



**HAL**  
open science

# Étude de complexité algorithmique pour des problèmes de domination et de tournées dans les graphes avec obligations

Timothée Martinod

► **To cite this version:**

Timothée Martinod. Étude de complexité algorithmique pour des problèmes de domination et de tournées dans les graphes avec obligations. Algorithmes et structure de données [cs.DS]. Université Clermont Auvergne, 2023. Français. NNT : 2023UCFA0076 . tel-04457281

**HAL Id: tel-04457281**

**<https://theses.hal.science/tel-04457281>**

Submitted on 14 Feb 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE DE DOCTORAT

Opérée au sein de :

**l'Université Clermont Auvergne**

**École Doctorale des Sciences Pour l'Ingénieur**

**Spécialité de doctorat : Informatique**

Soutenue publiquement le 04/07/2023, par :

**Timothée Martinod**

---

# Étude de complexité algorithmique pour des problèmes de domination et de tournées dans les graphes avec obligations

---

Devant le jury composé de :

**Rodolphe Giroudeau**

Maître de conférences, Université de Montpellier

**Johanne Cohen**

Directrice de recherche, Université Paris-Saclay

**Sylvie Norre**

Professeure des universités, Université Clermont Auvergne

**Christian Laforest**

Professeur des universités, Université Clermont Auvergne

**Rapporteur**

**Rapporteure**

**Présidente du jury**

**Directeur de thèse**



Ce travail a bénéficié d'une aide de l'État gérée par l'Agence Nationale de la Recherche au titre du programme "Investissements d'Avenir" dans le cadre du Laboratoire d'Excellence IMobS<sup>3</sup> (ANR-10-LABX-0016) et de l'Initiative d'Excellence IDEX-ISITE CAP 20-25 (ANR-16-IDEX-0001).



**I-SITE  
CLERMONT**  
Clermont Auvergne Project





# Remerciements

Je tiens à remercier Christian Laforest, qui m'a encadré tout au long de cette thèse, pour le sujet passionnant qu'il m'a proposé. Je le remercie également pour sa disponibilité et son engagement.

Je remercie Rodolphe Giroudeau et Johanne Cohen pour leurs précieux retours sur le présent manuscrit, en particulier Rodolphe Giroudeau qui m'a proposé un retour particulièrement détaillé. Je souhaite également leur exprimer ma gratitude, ainsi qu'à Sylvie Norre, pour leur présence en tant que jury lors de ma soutenance, ainsi que pour la pertinence de leurs questions.

Je souhaite remercier le LIMOS et ses membres pour l'accueil au sein de l'axe MAAD.

Je remercie Cyrille Regnier, gestionnaire administrative du laboratoire d'excellence IMobS<sup>3</sup>, pour son implication très forte dans la gestion du financement de mes besoins et de mes déplacements tout au long de cette thèse.

Enfin, je remercie Youcef Mezouar et Dominique Torrisani, respectivement directeur et gestionnaire de l'Ecole Doctorale Sciences Pour l'Ingénieur pour la grande disponibilité dont ils ont fait preuve et des possibilités d'investissement qu'ils m'ont offertes.



## Résumé

Des capteurs, des machines, des équipes peuvent être interdépendantes, nécessitant une mobilisation collective. Elles ne peuvent accomplir leurs missions individuellement. Nous représentons cette contrainte par une obligation. Une obligation peut être utile pour des questions générales. Comment couvrir un terrain avec des capteurs associés en groupes ? Comment collecter des éléments lorsque des rues disposent d'une direction imposée ? Nous nous intéressons à ces questions d'un point de vue théorique à travers des problèmes de graphes. Nous distinguons deux types d'obligations : les obligations associées à plusieurs sommets et les transitions obligatoires associées à plusieurs arcs. Ainsi, nous étudions la complexité de deux familles de problèmes : les problèmes de domination avec obligations et les problèmes de tournées avec transitions obligatoires.

Nous étudions plus précisément le problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations. Ainsi, une instance est un graphe  $G = (V, E)$  et des obligations associées  $\Pi = (V_1, \dots, V_k)$  formant une partition des sommets du graphe. Une solution est un sous-ensemble de sommets  $D \subseteq V$  indépendant, dominant tous les sommets du graphe et respectant les obligations (pour tout  $1 \leq i \leq k$  soit tous les sommets de l'obligation sont dans le sous-ensemble  $V_i \subseteq D$  soit aucun  $V_i \cap D = \emptyset$ ). Nous montrons que déterminer l'existence d'un Indépendant Dominant avec Obligations est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un chemin, un graphe de forte densité, de faible densité ou un graphe de diamètre deux et ce, pour des obligations contenant toutes le même nombre de sommets indépendants entre eux ou pour une distribution arbitraire de la taille des obligations. Lorsque nous souhaitons maximiser le nombre de sommets dominés, nous montrons également que le problème de déterminer l'existence d'un Indépendant Dominant avec Obligations est  $\mathcal{NP}$ -complet pour  $3\sqrt{|V|} - 2$  sommets à dominer même dans une collection de chemins mais admet une résolution en temps polynomial pour  $2\sqrt{|V|} - 1$  sommets à dominer.

Quant aux problèmes de tournées avec transitions obligatoires, une instance est un graphe orienté  $D = (V, A)$  (ou non orienté  $G = (V, E)$ ) et des transitions obligatoires associées  $\Pi = (A_1, \dots, A_k)$ . En plus des contraintes éventuelles spécifiques au problème de tournées choisi, une diroute solution  $P = v_1, \dots, v_l \in V$  doit respecter les transitions obligatoires. Pour tout  $1 \leq i \leq k$ , l'obligation  $E_i = \langle a, b, c \rangle$  doit être respectée, c'est-à-dire que si l'arc  $(a, b)$  est parcouru dans la diroute ( $v_j = a$  et  $v_{j+1} = b$  pour  $1 \leq j \leq l - 2$ ) alors l'arc  $(b, c)$  doit être parcouru directement après ( $v_{j+2} = c$ ). Nous montrons que le problème du Plus Court Chemin avec Transitions Obligatoires admet une résolution en temps polynomial dans le cas général, mais est inapproximable pour tout ratio pour la recherche d'une diroute élémentaire même dans un digraphe de forte densité ou de faible densité. Nous montrons également que le problème de la Tournée Totale avec Transitions Obligatoires est inapproximable pour tout ratio, même dans un digraphe complet symétrique. Finalement, nous montrons que déterminer l'existence d'un Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires et d'un Cycle Élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires sont des problèmes  $\mathcal{NP}$ -complets même dans un graphe complet.

**Mots-clés :** Complexité, Obligation, Domination, Tournée, Graphe, Algorithme.



# Algorithmic complexity study for domination and routing problems in graphs with obligations

## Abstract

Sensors, machines, and teams can be interdependent, requiring collective mobilization. They cannot accomplish their tasks individually. We represent this constraint by an obligation. An obligation can be helpful for general questions. How to cover an area with sensors associated in groups? How to collect items when streets have an imposed direction? We are interested in these questions from a theoretical point of view through graph problems. We distinguish two types of obligations : obligations associated with multiple vertices and mandatory transitions associated with multiples arcs. Thus, we study the complexity of two families of problems : domination problems with obligations and routing problems with mandatory transitions.

We study more precisely the Independent Dominating set with Obligations problem. Thus, an instance is a graph  $G = (V, E)$  and associated obligations  $\Pi = (V_1, \dots, V_k)$  forming a partition of the graph's vertices. A solution is an independent subset of vertices  $D \subseteq V$ , dominating all vertices of the graph and respecting the obligations (for  $1 \leq i \leq k$ , either all vertices of the obligation are in the subset  $V_i \subseteq D$  or none  $V_i \cap D = \emptyset$ ). We show that determining the existence of an Independent Dominating set with Obligations is an  $\mathcal{NP}$ -complete problem even on a path, a high-density graph, a low-density graph, or a graph with diameter two, and this holds for obligations containing the same number of independent vertices or for an arbitrary distribution of the obligation sizes. When we want to maximize the number of dominated vertices, we also show that the Independent Dominating set with Obligations problem is  $\mathcal{NP}$ -complete for dominating  $3\sqrt{|V|} - 2$  vertices even in a collection of paths, but it has a polynomial time resolution for dominating  $2\sqrt{|V|} - 1$  vertices.

An instance for a routing problem is a directed graph  $D = (V, A)$  (or undirected graph  $G = (V, E)$ ) and associated mandatory transitions  $\Pi = (A_1, \dots, A_k)$ . In addition to any constraints related to the chosen routing problem, a diroute solution  $P = v_1, \dots, v_l \in V$  must respect the mandatory transitions. For  $1 \leq i \leq k$ , the obligation  $E_i = \langle a, b, c \rangle$  must be respected, meaning that if the arc  $(a, b)$  is passed through in the route ( $v_j = a$  and  $v_{j+1} = b$  for  $1 \leq j \leq l-2$ ) then the arc  $(b, c)$  must be passed through directly after ( $v_{j+2} = c$ ). We show that the Shortest Path with Mandatory Transitions problem has a polynomial time resolution in the general case but is inapproximable for any ratio when searching for an elementary diroute, even in a high-density or low-density directed graph. We also show that the Total Routing with Mandatory Transitions problem is inapproximable for any ratio, even in a symmetric complete directed graph. Finally, we show that determining the existence of a Hamiltonian Cycle with Mandatory Transitions and a Maximum Elementary Cycle with Mandatory Transitions are  $\mathcal{NP}$ -complete problems even in a complete graph.

**Keywords :** Complexity, Obligation, Domination, Routing, Graph, Algorithm.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>Problèmes de domination</b>	<b>28</b>
2.1	Introduction du chapitre . . . . .	28
2.1.1	Terminologie et définitions . . . . .	30
2.1.2	Description des problèmes . . . . .	33
2.1.3	Des résultats préliminaires . . . . .	38
2.1.4	Organisation du chapitre . . . . .	41
2.2	Déterminer l'existence d'un Indépendant Dominant avec des obligations stables et équilibrées . . . . .	44
2.2.1	Dans une collection de chemins avec des obligations 2-équilibrées .	46
2.2.2	Dans une collection de chemins avec des obligations $\lambda$ -équilibrées .	58
2.2.3	Dans un chemin avec des obligations $\lambda$ -équilibrées . . . . .	70
2.2.4	Dans un graphe de forte densité avec des obligations $\lambda$ -équilibrées .	75
2.2.5	Dans un graphe de faible densité avec des obligations $\lambda$ -équilibrées	80
2.2.6	Dans un graphe de diamètre deux avec des obligations $\lambda$ -équilibrées	83
2.3	Déterminer l'existence d'un Indépendant Dominant avec des obligations stables . . . . .	88
2.3.1	Pour exactement $\sqrt{ V }$ obligations stables et $\sqrt{ V }$ -équilibrées . .	89
2.3.2	Pour $\kappa$ obligations stables et $\lambda$ -équilibrées . . . . .	94
2.3.3	Dans un chemin . . . . .	96
2.3.4	Dans un graphe de forte densité . . . . .	100
2.3.5	Dans un graphe de faible densité . . . . .	104
2.3.6	Dans un graphe de diamètre deux . . . . .	107
2.4	Déterminer l'existence d'un Indépendant Partiellement Dominant avec des obligations stables . . . . .	112
2.4.1	Avec $3\sqrt{ V } - 2$ sommets à dominer . . . . .	113
2.4.2	Avec $2\sqrt{ V } - 1$ sommets à dominer . . . . .	118
2.4.3	Avec $ V  - \lambda^2 + \lambda$ sommets à dominer dans une collection de chemins	122
2.4.4	Avec $ V  - \lambda^2 + \lambda$ sommets à dominer dans un unique chemin . . .	125
2.5	Conclusion du chapitre . . . . .	130

<b>3</b>	<b>Problèmes avec transitions obligatoires</b>	<b>133</b>
3.1	Introduction du chapitre . . . . .	133
3.1.1	Terminologie et définitions . . . . .	135
3.1.2	Description des problèmes . . . . .	140
3.1.3	Des résultats préliminaires . . . . .	152
3.1.4	Organisation du chapitre . . . . .	160
3.2	Recherche d'un Plus Court Chemin . . . . .	162
3.2.1	Polynomialité pour une diroute simple . . . . .	163
3.2.2	Non-approximabilité pour une diroute élémentaire . . . . .	172
3.2.3	Non-approximabilité pour une diroute élémentaire même dans un digraphe de forte densité . . . . .	176
3.2.4	Non-approximabilité pour une diroute élémentaire même dans un digraphe connexe de faible densité . . . . .	179
3.2.5	Non-approximabilité pour une diroute $k$ -élémentaire . . . . .	182
3.3	Recherche d'une tournée . . . . .	186
3.3.1	Non-approximabilité pour une tournée totale . . . . .	187
3.3.2	$\mathcal{NP}$ -complétude pour la recherche d'un cycle Hamiltonien . . . . .	190
3.3.3	$\mathcal{NP}$ -complétude pour la recherche du plus grand cycle élémentaire . . . . .	193
3.3.4	Limite structurelle dans les graphes complets pour la recherche du plus grand cycle élémentaire . . . . .	196
3.4	Conclusion du chapitre . . . . .	198
<b>4</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>201</b>



# Table des figures

2.1	Une instance du problème du Dominant (à gauche) et une solution $S$ (à droite). Les sommets appartenant à $S$ sont représentés pleins. . . . .	33
2.2	Une instance du problème de l'Indépendant (à gauche) et une solution $S$ (à droite). Les sommets appartenant à $S$ sont représentés pleins. . . . .	33
2.3	Une instance du problème $ID$ (à gauche) et une solution $S$ (à droite). Les sommets appartenant à $S$ sont représentés pleins. . . . .	34
2.4	Une instance du problème $DO$ (à gauche) et une solution $S$ (à droite). Les sommets appartenant à $S$ sont représentés pleins. . . . .	35
2.5	Une instance du problème $IO$ (à gauche) et une solution $S$ (à droite). Les sommets appartenant à $S$ sont représentés pleins. . . . .	35
2.6	Une instance du problème $IDO$ (à gauche) et une solution $S$ (à droite). Les sommets appartenant à $S$ sont représentés pleins. . . . .	36
2.7	Une instance du problème $IPDO$ (à gauche) et une solution $S$ (à droite). Les sommets appartenant à $S$ sont représentés pleins. $S$ permet de dominer seulement six sommets sur sept. . . . .	37
2.8	Deux instances du problème $IDO$ qui n'admettent aucune solution. . . . .	38
2.9	Deux instances du problème $IDO$ . . . . .	39
2.10	Une instance du problème $IDO$ et son graphe d'obligations suivant la Construction 1. . . . .	40
2.11	Illustration de la Construction 2 pour l'élément 1 de l'instance $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ du problème $RX3C$ avec $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$ et $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ . . . . .	48
2.12	Illustration de l'Indépendant Dominant $S_1^1$ pour le gadget de l'élément 1 de l'instance $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ du problème $RX3C$ avec $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$ et $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ . Les sommets de $S_1^1$ sont représentés pleins. . . . .	49
2.13	Illustration de l'Indépendant Dominant $S_2^1$ pour le gadget de l'élément 1 de l'instance $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ du problème $RX3C$ avec $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$ et $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ . Les sommets de $S_2^1$ sont représentés pleins. . . . .	49
2.14	Illustration de l'Indépendant Dominant $S_3^1$ pour le gadget de l'élément 1 de l'instance $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ du problème $RX3C$ avec $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$ et $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ . Les sommets de $S_3^1$ sont représentés pleins. . . . .	49

2.15	Illustration de la Construction 3 pour le triplet $c_1$ de l'instance $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ du problème $RX3C$ avec $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$ et $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ . Dans cet exemple : $j = 1, a = 1, b = 2$ et $c = 3$ .	51
2.16	Illustration de l'Indépendant Dominant $S_1$ pour le gadget du triplet $c_1$ de l'instance $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ du problème $RX3C$ avec $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$ et $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ . Les sommets de $S_j$ sont représentés pleins.	51
2.17	Illustration de la Construction 4 pour l'instance $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ du problème $RX3C$ avec $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$ et $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ . Les ellipses représentent les gadgets d'élément tels qu'illustrés dans la Figure 2.11. Les pentagones représentent les gadgets de triplets tels qu'illustrés dans la Figure 2.15.	54
2.18	Illustration de la Construction 4 pour l'instance $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ du problème $RX3C$ avec $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$ et $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ .	56
2.19	Illustration d'un Indépendant Dominant pour l'instance $(G, \Pi)$ suivant la Construction 4 depuis l'instance $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ du problème $RX3C$ avec $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$ et $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ .	57
2.20	Illustration de la Construction 5 avec $\lambda = 4$ pour l'élément 1 de l'instance $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ du problème $RX3C$ avec $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$ et $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ .	60
2.21	Illustration de la Construction 5 avec $\lambda = 4$ pour le triplet $c_1$ de l'instance $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ du problème $RX3C$ avec $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$ et $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ .	61
2.22	Illustration d'un Indépendant Dominant $S$ pour l'exemple représenté dans la Figure 2.20. Les sommets de $S$ sont représentés pleins.	61
2.23	Illustration d'un Indépendant Dominant $S$ pour l'exemple représenté dans la Figure 2.21. Les sommets de $S$ sont représentés pleins.	62
2.24	Illustration des nouvelles entités de la Construction 6 pour l'élément 1 de l'instance $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ du problème $RX3C$ avec $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$ et $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ .	64
2.25	Illustration des nouvelles entités de la Construction 6 pour le triplet $c_1$ de l'instance $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ du problème $RX3C$ avec $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$ et $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ .	64
2.26	Illustration de la Construction 6 pour l'élément 1 de l'instance $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ du problème $RX3C$ avec $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$ et $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ .	65
2.27	Illustration de la Construction 6 pour le triplet $c_1$ de l'instance $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ du problème $RX3C$ avec $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$ et $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ .	65

2.28	Illustration d'un Indépendant Dominant $S$ pour l'exemple représenté dans la Figure 2.26. Les sommets de $S$ sont représentés pleins. . . . .	66
2.29	Illustration d'un Indépendant Dominant $S$ pour l'exemple représenté dans la Figure 2.27. Les sommets de $S$ sont représentés pleins. . . . .	66
2.30	Illustration de la Construction 8 pour un connecteur neutre avec $\lambda = 2$ à gauche et $\lambda = 3$ à droite. . . . .	71
2.31	Illustration de la Construction 8 pour un connecteur neutre avec $\lambda = 5$ . . .	71
2.32	Illustration de la Construction 10 pour $\lambda = 2$ et $\Omega = 4$ . . . . .	78
2.33	Illustration d'un Indépendant Dominant $S$ pour l'exemple représenté dans la Figure 2.32. Les sommets de $S$ sont représentés pleins. . . . .	78
2.34	Illustration de la Construction 12 pour $\lambda = 2$ . Les arêtes en pointillés symbolisent les arêtes entre chaque sommet de $V \setminus \{\varrho_1^1, \dots, \varrho_\lambda^1, \varphi_1, \dots, \varphi_{3\lambda}\}$ et chaque sommet de $\varrho^1$ . Les sommets et arêtes liées à l'obligation $\varrho^2$ ne sont pas illustrés. . . . .	86
2.35	Illustration de la Construction 13 pour l'instance $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ du problème $RX3C$ avec $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$ et $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ au dessus. Un Indépendant Dominant $S$ est représenté par les sommets pleins en dessous. . . . .	91
2.36	Illustration (à gauche) de la Construction 20 pour $\Omega = 4$ . Illustration (à droite) d'un Indépendant Dominant maximum $S$ pour l'exemple ci-contre. Les sommets de $S$ sont représentés pleins. Les sommets non dominés par $S$ sont représentés par des carrés. . . . .	115
2.37	Illustration (à gauche) de la Construction 22 pour $\Omega = 4$ . Illustration (à droite) d'un Indépendant Dominant maximum $S$ pour l'exemple ci-contre. Les sommets de $S$ sont représentés pleins. Les sommets non dominés par $S$ sont représentés par des carrés. . . . .	121
3.1	Un digraphe et ses transitions obligatoires associées. . . . .	140
3.2	Une instance du problème $TM$ avec une source $s$ et des sommets-cible $t_1$ et $t_2$ (à gauche) et une solution $P$ (à droite). Les arcs appartenant à $P$ sont représentés en continu. . . . .	141
3.3	Une instance du problème $TT$ avec une source $s$ (à gauche) et une solution $P$ (à droite). Les arcs appartenant à $P$ sont représentés en continu. . . . .	141
3.4	Une instance du problème $PCC$ avec une source $s$ et un sommet-cible $t$ (à gauche) et une solution $P$ (à droite). Les arcs appartenant à $P$ sont représentés en continu. . . . .	142
3.5	Une instance du problème $PCCE$ avec une source $s$ et un sommet-cible $t$ (à gauche) et une solution $P$ (à droite). Les arcs appartenant à $P$ sont représentés en continu. . . . .	142

3.6	Une instance du problème <i>PCCKE</i> avec une source $s$ et un sommet-cible $t$ (à gauche) et une solution $P$ (à droite). Les arcs appartenant à $P$ sont représentés en continu. . . . .	143
3.7	Une instance du problème <i>TMO</i> avec une source $s$ et des sommets-cible $t_1$ et $t_2$ (à gauche) et une solution $P$ (à droite). Les arcs appartenant à $P$ sont représentés en continu. . . . .	144
3.8	Une instance du problème <i>TTO</i> avec une source $s$ (à gauche) et une solution $P$ (à droite). L'ensemble des arcs appartient à $P$ . . . . .	144
3.9	Une instance du problème <i>PCCO</i> avec une source $s$ et un sommet-cible $t$ (à gauche) et une solution $P$ (à droite). Les arcs appartenant à $P$ sont représentés en continu. . . . .	145
3.10	Une instance du problème <i>PCCEO</i> avec une source $s$ et un sommet-cible $t$ (à gauche) et une solution $P$ (à droite). Les arcs appartenant à $P$ sont représentés en continu. . . . .	146
3.11	Une instance du problème <i>PCCKEO</i> pour $k = 2$ , avec une source $s$ et un sommet-cible $t$ (à gauche) et une solution $P$ (à droite). Les arcs appartenant à $P$ sont représentés en continu. . . . .	147
3.12	Une instance du problème <i>CE</i> (à gauche) et une solution $P$ (à droite). L'ensemble des arcs appartient à $P$ . . . . .	147
3.13	Une instance du problème <i>CEO</i> (à gauche) et une solution $P$ (à droite). Les arcs appartenant à $P$ sont représentés en continu. . . . .	148
3.14	Une instance du problème <i>CH</i> (à gauche) et une solution $P$ (à droite). Les arcs appartenant à $P$ sont représentés en continu. . . . .	149
3.15	Une instance du problème <i>CHO</i> (à gauche) et une solution $P$ (à droite). Les arcs appartenant à $P$ sont représentés en continu. . . . .	149
3.16	Une instance du problème <i>CEM</i> (à gauche) et une solution $P$ (à droite). Les arcs appartenant à $P$ sont représentés en continu. . . . .	150
3.17	Une instance du problème <i>CEMO</i> (à gauche) et une solution $P$ (à droite). Les arcs appartenant à $P$ sont représentés en continu. . . . .	151
3.18	Une instance du problème <i>TM</i> (à gauche) et l'instance associée du problème <i>TMO</i> (à droite) avec une source $s$ et des sommets-cible $t_1$ et $t_2$ . . . . .	153
3.19	Schéma de la Construction 25 pour l'instance $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ du problème <i>RX3C</i> avec $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$ et $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ . . . . .	154
3.20	Illustration d'une succession de transitions obligatoires selon la Construction 25 pour l'instance $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ du problème <i>RX3C</i> avec $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$ et $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ . . . . .	154
3.21	Une instance du problème <i>TT</i> (à gauche) et l'instance associée du problème <i>TTO</i> (à droite) avec une source $s$ . . . . .	157

3.22	Une instance des problèmes <i>PCC</i> , <i>PCCE</i> et <i>PCKE</i> (à gauche) et l'instance associée des problèmes <i>PCCO</i> , <i>PCCEO</i> et <i>PCKEO</i> (à droite) avec une source $s$ , une cible $t$ et $k > 0$ . . . . .	158
3.23	Une instance des problèmes <i>CH</i> et <i>CEM</i> (à gauche) et l'instance associée des problèmes <i>CHO</i> et <i>CEMO</i> (à droite). . . . .	159
3.24	Une instance pour le problème <i>PCCO</i> . . . . .	166
3.25	Retranscription de l'instance du problème <i>PCCO</i> associée à la Figure 3.24 suivant la Construction 26 sans l'utilisation d'une cible. . . . .	170
3.26	Retranscription de l'instance du problème <i>PCCO</i> associée à la Figure 3.24 suivant la Construction 26 avec le sommet $t$ pour cible. . . . .	170
3.27	Illustration de la Construction 27 pour l'instance $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ du problème <i>RX3C</i> avec $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$ et $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ . . . . .	174
3.28	Illustration de la Construction 28. . . . .	177
3.29	Illustration de la Construction 31 pour l'instance $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ du problème <i>RX3C</i> avec $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$ et $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ avec $k = 3$ . . . . .	185
3.30	Un graphe 3-régulier contenant 8 sommets. . . . .	192
3.31	Illustration des nouvelles arêtes et des transitions obligatoires suivant la Construction 33 depuis l'instance de la Figure 3.30. . . . .	192
3.32	Représentation d'une paire de nouveaux sommets suivant la Construction 34. . . . .	194
3.33	Illustration de la Construction 35 pour $n = k = 3$ . . . . .	197



# Chapitre 1

## Introduction générale

Des capteurs, des machines, des équipes peuvent être interdépendantes, nécessitant une mobilisation collective. Elles ne peuvent pas accomplir leurs missions individuellement. Nous représentons cette contrainte par une obligation (un ensemble d'éléments qui doivent tous être mobilisés ensemble). Une obligation peut être utile pour des questions générales. Comment couvrir un terrain avec des capteurs associés en groupes ? Comment collecter des éléments lorsque des rues disposent d'une direction imposée ? Nous nous intéressons à ces questions d'un point de vue théorique à travers des problèmes de graphes. Nous distinguons alors deux types d'obligations : les obligations associées à plusieurs sommets et les transitions obligatoires associées à plusieurs arcs. Cette approche par obligation s'inscrit en parallèle de l'approche par conflit, plus ancienne. Des capteurs, des machines, des équipes peuvent être incompatibles. Dans un réseau routier, informatique ou optique, un tronçon peut être interdit en fonction de l'élément qui transite ou de sa provenance. Cela peut être pour des raisons de compatibilité (un virage impraticable pour certains type de véhicules dans un réseau routier), de sécurité (seuls certains paquets peuvent transiter par un noeud sensible dans un réseau informatique), de disponibilité (certains points d'entrée sont prioritaires dans un réseau optique) ou bien encore de coût, que ce soit pour l'installation ou la maintenance d'une infrastructure. Ces difficultés peuvent être résolues au travers de conflits bloquant l'accès à une ressource (matérielle, humaine, d'infrastructure, ...), ou au travers d'obligations forçant l'accès à une ressource prédéfinie (matérielle, humaine, d'infrastructure, ...). Ainsi, les conflits et les obligations répondent aux mêmes problématiques, mais diffèrent par leurs philosophies.

De premières études sur les problèmes impliquant des conflits, ont débuté autour de 1976 dans un article portant sur la complexité de la recherche d'un chemin entre deux sommets sans conflit [22]. Ces recherches ont été motivées par la génération de chemins de test dans les programmes, où deux sommets en conflit représentent deux conditions mutuellement exclusives. Depuis lors, ces études ont été développées et étendues en 1997, 2003, 2009 et 2013 [52, 50, 35, 36]. Les résultats obtenus jusqu'à présent démontrent principalement la NP-complétude du problème de la recherche de tels chemins dans diverses classes d'instances. Les problèmes de graphes avec conflits ont, par la suite, particulièrement été étudiés dans [44] sous la forme de transitions interdites, de parcours interdits et de conflits. L'étude des conflits s'appuie ici sur divers problèmes particulièrement en lien avec la connexité : le Parcours Sans Transition Interdite, le Parcours Simple Sans Transition Interdite, le Parcours Sans  $k$ -Parcours Interdit, le Cycle Hamiltonien Sans Transition Interdite, le Chemin Sans Transition Interdite, le Chemin Hamiltonien Sans Transition

Interdite, le Chemin Sans  $k$ -Parcours Interdit, le Chemin Hamiltonien Sans  $k$ -Parcours Interdit, l'Arbre Sans Conflit, l'Arbre Sans Transition Interdite, l'Arbre Couvrant Sans Transition Interdite, l'Arbre Couvrant Sans Conflit, le Chemin Sans Conflit, le Cycle Sans Conflit, le Chemin Hamiltonien Sans Conflit, le Cycle Hamiltonien Sans Conflit et le Chemin Hamiltonien Sans Transition Interdite. Entre autres, il a été montré que déterminer l'existence d'un chemin entre deux sommets dans un graphe avec transitions interdites est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet même dans les grilles. De même, les problèmes de graphes avec conflits ont particulièrement été étudiés dans [14]. L'étude des conflits s'appuie ici sur divers problèmes particulièrement en lien avec la couverture de graphes : le Dominant sans Conflit, le Dominant Indépendant sans Conflit, le Dominant Total sans Conflit, le Vertex Cover Connexe sans Conflit, l'Arbre de Steiner sans Conflit et les Automates avec conflits. Il a été montré, entre autres, que les problèmes de l'existence d'un dominant sans conflits dans un chemin ou de l'existence d'un indépendant dominant sans conflits dans une collection de chemins sont des problèmes  $\mathcal{NP}$ -complets. En fonction de la topologie sous-jacente aux conflits, il est toujours possible de trouver un sous-ensemble dominant trois sommets sur quatre ainsi qu'un sous-ensemble indépendant dominant un sommet de moins. Au contraire, pour une topologie simple sous-jacente aux conflits, il est  $\mathcal{NP}$ -complet de déterminer l'existence d'un sous-ensemble (indépendant ou non) dominant plus de la moitié des sommets du graphe, même s'il s'agit d'une collection de chemins.

Les problèmes de graphes avec obligations ont été introduits récemment dans [14]. L'étude des obligations s'appuie ici sur divers problèmes de couverture dans les graphes : le Vertex Cover avec obligations sur les sommets, le Vertex Cover Connexe avec obligations sur les sommets, l'Arbre couvrant avec obligations sur les arêtes, le Graphe couvrant avec obligations sur les arêtes, le Couplage avec obligations sur les arêtes, le Chemin hamiltonien avec obligations sur les arêtes, le Dominant avec obligations sur les sommets, le Dominant total avec obligations sur les sommets et le Dominant indépendant avec obligations sur les sommets. Il a été montré, entre autres, que déterminer l'existence d'un indépendant dominant avec obligations est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet, pour des obligations non stables et que déterminer l'existence d'un chemin hamiltonien avec obligations est également un problème  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un graphe complet, pour des obligations de grande taille.

Nous nous concentrons ici sur l'étude de la complexité de deux familles de problèmes : les problèmes de domination avec obligations et les problèmes de tournées avec transitions obligatoires. Cette étude n'entend pas résoudre des problèmes pratiques, mais se concentre sur l'aspect théorique des obligations. En raison des différences de fonctionnement entre ces deux familles de problèmes, ainsi qu'entre les deux représentations des obligations (sur les sommets ou sur les arcs et les arêtes), ils font l'objet de deux chapitres autonomes, au risque de répéter certaines notions. La plupart des résultats présentés dans ces deux chapitres ont fait l'objet d'une publication (voir [38] et [37]).

Pour un graphe  $G = (V, E)$  donné, l'objectif d'un problème de domination est de trouver un sous-ensemble de sommets  $D \subseteq V$  qui sont voisins de tous les sommets du graphe. Les problèmes de domination s'appliquent dans des domaines variés et courants, notamment dans les réseaux de communication [6], dans les réseaux électriques [25], dans

le positionnement d'appareils de surveillance [28] ou encore dans les réseaux sociaux [43]. Pour répondre à ces différentes applications, des variations viennent par la suite ajouter des contraintes supplémentaires sur le sous-ensemble dominant. Par exemple, le problème de l'Indépendant Dominant (voir [24]) nécessite en plus que le sous-ensemble soit indépendant : les sommets choisis sont voisins avec les autres sommets du graphe, mais ne sont pas voisins entre eux. Nous pouvons également citer les problèmes du Dominant Total [29], du Dominant avec Propagation [1], du  $k$ -Dominant [3], du Dominant par Paire [20] ou encore du Dominant pondéré [53] parmi d'autres. Les obligations font partie des contraintes supplémentaires possibles. Les sommets composant le sous-ensemble  $D$  ne doivent plus être choisis individuellement mais par groupe, chaque groupe formant une obligation. Nous étudions plus précisément le problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations. Ainsi, une instance est un graphe  $G = (V, E)$  et des obligations associées  $\Pi = (V_1, \dots, V_k)$  formant une partition des sommets du graphe (pour toute paire d'indices  $1 \leq i \neq j \leq k$ , nous avons 1.  $V_i, V_j \subseteq V$ , 2.  $V_i \cap V_j = \emptyset$  et 3.  $\cup_{i=1}^k V_i = V$ ). Une solution est un sous-ensemble de sommets  $D \subseteq V$  indépendant (pour toute paire de sommets du sous-ensemble  $u, v \in D$ , il n'existe aucune arête  $(uv) \notin E$ ), dominant tous les sommets du graphe (pour tout sommet  $u \in V$ , soit le sommet fait partie du sous-ensemble  $u \in D$  soit un de ses voisins en fait partie  $\exists v \mid (uv) \in E$ ) et respectant les obligations (pour tout indice  $1 \leq i \leq k$  soit tous les sommets de l'obligation sont dans le sous-ensemble  $V_i \subseteq S$  soit aucun  $V_i \cap D = \emptyset$ ).

Dans l'introduction du Chapitre 2, nous décrivons les problèmes de l'Indépendant Dominant avec Obligations (*IDO*) et de l'Indépendant Partiellement Dominant avec Obligations (*IPDO*) et présentons des résultats préliminaires. Nous montrons qu'il existe des cas où le problème *IDO* n'admet aucune solution : lorsque le graphe est une étoile ou un graphe de diamètre un et que les obligations sont toutes de taille au moins deux (Théorème 1). Nous montrons également qu'il existe des cas où déterminer l'existence d'une solution pour le problème *IDO* est polynomial : lorsque le graphe est un indépendant, une étoile, un graphe de diamètre un ou si le graphe est un couplage et que les obligations sont toutes de taille deux (Théorème 2) ou bien lorsque les obligations sont toutes de taille un, ou si le nombre d'obligations est constant (Théorème 3).

Dans la Section 2.2 nous étudions le problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations en fonction de la topologie du graphe. Nous montrons alors que le problème *IDO* est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet :

- dans une collection de chemins disjoints, avec des obligations stables et 2-équilibrées (Théorème 4).
- dans une collection de chemins disjoints, avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Théorème 5).
- dans un chemin, avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Théorème 6).
- dans un graphe de forte densité, avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Théorème 7).
- dans un graphe de faible densité, avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Théorème 8).

- dans un graphe de diamètre deux, avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Théorème 9).

Dans la Section 2.3 nous étudions le problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations en fonction des conditions sur les obligations. Nous montrons alors que le problème *IDO* est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet :

- même si l'instance contient  $\sqrt{|V|}$  obligations stables et  $\sqrt{|V|}$ -équilibrées (Théorème 10).
- même si l'instance contient  $\kappa$  obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Théorème 11).
- même si le graphe est un chemin (unique) et que les obligations sont stables pour une répartition de leur taille de deux à  $\lambda$ , pour toute constante  $\lambda \geq 2$ . (Théorème 12).
- même si le graphe est un graphe connexe de forte densité et que les obligations sont stables, pour une répartition de leur taille de deux à  $\lambda$ , pour toute constante  $\lambda \geq 2$  (Théorème 13).
- même si le graphe est un graphe de faible densité et que les obligations sont stables pour une répartition de leur taille de deux à  $\lambda$ , pour toute constante  $\lambda \geq 2$  (Théorème 14).
- même si le graphe est un graphe de diamètre deux et que les obligations sont stables pour une répartition de leur taille de deux à  $\lambda$ , pour toute constante  $\lambda \geq 2$  (Théorème 15).

Dans la Section 2.4 nous étudions le problème de l'Indépendant Partiellement Dominant avec Obligations. Déterminer l'existence d'un Indépendant Dominant respectant les Obligations étant difficile même dans des cas très restreints comme les chemins ou les graphes de diamètre deux, nous relâchons la contrainte de domination de l'ensemble des sommets. Nous cherchons alors à dominer seulement un certain nombre de sommets. Nous montrons que le problème *IPDO* admet un algorithme polynomial pour dominer  $2\sqrt{|V|} - 1$  sommets à condition que les obligations soient stables (Théorème 17). Au contraire, nous montrons que le problème *IPDO* est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet :

- pour  $3\sqrt{|V|} - 2$  sommets à dominer même dans une collection de chemins avec des obligations stables (Théorème 16).
- pour  $|V| - \lambda^2 + \lambda$  sommets à dominer même dans une collection de chemins avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Théorème 18).
- pour  $|V| - \lambda^2 + \lambda$  sommets à dominer même dans un chemin avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Théorème 19).

Les résultats principaux sont synthétisés dans la Table 1.1 pour les problèmes de l'Indépendant Dominant avec Obligations (*IDO*) et de l'Indépendant Partiellement Dominant avec Obligations (*IPDO*). Pour des raisons de clarté, nous utilisons les termes *col. chemins* pour une collection de chemins disjoints, *forte dens.* pour une forte densité, *faible dens.* pour une faible densité et *distrib*  $\lambda$  pour une répartition de la taille des obligations de deux à  $\lambda$ .

Problème	Topologie	Sommets dominés	Équilibre	Complexité	Théorème
<i>IDO</i>	Col. chemins	$ V $	2	$\mathcal{NP}$ -complet	Théorème 4
<i>IDO</i>	Col. chemins	$ V $	$\lambda$	$\mathcal{NP}$ -complet	Théorème 5
<i>IDO</i>	Chemin	$ V $	$\lambda$	$\mathcal{NP}$ -complet	Théorème 6
<i>IDO</i>	Forte dens.	$ V $	$\lambda$	$\mathcal{NP}$ -complet	Théorème 7
<i>IDO</i>	Faible dens.	$ V $	$\lambda$	$\mathcal{NP}$ -complet	Théorème 8
<i>IDO</i>	Diamètre 2	$ V $	$\lambda$	$\mathcal{NP}$ -complet	Théorème 9
<i>IDO</i>	Quelconque	$ V $	$\sqrt{ V }$	$\mathcal{NP}$ -complet	Théorème 10
<i>IDO</i>	Quelconque	$ V $	$(\kappa^*) \lambda$	$\mathcal{NP}$ -complet	Théorème 11
<i>IDO</i>	Chemin	$ V $	distrib $\lambda$	$\mathcal{NP}$ -complet	Théorème 12
<i>IDO</i>	Forte dens.	$ V $	distrib $\lambda$	$\mathcal{NP}$ -complet	Théorème 13
<i>IDO</i>	Faible dens.	$ V $	distrib $\lambda$	$\mathcal{NP}$ -complet	Théorème 14
<i>IDO</i>	Diamètre 2	$ V $	distrib $\lambda$	$\mathcal{NP}$ -complet	Théorème 15
<i>IPDO</i>	Quelconque	$2\sqrt{ V } - 1$	Non	Polynomial	Théorème 17
<i>IPDO</i>	Col. chemins	$3\sqrt{ V } - 2$	Non	$\mathcal{NP}$ -complet	Théorème 16
<i>IPDO</i>	Col. chemins	$ V  - \lambda^2 + \lambda$	$\lambda$	$\mathcal{NP}$ -complet	Théorème 18
<i>IPDO</i>	Chemin	$ V  - \lambda^2 + \lambda$	$\lambda$	$\mathcal{NP}$ -complet	Théorème 19

TABLE 1.1 – Synthèse des résultats pour les problèmes de domination.

Le deuxième chapitre est consacré aux problèmes de tournées, introduits vers 1956 [21] et formalisés autour de l'année 1959 [18]. L'objectif d'un problème de tournées est, quant à lui, de trouver un sous-ensemble (appelé diroute) ordonné d'arcs successifs  $P = (v_1, v_2), \dots, (v_{l-1}, v_l) \in A$  ou de sommets partageant un arc du précédent vers le suivant  $P = v_1, \dots, v_l \in V$  passant par un certain nombre de sommets-cible à partir d'un graphe orienté  $D = (V, A)$ . Les problèmes de tournées s'appliquent dans des domaines variés et courants, notamment dans le transport d'enfants [11], dans la planification de la main-d'oeuvre [10], dans le transport de patients à l'hôpital [8] ou encore dans la gestion d'une flotte en temps réel [5]. Pour répondre à ces différentes débouchées, des variations viennent par la suite ajouter des contraintes supplémentaires sur cette diroute. Par exemple, le problème de la Tournée Multi-cibles impose un sommet de départ (ou sommet-source), le problème de la Tournée Totale nécessite de passer par tous les sommets du graphe au moins une fois à partir d'un sommet-source, le problème du Plus Court Chemin impose un sommet-source et un seul sommet-cible, le problème du Plus Court Chemin Élémentaire impose en plus de passer par chaque sommet au plus une fois, le problème du Circuit Eulérien nécessite de parcourir exactement une fois chaque arc et le problème du Cycle Hamiltonien nécessite de passer exactement une fois par chaque sommet. Nous pouvons également citer les problèmes de la Tournée à Distance Contrainte [42], de la Tournée avec Flotte Hétérogène [7], de la Tournée avec Dépôts Multiples [45] ou encore de la Tournée avec Fenêtres Temporelles [19] parmi d'autres. Les transitions obligatoires font partie des contraintes supplémentaires possibles. À chaque étape de la tournée, le choix d'un arc dépend de l'arc précédent. Nous étudions ici les problèmes de la Tournée Multi-cibles, de la Tournée Totale, du Plus Court Chemin, du Plus Court Chemin Élémentaire, du Circuit Eulérien,

du Cycle Hamiltonien, ainsi que certaines de leurs variations, auxquels nous ajoutons des transitions obligatoires. Ainsi, une instance est un graphe orienté  $D = (V, A)$  (ou un graphe non orienté  $G = (V, E)$ ) et des transitions obligatoires associées  $\Pi = (A_1, \dots, A_k)$ . En plus des contraintes éventuelles spécifiques au problème de tournées choisi, une diroute  $P = v_1, \dots, v_l \in V$  doit respecter les transitions obligatoires. Pour tout indice  $1 \leq i \leq k$ , la transition obligatoire  $E_i = \langle a, b, c \rangle$  doit être respectée, c'est-à-dire que si l'arc  $(a, b)$  est parcouru dans la diroute ( $v_j = a$  et  $v_{j+1} = b$  pour  $1 \leq j \leq l - 2$ ) alors l'arc  $(b, c)$  doit être parcouru directement après ( $v_{j+2} = c$ ).

Dans l'introduction du Chapitre 3, nous décrivons les problèmes de la Tournée Multi-cibles avec Transitions Obligatoires (*TMO*), de la Tournée Totale avec Transitions Obligatoires (*TTO*), du Plus Court Chemin avec Transitions Obligatoires (*PCCO*), du Plus Court Chemin Élémentaire avec Transitions Obligatoires (*PCCEO*), du Plus Court Chemin  $k$ -Élémentaire avec Transitions Obligatoires (*PCCKEO*), du Circuit Eulérien avec Transitions Obligatoires (*CEO*), du Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires (*CHO*) et du Cycle Élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires (*CEMO*). Nous montrons que l'ajout de transitions obligatoires ne permet pas toujours d'avoir une solution pour l'ensemble de ces problèmes (Figures 3.18, 3.21, 3.22 et 3.23), mais qu'il existe des topologies de graphes pour lesquelles les problèmes demeurent polynomiaux. Le problème *TMO* admet une résolution en temps polynomial si le digraphe est un chemin ou une étoile ou si le nombre de cibles est constant (Théorème 2). Le problème *TTO* admet une résolution en temps polynomial si le digraphe est un chemin ou une étoile (Théorème 3). Les problèmes *PCCO*, *PCCEO* et *PCCKEO* admettent une résolution en temps polynomial si le digraphe est un chemin ou complet symétrique (Théorème 4). Le problème *CEO* admet toujours une résolution en temps polynomial (Théorème 5). Les problèmes *CHO* et *CEMO* admettent une résolution en temps polynomial si le digraphe a une faible densité (Théorème 6).

Dans la Section 3.2 nous étudions le problème du Plus Court Chemin avec Transitions Obligatoires, ainsi que ses formes élémentaires et  $k$ -élémentaires. Nous montrons alors :

- La polynomialité du problème *PCCO* (Théorème 7).
- La non-approximabilité du problème *PCCEO* (Théorème 9).
- La non-approximabilité du problème *PCCEO* dans des digraphes de forte densité (Théorème 10).
- La non-approximabilité du problème *PCCEO* dans des digraphes de faible densité (Théorème 11).
- La non-approximabilité du problème *PCCKEO* dans un digraphe de forte densité (Théorème 12).

Dans la Section 3.3 nous étudions le problème de la Tournée avec Transitions Obligatoires, pour l'ensemble des sommets comme cible, ainsi que pour des solutions formant un cycle hamiltonien ou un cycle élémentaire maximum. Nous montrons alors :

- La non-approximabilité du problème *TTO* dans un digraphe complet symétrique (Théorème 13).

- La  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème de l'existence d'un Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires dans un graphe complet (Théorème 14).
- La  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème de l'existence d'un Cycle élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires de taille bornée dans un graphe complet (Théorème 15).
- L'impossibilité pour un algorithme de garantir trouver un Cycle élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires de taille strictement supérieure à trois même dans un graphe complet (Théorème 16).

Les résultats principaux sont synthétisés dans la Table 1.2 pour les problèmes de la Tournée Multi-cibles avec Transitions Obligatoires (*TMO*), de la Tournée Totale avec Transitions Obligatoires (*TTO*), du Plus Court Chemin avec Transitions Obligatoires (*PCCO*), du Plus Court Chemin Élémentaire avec Transitions Obligatoires (*PCCEO*), du Plus Court Chemin  $k$ -Élémentaire avec Transitions Obligatoires (*PCCKEO*), du Circuit Eulérien avec Transitions Obligatoires (*CEO*), du Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires (*CHO*) et du Cycle Élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires (*CEMO*).

Problème	Topologie	Complexité	Théorème
<i>PCCO</i>	Quelconque	Polynomial	Théorème 7
<i>PCCEO</i>	Quelconque	Non-approximable	Théorème 9
<i>PCCEO</i>	Forte densité	Non-approximable	Théorème 10
<i>PCCEO</i>	Faible densité	Non-approximable	Théorème 11
<i>PCCKEO</i>	Forte densité	Non-approximable	Théorème 12
<i>TTO</i>	Complet symétrique	Non-approximable	Théorème 13
<i>CHO</i>	Complet	$\mathcal{NP}$ -complet	Théorème 14
<i>CEMO</i>	Complet	$\mathcal{NP}$ -complet	Théorème 15

TABLE 1.2 – Synthèse des résultats pour les problèmes de tournées.

Comme nous pouvons l'observer, ce manuscrit est divisé en deux chapitres suivant la définition d'une obligation. Dans le Chapitre 2 nous abordons les obligations sur les sommets, tandis que dans le Chapitre 3 nous abordons les transitions obligatoires sur les arcs et les arêtes. Les problèmes étudiés, ainsi que leurs variantes, sont très nombreux et bénéficient de traitements semblables de par leur nature et leur lien avec les obligations. Ces ressemblances mènent généralement à la création d'annexes. Cependant, un manuscrit de thèse ne se lit pas seulement de manière linéaire. Plutôt que de renvoyer le lecteur à diverses annexes pour limiter la répétition, ce texte bénéficie d'une certaine redondance au sein de ses parties, proposant une lecture plus agréable. Afin de convenir au plus grand nombre, deux choix de lecture sont ainsi proposés : une lecture linéaire (en suivant le manuscrit page après page) et une lecture tabulaire (en suivant l'ordre de préférence du lecteur).

Chaque section de chaque chapitre (à l'exception des introductions et des conclusions) commence par une carte présentant les principaux résultats proposés et faisant référence

aux constructions utilisées et aux théorèmes qui en découlent. De même, chaque partie de chaque section commence par une carte, résumant alors le résultat obtenu, le point de départ de la réflexion et les différentes étapes nécessaires, référençant ainsi les constructions, les lemmes et les algorithmes éventuels. Au sein de ces parties, chaque construction et chaque preuve est écrite dans son entièreté même s'il s'agit du raffinement d'une construction ou d'un théorème précédent. De plus, toutes les constructions sont précédées d'une description informelle de leur principe.

Le lecteur linéaire peut ainsi, à la lumière des cartes et des descriptions, se focaliser sur la valeur ajoutée par chacune des parties. Les apports précédents étant explicités, il est possible d'éviter de lire les redondances et de se concentrer sur les nouveaux éléments de construction et de preuve nécessaires à l'élaboration du résultat visé. De son côté, le lecteur tabulaire peut commencer par la partie de son choix. Il dispose de l'ensemble des éléments de construction et de preuve aboutissant au résultat visé. À la lumière des cartes, il peut également revenir sur les descriptions des parties précédentes afin de renforcer sa compréhension de la réflexion suivie.

Ainsi, ce manuscrit présente les problèmes étudiés et leurs variantes de manière extensive, laissant place à une importante redondance, afin de convenir à la fois aux lecteurs linéaires et aux lecteurs tabulaires mais aussi aux lecteurs alternant entre ces deux types de lecture.



# Chapitre 2

## Problèmes de domination

### 2.1 Introduction du chapitre

Il existe de nombreuses variantes de problèmes de domination en fonction des propriétés supplémentaires considérées, telles que l'ensemble indépendant dominant, l'ensemble dominant total, l'ensemble dominant connecté, parmi d'autres (voir [27] et [26]). Ces problèmes sont centraux en théorie des graphes. Ils sont également utiles et utilisés dans des applications distribuées où l'objectif est d'installer des services ou des dispositifs sur certaines machines/sommets afin que chaque sommet soit connecté à au moins un autre sommet équipé du dispositif. Nous nous concentrons ici sur le problème de l'ensemble indépendant dominant, qui cherche à trouver un ensemble de sommets qui soient à la fois indépendants entre eux et dominant tous les sommets du graphe.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe non orienté, avec  $V$  son ensemble de *sommets* et  $E$  son ensemble d'*arêtes*. Soit  $D \subseteq V$  un sous-ensemble de sommets. L'ensemble  $D$  est un *ensemble stable* ou *ensemble indépendant* de  $G$  s'il n'y a pas d'arête entre les sommets de  $D$ . L'ensemble  $D$  est un *ensemble dominant* de  $G$  si chaque sommet de  $V - D$  a au moins un voisin dans  $D$ . L'ensemble  $D$  est un *ensemble indépendant dominant* de  $G$  s'il est à la fois un ensemble indépendant et un ensemble dominant de  $G$ .

