



**HAL**  
open science

# Modélisation numérique de la localisation de l'écoulement et des déformations dans les milieux poreux partiellement saturés

Mohammed Zaim

► **To cite this version:**

Mohammed Zaim. Modélisation numérique de la localisation de l'écoulement et des déformations dans les milieux poreux partiellement saturés. Génie civil. École centrale de Nantes; Université de Liège, 2023. Français. NNT : 2023ECDN0024 . tel-04453762

**HAL Id: tel-04453762**

**<https://theses.hal.science/tel-04453762v1>**

Submitted on 12 Feb 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# MEMOIRE DE DOCTORAT DE

L'ÉCOLE CENTRALE DE NANTES  
Et l'UNIVERSITÉ DE LIÈGE

ÉCOLE DOCTORALE N° 602  
*Sciences de l'Ingénierie et des Systèmes*  
Spécialité : *Génie Civil*

Par

**Mohammed ZAIM**

## **Modélisation numérique de la localisation de l'écoulement et des déformations dans les milieux poreux partiellement saturés**

**Projet de recherche doctoral présenté et soutenu à l'École Centrale de Nantes le 9 novembre 2023**  
**Unité de recherche : UMR 6183, Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM)**

### **Rapporteurs avant soutenance :**

Richard GIOT      Professeur des universités, Université de Poitiers  
Pierre GERARD      Associate professor, Université Libre de Bruxelles, Belgique

### **Composition du Jury :**

Président :	Pierre BÉSUELLE	Directeur de recherche CNRS, Université Grenoble Alpes
Examineurs :	Richard GIOT Pierre GERARD Anne-Catherine DIEUDONNÉ Bertrand FRANÇOIS	Professeur des universités, Université de Poitiers Associate professor, Université Libre de Bruxelles, Belgique Assistant professor, Technische Universiteit Delft, Pays-Bas Assistant professor, Université de Liège, Belgique
Directeur de recherches doctorales :	Giulio SCIARRA	Professeur des universités, École Centrale de Nantes
Directeur de recherches doctorales :	Frédéric COLLIN	Professor, Université de Liège, Belgique
Co-enc.de recherches doctorales :	Panagiotis KOTRONIS	Professeur des universités, École Centrale de Nantes



# REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers ceux qui ont contribué de manière significative à la réalisation de cette thèse. Le chemin vers la complétion de ce travail de recherche a été jalonné de défis, mais il a été rendu possible grâce au soutien et à l'encouragement de nombreuses personnes exceptionnelles.

En premier lieu, je souhaite exprimer ma reconnaissance envers mon directeur de thèse, le Professeur Giulio Sciarra, dont la sagesse, l'expertise et la patience ont été une source constante d'inspiration. Son implication et ses suggestions constructives ont contribué de manière significative à l'élaboration de ce travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers le Professeur Frédéric Collin et le Professeur Panagiotis Kotronis pour leur encadrement exceptionnel tout au long de ce processus. Vos conseils ont été inestimables, et je suis reconnaissant d'avoir pu bénéficier de votre expertise.

Un remerciement spécial s'adresse également au Dr. Siddhartha Harsha OMMI pour son partage de connaissances et les discussions passionnantes sur le sujet de la thèse.

Je remercie également l'ensemble du jury pour l'opportunité qu'il m'a offerte de présenter ce travail de recherche. Votre évaluation approfondie et votre participation ont contribué à faire de cette soutenance un moment significatif dans mon parcours académique.

Enfin, je n'oublie pas le soutien indéfectible de ma famille et de mes amis, Nazih, Imane, Ilhame, Anas, Reda, Abdelhamid qui ont été une source constante de motivation et d'encouragement tout au long de ce voyage.



# TABLE DES MATIÈRES

<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>ix</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xi</b>
<b>Résumé</b>	<b>xiii</b>
<b>Abstract</b>	<b>xv</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
0.1 Instabilités dans les écoulements biphasiques dans les milieux poreux . . . .	3
0.1.1 Rôle de la gravité dans la stabilisation et la déstabilisation de l'écoulement . . . . .	5
0.1.2 Infiltration de l'eau par gravité dans les milieux poreux non saturés	7
<b>1 Chapitre 1 : Approche standard pour les milieux poreux partiellement saturés</b>	<b>13</b>
1.1 Description et cinématique d'un milieu poreux non saturé . . . . .	14
1.1.1 Description d'un milieu poreux non saturé . . . . .	14
1.1.2 Cinématique d'un milieu poreux . . . . .	15
1.2 Lois de conservation . . . . .	17
1.2.1 Conservation de la masse . . . . .	18
1.2.2 Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	19
1.3 Hypothèse de petites perturbations . . . . .	20
1.4 Lois de comportement . . . . .	21
1.4.1 Pression capillaire . . . . .	22
1.4.2 La pression de pore équivalente . . . . .	23
1.4.3 Contrainte effective . . . . .	24
1.4.4 Loi de Darcy . . . . .	25
1.5 Résumé du modèle . . . . .	25
1.6 Écoulement eau-air dans un milieu poreux . . . . .	26
1.7 Critique et extensions de l'équation de Richards . . . . .	27
<b>2 Chapitre 2 : Approche champs de phase pour les milieux poreux partiellement saturés</b>	<b>29</b>
2.1 Description du fluide non uniforme . . . . .	31

---

2.2	Lois de conservation . . . . .	31
2.2.1	Conservation de la masse . . . . .	32
2.2.2	Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	32
2.3	Thermodynamique . . . . .	32
2.3.1	Énergie du fluide non-uniforme . . . . .	33
2.3.2	Premier et second principe de la thermodynamique . . . . .	35
2.3.3	Inégalité de Clausius-Duhem . . . . .	36
2.3.4	Équations d'état du squelette . . . . .	37
2.3.5	Comportement poroélastique . . . . .	38
2.3.6	Loi de Darcy généralisée . . . . .	40
2.4	Cas particulier d'un milieu poreux rigide . . . . .	40
2.5	Comportement élastoplastique des milieux poreux partiellement saturés . . . . .	44
2.5.1	Lois de comportement élastoplastiques . . . . .	46
2.5.2	Le modèle non standard de CAM-CLAY . . . . .	47
2.6	Conclusion . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Chapitre 3 : modélisation éléments finis</b>	<b>53</b>
3.1	Équations du problème . . . . .	55
3.2	Formulation variationnelle . . . . .	56
3.2.1	Formulation variationnelle de l'équation d'équilibre mécanique . . . . .	57
3.2.2	Formulation variationnelle de l'équation de conservation de la masse . . . . .	57
3.2.3	Formulation variationnelle de l'équation du potentiel chimique . . . . .	58
3.2.4	Synthèse de la formulation variationnelle . . . . .	58
3.3	Formulation éléments finis . . . . .	59
3.3.1	Discrétisation spatiale . . . . .	59
3.3.2	Système matriciel à résoudre . . . . .	62
3.3.3	Discrétisation temporelle . . . . .	62
3.3.4	La résolution numérique du problème . . . . .	64
3.4	Intégration numérique de la loi de comportement . . . . .	65
3.4.1	Prédiction élastique . . . . .	66
3.4.2	Correction plastique . . . . .	67
3.4.3	Matrice tangente . . . . .	69
3.5	Implémentation numérique . . . . .	69
3.6	conclusion . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Chapitre 4 : Simulation numérique</b>	<b>73</b>
4.1	Milieu rigide . . . . .	73
4.1.1	Synthèse du modèle . . . . .	74

---

4.1.2	Simulation 1d . . . . .	75
4.1.3	Simulation 2d . . . . .	78
4.2	Milieu déformable . . . . .	81
4.2.1	Imbibition d'un sol limoneux fortement surconsolidé . . . . .	83
4.2.2	Imbibition d'un sol limoneux légèrement surconsolidé . . . . .	90
4.3	Conclusion . . . . .	93
	<b>Conclusion</b>	<b>97</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>110</b>
	<b>Table des annexes</b>	<b>111</b>
A	. . . . .	113
A.1	Dérivées des matrices de forme . . . . .	113
A.2	Algorithme de Newton-Raphson local . . . . .	113
A.3	Raideur algorithmique . . . . .	114





# TABLE DES FIGURES

1	Développement et conséquences de l'écoulement par digitation dans la zone vadose (Foster et al. 2002). . . . .	2
2	Schématique de la formation de doigts de saumure concentrée en CO <sub>2</sub> (Peter et al. 2022). . . . .	3
3	Diagramme de phase dans le cas du drainage (Lenormand 1990). . . . .	4
4	Diagramme de phase dans le cas de l'imbibition (Lenormand 1990). . . . .	5
5	Digitation visqueuse dans une cellule Hele-Shaw verticale où l'air déplace du glycérol du haut vers le bas (Saffman & Taylor 1958). . . . .	8
6	Illustration du profil non monotonique de la teneur en eau le long du doigt (DiCarlo 2004). . . . .	9
7	Infiltration par digitation dans un profil composé de couches de sable fin et grossier. La couche de sable fin supérieure infiltre l'eau à une vitesse inférieure à la perméabilité saturée de la couche de sable grossier (Glass et al. 1989). . . . .	10
8	Profils de la teneur en eau le long du domaine pour différents flux d'infiltration, $q(cm/min)$ appliqués à une colonne de sable initialement sec. La teneur en eau le long du domaine a été mesurée à l'aide de la technique de transmission de la lumière (DiCarlo 2004). . . . .	11
1.1	Évolution de la pression capillaire $p_c$ en fonction de la saturation $S_w$ selon le modèle de van Genuchten, avec $S_w^{res} = 0.15$ , $\alpha = 3.52m^{-1}$ et $m = 0.68$ . . . . .	23
2.1	L'énergie à double puits, $\Psi_f$ . . . . .	34
2.2	le potentiel chimique du fluide non uniforme, $\mu$ . . . . .	35
2.3	Énergie du fluide interstitiel, $\Psi_{pf}$ somme de l'énergie capillaire, $U$ et de l'énergie à double puits, $\Psi_f$ . . . . .	42
2.4	Représentation graphique de la ligne bitangente à l'énergie du fluide interstitiel, $\Psi_{pf}$ . . . . .	43
2.5	Représentation graphique de la règle d'aires égales de Maxwell. . . . .	44
2.6	Surface de charge de Cam-Clay. . . . .	49
4.1	Représentation schématique de la colonne de limon considérée avec une saturation initiale $S_+$ . . . . .	75
4.2	Le profil de saturation dans le cas de la simulation du problème d'infiltration de l'eau dans une colonne de limon à différents instants. Le degré de saturation $S_- = 0.8$ et la valeur du degré de saturation initiale est $S_+ = 0.446$ . . . . .	77

---

4.4	Les profils du potentiel chimique effectif, $\mu^{eff}$ dans le cas de la simulation du problème d'infiltration de l'eau dans une colonne de limon à différentes valeurs du flux. Le degré de saturation $S_-$ est tel que le flux d'infiltration est $\ q_w\  := \rho_w \ g\  \frac{\alpha}{\eta} k(S_-)$ . La valeur du degré de saturation initiale est $S_+ = 0.446$ . . . . .	77
4.3	Les profils de saturation dans le cas de la simulation du problème d'infiltration de l'eau dans une colonne de limon à différentes valeurs du flux. Le degré de saturation $S_-$ est tel que le flux d'infiltration est $\ q_w\  := \rho_w \ g\  \frac{\alpha}{\eta} k(S_-)$ . La valeur du degré de saturation initiale est $S_+ = 0.446$ . . . . .	78
4.5	Le potentiel chimique interstitiel $\mu_{pf}$ . Les deux valeurs ( $S_c^1, S_c^2$ ) où une ligne droite devient bitangente à l'énergie du fluide interstitiel sont déterminés par la règle d'aires égales de Maxwell. . . . .	79
4.6	Évolution du degré de saturation dans le cas de la simulation du problème d'infiltration de l'eau dans un domaine bidimensionnel à différents instants, avec $t_c = 2.96E05s$ . Le degré de saturation $S_- = 0.8$ et la valeur du degré de saturation initiale est $S_+ = 0.446$ . . . . .	80
4.7	Le profil de saturation le long de la section centrale du doigt, $S_r(x_1 = 3.75, x_2)$ dans le cas de la simulation du problème d'infiltration de l'eau dans un domaine bidimensionnel à différents instants. Le degré de saturation $S_- = 0.8$ et la valeur du degré de saturation initiale est $S_+ = 0.446$ . . . . .	81
4.8	Représentation schématique du domaine rectangulaire précontraint considéré avec une saturation initiale $S_+$ . . . . .	82
4.9	Visualisation du degré de saturation $S_r$ , de la déformation plastique volumétrique $\varepsilon_v^p$ et de la déformation plastique déviatorique $\varepsilon_d^p$ d'un sol limoneux fortement surconsolidé soumis au processus d'imbibition à $t = 0$ . . . . .	84
4.10	Visualisation du degré de saturation $S_r$ , de la déformation plastique volumétrique $\varepsilon_v^p$ et de la déformation plastique déviatorique $\varepsilon_d^p$ d'un sol limoneux fortement surconsolidé soumis au processus d'imbibition à $t = 40\Delta t$ . . . . .	85
4.11	Visualisation du degré de saturation $S_r$ , de la déformation plastique volumétrique $\varepsilon_v^p$ et de la déformation plastique déviatorique $\varepsilon_d^p$ d'un sol limoneux fortement surconsolidé soumis au processus d'imbibition à $t = 60\Delta t$ . . . . .	86
4.12	Chemin de contrainte induit par l'imbibition au point $P \equiv (3, 75, 5)m$ d'un échantillon rectangulaire de sol limoneux fortement surconsolidé. L'échelle de gris correspond à la variation du degré de saturation. La courbe continue correspond à la surface de charge initiale. . . . .	88
4.13	Évolution dans le temps de : $S_r, \pi, \mu^{eff}, \varepsilon_d, \varepsilon_d^p, q, \varepsilon_v, \varepsilon_v^p, p', p$ et $\sigma_{11}, \sigma_{22}$ et $\sigma_{33}$ au point $P \equiv (3.75, 5)m$ dans un sol limoneux fortement surconsolidé. . . . .	89

---

4.14	Visualisation du degré de saturation $S_r$ , de la déformation plastique volumétrique $\varepsilon_v^p$ et de la déformation plastique déviatorique $\varepsilon_d^p$ d'un sol limoneux légèrement surconsolidé soumis au processus d'imbibition à $t = 0$ . . . . .	90
4.15	Visualisation du degré de saturation $S_r$ , de la déformation plastique volumétrique $\varepsilon_v^p$ et de la déformation plastique déviatorique $\varepsilon_d^p$ d'un sol limoneux légèrement surconsolidé soumis au processus d'imbibition à $t = 40\Delta t$ . . . . .	91
4.16	Visualisation du degré de saturation $S_r$ , de la déformation plastique volumétrique $\varepsilon_v^p$ et de la déformation plastique déviatorique $\varepsilon_d^p$ d'un sol limoneux légèrement surconsolidé soumis au processus d'imbibition à $t = 60\Delta t$ . . . . .	92
4.17	Chemin de contrainte induit par l'imbibition au point $P \equiv (3, 75, 5)$ m d'un échantillon rectangulaire de sol limoneux légèrement surconsolidé. L'échelle de gris correspond à la variation du degré de saturation. . . . .	93
4.18	Évolution dans le temps de : $S_r$ , $\pi$ , $\mu^{eff}$ , $\varepsilon_d$ , $\varepsilon_d^p$ , $q$ , $\varepsilon_v$ , $\varepsilon_v^p$ , $p'$ , $p$ et $\sigma_{11}$ , $\sigma_{22}$ et $\sigma_{33}$ au point $P \equiv (3.75, 5)$ m dans un sol limoneux légèrement surconsolidé. . . . .	95
4.19	Chemin de contrainte induit par l'imbibition au point $R \equiv (2, 5)$ m d'un échantillon rectangulaire de sol limoneux légèrement surconsolidé. L'échelle de gris correspond à la variation du degré de saturation. La courbe continue correspond à la surface de charge initiale. . . . .	96



# LISTE DES TABLEAUX

1	Critères de stabilité de Saffman et Taylor lorsqu'un fluide (d'indice $i$ ) déplace un autre fluide (d'indice $d$ ). . . . .	7
4.1	Données du modèle hydraulique. . . . .	76
4.2	Données de la loi de comportement mécanique, des conditions aux limites et initiales. . . . .	83



# RÉSUMÉ

L'écoulement sous forme de digitation (*fingering* en anglais) est une instabilité hydraulique qui se produit dans les milieux poreux partiellement saturés en raison du déplacement du fluide en place dans les pores par un autre fluide caractérisé par une densité et une viscosité différente. Dans le cas du déclenchement de cette instabilité l'interface séparant les deux fluides devient instable et forme des doigts (*fingers*). Les modèles classiques décrivant l'écoulement dans les milieux poreux partiellement saturés ne permettent pas de modéliser ce phénomène étant basés sur une loi de comportement donnée par la courbe de rétention, qui relie directement la pression capillaire au degré de saturation. Afin de tenir compte de la digitation un modèle à gradient qui repose sur une approche de champs de phase pour les milieux poreux partiellement saturés déformables est adopté dans le cadre de ce travail. La mise en place numérique de ce modèle poromécanique enrichi par la méthode des éléments finis permet, d'une part, de simuler le développement de la digitation et, d'autre part, de capturer son effet sur la déformation irréversible, et éventuellement localisée, du squelette solide. L'application envisagée concerne le comportement des sols à grains fins dont le comportement dilatant/contractant suscite de plus en plus l'intérêt de la communauté scientifique tant dans le domaine de la recherche expérimentale que dans celui de la modélisation numérique.





# ABSTRACT

Fingering flow is a hydraulic instability that occurs in partially saturated porous media due to the displacement of the fluid in place in the pores by another fluid characterized by a different density and viscosity. When this instability is triggered, the interface separating the two fluids becomes unstable, forming fingers. Traditional models describing flow in partially saturated porous media are unable to model this phenomenon, as they are based on a constitutive law given by the retention curve, which directly relates capillary pressure to the degree of saturation. In order to account for fingering, a gradient model based on a phase field approach for deformable partially saturated porous media is adopted in this work. The numerical implementation of this new poromechanical model, using the finite element method, allows characterizing on the one hand the occurrence of fingering hydraulic instabilities and on the other one to capture their effects on the irreversible, and possible unstable, deformation of the solid skeleton. The envisaged application concerns the behavior of fine-grained soils whose dilatant/contractant behavior is more and more attracting the interest of the scientific community both in the fields of experimental research and numerical modeling.



# INTRODUCTION

Le transport de l'eau et des contaminants solubles dans la zone vadose est extrêmement important dans un large éventail d'applications naturelles et industrielles, notamment la protection des nappes aquifères, l'irrigation, le contrôle des inondations et la biorémediation, pour n'en citer que quelques-unes. Un grand nombre de ces applications présentent un écoulement préférentiel dans lequel les forces de gravité, visqueuses ou autres, provoquent des instabilités de digitation qui se propagent sous forme de doigts "fingering".

Dans un écoulement par digitations, l'eau est capable de contourner une grande partie de la matrice poreuse, permettant ainsi une pénétration rapide dans le sol, contrairement à un écoulement stable, où l'eau se déplace de manière plus uniforme à travers le sol (Chapwanya & Stockie 2010). Cette caractéristique peut avoir des conséquences significatives sur le comportement du sol en tant que filtre naturel.

Traditionnellement, le sol a été considéré comme un filtre efficace, capable de retenir et de dégrader les produits chimiques appliqués à sa surface. Ce rôle de filtre protège la biosphère et les nappes d'eau douce souterraines en empêchant la migration des polluants vers les eaux souterraines (Gee et al. 1991). Cependant, dans le cas de l'écoulement par digitation, l'eau et les polluants sont rapidement dirigés vers la zone saturée du sol, comme illustré dans la figure 1. Cette migration rapide des polluants vers la zone saturée réduit le contact des polluants avec la matière organique du sol. Par conséquent, les processus naturels de décomposition et d'adsorption des contaminants sont fortement réduits. Ainsi, plusieurs études ont mis en évidence des concentrations élevées de pesticides dans les eaux souterraines peu de temps après les premières précipitations (Stagnitti et al. 1995). De même, le transport de certains métaux, tels que le cuivre et le plomb, peut également être rapide dans des conditions d'écoulement par digitation (Kim et al. 2008). Ces observations soulignent l'importance de ce phénomène dans le transport des contaminants dans les sols et les eaux souterraines.

Parmi plusieurs autres implications environnementales, l'écoulement par digitation peut également affecter les conditions écologiques des sites à travers la quantité d'eau accessible aux plantes. En effet, l'eau peut rapidement contourner une partie du sol, réduisant ainsi la disponibilité d'eau pour les plantes qui ne sont pas situées le long des voies préférentielles (Schneider et al. 2018). Ce phénomène peut entraîner des inégalités dans la distribution de l'eau dans le sol, créant des zones sèches où les plantes peuvent souffrir de stress hydrique (Blum & Blum 2011). Lorsque l'eau est acheminée de manière préférentielle vers les zones plus profondes du sol, la zone racinaire des plantes peut ne pas recevoir une quan-

tivité suffisante d'eau, ce qui peut empêcher leur croissance et leur développement. Cela peut également affecter l'absorption des nutriments essentiels par les plantes, car l'eau joue un rôle crucial dans le transport des nutriments dissous du sol vers les racines (Makowski et al. 2020).

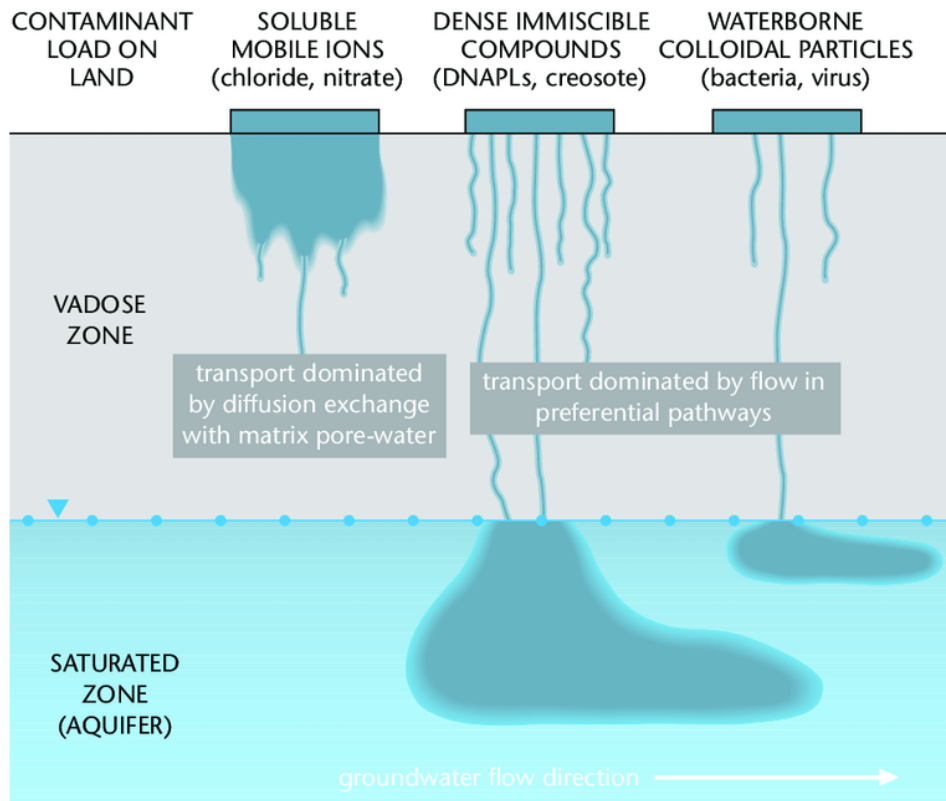


FIGURE 1 – Développement et conséquences de l'écoulement par digitation dans la zone vadose (Foster et al. 2002).

Dans un autre contexte environnemental, la séquestration du CO<sub>2</sub> dans des formations géologiques souterraines contenant des aquifères salins pourrait offrir un stockage permanent pour une importante quantité de gaz à effet de serre, contribuant ainsi à atténuer le changement climatique mondial. Les aquifères salins ont une capacité de stockage estimée à l'échelle mondiale de 320 à 10 000 Gt de CO<sub>2</sub> (Bachu & Adams 2003). Dans un scénario typique, le CO<sub>2</sub> est injecté dans un aquifère salin relativement profond au-dessus du point critique où il existe sous forme de fluide supercritique. Lorsque le CO<sub>2</sub> supercritique est injecté dans l'aquifère, il devient plus léger en raison de sa densité inférieure à celle de la saumure et commence à remonter. Il peut finalement être piégé par une zone de faible perméabilité ou une roche couverture et se propager latéralement tout en se dissolvant progressivement dans la saumure environnante. Cependant, lorsque le CO<sub>2</sub> se dissout dans la saumure, celle-ci devient plus lourde et commence à s'enfoncer, entraînant une convection

induite par la densité qui peut conduire à des instabilités et à la formation de doigts de saumure concentrée en CO<sub>2</sub>, s'étendant vers le bas (figure 2). Ce mélange convectif peut entraîner une dissipation beaucoup plus rapide du panache de CO<sub>2</sub> supercritique par rapport aux processus de diffusion seuls. Un élément clé de ce scénario est l'étendue de la zone affectée par le panache, car cela peut entraîner une libération accidentelle de CO<sub>2</sub> à la surface par des puits abandonnés et des failles. Il est donc important de comprendre et de prévoir l'apparition des doigts pendant la séquestration du CO<sub>2</sub> pour optimiser l'efficacité du stockage et minimiser les risques pour l'environnement.

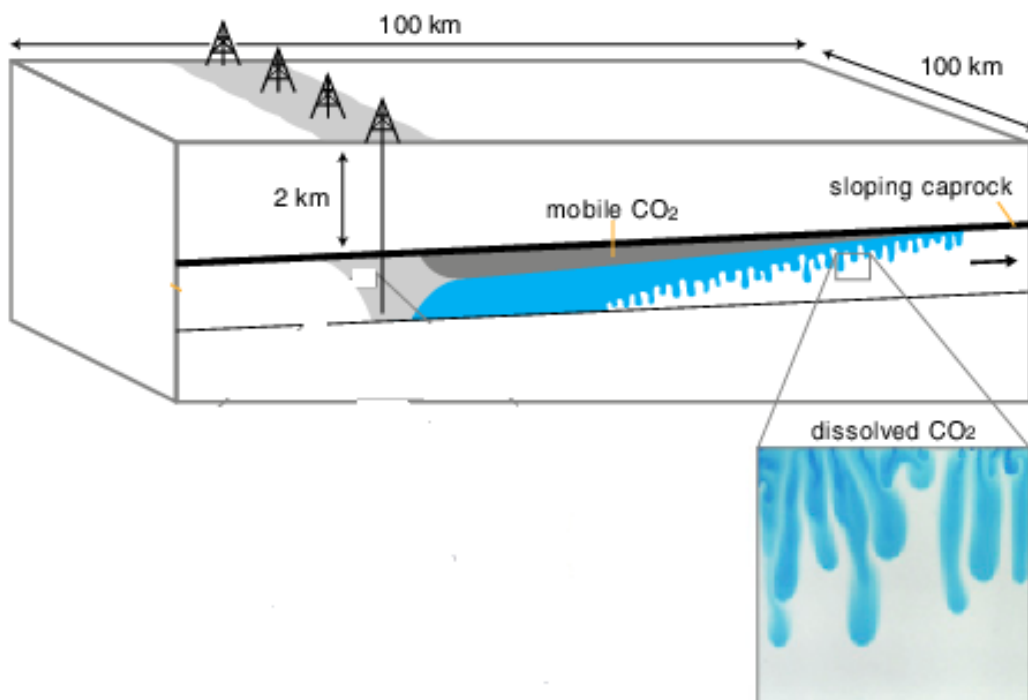


FIGURE 2 – Schématisation de la formation de doigts de saumure concentrée en CO<sub>2</sub> (Peter et al. 2022).

## 0.1 Instabilités dans les écoulements biphasiques dans les milieux poreux

La pénétration d'un fluide dans un milieu poreux pour déplacer un autre fluide non miscible a fait l'objet d'un très grand nombre d'études expérimentales, théoriques et numériques (Saffman & Taylor 1958, Paterson 1981, Måløy et al. 1985, Lenormand et al. 1988, Babchin et al. 2008, Armstrong & Berg 2013, Bischofberger et al. 2014, Singh et al. 2017). Selon les travaux pionniers de Lenormand et al. (1988) la dynamique d'un tel déplacement,

en l'absence de force de gravité, est régie par la concurrence des forces visqueuses et capillaires. L'effet de ces forces sur le processus de déplacement peut être caractérisé par deux nombres non dimensionnels importants : le rapport entre les forces visqueuses et capillaires, ou le nombre capillaire ( $Ca$ ), et le rapport entre la viscosité du fluide défendant ( $d$ ) et celle du fluide envahissant ( $i$ ), ou rapport de viscosité ( $M$ ).

$$Ca = \frac{V_i \mu_i}{\gamma} \quad ; \quad M = \frac{\mu_i}{\mu_d} \quad (1)$$

où  $\gamma$  est la tension de surface entre les deux fluides,  $\mu$  et  $V$  sont respectivement la viscosité dynamique et la vitesse de Darcy des fluides. Les indices  $i$  et  $d$  représentent respectivement les fluides envahissant et défendant. En fonction de ces deux nombres, les forces capillaires ou visqueuses dominent, ce qui conduit à trois régimes de déplacement de base : (1) digitation visqueuse, (2) digitation capillaire, ou (3) déplacement stable (Lenormand et al. 1988, Zhang et al. 2011, Chen et al. 2017, 2018). Ces régimes d'écoulement ont été étudiés et distingués à l'aide d'expériences et de simulations numériques à l'échelle du pore (Wang et al. 2013). Lenormand (1985) a proposé un diagramme de phase basé sur  $Ca$  et  $M$  pour décrire le comportement de déplacement de deux phases non miscibles dans les milieux poreux. Deux cas différents de déplacement ont été analysés : 1. le drainage, c'est-à-dire l'injection d'un fluide non mouillant pour déplacer un fluide mouillant qui remplissait précédemment le système. 2. l'imbibition, c'est-à-dire l'injection d'un fluide mouillant pour déplacer un fluide non mouillant qui remplissait déjà le système.

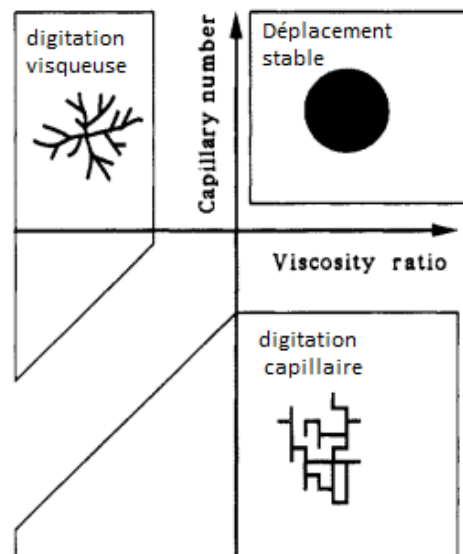


FIGURE 3 – Diagramme de phase dans le cas du drainage (Lenormand 1990).

Dans le cas du drainage (figure 3), le régime de déplacement stable peut être observé lorsque  $Ca$  et  $M$  sont simultanément élevés, les forces visqueuses au sein du fluide envahis-

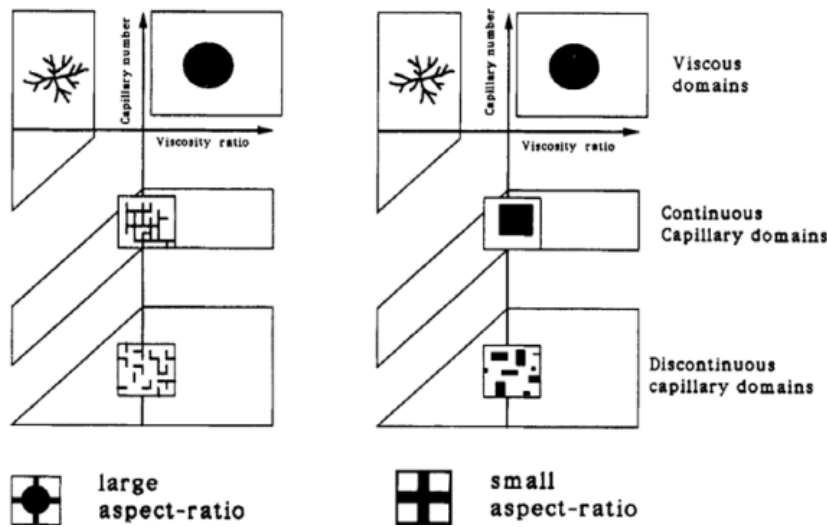


FIGURE 4 – Diagramme de phase dans le cas de l’imbibition (Lenormand 1990).

sant dominant alors à la fois les forces visqueuses au sein du fluide défendant et les forces capillaires. Lorsque  $Ca$  est élevé pour  $M < 1$ , les doigts en forme d’arbre du fluide envahissant, connus sous le nom de digitation visqueuse, conduisent à un déplacement instable. Dans ce régime, les forces capillaires sont négligeables par rapport aux forces visqueuses. La digitation capillaire est obtenue pour les faibles nombres capillaires, lorsque les forces visqueuses sont négligeables dans les deux fluides et que la principale force est due à la capillarité ( $Ca \ll 1$ ). Les doigts peuvent aller dans toutes les directions, y compris vers l’arrière et peuvent également former des boucles.

Dans le cas de l’imbibition, Lenormand (1990) a proposé deux diagrammes de phase (figure 4) selon la géométrie des pores. Les diagrammes sont divisés en trois domaines correspondant à trois plages différentes du nombre capillaire  $Ca$ . Un domaine à nombre capillaire élevé, c’est-à-dire où l’écoulement est dominé par la force visqueuse où on peut distinguer les mêmes régimes stables et instables que dans le cas du drainage, un domaine capillaire continu avec des nombres capillaires modérés et finalement un domaine capillaire discontinu avec des nombres capillaires très faibles.

### 0.1.1 Rôle de la gravité dans la stabilisation et la déstabilisation de l’écoulement

Les régimes d’écoulement observés précédemment dans le travail de Lenormand ont été obtenus en absence de la gravité. Cependant, la plupart des milieux poreux sont sensibles aux effets de la gravité. Si les deux fluides impliqués ont des densités différentes, les forces de gravité modifient considérablement la structure du déplacement (Wilkinson 1984, Birovljev



et al. 1991, 1995, Wagner et al. 1997). La gravité stabilise ou déstabilise l'écoulement en fonction des propriétés du fluide, de la direction d'écoulement et de la compétition entre les forces capillaires et visqueuses (Wilkinson 1986, Suekane et al. 2015).

Dans le régime de digitation capillaire, la stabilisation de l'interface fluide par la gravité a été étudiée à la fois théoriquement et expérimentalement dans des milieux bidimensionnels et tridimensionnels (Wilkinson 1984, Clement et al. 1987). Dans le cas par exemple où le fluide envahissant est moins dense que le fluide défendant, la gravité stabilise le déplacement (Frette et al. 1992, Meakin et al. 1992). Toutes ces études sur les effets de la gravité se concentrent sur des situations dans lesquelles la vitesse d'écoulement est si faible que les forces capillaires sont importantes par rapport aux forces visqueuses à l'échelle des pores. Pour de tels systèmes, les schémas d'écoulement obtenus sont expliqués en termes de compétition entre les forces de gravité et les forces capillaires (Birovljev et al. 1991).

Pour des vitesses d'écoulement élevées, la compétition entre les forces de gravité et les forces visqueuses a été étudiée pour des écoulements immiscibles dans une cellule de Hele-Shaw (HELE-SHAW 1898), un dispositif constitué d'une paire de plaques parallèles séparées par un petit espace, utilisé comme modèle bidimensionnel d'un milieu poreux. Le rôle des forces visqueuses et gravitationnelles dans la détermination de la stabilité d'une interface séparant deux fluides immiscibles dans une cellule de Hele-Shaw en l'absence de forces capillaires a été développée par Saffman & Taylor (1958) et Chouke et al. (1959) au moyen d'une analyse de stabilité linéaire. L'analyse de stabilité linéaire de (Saffman & Taylor 1958) supposait un déplacement vers le bas, à vitesse constante, d'un fluide (d'indice  $d$ ) par un autre fluide (d'indice  $i$ ) dans une cellule de Hele-Shaw homogène et isotrope orientée verticalement. Leurs résultats suggèrent que la stabilité du système est fonction de la différence de viscosité entre les deux fluides ( $\mu_i - \mu_d$ ), de la différence de densité entre les deux fluides ( $\rho_i - \rho_d$ ), de la vitesse de l'interface  $U$  et de la perméabilité intrinsèque du milieu  $k$ , conformément à l'expression suivante :

$$(\rho_i - \rho_d)gk - (\mu_i - \mu_d)U < 0 \quad (2)$$

Lorsque l'inégalité (2) est satisfaite, la stabilité du déplacement est prévue, dans le cas contraire, toute perturbation de l'interface entre les deux fluides s'amplifie et domine le processus de déplacement. Le tableau 1 illustre les différents types de comportement qui existent selon les différences de densité et de viscosité entre le fluide déplaçant et le fluide déplacé.

On remarque que le déplacement vers le bas d'un fluide par un autre fluide moins visqueux dans une cellule de Hele-Shaw est instable dès que le fluide déplaçant est plus dense que le fluide déplacé. Le rôle de la gravité est ici évident : elle tend à faire passer le fluide

TABLE 1 – Critères de stabilité de Saffman et Taylor lorsqu’un fluide (d’indice  $i$ ) déplace un autre fluide (d’indice  $d$ ).

	$\rho_i > \rho_d$	$\rho_i < \rho_d$
$\mu_i > \mu_d$	Instable pour $U < (\rho_i - \rho_d)gk/(\mu_i - \mu_d)$	Inconditionnellement stable
$\mu_i < \mu_d$	Inconditionnellement instable	Instable pour $U > (\rho_d - \rho_i)gk/(\mu_d - \mu_i)$

le plus dense sous le fluide le moins dense, et donc à déstabiliser l’interface. Si le fluide déplacé est le moins dense, l’interface est instable dès que la vitesse de déplacement  $U$  dépasse une valeur critique. Les forces visqueuses jouent donc un rôle déstabilisant. Elles dominent l’effet gravitationnel stabilisant dès que la vitesse de Darcy est suffisamment élevée. Si, en revanche, on avait considéré un fluide déplaçant plus visqueux que le fluide déplacé, les forces visqueuses auraient eu un effet stabilisant sur l’interface.

La digitation visqueuse se produit lorsqu’un fluide plus visqueux est déplacé par un fluide moins visqueux et que les forces gravitationnelles ne permettent pas de stabiliser complètement l’interface. De nombreuses études théoriques, expérimentales et numériques sur l’instabilité visqueuse dans les milieux poreux et les cellules de Hele-Shaw, ont été réalisées (Saffman & Taylor 1958, Homsy 1987, Dong et al. 2011). Saffman & Taylor (1958) ont non seulement développé une théorie pour les digitations visqueuses, mais ils ont également étudié le phénomène expérimentalement. La figure 5 montre les digitations visqueuses obtenues par Saffman et Taylor lorsqu’on déplace du glycérol par de l’air, dans une cellule verticale, de haut en bas. L’interface initiale entre l’air et le glycérol présente de petites perturbations au début de l’expérience, qui se transforment en digitations visqueuses en fonction du temps.

### 0.1.2 Infiltration de l’eau par gravité dans les milieux poreux non saturés

En raison des effets stabilisants ou déstabilisants des forces visqueuses et de la gravité, l’écoulement dans un milieu poreux donne lieu à une grande variété de comportements d’interface, en fonction des différences de viscosités et de densités. On se restreint ici à une situation dans laquelle un fluide déplaçant a une viscosité et une densité supérieures à celles du fluide déplacé. Cette configuration qui correspond à la première case du tableau 1 peut induire une digitation gravitaire (Nicholl et al. 1994, Glass & Nicholl 1996) (gravity fingering



FIGURE 5 – Digitation visqueuse dans une cellule Hele-Shaw verticale où l’air déplace du glycérol du haut vers le bas (Saffman & Taylor 1958).

en anglais) dès que la vitesse de déplacement  $U$  est inférieure à une valeur critique.

$$U < (\rho_i - \rho_d)gk/(\mu_i - \mu_d) \quad (3)$$

Dans le cas spécifique de l’infiltration d’eau par gravité dans un milieu poreux non saturé, où l’eau déplace l’air déjà présent dans les pores, l’équation (3) peut être simplifiée en négligeant la densité et la viscosité de l’air par rapport à celles de l’eau.

$$U < \rho_i g k / \mu_i \quad \text{ou} \quad q < K_{sat} \quad (4)$$

où  $q$  est le flux d’infiltration et  $K_{sat}$  est la perméabilité saturée du milieu poreux. Cette inégalité indique simplement qu’un front d’infiltration se déplaçant vers le bas dans un milieu poreux sera instable lorsque le flux ( $q$ ) est inférieur à la perméabilité saturée du milieu (Glass & Nicholl 1996).

