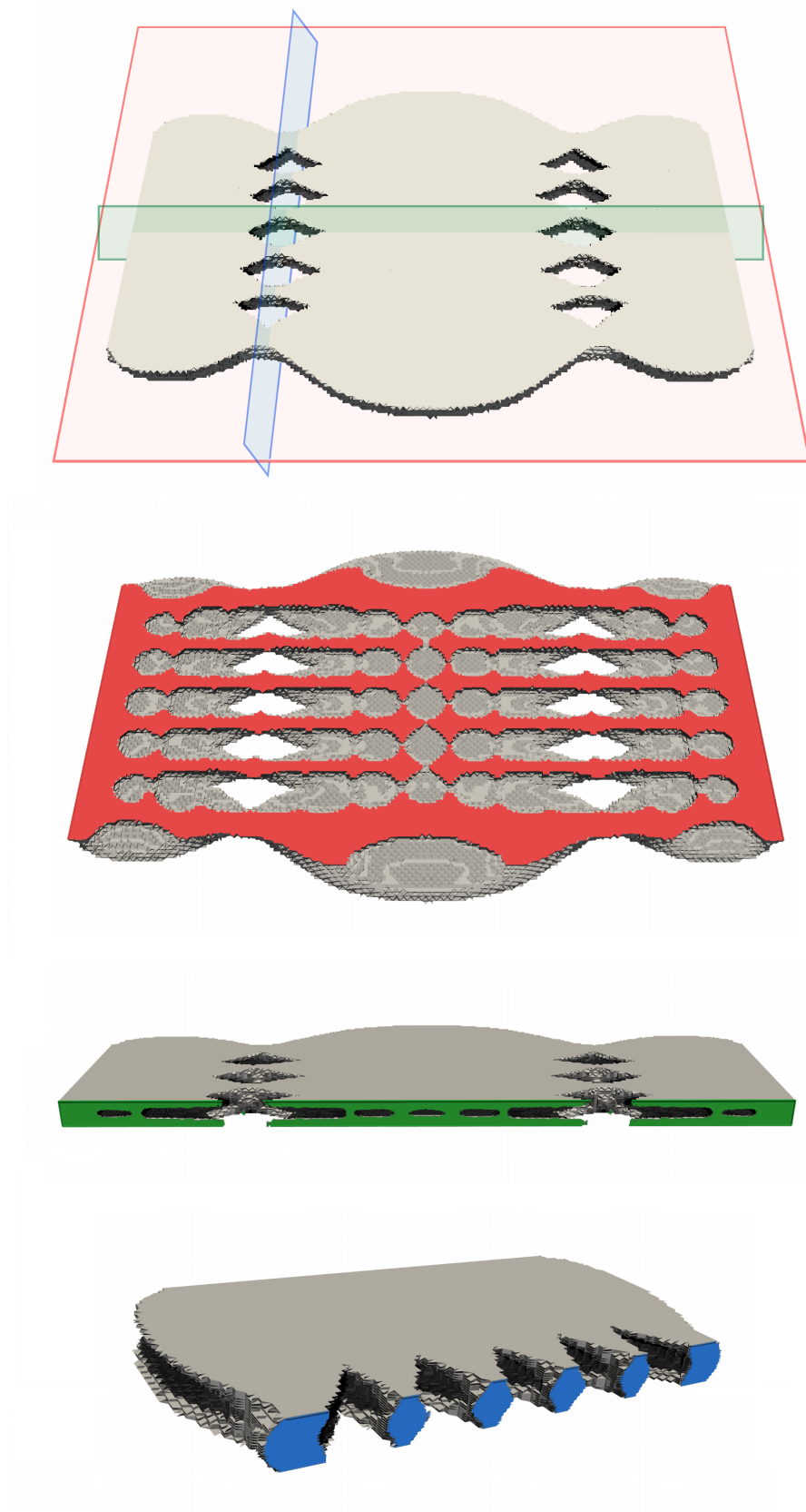


FIGURE VII.5.13 – Coupes selon  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  de la structure finale obtenue dans le cas de l'optimisation topologique d'une plaque viscoélastique en vibration libre.



de normale  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  sont également présentés en Figure VII.5.13. La coupe bleue est réalisée en  $x_1 = 20$  mm, verte en  $x_2 = 40$  mm et rouge en  $x_3 = 1.5$  mm. Tout comme l'exemple de la plaque élastique, l'optimisation ne semble pas, à première vue, avoir conservé le volume initial. En réalité, le design est encore creux et on retrouve une structure possédant non seulement les motifs de l'exemple élastique précédent mais également ceux des exemples viscoélastiques 2D du chapitre VI. En effet, on remarque la formation de nombreux cantilevers dans le sens de l'épaisseur, dû à la contrainte de compliance, et un design global dans l'esprit de l'exemple de la plaque viscoélastique 2D (Figure VI.4.4) et de la semelle de chaussure plane (Figure VI.4.11). De plus, comme illustré dans la coupe bleue de la Figure VII.5.13, les sections sont bien plus larges que pour les exemples 2D. Ceci est dû à la modélisation 3D mais également au fait que l'on prend en compte la vibration libre de la plaque pour deux encastresments différents. En effet, la structure tend à se renforcer au voisinage d'un bord encastéré. Vérifions, en Figure VII.5.14, que les contraintes de compliance et de volume constant sont bien respectées. Enfin, la Figure VII.5.15 illustre les vibrations libres de la plaque pour un encastrement sur  $\partial\Omega_{D1}$  ou  $\partial\Omega_{D2}$ . De part la nature symétrique de la structure, le gain d'amortissement relatif, ici d'environ 6.2%, est le même pour les deux problèmes de vibration, pour un gain total d'environ 12.4%. Cela est bien plus faible que le gain de 29% obtenu au chapitre VI pour l'exemple illustré Figure VI.4.5. Dans cet exemple, deux facteurs contribuent à cette perte de performance. Premièrement, remarquons que les deux problèmes de vibration agissent en opposition. En effet, pour un test de vibration libre donné, le design tend à se renforcer au voisinage du bord encastéré et à s'affaiblir à l'extrémité libre. Dans notre cas, l'extrémité libre du premier problème représente l'encastrement du second. Il n'est donc pas surprenant d'aboutir à un design fournissant un compromis entre ces deux configurations. Deuxièmement, la contrainte de compliance choisie  $C_l = 0.7C_0$  est un critère plutôt fort. Pour gagner 30% de rigidité, il semble inévitable de sacrifier des performances d'amortissement.

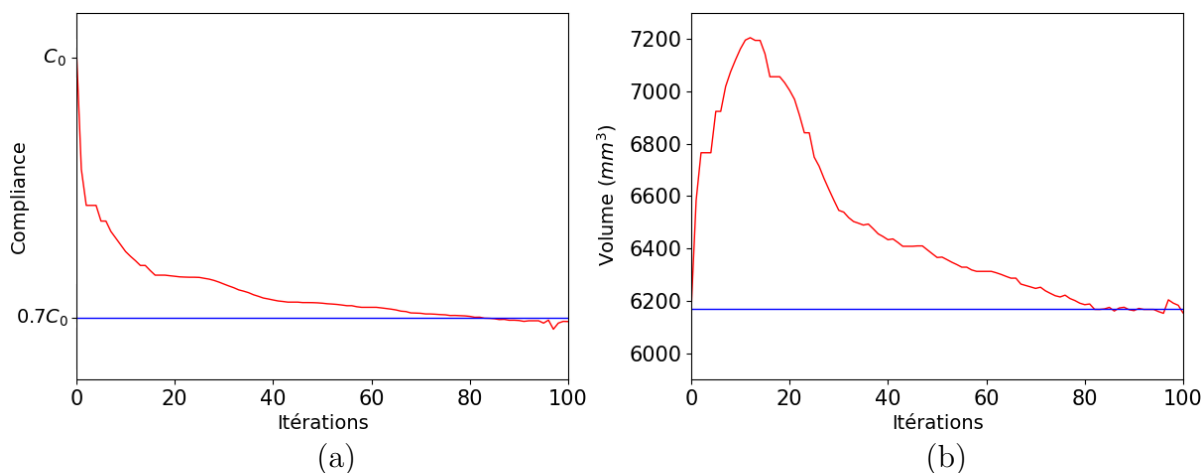


FIGURE VII.5.14 – Évolution de (a) la compliance et (b) du volume, pour la contrainte d'inégalité sur la compliance  $C_l = 0.7C_0$  et une contrainte d'égalité sur le volume  $V_l = V_0$ , pendant l'optimisation topologique d'une plaque viscoélastique en vibration libre.