Il est bien connu que tout graphe contient au moins un ensemble indépendant dominant. Du point de vue algorithmique, à partir d'un graphe  $G = (V, E)$  et d'un entier  $k$ , déterminer si  $G$  contient un ensemble indépendant dominant de taille au plus  $k$  est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet (voir [23]). La complexité du meilleur algorithme exact connu pour construire un ensemble dominant de taille minimale s'exécute en  $O(1.4969^{|V|})$ , où  $|V|$  représente le nombre de sommets du graphe, avec une approche mesurer et conquérir (voir [51]). Le problème de l'ensemble indépendant dominant a été formalisé pour la première fois par Berge en 1958 [9] et Ore en 1965 [46]. Garey a montré que le problème consistant à trouver le plus petit ensemble indépendant dominant d'un graphe est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet [23]. L'ensemble indépendant dominant a continué d'être étudié dans la littérature au cours des dernières décennies. En 1991, Irving [30] a démontré que, à moins que  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ , aucun algorithme d'approximation en temps polynomial pour ce problème ne peut garantir de trouver un ensemble indépendant dominant de taille minimale pour un facteur de  $K$ , avec  $K > 1$  une constante fixe, même dans les graphes bipartis. En 2004, Chlebík et Chlebíková [12] ont montré qu'il est  $\mathcal{NP}$ -difficile d'approximer la taille minimale d'un ensemble indépendant dominant dans un graphe de degré maximal trois

avec un ratio de  $1 + 1/390$ , même dans les graphes bipartis. En 2020, Akbari et al. [2] ont fourni une famille de graphes cubiques connectés de  $|V|$  sommets où la taille minimale d'un ensemble indépendant dominant est de  $3|V|/8$ .

Dans ce chapitre, nous étudions le problème de l'ensemble indépendant dominant avec une contrainte supplémentaire. Dans notre version, une instance contient un graphe  $G = (V, E)$  et une partition  $\Pi = (V_1, \dots, V_k)$  de l'ensemble de sommets  $V$  de  $G$  (c'est-à-dire que pour tout  $1 \leq i \neq j \leq k$ , 1.  $V_i, V_j \subseteq V$ , 2.  $V_i \cap V_j = \emptyset$  et 3.  $\cup_{i=1}^k V_i = V$ ). Chaque sous-ensemble  $V_i$  de  $\Pi$  est appelé une *obligation*. Pour une instance  $(G = (V, E), \Pi = (V_1, \dots, V_k))$ , un *ensemble Indépendant Dominant avec Obligations (IDO)*  $D$  est un ensemble indépendant dominant de  $G$ , respectant les obligations de  $\Pi$ , c'est-à-dire : pour tout  $1 \leq i \leq k$  soit  $V_i \subseteq D$  soit  $V_i \cap D = \emptyset$ . Lorsque toutes les obligations sont des singletons, tout ensemble Indépendant Dominant respectant les Obligations est simplement un ensemble indépendant dominant de  $G$ .

Une obligation peut représenter un sous-ensemble d'appareils devant être utilisés ensemble, et non pas individuellement, ou une équipe de personnes devant toutes être présentes pour effectuer une action. Les obligations ont récemment été introduites dans [16] pour de nombreux problèmes de graphe tels que la couverture de sommets, la couverture de sommets connectés, l'ensemble dominant, l'ensemble dominant total, l'ensemble indépendant dominant, l'arbre couvrant, le couplage et le chemin Hamiltonien. Les auteurs ont principalement obtenu des résultats  $\mathcal{NP}$ -difficiles. Cette approche par obligation s'inscrit en parallèle de l'approche par conflit, plus ancienne. En effet, l'étude de problèmes classiques de graphes avec des contraintes supplémentaires n'est pas nouvelle. Le contexte général des contraintes de conflit est le suivant. Pour un graphe  $G = (V, E)$ , nous ajoutons un ensemble d'éléments de  $G$  (sommets ou arêtes) qui ne peuvent pas apparaître ensemble dans la même solution (en fonction de l'objectif, cela peut être, entre autres, un chemin, un arbre ou un ensemble dominant). Contrairement aux obligations, un conflit modélise le fait que plusieurs éléments d'un système ne peuvent pas être utilisés simultanément, par exemple parce qu'ils sont incompatibles. La plupart des problèmes avec des conflits sont difficiles, même lorsque la version classique sous-jacente est polynomiale. Plusieurs articles récents ont été publiés sur le sujet [15, 17, 31, 32, 33, 39, 40].

Nous définissons deux propriétés principales sur les obligations. Si toutes les obligations de  $\Pi$  ont la même taille  $\lambda$ , elles sont dites *équilibrées* ou  $\lambda$ -*équilibrées*. Si une obligation  $V_i \in \Pi$  est un ensemble indépendant dans le graphe  $G$ , elle est dite *stable* (ou indépendante). Notons que si une obligation n'est pas stable, elle ne peut pas faire partie d'une solution au problème *IDO*; si toutes les obligations ne sont pas stables, alors l'instance  $(G, \Pi)$  ne contient aucun *IDO*. Pour cette raison, nous nous concentrons principalement sur les cas où les obligations sont toutes stables. Le problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations a été introduit pour la première fois par Cornet et Laforest dans [16]. Ils ont prouvé sa  $\mathcal{NP}$ -complexité même avec des obligations de taille maximale deux. Cependant, ils ont utilisé des obligations non-stables pour la réduction. En raison de la remarque précédente, il est légitime d'étudier le problème avec des instances composées uniquement d'obligations stables. Dans ce chapitre, nous améliorons la connaissance de ce problème.

La suite de cette introduction est structurée en quatre parties. Dans la partie 2.1.1, nous définissons l'ensemble des notions utilisées, telles que les propriétés des graphes et leurs topologies, ou les obligations et leurs propriétés. Dans la partie 2.1.2, nous décrivons les différents problèmes étudiés ou employés, notamment le problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations et le problème de la Couverture Exacte par des Triplets avec un univers Restreint servant de problème d'origine à plusieurs réductions. Dans la partie 2.1.3, nous proposons des résultats préliminaires permettant de préciser le comportement du problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations. Enfin, dans la partie 2.1.4, nous précisons l'organisation des différentes sections de ce chapitre.

## 2.1.1 Terminologie et définitions

Nous concentrons ici la terminologie utilisée tout au long de ce chapitre, ainsi que certaines définitions. Les mots-clefs sont séparés en six catégories afin de faciliter leur accès au lecteur selon ses besoins :

- Le graphe en tant qu'objet mathématique.
- La notation des graphes, des sommets et des arêtes.
- Des propriétés sur les graphes.
- Des topologies de graphes.
- Des propriétés sur les obligations.
- La représentation du problème  $RX3C$  par des sommets.

### **Le graphe en tant qu'objet mathématique.**

Le nom de **graphe** ne concerne pas qu'un seul objet mathématique, mais regroupe une famille d'objets, notamment les graphes au sens général, les graphes simples, les graphes orientés ou les graphes à poids.

Un graphe est défini par un ensemble fini  $V$  de **sommets** et un ensemble fini  $E$  d'**arêtes** reliant un ou plusieurs sommets entre eux.

Les notations  $|V|$  et  $|E|$  représentent respectivement le nombre de sommets et le nombre d'arêtes du graphe.

Une **boucle** est une arête qui relie un sommet à lui-même.

Une **arête multiple** est une arête qui relie plus de deux sommets entre eux.

Un graphe **simple** est un graphe sans boucle ni arête multiple.

Un graphe **orienté** est un graphe où chaque arête (appelée **arc**) ne peut-être parcourue que dans un seul sens.

Un graphe **non orienté** simple est un graphe où chaque arête peut être parcourue dans les deux sens.

Dans ce chapitre nous considérons exclusivement des graphes simples non orientés.

## La notation des graphes, des sommets et des arêtes.

La notation  $G = (V, E)$  désigne un graphe simple non orienté  $G$  composé des sommets  $V$  et des arêtes  $E$ .

Soient  $u \in V$  et  $v \in V$ , l'arête entre ces deux sommets de  $V$  s'écrit  $(uv)$ .

## Des propriétés sur les graphes.

Soit un graphe  $G = (V, E)$ .

Deux sommets  $u, v \in V$  sont **voisins** s'il existe une arête  $(uv) \in E$ .

Le **voisinage** d'un sommet  $u \in V$ , noté  $N[u]$ , est l'ensemble des sommets  $v \in V$  tels qu'il existe une arête  $(uv) \in E$  ainsi que le sommet  $u$ . Le voisinage d'un ensemble de sommets correspond à l'union des voisinages de ces sommets.

Le **degré** d'un sommet  $u \in V$ , noté  $d(u)$ , est le nombre d'arêtes  $(uv) \in E$  pour chaque sommet  $v \in V$ .

Le **degré maximum** d'un graphe, noté  $\Delta(G)$ , est le degré du sommet  $u \in V$  tel que  $d(u)$  est au moins aussi grand que  $d(v)$  pour tout sommet  $v \in V$ .

Le nombre d'**arêtes maximum** d'un graphe est toujours égal à  $\frac{|V| \times (|V|-1)}{2}$ .

Un **chemin** entre deux sommets  $u_1, u_n \in V$  est une suite finie de sommets  $u_1, u_2, \dots, u_n$  (ou une suite finie d'arêtes  $a_1 = (u_1u_2), \dots, a_{n-1} = (u_{n-1}u_n)$ ) telle que pour tout  $1 \leq k < n$  il existe une arête  $(u_ku_{k+1}) \in E$ .

La **longueur** d'un chemin est le nombre d'arêtes qui le compose.

La **distance** entre deux sommets  $u, v \in V$ , notée  $d(u, v)$ , est la longueur minimale d'un chemin de  $u$  à  $v$ . Si un tel chemin n'existe pas, la distance est dite infinie  $d(u, v) = \infty$ .

Le **diamètre** d'un graphe, noté  $D(G)$ , est la plus longue distance  $d(u, v)$  pour deux sommets  $u, v \in V$ , telle que  $d(u, v)$  est au moins aussi grand que  $d(s, t)$  pour tout sommet  $s, t \in V$ .

Un graphe est **connexe** si pour toutes paires de sommets  $u, v \in V$  il existe un chemin de  $u$  à  $v$ .

La **densité** d'un graphe est égale au nombre d'arêtes  $|E|$  sur le nombre d'arêtes maximum  $\frac{|V| \times (|V|-1)}{2}$ . La densité est comprise entre zéro (le graphe ne contient aucune arête) et un (toutes les arêtes possibles entre les sommets existent).

## Des topologies de graphes.

Un graphe est un **indépendant** si chaque sommet est de degré zéro (il ne contient aucune arête, sa densité est zéro).

Un graphe est un **couplage** si chaque sommet est de degré un.

Un graphe connexe est un **chemin** si tous les sommets sont de degré deux, sauf deux sommets qui sont de degré un.

Un graphe connexe est un **cycle** si tous les sommets sont de degré deux.

Un graphe connexe est un **arbre** s'il ne contient aucun cycle.

Un graphe de **diamètre**  $d = D(G)$  est un graphe dont le diamètre vaut  $D(G)$  (nous parlons par exemple de graphe de diamètre deux).

Un graphe est une **étoile** si le graphe est un arbre de diamètre au plus deux. Le **centre** d'une étoile est le sommet partageant une arête avec tous les autres. Les **feuilles** d'une étoile sont les sommets partageant une arête seulement avec le centre.

Un graphe est dit de **faible densité** si sa densité est "proche" de zéro.

Un graphe est dit de **forte densité** si sa densité est "proche" de un.

Un graphe **complet** est un graphe dont la densité est un, ce qui est équivalent à un graphe dont le diamètre est un.

### Des propriétés sur les obligations.

Soit  $\Pi$  un ensemble d'obligations.

Une **obligation**  $V_i$  est un ensemble de sommets appartenant tous aux mêmes solutions. Les obligations associées à un graphe forment une partition  $\Pi = (V_1, \dots, V_k)$  de ses sommets (c'est-à-dire que pour tout  $1 \leq i \neq j \leq k$ , 1)  $V_i, V_j \subseteq V$ , 2)  $V_i \cap V_j = \emptyset$  et 3)  $\cup_{i=1}^k V_i = V$ ).

Une obligation  $V_i$  est **stable** si pour tout couple de sommets  $u, v \in V_i$  il n'existe aucune arête  $(uv) \notin E$ .

Le nombre d'obligations est noté  $|\Pi|$ .

La **taille** d'une obligation  $V_i$ , notée  $|V_i|$ , est le nombre de sommets qui la composent.

Des obligations sont dites **équilibrées** si elles ont toutes la même taille. Soit  $\lambda$  cette taille, nous parlons alors d'obligations  $\lambda$ -équilibrées.

Des obligations  $\Pi = \{V_1, \dots, V_k\}$  sont dites **respectées** dans une solution  $D$  si pour tout  $1 \leq i \leq k$  soit  $V_i \subseteq D$  soit  $V_i \cap D = \emptyset$ .

Dans l'ensemble des figures, les obligations sont illustrées par des rectangles rouges encadrant chacune au moins un sommet.

### La représentation du problème *RX3C* par des sommets.

Plusieurs preuves de complexité s'appuient sur le problème *RX3C* (nous définissons ce problème dans la sous-section 2.1.2). Une instance du problème sera alors modélisée par un graphe et des obligations. Certains éléments de langages propres à ces réductions sont présentés ici. Un **sommet-élément** est un sommet représentant un élément d'un univers  $\mathcal{X}$ .

Un **sommet-triplet** est un sommet représentant un triplet d'une collection  $\mathcal{C}$ .

Un **sommet-représentant** est un sommet-élément ou un sommet-triplet. Dans une construction, il correspond à un sommet associé à un élément pré-existant à la construction, il le représente sous une autre formulation. Ainsi, un élément sera **couvert** si et seulement si le sommet-élément associé est **dominé**.

Dans l'ensemble des figures, les sommets-élément sont illustrés par des carrés verts et les sommets-triplet sont illustrés par des hexagones oranges.

Le symbole  $\vee$  représente l'opérateur logique **ou exclusif**.  $A \vee B$  vaut *vrai* si et seulement si  $A$  et  $B$  ne partagent pas la même valeur de vérité.

### 2.1.2 Description des problèmes

**Dominant** (Dominant)

**Données** : Un graphe  $G = (V, E)$ .

**Objectif** : Trouver un sous-ensemble  $V' \subseteq V$  tel que pour chaque sommet  $u \in V$  il existe un sommet  $v \in V'$  avec  $u \in N[v]$ .

Le problème du Dominant prend en entrée un graphe  $G = (V, E)$ . Une solution est un sous-ensemble  $V' \subseteq V$  tel que pour chaque sommet  $u \in V$  il existe un sommet  $v \in V'$  avec  $u \in N[v]$ . Une instance et une solution pour cette instance sont illustrées dans la Figure 2.1.

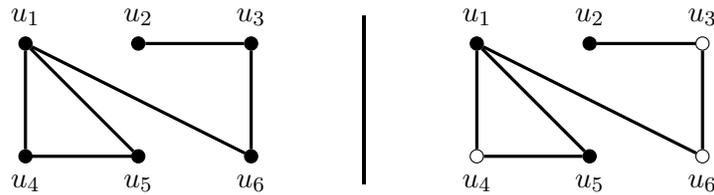


FIGURE 2.1 – Une instance du problème du Dominant (à gauche) et une solution  $S$  (à droite). Les sommets appartenant à  $S$  sont représentés pleins.

**Indépendant** (Indépendant)

**Données** : Un graphe  $G = (V, E)$ .

**Objectif** : Trouver un sous-ensemble  $V' \subseteq V$  tel que pour chaque paire de sommets  $u, v \in V'$  il n'existe pas d'arête  $(uv) \in E$ .

Le problème de l'Indépendant prend en entrée un graphe  $G = (V, E)$ . Une solution est un sous-ensemble  $V' \subseteq V$  tel que pour chaque paire de sommets  $u, v \in V'$  il n'existe pas d'arête  $(uv) \in E$ . Une instance et une solution pour cette instance sont illustrées dans la Figure 2.2.

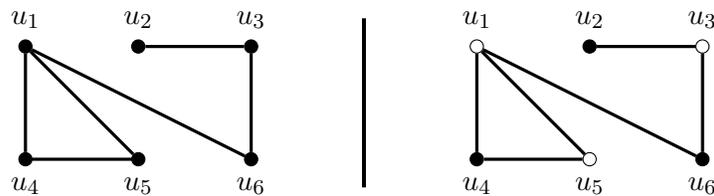


FIGURE 2.2 – Une instance du problème de l'Indépendant (à gauche) et une solution  $S$  (à droite). Les sommets appartenant à  $S$  sont représentés pleins.

### Indépendant Dominant (ID)

**Données :** Un graphe  $G = (V, E)$ .

**Objectif :** Trouver un sous-ensemble  $V' \subseteq V$  tel que :

1. pour chaque sommet  $u \in V$  il existe un sommet  $v \in V'$  avec  $u \in N[v]$ ;
2. pour chaque paire de sommets  $u, v \in V'$  il n'existe pas d'arête  $(uv) \in E$ .

Le problème de l'Indépendant Dominant (*ID*) prend en entrée un graphe  $G = (V, E)$ . Une solution est un sous-ensemble  $V' \subseteq V$  tel que 1) pour chaque sommet  $u \in V$  il existe un sommet  $v \in V'$  avec  $u \in N[v]$  et 2) pour chaque paire de sommets  $u, v \in V'$  il n'existe pas d'arête  $(uv) \in E$ . Une instance et une solution pour cette instance sont illustrées dans la Figure 2.3.

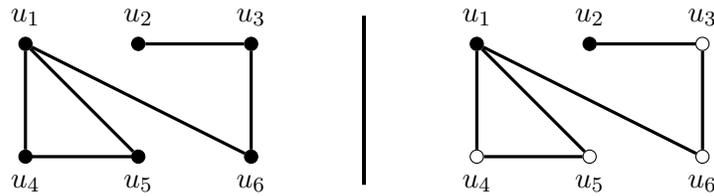


FIGURE 2.3 – Une instance du problème *ID* (à gauche) et une solution  $S$  (à droite). Les sommets appartenant à  $S$  sont représentés pleins.

### Dominant avec Obligations (DO)

**Données :** Un graphe  $G = (V, E)$  et des obligations  $\Pi = \{V_1, \dots, V_k\}$ .

**Objectif :** Trouver un sous-ensemble  $V' \subseteq V$  tel que

1. pour chaque sommet  $u \in V$  il existe un sommet  $v \in V'$  avec  $u \in N[v]$ ;
2. les obligations  $\Pi$  sont respectées.

Le problème du Dominant avec Obligations (*DO*) prend en entrée un graphe  $G = (V, E)$  et des obligations  $\Pi = \{V_1, \dots, V_k\}$ . Une solution est un sous-ensemble  $V' \subseteq V$  tel que 1) pour chaque sommet  $u \in V$  il existe un sommet  $v \in V'$  avec  $u \in N[v]$  et 2) les obligations  $\Pi$  sont respectées. Une instance et une solution pour cette instance sont illustrées dans la Figure 2.4.

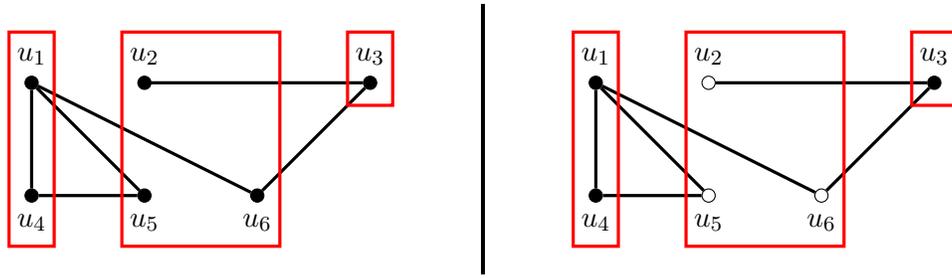


FIGURE 2.4 – Une instance du problème *DO* (à gauche) et une solution *S* (à droite). Les sommets appartenant à *S* sont représentés pleins.

### Indépendant avec Obligations (IO)

**Données :** Un graphe  $G = (V, E)$  et des obligations  $\Pi = \{V_1, \dots, V_k\}$ .

**Objectif :** Trouver un sous-ensemble  $V' \subseteq V$  tel que

1. pour chaque paire de sommets  $u, v \in V'$  il n'existe pas d'arête  $(uv) \in E$ ;
2. les obligations  $\Pi$  sont respectées.

Le problème de l'Indépendant avec Obligations (*IO*) prend en entrée un graphe  $G = (V, E)$  et des obligations  $\Pi = \{V_1, \dots, V_k\}$ . Une solution est un sous-ensemble  $V' \subseteq V$  tel que 1) pour chaque paire de sommets  $u, v \in V'$  il n'existe pas d'arête  $(uv) \in E$  et 2) les obligations  $\Pi$  sont respectées. Une instance et une solution pour cette instance sont illustrées dans la Figure 2.5.

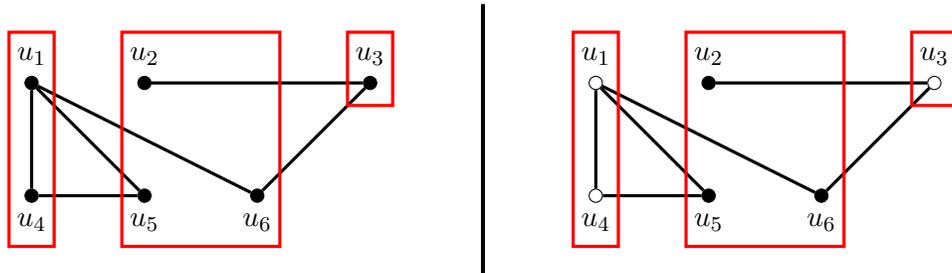


FIGURE 2.5 – Une instance du problème *IO* (à gauche) et une solution *S* (à droite). Les sommets appartenant à *S* sont représentés pleins.

### Indépendant Dominant avec Obligations (IDO)

**Données :** Un graphe  $G = (V, E)$  et des obligations  $\Pi = \{V_1, \dots, V_k\}$ .

**Objectif :** Trouver un sous-ensemble  $V' \subseteq V$  tel que :

1. pour chaque sommet  $u \in V$  il existe un sommet  $v \in V'$  avec  $u \in N[v]$ ;
2. pour chaque paire de sommets  $u, v \in V'$  il n'existe pas d'arête  $(uv) \in E$ ;
3. les obligations  $\Pi$  sont respectées.

Le problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations (*IDO*) prend en entrée un graphe  $G = (V, E)$  et des obligations  $\Pi = \{V_1, \dots, V_k\}$ . Une solution est un sous-ensemble  $V' \subseteq V$  tel que 1) pour chaque sommet  $u \in V$  il existe un sommet  $v \in V'$  avec  $u \in N[v]$ , 2) pour chaque paire de sommets  $u, v \in V'$  il n'existe pas d'arête  $(uv) \in E$  et 3) les obligations  $\Pi$  sont respectées. Une instance et une solution pour cette instance sont illustrées dans la Figure 2.6.

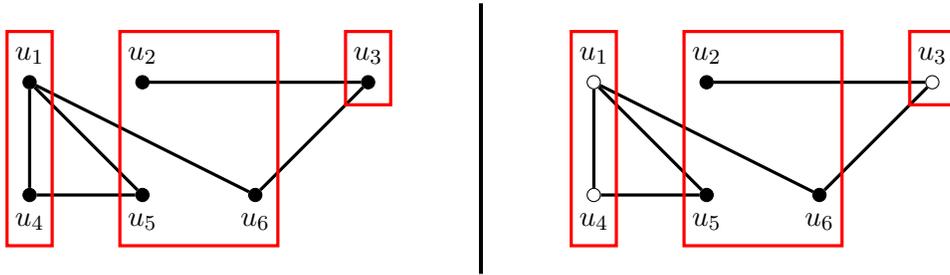


FIGURE 2.6 – Une instance du problème *IDO* (à gauche) et une solution  $S$  (à droite). Les sommets appartenant à  $S$  sont représentés pleins.

### Indépendant Partiellement Dominant avec Obligations (IPDO)

**Données :** Un graphe  $G = (V, E)$  et des obligations  $\Pi = \{V_1, \dots, V_k\}$ .

**Objectif :** Trouver un sous-ensemble  $V' \subseteq V$  tel que :

1. pour chaque paire de sommets  $u, v \in V'$  il n'existe pas d'arête  $(uv) \in E$ ;
2. les obligations  $\Pi$  sont respectées.

**Mesure :** Le nombre de sommets dominés  $|D|$  avec  $D = \{u | u \in N[V']\}$ .

Le problème de l'Indépendant Partiellement Dominant avec Obligations (*IPDO*) prend en entrée un graphe  $G = (V, E)$  et des obligations  $\Pi = \{V_1, \dots, V_k\}$ . Une solution est un sous-ensemble  $V' \subseteq V$  tel que 1) pour chaque paire de sommets  $u, v \in V'$  il n'existe pas d'arête  $(uv) \in E$  et 2) les obligations  $\Pi$  sont respectées. La qualité de la solution est mesurée en fonction du nombre de sommets dominés  $|D|$  avec  $D = \{u | u \in N[V']\}$ . Une instance et une solution pour cette instance sont illustrées dans la Figure 2.7. Notons que

toute instance du problème *IDO* est une instance du problème *IPDO* pour laquelle nous cherchons à dominer tous les sommets du graphe.

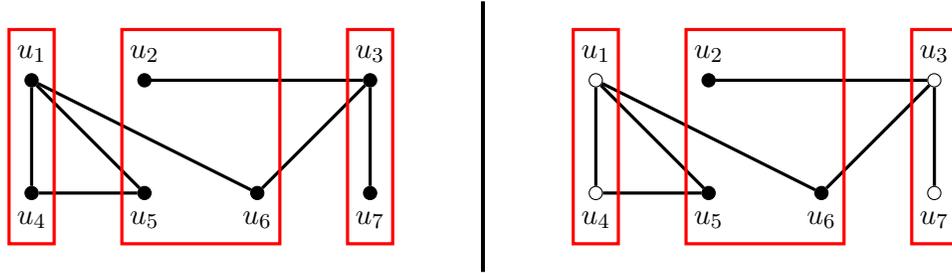


FIGURE 2.7 – Une instance du problème *IPDO* (à gauche) et une solution  $S$  (à droite). Les sommets appartenant à  $S$  sont représentés pleins.  $S$  permet de dominer seulement six sommets sur sept.

### Couverture exacte (XC)

**Données :** Un univers  $\mathcal{X} = \{1, \dots, k\}$  et une collection d'éléments  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_l\}$ .

**Objectif :** Trouver un sous-ensemble  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  tel que chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$  apparaît exactement une fois dans  $\mathcal{C}'$ .

Le problème de la Couverture exacte prend en entrée un univers  $\mathcal{X} = \{1, \dots, k\}$  et une collection d'éléments  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_l\}$ . Une solution est un sous-ensemble  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  tel que chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$  apparaît exactement une fois dans  $\mathcal{C}'$ . Nous nous intéressons à une version restrictive de ce problème.

### Couverture exacte par des triplets avec univers restreint (RX3C)

**Données :** Un univers  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 3q\}$  et une collection de triplets  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_{3q}\}$ .

**Objectif :** Trouver un sous-ensemble  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  tel que chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$  apparaît exactement une fois dans  $\mathcal{C}'$ .

Le problème de la Couverture Exacte par des Triplets avec un univers Restreint (*RX3C*) prend en entrée un univers  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 3q\}$  et une collection de triplets  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_{3q}\}$ . Dans cette version restreinte du problème de la couverture exacte,  $\mathcal{C}$  est une collection de triplets telle que chaque élément de  $\mathcal{X}$  apparaît dans exactement trois triplets. Ainsi, si  $\mathcal{X}$  contient  $3q$  éléments alors  $\mathcal{C}$  contient  $3q$  triplets. Une solution est un sous-ensemble  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  tel que chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$  apparaît exactement une fois dans  $\mathcal{C}'$ . Nous savons que  $\mathcal{C}'$  doit contenir  $q$  triplets parmi les  $3q$  triplets de  $\mathcal{C}$  pour couvrir exactement les  $3q$  éléments de  $\mathcal{X}$ . Un exemple d'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  pour le problème *RX3C* est  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$  et  $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ . Une solution  $\mathcal{C}'$  pour cette instance est  $\mathcal{C}' = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$ . Ce problème a été montré  $\mathcal{NP}$ -complet par Karp [34].

### 2.1.3 Des résultats préliminaires

Une instance du problème du Dominant est composée d'un graphe  $G = (V, E)$ . Une solution est un sous-ensemble de sommets  $V' \subseteq V$  tel que chaque sommet de  $V$  appartient au voisinage de  $V'$ . Une telle solution existe toujours. Lorsque nous introduisons des obligations, ce fait reste inchangé. Une instance du problème du Dominant avec Obligations admet toujours une solution. Il en va de même pour les problèmes de l'Indépendant et de l'Indépendant avec Obligations. La question reste de trouver la meilleure solution. Cependant, ce n'est pas le cas pour le problème de l'Indépendant Dominant.

Une instance du problème de l'Indépendant Dominant est composée d'un graphe  $G = (V, E)$ . Une solution est un sous-ensemble de sommets indépendants  $V' \subseteq V$  tel que chaque sommet de  $V$  appartient au voisinage de  $V'$ . Une telle solution existe toujours. Lorsque des obligations sont introduites, certaines instances n'admettent aucune solution. Un tel cas est illustré dans la Figure 2.8. À gauche, tous les sommets du graphe appartiennent à une obligation non stable. Comme aucun sommet ne peut appartenir à une solution, il n'en existe aucune. À droite, chaque obligation contient un sommet isolé. Tous les sommets des obligations  $\pi_1$  et  $\pi_2$  doivent appartenir à une solution, mais les sommets  $v_2$  et  $v_3$  partagent une arête. Il n'existe aucune solution. Ainsi, une instance du problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations n'admet pas toujours une solution. En particulier, aucune obligation non stable ne peut appartenir à une solution pour les problèmes de l'Indépendant Dominant avec Obligations (*IDO*) et de l'Indépendant Partiellement Dominant avec Obligations (*IPDO*). Ce fait nous amène à considérer exclusivement les instances avec des obligations stables dans les Sections 2.2, 2.3 et 2.4. Tous les résultats peuvent aisément être étendus aux instances contenant des obligations non stables (sans y être réduits).

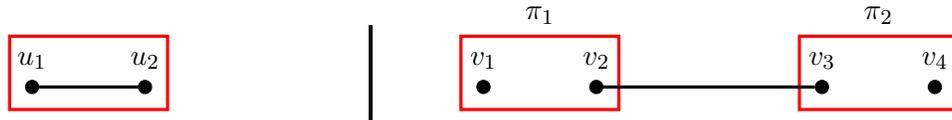


FIGURE 2.8 – Deux instances du problème *IDO* qui n'admettent aucune solution.

Dans la suite de cette partie, nous étudions le problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations (*IDO*) seulement pour des cas où il est simple d'élaborer un algorithme polynomial déterminant l'existence ou non d'une solution. Nous abordons, dans un premier temps, les cas où aucune solution ne peut exister. Ensuite, nous exhibons des méthodes pour déterminer l'existence d'une solution, en fonction de la topologie du graphe ou des propriétés des obligations.

L'absence totale de toute solution est principalement due à des obligations non stables dont les sommets sont nécessaires à la domination de l'instance. Considérons le cas où toutes les obligations contiennent au moins deux sommets, et considérons une instance  $(G_* = (V_*, E_*), \Pi_*)$  et une instance  $(G_K = (V_K, E_K), \Pi_K)$ . Dans la première instance le graphe forme une étoile, tandis que dans la seconde instance le graphe forme un graphe

de diamètre un, c'est-à-dire un graphe complet. Ces deux types d'instances sont illustrés dans la Figure 2.9.

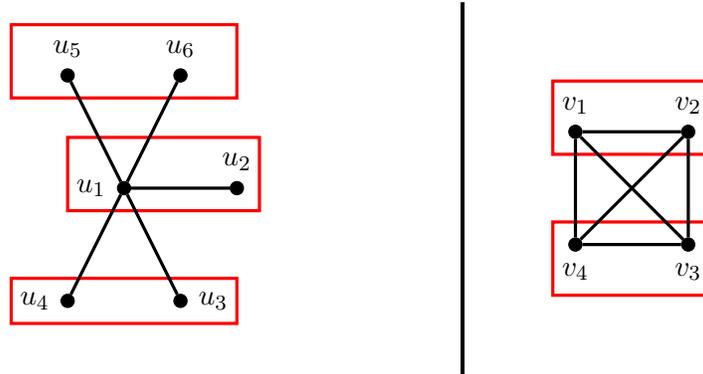


FIGURE 2.9 – Deux instances du problème *IDO*.

Dans une étoile, il n'existe que deux solutions possibles. Une solution est soit le centre de l'étoile, soit toutes ses feuilles. Lorsque les obligations contiennent toutes au moins deux sommets, le centre appartient forcément à une obligation commune avec l'une des feuilles. Ni le centre, ni la feuille en question ne peuvent appartenir à une solution. Il n'existe donc aucune solution possible. De manière similaire, dans un graphe de diamètre un, le nombre de solutions possibles est égal au nombre de sommets. Cependant, les sommets étant tous connectés, aucun sommet d'une obligation ne peut appartenir à une solution. Il n'existe donc aucune solution possible.

**Théorème 1.** *Le problème IDO n'admet aucune solution, si le graphe est une étoile ou un graphe de diamètre un et que les obligations sont toutes de taille au moins deux.*

Lorsque certaines obligations peuvent ne contenir qu'un seul sommet, il est plus délicat de déterminer l'existence d'une solution. Il est alors nécessaire d'examiner chaque cas. Nous pouvons cependant noter une condition suffisante pour garantir l'inexistence de toute solution pour une instance donnée : lorsque dans une obligation un sommet n'est dominable ni par lui-même ni par ses voisins. Cette condition est difficile à vérifier lorsqu'elle dépend de la plupart des obligations de l'instance. Cependant il existe certains cas particuliers qui permettent d'obtenir l'inexistence d'une solution en temps polynomial. Deux exemples sont illustrés dans la Figure 2.8. Lorsqu'une obligation contient au moins un sommet partageant des arêtes seulement avec des sommets de la même obligation, il est possible de conclure sans regarder le reste de l'instance. Il en va de même lorsqu'un sommet ne peut-être dominé que par des obligations s'interdisant entre elles. Cependant, ces cas sont rares. Il est plus courant que des obligations ne puissent pas appartenir à une solution en raison de configurations non locales du graphe, comme l'illustre particulièrement le Théorème 6 qui montre que déterminer l'existence d'une solution au problème *IDO* est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un chemin. Cependant, des conditions suffisantes sur le graphe permettent également d'élaborer un algorithme déterminant en temps polynomial l'existence d'une solution.

Dans un graphe indépendant, chaque sommet ne peut dominer que lui-même, et aucune incompatibilité entre les obligations n'existe. Ainsi, il existe toujours une solution qui consiste en l'ensemble des sommets du graphe. Dans une étoile avec des obligations de taille quelconque, il ne peut exister que deux solutions possibles. Ainsi, si le centre de l'étoile est compris dans une obligation de taille strictement supérieure à un, alors il n'existe aucune solution. Dans le cas contraire, il existe toujours une solution consistant seulement en le centre de l'étoile. Dans un graphe de diamètre un, soit il existe une obligation de taille un, c'est une solution, soit il n'en existe aucune, il n'y a aucune solution. Dans un couplage, tous les sommets ont un degré de un. Ainsi, chaque obligation ne peut être dépendante que d'au plus  $\lambda$  autres obligations à travers les arêtes de ses sommets, avec  $\lambda$  la taille de la plus grande obligation. Regardons le cas où toutes les obligations sont de taille deux.

**Idée 1.** *Un graphe d'obligations.*

*Nous remplaçons chaque obligation par un unique sommet. Ces sommets partagent une arête si les obligations représentées partagent une arête entre elles à travers leurs sommets.*

**Construction 1.** *Un graphe d'obligations.*

*Soit  $(G = (V, E), \Pi)$  une instance du problème *IDO* telle que  $G$  forme un couplage. Construisons  $G' = (V', E')$  une représentation des obligations.*

1. *Pour chaque obligation  $\Pi_i \in \Pi$ , nous ajoutons le sommet  $\pi_i$  dans  $V'$ .*
2. *Pour chaque paire d'obligations  $\Pi_i, \Pi_j \in \Pi$ , nous ajoutons l'arête  $(\pi_i, \pi_j)$  si  $(u_k^i, u_l^j) \in E$  pour un sommet  $u_k^i \in \Pi_i$  et un sommet  $u_l^j \in \Pi_j$ .*

L'instance générée contient  $|\Pi|$  sommets et  $\frac{|\Pi|}{2}$  arêtes. Nous avons alors deux cas. Soit  $G'$  contient au moins un cycle de longueur impaire ou une boucle et il ne peut exister aucune solution, soit  $G'$  ne contient ni cycle de taille impaire ni boucle et une solution peut être obtenue en temps polynomial par un algorithme glouton. Un couplage sans solution ainsi que sa représentation suivant la Construction 1 sont illustrés dans la Figure 2.10.

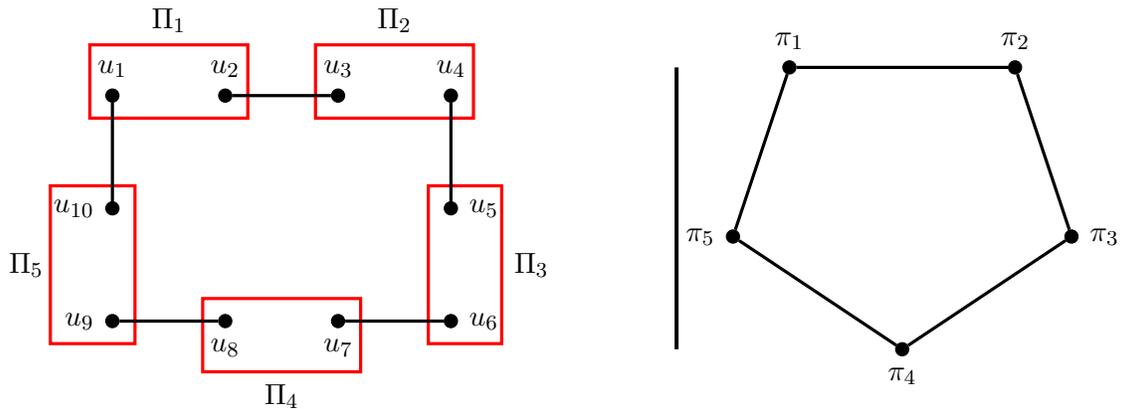


FIGURE 2.10 – Une instance du problème *IDO* et son graphe d'obligations suivant la Construction 1.

**Théorème 2.** *Déterminer l'existence d'une solution pour le problème  $IDO$  est polynomial si le graphe est un indépendant, une étoile, un graphe de diamètre un ou si le graphe est un couplage et que les obligations sont toutes de taille deux.*

En plus des conditions suffisantes en fonction de la stabilité des obligations ou de la topologie du graphe, il existe des conditions suffisantes en fonction de la taille et du nombre d'obligations pour permettre l'élaboration d'un algorithme déterminant en temps polynomial l'existence d'une solution. En effet, lorsque nous considérons exclusivement des obligations de taille un, nous avons affaire à la question de l'existence d'un Indépendant Dominant ( $ID$ ), les obligations n'apportent aucune information. Ainsi, pour des obligations toutes de taille un, il est possible de déterminer en temps polynomial l'existence d'une solution. De même, lorsque nous considérons un nombre constant d'obligations  $c$ , il existe un algorithme qui a une complexité exponentielle en  $c$ , mais qui est polynomial par rapport à la taille du graphe, permettant de déterminer l'existence d'une solution. Cependant un tel algorithme n'est pas très utile en pratique, le nombre d'obligations dépendant en réalité du nombre de sommets.

**Théorème 3.** *Déterminer l'existence d'une solution pour le problème  $IDO$  est polynomial si les obligations sont toutes de taille un, ou si le nombre d'obligations est constant.*

## 2.1.4 Organisation du chapitre

Ce chapitre est organisé en trois sections, ainsi qu'une introduction et une conclusion. Chacune de ces sections est dotée d'une carte générale ainsi que d'une carte par partie facilitant la recherche des résultats, des constructions et des éventuels lemmes utilisés pour y parvenir. La plupart des résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication [38].

Dans les parties précédentes, nous avons décrit les problèmes de l'Indépendant Dominant avec Obligations ( $IDO$ ) et de l'Indépendant Partiellement Dominant avec Obligations ( $IPDO$ ). Nous avons constaté que l'ajout d'obligations au problème de l'Indépendant Dominant ( $ID$ ) ne permet pas toujours l'existence d'une solution. La première question devient ainsi celle de l'existence d'une solution. Nous avons identifié des cas où le problème  $IDO$  n'a pas de solution : lorsque le graphe est une étoile ou un graphe de diamètre un et que toutes les obligations ont une taille d'au moins deux (Théorème 1). Nous avons constaté des cas où la détermination de l'existence d'une solution pour le problème  $IDO$  est réalisable en temps polynomial : lorsque le graphe est un indépendant, une étoile, un graphe de diamètre un ou si le graphe est un couplage et que les obligations sont toutes de taille deux (Théorème 2) ou lorsque toutes les obligations ont une taille de un, ou lorsque le nombre d'obligations est constant (Théorème 3).

Dans la Section 2.2 nous étudions le problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations en fonction de la topologie du graphe. Nous montrons alors que déterminer l'existence d'une solution pour le problème  $IDO$  est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet :

- dans une collection de chemins disjoints, avec des obligations stables et 2-équilibrées (Théorème 4).
- dans une collection de chemins disjoints, avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Théorème 5).
- dans un chemin, avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Théorème 6).
- dans un graphe de forte densité, avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Théorème 7).
- dans un graphe de faible densité, avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Théorème 8).
- dans un graphe de diamètre deux, avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Théorème 9).

Dans la Section 2.3 nous étudions le problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations en fonction des conditions sur les obligations. Nous montrons alors que déterminer l'existence d'une solution pour le problème *IDO* est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet :

- même si l'instance contient  $\sqrt{|V|}$  obligations stables et  $\sqrt{|V|}$ -équilibrées (Théorème 10).
- même si l'instance contient  $\kappa$  obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Théorème 11).
- même si le graphe est un chemin (unique) et que les obligations sont stables pour une répartition de leur taille de deux à  $\lambda$ , pour toute constante  $\lambda \geq 2$ . (Théorème 12).
- même si le graphe est un graphe connexe de forte densité et que les obligations sont stables, pour une répartition de leur taille de deux à  $\lambda$ , pour toute constante  $\lambda \geq 2$  (Théorème 13).
- même si le graphe est un graphe de faible densité et que les obligations sont stables pour une répartition de leur taille de deux à  $\lambda$ , pour toute constante  $\lambda \geq 2$  (Théorème 14).
- même si le graphe est un graphe de diamètre deux et que les obligations sont stables pour une répartition de leur taille de deux à  $\lambda$ , pour toute constante  $\lambda \geq 2$  (Théorème 15).

Dans la Section 2.4 nous étudions le problème de l'Indépendant Partiellement Dominant avec Obligations. Déterminer l'existence d'un Indépendant Dominant respectant les Obligations étant difficile, même dans des cas très restreint tels que les chemins ou les graphes de diamètre deux, nous relâchons la contrainte de domination de l'ensemble des sommets. Nous cherchons alors à dominer seulement un nombre minimal de sommets. Nous montrons que le problème *IPDO* admet un algorithme polynomial permettant de dominer  $2\sqrt{|V|} - 1$  sommets à condition que les obligations soient stables (Théorème 17). Au contraire, nous montrons que déterminer l'existence d'une solution pour le problème *IPDO* est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet :

- pour  $3\sqrt{|V|} - 2$  sommets à dominer même dans une collection de chemins avec des obligations stables (Théorème 16).

- pour  $|V| - \lambda^2 + \lambda$  sommets à dominer même dans une collection de chemins avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Théorème 18).
- pour  $|V| - \lambda^2 + \lambda$  sommets à dominer même dans un chemin avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Théorème 19).

L'ensemble des résultats de  $\mathcal{NP}$ -complétude de ce chapitre s'entendent sous l'hypothèse  $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ .

## 2.2 Déterminer l'existence d'un Indépendant Dominant avec des obligations stables et équilibrées

Dans cette section, nous étudions le problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations (*IDO*) seulement pour des obligations stables. Nous y présentons deux résultats principaux :

1. La  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème *IDO* même dans un chemin avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$  (Théorème 6).
2. La  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème *IDO* même dans des topologies de graphe restreintes avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$  (Théorèmes 7, 8 et 9).

**Carte 1. Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un chemin avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$  (Théorème 6).**

**Départ :** Le problème *RX3C* est  $\mathcal{NP}$ -complet [34].

**Points d'étape :**

1.  $\mathcal{NP}$ -complétude dans une collection de chemins disjoints, avec des obligations stables et 2-équilibrées (Constructions 2, 3 et 4 - Théorème 4).
2.  $\mathcal{NP}$ -complétude dans une collection de chemins disjoints, avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Constructions 5, 6 et 7 - Théorème 5).
3.  $\mathcal{NP}$ -complétude dans un chemin, avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Constructions 8 et 9 - Théorème 6).

Nous montrons en premier lieu que le problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations (*IDO*) est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un chemin avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$ . Nous nous réduisons à une version restreinte du problème de la Couverture Exacte par des Triplets (*RX3C*). Pour simplifier la preuve, nous passons par deux résultats intermédiaires. D'abord nous montrons que le problème est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet dans une collection de chemins disjoints, avec des obligations stables et 2-équilibrées. Puis nous raffinons le résultat pour obtenir des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$ . Et enfin, nous transformons la collection de chemins disjoints en un unique chemin. À cette fin, nous définissons plusieurs gadgets.

Nous savons que dans toute solution pour une instance quelconque du problème *RX3C*, chaque élément ne peut être couvert que par un unique triplet. Nous créons un *gadget d'élément* pour chaque élément de l'instance du problème *RX3C* (Construction 2). Chacun de ces gadgets représente l'appartenance d'un élément à trois triplets. Il assure également qu'un seul de ces triplets sera représenté dans une solution pour le problème *IDO* correspondant. Ces gadgets reflètent exactement la propriété selon laquelle un seul triplet peut couvrir un élément dans une solution au problème *RX3C*. Chaque gadget d'élément créant sa propre représentation des triplets, chaque triplet aura alors trois sommets le représentant.

Nous créons ensuite un *gadget de triplet* pour chaque triplet de l'instance du problème  $RX3C$  (Construction 4). Chacun de ces gadgets va lier les trois sommets représentant un même triplet afin que soit ces trois représentants appartiennent à une même solution, soit aucun d'entre eux. Ainsi, ces gadgets reflètent exactement la propriété selon laquelle un triplet couvre toujours soit tous ses éléments soit aucun dans une solution au problème  $RX3C$ . À ce stade, le graphe est une collection de chemins disjoints et les obligations sont stables et 2-équilibrées. Nous prouvons alors ce résultat intermédiaire (Théorème 4).

Afin de passer à des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$ , nous créons deux gadgets de duplication de notre instance précédente : le *gadget de duplication paire* (Construction 5) et le *gadget de duplication impaire* (Construction 6) pour obtenir respectivement des obligations stables et équilibrées de taille paire et impaire. Ces deux gadgets sont utilisés par le *gadget de  $\lambda$ -duplication* (Construction 7) pour construire une collection de chemins disjoints et des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Nous prouvons alors ce résultat intermédiaire (Théorème 5).

Enfin, nous créons un dernier gadget, le *connecteur neutre* (Construction 8), pour rassembler cette collection de chemins disjoints en un unique chemin. Nous utilisons finalement l'ensemble des gadgets cités précédemment pour construire, à partir d'une instance du problème  $RX3C$ , une instance du problème  $IDO$  sous la forme d'un unique chemin et d'obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$  (Construction 9). Nous prouvons alors le résultat final (Théorème 6), le problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations ( $IDO$ ) est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un chemin avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$ .

**Carte 2. Le problème  $IDO$  est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans des topologies de graphe restreintes avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$  (Théorèmes 7, 8 et 9).**

**Départ :** Le problème  $IDO$  est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans une collection de chemins avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$  (Construction 7).

**Résultats intermédiaire :**

1.  $\mathcal{NP}$ -complétude dans un graphe de forte densité, avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Construction 10 - Théorème 7).
2.  $\mathcal{NP}$ -complétude dans un graphe de faible densité, avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Construction 11 - Théorème 8).
3.  $\mathcal{NP}$ -complétude dans un graphe de diamètre deux, avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Construction 12 - Théorème 9).

L'ensemble des résultats suivants s'appuient sur la Construction 7. Nous montrons dans un premier temps que le problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations ( $IDO$ ) est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un graphe de forte densité avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$  (Théorème 7). Pour ce faire, nous ajoutons un graphe complet multi-parti équilibré représentant une grande partie de l'instance (Construction 10).

Nous montrons ensuite que le problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations (*IDO*) est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un graphe de faible densité avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$  (Théorème 8). Nous ajoutons un nombre conséquent de sommets indépendants dans l'instance définie dans la Construction 7 afin qu'ils représentent une grande partie de l'instance (Construction 11).

Enfin, nous montrons que le problème *IDO* est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un graphe de diamètre deux avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$  (Théorème 9). Nous partons de la Construction 7 et ajoutons des sommets, des arêtes et des obligations afin de créer un ensemble de sommets presque universels mais qui n'appartient à aucune solution (Construction 12). Cet ensemble va diminuer le diamètre du graphe pour obtenir un diamètre deux à partir d'une collection de chemins.

### 2.2.1 Dans une collection de chemins avec des obligations 2-équilibrées

**Carte 3.** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans une collection de chemins avec des obligations stables et 2-équilibrées (Théorème 4).

**Départ :** Le problème *RX3C* est  $\mathcal{NP}$ -complet [34].

**Points d'étape :**

1. Création d'un gadget d'élément (Construction 2).
2. Chaque élément est couvert par exactement un triplet dans une solution au problème *RX3C* (Lemmes 1, 2 et 3).
3. Création d'un gadget de triplet (Construction 3).
4. Un triplet couvre toujours soit tous ses éléments soit aucun dans une solution au problème *RX3C* (Lemmes 4 et 5).
5.  $\mathcal{NP}$ -complétude dans une collection de chemins avec des obligations stables et 2-équilibrées (Construction 4 - Lemme 6 - Théorème 4).

Une instance du problème *RX3C* est composée d'un univers  $\mathcal{X}$  contenant  $3q$  éléments et d'une collection  $\mathcal{C}$  de  $3q$  triplets de ces éléments. Une solution est une sous-collection  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$  de taille  $q$  telle que chaque élément est couvert par un unique triplet (*propriété d'unicité*) et chaque triplet couvre ses trois éléments (*propriété de totalité*). Nous créons un *gadget d'élément* (Construction 2) et un *gadget de triplet* (Construction 3) pour modéliser les deux parties d'une instance du problème *RX3C*. Nous montrons qu'ils respectent les propriétés d'unicité (Lemmes 1, 2 et 3) et de totalité (Lemmes 4 et 5). Le graphe obtenu à partir de ces gadgets (Construction 4) est une collection de chemins et les obligations sont stables et 2-équilibrées, nous concluons ainsi sur la  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème *IDO* (Théorème 4).

**Idée 2.** *Le gadget d'élément.*

*Ce gadget doit contenir un Indépendant Dominant qui respecte les Obligations associées*

si et seulement si l'élément  $x_i$  considéré est couvert par exactement un des trois triplets le contenant  $(c_j, c_k, c_l)$ . À l'aide des obligations, nous retranscrivons ce fait dans une expression logique :  $(c_j \vee (c_k \vee c_l))$ . Si au moins deux sommets-triplet sont dans une solution alors deux sommets partageant une même arête devront appartenir à cette solution (par exemple  $D(\pi_i^5)$  et  $D(\pi_i^6)$  ou  $D(\pi_i^1)$  et  $D(\pi_i^2)$ ), ce qui est contradictoire. À l'inverse, si aucun sommet-triplet n'est dans une solution alors au moins un sommet ne sera pas dominé, ce qui est contradictoire.