### Observations expérimentales

L’infiltration d’eau par digitation dans les milieux poreux a suscité un intérêt croissant depuis les travaux de Hill & Parlange (1972). Dans leur expérience, la transition de l’eau infiltrée d’une couche de sol à texture fine vers une couche à texture grossière s’est traduite par des perturbations du front d’infiltration qui ont fini par se développer pour former des doigts au lieu d’avancer comme un front stable. La couche de sol supérieure plus fine a réduit le flux d’infiltration au point qu’il est devenu inférieur à la perméabilité saturée de la couche inférieure. À la suite des travaux de Hill et Parlange, la digitation par gravité dans les milieux poreux non saturés a été observée expérimentalement et simulée numériquement

dans de nombreuses études (Glass et al. 1989, Baker & Hillel 1990, Selker et al. 1992, Liu et al. 1994, Wang et al. 2004, DiCarlo 2004, 2007, Chapwanya & Stockie 2010) au cours des dernières décennies. Une synthèse exhaustive des théories, des modèles et des expériences, peut être trouvée dans DiCarlo (2013) et Xiong (2014).

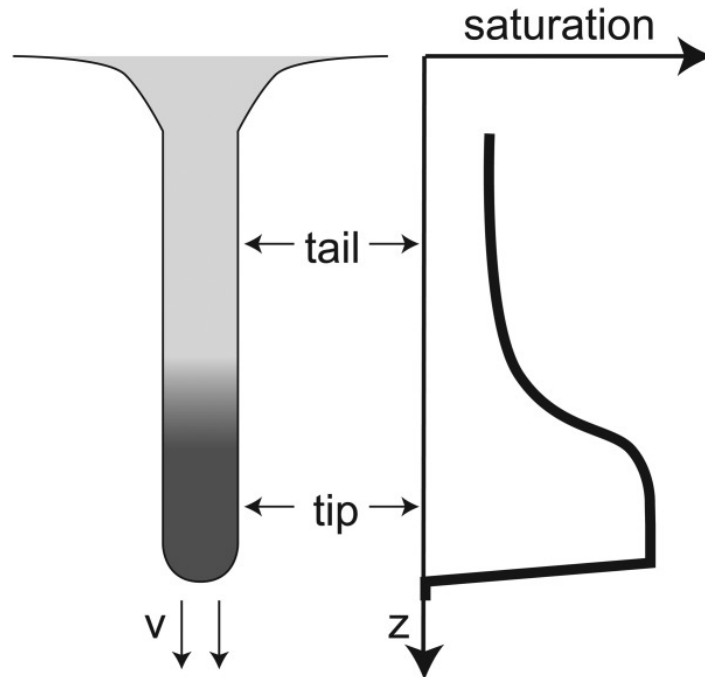


FIGURE 6 – Illustration du profil non monotone de la teneur en eau le long du doigt (DiCarlo 2004).

Les observations expérimentales dans ce contexte ont montré que les doigts entraînés par la gravité présentent un profil caractéristique de la teneur en eau tel qu'illustré par la figure 6. Ce profil consiste en une région située directement derrière le front et présentant une saturation en eau élevée, appelée pointe du doigt, suivie d'une autre région présentant une saturation en eau plus faible. Glass et al. (1989) ont réalisé des expériences d'infiltration dans un profil composé de couches de sable fin et grossier. Ce profil stratifié a été élaboré en utilisant du sable siliceux commercial de deux granulométries distinctes. Les chercheurs ont enregistré les profils de la teneur en eau au moyen d'une caméra vidéo et de techniques basées sur la transmission de la lumière. Au cours du processus d'infiltration, des profils non monotones de la teneur en eau ont été clairement observés, mettant en évidence que les pointes des doigts présentaient une teneur en eau plus élevée comme le montre la figure 7. Ce comportement non monotone de la teneur en eau, connu sous le nom de "overshoot", a été largement observé dans des expériences bidimensionnelles (Liu et al. 1994, Rezanezhad et al. 2006) ainsi que dans des expériences quasi unidimensionnelles (DiCarlo 2004, 2007, Aminzadeh & DiCarlo 2010). Dans ces dernières, les dimensions transversales du domaine

étaient significativement plus petites que la largeur attendue des doigts. DiCarlo (2004) a réalisé une série d'expériences unidimensionnelles d'infiltration d'eau dans du sable sec et homogène. Les expériences ont été réalisées avec des flux d'eau appliqués inférieurs à la perméabilité saturée. La figure 8 montre les profils de la teneur en eau obtenus à différents flux d'eau. Comme on le voit, les profils sont monotones aux flux le plus élevé et le plus faible, alors qu'il existe un "overshoot" pour tous les autres flux intermédiaires. Sur la base de ces observations, ce comportement non monotone de la teneur en eau est largement accepté comme la condition préalable nécessaire d'un écoulement par digitation (Geiger & Durnford 2000, Eliassi & Glass 2001, DiCarlo 2004, Juanes & Cueto-Felgueroso 2009).

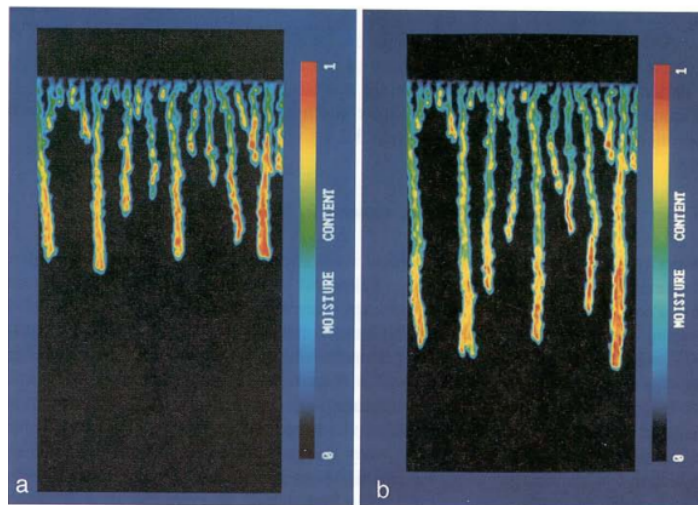


FIGURE 7 – Infiltration par digitation dans un profil composé de couches de sable fin et grossier. La couche de sable fin supérieure infiltre l'eau à une vitesse inférieure à la perméabilité saturée de la couche de sable grossier (Glass et al. 1989).

Dans ce travail de thèse, on s'intéresse surtout à la définition, à l'implémentation numérique et à l'exploitation d'un modèle poro-mécanique couplé capable de reproduire d'un côté les écoulements instables mentionnés ci-dessus et de l'autre côté d'identifier les effets que ces écoulements peuvent induire sur le comportement de la matrice poreuse d'un sol.

La thèse est organisée de la façon suivante. Dans le chapitre 1 les principaux éléments de la modélisation classique des milieux poreux partiellement saturés sont présentés. Dans le chapitre 2, un modèle à gradient qui repose sur une approche de champ de phase pour les milieux poreux partiellement saturés déformables est formulé afin de tenir compte de la digitation. Le chapitre 3 est consacré à la résolution numérique du modèle par la méthode des éléments finis. Finalement, le chapitre 4 présente les résultats de simulations numériques obtenues à l'aide de ce modèle.

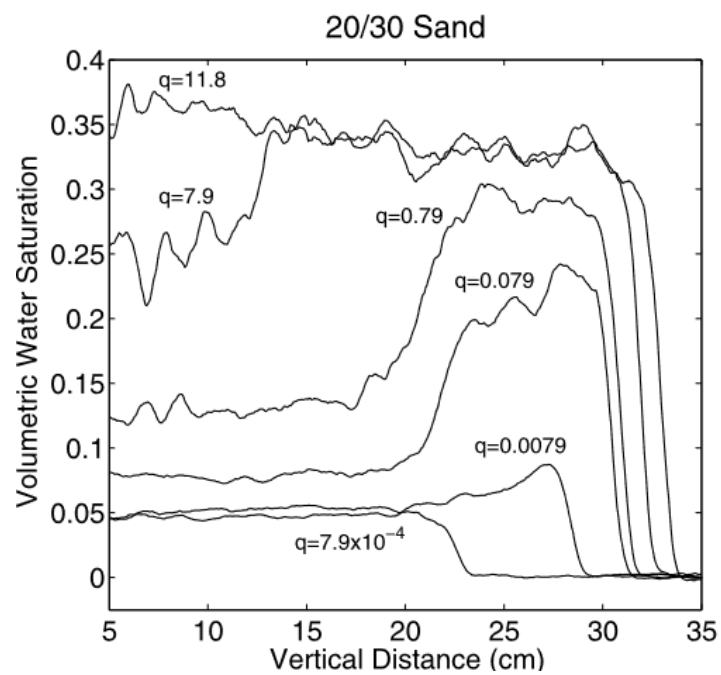


FIGURE 8 – Profils de la teneur en eau le long du domaine pour différents flux d’infiltration,  $q(cm/min)$  appliqués à une colonne de sable initialement sec. La teneur en eau le long du domaine a été mesurée à l’aide de la technique de transmission de la lumière (DiCarlo 2004).



# CHAPITRE 1 : APPROCHE STANDARD POUR LES MILIEUX POREUX PARTIELLEMENT SATURÉS

1.1	Description et cinématique d'un milieu poreux non saturé . . . . .	14
1.1.1	Description d'un milieu poreux non saturé . . . . .	14
1.1.2	Cinématique d'un milieu poreux . . . . .	15
1.2	Lois de conservation . . . . .	17
1.2.1	Conservation de la masse . . . . .	18
1.2.2	Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	19
1.3	Hypothèse de petites perturbations . . . . .	20
1.4	Lois de comportement . . . . .	21
1.4.1	Pression capillaire . . . . .	22
1.4.2	La pression de pore équivalente . . . . .	23
1.4.3	Contrainte effective . . . . .	24
1.4.4	Loi de Darcy . . . . .	25
1.5	Résumé du modèle . . . . .	25
1.6	Écoulement eau-air dans un milieu poreux . . . . .	26
1.7	Critique et extensions de l'équation de Richards . . . . .	27

Ce premier chapitre a comme objectif de fournir les éléments de base de la description macroscopique standard adoptée en mécanique des milieux poreux partiellement saturés. La littérature scientifique comprend de nombreuses études, plus ou moins générales, qui cherchent à modéliser le comportement des matériaux poreux (béton, sols, matériaux organiques, etc.). La présente description est basée sur la mécanique traditionnelle des milieux continus, étendue aux milieux poreux par quelques travaux remarquables, parmi lesquels ceux de O. Coussy sont particulièrement marquants. Une présentation complète et détaillée des principes généraux de la modélisation retenue peut être trouvée dans (Coussy 2004) et



(Coussy 2011).

La démarche menée par Coussy (2011), en continuité avec l'approche de Noll et al. (1974) consiste à associer une approche thermodynamique aux outils classiques de la mécanique des milieux continus afin de formuler une théorie capable de décrire les évolutions des milieux poreux à l'échelle macroscopique. En effet, d'un point de vue mécanique, ces derniers peuvent être considérés à l'échelle macroscopique comme la superposition de différents milieux continus en interaction : le squelette et les fluides interstitiels et d'un point de vue thermodynamique ils peuvent être considérés comme des systèmes thermodynamiques ouverts capables d'échanger de la masse fluide avec l'extérieur.

## 1.1 Description et cinématique d'un milieu poreux non saturé

### 1.1.1 Description d'un milieu poreux non saturé

Un milieu poreux est un milieu constitué, à l'échelle microscopique, d'une matrice solide et d'un espace interstitiel contenant un ou plusieurs fluides - liquides ou gazeux. Le terme espace interstitiel ou espace poreux fait référence exclusivement à la porosité connectée du matériau, espace effectivement destiné à l'écoulement des fluides interstitiels, à la différence de la porosité occluse, qui est non connexe et ne participe pas aux échanges de fluides avec l'extérieur. La matrice est l'ensemble formé par cette porosité occluse et la phase solide. Le terme non saturé fait référence, pour sa part, à la présence d'une phase mouillante ( $w$ ), auquel on s'intéresse plus particulièrement, et d'une phase non mouillante ( $nw$ ) dans l'espace poreux.

À l'échelle macroscopique, la matrice solide (qui inclut donc la porosité occluse) et l'espace poreux connecté forment un ensemble appelé squelette. Il est important de noter au préalable cette distinction d'échelles entre les notions de matrice solide et de squelette, la seconde regroupant la première et le volume géométrique des "vides". Ainsi, en particulier, la déformation macroscopique du squelette est la somme des déformations de la matrice et de l'espace poreux.

Ces premières définitions font la différence entre les deux échelles de description considérées successivement : l'échelle microscopique, pour laquelle les différents constituants du milieu sont disjoints et séparables d'un point de vue géométrique, chacun peut donc être considéré indépendamment des autres à ce niveau de description ; l'échelle macroscopique, pour laquelle le milieu poreux est vu comme une superposition de ses différents constituants (squelette et fluides interstitiels), assimilés à autant de milieux continus ci-

nématiquement indépendants, mais mécaniquement en interaction. Notre description est fondamentalement macroscopique. Le milieu est ainsi considéré dans sa globalité comme un milieu continu, superposition de différentes composantes continus.

Le milieu poreux peut être caractérisé par quelques paramètres de base qui sont nécessaires pour définir des aspects plus complexes. L'un des paramètres les plus importants est la porosité. La porosité Eulérienne ( $n$ ) d'un milieu poreux est la densité de volume des vides par rapport au volume élémentaire du milieu poreux à l'instant  $t$  et à la place  $x$  :

$$n = \frac{V_p}{V_t} \quad (1.1)$$

Contrairement à la porosité Eulérienne  $n$ , qui se réfère au volume élémentaire actuel  $dV_t$ , le changement dans l'espace poreux est mieux capturée par la porosité Lagrangienne  $\phi$ , qui se réfère au volume poreux actuel par rapport au volume élémentaire de référence  $dV_0$  selon :

$$\phi dV_0 = n dV_t \quad (1.2)$$

Typiquement le volume élémentaire de référence  $dV_0$  est fixé dans la configuration initiale du squelette.

Lorsque l'espace poreux d'un sol non saturé est rempli par deux fluides désignés par l'indice  $\alpha = \{w, nw\}$ , la porosité Eulérienne  $n$  et Lagrangienne  $\phi$  sont divisées en porosités partielles  $n_\alpha$  et  $\phi_\alpha$ , de sorte que le volume occupé par le fluide  $\alpha$  est  $\phi_\alpha dV_0 = n_\alpha dV_t$ . On écrit :

$$\phi = \phi_w + \phi_{nw} \quad ; \quad n = n_w + n_{nw} \quad (1.3)$$

Le degré de saturation  $S_\alpha$  relatif au fluide  $\alpha$ , qui représente la fraction de volume du pore occupée par la phase  $\alpha$ , est défini par :

$$S_\alpha = \frac{n_\alpha}{n} = \frac{\phi_\alpha}{\phi} \quad ; \quad S_w + S_{nw} = 1 \quad (1.4)$$

Il est judicieux d'introduire également les masses volumiques apparentes,  $\rho_\alpha n_\alpha = \rho_\alpha n S_\alpha$  relative au fluide  $\alpha$  et  $\rho_s(1 - n)$  relative au solide.  $\rho_\alpha$  et  $\rho_s$ , étant les masses volumiques intrinsèques du fluide  $\alpha$  et du solide. Les correspondants Lagrangiens des masses volumiques apparentes sont donnés par :

$$m_\alpha = \rho_\alpha \phi_\alpha = \rho_\alpha \phi S_\alpha \quad ; \quad m_s = \rho_s(1 - \phi) \quad (1.5)$$

### 1.1.2 Cinématique d'un milieu poreux

Compte tenu de la description que nous avons choisie, le milieu poreux non saturé peut être considéré comme la superposition des phases  $\pi = \{s, w, nw\}$ . Nous présentons dans

la suite quelques éléments classiques de la cinématique nécessaires à la mise en place des équations de conservation macroscopiques. À l'instant  $t$ , dans la configuration actuelle, les points matériels repérés par le vecteur position  $X^\pi$  occupent tous en même temps le point géométrique de coordonnées  $x$ .

D'un point de vue Lagrangien, chaque position est occupée à l'instant  $t$  par un point matériel qui dans la configuration de référence de la composante  $\pi$  on l'indique  $X^\pi$  de telle sorte que :

$$x = \chi^\pi(X^\pi, t) \quad (1.6)$$

On suppose que l'application  $\chi^\pi$  est continuellement différentiable par rapport aux variables spatiales et par rapport au temps. Compte tenu de la propriété d'inversibilité de (1.6), on a :

$$X^\pi = X^\pi(x, t) \quad (1.7)$$

Par dérivation spatiale dans la configuration de référence, on définit le gradient de la transformation  $F^\pi(X, t)$  à travers la relation :

$$F^\pi = \nabla_X(\chi^\pi) \quad (1.8)$$

ainsi que son jacobien :

$$J^\pi = \det(F^\pi) \quad (1.9)$$

où le  $\nabla_X$  indique le gradient dans la configuration de référence du squelette.

Par définition, le gradient  $F^\pi$  de la transformation permet de définir la différence  $dx$  des positions relatives actuelles de deux positions infiniment voisines dans la configuration actuelle en fonction de la valeur  $dX^\pi$  de cette même différence dans la configuration de référence :

$$dx = F^\pi \cdot dX^\pi \quad (1.10)$$

La relation de transport vectoriel (1.10) permet de définir, de même, les formules de transport de surfaces ou de volumes infinitésimaux du squelette. En particulier, tout élément de volume initial  $dV_0$  occupe dans la configuration actuelle un volume :

$$dV_t = J^s dV_0 \quad (1.11)$$

À compter de maintenant, afin de simplifier au maximum la notation, nous utiliserons  $X$  à la place de  $X^s$ . L'ensemble des relations précédentes permettent également de définir le tenseur des déformations de Green-Lagrange :

$$\Delta = \frac{1}{2} ({}^t F^s F^s - I) = \frac{1}{2} (\nabla_X u + {}^t \nabla_X u + {}^t \nabla_X u \cdot \nabla_X u) \quad (1.12)$$

relié de façon classique (comme en mécanique traditionnelle des milieux continus) au déplacement, lequel est défini en chaque instant et pour chaque particule du squelette, par la différence vectorielle entre position actuelle et position initiale :

$$u(X, t) = \chi(X, t) - X \quad (1.13)$$

Dans le cadre de la mécanique des milieux poreux, il est nécessaire de préciser à quelle composante on s'intéresse, car chaque composante est animée d'une cinématique différente. La dérivée particulaire est l'outil mathématique idéal pour calculer la variation d'une grandeur physique attachée à la composante que l'on suit. On définit donc une dérivée particulaire pour chaque composante. La dérivée particulaire qui suit la composante  $\pi$  est notée  $d^\pi/dt$ . En suivant la composante  $\pi$  dans son mouvement, la dérivée particulaire d'une grandeur différentiable  $\mathcal{G}^\pi(x, t)$  est donnée par :

$$\frac{d^\pi \mathcal{G}^\pi}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}^\pi}{\partial t} + \nabla_x \mathcal{G}^\pi \cdot v^\pi \quad (1.14)$$

où le  $\nabla_x$  indique le gradient dans la configuration actuelle et  $v^\pi$  la vitesse de la composante  $\pi$  donnée en description eulérienne et notée  $v^\pi(x, t)$ .

Dans le cadre de la théorie des milieux poreux, il est habituel de décrire l'écoulement des phases fluides en termes de vitesses relatives au squelette. Ainsi introduit-on la vitesse relative  $w^\alpha(x, t)$  de chaque particule de fluide  $\alpha$  par rapport à la particule de squelette coïncidant avec elle à l'instant  $t$  et repérée par sa position  $x$  dans l'état actuel. Cette vitesse relative se définit simplement par la différence entre les vitesses respectives  $v^\alpha(x, t)$  et  $v^s(x, t)$  :

$$w^\alpha(x, t) = v^\alpha(x, t) - v^s(x, t) \quad ; \quad \alpha = \{w, nw\} \quad (1.15)$$

Après avoir rappelé la définition d'un certain nombre d'outils mathématiques indispensables à la construction du modèle, nous abordons maintenant l'écriture des lois de conservation macroscopiques.

## 1.2 Lois de conservation

Nous nous intéressons ici à la formulation des équations de conservation macroscopiques, à savoir la conservation de la masse de chaque phase constituant le milieu poreux et de la quantité de mouvement.

### 1.2.1 Conservation de la masse

On considère une particule de squelette contenue dans le volume  $V_t$  à l'instant  $t$ . Lorsque aucun échange de masse ne se produit, la conservation de la masse s'écrit simplement :

$$\frac{d^s}{dt} \int_{V_t} \rho_s(1-n) dV = 0 \quad (1.16)$$

Les expressions de la dérivée particulaire permettent d'exprimer l'équation (1.16) sous la forme locale suivante :

$$\frac{\partial(\rho_s(1-n))}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho_s(1-n)v^s) = 0 \quad (1.17)$$

L'expression eulérienne de la conservation de la masse du fluide est obtenue de façon analogue à celle de la masse du squelette. Ainsi, la conservation de la masse de chaque fluide  $\alpha = \{w, nw\}$  peut s'écrire comme suit :

$$\frac{\partial(\rho_\alpha n S_\alpha)}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho_\alpha n S_\alpha v^\alpha) = 0 \quad (1.18)$$

On introduit un vecteur de flux relatif eulérien de la masse du fluide lié au fluide  $\alpha$ , noté  $\omega^\alpha$ , de la façon suivante :

$$\omega^\alpha = \rho_\alpha n S_\alpha w^\alpha \quad ; \quad w^\alpha = v^\alpha - v^s \quad (1.19)$$

Considérons à l'instant  $t$  une surface matérielle élémentaire orientée attachée au squelette et représentée par le vecteur  $dS_t$ , il résulte de (1.19) que la masse de fluide qui traverse cette surface élémentaire par unité de temps est égale à  $\omega^\alpha \cdot dS_t$ .

L'utilisation des définitions (1.19) et (1.14) avec  $\pi = s$  nous permet de représenter l'équilibre de masse des fluides par rapport au mouvement du squelette en réarrangeant l'équation (1.18) sous la forme :

$$\frac{d^s(\rho_\alpha n S_\alpha)}{dt} + (\rho_\alpha n S_\alpha) \nabla_x \cdot v^s + \nabla_x \cdot \omega^\alpha = 0 \quad (1.20)$$

L'approche lagrangienne du bilan massique des fluides peut être réalisée en introduisant un représentant lagrangien du vecteur de masse fluide  $\omega^\alpha$ , noté  $M^\alpha$  et défini par la formule de transport suivante :

$$M^\alpha = J^s F^{s-1} \omega^\alpha \quad (1.21)$$

Il en découle les relations suivantes :

$$M^\alpha \cdot dS_0 = \omega^\alpha \cdot dS_t \quad (1.22)$$

$$\nabla_X \cdot M^\alpha dV_0 = \nabla_x \cdot \omega^\alpha dV_t \quad (1.23)$$

Il est intéressant de souligner que  $M^\alpha$  constitue une représentation lagrangienne par rapport à la configuration du squelette, choisie comme référence, de la vitesse relative du fluide par rapport au squelette.

L'utilisation du représentant lagrangien  $M^\alpha$  de  $\omega^\alpha$  et la relation (1.5) dans (1.20) permet d'obtenir l'équation de conservation de la masse lagrangienne des fluides sous la forme :

$$\frac{d^s m_\alpha}{dt} + \nabla_X \cdot M^\alpha = 0 \quad ; \quad \alpha = \{w, nw\} \quad (1.24)$$

De manière analogue, l'approche lagrangienne à la conservation de masse du squelette peut s'écrire sous la forme :

$$\rho_s(1-n)dV_t = \rho_s^0(1-\phi_0)dV_0 \quad (1.25)$$

où  $\rho_s^0$  et  $\phi_0$  sont respectivement la densité initiale du squelette et la porosité initiale.

## 1.2.2 Conservation de la quantité de mouvement

Nous nous intéressons ici au système matériel constitué par le squelette et les particules fluides contenues à l'instant  $t$  dans un domaine  $V_t$ . Les forces extérieures auxquelles il est soumis sont des forces de volume et des forces de surface. Dans la plupart des applications, les forces externes de volume, telles que celles dues à la gravité, sont les mêmes pour le squelette et pour les fluides, et elles sont représentées par une densité de force  $f(x, t)$  par unité de masse. Les force de surface sont représentées par une densité de force surfacique  $T$  exercée sur la frontière  $\partial V_t$  de  $V_t$ . La densité  $T$  représente les forces surfaciques exercées sur l'ensemble du matériau, c'est-à-dire l'ensemble des forces exercées sur le squelette et sur les fluides à travers une surface donnée. On suppose également que  $T$  ne dépend que du point considéré, du temps, et de la normale extérieure unitaire à la frontière.

Dans un référentiel galiléen, la conservation de la quantité de mouvement du milieu poreux se traduit par l'égalité :

$$\frac{d^s}{dt} \int_{V_t} \rho_s(1-n)v^s dV_t + \frac{d^\alpha}{dt} \int_{V_t} \rho_\alpha n S_\alpha v^\alpha dV_t = \int_{V_t} \rho f(x, t) dV_t + \int_{\partial V_t} T dS_t \quad ; \quad \alpha = \{w, nw\} \quad (1.26)$$

où  $\rho$  est la masse volumique globale du milieu poreux, comprenant ici le squelette et les fluides :

$$\rho = \rho_s(1-n) + \rho_w n_w + \rho_{nw} n_{nw} \quad (1.27)$$

Dans le cas quasi-statique, en négligeant les termes dynamiques dans l'équation (1.26), on obtient :

$$\int_{V_t} \rho f(x, t) dV_t + \int_{\partial V_t} T dS_t = 0 \quad (1.28)$$

Le lemme du tétraèdre de **Cauchy (1823)** permet alors de démontrer l'existence d'un tenseur du second ordre  $\sigma$ , qui vérifie la propriété :

$$T = \sigma \cdot \hat{n} \quad (1.29)$$

Il résulte de la définition ci-dessus que le tenseur  $\sigma$  permet de rendre compte des forces exercées sur toute facette de normale sortante  $\hat{n}$  à l'intérieur du système.  $\sigma$  est appelé le tenseur des contraintes totales, car il représente les forces exercées sur tout le milieu poreux.

En utilisant la relation (1.29) et le théorème de la divergence, il est possible d'exprimer localement la conservation de la quantité de mouvement à partir de (1.26). On obtient l'équation d'équilibre mécanique :

$$\nabla_x \cdot \sigma + \rho f = 0 \quad (1.30)$$

Comme pour un milieu continu classique, en exploitant la conservation du moment angulaire, dont on ne rappelle pas l'expression ici, on peut établir la symétrie du tenseur des contraintes.

### 1.3 Hypothèse de petites perturbations

L'hypothèse de petites perturbations consiste à l'ensemble des hypothèses garantissant la linéarité du problème, dans la limite où les équations constitutives des constituants ne sont pas concernées. L'hypothèse de petites perturbations comprend principalement :

- Transformation infinitésimale du squelette :

On considère que la transformation géométrique du squelette est infinitésimale si :

$$\|\nabla_X u\| \ll 1 \quad (1.31)$$

En pratique, cette hypothèse permet de linéariser les grandeurs intervenant dans la description de la cinématique du squelette. Ainsi, on peut linéariser le tenseur des déformations de Green-Lagrange défini par (1.12) :

$$\Delta = \varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla_X u + {}^t \nabla_X u) \quad (1.32)$$

- Petits déplacements du squelette :

Cette hypothèse est valide lorsque le déplacement du squelette reste négligeable devant les dimensions du domaine étudié, ce qui s'écrit :

$$\left\| \frac{u}{L} \right\| \ll 1 \quad (1.33)$$

où  $L$  est une longueur caractéristique du domaine étudié.

L'hypothèse des petits déplacements du squelette a pour but d'assurer que l'on peut confondre les configurations de référence et actuelle, ainsi que les grandeurs lagrangiennes et leurs homologues eulériennes. On écrira donc toutes les équations sur une configuration fixe, celle du squelette, et l'on confondra les positions  $X$  et  $x$ . De même, les approximations suivantes peuvent être considérées :  $M^\alpha \approx \omega^\alpha$ ,  $V := V_0 \approx V_t$  et  $\partial V := \partial V_0 \approx \partial V_t$ . De plus, l'opérateur  $\nabla$  peut être utilisé sans faire référence à une configuration particulière :  $\nabla = \nabla_X = \nabla_x$ .

– Petites variations de porosité :

$$\left| \frac{\phi - \phi_0}{\phi_0} \right| \ll 1 \quad (1.34)$$

$\phi_0$  étant la porosité initiale.

– Petites variations des masses volumiques des fluides :

$$\left| \frac{\rho_\alpha - \rho_\alpha^0}{\rho_\alpha^0} \right| \ll 1 \quad (1.35)$$

Cette hypothèse nous permet de remplacer  $\rho_\alpha$  par  $\rho_\alpha^0$  à chaque fois que cela est nécessaire. À partir de maintenant, l'hypothèse de petites perturbations sera retenue dans la suite du mémoire.

## 1.4 Lois de comportement

Dans les sections précédentes, nous avons présenté une approche de modélisation des milieux poreux partiellement saturés à l'échelle macroscopique, à partir de laquelle nous avons exprimé toutes les lois de conservation (conservation de la masse et de la quantité de mouvement). Il reste à établir les lois constitutives, qui sont nécessaires pour résoudre le problème. Ces lois dépendent des phénomènes physiques dont le milieu poreux est le siège, et peuvent être déterminées en s'appuyant sur les principes de la thermodynamique et un certain nombre d'hypothèses faites sur la physique du système. L'identification des coefficients qu'elles font intervenir peut-être faite à partir des essais expérimentaux.



### 1.4.1 Pression capillaire

On se limitera dans cette section à énoncer sommairement, mais aussi clairement que possible la définition de la pression capillaire. Cette dernière est une notion microscopique, car sa description n'a de sens qu'à l'échelle du pore. En effet, à l'échelle d'un pore, lorsque deux phases fluides sont présentes, elles sont séparées par une interface courbée. La pression est discontinue au niveau de cette interface. La différence de pression entre la phase non mouillante et la phase mouillante est la pression capillaire et elle est donnée par la loi de Laplace qui traduit l'équilibre mécanique du ménisque (Hassanizadeh & Gray 1993).

À l'échelle macroscopique, la pression capillaire est définie comme la différence des pressions macroscopiques du fluide non mouillant et du fluide mouillant (Bear 1988, 2012). Dans le cas d'un milieu isotrope, indéformable et en condition isotherme, une étude thermodynamique de Coussy (2011) montre, qu'en absence de phénomène d'hystérésis, la pression capillaire ne dépend que du degré de saturation du fluide mouillant :

$$p_{nw} - p_w = p_c(S_w) \quad (1.36)$$

Cette relation s'interprète comme la transcription macroscopique de la loi de Laplace. La fonction  $p_c(S_w)$  dépend du matériau choisi, mais aussi du couple de fluides saturant les pores. De plus, la relation  $p_c(S_w)$  n'est pas la même lors du remplissage du milieu poreux par la phase mouillante (imbibition) ou non mouillante (drainage). Ce phénomène se traduit par une courbe de rétention d'imbibition différente de celle du drainage.

Les essais expérimentaux d'imbibition-drainage montrent que la pression capillaire dépend essentiellement de la saturation, et cela, d'une manière monotone. Afin d'ajuster les données expérimentales, plusieurs modèles empiriques existent pour décrire les courbes de pression capillaire en fonction de la saturation. Le modèle de Brooks & Corey (1964) et de van Genuchten (1980a) sont les plus répandus dans la littérature. Le premier étant le plus utilisé dans l'industrie pétrolière et le second en hydrologie.

La courbe de rétention du modèle de van Genuchten s'exprime à l'aide de la relation suivante :

$$p_c(S_w) = \frac{\rho_w g}{\alpha} \left( \left( \frac{S_w - S_w^{res}}{1 - S_w^{res}} \right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right)^{1-m} \quad (1.37)$$

Ici,  $S_w^{res}$  est la saturation résiduelle, définie comme la saturation minimale du fluide mouillant qui peut être obtenue par le seul processus de drainage. Les constantes positives  $\alpha [m^{-1}]$  et  $m$ , sont des caractéristiques du milieu poreux déterminées à partir de données expérimentales. La figure 1.1 montre un exemple de la courbe de  $p_c$  en fonction de  $S_w$ , en utilisant l'expression (1.37). Elle est tracée pour le couple de fluides eau-air dans un sol limoneux.

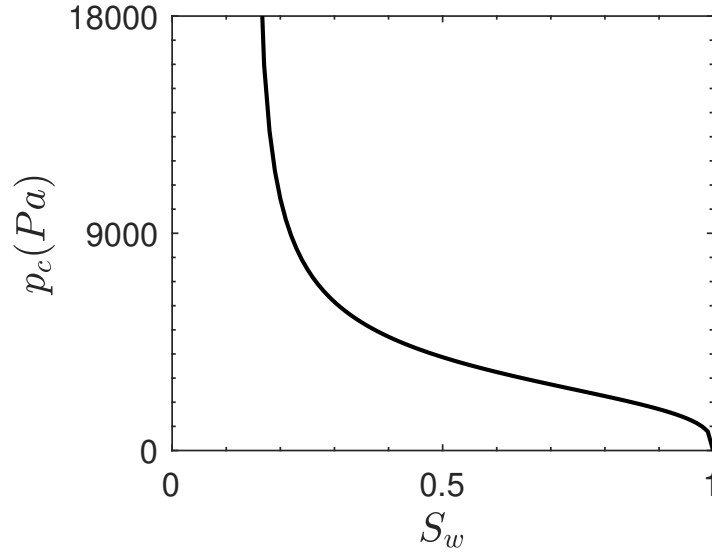


FIGURE 1.1 – Évolution de la pression capillaire  $p_c$  en fonction de la saturation  $S_w$  selon le modèle de van Genuchten, avec  $S_w^{res} = 0.15$ ,  $\alpha = 3.52m^{-1}$  et  $m = 0.68$ .

### 1.4.2 La pression de pore équivalente

Dans le cas d'un milieu poreux saturé où un seul fluide occupe complètement l'espace poreux, la pression de pore est équivalente à la pression du fluide. Cependant, malgré plusieurs années de discussions, aucune définition unifiée de la pression de pore n'a été établie et totalement acceptée pour les milieux poreux partiellement saturés. Plusieurs tentatives de modélisation ont été faites dans la littérature (Nuth & Laloui 2008, Nikoee et al. 2013). Bishop (1959) a établi une des premières généralisations pour les milieux poreux non saturés, donnée par :

$$\pi = p_{nw} + \chi(p_w - p_{nw}) \quad (1.38)$$

Le paramètre  $\chi$  est appelé paramètre de Bishop. Un choix souvent utilisé est la pression de pore moyenne, qui correspond à remplacer  $\chi$  par le degré de saturation  $S_w$  :

$$p^* = S_w p_w + S_{nw} p_{nw} \quad (1.39)$$

Cependant, ce choix est critiqué parce qu'il ne tient pas compte des interfaces solides-fluides et fluide-fluide (Coussy et al. 2004, Coussy 2007). Dans cette thèse, on adopte la pression de pore équivalente (Coussy 2004), justifiée par une approche thermodynamique qui tient également compte des effets d'interfaces par le biais d'une énergie interfaciale.

La pression capillaire  $p_c$  est en général supposée ne pas dépendre de manière significative de la déformation et de la porosité. Par conséquent, en faisant l'hypothèse de séparation des énergies, l'énergie libre du squelette  $\Psi_s$  s'écrit :

$$\Psi_s(\varepsilon, \phi, S_w) = \psi_s(\varepsilon, \phi) + \phi U(S_w) \quad (1.40)$$

l'énergie  $U$  représente la somme des énergies de toutes les interfaces, à savoir l'interface fluide-fluide et les interfaces solide-fluides. Pour plus de détails concernant la relation entre l'énergie capillaire et la pression capillaire, nous faisons référence à [Coussy et al. \(2004\)](#). Par conséquent, l'énergie  $\psi_s(\varepsilon, \phi)$  correspond éventuellement à l'énergie de la matrice solide considérée séparément des interfaces.

La dissipation intrinsèque du squelette, donnée par [Coussy \(2004\)](#), peut s'écrire comme suit :

$$\sigma d\varepsilon + \pi d\phi - d\psi_s \geq 0 \quad (1.41)$$

avec :

$$\pi = p^* - U \quad (1.42)$$

La pression  $\pi$  agit de la même manière sur la matrice solide que la pression du fluide dans le cas saturé. C'est pourquoi elle est appelée pression de pore équivalente. L'expression (1.42) montre que le fait de laisser  $p^*$  jouer le rôle d'une pression de pore équivalente au lieu de  $\pi$  revient à ne pas tenir compte des effets des contraintes d'interface sur la déformation de la matrice solide ([Coussy et al. 2004](#)).

### 1.4.3 Contrainte effective

Depuis les premiers travaux de la mécanique des sols et des roches, le concept de la contrainte effective pour décrire l'état de contrainte global d'un milieu poreux a été introduit par [Terzaghi \(1936\)](#) et [Biot \(1941\)](#) pour les milieux poreux saturés. Tous les travaux partent du principe que la contrainte effective est supposée être la seule responsable de toutes les déformations du squelette. Bishop a ensuite étendu naturellement le concept aux milieux partiellement saturés, partant du principe que la contrainte effective est une combinaison linéaire de la contrainte de Cauchy  $\sigma$  et de la pression de pore équivalente  $\pi$ .

$$\sigma' = \sigma + \pi 1 \quad (1.43)$$

Initialement énoncée de manière phénoménologique au niveau macroscopique, l'expression (1.43) peut aussi être justifiée théoriquement en utilisant, par exemple, des considérations thermodynamiques ([Coussy et al. 2004](#)).

Nous soulignons ici que dans l'équation (1.43) et dans la suite la convention de signes de la mécanique des milieux continus est adoptée ; par conséquent les contraintes en compression doivent être considérées comme négatives.

### 1.4.4 Loi de Darcy

Le terme de dissipation lié au mouvement du fluide est mis en évidence dans (Coussy et al. 2004) à partir d'une étude basée essentiellement sur les deux premiers principes de la thermodynamique. Dans l'hypothèse de pouvoir découpler différentes contributions non-négatives à la dissipation du système, la non-négativité de la dissipation du fluide s'écoulant à travers un milieu poreux implique que sa vitesse relative au squelette obéit à la loi de Darcy.

La loi de Darcy met en relation l'écoulement du fluide avec les forces dues aux gradients de pression du fluide et aux forces volumiques externes (principalement gravitationnelles) agissant sur le fluide. À l'origine, elle a été formulée empiriquement par Darcy (1856) pour un écoulement monophasique à travers un milieu poreux. Plus tard, le concept de la perméabilité relative a été établi par Muskat & Meres (1936), permettant une généralisation à l'écoulement multiphasique. Dans sa forme la plus courante, le flux volumétrique de la phase fluide  $\alpha = \{w, nw\}$  par rapport au squelette, également appelé vecteur de filtration, est décrit par :

$$q_\alpha = \frac{\omega^\alpha}{\rho_\alpha} = \frac{\varkappa k_\alpha}{\eta_\alpha} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha g) \quad (1.44)$$

où  $\varkappa [m^2]$  est la perméabilité intrinsèque du milieu poreux, représenté par un scalaire dans le cas d'un milieu isotrope et un tenseur dans le cas anisotrope. Le terme  $k_\alpha \in [0, 1]$  représente la perméabilité relative, qui met à l'échelle la perméabilité intrinsèque de telle sorte que l'influence sur l'écoulement d'une phase par la présence d'une autre phase soit prise en compte. La perméabilité relative est supposée généralement être une fonction algébrique de la saturation uniquement. Dans l'équation (1.44),  $\eta_\alpha [Pa.s]$  est la viscosité dynamique de la phase  $\alpha$ .

Le modèle de perméabilité relative correspondant à la courbe de rétention (1.37) est donnée par le modèle de Van Genuchten (1980b), Luckner et al. (1989) :

$$k_w(S_w) = \sqrt{S_w} \left[ 1 - \left( 1 - S_w^{\frac{1}{m}} \right)^m \right]^2 \quad (1.45)$$

$$k_{nw}(S_{nw}) = \sqrt{S_{nw}} \left[ 1 - \left( 1 - S_{nw}^{\frac{1}{m}} \right)^m \right]^{2m} \quad (1.46)$$

## 1.5 Résumé du modèle

En appliquant les hypothèses de petites perturbations aux équations dérivées dans ce chapitre, on obtient un modèle mathématique non-linéaire pour l'écoulement biphasique dans les milieux poreux déformables.