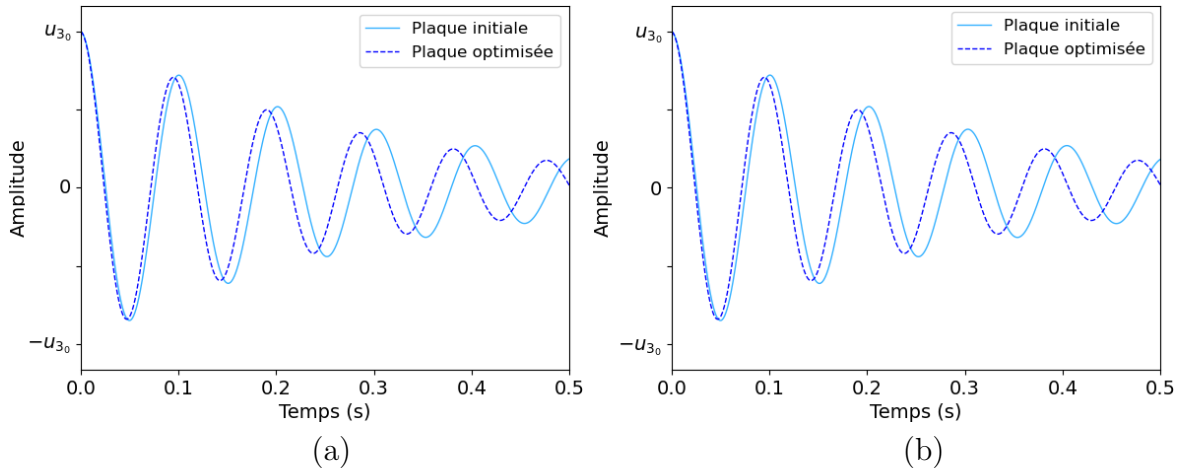


FIGURE VII.5.15 – Comparaison des vibrations libres de la plaque initiale et de la plaque optimisée, encastred (a) en  $\partial\Omega_{D1}$  et (b) en  $\partial\Omega_{D2}$ , pour la maximisation de l’amortissement.

Tout comme dans le cas élastique, l’optimisation de la plaque viscoélastique en dimension 3 permet une plus grande liberté topologique. Malgré une contrainte de rigidité plus forte, l’algorithme développé dans cette section fournit des designs possédant de meilleures capacités d’amortissement. De plus, la prise en compte de deux problèmes de vibrations permet d’obtenir des structures plus pertinentes pour les applications souhaitées.

### 5.3 Optimisation topologique d’une semelle de chaussure de course

Ce dernier exemple est une application du problème précédent au cas de la semelle de chaussure. On utilise pour cela un maillage dont la forme s’approche de celle d’une semelle de chaussure de foot de longueur 250 mm, largeur 80 mm et d’épaisseur variant entre 5 et 8 mm. Le polymère constituant la semelle est un matériau de Zener aux mêmes propriétés rhéologiques que celui de l’exemple précédent. La contrainte de compliance choisie vaut  $C_l = 0.75C_0$  et la contrainte de volume vaut  $V_l = V_0$ , en d’autres termes, on cherche à minimiser la fonction objectif tout en gagnant 25% de rigidité et en conservant la même quantité de matière. Les multiplicateurs de Lagrange et paramètres de pénalisation initiaux semblant mener au meilleur résultat dans le cas de la semelle de chaussure sont les suivants :  $\mu_{1_0} = 5 \times 10^{-10}$ ,  $\mu_{2_0} = 5 \times 10^{-9}$ ,  $c_{1_0} = 5 \times 10^{-11}$  et  $c_{2_0} = 5 \times 10^{-10}$ .

On s’intéresse au problème habituel, la maximisation de l’amortissement

$$\mathcal{J}_2(\Omega) = -\frac{\omega_i^{D1}(\Omega)}{\omega_r^{D1}(\Omega)} - \frac{\omega_i^{D2}(\Omega)}{\omega_r^{D2}(\Omega)},$$

mais on pourrait également traiter le problème opposé, correspondant à la maximisation du dynamisme (ou “retour élastique”) de la structure. Ce dernier pourrait faire l’objet d’une étude approfondie par l’utilisation de la fonction objectif (V.6.1) donnée en fin de chapitre V et de la construction d’un front de Pareto. Dans ce manuscrit, on se contentera d’un exemple de maximisation de l’amortissement.

Le temps de calcul total est d’environ 15h en parallèle sur 400 cœurs et 400 sous-domaines, pour une optimisation supposée durer plus de 3 mois en séquentiel. La Figure

VII.5.16 présente l'évolution de l'accélération et de l'efficacité de la parallélisation par rapport au nombre de cœurs. Pour  $t_s$  le temps d'exécution séquentiel et  $t_p(n_p)$  le temps d'exécution parallèle pour  $n_p$  processeurs, l'accélération est définie par

$$A_c(n_p) = \frac{t_s}{t_p(n_p)},$$

et l'efficacité par

$$E_f(n_p) = \frac{A_c(n_p)}{n_p}.$$

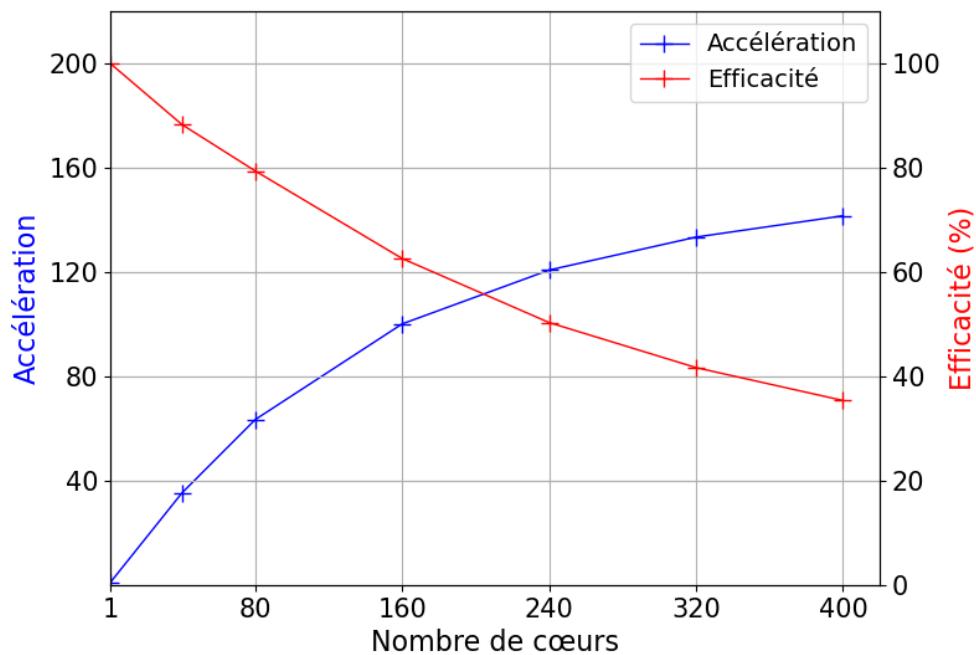


FIGURE VII.5.16 – Accélération et efficacité de la parallélisation par rapport au nombre de cœurs pour un test réalisé sur le cluster Cholesky de l'école polytechnique sur un maillage possédant 2 155 887 degrés de liberté.

Naturellement, l'efficacité de la parallélisation diminue lorsque le nombre de processeurs augmente. Notons que le temps de résolution d'un problème quasi-statique en élasticité linéaire est beaucoup plus court et nécessite beaucoup moins de processeurs qu'un problème aux valeurs propres polynomial complexe viscoélastique. De plus, le temps de calcul augmente considérablement quand le degré du polynôme augmente, c'est à dire lorsque le polymère est caractérisé par un plus grand nombre de temps de relaxation. Pour un modèle réaliste possédant un grand spectre de temps, il est indispensable d'employer le calcul parallèle.

La fonction level-set est initialisée de la même façon que pour la plaque, on décide dans cet exemple de ne pas ajouter de revêtement afin de mieux distinguer le design final obtenu. On obtient la structure initiale dont les coupes selon  $x_1$  et  $x_3$  sont données en Figure VII.5.17, respectivement en  $x_1 = 70$  mm et  $x_3 = 4$  mm.

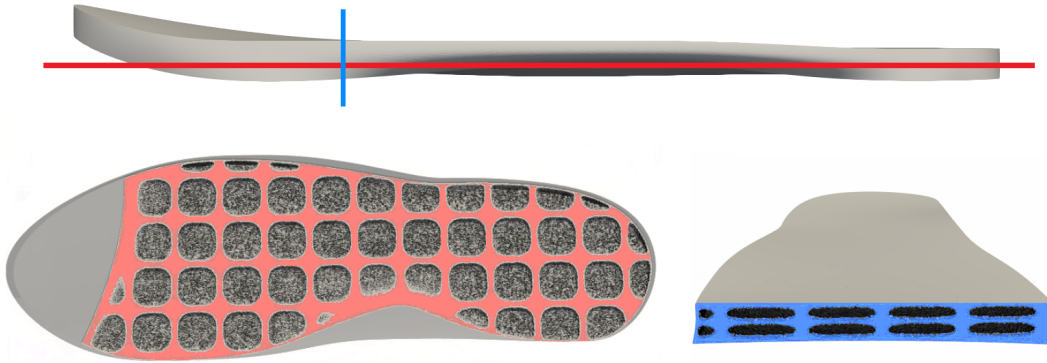


FIGURE VII.5.17 – Coupes de la semelle initiale utilisée ( $n_t = 10$  et  $n_h = 1$ ) pour l'optimisation des performances d'une semelle de chaussure de foot.

Le design optimisé est donné en Figure VII.5.18, sous différentes vues, et en Figure VII.5.19, présentant des coupes de la semelle selon des plans de normale  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ . La coupe bleue est réalisée en  $x_1 = 80$  mm, verte en  $x_2 = 40$  mm et rouge en  $x_3 = 5$  mm.