**Construction 2.** *Le gadget d'élément.*

Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Pour un élément  $x_i \in \mathcal{X}$  nous associons un gadget, composé d'un graphe et de ses obligations associées, construit comme suit :

- Soient  $c_j, c_k, c_l \in \mathcal{C}$  avec  $j < k < l$  les trois triplets contenant l'élément  $x_i$ .
- Nous ajoutons seize obligations notées  $\pi_i^T, \pi_i^F, \pi_i^1, \dots, \pi_i^{11}, x_i^1, x_i^2$  et  $x_i^3$ , chacune composée de deux sommets indépendants. Dans chaque obligation  $\pi$  et  $x$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\pi)$  et  $D(\pi)$  ou  $G(x)$  et  $D(x)$ .
- Nous ajoutons les sommets  $c_j^i, c_k^i$  et  $c_l^i$  représentant les triplets contenant l'élément  $x_i$  (ces sommets seront l'interface entre les gadgets d'élément et de triplet).
- Nous ajoutons les arêtes  $(D(\pi_i^T)G(\pi_i^F)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^1)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^2)), (G(\pi_i^1)D(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)G(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)D(\pi_i^2)), (G(\pi_i^2)G(\pi_i^3)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^5)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^6)), (D(\pi_i^4)G(\pi_i^9)), (G(\pi_i^5)D(\pi_i^7)), (D(\pi_i^5)D(\pi_i^6)), (D(\pi_i^5)G(\pi_i^7)), (G(\pi_i^6)D(\pi_i^8)), (D(\pi_i^6)G(\pi_i^8)), (D(\pi_i^7)G(\pi_i^{10})), (D(\pi_i^8)G(\pi_i^{11})), (D(\pi_i^9)G(x_i^1)), (D(\pi_i^{10})G(x_i^2)), (D(\pi_i^{11})G(x_i^3)), (D(x_i^1)c_j^i), (D(x_i^2)c_k^i) et  $(D(x_i^3)c_l^i)$ .$

Pour un élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de seize obligations stables et 2-équilibrées (à l'exclusion des sommets  $c$ , qui seront associés à d'autres gadgets dans la Construction 3). Ainsi, l'instance générée pour tous les éléments contient  $3q$  gadgets d'élément, soit  $105q$  sommets,  $69q$  arêtes et  $48q$  obligations. Un gadget est illustré dans la Figure 2.11. Six sommets sont représentés différemment pour des raisons de clarté : ce sont des sommets d'interface entre les gadgets d'élément (les trois carrés verts) et les gadgets de triplet (les trois polygones oranges). Pour faciliter la lecture d'une instance entière, les gadgets sont assimilés seulement à leurs interfaces dans l'illustration générale de la Figure 2.17.

**Lemme 1.** *Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soient  $(H, \Pi_H)$  le graphe et les obligations associées à l'élément  $x_i \in \mathcal{X}$  suivant la Construction 2 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ . Soient  $c_j, c_k, c_l \in \mathcal{C}$  les trois triplets contenant  $x_i$ .*

*Il n'existe aucun Indépendant Dominant de  $H$  respectant les Obligations  $\Pi_H$  qui ne contienne aucun sommet parmi  $c_j^i, c_k^i$  et  $c_l^i$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $H$  contienne un Indépendant Dominant  $S$  qui respecte les Obligations  $\Pi_H$  et qui ne contient ni  $c_j^i$ , ni  $c_k^i$ , ni  $c_l^i$ . Par conséquent, les sommets des

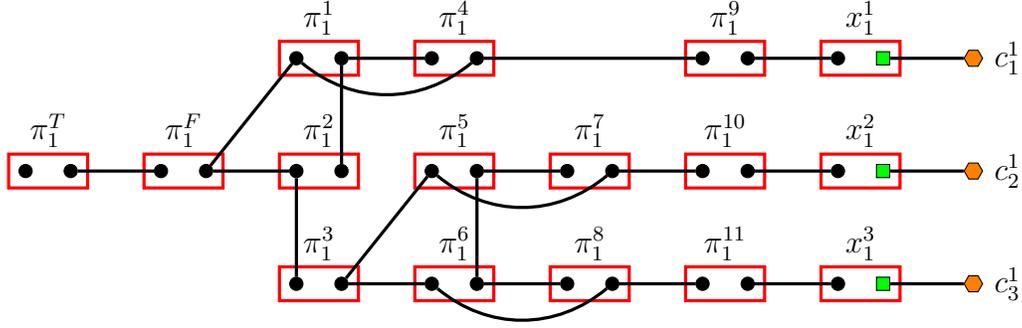


FIGURE 2.11 – Illustration de la Construction 2 pour l'élément 1 de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$  et  $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ .

obligations  $x_i^1$ ,  $x_i^2$  et  $x_i^3$  sont dans  $S$ , ainsi que les sommets des obligations  $\pi_i^4$ ,  $\pi_i^7$ ,  $\pi_i^8$  et  $\pi_i^3$ . Comme l'obligation  $\pi_i^T$  contient un sommet isolé, les deux sommets de l'obligation  $\pi_i^T$  sont dans  $S$  et le sommet  $D(\pi_i^F)$  est dominé soit par le sommet  $G(\pi_i^1)$ , soit par le sommet  $G(\pi_i^2)$ . Cependant, ces deux sommets ne peuvent pas être dans  $S$  en raison des deux arêtes  $(D(\pi_i^1)G(\pi_i^4))$  et  $(G(\pi_i^2)G(\pi_i^3))$ . Le sommet  $D(\pi_i^F)$  n'est pas dominé par  $S$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

**Lemme 2.** Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soient  $(H, \Pi_H)$  le graphe et les obligations associées à l'élément  $x_i \in \mathcal{X}$  suivant la Construction 2 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ . Soient  $c_j, c_k, c_l \in \mathcal{C}$  les trois triplets contenant  $x_i$ .

Soit  $S_j^i$  l'ensemble de sommets composé du sommet  $c_j^i$  et des sommets des obligations  $\pi_i^9$ ,  $\pi_i^1$ ,  $\pi_i^3$ ,  $\pi_i^7$ ,  $\pi_i^8$ ,  $x_i^2$ ,  $x_i^3$  et  $\pi_i^T$ .

Soit  $S_k^i$  l'ensemble de sommets composé du sommet  $c_k^i$  et des sommets des obligations  $\pi_i^{10}$ ,  $\pi_i^5$ ,  $\pi_i^8$ ,  $\pi_i^2$ ,  $\pi_i^4$ ,  $x_i^1$ ,  $x_i^3$  et  $\pi_i^T$ .

Soit  $S_l^i$  l'ensemble de sommets composé du sommet  $c_l^i$  et des sommets des obligations  $\pi_i^{11}$ ,  $\pi_i^6$ ,  $\pi_i^7$ ,  $\pi_i^2$ ,  $\pi_i^4$ ,  $x_i^1$ ,  $x_i^2$ ,  $\pi_i^T$ .

Les trois ensembles  $S_j^i$ ,  $S_k^i$  et  $S_l^i$  sont des Indépendants Dominants de  $H$  respectant les Obligations  $\Pi_H$  et contenant exactement un sommet parmi  $\{c_j^i, c_k^i, c_l^i\}$ .

*Démonstration.* Nous pouvons observer dans les Figures 2.12, 2.13 et 2.14 que pour chaque ensemble de sommets  $S_j^i$ ,  $S_k^i$  et  $S_l^i$ , tous les sommets du graphes sont dominés et toutes les obligations sont respectées.  $\square$

**Lemme 3.** Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soient  $(H, \Pi_H)$  le graphe et les obligations associées à l'élément  $x_i \in \mathcal{X}$  suivant la Construction 2 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ . Soient  $c_j, c_k, c_l \in \mathcal{C}$  les trois triplets contenant  $x_i$ .

Tout Indépendant Dominant de  $H$  respectant les Obligations  $\Pi_H$  ne peut contenir plus d'un sommet parmi  $c_j^i$ ,  $c_k^i$  et  $c_l^i$ .

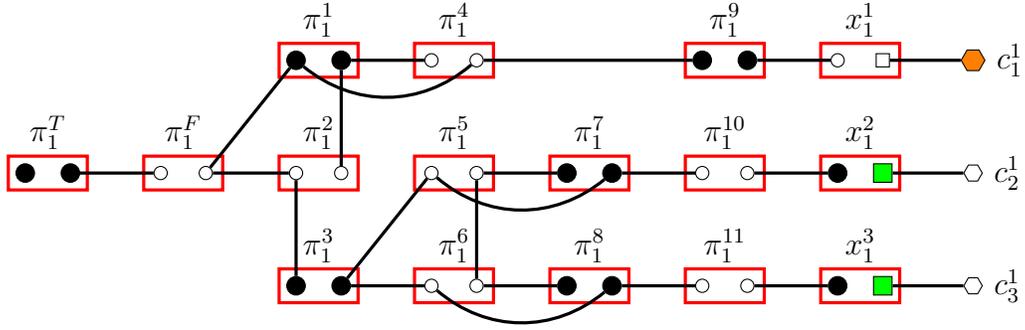


FIGURE 2.12 – Illustration de l'Indépendant Dominant  $S_1^1$  pour le gadget de l'élément 1 de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$  et  $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ . Les sommets de  $S_1^1$  sont représentés pleins.

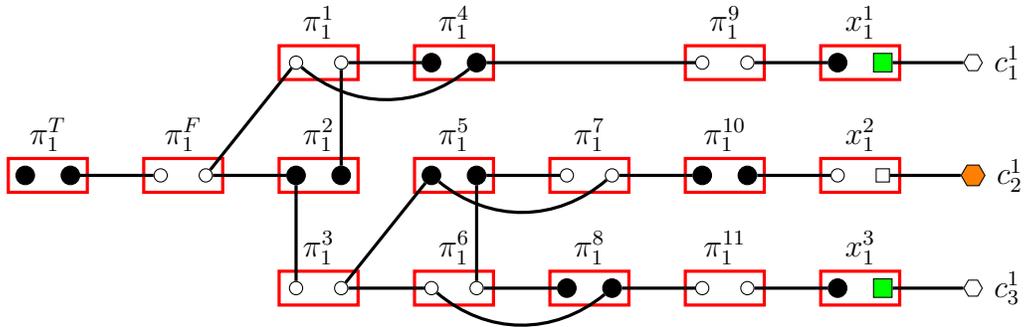


FIGURE 2.13 – Illustration de l'Indépendant Dominant  $S_2^1$  pour le gadget de l'élément 1 de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$  et  $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ . Les sommets de  $S_2^1$  sont représentés pleins.

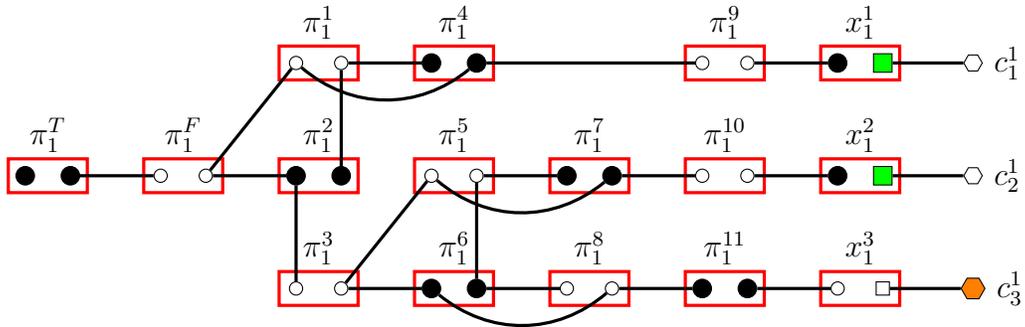


FIGURE 2.14 – Illustration de l'Indépendant Dominant  $S_3^1$  pour le gadget de l'élément 1 de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$  et  $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ . Les sommets de  $S_3^1$  sont représentés pleins.

*Démonstration.* Supposons que  $H$  contienne un Indépendant Dominant  $S$  qui respecte les Obligations  $\Pi_H$  et qui contienne les sommets  $c_k^i$  et  $c_l^i$ .  $S$  contient alors les sommets

des obligations  $\pi_i^{10}$  et  $\pi_i^{11}$ , les seuls à pouvoir dominer les sommets  $G(x_i^2)$  et  $G(x_i^3)$ . De même, les sommets  $G(\pi_i^7)$  et  $G(\pi_i^8)$  ne peuvent être dominés que par les sommets des obligations  $\pi_i^5$  et  $\pi_i^6$ . Cependant, il existe une arête entre  $D(\pi_i^5)$  et  $D(\pi_i^6)$ , ce qui est une contradiction.

Supposons que  $H$  contienne un Indépendant Dominant  $S$  qui respecte les Obligations  $\Pi_H$  et qui contienne le sommet  $c_j^i$  et un sommet parmi  $c_k^i$  et  $c_l^i$ . Pour dominer les sommets  $G(x_i^1)$  et  $G(\pi_i^4)$ ,  $S$  contient les sommets des obligations  $\pi_i^9$  et  $\pi_i^1$ . De même, si le sommet  $c_k^i$  est dans  $S$  alors  $S$  contient les sommets des obligations  $\pi_i^{10}$ ,  $\pi_i^5$  et  $\pi_i^2$ . Sinon, le sommet  $c_l^i$  est dans  $S$ , ainsi que les sommets des obligations  $\pi_i^{11}$ ,  $\pi_i^6$  et  $\pi_i^2$ . Dans les deux cas, les sommets  $D(\pi_i^1)$  et  $D(\pi_i^2)$  sont dans  $S$  et partagent l'arête  $(D(\pi_i^1)D(\pi_i^2))$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

Grâce aux Lemmes 1, 2 et 3, nous pouvons conclure que la propriété d'unicité est respectée. Chaque gadget admet un Indépendant Dominant  $S$  qui respecte les Obligations associées si et seulement si exactement un sommet-triplet appartient à  $S$ . Ce sommet-triplet fait partie de la solution  $S'$  associée à l'instance du problème  $RX3C$  d'origine. À travers les gadgets d'élément, chaque triplet est représenté par trois sommets. En l'absence de liens, par des arêtes ou des obligations, un nombre quelconque de représentants de chaque triplet peut appartenir à un même Indépendant Dominant dans l'instance composée de tous les gadgets d'éléments. Pour respecter la propriété de totalité, c'est-à-dire pour que tous les représentants d'un même triplet appartiennent (ou non) simultanément à toute solution, nous créons un gadget de triplet (Construction 2).

**Idée 3.** *Le gadget de triplet.*

*Ce gadget complète les gadgets d'élément pour former une instance  $(G, \Pi)$  du problème IDO retranscrivant entièrement l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  associée. Si un représentant du triplet considéré  $c_j$  appartient à une solution dans un gadget d'élément alors tous ses représentants appartiennent également à la solution globale de l'instance  $(G, \Pi)$ . Dans le cas contraire, aucun représentant du triplet  $c_j$  ne doit appartenir à la solution globale. À l'aide des obligations, nous retranscrivons ce fait dans une expression logique :  $(c_j^a \Leftrightarrow c_j^b \Leftrightarrow c_j^c)$ , pour  $x_a, x_b$  et  $x_c$  les éléments du triplet  $c_j$ . Seulement deux solutions sont possibles pour chaque triplet : soit les sommets des obligations  $\sigma_j^a, \sigma_j^b, \sigma_j^c$  et  $\rho_j^2$  sont dans la solution soit ce sont les sommets des obligations  $\rho_j^1$  et  $\rho_j^3$ .*

**Construction 3.** *Le gadget de triplet*

*Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Pour un triplet  $c_j \in \mathcal{C}$  nous associons un gadget, composé d'un graphe et de ses obligations associées, construit comme suit :*

- Soient  $x_a, x_b$  et  $x_c$  les trois éléments du triplet  $c_j$ .
- Nous ajoutons six obligations notées  $\sigma_j^a, \sigma_j^b, \sigma_j^c, \rho_j^1, \rho_j^2$  et  $\rho_j^3$ , chacune composée de deux sommets indépendants. Dans chaque obligation  $\sigma$  nous considérons un sommet représentant du triplet (noté  $c_j^a, c_j^b$  et  $c_j^c$ ) et un sommet droit noté  $D(\sigma)$ . Dans chaque obligation  $\rho$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\rho)$  et  $D(\rho)$ .

- Nous ajoutons les arêtes  $(D(\sigma_j^a)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^b)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^c)G(\rho_j^3)), (D(\rho_j^1)G(\rho_j^2))$  et  $(D(\rho_j^2)D(\rho_j^3))$ .

Pour un triplet  $c_j \in \mathcal{C}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de six obligations stables et 2-équilibrées. Ainsi, l'instance générée pour tous les triplets contient  $3q$  gadgets de triplet, soit  $36q$  sommets,  $15q$  arêtes et  $18q$  obligations. Un gadget est illustré dans la Figure 2.15. Trois sommets sont représentés différemment pour des raisons de clarté : ce sont des sommets d'interface entre les gadgets d'élément, faisant eux aussi appel à la représentation des triplets et les gadgets de triplet (les polygones oranges). Pour faciliter la lecture d'une instance entière, les gadgets sont assimilés seulement à leurs interfaces dans l'illustration générale de la Figure 2.17.

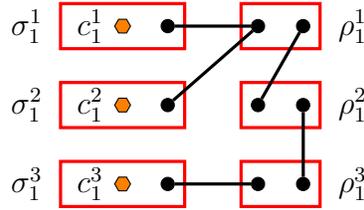


FIGURE 2.15 – Illustration de la Construction 3 pour le triplet  $c_1$  de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$  et  $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ . Dans cet exemple :  $j = 1, a = 1, b = 2$  et  $c = 3$ .

**Lemme 4.** Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soient  $(H, \Pi_H)$  le graphe et les obligations associées au triplet  $c_j \in \mathcal{C}$  suivant la Construction 3 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ . Soient  $x_a, x_b$  et  $x_c$  les trois éléments du triplet  $c_j$ . Les sommets des obligations  $\rho_j^2, \sigma_j^a, \sigma_j^b$  et  $\sigma_j^c$  forment un Indépendant Dominant  $S_j$  de  $H$  qui respecte les Obligations  $\Pi_H$ .

*Démonstration.* Nous pouvons observer dans la Figure 2.16 que les sommets des obligations  $\rho_j^2, \sigma_j^a, \sigma_j^b$  et  $\sigma_j^c$  permettent de dominer tous les sommets de  $H$  tout en respectant les Obligations.  $\square$

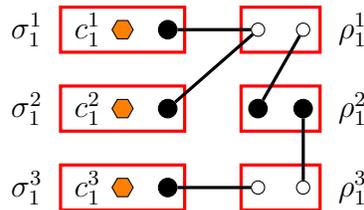


FIGURE 2.16 – Illustration de l'Indépendant Dominant  $S_1$  pour le gadget du triplet  $c_1$  de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$  et  $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ . Les sommets de  $S_j$  sont représentés pleins.

**Lemme 5.** Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soient  $(H, \Pi_H)$  le graphe et les obligations associées au triplet  $c_j \in \mathcal{C}$  suivant la Construction 3 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ . Soient  $x_a, x_b$  et  $x_c$  les trois éléments du triplet  $c_j$ . Il n'existe aucun Indépendant Dominant  $S$  de  $H$  qui respecte les Obligations  $\Pi_H$  et qui contienne exactement un ou deux sommets parmi  $c_j^a, c_j^b$  et  $c_j^c$ .

*Démonstration.* Supposons que  $S$  contienne exactement un sommet parmi les sommets  $c_j^a, c_j^b$  et  $c_j^c$ . Si  $c_j^a$  (respectivement  $c_j^b$ ) appartient à  $S$  alors les sommets de l'obligation  $\rho_j^1$  ne peuvent pas y appartenir. Ainsi, le sommet  $D(c_j^b)$  (respectivement  $D(c_j^a)$ ) ne peut pas être dominé par  $S$ , ce qui est une contradiction. Au contraire, si  $c_j^c$  appartient à  $S$  alors les sommets de l'obligation  $\rho_j^3$  ne peuvent pas y appartenir. Pour dominer  $D(\rho_j^3)$ ,  $D(c_j^b)$  et  $D(c_j^a)$  les sommets des obligations  $\rho_j^2$  et  $\rho_j^1$  appartiennent à  $S$ . Les sommets  $G(\rho_j^2)$  et  $D(\rho_j^1)$  partagent une arête, ce qui est contradictoire.

Supposons que  $S$  contienne exactement deux sommets parmi les sommets  $c_j^a, c_j^b$  et  $c_j^c$ . Si  $c_j^a$  (respectivement  $c_j^b$ ) et  $c_j^c$  appartiennent à  $S$  alors les sommets de l'obligation  $\rho_j^1$  ne peuvent pas y appartenir. Ainsi, le sommet  $D(c_j^b)$  (respectivement  $D(c_j^a)$ ) ne peut pas être dominé par  $S$ , ce qui est une contradiction. Au contraire, si les sommets  $c_j^a$  et  $c_j^b$  appartiennent à  $S$  alors les sommets de l'obligation  $\rho_j^1$  ne peuvent pas y appartenir. Pour dominer  $D(\rho_j^1)$  et  $D(c_j^c)$  les sommets des obligations  $\rho_j^2$  et  $\rho_j^3$  appartiennent à  $S$ . Les sommets  $D(\rho_j^2)$  et  $D(\rho_j^3)$  partagent une arête, ce qui est contradictoire.  $\square$

Notons que dans une instance composée par tous les gadgets d'élément et de triplet, les sommets  $c_j^a, c_j^b$  et  $c_j^c$  sont dominés par les gadgets des éléments  $x_a, x_b$  et  $x_c$  dans le cas où aucun de ces trois sommets n'appartient à un Indépendant Dominant respectant les Obligations. Ainsi, il existe une solution pour l'instance lorsque, pour chaque triplet, ses trois représentants sont dans la solution ou qu'aucun n'en fait partie. Au contraire, il n'existe aucune solution lorsque un seul représentant ou seulement deux représentants d'un triplet sont dans ladite solution. Par conséquent, chaque triplet couvre soit ses trois éléments, soit aucun. La propriété de totalité est respectée.

**Idée 4.** Une première instance du problème  $IDO$ .

Les Constructions 2 et 3 nous montrent respectivement comment créer un gadget d'élément et un gadget de triplet. Pour générer une instance du problème  $IDO$  à partir d'une instance du problème  $RX3C$ , nous créons un gadget d'élément pour chaque élément, puis nous relierons entre eux les représentants des triplets générés grâce à un gadget de triplet pour chacun des triplets du problème  $RX3C$ .

**Construction 4.** Une première instance du problème  $IDO$ .

Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Nous construisons une instance  $(G = (V, E), \Pi)$  du problème  $IDO$  comme suit.

— Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$  :

— Soient  $c_j, c_k, c_l \in \mathcal{C}$  avec  $j < k < l$  les trois triplets contenant l'élément  $x_i$ .

- Nous ajoutons seize obligations notées  $\pi_i^T, \pi_i^F, \pi_i^1, \dots, \pi_i^{11}, x_i^1, x_i^2$  et  $x_i^3$ , chacune composée de deux sommets indépendants. Dans chaque obligation  $\pi$  et  $x$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\pi)$  et  $D(\pi)$  ou  $G(x)$  et  $D(x)$ .
- Nous ajoutons les sommets  $c_j^i, c_k^i$  et  $c_l^i$  représentant les triplets contenant l'élément  $x_i$ .
- Nous ajoutons les arêtes  $(D(\pi_i^T)G(\pi_i^F)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^1)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^2)), (G(\pi_i^1)D(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)G(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)D(\pi_i^2)), (G(\pi_i^2)G(\pi_i^3)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^5)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^6)), (D(\pi_i^4)G(\pi_i^9)), (G(\pi_i^5)D(\pi_i^7)), (D(\pi_i^5)D(\pi_i^6)), (D(\pi_i^5)G(\pi_i^7)), (G(\pi_i^6)D(\pi_i^8)), (D(\pi_i^6)G(\pi_i^8)), (D(\pi_i^7)G(\pi_i^{10})), (D(\pi_i^8)G(\pi_i^{11})), (D(\pi_i^9)G(x_i^1)), (D(\pi_i^{10})G(x_i^2)), (D(\pi_i^{11})G(x_i^3)), (D(x_i^1)c_j^i), (D(x_i^2)c_k^i) et  $(D(x_i^3)c_l^i)$ .$
- Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$  :
  - Soient  $x_a, x_b, x_c \in \mathcal{X}$  les trois éléments du triplet  $c_j$ . Soient  $c_j^a, c_j^b$  et  $c_j^c$  les trois sommets-triplet tels qu'ils ont été créés précédemment.
  - Nous ajoutons trois obligations notées  $\sigma_j^a, \sigma_j^b$  et  $\sigma_j^c$ , composées respectivement du sommet  $c_j^a, c_j^b$  ou  $c_j^c$  ainsi que d'un sommet droit noté respectivement  $D(\sigma_j^a), D(\sigma_j^b)$  et  $D(\sigma_j^c)$ .
  - Nous ajoutons trois obligations notées  $\rho_j^1, \rho_j^2$  et  $\rho_j^3$ , chacune composée de deux sommets indépendants. Dans chaque obligation  $\rho$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\rho)$  et  $D(\rho)$ .
  - Nous ajoutons les arêtes  $(D(\sigma_j^a)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^b)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^c)G(\rho_j^3)), (D(\rho_j^1)G(\rho_j^2))$  et  $(D(\rho_j^2)D(\rho_j^3))$ .

Pour un élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de seize obligations stables et 2-équilibrées. Pour un triplet  $c_j \in \mathcal{C}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de six obligations stables et 2-équilibrées. Ainsi, l'instance générée à partir du problème  $RX3C$  contient  $3q$  gadgets d'élément et  $3q$  gadgets de triplet, soit  $132q$  sommets,  $84q$  arêtes et  $66q$  obligations. La Construction 4 est illustrée dans les Figures 2.17 et 2.18. Chaque ellipse représente le gadget d'un élément de  $\mathcal{X}$  et chaque pentagone représente le gadget d'un triplet de  $\mathcal{C}$ . Les sommets d'interface entre les gadgets d'élément (les carrés verts) et les gadgets de triplet (les polygones oranges) sont toujours visibles tels qu'ils sont aussi dans les Figures 2.11 et 2.15. Un Indépendant Dominant respectant les Obligations obtenues en suivant la Construction 4 est illustré par les sommets pleins dans la Figure 2.19.

**Lemme 6.** *Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soient  $(G, \Pi)$  le graphe et les obligations obtenues en suivant la Construction 4 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ . Soit  $S$  un Indépendant Dominant de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$ .*

*Pour chaque triplet  $c_j$  de  $\mathcal{C}$  composé des éléments  $x_a, x_b$  et  $x_c$ , les sommets de l'obligation  $\rho_j^2$  appartiennent à  $S$  si et seulement si les sommets des obligations  $\sigma_j^a, \sigma_j^b$  et  $\sigma_j^c$  y appartiennent également.*

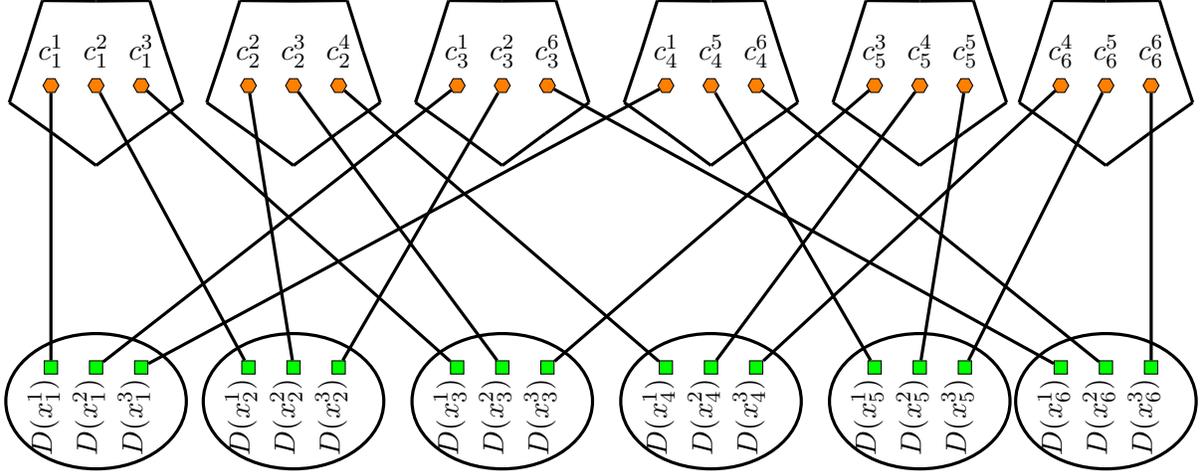


FIGURE 2.17 – Illustration de la Construction 4 pour l’instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$  et  $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ . Les ellipses représentent les gadgets d’élément tels qu’illustrés dans la Figure 2.11. Les pentagones représentent les gadgets de triplets tels qu’illustrés dans la Figure 2.15.

*Démonstration.* Supposons que  $S$  contienne les sommets de l’obligation  $\rho_j^2$  pour un triplet  $c_j$  quelconque. Pour dominer les sommets  $G(\rho_j^1)$  et  $G(\rho_j^3)$ ,  $S$  contient les sommets de l’obligation  $\sigma_j^c$  et les sommets de l’obligation  $\sigma_j^a$  ou  $\sigma_j^b$ . Supposons que  $S$  ne contienne pas les sommets de l’obligation  $\sigma_j^a$  (respectivement  $\sigma_j^b$ ). Le sommet  $D(\sigma_j^a)$  (respectivement  $D(\sigma_j^b)$ ) ne peut alors pas être dominé par  $S$ , ce qui est une contradiction.  $S$  contient les sommets des obligations  $\rho_j^2$ ,  $\sigma_j^a$ ,  $\sigma_j^b$  et  $\sigma_j^c$ .

Supposons que  $S$  ne contienne pas les sommets de l’obligation  $\rho_j^2$  pour un triplet  $c_j$  quelconque. Pour dominer les sommets  $G(\rho_j^2)$  et  $D(\rho_j^2)$ ,  $S$  contient les sommets des obligations  $\rho_j^1$  et  $\rho_j^3$ .  $S$  ne contient alors aucun des sommets des obligations  $\sigma_j^a$ ,  $\sigma_j^b$  et  $\sigma_j^c$  en raison, respectivement, des arêtes  $(D(\sigma_j^a)G(\rho_j^1))$ ,  $(D(\sigma_j^b)G(\rho_j^1))$  et  $(D(\sigma_j^c)G(\rho_j^3))$ .  $\square$

L’instance générée par la Construction 4 est une collection de chemins disjoints avec des obligations stables et 2-équilibrées. Chaque gadget d’élément (défini dans la Construction 2) représente un élément du problème  $RX3C$  et garantit le respect de la propriété d’unicité (Lemmes 1, 2 et 3), c’est-à-dire que chaque élément est couvert par exactement un triplet. Ces gadgets sont complétés par des gadgets de triplet (définis dans la Construction 3) pour garantir la propriété de totalité (Lemmes 4 et 5), c’est-à-dire que chaque triplet couvre soit tous ses éléments soit aucun. Ainsi, nous pouvons énoncer le théorème suivant.

**Théorème 4.** *Déterminer l’existence d’une solution pour le problème IDO est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet, même si le graphe est une collection de chemins disjoints et que les obligations sont stables et 2-équilibrées.*

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soient  $(G, \Pi)$  le graphe et les obligations associées suivant la Construc-

tion 4 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ .

Le problème *IDO* est clairement dans  $\mathcal{NP}$ . De plus, construire  $(G, \Pi)$  à partir de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est polynomial.

Supposons qu'il existe une solution  $S$  pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème *RX3C*. Construisons un Indépendant Dominant  $S'$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$  :

1. Pour chaque triplet  $c_j$  dans  $S$ , composé des éléments  $x_a, x_b$  et  $x_c$ , nous ajoutons les sommets des obligations  $\sigma_j^a, \sigma_j^b, \sigma_j^c$  et  $\rho_j^2$  dans  $S'$ .
2. Pour chaque triplet  $c_j$  dans  $C \setminus S$  nous ajoutons les sommets des obligations  $\rho_j^1$  et  $\rho_j^3$  dans  $S'$ .
3. Pour chaque sommet  $c_j^i$  dans  $S'$  nous ajoutons l'ensemble des sommets de  $S_j^i \setminus c_j^i$  (tel que défini dans le Lemme 2) dans  $S'$ .

L'ensemble de sommets indépendants  $S'$  contient un Indépendant Dominant respectant les Obligations pour chaque gadget d'élément et de triplet car  $S$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$  (cela nous garantit que pour chaque gadget d'élément, un seul ensemble  $S_j^i$  est pris dans  $S'$ ). Tous les sommets de  $G$  sont dominés et les obligations  $\Pi$  sont respectées.  $S'$  est un Indépendant Dominant de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$ .

Supposons qu'il existe un Indépendant Dominant  $S$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$ . Construisons une couverture exacte  $S'$  de  $\mathcal{X}$  :

1. Pour chaque sommet  $D(\rho_j^2)$  dans  $S$ , nous ajoutons le triplet  $c_j$  dans  $S'$  (nous savons grâce au Lemme 6 que la présence des sommets de l'obligation  $\rho_j^2$  dans un Indépendant Dominant indique la présence de tous les sommets représentant le triplet  $c_j$ ).

D'après les Lemmes 4, 5 et 6, chaque triplet de  $\mathcal{C}$  couvre soit tous ses éléments, soit aucun. D'après les Lemmes 1, 2 et 3, chaque élément de  $\mathcal{X}$  est couvert par exactement un triplet. Ainsi,  $S'$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$ .  $\square$

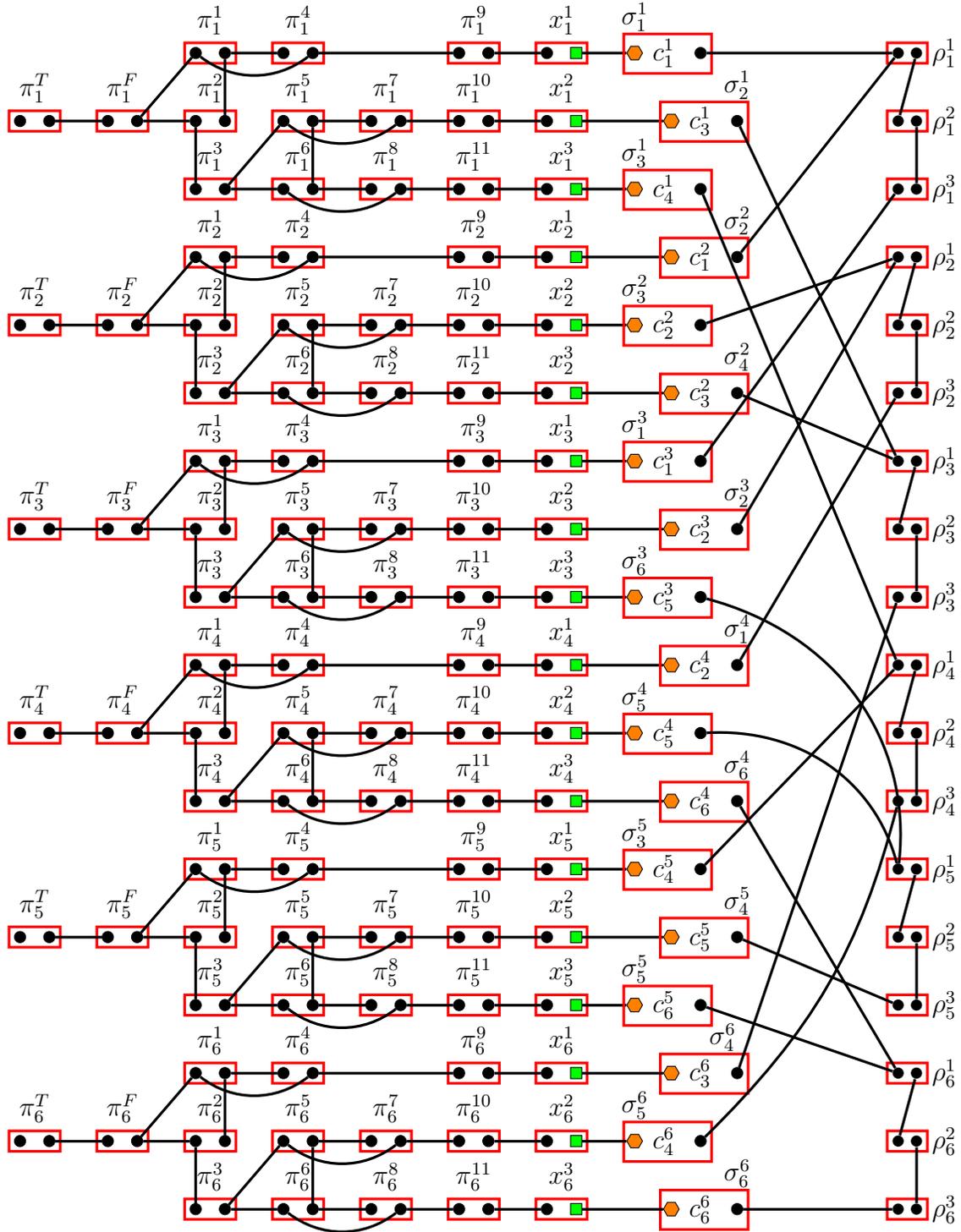


FIGURE 2.18 – Illustration de la Construction 4 pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$  et  $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ .

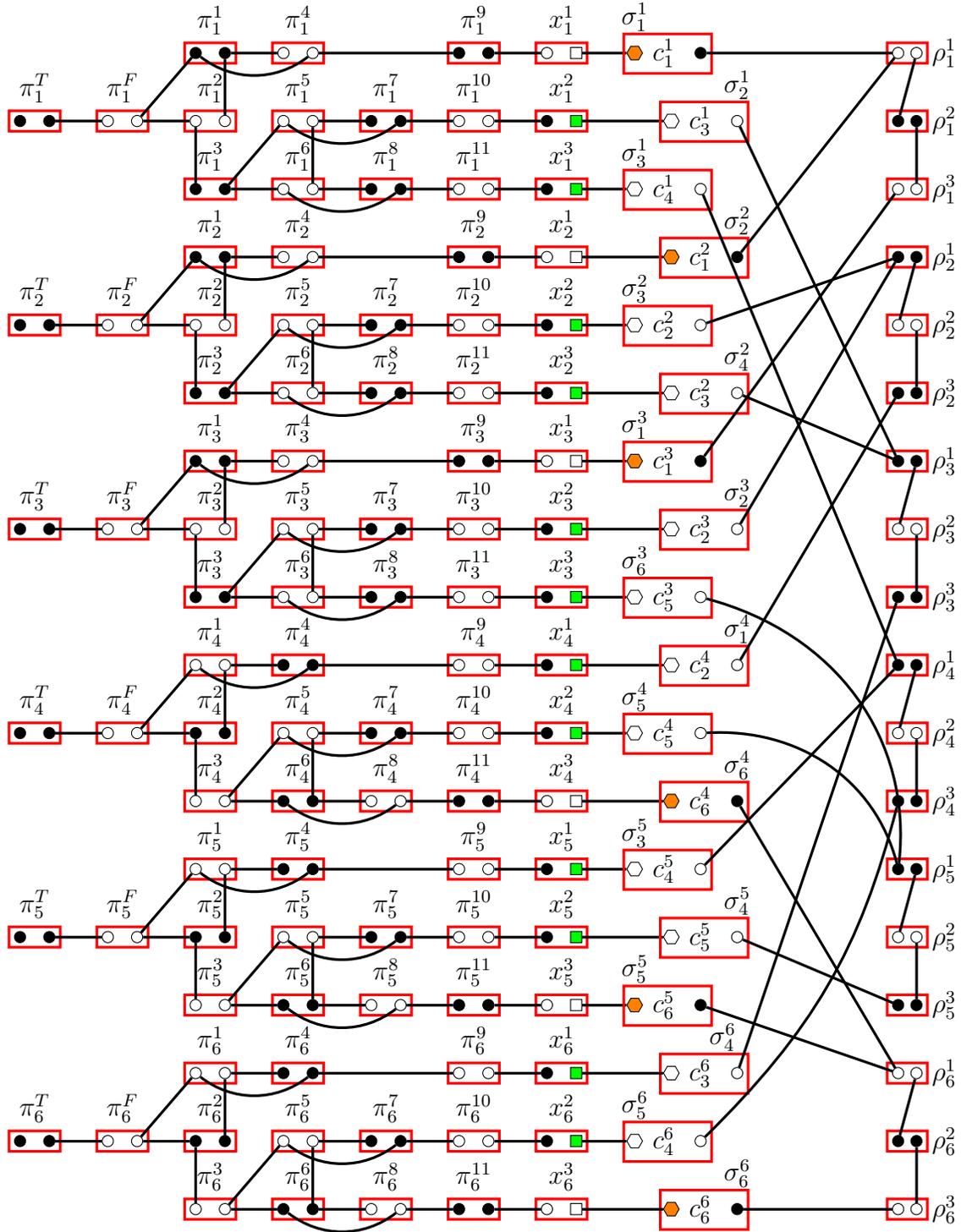


FIGURE 2.19 – Illustration d'un Indépendant Dominant pour l'instance  $(G, \Pi)$  suivant la Construction 4 depuis l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$  et  $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ .

## 2.2.2 Dans une collection de chemins avec des obligations $\lambda$ -équilibrées

**Carte 4.** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans une collection de chemins avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Théorème 5).

**Départ :** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans une collection de chemins avec des obligations stables et 2-équilibrées (Construction 4).

**Points d'étape :**

1. Création d'un gadget de duplication paire (Construction 5 - Lemme 7).
2. Création d'un gadget de duplication impaire (Construction 6 - Lemme 8).
3.  $\mathcal{NP}$ -complétude dans une collection de chemins avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Construction 7 - Théorème 5).

Une instance du problème *RX3C* est composée d'un univers  $\mathcal{X}$  contenant  $3q$  éléments et d'une collection  $\mathcal{C}$  de  $3q$  triplets de ces éléments. L'instance  $(G, \Pi)$  associée suivant la Construction 4 depuis l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est une collection de chemins contenant  $132q$  sommets,  $84q$  arêtes et  $66q$  obligations stables et 2-équilibrées. Pour étendre cette construction à des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$ , nous créons un *gadget de duplication paire* (Construction 5) et un *gadget de duplication impaire* (Construction 6). Ces gadgets permettent respectivement d'obtenir des obligations de taille  $\lambda = 2\kappa$  (pour tout  $\kappa$ ) et des obligations de taille  $\lambda + 1$  (depuis des obligations  $\lambda$ -équilibrées). Nous montrons alors que le gadget de duplication paire (Lemme 7) et le gadget de duplication impaire (Lemme 8) maintiennent la correspondance entre les instances  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  et  $(G, \Pi)$ . Le graphe obtenu à partir de ces gadgets (Construction 7) est une collection de chemins et les obligations sont stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$ . Nous concluons ainsi sur la  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème *IDO* (Théorème 5).

**Idée 5.** *La duplication pour  $\lambda$  pair.*

*Nous pouvons générer  $\frac{\lambda}{2}$  instances identiques  $I_1, \dots, I_{\frac{\lambda}{2}}$  du problème *IDO* à partir d'une instance du problème *RX3C*. Chaque instance est composée d'une collection de chemins et d'obligations stables et 2-équilibrées. Chaque paire d'instances ne partageant aucune arête, nous pouvons former une nouvelle instance  $I_\lambda$  en fusionnant les copies des obligations entre elles. Ainsi, nous avons une collection de chemins avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Grâce à cette fusion, l'Indépendant Dominant respectant les Obligations choisi dans une instance  $I_i$  est le même dans toutes les autres instances  $I_j$ . En prenant les sommets des mêmes obligations, nous obtenons alors une solution pour l'instance  $I_\lambda$ .*

**Construction 5.** *La duplication pour  $\lambda$  pair.*

*Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème *RX3C* avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda = 2\kappa$  une constante strictement positive paire. Nous construisons une instance  $(G = (V, E), \Pi)$  du problème *IDO* comme suit :*

- Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$  :

- Soient  $c_j, c_k, c_l \in \mathcal{C}$  avec  $j < k < l$  les trois triplets contenant l'élément  $x_i$ .
- Nous ajoutons seize obligations notées  $\pi_i^T, \pi_i^F, \pi_i^1, \dots, \pi_i^{11}, x_i^1, x_i^2$  et  $x_i^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants et de leurs copies. Dans chaque obligation  $\pi$  et  $x$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\pi)$  et  $D(\pi)$  ou  $G(x)$  et  $D(x)$ , ainsi que leurs copies respectives notées  $G_1(\pi), \dots, G_{\kappa-1}(\pi)$  et  $D_1(\pi), \dots, D_{\kappa-1}(\pi)$  ou  $G_1(x), \dots, G_{\kappa-1}(x)$  et  $D_1(x), \dots, D_{\kappa-1}(x)$ .
- Nous ajoutons les sommets  $c_j^i, c_k^i, c_l^i$  représentant les triplets contenant l'élément  $x_i$  ainsi que leurs copies respectives  $c_{j,1}^i, \dots, c_{j,\kappa-1}^i, c_{k,1}^i, \dots, c_{k,\kappa-1}^i$  et  $c_{l,1}^i, \dots, c_{l,\kappa-1}^i$ .
- L'ensemble des copies d'un sommet  $v$  est noté  $\Lambda(v)$ .
- Nous ajoutons les arêtes  $(D(\pi_i^T)G(\pi_i^F)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^1)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^2)), (G(\pi_i^1)D(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)G(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)D(\pi_i^2)), (G(\pi_i^2)G(\pi_i^3)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^5)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^6)), (D(\pi_i^4)G(\pi_i^9)), (G(\pi_i^5)D(\pi_i^7)), (D(\pi_i^5)D(\pi_i^6)), (D(\pi_i^5)G(\pi_i^7)), (G(\pi_i^6)D(\pi_i^8)), (D(\pi_i^6)G(\pi_i^8)), (D(\pi_i^7)G(\pi_i^{10})), (D(\pi_i^8)G(\pi_i^{11})), (D(\pi_i^9)G(x_i^1)), (D(\pi_i^{10})G(x_i^2)), (D(\pi_i^{11})G(x_i^3)), (D(x_i^1)c_j^i), (D(x_i^2)c_k^i) et  $(D(x_i^3)c_l^i)$ .$
- Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\pi_i^T)G_\iota(\pi_i^F)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^1)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^2)), (G_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^4)), (D_\iota(\pi_i^1)G_\iota(\pi_i^4)), (D_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^2)), (G_\iota(\pi_i^2)G_\iota(\pi_i^3)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^5)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^4)G_\iota(\pi_i^9)), (G_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^7)), (D_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^5)G_\iota(\pi_i^7)), (G_\iota(\pi_i^6)D_\iota(\pi_i^8)), (D_\iota(\pi_i^6)G_\iota(\pi_i^8)), (D_\iota(\pi_i^7)G_\iota(\pi_i^{10})), (D_\iota(\pi_i^8)G_\iota(\pi_i^{11})), (D_\iota(\pi_i^9)G_\iota(x_i^1)), (D_\iota(\pi_i^{10})G_\iota(x_i^2)), (D_\iota(\pi_i^{11})G_\iota(x_i^3)), (D_\iota(x_i^1)c_{j,\iota}^i), (D_\iota(x_i^2)c_{k,\iota}^i) et  $(D_\iota(x_i^3)c_{l,\iota}^i)$ .$
- Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$  :
  - Soient  $x_a, x_b, x_c \in \mathcal{X}$  les trois éléments du triplet  $c_j$ . Soient  $c_j^a, c_j^b$  et  $c_j^c$  les trois sommets-triplet tels qu'ils ont été créés précédemment, ainsi que  $c_{j,\iota}^a, c_{j,\iota}^b$  et  $c_{j,\iota}^c$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ) leurs copies respectives.
  - Nous ajoutons trois obligations notées  $\sigma_j^a, \sigma_j^b$  et  $\sigma_j^c$ , composées respectivement des sommets  $c_j^a$  et  $\Lambda(c_j^a), c_j^b$  et  $\Lambda(c_j^b)$  ou  $c_j^c$  et  $\Lambda(c_j^c)$  ainsi que d'un sommet droit noté respectivement  $D(\sigma_j^a), D(\sigma_j^b)$  et  $D(\sigma_j^c)$  et de copies de ce sommet droit notées respectivement  $D_\iota(\sigma_j^a), D_\iota(\sigma_j^b)$  et  $D_\iota(\sigma_j^c)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ).
  - Nous ajoutons trois obligations notées  $\rho_j^1, \rho_j^2$  et  $\rho_j^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants. Dans chaque obligation  $\rho$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\rho)$  et  $D(\rho)$  ainsi que leurs copies respectives  $G_\iota(\rho)$  et  $D_\iota(\rho)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ).
  - Nous ajoutons les arêtes  $(D(\sigma_j^a)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^b)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^c)G(\rho_j^3)), (D(\rho_j^1)G(\rho_j^2))$  et  $(D(\rho_j^2)D(\rho_j^3))$ .
  - Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\sigma_j^a)G_\iota(\rho_j^1)), (D_\iota(\sigma_j^b)G_\iota(\rho_j^1)), (D_\iota(\sigma_j^c)G_\iota(\rho_j^3)), (D_\iota(\rho_j^1)G_\iota(\rho_j^2))$  et  $(D_\iota(\rho_j^2)D_\iota(\rho_j^3))$ .

Pour un élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de seize obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Pour un triplet  $c_j \in \mathcal{C}$ , le gadget

associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de six obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Ainsi, l'instance générée à partir du problème  $RX3C$  contient  $66q\lambda$  sommets,  $42q\lambda$  arêtes et  $66q$  obligations. La Construction 5 est illustrée en deux parties. Dans la Figure 2.20 nous illustrons les nouveaux gadgets d'élément, tandis que dans la Figure 2.21 nous illustrons les nouveaux gadgets de triplet. Un exemple de solution pour un gadget d'élément est illustré dans la Figure 2.22. Un exemple de solution pour un gadget de triplet est illustré dans la Figure 2.23.

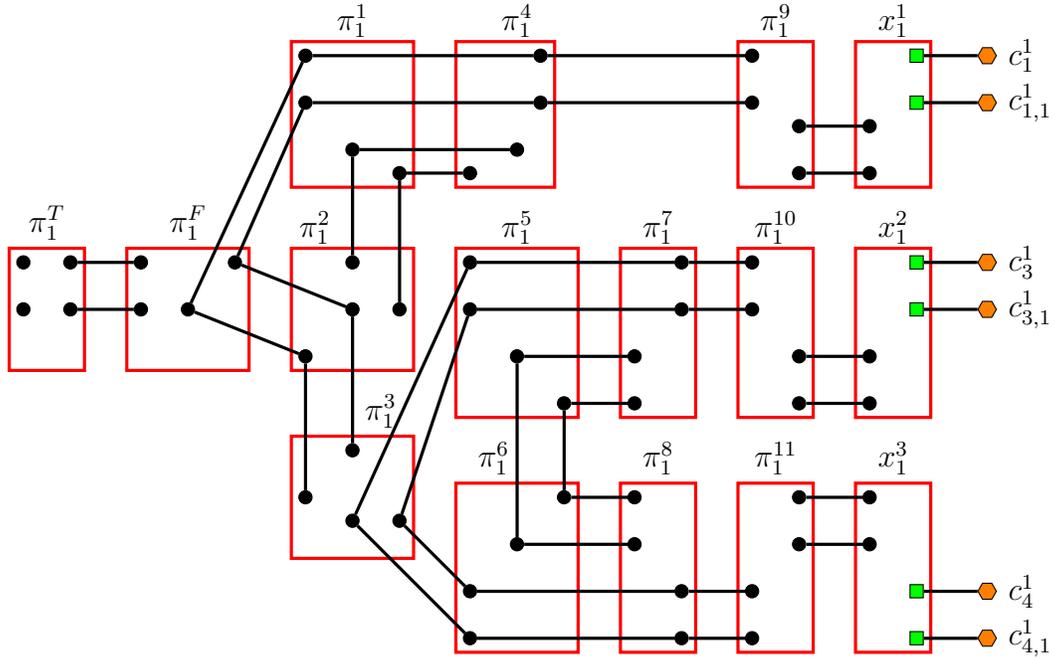


FIGURE 2.20 – Illustration de la Construction 5 avec  $\lambda = 4$  pour l'élément 1 de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$  et  $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ .

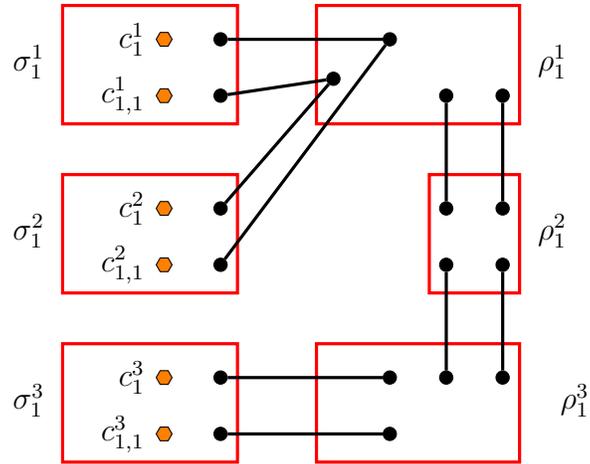


FIGURE 2.21 – Illustration de la Construction 5 avec  $\lambda = 4$  pour le triplet  $c_1$  de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$  et  $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ .

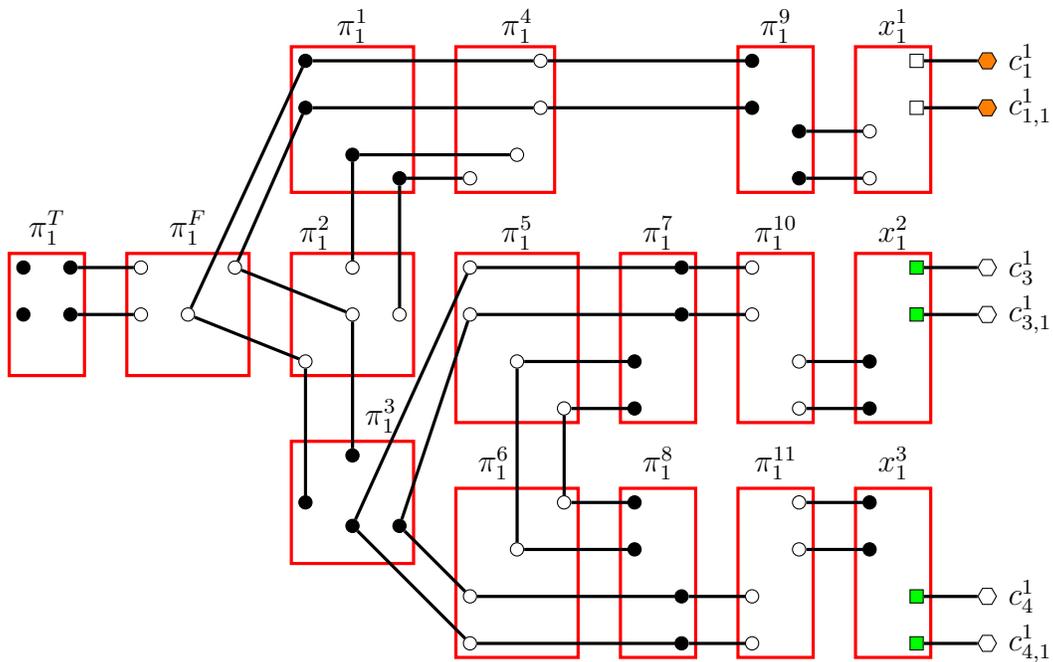


FIGURE 2.22 – Illustration d'un Indépendant Dominant  $S$  pour l'exemple représenté dans la Figure 2.20. Les sommets de  $S$  sont représentés pleins.

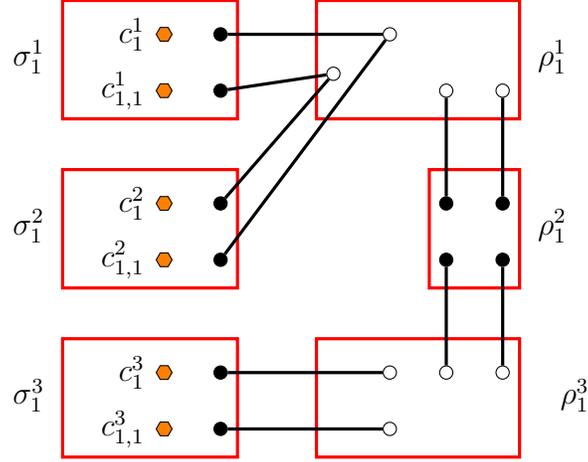


FIGURE 2.23 – Illustration d'un Indépendant Dominant  $S$  pour l'exemple représenté dans la Figure 2.21. Les sommets de  $S$  sont représentés pleins.

**Lemme 7.** Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda$  un entier pair strictement positif. Soient  $(G, \Pi)$  le graphe et les obligations obtenues en suivant la Construction 4 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ . Soient  $(G_\Lambda, \Pi_\Lambda)$  le graphe et les obligations obtenues en suivant la Construction 5 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \lambda)$ .

Il existe un Indépendant Dominant  $S$  de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$  si et seulement si il existe un Indépendant Dominant  $S_\Lambda$  de  $G_\Lambda$  respectant les Obligations  $\Pi_\Lambda$ .

*Démonstration.* Toutes les obligations de l'instance  $(G, \Pi)$  sont présentes dans l'instance  $(G_\Lambda, \Pi_\Lambda)$ . Supposons qu'il existe un Indépendant Dominant  $S$  de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$ . Construisons un Indépendant Dominant  $S_\Lambda$  de  $G_\Lambda$  respectant les Obligations  $\Pi_\Lambda$ . Soient  $\Pi_S$  toutes les obligations ayant au moins un sommet dans  $S$ . Pour chaque obligation dans  $\Pi_S$ , nous ajoutons tous les sommets de la même obligation dans  $S_\Lambda$  en respectant les Obligations  $\Pi_\Lambda$ . Par construction,  $S_\Lambda$  est un Indépendant Dominant de  $G_\Lambda$  respectant les Obligations  $\Pi_\Lambda$ .

Supposons qu'il existe un Indépendant Dominant  $S_\Lambda$  de  $G_\Lambda$  respectant les Obligations  $\Pi_\Lambda$ . Construisons un Indépendant Dominant  $S$  de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$ . De manière analogue,  $G$  est inclus dans  $G_\Lambda$ , mais ne partage aucune arête avec  $G_\Lambda \setminus G$  dans  $G_\Lambda$ . Ainsi  $S_\Lambda \setminus V(G_\Lambda \setminus G)$  est un Indépendant Dominant de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$ .  $\square$

**Idée 6.** La duplication pour  $\lambda = 3$ .

En suivant la Construction 4, les obligations sont stables et 2-équilibrées. Nous ajoutons alors un nouveau sommet dans chaque obligation. Les liens entre les sommets (par des arêtes et des obligations) maintiennent les propriétés d'unicité et de totalité dans l'instance. Nous ajoutons ainsi un nouveau sommet dans chaque obligation en ne vérifiant que la possibilité de les dominer dans tous les Indépendants Dominants possibles respectant les Obligations. Par exemple, pour chaque triplet  $c_j$  de  $\mathcal{C}$  nous savons qu'il y a toujours les sommets de l'obligation  $\pi_j^9$  ou de l'obligation  $x_j^1$  dans une solution. Nous pouvons alors

relier par une arête le nouveau sommet de l'obligation  $\pi_j^9$  avec le nouveau sommet de l'obligation  $x_j^1$ .

**Construction 6.** La duplication pour augmenter la taille des obligations de un.

Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ .

Nous construisons une instance  $(G = (V, E), \Pi)$  du problème  $IDO$  comme suit :

- Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$  :
  - Soient  $c_j, c_k, c_l \in \mathcal{C}$  avec  $j < k < l$  les trois triplets contenant l'élément  $x_i$ .
  - Nous ajoutons seize obligations notées  $\pi_i^T, \pi_i^F, \pi_i^1, \dots, \pi_i^{11}, x_i^1, x_i^2$  et  $x_i^3$ , chacune composée de trois sommets indépendants. Dans chaque obligation  $\pi$  et  $x$  nous considérons un sommet gauche, un sommet droit et un sommet bis respectivement notés  $G(\pi)$ ,  $D(\pi)$  et  $B(\pi)$  ou  $G(x)$ ,  $D(x)$  et  $B(x)$ .
  - Nous ajoutons les sommets  $c_j^i, c_k^i$  et  $c_l^i$  représentant les triplets contenant l'élément  $x_i$ .
  - Nous ajoutons les arêtes  $(D(\pi_i^T)G(\pi_i^F)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^1)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^2)), (G(\pi_i^1)D(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)G(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)D(\pi_i^2)), (G(\pi_i^2)G(\pi_i^3)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^5)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^6)), (D(\pi_i^4)G(\pi_i^9)), (G(\pi_i^5)D(\pi_i^7)), (D(\pi_i^5)D(\pi_i^6)), (D(\pi_i^5)G(\pi_i^7)), (G(\pi_i^6)D(\pi_i^8)), (D(\pi_i^6)G(\pi_i^8)), (D(\pi_i^7)G(\pi_i^{10})), (D(\pi_i^8)G(\pi_i^{11})), (D(\pi_i^9)G(x_i^1)), (D(\pi_i^{10})G(x_i^2)), (D(\pi_i^{11})G(x_i^3)), (D(x_i^1)c_j^i), (D(x_i^2)c_k^i) et  $(D(x_i^3)c_l^i)$ .$
  - Nous ajoutons les arêtes  $(B(\pi_i^T)B(\pi_i^F)), (B(\pi_i^1)B(\pi_i^2)), (B(\pi_i^1)B(\pi_i^4)), (B(\pi_i^3)B(\pi_i^5)), (B(\pi_i^3)B(\pi_i^6)), (B(\pi_i^5)B(\pi_i^7)), (B(\pi_i^6)B(\pi_i^8)), (B(\pi_i^9)B(x_i^1)), (B(\pi_i^{10})B(x_i^2)) et  $(B(\pi_i^{11})B(x_i^3))$ .$
- Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$  :
  - Soient  $x_a, x_b, x_c \in \mathcal{X}$  les trois éléments du triplet  $c_j$ . Soient  $c_j^a, c_j^b$  et  $c_j^c$  les trois sommets-triplet tels qu'ils ont été créés précédemment.
  - Nous ajoutons trois obligations notées  $\sigma_j^a, \sigma_j^b$  et  $\sigma_j^c$ , composées respectivement du sommet  $c_j^a, c_j^b$  ou  $c_j^c$  ainsi que d'un sommet droit et d'un sommet bis notés respectivement  $D(\sigma_j^a)$  et  $B(\sigma_j^a)$ ,  $D(\sigma_j^b)$  et  $B(\sigma_j^b)$  et  $D(\sigma_j^c)$  et  $B(\sigma_j^c)$ .
  - Nous ajoutons trois obligations notées  $\rho_j^1, \rho_j^2$  et  $\rho_j^3$ , chacune composée de trois sommets indépendants. Dans chaque obligation  $\rho$  nous considérons un sommet gauche, un sommet droit et un sommet bis respectivement notés  $G(\rho)$ ,  $D(\rho)$  et  $B(\rho)$ .
  - Nous ajoutons les arêtes  $(D(\sigma_j^a)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^b)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^c)G(\rho_j^3)), (D(\rho_j^1)G(\rho_j^2)) et  $(D(\rho_j^2)D(\rho_j^3))$ .$
  - Nous ajoutons les arêtes  $(B(\sigma_j^a)B(\rho_j^1)), (B(\sigma_j^b)B(\rho_j^1)), (B(\sigma_j^c)B(\rho_j^3)) et  $(B(\rho_j^2)B(\rho_j^3))$ .$

Pour un élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de seize obligations stables et 3-équilibrées. Pour un triplet  $c_j \in \mathcal{C}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de six obligations stables et 3-équilibrées. Ainsi, l'instance générée à partir du problème  $RX3C$  contient  $198q$  sommets,

126 $q$  arêtes et 66 $q$  obligations. La Construction 6 est illustrée en deux parties. Dans la Figure 2.24 nous illustrons les nouveaux sommets et les nouvelles arêtes des nouveaux gadgets d'élément, tandis que dans la Figure 2.25 nous illustrons les nouveaux sommets et les nouvelles arêtes des nouveaux gadgets de triplet. Les gadgets d'élément et de triplet dans le cas d'obligations 3-équilibrées sont illustrés avec tous leurs sommets et arêtes dans les Figures 2.26 et 2.27. Un exemple de solution pour un gadget d'élément est illustré dans la Figure 2.28. Un exemple de solution pour un gadget de triplet est illustré dans la Figure 2.29.

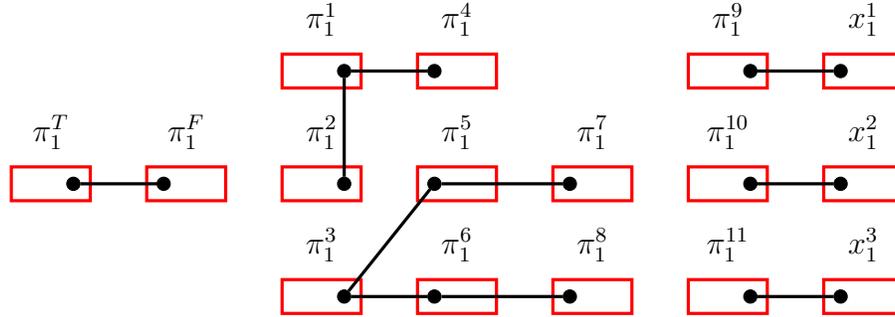


FIGURE 2.24 – Illustration des nouvelles entités de la Construction 6 pour l'élément 1 de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$  et  $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ .

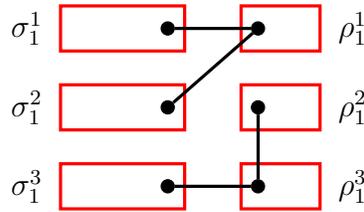


FIGURE 2.25 – Illustration des nouvelles entités de la Construction 6 pour le triplet  $c_1$  de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$  et  $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ .

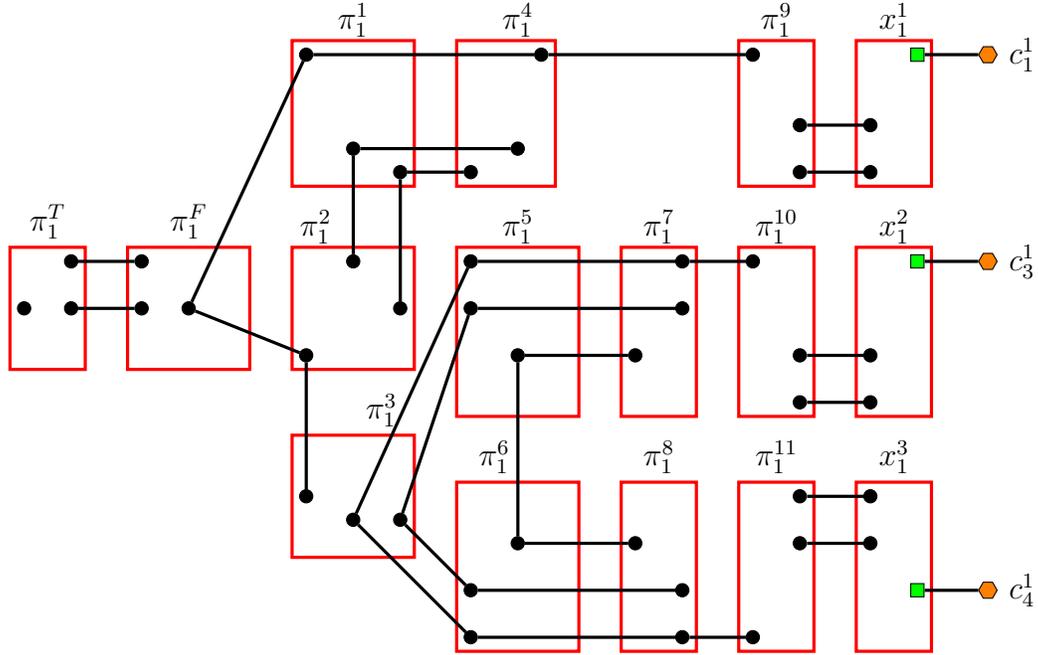


FIGURE 2.26 – Illustration de la Construction 6 pour l'élément 1 de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$  et  $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ .

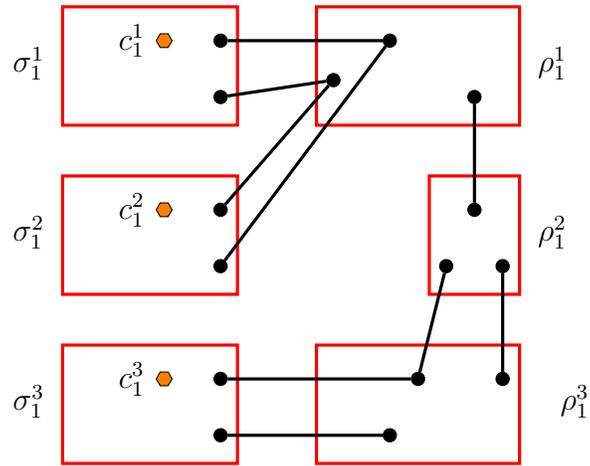


FIGURE 2.27 – Illustration de la Construction 6 pour le triplet  $c_1$  de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$  et  $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ .

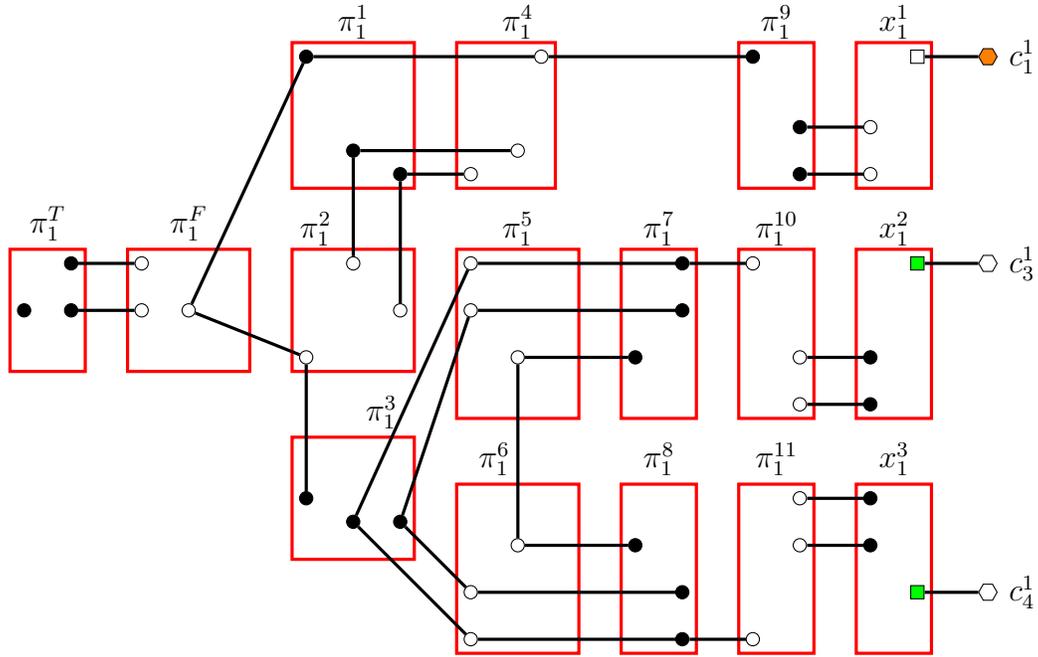


FIGURE 2.28 – Illustration d'un Indépendant Dominant  $S$  pour l'exemple représenté dans la Figure 2.26. Les sommets de  $S$  sont représentés pleins.

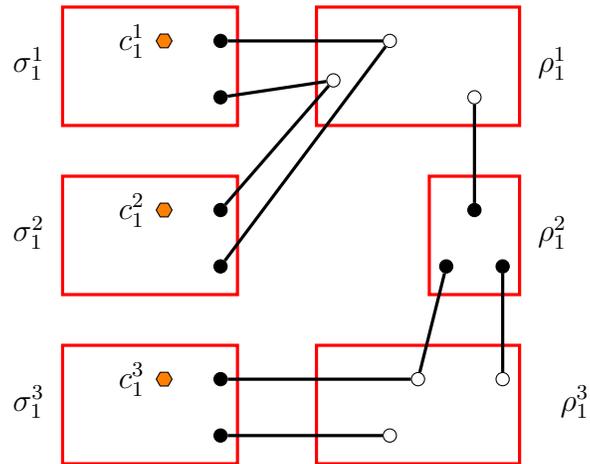


FIGURE 2.29 – Illustration d'un Indépendant Dominant  $S$  pour l'exemple représenté dans la Figure 2.27. Les sommets de  $S$  sont représentés pleins.

**Lemme 8.** Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soient  $(G, \Pi)$  le graphe et les obligations obtenues en suivant la Construction 4 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ . Soient  $(G_\Lambda, \Pi_\Lambda)$  le graphe et les obligations obtenues en suivant la Construction 6 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ .

Il existe un Indépendant Dominant  $S$  de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$  si et seulement si il existe un Indépendant Dominant  $S_\Lambda$  de  $G_\Lambda$  respectant les Obligations  $\Pi_\Lambda$ .

*Démonstration.* Supposons qu'il existe un Indépendant Dominant  $S$  de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$ . Construisons un Indépendant Dominant  $S_\Lambda$  de  $G_\Lambda$  respectant les Obligations  $\Pi_\Lambda$ . Soient  $\Pi_S$  toutes les obligations ayant au moins un sommet dans  $S$ . Pour chaque obligation dans  $\Pi_S$ , nous ajoutons les sommets de la même obligation dans  $S_\Lambda$  en respectant les Obligations  $\Pi_\Lambda$ . Par construction,  $S_\Lambda$  est un Indépendant Dominant de  $G_\Lambda$  respectant les Obligations  $\Pi_\Lambda$ .

Supposons qu'il existe un Indépendant Dominant  $S_\Lambda$  de  $G_\Lambda$  respectant les Obligations  $\Pi_\Lambda$ . Construisons un Indépendant Dominant  $S$  de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$ . Toutes les obligations de l'instance  $(G, \Pi)$  sont présentes dans l'instance  $(G_\Lambda, \Pi_\Lambda)$ . Toutes les obligations de  $\Pi_\Lambda$  ont chacune trois sommets (deux sommets présent dans l'obligation équivalente de  $\Pi$  et un nouveau sommet). Aucune arête ne relie les sommets de  $G$  et de  $G_\Lambda \setminus G$  dans  $G_\Lambda$ . Ainsi  $S_\Lambda$  est composé d'au moins deux composantes indépendantes  $S_\Lambda^1$  et  $S$  : l'une ne possède que des sommets de  $G_\Lambda \setminus G$  et l'autre ne possède que des sommets de  $G$ . Par conséquent et par définition de  $S_\Lambda$ , l'ensemble  $S$  est un Indépendant Dominant de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$ .  $\square$

**Idée 7.** La duplication pour tout  $\lambda \geq 2$ .

Nous avons vu comment construire des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour tout  $\lambda$  pair (Construction 5) et pour  $\lambda$  qui vaut trois (Construction 6). Pour une taille quelconque  $\lambda$ , nous avons deux cas. Si  $\lambda$  est pair, nous appliquons la procédure de la Construction 5. Si  $\lambda$  est impair, nous appliquons la procédure précédente pour  $\lambda - 1$  puis nous ajoutons un sommet par obligation et des arêtes bien choisies pour chaque gadget d'élément et de triplet, tout en conservant les propriétés d'unicité et de totalité, suivant le modèle de la Construction 6.

**Construction 7.** La duplication pour tout  $\lambda \geq 2$ .

Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda = 2\kappa + \beta$  un entier avec  $\kappa \geq 1$  et  $\beta \in \{0, 1\}$ . Nous construisons une instance  $(G = (V, E), \Pi)$  du problème  $IDO$  comme suit :

- Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$  :
  - Soient  $c_j, c_k, c_l \in \mathcal{C}$  avec  $j < k < l$  les trois triplets contenant l'élément  $x_i$ .
  - Nous ajoutons seize obligations notées  $\pi_i^T, \pi_i^F, \pi_i^1, \dots, \pi_i^{11}, x_i^1, x_i^2$  et  $x_i^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants et de leurs copies éventuelles. Dans chaque obligation  $\pi$  et  $x$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\pi)$  et  $D(\pi)$  ou  $G(x)$  et  $D(x)$ , ainsi que leurs copies respectives notées  $G_1(\pi), \dots, G_{\kappa-1}(\pi)$  et  $D_1(\pi), \dots, D_{\kappa-1}(\pi)$  ou  $G_1(x), \dots, G_{\kappa-1}(x)$  et  $D_1(x), \dots, D_{\kappa-1}(x)$ . Si  $\beta = 1$  alors nous ajoutons

également un sommet bis noté  $B(\pi)$  dans chaque obligation  $\pi$  et un sommet bis noté  $B(x)$  dans chaque obligation  $x$ .

- Nous ajoutons les sommets  $c_j^i, c_k^i, c_l^i$  représentant les triplets contenant l'élément  $x_i$  ainsi que leurs copies respectives  $c_{j,1}^i, \dots, c_{j,\kappa-1}^i, c_{k,1}^i, \dots, c_{k,\kappa-1}^i$  et  $c_{l,1}^i, \dots, c_{l,\kappa-1}^i$ .
- L'ensemble des copies d'un sommet  $v$  est noté  $\Lambda(v)$ .
- Nous ajoutons les arêtes  $(D(\pi_i^T)G(\pi_i^F)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^1)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^2)), (G(\pi_i^1)D(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)G(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)D(\pi_i^2)), (G(\pi_i^2)G(\pi_i^3)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^5)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^6)), (D(\pi_i^4)G(\pi_i^9)), (G(\pi_i^5)D(\pi_i^7)), (D(\pi_i^5)D(\pi_i^6)), (D(\pi_i^5)G(\pi_i^7)), (G(\pi_i^6)D(\pi_i^8)), (D(\pi_i^6)G(\pi_i^8)), (D(\pi_i^7)G(\pi_i^{10})), (D(\pi_i^8)G(\pi_i^{11})), (D(\pi_i^9)G(x_i^1)), (D(\pi_i^{10})G(x_i^2)), (D(\pi_i^{11})G(x_i^3)), (D(x_i^1)c_j^i), (D(x_i^2)c_k^i) et  $(D(x_i^3)c_l^i)$ .$
- Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\pi_i^T)G_\iota(\pi_i^F)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^1)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^2)), (G_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^4)), (D_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^2)), (G_\iota(\pi_i^2)G_\iota(\pi_i^3)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^5)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^4)G_\iota(\pi_i^9)), (G_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^7)), (D_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^5)G_\iota(\pi_i^7)), (G_\iota(\pi_i^6)D_\iota(\pi_i^8)), (D_\iota(\pi_i^6)G_\iota(\pi_i^8)), (D_\iota(\pi_i^7)G_\iota(\pi_i^{10})), (D_\iota(\pi_i^8)G_\iota(\pi_i^{11})), (D_\iota(\pi_i^9)G_\iota(x_i^1)), (D_\iota(\pi_i^{10})G_\iota(x_i^2)), (D_\iota(\pi_i^{11})G_\iota(x_i^3)), (D_\iota(x_i^1)c_{j,\iota}^i), (D_\iota(x_i^2)c_{k,\iota}^i) et  $(D_\iota(x_i^3)c_{l,\iota}^i)$ .$
- Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(B(\pi_i^T)B(\pi_i^F)), (B(\pi_i^1)B(\pi_i^2)), (B(\pi_i^1)B(\pi_i^4)), (B(\pi_i^3)B(\pi_i^5)), (B(\pi_i^3)B(\pi_i^6)), (B(\pi_i^5)B(\pi_i^7)), (B(\pi_i^6)B(\pi_i^8)), (B(\pi_i^9)B(x_i^1)), (B(\pi_i^{10})B(x_i^2))$  et  $(B(\pi_i^{11})B(x_i^3))$ .
- Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$  :
  - Soient  $x_a, x_b, x_c \in \mathcal{X}$  les trois éléments du triplet  $c_j$ . Soient  $c_j^a, c_j^b$  et  $c_j^c$  les trois sommets-triplet tels qu'ils ont été créés précédemment, ainsi que  $c_{j,\iota}^a, c_{j,\iota}^b$  et  $c_{j,\iota}^c$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ) leurs copies respectives éventuelles.
  - Nous ajoutons trois obligations notées  $\sigma_j^a, \sigma_j^b$  et  $\sigma_j^c$ , composées respectivement des sommets  $c_j^a$  et  $\Lambda(c_j^a), c_j^b$  et  $\Lambda(c_j^b)$  ou  $c_j^c$  et  $\Lambda(c_j^c)$  ainsi que d'un sommet droit noté respectivement  $D(\sigma_j^a), D(\sigma_j^b)$  et  $D(\sigma_j^c)$  et de copies de ce sommet droit notées respectivement  $D_\iota(\sigma_j^a), D_\iota(\sigma_j^b)$  et  $D_\iota(\sigma_j^c)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ). Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons un sommet bis noté  $B(\sigma_j^a)$  dans l'obligation  $\sigma_j^a$ , un sommet bis noté  $B(\sigma_j^b)$  dans l'obligation  $\sigma_j^b$  et un sommet bis noté  $B(\sigma_j^c)$  dans l'obligation  $\sigma_j^c$ .
  - Nous ajoutons trois obligations notées  $\rho_j^1, \rho_j^2$  et  $\rho_j^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants et de leurs copies éventuelles. Dans chaque obligation  $\rho$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\rho)$  et  $D(\rho)$  ainsi que leurs copies respectives  $G_\iota(\rho)$  et  $D_\iota(\rho)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ). Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons un sommet bis noté  $B(\rho_j^1)$  dans l'obligation  $\rho_j^1$ , un sommet bis noté  $B(\rho_j^2)$  dans l'obligation  $\rho_j^2$  et un sommet bis noté  $B(\rho_j^3)$  dans l'obligation  $\rho_j^3$ .
  - Nous ajoutons les arêtes  $(D(\sigma_j^a)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^b)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^c)G(\rho_j^3)), (D(\rho_j^1)G(\rho_j^2))$  et  $(D(\rho_j^2)D(\rho_j^3))$ .
  - Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\sigma_j^a)G_\iota(\rho_j^1)), (D_\iota(\sigma_j^b)G_\iota(\rho_j^1)), (D_\iota(\sigma_j^c)G_\iota(\rho_j^3)), (D_\iota(\rho_j^1)G_\iota(\rho_j^2))$  et  $(D_\iota(\rho_j^2)D_\iota(\rho_j^3))$ .

- Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(B(\sigma_j^a)B(\rho_j^1))$ ,  $(B(\sigma_j^b)B(\rho_j^1))$ ,  $(B(\sigma_j^c)B(\rho_j^3))$  et  $(B(\rho_j^2)B(\rho_j^3))$ .

Pour un élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de seize obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Pour un triplet  $c_j \in \mathcal{C}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de six obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Ainsi, l'instance générée à partir du problème  $RX3C$  contient  $66q\lambda$  sommets,  $42q\lambda$  arêtes et  $66q$  obligations.

**Théorème 5.** *Déterminer l'existence d'une solution pour le problème  $IDO$  est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet, même si le graphe est une collection de chemins disjoints et que les obligations sont stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$ .*

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda = 2\kappa + \beta$  un entier avec  $\kappa \geq 1$  et  $\beta \in \{0, 1\}$ . Soient  $(G, \Pi)$  le graphe et les obligations associées suivant la Construction 7 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \lambda)$ .

Le problème  $IDO$  est clairement dans  $\mathcal{NP}$ . De plus, construire  $(G, \Pi)$  à partir de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est polynomial.

Supposons qu'il existe une solution  $S$  pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$ . Construisons un Indépendant Dominant  $S'$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$  :

1. Pour chaque triplet  $c_j$  dans  $S$ , composé des éléments  $x_a, x_b$  et  $x_c$ , nous ajoutons les sommets des obligations  $\sigma_j^a, \sigma_j^b, \sigma_j^c$  et  $\rho_j^2$  dans  $S'$ .
2. Pour chaque triplet  $c_j$  dans  $\mathcal{C} \setminus S$  nous ajoutons les sommets des obligations  $\rho_j^1$  et  $\rho_j^3$  dans  $S'$ .
3. Pour chaque sommet  $c_j^i$  dans  $S'$  nous ajoutons l'ensemble des sommets de  $S_j^i \setminus c_j^i$  (tel que défini dans le Lemme 2) dans  $S'$ .

L'ensemble de sommets indépendants  $S'$  contient un Indépendant Dominant respectant les Obligations pour chaque gadget d'élément et de triplet car  $S$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$  (cela nous garantit que pour chaque gadget d'élément, un seul ensemble  $S_j^i$  est pris dans  $S'$ ). Tous les sommets de  $G$  sont dominés et les obligations  $\Pi$  sont respectées.  $S'$  est un Indépendant Dominant de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$ .

Supposons qu'il existe un Indépendant Dominant  $S$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$ . Construisons une couverture exacte  $S'$  de  $\mathcal{X}$  :

1. Pour chaque sommet  $D(\rho_j^2)$  dans  $S$ , nous ajoutons le triplet  $c_j$  dans  $S'$  (nous savons grâce au Lemme 6 que la présence des sommets de l'obligation  $\rho_j^2$  dans un Indépendant Dominant indique la présence de tous les sommets représentant le triplet  $c_j$ ).

D'après les Lemmes 4, 5 et 6, chaque triplet de  $\mathcal{C}$  couvre soit tous ses éléments, soit aucun. D'après les Lemmes 1, 2 et 3, chaque élément de  $\mathcal{X}$  est couvert par exactement un triplet. Ainsi,  $S'$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$ .  $\square$

### 2.2.3 Dans un chemin avec des obligations $\lambda$ -équilibrées

**Carte 5.** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un chemin (unique) avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Théorème 6).

**Départ :** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans une collection de chemins avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Construction 7).

**Points d'étape :**

1. Création d'un gadget de connecteur neutre (Construction 8 - Lemme 9).
2.  $\mathcal{NP}$ -complétude dans un unique chemin avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Construction 9 - Théorème 6).

Une instance du problème *RX3C* est composée d'un univers  $\mathcal{X}$  contenant  $3q$  éléments et d'une collection  $\mathcal{C}$  de  $3q$  triplets de ces éléments. L'instance  $(G, \Pi)$  associée suivant la Construction 7 depuis l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est une collection de chemins contenant  $66q\lambda$  sommets,  $42q\lambda$  arêtes et  $66q$  obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Pour étendre cette construction à un unique chemin, nous créons un *gadget de connecteur neutre* (Construction 8). Ce gadget permet de rassembler deux composantes connexes disjointes en une seule. Nous montrons alors que le gadget de connecteur neutre (Lemme 9) maintient la correspondance entre les instances  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  et  $(G, \Pi)$ , c'est-à-dire qu'il ne modifie pas l'existence d'une solution au problème *IDO*. Le graphe obtenu à partir de ce gadget (Construction 9) est un unique chemin avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$ . Nous concluons ainsi sur la  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème *IDO* (Théorème 6).

**Idée 8.** *Le gadget de connecteur neutre.*

*Ce gadget est un chemin réparti en trois obligations de telle sorte que si un sommet extérieur  $v$  est connecté à l'une des extrémités de son chemin  $\varphi$ , alors  $v$  ne pourra pas être dominé par  $\varphi$ . Ce gadget admet un unique Indépendant Dominant qui respecte les Obligations associées.*

**Construction 8.** *Le gadget de connecteur neutre.*

*Soit  $\lambda \geq 2$  un entier. Nous construisons le gadget connecteur neutre composé d'un graphe  $G_{\text{neutre}} = (V_{\text{neutre}}, E_{\text{neutre}})$  et d'obligations  $\Pi_{\text{neutre}}$  comme suit :*

- *Nous ajoutons un chemin  $\varphi_1, \dots, \varphi_{3\lambda}$ .*
- *Nous ajoutons trois obligations  $\Phi_1, \Phi_2$  et  $\Phi_3$ , composées respectivement des sommets  $\varphi_1, \varphi_3$  et  $\varphi_{3\lambda-3}, \varphi_2$  et  $\varphi_{3\lambda-1}$  ou  $\varphi_4, \varphi_{3\lambda-2}$  et  $\varphi_{3\lambda}$ .*
- *Pour chaque sommet  $\varphi_i \in \{\varphi_5, \dots, \varphi_{3\lambda-4}\}$  :*
  - *Si  $i \pmod{3} = 0$ , nous ajoutons le sommet  $\varphi_i$  dans l'obligation  $\Phi_1$ .*
  - *Si  $i \pmod{3} = 2$ , nous ajoutons le sommet  $\varphi_i$  dans l'obligation  $\Phi_2$ .*
  - *Si  $i \pmod{3} = 1$ , nous ajoutons le sommet  $\varphi_i$  dans l'obligation  $\Phi_3$ .*

L'instance générée à partir d'une constante  $\lambda$  contient  $3\lambda$  sommets,  $3\lambda - 1$  arêtes et 3 obligations. La Construction 8 est illustrée dans les Figures 2.30 et 2.31.

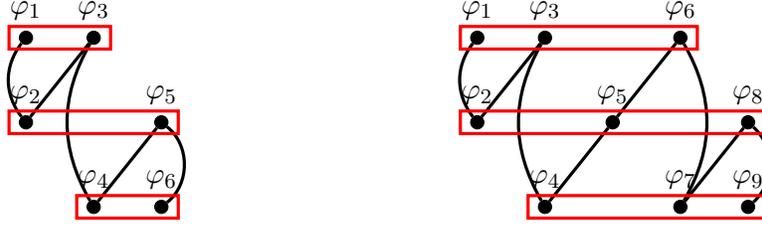


FIGURE 2.30 – Illustration de la Construction 8 pour un connecteur neutre avec  $\lambda = 2$  à gauche et  $\lambda = 3$  à droite.

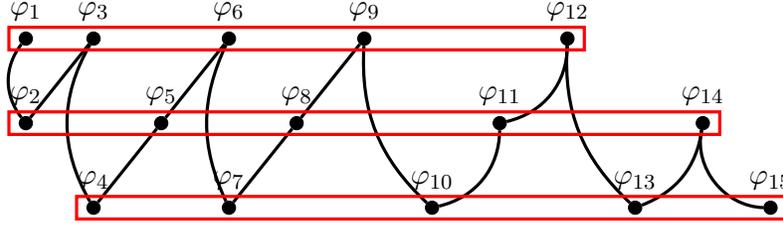


FIGURE 2.31 – Illustration de la Construction 8 pour un connecteur neutre avec  $\lambda = 5$ .

**Lemme 9.** Soit  $\lambda \geq 2$  une constante. Soient  $(G_{neutre} = (V_{neutre}, E_{neutre}), \Pi_{neutre})$  le graphe et les obligations obtenues en suivant la Construction 8. Soient  $(G_1 = (V_1, E_1), \Pi_1)$  et  $(G_2 = (V_2, E_2), \Pi_2)$  deux instances du problème IDO avec  $G_1$  et  $G_2$  deux chemins. Soient  $v_1^1$  et  $v_2^1$  respectivement une extrémité du graphe  $G_1$  et du graphe  $G_2$ . Soit  $V_{union} = V_{neutre} \cup V_1 \cup V_2$ . Soit  $E_{union} = E_{neutre} \cup E_1 \cup E_2 \cup (v_1^1 \varphi_1) \cup (v_2^1 \varphi_{3\lambda})$ . Soit  $G_{union} = (V_{union}, E_{union})$ . Soit  $\Pi_{union} = \Pi_{neutre} \cup \Pi_1 \cup \Pi_2$ . Soit  $(G_{union}, \Pi_{union})$  une instance du problème IDO, avec  $G_{union}$  un unique chemin.

Il existe une solution pour l'instance  $(G_{union}, \Pi_{union})$  du problème IDO si et seulement si il existe une solution pour les instances  $(G_1, \Pi_1)$  et  $(G_2, \Pi_2)$  du problème IDO.

*Démonstration.* Soit  $S_{neutre}$  un Indépendant Dominant de  $G_{neutre}$  respectant les Obligations  $\Pi_{neutre}$ . Si  $S_{neutre}$  contient le sommet  $\varphi_1$  alors le sommet  $\varphi_{3\lambda-1}$  ne peut pas être dominé, ce qui est une contradiction. Si  $S_{neutre}$  contient le sommet  $\varphi_{3\lambda}$  alors le sommet  $\varphi_2$  ne peut pas être dominé, ce qui est une contradiction. Ainsi, l'instance  $(G_{neutre}, \Pi_{neutre})$  ne possède qu'un seul Indépendant Dominant  $S_{neutre}$  respectant les Obligations  $\Pi_{neutre}$ . Il s'agit des sommets de l'obligation  $\Phi_2$ .

Supposons qu'il existe un Indépendant Dominant  $S_1$  de  $G_1$  respectant les Obligations  $\Pi_1$ , ainsi qu'un Indépendant Dominant  $S_2$  de  $G_2$  respectant les Obligations  $\Pi_2$ . Soit  $S'$  l'ensemble contenant tous les sommets de  $S_1$  et  $S_2$  ainsi que les sommets de l'obligation  $\Phi_2$ .  $S'$  est un Indépendant Dominant de  $G_{union}$  respectant les Obligations  $\Pi_{union}$ .

Supposons qu'il existe un Indépendant Dominant  $S$  de  $G_{union}$  respectant les Obligations  $\Pi_{union}$ . Aucun sommet de  $V_1 \cup V_2 \cup \Phi_1 \cup \Phi_3$  ne permet de dominer l'ensemble des sommets de l'obligation  $\Phi_2$ . Ainsi,  $S$  contient l'ensemble des sommets de l'obligation  $\Phi_2$  et aucun sommet de  $V_{neutre}$  ne peut dominer un sommet de  $V_1 \cup V_2$ . Il existe donc une solution pour les instances  $(G_1, \Pi_1)$  et  $(G_2, \Pi_2)$  du problème IDO.  $\square$

**Idée 9.** Construire un chemin unique avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées.

Nous avons vu comment construire une collection de chemins avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour tout  $\lambda \geq 2$  (Construction 7). Pour obtenir un unique chemin, nous connectons deux chemins distincts grâce à un gadget de connecteur neutre (Construction 8) tant qu'il reste au moins deux composantes non connexes. En répétant cette opération, chaque composante connexe sera connectée à une unique composante connexe.

**Construction 9.** Construire un chemin unique avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées  
Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda = 2\kappa + \beta$  un entier avec  $\kappa \geq 1$  et  $\beta \in \{0, 1\}$ . Nous construisons une instance  $(G = (V, E), \Pi)$  du problème  $IDO$  comme suit :

- Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$  :
  - Soient  $c_j, c_k, c_l \in \mathcal{C}$  avec  $j < k < l$  les trois triplets contenant l'élément  $x_i$ .
  - Nous ajoutons seize obligations notées  $\pi_i^T, \pi_i^F, \pi_i^1, \dots, \pi_i^{11}, x_i^1, x_i^2$  et  $x_i^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants et de leurs copies éventuelles. Dans chaque obligation  $\pi$  et  $x$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\pi)$  et  $D(\pi)$  ou  $G(x)$  et  $D(x)$ , ainsi que leurs copies respectives notées  $G_1(\pi), \dots, G_{\kappa-1}(\pi)$  et  $D_1(\pi), \dots, D_{\kappa-1}(\pi)$  ou  $G_1(x), \dots, G_{\kappa-1}(x)$  et  $D_1(x), \dots, D_{\kappa-1}(x)$ . Si  $\beta = 1$  alors nous ajoutons également un sommet bis noté  $B(\pi)$  dans chaque obligation  $\pi$  et un sommet bis noté  $B(x)$  dans chaque obligation  $x$ .
  - Nous ajoutons les sommets  $c_j^i, c_k^i, c_l^i$  représentant les triplets contenant l'élément  $x_i$  ainsi que leurs copies respectives  $c_{j,1}^i, \dots, c_{j,\kappa-1}^i, c_{k,1}^i, \dots, c_{k,\kappa-1}^i$  et  $c_{l,1}^i, \dots, c_{l,\kappa-1}^i$ .
  - L'ensemble des copies d'un sommet  $v$  est noté  $\Lambda(v)$ .
  - Nous ajoutons les arêtes  $(D(\pi_i^T)G(\pi_i^F)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^1)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^2)), (G(\pi_i^1)D(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)G(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)D(\pi_i^2)), (G(\pi_i^2)G(\pi_i^3)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^5)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^6)), (D(\pi_i^4)G(\pi_i^9)), (G(\pi_i^5)D(\pi_i^7)), (D(\pi_i^5)D(\pi_i^6)), (D(\pi_i^5)G(\pi_i^7)), (G(\pi_i^6)D(\pi_i^8)), (D(\pi_i^6)G(\pi_i^8)), (D(\pi_i^7)G(\pi_i^{10})), (D(\pi_i^8)G(\pi_i^{11})), (D(\pi_i^9)G(x_i^1)), (D(\pi_i^{10})G(x_i^2)), (D(\pi_i^{11})G(x_i^3)), (D(x_i^1)c_j^i), (D(x_i^2)c_k^i) et (D(x_i^3)c_l^i).$
  - Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\pi_i^T)G_\iota(\pi_i^F)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^1)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^2)), (G_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^4)), (D_\iota(\pi_i^1)G_\iota(\pi_i^4)), (D_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^2)), (G_\iota(\pi_i^2)G_\iota(\pi_i^3)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^5)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^4)G_\iota(\pi_i^9)), (G_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^7)), (D_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^5)G_\iota(\pi_i^7)), (G_\iota(\pi_i^6)D_\iota(\pi_i^8)), (D_\iota(\pi_i^6)G_\iota(\pi_i^8)), (D_\iota(\pi_i^7)G_\iota(\pi_i^{10})), (D_\iota(\pi_i^8)G_\iota(\pi_i^{11})), (D_\iota(\pi_i^9)G_\iota(x_i^1)), (D_\iota(\pi_i^{10})G_\iota(x_i^2)), (D_\iota(\pi_i^{11})G_\iota(x_i^3)), (D_\iota(x_i^1)c_{j,\iota}^i), (D_\iota(x_i^2)c_{k,\iota}^i) et (D_\iota(x_i^3)c_{l,\iota}^i).$
  - Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(B(\pi_i^T)B(\pi_i^F)), (B(\pi_i^1)B(\pi_i^2)), (B(\pi_i^1)B(\pi_i^4)), (B(\pi_i^3)B(\pi_i^5)), (B(\pi_i^3)B(\pi_i^6)), (B(\pi_i^5)B(\pi_i^7)), (B(\pi_i^6)B(\pi_i^8)), (B(\pi_i^9)B(x_i^1)), (B(\pi_i^{10})B(x_i^2)) et (B(\pi_i^{11})B(x_i^3)).$
- Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$  :
  - Soient  $x_a, x_b, x_c \in \mathcal{X}$  les trois éléments du triplet  $c_j$ . Soient  $c_j^a, c_j^b$  et  $c_j^c$  les trois sommets-triplet tels qu'ils ont été créés précédemment, ainsi que  $c_{j,\iota}^a, c_{j,\iota}^b$  et  $c_{j,\iota}^c$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ) leurs copies respectives éventuelles.

- Nous ajoutons trois obligations notées  $\sigma_j^a$ ,  $\sigma_j^b$  et  $\sigma_j^c$ , composées respectivement des sommets  $c_j^a$  et  $\Lambda(c_j^a)$ ,  $c_j^b$  et  $\Lambda(c_j^b)$  ou  $c_j^c$  et  $\Lambda(c_j^c)$  ainsi que d'un sommet droit noté respectivement  $D(\sigma_j^a)$ ,  $D(\sigma_j^b)$  et  $D(\sigma_j^c)$  et de copies de ce sommet droit notées respectivement  $D_\iota(\sigma_j^a)$ ,  $D_\iota(\sigma_j^b)$  et  $D_\iota(\sigma_j^c)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ). Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons un sommet bis noté  $B(\sigma_j^a)$  dans l'obligation  $\sigma_j^a$ , un sommet bis noté  $B(\sigma_j^b)$  dans l'obligation  $\sigma_j^b$  et un sommet bis noté  $B(\sigma_j^c)$  dans l'obligation  $\sigma_j^c$ .
- Nous ajoutons trois obligations notées  $\rho_j^1$ ,  $\rho_j^2$  et  $\rho_j^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants et de leurs copies éventuelles. Dans chaque obligation  $\rho$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\rho)$  et  $D(\rho)$  ainsi que leurs copies respectives  $G_\iota(\rho)$  et  $D_\iota(\rho)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ). Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons un sommet bis noté  $B(\rho_j^1)$  dans l'obligation  $\rho_j^1$ , un sommet bis noté  $B(\rho_j^2)$  dans l'obligation  $\rho_j^2$  et un sommet bis noté  $B(\rho_j^3)$  dans l'obligation  $\rho_j^3$ .
- Nous ajoutons les arêtes  $(D(\sigma_j^a)G(\rho_j^1))$ ,  $(D(\sigma_j^b)G(\rho_j^1))$ ,  $(D(\sigma_j^c)G(\rho_j^3))$ ,  $(D(\rho_j^1)G(\rho_j^2))$  et  $(D(\rho_j^2)D(\rho_j^3))$ .
- Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\sigma_j^a)G_\iota(\rho_j^1))$ ,  $(D_\iota(\sigma_j^b)G_\iota(\rho_j^1))$ ,  $(D_\iota(\sigma_j^c)G_\iota(\rho_j^3))$ ,  $(D_\iota(\rho_j^1)G_\iota(\rho_j^2))$  et  $(D_\iota(\rho_j^2)D_\iota(\rho_j^3))$ .
- Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(B(\sigma_j^a)B(\rho_j^1))$ ,  $(B(\sigma_j^b)B(\rho_j^1))$ ,  $(B(\sigma_j^c)B(\rho_j^3))$  et  $(B(\rho_j^2)B(\rho_j^3))$ .
- Soient  $P_1, \dots, P_p$  les  $p$  chemins disjoints précédemment créés.
- Pour  $1 \leq l \leq p - 1$  :
  - Soient  $u_l$  et  $v_l$  les deux extrémités du chemin  $P_l$ . Soient  $u_{l+1}$  et  $v_{l+1}$  les deux extrémités du chemin  $P_{l+1}$ .
  - Nous ajoutons un chemin  $\varphi_1^l, \dots, \varphi_{3\lambda}^l$ .
  - Nous ajoutons trois obligations  $\Phi_1^l$ ,  $\Phi_2^l$  et  $\Phi_3^l$ , composées respectivement des sommets  $\varphi_1^l$ ,  $\varphi_3^l$  et  $\varphi_{3\lambda-3}^l$ ,  $\varphi_2^l$  et  $\varphi_{3\lambda-1}^l$  ou  $\varphi_4^l$ ,  $\varphi_{3\lambda-2}^l$  et  $\varphi_{3\lambda}^l$ .
  - Pour chaque sommet  $\varphi_i^l \in \{\varphi_5^l, \dots, \varphi_{3\lambda-4}^l\}$  :
    - Si  $i \pmod{3} = 0$ , nous ajoutons le sommet  $\varphi_i^l$  dans l'obligation  $\Phi_1^l$ .
    - Si  $i \pmod{3} = 2$ , nous ajoutons le sommet  $\varphi_i^l$  dans l'obligation  $\Phi_2^l$ .
    - Si  $i \pmod{3} = 1$ , nous ajoutons le sommet  $\varphi_i^l$  dans l'obligation  $\Phi_3^l$ .
    - Nous ajoutons les arêtes  $(v_l \varphi_1^l)$  et  $(\varphi_{3\lambda}^l u_{l+1})$ .