**Équation d'équilibre mécanique** En utilisant l'équation de la conservation de quantité de mouvement (1.47) ainsi que la définition de la contrainte effective (1.43), l'équation d'équilibre mécanique du milieu poreux peut être exprimée comme suit :

$$\nabla \cdot (\sigma' - \pi 1) + \rho f = 0 \quad (1.47)$$

la masse volumique globale du milieu poreux  $\rho$ , peut être donnée, dans le cadre des hypothèses de petites perturbations, par :

$$\rho = \rho_s^0(1 - \phi_0) + \rho_w^0 S_w \phi_0 + \rho_{nw}^0 S_{nw} \phi_0 \quad (1.48)$$

**Équation de conservation de la masse des fluides** À partir de l'équation de conservation de la masse des phases fluides (1.24), de la définition de la masse apparente (1.5) et de la loi de Darcy (1.44), il vient :

$$\frac{\partial (\rho_\alpha \phi S_\alpha)}{\partial t} - \nabla \cdot \left( \rho_\alpha \frac{\kappa k_\alpha(S_\alpha)}{\eta_\alpha} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha^0 g) \right) = 0 \quad ; \quad \alpha = \{w, nw\} \quad (1.49)$$

Il reste pour obtenir une modélisation complète à préciser les relations de comportement mécanique. On choisit d'aborder cette question dans le chapitre 2 à partir des considérations thermodynamiques.

## 1.6 Écoulement eau-air dans un milieu poreux

La modélisation de l'écoulement diphasique immiscible dans les milieux poreux peut être considérablement simplifiée dans des conditions particulières se produisant, par exemple, dans le cas de l'écoulement de l'air et de l'eau dans la zone vadose (Stephens 2018). En supposant que la viscosité de la phase fluide non mouillante soit inférieure de plusieurs ordres à celle de la phase mouillante, il en résulte une mobilité beaucoup plus grande de la première par rapport à la dernière. En outre, si la phase fluide non mouillante est supposée être continuellement connectée à l'atmosphère, les variations de la pression du fluide non mouillant peuvent être négligées. Par conséquent, la pression du fluide non mouillant peut être supposée égale à la pression atmosphérique, qui, par convenance, est souvent considérée comme nulle, c'est-à-dire  $p_{nw} = 0$ . Ces hypothèses sont couramment utilisées pour réduire les modèles d'écoulement diphasique à l'équation de Richards (1931).

Les mêmes hypothèses peuvent être utilisées dans le cas des milieux poreux déformables. Par conséquent, l'équation de conservation de la masse (1.49) peut être négligée pour la phase fluide non mouillante ( $\alpha = nw$ ), et réécrite pour la phase fluide mouillante

( $\alpha = w$ ) dans la forme suivante, en considérant constante la densité de l'eau.

$$\frac{d(\phi S_w)}{dt} - \nabla \cdot \left( \frac{\alpha k_w(S_w)}{\eta_w} (\nabla p_w - \rho_w^0 g) \right) = 0 \quad (1.50)$$

Cette hypothèse simplifie également les expressions pour la pression capillaire et la pression équivalente de pore.

$$p_c(S_w) = -p_w \quad (1.51)$$

$$\pi = S_w p_w - U \quad (1.52)$$

En ce qui concerne le reste, en supposant, que la densité de la phase fluide non mouillante  $\rho_{nw}^0$  est largement inférieure à celle de la phase mouillante  $\rho_w^0$ , la forme de l'équilibre mécanique (1.47) reste la même et la masse volumique globale du milieu poreux se réduit à :

$$\rho = \rho_s^0(1 - \phi_0) + \rho_w^0 S_w \phi_0 \quad (1.53)$$

Ainsi, le modèle, présenté dans la section 1.5, se réduit essentiellement à l'équation de Richards (1.50) couplée à l'équation d'équilibre mécanique, avec le déplacement mécanique  $u$  et la pression du fluide mouillant  $p_w$  comme variables primaires.

## 1.7 Critique et extensions de l'équation de Richards

Il a été démontré que des infiltrations de l'eau dans les milieux poreux peuvent produire un profil non monotonique du degré de saturation le long de la direction de propagation appelé "overshoot". Ce sursaut de la saturation au niveau du front de mouillage a été supposé être la cause de la formation d'écoulement par digitation qui constitue une perte de stabilité de l'interface entre la phase mouillante et la phase non-mouillante (Saffman & Taylor 1958). En ce qui concerne l'équation de Richards (RE) (1.50), qui est l'équation typiquement utilisée pour modéliser l'écoulement non saturé dans les milieux poreux, nous pouvons déclarer, sur la base de l'analyse de stabilité non linéaire de Otto (1997), que le modèle de Richards ne peut pas produire l'instabilité du front de mouillage dans les milieux poreux homogènes et ne peut donc pas être utilisé comme modèle afin de décrire un écoulement par digitation étant inconditionnellement stable. Egorov et al. (2003) ont étendu l'analyse non linéaire d'Otto en montrant que l'équation de Richards est inconditionnellement stable à toutes les perturbations, même pour les milieux poreux hétérogènes.

L'analyse de stabilité semble confirmer la nécessité d'ajouter des termes additionnels à l'équation de Richards pour reproduire les phénomènes observés (Eliassi & Glass 2002, 2003). Eliassi & Glass (2001) ont considéré trois formes supplémentaires possibles appelées forme hypodiffusive, forme hyperbolique et forme mixte. À partir de simulations numériques utilisant la forme hypodiffusive, Eliassi & Glass (2003) ont produit des solutions non

monotoniques de la saturation dans le cas de simulations 1d et des écoulements en doigts qui correspondent qualitativement à ceux observés expérimentalement (Glass et al. 1989) dans le cas 2d. Ce terme hypodiffusif peut être complètement intégré à la pression capillaire Eliassi & Glass (2003). En conséquence, il en résulte une équation standard de Richards avec une pression capillaire modifiée. Avec cette intégration, le phénomène d'overshoot est obtenu numériquement, si et seulement si, la pression capillaire modifiée est non monotone par rapport à la saturation. DiCarlo et al. (2008) ont étudié l'intégration d'une relation pression capillaire-saturation non monotone à l'équation de Richard, mais ils ont déclaré que cette extension nécessite un terme de régularisation pour produire une solution unique.

Le modèle de Richards est en partie basé sur le concept de pression capillaire statique, comme expliqué dans la section 1.4.1. La courbe de rétention associant pression et saturation est alors établie dans des conditions d'équilibre. Hassanizadeh et al. (2002) ont établi la liste d'un grand nombre d'expériences démontrant les effets dynamiques sur la pression capillaire. Par ailleurs, Nieber et al. (2005) mettent également en avant ce phénomène pour expliquer l'apparition des doigts dans les écoulements d'eau en milieu non saturé. En effet, Nieber et al. (2003) ont obtenu des profils de saturation non monotones en complétant l'équation de Richards par une relation pression capillaire-saturation dynamique. Plus tard, en se basant sur ces travaux, le résultat de (Chapwanya & Stockie 2010) démontre que l'équation de Richards non équilibrée est capable de reproduire des écoulements à doigt réalistes pour une large série de paramètres physiques.

Le modèle champ de phase de Cueto-Felgueroso & Juanes (2008, 2009a,b), Beljadid et al. (2020) permet d'expliquer le phénomène d'overshoot et la formation de doigts pendant l'infiltration de l'eau dans le sol en introduisant un terme de quatrième ordre dans l'équation de Richards. En utilisant ce terme supplémentaire, et une courbe de rétention traditionnelle, les auteurs sont en mesure de reproduire un grand nombre de résultats expérimentaux qui sont impossibles à obtenir avec les modèles traditionnels (Cueto-Felgueroso & Juanes 2009a). Le modèle produit également des chemins d'écoulement préférentiels en 2D qui semblent très raisonnables et des prédictions des valeurs du degré de saturation qui correspondent aux données expérimentales de (DiCarlo 2004).

## CHAPITRE 2 : APPROCHE CHAMPS DE PHASE POUR LES MILIEUX POREUX PARTIELLEMENT SATURÉS

2.1	Description du fluide non uniforme . . . . .	31
2.2	Lois de conservation . . . . .	31
2.2.1	Conservation de la masse . . . . .	32
2.2.2	Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	32
2.3	Thermodynamique . . . . .	32
2.3.1	Énergie du fluide non-uniforme . . . . .	33
2.3.2	Premier et second principe de la thermodynamique . . . . .	35
2.3.3	Inégalité de Clausius-Duhem . . . . .	36
2.3.4	Équations d'état du squelette . . . . .	37
2.3.5	Comportement poroélastique . . . . .	38
2.3.6	Loi de Darcy généralisée . . . . .	40
2.4	Cas particulier d'un milieu poreux rigide . . . . .	40
2.5	Comportement élastoplastique des milieux poreux partiellement saturés . . . . .	44
2.5.1	Lois de comportement élastoplastiques . . . . .	46
2.5.2	Le modèle non standard de CAM-CLAY . . . . .	47
2.6	Conclusion . . . . .	52

Récemment, dans les travaux de [Sciarra \(2016\)](#), un modèle poromécanique pour les milieux poreux partiellement saturés déformables a été proposé sur la base d'une approche de champ de phase, pour modéliser le comportement du mélange d'eau liquide et d'air qui saturent l'espace poreux. Tandis que la pression capillaire standard décrit l'effet de confi-



nement des fluides dû aux parois des pores, une description améliorée de la tension superficielle entre le fluide mouillant (eau liquide) et le fluide non mouillant (air) occupant l'espace poreux est obtenue en considérant les deux fluides immiscibles comme un seul fluide biphasique non uniforme dans l'esprit de [Cahn & Hilliard \(1958, 1959\)](#). De façon similaire à l'approche de champ de phase pour modéliser l'écoulement de fluide multiphasique ([Kim 2012](#), [Joshi & Jaiman 2018](#), [Jain 2022](#)), la coexistence de phases est possible grâce à la forme à double puits de l'énergie libre du fluide non uniforme. Cela donne lieu à une courbe de rétention non monotone lorsque l'effet de confinement donné par la courbe de rétention standard est ajouté. Cette relation constitutive améliorée pour la courbe de rétention qui sera détaillée dans la suite de ce chapitre, ressemble au "potentiel capillaire modifié", utilisé par [Eliassi & Glass \(2003\)](#) pour produire des modèles de saturation qui correspondent qualitativement à ceux observés dans l'écoulement par digitation sous l'influence de la gravité "Gravity fingering". Cependant, comme déjà remarqué dans la section 1.7, [DiCarlo et al. \(2008\)](#) ont montré que cette extension nécessite un terme de régularisation pour produire une solution unique une fois incorporé dans l'équation de [Richards \(1931\)](#). Ainsi, un terme de "relaxation" qui découle du concept de la pression capillaire dynamique ([Hassanizadeh & Gray 1990](#), [Hassanizadeh et al. 2002](#), [Egorov et al. 2003](#)) a été utilisé comme terme de régularisation. Toutefois, le terme de "relaxation" n'est pas retenu dans le modèle actuel. À sa place, comme il est d'usage dans les modèles de champ de phase, nous considérons une régularisation du modèle basée sur une contribution d'énergie de second gradient à l'énergie libre totale du fluide non uniforme, donnant lieu à une extension de l'équation de Richards qui est maintenant une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre dans l'espace. Dans ce contexte, on peut également établir des analogies avec le modèle d'ordre supérieur de [Cueto-Felgueroso & Juanes \(2008, 2009a\)](#), qui introduit une contribution énergétique liée au gradient du degré de saturation. Grâce à ce terme supplémentaire et à une courbe de rétention traditionnelle, les auteurs sont en mesure de reproduire un grand nombre de résultats expérimentaux impossibles à reproduire à l'aide de modèles traditionnels ([Cueto-Felgueroso & Juanes 2009a](#)). Le modèle produit également des chemins d'écoulement préférentiels d'apparence très raisonnable en 2D ([Cueto-Felgueroso & Juanes 2008](#)). Cependant, le modèle ne permet pas d'identifier une condition de coexistence entre la composante eau et la composante air du mélange, ce qui pourrait impliquer une courbe de rétention non monotone comme celle proposée par ([DiCarlo 2010](#)). D'ailleurs, aucun couplage avec les déformations du squelette n'est pris en compte.

Dans ce chapitre, le modèle champ de phase considéré est formulé dans le cadre de la théorie des milieux poreux déformables afin de tenir compte, à l'échelle macroscopique, des couplages hydro-mécaniques entre l'écoulement localisé ("Gravity fingering") et les déformations du squelette. En effet, d'un point de vue mécanique, le milieu poreux est considéré

à l'échelle macroscopique comme la superposition de deux milieux continus en interaction : le squelette et le fluide non uniforme. D'un point de vue thermodynamique, il peut être considéré comme un système thermodynamique ouvert capable d'échanger de la masse fluide avec l'extérieur.

## 2.1 Description du fluide non uniforme

Nous considérons un milieu poreux constitué d'un squelette solide déformable dont les pores sont saturés par un mélange de deux phases de fluides immiscibles, un liquide mouillant (eau) et un gaz non mouillant (air), ce dernier étant directement en contact avec l'atmosphère. La phase liquide est supposée incompressible ( $\rho_w = \text{const}$ ) et la phase gazeuse passive, disons d'une mobilité infinie. La densité du gaz peut donc être négligée par rapport à celle de la phase liquide ( $\rho_g \simeq 0$ ).

À la place de l'approche standard pour les milieux poreux partiellement saturés, décrite dans le chapitre 1, un schéma de modélisation alternatif est ici adopté, consistant à considérer le mélange gaz-liquide remplissant le réseau poreux comme un fluide non uniforme au sens de [Cahn & Hilliard \(1958, 1959\)](#). Dans ce but, on introduit un paramètre d'ordre, appelé aussi champ de phase, qui est uniforme dans les deux phases et varie continuellement à travers l'interface entre elles. Désormais, en suivant [Sciarra \(2016\)](#), le volume de la phase liquide par rapport au volume des pores, autrement dit le degré de saturation,  $S_r$  (notée  $S_w$  dans l'approche standard introduite dans le chapitre 1), jouera le rôle du champ de phase. Ce choix particulier impose une restriction physique sur la plage de valeurs que ce champ de phase peut prendre, de sorte que  $S_r \in [0, 1]$ .  $S_r = 0$  représente le fluide non mouillant (l'air) et  $S_r = 1$  représente le fluide mouillant (l'eau). Étant donné les hypothèses précédentes, la densité du fluide non uniforme est :

$$\rho_f = \rho_w S_r + \rho_g (1 - S_r) \simeq \rho_w S_r \quad (2.1)$$

## 2.2 Lois de conservation

En considérant, le milieu poreux à l'échelle macroscopique comme la superposition de deux milieux continus en interaction : le squelette ( $s$ ) et le fluide non uniforme ( $f$ ), tous les développements de la section 1.2 peuvent être appliqués en remplaçant l'indice ' $\alpha$ ' par l'indice ' $f$ '.

### 2.2.1 Conservation de la masse

De la même manière que dans la section 1.2.1, la conservation de la masse du fluide non uniforme dans la configuration de référence du squelette peut être écrite, en considérant l'hypothèse des petites perturbations, de la manière suivante :

$$\frac{dm_f}{dt} + \nabla \cdot M = 0 \quad \text{avec} \quad m_f = \rho_f \phi \quad \text{et} \quad M = \rho_f \phi (V^f - V^s) \quad (2.2)$$

où  $m_f$  est la masse du fluide non uniforme par unité de volume de référence et  $V^f$  sa vitesse.

### 2.2.2 Conservation de la quantité de mouvement

De la même manière que dans la section 1.2.2, la conservation de la quantité de mouvement, dans le cas quasi-statique, peut être donnée par l'équation d'équilibre mécanique :

$$\nabla \cdot \sigma + \rho f = 0 \quad (2.3)$$

où  $\rho$  est la masse volumique globale du milieu poreux, comprenant ici le squelette et le fluide non uniforme. Étant donné que,  $\rho_g \simeq 0$  et dans l'hypothèse des petites perturbations 1.3,  $\rho$  peut être approximée par :

$$\rho \simeq \rho_s(1 - \phi_0) + \rho_w S_r \phi_0 \quad (2.4)$$

## 2.3 Thermodynamique

La thermodynamique des milieux poreux a été résumée par [Coussy \(2004\)](#) pour deux ou plusieurs milieux continus superposés en interaction, par exemple le squelette solide et les fluides saturant l'espace poreux. Dans ce cas, les énergies internes spécifiques aux fluides sont définies séparément, qu'ils soient en phase liquide ou gazeuse, tandis que l'énergie due aux interfaces entre les fluides et entre le solide et les fluides est incorporée dans l'énergie macroscopique du squelette, comme indiqué précédemment (section 1.4.2).

La description thermodynamique du milieu poreux fournit un cadre formel sur lequel on peut établir les lois de comportement du milieu. Après la formulation du premier et du deuxième principe de la thermodynamique, l'inégalité fondamentale de Clausius-Duhem sera présentée. Celle-là permettra d'énoncer les équations d'état du milieu poreux.

Pour plus d'informations, on peut se référer à ([Coussy 2004, 2011](#)) dans le cadre de la modélisation standard des milieux poreux et à ([Sciarra 2016](#)) dans le cadre spécifique de la modélisation des milieux poreux partiellement saturés par une approche champ de phase.

### 2.3.1 Énergie du fluide non-uniforme

Comme indiqué précédemment, dans la présente thèse, nous suivons une nouvelle approche proposée par [Sciarra \(2016\)](#) afin d'incorporer, dans la description constitutive macroscopique, le rôle de l'interface entre les deux fluides contenus dans les pores. On décrit le mélange de fluides comme un fluide biphasique non uniforme dans le sens de [Cahn & Hilliard \(1958\)](#), en introduisant un champ de phase. Comme nous l'avons souligné précédemment et en suivant [Cueto-Felgueroso & Juanes \(2012, 2014\)](#), le champ de phase correspond ici au degré de saturation  $S_r$ . L'interface fluide-fluide est diffuse avec une épaisseur très petite, mais finie à travers laquelle le degré de saturation varie fortement, mais d'une façon continue d'une phase à l'autre. En conséquence, l'énergie libre d'un tel système, est supposée être la somme d'une énergie locale et d'une énergie non locale, comme suit

$$\Psi_{mix} = \phi \rho_f e_f \left( \frac{1}{\rho_f}, s_f \right) + \Psi_{nl} \quad \text{avec} \quad \Psi_{nl} = \frac{1}{2} C_k \nabla(\phi S_r) \cdot \nabla(\phi S_r), \quad (2.5)$$

$e_f$  étant l'énergie interne spécifique au fluide. Le terme local  $\rho_f e_f$  est supposé être un potentiel à double puits ([Cahn & Hilliard 1958](#), [Bray 2002](#)), fonction de la densité intrinsèque,  $\rho_f$  et de l'entropie,  $s_f$  du fluide non uniforme.  $\Psi_{nl}$  est l'énergie non locale qui est fonction du gradient de la densité apparente ( $\phi \rho_f$ ) du fluide non uniforme. D'un point de vue mathématique,  $\Psi_{nl}$  fournit une régularisation de l'énergie locale non convexe  $\rho_f e_f$  et permet la formation de l'interface.

L'équation d'état du fluide définit une relation entre les variables conjuguées; en particulier, la pression thermodynamique du fluide  $P$  et le potentiel chimique du fluide  $\mu$  peuvent être définis en fonction de la densité  $\rho_f$  :

$$P = -\frac{\partial e_f}{\partial(1/\rho_f)} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\partial(\rho_f e_f)}{\partial \rho_f} \quad (2.6)$$

Cependant, en raison de l'équation (2.5), ces quantités ne sont pas suffisantes pour caractériser complètement la loi de comportement du fluide non-uniforme, qui, d'autre part, nécessite de définir le vecteur dit hyper-contrainte du fluide, lié à la dérivée de  $\Psi_{nl}$  par rapport à  $\nabla(\phi \rho_f)$ .

Afin de pouvoir décrire la coexistence des deux phases, séparées par une interface, l'énergie à double puits sur laquelle est bâtie l'énergie libre du système doit comporter deux minima locaux correspondants chacun aux phases considérées. Compte tenu de l'incompressibilité de la phase liquide, les variations de la densité  $\rho_f$  sont déterminées par les variations du degré de saturation. Ainsi, une éventuelle forme du potentiel à double puits est choisie en fonction de  $S_r$  ([Sciarra 2016](#)).

$$\Psi_f(S_r) = \rho_f e_f = C \frac{\gamma_{lg}}{R} S_r^2 (1 - S_r)^2 \quad (2.7)$$

Cette forme présente une structure symétrique à double puits (figure 2.1) dont les minima correspondent aux phases de l'air ( $S_r = 0$ ) et de l'eau ( $S_r = 1$ ). Dans l'équation (2.7),  $\gamma_{lg}$  est la tension superficielle eau-air et  $R$  une longueur caractéristique décrivant la taille effective de l'espace poreux à travers lequel le fluide s'écoule. Dans la suite, on considère l'estimation de Leverett (1941) de  $R$  soit :  $R = \sqrt{\frac{\kappa}{\phi_0}}$ ,  $\phi_0$  étant la porosité initiale du matériau et  $\kappa$  sa perméabilité intrinsèque.

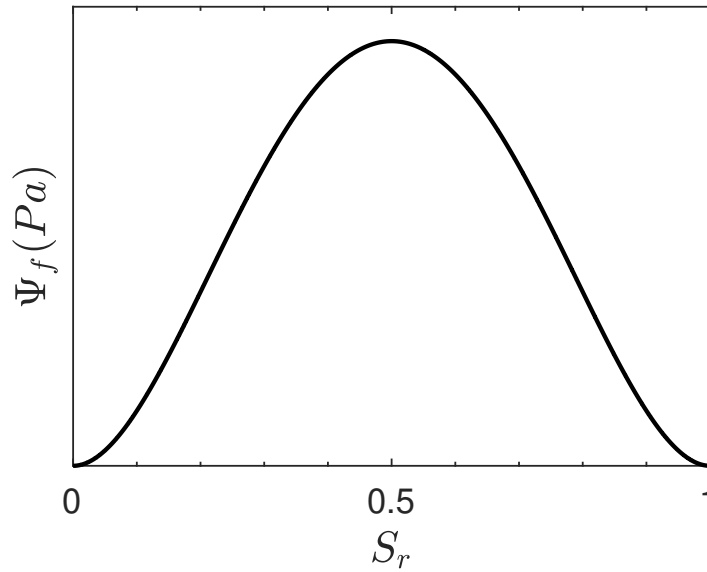


FIGURE 2.1 – L'énergie à double puits,  $\Psi_f$ .

En considérant l'équation (2.7) pour le potentiel à double puits, la pression thermodynamique et le potentiel chimique du fluide non uniforme peuvent être redéfinis en fonction du degré de saturation,  $S_r$  comme suit :

$$P = S_r \frac{\partial \Psi_f}{\partial S_r} - \Psi_f \quad \text{and} \quad \mu = \frac{\partial \Psi_f}{\partial S_r} \quad (2.8)$$

Une représentation graphique du potentiel chimique  $\mu$  est donnée dans la figure 2.2. Les deux minima de  $\Psi_f$  correspondent aux zéros de  $\mu$ .

La contribution non locale de l'énergie,  $\Psi_{nl}$  permettant la formation d'une interface diffuse entre les deux phases et fournissant une régularisation de l'énergie locale non convexe, est supposée typiquement quadratique par rapport au gradient de la teneur en eau,  $\nabla(\phi S_r)$ , comme suit :

$$\Psi_{nl} = \frac{1}{2} C_k \nabla(\phi S_r) \cdot \nabla(\phi S_r) \quad (2.9)$$

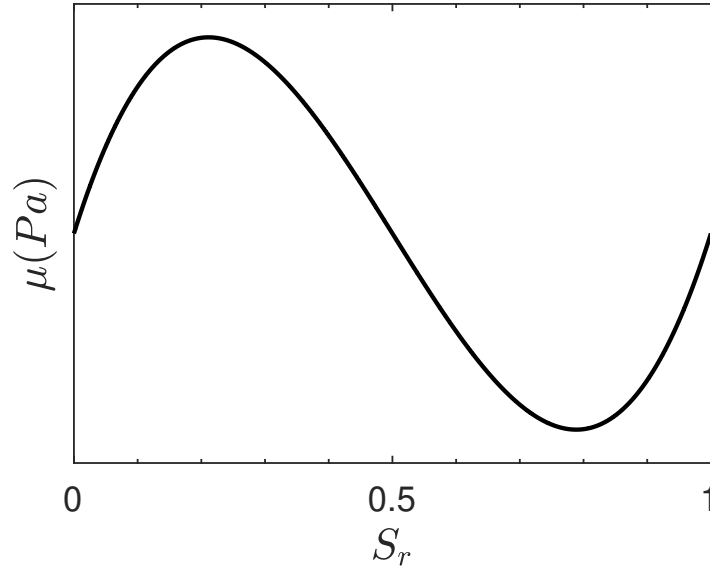


FIGURE 2.2 – le potentiel chimique du fluide non uniforme,  $\mu$ .

### 2.3.2 Premier et second principe de la thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique (la loi de conservation d'énergie) suppose que la variation de l'énergie interne du système  $E$  correspond à la somme du travail mécanique effectué par les forces extérieures sur le système  $P_e$  et du taux de chaleur reçue par le système  $Q$ . Appliquée à un volume  $V_t$  du matériau poreux, formé des milieux continus, squelette et fluide, cette loi s'écrit :

$$\frac{d^s}{dt} \int_{V_t} \left( \mathcal{E}_s + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{sf} \right) dV_t + \frac{d^f}{dt} \int_{V_t} \left( \mathcal{E}_f + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{sf} \right) dV_t = P_e + \dot{Q} \quad (2.10)$$

où  $\mathcal{E}_s = \rho_s(1 - \phi)e_s$  est l'énergie interne du squelette par unité de volume du matériau poreux. Notons que l'énergie d'interface solide-fluide  $\mathcal{E}_{sf}$  est supposée être associée au déplacement de la matrice solide et au mouvement du fluide non uniforme de manière égale.

Le second principe de la thermodynamique exprime que la qualité de l'énergie ne peut aller qu'en se dégradant. L'entropie totale sert alors à évaluer la dégradation de l'énergie. La balance d'entropie montre que la vitesse de changement de l'entropie ne peut pas être inférieure à l'entropie fournie de l'extérieur, c'est-à-dire fonction du flux de chaleur  $q$

$$\frac{d^s}{dt} \int_{V_t} \rho_s(1 - \phi)s_s dV_t + \frac{d^f}{dt} \int_{V_t} \rho_f \phi s_f dV_t \geq - \int_{\partial V_t} \frac{q \cdot \hat{n}}{T} dS_t \quad (2.11)$$

où  $s_s$  et  $s_f$  sont l'entropie spécifique du squelette et du fluide non uniforme.

### 2.3.3 Inégalité de Clausius-Duhem

La combinaison des deux principes de la thermodynamique mène à l'inégalité de Clausius-Duhem qui traduit l'impossibilité pour la dissipation totale d'un milieu poreux déformable,  $\Phi$ , d'être négative. Sans rentrer dans le détail des équations, cela peut s'écrire dans le cas de transformations infinitésimales et dans des conditions isothermes, sous la forme de l'inégalité suivante (Sciarra 2016) :

$$\begin{aligned} \Phi = \sigma : \dot{\varepsilon} + (P - S_r P_c) \frac{d\phi}{dt} - \phi P_c \frac{dS_r}{dt} - \frac{\gamma}{\phi S_r} \frac{d\nabla(\phi S_r)}{dt} - \frac{d\Psi_s}{dt} \\ - \frac{1}{\rho_w} \left\{ \frac{1}{S_r} \nabla P + \nabla \left[ \nabla \cdot \left( \frac{\gamma}{\phi S_r} \right) - P_c \right] - \frac{b^f}{\phi S_r} \right\} \cdot M \geq 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

où  $\sigma$  est la contrainte totale du milieu poreux qui vérifie l'équation de conservation de la quantité de mouvement,  $b^f$  la force de volume exercée sur le fluide et  $P_c$  est la pression capillaire caractérisée, comme dans la formulation classique, comme la variable intensive qui multiplié par  $\phi$  travail sur la variation du degré de saturation. En raison du caractère additif de l'énergie, la densité de l'énergie libre du squelette par unité de volume  $\Psi_s$  est définie par :

$$\Psi_s = \Psi - \phi \Psi_f \quad (2.13)$$

où  $\Psi$  est l'énergie libre du milieu poreux global. Comme le potentiel à double puits  $\Psi_f$  ne rend compte que de l'énergie des deux phases fluides, toutes les contributions relatives aux interfaces solide-fluide et fluide-fluide sont donc stockées dans  $\Psi_s$ . Dans ce qui suit, une décomposition additive de l'énergie solide  $\Psi_s$  sera proposée.

La dissipation totale  $\Phi$  résulte de deux sources distinctes de dissipation, à savoir la dissipation mécanique du squelette seul  $\Phi_s$  et la dissipation liée au transport de masse fluide  $\Phi_f$  :

$$\Phi = \Phi_s + \Phi_f \geq 0 \quad (2.14)$$

De manière générale, en poromécanique (Coussy 2004), les contributions individuelles  $\Phi_s$  et  $\Phi_f$  à la dissipation globale sont indépendamment supposées non négatives afin de satisfaire l'inégalité ci-dessus, comme suit :

$$\Phi_s = \sigma : \dot{\varepsilon} + (P - S_r P_c) \frac{d\phi}{dt} - \phi P_c \frac{dS_r}{dt} - \frac{\gamma}{\phi S_r} \frac{d\nabla(\phi S_r)}{dt} - \frac{d\Psi_s}{dt} \geq 0 \quad (2.15)$$

$$\Phi_f = -\frac{1}{\rho_w} \left\{ \frac{1}{S_r} \nabla P + \nabla \left[ \nabla \cdot \left( \frac{\gamma}{\phi S_r} \right) - P_c \right] - \frac{b^f}{\phi S_r} \right\} \cdot M \geq 0 \quad (2.16)$$

### 2.3.4 Équations d'état du squelette

Les équations d'état relatives au squelette permettent d'exprimer les variables thermodynamiques extensives en fonction des variables intensives correspondant à l'aide d'un potentiel thermodynamique. L'inégalité (2.15) concernant la non-négativité de la dissipation intrinsèque conduit à l'écriture de ces équations d'état. À chaque paire de variables associées correspondent une force et un flux thermodynamiques. D'autre part, on suppose qu'un nombre fini de variables, appelées variables d'état, peuvent caractériser l'état du système étudié. Ces variables peuvent être externes, c'est-à-dire observables ou internes, c'est-à-dire cachées. Ces dernières caractérisent les transformations irréversibles et leur variation est donc nulle lors des transformations réversibles.

Les variables d'état caractérisant le système à partir de l'expression (2.15) sont l'ensemble  $(\varepsilon, \phi, S_r, \nabla(\phi S_r), \chi)$ . En effet, lorsque leurs valeurs sont données, l'état de l'énergie libre du squelette est connu indépendamment de son évolution passée. Les variables  $\varepsilon, \phi, S_r$  et  $\nabla(\phi S_r)$  forment le sous-ensemble de variables d'état externes puisque leurs variations peuvent être contrôlées de l'extérieur. En revanche, les variables  $\chi$ , qui ne peuvent pas être contrôlées de l'extérieur, forment le sous-ensemble des variables d'état internes. De plus, le postulat de l'état local (Germain 1973) permet d'écrire l'énergie libre  $\Psi_s$  comme une fonction de variables d'état :

$$\Psi_s = \Psi_s(\varepsilon, \phi, S_r, \nabla(\phi S_r), \chi) \quad (2.17)$$

L'inégalité (2.15) peut ainsi être reformulée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \left( \sigma - \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varepsilon} \right) : \frac{d\varepsilon}{dt} + \left( P - S_r P_c - \frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi} \right) \frac{d\phi}{dt} + \left( -\phi P_c - \frac{\partial \Psi_s}{\partial S_r} \right) \frac{dS_r}{dt} \\ + \left( -\frac{\gamma}{\phi S_r} - \frac{\partial \Psi_s}{\partial \nabla(\phi S_r)} \right) \frac{d\nabla(\phi S_r)}{dt} - \frac{\partial \Psi_s}{\partial \chi} \cdot \frac{d\chi}{dt} \geq 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Lors des transformations réversibles, les variables traduisant l'irréversibilité  $\chi$  sont invariantes et l'inégalité (2.18) devient une égalité. Il s'ensuit que l'on a nécessairement :

$$\sigma = \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varepsilon} \quad (2.19a)$$

$$P - S_r P_c = \frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi} \quad (2.19b)$$

$$-\phi P_c = \frac{\partial \Psi_s}{\partial S_r} \quad (2.19c)$$

$$-\frac{\gamma}{\phi S_r} = \frac{\partial \Psi_s}{\partial \nabla(\phi S_r)} \quad (2.19d)$$



Ces quatre relations constituent les équations d'état du squelette. Selon le postulat de l'état local, on suppose que ces relations sont toujours vérifiées pour n'importe quelle transformation, en particulier dans le cas des transformations irréversibles,  $d\chi/dt \neq 0$ .

### 2.3.5 Comportement poroélastique

Les lois permettant de déterminer le comportement du milieu poreux doivent être formulées à partir de l'inégalité (2.15) affirmant la non-négativité de la dissipation intrinsèque du squelette. Dans le cadre de la poroélasticité, en raison du comportement élastique du milieu, la dissipation intrinsèque doit être nulle, car la transformation est, par définition, réversible. Les équations d'état régissant le système sont donc l'ensemble des relations (2.19) et nous avons :

$$\Phi_s = \sigma : \dot{\varepsilon} + (P - S_r P_c) \frac{d\phi}{dt} - \phi P_c \frac{dS_r}{dt} - \frac{\gamma}{\phi S_r} \frac{d\nabla(\phi S_r)}{dt} - \frac{d\Psi_s}{dt} = 0 \quad (2.20)$$

En adoptant une approche similaire à celle de la poromécanique classique pour tenir compte des propriétés de rétention du solide (section 1.4.2), la décomposition suivante de l'énergie libre du squelette,  $\Psi_s$  est proposée :

$$\Psi_s(\varepsilon, \phi, S_r, \nabla(\phi S_r)) = \psi_s(\varepsilon, \phi) + \phi U(S_r) + \Psi_{nl}(\nabla(\phi S_r)) \quad (2.21)$$

Dans cette décomposition, le terme  $\psi_s$  représente l'énergie élastique du constituant solide dont l'expression ne fait intervenir que les variables d'état  $(\varepsilon, \phi)$  et exprimée séparément de l'énergie capillaire qui dépend uniquement du degré de saturation  $S_r$ . Comme mentionné précédemment, l'énergie des interfaces fluide-fluide, intrinsèque au fluide non-uniforme, est prise en compte dans  $\Psi_{nl}$ .

Les équations d'état (2.19) se décomposent alors en deux systèmes d'équations. Le premier décrit le comportement des interfaces au sein du milieu poreux :

$$P_c = - \frac{\partial U}{\partial S_r} \quad (2.22a)$$

$$- \frac{\gamma}{\phi S_r} = \frac{\partial \Psi_{nl}}{\partial \nabla(\phi S_r)} \quad (2.22b)$$

Le second système décrit quant à lui le comportement du constituant solide :

$$\sigma = \frac{\partial \psi_s}{\partial \varepsilon} \quad (2.23a)$$

$$\pi = \frac{\partial \psi_s}{\partial \phi} \quad (2.23b)$$

avec

$$\pi = P - S_r P_c - U \quad (2.24)$$

On note que la pression équivalente  $\pi$  obtenue selon cette démarche, par rapport à la pression équivalente donnée par l'expression (1.52) dans le cadre d'une approche standard, incorpore les contributions provenant de la pression thermodynamique  $P$  du fluide non uniforme.