FIGURE VII.5.18 – Design optimisé d'une semelle viscoélastique en vibration pour la maximisation du décrétement logarithmique à volume constant, sous contrainte de compliance  $C_l = 0.75C_0$ .

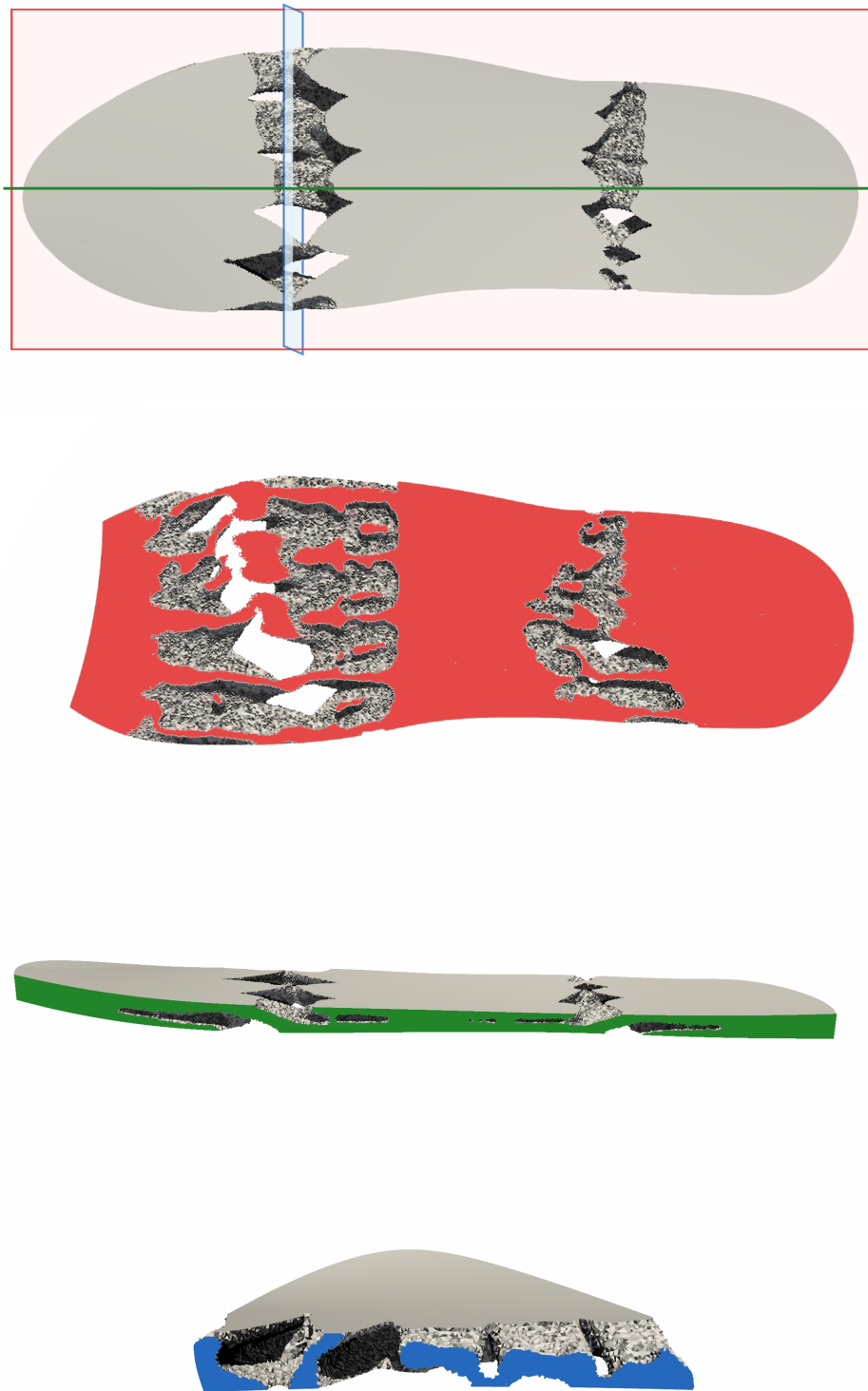


FIGURE VII.5.19 – Coupes selon  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  de la structure finale obtenue dans le cas de l'optimisation topologique d'une semelle viscoélastique en vibration libre.

Contrairement au cas de la plaque, ni l'initialisation, ni le design optimisé ne présentent de plan de symétrie. La semelle optimisée possède une structure intérieure dont la répartition de matière semble suivre les tendances observées en 2D (Figure VI.4.11). Le nouveau design obtenu est cependant bien plus complexe et permet non seulement de vérifier les contraintes de rigidité et de volume fixées (Figure VII.5.20), mais permet également un gain d'amortissement d'environ 17% (Figure VII.5.21). Tout comme pour la plaque, le gain de performance est sérieusement réduit par la prise en compte d'un deuxième problème de vibration. L'asymétrie de la structure entraîne des performances d'amortissement différentes pour chaque problème. Notons qu'il y a initialement plus de matière au bord  $\partial\Omega_{D1}$ . Ainsi, à l'initialisation, les performances d'amortissement de la structure pour un encastrement au bord gauche  $\partial\Omega_{D1}$  sont supérieures aux performances pour un encastrement au bord droit  $\partial\Omega_{D2}$ . À l'issue de l'optimisation, le gain d'amortissement relatif associé au bord  $\partial\Omega_{D1}$ , d'environ 8%, est légèrement plus faible que le gain associé au bord  $\partial\Omega_{D2}$ , d'environ 9%.

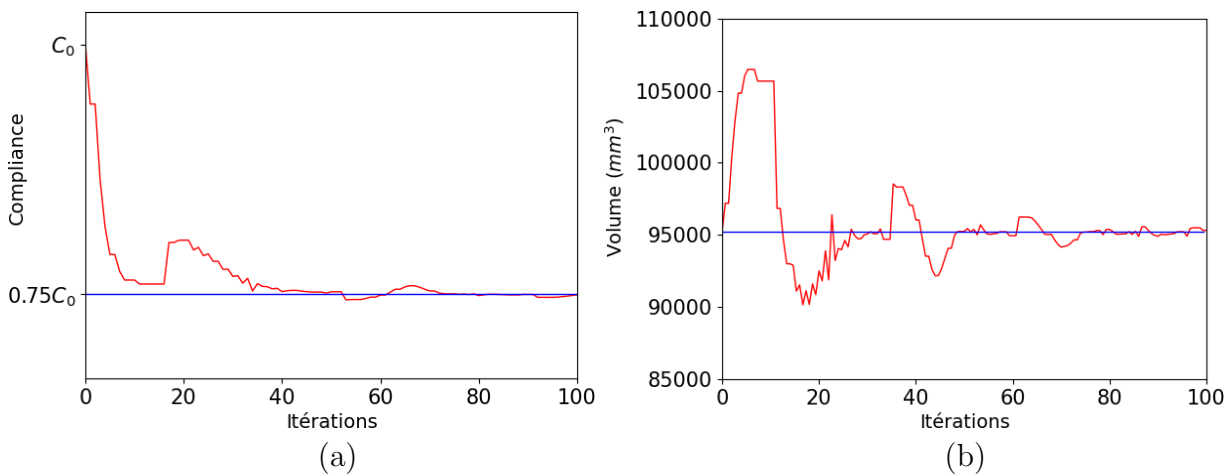


FIGURE VII.5.20 – Évolution de (a) la compliance et (b) du volume, pendant l'optimisation topologique d'une semelle viscoélastique en vibration libre pour  $C_l = 0.75C_0$  et  $V_l = V_0$ .

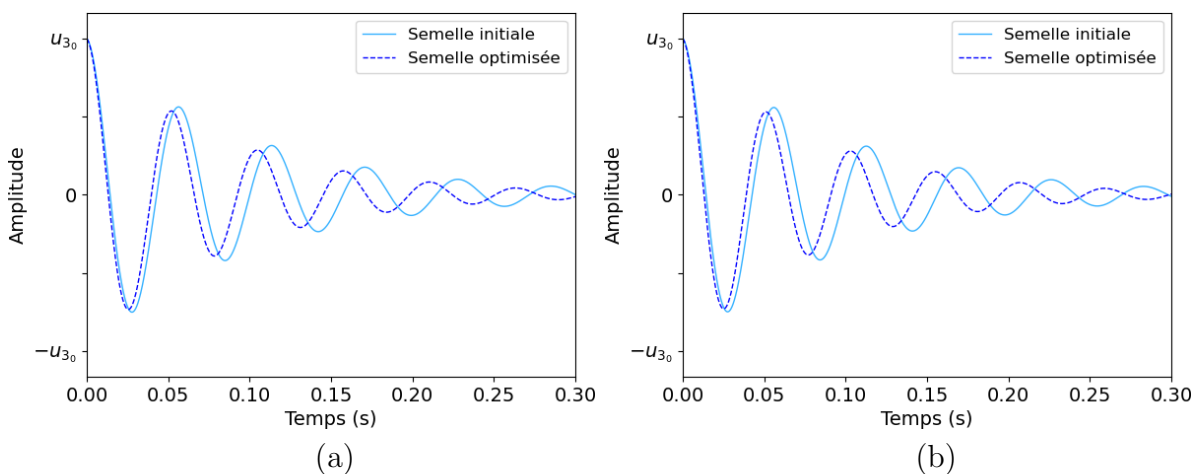


FIGURE VII.5.21 – Comparaison des vibrations libres de la semelle initiale et de la semelle optimisée, encastree (a) en  $\partial\Omega_{D1}$  et (b) en  $\partial\Omega_{D2}$ , pour la maximisation de l'amortissement.