Pour un élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de seize obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Pour un triplet  $c_j \in \mathcal{C}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de six obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Les gadgets d'élément et de triplet forment  $24q\lambda$  chemins disjoints. Pour deux chemins disjoints, le gadget de connecteur neutre associé est composé d'un chemin et de trois obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Ainsi, l'instance générée à partir du problème  $RX3C$  contient  $72q\lambda^2 + (66q - 3)\lambda$  sommets,  $72q\lambda^2 + (66q - 3)\lambda - 1$  arêtes et  $72q\lambda + 66q - 3$

obligations. Notons qu'il est possible d'utiliser un connecteur neutre supplémentaire afin de relier les deux extrémités du chemin, obtenant alors un cycle avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées, pour toute constante  $\lambda \geq 2$ .

**Théorème 6.** *Déterminer l'existence d'une solution pour le problème IDO est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet, même si le graphe est un chemin (unique) et que les obligations sont stables et  $\lambda$ -équilibrées, pour toute constante  $\lambda \geq 2$ .*

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda = 2\kappa + \beta$  un entier avec  $\kappa \geq 1$  et  $\beta \in \{0, 1\}$ . Soient  $(G, \Pi)$  le graphe et les obligations associées suivant la Construction 7 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \lambda)$ .

Le problème IDO est clairement dans  $\mathcal{NP}$ . De plus, construire  $(G, \Pi)$  à partir de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est polynomial.

Supposons qu'il existe une solution  $S$  pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$ . Construisons un Indépendant Dominant  $S'$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$  :

1. Pour chaque triplet  $c_j$  dans  $S$ , composé des éléments  $x_a, x_b$  et  $x_c$ , nous ajoutons les sommets des obligations  $\sigma_j^a, \sigma_j^b, \sigma_j^c$  et  $\rho_j^2$  dans  $S'$ .
2. Pour chaque triplet  $c_j$  dans  $\mathcal{C} \setminus S$  nous ajoutons les sommets des obligations  $\rho_j^1$  et  $\rho_j^3$  dans  $S'$ .
3. Pour chaque sommet  $c_j^i$  dans  $S'$  nous ajoutons l'ensemble des sommets de  $S_j^i \setminus c_j^i$  (tel que défini dans le Lemme 2) dans  $S'$ .
4. Pour  $1 \leq l \leq 24q\lambda - 1$ , nous ajoutons les sommets de l'obligation  $\Phi_2^l$  dans  $S'$ .

L'ensemble de sommets indépendants  $S'$  contient un Indépendant Dominant respectant les Obligations pour chaque gadget d'élément et de triplet car  $S$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$  (cela nous garantit que pour chaque gadget d'élément, un seul ensemble  $S_j^i$  est pris dans  $S'$ ), ainsi que pour chaque gadget de connecteur neutre. Tous les sommets de  $G$  sont dominés et les obligations  $\Pi$  sont respectées.  $S'$  est un Indépendant Dominant de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$ .

Supposons qu'il existe un Indépendant Dominant  $S$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$ . Construisons une couverture exacte  $S'$  de  $\mathcal{X}$  :

1. Pour chaque sommet  $D(\rho_j^2)$  dans  $S$ , nous ajoutons le triplet  $c_j$  dans  $S'$  (nous savons grâce au Lemme 6 que la présence des sommets de l'obligation  $\rho_j^2$  dans un Indépendant Dominant indique la présence de tous les sommets représentant le triplet  $c_j$ ).

D'après les Lemmes 4, 5 et 6, chaque triplet de  $\mathcal{C}$  couvre soit tous ses éléments, soit aucun. D'après les Lemmes 1, 2 et 3, chaque élément de  $\mathcal{X}$  est couvert par exactement un triplet. Ainsi,  $S'$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$ .  $\square$

## 2.2.4 Dans un graphe de forte densité avec des obligations $\lambda$ -équilibrées

**Carte 6.** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un graphe connexe de forte densité avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$  (Théorème 7).

**Départ :** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans une collection de chemins avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$  (Construction 7).

**Points d'étape :**

1.  $\mathcal{NP}$ -complétude dans un graphe connexe de forte densité, avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Construction 10 - Théorème 7).

Une instance du problème *RX3C* est composée d'un univers  $\mathcal{X}$  contenant  $3q$  éléments et d'une collection  $\mathcal{C}$  de  $3q$  triplets de ces éléments. L'instance  $(G, \Pi)$  associée suivant la Construction 7 depuis l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est une collection de chemins contenant  $66q\lambda$  sommets,  $42q\lambda$  arêtes et  $66q$  obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Pour étendre cette construction à un graphe de forte densité, nous rajoutons un sous-graphe complet privé de quelques arêtes contenant arbitrairement plus de sommets et d'arêtes et nous relions ces sous-graphes par un connecteur neutre afin d'obtenir un graphe connexe (Construction 10). Nous concluons alors sur la  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème *IDO* (Théorème 7).

**Idée 10.** *Obtenir un graphe de forte densité.*

*Nous avons vu comment construire une collection de chemins avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour tout  $\lambda \geq 2$  (Construction 7). Pour obtenir un graphe de forte densité, nous ajoutons un graphe complet de taille arbitrairement grande ( $\Omega\lambda$ ) dans lequel nous supprimons  $\lambda - 1$  arêtes pour chaque sommet (les arêtes présentes dans chaque obligation) afin de garantir l'existence d'une solution tout en conservant des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (nous avons alors un graphe complet  $\Omega$ -parti équilibré). Nous ajoutons ensuite un connecteur neutre (Construction 8) que nous relions à chaque composante connexe. Ainsi, le sous-graphe qui maintient le lien avec l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème *RX3C* reste inchangé mais son nombre de sommets et d'arêtes n'est plus significatif.*

**Construction 10.** *Obtenir un graphe de forte densité.*

*Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème *RX3C* avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda = 2\kappa + \beta$  un entier avec  $\kappa \geq 1$  et  $\beta \in \{0, 1\}$ . Nous construisons une instance  $(G = (V, E), \Pi)$  du problème *IDO* comme suit :*

- Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$  :
  - Soient  $c_j, c_k, c_l \in \mathcal{C}$  avec  $j < k < l$  les trois triplets contenant l'élément  $x_i$ .
  - Nous ajoutons seize obligations notées  $\pi_i^T, \pi_i^F, \pi_i^1, \dots, \pi_i^{11}, x_i^1, x_i^2$  et  $x_i^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants et de leurs copies éventuelles. Dans chaque obligation  $\pi$  et  $x$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\pi)$  et  $D(\pi)$  ou  $G(x)$  et  $D(x)$ , ainsi que leurs copies respectives notées  $G_1(\pi), \dots, G_{\kappa-1}(\pi)$  et  $D_1(\pi), \dots, D_{\kappa-1}(\pi)$

ou  $G_1(x), \dots, G_{\kappa-1}(x)$  et  $D_1(x), \dots, D_{\kappa-1}(x)$ . Si  $\beta = 1$  alors nous ajoutons également un sommet bis noté  $B(\pi)$  dans chaque obligation  $\pi$  et un sommet bis noté  $B(x)$  dans chaque obligation  $x$ .

- Nous ajoutons les sommets  $c_j^i, c_k^i, c_l^i$  représentant les triplets contenant l'élément  $x_i$  ainsi que leurs copies respectives  $c_{j,1}^i, \dots, c_{j,\kappa-1}^i, c_{k,1}^i, \dots, c_{k,\kappa-1}^i$  et  $c_{l,1}^i, \dots, c_{l,\kappa-1}^i$ .
- L'ensemble des copies d'un sommet  $v$  est noté  $\Lambda(v)$ .
- Nous ajoutons les arêtes  $(D(\pi_i^T)G(\pi_i^F)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^1)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^2)), (G(\pi_i^1)D(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)G(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)D(\pi_i^2)), (G(\pi_i^2)G(\pi_i^3)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^5)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^6)), (D(\pi_i^4)G(\pi_i^9)), (G(\pi_i^5)D(\pi_i^7)), (D(\pi_i^5)D(\pi_i^6)), (D(\pi_i^5)G(\pi_i^7)), (G(\pi_i^6)D(\pi_i^8)), (D(\pi_i^6)G(\pi_i^8)), (D(\pi_i^7)G(\pi_i^{10})), (D(\pi_i^8)G(\pi_i^{11})), (D(\pi_i^9)G(x_i^1)), (D(\pi_i^{10})G(x_i^2)), (D(\pi_i^{11})G(x_i^3)), (D(x_i^1)c_j^i), (D(x_i^2)c_k^i) et  $(D(x_i^3)c_l^i)$ .$
- Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\pi_i^T)G_\iota(\pi_i^F)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^1)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^2)), (G_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^4)), (D_\iota(\pi_i^1)G_\iota(\pi_i^4)), (D_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^2)), (G_\iota(\pi_i^2)G_\iota(\pi_i^3)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^5)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^4)G_\iota(\pi_i^9)), (G_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^7)), (D_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^5)G_\iota(\pi_i^7)), (G_\iota(\pi_i^6)D_\iota(\pi_i^8)), (D_\iota(\pi_i^6)G_\iota(\pi_i^8)), (D_\iota(\pi_i^7)G_\iota(\pi_i^{10})), (D_\iota(\pi_i^8)G_\iota(\pi_i^{11})), (D_\iota(\pi_i^9)G_\iota(x_i^1)), (D_\iota(\pi_i^{10})G_\iota(x_i^2)), (D_\iota(\pi_i^{11})G_\iota(x_i^3)), (D_\iota(x_i^1)c_{j,\iota}^i), (D_\iota(x_i^2)c_{k,\iota}^i) et  $(D_\iota(x_i^3)c_{l,\iota}^i)$ .$
- Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(B(\pi_i^T)B(\pi_i^F)), (B(\pi_i^1)B(\pi_i^2)), (B(\pi_i^1)B(\pi_i^4)), (B(\pi_i^3)B(\pi_i^5)), (B(\pi_i^3)B(\pi_i^6)), (B(\pi_i^5)B(\pi_i^7)), (B(\pi_i^6)B(\pi_i^8)), (B(\pi_i^9)B(x_i^1)), (B(\pi_i^{10})B(x_i^2)) et  $(B(\pi_i^{11})B(x_i^3))$ .$
- Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$  :
  - Soient  $x_a, x_b, x_c \in \mathcal{X}$  les trois éléments du triplet  $c_j$ . Soient  $c_j^a, c_j^b$  et  $c_j^c$  les trois sommets-triplet tels qu'ils ont été créés précédemment, ainsi que  $c_{j,\iota}^a, c_{j,\iota}^b$  et  $c_{j,\iota}^c$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ) leurs copies respectives éventuelles.
  - Nous ajoutons trois obligations notées  $\sigma_j^a, \sigma_j^b$  et  $\sigma_j^c$ , composées respectivement des sommets  $c_j^a$  et  $\Lambda(c_j^a), c_j^b$  et  $\Lambda(c_j^b)$  ou  $c_j^c$  et  $\Lambda(c_j^c)$  ainsi que d'un sommet droit noté respectivement  $D(\sigma_j^a), D(\sigma_j^b)$  et  $D(\sigma_j^c)$  et de copies de ce sommet droit notées respectivement  $D_\iota(\sigma_j^a), D_\iota(\sigma_j^b)$  et  $D_\iota(\sigma_j^c)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ). Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons un sommet bis noté  $B(\sigma_j^a)$  dans l'obligation  $\sigma_j^a$ , un sommet bis noté  $B(\sigma_j^b)$  dans l'obligation  $\sigma_j^b$  et un sommet bis noté  $B(\sigma_j^c)$  dans l'obligation  $\sigma_j^c$ .
  - Nous ajoutons trois obligations notées  $\rho_j^1, \rho_j^2$  et  $\rho_j^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants et de leurs copies éventuelles. Dans chaque obligation  $\rho$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\rho)$  et  $D(\rho)$  ainsi que leurs copies respectives  $G_\iota(\rho)$  et  $D_\iota(\rho)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ). Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons un sommet bis noté  $B(\rho_j^1)$  dans l'obligation  $\rho_j^1$ , un sommet bis noté  $B(\rho_j^2)$  dans l'obligation  $\rho_j^2$  et un sommet bis noté  $B(\rho_j^3)$  dans l'obligation  $\rho_j^3$ .
  - Nous ajoutons les arêtes  $(D(\sigma_j^a)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^b)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^c)G(\rho_j^3)), (D(\rho_j^1)G(\rho_j^2)) et  $(D(\rho_j^2)D(\rho_j^3))$ .$

- Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\sigma_j^a)G_\iota(\rho_j^1)), (D_\iota(\sigma_j^b)G_\iota(\rho_j^1)), (D_\iota(\sigma_j^c)G_\iota(\rho_j^3)), (D_\iota(\rho_j^1)G_\iota(\rho_j^2))$  et  $(D_\iota(\rho_j^2)D_\iota(\rho_j^3))$ .
- Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(B(\sigma_j^a)B(\rho_j^1)), (B(\sigma_j^b)B(\rho_j^1)), (B(\sigma_j^c)B(\rho_j^3))$  et  $(B(\rho_j^2)B(\rho_j^3))$ .
- Soient  $P_1, \dots, P_p$  les  $p$  chemins disjoints précédemment créés.
- Nous ajoutons un chemin  $\varphi_1, \dots, \varphi_{3\lambda}$ .
- Nous ajoutons trois obligations  $\Phi_1, \Phi_2$  et  $\Phi_3$ , composées respectivement des sommets  $\varphi_1, \varphi_3$  et  $\varphi_{3\lambda-3}, \varphi_2$  et  $\varphi_{3\lambda-1}$  ou  $\varphi_4, \varphi_{3\lambda-2}$  et  $\varphi_{3\lambda}$ .
- Pour chaque sommet  $\varphi_i \in \{\varphi_5, \dots, \varphi_{3\lambda-4}\}$  :
  - Si  $i \pmod{3} = 0$ , nous ajoutons le sommet  $\varphi_i$  dans l'obligation  $\Phi_1$ .
  - Si  $i \pmod{3} = 2$ , nous ajoutons le sommet  $\varphi_i$  dans l'obligation  $\Phi_2$ .
  - Si  $i \pmod{3} = 1$ , nous ajoutons le sommet  $\varphi_i$  dans l'obligation  $\Phi_3$ .
- Pour  $1 \leq l \leq p$  :
  - Soient  $u_l$  une des deux extrémités du chemin  $P_l$ .
  - Nous ajoutons l'arête  $(u_l\varphi_1)$ .
- Soit  $\Omega$  un grand nombre avec  $\Omega \gg \lambda$  et  $\Omega \gg q$ .
- Nous ajoutons  $\Omega$  obligations notées  $\varrho^1, \dots, \varrho^\Omega$ , chacune composée de  $\lambda$  sommets notés respectivement  $\omega_1^1, \dots, \omega_\lambda^1, \dots, \omega_1^\Omega, \dots, \omega_\lambda^\Omega$ .
- Pour  $1 \leq i < j \leq \Omega$ , pour  $1 \leq k < l \leq \lambda$ , nous ajoutons l'arête  $(\omega_k^i\omega_l^j)$ .
- Nous ajoutons l'arête  $(\omega_1^1\varphi_{3\lambda})$ .

Pour un élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de seize obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Pour un triplet  $c_j \in \mathcal{C}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de six obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Les gadgets d'élément et de triplet forment  $24q\lambda$  chemins disjoints. La sous-instance liée aux sommets  $\omega$  est composée d'un graphe presque complet et de  $\Omega$  obligations. Ainsi, l'instance générée à partir du problème  $RX3C$  contient  $\lambda\Omega + 66q\lambda + 3\lambda$  sommets,  $\frac{\lambda^2\Omega^2 - \lambda^2\Omega}{2} + 66q\lambda + 3\lambda$  arêtes et  $\Omega + 66q + 1$  obligations. Le sous-graphe  $\Omega$ -partis complet (chaque partie est indépendante mais partage toutes les arêtes possibles avec les sommets de toutes les autres parties) équilibré décrit dans la Construction 10 est illustré dans la Figure 2.32. Un Indépendant Dominant respectant les Obligations associées est illustré dans la Figure 2.33.

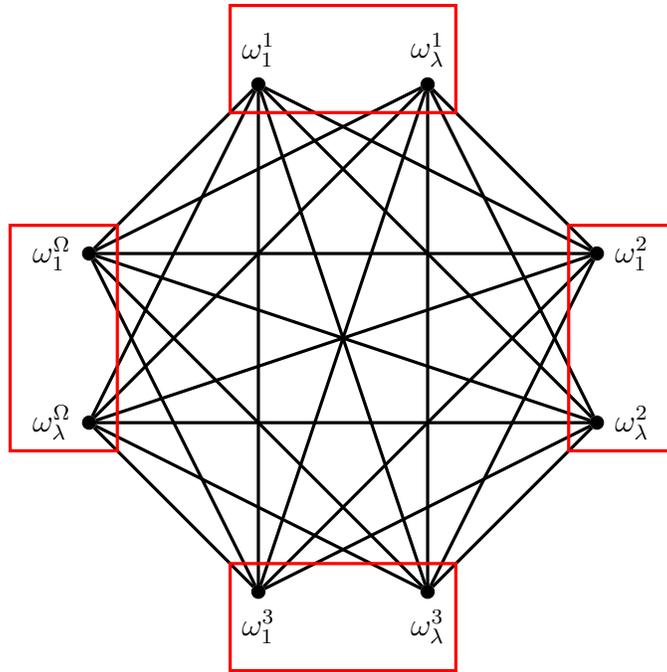


FIGURE 2.32 – Illustration de la Construction 10 pour  $\lambda = 2$  et  $\Omega = 4$ .

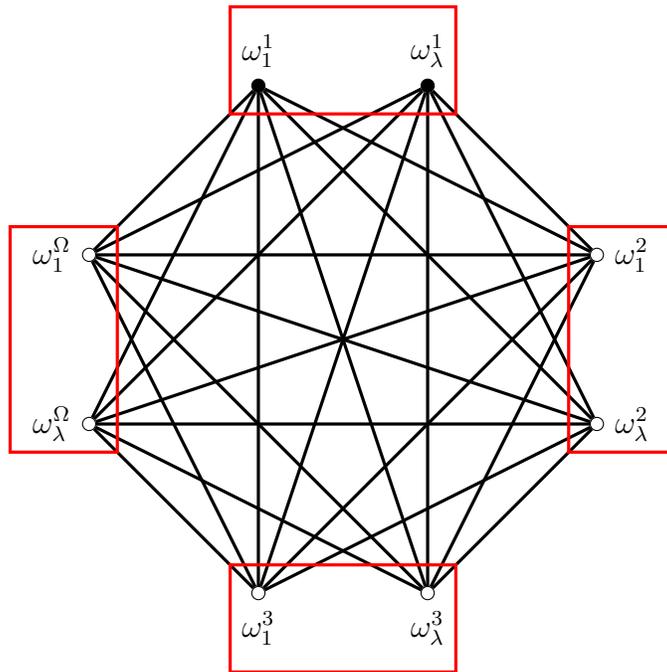


FIGURE 2.33 – Illustration d'un Indépendant Dominant  $S$  pour l'exemple représenté dans la Figure 2.32. Les sommets de  $S$  sont représentés pleins.

Avant de montrer que le problème *IDO* est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet dans notre cas restreint, nous évaluons la densité du graphe  $G$ . Le graphe contient  $\lambda\Omega + 66q\lambda + 3\lambda$  sommets, ce qui correspond à  $\frac{\lambda^2\Omega^2 + (132q+6)\lambda^2\Omega - \lambda\Omega}{2} + (2178q^2 + 198q)\lambda^2 + \frac{(9\lambda - 66q - 3)\lambda}{2}$  arêtes maximum. Ainsi, la densité du graphe est définie par :

$$\frac{\frac{\lambda^2\Omega^2 - \lambda^2\Omega + 66q\lambda + 3\lambda}{2}}{\frac{\lambda^2\Omega^2 + (132q+6)\lambda^2\Omega - \lambda\Omega}{2} + (2178q^2 + 198q)\lambda^2 + \frac{(9\lambda - 66q - 3)\lambda}{2}}$$

Lorsque ce polynôme tend vers l'infini, la composante la plus significative est  $\Omega$ . Calculer sa limite lorsque  $\Omega$  tend vers l'infini revient alors à calculer la limite de  $\frac{\Omega - 1}{\Omega + (132q+6)\frac{1}{\lambda}}$ . Ainsi, lorsque  $\Omega$  tend vers l'infini, la densité du graphe s'approche de sa valeur maximale sans jamais l'atteindre : le graphe a une forte densité. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un facteur  $\Omega$  telle que la densité du graphe est au moins de  $1 - \varepsilon$ .

**Théorème 7.** *Déterminer l'existence d'une solution pour le problème IDO est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet, même si le graphe est un graphe connexe de forte densité (au moins  $1 - \varepsilon$  avec  $\varepsilon > 0$ ) et que les obligations sont stables et  $\lambda$ -équilibrées, pour toute constante  $\lambda \geq 2$ .*

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème *RX3C* avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda = 2\kappa + \beta$  un entier avec  $\kappa \geq 1$  et  $\beta \in \{0, 1\}$ . Soient  $(G, \Pi)$  le graphe et les obligations associées suivant la Construction 10 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \lambda)$ .

Le problème *IDO* est clairement dans  $\mathcal{NP}$ . De plus, construire  $(G, \Pi)$  à partir de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est polynomial.

Supposons qu'il existe une solution  $S$  pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème *RX3C*. Construisons un Indépendant Dominant  $S'$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$  :

1. Pour chaque triplet  $c_j$  dans  $S$ , composé des éléments  $x_a, x_b$  et  $x_c$ , nous ajoutons les sommets des obligations  $\sigma_j^a, \sigma_j^b, \sigma_j^c$  et  $\rho_j^2$  dans  $S'$ .
2. Pour chaque triplet  $c_j$  dans  $C \setminus S$  nous ajoutons les sommets des obligations  $\rho_j^1$  et  $\rho_j^3$  dans  $S'$ .
3. Pour chaque sommet  $c_j^i$  dans  $S'$  nous ajoutons l'ensemble des sommets de  $S_j^i \setminus c_j^i$  (tel que défini dans le Lemme 2) dans  $S'$ .
4. Nous ajoutons les sommets de l'obligation  $\rho^1$ .

L'ensemble de sommets indépendants  $S'$  contient un Indépendant Dominant respectant les Obligations pour chaque gadget d'élément et de triplet car  $S$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$  (cela nous garantit que pour chaque gadget d'élément, un seul ensemble  $S_j^i$  est pris dans  $S'$ ). Tous les sommets de  $G$  sont dominés et les obligations  $\Pi$  sont respectées.  $S'$  est un Indépendant Dominant de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$ .

Supposons qu'il existe un Indépendant Dominant  $S$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$ . Construisons une couverture exacte  $S'$  de  $\mathcal{X}$  :

1. Pour chaque sommet  $D(\rho_j^2)$  dans  $S$ , nous ajoutons le triplet  $c_j$  dans  $S'$  (nous savons grâce au Lemme 6 que la présence des sommets de l'obligation  $\rho_j^2$  dans un Indépendant Dominant indique la présence de tous les sommets représentant le triplet  $c_j$ ).

D'après les Lemmes 4, 5 et 6, chaque triplet de  $\mathcal{C}$  couvre soit tous ses éléments, soit aucun. D'après les Lemmes 1, 2 et 3, chaque élément de  $\mathcal{X}$  est couvert par exactement un triplet. Ainsi,  $S'$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$ .  $\square$

## 2.2.5 Dans un graphe de faible densité avec des obligations $\lambda$ -équilibrées

**Carte 7.** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un graphe de faible densité avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$  (Théorème 8).

**Départ :** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans une collection de chemins avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$  (Construction 7).

**Points d'étape :**

1.  $\mathcal{NP}$ -complétude dans un graphe de faible densité, avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Construction 11 - Théorème 8).

Une instance du problème *RX3C* est composée d'un univers  $\mathcal{X}$  contenant  $3q$  éléments et d'une collection  $\mathcal{C}$  de  $3q$  triplets de ces éléments. L'instance  $(G, \Pi)$  associée suivant la Construction 7 depuis l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est une collection de chemins contenant  $66q\lambda$  sommets,  $42q\lambda$  arêtes et  $66q$  obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Pour étendre cette construction à un graphe de faible densité, nous rajoutons un grand nombre de sommets indépendants (Construction 11). Nous concluons alors sur la  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème *IDO* (Théorème 8).

**Idée 11.** *Obtenir un graphe de faible densité.*

*Nous avons vu comment construire une collection de chemins avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour tout  $\lambda \geq 2$  (Construction 7). Pour obtenir un graphe de faible densité, nous ajoutons un nombre arbitrairement grand de sommets indépendants ( $\Omega\lambda$ ) que nous répartissons en  $\Omega$  obligations de taille  $\lambda$ . Ainsi, le sous-graphe qui maintient le lien avec l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème *RX3C* reste inchangé mais son nombre de sommets et d'arêtes n'est plus significatif.*

**Construction 11.** *Obtenir un graphe de faible densité.*

*Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème *RX3C* avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda = 2\kappa + \beta$  un entier avec  $\kappa \geq 1$  et  $\beta \in \{0, 1\}$ . Nous construisons une instance  $(G = (V, E), \Pi)$  du problème *IDO* comme suit :*

- *Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$  :*
  - *Soient  $c_j, c_k, c_l \in \mathcal{C}$  avec  $j < k < l$  les trois triplets contenant l'élément  $x_i$ .*
  - *Nous ajoutons seize obligations notées  $\pi_i^T, \pi_i^F, \pi_i^1, \dots, \pi_i^{11}, x_i^1, x_i^2$  et  $x_i^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants et de leurs copies éventuelles. Dans chaque obligation  $\pi$  et  $x$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\pi)$  et  $D(\pi)$  ou  $G(x)$  et  $D(x)$ , ainsi*

que leurs copies respectives notées  $G_1(\pi), \dots, G_{\kappa-1}(\pi)$  et  $D_1(\pi), \dots, D_{\kappa-1}(\pi)$  ou  $G_1(x), \dots, G_{\kappa-1}(x)$  et  $D_1(x), \dots, D_{\kappa-1}(x)$ . Si  $\beta = 1$  alors nous ajoutons également un sommet bis noté  $B(\pi)$  dans chaque obligation  $\pi$  et un sommet bis noté  $B(x)$  dans chaque obligation  $x$ .

- Nous ajoutons les sommets  $c_j^i, c_k^i, c_l^i$  représentant les triplets contenant l'élément  $x_i$  ainsi que leurs copies respectives  $c_{j,1}^i, \dots, c_{j,\kappa-1}^i, c_{k,1}^i, \dots, c_{k,\kappa-1}^i$  et  $c_{l,1}^i, \dots, c_{l,\kappa-1}^i$ .
- L'ensemble des copies d'un sommet  $v$  est noté  $\Lambda(v)$ .
- Nous ajoutons les arêtes  $(D(\pi_i^T)G(\pi_i^F)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^1)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^2)), (G(\pi_i^1)D(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)G(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)D(\pi_i^2)), (G(\pi_i^2)G(\pi_i^3)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^5)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^6)), (D(\pi_i^4)G(\pi_i^9)), (G(\pi_i^5)D(\pi_i^7)), (D(\pi_i^5)D(\pi_i^6)), (D(\pi_i^5)G(\pi_i^7)), (G(\pi_i^6)D(\pi_i^8)), (D(\pi_i^6)G(\pi_i^8)), (D(\pi_i^7)G(\pi_i^{10})), (D(\pi_i^8)G(\pi_i^{11})), (D(\pi_i^9)G(x_i^1)), (D(\pi_i^{10})G(x_i^2)), (D(\pi_i^{11})G(x_i^3)), (D(x_i^1)c_j^i), (D(x_i^2)c_k^i) et (D(x_i^3)c_l^i).$
- Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\pi_i^T)G_\iota(\pi_i^F)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^1)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^2)), (G_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^4)), (D_\iota(\pi_i^1)G_\iota(\pi_i^4)), (D_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^2)), (G_\iota(\pi_i^2)G_\iota(\pi_i^3)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^5)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^4)G_\iota(\pi_i^9)), (G_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^7)), (D_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^5)G_\iota(\pi_i^7)), (G_\iota(\pi_i^6)D_\iota(\pi_i^8)), (D_\iota(\pi_i^6)G_\iota(\pi_i^8)), (D_\iota(\pi_i^7)G_\iota(\pi_i^{10})), (D_\iota(\pi_i^8)G_\iota(\pi_i^{11})), (D_\iota(\pi_i^9)G_\iota(x_i^1)), (D_\iota(\pi_i^{10})G_\iota(x_i^2)), (D_\iota(\pi_i^{11})G_\iota(x_i^3)), (D_\iota(x_i^1)c_{j,\iota}^i), (D_\iota(x_i^2)c_{k,\iota}^i) et (D_\iota(x_i^3)c_{l,\iota}^i).$
- Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(B(\pi_i^T)B(\pi_i^F)), (B(\pi_i^1)B(\pi_i^2)), (B(\pi_i^1)B(\pi_i^4)), (B(\pi_i^3)B(\pi_i^5)), (B(\pi_i^3)B(\pi_i^6)), (B(\pi_i^5)B(\pi_i^7)), (B(\pi_i^6)B(\pi_i^8)), (B(\pi_i^9)B(x_i^1)), (B(\pi_i^{10})B(x_i^2)) et (B(\pi_i^{11})B(x_i^3)).$
- Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$  :
  - Soient  $x_a, x_b, x_c \in \mathcal{X}$  les trois éléments du triplet  $c_j$ . Soient  $c_j^a, c_j^b$  et  $c_j^c$  les trois sommets-triplet tels qu'ils ont été créés précédemment, ainsi que  $c_{j,\iota}^a, c_{j,\iota}^b$  et  $c_{j,\iota}^c$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ) leurs copies respectives éventuelles.
  - Nous ajoutons trois obligations notées  $\sigma_j^a, \sigma_j^b$  et  $\sigma_j^c$ , composées respectivement des sommets  $c_j^a$  et  $\Lambda(c_j^a), c_j^b$  et  $\Lambda(c_j^b)$  ou  $c_j^c$  et  $\Lambda(c_j^c)$  ainsi que d'un sommet droit noté respectivement  $D(\sigma_j^a), D(\sigma_j^b)$  et  $D(\sigma_j^c)$  et de copies de ce sommet droit notées respectivement  $D_\iota(\sigma_j^a), D_\iota(\sigma_j^b)$  et  $D_\iota(\sigma_j^c)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ). Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons un sommet bis noté  $B(\sigma_j^a)$  dans l'obligation  $\sigma_j^a$ , un sommet bis noté  $B(\sigma_j^b)$  dans l'obligation  $\sigma_j^b$  et un sommet bis noté  $B(\sigma_j^c)$  dans l'obligation  $\sigma_j^c$ .
  - Nous ajoutons trois obligations notées  $\rho_j^1, \rho_j^2$  et  $\rho_j^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants et de leurs copies éventuelles. Dans chaque obligation  $\rho$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\rho)$  et  $D(\rho)$  ainsi que leurs copies respectives  $G_\iota(\rho)$  et  $D_\iota(\rho)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ). Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons un sommet bis noté  $B(\rho_j^1)$  dans l'obligation  $\rho_j^1$ , un sommet bis noté  $B(\rho_j^2)$  dans l'obligation  $\rho_j^2$  et un sommet bis noté  $B(\rho_j^3)$  dans l'obligation  $\rho_j^3$ .
  - Nous ajoutons les arêtes  $(D(\sigma_j^a)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^b)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^c)G(\rho_j^3)), (D(\rho_j^1)G(\rho_j^2)) et (D(\rho_j^2)D(\rho_j^3)).$

- Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\sigma_j^a)G_\iota(\rho_j^1)), (D_\iota(\sigma_j^b)G_\iota(\rho_j^1)), (D_\iota(\sigma_j^c)G_\iota(\rho_j^3)), (D_\iota(\rho_j^1)G_\iota(\rho_j^2))$  et  $(D_\iota(\rho_j^2)D_\iota(\rho_j^3))$ .
- Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(B(\sigma_j^a)B(\rho_j^1)), (B(\sigma_j^b)B(\rho_j^1)), (B(\sigma_j^c)B(\rho_j^3))$  et  $(B(\rho_j^2)B(\rho_j^3))$ .
- Soit  $\Omega$  un grand nombre avec  $\Omega \gg \lambda$  et  $\Omega \gg q$ .
- Nous ajoutons  $\Omega$  obligations notées  $\varrho^1, \dots, \varrho^\Omega$ , chacune composée de  $\lambda$  sommets notés respectivement  $\omega_1^1, \dots, \omega_\lambda^1, \dots, \omega_1^\Omega, \dots, \omega_\lambda^\Omega$ .

Pour un élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de seize obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Pour un triplet  $c_j \in \mathcal{C}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de six obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. La sous-instance liée aux sommets de type  $\omega$  est composée d'un graphe sans arêtes et de  $\lambda$  obligations. Ainsi, l'instance générée à partir du problème  $RX3C$  contient  $\lambda\Omega + 66q\lambda$  sommets,  $42q\lambda$  arêtes et  $\Omega + 66q$  obligations.

Avant de montrer que le problème  $IDO$  est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet dans notre cas restreint, nous évaluons la densité du graphe  $G$ . Le graphe contient  $\lambda\Omega + 66q\lambda$  sommets, ce qui correspond à :

$$\frac{\lambda^2\Omega^2 + 132q\lambda^2\Omega - \lambda\Omega}{2} + 2178q^2\lambda^2 - 33q\lambda$$

arêtes maximum. Ainsi, la densité du graphe est définie par :

$$\frac{42q\lambda}{\frac{\lambda^2\Omega^2 + 132q\lambda^2\Omega - \lambda\Omega}{2} + 2178q^2\lambda^2 - 33q\lambda}$$

Lorsque ce polynôme tend vers l'infini, la composante la plus significative est  $\Omega$ . Calculer sa limite lorsque  $\Omega$  tend vers l'infini revient alors à calculer la limite de  $\frac{1}{\Omega}$ . Ainsi, lorsque  $\Omega$  tend vers l'infini, la densité du graphe s'approche de sa valeur minimale sans jamais l'atteindre : le graphe a une faible densité. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un facteur  $\Omega$  telle que la densité du graphe est au plus de  $\varepsilon$ .

**Théorème 8.** *Déterminer l'existence d'une solution pour le problème  $IDO$  est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet, même si le graphe est un graphe de faible densité (au plus  $\varepsilon$  avec  $\varepsilon > 0$ ) et que les obligations sont stables et  $\lambda$ -équilibrées, pour toute constante  $\lambda \geq 2$ .*

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda = 2\kappa + \beta$  un entier avec  $\kappa \geq 1$  et  $\beta \in \{0, 1\}$ . Soient  $(G, \Pi)$  le graphe et les obligations associées suivant la Construction 11 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \lambda)$ . Le problème  $IDO$  est clairement dans  $\mathcal{NP}$ . De plus, construire  $(G, \Pi)$  à partir de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est polynomial.

Supposons qu'il existe une solution  $S$  pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$ . Construisons un Indépendant Dominant  $S'$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$  :

1. Pour chaque triplet  $c_j$  dans  $S$ , composé des éléments  $x_a, x_b$  et  $x_c$ , nous ajoutons les sommets des obligations  $\sigma_j^a, \sigma_j^b, \sigma_j^c$  et  $\rho_j^2$  dans  $S'$ .
2. Pour chaque triplet  $c_j$  dans  $C \setminus S$  nous ajoutons les sommets des obligations  $\rho_j^1$  et  $\rho_j^3$  dans  $S'$ .
3. Pour chaque sommet  $c_j^i$  dans  $S'$  nous ajoutons l'ensemble des sommets de  $S_j^i \setminus c_j^i$  (tel que défini dans le Lemme 2) dans  $S'$ .
4. Nous ajoutons les sommets des obligations  $\varrho^1, \dots, \varrho^\Omega$ .

L'ensemble de sommets indépendants  $S'$  contient un Indépendant Dominant respectant les Obligations pour chaque gadget d'élément et de triplet car  $S$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$  (cela nous garantit que pour chaque gadget d'élément, un seul ensemble  $S_j^i$  est pris dans  $S'$ ). Tous les sommets de  $G$  sont dominés et les obligations  $\Pi$  sont respectées.  $S'$  est un Indépendant Dominant de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$ .

Supposons qu'il existe un Indépendant Dominant  $S$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$ . Construisons une couverture exacte  $S'$  de  $\mathcal{X}$  :

1. Pour chaque sommet  $D(\rho_j^2)$  dans  $S$ , nous ajoutons le triplet  $c_j$  dans  $S'$  (nous savons grâce au Lemme 6 que la présence des sommets de l'obligation  $\rho_j^2$  dans un Indépendant Dominant indique la présence de tous les sommets représentant le triplet  $c_j$ ).

D'après les Lemmes 4, 5 et 6, chaque triplet de  $\mathcal{C}$  couvre soit tous ses éléments, soit aucun. D'après les Lemmes 1, 2 et 3, chaque élément de  $\mathcal{X}$  est couvert par exactement un triplet. Ainsi,  $S'$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$ .  $\square$

## 2.2.6 Dans un graphe de diamètre deux avec des obligations $\lambda$ -équilibrées

**Carte 8.** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un graphe de diamètre deux avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$  (Théorème 9).

**Départ :** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans une collection de chemins avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$  (Construction 7).

**Points d'étape :**

1.  $\mathcal{NP}$ -complétude dans un graphe de diamètre deux, avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Construction 12 - Théorème 9).

Nous montrons que le problème *IDO* est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un graphe de diamètre deux avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$  (Théorème 9). Nous partons de la Construction 7 et ajoutons des sommets, des arêtes, des obligations et un connecteur neutre afin de créer deux ensembles de sommets presque universels pour le graphe final (Construction 12). Cet ensemble va diminuer le diamètre du graphe pour obtenir un diamètre deux à partir d'une collection de chemins.

**Idée 12.** *Obtenir un graphe de diamètre deux.*

Nous avons vu comment construire une collection de chemins  $G$  avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour tout  $\lambda \geq 2$  (Construction 7). Pour obtenir un graphe de diamètre deux, nous ajoutons deux nouvelles obligations  $\varrho^1$  et  $\varrho^2$ . Chaque sommet des obligations  $\varrho$  est un sommet universel du graphe précédent; c'est-à-dire que chacun de ces sommets est adjacent à tous les autres sommets du graphe  $G$ . L'instance a alors un graphe de diamètre deux et conserve toujours des obligations  $\lambda$ -équilibrées. La dernière étape consiste à empêcher ces nouveaux sommets d'être dans une solution. Nous pourrions ajouter une arête entre deux sommets de l'obligation  $\varrho^1$  et de l'obligation  $\varrho^2$ , mais ces obligations ne seraient plus stables. Au lieu de cela, nous allons utiliser une propriété des connecteurs neutres. Nous avons vu dans la preuve du Lemme 9 qu'un connecteur neutre n'admet qu'une seule solution. Si les sommets de l'obligation  $\Phi_2$  ne sont pas choisis, alors soit le sommet  $\varphi_2$  soit le sommet  $\varphi_{3\lambda-1}$  ne peut pas être dominé. Nous ajoutons alors le connecteur neutre  $(G_{neutre} = (V_{neutre}, E_{neutre}), \Pi_{neutre})$ , un chemin avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Chaque sommet des obligations  $\varrho^1$  et  $\varrho^2$  est relié à chaque sommet de  $V_{neutre}$  sauf  $\varphi_3$  pour l'un et  $\varphi_4$  pour l'autre. Ainsi, aucun sommet des obligations  $\varrho^1$  et  $\varrho^2$  ne peut appartenir à une solution.

**Construction 12.** *Obtenir un graphe de diamètre deux.*

Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda = 2\kappa + \beta$  un entier avec  $\kappa \geq 1$  et  $\beta \in \{0, 1\}$ . Nous construisons une instance  $(G = (V, E), \Pi)$  du problème  $IDO$  comme suit :

- Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$  :
  - Soient  $c_j, c_k, c_l \in \mathcal{C}$  avec  $j < k < l$  les trois triplets contenant l'élément  $x_i$ .
  - Nous ajoutons seize obligations notées  $\pi_i^T, \pi_i^F, \pi_i^1, \dots, \pi_i^{11}, x_i^1, x_i^2$  et  $x_i^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants et de leurs copies éventuelles. Dans chaque obligation  $\pi$  et  $x$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\pi)$  et  $D(\pi)$  ou  $G(x)$  et  $D(x)$ , ainsi que leurs copies respectives notées  $G_1(\pi), \dots, G_{\kappa-1}(\pi)$  et  $D_1(\pi), \dots, D_{\kappa-1}(\pi)$  ou  $G_1(x), \dots, G_{\kappa-1}(x)$  et  $D_1(x), \dots, D_{\kappa-1}(x)$ . Si  $\beta = 1$  alors nous ajoutons également un sommet bis noté  $B(\pi)$  dans chaque obligation  $\pi$  et un sommet bis noté  $B(x)$  dans chaque obligation  $x$ .
  - Nous ajoutons les sommets  $c_j^i, c_k^i, c_l^i$  représentant les triplets contenant l'élément  $x_i$  ainsi que leurs copies respectives  $c_{j,1}^i, \dots, c_{j,\kappa-1}^i, c_{k,1}^i, \dots, c_{k,\kappa-1}^i$  et  $c_{l,1}^i, \dots, c_{l,\kappa-1}^i$ .
  - L'ensemble des copies d'un sommet  $v$  est noté  $\Lambda(v)$ .
  - Nous ajoutons les arêtes  $(D(\pi_i^T)G(\pi_i^F)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^1)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^2)), (G(\pi_i^1)D(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)G(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)D(\pi_i^2)), (G(\pi_i^2)G(\pi_i^3)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^5)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^6)), (D(\pi_i^4)G(\pi_i^9)), (G(\pi_i^5)D(\pi_i^7)), (D(\pi_i^5)D(\pi_i^6)), (D(\pi_i^5)G(\pi_i^7)), (G(\pi_i^6)D(\pi_i^8)), (D(\pi_i^6)G(\pi_i^8)), (D(\pi_i^7)G(\pi_i^{10})), (D(\pi_i^8)G(\pi_i^{11})), (D(\pi_i^9)G(x_i^1)), (D(\pi_i^{10})G(x_i^2)), (D(\pi_i^{11})G(x_i^3)), (D(x_i^1)c_j^i), (D(x_i^2)c_k^i) et  $(D(x_i^3)c_l^i)$ .$
  - Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\pi_i^T)G_\iota(\pi_i^F)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^1)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^2)), (G_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^4)), (D_\iota(\pi_i^1)G_\iota(\pi_i^4)), (D_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^2)),$

- $(G_\iota(\pi_i^2)G_\iota(\pi_i^3)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^5)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^4)G_\iota(\pi_i^9)),$   
 $(G_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^7)), (D_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^5)G_\iota(\pi_i^7)), (G_\iota(\pi_i^6)D_\iota(\pi_i^8)),$   
 $(D_\iota(\pi_i^6)G_\iota(\pi_i^8)), (D_\iota(\pi_i^7)G_\iota(\pi_i^{10})), (D_\iota(\pi_i^8)G_\iota(\pi_i^{11})), (D_\iota(\pi_i^9)G_\iota(x_i^1)),$   
 $(D_\iota(\pi_i^{10})G_\iota(x_i^2)), (D_\iota(\pi_i^{11})G_\iota(x_i^3)), (D_\iota(x_i^1)c_{j,\iota}^i), (D_\iota(x_i^2)c_{k,\iota}^i)$  et  $(D_\iota(x_i^3)c_{l,\iota}^i)$ .
- Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(B(\pi_i^T)B(\pi_i^F)), (B(\pi_i^1)B(\pi_i^2)), (B(\pi_i^1)B(\pi_i^4)),$   
 $(B(\pi_i^3)B(\pi_i^5)), (B(\pi_i^3)B(\pi_i^6)), (B(\pi_i^5)B(\pi_i^7)), (B(\pi_i^6)B(\pi_i^8)), (B(\pi_i^9)B(x_i^1)),$   
 $(B(\pi_i^{10})B(x_i^2))$  et  $(B(\pi_i^{11})B(x_i^3))$ .
  - Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$  :
    - Soient  $x_a, x_b, x_c \in \mathcal{X}$  les trois éléments du triplet  $c_j$ . Soient  $c_j^a, c_j^b$  et  $c_j^c$  les trois sommets-triplet tels qu'ils ont été créés précédemment, ainsi que  $c_{j,\iota}^a, c_{j,\iota}^b$  et  $c_{j,\iota}^c$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ) leurs copies respectives éventuelles.
    - Nous ajoutons trois obligations notées  $\sigma_j^a, \sigma_j^b$  et  $\sigma_j^c$ , composées respectivement des sommets  $c_j^a$  et  $\Lambda(c_j^a), c_j^b$  et  $\Lambda(c_j^b)$  ou  $c_j^c$  et  $\Lambda(c_j^c)$  ainsi que d'un sommet droit noté respectivement  $D(\sigma_j^a), D(\sigma_j^b)$  et  $D(\sigma_j^c)$  et de copies de ce sommet droit notées respectivement  $D_\iota(\sigma_j^a), D_\iota(\sigma_j^b)$  et  $D_\iota(\sigma_j^c)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ). Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons un sommet bis noté  $B(\sigma_j^a)$  dans l'obligation  $\sigma_j^a$ , un sommet bis noté  $B(\sigma_j^b)$  dans l'obligation  $\sigma_j^b$  et un sommet bis noté  $B(\sigma_j^c)$  dans l'obligation  $\sigma_j^c$ .
    - Nous ajoutons trois obligations notées  $\rho_j^1, \rho_j^2$  et  $\rho_j^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants et de leurs copies éventuelles. Dans chaque obligation  $\rho$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\rho)$  et  $D(\rho)$  ainsi que leurs copies respectives  $G_\iota(\rho)$  et  $D_\iota(\rho)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ). Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons un sommet bis noté  $B(\rho_j^1)$  dans l'obligation  $\rho_j^1$ , un sommet bis noté  $B(\rho_j^2)$  dans l'obligation  $\rho_j^2$  et un sommet bis noté  $B(\rho_j^3)$  dans l'obligation  $\rho_j^3$ .
    - Nous ajoutons les arêtes  $(D(\sigma_j^a)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^b)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^c)G(\rho_j^3)),$   
 $(D(\rho_j^1)G(\rho_j^2))$  et  $(D(\rho_j^2)D(\rho_j^3))$ .
    - Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\sigma_j^a)G_\iota(\rho_j^1)), (D_\iota(\sigma_j^b)G_\iota(\rho_j^1)),$   
 $(D_\iota(\sigma_j^c)G_\iota(\rho_j^3)), (D_\iota(\rho_j^1)G_\iota(\rho_j^2))$  et  $(D_\iota(\rho_j^2)D_\iota(\rho_j^3))$ .
    - Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(B(\sigma_j^a)B(\rho_j^1)), (B(\sigma_j^b)B(\rho_j^1)), (B(\sigma_j^c)B(\rho_j^3))$   
et  $(B(\rho_j^2)B(\rho_j^3))$ .
  - Nous ajoutons un chemin  $\varphi_1, \dots, \varphi_{3\lambda}$ .
  - Nous ajoutons trois obligations  $\Phi_1, \Phi_2$  et  $\Phi_3$ , composées respectivement des sommets  $\varphi_1, \varphi_3$  et  $\varphi_{3\lambda-3}, \varphi_2$  et  $\varphi_{3\lambda-1}$  ou  $\varphi_4, \varphi_{3\lambda-2}$  et  $\varphi_{3\lambda}$ .
  - Pour chaque sommet  $\varphi_i \in \{\varphi_5, \dots, \varphi_{3\lambda-4}\}$  :
    - Si  $i \pmod{3} = 0$ , nous ajoutons le sommet  $\varphi_i$  dans l'obligation  $\Phi_1$ .
    - Si  $i \pmod{3} = 2$ , nous ajoutons le sommet  $\varphi_i$  dans l'obligation  $\Phi_2$ .
    - Si  $i \pmod{3} = 1$ , nous ajoutons le sommet  $\varphi_i$  dans l'obligation  $\Phi_3$ .
  - Nous ajoutons deux obligations notées  $\varrho^1$  et  $\varrho^2$  composées de  $\lambda$  sommets respectivement notés  $\varrho_1^1, \dots, \varrho_\lambda^1$  et  $\varrho_1^2, \dots, \varrho_\lambda^2$ .

- Pour chaque sommet  $v$  précédemment créé à l'exception des sommets  $\varrho_1^1, \dots, \varrho_\lambda^1$  et  $\varphi_3$ , pour  $1 \leq i \leq \lambda$  nous ajoutons l'arête  $(v\varrho_i^1)$ .
- Pour chaque sommet  $v$  précédemment créé à l'exception des sommets  $\varrho_1^2, \dots, \varrho_\lambda^2$  et  $\varphi_4$ , pour  $1 \leq i \leq \lambda$  nous ajoutons l'arête  $(v\varrho_i^2)$ .

Pour un élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de seize obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Pour un triplet  $c_j \in \mathcal{C}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de six obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Ainsi, l'instance générée à partir du problème  $RX3C$  contient  $(66q + 5)\lambda$  sommets,  $(132q + 7)\lambda^2 + 42q\lambda - 2\lambda$  arêtes et  $66q + 5$  obligations. La Construction 12 est illustrée dans la Figure 2.34.

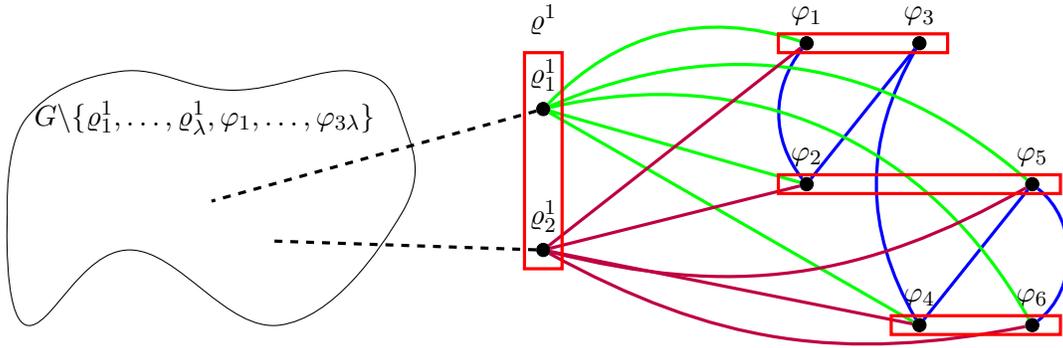


FIGURE 2.34 – Illustration de la Construction 12 pour  $\lambda = 2$ . Les arêtes en pointillés symbolisent les arêtes entre chaque sommet de  $V \setminus \{\varrho_1^1, \dots, \varrho_\lambda^1, \varphi_1, \dots, \varphi_{3\lambda}\}$  et chaque sommet de  $\varrho^1$ . Les sommets et arêtes liés à l'obligation  $\varrho^2$  ne sont pas illustrés.

Chaque sommet de  $V \setminus \{\varrho_1^1, \dots, \varrho_\lambda^1 \cup \varrho_1^2, \dots, \varrho_\lambda^2 \cup \varphi_3 \cup \varphi_4\}$  est à une distance un de tous les sommets des obligations  $\varrho^1$  et  $\varrho^2$ . Chaque sommet de l'obligation  $\varrho^1$  (respectivement  $\varrho^2$ ) est à une distance deux des autres sommets de l'obligation. Le sommet  $\varphi_3$  est à une distance un de tous les sommets de l'obligation  $\varrho^2$ . Le sommet  $\varphi_4$  est à une distance un de tous les sommets de l'obligation  $\varrho^1$ . Les sommets  $\varphi_3$  et  $\varphi_4$  sont à une distance un l'un de l'autre. Ainsi, le graphe a un diamètre deux.