**Incompressibilité du solide :** En absence de porosité occluse et lorsque, comme dans le cas des sols, la phase solide du milieu poreux est formée de grains peu compressibles, la matrice solide peut être considérée comme incompressible. Il en résulte que la déformation volumétrique du milieu poreux résulte de la variation de la porosité :

$$\epsilon = \text{tr}\varepsilon = \phi - \phi_0 \quad (2.25)$$

On peut en déduire que les variables d'état  $\varepsilon$  et  $\phi$  sont liées. En choisissant  $\varepsilon$  comme variable indépendante, la dissipation intrinsèque au squelette donnée en (2.20) peut être réécrite selon :

$$\Phi_s = (\sigma + \pi 1) : \frac{d\varepsilon}{dt} - \phi P_c \frac{dS_r}{dt} - \frac{\gamma}{\phi S_r} \frac{d\nabla(\phi S_r)}{dt} - \frac{d\psi_s}{dt} - \phi \frac{dU}{dt} - \frac{d\Psi_{nl}}{dt} = 0 \quad (2.26)$$

Cette relation met en évidence un autre tenseur des contraintes, dit tenseur des contraintes effectives élastique et noté  $\sigma'$ , pouvant être directement relié à la déformation  $\varepsilon$ . Ce tenseur, thermodynamiquement associé à  $\varepsilon$ , peut être interprété comme le tenseur des contraintes responsables des déformations élastiques du squelette :

$$\sigma' = \sigma + \pi 1 \quad (2.27)$$

Dans ce cas, l'énergie élastique du solide  $\psi_s$  ne dépend que du tenseur des déformations et les lois d'état du squelette deviennent alors :

$$\sigma' = \frac{\partial \psi_s}{\partial \varepsilon} \quad (2.28a)$$

$$P_c = - \frac{dU}{dS_r} \quad (2.28b)$$

$$- \frac{\gamma}{\phi S_r} = \frac{\partial \Psi_{nl}}{\partial \nabla(\phi S_r)} \quad (2.28c)$$

En supposant un squelette poroélastique linéaire isotrope, la contrainte effective est reliée au tenseur de déformation linéarisé,  $\varepsilon$ , par le tenseur de rigidité de quatrième ordre  $\mathbb{C}^e$ , comme suit :

$$\sigma' = \mathbb{C}^e : \varepsilon \quad (2.29)$$

Cela équivaut à une loi de Hooke isotrope pour les matériaux classiques. Grâce à cette hypothèse, le tenseur de rigidité  $\mathbb{C}^e$  peut être entièrement déterminé avec la connaissance d'au moins deux constantes matérielles liées au squelette poreux, disons le module de compressibilité  $K$  et le module de cisaillement  $G$ .

$$\sigma' = (K - \frac{2}{3}G)\epsilon 1 + 2G\varepsilon \quad (2.30)$$

### 2.3.6 Loi de Darcy généralisée

Passons maintenant à la dissipation liée au transport de masse fluide  $\Phi_f$  (équation (2.16)). Une façon courante en poromécanique de satisfaire cette restriction, est de supposer que la dissipation est une fonction quadratique du vecteur de filtration,  $q = M/\rho_w$ , le coefficient de proportionnalité étant l'inverse du tenseur de mobilité d'ordre 2,  $\mathbb{K}$ . Dans cette hypothèse, on peut alors considérer la loi de conduction de masse fluide suivante, aussi appelée loi de Darcy généralisée :

$$M = -\rho_w \mathbb{K} \cdot \left\{ \frac{1}{S_r} \nabla P + \nabla \left[ \nabla \cdot \left( \frac{\gamma}{\phi S_r} \right) - P_c \right] - \frac{b^f}{\phi S_r} \right\} \quad (2.31)$$

En utilisant la définition de la pression thermodynamique donnée par l'équation (2.8) et les équations d'état (2.28b) et (2.28c), on peut récrire l'équation ci-dessus de la façon suivante :

$$M = -\rho_w \mathbb{K} \cdot \left\{ \nabla \left[ \frac{\partial \Psi_f}{\partial S_r} + \frac{\partial U}{\partial S_r} - \nabla \cdot \left( \frac{\partial \Psi_{nl}}{\partial \nabla(\phi S_r)} \right) \right] - \frac{b^f}{\phi S_r} \right\} \quad (2.32)$$

Dans le cas d'un milieu isotrope, la perméabilité se réduit à un tenseur isotrope. Les observations expérimentales nous permettent de décomposer la perméabilité  $\mathbb{K}$  selon la relation :

$$\mathbb{K} = \frac{\varkappa k(S_r)}{\eta_w} \mathbf{1} \quad (2.33)$$

avec  $\varkappa$  la perméabilité intrinsèque du milieu poreux,  $k(S_r)$  sa perméabilité relative au fluide mouillant et  $\eta_w$  la viscosité dynamique du fluide mouillant. En pratique, les forces volumiques agissant sur le fluide se limitent souvent à la pesanteur  $b_f = \rho_w \phi S_r g$ , ainsi la loi de Darcy généralisée peut être simplifiée en :

$$M = -\rho_w \frac{\varkappa k(S_r)}{\eta_w} \left\{ \nabla \left[ \frac{\partial \Psi_f}{\partial S_r} + \frac{\partial U}{\partial S_r} - \nabla \cdot \left( \frac{\partial \Psi_{nl}}{\partial \nabla(\phi S_r)} \right) \right] - \rho_w g \right\} \quad (2.34)$$

## 2.4 Cas particulier d'un milieu poreux rigide

Nous limitons notre attention dans cette section au cas d'un squelette rigide. Ainsi, seul le comportement du fluide non-uniforme saturant l'espace poreux est discuté et toute déformation est négligée ( $\varepsilon = 0$ ). La porosité reste donc constante et caractérisée par sa valeur de référence  $\phi = \phi_0$ . Cette hypothèse permet de simplifier la dissipation totale du milieu poreux (2.12) en :

$$\begin{aligned} \Phi = & -\phi P_c \frac{dS_r}{dt} - \frac{\gamma}{\phi S_r} \frac{d\nabla(\phi S_r)}{dt} - \frac{d\Psi_s}{dt} \\ & - \frac{1}{\rho_w} \left\{ \frac{1}{S_r} \nabla P + \nabla \left[ \nabla \cdot \left( \frac{\gamma}{\phi S_r} \right) - P_c \right] - \frac{b^f}{\phi S_r} \right\} \cdot M \geq 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Comme le squelette est indéformable et que les évolutions considérées sont isothermes, l'énergie libre  $\Psi_s$  du squelette se réduit à l'énergie libre des interfaces solide-fluide  $U$  et fluide-fluide  $\Psi_{nl}$ . On écrit donc :

$$\Psi_s = \Psi_s(S_r, \nabla(\phi S_r)) = \phi U(S_r) + \Psi_{nl}(\nabla(\phi S_r)) \quad (2.36)$$

de sorte que les équations d'état du squelette (2.22) et (2.52) peuvent être réduites sous la forme :

$$P_c = -\frac{\partial U}{\partial S_r} \quad (2.37a)$$

$$-\frac{\gamma}{\phi S_r} = \frac{\partial \Psi_{nl}}{\partial \nabla(\phi S_r)} \quad (2.37b)$$

De la même manière que dans la section 2.3.6, la non-négativité de la dissipation du fluide est vérifiée en considérant la loi de Darcy généralisée suivante :

$$q = \frac{M}{\rho_w} = -\frac{\kappa k(S_r)}{\eta_w} \left\{ \nabla \left[ \frac{\partial \Psi_f}{\partial S_r} + \frac{\partial U}{\partial S_r} - \nabla \cdot \left( \frac{\partial \Psi_{nl}}{\partial \nabla(\phi S_r)} \right) \right] - \rho_w g \right\} \quad (2.38)$$

En absence de force de gravité, l'équation (2.38) montre que l'écoulement du fluide non uniforme est dû au gradient d'un potentiel chimique effectif donné par :

$$\mu^{eff} = \frac{\partial \Psi_f}{\partial S_r} + \frac{\partial U}{\partial S_r} - \nabla \cdot \left( \frac{\partial \Psi_{nl}}{\partial \nabla(\phi S_r)} \right) \quad (2.39)$$

De façon similaire aux modèles d'interface diffuse en mécanique des fluides, tels que ceux mentionnés dans (Jacqmin 2000, Badalassi et al. 2003, Boyer & Lapuerta 2006, Boyer et al. 2010, Donaldson et al. 2011), le potentiel chimique,  $\mu^{eff}$ , peut être obtenu en calculant la dérivée variationnelle de l'énergie libre globale  $\Psi_{eff}$  du fluide non uniforme à l'intérieur des pores, par rapport à  $S_r$ . La densité d'une telle énergie est donnée par :

$$\Psi_{eff} = \phi \Psi_f(S_r) + \phi U(S_r) + \Psi_{nl}(\nabla(\phi S_r)) \quad (2.40)$$

Désormais, la notion d'énergie du fluide interstitiel est introduite sous la forme  $\Psi_{pf} = \Psi_f + U$ . Ainsi, en tenant compte de la forme (2.5) de l'énergie d'interface  $\Psi_{nl}$ , nous pouvons définir le potentiel chimique effectif comme suit :

$$\mu^{eff} = \frac{\partial \Psi_{pf}}{\partial S_r} - C_k \nabla \cdot (\nabla(\phi S_r)) \quad (2.41)$$

Celui-ci intègre le potentiel chimique interstitiel,  $\mu_{pf}$ , correspondant à la dérivée de l'énergie du fluide interstitiel  $\Psi_{pf}$  par rapport à  $S_r$

$$\mu_{pf} = \frac{\partial \Psi_{pf}}{\partial S_r} = \frac{\partial \Psi_f}{\partial S_r} + \frac{\partial U}{\partial S_r} = \mu - P_c \quad (2.42)$$

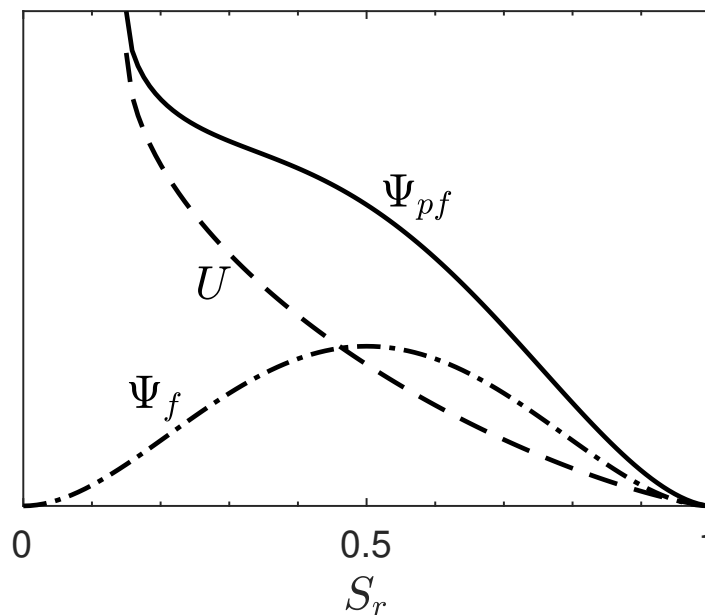


FIGURE 2.3 – Énergie du fluide interstitiel,  $\Psi_{pf}$  somme de l'énergie capillaire,  $U$  et de l'énergie à double puits,  $\Psi_f$ .

L'énergie du fluide interstitiel  $\Psi_{pf}$  décrit l'énergie globale des phases mouillante et non-mouillante constituant le fluide non-uniforme stocké dans le réseau poreux. En raison de la forme de l'énergie capillaire  $U$ ,  $\Psi_{pf}$  peut maintenir une forme à double puits similaire à celle de  $\Psi_f$  entre  $S_r = 0$  et  $S_r = 1$ . Cependant, les deux minima s'ils existent, ne sont plus isopotentiels (Figure 2.3). Dans ce cas, la règle d'aires égales de Maxwell (Figure 2.5), équivalente à la recherche de la ligne bitangente à la courbe de l'énergie  $\Psi_{pf}$  (Figure 2.4), peut être adoptée pour identifier la valeur du potentiel chimique interstitiel  $\mu_{pf}$  qui garantit la coexistence entre les deux phases. D'un point de vue physique, cela revient à dire que les minima isopotentiels peuvent exister lorsqu'une succion appropriée est appliquée à la frontière du domaine poreux. En fait, les nouveaux minima isopotentiels sont situés à l'intérieur de l'intervalle  $[0, 1]$ , plutôt que d'être à sa limite.

**Équation de Richards généralisée :** De façon similaire aux développements de la section 1.6, une extension de l'équation de Richards, peut être dérivée dans le contexte actuel de l'approche champ de phase, en substituant l'équation de Darcy généralisée (2.38) dans l'équation de conservation de la masse du fluide (2.2), ce qui implique l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre qui décrit la variation du degré de saturation

$$\phi \frac{dS_r}{dt} - \nabla \cdot \left\{ \frac{\alpha k(S_r)}{\eta_w} \left[ \nabla \left( \frac{\partial \Psi_f}{\partial S_r} + \frac{\partial U}{\partial S_r} - \nabla \cdot \left( \frac{\partial \Psi_{nl}}{\partial \nabla(\phi S_r)} \right) \right) - \rho_w g \right] \right\} = 0 \quad (2.43)$$

Selon la définition du potentiel chimique effectif donnée par l'équation (2.41), l'équation

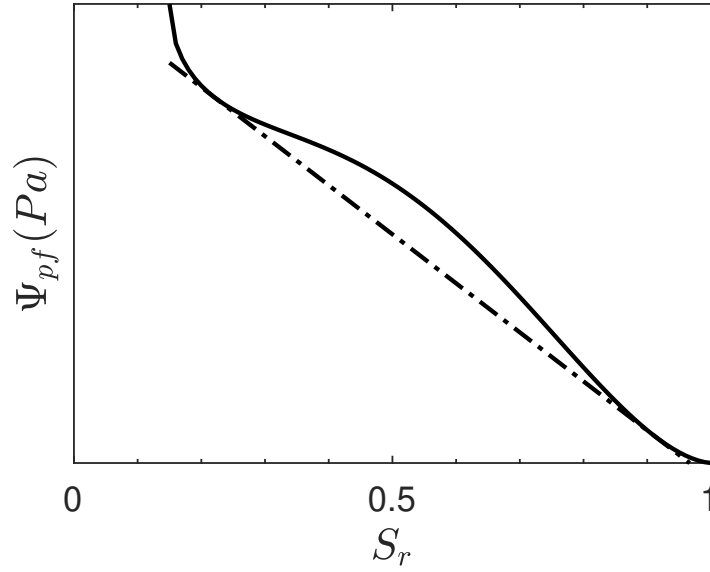


FIGURE 2.4 – Représentation graphique de la ligne bitangente à l'énergie du fluide interstitiel,  $\Psi_{pf}$ .

ci-dessus peut être réécrite comme suit :

$$\phi \frac{dS_r}{dt} - \nabla \cdot \left( \frac{\kappa k(S_r)}{\eta_w} (\nabla \mu^{eff} - \rho_w g) \right) = 0 \quad (2.44)$$

L'équation (2.44) a la même forme que l'équation de Richards, décrivant l'écoulement de l'eau à travers un milieu poreux partiellement saturé. Cependant, le potentiel chimique effectif  $\mu^{eff}$ , remplace la pression capillaire  $p_c$ , qui apparaît dans l'équation de Richards classique. Dans ce cas,  $\mu^{eff}$  dépend du degré de saturation, non pas simplement à travers une relation directe donnée par la courbe de rétention d'eau  $p_c = -(\partial U / \partial S_r)$ , mais à travers l'équation aux dérivées partielles du second ordre (2.41). Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, cette remarque est fondamentale également pour la modélisation numérique du problème, puisque le potentiel chimique effectif sera considéré comme une inconnue du problème.

L'équation (2.44) peut être réduite à l'équation de Richards en négligeant la contribution de l'énergie du fluide non uniforme,  $\Psi_f$  ainsi que la contribution de l'énergie d'interface,  $\Psi_{nl}$ .

Comme nous le verrons dans le chapitre 4, l'équation (2.44), avec des conditions aux limites et initiales appropriées, est capable de reproduire un profil de saturation non monotone, considéré comme une caractéristique essentielle des écoulements par digitation. Dans les simulations 2D, nous montrerons que cela est effectivement le cas, et que le modèle permet d'expliquer la formation des doigts pendant l'infiltration de l'eau à travers un milieu poreux partiellement saturé.

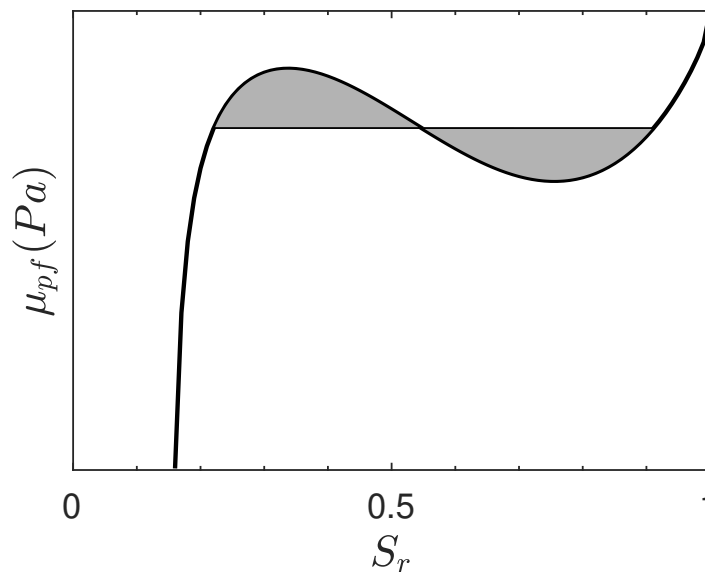


FIGURE 2.5 – Représentation graphique de la règle d'aires égales de Maxwell.

## 2.5 Comportement élastoplastique des milieux poreux partiellement saturés

La plasticité est une propriété observée dans de nombreux matériaux qui leur permet de subir des déformations permanentes après un processus complet de chargement et de déchargement. En généralisant cette définition, la poroplasticité est cette propriété des milieux poreux qui définit leur capacité à subir non seulement des déformations permanentes du squelette, mais aussi des changements permanents de la teneur en masse du fluide en raison de changements irréversibles de la porosité. Par conséquent, en raison des déformations permanentes et des changements permanents de la porosité, les évolutions poroplastiques sont irréversibles et, contrairement à la théorie poroélastique présentée dans la section 2.3.5, les déformations totales  $\varepsilon$  et la porosité totale  $\phi$  ne sont pas suffisantes pour caractériser complètement l'énergie actuelle du squelette  $\Psi_s$ . Afin de décrire les évolutions irréversibles des milieux poroélastoplastiques, des variables internes telles que les déformations plastiques  $\varepsilon^p$  et la porosité plastique  $\phi^p$  doivent donc être considérées.

Dans l'hypothèse de petites déformations, les variations de la déformation  $\dot{\varepsilon}$  et de la porosité  $\dot{\phi}$  peuvent être décomposées en leurs parties réversibles (élastiques) et irréversibles (plastiques) comme suit :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p \quad (2.45)$$

$$\dot{\phi} = \dot{\phi}^e + \dot{\phi}^p \quad (2.46)$$

La déformation plastique  $\varepsilon^p$  et la porosité plastique  $\phi^p$  sont définies par :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (2.47)$$

$$\phi - \phi_0 = \phi^e + \phi^p \quad (2.48)$$

de sorte que  $\phi^p$  est la variation irréversible du volume des pores par unité de volume initial. Il est montré que dans le cas des sols, les évolutions plastiques sont principalement dues au glissement relatif des grains constituant la matrice solide les uns contre les autres, les grains eux-mêmes étant peu déformés. Ainsi, les variations irréversibles de volume du squelette sont approximativement égales à la porosité plastique (Coussy et al. 2004) :

$$\varepsilon^p = \phi^p \quad (2.49)$$

La positivité de la dissipation attachée aux évolutions irréversibles du squelette est donnée par l'inégalité (2.15). Lorsque l'on considère des évolutions réversibles ou poroélastiques à partir de l'état actuel, les valeurs des variables internes plastiques  $\varepsilon^p$  et  $\phi^p$  restent les mêmes et il n'y a pas de dissipation. Ces évolutions font que l'inégalité (2.15) devient une égalité, ce qui conduit aux équations d'état (2.19). Ces équations ont été dérivées pour les évolutions élastiques, mais elles s'appliquent à toute évolution dès que l'énergie libre  $\Psi_s$  est continûment différentiable par rapport à l'ensemble des variables d'état.

En passant de la poro-élasticité à la poro-élasto-plasticité, les variables d'état permettant de décrire le comportement comprennent : des variables externes  $(\varepsilon, \phi, \nabla(\phi S_r))$  et des variables internes  $(\varepsilon^p, \phi^p, \chi)$ , où  $\chi$  indique les variables d'écroissage caractérisant la plasticité. Dans le cas général, il est supposé que l'énergie libre du squelette  $\Psi_s$  dépend de toutes ces variables. Cependant, l'énergie du constituant solide représente l'énergie qui peut être récupérée sous forme mécanique. Par conséquent, nous faisons dépendre  $\psi_s$  uniquement de la déformation réversible  $\varepsilon^e$  et du changement réversible de la porosité  $\phi^e$  plutôt que de la déformation et de la porosité totale, c'est-à-dire :

$$\Psi_s = \Psi_s(\varepsilon^e, \phi^e, S_r, \nabla(\phi S_r); \chi) = \psi_s(\varepsilon^e, \phi^e; \chi) + \phi U(S_r) + \Psi_{nl}(\nabla(\phi S_r)) \quad (2.50)$$

On suppose la validité de (2.19c) et (2.19d). Par le même raisonnement, l'expression (2.18) est reformulée dans ce cas :

$$\begin{aligned} \Phi_s = \left( \sigma - \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varepsilon^e} \right) : \frac{d\varepsilon^e}{dt} + \sigma : \frac{d\varepsilon^p}{dt} + \left( P - S_r P_c - \frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi^e} \right) \frac{d\phi^e}{dt} + (P - S_r P_c) \frac{d\phi^p}{dt} \\ - \frac{\partial \Psi_s}{\partial \chi} \cdot \frac{d\chi}{dt} \geq 0 \quad (2.51) \end{aligned}$$



En assumant que les équations (2.23a) et (2.23b) soient valables afin de décrire la loi contraintes-déformations élastiques, on a

$$\sigma = \frac{\partial \psi_s}{\partial \varepsilon^e} \quad (2.52a)$$

$$\pi = \frac{\partial \psi_s}{\partial \phi^e} \quad (2.52b)$$

Ce qui implique que l'inégalité de dissipation (2.51) se réduit à :

$$\Phi_s = \sigma : \frac{d\varepsilon^p}{dt} + (P - S_r P_c) \frac{d\phi^p}{dt} - \frac{\partial \Psi_s}{\partial \chi} \cdot \frac{d\chi}{dt} \geq 0 \quad (2.53)$$

En se basant sur les mêmes arguments que dans la section précédente, la forme réduite (2.53) de l'inégalité de dissipation dans le cas poro-élasto-plastique peut être formulée selon la variable de contrainte effective  $\sigma' = \sigma + \pi 1$  et on trouve :

$$\Phi_s = \sigma' : \dot{\varepsilon}^p - \frac{\partial \Psi_s}{\partial \chi} \dot{\chi} \geq 0 \quad (2.54)$$

### 2.5.1 Lois de comportement élastoplastiques

Roscoe et al. (1958, 1963) ont été les premiers à appliquer la théorie mathématique de la plasticité à la mécanique des sols, ce qui a abouti à l'élaboration du célèbre modèle Cam-Clay impliquant la contrainte effective de Terzaghi. Alonso et al. (1990) ont proposé une extension de ce modèle aux conditions non saturées. Dans un formalisme élastoplastique simple, cette extension a montré qu'il était nécessaire d'utiliser deux variables d'état de contrainte au lieu d'une contrainte effective unique pour rendre compte des observations expérimentales sur le comportement mécanique des sols non saturés. En conséquence, ce modèle a lancé les bases de nombreux modèles développés plus tard pour les sols non saturés et abordant des aspects supplémentaires (Kohgo et al. 1993, Modaressi & Abou-Bekr 1994, Bolzon et al. 1996, Loret & Khalili 2000, 2002, Gallipoli et al. 2003, Wheeler et al. 2003, Sheng et al. 2004, Santagiuliana & Schrefler 2006).

Il est maintenant largement accepté que les lois constitutives des sols non saturés peuvent être formulées avantageusement dans le cadre de l'élastoplasticité et différents modèles ont été proposés au cours des dernières décennies. Tous sont construits en étendant les lois constitutives des sols saturés. Différentes approches peuvent être suivies dans la modélisation constitutive, chacune d'elles présentant des avantages et des inconvénients. Les modèles constitutifs pour les sols non saturés sont généralement formulés en termes de deux variables de contrainte séparées en suivant le travail d'Alonso et al. (1990). Cependant, la contrainte effective du squelette  $\sigma'$ , définie comme la différence entre la contrainte totale

$\sigma$  et la pression de fluide équivalente  $\pi$ , peut également être adoptée avantageusement. Ce dernier choix permet une reproduction naturelle de certains aspects du comportement mécanique global. Néanmoins, des paramètres constitutifs supplémentaires sont généralement nécessaires afin de décrire certains aspects du comportement hydromécanique non saturé couplé.

L'utilisation de la contrainte effective permet de simplifier la transition entre saturations totale et partielle. D'autre part, elle permet de réutiliser un grand nombre de modèles élastoplastiques déjà validés en mécanique des sols saturés puisque ces derniers utilisent la contrainte effective de Terzaghi. Toutefois, le principe de contrainte effective ne peut pas interpréter à lui seul tous les phénomènes qui caractérisent le comportement des sols non saturés. En effet, le phénomène d'effondrement (Barden et al. 1973, Lawton et al. 1992), défini comme étant le tassement rapide du sol partiellement saturé résultant de l'augmentation de la teneur en eau pour une contrainte totale essentiellement constante, est souvent cité comme une preuve de l'invalidité du principe de contrainte effective pour décrire le comportement des sols non saturés (Jennings & Burland 1962, Wheeler & Sivakumar 1995).

Dans cette section on décrit un modèle dans lequel on suppose une dépendance explicite de la taille de la surface de charge par rapport au degré de saturation pour décrire le phénomène d'effondrement lors du mouillage des sols partiellement saturés. Les relations constitutives élastique-plastiques sont dérivées en utilisant le concept d'état critique, (Schofield & Wroth 1968), et le modèle de Cam-Clay modifié. La fonction de charge est définie dans l'espace des contraintes effectives, mais sa taille est affectée à la fois par les variations volumétriques plastiques et le degré de saturation, comme dans (Jommi 2000, Tamagnini 2004, Rotisciani et al. 2015).

## 2.5.2 Le modèle non standard de CAM-CLAY

### Hypothèses de modélisation

Comme déjà mis en évidence dans la section 1.4.3, le modèle présenté ici adopte la convention de signe de la mécanique des milieux continus : les contraintes et les pressions (respectivement les déformations) sont comptées positivement en traction (respectivement en dilatance) et négativement en compression (respectivement en contraction).

La variable d'état utilisée pour formuler le modèle élastoplastique est la contrainte effective,  $\sigma'$  donnée par la relation (2.27) et rappelée ici :

$$\sigma' = \sigma + \pi 1 \quad (2.55)$$

La pression de pore équivalente  $\pi$ , nécessaire pour définir la contrainte effective ci-dessus, est basée sur le cadre thermodynamique évoqué plutôt (section 2.3.5). En utilisant la définition de la pression thermodynamique (2.8) dans l'équation (2.24),  $\pi$  peut être exprimée comme suit :

$$\pi = S_r(\mu - P_c) - (\Psi_f + U) \quad (2.56)$$

La formulation du nouveau modèle nécessite de modifier la contrainte effective. Ainsi, la contrainte effective saturée qui apparaît dans le modèle standard de Cam-Clay doit être remplacée par la contrainte modifiée définie par l'expression (2.55).

### Surface de charge

On introduit quelques quantités importantes pour la définition de la surface de charge. D'abord  $p'$  comme la pression effective moyenne et  $s'$  la partie déviatorique du tenseur des contraintes effectives :

$$p' = -\frac{\text{tr}\sigma'}{3} \quad (2.57)$$

$$s' = \sigma' + p'1 \quad (2.58)$$

On introduit également  $J_2$  comme le deuxième invariant de  $s'$  et la contrainte déviatorique  $q'$  :

$$J_2 = \frac{1}{2}s' : s' \quad (2.59)$$

$$q' = \sqrt{3J_2} \quad (2.60)$$

Pour le modèle de Cam-Clay modifié (MCC), la fonction de charge  $f$  est donnée comme suit :

$$f = f(p', q', p_c) = q'^2 + M^2 p' (p' - p_c) \quad (2.61)$$

La surface de charge ( $f = 0$ ) représente une ellipse dans le plan  $p'$ - $q'$ , comme indiqué dans la figure 2.6. La surface de charge est la limite des états de contraintes élastiques. Les chemins de contrainte à l'intérieur de cette limite ne donnent que des incréments de déformation élastique, alors que les chemins de contrainte qui arrivent et évoluent sur la surface limite donnent à la fois des incréments de déformation élastique et plastique. Dans le plan  $p'$ - $q'$ , le sommet de l'ellipse intersecte une ligne qui peut être écrite comme suit :

$$q' = Mp' \quad (2.62)$$

Cette ligne est appelée ligne d'état critique (CSL). La constante  $M$  définit la pente de la ligne d'état critique, elle peut être reliée à l'angle de frottement interne  $\varphi$  selon la relation :

$$M = \frac{6 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} \quad (2.63)$$

Par conséquent,  $M$  peut être considéré comme une constante de frottement. De plus,  $M$  détermine la forme de la surface de charge (hauteur de l'ellipse).

La pression de préconsolidation,  $p_c$  dans l'équation (2.61), détermine la taille de l'ellipse. Il s'agit de la pression effective moyenne maximale à laquelle le matériau a été soumis au cours de son histoire.  $p_c$  joue aussi le rôle de variable d'écroûissage isotrope.

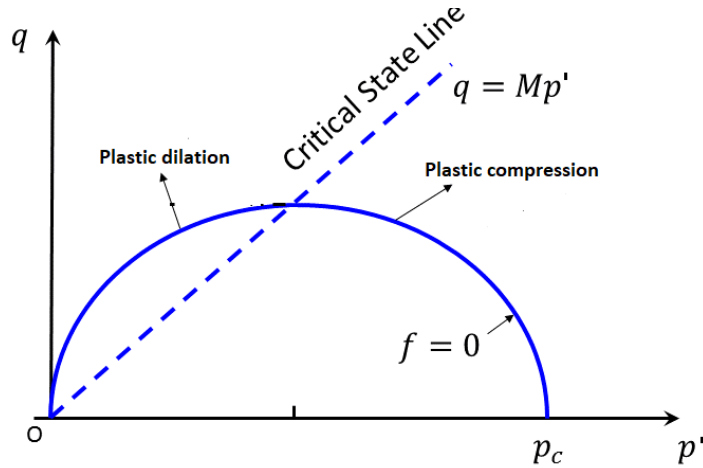


FIGURE 2.6 – Surface de charge de Cam-Clay.

### Loi d'écoulement plastique

Pour des raisons de simplicité, on suppose que le sol obéit à la condition de normalité et que le potentiel plastique  $g$  est donné par la même famille de courbes que la fonction de charge, de sorte que (Wood 1990) :

$$g = f = q'^2 + M^2 p' (p' - p_c) \quad (2.64)$$

La direction de l'incrément de déformation plastique est normale à la surface de charge et la règle d'écoulement associée est supposée. Par conséquent, les variations de la déformation plastique peuvent être calculées comme suit :

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \quad (2.65)$$

avec  $\dot{\lambda}$  le multiplicateur plastique. La loi d'écoulement peut être réexprimée en utilisant les invariants  $p'$  et  $q'$ , par une application directe de la règle de dérivation en chaîne :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma'} = \frac{\partial f}{\partial p'} \frac{\partial p'}{\partial \sigma'} + \frac{\partial f}{\partial q'} \frac{\partial q'}{\partial \sigma'} = -\frac{\partial f}{\partial p'} \frac{1}{3} + \frac{\partial f}{\partial q'} \sqrt{\frac{3}{2}} \hat{n} \quad (2.66)$$

où  $\hat{n} = s'/\|s'\|$ . Les dérivées de  $f$  par rapport à  $p'$  et  $q'$  peuvent être obtenues à partir de (2.61) comme suit :

$$\frac{\partial f}{\partial p'} = 2p' - p_c \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q'} = \frac{2q'}{M^2} \quad (2.68)$$

Le multiplicateur plastique  $\dot{\Lambda}$  peut être calculé à partir de la condition de consistance :  $f = 0$  et  $\dot{f} = 0$ . Cette dernière stipule qu'au cours d'un chargement plastique, le point représentatif de l'état de contrainte doit se trouver et rester sur la surface de charge.

### Loi d'écrouissage

Dans le cas des sols non saturés, il est intéressant d'inclure dans la formulation du modèle élasto-plastique, et plus particulièrement dans la loi d'écrouissage, l'effet de la saturation progressive du réseau poreux. Suivant une approche similaire à celle développée par [Nova et al. \(2003\)](#) pour décrire les déformations plastiques dans les géomatériaux induites par une dégradation chimique ou mécanique, une approche a été proposée par [Tamagnini \(2004\)](#) et exploitée par [Rotisciani et al. \(2015\)](#) pour décrire les déformations plastiques dans les géomatériaux causées par la rupture des ponts capillaires induite par la saturation.

Dans le modèle de Cam-Clay étendu par [Tamagnini \(2004\)](#), la variable  $p_c$ , qui décrit l'écrouissage isotrope dans le MCC classique, est définie par un double écrouissage qui rend compte séparément d'un paramétrage de  $p_c$  par le taux de déformation plastique ainsi que par la variation du degré de saturation. Par conséquent, l'évolution de la pression de préconsolidation peut être formulée comme suit :

$$\dot{p}_c = \dot{p}_{c(sat)} + \dot{p}_{c(unsat)} \quad (2.69)$$

Le premier terme à droite de l'équation ci-dessus décrit l'évolution de la pression de préconsolidation dans les sols saturés tandis que le second dans les sols non saturés. Les deux termes peuvent être formulés comme suit :

$$\dot{p}_{c(sat)} = -v p_c \dot{\varepsilon}_v^p \quad \text{avec} \quad \dot{\varepsilon}_v^p = \text{tr} \dot{\varepsilon}^p \quad \text{et} \quad v = \frac{1+e}{\lambda - \kappa} \quad (2.70)$$

où  $\dot{\varepsilon}_v^p$  indique le taux de la déformation plastique volumétrique,  $e$  l'indice des vides du matériau,  $\lambda$  le coefficient de compressibilité et  $\kappa$  le coefficient de gonflement. Ce terme, qui correspond à la loi d'écrouissage du MCC classique, décrit l'évolution de la surface de charge en fonction de la variation de la déformation plastique volumétrique.

Le deuxième terme à droite de l'équation (2.69) décrit l'évolution de la surface de charge, causée par des variations dans le degré de saturation. Ce terme est formulé comme suit :

$$\dot{p}_{c(unsat)} = -\beta p_c \dot{S}_r \quad (2.71)$$

où  $\beta$  est un nouveau paramètre constitutif à calibrer. L'équation (2.71) implique que la pression de préconsolidation diminue avec l'augmentation du degré de saturation, ce qui provoque la réduction de taille de la surface de charge et peut induire la plastification du squelette même à une contrainte effective constante.

### La relation contrainte déformation

Après le début de la plastification, le comportement du matériau sera en partie élastique et en partie plastique, de sorte que les changements de déformation sont supposés être divisibles en composantes élastiques et plastiques :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p \quad (2.72)$$

La variation de la contrainte est reliée à la variation de la déformation par :

$$\dot{\sigma}' = \mathbb{C}^e (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \quad (2.73)$$

La combinaison des équations (2.78) et (2.65) donne :

$$\dot{\sigma}' = \mathbb{C}^e \dot{\varepsilon} - \mathbb{C}^e \dot{\Lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \quad (2.74)$$

La quantité de déformation plastique calculée à l'aide de l'équation (2.65) nécessite la détermination du multiplicateur plastique  $\dot{\Lambda}$ . Lors d'un chargement plastique, l'état de contrainte reste sur la surface de charge ( $f = 0; \dot{f} = 0$ ). En dérivant  $f$  nous avons :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma'} : \dot{\sigma}' + \frac{\partial f}{\partial p_c} \dot{p}_c = 0 \quad (2.75)$$

On considère la loi d'écroissage (2.69) ainsi que l'équation (2.74) et on écrit :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma'} : \mathbb{C}^e \dot{\varepsilon} - \frac{\partial f}{\partial \sigma'} : \mathbb{C}^e \dot{\Lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma'} - \frac{\partial f}{\partial p_c} v p_c \dot{\varepsilon}_v^p - \frac{\partial f}{\partial p_c} \beta p_c \dot{S}_r = 0 \quad (2.76)$$

à partir de laquelle nous obtenons l'expression du multiplicateur plastique  $\dot{\Lambda}$  :

$$\dot{\Lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma'} : \mathbb{C}^e \dot{\varepsilon} - \frac{\partial f}{\partial p_c} \beta p_c \dot{S}_r}{\frac{\partial f}{\partial \sigma'} : \mathbb{C}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma'} + H} \quad \text{avec} \quad H = -v p_c \frac{\partial f}{\partial p'} \frac{\partial f}{\partial p_c} \quad (2.77)$$

Finalement, la relation contrainte déformation (2.78) s'écrit maintenant :

$$\dot{\sigma}' = \mathbb{C}^{ep} : \dot{\varepsilon} - \mathbb{C}^e : \frac{\frac{\partial f}{\partial p_c} \beta p_c \frac{\partial f}{\partial \sigma'}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma'} : \mathbb{C}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma'} + H} \dot{S}_r \quad (2.78)$$

où  $\mathbb{C}^{ep}$  est le module élastoplastique continu donné par :

$$\mathbb{C}^{ep} = \mathbb{C}^e - \frac{\mathbb{C}^e : \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \otimes \frac{\partial f}{\partial \sigma'} : \mathbb{C}^e}{\frac{\partial f}{\partial \sigma'} : \mathbb{C}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma'} + H} \quad (2.79)$$

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle champ de phase a été formulé dans le cadre de la théorie des milieux poreux déformables afin de tenir compte, à l'échelle macroscopique, des couplages hydro-mécaniques entre l'écoulement par digitation ("Gravity fingering") et les déformations du squelette. Une loi de comportement élastoplastique a été également introduite afin de compléter la description du comportement du milieu poreux. L'objectif poursuivi dans le chapitre suivant sera de proposer une stratégie numérique adaptée à la résolution de ce problème couplé et non linéaire.

---

## CHAPITRE 3 : MODÉLISATION ÉLÉMENTS FINIS

---

3.1	Équations du problème . . . . .	55
3.2	Formulation variationnelle . . . . .	56
3.2.1	Formulation variationnelle de l'équation d'équilibre mécanique . . . . .	57
3.2.2	Formulation variationnelle de l'équation de conservation de la masse . . . . .	57
3.2.3	Formulation variationnelle de l'équation du potentiel chimique . . . . .	58
3.2.4	Synthèse de la formulation variationnelle . . . . .	58
3.3	Formulation éléments finis . . . . .	59
3.3.1	Discrétisation spatiale . . . . .	59
3.3.2	Système matriciel à résoudre . . . . .	62
3.3.3	Discrétisation temporelle . . . . .	62
3.3.4	La résolution numérique du problème . . . . .	64
3.4	Intégration numérique de la loi de comportement . . . . .	65
3.4.1	Prédiction élastique . . . . .	66
3.4.2	Correction plastique . . . . .	67
3.4.3	Matrice tangente . . . . .	69
3.5	Implémentation numérique . . . . .	69
3.6	conclusion . . . . .	71

---

Nous nous proposons, dans ce chapitre, d'étudier en détail la résolution numérique du problème d'écoulement dans un milieu poreux partiellement saturé déformable décrit dans le chapitre précédent par la méthode des éléments finis. Dans un premier temps, la for-



mulation du problème global à résoudre est présentée. La mise sous forme variationnelle et la discrétisation spatiale et temporelle sont ensuite abordées. Finalement, l'algorithme d'intégration de la loi de comportement élastoplastique est présenté.

L'équation de conservation de la masse du fluide non uniforme (2.2), équipée de la loi de Darcy généralisée (2.38), fait intervenir un opérateur différentiel du quatrième ordre. Par conséquent, la simulation numérique du modèle proposé en plusieurs dimensions est plus complexe que des calculs similaires avec l'équation de Richards standard, qui ne fait intervenir qu'un opérateur différentiel du deuxième ordre. Dans le contexte actuel, le point de référence est donné par les travaux sur la simulation numérique de l'équation de Cahn-Hilliard. En effet, les méthodologies numériques traditionnelles pour traiter les opérateurs d'ordre supérieur sur des géométries très simples comprennent les différences finies (Sun 1995, Furuhata 2001) et les approximations spectrales (Zhu et al. 1999, Liu & Shen 2003, Ye & Cheng 2005). Dans les applications d'ingénierie réelles, les géométries simples ne sont pas très pertinentes et il est donc nécessaire d'utiliser des méthodes plus flexibles sur le plan géométrique. C'est principalement pour cette raison que la méthode des éléments finis est la plus largement utilisée dans le domaine de l'ingénierie. La principale caractéristique de la méthode des éléments finis réside dans le traitement des opérateurs différentiels d'ordre 2. La raison en est que la formulation variationnelle des opérateurs différentiels du second ordre impliquent l'intégration de produits de dérivées premières. Celles-ci sont bien définies et intégrables si les fonctions de base des éléments finis sont de classe  $C^0$ , ce qui est précisément le cas des fonctions standard des éléments finis. En revanche, les opérateurs d'ordre 4 nécessitent des fonctions de base qui sont de classe  $C^1$  (voir les applications à l'équation de Cahn-Hilliard dans (Kirby & Mitchell 2019)). Cependant, il existe un nombre très limité d'éléments finis de classe  $C^1$  dans la littérature et leur implémentation numérique impose plus de difficultés (Manzari & Yonten 2013). Pour ces raisons, les solutions par éléments finis de l'équation de Cahn-Hilliard ne sont pas courantes.

La façon la plus courante de résoudre cette équation par éléments finis est d'utiliser des méthodes mixtes (Elliott & French 1987, Du & Nicolaidis 1991, Blowey & Elliott 1992, Barrett et al. 1999, Feng & Prohl 2004, Barrett et al. 2006). Le principe de la méthode des éléments finis mixte est de récrire l'équation d'ordre 4 comme un système couplé de deux équations aux dérivées partielles d'ordre 2, qui peuvent être résolues à l'aide des éléments finis standards. Cette méthode conduit à l'introduction d'un degré de liberté supplémentaire en plus des inconnues primaires.

### 3.1 Équations du problème

En utilisant la méthode des éléments finis mixtes mentionnée ci-dessus, les variables d'état externes du problème poromécanique seront à compter de maintenant le déplacement du squelette  $u$ , le potentiel chimique effectif  $\mu^{eff}$  et le degré de saturation  $S_r$ .

Considérons un domaine borné  $\Omega \subset R^2$  de contour  $\Gamma$  et de normale unitaire sortante  $n$ . La frontière  $\Gamma$  est décomposée en deux parties  $\Gamma_D^\alpha$  et  $\Gamma_N^\alpha$  telle que  $\Gamma = \Gamma_D^\alpha \cup \Gamma_N^\alpha$ ,  $\Gamma_D^\alpha$  étant la portion de frontière sur laquelle des conditions de Dirichlet sont imposées et  $\Gamma_N^\alpha$  étant la portion de frontière sur laquelle des conditions de Neumann sont imposées. Les surfaces  $\Gamma_D^\alpha$  et  $\Gamma_N^\alpha$  sont complémentaires, c'est-à-dire qu'en tout point de  $\Gamma$ , une et une seule condition aux limites (de Dirichlet ou de Neumann) est imposée dans chaque direction de l'espace. Pour le champ des déplacements, la frontière  $\Gamma$  est décomposée en  $\Gamma_D^u$  sur laquelle les déplacements sont imposés dans chaque direction de l'espace et  $\Gamma_N^u$  la partie de la frontière sur laquelle des forces surfaciques sont imposées, tel que :

$$\Gamma = \Gamma_D^u \cup \Gamma_N^u \quad (3.1)$$

$$\emptyset = \Gamma_D^u \cap \Gamma_N^u \quad (3.2)$$

$\emptyset$  est l'ensemble vide. Pour le potentiel chimique, la frontière  $\Gamma$  est décomposée en  $\Gamma_D^\mu$  sur laquelle le potentiel chimique est imposé et  $\Gamma_N^\mu$  la partie de la frontière sur laquelle le flux hydraulique est imposé, tel que :

$$\Gamma = \Gamma_D^\mu \cup \Gamma_N^\mu \quad (3.3)$$

$$\emptyset = \Gamma_D^\mu \cap \Gamma_N^\mu \quad (3.4)$$

Finalement, pour le degré de saturation, la même frontière  $\Gamma$  est décomposée en  $\Gamma_D^{S_r}$  sur laquelle le degré de saturation est imposé et  $\Gamma_N^{S_r}$  la partie de la frontière sur laquelle la dérivée normale de  $\phi S_r$  est imposée, tel que :

$$\Gamma = \Gamma_D^{S_r} \cup \Gamma_N^{S_r} \quad (3.5)$$

$$\emptyset = \Gamma_D^{S_r} \cap \Gamma_N^{S_r} \quad (3.6)$$

Les équations qui caractérisent donc la forme forte du problème différentiel, données pour les inconnus  $u$ ,  $\mu^{eff}$  et  $S_r$  sont listées ci-dessous :

$$div \sigma + \rho g = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, t^F] \quad (3.7)$$

$$\frac{d\phi S_r}{dt} = \nabla \cdot \left\{ \frac{\kappa k(S_r)}{\eta} [\nabla \mu^{eff} - \rho_w g] \right\} \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, t^F] \quad (3.8)$$

$$\mu^{eff} = \frac{\partial (\Psi_f + U)}{\partial S_r} - c \nabla \cdot (\nabla (\phi S_r)) \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0, t^F] \quad (3.9)$$

où  $t^F$  désigne un temps fini de simulation, avec les conditions aux bords

$$u = u_d \quad \text{sur} \quad \Gamma_D^u \times [0, t^F] \quad (3.10)$$

$$\sigma.n = T \quad \text{sur} \quad \Gamma_N^u \times [0, t^F] \quad (3.11)$$

$$\mu^{eff} = \mu_d \quad \text{sur} \quad \Gamma_D^\mu \times [0, t^F] \quad (3.12)$$

$$\frac{\varkappa k(S_r)}{\eta} (\nabla \mu^{eff} - \rho_w g).n = -q_w \quad \text{sur} \quad \Gamma_N^\mu \times [0, t^F] \quad (3.13)$$

$$S_r = S_{rd} \quad \text{sur} \quad \Gamma_D^{S_r} \times [0, t^F] \quad (3.14)$$

$$c \nabla(\phi S_r).n = -q_{S_r} \quad \text{sur} \quad \Gamma_N^{S_r} \times [0, t^F] \quad (3.15)$$

et les conditions initiales :

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{dans} \quad \Omega \quad (3.16)$$

$$\mu^{eff}(x, 0) = \mu_0(x) \quad \text{dans} \quad \Omega \quad (3.17)$$

$$S_r(x, 0) = S_0(x) \quad \text{dans} \quad \Omega \quad (3.18)$$

$x \in \Omega$  est le vecteur position.