## 6 Conclusion

Les algorithmes de ce chapitre tirent partie des méthodes utilisées dans les chapitres précédents et apportent, à travers une extension au cas 3D, un éclairage supplémentaire aux résultats obtenus en 2D. L'optimisation de structures 3D, sans hypothèse de plaque, procure une plus grande liberté d'optimisation et permet de prendre en compte, de façon précise, le comportement mécanique dans le sens de l'épaisseur. Pour cela, il est indispensable de travailler avec des maillages suffisamment raffinés. Dans notre cas, il est nécessaire que le nombre de mailles dans l'épaisseur soit suffisamment important pour que les résultats convergent. C'est pourquoi les programmes développés sont presque intégralement parallélisés, à l'exception des procédures d'advection et de redistanciation, ce qui permet de les mettre en œuvre sur des architectures parallèles aux capacités de calcul élevées. La parallélisation est réalisée sous `FreeFem++`, permettant une implémentation simple de la décomposition de domaine, et à l'aide de la librairie `PETSc`, offrant un large choix de solveurs et de préconditionneurs dont le choix judicieux permet de considérablement réduire le temps de calcul.

En élasticité linéaire, l'optimisation topologique 3D de plaques en flexion à volume constant a permis d'obtenir des designs à la topologie complexe et particulièrement intéressante. Ces résultats mettent notamment en évidence l'apparition de nombreux cantilevers dans l'épaisseur de la plaque et permettent de comprendre le phénomène d'amincissement de section rencontré au chapitre VI. Contrairement aux attentes, une jonction entre la plaque et la zone fixe d'application de la force n'est pas réalisée sur toute l'épaisseur mais est plutôt séparée en deux branches, suffisamment rigides pour ne pas impacter la rigidité globale de la structure. L'optimisation 3D semble donc un choix particulièrement pertinent pour la minimisation de la compliance d'une plaque en flexion.

Le problème d'optimisation topologique 3D de plaques viscoélastiques en vibration propose ensuite de maximiser l'amortissement d'une structure en polymère dans un contexte industriel. La prise en compte de deux problèmes de vibration libre permet d'obtenir des designs davantage en accord avec les exigences de conception. Une contrainte de compliance maximale assure la rigidité globale de la structure pour un test de flexion trois points, typique des essais de caractérisation des semelles de chaussure. Une contrainte d'égalité sur le volume permet également de choisir la quantité de matière disponible pour la détermination du design optimal. Ces contraintes, appliquées par la méthode du Lagrangien augmenté, représentent un moyen efficace de prendre en compte certains critères de conception et d'adapter le problème d'optimisation à l'application étudiée. Pour l'exemple choisi, le design final possède les motifs généraux des structures viscoélastiques 2D, optimisées au chapitre VI, tout en présentant de nombreux cantilevers dans le sens de l'épaisseur, dans l'esprit des résultats obtenus en élasticité 3D. Cet exemple nous permet également de remarquer, comme on pouvait s'y attendre, que la prise en compte d'un second problème de vibration diminue considérablement le gain d'amortissement. En effet, les deux problèmes choisis agissent en compétition sur l'évolution de la forme de la plaque.

Enfin, l'application de ce même problème au cas de la semelle de chaussure de course vise à obtenir des designs optimisés aux performances accrues, respectant les principaux critères de conception. Dans l'exemple présenté, le design optimisé possède des capacités d'amortissement supérieures, tout en respectant les contraintes de rigidité et de quantité de matière fixées. Le design final obtenu possède une structure intérieure complexe procurant

---

de meilleures performances, accomplissant l'objectif principal de ce travail.

L'utilisation de l'optimisation topologique 3D, bien que plus lourde à implémenter et nécessitant un temps de calcul plus long, s'est montrée indispensable pour la recherche de design optimal réaliste de structures viscoélastiques en vibration. La bonne représentation du comportement de la structure dans le sens l'épaisseur, constituant la limite des modèles de plaque, s'est avérée un élément important pour l'application de contraintes de rigidité. De plus, cette stratégie est nécessaire à l'optimisation de structures aux géométries complexes telles que les semelles de chaussures de course.





# Conclusion générale et perspectives

Cette thèse est consacrée aux problématiques d'optimisation de formes de structures en vibration exploitant les propriétés amortissantes des matériaux viscoélastiques linéaires. Un sujet aux enjeux importants puisque les polymères couvrent une large partie des applications industrielles actuelles. Pour cela, des algorithmes d'optimisation ont été développés dans un cadre viscoélastique, à l'aide de techniques variées, dans le but d'optimiser les capacités d'amortissement des structures étudiées. Ce travail emploie des méthodes de variation de frontière, telles que la méthode level-set, pour traiter d'une application particulière : l'optimisation des vibrations libres de structures élancées et notamment d'une semelle de chaussure de course. La littérature sur l'utilisation de ce type de méthode pour des structures viscoélastiques est rare et plutôt récente [19, 50]. Par conséquent, dans le but de réaliser une étude complète, plusieurs problèmes intermédiaires sont considérés, tels que l'optimisation de structures modélisées par des modèles de poutre et de plaque, avant de finalement proposer un algorithme d'optimisation dans le cas général. Ce dernier est ensuite appliqué au cas de la semelle de chaussure.

Les premiers problèmes étudiés visent à réaliser l'optimisation paramétrique du profil d'épaisseur d'une poutre et l'optimisation couplée de l'épaisseur et de la forme d'une plaque, dans le cadre de l'hypothèse de structure élancée, assurée par l'utilisation du modèle d'Euler-Bernoulli pour la poutre et Kirchhoff-Love pour la plaque. L'utilisation du modèle rhéologique de Maxwell généralisé, tout en considérant la dépendance en fréquence du coefficient de Poisson dans le cas de la plaque, permet une bonne représentation du comportement viscoélastique linéaire des polymères. Une analyse rigoureuse des sensibilités du problème par la méthode adjointe est également proposée pour le modèle de Maxwell généralisé utilisé. Les algorithmes développés mènent à des designs améliorant considérablement les capacités d'amortissement. Une analyse complète des paramètres du problème permet de mettre en évidence l'impact important des paramètres matériaux et, en particulier, des temps de relaxation avec une possible inversion du profil d'épaisseur lorsque les temps augmentent.

Des algorithmes d'optimisation topologique par la méthode level-set ont été ensuite élaborés. On note que la prise en compte d'une contrainte de rigidité, assurant la fonctionnalité de la pièce, provoque un phénomène d'amincissement critique de la section menant à des designs contre-intuitifs. Afin de comprendre ce phénomène, les travaux ont été étendus au modèle de Reissner-Mindlin qui a permis de comprendre que la non prise en compte des cisaillements transverses dans le modèle de Kirchhoff n'était pas la cause du problème. L'optimisation couplée d'une plaque viscoélastique modélisée par le modèle de Mindlin a également montré l'impact des cisaillements transverses sur le design optimal et a mis en évidence la pertinence de ce modèle pour les plaques d'épaisseur plus importante.

La généralisation des algorithmes d'optimisation au cas 3D et leurs résolutions par des méthodes de calcul haute performance a apporté une description complète du phénomène. En élasticité linéaire, la minimisation de la compliance d'une plaque en flexion mène à un design creux, renforcé par des petits cantilevers dans le sens de l'épaisseur et réparties sur tout la surface de la plaque. On retrouve une topologie similaire dans le design optimisé d'une plaque viscoélastique 3D en vibration libre sous contrainte de compliance. Dans cet exemple, la plaque conserve les motifs observables en viscoélasticité 2D mais est également renforcée par de nombreux cantilevers dans le sens de l'épaisseur, en conséquence de la contrainte de rigidité. Enfin, le dernier algorithme présenté dans ce manuscrit permet de déterminer le design optimal d'une semelle de chaussure de course à la géométrie complexe, tout en prenant en compte des contraintes de rigidité et de quantité de matière. De cette façon, il est possible d'augmenter significativement les capacités d'amortissement ou de dynamisme d'une semelle.

Suite à l'optimisation topologique 3D d'une semelle de chaussure de course viscoélastique en vibration libre pour des critères industriels courants, les perspectives de travail sont multiples.

La continuité naturelle d'une telle étude est de chercher le design optimal d'une semelle de chaussure en situation de course, puisque les tests usuels de vibration, de flexion trois points, et de torsion, ne représentent pas les sollicitations en condition de course. Pour cela, il faut s'intéresser aux performances réelles de la semelle et à de nouveaux critères de performance biomécaniques [109, 123]. La force de réaction verticale lors d'un foulée est représentée en Figure C-1, on remarque un premier pic très court appelé "pic d'impact", correspondant à l'impact initial de la chaussure sur le sol, et un pic plus long appelé "pic de propulsion", correspondant à l'impulsion prise par le coureur. Pour une semelle amortissante, on souhaite étendre le "pic d'impact". Pour une semelle dynamique, on souhaite augmenter la pente (en rouge) de la courbe d'évolution de la force antéro-postérieure (horizontale), voir Figure C-1.