**Théorème 9.** *Déterminer l'existence d'une solution pour le problème IDO est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet, même si le graphe est un graphe de diamètre deux et que les obligations sont stables et  $\lambda$ -équilibrées, pour toute constante  $\lambda \geq 2$ .*

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda = 2\kappa + \beta$  un entier avec  $\kappa \geq 1$  et  $\beta \in \{0, 1\}$ . Soient  $(G, \Pi)$  le graphe et les obligations associées suivant la Construction 7 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \lambda)$ .

Le problème IDO est clairement dans  $\mathcal{NP}$ . De plus, construire  $(G, \Pi)$  à partir de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est polynomial.

Supposons qu'il existe une solution  $S$  pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$ . Construisons un Indépendant Dominant  $S'$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$  :

1. Pour chaque triplet  $c_j$  dans  $S$ , composé des éléments  $x_a, x_b$  et  $x_c$ , nous ajoutons les sommets des obligations  $\sigma_j^a, \sigma_j^b, \sigma_j^c$  et  $\rho_j^2$  dans  $S'$ .
2. Pour chaque triplet  $c_j$  dans  $C \setminus S$  nous ajoutons les sommets des obligations  $\rho_j^1$  et  $\rho_j^3$  dans  $S'$ .
3. Pour chaque sommet  $c_j^i$  dans  $S'$  nous ajoutons l'ensemble des sommets de  $S_j^i \setminus c_j^i$  (tel que défini dans le Lemme 2) dans  $S'$ .
4. Nous ajoutons les sommets de l'obligation  $\Phi_2$  dans  $S'$ .

L'ensemble de sommets indépendants  $S'$  contient un Indépendant Dominant respectant les Obligations pour chaque gadget d'élément et de triplet car  $S$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$  (cela nous garantit que pour chaque gadget d'élément, un seul ensemble  $S_j^i$  est pris dans  $S'$ ). Tous les sommets de  $G$  sont dominés et les obligations  $\Pi$  sont respectées.  $S'$  est un Indépendant Dominant de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$ .

Supposons qu'il existe un Indépendant Dominant  $S$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$ . Supposons que les sommets de l'obligation  $\varrho^1$  (respectivement l'obligation  $\varrho^2$ ) appartiennent à  $S$ . Dans ce cas, le sommet  $\varphi_3$  (respectivement le sommet  $\varphi_4$ ) ne peut pas être dominé, ce qui est une contradiction. Aucun sommet faisant partie des obligations  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \varrho^1$  et  $\varrho^2$  ne peut dominer un sommet extérieur à ces obligations (propriété du connecteur neutre). Construisons une couverture exacte  $S'$  de  $\mathcal{X}$  :

1. Pour chaque sommet  $D(\rho_j^2)$  dans  $S$ , nous ajoutons le triplet  $c_j$  dans  $S'$  (nous savons grâce au Lemme 6 que la présence des sommets de l'obligation  $\rho_j^2$  dans un Indépendant Dominant indique la présence de tous les sommets représentant le triplet  $c_j$ ).

D'après les Lemmes 4, 5 et 6, chaque triplet de  $\mathcal{C}$  couvre soit tous ses éléments, soit aucun. D'après les Lemmes 1, 2 et 3, chaque élément de  $\mathcal{X}$  est couvert par exactement un triplet. Ainsi,  $S'$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$ .  $\square$

Nous avons montré que déterminer l'existence d'un Indépendant Dominant respectant les Obligations est un problème difficile, même pour des topologies de graphes très restreintes pour des obligations stables et équilibrées. Dans la prochaine section, nous relâchons la contrainte d'équilibre. Nous nous penchons alors sur le problème selon la répartition de la taille des obligations dans l'instance.

## 2.3 Déterminer l'existence d'un Indépendant Dominant avec des obligations stables

Dans cette section, nous étudions dans un premier temps le problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations (*IDO*) selon le nombre d'obligations stables et équilibrées. Nous présentons deux résultats :

1. La  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème *IDO* même si l'instance contient  $\sqrt{|V|}$  obligations stables et  $\sqrt{|V|}$ -équilibrées (Théorème 10).
2. La  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème *IDO* même si l'instance contient  $\kappa$  obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Théorème 11).

**Carte 9. Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même pour un  $\kappa$  obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Théorèmes 10 et 11).**

**Départ :** Le problème *RX3C* est  $\mathcal{NP}$ -complet [34].

**Points d'étape :**

1.  $\mathcal{NP}$ -complétude même si l'instance contient  $\sqrt{|V|}$  obligations stables et  $\sqrt{|V|}$ -équilibrées (Construction 13 et 14 - Théorème 10).
2.  $\mathcal{NP}$ -complétude même si l'instance contient  $\kappa$  obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Construction 15 - Théorème 11).

Pour ces deux résultats de  $\mathcal{NP}$ -complétude, nous nous réduisons à une version restreinte du problème de la Couverture Exacte par des Triplets (*RX3C*). Ces réductions partageant un tronc commun, nous montrons dans un premier temps comment construire une instance simple du problème *IDO* depuis une instance du problème *RX3C* (Construction 14 - Lemme 10). Ensuite, nous ajoutons à cette instance un certain nombre de sommets pour obtenir exactement  $\sqrt{|V|}$  obligations stables et  $\sqrt{|V|}$ -équilibrées (Construction 14 - Théorème 10) ou  $\kappa$  obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Construction 15 - Théorème 11).

Par la suite, nous étudions le problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations (*IDO*) avec des obligations stables mais non-équilibrées. Nous présentons quatre résultats :

1. La  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème *IDO* même si le graphe est un chemin (unique) et que les obligations sont stables pour une répartition de leur taille de deux à  $\lambda$ , pour toute constante  $\lambda \geq 2$ . (Théorème 12).
2. La  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème *IDO* même si le graphe est un graphe connexe de forte densité et que les obligations sont stables, pour une répartition de leur taille de deux à  $\lambda$ , pour toute constante  $\lambda \geq 2$  (Théorème 13).
3. La  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème *IDO* même si le graphe est un graphe de faible densité et que les obligations sont stables pour une répartition de leur taille de deux à  $\lambda$ , pour toute constante  $\lambda \geq 2$  (Théorème 14).
4. La  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème *IDO* même si le graphe est un graphe de diamètre deux et que les obligations sont stables pour une répartition de leur taille de deux à  $\lambda$ , pour toute constante  $\lambda \geq 2$  (Théorème 15).

**Carte 10.** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même avec des obligations stables pour une répartition de leur taille (Théorèmes 12, 13, 14 et 15).

**Départ :** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet (Constructions 9, 10, 11 et 12).

**Points d'étape :**

1.  $\mathcal{NP}$ -complétude dans un unique chemin avec des obligations stables de taille au plus  $\lambda$  (Construction 16 - Théorème 12).
2.  $\mathcal{NP}$ -complétude dans un graphe connexe de forte densité, avec des obligations stables (Construction 17 - Théorème 13).
3.  $\mathcal{NP}$ -complétude dans un graphe de faible densité, avec des obligations stables (Construction 18 - Théorème 14).
4.  $\mathcal{NP}$ -complétude dans un graphe de diamètre deux, avec des obligations stables (Construction 19 - Théorème 15).

Chacun de ces résultats s'appuie sur une construction différente pour le problème *IDO*. Cependant ces réductions partagent un point commun. À partir des Constructions 9, 10, 11 et 12, nous ajoutons des obligations supplémentaires n'impactant pas le reste de l'instance pour faire varier la répartition de la taille des obligations. Cette méthode est utilisée à partir d'un chemin (Construction 16 - Théorème 12), d'un graphe de forte densité (Construction 17 - Théorème 13), d'un graphe de faible densité (Construction 18 - Théorème 14) et enfin d'un graphe de diamètre deux (Construction 19 - Théorème 15).

### 2.3.1 Pour exactement $\sqrt{|V|}$ obligations stables et $\sqrt{|V|}$ -équilibrées

**Carte 11.** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même avec  $\sqrt{|V|}$  obligations stables et  $\sqrt{|V|}$ -équilibrées (Théorème 10).

**Départ :** Le problème *RX3C* est  $\mathcal{NP}$ -complet [34].

**Points d'étape :**

1. Création d'une représentation simple du problème *RX3C* (Construction 13 - Lemme 10).
2.  $\mathcal{NP}$ -complétude même si l'instance contient  $\sqrt{|V|}$  obligations stables et  $\sqrt{|V|}$ -équilibrées (Construction 14 - Théorème 10).

Une instance du problème *RX3C* est composée d'un univers  $\mathcal{X}$  contenant  $3q$  éléments et d'une collection  $\mathcal{C}$  de  $3q$  triplets de ces éléments. Une solution est une sous-collection  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$  de taille  $q$  telle que chaque élément est couvert par un unique triplet (*propriété d'unicité*) et chaque triplet couvre ses trois éléments (*propriété de totalité*). Nous créons une *représentation simple* (Construction 13) modélisant les deux parties d'une instance du problème *RX3C*. Nous montrons que cette représentation simple respecte les propriétés d'unicité et de totalité (Lemme 10). Avant de conclure sur la  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème

*IDO* (Théorème 10), nous ajoutons des sommets dans certaines obligations pour obtenir  $\sqrt{|V|}$  obligations stables et  $\sqrt{|V|}$ -équilibrées (Construction 14).

**Idée 13.** *Une représentation simple.*

*Chaque élément et chaque triplet est représenté par un sommet. Chaque sommet-élément partage une arête avec les sommets représentant les triplets auxquels il appartient. Ainsi chaque triplet couvre ses trois éléments, la propriété de totalité est respectée. Pour chaque triplet contenant un élément commun, leurs sommets-triplet correspondants partagent une arête. Ainsi chaque élément est couvert par un unique triplet, la propriété d'unicité est respectée. Enfin, un bloqueur est ajouté afin de garantir que ce sont bien les sommets-triplet qui doivent dominer les sommets-élément et non l'inverse.*

**Construction 13.** *Une représentation simple.*

*Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème *RX3C* avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Nous construisons une instance  $(G = (V, E), \Pi)$  du problème *IDO* comme suit.*

- *Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , nous ajoutons les sommets  $x_i$  et  $x_i^2$ .*
- *Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$ , nous ajoutons le sommet  $c_j$ .*
- *Pour tous triplets  $c_j \neq c_l \in \mathcal{C}$ , si  $c_j$  et  $c_l$  partagent au moins un élément commun alors nous ajoutons l'arête  $(c_j c_l)$ .*
- *Pour chaque triplet  $c_j = \{x_a, x_b, x_c\} \in \mathcal{C}$ , nous ajoutons les arêtes  $(c_j x_a)$ ,  $(c_j x_b)$  et  $(c_j x_c)$ .*
- *Nous ajoutons les sommets  $\beta_1$  et  $\beta_2$ .*
- *Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , nous ajoutons l'arête  $(\beta_1 x_i^2)$  ainsi que l'obligation  $\pi_i^F = \{x_i, x_i^2\}$ .*
- *Nous ajoutons l'obligation  $\pi_T = \{\beta_1, \beta_2\}$ .*
- *Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$ , nous ajoutons l'obligation  $\sigma_j = \{c_j\}$ .*

L'instance générée à partir du problème *RX3C* contient  $9q + 2$  sommets,  $6q + 1$  obligations et au plus  $21q$  arêtes. La Construction 13, ainsi qu'un Indépendant Dominant respectant les Obligations sont illustrés dans la Figure 2.35.

**Lemme 10.** *Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème *RX3C* avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soient  $(G, \Pi)$  le graphe et les obligations obtenues en suivant la Construction 13 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ .*

*Il existe un Indépendant Dominant  $S$  de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$  si et seulement si l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  admet une couverture exacte  $S'$ .*

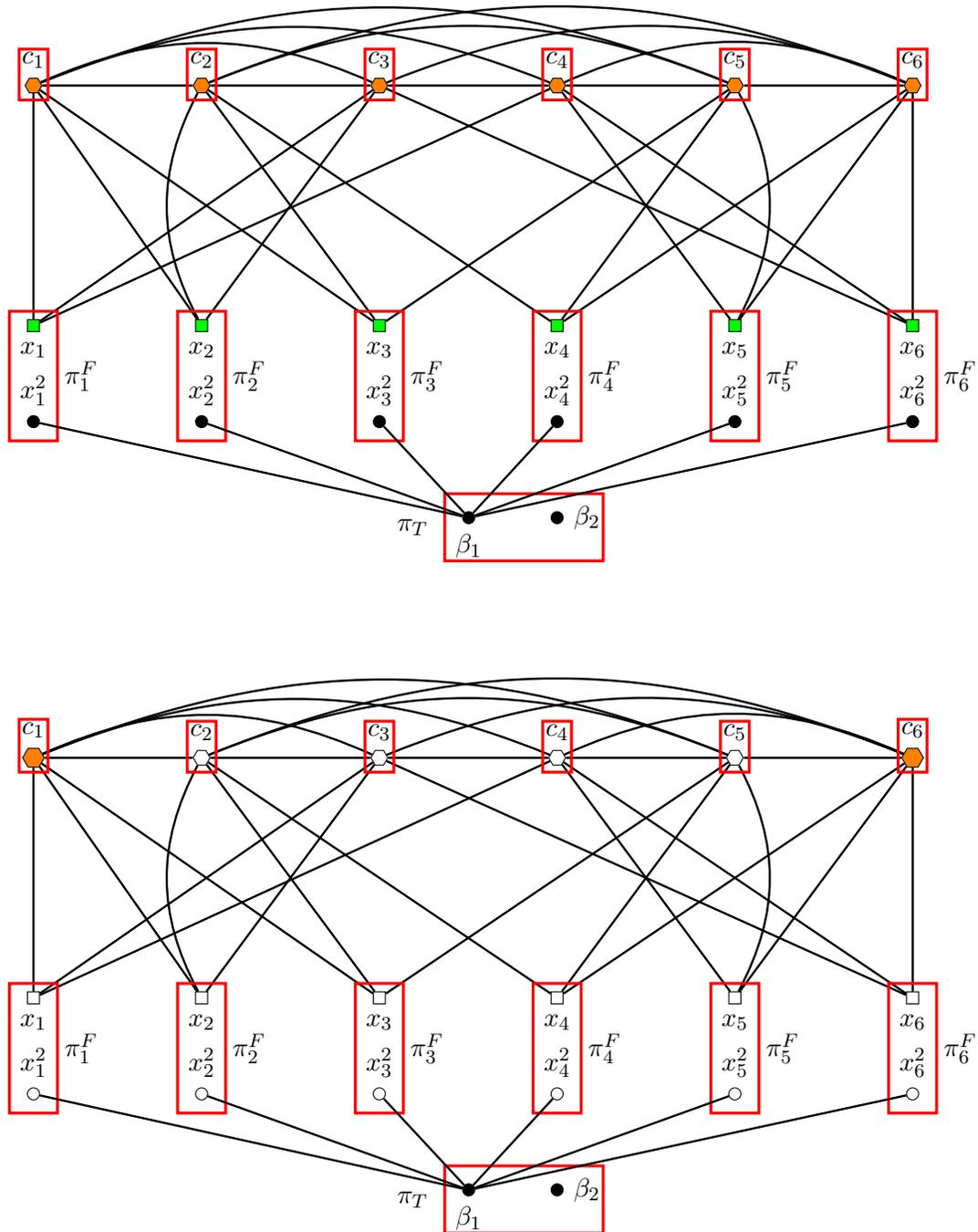


FIGURE 2.35 – Illustration de la Construction 13 pour l’instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$  et  $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$  au dessus. Un Indépendant Dominant  $S$  est représenté par les sommets pleins en dessous.

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soient  $(G, \Pi)$  le graphe et les obligations associées suivant la Construction 13 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ .

Supposons qu'il existe une solution  $S$  pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$ . Construisons un Indépendant Dominant  $S'$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$  :

1. Pour chaque triplet  $c_j \in S$ , nous ajoutons le sommet  $c_j$  dans  $S'$ .
2. Nous ajoutons les sommets  $\beta_1$  et  $\beta_2$  dans  $S'$ .

L'ensemble de sommets indépendants  $S'$  contient un Indépendant Dominant respectant les Obligations. En effet, grâce aux propriétés d'unicité et de totalité, les sommets-triplet présents dans  $S'$  partagent une arête avec tous les sommets-élément ainsi qu'avec tous les sommets-triplet absents dans  $S'$ .  $S'$  est un Indépendant Dominant de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$ .

Supposons qu'il existe un Indépendant Dominant  $S$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$ . Construisons une couverture exacte  $S'$  de  $\mathcal{X}$  :

1. Pour chaque sommet-triplet  $c_j$  dans  $S$ , nous mettons le triplet  $c_j$  dans  $S'$ .

Les sommets  $\beta_1$  et  $\beta_2$  de l'obligation  $\pi_T$  appartiennent obligatoirement à  $S$ . Au contraire, aucun sommet des obligations  $\pi_i^F$  ne peut appartenir à  $S$ . Ainsi, chaque sommet-élément est dominé par un sommet-triplet. Par construction, chaque sommet-triplet domine les trois sommets-élément avec lesquels il partage une arête (propriété de totalité) et chaque sommet-élément ne peut être dominé que par un seul sommet-triplet (propriété d'unicité). Ainsi,  $S'$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$ .  $\square$

**Idée 14.** Une instance avec  $\sqrt{|V|}$  obligations.

La Construction 13 permet d'obtenir une instance avec  $9q + 2$  sommets,  $6q + 1$  obligations et au plus  $21q$  arêtes. Nous proposons des modifications pour obtenir  $\sqrt{|V|}$  obligations  $\sqrt{|V|}$ -équilibrées. Aucune obligation ne contient plus de  $3q + 2$  sommets. Ainsi, nous allons ajouter des sommets dans chacune des  $6q + 1$  obligations afin qu'elles contiennent toutes exactement  $6q + 1$  sommets.

**Construction 14.** Une instance avec  $\sqrt{|V|}$  obligations.

Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Nous construisons une instance  $(G = (V, E), \Pi)$  du problème  $IDO$  comme suit.

- Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , nous ajoutons les sommets  $x_i$  et  $x_i^2$ .
- Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$ , nous ajoutons le sommet  $c_j$ .
- Pour tous triplets  $c_j \neq c_l \in \mathcal{C}$ , si  $c_j$  et  $c_l$  partagent au moins un élément commun alors nous ajoutons l'arête  $(c_j c_l)$ .
- Pour chaque triplet  $c_j = \{x_a, x_b, x_c\} \in \mathcal{C}$ , nous ajoutons les arêtes  $(c_j x_a)$ ,  $(c_j x_b)$  et  $(c_j x_c)$ .
- Nous ajoutons les sommets  $\beta_1$  et  $\beta_2$ .
- Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , nous ajoutons l'arête  $(\beta_1 x_i^2)$  ainsi que l'obligation  $\pi_i^F = \{x_i, x_i^2\}$ .

- Nous ajoutons l'obligation  $\pi_T = \{\beta_1, \beta_2\}$ .
- Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$ , nous ajoutons l'obligation  $\sigma_j = \{c_j\}$ .
- Nous créons  $6q - 1$  sommets notés  $\beta_3, \dots, \beta_{6q+1}$  que nous ajoutons dans l'obligation  $\pi_T$ .
- Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , nous créons  $6q - 1$  sommets notés  $x_i^3, \dots, x_i^{6q+1}$ , que nous ajoutons dans l'obligation  $\pi_i^F$ .
- Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , pour  $3 \leq k \leq 6q + 1$ , nous ajoutons l'arête  $(\beta_1 x_i^k)$ .
- Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$ , nous créons  $6q - 1$  sommets notés  $c_j^2, \dots, c_j^{6q+1}$ , que nous ajoutons dans l'obligation  $\sigma_j$ .
- Pour tous triplets  $c_j \neq c_l \in \mathcal{C}$ , si  $c_j$  et  $c_l$  partagent au moins un élément commun alors nous ajoutons les arêtes  $(c_j^2 c_l), \dots, (c_j^{6q+1} c_l)$ .

L'instance générée à partir du problème  $RX3C$  contient  $36q^2 + 12q + 1$  sommets,  $6q + 1$  obligations et au plus  $72q^2 + 18q$  arêtes.

**Théorème 10.** *Déterminer l'existence d'une solution pour le problème IDO est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet, même pour  $\sqrt{|V|}$  obligations stables et  $\sqrt{|V|}$ -équilibrées.*

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soient  $(G, \Pi)$  le graphe et les obligations associées suivant la Construction 14 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ .

Supposons qu'il existe une solution  $S$  pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$ . Construisons un Indépendant Dominant  $S'$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$  :

1. Pour chaque triplet  $c_j \in S$ , nous ajoutons les sommets de l'obligation  $\sigma_j$  dans  $S'$ .
2. Nous ajoutons les sommets de l'obligation  $\pi_T$  dans  $S'$ .

L'ensemble de sommets indépendants  $S'$  contient un Indépendant Dominant respectant les Obligations. En effet, grâce aux propriétés d'unicité et de totalité, les sommets-triplet présents dans  $S'$  partagent une arête avec tous les sommets-élément ainsi qu'avec tous les sommets-triplet absents dans  $S'$ .  $S'$  est un Indépendant Dominant de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$ .

Supposons qu'il existe un Indépendant Dominant  $S$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$ . Construisons une couverture exacte  $S'$  de  $\mathcal{X}$  :

1. Pour chaque sommet-triplet  $c_j$  dans  $S$ , nous mettons le triplet  $c_j$  dans  $S'$ .

Tous les sommets de l'obligation  $\pi_T$  appartiennent obligatoirement à  $S$ . Au contraire, aucun sommet des obligations  $\pi_i^F$  ne peut appartenir à  $S$ . Ainsi, chaque sommet-élément est dominé par un sommet-triplet. Par construction, chaque sommet-triplet domine les trois sommets-élément avec lesquels il partage une arête (propriété de totalité) et chaque sommet-élément ne peut être dominé que par un seul sommet-triplet (propriété d'unicité). Ainsi,  $S'$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$ .  $\square$

### 2.3.2 Pour $\kappa$ obligations stables et $\lambda$ -équilibrées

**Carte 12.** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même avec  $\kappa$  obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Théorème 11).

**Départ :** Une représentation simple du problème *RX3C* (Construction 13).

**Points d'étape :**

1.  $\mathcal{NP}$ -complétude même si l'instance contient  $\kappa$  obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Construction 15 - Théorème 11).

Une instance du problème *RX3C* est composée d'un univers  $\mathcal{X}$  contenant  $3q$  éléments et d'une collection  $\mathcal{C}$  de  $3q$  triplets de ces éléments. Une solution est une sous-collection  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$  de taille  $q$  telle que chaque élément est couvert par un unique triplet (*propriété d'unicité*) et chaque triplet couvre ses trois éléments (*propriété de totalité*). Nous complétons la Construction 13 afin d'obtenir proportionnellement plus d'obligations ou de plus grandes obligations. Pour faire varier le nombre d'obligations ainsi que leur taille, nous ajoutons un certain nombre de sommets (Construction 15). Nous concluons alors sur la  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème *IDO* (Théorème 11).

**Idée 15.** Une instance avec au moins  $\kappa$  obligations  $\lambda$ -équilibrées.

La Construction 13 permet d'obtenir une instance avec  $9q + 2$  sommets,  $6q + 1$  obligations et au plus  $21q$  arêtes. Chaque obligation contient au plus deux sommets. Nous allons ajouter un certain nombre de sommets dans chaque obligation pour obtenir des obligations stables  $\lambda$ -équilibrées pour tout  $\lambda \geq 2$ . Ensuite, nous rajoutons de nouvelles obligations stables  $\lambda$ -équilibrées jusqu'à obtenir la proportion d'obligations souhaitée selon le nombre de sommets.

**Construction 15.** Une instance avec au moins  $\kappa$  obligations  $\lambda$ -équilibrées.

Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème *RX3C* avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soient  $\lambda \geq 2$  et  $\kappa \geq 6q + 1$  deux entiers. Nous construisons une instance  $(G = (V, E), \Pi)$  du problème *IDO* comme suit.

- Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , nous ajoutons les sommets  $x_i$  et  $x_i^2, \dots, x_i^\lambda$ .
- Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$ , nous ajoutons le sommet  $c_j$ .
- Pour tous triplets  $c_j \neq c_l \in \mathcal{C}$ , si  $c_j$  et  $c_l$  partagent au moins un élément commun alors nous ajoutons l'arête  $(c_j c_l)$ .
- Pour chaque triplet  $c_j = \{x_a, x_b, x_c\} \in \mathcal{C}$ , nous ajoutons les arêtes  $(c_j x_a)$ ,  $(c_j x_b)$  et  $(c_j x_c)$ .
- Nous ajoutons les sommets  $\beta_1, \dots, \beta_\lambda$ .
- Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , nous ajoutons les arêtes  $(\beta_1 x_i^2), \dots, (\beta_1 x_i^\lambda)$  ainsi que l'obligation  $\pi_i^F = \{x_i, x_i^2, \dots, x_i^\lambda\}$ .
- Nous ajoutons l'obligation  $\pi_\beta^T = \{\beta_1, \dots, \beta_\lambda\}$ .
- Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$ , nous ajoutons l'obligation  $\sigma_j = \{c_j\}$ .

- Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$ , nous créons  $\lambda - 1$  sommets notés  $c_j^2, \dots, c_j^\lambda$ , que nous ajoutons dans l'obligation  $\sigma_j$ .
- Pour tous triplets  $c_j \neq c_l \in \mathcal{C}$ , si  $c_j$  et  $c_l$  partagent au moins un élément commun alors nous ajoutons les arêtes  $(c_j^2 c_l), \dots, (c_j^\lambda c_l)$ .
- Nous ajoutons  $k = \kappa - (6q + 1)$  obligations notées  $\pi_1^T, \dots, \pi_k^T$ , respectivement composées de  $\lambda$  sommets indépendants.

L'instance générée à partir du problème  $RX3C$  contient  $\kappa\lambda$  sommets,  $\kappa$  obligations et au plus  $21q\lambda - 3q$  arêtes.

Avant de montrer que le problème  $IDO$  est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet dans notre cas restreint, nous pouvons noter deux remarques :

1. Si  $\kappa < \lambda$  alors  $\kappa < \sqrt{V}$ . Lorsque la taille des obligations tend vers l'infini, le nombre d'obligations tend vers zéro, nous rapprochant des cas polynomiaux lorsque le nombre d'obligations est constant.
2. Si  $\kappa > \lambda$  alors  $\kappa > \sqrt{V}$ . Lorsque le nombre d'obligations tend vers l'infini, la taille des obligations tend vers zéro, nous rapprochant du cas polynomial lorsque chaque obligation contient un seul sommet.

**Théorème 11.** *Déterminer l'existence d'une solution pour le problème  $IDO$  est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet, même pour  $\kappa$  obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées, pour toute constante  $\lambda \geq 2$ , avec  $\kappa = \frac{|V|}{\lambda}$ .*

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soient  $\lambda \geq 2$  et  $\kappa \geq 6q + 1$  deux entiers. Soient  $(G, \Pi)$  le graphe et les obligations associées suivant la Construction 14 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \kappa, \lambda)$ .

Supposons qu'il existe une solution  $S$  pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$ . Construisons un Indépendant Dominant  $S'$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$  :

1. Pour chaque triplet  $c_j \in S$ , nous ajoutons les sommets de l'obligation  $\sigma_j$  dans  $S'$ .
2. Nous ajoutons les sommets de l'obligation  $\pi_\beta^T$  dans  $S'$ .
3. Nous ajoutons les sommets des obligations  $\pi_1^T, \dots, \pi_k^T$  dans  $S'$ .

L'ensemble de sommets indépendants  $S'$  contient un Indépendant Dominant respectant les Obligations. En effet, grâce aux propriétés d'unicité et de totalité, les sommets-triplet présents dans  $S'$  partagent une arête avec tous les sommets-élément ainsi qu'avec tous les sommets-triplet absents dans  $S'$ .  $S'$  est un Indépendant Dominant de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$ .

Supposons qu'il existe un Indépendant Dominant  $S$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$ . Construisons une couverture exacte  $S'$  de  $\mathcal{X}$  :

1. Pour chaque sommet-triplet  $c_j$  dans  $S$ , nous mettons le triplet  $c_j$  dans  $S'$ .

Tous les sommets de l'obligation  $\pi_T$  appartiennent obligatoirement à  $S$ . Au contraire, aucun sommet des obligations  $\pi_i^F$  ne peut appartenir à  $S$ . Ainsi, chaque sommet-élément est dominé par un sommet-triplet. Par construction, chaque sommet-triplet domine les trois sommets-élément avec lesquels il partage une arête (propriété de totalité) et chaque sommet-élément ne peut être dominé que par un seul sommet-triplet (propriété d'unicité). Ainsi,  $S'$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$ .  $\square$

### 2.3.3 Dans un chemin

**Carte 13.** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un chemin (unique) avec des obligations stables de taille au plus  $\lambda$ , avec  $\lambda \geq 2$  (Théorème 12).

**Départ :** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un unique chemin avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Construction 9).

**Points d'étape :**

1.  $\mathcal{NP}$ -complétude dans un unique chemin avec des obligations stables de taille au plus  $\lambda$  (Construction 16 - Théorème 12).

Une instance du problème *RX3C* est composée d'un univers  $\mathcal{X}$  contenant  $3q$  éléments et d'une collection  $\mathcal{C}$  de  $3q$  triplets de ces éléments. L'instance  $(G, \Pi)$  associée suivant la Construction 9 depuis l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est un unique chemin contenant  $72q\lambda^2 + (66q - 3)\lambda$  sommets,  $72q\lambda^2 + (66q - 3)\lambda - 1$  arêtes et  $72q\lambda + 66q - 3$  obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Pour étendre cette construction pour des obligations non-équilibrées, nous rajoutons un certain nombre de connecteurs neutres ainsi qu'une obligation contenant un seul sommet (Construction 16). Nous concluons alors sur la  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème *IDO* (Théorème 12).

**Idée 16.** *Construire un chemin unique avec des obligations stables de taille au plus  $\lambda$ . Nous avons vu comment construire un unique chemin avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour tout  $\lambda \geq 2$  (Construction 9). Pour obtenir un unique chemin avec des obligations de taille au plus  $\lambda$ , nous prolongeons le chemin par des gadgets de connecteur neutre (Construction 8) ainsi qu'un sommet seul dans son obligation.*

**Construction 16.** *Construire un chemin unique avec des obligations stables de taille au plus  $\lambda$ .*

*Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème *RX3C* avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda = 2\kappa + \beta$  un entier avec  $\kappa \geq 1$  et  $\beta \in \{0, 1\}$ . Nous construisons une instance  $(G = (V, E), \Pi)$  du problème *IDO* comme suit :*

- Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$  :
  - Soient  $c_j, c_k, c_l \in \mathcal{C}$  avec  $j < k < l$  les trois triplets contenant l'élément  $x_i$ .
  - Nous ajoutons seize obligations notées  $\pi_i^T, \pi_i^F, \pi_i^1, \dots, \pi_i^{11}, x_i^1, x_i^2$  et  $x_i^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants et de leurs copies éventuelles. Dans chaque obligation  $\pi$  et  $x$  nous considérons un sommet gauche et

un sommet droit respectivement notés  $G(\pi)$  et  $D(\pi)$  ou  $G(x)$  et  $D(x)$ , ainsi que leurs copies respectives notées  $G_1(\pi), \dots, G_{\kappa-1}(\pi)$  et  $D_1(\pi), \dots, D_{\kappa-1}(\pi)$  ou  $G_1(x), \dots, G_{\kappa-1}(x)$  et  $D_1(x), \dots, D_{\kappa-1}(x)$ . Si  $\beta = 1$  alors nous ajoutons également un sommet bis noté  $B(\pi)$  dans chaque obligation  $\pi$  et un sommet bis noté  $B(x)$  dans chaque obligation  $x$ .

- Nous ajoutons les sommets  $c_j^i, c_k^i, c_l^i$  représentant les triplets contenant l'élément  $x_i$  ainsi que leurs copies respectives  $c_{j,1}^i, \dots, c_{j,\kappa-1}^i, c_{k,1}^i, \dots, c_{k,\kappa-1}^i$  et  $c_{l,1}^i, \dots, c_{l,\kappa-1}^i$ .
- L'ensemble des copies d'un sommet  $v$  est noté  $\Lambda(v)$ .
- Nous ajoutons les arêtes  $(D(\pi_i^T)G(\pi_i^F)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^1)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^2)), (G(\pi_i^1)D(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)G(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)D(\pi_i^2)), (G(\pi_i^2)G(\pi_i^3)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^5)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^6)), (D(\pi_i^4)G(\pi_i^9)), (G(\pi_i^5)D(\pi_i^7)), (D(\pi_i^5)D(\pi_i^6)), (D(\pi_i^5)G(\pi_i^7)), (G(\pi_i^6)D(\pi_i^8)), (D(\pi_i^6)G(\pi_i^8)), (D(\pi_i^7)G(\pi_i^{10})), (D(\pi_i^8)G(\pi_i^{11})), (D(\pi_i^9)G(x_i^1)), (D(\pi_i^{10})G(x_i^2)), (D(\pi_i^{11})G(x_i^3)), (D(x_i^1)c_j^i), (D(x_i^2)c_k^i) et  $(D(x_i^3)c_l^i)$ .$
- Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\pi_i^T)G_\iota(\pi_i^F)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^1)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^2)), (G_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^4)), (D_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^2)), (G_\iota(\pi_i^2)G_\iota(\pi_i^3)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^5)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^4)G_\iota(\pi_i^9)), (G_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^7)), (D_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^5)G_\iota(\pi_i^7)), (G_\iota(\pi_i^6)D_\iota(\pi_i^8)), (D_\iota(\pi_i^6)G_\iota(\pi_i^8)), (D_\iota(\pi_i^7)G_\iota(\pi_i^{10})), (D_\iota(\pi_i^8)G_\iota(\pi_i^{11})), (D_\iota(\pi_i^9)G_\iota(x_i^1)), (D_\iota(\pi_i^{10})G_\iota(x_i^2)), (D_\iota(\pi_i^{11})G_\iota(x_i^3)), (D_\iota(x_i^1)c_{j,\iota}^i), (D_\iota(x_i^2)c_{k,\iota}^i) et  $(D_\iota(x_i^3)c_{l,\iota}^i)$ .$
- Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(B(\pi_i^T)B(\pi_i^F)), (B(\pi_i^1)B(\pi_i^2)), (B(\pi_i^1)B(\pi_i^4)), (B(\pi_i^3)B(\pi_i^5)), (B(\pi_i^3)B(\pi_i^6)), (B(\pi_i^5)B(\pi_i^7)), (B(\pi_i^6)B(\pi_i^8)), (B(\pi_i^9)B(x_i^1)), (B(\pi_i^{10})B(x_i^2)) et  $(B(\pi_i^{11})B(x_i^3))$ .$
- Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$  :
  - Soient  $x_a, x_b, x_c \in \mathcal{X}$  les trois éléments du triplet  $c_j$ . Soient  $c_j^a, c_j^b$  et  $c_j^c$  les trois sommets-triplet tels qu'ils ont été créés précédemment, ainsi que  $c_{j,\iota}^a, c_{j,\iota}^b$  et  $c_{j,\iota}^c$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ) leurs copies respectives éventuelles.
  - Nous ajoutons trois obligations notées  $\sigma_j^a, \sigma_j^b$  et  $\sigma_j^c$ , composées respectivement des sommets  $c_j^a$  et  $\Lambda(c_j^a), c_j^b$  et  $\Lambda(c_j^b)$  ou  $c_j^c$  et  $\Lambda(c_j^c)$  ainsi que d'un sommet droit noté respectivement  $D(\sigma_j^a), D(\sigma_j^b)$  et  $D(\sigma_j^c)$  et de copies de ce sommet droit notées respectivement  $D_\iota(\sigma_j^a), D_\iota(\sigma_j^b)$  et  $D_\iota(\sigma_j^c)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ). Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons un sommet bis noté  $B(\sigma_j^a)$  dans l'obligation  $\sigma_j^a$ , un sommet bis noté  $B(\sigma_j^b)$  dans l'obligation  $\sigma_j^b$  et un sommet bis noté  $B(\sigma_j^c)$  dans l'obligation  $\sigma_j^c$ .
  - Nous ajoutons trois obligations notées  $\rho_j^1, \rho_j^2$  et  $\rho_j^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants et de leurs copies éventuelles. Dans chaque obligation  $\rho$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\rho)$  et  $D(\rho)$  ainsi que leurs copies respectives  $G_\iota(\rho)$  et  $D_\iota(\rho)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ). Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons un sommet bis noté  $B(\rho_j^1)$  dans l'obligation  $\rho_j^1$ , un sommet bis noté  $B(\rho_j^2)$  dans l'obligation  $\rho_j^2$  et un sommet bis noté  $B(\rho_j^3)$  dans l'obligation  $\rho_j^3$ .

- Nous ajoutons les arêtes  $(D(\sigma_j^a)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^b)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^c)G(\rho_j^3)), (D(\rho_j^1)G(\rho_j^2))$  et  $(D(\rho_j^2)D(\rho_j^3))$ .
- Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\sigma_j^a)G_\iota(\rho_j^1)), (D_\iota(\sigma_j^b)G_\iota(\rho_j^1)), (D_\iota(\sigma_j^c)G_\iota(\rho_j^3)), (D_\iota(\rho_j^1)G_\iota(\rho_j^2))$  et  $(D_\iota(\rho_j^2)D_\iota(\rho_j^3))$ .
- Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(B(\sigma_j^a)B(\rho_j^1)), (B(\sigma_j^b)B(\rho_j^1)), (B(\sigma_j^c)B(\rho_j^3))$  et  $(B(\rho_j^2)B(\rho_j^3))$ .
- Soient  $P_1, \dots, P_p$  les  $p$  chemins disjoints précédemment créés.
- Pour  $1 \leq l \leq p - 1$  :
  - Soient  $u_l$  et  $v_l$  les deux extrémités du chemin  $P_l$ . Soient  $u_{l+1}$  et  $v_{l+1}$  les deux extrémités du chemin  $P_{l+1}$ .
  - Nous ajoutons un chemin  $\varphi_1^l, \dots, \varphi_{3\lambda}^l$ .
  - Nous ajoutons trois obligations  $\Phi_1^l, \Phi_2^l$  et  $\Phi_3^l$ , composées respectivement des sommets  $\varphi_1^l, \varphi_3^l$  et  $\varphi_{3\lambda-3}^l, \varphi_2^l$  et  $\varphi_{3\lambda-1}^l$  ou  $\varphi_4^l, \varphi_{3\lambda-2}^l$  et  $\varphi_{3\lambda}^l$ .
  - Pour chaque sommet  $\varphi_i^l \in \{\varphi_5^l, \dots, \varphi_{3\lambda-4}^l\}$  :
    - Si  $i \pmod{3} = 0$ , nous ajoutons le sommet  $\varphi_i^l$  dans l'obligation  $\Phi_1^l$ .
    - Si  $i \pmod{3} = 2$ , nous ajoutons le sommet  $\varphi_i^l$  dans l'obligation  $\Phi_2^l$ .
    - Si  $i \pmod{3} = 1$ , nous ajoutons le sommet  $\varphi_i^l$  dans l'obligation  $\Phi_3^l$ .
    - Nous ajoutons les arêtes  $(v_l\varphi_1^l)$  et  $(\varphi_{3\lambda}^l u_{l+1})$ .
- Pour  $2 \leq \iota \leq \lambda$  :
  - Nous ajoutons un chemin  $B(\varphi_1^\iota), \dots, B(\varphi_{3\iota}^\iota)$ .
  - Nous ajoutons trois obligations  $B(\Phi_1^\iota), B(\Phi_2^\iota)$  et  $B(\Phi_3^\iota)$ , composées respectivement des sommets  $B(\varphi_1^\iota), B(\varphi_3^\iota)$  et  $B(\varphi_{3\iota-3}^\iota), B(\varphi_2^\iota)$  et  $B(\varphi_{3\iota-1}^\iota)$  ou  $B(\varphi_4^\iota), B(\varphi_{3\iota-2}^\iota)$  et  $B(\varphi_{3\iota}^\iota)$ .
  - Pour chaque sommet  $B(\varphi_i^\iota) \in \{B(\varphi_5^\iota), \dots, B(\varphi_{3\iota-4}^\iota)\}$  :
    - Si  $i \pmod{3} = 0$ , nous ajoutons le sommet  $B(\varphi_i^\iota)$  dans l'obligation  $B(\Phi_1^\iota)$ .
    - Si  $i \pmod{3} = 2$ , nous ajoutons le sommet  $B(\varphi_i^\iota)$  dans l'obligation  $B(\Phi_2^\iota)$ .
    - Si  $i \pmod{3} = 1$ , nous ajoutons le sommet  $B(\varphi_i^\iota)$  dans l'obligation  $B(\Phi_3^\iota)$ .
  - Si  $\iota = 2$ , nous ajoutons l'arête  $(B(\varphi_1^\iota)v_p)$ .  
Sinon nous ajoutons l'arête  $(B(\varphi_1^\iota)B(\varphi_{3(\iota-1)}^{\iota-1}))$ .
- Nous ajoutons l'obligation  $B(\Phi_2^1)$ , composée du sommet  $B(\varphi^1)$ , ainsi que l'arête  $(B(\varphi^1)B(\varphi_{3\lambda}^1))$ .

Pour un élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de seize obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Pour un triplet  $c_j \in \mathcal{C}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de six obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Les gadgets d'élément et de triplet forment  $24q\lambda$  chemins disjoints. Pour deux chemins disjoints, le gadget de connecteur neutre associé est composé d'un chemin et de trois obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Ainsi, l'instance générée à partir du problème

$RX3C$  contient  $72q\lambda^2 + (66q - 3)\lambda + \frac{3(\lambda^2 + \lambda)}{2}$  sommets,  $72q\lambda^2 + (66q - 3)\lambda - 1 + \frac{3(\lambda^2 + \lambda)}{2}$  arêtes et  $72q\lambda + 66q - 3 + 3\lambda$  obligations.

Notons qu'en suivant la méthode définie dans la Construction 16, il est possible de faire varier la proportion d'obligations de différentes taille. Pour tout  $\lambda \geq 2$ , il est possible d'ajouter un nombre arbitrairement grand d'obligations de taille  $\lambda$  tout en conservant la topologie du chemin. Ainsi le problème  $IDO$  est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet pour toute répartition de la taille des obligations, même si le graphe est un chemin. Il n'est cependant pas possible d'atteindre 25% d'obligations de taille un puisqu'elles doivent être connectées au chemin par un connecteur neutre.

**Théorème 12.** *Déterminer l'existence d'une solution pour le problème  $IDO$  est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet, même si le graphe est un chemin (unique) et que les obligations sont stables pour une répartition de leur taille de deux à  $\lambda$ , pour toute constante  $\lambda \geq 2$ .*

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda = 2\kappa + \beta$  un entier avec  $\kappa \geq 1$  et  $\beta \in \{0, 1\}$ . Soient  $(G, \Pi)$  le graphe et les obligations associées suivant la Construction 7 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \lambda)$ .

Le problème  $IDO$  est clairement dans  $\mathcal{NP}$ . De plus, construire  $(G, \Pi)$  à partir de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est polynomial.

Supposons qu'il existe une solution  $S$  pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$ . Construisons un Indépendant Dominant  $S'$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$  :

1. Pour chaque triplet  $c_j$  dans  $S$ , composé des éléments  $x_a, x_b$  et  $x_c$ , nous ajoutons les sommets des obligations  $\sigma_j^a, \sigma_j^b, \sigma_j^c$  et  $\rho_j^2$  dans  $S'$ .
2. Pour chaque triplet  $c_j$  dans  $C \setminus S$  nous ajoutons les sommets des obligations  $\rho_j^1$  et  $\rho_j^3$  dans  $S'$ .
3. Pour chaque sommet  $c_j^i$  dans  $S'$  nous ajoutons l'ensemble des sommets de  $S_j^i \setminus c_j^i$  (tel que défini dans le Lemme 2) dans  $S'$ .
4. Pour  $1 \leq l \leq 24q\lambda - 1$ , nous ajoutons les sommets de l'obligation  $\Phi_2^l$  dans  $S'$ .
5. Pour  $1 \leq \iota \leq \lambda$ , nous ajoutons les sommets de l'obligation  $B(\Phi_2^\iota)$ .

L'ensemble de sommets indépendants  $S'$  contient un Indépendant Dominant respectant les Obligations pour chaque gadget d'élément et de triplet car  $S$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$  (cela nous garantit que pour chaque gadget d'élément, un seul ensemble  $S_j^i$  est pris dans  $S'$ ), ainsi que pour chaque gadget de connecteur neutre. Tous les sommets de  $G$  sont dominés et les obligations  $\Pi$  sont respectées.  $S'$  est un Indépendant Dominant de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$ .

Supposons qu'il existe un Indépendant Dominant  $S$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$ . Construisons une couverture exacte  $S'$  de  $\mathcal{X}$  :

1. Pour chaque sommet  $D(\rho_j^2)$  dans  $S$ , nous ajoutons le triplet  $c_j$  dans  $S'$  (nous savons grâce au Lemme 6 que la présence des sommets de l'obligation  $\rho_j^2$  dans un Indépendant Dominant indique la présence de tous les sommets représentant le triplet  $c_j$ ).

D'après les Lemmes 4, 5 et 6, chaque triplet de  $\mathcal{C}$  couvre soit tous ses éléments, soit aucun. D'après les Lemmes 1, 2 et 3, chaque élément de  $\mathcal{X}$  est couvert par exactement un triplet. Ainsi,  $S'$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$ .  $\square$

### 2.3.4 Dans un graphe de forte densité

**Carte 14.** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un graphe connexe de forte densité avec des obligations stables de taille au plus  $\lambda$ , avec  $\lambda \geq 2$  (Théorème 13).

**Départ :** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un graphe connexe de forte densité, avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Construction 10).

**Points d'étape :**

1.  $\mathcal{NP}$ -complétude dans un graphe connexe de forte densité, avec des obligations stables (Construction 17 - Théorème 13).

Une instance du problème *RX3C* est composée d'un univers  $\mathcal{X}$  contenant  $3q$  éléments et d'une collection  $\mathcal{C}$  de  $3q$  triplets de ces éléments. L'instance  $(G, \Pi)$  associée suivant la Construction 10 depuis l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est un graphe de forte densité contenant  $\lambda\Omega + 66q\lambda + 3\lambda$  sommets,  $\frac{\lambda^2\Omega^2 - \lambda^2\Omega}{2} + 66q\lambda + 3\lambda$  arêtes et  $\Omega + 66q + 1$  obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Pour étendre cette construction pour des obligations non-équilibrées, nous rajoutons un certain nombre de connecteurs neutres ainsi qu'une obligation contenant un seul sommet (Construction 17). Nous concluons alors sur la  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème *IDO* (Théorème 13).

**Idée 17.** Construire un graphe de forte densité avec des obligations stables de taille au plus  $\lambda$ .

*Nous avons vu comment construire un graphe connexe de forte densité avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour tout  $\lambda \geq 2$  (Construction 10). Pour obtenir un graphe connexe de forte densité avec des obligations de taille au plus  $\lambda$ , nous rajoutons des gadgets de connecteur neutre (Construction 8) ainsi qu'un sommet seul dans son obligation.*

**Construction 17.** Construire un graphe de forte densité avec des obligations stables de taille au plus  $\lambda$ .

Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème *RX3C* avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda = 2\kappa + \beta$  un entier avec  $\kappa \geq 1$  et  $\beta \in \{0, 1\}$ . Nous construisons une instance  $(G = (V, E), \Pi)$  du problème *IDO* comme suit :

- Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$  :
  - Soient  $c_j, c_k, c_l \in \mathcal{C}$  avec  $j < k < l$  les trois triplets contenant l'élément  $x_i$ .
  - Nous ajoutons seize obligations notées  $\pi_i^T, \pi_i^F, \pi_i^1, \dots, \pi_i^{11}, x_i^1, x_i^2$  et  $x_i^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants et de leurs copies éventuelles. Dans chaque obligation  $\pi$  et  $x$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\pi)$  et  $D(\pi)$  ou  $G(x)$  et  $D(x)$ , ainsi que leurs copies respectives notées  $G_1(\pi), \dots, G_{\kappa-1}(\pi)$  et  $D_1(\pi), \dots, D_{\kappa-1}(\pi)$  ou  $G_1(x), \dots, G_{\kappa-1}(x)$  et  $D_1(x), \dots, D_{\kappa-1}(x)$ . Si  $\beta = 1$  alors nous ajoutons également un sommet bis noté  $B(\pi)$  dans chaque obligation  $\pi$  et un sommet bis noté  $B(x)$  dans chaque obligation  $x$ .