## 3.2 Formulation variationnelle

On dérive la forme variationnelle du problème aux limites donné par l'ensemble des équations (3.7) - (3.18), en utilisant le champ de déplacement, le potentiel chimique et le degré de saturation comme variables principales. Cette forme est importante pour la résolution numérique du problème par la méthode des éléments finis.

Pour mettre en œuvre la formulation faible, il est utile d'introduire dans un premier temps les ensembles de champs admissibles par rapport aux données du problème considéré. Comme il existe trois types d'inconnues, le champ de déplacement, le potentiel chimique et le degré de saturation, définissons les six ensembles suivants :

$$\mathbb{H}_u := \{u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n) : u = u_d \text{ sur } \Gamma_D^u\} \quad (3.19)$$

$$\mathbb{H}_u^0 := \{u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n) : u = 0 \text{ sur } \Gamma_D^u\} \quad (3.20)$$

$$\mathbb{H}_\mu := \{\mu^{eff} \in H^1(\Omega) : \mu^{eff} = \mu_d \text{ sur } \Gamma_D^\mu\} \quad (3.21)$$

$$\mathbb{H}_\mu^0 := \{\mu^{eff} \in H^1(\Omega) : \mu^{eff} = 0 \text{ sur } \Gamma_D^\mu\} \quad (3.22)$$

$$\mathbb{H}_{S_r} := \{S_r \in H^1(\Omega) : S_r = S_{rd} \text{ sur } \Gamma_D^{S_r}\} \quad (3.23)$$

$$\mathbb{H}_{S_r}^0 := \{S_r \in H^1(\Omega) : S_r = 0 \text{ sur } \Gamma_D^{S_r}\} \quad (3.24)$$

où  $H^1(\Omega)$  est l'espace de Hilbert qui désigne l'ensemble des fonctions de carré intégrable dont les dérivées spatiales sont aussi de carré intégrable.

### 3.2.1 Formulation variationnelle de l'équation d'équilibre mécanique

La forme variationnelle ou forme faible associée à l'équation locale d'équilibre mécanique (3.7) est équivalente au principe des travaux virtuels qui traduit l'équilibre entre le travail des forces extérieures appliquées au système et le travail des forces internes, ce principe s'écrit :

$$\int_{\Omega} \sigma : \delta \varepsilon dV = \int_{\Omega} f \cdot \delta u dV + \int_{\Gamma_N^u} T \cdot \delta u dS \quad (3.25)$$

où  $\delta u \in \mathbb{H}_u^0$  est le champ des déplacements virtuels cinématiquement admissibles à zéro et  $\delta \varepsilon$  le champ des déformations virtuelles correspondant. Le terme à gauche de l'égalité (3.25) correspond au travail virtuel des efforts internes et le terme à droite au travail virtuel des efforts externes.

En utilisant la définition de la contrainte effective (2.27) dont l'expression est rappelée ici :

$$\sigma' = \sigma + \pi 1 \quad (3.26)$$

on obtient :

$$\int_{\Omega} (\sigma' - 1\pi) : \delta \varepsilon dV = \int_{\Omega} f \cdot \delta u dV + \int_{\Gamma_N^u} T \cdot \delta u dS \quad (3.27)$$

### 3.2.2 Formulation variationnelle de l'équation de conservation de la masse

Pour établir la formulation faible de l'équation (3.8), fixons un instant  $t \in [0, t^F]$ , multiplions l'équation (3.8) par un champ virtuel  $\delta \mu \in \mathbb{H}_{\mu}^0$  et intégrons le résultat sur  $\Omega$ . Cela conduit à la relation :

$$\int_{\Omega} \frac{d\phi S_r}{dt} \delta \mu dV = \int_{\Omega} \nabla \cdot \left\{ \frac{\varkappa k(S_r)}{\eta} [\nabla \mu^{eff} - \rho_w g] \right\} \delta \mu dV \quad (3.28)$$

Ensuite, la formule d'intégration par partie est appliquée à la deuxième intégrale, qui donne

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot \left\{ \frac{\varkappa k(S_r)}{\eta} [\nabla \mu^{eff} - \rho_w g] \right\} \delta \mu dV &= \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\varkappa k(S_r)}{\eta} [\nabla \mu^{eff} - \rho_w g] \right\} \cdot n \delta \mu dS \\ &\quad - \int_{\Omega} \left\{ \frac{\varkappa k(S_r)}{\eta} [\nabla \mu^{eff} - \rho_w g] \right\} \cdot \nabla \delta \mu dV \end{aligned} \quad (3.29)$$

Tenant compte de la condition au bord (3.13) et de l'hypothèse  $\delta \mu \in \mathbb{H}_{\mu}^0$ , l'intégrale sur la surface dans la dernière expression prend la forme :

$$\int_{\Gamma} \left\{ \frac{\varkappa k(S_r)}{\eta} [\nabla \mu^{eff} - \rho_w g] \right\} \cdot n \delta \mu dS = \int_{\Gamma_N^{\mu}} -q_w \delta \mu dS \quad (3.30)$$

La combinaison des expressions (3.28), (3.29) et (3.30) conduit à la formulation faible

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi \frac{dS_r}{dt} \delta\mu dV + \int_{\Omega} S_r \frac{d\phi}{dt} \delta\mu dV + \int_{\Omega} \left\{ \frac{\varkappa k(S_r)}{\eta} [\nabla\mu^{eff} - \rho_w g] \right\} \cdot \nabla \delta\mu dV \\ = \int_{\Gamma_N^\mu} -q_w \delta\mu dS \end{aligned} \quad (3.31)$$

### 3.2.3 Formulation variationnelle de l'équation du potentiel chimique

Suivant la même démarche, la formulation faible de l'équation locale (3.9) est obtenue en multipliant cette dernière par un champ de saturation virtuel  $S_r \in \mathbb{H}_{S_r}^0$  et en intégrant le résultat sur  $\Omega$ . Ce qui conduit à la relation :

$$\int_{\Omega} \mu \delta S_r dV = \int_{\Omega} \frac{\partial(\Psi_f + U)}{\partial S_r} \delta S_r dV - \int_{\Omega} c \nabla \cdot (\nabla(\phi S_r)) \delta S_r dV \quad (3.32)$$

Ensuite, la formule d'intégration par parties est appliquée à la troisième intégrale, qui donne

$$\int_{\Omega} \mu \delta S_r dV - \int_{\Omega} \frac{\partial(\Psi_f + U)}{\partial S_r} \delta S_r dV - \int_{\Omega} c \nabla(\phi S_r) \cdot \nabla(\delta S_r) dV = \int_{\Gamma_N^{S_r}} q_{S_r} \delta S_r dS \quad (3.33)$$

L'intégrale sur la surface dans la dernière égalité résulte de la condition au bord (3.15) et de l'hypothèse  $\delta S_r \in \mathbb{H}_{S_r}^0$ .

### 3.2.4 Synthèse de la formulation variationnelle

Après l'écriture des équations du problème sous une forme faible en tenant compte des conditions aux limites définies précédemment, le nouveau problème à résoudre obtenu est :

Trouver  $(u, \mu^{eff}, S_r) \in \mathbb{H}_u \times \mathbb{H}_\mu \times \mathbb{H}_{S_r}$  tel que  $\forall (\delta u, \delta\mu, \delta S_r) \in \mathbb{H}_u^0 \times \mathbb{H}_\mu^0 \times \mathbb{H}_{S_r}^0$  :

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega} (\sigma' - 1\pi) : \delta\varepsilon dV &= \int_{\Omega} f \cdot \delta u dV + \int_{\Gamma_N^u} T \cdot \delta u dS \\ \int_{\Omega} \phi \frac{dS_r}{dt} \delta\mu dV + \int_{\Omega} S_r \frac{d\phi}{dt} \delta\mu dV + \int_{\Omega} \left\{ \frac{\varkappa k(S_r)}{\eta} [\nabla\mu^{eff} - \rho_w g] \right\} \cdot \nabla \delta\mu dV &= \int_{\Gamma_N^\mu} -q_w \delta\mu dS \\ \int_{\Omega} \mu \delta S_r dV - \int_{\Omega} \frac{\partial(\Psi_f + U)}{\partial S_r} \delta S_r dV - \int_{\Omega} c \nabla(\phi S_r) \cdot \nabla(\delta S_r) dV &= \int_{\Gamma_N^{S_r}} q_{S_r} \delta S_r dS \end{aligned} \right. \quad (3.34)$$

Ce problème est continu en temps et en espace. Sa mise en œuvre numérique se base sur une double discrétisation : spatiale, en utilisant la méthode des éléments finis et temporelle à travers la discrétisation de la dérivée par rapport au temps.

La formulation faible donnée par les équations (3.34) ci-dessus doit être complétée par les équations qui fournissent à tout moment la valeur actuelle de la contrainte effective en fonction de la déformation plastique. Ce sont des équations locales qui ne nécessitent pas de conditions aux limites et sont donc simplement résolues localement. Une présentation détaillée de l'approche à utiliser dans ce but est proposée dans la section 3.4.

### 3.3 Formulation éléments finis

La méthode des éléments finis est une technique numérique qui, à partir de la forme variationnelle continue du problème (3.34), permet de dériver un système d'équations discrètes. Les inconnues de ce système sont les degrés de liberté nodaux. Pour plus de détails sur la méthode des éléments finis, le lecteur est invité à consulter les ouvrages de [Zienkiewicz & Taylor \(2000\)](#), [Bathe \(2006\)](#) et [Hughes \(2012\)](#).

#### 3.3.1 Discrétisation spatiale

La méthode des éléments finis, basée sur la méthode de Galerkin, consiste à discrétiser le domaine  $\Omega$  en un ensemble d'éléments finis  $\Omega^e$ .

$$\Omega = \bigcup \Omega^e \quad (3.35)$$

Dans chaque élément fini  $\Omega^e$ , les inconnues sont calculées par interpolation polynomiale à partir de leurs valeurs dans un nombre fini de nœuds, ces dernières sont appelées degrés de liberté de l'élément fini.

Dans notre cas d'étude, les degrés de liberté sont :

- Les composantes du vecteur de déplacement  $u$

$$\bar{u} = [u_x^1, u_y^1, \dots, u_x^{N^e}, u_y^{N^e}]^T \quad (3.36)$$

- Le potentiel chimique effectif  $\mu^{eff}$

$$\bar{\mu} = [\mu^1, \dots, \mu^{N^e}]^T \quad (3.37)$$

- Le degré de saturation  $S_r$

$$\bar{S}_r = [S_r^1, \dots, S_r^{N^e}]^T \quad (3.38)$$

où  $N^e$  est le nombre de nœuds dans l'élément fini  $\Omega^e$ .

À chaque degré de liberté correspond une matrice d'interpolation, notée respectivement  $N_u$ ,  $N_\mu$ ,  $N_s$  et composée des fonctions d'interpolation élémentaires,  $N^i$ , avec  $i = 1, \dots, N^e$ , comme suit :

$$N_u = \begin{bmatrix} N^1 & 0 & \dots & N^{N^e} & 0 \\ 0 & N^1 & \dots & 0 & N^{N^e} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$N_\mu = \begin{bmatrix} N^1 & \dots & N^{N^e} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$N_s = \begin{bmatrix} N^1 & \dots & N^{N^e} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Les inconnues en un point de l'élément fini  $\Omega^e$  sont données à partir des valeurs nodales des degrés de liberté et de leurs fonctions d'interpolation associées :

$$u = N_u \bar{u} \quad (3.42)$$

$$\mu^{eff} = N_\mu \bar{\mu} \quad (3.43)$$

$$S_r = N_s \bar{S}_r \quad (3.44)$$

L'ordre polynomial des fonctions de forme, ainsi que le nombre de nœuds par élément,  $N^e$ , sont déterminés par le choix du type d'élément fini  $\Omega^e$  posé par l'utilisateur. Par analogie, les déformations  $\varepsilon$  et les gradients de  $\mu$  et  $S_r$  en un point de l'élément fini s'écrivent quant à elles en fonction des valeurs nodales des degrés de liberté par l'expression :

$$\varepsilon = B \bar{u} \quad (3.45)$$

$$\nabla \mu^{eff} = \nabla N_\mu \bar{\mu} \quad (3.46)$$

$$\nabla S_r = \nabla N_s \bar{S}_r \quad (3.47)$$

où  $B$ ,  $\nabla N_\mu$ ,  $\nabla N_s$  sont les matrices constituées des dérivées spatiales des fonctions d'interpolation (voir annexe A.1 pour la forme de ces matrices).

À partir de l'équation (2.25), la porosité en un point de l'élément fini s'écrit quant à elle en fonction des valeurs nodales des déplacements par l'expression :

$$\phi - \phi_0 = B^\epsilon \bar{u} \quad (3.48)$$

où  $B^\epsilon$  est une matrice constituée des dérivées spatiales des fonctions d'interpolation, dont la forme est donnée dans l'annexe A.1.

À partir de maintenant, on considère les deux espaces des solutions et des fonctions tests comme coïncident, en particulier l'approximation basée sur les fonctions d'interpolation

adaptées aux éléments finis sera utilisée de telle sorte que comme pour  $u$ ,  $\mu^{eff}$  et  $S_r$  aussi pour les fonctions test correspondant on a

$$\begin{aligned} \delta u &= N_u \bar{\delta u} & \delta \varepsilon &= B \bar{\delta u} \\ \delta \mu^{eff} &= N_\mu \bar{\delta \mu} & \nabla \delta \mu^{eff} &= \nabla N_\mu \bar{\delta \mu} \\ \delta S_r &= N_s \bar{\delta S_r} & \nabla \delta S_r &= \nabla N_s \bar{\delta S_r} \end{aligned}$$

En utilisant les approximations précédemment définies, la forme faible de l'équilibre mécanique (3.27) s'écrit alors sous la forme discrétisée suivante :

$$N_1(\bar{u}) + N_2(\bar{S}_r) = F_{ext}^1 \quad (3.49)$$

où les vecteurs des efforts internes  $N_1(\bar{u})$ , de couplage  $N_2(\bar{S}_r)$  et le vecteur des chargements mécaniques  $F_{ext}^1$  s'écrivent :

$$N_1(\bar{u}) = \int_{\Omega} B^T \sigma' dV \quad (3.50)$$

$$N_2(\bar{S}_r) = - \int_{\Omega} B^T 1\pi(\bar{S}_r) dV \quad (3.51)$$

$$F_{ext}^1 = \int_{\Omega} N_u^T f dV + \int_{\Gamma_N^u} N_u^T T dS \quad (3.52)$$

Après la discrétisation spatiale de la forme faible (3.31) on obtient l'expression suivante :

$$C^{\mu s} \frac{d\bar{S}_r}{dt} + C^{\mu u} \frac{d\bar{u}}{dt} + K_{\mu\mu} \bar{\mu} + N_3(\bar{S}_r) = F_{ext}^2 \quad (3.53)$$

avec :

$$C^{\mu s} = \int_{\Omega} N_\mu^T (\phi_0 + B^\epsilon \bar{u}) N_s dV \quad (3.54)$$

$$C^{\mu u} = \int_{\Omega} N_\mu^T N_s \bar{S}_r B^\epsilon dV \quad (3.55)$$

$$K_{\mu\mu} = \int_{\Omega} \nabla N_\mu^T \frac{\varkappa k(S_r)}{\eta} \nabla N_\mu dV \quad (3.56)$$

$$N_3(\bar{S}_r) = - \int_{\Omega} \nabla N_\mu^T \frac{\varkappa k(S_r)}{\eta} \rho_w g dV \quad (3.57)$$

$$F_{ext}^2 = - \int_{\Gamma_N^\mu} N_\mu^T q_w dS \quad (3.58)$$

De façon similaire, la discrétisation spatiale de la forme faible (3.33) conduit à l'expression suivante :

$$K^{s\mu} \bar{\mu} + K^{ss}(\bar{u}) \bar{S}_r + N_4(\bar{S}_r) = F_3^{ext} \quad (3.59)$$

Avec :

$$K^{s\mu} = \int_{\Omega} N_s^T N_\mu dV \quad (3.60)$$



$$K^{ss} = - \int_{\Omega} \nabla N_s^T c(\phi_0 + B^\epsilon \bar{u}) \nabla N_s dV \quad (3.61)$$

$$N_4(\bar{S}_r) = - \int_{\Omega} N_s^T \frac{\partial(U + \Psi_f)}{\partial S_r} dV \quad (3.62)$$

$$F_{ext}^3 = \int_{\Gamma_N^{S_r}} N_s^T q_{S_r} dS \quad (3.63)$$

L'ensemble des équations (3.49), (3.53) et (3.59) forme le problème couplé discrétisé en espace, mais continu dans temps.

Il est important de remarquer qu'afin de garantir que les conditions aux limites sur les valeurs aux bords de  $u$ ,  $\mu^{eff}$  et  $S_r$  soient vérifiées, les bonnes valeurs des degrés de liberté sur les parties de  $\Gamma$  où des conditions de Dirichlet sont imposées devront être imposées dans la résolution numérique.

### 3.3.2 Système matriciel à résoudre

Après discrétisation spatiale, le système d'équations différentielles à résoudre est donné par :

$$\begin{cases} N_1(\bar{u}) + N_2(\bar{S}_r) = F_{ext}^1 \\ C^{\mu s} \frac{d\bar{S}_r}{dt} + C^{\mu u} \frac{d\bar{u}}{dt} + K_{\mu\mu} \bar{\mu} + N_3(\bar{S}_r) = F_{ext}^2 \\ K^{s\mu} \bar{\mu} + K^{ss}(\bar{u}) \bar{S}_r + N_4(\bar{S}_r) = F_3^{ext} \end{cases} \quad (3.64)$$

On établit également la forme matricielle du système obtenu. Cette forme matricielle sera utilisée comme référence pour la discrétisation en temps et la linéarisation du système. Elle s'exprime comme suit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C^{\mu u} & 0 & C^{\mu s} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C(U)} \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{\bar{u}} \\ \dot{\bar{\mu}} \\ \dot{\bar{S}}_r \end{Bmatrix}}_{\dot{U}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K^{\mu\mu} & 0 \\ 0 & K^{s\mu} & K^{ss} \end{bmatrix}}_{K(U)} \underbrace{\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\mu} \\ \bar{S}_r \end{Bmatrix}}_U + \underbrace{\begin{Bmatrix} N_1 + N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix}}_{N(U)} = \underbrace{\begin{Bmatrix} F_1^{ext} \\ F_2^{ext} \\ F_3^{ext} \end{Bmatrix}}_{F_{ext}} \quad (3.65)$$

### 3.3.3 Discrétisation temporelle

Après avoir discrétisé l'espace, il convient de découper l'échelle des temps  $[0, t^F]$  en intervalles. Pour cela, on pose  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N$  une suite d'instants  $t_{n,n \in 0 \dots N}$  strictement croissante, telle que  $t_0 = 0$  et  $t_N = t^F$ .

Il existe de nombreux schémas de discrétisation en temps plus ou moins adaptés suivant le type de problème que l'on considère. On peut faire la distinction entre les méthodes explicites et implicites. Alors que les méthodes explicites permettent une extrapolation directe d'une solution donnée dans le temps, les méthodes implicites nécessitent généralement de résoudre un ensemble d'équations non linéaires pour trouver la solution du problème au prochain pas de temps.

Pour notre problème, nous avons à chaque pas de temps un système à résoudre de la forme suivante :

$$C(U)\frac{dU}{dt} + K(U)U + N(U) = F_{ext} \quad (3.66)$$

Afin de discrétiser le problème dans le temps, on applique un  $\theta$ -schéma. Toutes les variables dépendantes du temps sont représentées par une somme pondérée des valeurs au début et à la fin du pas de temps. En d'autres termes, un instant  $t_n$  avec  $n = [0, \dots, N - 1]$  est pris comme instant de référence et nous passons à l'instant  $t_{n+\theta} = t_n + \theta\Delta t$  avec  $\theta$  un scalaire tel que  $\theta \in [0, 1]$  et  $\Delta t$  l'incrément de temps entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$ . On évalue alors une quantité  $X$  et sa dérivée temporelle  $\dot{X}$  à l'instant  $t_{n+\theta}$  à partir de leurs valeurs aux instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$  par les relations :

$$X_{n+\theta} = (1 - \theta)X_n + \theta X_{n+1} = X_n + \theta\Delta X \quad (3.67)$$

$$\dot{X}_{n+1} = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{X_{n+1} - X_n}{\Delta t} \quad (3.68)$$

Après application du  $\theta$ -schéma, le système matriciel des équations à résoudre (3.66) devient le suivant :

$$C(U_{n+\theta})\Delta U + \Delta t K(U_{n+\theta})U_{n+\theta} + \Delta t N(U_{n+\theta}) = \Delta t F_{n+\theta}^{ext} \quad (3.69)$$

Soit encore :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C^{\mu\mu} & 0 & C^{\mu S} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n+\theta} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{u} \\ \Delta \bar{\mu} \\ \Delta \bar{S}_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta t K^{\mu\mu} & 0 \\ 0 & \Delta t K^{S\mu} & \Delta t K^{SS} \end{bmatrix}_{n+\theta} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{n+\theta} \\ \bar{\mu}_{n+\theta} \\ \bar{S}_{rn+\theta} \end{Bmatrix} + \Delta t \begin{Bmatrix} N_1 + N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix}_{n+\theta} = \Delta t \begin{Bmatrix} F_1^{ext} \\ F_2^{ext} \\ F_3^{ext} \end{Bmatrix}_{n+\theta} \quad (3.70)$$

Selon les valeurs de  $\theta$  utilisées, le schéma numérique correspond au schéma d'Euler explicite ( $\theta = 0$ ), au schéma de Crank-Nicholson ( $\theta = 1/2$ ) ou au schéma d'Euler implicite ( $\theta = 1$ ). Tout au long de cette thèse, seules les méthodes implicites sont considérées, car elles peuvent être prouvées comme étant inconditionnellement stables sous certaines conditions

et permettent des pas de temps plus importants par rapport aux méthodes explicites (Booker & Small 1975, Lewis & Schrefler 1998).

L'ensemble des composants des matrices  $C$ ,  $K$  et  $N$  dépendent donc de l'état actuel (que ce soit par le biais du déplacement, du degré de saturation ou du potentiel chimique). En raison de ces diverses dépendances, le problème à résoudre est fortement non linéaire.

### 3.3.4 La résolution numérique du problème

La solution numérique du problème (3.69) est l'étape essentielle qui reste à développer. Le problème à résoudre se présente sous la forme d'un système d'équations non linéaires par rapport à l'inconnue  $U_{n+1}$ , sa solution numérique est de nature itérative. Il existe de nombreuses méthodes pour résoudre les systèmes non linéaires. Nous présenterons ici la méthode de Newton-Raphson pour résoudre ce genre de système.

Compte tenu de l'équation (3.69), nous définissons le résidu  $R_{n+1}$  comme suit :

$$R_{n+1} = F_{n+1}^{int} - \Delta t F_{n+1}^{ext} \quad (3.71)$$

avec :

$$F_{n+1}^{int} = C(U_{n+1})\Delta U + \Delta t K(U_{n+1})U_{n+1} + \Delta t N(U_{n+1}) \quad (3.72)$$

Dans le cadre du schéma d'Euler implicite, à partir de la valeur de  $U_n$ , à l'instant  $t_n$ , nous devons trouver  $U_{n+1}$  de sorte que le résidu soit nul à l'instant  $t_{n+1}$ , c'est-à-dire que :

$$R_{n+1} = 0 \quad (3.73)$$

La méthode de Newton-Raphson est un algorithme reposant sur l'écriture, à chaque itération ( $k+1$ ), du développement limité à l'ordre 1 du résidu autour de l'itération précédente ( $k$ ) :

$$R_{n+1}^{k+1} = R_{n+1}^k + J^k \cdot \delta U_{n+1}^k \quad (3.74)$$

où :

$$\delta U_{n+1}^k = U_{n+1}^{k+1} - U_{n+1}^k \quad (3.75)$$

est la correction apportée à la solution par l'itération en cours, et

$$J^k = \frac{\partial R_{n+1}}{\partial U_{n+1}}(U_{n+1}^k) \quad (3.76)$$

est la matrice tangente. La solution du problème est alors trouvée en annulant l'équation (3.74), c'est-à-dire en résolvant le système d'équations linéaire :

$$R_{n+1}^k + J^k \cdot \delta U_{n+1}^k = 0 \quad (3.77)$$

### 3.4 Intégration numérique de la loi de comportement

Une étape clé de l'analyse non linéaire par éléments finis consiste à intégrer les relations constitutives pour obtenir l'incrément des contraintes à partir de l'incrément des déformations. Ces relations définissent un ensemble d'équations différentielles ordinaires. Plusieurs méthodes d'intégration numériques ont été proposées pour l'implémentation de ces relations dans les codes de calcul par éléments finis (De Borst et al. 2012). Deux grandes classes d'algorithmes peuvent être distinguées : celles basées sur les méthodes explicites et celles basées sur des méthodes implicites.

Les algorithmes basés sur des méthodes explicites ont été largement utilisés dans l'intégration des contraintes pour les modèles élastoplastiques (Wissmann & Hauck 1983, Sloan 1987, Sloan & Booker 1992, Abbo 1997, Sloan et al. 2001). Dans un schéma d'intégration explicite, la surface de charge, la loi d'écoulement plastique et la loi d'écrouissage sont toutes évaluées à des états de contrainte connus et aucune itération n'est nécessaire pour prédire les contraintes finales. Un avantage de tels algorithmes est qu'ils ne sont pas itératifs. Ils sont particulièrement intéressants lorsque l'on considère des modèles fortement non linéaires. De plus, ces algorithmes utilisent la forme standard des lois élastoplastiques, donc seules les dérivées premières de la surface charge et du potentiel plastique sont nécessaires. D'un point de vue informatique, c'est un aspect très intéressant (réduction du temps de calcul CPU). Cependant, il est prudent d'introduire une correction pour ramener les contraintes finales à la surface de charge, car cette condition n'est pas imposée par ce type de schémas d'intégration.

Dans une méthode entièrement implicite, la surface de charge, la loi d'écoulement plastique et la loi d'écrouissage sont évaluées à des états de contrainte inconnus et le système d'équations non linéaires qui en résulte doit être résolu de manière itérative. Les méthodes implicites sont intéressantes, car les contraintes qui en résultent satisfont automatiquement le critère de plastification avec une tolérance spécifiée. Une discussion complète des différents schémas d'intégration implicite pour les modèles élastoplastiques peut être trouvée dans Simo & Taylor (1985), Ortiz & Simo (1986), Crisfield et al. (1991), Crisfield (1997) et Simo & Hughes (2006). En ce qui concerne leurs applications aux modèles de mécanique des sols, les travaux de Borja & Lee (1990), Borja (1991), Potts & Ganendra (1994), Vau-nat et al. (2000) et Tamagnini et al. (2002) peuvent être soulignés. Un des algorithmes les plus populaires est l'algorithme d'Euler implicite. Il suppose que l'incrément de déformation donné est purement élastique. La contrainte est alors déterminée en intégrant la loi contrainte-déformation élastique, puis cette contrainte est ramenée à la surface de charge par itération en utilisant la méthode "closest point projection (CPPM)". Dans sa forme la plus

générale, les contraintes finales et les paramètres d'écroûissage sont trouvés en résolvant un petit système d'équations non linéaires à chaque point de Gauss, en utilisant l'algorithme de Newton-Raphson par exemple. [Simo & Taylor \(1985\)](#) ont montré que le CPPM utilisé avec une matrice tangente cohérente donne un taux quadratique de convergence pour la méthode de Newton-Raphson globale.

Dans cette section, une intégration implicite du modèle de Cam-Clay pour les milieux poreux partiellement saturés, décrit dans la section 2.5.2, est mise en œuvre, en adoptant la méthode (CPPM) de [Borja \(1991\)](#), avec une étape de prédiction élastique modifiée. Cette modification concerne la variation de la pression de préconsolidation au début de l'étape d'intégration due aux variations du degré de saturation du sol. De ce fait, la variation de la surface de charge peut se produire même si la valeur actuelle de la contrainte est à l'intérieur de la surface de charge.

### 3.4.1 Prédiction élastique

Après avoir résolu le système matriciel (3.77), les incréments aux nœuds des champs de déplacement et du degré de saturation sont déterminés. Il est alors nécessaire de déterminer le nouvel état de contrainte induit par l'incrément de chargement. À cette fin, on suppose que l'incrément de contrainte est élastique : une prédiction élastique est effectuée. Une première estimation de l'état de contrainte, qui devra éventuellement être corrigée ultérieurement, est ainsi obtenue à partir de l'incrément de déformation déduit de l'incrément de déplacement par l'expression (3.48), ce qui donne :

$$\sigma'_{n+1} = \sigma'_n + \mathbb{C}^e : \Delta \varepsilon_{n+1}^k \quad (3.78)$$

La pression de préconsolidation durant la prédiction élastique peut être formulée comme suit :

$$p_{c_{n+1}}^{tr} = p_{c_n} \exp(-b \Delta S_{r_{n+1}}^k) \quad (3.79)$$

Les quantités avec l'indice  $n$  sont les valeurs convergées aux pas de temps précédent; l'exposant  $k$  est le numéro de l'itération en cours;  $p_{c_{n+1}}^{tr}$  est la prédiction de la pression de préconsolidation;  $\Delta \varepsilon_{n+1}^k$  et  $\Delta S_{r_{n+1}}^k$  sont des incréments connus, définis par :

$$\Delta \varepsilon_{n+1}^k = \varepsilon_{n+1}^k - \varepsilon_n \quad ; \quad \Delta S_{r_{n+1}}^k = S_{r_{n+1}}^k - S_{r_n} \quad (3.80)$$

On remarque que la prédiction élastique est différente de celle employée par [Borja & Lee \(1990\)](#). En effet, dans notre cas, la pression de préconsolidation provenant de la prédiction élastique,  $p_{c_{n+1}}^{tr}$  n'est pas égale à  $p_{c_n}$ . Cette différence est due au fait que la prédiction élastique incorpore les effets de l'incrément du degré de saturation.

Si la prédiction élastique induit un état de contrainte en dehors du domaine élastique du matériau, il est nécessaire de corriger la contrainte pour amener l'état de contrainte à la surface de charge. On évalue ainsi la valeur de la fonction de charge avec la contrainte d'essai et la pression de préconsolidation conformément à :

$$f(p_{n+1}'^{tr}, q_{n+1}'^{tr}, p_{c_{n+1}}^{tr}) = (q_{n+1}'^{tr})^2 + M^2 p_{n+1}'^{tr} (p_{n+1}'^{tr} - p_{c_{n+1}}^{tr}) \quad (3.81)$$

où  $p_{n+1}'^{tr}$  et  $q_{n+1}'^{tr}$  sont les invariants de la contrainte d'essai, qui sont définis par :

$$p_{n+1}'^{tr} = -\frac{\text{tr}(\sigma_{n+1}'^{tr})}{3} \quad ; \quad q_{n+1}'^{tr} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|s_{n+1}'^{tr}\| \quad \text{avec} \quad s_{n+1}'^{tr} = \sigma_{n+1}'^{tr} - \frac{\text{tr}(\sigma_{n+1}'^{tr})}{3} \quad (3.82)$$

Si  $f(p_{n+1}'^{tr}, q_{n+1}'^{tr}, p_{c_{n+1}}^{tr}) \leq 0$ , la contrainte actuelle est dans le domaine élastique et la déformation totale est élastique. Par conséquent, toutes les variables sont mises à jour en utilisant les valeurs de la prédiction élastique. Si par contre  $f(p_{n+1}'^{tr}, q_{n+1}'^{tr}, p_{c_{n+1}}^{tr}) > 0$  une correction plastique est nécessaire.

### 3.4.2 Correction plastique

La correction de la contrainte est calculée en déduisant la contribution de la déformation plastique de la contrainte prédite d'une manière purement élastique :

$$\sigma_{n+1}'^k = \sigma_{n+1}'^{tr} - \mathbb{C}^e : \Delta \varepsilon^p \quad (3.83)$$

où  $-\mathbb{C}^e : \Delta \varepsilon^p$  désigne la correction plastique qui ramène la contrainte  $\sigma_{n+1}'^{tr}$  sur la surface de charge le long d'une direction spécifiée par la direction de l'écoulement plastique. En utilisant la loi d'écoulement plastique (2.65), l'incrément de la déformation plastique peut être exprimé comme suit :

$$\Delta \varepsilon^p = \Delta \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \quad (3.84)$$

où  $\Delta \Lambda$  est l'incrément du multiplicateur plastique.

La partie volumétrique de la contrainte peut être formulée comme suit :

$$p' = p_{n+1}'^k = -\frac{\text{tr}(\sigma_{n+1}'^k)}{3} = p_{n+1}'^{tr} + K \Delta \varepsilon_v^p = p_{n+1}'^{tr} - K \Delta \Lambda \frac{\partial f}{\partial p'} = p_{n+1}'^{tr} - K \Delta \Lambda (2p' - p_c) \quad (3.85)$$

où  $K$  est le module de compressibilité et  $\Delta \varepsilon_v^p = \text{tr}(\Delta \varepsilon^p)$  l'incrément de la déformation plastique volumétrique.

L'invariant de la contrainte déviatorique a la forme suivante (Borja & Lee 1990) :

$$q = q_{n+1}'^k = \sqrt{\frac{3}{2}} \|s_{n+1}'^k\| = \sqrt{\frac{3}{2}} \|s_{n+1}'^{tr} - 2G \Delta \varepsilon_d^p\| = q_{n+1}'^{tr} - 3G \Delta \Lambda \frac{\partial f}{\partial q'} = \frac{q_{n+1}'^{tr}}{1 + 6G \Delta \Lambda / M^2} \quad (3.86)$$

où  $G$  est le module de cisaillement et  $\Delta\varepsilon_d^p = \Delta\varepsilon^p - \frac{1}{3}\Delta\varepsilon_v^p$  l'incrément de la déformation plastique déviatorique.

La pression de préconsolidation est donnée par :

$$p_c = p_{c_{n+1}} = p_{c_{n+1}}^{tr} \exp(-v\Delta\varepsilon_v^p) = p_{c_{n+1}}^{tr} \exp(v\Delta\Lambda \frac{\partial f}{\partial p'}) = p_{c_{n+1}}^{tr} \exp(v\Delta\Lambda(2p' - p_c)) \quad (3.87)$$

où  $p_{c_{n+1}}^{tr}$  est défini par l'équation (3.79) et  $v$  par l'équation (2.70).

Les valeurs actualisées de  $p'$ ,  $q$  et  $p_c$  dans (3.85), (3.86) et (3.87) dépendent paramétriquement du multiplicateur plastique  $\Delta\Lambda$ , qui doit être déterminé en imposant la condition de consistance, c'est-à-dire que l'état de contrainte se trouve sur la surface de charge. En conséquence, nous avons la restriction suivante :

$$f(\Delta\Lambda) = q^2 + M^2 p'(p' - p_c) = 0 \quad (3.88)$$

On remarque maintenant que le calcul de la correction plastique nécessite la résolution d'un système d'équations non linéaires :

$$\begin{cases} p' - p_{n+1}'^{tr} + K\Delta\Lambda(2p' - p_c) = 0 \\ q(1 + 6G\Delta\Lambda/M^2) - q_{n+1}'^{tr} = 0 \\ p_c - p_{c_{n+1}}^{tr} \exp(v\Delta\Lambda(2p' - p_c)) = 0 \\ q^2 + M^2 p'(p' - p_c) = 0 \end{cases} \quad (3.89)$$

Ce système est constitué de quatre équations scalaires avec les quatre inconnues  $p'$ ,  $q$ ,  $p_c$  et  $\Delta\Lambda$ . Les inconnues peuvent être déterminées par un algorithme de Newton-Raphson local (voir l'annexe A.2).

L'algorithme 1 résume les différentes étapes d'intégration de la loi de comportement élastoplastique.

---

**Algorithm 1** Intégration numérique de la loi de comportement
 

---

**entrées :**  $\sigma'_n$ ;  $\Delta\varepsilon_{n+1}^k$ ;  $p_{c_n}$ ;  $\Delta S_{r_{n+1}}^k$ .

**étape 1 :** Calculer  $\sigma'_{n+1}{}^{tr} = \sigma'_n + \mathbb{C}^e : \Delta\varepsilon_{n+1}^k$  ;  $p_{c_{n+1}}^{tr} = p_{c_n} \exp(-b\Delta S_{r_{n+1}}^k)$

$$p_{n+1}'^{tr} = -\frac{\text{tr}(\sigma'_{n+1}{}^{tr})}{3}; \quad q_{n+1}'^{tr} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|s'_{n+1}{}^{tr}\|; \quad s_{n+1}'^{tr} = \sigma'_{n+1}{}^{tr} - \frac{\text{tr}(\sigma'_{n+1}{}^{tr})}{3};$$

$$\hat{n} = s'_{n+1}{}^{tr} / \|s'_{n+1}{}^{tr}\|$$

**étape 2 :** Vérifier si  $f(p_{n+1}'^{tr}, q_{n+1}'^{tr}, p_{c_{n+1}}^{tr}) = (q_{n+1}'^{tr})^2 + M^2 p_{n+1}'^{tr} (p_{n+1}'^{tr} - p_{c_{n+1}}^{tr}) > 0$

Non  $\sigma'_{n+1}{}^k = \sigma'_{n+1}{}^{tr}$  ;  $p_{c_{n+1}} = p_{c_{n+1}}^{tr}$  et quitter

**étape 3 :** Résoudre le système (3.89) pour  $p'$ ,  $q$ ,  $p_c$  et  $\Delta\Lambda$  (voir l'algorithme 2).

**étape 4 :** Calculer  $\sigma' = -p'1 + \sqrt{2/3}q\hat{n}$ .

---

### 3.4.3 Matrice tangente

Dans cette section, nous définissons l'expression de la matrice de raideur tangente, utile pour la construction de la matrice tangente (3.76). Deux types de raideurs tangentes peuvent être sélectionnés pour former la matrice tangente : la raideur tangente continue et la raideur tangente cohérente ou algorithmique. La première est obtenue en imposant la condition de consistance dans l'expression continue de la loi de comportement (2.74) comme nous l'avons souligné au paragraphe 2.5.2. La rigidité tangente est alors donnée par l'équation (2.79). Une telle procédure entraîne toutefois une perte du taux quadratique de convergence au niveau de l'algorithme de Newton-Raphson global, spécialement pour les grands pas de temps, ce qui se traduit par des coûts de calcul plus élevés et une précision plus faible. En effet, dans l'algorithme 1, nous n'avons plus l'équation continue (2.78), puisque l'incrément de contrainte correspondant à un incrément de déformation donné doit être calculé de manière itérative. Afin d'assurer une convergence quadratique, il faut calculer la raideur tangente conformément à cet algorithme (De Borst et al. 2012, Simo & Taylor 1985, Simo & Hughes 2006). Plus précisément, la raideur algorithmique doit tenir compte de toutes les étapes de calcul de l'algorithme 1. La raideur algorithmique est alors définie par :

$$\mathbb{C}^{ep} = \frac{\partial \sigma'}{\partial \varepsilon} = -1 \otimes \frac{\partial p'}{\partial \varepsilon} + \sqrt{\frac{2}{3}} q \frac{\partial \hat{n}}{\partial \varepsilon} + \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{n} \otimes \frac{\partial q}{\partial \varepsilon} \quad (3.90)$$

D'un point de vue numérique, on note que l'algorithme 1 est similaire à celui utilisé pour le modèle de Cam-Clay parfaitement saturé, seule la prédiction élastique est modifiée et tient compte de l'effet de la variation du degré de saturation. Ainsi, les détails du calcul de la raideur tangente sont donc les mêmes que ceux présentés dans l'article de Borja & Lee (1990). Ici, nous rappelons juste la forme finale de la raideur tangente en tenant compte de la différence de la convention de signe.