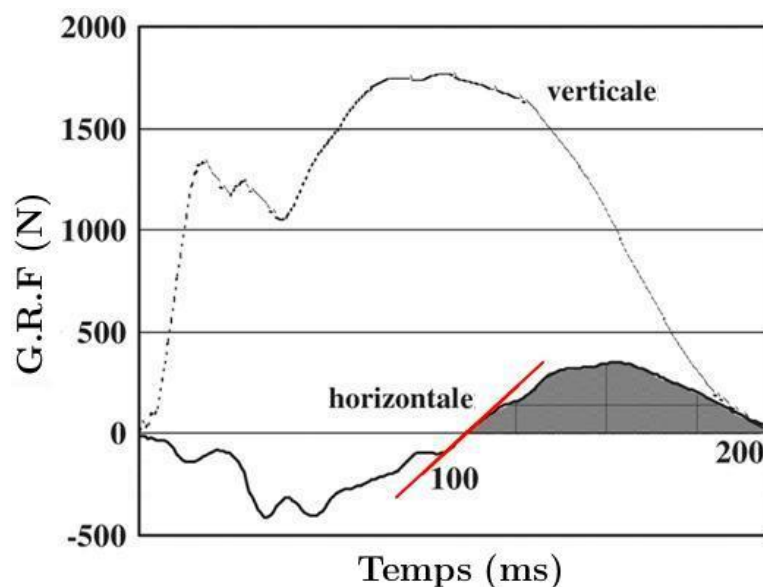


FIGURE C-1 – Évolution typique de la force de réaction verticale et horizontale d'une semelle de chaussure lors d'une foulée, extrait de [109].

Celle-ci est constituée d'une composante négative lorsque le sujet freine en poussant vers l'arrière, d'une composante nulle lorsque la chaussure est à plat sur le sol, et d'une composante positive lorsque le sujet entame sa propulsion vers l'avant. Pour traiter ce problème, la structure doit être soumise à une sollicitation réaliste évoluant dans le temps, il semble donc difficile de continuer à travailler dans le domaine fréquentiel. L'analyse de sensibilité requière alors l'utilisation d'un adjoint rétrograde en temps [12, 78], impliquant un travail théorique et numérique supplémentaire considérable ainsi qu'un plus grand coût mémoire pour stocker les états à tous les pas de temps. L'optimisation des performances réelles d'une semelle doit également être soumise à des contraintes, parmi celles-ci, on retrouve la contrainte de masse. En effet, le poids de la chaussure a un impact direct sur la quantité d'oxygène consommée par le coureur [108], et donc sur les performances de course. La rigidité est aussi un facteur important puisqu'une semelle trop rigide induit une impulsion de propulsion plus faible [108].

La rigidité de la semelle est typiquement assurée par un renfort intérieur, comme discuté au chapitre II, ce qui motive le développement d'un algorithme d'optimisation multi-matériaux. Il serait intéressant d'optimiser simultanément la répartition du matériau amortissant (corps de la semelle) et du matériau rigidifiant (renfort). La méthode level-set utilisée dans ce manuscrit est particulièrement adaptée à ce genre de problématique [7]. Une simple adaptation au cas multi-phase permet à la fonction level-set de représenter plusieurs matériaux tout en gardant la possibilité d'utiliser un matériau ersatz pour représenter le vide.

Un autre axe de recherche serait d'optimiser simultanément la topologie de la semelle et les paramètres rhéologiques du matériau viscoélastique constituant la structure. En effet, la maîtrise actuelle de la chimie des polymères permet un grand contrôle des différents paramètres matériaux. Il serait donc intéressant de changer de point de vue et de chercher le polymère optimal pour un design fixé en utilisant les paramètres matériaux en tant que variable d'optimisation. Un objectif ambitieux, mais d'un intérêt industriel certain, serait de déterminer le meilleur couple (*design optimal, matériau*) pour des contraintes de conception données.

Enfin, le modèle utilisé dans ce manuscrit pourrait être amélioré pour prendre en compte d'autres aspects du problème physique étudié. On retrouve par exemple le problème de contact de la semelle avec le sol, de résistance à la fatigue ou encore les problématiques liées à la plasticité. Ce dernier point est particulièrement important puisque l'apparition locale de déformations plastiques change considérablement les propriétés du polymère constitutif et peut donc grandement nuire aux performances mécaniques de la pièce. Afin de pouvoir appliquer nos algorithmes à la famille des élastomères, matériaux couramment utilisés pour les applications d'amortissement, il serait également pertinent d'adapter la présente étude à un modèle mécanique pour solide incompressible. Un tel problème est généralement résolu par une formulation mixte en prenant la pression hydrostatique comme nouvelle variable.



# Annexe A

## Expression des formes bilinéaires

Soit  $n \in \mathbb{N}_+^*$  et  $(\omega, u) \in \mathbb{C} \times \mathcal{U}$ , rappelons que  $u$  représente le déplacement vertical en 2D et  $u = (u_1, u_2, u_3)$  en 3D. Le problème aux valeurs propres polynomial complexe s'écrit :

$$\sum_{j=0}^{n+2} \omega^j a_j(u, \hat{u}) = 0 \quad \forall \hat{u} \in \mathcal{U},$$

en omettant la dépendance par rapport à l'épaisseur  $h$  pour des raisons de clarté. Notons pour le modèle de Kirchhoff-Love

$$\varphi(u, \hat{u}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_2^2}$$

$$\psi(u, \hat{u}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_1^2}$$

$$\xi(u, \hat{u}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x_1 \partial x_2},$$

le modèle de Reissner-Mindlin

$$\varphi(u, \hat{u}) = \frac{\partial \theta_x}{\partial x_1} \frac{\partial \hat{\theta}_x}{\partial x_1} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x_2} \frac{\partial \hat{\theta}_y}{\partial x_2}$$

$$\psi(u, \hat{u}) = \frac{\partial \theta_x}{\partial x_1} \frac{\partial \hat{\theta}_y}{\partial x_2} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x_2} \frac{\partial \hat{\theta}_x}{\partial x_1}$$

$$\xi(u, \hat{u}) = \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x_2} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial \hat{\theta}_x}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{\theta}_y}{\partial x_1} \right),$$

et en viscoélasticité linéaire 3D

$$\varphi(u, \hat{u}) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_3}$$

$$\psi(u, \hat{u}) = \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_1} + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2} + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_3}$$

$$\xi(u, \hat{u}) = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_1} \right) + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_1} \right) + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \left( \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial x_2} \right).$$

Les formes bilinéaires symétriques sont données par

$$a_0(u, \hat{u}) = \int_{\Omega} -\frac{h^3}{12} \frac{E_0}{(1 - \nu_0^2)} (\varphi(u, \hat{u}) + \nu_0 \psi(u, \hat{u}) + 2(1 - \nu_0) \xi(u, \hat{u})) dA$$

$$a_1(u, \hat{u}) = \int_{\Omega} -\frac{h^3}{12} p_1 \sum_{k=0}^n \frac{E_k}{1 - \nu_k^2} (\varphi(u, \hat{u}) + \nu_k \psi(u, \hat{u}) + 2(1 - \nu_k) \xi(u, \hat{u})) dA \\ + \int_{\Omega} \frac{h^3}{12} \sum_{k=1}^n q_{1,k} \frac{E_k}{1 - \nu_k^2} (\varphi(u, \hat{u}) + \nu_k \psi(u, \hat{u}) + 2(1 - \nu_k) \xi(u, \hat{u})) dA$$

$$\forall j \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket,$$

$$a_j(u, \hat{u}) = \int_{\Omega} p_{j-2} \rho h u \hat{u} dA \\ - \int_{\Omega} \frac{h^3}{12} p_j \sum_{k=0}^n \frac{E_k}{1 - \nu_k^2} (\varphi(u, \hat{u}) + \nu_k \psi(u, \hat{u}) + 2(1 - \nu_k) \xi(u, \hat{u})) dA \\ + \int_{\Omega} \frac{h^3}{12} \sum_{k=1}^n q_{j,k} \frac{E_k}{1 - \nu_k^2} (\varphi(u, \hat{u}) + \nu_k \psi(u, \hat{u}) + 2(1 - \nu_k) \xi(u, \hat{u})) dA$$

$$a_n(u, \hat{u}) = \int_{\Omega} p_{n-2} \rho h u \hat{u} dA \\ - \int_{\Omega} \frac{h^3}{12} p_n \sum_{k=0}^n \frac{E_k}{1 - \nu_k^2} (\varphi(u, \hat{u}) + \nu_k \psi(u, \hat{u}) + 2(1 - \nu_k) \xi(u, \hat{u})) dA$$

$$a_{n+1}(u, \hat{u}) = \int_{\Omega} p_{n-1} \rho h u \hat{u} dA$$

$$a_{n+2}(u, \hat{u}) = \int_{\Omega} p_n \rho h u \hat{u} dA.$$

Les coefficients  $p_j$  et  $q_{j,k}$  sont définis à travers les développements

$$\prod_{j=1}^n (1 + i\omega\tau_j) = \sum_{j=0}^n p_j \omega^j$$

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (1 + i\omega\tau_j) = \sum_{j=0}^n q_{j,k} \omega^j.$$