- Nous ajoutons les sommets  $c_j^i, c_k^i, c_l^i$  représentant les triplets contenant l'élément  $x_i$  ainsi que leurs copies respectives  $c_{j,1}^i, \dots, c_{j,\kappa-1}^i, c_{k,1}^i, \dots, c_{k,\kappa-1}^i$  et  $c_{l,1}^i, \dots, c_{l,\kappa-1}^i$ .
- L'ensemble des copies d'un sommet  $v$  est noté  $\Lambda(v)$ .
- Nous ajoutons les arêtes  $(D(\pi_i^T)G(\pi_i^F)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^1)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^2)), (G(\pi_i^1)D(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)G(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)D(\pi_i^2)), (G(\pi_i^2)G(\pi_i^3)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^5)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^6)), (D(\pi_i^4)G(\pi_i^9)), (G(\pi_i^5)D(\pi_i^7)), (D(\pi_i^5)D(\pi_i^6)), (D(\pi_i^5)G(\pi_i^7)), (G(\pi_i^6)D(\pi_i^8)), (D(\pi_i^6)G(\pi_i^8)), (D(\pi_i^7)G(\pi_i^{10})), (D(\pi_i^8)G(\pi_i^{11})), (D(\pi_i^9)G(x_i^1)), (D(\pi_i^{10})G(x_i^2)), (D(\pi_i^{11})G(x_i^3)), (D(x_i^1)c_j^i), (D(x_i^2)c_k^i) et  $(D(x_i^3)c_l^i)$ .$
- Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\pi_i^T)G_\iota(\pi_i^F)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^1)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^2)), (G_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^4)), (D_\iota(\pi_i^1)G_\iota(\pi_i^4)), (D_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^2)), (G_\iota(\pi_i^2)G_\iota(\pi_i^3)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^5)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^4)G_\iota(\pi_i^9)), (G_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^7)), (D_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^5)G_\iota(\pi_i^7)), (G_\iota(\pi_i^6)D_\iota(\pi_i^8)), (D_\iota(\pi_i^6)G_\iota(\pi_i^8)), (D_\iota(\pi_i^7)G_\iota(\pi_i^{10})), (D_\iota(\pi_i^8)G_\iota(\pi_i^{11})), (D_\iota(\pi_i^9)G_\iota(x_i^1)), (D_\iota(\pi_i^{10})G_\iota(x_i^2)), (D_\iota(\pi_i^{11})G_\iota(x_i^3)), (D_\iota(x_i^1)c_{j,\iota}^i), (D_\iota(x_i^2)c_{k,\iota}^i) et  $(D_\iota(x_i^3)c_{l,\iota}^i)$ .$
- Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(B(\pi_i^T)B(\pi_i^F)), (B(\pi_i^1)B(\pi_i^2)), (B(\pi_i^1)B(\pi_i^4)), (B(\pi_i^3)B(\pi_i^5)), (B(\pi_i^3)B(\pi_i^6)), (B(\pi_i^5)B(\pi_i^7)), (B(\pi_i^6)B(\pi_i^8)), (B(\pi_i^9)B(x_i^1)), (B(\pi_i^{10})B(x_i^2)) et  $(B(\pi_i^{11})B(x_i^3))$ .$
- Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$  :
  - Soient  $x_a, x_b, x_c \in \mathcal{X}$  les trois éléments du triplet  $c_j$ . Soient  $c_j^a, c_j^b$  et  $c_j^c$  les trois sommets-triplet tels qu'ils ont été créés précédemment, ainsi que  $c_{j,\iota}^a, c_{j,\iota}^b$  et  $c_{j,\iota}^c$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ) leurs copies respectives éventuelles.
  - Nous ajoutons trois obligations notées  $\sigma_j^a, \sigma_j^b$  et  $\sigma_j^c$ , composées respectivement des sommets  $c_j^a$  et  $\Lambda(c_j^a), c_j^b$  et  $\Lambda(c_j^b)$  ou  $c_j^c$  et  $\Lambda(c_j^c)$  ainsi que d'un sommet droit noté respectivement  $D(\sigma_j^a), D(\sigma_j^b)$  et  $D(\sigma_j^c)$  et de copies de ce sommet droit notées respectivement  $D_\iota(\sigma_j^a), D_\iota(\sigma_j^b)$  et  $D_\iota(\sigma_j^c)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ). Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons un sommet bis noté  $B(\sigma_j^a)$  dans l'obligation  $\sigma_j^a$ , un sommet bis noté  $B(\sigma_j^b)$  dans l'obligation  $\sigma_j^b$  et un sommet bis noté  $B(\sigma_j^c)$  dans l'obligation  $\sigma_j^c$ .
  - Nous ajoutons trois obligations notées  $\rho_j^1, \rho_j^2$  et  $\rho_j^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants et de leurs copies éventuelles. Dans chaque obligation  $\rho$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\rho)$  et  $D(\rho)$  ainsi que leurs copies respectives  $G_\iota(\rho)$  et  $D_\iota(\rho)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ). Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons un sommet bis noté  $B(\rho_j^1)$  dans l'obligation  $\rho_j^1$ , un sommet bis noté  $B(\rho_j^2)$  dans l'obligation  $\rho_j^2$  et un sommet bis noté  $B(\rho_j^3)$  dans l'obligation  $\rho_j^3$ .
  - Nous ajoutons les arêtes  $(D(\sigma_j^a)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^b)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^c)G(\rho_j^3)), (D(\rho_j^1)G(\rho_j^2)) et  $(D(\rho_j^2)D(\rho_j^3))$ .$
  - Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\sigma_j^a)G_\iota(\rho_j^1)), (D_\iota(\sigma_j^b)G_\iota(\rho_j^1)), (D_\iota(\sigma_j^c)G_\iota(\rho_j^3)), (D_\iota(\rho_j^1)G_\iota(\rho_j^2)) et  $(D_\iota(\rho_j^2)D_\iota(\rho_j^3))$ .$
  - Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(B(\sigma_j^a)B(\rho_j^1)), (B(\sigma_j^b)B(\rho_j^1)), (B(\sigma_j^c)B(\rho_j^3)) et  $(B(\rho_j^2)B(\rho_j^3))$ .$

- Soient  $P_1, \dots, P_p$  les  $p$  chemins disjoints précédemment créés.
- Nous ajoutons un chemin  $\varphi_1, \dots, \varphi_{3\lambda}$ .
- Nous ajoutons trois obligations  $\Phi_1, \Phi_2$  et  $\Phi_3$ , composées respectivement des sommets  $\varphi_1, \varphi_3$  et  $\varphi_{3\lambda-3}$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi_{3\lambda-1}$  ou  $\varphi_4, \varphi_{3\lambda-2}$  et  $\varphi_{3\lambda}$ .
- Pour chaque sommet  $\varphi_i \in \{\varphi_5, \dots, \varphi_{3\lambda-4}\}$  :
  - Si  $i \pmod{3} = 0$ , nous ajoutons le sommet  $\varphi_i$  dans l'obligation  $\Phi_1$ .
  - Si  $i \pmod{3} = 2$ , nous ajoutons le sommet  $\varphi_i$  dans l'obligation  $\Phi_2$ .
  - Si  $i \pmod{3} = 1$ , nous ajoutons le sommet  $\varphi_i$  dans l'obligation  $\Phi_3$ .
- Pour  $1 \leq l \leq p$  :
  - Soient  $u_l$  une des deux extrémités du chemin  $P_l$ .
  - Nous ajoutons l'arête  $(u_l \varphi_1)$ .
- Soit  $\Omega$  un grand nombre avec  $\Omega \gg \lambda$  et  $\Omega \gg q$ .
- Nous ajoutons  $\Omega$  obligations notées  $\varrho^1, \dots, \varrho^\Omega$ , chacune composée de  $\lambda$  sommets notés respectivement  $\omega_1^1, \dots, \omega_\lambda^1, \dots, \omega_1^\Omega, \dots, \omega_\lambda^\Omega$ .
- Pour  $1 \leq i < j \leq \Omega$ , pour  $1 \leq k < l \leq \lambda$ , nous ajoutons l'arête  $(\omega_k^i \omega_l^j)$ .
- Nous ajoutons l'arête  $(\omega_1^1 \varphi_{3\lambda})$ .
- Pour  $1 \leq \iota \leq \lambda$  :
  - Nous ajoutons une obligation notée  $B(\varrho^\iota)$  composée de  $\iota$  sommets notés respectivement  $B(\omega_1^\iota), \dots, B(\omega_\iota^\iota)$ .
  - Pour  $1 \leq i \leq \Omega$ , pour  $1 \leq k \leq \lambda$ , pour  $1 \leq l \leq \iota$  nous ajoutons l'arête  $(\omega_k^i B(\omega_l^\iota))$ .
  - Pour  $1 \leq i < \iota$ , pour  $1 \leq k \leq i$ , pour  $1 \leq l \leq \iota$  nous ajoutons l'arête  $(B(\omega_l^\iota) B(\omega_k^i))$ .

Pour un élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de seize obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Pour un triplet  $c_j \in \mathcal{C}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de six obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Les gadgets d'élément et de triplet forment  $24q\lambda$  chemins disjoints. La sous-instance liée aux sommets  $\omega$  est composée d'un graphe presque complet et de  $\Omega$  obligations. Ainsi, l'instance générée à partir du problème  $RX3C$  contient  $\lambda\Omega + 66q\lambda + 3\lambda + \frac{\lambda^2 + \lambda}{2}$  sommets,  $\frac{\lambda^2\Omega^2 + \Omega\lambda^3}{2} + 66q\lambda + 3\lambda + \frac{3\lambda^4 + 2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 2\lambda}{6} - 1$  arêtes et  $\Omega + 66q + 1 + \lambda$  obligations.

Notons qu'en suivant la méthode définie dans la Construction 17, il est possible de faire varier la proportion d'obligations de différentes taille. Pour tout  $\lambda \geq 2$ , il est possible d'ajouter un nombre arbitrairement grand d'obligations de taille  $\lambda$  tout en conservant une forte densité d'arêtes. Ainsi le problème  $IDO$  est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet pour toute répartition de la taille des obligations, même si le graphe est un graphe de forte densité.

Avant de montrer que le problème  $IDO$  est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet dans notre cas restreint, nous évaluons la densité du graphe  $G$ . Le graphe contient  $\lambda\Omega + 66q\lambda + 3\lambda + \frac{\lambda^2 + \lambda}{2}$  sommets, ce qui correspond à :

$$\frac{\Omega^2\lambda^2 + \Omega(\lambda^3 + \lambda^2(132q+7) - \lambda) + \lambda^4/4 + \lambda^3(66q+7/2) + \lambda^2(4356q^2 + 462q + 47/4) - \lambda(66q+7/2)}{2}$$

arêtes maximum. Ainsi, la densité du graphe est définie par :

$$\frac{\frac{\lambda^2\Omega^2 + \Omega\lambda^3}{2} + 66q\lambda + 3\lambda + \frac{3\lambda^4 + 2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 2\lambda}{6} - 1}{\frac{\Omega^2\lambda^2 + \Omega(\lambda^3 + \lambda^2(132q+7) - \lambda) + \lambda^4/4 + \lambda^3(66q+7/2) + \lambda^2(4356q^2 + 462q + 47/4) - \lambda(66q+7/2)}{2}}$$

Lorsque ce polynôme tend vers l'infini, la composante la plus significative est  $\Omega$ . Calculer sa limite lorsque  $\Omega$  tend vers l'infini revient alors à calculer la limite de  $\frac{\Omega + \lambda}{\Omega + \lambda + 132q + 7}$ . Ainsi, lorsque  $\Omega$  tend vers l'infini, la densité du graphe s'approche de sa valeur maximale sans jamais l'atteindre : le graphe a une forte densité. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un facteur  $\Omega$  telle que la densité du graphe est au moins de  $1 - \varepsilon$ .

**Théorème 13.** *Déterminer l'existence d'une solution pour le problème IDO est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet, même si le graphe est un graphe connexe de forte densité (au moins  $1 - \varepsilon$  avec  $\varepsilon > 0$ ) et que les obligations sont stables, pour une répartition de leur taille de deux à  $\lambda$ , pour toute constante  $\lambda \geq 2$ .*

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda = 2\kappa + \beta$  un entier avec  $\kappa \geq 1$  et  $\beta \in \{0, 1\}$ . Soient  $(G, \Pi)$  le graphe et les obligations associées suivant la Construction 10 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \lambda)$ .

Le problème IDO est clairement dans  $\mathcal{NP}$ . De plus, construire  $(G, \Pi)$  à partir de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est polynomial.

Supposons qu'il existe une solution  $S$  pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$ . Construisons un Indépendant Dominant  $S'$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$  :

1. Pour chaque triplet  $c_j$  dans  $S$ , composé des éléments  $x_a, x_b$  et  $x_c$ , nous ajoutons les sommets des obligations  $\sigma_j^a, \sigma_j^b, \sigma_j^c$  et  $\rho_j^2$  dans  $S'$ .
2. Pour chaque triplet  $c_j$  dans  $\mathcal{C} \setminus S$  nous ajoutons les sommets des obligations  $\rho_j^1$  et  $\rho_j^3$  dans  $S'$ .
3. Pour chaque sommet  $c_j^i$  dans  $S'$  nous ajoutons l'ensemble des sommets de  $S_j^i \setminus c_j^i$  (tel que défini dans le Lemme 2) dans  $S'$ .
4. Nous ajoutons les sommets de l'obligation  $\varrho^1$ .

L'ensemble de sommets indépendants  $S'$  contient un Indépendant Dominant respectant les Obligations pour chaque gadget d'élément et de triplet car  $S$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$  (cela nous garantit que pour chaque gadget d'élément, un seul ensemble  $S_j^i$  est pris dans  $S'$ ). Tous les sommets de  $G$  sont dominés et les obligations  $\Pi$  sont respectées.  $S'$  est un Indépendant Dominant de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$ .

Supposons qu'il existe un Indépendant Dominant  $S$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$ . Construisons une couverture exacte  $S'$  de  $\mathcal{X}$  :

1. Pour chaque sommet  $D(\rho_j^2)$  dans  $S$ , nous ajoutons le triplet  $c_j$  dans  $S'$  (nous savons grâce au Lemme 6 que la présence des sommets de l'obligation  $\rho_j^2$  dans un Indépendant Dominant indique la présence de tous les sommets représentant le triplet  $c_j$ ).

D'après les Lemmes 4, 5 et 6, chaque triplet de  $\mathcal{C}$  couvre soit tous ses éléments, soit aucun. D'après les Lemmes 1, 2 et 3, chaque élément de  $\mathcal{X}$  est couvert par exactement un triplet. Ainsi,  $S'$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$ .  $\square$

### 2.3.5 Dans un graphe de faible densité

**Carte 15.** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un graphe de faible densité avec des obligations stables de taille au plus  $\lambda$ , avec  $\lambda \geq 2$  (Théorème 14).

**Départ :** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un graphe de faible densité, avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Construction 11).

**Points d'étape :**

1.  $\mathcal{NP}$ -complétude dans un graphe de faible densité, avec des obligations stables (Construction 18 - Théorème 14).

Une instance du problème *RX3C* est composée d'un univers  $\mathcal{X}$  contenant  $3q$  éléments et d'une collection  $\mathcal{C}$  de  $3q$  triplets de ces éléments. L'instance  $(G, \Pi)$  associée suivant la Construction 11 depuis l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est une collection de chemins contenant  $\lambda\Omega + 66q\lambda$  sommets,  $42q\lambda$  arêtes et  $\Omega + 66q$  obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Pour étendre cette construction pour des obligations non-équilibrées, nous rajoutons un certain nombre de sommets isolés (Construction 18). Nous concluons alors sur la  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème *IDO* (Théorème 14).

**Idée 18.** Construire un graphe de faible densité avec des obligations stables de taille au plus  $\lambda$ .

Nous avons vu comment construire un graphe de faible densité avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour tout  $\lambda \geq 2$  (Construction 11). Pour obtenir un graphe de faible densité avec des obligations de taille au plus  $\lambda$ , nous rajoutons des obligations contenant seulement des sommets isolés.

**Construction 18.** Construire un graphe de faible densité avec des obligations stables de taille au plus  $\lambda$ .

Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème *RX3C* avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda = 2\kappa + \beta$  un entier avec  $\kappa \geq 1$  et  $\beta \in \{0, 1\}$ . Nous construisons une instance  $(G = (V, E), \Pi)$  du problème *IDO* comme suit :

- Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$  :
  - Soient  $c_j, c_k, c_l \in \mathcal{C}$  avec  $j < k < l$  les trois triplets contenant l'élément  $x_i$ .
  - Nous ajoutons seize obligations notées  $\pi_i^T, \pi_i^F, \pi_i^1, \dots, \pi_i^{11}, x_i^1, x_i^2$  et  $x_i^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants et de leurs copies éventuelles. Dans chaque obligation  $\pi$  et  $x$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\pi)$  et  $D(\pi)$  ou  $G(x)$  et  $D(x)$ , ainsi que leurs copies respectives notées  $G_1(\pi), \dots, G_{\kappa-1}(\pi)$  et  $D_1(\pi), \dots, D_{\kappa-1}(\pi)$  ou  $G_1(x), \dots, G_{\kappa-1}(x)$  et  $D_1(x), \dots, D_{\kappa-1}(x)$ . Si  $\beta = 1$  alors nous ajoutons également un sommet bis noté  $B(\pi)$  dans chaque obligation  $\pi$  et un sommet bis noté  $B(x)$  dans chaque obligation  $x$ .
  - Nous ajoutons les sommets  $c_j^i, c_k^i, c_l^i$  représentant les triplets contenant l'élément  $x_i$  ainsi que leurs copies respectives  $c_{j,1}^i, \dots, c_{j,\kappa-1}^i, c_{k,1}^i, \dots, c_{k,\kappa-1}^i$  et  $c_{l,1}^i, \dots, c_{l,\kappa-1}^i$ .

- L'ensemble des copies d'un sommet  $v$  est noté  $\Lambda(v)$ .
- Nous ajoutons les arêtes  $(D(\pi_i^T)G(\pi_i^F)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^1)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^2)), (G(\pi_i^1)D(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)G(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)D(\pi_i^2)), (G(\pi_i^2)G(\pi_i^3)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^5)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^6)), (D(\pi_i^4)G(\pi_i^9)), (G(\pi_i^5)D(\pi_i^7)), (D(\pi_i^5)D(\pi_i^6)), (D(\pi_i^5)G(\pi_i^7)), (G(\pi_i^6)D(\pi_i^8)), (D(\pi_i^6)G(\pi_i^8)), (D(\pi_i^7)G(\pi_i^{10})), (D(\pi_i^8)G(\pi_i^{11})), (D(\pi_i^9)G(\pi_i^1)), (D(\pi_i^{10})G(\pi_i^2)), (D(\pi_i^{11})G(\pi_i^3)), (D(\pi_i^1)c_j^i), (D(\pi_i^2)c_k^i)$  et  $(D(\pi_i^3)c_l^i)$ .
- Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\pi_i^T)G_\iota(\pi_i^F)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^1)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^2)), (G_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^4)), (D_\iota(\pi_i^1)G_\iota(\pi_i^4)), (D_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^2)), (G_\iota(\pi_i^2)G_\iota(\pi_i^3)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^5)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^4)G_\iota(\pi_i^9)), (G_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^7)), (D_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^5)G_\iota(\pi_i^7)), (G_\iota(\pi_i^6)D_\iota(\pi_i^8)), (D_\iota(\pi_i^6)G_\iota(\pi_i^8)), (D_\iota(\pi_i^7)G_\iota(\pi_i^{10})), (D_\iota(\pi_i^8)G_\iota(\pi_i^{11})), (D_\iota(\pi_i^9)G_\iota(\pi_i^1)), (D_\iota(\pi_i^{10})G_\iota(\pi_i^2)), (D_\iota(\pi_i^{11})G_\iota(\pi_i^3)), (D_\iota(\pi_i^1)c_{j,\iota}^i), (D_\iota(\pi_i^2)c_{k,\iota}^i)$  et  $(D_\iota(\pi_i^3)c_{l,\iota}^i)$ .
- Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(B(\pi_i^T)B(\pi_i^F)), (B(\pi_i^1)B(\pi_i^2)), (B(\pi_i^1)B(\pi_i^4)), (B(\pi_i^3)B(\pi_i^5)), (B(\pi_i^3)B(\pi_i^6)), (B(\pi_i^5)B(\pi_i^7)), (B(\pi_i^6)B(\pi_i^8)), (B(\pi_i^9)B(\pi_i^1)), (B(\pi_i^{10})B(\pi_i^2))$  et  $(B(\pi_i^{11})B(\pi_i^3))$ .
- Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$  :
  - Soient  $x_a, x_b, x_c \in \mathcal{X}$  les trois éléments du triplet  $c_j$ . Soient  $c_j^a, c_j^b$  et  $c_j^c$  les trois sommets-triplet tels qu'ils ont été créés précédemment, ainsi que  $c_{j,\iota}^a, c_{j,\iota}^b$  et  $c_{j,\iota}^c$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ) leurs copies respectives éventuelles.
  - Nous ajoutons trois obligations notées  $\sigma_j^a, \sigma_j^b$  et  $\sigma_j^c$ , composées respectivement des sommets  $c_j^a$  et  $\Lambda(c_j^a), c_j^b$  et  $\Lambda(c_j^b)$  ou  $c_j^c$  et  $\Lambda(c_j^c)$  ainsi que d'un sommet droit noté respectivement  $D(\sigma_j^a), D(\sigma_j^b)$  et  $D(\sigma_j^c)$  et de copies de ce sommet droit notées respectivement  $D_\iota(\sigma_j^a), D_\iota(\sigma_j^b)$  et  $D_\iota(\sigma_j^c)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ). Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons un sommet bis noté  $B(\sigma_j^a)$  dans l'obligation  $\sigma_j^a$ , un sommet bis noté  $B(\sigma_j^b)$  dans l'obligation  $\sigma_j^b$  et un sommet bis noté  $B(\sigma_j^c)$  dans l'obligation  $\sigma_j^c$ .
  - Nous ajoutons trois obligations notées  $\rho_j^1, \rho_j^2$  et  $\rho_j^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants et de leurs copies éventuelles. Dans chaque obligation  $\rho$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\rho)$  et  $D(\rho)$  ainsi que leurs copies respectives  $G_\iota(\rho)$  et  $D_\iota(\rho)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ). Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons un sommet bis noté  $B(\rho_j^1)$  dans l'obligation  $\rho_j^1$ , un sommet bis noté  $B(\rho_j^2)$  dans l'obligation  $\rho_j^2$  et un sommet bis noté  $B(\rho_j^3)$  dans l'obligation  $\rho_j^3$ .
  - Nous ajoutons les arêtes  $(D(\sigma_j^a)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^b)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^c)G(\rho_j^3)), (D(\rho_j^1)G(\rho_j^2))$  et  $(D(\rho_j^2)D(\rho_j^3))$ .
  - Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\sigma_j^a)G_\iota(\rho_j^1)), (D_\iota(\sigma_j^b)G_\iota(\rho_j^1)), (D_\iota(\sigma_j^c)G_\iota(\rho_j^3)), (D_\iota(\rho_j^1)G_\iota(\rho_j^2))$  et  $(D_\iota(\rho_j^2)D_\iota(\rho_j^3))$ .
  - Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(B(\sigma_j^a)B(\rho_j^1)), (B(\sigma_j^b)B(\rho_j^1)), (B(\sigma_j^c)B(\rho_j^3))$  et  $(B(\rho_j^2)B(\rho_j^3))$ .
- Soit  $\Omega$  un grand nombre avec  $\Omega \gg \lambda$  et  $\Omega \gg q$ .

- Nous ajoutons  $\Omega$  obligations notées  $\varrho^1, \dots, \varrho^\Omega$ , chacune composée de  $\lambda$  sommets notés respectivement  $\omega_1^1, \dots, \omega_\lambda^1, \dots, \omega_1^\Omega, \dots, \omega_\lambda^\Omega$ .
- Pour  $1 \leq \iota \leq \lambda$ , nous ajoutons l'obligation  $B(\varrho^\iota)$  composée de  $\iota$  sommets notés respectivement  $B(\omega_1^\iota), \dots, B(\omega_\iota^\iota)$ .

Pour un élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de seize obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Pour un triplet  $c_j \in \mathcal{C}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de six obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. La sous-instance liée aux sommets  $\omega$  est composée d'un graphe sans arêtes et de  $\lambda$  obligations. Ainsi, l'instance générée à partir du problème  $RX3C$  contient  $\lambda\Omega + 66q\lambda + \frac{\lambda^2 + \lambda}{2}$  sommets,  $42q\lambda$  arêtes et  $\Omega + 66q + \lambda$  obligations.

Notons qu'en suivant la méthode définie dans la Construction 18, il est possible de faire varier la proportion d'obligations de différentes taille. Pour tout  $\lambda \geq 2$ , il est possible d'ajouter un nombre arbitrairement grand d'obligations de taille  $\lambda$  tout en conservant une faible densité d'arêtes. Ainsi le problème  $IDO$  est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet pour toute répartition de la taille des obligations, même si le graphe a une faible densité.

Avant de montrer que le problème  $IDO$  est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet dans notre cas restreint, nous évaluons la densité du graphe  $G$ . Le graphe contient  $\lambda\Omega + 66q\lambda + \frac{\lambda^2 + \lambda}{2}$  sommets, ce qui correspond à :

$$\frac{\lambda^2\Omega^2 + \Omega(\lambda^3 + (132q+1)\lambda^2 - \lambda) + \lambda^4/4 + \lambda^3(66q+1/2) + \lambda^2(4356q^2 + 66q - 1/4) - \lambda(66q+1/2)}{2}$$

arêtes maximum. Ainsi, la densité du graphe est définie par :

$$\frac{42q\lambda}{\frac{\lambda^2\Omega^2 + \Omega(\lambda^3 + (132q+1)\lambda^2 - \lambda) + \lambda^4/4 + \lambda^3(66q+1/2) + \lambda^2(4356q^2 + 66q - 1/4) - \lambda(66q+1/2)}{2}}$$

Lorsque ce polynôme tend vers l'infini, la composante la plus significative est  $\Omega$ . Calculer sa limite lorsque  $\Omega$  tend vers l'infini revient alors à calculer la limite de  $\frac{1}{\Omega}$ . Ainsi, lorsque  $\Omega$  tend vers l'infini, la densité du graphe s'approche de sa valeur minimale sans jamais l'atteindre : le graphe a une faible densité. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un facteur  $\Omega$  telle que la densité du graphe est au plus de  $\varepsilon$ .

**Théorème 14.** *Déterminer l'existence d'une solution pour le problème  $IDO$  est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet, même si le graphe est un graphe de faible densité (au plus  $\varepsilon$  avec  $\varepsilon > 0$ ) et que les obligations sont stables pour une répartition de leur taille de deux à  $\lambda$ , pour toute constante  $\lambda \geq 2$ .*

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda = 2\kappa + \beta$  un entier avec  $\kappa \geq 1$  et  $\beta \in \{0, 1\}$ . Soient  $(G, \Pi)$  le graphe et les obligations associées suivant la Construction 11 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \lambda)$ .

Le problème  $IDO$  est clairement dans  $\mathcal{NP}$ . De plus, construire  $(G, \Pi)$  à partir de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est polynomial.

Supposons qu'il existe une solution  $S$  pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$ . Construisons un Indépendant Dominant  $S'$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$  :

1. Pour chaque triplet  $c_j$  dans  $S$ , composé des éléments  $x_a, x_b$  et  $x_c$ , nous ajoutons les sommets des obligations  $\sigma_j^a, \sigma_j^b, \sigma_j^c$  et  $\rho_j^2$  dans  $S'$ .
2. Pour chaque triplet  $c_j$  dans  $C \setminus S$  nous ajoutons les sommets des obligations  $\rho_j^1$  et  $\rho_j^3$  dans  $S'$ .
3. Pour chaque sommet  $c_j^i$  dans  $S'$  nous ajoutons l'ensemble des sommets de  $S_j^i \setminus c_j^i$  (tel que défini dans le Lemme 2) dans  $S'$ .
4. Nous ajoutons les sommets des obligations  $\varrho^1, \dots, \varrho^\Omega$ .
5. Nous ajoutons les sommets des obligations  $B(\varrho^1), \dots, B(\varrho^\lambda)$ .

L'ensemble de sommets indépendants  $S'$  contient un Indépendant Dominant respectant les Obligations pour chaque gadget d'élément et de triplet car  $S$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$  (cela nous garantit que pour chaque gadget d'élément, un seul ensemble  $S_j^i$  est pris dans  $S'$ ). Tous les sommets de  $G$  sont dominés et les obligations  $\Pi$  sont respectées.  $S'$  est un Indépendant Dominant de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$ .

Supposons qu'il existe un Indépendant Dominant  $S$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$ . Construisons une couverture exacte  $S'$  de  $\mathcal{X}$  :

1. Pour chaque sommet  $D(\rho_j^2)$  dans  $S$ , nous ajoutons le triplet  $c_j$  dans  $S'$  (nous savons grâce au Lemme 6 que la présence des sommets de l'obligation  $\rho_j^2$  dans un Indépendant Dominant indique la présence de tous les sommets représentant le triplet  $c_j$ ).

D'après les Lemmes 4, 5 et 6, chaque triplet de  $\mathcal{C}$  couvre soit tous ses éléments, soit aucun. D'après les Lemmes 1, 2 et 3, chaque élément de  $\mathcal{X}$  est couvert par exactement un triplet. Ainsi,  $S'$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$ .  $\square$

### 2.3.6 Dans un graphe de diamètre deux

**Carte 16.** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un graphe de diamètre deux avec des obligations stables de taille au plus  $\lambda$ , avec  $\lambda \geq 2$  (Théorème 15).

**Départ :** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un graphe de diamètre deux, avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Construction 12).

**Points d'étape :**

1.  $\mathcal{NP}$ -complétude dans un graphe de diamètre deux, avec des obligations stables (Construction 19 - Théorème 15).

Une instance du problème *RX3C* est composée d'un univers  $\mathcal{X}$  contenant  $3q$  éléments et d'une collection  $\mathcal{C}$  de  $3q$  triplets de ces éléments. L'instance  $(G, \Pi)$  associée suivant la Construction 12 depuis l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est un graphe de diamètre deux contenant  $(66q + 5)\lambda$  sommets,  $(132q + 7)\lambda^2 + 42q\lambda - 2\lambda$  arêtes et  $66q + 5$  obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Pour étendre cette construction pour des obligations non-équilibrées, nous rajoutons un certain nombre de sommets presque universels (Construction 19). Nous concluons alors sur la  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème *IDO* (Théorème 15).

**Idée 19.** Construire un graphe de diamètre deux avec des obligations stables de taille au plus  $\lambda$ .

Nous avons vu comment construire un graphe de faible densité avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour tout  $\lambda \geq 2$  (Construction 12). Pour obtenir un graphe de diamètre deux avec des obligations de taille au plus  $\lambda$ , nous rajoutons des obligations contenant des sommets presque universels.

**Construction 19.** Construire un graphe de diamètre deux avec des obligations stables de taille au plus  $\lambda$ .

Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda = 2\kappa + \beta$  un entier avec  $\kappa \geq 1$  et  $\beta \in \{0, 1\}$ . Nous construisons une instance  $(G = (V, E), \Pi)$  du problème  $IDO$  comme suit :

- Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$  :
  - Soient  $c_j, c_k, c_l \in \mathcal{C}$  avec  $j < k < l$  les trois triplets contenant l'élément  $x_i$ .
  - Nous ajoutons seize obligations notées  $\pi_i^T, \pi_i^F, \pi_i^1, \dots, \pi_i^{11}, x_i^1, x_i^2$  et  $x_i^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants et de leurs copies éventuelles. Dans chaque obligation  $\pi$  et  $x$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\pi)$  et  $D(\pi)$  ou  $G(x)$  et  $D(x)$ , ainsi que leurs copies respectives notées  $G_1(\pi), \dots, G_{\kappa-1}(\pi)$  et  $D_1(\pi), \dots, D_{\kappa-1}(\pi)$  ou  $G_1(x), \dots, G_{\kappa-1}(x)$  et  $D_1(x), \dots, D_{\kappa-1}(x)$ . Si  $\beta = 1$  alors nous ajoutons également un sommet bis noté  $B(\pi)$  dans chaque obligation  $\pi$  et un sommet bis noté  $B(x)$  dans chaque obligation  $x$ .
  - Nous ajoutons les sommets  $c_j^i, c_k^i, c_l^i$  représentant les triplets contenant l'élément  $x_i$  ainsi que leurs copies respectives  $c_{j,1}^i, \dots, c_{j,\kappa-1}^i, c_{k,1}^i, \dots, c_{k,\kappa-1}^i$  et  $c_{l,1}^i, \dots, c_{l,\kappa-1}^i$ .
  - L'ensemble des copies d'un sommet  $v$  est noté  $\Lambda(v)$ .
  - Nous ajoutons les arêtes  $(D(\pi_i^T)G(\pi_i^F)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^1)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^2)), (G(\pi_i^1)D(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)G(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)D(\pi_i^2)), (G(\pi_i^2)G(\pi_i^3)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^5)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^6)), (D(\pi_i^4)G(\pi_i^9)), (G(\pi_i^5)D(\pi_i^7)), (D(\pi_i^5)D(\pi_i^6)), (D(\pi_i^5)G(\pi_i^7)), (G(\pi_i^6)D(\pi_i^8)), (D(\pi_i^6)G(\pi_i^8)), (D(\pi_i^7)G(\pi_i^{10})), (D(\pi_i^8)G(\pi_i^{11})), (D(\pi_i^9)G(x_i^1)), (D(\pi_i^{10})G(x_i^2)), (D(\pi_i^{11})G(x_i^3)), (D(x_i^1)c_j^i), (D(x_i^2)c_k^i) et  $(D(x_i^3)c_l^i)$ .$
  - Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\pi_i^T)G_\iota(\pi_i^F)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^1)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^2)), (G_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^4)), (D_\iota(\pi_i^1)G_\iota(\pi_i^4)), (D_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^2)), (D_\iota(\pi_i^2)G_\iota(\pi_i^3)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^5)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^4)G_\iota(\pi_i^9)), (G_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^7)), (D_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^5)G_\iota(\pi_i^7)), (G_\iota(\pi_i^6)D_\iota(\pi_i^8)), (D_\iota(\pi_i^6)G_\iota(\pi_i^8)), (D_\iota(\pi_i^7)G_\iota(\pi_i^{10})), (D_\iota(\pi_i^8)G_\iota(\pi_i^{11})), (D_\iota(\pi_i^9)G_\iota(x_i^1)), (D_\iota(\pi_i^{10})G_\iota(x_i^2)), (D_\iota(\pi_i^{11})G_\iota(x_i^3)), (D_\iota(x_i^1)c_{j,\iota}^i), (D_\iota(x_i^2)c_{k,\iota}^i) et  $(D_\iota(x_i^3)c_{l,\iota}^i)$ .$
  - Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(B(\pi_i^T)B(\pi_i^F)), (B(\pi_i^1)B(\pi_i^2)), (B(\pi_i^1)B(\pi_i^4)), (B(\pi_i^3)B(\pi_i^5)), (B(\pi_i^3)B(\pi_i^6)), (B(\pi_i^5)B(\pi_i^7)), (B(\pi_i^6)B(\pi_i^8)), (B(\pi_i^9)B(x_i^1)), (B(\pi_i^{10})B(x_i^2)) et  $(B(\pi_i^{11})B(x_i^3))$ .$
- Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$  :

- Soient  $x_a, x_b, x_c \in \mathcal{X}$  les trois éléments du triplet  $c_j$ . Soient  $c_j^a, c_j^b$  et  $c_j^c$  les trois sommets-triplet tels qu'ils ont été créés précédemment, ainsi que  $c_{j,\iota}^a, c_{j,\iota}^b$  et  $c_{j,\iota}^c$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ) leurs copies respectives éventuelles.
- Nous ajoutons trois obligations notées  $\sigma_j^a, \sigma_j^b$  et  $\sigma_j^c$ , composées respectivement des sommets  $c_j^a$  et  $\Lambda(c_j^a), c_j^b$  et  $\Lambda(c_j^b)$  ou  $c_j^c$  et  $\Lambda(c_j^c)$  ainsi que d'un sommet droit noté respectivement  $D(\sigma_j^a), D(\sigma_j^b)$  et  $D(\sigma_j^c)$  et de copies de ce sommet droit notées respectivement  $D_\iota(\sigma_j^a), D_\iota(\sigma_j^b)$  et  $D_\iota(\sigma_j^c)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ). Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons un sommet bis noté  $B(\sigma_j^a)$  dans l'obligation  $\sigma_j^a$ , un sommet bis noté  $B(\sigma_j^b)$  dans l'obligation  $\sigma_j^b$  et un sommet bis noté  $B(\sigma_j^c)$  dans l'obligation  $\sigma_j^c$ .
- Nous ajoutons trois obligations notées  $\rho_j^1, \rho_j^2$  et  $\rho_j^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants et de leurs copies éventuelles. Dans chaque obligation  $\rho$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\rho)$  et  $D(\rho)$  ainsi que leurs copies respectives  $G_\iota(\rho)$  et  $D_\iota(\rho)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ). Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons un sommet bis noté  $B(\rho_j^1)$  dans l'obligation  $\rho_j^1$ , un sommet bis noté  $B(\rho_j^2)$  dans l'obligation  $\rho_j^2$  et un sommet bis noté  $B(\rho_j^3)$  dans l'obligation  $\rho_j^3$ .
- Nous ajoutons les arêtes  $(D(\sigma_j^a)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^b)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^c)G(\rho_j^3)), (D(\rho_j^1)G(\rho_j^2))$  et  $(D(\rho_j^2)D(\rho_j^3))$ .
- Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\sigma_j^a)G_\iota(\rho_j^1)), (D_\iota(\sigma_j^b)G_\iota(\rho_j^1)), (D_\iota(\sigma_j^c)G_\iota(\rho_j^3)), (D_\iota(\rho_j^1)G_\iota(\rho_j^2))$  et  $(D_\iota(\rho_j^2)D_\iota(\rho_j^3))$ .
- Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(B(\sigma_j^a)B(\rho_j^1)), (B(\sigma_j^b)B(\rho_j^1)), (B(\sigma_j^c)B(\rho_j^3))$  et  $(B(\rho_j^2)B(\rho_j^3))$ .
- Nous ajoutons un chemin  $\varphi_1, \dots, \varphi_{3\lambda}$ .
- Nous ajoutons trois obligations  $\Phi_1, \Phi_2$  et  $\Phi_3$ , composées respectivement des sommets  $\varphi_1, \varphi_3$  et  $\varphi_{3\lambda-3}, \varphi_2$  et  $\varphi_{3\lambda-1}$  ou  $\varphi_4, \varphi_{3\lambda-2}$  et  $\varphi_{3\lambda}$ .
- Pour chaque sommet  $\varphi_i \in \{\varphi_5, \dots, \varphi_{3\lambda-4}\}$  :
  - Si  $i \pmod{3} = 0$ , nous ajoutons le sommet  $\varphi_i$  dans l'obligation  $\Phi_1$ .
  - Si  $i \pmod{3} = 2$ , nous ajoutons le sommet  $\varphi_i$  dans l'obligation  $\Phi_2$ .
  - Si  $i \pmod{3} = 1$ , nous ajoutons le sommet  $\varphi_i$  dans l'obligation  $\Phi_3$ .
- Nous ajoutons deux obligations notées  $\varrho^1$  et  $\varrho^2$  composées de  $\lambda$  sommets respectivement notés  $\varrho_1^1, \dots, \varrho_\lambda^1$  et  $\varrho_1^2, \dots, \varrho_\lambda^2$ .
- Pour chaque sommet  $v$  précédemment créé à l'exception des sommets  $\varrho_1^1, \dots, \varrho_\lambda^1$  et  $\varphi_3$ , pour  $1 \leq i \leq \lambda$  nous ajoutons l'arête  $(v\varrho_i^1)$ .
- Pour chaque sommet  $v$  précédemment créé à l'exception des sommets  $\varrho_1^2, \dots, \varrho_\lambda^2$  et  $\varphi_4$ , pour  $1 \leq i \leq \lambda$  nous ajoutons l'arête  $(v\varrho_i^2)$ .
- Pour  $1 \leq \iota \leq \lambda$ , nous ajoutons l'obligation  $B(\varrho^\iota)$  composée de  $\iota$  sommets notés respectivement  $\varrho_1^\iota, \dots, \varrho_\iota^\iota$ .
- Pour  $1 \leq \iota \leq \lambda$ , pour chaque sommet  $v$  précédemment créé à l'exception des sommets  $B(\varrho_1^\iota), \dots, B(\varrho_\iota^\iota)$  et  $\varphi_3$ , pour  $1 \leq i \leq \iota$  nous ajoutons l'arête  $(v\varrho_i^\iota)$ .

Pour un élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de seize obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Pour un triplet  $c_j \in \mathcal{C}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de six obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Ainsi, l'instance générée à partir du problème  $RX3C$  contient  $(66q+5)\lambda + \frac{\lambda^2+\lambda}{2}$  sommets,  $(132q+7)\lambda^2 + 42q\lambda - 2\lambda + \frac{12\lambda^5+15\lambda^4+\lambda^3(3960q+290)+\lambda^2(3960q+285)-2\lambda}{120} - 1$  arêtes et  $66q+5+\lambda$  obligations.

Notons qu'en suivant la méthode définie dans la Construction 19, il est possible de faire varier la proportion d'obligations de différentes tailles. Pour tout  $\lambda \geq 2$ , il est possible d'ajouter un nombre arbitrairement grand d'obligations de taille  $\lambda$  tout en conservant un diamètre de deux. Ainsi le problème  $IDO$  est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet pour toute répartition de la taille des obligations, même si le graphe est un graphe de faible densité.

Chaque sommet de  $V \setminus \{\varrho_1^1, \dots, \varrho_\lambda^1 \cup \varrho_1^2, \dots, \varrho_\lambda^2 \cup \varphi_3 \cup \varphi_4\}$  est à une distance un de tous les sommets des obligations  $\varrho^1$  et  $\varrho^2$ . Chaque sommet de l'obligation  $\varrho^1$  (respectivement  $\varrho^2$ ) est à une distance deux des autres sommets de l'obligation. Le sommet  $\varphi_3$  est à une distance un de tous les sommets de l'obligation  $\varrho^2$ . Le sommet  $\varphi_4$  est à une distance un de tous les sommets de l'obligation  $\varrho^1$ . Les sommets  $\varphi_3$  et  $\varphi_4$  sont à une distance un l'un de l'autre. Ainsi, le graphe a un diamètre deux.

**Théorème 15.** *Déterminer l'existence d'une solution pour le problème  $IDO$  est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet, même si le graphe est un graphe de diamètre deux et que les obligations sont stables pour une répartition de leur taille de deux à  $\lambda$ , pour toute constante  $\lambda \geq 2$ .*

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda = 2\kappa + \beta$  un entier avec  $\kappa \geq 1$  et  $\beta \in \{0, 1\}$ . Soient  $(G, \Pi)$  le graphe et les obligations associées suivant la Construction 7 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \lambda)$ .

Le problème  $IDO$  est clairement dans  $\mathcal{NP}$ . De plus, construire  $(G, \Pi)$  à partir de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est polynomial.

Supposons qu'il existe une solution  $S$  pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$ . Construisons un Indépendant Dominant  $S'$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$  :

1. Pour chaque triplet  $c_j$  dans  $S$ , composé des éléments  $x_a, x_b$  et  $x_c$ , nous ajoutons les sommets des obligations  $\sigma_j^a, \sigma_j^b, \sigma_j^c$  et  $\rho_j^2$  dans  $S'$ .
2. Pour chaque triplet  $c_j$  dans  $C \setminus S$  nous ajoutons les sommets des obligations  $\rho_j^1$  et  $\rho_j^3$  dans  $S'$ .
3. Pour chaque sommet  $c_j^i$  dans  $S'$  nous ajoutons l'ensemble des sommets de  $S_j^i \setminus c_j^i$  (tel que défini dans le Lemme 2) dans  $S'$ .
4. Nous ajoutons les sommets de l'obligation  $\Phi_2$  dans  $S'$ .

L'ensemble de sommets indépendants  $S'$  contient un Indépendant Dominant respectant les Obligations pour chaque gadget d'élément et de triplet car  $S$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$  (cela nous garantit que pour chaque gadget d'élément, un seul ensemble  $S_j^i$  est pris dans  $S'$ ). Tous les sommets de  $G$  sont dominés et les obligations  $\Pi$  sont respectées.  $S'$  est un Indépendant Dominant de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$ .

Supposons qu'il existe un Indépendant Dominant  $S$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$ . Supposons que les sommets de l'obligation  $\varrho^2$  (respectivement l'obligation  $\varrho^1$  ou l'obligation  $B(\varrho^t)$  pour  $1 \leq t \leq \lambda$ ) appartiennent à  $S$ . Dans ce cas, le sommet  $\varphi_4$  (respectivement le sommet  $\varphi_3$ ) ne peut pas être dominé, ce qui est une contradiction. Aucun sommet faisant partie des obligations  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \varrho^1, \varrho^2$  et  $B(\varrho^t)$  pour  $1 \leq t \leq \lambda$  ne peut dominer un sommet extérieur à ces obligations (propriété du connecteur neutre). Construisons une couverture exacte  $S'$  de  $\mathcal{X}$  :

1. Pour chaque sommet  $D(\rho_j^2)$  dans  $S$ , nous ajoutons le triplet  $c_j$  dans  $S'$  (nous savons grâce au Lemme 6 que la présence des sommets de l'obligation  $\rho_j^2$  dans un Indépendant Dominant indique la présence de tous les sommets représentant le triplet  $c_j$ ).

D'après les Lemmes 4, 5 et 6, chaque triplet de  $\mathcal{C}$  couvre soit tous ses éléments, soit aucun. D'après les Lemmes 1, 2 et 3, chaque élément de  $\mathcal{X}$  est couvert par exactement un triplet. Ainsi,  $S'$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$ .  $\square$

Nous avons montré que déterminer l'existence d'un Indépendant Dominant respectant les Obligations est un problème difficile, même pour des topologies de graphes très restreintes pour des obligations stables et équilibrées, ainsi que pour différentes répartitions de la taille des obligations dans l'instance. Dans la prochaine section, nous relâchons la contrainte de dominer tous les sommets du graphe. Nous nous penchons alors sur le problème selon le nombre de sommets minimal à dominer.

## 2.4 Déterminer l'existence d'un Indépendant Partiellement Dominant avec des obligations stables

Dans cette section, nous étudions le problème de l'Indépendant Partiellement Dominant avec Obligations (*IPDO*). Nous y présentons deux résultats principaux :

1. La  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème *IPDO* avec des obligations stables pour  $3\sqrt{|V|} - 2$  sommets à dominer mais sa polynomialité pour  $2\sqrt{|V|} - 1$  sommets à dominer (Théorèmes 16 et 17).
2. La  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème *IPDO* pour  $|V| - \lambda^2 + \lambda$  sommets à dominer même avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées dans une collection de chemins ou un unique chemin (Théorèmes 18 et 19).

**Carte 17.** Le problème *IPDO* avec des obligations stables est  $\mathcal{NP}$ -complet pour  $3\sqrt{|V|} - 2$  sommets à dominer mais polynomial pour  $2\sqrt{|V|} - 1$  sommets à dominer (Théorèmes 16 et 17).

**Départ :** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans une collection de chemins avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Construction 7).

**Points d'étape :**

1.  $\mathcal{NP}$ -complétude pour  $3\sqrt{|V|} - 2$  sommets à dominer même dans une collection de chemins avec des obligations stables (Constructions 20 et 21 - Théorème 16).
2. Le problème *IPDO* admet un algorithme polynomial permettant de dominer  $2\sqrt{|V|} - 1$  sommets si les obligations sont stables (Algorithme 1 - Théorème 17).

Nous montrons dans un premier temps que le problème *IPDO* est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet lorsque nous souhaitons dominer un certain nombre de sommets. Pour cela nous créons un *gadget de faible domination* (Construction 20). Le graphe obtenu à partir de la Construction 7 et de ce gadget (Construction 21) est une collection de chemins avec des obligations stables. Nous concluons ainsi sur la  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème *IPDO* (Théorème 16).

Nous définissons dans un second temps un algorithme capable de trouver un Indépendant Partiellement Dominant respectant les Obligations associées en temps polynomial (Algorithme 1). Après avoir exhibé ses garanties et ses limites, nous concluons que toute instance admet un Indépendant Dominant  $2\sqrt{|V|} - 1$  sommets, mais qu'il s'agit d'un maximum pour de nombreuses instances (Théorème 17).

La frontière sur le nombre de sommets qu'il est possible de dominer en temps polynomial ou non est fine lorsque les obligations sont stables. Ainsi les deux résultats suivants visent à raffiner le résultat dans le cas d'obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées, d'abord dans une collection de chemins puis dans un unique chemin.

**Carte 18.** Le problème *IPDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet pour  $|V| - \lambda^2 + \lambda$  sommets à dominer même dans une collection de chemins ou un unique chemin avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Théorèmes 18 et 19).

**Départ :** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans une collection de chemins avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Construction 7).

**Points d'étape :**

1.  $\mathcal{NP}$ -complétude pour  $|V| - \lambda^2 + \lambda$  sommets à dominer même dans une collection de chemins avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Construction 23 - Théorème 18).
2.  $\mathcal{NP}$ -complétude pour  $|V| - \lambda^2 + \lambda$  sommets à dominer même dans un chemin avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Construction 24 - Théorème 19).

Nous montrons que le problème *IPDO* est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet lorsque nous souhaitons dominer un certain nombre de sommets. Pour cela nous réutilisons le gadget de faible domination (Construction 20). Le graphe obtenu à partir de la Construction 7 et de ce gadget (Construction 23) est une collection de chemins avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Nous concluons ainsi sur la  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème *IPDO* (Théorème 18).

Par la suite, nous étendons le résultat précédent à un unique chemin. Nous montrons que le problème *IPDO* est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet lorsque nous souhaitons dominer un certain nombre de sommets. Pour cela nous réutilisons le gadget de faible domination (Construction 20) ainsi que le gadget de connecteur neutre (Construction 8). Le graphe obtenu à partir de la Construction 9 et de ces gadgets (Construction 23) est un unique chemin avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Nous concluons ainsi sur la  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème *IPDO* (Théorème 18).

#### 2.4.1 Avec $3\sqrt{|V|} - 2$ sommets à dominer

**Carte 19.** Le problème *IPDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet pour  $3\sqrt{|V|} - 2$  sommets à dominer même dans une collection de chemins avec des obligations stables (Théorème 16).

**Départ :** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans une collection de chemins avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Construction 7).

**Points d'étape :**

1. Création d'un gadget de faible domination (Construction 20 - Lemme 11).
2.  $\mathcal{NP}$ -complétude pour  $3\sqrt{|V|} - 2$  sommets à dominer même dans une collection de chemins avec des obligations stables (Construction 21 - Théorème 16).

Une instance du problème  $RX3C$  est composée d'un univers  $\mathcal{X}$  contenant  $3q$  éléments et d'une collection  $\mathcal{C}$  de  $3q$  triplets de ces éléments. L'instance  $(G, \Pi)$  associée suivant la Construction 7 depuis l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est une collection de chemins contenant  $66q\lambda$  sommets,  $42q\lambda$  arêtes et  $66q$  obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$ . Pour montrer que le problème  $IPDO$  est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet lorsque nous souhaitons dominer un certain nombre de sommets, nous créons un *gadget de faible domination* (Construction 20). Ce gadget introduit une instance dans laquelle aucune solution ne permet de dominer tous les sommets tout en respectant les Obligations (Lemme 11). Le graphe obtenu à partir de ce gadget (Construction 21) est une collection de chemins avec des obligations stables. Nous concluons ainsi sur la  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème  $IPDO$  (Théorème 16).

**Idée 20.** *Le gadget de faible domination.*

*Nous souhaitons procéder à une réduction depuis le problème  $IDO$ . Cependant, dans ce problème tous les sommets doivent être dominés. Le gadget de faible domination va nous permettre d'ajouter des sommets non dominés à une instance donnée afin de réduire le ratio de domination. Pour ce faire, nous créons des obligations incompatibles entre elles telles que chaque obligation non choisie contiendra des sommets non dominés.*

**Construction 20.** *Le gadget de faible domination.*

*Soit  $\Omega$  une constante. Nous construisons une instance  $(G = (V, E), \Pi)$  du problème  $IPDO$  comme suit :*

- *Nous ajoutons les  $\Omega^2 - \Omega$  sommets  $v_i^j$  pour  $1 \leq i \neq j \leq \Omega$ .*
- *Nous ajoutons les obligations  $\pi_i$  pour  $1 \leq i \leq \Omega$ , composées respectivement des sommets  $v_i^j$  pour  $1 \leq j \leq \Omega$ , avec  $j \neq i$ .*
- *Pour  $1 \leq i \neq j \leq \Omega$ , nous ajoutons l'arête  $(v_i^j v_j^i)$ .*

L'instance générée contient  $\Omega^2 - \Omega$  sommets,  $\frac{\Omega^2 - \Omega}{2}$  arêtes et  $\Omega$  obligations stables et  $(\Omega - 1)$ -équilibrées. La Construction 20, ainsi qu'un Indépendant Dominant maximum respectant les Obligations, sont illustrés dans la Figure 2.36.

**Lemme 11.** *Soit  $\Omega$  une constante. Soient  $(G, \Pi)$  le graphe et les obligations obtenues en suivant la Construction 20. Tout Indépendant Dominant maximum  $S$  de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$  domine exactement  $2\Omega - 2$  sommets.*

*Démonstration.* Toutes les obligations sont équivalentes. Sans perte de généralité, considérons que l'Indépendant Dominant maximum  $S$  de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$  contienne les sommets de l'obligation  $\pi_1$ . Aucun sommet d'une autre obligation ne peut être présent dans  $S$  en raison des arêtes  $(v_1^j v_j^1)$  pour  $2 \leq j \leq \Omega$ .  $S$  ne peut contenir les sommets que d'une seule obligation.