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{ep} = 2G\xi\mathbb{I} + & \left[ K(a_1 - a_2b_1) - \frac{2}{3}G\xi \right] 1 \otimes 1 - K(a_2b_2)1 \otimes \hat{n} \\ & + 2G\sqrt{\frac{2}{3}}(a_6b_1)\hat{n} \otimes 1 + 2G \left[ \frac{2}{3}(a_5 + a_6b_2) - \xi \right] \hat{n} \otimes \hat{n} \end{aligned} \quad (3.91)$$

les coefficients dans l'expression ci-dessus sont définis dans l'annexe A.3.

## 3.5 Implémentation numérique

Le choix du type d'élément pour la discrétisation spatiale, laissé indéfini dans la section 3.3.1, est maintenant présenté. Le choix du type d'éléments, et par conséquent de leur nombre de nœuds, est conditionné par le degré d'interpolation désiré. Dans le cadre de ce



travail, on adopte un élément triangulaire comprenant trois nœuds et trois points d'intégration de Gauss.

L'approximation des champs inconnus sur l'élément à partir de leurs valeurs aux nœuds est formulée par :

$$u = N_u \bar{u} \quad (3.92)$$

$$\mu^{eff} = N_\mu \bar{\mu} \quad (3.93)$$

$$S_r = N_s \bar{S}_r \quad (3.94)$$

avec :

$$N_u = \begin{bmatrix} N^1 & 0 & N^2 & 0 & N^3 & 0 \\ 0 & N^1 & 0 & N^2 & 0 & N^3 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

$$N_\mu = \begin{bmatrix} N^1 & N^2 & N^3 \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

$$N_s = \begin{bmatrix} N^1 & N^2 & N^3 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

Les expressions des fonctions de forme  $N^1$ ,  $N^2$  et  $N^3$  sont définies en coordonnées de référence  $(\zeta, \eta)$  par les relations suivantes :

$$N^1 = \zeta \quad (3.98)$$

$$N^2 = \eta \quad (3.99)$$

$$N^3 = 1 - \zeta - \eta \quad (3.100)$$

Le vecteur des déplacements aux nœuds de l'élément est exprimé par :

$$\bar{u} = [u_x^1, u_y^1, u_x^2, u_y^2, u_x^3, u_y^3]^T \quad (3.101)$$

Le vecteur du potentiel chimique aux nœuds de l'élément est donné par :

$$\bar{\mu} = [\mu^1, \mu^2, \mu^3]^T \quad (3.102)$$

et le vecteur du degré de saturation aux nœuds de l'élément est donné par :

$$\bar{S}_r = [S_r^1, S_r^2, S_r^3]^T \quad (3.103)$$

Les matrices élémentaires, qui font partie du système à résoudre numériquement (3.70), sont obtenues grâce à l'application de la méthode de quadrature de Gauss pour effectuer l'intégration sur l'élément.

L'élément utilisé est implémenté dans un code aux éléments finis Matlab. Ce code, initialement élaboré par [Bonnet & Frangi \(2007\)](#) en Matlab, emploie, dans sa version initiale, des éléments finis classiques en deux dimensions. Il offre la possibilité d'effectuer des calculs non linéaires en mécanique. Dans ce travail, l'objectif était d'incorporer tous les algorithmes nécessaires pour intégrer l'élément finis couplé décrit ci-dessus et l'algorithme d'intégration numérique de la loi de comportement (algorithme 1).

## 3.6 conclusion

Une formulation numérique du modèle a été présentée dans ce chapitre. Utilisant la méthode des éléments finis pour la discrétisation spatiale et la méthode d'Euler implicite pour la discrétisation temporelle. Des simulations numériques utilisant le modèle seront présentées dans le chapitre suivant.



## CHAPITRE 4 : SIMULATION NUMÉRIQUE

4.1	Milieu rigide . . . . .	73
4.1.1	Synthèse du modèle . . . . .	74
4.1.2	Simulation 1d . . . . .	75
4.1.3	Simulation 2d . . . . .	78
4.2	Milieu déformable . . . . .	81
4.2.1	Imbibition d'un sol limoneux fortement surconsolidé . . .	83
4.2.2	Imbibition d'un sol limoneux légèrement surconsolidé . .	90
4.3	Conclusion . . . . .	93

Ce dernier chapitre présente une première application du modèle poromécanique basé sur une approche de champ de phase présenté dans le chapitre 3. Le modèle permet de caractériser d'une part la manifestation d'instabilités hydrauliques de type "fingering" et d'autre part de capturer leurs effets sur la déformation irréversible du squelette solide. L'application envisagée concerne l'infiltration de l'eau dans un sol limoneux relativement sec.

### 4.1 Milieu rigide

Cette section présente une analyse du processus d'imbibition de l'eau dans une couche de limon relativement sèche, sous l'effet de la gravité. Pour simplifier, le squelette poreux est supposé indéformable ( $\phi = \phi_0$ ). L'objectif est de reproduire les principales caractéristiques de l'écoulement non saturé : un profil de saturation non monotone et la formation d'instabilités sous forme de doigts. En effet, cette section, en fournissant des indications sur la morphologie attendue de l'instabilité, sert d'introduction à la section 4.2 qui sera consacrée à l'analyse du problème hydro-mécanique couplé dans lequel le squelette est supposé déformable.

### 4.1.1 Synthèse du modèle

L'équation à résoudre correspond à l'équation de Richards généralisée (2.44), dérivée dans l'hypothèse d'un squelette poreux rigide (voir section 2.4). Comme indiqué précédemment, l'équation de Richards généralisée est une équation du quatrième ordre, ce qui signifie que sa formulation faible entraînerait la présence de dérivées spatiales du deuxième ordre, et le problème ne pourrait pas être résolu en utilisant des éléments finis de Lagrange standard. Une solution consiste à reformuler le problème sous la forme de deux équations couplées du second ordre :

$$\phi_0 \frac{dS_r}{dt} = \nabla \cdot \left\{ \frac{\varkappa^k(S_r)}{\eta} [\nabla \mu^{eff} - \rho_w g] \right\} \quad \text{dans } \Omega \times [0, t^F] \quad (4.1)$$

$$\mu^{eff} = \frac{\partial(\Psi_f + U)}{\partial S_r} - c \nabla \cdot (\nabla(\phi_0 S_r)) \quad \text{dans } \Omega \times [0, t^F] \quad (4.2)$$

Les champs inconnus sont maintenant  $S_r$  et  $\mu^{eff}$ . Nous cherchons à résoudre les équations (4.1) et (4.2) avec des conditions initiales et des conditions aux limites :

$$\mu^{eff} = \mu_d \quad \text{sur } \Gamma_D^\mu \times [0, t^F] \quad ; \quad \frac{\varkappa^k(S_r)}{\eta} (\nabla \mu^{eff} - \rho_w g) \cdot n = -q_w \cdot n \quad \text{sur } \Gamma_N^\mu \times [0, t^F] \quad (4.3)$$

$$S_r = S_{rd} \quad \text{sur } \Gamma_D^{S_r} \times [0, t^F] \quad ; \quad c \nabla(\phi_0 S_r) \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N^{S_r} \times [0, t^F] \quad (4.4)$$

$$\mu^{eff}(x, 0) = \mu_0(x) \quad \text{dans } \Omega \quad ; \quad S_r(x, 0) = S_0(x) \quad \text{dans } \Omega \quad (4.5)$$

La forme faible (variationnelle) du problème est la suivante : trouver  $(S_r, \mu^{eff}) \in \mathbb{H}_{S_r} \times \mathbb{H}_\mu$  tel que  $\forall (\delta S_r, \delta \mu) \in \mathbb{H}_{S_r}^0 \times \mathbb{H}_\mu^0$  :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \phi_0 \frac{dS_r}{dt} \delta \mu \, dV + \int_{\Omega} \left\{ \frac{\varkappa^k(S_r)}{\eta} [\nabla \mu^{eff} - \rho_w g] \right\} \cdot \nabla \delta \mu \, dV = \int_{\Gamma_N^\mu} -q_w \cdot n \, \delta \mu \, dS \\ \int_{\Omega} \mu \delta S_r \, dV - \int_{\Omega} \frac{\partial(\Psi_f + U)}{\partial S_r} \delta S_r \, dV - \int_{\Omega} c \nabla(\phi_0 S_r) \cdot \nabla(\delta S_r) \, dV = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

En reprenant la discrétisation spatiale présentée dans la section 3.3.1, le système d'équations à résoudre est donné par :

$$\begin{cases} C^{\mu s} \frac{d\bar{S}_r}{dt} + K_{\mu\mu} \bar{\mu} + N_3(\bar{S}_r) = F_{ext}^2 \\ K^{s\mu} \bar{\mu} + K^{ss} \bar{S}_r + N_4(\bar{S}_r) = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Ce système correspond à la deuxième et la troisième équation du système (3.64) prises en l'absence de déformation mécanique. La discrétisation temporelle est effectuée à l'aide du schéma d'Euler implicite et le système algébrique non linéaire obtenu est résolu avec la méthode de Newton-Raphson.

Les simulations numériques de l'infiltration de l'eau dans le cas d'un domaine 1d et 2d sont effectuées, respectivement dans la section 4.1.2 et la section 4.1.3.

### 4.1.2 Simulation 1d

Pour les simulations unidimensionnelles, on considère une colonne de hauteur  $h = 20m$ . Ce domaine représente un sol limoneux avec une saturation initiale ( $S_+$ ) non nulle. Les propriétés hydrauliques du sol ainsi que les paramètres du modèle sont résumés dans le tableau 4.1 Une perturbation de l'état de référence est introduite par l'injection d'eau à travers la surface supérieure de la colonne, comme illustré dans la Figure 4.1.



FIGURE 4.1 – Représentation schématique de la colonne de limon considérée avec une saturation initiale  $S_+$ .

Les conditions aux limites considérées pour le problème perturbé se présentent comme suit : (i) sur la base inférieure de la colonne, le potentiel chimique du fluide est supposé demeurer constamment égal à sa valeur initiale, soit  $\mu_+ = \mu_{pf}(S_+)$  et la dérivée normale du degré de saturation est supposée être nulle, (ii) sur la base supérieure de la colonne, l'eau est injectée et la dérivée normale de la saturation est supposée être nulle. Ce qui signifie que :

$$\mu^{eff}(h, t) = \mu_+ = \mu_{pf}(S_+) \quad ; \quad S_{r,z}(h, t) = 0 \quad (4.8)$$

$$-\frac{\alpha}{\eta} k(S_r(0, t)) (\mu_{,z}^{eff}(0, t) - \rho_w \|g\|) = \|q_w\| := \rho_w \|g\| \frac{\alpha}{\eta} k(S_-) \quad ; \quad S_{r,z}(0, t) = 0 \quad (4.9)$$

La solution numérique de notre modèle révèle un profil de saturation non monotone, où la saturation en eau est plus élevée au front qu'au sommet de la colonne, notée  $S_-$  et qui

TABLE 4.1 – Données du modèle hydraulique.

Paramètre	Valeur	Unité
$\phi_0$	0.47	-
$\varkappa$	3E-13	$m^2$
$\eta$	8.9E-4	$Pa.s$
$\gamma_{lg}$	0.073	$N/m$
$C$	4	
$\rho_w$	1000	$Kg/m^3$
$\alpha$	1.25	$m^{-1}$
$S_r^{res}$	0.15	-
$m$	0.3	-
$C_k$	5120	$N$

correspond au flux appliqué  $q_w$  dans l'équation (4.9). La transition entre le niveau de saturation le plus élevé et le niveau de saturation le plus bas s'effectue à travers une interface diffuse. Cette variation non monotone de la saturation spatiale est illustrée à la Figure 4.2 et est connue sous le nom de "overshoot". Ce phénomène a été régulièrement observé dans les études expérimentales (Selker et al. 1992, DiCarlo 2004, Shiozawa & Fujimaki 2004, DiCarlo 2013) et est largement reconnu comme un facteur déterminant dans l'émergence des instabilités hydrauliques de type "fingering" (Cueto-Felgueroso & Juanes 2009b, DiCarlo 2004, Nieber et al. 2005).

Les résultats des simulations numériques pour  $S_+ = 0.446$  et différentes valeurs de  $S_-$  sont présentés dans la figure 4.3. Comme on peut le constater, des solutions avec des non-monotonicités de type "overshoot" existent pour certaines valeurs du flux d'injection ou de  $S_-$ . Ces résultats numériques sont qualitativement similaires aux résultats expérimentaux obtenus par DiCarlo (2004) dans le cas d'infiltration d'eau dans une colonne de sable unidimensionnelle initialement sec. Dans le cadre de ces expériences, il a été observé que le profil de saturation en eau était monotone pour le flux imposé le plus élevé. Cependant, pour les flux intermédiaires, des non-monotonies ont été constatées, dont l'intensité augmentait à mesure que le flux diminuait. La figure 4.3 présente une tendance similaire à celle observée dans les expériences, les profils de saturation sont monotones pour les flux les plus élevés : ( $S_- = 0.9$ ) et ( $S_- = 0.95$ ), tandis qu'ils présentent une non-monotonie pour des flux moins élevés : ( $S_- = 0.8$ ) et ( $S_- = 0.85$ ). Concernant le potentiel chimique effectif,  $\mu^{eff}$  illustré dans la figure 4.4, le profil de ce dernier suit celui du degré de saturation avec une forte variation au niveau de l'interface.

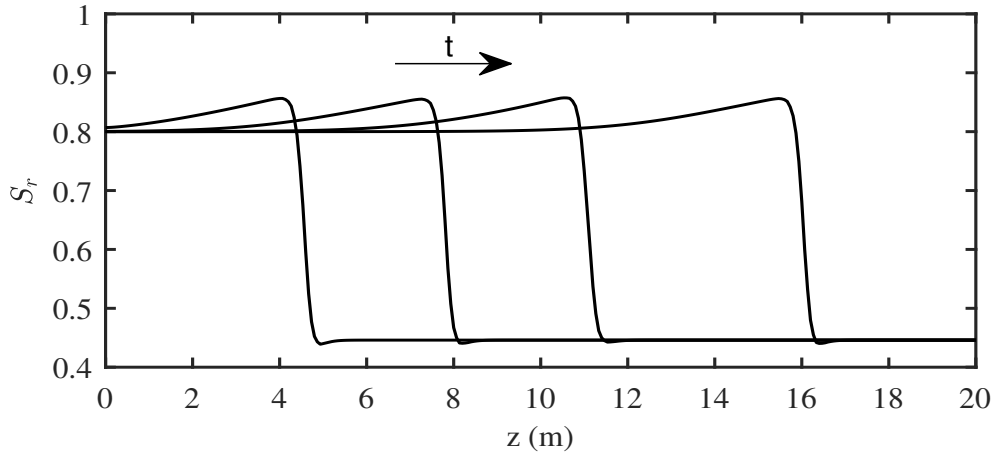


FIGURE 4.2 – Le profil de saturation dans le cas de la simulation du problème d'infiltration de l'eau dans une colonne de limon à différents instants. Le degré de saturation  $S_- = 0.8$  et la valeur du degré de saturation initiale est  $S_+ = 0.446$ .

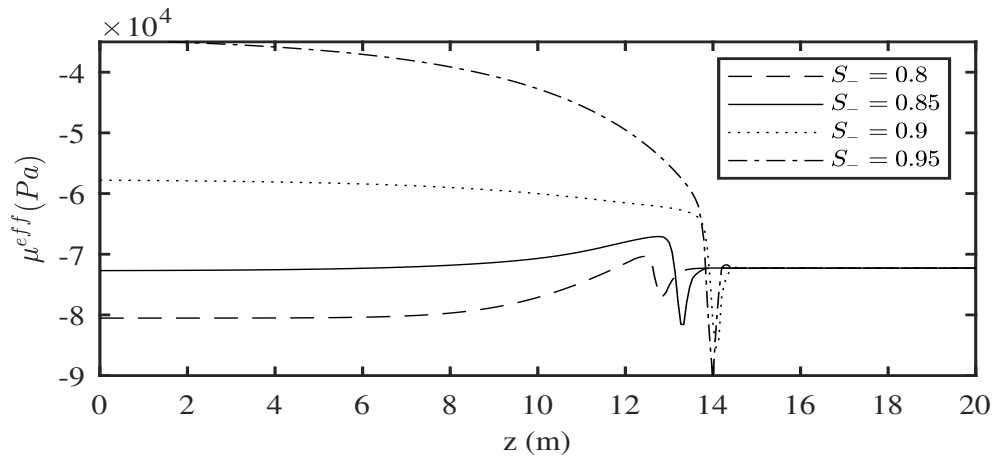


FIGURE 4.4 – Les profils du potentiel chimique effectif,  $\mu^{eff}$  dans le cas de la simulation du problème d'infiltration de l'eau dans une colonne de limon à différentes valeurs du flux. Le degré de saturation  $S_-$  est tel que le flux d'infiltration est  $\|q_w\| := \rho_w \|g\| \frac{\kappa}{\eta} k(S_-)$ . La valeur du degré de saturation initiale est  $S_+ = 0.446$ .

Mathématiquement, les solutions avec des non-monotonicités de type "overshoot" sont expliquées par la forme à double puits de l'énergie du fluide dans l'équation d'écoulement. L'influence de l'énergie du fluide sur l'apparition de ces non-monotonicités a été étudiée lors de l'imbibition dans du sable sec par [Omami et al. \(2022\)](#). En effet, les deux valeurs  $(S_c^1, S_c^2)$  qui permettent de vérifier la construction de Maxwell, autrement dit de déterminer la ligne bitangente à la courbe qui représente l'énergie du fluide interstitiel  $\Psi_{pf}(S_r)$ , délimitent la plage dans laquelle le degré de saturation, lorsqu'il est utilisé comme condition aux limites, entraîne un comportement non monotone de la solution. En considérant les paramètres



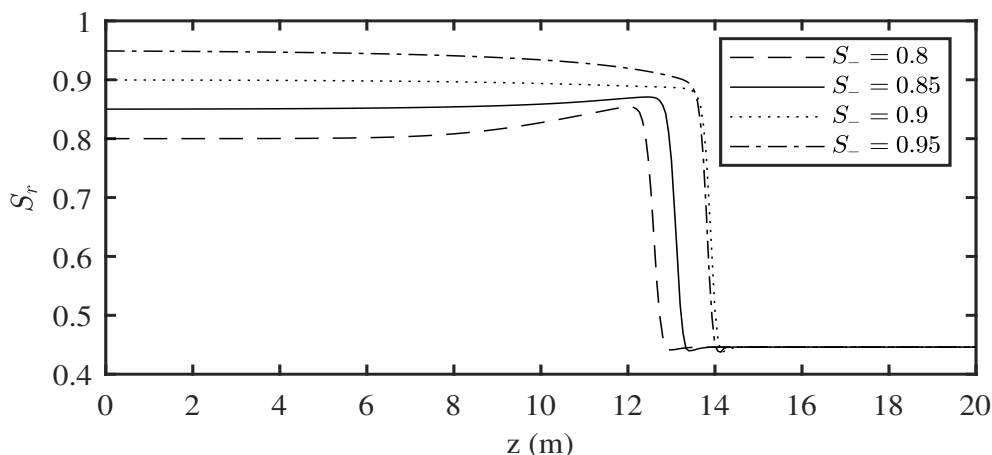


FIGURE 4.3 – Les profils de saturation dans le cas de la simulation du problème d’infiltration de l’eau dans une colonne de limon à différentes valeurs du flux. Le degré de saturation  $S_-$  est tel que le flux d’infiltration est  $\|q_w\| := \rho_w \|g\| \frac{\kappa}{\eta} k(S_-)$ . La valeur du degré de saturation initiale est  $S_+ = 0.446$ .

sélectionnés pour cette étude, ces deux valeurs correspondent à  $(S_c^1, S_c^2) \approx (0.852, 0.446)$  et sont obtenus à l’aide de la construction de Maxwell (voir figure 4.5), comme expliqué précédemment. Lorsque  $S_- < S_c^1$ , un comportement non monotone du degré de saturation est observé, ce qui est par exemple le cas de  $S_- = 0.8$  et  $S_- = 0.85$  dans la figure 4.3.

### 4.1.3 Simulation 2d

Nous simulons dans cette section l’infiltration d’eau sur un domaine bidimensionnel. Les équations (4.1) et (4.2) sont résolues dans un domaine rectangulaire (largeur =  $7,5m$ , hauteur =  $20m$ ). Ce domaine représente un sol limoneux avec une saturation initiale non nulle. Une perturbation de l’état de référence est introduite par l’injection d’eau à travers la base supérieure du rectangle. Les propriétés du matériau et les paramètres du modèle utilisés sont identiques au cas unidimensionnel et sont résumés dans le tableau 4.1.

Les conditions aux limites considérées pour le problème perturbé sont les suivantes : (i) sur la base inférieure du rectangle, le potentiel chimique du fluide est supposé demeurer constamment égal à sa valeur initiale, soit  $\mu_+ = \mu_{pf}(S_+)$  et la dérivée normale du degré de saturation est supposée être nulle, (ii) sur les deux côtés latéraux du rectangle, le flux du fluide ainsi que la dérivée normale de la saturation sont nuls, enfin (iii) sur la base supérieure du rectangle, l’eau est injectée avec une vitesse constante et de nouveau, la dérivée normale de la saturation est supposée être nulle. Ce qui signifie que :

$$\mu^{eff}(x_1, h, t) = \mu_+ = \mu_{pf}(S_+) \quad ; \quad S_{r,2}(x_1, h, t) = 0 \quad (4.10)$$

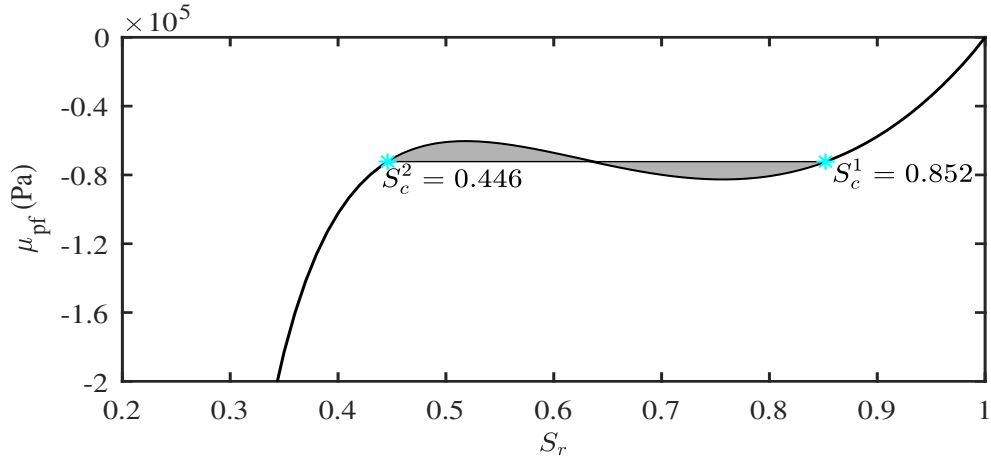


FIGURE 4.5 – Le potentiel chimique interstitiel  $\mu_{pf}$ . Les deux valeurs  $(S_c^1, S_c^2)$  où une ligne droite devient bitangente à l'énergie du fluide interstitiel sont déterminés par la règle d'aires égales de Maxwell.

$$\frac{\varkappa}{\eta} k(S_r(0, x_2, t)) (\mu_{,1}^{eff}(0, x_2, t) - \rho_w \|g\|) = 0 \quad ; \quad S_{r,1}(0, x_2, t) = 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{\varkappa}{\eta} k(S_r(L, x_2, t)) (\mu_{,1}^{eff}(L, x_2, t) - \rho_w \|g\|) = 0 \quad ; \quad S_{r,1}(L, x_2, t) = 0 \quad (4.12)$$

$$S_{r,2}(x_1, 0, t) = 0 \quad ; \quad -\frac{\varkappa}{\eta} k(S_r(x_1, 0, t)) (\mu_{,2}^{eff}(x_1, 0, t) - \rho_w \|g\|) = \|q_w\| := \rho_w \|g\| \frac{\varkappa}{\eta} k(S_-) \quad (4.13)$$

L'écoulement est initialisé en considérant, au niveau de la surface supérieure du rectangle, une perturbation transversale de la condition initiale caractérisée par une certaine longueur d'onde. Le choix de cette longueur d'onde a été guidé par les résultats des analyses de stabilité linéaire de notre modèle, menées dans (Ommi et al. 2022, Zaïm et al. 2023). Ces analyses ont permis d'identifier une plage des longueurs d'onde instables selon la valeur du flux d'injection  $S_-$ . Ainsi, une perturbation caractérisée par une longueur d'onde appartenant à la région instable a été introduite de manière à ce qu'un seul doigt apparaisse dans le domaine.

La figure 4.6 comporte 9 graphiques illustrant la variation spatio-temporelle du degré de saturation associé au cas de  $S_- = 0.8$  et  $S_+ = 0.446$ . Cette séquence de graphiques illustre le processus de formation du doigt à partir de la condition initiale. On remarque que l'intérieur du doigt présente toujours une saturation en eau plus élevée que la saturation derrière, ceci est visible dans la figure 4.7 lorsqu'on trace le degré de saturation le long de la section centrale du doigt. Ce profil non monotonique du degré de saturation est similaire à celui observé dans le cas unidimensionnel et en accord avec les profils du degré de saturation observés expérimentalement par Glass et al. (1989) lorsque le doigt est formé.

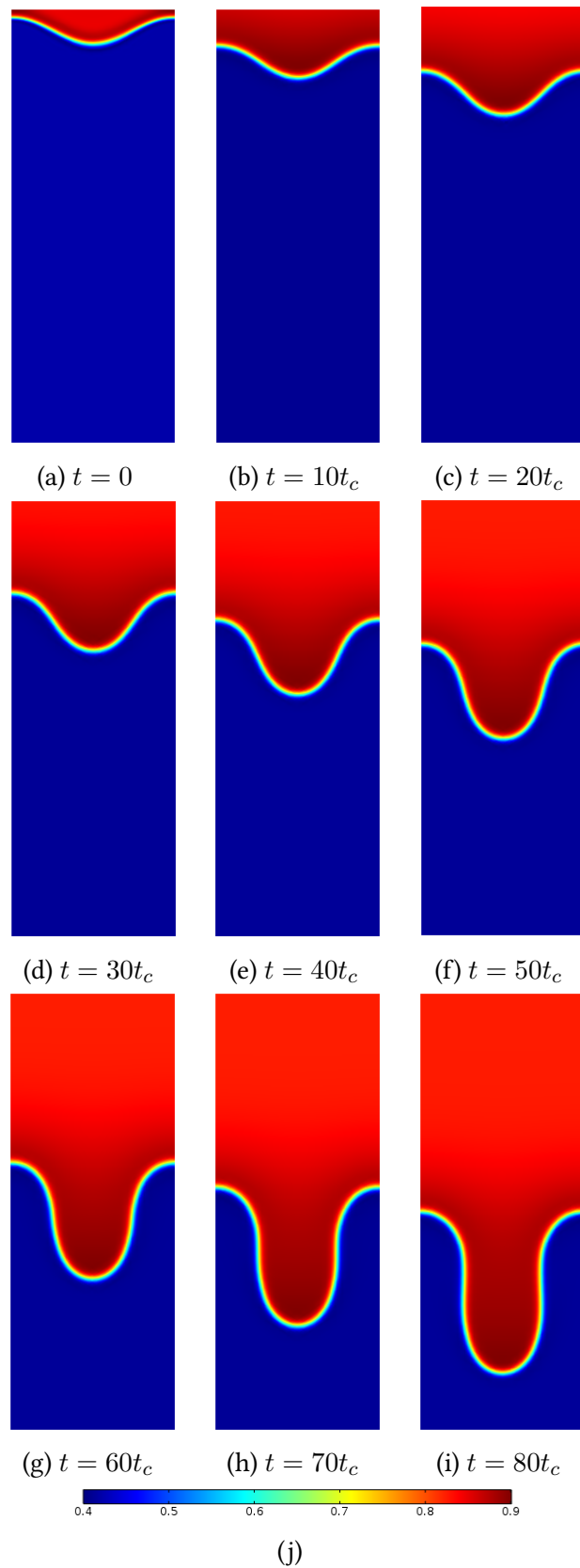


FIGURE 4.6 – Évolution du degré de saturation dans le cas de la simulation du problème d’infiltration de l’eau dans un domaine bidimensionnel à différents instants, avec  $t_c = 2.96E05s$ . Le degré de saturation  $S_- = 0.8$  et la valeur du degré de saturation initiale est  $S_+ = 0.446$ .

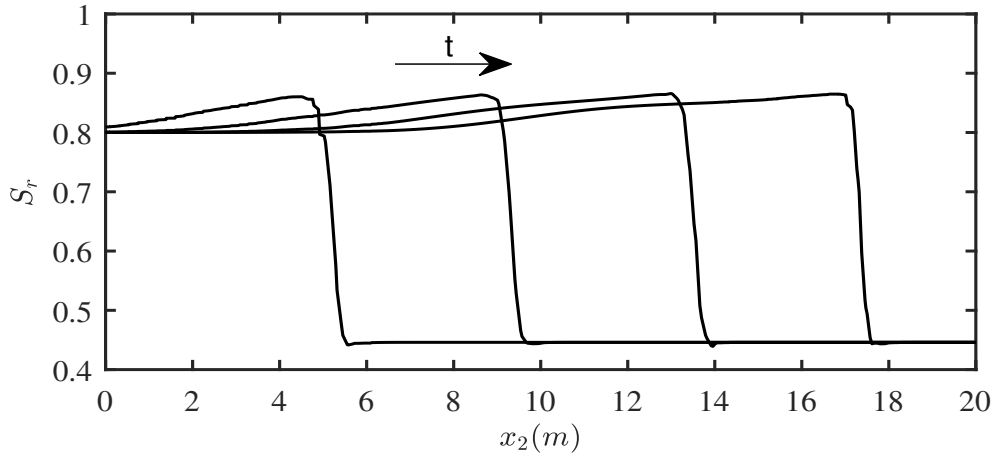


FIGURE 4.7 – Le profil de saturation le long de la section centrale du doigt,  $S_r(x_1 = 3.75, x_2)$  dans le cas de la simulation du problème d’infiltration de l’eau dans un domaine bidimensionnel à différents instants. Le degré de saturation  $S_- = 0.8$  et la valeur du degré de saturation initiale est  $S_+ = 0.446$ .

## 4.2 Milieu déformable

Cette section présente des résultats de simulations numériques utilisant le modèle hydro-mécanique couplé. En particulier, deux cas correspondant à un comportement dilatant et contractant d’un sol limoneux sont discutés. En se basant sur la formulation faible fournie par l’équation (3.34) et son implémentation numérique correspondante donnée par l’équation (3.70), le problème couplé est résolu dans un domaine rectangulaire (largeur =  $7,5m$ , hauteur =  $20m$ ). Ce domaine représente un sol limoneux précontraint avec une saturation initiale non nulle. Une perturbation de l’état de référence est introduite par l’injection d’eau à travers la base supérieure du rectangle, comme illustré dans la Figure 4.8.

Les conditions aux limites considérées pour le problème perturbé se présentent comme suit : (i) sur la base inférieure du rectangle, le déplacement vertical est bloqué, le potentiel chimique du fluide est supposé demeurer constamment égal à sa valeur initiale, soit  $\mu_+ = \mu_{pf}(S_+)$  et la dérivée normale du degré de saturation est supposée être nulle, (ii) sur les deux côtés latéraux du rectangle, aucune augmentation de traction par rapport à l’état de référence, notée  $\Delta\sigma.n$ , n’est appliquée. Le flux du fluide ainsi que la dérivée normale de la saturation sont également nuls, enfin (iii) sur la base supérieure du rectangle, une variation de traction nulle est imposée et de l’eau est injectée. De nouveau, la dérivée normale de la saturation est supposée être nulle. Ce qui signifie que :

$$u_2(x_1, h, t) = 0 \quad ; \quad \mu^{eff}(x_1, h, t) = \mu_+ = \mu_{pf}(S_+) \quad ; \quad S_{r,2}(x_1, h, t) = 0 \quad (4.14)$$

$$\Delta\sigma.e_1(0, x_2, t) = 0 \quad ; \quad \frac{\varkappa}{\eta}k(S_r(0, x_2, t))(\mu_{,1}^{eff}(0, x_2, t)) = 0 \quad ; \quad S_{r,1}(0, x_2, t) = 0 \quad (4.15)$$

$$\Delta\sigma.e_1(L, x_2, t) = 0 \quad ; \quad \frac{\kappa}{\eta}k(S_r(L, x_2, t))(\mu_{,1}^{eff}(L, x_2, t) = 0 \quad ; \quad S_{r,1}(L, x_2, t) = 0 \quad (4.16)$$

$$\Delta\sigma.e_2(x_1, 0, t) = 0 \quad ; \quad S_{r,2}(x_1, 0, t) = 0 \quad (4.17)$$

$$-\frac{\kappa}{\eta}k(S_r(x_1, 0, t))(\mu_{,2}^{eff}(x_1, 0, t) - \rho_w \|g\|) = \|q_w\| := \rho_w \|g\| \frac{\kappa}{\eta}k(S_-) \quad (4.18)$$

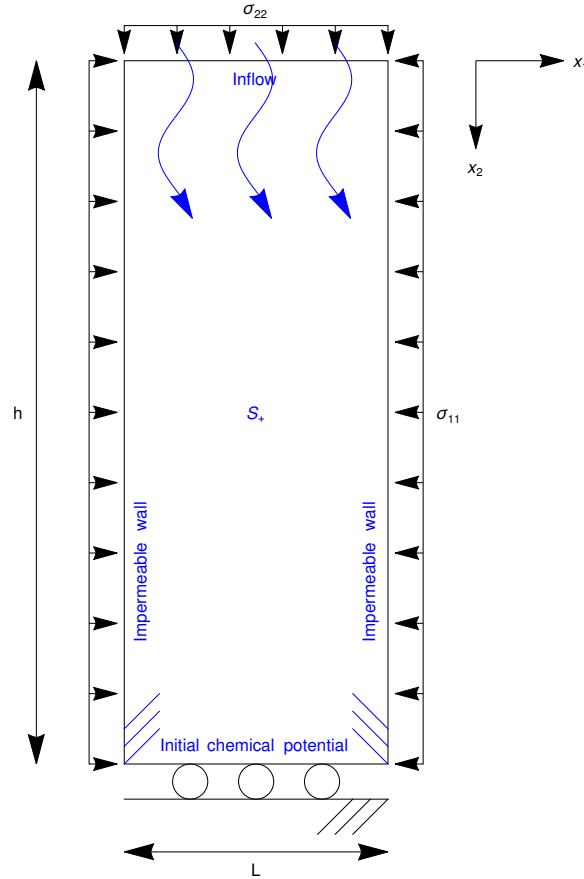


FIGURE 4.8 – Représentation schématique du domaine rectangulaire précontraint considéré avec une saturation initiale  $S_+$ .

Deux configurations de référence différentes correspondant à un sol limoneux fortement surconsolidé ( $ho$ ) et à un sol limoneux légèrement surconsolidé ( $lo$ ) sont considérées, en fonction de la valeur de la contrainte initiale, supposée homogène sur l'ensemble de l'échantillon rectangulaire. Dans le tableau 4.2, les valeurs de la contrainte initiale et celles des paramètres constitutifs sont indiquées, ainsi que la saturation initiale  $S_+$  et la saturation qui caractérise le flux entrant à la surface supérieure de l'échantillon rectangulaire  $S_-$ , conformément à l'Eq.(4.18). Une perturbation de la condition initiale caractérisée par une longueur d'onde appartenant à la région instable a été introduite de manière à ce qu'un seul doigt apparaisse dans le domaine, comme indiqué dans la section 4.1.3.

TABLE 4.2 – Données de la loi de comportement mécanique, des conditions aux limites et initiales.

Paramètre	Valeur	Unité
$\kappa$	0.0278	-
$\lambda$	0.2766	-
$e$	1.68	-
$M$	0.8182	-
$p_{c0}$	5E05	<i>Pa</i>
$\sigma_{11}^{lo}$	-3.5E05	<i>Pa</i>
$\sigma_{22}^{lo}$	-3.5E05	<i>Pa</i>
$\sigma_{11}^{ho}$	-40E03	<i>Pa</i>
$\sigma_{22}^{ho}$	-220E03	<i>Pa</i>
$S_+$	0.446	-
$S_-$	0.8	-

Dans ce qui suit, la réponse du sol limoneux considéré soumis à un processus d’imbibition à partir des deux configurations de référence mentionnées ci-dessus est analysée en suivant le chemin de contrainte de deux points fixés dans le domaine rectangulaire.

#### 4.2.1 Imbibition d’un sol limoneux fortement surconsolidé

Considérons le cas où la contrainte initiale homogène est située à gauche de la ligne d’état critique  $q = Mp'$  dans le plan  $(p', q)$  et à l’intérieur du domaine d’élasticité, ce qui implique un état initial fortement surconsolidé du matériau. À partir de cette configuration initiale et en maintenant les conditions aux limites précédemment mentionnées inchangées, le processus d’imbibition est initié avec une perturbation transversale de la condition initiale, similaire à celle illustrée dans la Figure 4.9a.

Nous examinons tout d’abord les contours du degré de saturation, de la déformation plastique volumétrique et de la déformation plastique déviatorique à trois instants caractéristiques, à savoir  $t = 0$ ,  $t = 40\Delta t$  et  $t = 60\Delta t$ . Le pas de temps utilisé dans les simulations numériques est  $\Delta t = 10^4$  s. Étant donné que l’état initial de la contrainte se situe à gauche de la ligne d’état critique, une réponse d’adoucissement est attendue. Cette réponse est responsable de l’apparition d’une solution bifurquée du problème mécanique, se manifestant par la formation d’un couple de bandes de cisaillement croisées au-delà du front dans l’échantillon. Comme le montre clairement la Figure 4.10, l’infiltration de l’eau agit comme un déclencheur de la bifurcation mécanique. Cependant, en raison de l’accumulation d’eau

dans la partie supérieure de l'échantillon, on observe une transition d'un comportement dilatant à un comportement contractant, comme l'illustrent les Figures 4.10b et 4.11b. Initialement, la bande de cisaillement était accompagnée de déformations volumétriques positives, mais elle est progressivement absorbée par la zone contractante qui se forme derrière le front.

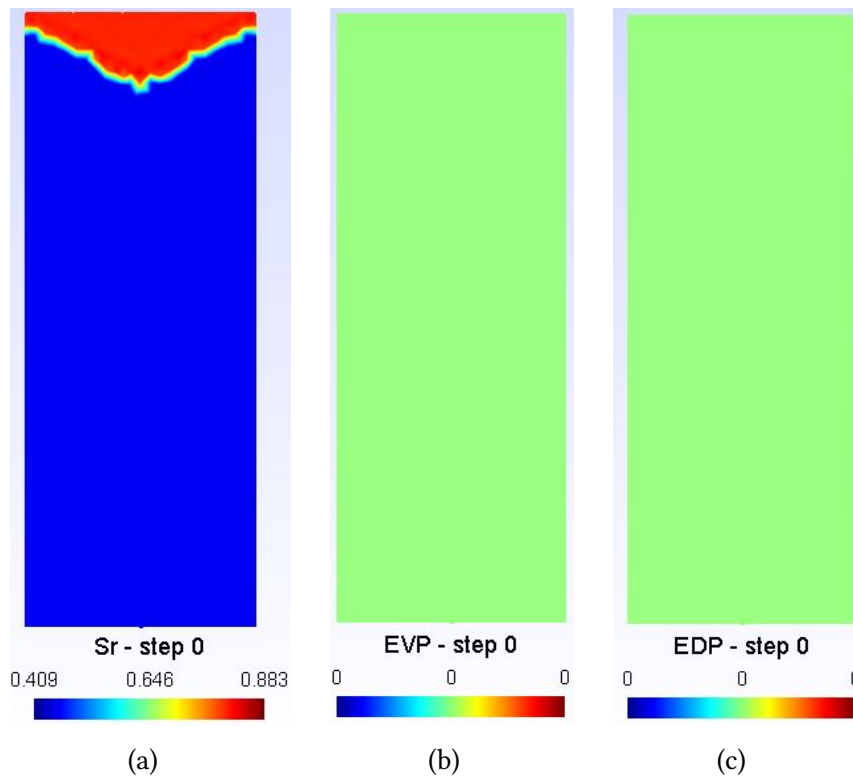


FIGURE 4.9 – Visualisation du degré de saturation  $S_r$ , de la déformation plastique volumétrique  $\varepsilon_v^p$  et de la déformation plastique déviatorique  $\varepsilon_d^p$  d'un sol limoneux fortement surconsolidé soumis au processus d'imbibition à  $t = 0$ .