# Bibliographie

- [1] G. Allaire. *Conception optimale de structures*, volume 58 of *Mathématiques et Applications*. Springer, 2007.
- [2] G. Allaire, M. Bühr, and B. Bogosel. Support optimization in additive manufacturing for geometric and thermo-mechanical constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 61 :2377–2399, 2020.
- [3] G. Allaire and B. Bogosel. Optimizing supports for additive manufacturing. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 58 :2493–2515, 2018.
- [4] G. Allaire, C. Dapogny, R. Estevez, A. Faure, and G. Michailidis. Structural optimization under overhang constraints imposed by additive manufacturing technologies. *Journal of Computational Physics*, 351 :295–328, 2017.
- [5] G. Allaire, C. Dapogny, A. Faure, and G. Michailidis. Shape optimization of a layer by layer mechanical constraint for additive manufacturing. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 355 :699–717, 2017.
- [6] G. Allaire, C. Dapogny, and P. Frey. Shape optimization with a level set based mesh evolution method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 282 :22–53, 2014.
- [7] G. Allaire, C. Dapogny, and F. Jouve. *Shape and topology optimization*, pages 1–132. Number 22 in Handbook of Numerical Analysis. Geometric partial differential equations, part II. A. Bonito and R.H. Nochetto eds. Elsevier, 2021.
- [8] G. Allaire, F. De Gournay, F. Jouve, and A. Toader. Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method. *Control and Cybernetics*, 34 :59–80, 2005.
- [9] G. Allaire and F. Jouve. A level-set method for vibration and multiple loads structural optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 :3269–3290, 2005.
- [10] G. Allaire and F. Jouve. *Coupling the Level Set Method and the Topological Gradient in Structural Optimization*, pages 3–12. Springer, 2006.
- [11] G. Allaire, F. Jouve, and A. Toader. A level-set method for shape optimization. *Comptes Rendus Mathématiques*, 334(12) :1125–1130, 2002.



- [12] G. Allaire and A. Kelly. Optimal Design of Low-Contrast Two-Phase Structures for the Wave Equation. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 21(07) :1499–1538, 2011.
- [13] G. Allaire and O. Pantz. Structural Optimization with FreeFem++. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 32 :173–181, 2006.
- [14] Altair. Product Documentation. [https://support.altair.com/csm?id=altair\\_product\\_documentation](https://support.altair.com/csm?id=altair_product_documentation), 1981.
- [15] P. Amestoy, A. Buttari, J. L’Excellent, and T. Mary. Performance and Scalability of the Block Low-Rank Multifrontal Factorization on Multicore Architectures. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 45(1) :2 :1–2 :26, 2019.
- [16] P. Amestoy, I. Duff, J. Koster, and J. L’Excellent. A Fully Asynchronous Multifrontal Solver Using Distributed Dynamic Scheduling. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 23(1) :15–41, 2001.
- [17] K. Ammari, A. Henrot, and M. Tucsnak. Asymptotic behaviour of the solutions and optimal location of the actuator for the pointwise stabilization of a string. *Asymptotic Analysis*, 28 :215–240, 2001.
- [18] Andreassen, E. and Jensen, J.S. Topology optimization of periodic microstructures for enhanced dynamic properties of viscoelastic composite materials. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 49 :695–705, 2013.
- [19] M. Ansari, A. Khajepour, and E. Esmailzadeh. Application of level set method to optimal vibration control of plate structures. *Journal of Sound and Vibration*, 332(4) :687–700, 2013.
- [20] Z. Bai, J. Demmel, J. Dongarra, A. Ruhe, and H. van der Vorst. *Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems*. Number 11 in Software, Environments, and Tools. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [21] S. Balay, S. Abhyankar, M. Adams, S. Benson, J. Brown, P. Brune, K. Buschelman, E. M. Constantinescu, et al. PETSc Web page. <https://petsc.org/>, 2022.
- [22] S. Balay, W. Gropp, L. McInnes, and B. Smith. Efficient Management of Parallelism in Object Oriented Numerical Software Libraries. In E. Arge, A. M. Bruaset, and H. P. Langtangen, editors, *Modern Software Tools in Scientific Computing*, pages 163–202. Birkhäuser Press, 1997.
- [23] C. Bardos. Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels ; théorèmes d’approximation ; application à l’équation de transport. *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure*, 4e série, 3(2) :185–233, 1970.

- [24] B. Bassa, F. Sabourin, and M. Brunet. A new nine-node solid-shell finite element using complete 3D constitutive laws. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 92 :589–636, 2012.
- [25] F. Belblidia, J. Lee, S. Rechak, and E. Hinton. Topology optimization of plate structures using a single- or three-layered artificial material model. *Advances in Engineering Software*, 32 :159–168, 2001.
- [26] M. Bendsøe and O. Sigmund. *Topology optimization : theory, methods, and applications*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [27] M. Bendsøe and N. Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71(2) :197–224, 1988.
- [28] M. Benzi. Preconditioning techniques for large linear systems : a survey. *Journal of Computational Physics*, 182(2) :418–477, 2002.
- [29] J. Bicerano. *Prediction of Polymer Properties 3rd ed.*, volume 65 of *Plastics engineering*. New York : Marcel Dekker, 2002.
- [30] B. Bourdin. Filters in topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 :2143–2158, 2001.
- [31] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle - Théorie et applications*. Sciences sup. DUNOD, 2005.
- [32] C. Bui, C. Dapogny, and P. Frey. An accurate anisotropic adaptation method for solving the level set advection equation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 70(7) :899–922, 2012.
- [33] C. Bui, C. Dapogny, and P. Frey. Advect. <https://github.com/ISCDtoolbox/Advection>, 2015.
- [34] E. Burman, S. Claus, P. Hansbo, M. Larson, and A. Massing. CutFEM : discretizing geometry and partial differential equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 104(7) :472–501, 2015.
- [35] A. Catapano, B. Desmorat, and P. Vannucci. Stiffness and Strength Optimisation of the Anisotropy Distribution for Laminated Structures. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 167(1) :118–146, 2014.
- [36] J. Céa. Conception optimale ou identification de formes, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût. *Mathematical modelling and numerical analysis*, 20(3) :539–552, 1986.
- [37] N. Challamel and I. Elishakoff. A brief history of first-order shear-deformable beam and plate models. *Mechanics Research Communications*, 102 :103389, 2019.

- [38] D. Chen, T. Chiu, T. Chen, M. Chung, P. Yang, and Y.-S. Lai. Using DMA to Simultaneously Acquire Young's Relaxation Modulus and Time-dependent Poisson's Ratio of a Viscoelastic Material. *Procedia Engineering*, 79 :153–159, 2014.
- [39] D. Chen, T. Chiu, T. Chen, P. Yang, and S. Jian. Interconversions between linear viscoelastic functions with a time-dependent bulk modulus. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 23 :879–895, 2017.
- [40] W. Chen and S. Liu. Microstructural topology optimization of viscoelastic materials for maximum modal loss factor of macrostructures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 53 :1–14, 2015.
- [41] C. Chevalier and F. Pellegrini. PT-Scotch : A tool for efficient parallel graph ordering. *Parallel Computing*, 34(6-8) :318–331, 2008.
- [42] D. Chopp. Computing minimal surfaces via level-set curvature flow. *Journal of Computational Physics*, 106 :77–91, 1993.
- [43] F. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Number 5 in Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.
- [44] G. Cohen. Convexité et Optimisation, 2000. Lecture.
- [45] D. Da, J. Yvonnet, L. Xia, M. Le, and G. Li. Topology optimization of periodic lattice structures taking into account strain gradient. *Computers and Structures*, 210 :28–40, 2018.
- [46] C. Dapogny, A. Faure, G. Michailidis, G. Allaire, A. Couvelas, and R. Estevez. Geometric constraints for shape and topology optimization in architectural design. *Computational Mechanics*, 59 :933–965, 2017.
- [47] Dassault Systèmes. CATIA Web page. <https://www.3ds.com/products-services/catia/>, 1981.
- [48] T. Davis. UMFPACK version 4.3 user guide. 2005.
- [49] P. de Gennes. *Scaling Concepts in Polymer Physics*. Cornell University Press, 1979.
- [50] G. Delgado and M. Hamdaoui. Topology optimization of frequency dependent viscoelastic structures via a level-set method. *Applied Mathematics and Computation*, 347 :522–541, 2019.
- [51] B. Desmorat and R. Desmorat. Topology optimization in damage governed low cycle fatigue. *Comptes Rendus Mécanique*, 336(5) :448–453, 2008.
- [52] J. Diani, P. Gilormini, and S. Arrieta. Direct experimental evidence of time-temperature superposition at finite strain for an amorphous polymer network. *Polymer*, 58 :107–112, 2015.

- [53] A. Diaz and O. Sigmund. Checkerboard patterns in layout optimization. *Structural Optimization*, 10 :40–45, 1995.
- [54] Z. Ding, J. Shi, Q. Gao, Q. Huang, and W.-H. Liao. Design sensitivity analysis for transient responses of viscoelastically damped systems using model order reduction techniques. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 64 :1501–1526, 2021.
- [55] V. Dolean, P. Jolivet, and F. Nataf. *An introduction to domain decomposition methods. Algorithms, theory, and parallel implementation*, volume 144 of *Philadelphia, PA : Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM)*. 2015.
- [56] A. Elsabbagh and A. Baz. Topology optimization of unconstrained damping treatments for plates. *Engineering Optimization*, 46 :1153–1168, 2014.
- [57] L. Euler, C. Truesdell, and S. Gesellschaft. *The rational mechanics of flexible or elastic bodies, 1638-1788 : Introduction to Leonhari Euleri Opera Omnia Vol. X Et XI Seriei Secundae*. Turici : Venditioni exponunt Orell Fussli, 1960.
- [58] L. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2 edition, 2010.
- [59] R. Falgout and U. Yang. hypre : A Library of High Performance Preconditioners. volume 2331, pages 632–641. 2002.
- [60] Z. Fang, L. Yao, S. Tian, and J. Hou. Microstructural topology optimization of constrained layer damping on plates for maximum modal loss factor of macrostructures. *Shock and Vibration*, 2020.
- [61] Z. Fang and L. Zheng. Topology optimization for minimizing the resonant response of plates with constrained layer damping treatment. *Shock and Vibration*, 2015 :11, 2015. Publisher : Hindawi.
- [62] A. Faure, G. Michailidis, G. Parry, N. Vermaak, and R. Estevez. Design of thermoelastic multi-material structures with graded interfaces using topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 56 :823–837, 2017.
- [63] F. Feppon. Shape and topology optimization of multiphysics systems., 2019. Université Paris-Saclay. Thèse préparée à l'École polytechnique.
- [64] P. Freitas. Optimizing the Rate of Decay of Solutions of the Wave Equation Using Genetic Algorithms : A Counterexample to the Constant Damping Conjecture. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 37 :376–387, 1999.
- [65] E. Gabriel, G. E. Fagg, G. Bosilca, T. Angskun, J. J. Dongarra, J. M. Squyres, V. Sahay, P. Kambadur, et al. Open MPI : Goals, Concept, and Design of a Next Generation MPI Implementation. *Lecture Notes in Computer Science*, 3241 :97–104, 2004.
- [66] D. Gallistl. Morley finite element method for the eigenvalues of the biharmonic operator. *Journal of Numerical Analysis*, 35 :1779–1811, 2015.

- [67] P. Geoffroy-Donders, G. Allaire, G. Michailidis, and O. Pantz. Coupled optimization of macroscopic structures and lattice infill. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 123(13) :2963–2985, 2022.
- [68] P. Geoffroy-Donders, G. Allaire, and O. Pantz. 3-d topology optimization of modulated and oriented periodic microstructures by the homogenization method. *Journal of Computational Physics*, 401 :108994, 2020.
- [69] C. Geuzaine and J. Remacle. Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11) :1309–1331, 2009.
- [70] M. Gröhlich, A. Lang, M. Böswald, and J. Meier. Viscoelastic damping design - Thermal impact on a constrained layer damping treatment. *Materials and Design*, 207 :109885, 2021.
- [71] M. Gurtin. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Elsevier Science, 1982.
- [72] J. Hadamard. Mémoire sur le problème d’analyse relatif à l’équilibre des plaques élastiques encastrées. *Mémoire des savants étrangers*, 33 :515–629, 1907.
- [73] B. Hassani and E. Hinton. A review of homogenization and topology optimization iii—topology optimization using optimality criteria. *Computers & Structures*, 69(6) :739–756, 1998.
- [74] E. Haug and B. Rousset. Design Sensitivity Analysis in Structural Mechanics.II. Eigenvalue Variations. *Journal of Structural Mechanics*, 8(2) :161–186, 1980.
- [75] F. Hecht. New development in FreeFem++. *Journal of Numerical Mathematics*, 20 :251–266, 2012.
- [76] A. Henrot and M. Pierre. *Variation et optimisation de formes*, volume 48 of *Mathématiques et Applications*. Springer, 2005.
- [77] A. Henrot and M. Pierre. *Shape variation and optimization : a geometrical analysis*. Number 28 in Tracts in Mathematics. European Mathematical Society, 2018.
- [78] H. Hermes and J. Lasalle. *Functional analysis and time optimal control*, volume 56 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, 1969.
- [79] V. Hernández, J. Román, and V. Vidal. SLEPc : A scalable and flexible toolkit for the solution of eigenvalue problems. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 31 :351–362, 2005.
- [80] L. Herrmann. Finite element bending analysis for plates. *Journal of Engineering Mechanics*, 93 :49–83, 1967.
- [81] H. Horio, N. Kogiso, M. Otomori, T. Yamada, and S. Nishiwaki. Level set-based topology optimization of thin plate structure for maximizing stiffness under out-of-plane deformation. *Transactions of the JSME*, 80(811), 2010.

- [82] Hughes, T.J.R. and Taylor, R.L. and Kanoknukulchai, W. A simple and efficient finite element for plate bending. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11 :1529–1543, 1977.
- [83] K. James and H. Waisman. Topology optimization of viscoelastic structures using a time-dependent adjoint method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 285 :166–187, 2015.
- [84] K. James and H. Waisman. On the importance of viscoelastic response consideration in structural design optimization. *Optimization and Engineering*, 17 :631–650, 2016.
- [85] P. Jolivet, V. Dolean, F. Hecht, F. Nataf, C. Prud’Homme, and N. Spillane. High performance domain decomposition methods on massively parallel architectures with freefem++. *Journal of Numerical Mathematics*, 20(3-4) :287–302, 2012.
- [86] P. Jolivet, F. Hecht, F. Nataf, and C. Prud’Homme. Scalable domain decomposition preconditioners for heterogeneous elliptic problems. *Scientific Programming*, 22(2) :157–171, 2014.
- [87] Z. Kang, X. Zhang, S. Jiang, and G. Cheng. On topology optimization of damping layer in shell structures under harmonic excitations. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 46 :51–67, 2011.
- [88] G. Karypis and V. Kumar. *METIS A Software Package for Partitioning Unstructured Graphs, Partitioning Meshes, and Computing Fill-Reducing Orderings of Sparse Matrices*. Computer Science & Engineering, Technical Report 97-061. 1997.
- [89] D. Khoza. Topology optimization of plate-like structures. University of Pretoria, 2006.
- [90] R. Lakes and A. Wineman. On Poisson’s Ratio in Linearly Viscoelastic Solids. *Journal of Elasticity*, 85 :45–63, 2006.
- [91] P. Lamberti and L. Provenzano. On the explicit representation of the trace space  $H^{3/2}$  and of the solutions to biharmonic Dirichlet problems on Lipschitz domains via multi-parameter Steklov problems. *Revista Matemática Complutense*, 35(1) :53–88, 2022.
- [92] P. Lascaux and P. Lesaint. Some nonconforming finite elements for the plate bending problem. *Revue française d’automatique, informatique, recherche opérationnelle.*, 9 :9–53, 1975.
- [93] R. Lehoucq, D. Sorensen, and C. Yang. *Introduction to ARPACK*, pages 1–7.
- [94] A. Leissa. The free vibration of rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 31(3) :257–293, 1973.
- [95] P. Li, Y. Wu, and J. Yvonnet. A SIMP-Phase field topology optimization framework to maximize quasi-brittle fracture resistance of 2D and 3D composites. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 114 :28–40, 2021.

- [96] P. Li, J. Yvonnet, and Y. Wu. Improved fracture resistance of 3D-printed elastoplastic structures with respect to their topology and orientation of deposited layers. *International Journal of Mechanical Sciences*, 220(4) :107147, 2022.
- [97] S. Li, S. Long, and G. Li. A Topology Optimization of Moderately Thick Plates Based on the Meshless Numerical Method. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 60(1) :73–94, 2010.
- [98] Q. Liu, D. Ruan, and X. Huang. Topology optimization of viscoelastic materials on damping and frequency of macrostructures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 337 :305–323, 2018.
- [99] A. Love. On the small free vibrations and deformations of elastic shells. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 179(7) :491–549, 1888.
- [100] C. Lundgaard, J. Alexandersen, M. Zhou, and O. Andreasen, C.S. Sigmund. Revisiting density-based topology optimization for fluid-structure-interaction problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 58(3) :969–995, 2018.
- [101] C. Lundgaard and O. Sigmund. A density-based topology optimization methodology for thermoelectric energy conversion problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 57(4) :1427–1442, 2018.
- [102] C. Lundgaard, O. Sigmund, and R. Bjørk. Topology Optimization of Segmented Thermoelectric Generators. *Journal of Electronic Materials*, 47(12) :6959–6971, 2018.
- [103] Z. Ma, N. Kikuchi, and I. Hagiwara. Structural topology and shape optimization for a frequency response problem. *Computational mechanics*, 13(3) :157–174, 1993.
- [104] N. McCrum, C. Bucklet, and C. Bucknall. *Principles of Polymer Engineering*. Oxford science publications. Oxford University Press, 2 edition, 1997.
- [105] L. Morley. A Triangular Equilibrium Element with Linearly Varying Bending Moments for Plate Bending Problems. *Journal of the Royal Aeronautical Society*, 71 :715–719, 1967.
- [106] L. Morley. The Triangular Equilibrium Element in the Solution of Plate Bending Problems. *Aeronautical Quarterly*, 19 :149–169, 1968.
- [107] C. Multiphysics. Reference Manual, version 5.3. <https://www.comsol.com/>.
- [108] M. Nishida, M. Isobe, and T. Nishiwaki. S14 Influence of sole stiffness on ground reaction force in running. *The Proceedings of Joint Symposium : Symposium on Sports Engineering, Symposium on Human Dynamics*, 2005 :66–69, 2005.
- [109] T. Nishiwaki. Running shoe sole stiffness evaluation method based on eigen vibration analysis. *Sports Technology*, 1(1) :76–82, 2008.
- [110] N. Olhoff, A. Seyranian, and E. Lund. Multiple eigenvalues in structural optimization problems. *Structural optimization*, 8 :207–227, 1980.