Afin d'étudier plus en détail cette transition d'un comportement dilatant à un comportement contractant, le chemin de contrainte correspondant à la réponse du matériau au point  $P \equiv (3.75, 5)\text{m}$  a été tracé, comme illustré dans la figure 4.12. Dans cette figure, la coordonnée  $x_2$  est référencée par rapport à la base supérieure du rectangle. On observe clairement l'existence de quatre phases distinctes entre l'état initial et l'état final de l'analyse.

- Phase 1 (allant de  $\sigma'_0$  à  $\sigma'_1$  (voir Figure 4.12), du pas de temps 0 au pas de temps 30) : Cette première phase du chemin de contrainte est entièrement élastique et n'est pas influencée par la saturation, qui reste constante (voir Figure 4.13a et Figure 4.13b). Elle se caractérise par une diminution de la pression effective  $p'$  et une légère diminution de la contrainte déviatorique  $q$  (voir Figure 4.13i et Figure 4.13f). L'observation des graphiques de déformation plastique (voir Figure 4.10) révèle que la diminution de

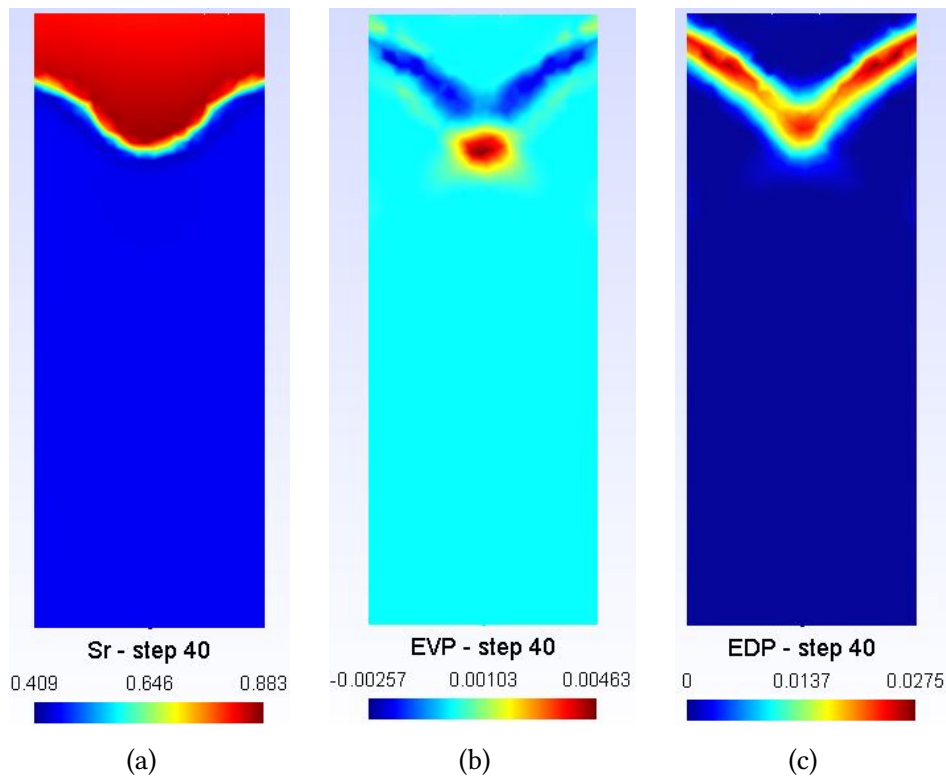


FIGURE 4.10 – Visualisation du degré de saturation  $S_r$ , de la déformation plastique volumétrique  $\varepsilon_v^p$  et de la déformation plastique déviatorique  $\varepsilon_d^p$  d'un sol limoneux fortement surconsolidé soumis au processus d'imbibition à  $t = 40\Delta t$ .

la pression effective et le gonflement élastique correspondant (déformation volumétrique positive) dans le point  $P$  sont en grande cohérence avec la dilatation plastique qui se produit au-delà du front, situé derrière le point de surveillance. Parallèlement, la contrainte déviatorique diminue, principalement en raison des contraintes axiales, notamment  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$ , qui se rapprochent l'une de l'autre (voir Figure 4.13k). Au cours de la phase 1, le gonflement élastique n'est donc pas directement causé par la variation du degré de saturation, qui est d'ailleurs toujours nul dans le point  $P$ , mais il est plutôt dû à la dilatation plastique progressive des régions voisines.

- Phase 2 (allant de  $\sigma'_1$  à  $\sigma'_2$ , Figure 4.12, du pas de temps 30 au pas de temps 50) : au début de cette phase, l'état de contrainte au point  $P$  atteint la surface de charge et la déformation plastique volumétrique commence à croître dans le domaine positif. Durant l'intervalle de temps compris entre 30 et 40, une transition se produit dans le comportement de la pression effective  $p'$ , passant d'une diminution locale à une augmentation locale. La diminution de  $p'$  est associée à une déformation élastique volumétrique positive, qui s'ajoute à la déformation plastique positive. À l'inverse, l'augmentation de  $p'$  est associée à une déformation élastique volumétrique négative, comme le mettent en évidence les résultats comparatifs entre la Figure 4.13g et la



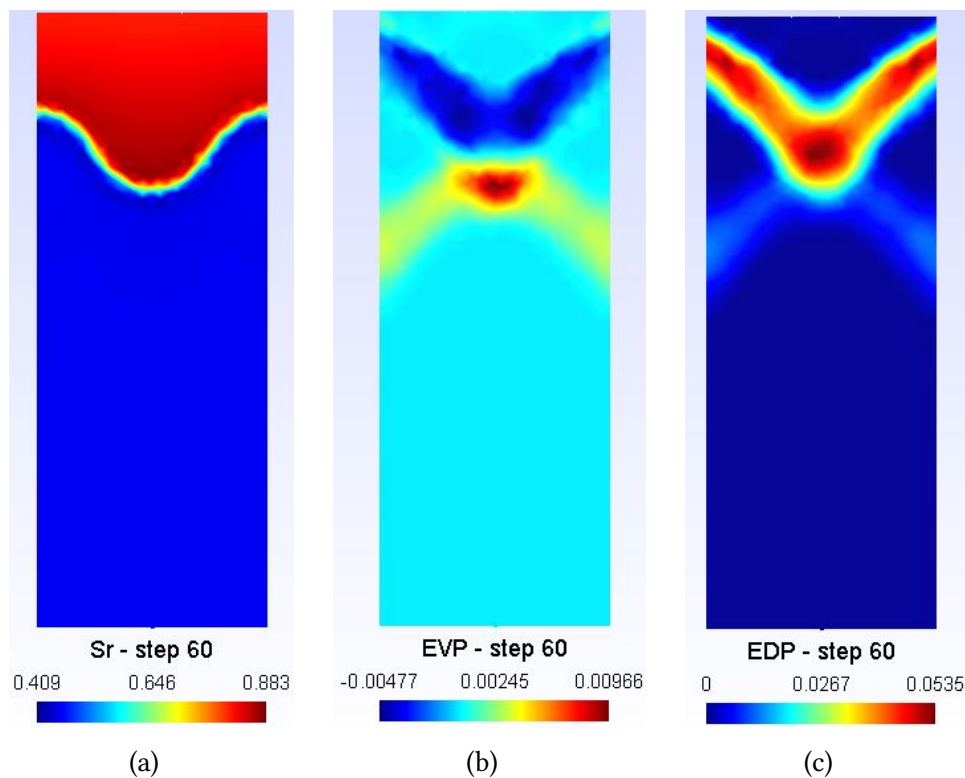


FIGURE 4.11 – Visualisation du degré de saturation  $S_r$ , de la déformation plastique volumétrique  $\varepsilon_v^p$  et de la déformation plastique déviatorique  $\varepsilon_d^p$  d'un sol limoneux fortement surconsolidé soumis au processus d'imbibition à  $t = 60\Delta t$ .

Figure 4.13h. On note que l'augmentation de la déformation plastique volumétrique dépasse celle de la déformation volumétrique totale. Au-delà du pas de temps 40, lorsque la saturation commence à augmenter de manière significative, deux effets simultanés sont observés, entraînant un rétrécissement de la surface de charge. D'une part, un adoucissement se produit, accompagné d'une dilatation plastique, et d'autre part, un écrouissage négatif se manifeste en raison de l'influence de la saturation, comme décrit par l'équation (2.69). Ceci entraîne une augmentation significative de  $p'$  et une diminution marquée de  $q$ . Le dernier pas de temps de la phase 2 correspond au pic de la déformation plastique volumétrique et à la transition de la contrainte effective à travers la ligne d'état critique. Il est intéressant de noter que, contrairement aux problèmes purement mécaniques, dans ce cas, l'état de contrainte effective est autorisé à franchir la ligne d'état critique, car le chargement est piloté par un processus physique différent, en l'occurrence l'imbibition hydraulique.

- Phase 3 (allant de  $\sigma'_2$  à  $\sigma'_3$ , Figure 4.12, du pas de temps 50 au pas de temps 58) : Cette troisième partie du chemin de contrainte constitue une prolongation directe de la phase 2 précédente, avec une augmentation progressive de  $p'$  et une diminution de  $q$ . Cependant, dans cette étape, le taux de déformation plastique volumétrique de-

vient négatif, ce qui indique que l'effet du taux de déformation plastique et celui de la saturation progressive sont en opposition : le premier tend à provoquer l'expansion de la surface de charge, tandis que le second entraîne sa contraction. Le taux de déformation volumétrique total est déjà négatif depuis les derniers pas de temps de la phase 2. À mesure que  $p'$  continue d'augmenter depuis la phase 2 précédente, une déformation élastique volumétrique de plus en plus négative se manifeste. Par conséquent, la déformation volumétrique totale passe d'une valeur positive à une valeur négative avant la déformation plastique. À la fin de cette phase 3, le degré de saturation a atteint sa valeur finale, ce qui implique que désormais, tout changement dans la pression de préconsolidation et, par conséquent, dans la surface de charge, est uniquement induit par la valeur du taux de déformation plastique. La déformation plastique déviatorique, ainsi que la déformation totale, augmentent en raison de la localisation des contraintes dans la bande de cisaillement. Il est intéressant de noter que pendant l'imbibition, c'est-à-dire durant la transition de la saturation initiale  $S_+ = 0.44$  à celle correspondant au flux imposé  $S_- = 0.8$ , la pression interstitielle équivalente  $\pi$  diminue. C'est une conséquence directe du profil non monotone du potentiel chimique interstitiel (voir la figure 4.5).

- Phase 4 (allant de  $\sigma'_3$  à  $\sigma'_4$ , du pas de temps 58 au pas de temps 86) : cette quatrième partie du chemin de contrainte est juste pilotée par l'augmentation de la contrainte effective ; la saturation, et par conséquent la pression interstitielle équivalente  $\pi$ , ont déjà atteint leurs valeurs finales induites par le flux injecté conformément à l'équation (4.18). Une croissance en deux étapes de la contrainte déviatorique  $q$  se traduit par une augmentation correspondante de la déformation plastique déviatorique, voir la figure 4.13e, et de la déformation totale déviatorique, voir la figure 4.13d ; d'autre part, la pression effective  $p'$  reste d'abord presque constante, puis commence à augmenter, ce qui implique que la pente de la déformation plastique volumétrique reste d'abord constante, puis s'accroît. Le comportement de la pression totale reflète clairement celui de la pression effective, voir la figure 4.13j. Une augmentation en deux étapes de la contrainte déviatorique  $q$  se traduit par une augmentation correspondante de la déformation plastique déviatorique, comme illustré dans la figure 4.13e, ainsi que de la déformation totale déviatorique, comme le montre la figure 4.13d. Parallèlement, la pression effective  $p'$  reste initialement presque constante, puis commence à augmenter, ce qui indique que la pente de la déformation plastique volumétrique demeure d'abord constante, puis s'accroît. Le comportement de la pression totale reflète clairement celui de la pression effective, comme on peut l'observer dans la figure 4.13j.

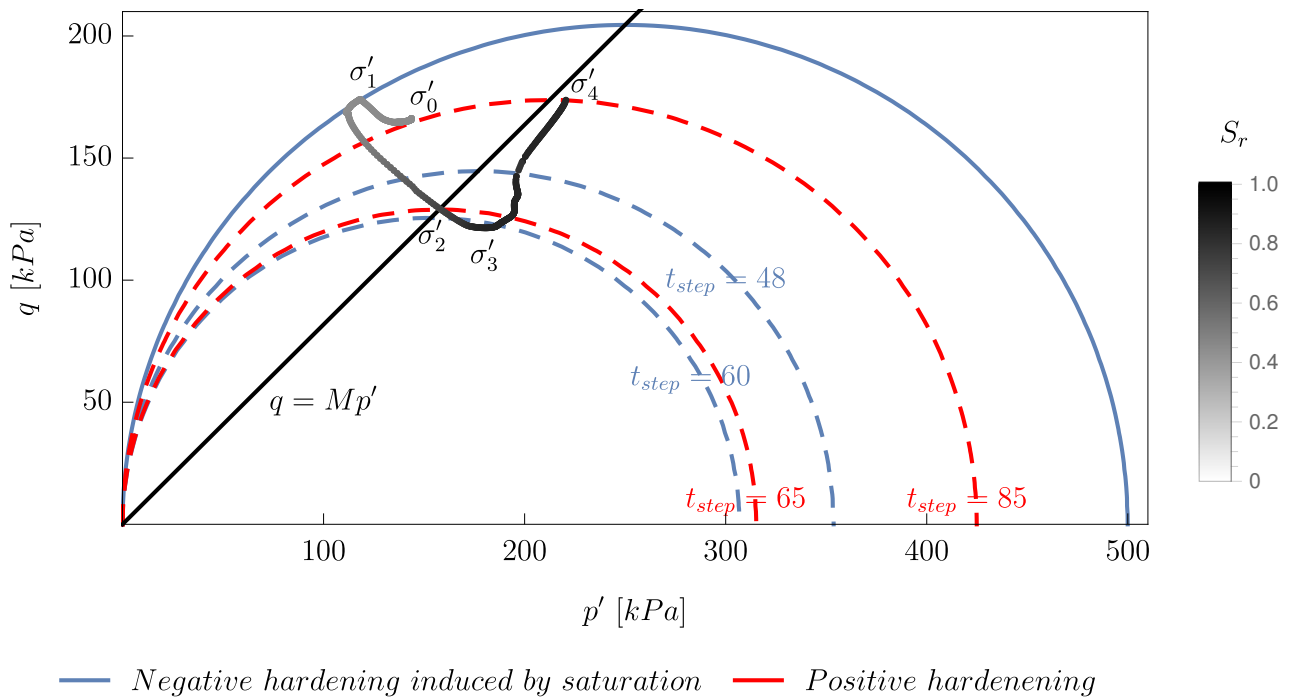


FIGURE 4.12 – Chemin de contrainte induit par l’imbibition au point  $P \equiv (3, 75, 5)m$  d’un échantillon rectangulaire de sol limoneux fortement surconsolidé. L’échelle de gris correspond à la variation du degré de saturation. La courbe continue correspond à la surface de charge initiale.

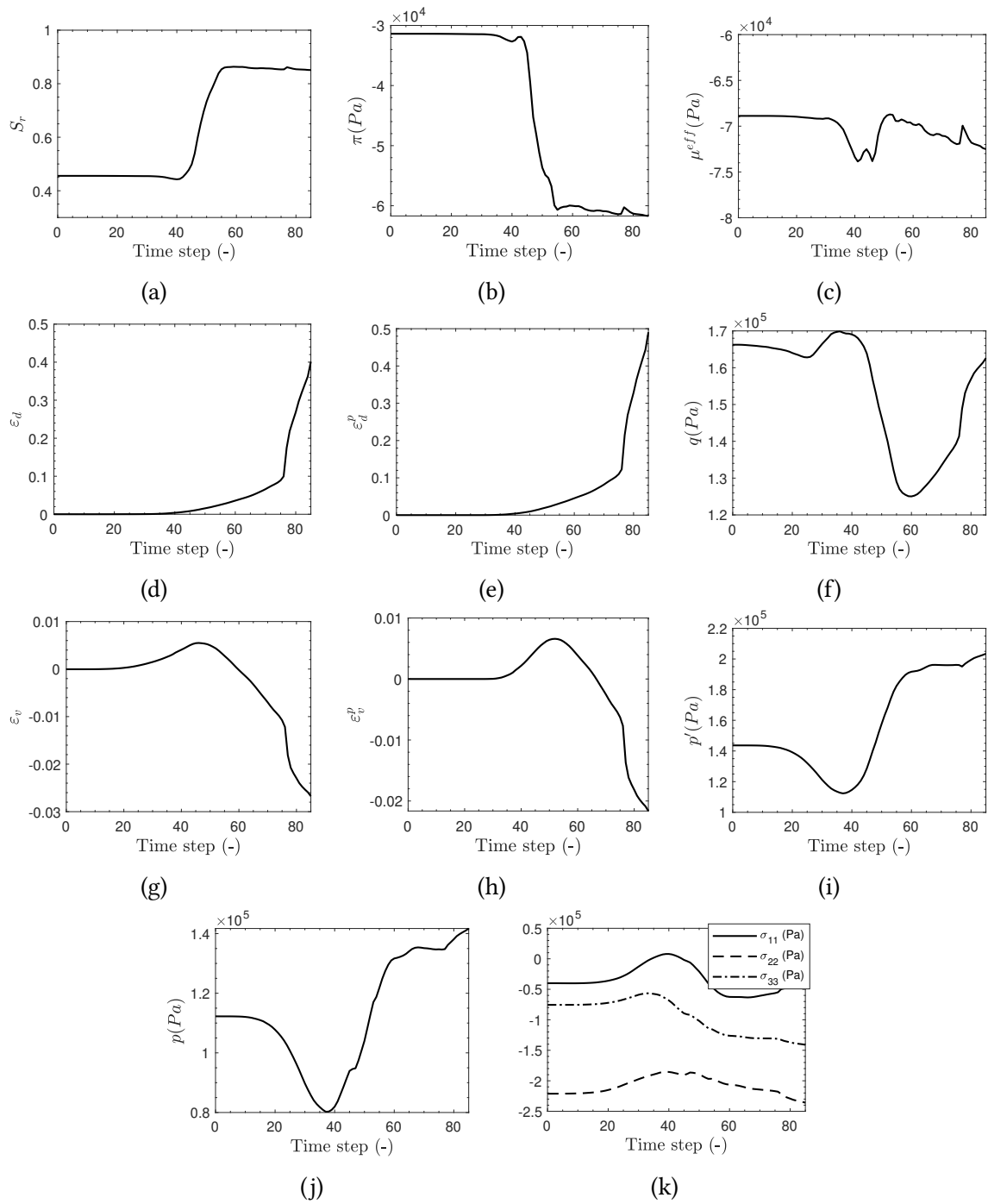


FIGURE 4.13 – Évolution dans le temps de :  $S_r$ ,  $\pi$ ,  $\mu^{eff}$ ,  $\epsilon_d$ ,  $\epsilon_d^p$ ,  $q$ ,  $\epsilon_v$ ,  $\epsilon_v^p$ ,  $p'$ ,  $p$  et  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{33}$  au point  $P \equiv (3.75, 5)\text{m}$  dans un sol limoneux fortement surconsolidé.

### 4.2.2 Imbibition d'un sol limoneux légèrement surconsolidé

Considérons maintenant le cas où la contrainte initiale homogène se situe à droite de la ligne d'état critique  $q = Mp'$  dans le plan  $(p', q)$ . Cela indique que l'état initial du matériau est légèrement surconsolidé. De manière similaire à ce qui a été fait précédemment dans la section 4.2.1, le processus d'imbibition est initié par une perturbation transversale de l'état initial, caractérisée par un profil cosinusoidal dont la longueur d'onde appartient à la plage instable comme indiqué précédemment. Dans un premier temps, nous examinons les graphiques illustrant le degré de saturation, la déformation plastique volumétrique et la déformation plastique déviatorique à trois pas de temps caractéristiques :  $t = 0$ ,  $t = 40\Delta t$  et  $t = 60\Delta t$ , avec  $\Delta t = 10^4$ s, comme présenté dans les Figures 4.14, 4.15 et 4.16. Étant donné que l'état initial de la contrainte se situe à droite de la ligne d'état critique, les deux effets de l'écroutissage négatif induit par la saturation et de l'écroutissage mécanique agissent dans des directions opposées. Dans ce cas, aucune bifurcation dans la solution du problème mécanique n'est attendue, et l'instabilité hydraulique se traduit simplement par une localisation des déformations (plastiques) à l'intérieur du doigt lui-même. Ainsi, la réponse mécanique demeure contractante.

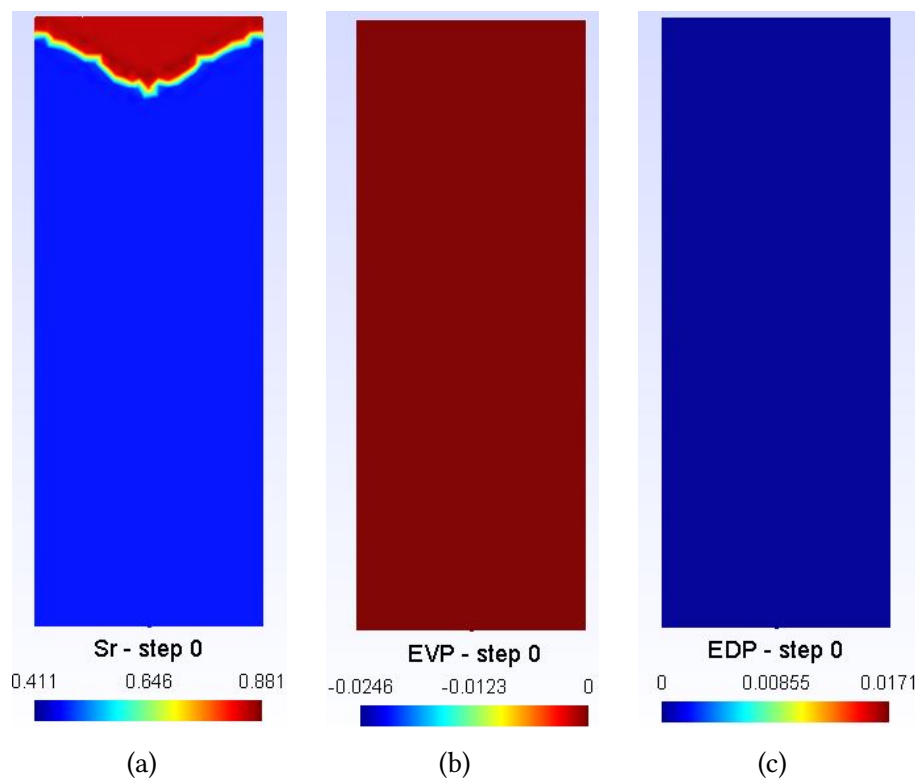


FIGURE 4.14 – Visualisation du degré de saturation  $S_r$ , de la déformation plastique volumétrique  $\varepsilon_v^p$  et de la déformation plastique déviatorique  $\varepsilon_d^p$  d'un sol limoneux légèrement surconsolidé soumis au processus d'imbibition à  $t = 0$ .

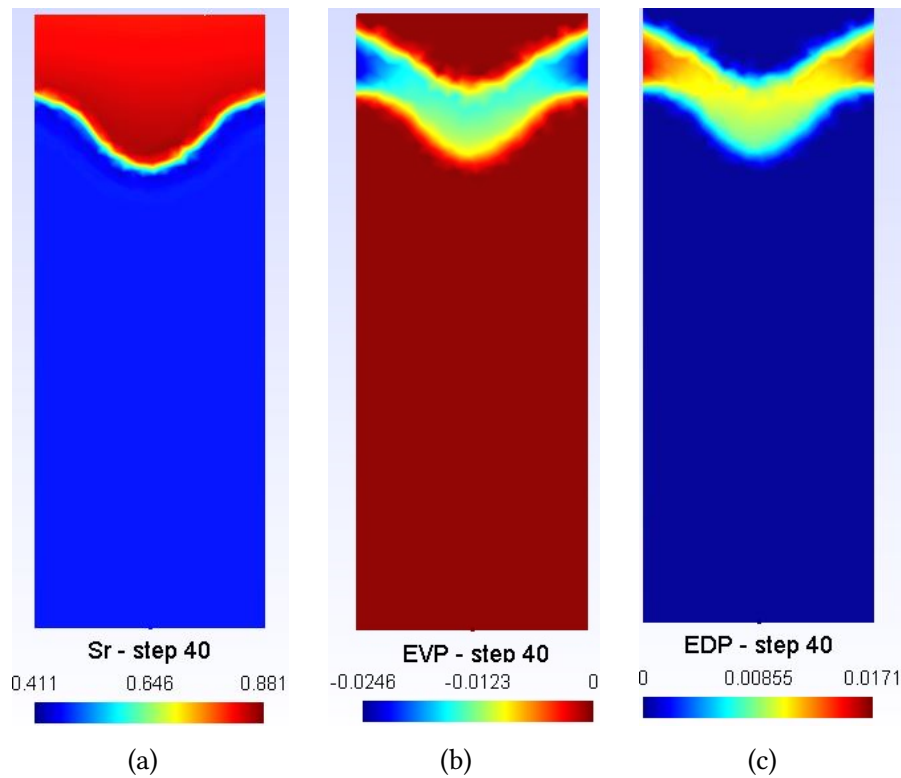


FIGURE 4.15 – Visualisation du degré de saturation  $S_r$ , de la déformation plastique volumétrique  $\varepsilon_v^p$  et de la déformation plastique déviatorique  $\varepsilon_d^p$  d'un sol limoneux légèrement surconsolidé soumis au processus d'imbibition à  $t = 40\Delta t$ .

Comme dans la section 4.2.1, le chemin de contrainte qui caractérise la réponse du matériau au point  $P \equiv (3.75, 5)\text{m}$  a été tracé dans la figure 4.17. Trois phases distinctes peuvent être clairement identifiées entre l'état initial et l'état final

- Phase 1 (allant de  $\sigma'_0$  à  $\sigma'_1$ , Figure 4.17, du pas de temps 0 au pas de temps 32) : comme observé précédemment dans le cas des sols fortement surconsolidés abordé dans la section 4.2.1, la phase 1 de notre analyse se caractérise par une réponse purement élastique. En effet, le degré de saturation demeure pratiquement inchangé par rapport aux conditions initiales, comme le montre la figure 4.18a, présentant même une légère diminution entre les pas de temps 28 et 32. Lorsque  $p$  et  $p'$  augmentent, on observe une légère compression élastique ainsi qu'une déformation élastique déviatorique, comme illustré dans la figure 4.18h et la figure 4.18e. Ce comportement est dû à la contraction plastique qui se produit dans les couches situées au-dessus du point observé qui ont déjà atteint leur saturation, tandis que le point  $P$  maintient sa saturation initiale. L'augmentation de la contrainte déviatorique  $q$  est principalement attribuable à l'augmentation de la contrainte axiale le long de la direction  $x_1$ , qui correspond à la direction de retrait maximal de l'échantillon. Le dernier stade de cette phase 1 correspond au début du processus de saturation et l'apparition des

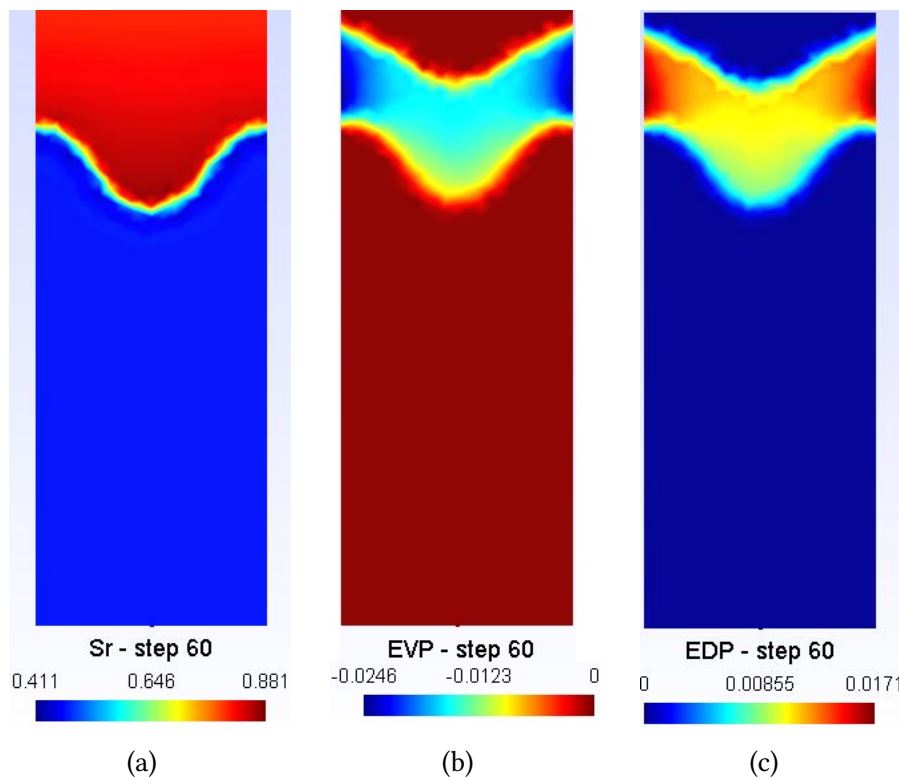


FIGURE 4.16 – Visualisation du degré de saturation  $S_r$ , de la déformation plastique volumétrique  $\varepsilon_v^p$  et de la déformation plastique déviatorique  $\varepsilon_d^p$  d'un sol limoneux légèrement surconsolidé soumis au processus d'imbibition à  $t = 60\Delta t$ .

déformations plastiques. Cela signifie que l'état de contrainte se rapproche progressivement de la surface de charge, cette dernière commençant à rétrécir à cause de l'augmentation du degré de saturation.

- Phase 2 (allant de  $\sigma'_1$  à  $\sigma'_2$ , Figure 4.17, du pas de temps 32 au pas de temps 50) : des déformations plastiques contractantes apparaissent et dominent les déformations élastiques qui sont plus faibles, voir la Figure 4.18i. Un comportement similaire peut donc être observé pour la déformation volumétrique totale et plastique, voir la figure 4.18g et la figure 4.18h. En ce qui concerne la déformation déviatorique, le comportement est différent : la composante plastique augmente tandis que la composante totale diminue, voir les figures 4.18e et 4.18d. Ceci peut être interprété en tenant compte de la diminution correspondante de la contrainte déviatorique  $q$  (voir Figure 4.18f), principalement due à l'évolution des contraintes axiales, en particulier celles le long des directions  $x_1$  et  $x_2$ , qui se rapprochent l'une de l'autre (voir Figure 4.18k). Au cours de cette phase 2, la saturation passe de sa valeur initiale à une valeur légèrement supérieure à celle imposée à la frontière et un léger «overshoot» est détecté (voir la figure 4.18a).

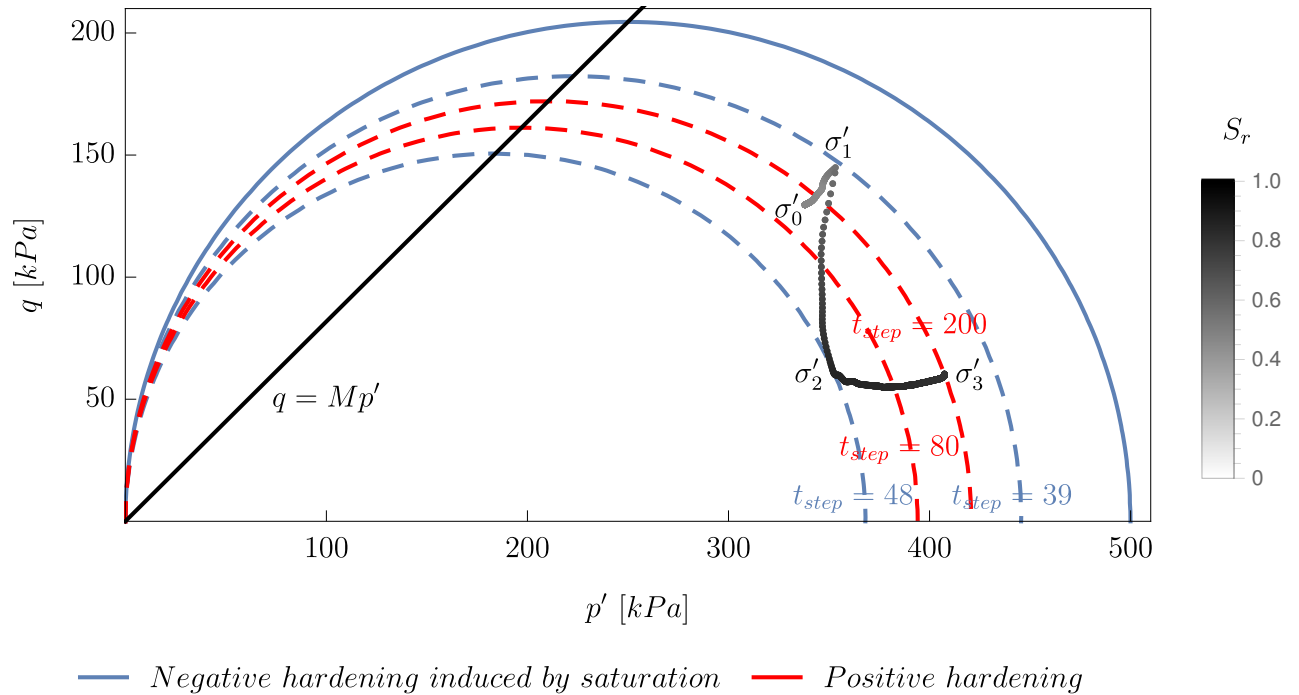


FIGURE 4.17 – Chemin de contrainte induit par l’imbibition au point  $P \equiv (3, 75, 5)\text{m}$  d’un échantillon rectangulaire de sol limoneux légèrement surconsolidé. L’échelle de gris correspond à la variation du degré de saturation.

- Phase 3 (allant de  $\sigma'_2$  à  $\sigma'_3$ , du pas de temps 50 au pas de temps 86) : la saturation a atteint sa valeur cible et seules de légères variations de contraintes sont observées.  $p$  et  $p'$  augmentent légèrement tandis que  $q$  reste presque constant, étant donné que la différence entre les contraintes longitudinales  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{33}$ , qui affectent principalement son évolution, reste également constante.

La Figure 4.19 illustre le chemin des contraintes au point  $R \equiv (2, 5)\text{m}$ , qui est similaire à celui du point  $P$ . En effet, aucune perturbation des contraintes et des déformations n’est détectable au-delà du front. La seule différence réside dans le pas de temps correspondant aux différentes transitions déjà discutées pour le point  $P$ .

### 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, les résultats de la simulation numérique de l’infiltration de l’eau dans un sol limoneux relativement sec ont été présentés. Dans un premier temps, les simulations d’un sol rigide ont montré que le modèle est capable de reproduire les principales caractéristiques de l’écoulement non saturé : un profil de saturation non monotone dans le cas 1d et la formation d’instabilités sous forme de doigts dans le cas 2d. Dans un second



temps, nous avons présenté les premiers résultats de la modélisation des effets de l'instabilité hydraulique sur la réponse mécanique du sol. Il a été prouvé que la formation du doigt est capable de déclencher une localisation des déformations plastiques, en particulier des bandes de cisaillement dilatantes, lorsque le sol est fortement surconsolidé, et des régions contractantes similaires à ceux de la saturation lorsque le sol est légèrement surconsolidé.

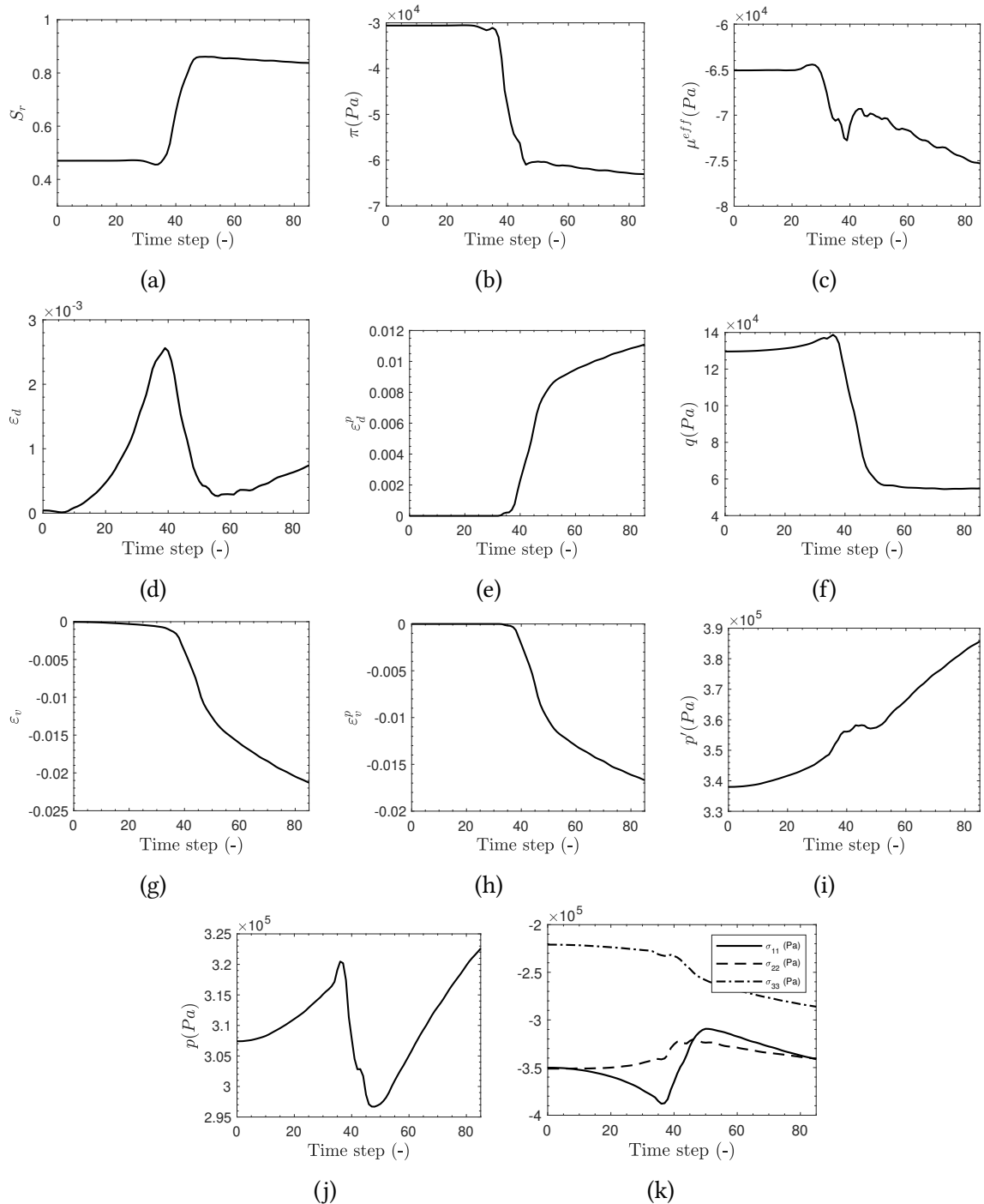


FIGURE 4.18 – Évolution dans le temps de :  $S_r$ ,  $\pi$ ,  $\mu^{eff}$ ,  $\epsilon_d$ ,  $\epsilon_d^p$ ,  $q$ ,  $\epsilon_v$ ,  $\epsilon_v^p$ ,  $p'$ ,  $p$  et  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{33}$  au point  $P \equiv (3.75, 5)$  m dans un sol limoneux légèrement surconsolidé.