- [111] S. Osher and S. F. Level-set methods for optimization problems involving geometry and constraints. *Journal of Computational Physics*, 171(1) :272–288, 2001.
- [112] S. Osher and J. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79(1) :12–49, 1988.
- [113] F. Pellegrini. Scotch and PT-Scotch Graph Partitioning Software : An Overview. In O. S. Uwe Naumann, editor, *Combinatorial Scientific Computing*, pages 373–406. Chapman and Hall/CRC, 2012.
- [114] R. Picelli, W. Vicente, and R. Pavanello. Evolutionary topology optimization for structural compliance minimization considering design-dependent FSI loads. *Finite Elements in Analysis and Design*, 135 :44–55, 2017.
- [115] J. Przemieniecki. Matrix structural analysis of substructures. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 1 :138–147, 1963.
- [116] K. Rafetseder. *A new approach to mixed methods for Kirchhoff-Love plates and shells*. Ph.D. thesis, Institute of Computational Mathematics, Altenbergerstraße 69 4040 Linz, Österreich, 2018.
- [117] N. Ranaivomiarana, F. Irisarri, D. Bettebghor, and B. Desmorat. *Simultaneous Topology Optimization of Material Density and Anisotropy*, pages 1009–1018. 2018.
- [118] J. Reddy. *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. Taylor & Francis, 2 edition, 2006.
- [119] M. Rowbottom. The Optimization of Mechanical Dampers to Control Self-Excited Galloping Oscillations. *Journal of Sound and Vibration*, 75 :559–576, 1981.
- [120] B. Samali and K. Kwok. Use of viscoelastic dampers in reducing wind- and earthquake-induced motion of building structures. *Engineering Structures*, 17(9) :639–654, 1995.
- [121] H. Schwarz. Über einige Abbildungsaufgaben. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 70 :105–120, 1869.
- [122] S. Shanbhag. pyReSpect : A Computer Program to Extract Discrete and Continuous Spectra from Stress Relaxation Experiments. *Macromolecular Theory and Simulations*, 28 :1900005, 2019.
- [123] K. Shimoyama, K. Seo, T. Nishiwaki, S. Jeong, and S. Obayashi. Design optimization of a sport shoe sole structure by evolutionary computation and finite element method analysis. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part P : Journal of Sports Engineering and Technology*, 225 :179–188, 2011.
- [124] O. Sigmund and J. Petersson. Numerical instabilities in topology optimization : a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural Optimization*, 16 :68–75, 1998.



- [125] J. Simon and F. Murat. Etudes de problèmes d'optimal design. volume 41, pages 54–62. Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [126] J. Sokolowski and J. Zolesio. *Introduction to Shape Optimization : Shape Sensitivity Analysis*, volume 16 of *Series in Computational Mathematics*. Springer, 1992.
- [127] S. Timoshenko. *History of strength of materials*. McGraw-Hill. New York, 1953.
- [128] S. Timoshenko and S. Wolnowsky-Krieger. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill College, 2 edition, 1959.
- [129] K. Trygve, X. Tai, and R. Winther. A robust nonconforming  $H^2$ -element. *Mathematics of Computation*, 70 :489–505, 2000.
- [130] N. Tschoegl, W. Knauss, and I. Emri. Poisson's ratio in linear viscoelasticity - A critical review. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 6 :3–51, 2002.
- [131] N. Vermaak, G. Michailidis, A. Faure, G. Parry, R. Estevez, F. Jouve, G. Allaire, and Y. Bréchet. *Topological Optimization with Interfaces*, pages 173–193. 2019.
- [132] C. Villanueva and K. Maute. Density and level set-XFEM schemes for topology optimization of 3-D structures. *Computational Mechanics*, 54(1) :133–150, 2014.
- [133] M. Wang, X. Wang, and D. Guo. A level set method for structural topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(1-2) :227–246, 2003.
- [134] I. Ward and J. Sweeney. *An introduction to the mechanical properties of solid polymers*. Wiley, 2 edition, 2004.
- [135] H. Weller and H. Jasak. OpenFOAM Web page. <https://www.openfoam.com/documentation/guides/latest/doc/guide-solvers-multigrid-gamg.html>, 2004.
- [136] M. Williams, R. Landel, and J. Ferry. The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids. *Journal of the American Chemical Society*, 77(14) :3701–3707, 1955.
- [137] J. Wu, O. Sigmund, and J. Groen. Topology optimization of multi-scale structures : a review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 63(3) :1455–1480, 2021.
- [138] K. Yun and S. Youn. Design sensitivity analysis for transient response of non-viscously damped dynamic systems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 55(6) :2197–2210, 2017.
- [139] K. Yun and S. Youn. Topology optimization of viscoelastic damping layers for attenuating transient response of shell structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, 141 :154–165, 2018.

- 
- [140] G. Zhang and K. Khandelwal. Design of dissipative multimaterial viscoelastic-hyperelastic systems at finite strains via topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 119 :1037–1068, 2019.
- [141] J. Zhang, J. Brown, S. Balay, J. Faibussowitsch, M. Knepley, O. Marin, R. Mills, T. Munson, et al. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*.
- [142] M. Zhou and G. Rozvany. On the validity of ESO type methods in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21 :80–83, 2001.
- [143] O. Zienkiewicz and K. Morgan. *Finite Elements and Approximation*. John Wiley & Sons Inc, 1983.
- [144] O. Zienkiewicz, R. Taylor, and J. Zhu. *The Finite Element Method - Its Basis and Fundamentals*. Butterworth-Heinemann, 7 edition, 2013.
- [145] O. Zienkiewicz, R. Taylor, and J. Zhu. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Butterworth-Heinemann, 7 edition, 2013.





**Titre :** Optimisation de formes de structures viscoélastiques sous sollicitations dynamiques

**Mots clés :** optimisation de formes, viscoélasticité linéaire, polymères, amortissement, vibration libre

**Résumé :** Cette thèse porte sur l'optimisation de formes de structures en vibration exploitant les propriétés amortissantes des polymères. Un sujet aux enjeux importants puisque ces matériaux sont au cœur d'une grande partie des applications industrielles actuelles. L'objectif principal de ce travail est d'augmenter significativement les capacités d'amortissement de structures viscoélastiques homogènes en vibration libre, en s'appuyant sur des techniques de recherche du design optimal. L'optimisation paramétrique de l'épaisseur d'une poutre et d'une plaque, satisfaisant respectivement les hypothèses d'Euler-Bernoulli et de Kirchhoff-Love, est tout d'abord considérée. Cette étude est suivie de l'optimisation couplée de l'épaisseur et de la forme d'une plaque, satisfaisant les hypothèses de Kirchhoff-Love ou de Reissner-Mindlin, par la méthode de variation de frontière d'Hadamard. En-

fin, une généralisation de ces problèmes est proposée à travers l'optimisation topologique de structures viscoélastiques 3D par la méthode level-set et appliquée au cas de la semelle de chaussure de course dans un cadre industriel. Le matériau viscoélastique linéaire isotrope est modélisé par un modèle classique de Maxwell généralisé, représentant le comportement de polymères réalistes de façon satisfaisante. Le gradient des fonctions objectifs est établi par une approche adjointe. L'optimisation est réalisée par un algorithme de descente de gradient et les modèles mécaniques sont évalués par la méthode des éléments finis. Les designs optimisés montrent un gain de performance significatif. Les résultats numériques indiquent également que les designs optimaux, ainsi que leur propriétés d'amortissement, dépendent fortement des paramètres matériaux.

**Title :** Shape optimization of viscoelastic structures under dynamic loading

**Keywords :** shape optimization, linear viscoelasticity, polymers, damping, free vibration

**Abstract :** This thesis focuses on shape optimization of viscoelastic polymer structures, as damping polymer materials are widely used in industrial applications. The main goal of this work is to significantly enhance the damping of homogeneous linear viscoelastic structures under free vibration by relying on optimal design. The sizing optimization of the thickness of a beam and a plate, satisfying respectively the Euler-Bernoulli and Kirchhoff-Love assumptions, is first considered. This study is followed by a coupled optimization of the thickness and geometry of a plate, satisfying either the Kirchhoff-Love or Reissner-Mindlin assumptions, applying the Hadamard's boundary variation method. Lastly, a generalization is pro-

posed by performing the topology optimization of 3D viscoelastic structures by the level-set method and applied to running shoe soles in an industrial context. The isotropic linear viscoelastic material is modeled by a classical generalized Maxwell model, well suited for polymers. Gradients of the objective functions are computed by an adjoint approach. Optimization is performed by a gradient descent algorithm and the mechanical models are evaluated by the finite element method. The optimal designs show considerably improved damping capacities. Numerical tests also indicate that the optimal designs, as well as their damping properties, strongly depend on the material parameters.