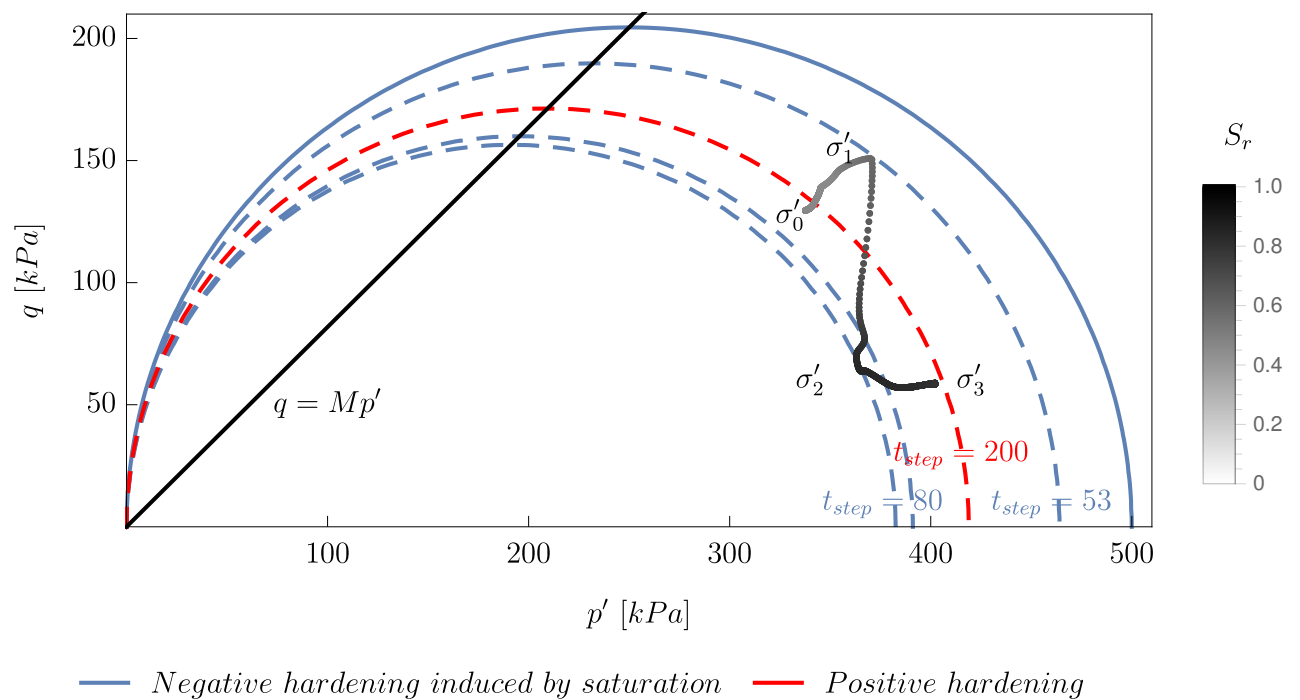


FIGURE 4.19 – Chemin de contrainte induit par l’imbibition au point  $R \equiv (2, 5)\text{m}$  d’un échantillon rectangulaire de sol limoneux légèrement surconsolidé. L’échelle de gris correspond à la variation du degré de saturation. La courbe continue correspond à la surface de charge initiale.

# CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Ces travaux de doctorat ont présenté, pour la première fois, une étude numérique de l'interaction entre l'écoulement par digitation et la déformation mécanique des sols non saturés. Cette étude s'est concentrée particulièrement sur le cas de l'infiltration d'eau dans un sol limoneux non saturé, avec une vision vers ses applications potentielles sur le transport des contaminants solubles dans la zone vadose.

Après une synthèse bibliographique sur l'écoulement par digitation, les principaux éléments de la modélisation classique des milieux poreux partiellement saturés ont été présentés. Cette modélisation se révèle insuffisante pour représenter de manière adéquate l'écoulement par digitation et ses caractéristiques, en particulier le phénomène d'overshoot, étant basée sur une loi de comportement donnée par la courbe de rétention, qui relie directement la pression capillaire au degré de saturation.

Afin de tenir compte de la digitation, un modèle à gradient qui repose sur une approche de champ de phase pour les milieux poreux partiellement saturés déformables a été formulé dans le cadre de ce travail. Une loi de comportement élastoplastique a été également introduite afin de compléter la description du comportement mécanique du milieu poreux. L'ensemble des équations couplées décrivant le modèle est résolu numériquement en utilisant la méthode des éléments finis pour la discrétisation spatiale et un schéma d'Euler implicite pour la discrétisation dans le temps.

Les résultats de la simulation numérique de l'infiltration d'eau dans un sol limoneux relativement sec ont révélé que même en l'absence d'hétérogénéité dans la perméabilité et les propriétés de rétention du milieu poreux, l'écoulement par digitation peut induire une localisation des déformations plastiques. Cette localisation se manifeste sous la forme de bandes de cisaillement dilatantes lorsque le sol est fortement surconsolidé, ainsi que des zones contractantes reproduisant des schémas similaires à la saturation lorsque le sol est légèrement surconsolidé.

Ces travaux de doctorat pourraient être enrichis de nombreuses perspectives, tant sur le plan conceptuel du modèle que sur sa partie résolution numérique. Sur le plan numérique, en particulier, l'introduction d'un modèle de gradient de déformation sera certainement bénéfique pour modéliser l'apparition d'instabilités de bandes de cisaillement induites par la saturation. D'un point de vue conceptuel et compte tenu des applications de ce modèle à la simulation du processus de drainage qui se produit typiquement à l'interface entre une roche aquifère, contenant des hydrocarbures stockés, et la roche couverture étanche saturée de saumure, une formulation étendue du modèle devrait être introduite afin de tenir compte

de la compressibilité du gaz, qui jusqu'à présent a seulement été considéré comme une phase passive.

# BIBLIOGRAPHIE

- Abbo, A. J. (1997), *Finite element algorithms for elastoplasticity and consolidation*, University of Newcastle Callaghan.
- Alonso, E. E., Gens, A. & Josa, A. (1990), 'A constitutive model for partially saturated soils', *Géotechnique* **40**(3), 405–430.
- Aminzadeh, B. & DiCarlo, D. A. (2010), 'The transition between sharp and diffusive wetting fronts as a function of imbibing fluid properties', *Vadose Zone Journal* **9**(3), 588–596.
- Armstrong, R. T. & Berg, S. (2013), 'Interfacial velocities and capillary pressure gradients during haines jumps', *Physical Review E* **88**(4), 043010.
- Babchin, A., Brailovsky, I., Gordon, P. & Sivashinsky, G. (2008), 'Fingering instability in immiscible displacement', *Physical Review E* **77**(2), 026301.
- Bachu, S. & Adams, J. J. (2003), 'Sequestration of co<sub>2</sub> in geological media in response to climate change : capacity of deep saline aquifers to sequester co<sub>2</sub> in solution', *Energy Conversion and management* **44**(20), 3151–3175.
- Badalassi, V. E., Cenicerros, H. D. & Banerjee, S. (2003), 'Computation of multiphase systems with phase field models', *Journal of computational physics* **190**(2), 371–397.
- Baker, R. S. & Hillel, D. (1990), 'Laboratory tests of a theory of fingering during infiltration into layered soils', *Soil Science Society of America Journal* **54**(1), 20–30.
- Barden, L., McGown, A. & Collins, K. (1973), 'The collapse mechanism in partly saturated soil', *Engineering Geology* **7**(1), 49–60.
- Barrett, J., Garcke, H. & Nürnberg, R. (2006), 'Finite element approximation of a phase field model for surface diffusion of voids in a stressed solid', *Mathematics of Computation* **75**(253), 7–41.
- Barrett, J. W., Blowey, J. F. & Garcke, H. (1999), 'Finite element approximation of the cahn–hilliard equation with degenerate mobility', *SIAM Journal on Numerical Analysis* **37**(1), 286–318.
- Bathe, K.-J. (2006), *Finite element procedures*, Klaus-Jurgen Bathe.
- Bear, J. (1988), *Dynamics of fluids in porous media*, Courier Corporation.
- Bear, J. (2012), *Hydraulics of groundwater*, Courier Corporation.
- Beljadid, A., Cueto-Felgueroso, L. & Juanes, R. (2020), 'A continuum model of unstable infiltration in porous media endowed with an entropy function', *Advances in Water Resources* **144**, 103684.

- Biot, M. A. (1941), 'General theory of three-dimensional consolidation', *Journal of applied physics* **12**(2), 155–164.
- Birovljev, A., Furuberg, L., Feder, J., Jssang, T., Mly, K. & Aharony, A. (1991), 'Gravity invasion percolation in two dimensions : Experiment and simulation', *Physical Review Letters* **67**(5), 584.
- Birovljev, A., Wagner, G., Meakin, P., Feder, J. & Jøssang, T. (1995), 'Migration and fragmentation of invasion percolation clusters in two-dimensional porous media', *Physical Review E* **51**(6), 5911.
- Bischofberger, I., Ramachandran, R. & Nagel, S. R. (2014), 'Fingering versus stability in the limit of zero interfacial tension', *Nature communications* **5**(1), 5265.
- Bishop, A. W. (1959), 'The principle of effective stress', *Teknisk ukeblad* **39**, 859–863.
- Blowey, J. F. & Elliott, C. M. (1992), 'The cahn–hilliard gradient theory for phase separation with non-smooth free energy part ii : Numerical analysis', *European Journal of Applied Mathematics* **3**(2), 147–179.
- Blum, A. & Blum, A. (2011), 'Plant water relations, plant stress and plant production', *Plant breeding for water-limited environments* pp. 11–52.
- Bolzon, G., Schrefler, B. & Zienkiewicz, O. (1996), 'Elastoplastic soil constitutive laws generalized to partially saturated states', *Géotechnique* **46**(2), 279–289.
- Bonnet, d. M. & Frangi, A. (2007), 'Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis', *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique* **16**(5), 667–668.
- Booker, J. R. & Small, J. (1975), 'An investigation of the stability of numerical solutions of biot's equations of consolidation', *International Journal of Solids and Structures* **11**(7-8), 907–917.
- Borja, R. I. (1991), 'Cam-clay plasticity, part ii : Implicit integration of constitutive equation based on a nonlinear elastic stress predictor', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **88**(2), 225–240.
- Borja, R. I. & Lee, S. R. (1990), 'Cam-clay plasticity, part 1 : implicit integration of elastoplastic constitutive relations', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **78**(1), 49–72.
- Boyer, F. & Lapuerta, C. (2006), 'Study of a three component cahn-hilliard flow model', *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* **40**(4), 653–687.
- Boyer, F., Lapuerta, C., Minjeaud, S., Piar, B. & Quintard, M. (2010), 'Cahn–hilliard/navier–stokes model for the simulation of three-phase flows', *Transport in Porous Media* **82**(3), 463–483.

- Bray, A. J. (2002), 'Theory of phase-ordering kinetics', *Advances in Physics* **51**(2), 481–587.
- Brooks, R. & Corey, A. (1964), 'Hydraulic properties of porous media : Hydrology papers : Colorado state university', *Fort Collins, Colorado* .
- Cahn, J. W. & Hilliard, J. E. (1958), 'Free energy of a nonuniform system. i. interfacial free energy', *The Journal of chemical physics* **28**(2), 258–267.
- Cahn, J. W. & Hilliard, J. E. (1959), 'Free energy of a nonuniform system. iii. nucleation in a two-component incompressible fluid', *The Journal of chemical physics* **31**(3), 688–699.
- Cauchy, A. L. B. (1823), *Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques*.
- Chapwanya, M. & Stockie, J. M. (2010), 'Numerical simulations of gravity-driven fingering in unsaturated porous media using a nonequilibrium model', *Water Resources Research* **46**(9).
- Chen, Y.-F., Fang, S., Wu, D.-S. & Hu, R. (2017), 'Visualizing and quantifying the crossover from capillary fingering to viscous fingering in a rough fracture', *Water Resources Research* **53**(9), 7756–7772.
- Chen, Y.-F., Wu, D.-S., Fang, S. & Hu, R. (2018), 'Experimental study on two-phase flow in rough fracture : Phase diagram and localized flow channel', *International Journal of Heat and Mass Transfer* **122**, 1298–1307.
- Chouke, R., Van Meurs, P. & Van der Poel, C. (1959), 'The stability of a slow, immiscible, v liquid-liquid displacement in a permeable media, petrol', *Trans. AIME* **216**, 188–194.
- Clement, E., Baudet, C., Guyon, E. & Hulin, J. (1987), 'Invasion front structure in a 3-d model porous medium under a hydrostatic pressure gradient', *Journal of Physics D : Applied Physics* **20**(5), 608.
- Coussy, O. (2004), *Poromechanics*, John Wiley & Sons.
- Coussy, O. (2007), 'Revisiting the constitutive equations of unsaturated porous solids using a lagrangian saturation concept', *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* **31**(15), 1675–1694.
- Coussy, O. (2011), *Mechanics and physics of porous solids*, John Wiley & Sons.
- Coussy, O., Dangla, P., Lassabatère, T. & Baroghel-Bouny, V. (2004), 'The equivalent pore pressure and the swelling and shrinkage of cement-based materials', *Materials and structures* **37**(1), 15–20.
- Crisfield, M. (1997), *Non-linear Finite Analysis of Solids and Structures : Vol. 2 : advanced Topics*, Wiley.
- Crisfield, M., Remmers, J. & Verhoosel, C. (1991), 'Non-linear finite element analysis of solids and structures'.



- Cueto-Felgueroso, L. & Juanes, R. (2008), 'Nonlocal interface dynamics and pattern formation in gravity-driven unsaturated flow through porous media', *Physical Review Letters* **101**(24), 244504.
- Cueto-Felgueroso, L. & Juanes, R. (2009a), 'A phase field model of unsaturated flow', *Water resources research* **45**(10).
- Cueto-Felgueroso, L. & Juanes, R. (2009b), 'Stability analysis of a phase-field model of gravity-driven unsaturated flow through porous media', *Physical Review E* **79**(3), 036301.
- Cueto-Felgueroso, L. & Juanes, R. (2012), 'Macroscopic phase-field model of partial wetting : bubbles in a capillary tube', *Physical review letters* **108**(14), 144502.
- Cueto-Felgueroso, L. & Juanes, R. (2014), 'A phase-field model of two-phase hele-shaw flow', *Journal of fluid mechanics* **758**, 522–552.
- Darcy, H. (1856), *Les fontaines publiques de la ville de Dijon : Exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau : Ouvrage terminé par un appendice relatif aux fournitures d'eau de plusieurs villes, au filtrage des eaux et à la fabrication des tuyaux de fonte, de plomb, de tôle et de bitume*, Vol. 2, V. Dalmont.
- De Borst, R., Crisfield, M. A., Remmers, J. J. & Verhoosel, C. V. (2012), *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*, John Wiley & Sons.
- DiCarlo, D. A. (2004), 'Experimental measurements of saturation overshoot on infiltration', *Water Resources Research* **40**(4).
- DiCarlo, D. A. (2007), 'Capillary pressure overshoot as a function of imbibition flux and initial water content', *Water resources research* **43**(8).
- DiCarlo, D. A. (2010), 'Comment on "a phase field model of unsaturated flow" by l. cueto-felgueroso and r. juanes', *Water Resources Research* **46**(12).
- DiCarlo, D. A. (2013), 'Stability of gravity-driven multiphase flow in porous media : 40 years of advancements', *Water Resources Research* **49**(8), 4531–4544.
- DiCarlo, D. A., Juanes, R., LaForce, T. & Witelski, T. P. (2008), 'Nonmonotonic traveling wave solutions of infiltration into porous media', *Water resources research* **44**(2).
- Donaldson, A., Kirpalani, D. & Macchi, A. (2011), 'Diffuse interface tracking of immiscible fluids : improving phase continuity through free energy density selection', *International Journal of Multiphase Flow* **37**(7), 777–787.
- Dong, B., Yan, Y. & Li, W. (2011), 'Lbm simulation of viscous fingering phenomenon in immiscible displacement of two fluids in porous media', *Transport in porous media* **88**, 293–314.

- Du, Q. & Nicolaides, R. A. (1991), 'Numerical analysis of a continuum model of phase transition', *SIAM Journal on Numerical Analysis* **28**(5), 1310–1322.
- Egorov, A. G., Dautov, R. Z., Nieber, J. L. & Sheshukov, A. Y. (2003), 'Stability analysis of gravity-driven infiltrating flow', *Water resources research* **39**(9).
- Eliassi, M. & Glass, R. J. (2001), 'On the continuum-scale modeling of gravity-driven fingers in unsaturated porous media : The inadequacy of the richards equation with standard monotonic constitutive relations and hysteretic equations of state', *Water Resources Research* **37**(8), 2019–2035.
- Eliassi, M. & Glass, R. J. (2002), 'On the porous-continuum modeling of gravity-driven fingers in unsaturated materials : Extension of standard theory with a hold-back-pile-up effect', *Water Resources Research* **38**(11), 16–1.
- Eliassi, M. & Glass, R. J. (2003), 'On the porous continuum-scale modeling of gravity-driven fingers in unsaturated materials : Numerical solution of a hypodiffusive governing equation that incorporates a hold-back-pile-up effect', *Water resources research* **39**(6).
- Elliott, C. M. & French, D. A. (1987), 'Numerical studies of the cahn-hilliard equation for phase separation', *IMA Journal of Applied Mathematics* **38**(2), 97–128.
- Feng, X. & Prohl, A. (2004), 'Analysis of a fully discrete finite element method for the phase field model and approximation of its sharp interface limits', *Mathematics of computation* **73**(246), 541–567.
- Foster, S., Hirata, R., Gomes, D. & D'Elia, M. (2002), 'Quality protection'.
- Frette, V., Feder, J., Jøssang, T. & Meakin, P. (1992), 'Buoyancy-driven fluid migration in porous media', *Physical review letters* **68**(21), 3164.
- Furihata, D. (2001), 'A stable and conservative finite difference scheme for the cahn-hilliard equation', *Numerische Mathematik* **87**(4), 675–699.
- Gallipoli, D., Gens, A., Sharma, R. & Vaunat, J. (2003), 'An elasto-plastic model for unsaturated soil incorporating the effects of suction and degree of saturation on mechanical behaviour', *Géotechnique* **53**(1), 123–135.
- Gee, G., Kincaid, C., Lenhard, R. & Simmons, C. (1991), 'Recent studies of flow and transport in the vadose zone', *Reviews of Geophysics* **29**(S1), 227–239.
- Geiger, S. L. & Durnford, D. S. (2000), 'Infiltration in homogeneous sands and a mechanistic model of unstable flow', *Soil Science Society of America Journal* **64**(2), 460–469.
- Germain, P. (1973), *Cours de mécanique des milieux continus. 1. Théorie générale*, Masson.
- Glass, R. J., Steenhuis, T. S. & Parlange, J.-Y. (1989), 'Mechanism for finger persistence in homogeneous, unsaturated, porous media : Theory and verification', *Soil Science* **148**(1), 60–70.

- Glass, R. & Nicholl, M. (1996), 'Physics of gravity fingering of immiscible fluids within porous media : An overview of current understanding and selected complicating factors', *Geoderma* **70**(2-4), 133–163.
- Hassanizadeh, S. M., Celia, M. A. & Dahle, H. K. (2002), 'Dynamic effect in the capillary pressure–saturation relationship and its impacts on unsaturated flow', *Vadose Zone Journal* **1**(1), 38–57.
- Hassanizadeh, S. M. & Gray, W. G. (1990), 'Mechanics and thermodynamics of multiphase flow in porous media including interphase boundaries', *Advances in water resources* **13**(4), 169–186.
- Hassanizadeh, S. M. & Gray, W. G. (1993), 'Thermodynamic basis of capillary pressure in porous media', *Water resources research* **29**(10), 3389–3405.
- HELE-SHAW, H. S. (1898), 'Experiments on the nature of surface resistance of water and streamline motion under certain experimental conditions', *Trans. Inst. Naval Architects* **40**, 21–46.
- Hill, D. E. & Parlange, J.-Y. (1972), 'Wetting front instability in layered soils', *Soil Science Society of America Journal* **36**(5), 697–702.
- Homsy, G. M. (1987), 'Viscous fingering in porous media', *Annual review of fluid mechanics* **19**(1), 271–311.
- Hughes, T. J. (2012), *The finite element method : linear static and dynamic finite element analysis*, Courier Corporation.
- Jacqmin, D. (2000), 'Contact-line dynamics of a diffuse fluid interface', *Journal of fluid mechanics* **402**, 57–88.
- Jain, S. S. (2022), 'Accurate conservative phase-field method for simulation of two-phase flows', *Journal of Computational Physics* **469**, 111529.
- Jennings, J. & Burland, J. (1962), 'Limitations to the use of effective stresses in partly saturated soils', *Géotechnique* **12**(2), 125–144.
- Jommi, C. (2000), Remarks on the constitutive modelling of unsaturated soils, in 'Experimental evidence and theoretical approaches in unsaturated soils', CRC Press, pp. 147–162.
- Joshi, V. & Jaiman, R. K. (2018), 'A positivity preserving and conservative variational scheme for phase-field modeling of two-phase flows', *Journal of Computational Physics* **360**, 137–166.
- Juanes, R. & Cueto-Felgueroso, L. (2009), A phase-field model of unsaturated flow, in 'AGU Fall Meeting Abstracts', Vol. 2009, pp. H43E–1075.

- Kim, J. (2012), 'Phase-field models for multi-component fluid flows', *Communications in Computational Physics* **12**(3), 613–661.
- Kim, Y.-J., Steenhuis, T. S. & Nam, K. (2008), 'Movement of heavy metals in soil through preferential flow paths under different rainfall intensities', *CLEAN–Soil, Air, Water* **36**(12), 984–989.
- Kirby, R. C. & Mitchell, L. (2019), 'Code generation for generally mapped finite elements', *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* **45**(4), 1–23.
- Kohgo, Y., Nakano, M. & Miyazaki, T. (1993), 'Theoretical aspects of constitutive modelling for unsaturated soils', *Soils and foundations* **33**(4), 49–63.
- Lawton, E. C., Fragaszy, R. J. & Hetherington, M. D. (1992), 'Review of wetting-induced collapse in compacted soil', *Journal of geotechnical engineering* **118**(9), 1376–1394.
- Lenormand, R. (1985), 'Différents mécanismes de déplacements visqueux et capillaires en milieu poreux : Diagramme de phase', *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 2, Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l'univers, Sciences de la Terre* **301**(5), 247–250.
- Lenormand, R. (1990), 'Liquids in porous media', *Journal of Physics : Condensed Matter* **2**(S), SA79.
- Lenormand, R., Touboul, E. & Zarcone, C. (1988), 'Numerical models and experiments on immiscible displacements in porous media', *Journal of fluid mechanics* **189**, 165–187.
- Leverett, M. (1941), 'Capillary behavior in porous solids', *Transactions of the AIME* **142**(01), 152–169.
- Lewis, R. W. & Schrefler, B. A. (1998), 'The finite element method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media', (*No Title*).
- Liu, C. & Shen, J. (2003), 'A phase field model for the mixture of two incompressible fluids and its approximation by a fourier-spectral method', *Physica D : Nonlinear Phenomena* **179**(3-4), 211–228.
- Liu, Y., Steenhuis, T. S. & Parlange, J.-Y. (1994), 'Formation and persistence of fingered flow fields in coarse grained soils under different moisture contents', *Journal of hydrology* **159**(1-4), 187–195.
- Loret, B. & Khalili, N. (2000), 'A three-phase model for unsaturated soils', *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics* **24**(11), 893–927.
- Loret, B. & Khalili, N. (2002), 'An effective stress elastic–plastic model for unsaturated porous media', *Mechanics of Materials* **34**(2), 97–116.

- Luckner, L., Van Genuchten, M. T. & Nielsen, D. (1989), 'A consistent set of parametric models for the two-phase flow of immiscible fluids in the subsurface', *Water Resources Research* **25**(10), 2187–2193.
- Makowski, V., Julich, S., Feger, K.-H. & Julich, D. (2020), 'Soil phosphorus translocation via preferential flow pathways : a comparison of two sites with different phosphorus stocks', *Frontiers in Forests and Global Change* **3**, 48.
- Måløy, K. J., Feder, J. & Jøssang, T. (1985), 'Viscous fingering fractals in porous media', *Physical review letters* **55**(24), 2688.
- Manzari, M. T. & Yonten, K. (2013), 'C1 finite element analysis in gradient enhanced continua', *Mathematical and Computer Modelling* **57**(9-10), 2519–2531.
- Meakin, P., Birovljev, A., Frette, V., Feder, J. & Jøssang, T. (1992), 'Gradient stabilized and destabilized invasion percolation', *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* **191**(1-4), 227–239.
- Modaresi, A. & Abou-Bekr, N. (1994), Constitutive model for unsaturated soils : validation on a silty material, in 'European conference on numerical methods in geotechnical engineering', pp. 91–96.
- Muskat, M. & Meres, M. W. (1936), 'The flow of heterogeneous fluids through porous media', *Physics* **7**(9), 346–363.
- Nicholl, M., Glass, R. & Wheatcraft, S. (1994), 'Gravity-driven infiltration instability in initially dry nonhorizontal fractures', *Water Resources Research* **30**(9), 2533–2546.
- Nieber, J. L., Dautov, R. Z., Egorov, A. G. & Sheshukov, A. Y. (2005), 'Dynamic capillary pressure mechanism for instability in gravity-driven flows; review and extension to very dry conditions', *Transport in porous media* **58**(1), 147–172.
- Nieber, J., Sheshukov, A., Egorov, A., Dautov, R. et al. (2003), 'Non-equilibrium model for gravity-driven fingering in water repellent soils : Formulation and 2d simulations', *Soil water repellency : occurrence, consequences and amelioration* pp. 245–258.
- Nikooee, E., Habibagahi, G., Hassanizadeh, S. M. & Ghahramani, A. (2013), 'Effective stress in unsaturated soils : A thermodynamic approach based on the interfacial energy and hydromechanical coupling', *Transport in porous media* **96**(2), 369–396.
- Noll, W., Coleman, B. D. & Noll, W. (1974), 'The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity', *The Foundations of Mechanics and Thermodynamics : Selected Papers* pp. 145–156.
- Nova, R., Castellanza, R. & Tamagnini, C. (2003), 'A constitutive model for bonded geomaterials subject to mechanical and/or chemical degradation', *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* **27**(9), 705–732.

- Nuth, M. & Laloui, L. (2008), 'Effective stress concept in unsaturated soils : Clarification and validation of a unified framework', *International journal for numerical and analytical methods in Geomechanics* **32**(7), 771–801.
- Ommi, S. H., Sciarra, G. & Kotronis, P. (2022), 'A phase field model for partially saturated geomaterials describing fluid–fluid displacements. part i : The model and one-dimensional analysis', *Advances in Water Resources* **164**, 104170.
- Ortiz, M. & Simo, J. (1986), 'An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations', *International journal for numerical methods in engineering* **23**(3), 353–366.
- Otto, F. (1997), ' $L^1$ -contraction and uniqueness for unstationary saturated-unsaturated porous media flow', *Advances in Mathematical Sciences and Applications* **7**, 537–553.
- Paterson, L. (1981), 'Radial fingering in a hele shaw cell', *Journal of Fluid Mechanics* **113**, 513–529.
- Peter, A., Yang, D., Eshiet, K. I.-I. & Sheng, Y. (2022), 'A review of the studies on CO<sub>2</sub>–brine–rock interaction in geological storage process', *Geosciences* **12**(4), 168.
- Potts, D. & Ganendra, D. (1994), 'An evaluation of substepping and implicit stress point algorithms', *Computer methods in applied mechanics and engineering* **119**(3-4), 341–354.
- Rezanezhad, F., Vogel, H.-J. & Roth, K. (2006), 'Experimental study of fingered flow through initially dry sand', *Hydrology and Earth System Sciences Discussions* **3**(4), 2595–2620.
- Richards, L. A. (1931), 'Capillary conduction of liquids through porous mediums', *Physics* **1**(5), 318–333.
- Roscoe, K. H., Schofield, A. & Wroth, a. P. (1958), 'On the yielding of soils', *Geotechnique* **8**(1), 22–53.
- Roscoe, K., Schofield, A. & Thurairajah, A. (1963), 'Yielding of clays in states wetter than critical', *Geotechnique* **13**(3), 211–240.
- Rotisciani, G., Sciarra, G., Casini, F. & Desideri, A. (2015), 'Hydro-mechanical response of collapsible soils under different infiltration events', *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* **39**(11), 1212–1234.
- Saffman, P. G. & Taylor, G. I. (1958), 'The penetration of a fluid into a porous medium or hele-shaw cell containing a more viscous liquid', *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* **245**(1242), 312–329.
- Santagiuliana, R. & Schrefler, B. (2006), 'Enhancing the bolzon–schrefler–zienkiewicz constitutive model for partially saturated soil', *Transport in porous media* **65**(1), 1–30.

- Schneider, A., Hirsch, F., Raab, A. & Raab, T. (2018), 'Dye tracer visualization of infiltration patterns in soils on relict charcoal hearths', *Frontiers in Environmental Science* **6**, 143.
- Schofield, A. N. & Wroth, P. (1968), *Critical state soil mechanics*, Vol. 310, McGraw-hill London.
- Sciarra, G. (2016), 'Phase field modeling of partially saturated deformable porous media', *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **94**, 230–256.
- Selker, J., Leclercq, P., Parlange, J.-Y. & Steenhuis, T. (1992), 'Fingered flow in two dimensions : 1. measurement of matric potential', *Water Resources Research* **28**(9), 2513–2521.
- Sheng, D., Sloan, S. & Gens, A. (2004), 'A constitutive model for unsaturated soils : thermo-mechanical and computational aspects', *Computational Mechanics* **33**(6), 453–465.
- Shiozawa, S. & Fujimaki, H. (2004), 'Unexpected water content profiles under flux-limited one-dimensional downward infiltration in initially dry granular media', *Water resources research* **40**(7).
- Simo, J. C. & Hughes, T. J. (2006), *Computational inelasticity*, Vol. 7, Springer Science & Business Media.
- Simo, J. C. & Taylor, R. L. (1985), 'Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity', *Computer methods in applied mechanics and engineering* **48**(1), 101–118.
- Singh, K., Scholl, H., Brinkmann, M., Michiel, M. D., Scheel, M., Herminghaus, S. & Seemann, R. (2017), 'The role of local instabilities in fluid invasion into permeable media', *Scientific reports* **7**(1), 444.
- Sloan, S. (1987), 'Substepping schemes for the numerical integration of elastoplastic stress-strain relations', *International journal for numerical methods in engineering* **24**(5), 893–911.
- Sloan, S. & Booker, J. R. (1992), 'Integration of tresca and mohr-coulomb constitutive relations in plane strain elastoplasticity', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **33**(1), 163–196.
- Sloan, S. W., Abbo, A. J. & Sheng, D. (2001), 'Refined explicit integration of elastoplastic models with automatic error control', *Engineering Computations* .
- Stagnitti, F., Parlange, J., Steenhuis, T. S., Boll, J., Pivetz, B., Barry, D. et al. (1995), Transport of moisture and solutes in the unsaturated zone by preferential flow, in 'Environmental hydrology', Springer, pp. 193–224.
- Stephens, D. B. (2018), *Vadose zone hydrology*, CRC press.
- Suekane, T., Saito, Y. & Jiang, L. (2015), 'Non-wetting phase saturation after drainage from the wetting-phase-filled porous medium', *Journal of Fluid Science and Technology* **10**(2), JFST0014–JFST0014.

- Sun, Z. Z. (1995), 'A second-order accurate linearized difference scheme for the two-dimensional cahn-hilliard equation', *mathematics of computation* **64**(212), 1463–1471.
- Tamagnini, C., Castellanza, R. & Nova, R. (2002), 'Implicit integration of constitutive equations in computational plasticity', *Revue française de génie civil* **6**(6), 1051–1067.
- Tamagnini, R. (2004), 'An extended cam-clay model for unsaturated soils with hydraulic hysteresis', *Géotechnique* **54**(3), 223–228.
- Terzaghi, K. v. (1936), The shearing resistance of saturated soils and the angle between the planes of shear, in 'First international conference on soil Mechanics, 1936', Vol. 1, pp. 54–59.
- van Genuchten, M. T. (1980a), 'A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils', *Soil Science Society of America Journal* **44**(5), 892–898.
- Van Genuchten, M. T. (1980b), 'A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils', *Soil science society of America journal* **44**(5), 892–898.
- Vaunat, J., Cante, J., Ledesma, A. & Gens, A. (2000), 'A stress point algorithm for an elasto-plastic model in unsaturated soils', *International Journal of Plasticity* **16**(2), 121–141.
- Wagner, G., Birovljev, A., Meakin, P., Feder, J. & Jøssang, T. (1997), 'Fragmentation and migration of invasion percolation clusters : Experiments and simulations', *Physical Review E* **55**(6), 7015.
- Wang, Y., Zhang, C., Wei, N., Oostrom, M., Wietsma, T. W., Li, X. & Bonneville, A. (2013), 'Experimental study of crossover from capillary to viscous fingering for supercritical co<sub>2</sub>-water displacement in a homogeneous pore network', *Environmental science & technology* **47**(1), 212–218.
- Wang, Z., Jury, W. A., Tuli, A. & Kim, D.-J. (2004), 'Unstable flow during redistribution : Controlling factors and practical implications', *Vadose Zone Journal* **3**(2), 549–559.
- Wheeler, S., Sharma, R. & Buisson, M. (2003), 'Coupling of hydraulic hysteresis and stress-strain behaviour in unsaturated soils', *Géotechnique* **53**(1), 41–54.
- Wheeler, S. & Sivakumar, V. (1995), 'An elasto-plastic critical state framework for unsaturated soil', *Géotechnique* **45**(1), 35–53.
- Wilkinson, D. (1984), 'Percolation model of immiscible displacement in the presence of buoyancy forces', *Physical Review A* **30**(1), 520.
- Wilkinson, D. (1986), 'Percolation effects in immiscible displacement', *Physical Review A* **34**(2), 1380.
- Wissmann, J. W. & Hauck, C. (1983), 'Efficient elastic-plastic finite element analysis with higher order stress-point algorithms', *Computers & Structures* **17**(1), 89–95.



- Wood, D. M. (1990), *Soil behaviour and critical state soil mechanics*, Cambridge university press.
- Xiong, Y. (2014), 'Flow of water in porous media with saturation overshoot : A review', *Journal of Hydrology* **510**, 353–362.
- Ye, X. & Cheng, X. (2005), 'The fourier spectral method for the cahn–hilliard equation', *Applied Mathematics and Computation* **171**(1), 345–357.
- Zaïm, M., Ommi, S. H., Collin, F., Kotronis, P. & Sciarra, G. (2023), 'Fingering and strain localization in porous media during imbibition processes', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* .
- Zhang, C., Oostrom, M., Wietsma, T. W., Grate, J. W. & Warner, M. G. (2011), 'Influence of viscous and capillary forces on immiscible fluid displacement : Pore-scale experimental study in a water-wet micromodel demonstrating viscous and capillary fingering', *Energy & Fuels* **25**(8), 3493–3505.
- Zhu, J., Chen, L.-Q., Shen, J. & Tikare, V. (1999), 'Coarsening kinetics from a variable-mobility cahn-hilliard equation : Application of a semi-implicit fourier spectral method', *Physical Review E* **60**(4), 3564.
- Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L. (2000), *The finite element method : solid mechanics*, Vol. 2, Butterworth-heinemann.

# **Annexes**



## A

### A.1 Dérivées des matrices de forme

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^1}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial N^{N^e}}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^1}{\partial x_2} & \dots & 0 & \frac{\partial N^{N^e}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^1}{\partial x_2} & \frac{\partial N^1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial N^{N^e}}{\partial x_2} & \frac{\partial N^{N^e}}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\nabla N_\mu = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial N^{N^e}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial N^{N^e}}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\nabla N_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial N^{N^e}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial N^{N^e}}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$B^\epsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^1}{\partial x_1} & \frac{\partial N^1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial N^{N^e}}{\partial x_1} & \frac{\partial N^{N^e}}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (22)$$

### A.2 Algorithme de Newton-Raphson local

Pour résoudre le système (3.89) à l'étape 3 de l'algorithme 1, on construit un vecteur de résidus  $r$  et un vecteur d'inconnues  $x$ , dont les éléments sont les suivants :

$$r(x) = \begin{Bmatrix} p' - p'_{n+1}{}^{tr} + K\Delta\Lambda(2p' - p_c) \\ q(1 + 6G\Delta\Lambda/M^2) - q'_{n+1}{}^{tr} \\ p_c - p_{c_{n+1}}{}^{tr} \exp(v\Delta\Lambda(2p' - p_c)) \\ q^2 + M^2 p'(p' - p_c) \end{Bmatrix} ; \quad x = \begin{Bmatrix} p' \\ q \\ p_c \\ \Delta\Lambda \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Pour linéariser le vecteur résidu, nous avons besoin d'un opérateur tangent local :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 + 2K\Delta\Lambda & 0 \\ 0 & 1 + 6G\Delta\Lambda/M^2 \\ -2v\Delta\Lambda p_c{}^{tr} \exp(v\Delta\Lambda(2p' - p_c)) & 0 \\ M^2(2p' - p_c) & 2q \\ -K\Delta\Lambda & K\Delta\Lambda(2p' - p_c) \\ 0 & 6Gq/M^2 \\ 1 + v\Delta\Lambda p_c{}^{tr} \exp(v\Delta\Lambda(2p' - p_c)) & -v(2p' - p_c) p_c{}^{tr} \exp(v\Delta\Lambda(2p' - p_c)) \\ -M^2 p' & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

---

**Algorithm 2** Algorithme de Newton-Raphson local

---

**Initialiser** :  $i = 0$ ;  $p^{(0)} = p^{tr}$ ;  $q^{(0)} = q^{tr}$ ;  $p_c^{(0)} = p_c^{tr}$ ;  $\Delta\Lambda^{(0)} = 0$ .

**étape 1** : Calculer  $r(x^i)$

**étape 2** : Vérifier si  $\|r(x^i)\| \leq tol(10^{-4})$

oui  $x = x^i$  et quitter.

**étape 3** : Non, calculer  $\frac{\partial r}{\partial x}(x^i)$ .

**étape 4** :  $x^{i+1} = x^i - [\frac{\partial r}{\partial x}(x^i)]^{-1} \cdot r(x^i)$ ;  $i = i + 1$ ; retour à l'étape 1.

---

### A.3 Raideur algorithmique

Les coefficients dans l'expression de la raideur tangente (3.91) sont donnés par :

$$a_1 = (1 + p_c v \Delta\Lambda) / a \quad (25)$$

$$a_2 = -(2p' - p_c) / a \quad (26)$$

$$a_5 = \sqrt{(3/2)} / (1 + 6G\Delta\Lambda / M^2) \quad (27)$$

$$a_6 = -(3q / M^2) / (1 + 6G\Delta\Lambda / M^2) \quad (28)$$

$$b_1 = (p' a_3 K - (2p' - p_c a_1 K)) / b \quad (29)$$

$$b_2 = (2G2q / M^2 a_5) / b \quad (30)$$

avec :

$$a = 1 + 2K\Delta\Lambda + p_c v \Delta\Lambda \quad (31)$$

$$a_3 = 2p_c v \Delta\Lambda / a \quad (32)$$

$$a_4 = v(p_c / K)(2p' - p_c) / a \quad (33)$$

$$b = -2G2q / M^2 a_6 - (2p' - p_c) a_2 K + p' a_4 K \quad (34)$$

---

**Titre :** Modélisation numérique de la localisation de l'écoulement et des déformations dans les milieux poreux partiellement saturés.

**Mots clés :** milieu poreux, digitation, champs de phase, éléments finis.

**Résumé :** L'écoulement sous forme de digitation (fingering en anglais) est une instabilité hydraulique qui se produit dans les milieux poreux partiellement saturés en raison du déplacement du fluide en place dans les pores par un autre fluide caractérisé par une densité et une viscosité différente. Dans le cas du déclenchement de cette instabilité l'interface séparant les deux fluides devient instable et forme des doigts (fingers). Les modèles classiques décrivant l'écoulement dans les milieux poreux partiellement saturés ne permettent pas de modéliser ce phénomène étant basés sur une loi de comportement donnée par la courbe de rétention, qui relie directement la pression capillaire au degré de saturation. Afin de tenir compte de la digitation

un modèle à gradient qui repose sur une approche de champs de phase pour les milieux poreux partiellement saturés déformables est adopté dans le cadre de ce travail.

La mise en place numérique de ce modèle poromécanique enrichi par la méthode des éléments finis permet, d'une part, de simuler le développement de la digitation et, d'autre part, de capturer son effet sur la déformation irréversible, et éventuellement localisée, du squelette solide. L'application envisagée concerne le comportement des sols à grains fins dont le comportement dilatant/contractant suscite de plus en plus l'intérêt de la communauté scientifique tant dans le domaine de la recherche expérimentale que dans celui de la modélisation numérique.

---

**Title :** Numerical modeling of fingering and strain localization in partially saturated porous media.

**Keywords :** porous media, fingering, phase field, finite element method.

**Abstract :** Fingering flow is a hydraulic instability that occurs in partially saturated porous media due to the displacement of the fluid in place in the pores by another fluid characterized by a different density and viscosity. When this instability is triggered, the interface separating the two fluids becomes unstable, forming fingers. Traditional models describing flow in partially saturated porous media are unable to model this phenomenon, as they are based on a constitutive law given by the retention curve, which directly relates capillary pressure to the degree of saturation. In order to account for fingering, a gradient model based on a phase field approach for deformable

partially saturated porous media is adopted in this work.

The numerical implementation of this new poromechanical model, using the finite element method, allows characterizing on the one hand the occurrence of fingering hydraulic instabilities and on the other one to capture their effects on the irreversible, and possible unstable, deformation of the solid skeleton. The envisaged application concerns the behavior of fine-grained soils whose dilatant/contractant behavior is more and more attracting the interest of the scientific community both in the fields of experimental research and numerical modeling.