Chaque sommet de  $S$  domine deux sommets différents : lui-même et son unique voisin.  $S$  domine  $2\Omega - 2$  sommets. Tout Indépendant Dominant maximum  $S$  de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$  domine exactement  $2\Omega - 2$  sommets.  $\square$

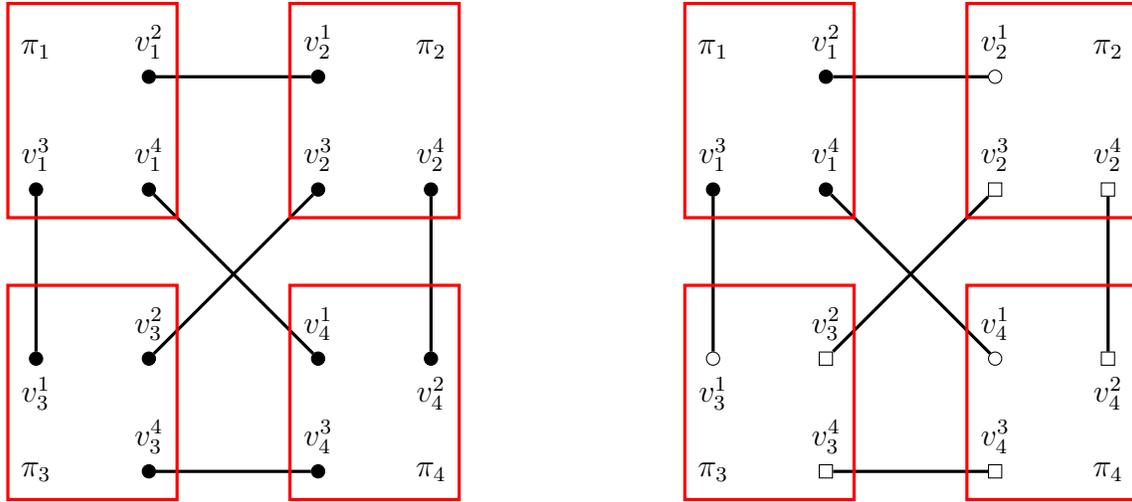


FIGURE 2.36 – Illustration (à gauche) de la Construction 20 pour  $\Omega = 4$ . Illustration (à droite) d'un Indépendant Dominant maximum  $S$  pour l'exemple ci-contre. Les sommets de  $S$  sont représentés pleins. Les sommets non dominés par  $S$  sont représentés par des carrés.

**Idée 21.** *L'ajout d'une importante composante impossible à dominer.*

*Nous avons vu comment construire une collection de chemins avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour tout  $\lambda \geq 2$  (Construction 7). Pour faire le lien entre l'existence d'une solution au problème IDO et l'existence d'une solution de taille bornée au problème IPDO, nous ajoutons un gadget de faible domination (Construction 20) de taille arbitrairement grande. Indirectement, lorsque une instance du problème RX3C admet une solution, il existe une solution pour l'instance associée du problème IDO et l'instance associée du problème IPDO admet une domination seuil (tous les sommets du graphe de la Construction 7 ainsi qu'une partie bornée des sommet du graphe de la Construction 20).*

**Construction 21.** *L'ajout d'une importante composante impossible à dominer.*

*Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème RX3C avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda = 2\kappa + \beta$  un entier avec  $\kappa \geq 1$  et  $\beta \in \{0, 1\}$ . Soit  $\Omega$  un entier avec  $\Omega \gg \lambda$  et  $\Omega \gg q$ . Nous construisons une instance  $(G = (V, E), \Pi)$  du problème IPDO comme suit :*

- Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$  :
  - Soient  $c_j, c_k, c_l \in \mathcal{C}$  avec  $j < k < l$  les trois triplets contenant l'élément  $x_i$ .
  - Nous ajoutons seize obligations notées  $\pi_i^T, \pi_i^F, \pi_i^1, \dots, \pi_i^{11}, x_i^1, x_i^2$  et  $x_i^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants et de leurs copies éventuelles. Dans chaque obligation  $\pi$  et  $x$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\pi)$  et  $D(\pi)$  ou  $G(x)$  et  $D(x)$ , ainsi que leurs copies respectives notées  $G_1(\pi), \dots, G_{\kappa-1}(\pi)$  et  $D_1(\pi), \dots, D_{\kappa-1}(\pi)$  ou  $G_1(x), \dots, G_{\kappa-1}(x)$  et  $D_1(x), \dots, D_{\kappa-1}(x)$ . Si  $\beta = 1$  alors nous ajoutons également un sommet bis noté  $B(\pi)$  dans chaque obligation  $\pi$  et un sommet bis noté  $B(x)$  dans chaque obligation  $x$ .

- Nous ajoutons les sommets  $c_j^i, c_k^i, c_l^i$  représentant les triplets contenant l'élément  $x_i$  ainsi que leurs copies respectives  $c_{j,1}^i, \dots, c_{j,\kappa-1}^i, c_{k,1}^i, \dots, c_{k,\kappa-1}^i$  et  $c_{l,1}^i, \dots, c_{l,\kappa-1}^i$ .
- L'ensemble des copies d'un sommet  $v$  est noté  $\Lambda(v)$ .
- Nous ajoutons les arêtes  $(D(\pi_i^T)G(\pi_i^F)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^1)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^2)), (G(\pi_i^1)D(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)G(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)D(\pi_i^2)), (G(\pi_i^2)G(\pi_i^3)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^5)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^6)), (D(\pi_i^4)G(\pi_i^9)), (G(\pi_i^5)D(\pi_i^7)), (D(\pi_i^5)D(\pi_i^6)), (D(\pi_i^5)G(\pi_i^7)), (G(\pi_i^6)D(\pi_i^8)), (D(\pi_i^6)G(\pi_i^8)), (D(\pi_i^7)G(\pi_i^{10})), (D(\pi_i^8)G(\pi_i^{11})), (D(\pi_i^9)G(x_i^1)), (D(\pi_i^{10})G(x_i^2)), (D(\pi_i^{11})G(x_i^3)), (D(x_i^1)c_j^i), (D(x_i^2)c_k^i) et  $(D(x_i^3)c_l^i)$ .$
- Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\pi_i^T)G_\iota(\pi_i^F)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^1)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^2)), (G_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^4)), (D_\iota(\pi_i^1)G_\iota(\pi_i^4)), (D_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^2)), (G_\iota(\pi_i^2)G_\iota(\pi_i^3)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^5)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^4)G_\iota(\pi_i^9)), (G_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^7)), (D_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^5)G_\iota(\pi_i^7)), (G_\iota(\pi_i^6)D_\iota(\pi_i^8)), (D_\iota(\pi_i^6)G_\iota(\pi_i^8)), (D_\iota(\pi_i^7)G_\iota(\pi_i^{10})), (D_\iota(\pi_i^8)G_\iota(\pi_i^{11})), (D_\iota(\pi_i^9)G_\iota(x_i^1)), (D_\iota(\pi_i^{10})G_\iota(x_i^2)), (D_\iota(\pi_i^{11})G_\iota(x_i^3)), (D_\iota(x_i^1)c_{j,\iota}^i), (D_\iota(x_i^2)c_{k,\iota}^i) et  $(D_\iota(x_i^3)c_{l,\iota}^i)$ .$
- Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(B(\pi_i^T)B(\pi_i^F)), (B(\pi_i^1)B(\pi_i^2)), (B(\pi_i^1)B(\pi_i^4)), (B(\pi_i^3)B(\pi_i^5)), (B(\pi_i^3)B(\pi_i^6)), (B(\pi_i^5)B(\pi_i^7)), (B(\pi_i^6)B(\pi_i^8)), (B(\pi_i^9)B(x_i^1)), (B(\pi_i^{10})B(x_i^2)) et  $(B(\pi_i^{11})B(x_i^3))$ .$
- Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$  :
  - Soient  $x_a, x_b, x_c \in \mathcal{X}$  les trois éléments du triplet  $c_j$ . Soient  $c_j^a, c_j^b$  et  $c_j^c$  les trois sommets-triplet tels qu'ils ont été créés précédemment, ainsi que  $c_{j,\iota}^a, c_{j,\iota}^b$  et  $c_{j,\iota}^c$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ) leurs copies respectives éventuelles.
  - Nous ajoutons trois obligations notées  $\sigma_j^a, \sigma_j^b$  et  $\sigma_j^c$ , composées respectivement des sommets  $c_j^a$  et  $\Lambda(c_j^a), c_j^b$  et  $\Lambda(c_j^b)$  ou  $c_j^c$  et  $\Lambda(c_j^c)$  ainsi que d'un sommet droit noté respectivement  $D(\sigma_j^a), D(\sigma_j^b)$  et  $D(\sigma_j^c)$  et de copies de ce sommet droit notées respectivement  $D_\iota(\sigma_j^a), D_\iota(\sigma_j^b)$  et  $D_\iota(\sigma_j^c)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ). Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons un sommet bis noté  $B(\sigma_j^a)$  dans l'obligation  $\sigma_j^a$ , un sommet bis noté  $B(\sigma_j^b)$  dans l'obligation  $\sigma_j^b$  et un sommet bis noté  $B(\sigma_j^c)$  dans l'obligation  $\sigma_j^c$ .
  - Nous ajoutons trois obligations notées  $\rho_j^1, \rho_j^2$  et  $\rho_j^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants et de leurs copies éventuelles. Dans chaque obligation  $\rho$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\rho)$  et  $D(\rho)$  ainsi que leurs copies respectives  $G_\iota(\rho)$  et  $D_\iota(\rho)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ). Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons un sommet bis noté  $B(\rho_j^1)$  dans l'obligation  $\rho_j^1$ , un sommet bis noté  $B(\rho_j^2)$  dans l'obligation  $\rho_j^2$  et un sommet bis noté  $B(\rho_j^3)$  dans l'obligation  $\rho_j^3$ .
  - Nous ajoutons les arêtes  $(D(\sigma_j^a)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^b)G(\rho_j^1)), (D(\sigma_j^c)G(\rho_j^3)), (D(\rho_j^1)G(\rho_j^2)) et  $(D(\rho_j^2)D(\rho_j^3))$ .$
  - Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\sigma_j^a)G_\iota(\rho_j^1)), (D_\iota(\sigma_j^b)G_\iota(\rho_j^1)), (D_\iota(\sigma_j^c)G_\iota(\rho_j^3)), (D_\iota(\rho_j^1)G_\iota(\rho_j^2)) et  $(D_\iota(\rho_j^2)D_\iota(\rho_j^3))$ .$
  - Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(B(\sigma_j^a)B(\rho_j^1)), (B(\sigma_j^b)B(\rho_j^1)), (B(\sigma_j^c)B(\rho_j^3)) et  $(B(\rho_j^2)B(\rho_j^3))$ .$

- Nous ajoutons les  $\Omega^2 - \Omega$  sommets  $v_i^j$  pour  $1 \leq i \neq j \leq \Omega$ .
- Nous ajoutons les obligations  $\pi_i$  pour  $1 \leq i \leq \Omega$ , composées respectivement des sommets  $v_i^j$  pour  $1 \leq j \leq \Omega$ , avec  $j \neq i$ .
- Pour  $1 \leq i \neq j \leq \Omega$ , nous ajoutons l'arête  $(v_i^j v_j^i)$ .

Pour un élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de seize obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Pour un triplet  $c_j \in \mathcal{C}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de six obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Ainsi, l'instance générée à partir du problème  $RX3C$  contient  $\Omega^2 - \Omega + 66q\lambda$  sommets,  $\frac{\Omega^2 - \Omega}{2} + 42q\lambda$  arêtes et  $\Omega + 66q$  obligations.

Notons que tout ensemble  $S$  Indépendant ne peut dominer au plus qu'un faible pourcentage des sommets de  $G$  tout en respectant les Obligations  $\Pi$ . Le graphe contient  $\Omega^2 - \Omega + 66q\lambda$  sommets. Un Indépendant Dominant maximum contient  $2\Omega - 2 + 66q\lambda$  sommets. Lorsque ces polynômes tendent vers l'infini, la composante la plus significative est  $\Omega$ . Ainsi, nous allons calculer la limite de  $\frac{2\Omega - 2 + 66q\lambda}{\Omega^2 - \Omega + 66q\lambda}$  lorsque  $\Omega$  tend vers l'infini pour connaître la densité de domination du graphe :

$$\lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \frac{2\Omega - 2 + 66q\lambda}{\Omega^2 - \Omega + 66q\lambda} = \quad (2.1)$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \frac{2 - (2/\Omega) + (66q\lambda/\Omega)}{\Omega - 1 + (66q\lambda/\Omega)} = \quad (2.2)$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \frac{2}{\Omega - 1} \approx 0 \quad (2.3)$$

Lorsque  $\Omega$  tend vers l'infini, le pourcentage de domination du graphe s'approche de zéro sans jamais l'atteindre : le graphe est peu dominé dans le meilleur des cas.

Notons également que lorsque  $\Omega$  tend vers l'infini, le nombre de sommets du graphe tend vers  $\Omega^2$ , tandis que le nombre de sommets qu'il est possible de dominer tend vers  $2\Omega - 2$  soit  $2\sqrt{|V|} - 2$ .

**Théorème 16.** *Soit  $(G = (V, E), \Pi)$  une instance du problème IPDO. Déterminer s'il existe une solution  $S$  pour le problème IPDO qui domine au moins  $3\sqrt{|V|} - 2$  sommets est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet, même si le graphe est une collection de chemins et que les obligations sont stables.*

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda = 2\kappa + \beta$  un entier avec  $\kappa \geq 1$  et  $\beta \in \{0, 1\}$ . Soient  $(G = (V, E), \Pi)$  le graphe et les obligations associées suivant la Construction 7 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \lambda)$ . Soit  $\Omega = 66q\lambda$  un entier. Soient  $(G' = (V', E'), \Pi')$  le graphe et les obligations associées suivant la Construction 21 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \lambda, \Omega)$ . Tous les sommets communs à  $V$  et  $V'$  partagent le même identificateur.

Le problème IPDO est clairement dans  $\mathcal{NP}$ . De plus, construire  $(G', \Pi')$  à partir de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est polynomial.

Supposons qu'il existe une solution  $S$  pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$ . Nous savons qu'il existe un Indépendant Dominant  $S_{IDO}$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$ . Construisons  $S'$  un Indépendant Dominant  $3\sqrt{|V'|} - 2$  sommets de  $G'$  et respectant les Obligations  $\Pi'$  :

1. Pour chaque sommet  $v$  dans  $V \cap S_{IDO}$ , nous ajoutons le sommet  $v$  de  $V'$  dans  $S'$  ( $S'$  domine  $66q\lambda$  sommets).
  2. Nous ajoutons les sommets de l'obligation  $\pi_1$  dans  $S'$  ( $S'$  domine  $2\Omega - 2$  sommets).
- $G'$  contient  $(66q\lambda)^2$  sommets.  $S'$  contient  $(3 \times 66q\lambda - 2)$  sommets.  $S'$  est un Indépendant Dominant  $3\sqrt{|V'|} - 2$  sommets de  $G'$  et respectant les Obligations  $\Pi'$ .

Supposons qu'il existe un ensemble  $S'$  Indépendant Dominant  $3\sqrt{|V'|} - 2$  sommets de  $G'$  et respectant les Obligations  $\Pi'$  pour le problème  $IDO$ . Construisons un Indépendant Dominant  $S_{IDO}$  de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$  :

1. Pour chaque sommet  $v$  dans  $V \cap S'$ , nous ajoutons  $v$  dans  $S_{IDO}$ .

L'ensemble  $S_{IDO}$  est un Indépendant Dominant  $S_{IDO}$  de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$ , car tous les sommets de  $G$  sont dominés par  $S'$  d'après le Lemme 11. Nous savons qu'il existe alors une solution  $S$  pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  définie comme suit :

1. Pour chaque sommet  $D(\rho_j^2)$  dans  $S_{IDO}$ , nous ajoutons le triplet  $c_j$  dans  $S$  (nous savons grâce au Lemme 6 que la présence des sommets de l'obligation  $\rho_j^2$  dans un Indépendant Dominant indique la présence de tous les sommets représentant le triplet  $c_j$ ).

□

## 2.4.2 Avec $2\sqrt{|V|} - 1$ sommets à dominer

**Carte 20. Le problème  $IPDO$  admet un algorithme polynomial permettant de dominer  $2\sqrt{|V|} - 1$  sommets si les obligations sont stables (Théorème 17).**

**Points d'étape :**

1. Création d'un algorithme polynomial (Algorithme 1 - Lemme 12).
2. Il n'existe pas d'algorithme capable de garantir la domination de plus de sommets (Construction 22 - Lemme 13).
3. Le problème  $IPDO$  admet un algorithme polynomial permettant de dominer  $2\sqrt{|V|} - 1$  sommets si les obligations sont stables (Théorème 17).

Dans cette partie, nous définissons un algorithme capable de trouver un Indépendant Partiellement Dominant respectant les Obligations associées en temps polynomial (Algorithme 1). Nous montrons qu'il garantit, pour un graphe  $G = (V, E)$ , de dominer au moins  $2\sqrt{|V|} - 1$  sommets si les obligations associées sont stables (Lemme 12). Dans un second temps, nous exhibons une infinité d'instances pour lesquelles il est impossible de dominer plus de  $2\sqrt{|V|} - 1$  sommets (Construction 22 - Lemme 13). Nous concluons alors que toute instance admet un Indépendant Dominant  $2\sqrt{|V|} - 1$  sommets, mais qu'il s'agit d'un maximum pour de nombreuses instances (Théorème 17).

**Principe 1.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe et  $\Pi = \{\Pi_1, \dots, \Pi_k\}$  ses obligations associées, triées par nombre de sommets dans l'ordre décroissant. L'Algorithme 1 est un algorithme glouton qui construit une solution en ajoutant des sommets au fur et à mesure. À chaque étape, nous prenons l'obligation  $\Pi_i$  contenant le plus de sommets. Nous trouvons alors toutes les obligations  $\Pi_j$  qui possèdent au moins un sommet dominé par les sommets de  $\Pi_i$ . Une fois fait, nous supprimons du graphe tous les sommets des obligations  $\Pi_j$  et nous répétons la procédure jusqu'à ce qu'il n'y ait plus aucune obligation (soit plus aucun sommet pouvant appartenir à notre solution). Nous obtenons ainsi un ensemble de sommets Indépendants Partiellement Dominants respectant les Obligations.

---

**Algorithme 1 :** Un Indépendant Dominant au moins  $2\sqrt{|V|} - 1$  sommets.

---

```

1 Donnée(s) :  $G = (V, E)$  un graphe et  $\Pi = \{\Pi_1, \dots, \Pi_k\}$  ses obligations
   associées, triées par nombre de sommets dans l'ordre décroissant.
2 Résultat(s) : Un Indépendant Partiellement Dominant de  $G$ , respectant les
   Obligations  $\Pi$ .
3 Resultat  $\leftarrow \emptyset$ ;
4 Obligations  $\leftarrow \emptyset$ ;
5 for  $1 \leq i \leq k$  do
6    $\lfloor$  Obligations  $\leftarrow$  Obligations +  $\Pi_i$ ;
7 while Obligations  $\neq \emptyset$  do
8    $\lfloor$  Tempobli  $\leftarrow$  Obligations[1];
9   for  $v \in$  Tempobli do
10     $\lfloor$  Resultat  $\leftarrow$  Resultat +  $v$ ;
11    for Obli  $\in$  Obligations do
12       $\lfloor$  if  $v \in$  Obli then
13         $\lfloor$  Obligations  $\leftarrow$  Obligations \ Obli;
14 return Resultat;

```

---

Le nombre d'obligations diminue strictement à chaque étape de la boucle *while* (17), l'algorithme se termine. Chaque obligation est atteinte par au moins un sommet de la solution  $S$ , les obligations sont respectées et  $S$  est un ensemble indépendant dans  $G$ . L'algorithme donne le bon résultat en temps polynomial.

**Lemme 12.** Soient  $(G = (V, E), \Pi)$  un graphe et ses obligations stables associées. Toute instance  $(G = (V, E), \Pi)$  du problème IPDO admet un ensemble  $S$  Indépendant Dominant au moins  $2\sqrt{|V|} - 1$  sommets de  $G$  et respectant les Obligations  $\Pi$ . Cet ensemble peut être construit en temps polynomial par l'Algorithme 1.

*Démonstration.* Soient  $(G = (V, E), \Pi)$  un graphe et ses obligations stables associées, instance du problème *PIDO*. Soient  $|\Pi|$  le nombre d'obligations dans  $\Pi$  et  $\kappa$  la taille de la plus grande obligation de  $\Pi$ . L'Algorithme 1 renvoie un ensemble de sommets indépendants  $S$ , respectant les Obligations et dominant au moins  $|\Pi| + \kappa - 1$  sommets. Montrons que  $S$  domine au moins  $2\sqrt{|V|} - 1$  sommets.

Nous savons que  $|\Pi| \times \kappa \geq |V|$ , ainsi soit  $|\Pi| \geq \sqrt{|V|}$ , soit  $\kappa \geq \sqrt{|V|}$ . Supposons sans perte de généralité que  $\kappa \geq \sqrt{|V|}$ . Nous pouvons réécrire cette inégalité sous la forme  $\kappa = \sqrt{|V|} + x$ , avec  $x > 0$  une constante positive. Supposons maintenant, par contradiction, que  $|\Pi| + \kappa < 2\sqrt{|V|}$  :

$$|\Pi| + \kappa < 2\sqrt{|V|} \quad (2.4)$$

$$|\Pi| + \sqrt{|V|} + x < 2\sqrt{|V|} \quad (2.5)$$

$$|\Pi| < \sqrt{|V|} - x \quad (2.6)$$

En reprenant cette inégalité, nous avons :

$$|\Pi| \times \kappa \leq (\sqrt{|V|} - x)(\sqrt{|V|} + x) \leq |V| - x^2. \quad (2.7)$$

Ce qui est une contradiction car nous savons que  $|\Pi| \times \kappa \geq |V|$ . Par conséquent, nous avons  $|\Pi| + \kappa \geq 2\sqrt{|V|}$  et ainsi  $|\Pi| + \kappa - 1 \geq 2\sqrt{|V|} - 1$ .  $\square$

**Idée 22.** *Un exemple de graphe peu dominable.*

*Dans la Construction 20, nous avons défini une instance dont la majorité des sommets ne peuvent pas être dominés. En ajoutant un sommet supplémentaire dans chaque obligation, nous atteignons la borne de l'Algorithme 1.*

**Construction 22.** *Un exemple de graphe peu dominable.*

*Soit  $\Omega$  une constante. Nous construisons une instance  $(G = (V, E), \Pi)$  du problème *IPDO* comme suit :*

- *Nous ajoutons les  $\Omega^2$  sommets  $v_i^j$  pour  $1 \leq i, j \leq \Omega$ .*
- *Nous ajoutons les obligations  $\pi_i$  pour  $1 \leq i \leq \Omega$ , composées respectivement des sommets  $v_i^j$  pour  $1 \leq j \leq \Omega$ .*
- *Pour  $1 \leq i \neq j \leq \Omega$ , nous ajoutons l'arête  $(v_i^j v_j^i)$ .*

L'instance générée contient  $\Omega^2$  sommets,  $\frac{\Omega^2 - \Omega}{2}$  arêtes et  $\Omega$  obligations stables et  $\Omega$ -équilibrées. La Construction 22, ainsi qu'un Indépendant Dominant maximum respectant les Obligations, sont illustrés dans la Figure 2.37.

**Lemme 13.** *Soit  $(G = (V, E), \Pi)$  une instance du problème *IPDO* obtenue en suivant la Construction 22, pour tout  $\Omega$  quelconque. Aucun ensemble indépendant de sommets  $S$  de  $G$  ne peut dominer plus de  $2\sqrt{|V|} - 1$  sommets tout en respectant les Obligations  $\Pi$ .*

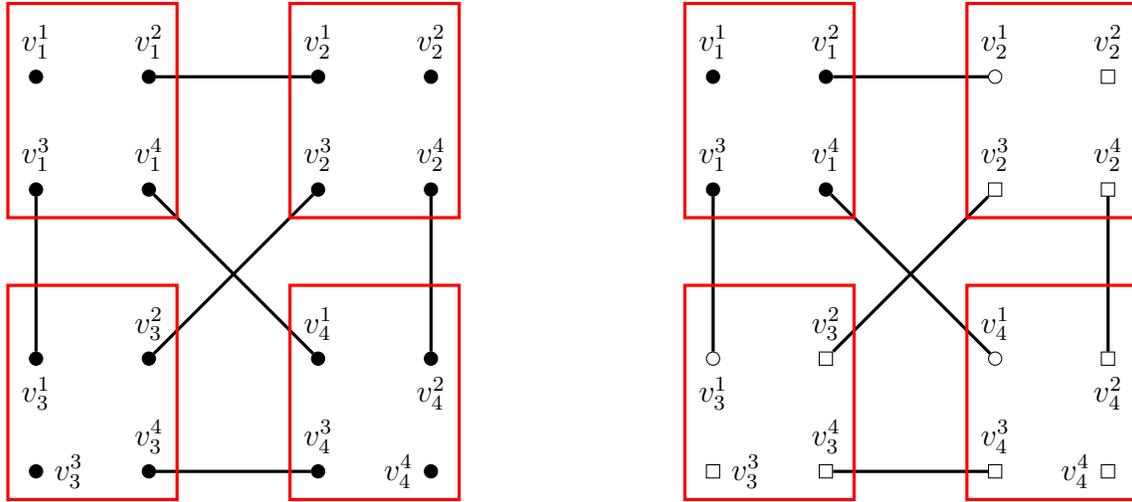


FIGURE 2.37 – Illustration (à gauche) de la Construction 22 pour  $\Omega = 4$ . Illustration (à droite) d'un Indépendant Dominant maximum  $S$  pour l'exemple ci-contre. Les sommets de  $S$  sont représentés pleins. Les sommets non dominés par  $S$  sont représentés par des carrés.

*Démonstration.* Soit  $(G = (V, E), \Pi)$  une instance du problème *IPDO* obtenue en suivant la Construction 22, pour tout  $\Omega$  quelconque.

Toutes les obligations sont équivalentes. Sans perte de généralité, considérons que l'Indépendant Dominant maximum  $S$  de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$  contienne les sommets de l'obligation  $\pi_1$ . Aucun sommet d'une autre obligation ne peut être présent dans  $S$  en raison des arêtes  $(v_1^j v_j^1)$  pour  $2 \leq j \leq \Omega$ .  $S$  ne peut contenir les sommets que d'une seule obligation.

Chaque sommet de  $S$  domine deux sommets différents : lui-même et son unique voisin.  $S$  domine  $2\Omega - 1$  sommets. Tout Indépendant Dominant maximum  $S$  de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$  domine exactement  $2\sqrt{|V|} - 1$  sommets.  $\square$

**Théorème 17.** Soit  $(G = (V, E), \Pi)$  une instance du problème *IPDO* avec des obligations stables. L'instance admet toujours un ensemble indépendant de sommets  $S$  de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$  et dominant au moins  $2\sqrt{|V|} - 1$  sommets (cette borne est atteinte par une infinité d'instances). Cet ensemble  $S$  peut être construit en temps polynomial.

### 2.4.3 Avec $|V| - \lambda^2 + \lambda$ sommets à dominer dans une collection de chemins

**Carte 21.** Le problème *IPDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet pour  $|V| - \lambda^2 + \lambda$  sommets à dominer même dans une collection de chemins avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Théorème 18).

**Départ :** Le problème *IDO* est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans une collection de chemins avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Construction 7).

**Points d'étape :**

1.  $\mathcal{NP}$ -complétude pour  $|V| - \lambda^2 + \lambda$  sommets à dominer même dans une collection de chemins avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Construction 23 - Théorème 18).

Une instance du problème *RX3C* est composée d'un univers  $\mathcal{X}$  contenant  $3q$  éléments et d'une collection  $\mathcal{C}$  de  $3q$  triplets de ces éléments. L'instance  $(G, \Pi)$  associée suivant la Construction 7 depuis l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est une collection de chemins contenant  $66q\lambda$  sommets,  $42q\lambda$  arêtes et  $66q$  obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$ . Pour montrer que le problème *IPDO* est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet lorsque nous souhaitons dominer un certain nombre de sommets, nous réutilisons le *gadget de faible domination* (Construction 20). Ce gadget introduit une instance dans laquelle aucune solution ne permet de dominer tous les sommets tout en respectant les Obligations (Lemme 11). Le graphe obtenu à partir de ce gadget (Construction 23) est une collection de chemins avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Nous concluons ainsi sur la  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème *IPDO* (Théorème 18).

**Idée 23.** *L'ajout d'une composante proportionnelle impossible à dominer.*

*Nous avons vu comment construire une collection de chemins avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour tout  $\lambda \geq 2$  (Construction 7). Pour faire le lien entre l'existence d'une solution au problème *IDO* et l'existence d'une solution de taille bornée au problème *IPDO*, nous ajoutons un gadget de faible domination (Construction 20) proportionnel à la taille des obligations. Indirectement, lorsqu'une instance du problème *RX3C* admet une solution, il existe une solution pour l'instance associée du problème *IDO* et l'instance associée du problème *IPDO* admet une domination seuil (tous les sommets du graphe de la Construction 7 ainsi qu'une partie bornée des sommet du graphe de la Construction 20).*

**Construction 23.** *L'ajout d'une composante proportionnelle impossible à dominer.*

*Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème *RX3C* avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda = 2\kappa + \beta$  un entier avec  $\kappa \geq 1$  et  $\beta \in \{0, 1\}$ . Nous construisons une instance  $(G = (V, E), \Pi)$  du problème *IPDO* comme suit :*

- Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$  :
  - Soient  $c_j, c_k, c_l \in \mathcal{C}$  avec  $j < k < l$  les trois triplets contenant l'élément  $x_i$ .

- Nous ajoutons seize obligations notées  $\pi_i^T, \pi_i^F, \pi_i^1, \dots, \pi_i^{11}, x_i^1, x_i^2$  et  $x_i^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants et de leurs copies éventuelles. Dans chaque obligation  $\pi$  et  $x$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\pi)$  et  $D(\pi)$  ou  $G(x)$  et  $D(x)$ , ainsi que leurs copies respectives notées  $G_1(\pi), \dots, G_{\kappa-1}(\pi)$  et  $D_1(\pi), \dots, D_{\kappa-1}(\pi)$  ou  $G_1(x), \dots, G_{\kappa-1}(x)$  et  $D_1(x), \dots, D_{\kappa-1}(x)$ . Si  $\beta = 1$  alors nous ajoutons également un sommet bis noté  $B(\pi)$  dans chaque obligation  $\pi$  et un sommet bis noté  $B(x)$  dans chaque obligation  $x$ .
- Nous ajoutons les sommets  $c_j^i, c_k^i, c_l^i$  représentant les triplets contenant l'élément  $x_i$  ainsi que leurs copies respectives  $c_{j,1}^i, \dots, c_{j,\kappa-1}^i, c_{k,1}^i, \dots, c_{k,\kappa-1}^i$  et  $c_{l,1}^i, \dots, c_{l,\kappa-1}^i$ .
- L'ensemble des copies d'un sommet  $v$  est noté  $\Lambda(v)$ .
- Nous ajoutons les arêtes  $(D(\pi_i^T)G(\pi_i^F)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^1)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^2)), (G(\pi_i^1)D(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)G(\pi_i^4)), (D(\pi_i^2)D(\pi_i^2)), (G(\pi_i^2)G(\pi_i^3)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^5)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^6)), (D(\pi_i^4)G(\pi_i^9)), (G(\pi_i^5)D(\pi_i^7)), (D(\pi_i^5)D(\pi_i^6)), (D(\pi_i^5)G(\pi_i^7)), (G(\pi_i^6)D(\pi_i^8)), (D(\pi_i^6)G(\pi_i^8)), (D(\pi_i^7)G(\pi_i^{10})), (D(\pi_i^8)G(\pi_i^{11})), (D(\pi_i^9)G(x_i^1)), (D(\pi_i^{10})G(x_i^2)), (D(\pi_i^{11})G(x_i^3)), (D(x_i^1)c_{j,l}^i), (D(x_i^2)c_{k,l}^i) et  $(D(x_i^3)c_{l,l}^i)$ .$
- Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\pi_i^T)G_\iota(\pi_i^F)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^1)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^2)), (G_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^4)), (D_\iota(\pi_i^1)G_\iota(\pi_i^4)), (D_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^2)), (G_\iota(\pi_i^2)G_\iota(\pi_i^3)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^5)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^4)G_\iota(\pi_i^9)), (G_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^7)), (D_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^5)G_\iota(\pi_i^7)), (G_\iota(\pi_i^6)D_\iota(\pi_i^8)), (D_\iota(\pi_i^6)G_\iota(\pi_i^8)), (D_\iota(\pi_i^7)G_\iota(\pi_i^{10})), (D_\iota(\pi_i^8)G_\iota(\pi_i^{11})), (D_\iota(\pi_i^9)G_\iota(x_i^1)), (D_\iota(\pi_i^{10})G_\iota(x_i^2)), (D_\iota(\pi_i^{11})G_\iota(x_i^3)), (D_\iota(x_i^1)c_{j,\iota}^i), (D_\iota(x_i^2)c_{k,\iota}^i) et  $(D_\iota(x_i^3)c_{l,\iota}^i)$ .$
- Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(B(\pi_i^T)B(\pi_i^F)), (B(\pi_i^1)B(\pi_i^2)), (B(\pi_i^1)B(\pi_i^4)), (B(\pi_i^3)B(\pi_i^5)), (B(\pi_i^3)B(\pi_i^6)), (B(\pi_i^5)B(\pi_i^7)), (B(\pi_i^6)B(\pi_i^8)), (B(\pi_i^9)B(x_i^1)), (B(\pi_i^{10})B(x_i^2)) et  $(B(\pi_i^{11})B(x_i^3))$ .$
- Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$  :
  - Soient  $x_a, x_b, x_c \in \mathcal{X}$  les trois éléments du triplet  $c_j$ . Soient  $c_j^a, c_j^b$  et  $c_j^c$  les trois sommets-triplet tels qu'ils ont été créés précédemment, ainsi que  $c_{j,\iota}^a, c_{j,\iota}^b$  et  $c_{j,\iota}^c$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ) leurs copies respectives éventuelles.
  - Nous ajoutons trois obligations notées  $\sigma_j^a, \sigma_j^b$  et  $\sigma_j^c$ , composées respectivement des sommets  $c_j^a$  et  $\Lambda(c_j^a), c_j^b$  et  $\Lambda(c_j^b)$  ou  $c_j^c$  et  $\Lambda(c_j^c)$  ainsi que d'un sommet droit noté respectivement  $D(\sigma_j^a), D(\sigma_j^b)$  et  $D(\sigma_j^c)$  et de copies de ce sommet droit notées respectivement  $D_\iota(\sigma_j^a), D_\iota(\sigma_j^b)$  et  $D_\iota(\sigma_j^c)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ). Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons un sommet bis noté  $B(\sigma_j^a)$  dans l'obligation  $\sigma_j^a$ , un sommet bis noté  $B(\sigma_j^b)$  dans l'obligation  $\sigma_j^b$  et un sommet bis noté  $B(\sigma_j^c)$  dans l'obligation  $\sigma_j^c$ .
  - Nous ajoutons trois obligations notées  $\rho_j^1, \rho_j^2$  et  $\rho_j^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants et de leurs copies éventuelles. Dans chaque obligation  $\rho$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\rho)$  et  $D(\rho)$  ainsi que leurs copies respectives  $G_\iota(\rho)$  et  $D_\iota(\rho)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ). Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons un sommet bis noté  $B(\rho_j^1)$  dans

- l'obligation  $\rho_j^1$ , un sommet bis noté  $B(\rho_j^2)$  dans l'obligation  $\rho_j^2$  et un sommet bis noté  $B(\rho_j^3)$  dans l'obligation  $\rho_j^3$*
- *Nous ajoutons les arêtes  $(D(\sigma_j^a)G(\rho_j^1))$ ,  $(D(\sigma_j^b)G(\rho_j^1))$ ,  $(D(\sigma_j^c)G(\rho_j^3))$ ,  $(D(\rho_j^1)G(\rho_j^2))$  et  $(D(\rho_j^2)D(\rho_j^3))$ .*
  - *Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\sigma_j^a)G_\iota(\rho_j^1))$ ,  $(D_\iota(\sigma_j^b)G_\iota(\rho_j^1))$ ,  $(D_\iota(\sigma_j^c)G_\iota(\rho_j^3))$ ,  $(D_\iota(\rho_j^1)G_\iota(\rho_j^2))$  et  $(D_\iota(\rho_j^2)D_\iota(\rho_j^3))$ .*
  - *Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(B(\sigma_j^a)B(\rho_j^1))$ ,  $(B(\sigma_j^b)B(\rho_j^1))$ ,  $(B(\sigma_j^c)B(\rho_j^3))$  et  $(B(\rho_j^2)B(\rho_j^3))$ .*
  - *Soit  $\Omega = \lambda + 1$ . Nous ajoutons les  $\Omega^2 - \Omega$  sommets  $v_i^j$  pour  $1 \leq i \neq j \leq \Omega$ .*
  - *Nous ajoutons les obligations  $\pi_i$  pour  $1 \leq i \leq \Omega$ , composées respectivement des sommets  $v_i^j$  pour  $1 \leq j \leq \Omega$ , avec  $j \neq i$ .*
  - *Pour  $1 \leq i \neq j \leq \Omega$ , nous ajoutons l'arête  $(v_i^j v_j^i)$ .*

Pour un élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de seize obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Pour un triplet  $c_j \in \mathcal{C}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de six obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Ainsi, l'instance générée à partir du problème  $RX3C$  contient  $(\lambda + 1)^2 - \lambda - 1 + 66q\lambda$  sommets,  $\frac{(\lambda+1)^2 - (\lambda+1)}{2} + 42q\lambda$  arêtes et  $\lambda + 1 + 66q$  obligations.

**Théorème 18.** *Soit  $(G = (V, E), \Pi)$  une instance du problème  $IPDO$  avec  $\Pi$  un ensemble d'obligations  $\lambda$ -équilibrées. Déterminer s'il existe une solution  $S$  pour le problème  $IPDO$  qui domine au moins  $|V| - \lambda^2 + \lambda$  sommets est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet, même si le graphe est une collection de chemins et que les obligations sont stables et  $\lambda$ -équilibrées.*

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda = 2\kappa + \beta$  un entier avec  $\kappa \geq 1$  et  $\beta \in \{0, 1\}$ . Soient  $(G = (V, E), \Pi)$  le graphe et les obligations associées suivant la Construction 7 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \lambda)$ . Soient  $(G' = (V', E'), \Pi')$  le graphe et les obligations associées suivant la Construction 21 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \lambda)$ . Tous les sommets communs à  $V$  et  $V'$  partagent le même identificateur. Le problème  $IPDO$  est clairement dans  $\mathcal{NP}$ . De plus, construire  $(G', \Pi')$  à partir de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est polynomial.

Supposons qu'il existe une solution  $S$  pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$ . Nous savons qu'il existe un Indépendant Dominant  $S_{IDO}$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$ . Construisons  $S'$  un Indépendant Dominant  $|V'| - \lambda^2 + \lambda$  sommets de  $G'$  et respectant les Obligations  $\Pi'$  :

1. Pour chaque sommet  $v$  dans  $V \cap S_{IDO}$ , nous ajoutons le sommet  $v$  de  $V'$  dans  $S'$  ( $S'$  domine  $66q\lambda$  sommets).
2. Nous ajoutons les sommets de l'obligation  $\pi_1$  dans  $S'$  ( $S'$  domine  $2\Omega - 2$  sommets).  $G'$  contient  $((\lambda+1)^2 - \lambda - 1 + 66q\lambda)$  sommets.  $S'$  est un Indépendant Dominant  $|V'| - \lambda^2 + \lambda$  sommets de  $G'$  et respectant les Obligations  $\Pi'$ .

Supposons qu'il existe un ensemble  $S'$  Indépendant Dominant  $|V'| - \lambda^2 + \lambda$  sommets de  $G'$  et respectant les Obligations  $\Pi'$  pour le problème  $IPDO$ . Construisons un Indépendant Dominant  $S_{IDO}$  de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$  :

1. Pour chaque sommet  $v$  dans  $V \cap S'$ , nous ajoutons  $v$  dans  $S_{IDO}$ .

L'ensemble  $S_{IDO}$  est un Indépendant Dominant  $S_{IDO}$  de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$ , car tous les sommets de  $G$  sont dominés par  $S'$  d'après le Lemme 11. Nous savons qu'il existe alors une solution  $S$  pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  définie comme suit :

1. Pour chaque sommet  $D(\rho_j^2)$  dans  $S_{IDO}$ , nous ajoutons le triplet  $c_j$  dans  $S$  (nous savons grâce au Lemme 6 que la présence des sommets de l'obligation  $\rho_j^2$  dans un Indépendant Dominant indique la présence de tous les sommets représentant le triplet  $c_j$ ).

□

Nous pouvons déduire du Théorème 18 que plus les obligations contiennent un grand nombre de sommets, moins il est possible de déterminer l'existence d'un ensemble Indépendant Dominant une grande partie du graphe et respectant les Obligations en temps polynomial. Pour illustrer ce fait de manière informelle, prenons arbitrairement  $q = 2$ . Déterminer s'il existe une solution  $S$  pour le problème  $IPDO$  qui domine au moins  $\frac{|V|}{2}$  sommets (respectivement  $\frac{|V|}{10}$  et  $\frac{|V|}{100}$  sommets) est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet, même si le graphe est une collection de chemins et que les obligations sont stables et 135-équilibrées (respectivement 1207-équilibrées et 13267-équilibrées).

#### 2.4.4 Avec $|V| - \lambda^2 + \lambda$ sommets à dominer dans un unique chemin

**Carte 22.** Le problème  $IPDO$  est  $\mathcal{NP}$ -complet pour  $|V| - \lambda^2 + \lambda$  sommets à dominer même dans un unique chemin avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Théorème 19).

**Départ :** Le problème  $IDO$  est  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un chemin (unique) avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Construction 9).

**Points d'étape :**

1.  $\mathcal{NP}$ -complétude pour  $|V| - \lambda^2 + \lambda$  sommets à dominer même dans un chemin avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Construction 24 - Théorème 19).

Une instance du problème  $RX3C$  est composée d'un univers  $\mathcal{X}$  contenant  $3q$  éléments et d'une collection  $\mathcal{C}$  de  $3q$  triplets de ces éléments. L'instance  $(G, \Pi)$  associée suivant la Construction 9 depuis l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est une collection de chemins contenant  $72q\lambda^2 + (66q - 3)\lambda$  sommets,  $72q\lambda^2 + (66q - 3)\lambda - 1$  arêtes et  $72q\lambda + 66q - 3$  obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour toute constante  $\lambda \geq 2$ . Pour montrer que le problème  $IPDO$  est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet lorsque nous souhaitons dominer un certain nombre de sommets, nous réutilisons le *gadget de faible domination* (Construction 20). Ce gadget introduit une instance dans laquelle aucune solution ne permet de dominer tous les sommets tout en respectant les Obligations (Lemme 11). Nous reconnectons alors l'ensemble des chemins grâce à des connecteurs neutres (Construction 8). Le graphe obtenu à partir de ce gadget (Construction 24) et du gadget de connecteur neutre est un unique chemin

avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Nous concluons ainsi sur la  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème *IPDO* (Théorème 19).

**Idée 24.** *L'ajout de portions de chemin impossibles à dominer.*

*Nous avons vu comment construire un unique chemin avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées pour tout  $\lambda \geq 2$  (Construction 9). Pour faire le lien entre l'existence d'une solution au problème *IDO* et l'existence d'une solution de taille bornée au problème *IPDO*, nous ajoutons un gadget de faible domination (Construction 20) proportionnel à la taille des obligations et nous relient ces nouveaux chemins grâce au gadget de connecteur neutre (Construction 8). Indirectement, lorsqu'une instance du problème *RX3C* admet une solution, il existe une solution pour l'instance associée du problème *IDO* et l'instance associée du problème *IPDO* admet une domination seuil (tous les sommets du graphe de la Construction 9 ainsi que les sommets des nouveaux connecteurs neutres et une partie bornée des sommet du graphe de la Construction 20).*

**Construction 24.** *L'ajout de portions de chemin impossibles à dominer.*

*Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème *RX3C* avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda = 2\kappa + \beta$  un entier avec  $\kappa \geq 1$  et  $\beta \in \{0, 1\}$ . Nous construisons une instance  $(G = (V, E), \Pi)$  du problème *IPDO* comme suit :*

- Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$  :
  - Soient  $c_j, c_k, c_l \in \mathcal{C}$  avec  $j < k < l$  les trois triplets contenant l'élément  $x_i$ .
  - Nous ajoutons seize obligations notées  $\pi_i^T, \pi_i^F, \pi_i^1, \dots, \pi_i^{11}, x_i^1, x_i^2$  et  $x_i^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants et de leurs copies éventuelles. Dans chaque obligation  $\pi$  et  $x$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\pi)$  et  $D(\pi)$  ou  $G(x)$  et  $D(x)$ , ainsi que leurs copies respectives notées  $G_1(\pi), \dots, G_{\kappa-1}(\pi)$  et  $D_1(\pi), \dots, D_{\kappa-1}(\pi)$  ou  $G_1(x), \dots, G_{\kappa-1}(x)$  et  $D_1(x), \dots, D_{\kappa-1}(x)$ . Si  $\beta = 1$  alors nous ajoutons également un sommet bis noté  $B(\pi)$  dans chaque obligation  $\pi$  et un sommet bis noté  $B(x)$  dans chaque obligation  $x$ .
  - Nous ajoutons les sommets  $c_j^i, c_k^i, c_l^i$  représentant les triplets contenant l'élément  $x_i$  ainsi que leurs copies respectives  $c_{j,1}^i, \dots, c_{j,\kappa-1}^i, c_{k,1}^i, \dots, c_{k,\kappa-1}^i$  et  $c_{l,1}^i, \dots, c_{l,\kappa-1}^i$ .
  - L'ensemble des copies d'un sommet  $v$  est noté  $\Lambda(v)$ .
  - Nous ajoutons les arêtes  $(D(\pi_i^T)G(\pi_i^F)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^1)), (D(\pi_i^F)G(\pi_i^2)), (G(\pi_i^1)D(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)G(\pi_i^4)), (D(\pi_i^1)D(\pi_i^2)), (G(\pi_i^2)G(\pi_i^3)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^5)), (D(\pi_i^3)G(\pi_i^6)), (D(\pi_i^4)G(\pi_i^9)), (G(\pi_i^5)D(\pi_i^7)), (D(\pi_i^5)D(\pi_i^6)), (D(\pi_i^5)G(\pi_i^7)), (G(\pi_i^6)D(\pi_i^8)), (D(\pi_i^6)G(\pi_i^8)), (D(\pi_i^7)G(\pi_i^{10})), (D(\pi_i^8)G(\pi_i^{11})), (D(\pi_i^9)G(\pi_i^1)), (D(\pi_i^{10})G(\pi_i^2)), (D(\pi_i^{11})G(\pi_i^3)), (D(x_i^1)c_j^i), (D(x_i^2)c_k^i) et (D(x_i^3)c_l^i).$
  - Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\pi_i^T)G_\iota(\pi_i^F)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^1)), (D_\iota(\pi_i^F)G_\iota(\pi_i^2)), (G_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^4)), (D_\iota(\pi_i^1)G_\iota(\pi_i^4)), (D_\iota(\pi_i^1)D_\iota(\pi_i^2)), (G_\iota(\pi_i^2)G_\iota(\pi_i^3)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^5)), (D_\iota(\pi_i^3)G_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^4)G_\iota(\pi_i^9)), (G_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^7)), (D_\iota(\pi_i^5)D_\iota(\pi_i^6)), (D_\iota(\pi_i^5)G_\iota(\pi_i^7)), (G_\iota(\pi_i^6)D_\iota(\pi_i^8)), (D_\iota(\pi_i^6)G_\iota(\pi_i^8)), (D_\iota(\pi_i^7)G_\iota(\pi_i^{10})), (D_\iota(\pi_i^8)G_\iota(\pi_i^{11})), (D_\iota(\pi_i^9)G_\iota(\pi_i^1)), (D_\iota(\pi_i^{10})G_\iota(\pi_i^2)), (D_\iota(\pi_i^{11})G_\iota(\pi_i^3)), (D_\iota(x_i^1)c_{j,\iota}^i), (D_\iota(x_i^2)c_{k,\iota}^i) et (D_\iota(x_i^3)c_{l,\iota}^i).$

- Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(B(\pi_i^T)B(\pi_i^F))$ ,  $(B(\pi_i^1)B(\pi_i^2))$ ,  $(B(\pi_i^1)B(\pi_i^4))$ ,  $(B(\pi_i^3)B(\pi_i^5))$ ,  $(B(\pi_i^3)B(\pi_i^6))$ ,  $(B(\pi_i^5)B(\pi_i^7))$ ,  $(B(\pi_i^6)B(\pi_i^8))$ ,  $(B(\pi_i^9)B(x_i^1))$ ,  $(B(\pi_i^{10})B(x_i^2))$  et  $(B(\pi_i^{11})B(x_i^3))$ .
- Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$  :
  - Soient  $x_a, x_b, x_c \in \mathcal{X}$  les trois éléments du triplet  $c_j$ . Soient  $c_j^a, c_j^b$  et  $c_j^c$  les trois sommets-triplet tels qu'ils ont été créés précédemment, ainsi que  $c_{j,\iota}^a, c_{j,\iota}^b$  et  $c_{j,\iota}^c$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ) leurs copies respectives éventuelles.
  - Nous ajoutons trois obligations notées  $\sigma_j^a, \sigma_j^b$  et  $\sigma_j^c$ , composées respectivement des sommets  $c_j^a$  et  $\Lambda(c_j^a)$ ,  $c_j^b$  et  $\Lambda(c_j^b)$  ou  $c_j^c$  et  $\Lambda(c_j^c)$  ainsi que d'un sommet droit noté respectivement  $D(\sigma_j^a)$ ,  $D(\sigma_j^b)$  et  $D(\sigma_j^c)$  et de copies de ce sommet droit notées respectivement  $D_\iota(\sigma_j^a)$ ,  $D_\iota(\sigma_j^b)$  et  $D_\iota(\sigma_j^c)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ). Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons un sommet bis noté  $B(\sigma_j^a)$  dans l'obligation  $\sigma_j^a$ , un sommet bis noté  $B(\sigma_j^b)$  dans l'obligation  $\sigma_j^b$  et un sommet bis noté  $B(\sigma_j^c)$  dans l'obligation  $\sigma_j^c$ .
  - Nous ajoutons trois obligations notées  $\rho_j^1, \rho_j^2$  et  $\rho_j^3$ , chacune composée de deux sommets originaux indépendants et de leurs copies éventuelles. Dans chaque obligation  $\rho$  nous considérons un sommet gauche et un sommet droit respectivement notés  $G(\rho)$  et  $D(\rho)$  ainsi que leurs copies respectives  $G_\iota(\rho)$  et  $D_\iota(\rho)$  (pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ ). Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons un sommet bis noté  $B(\rho_j^1)$  dans l'obligation  $\rho_j^1$ , un sommet bis noté  $B(\rho_j^2)$  dans l'obligation  $\rho_j^2$  et un sommet bis noté  $B(\rho_j^3)$  dans l'obligation  $\rho_j^3$ .
  - Nous ajoutons les arêtes  $(D(\sigma_j^a)G(\rho_j^1))$ ,  $(D(\sigma_j^b)G(\rho_j^1))$ ,  $(D(\sigma_j^c)G(\rho_j^3))$ ,  $(D(\rho_j^1)G(\rho_j^2))$  et  $(D(\rho_j^2)D(\rho_j^3))$ .
  - Pour  $1 \leq \iota \leq \kappa - 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(D_\iota(\sigma_j^a)G_\iota(\rho_j^1))$ ,  $(D_\iota(\sigma_j^b)G_\iota(\rho_j^1))$ ,  $(D_\iota(\sigma_j^c)G_\iota(\rho_j^3))$ ,  $(D_\iota(\rho_j^1)G_\iota(\rho_j^2))$  et  $(D_\iota(\rho_j^2)D_\iota(\rho_j^3))$ .
  - Si  $\beta = 1$ , nous ajoutons les arêtes  $(B(\sigma_j^a)B(\rho_j^1))$ ,  $(B(\sigma_j^b)B(\rho_j^1))$ ,  $(B(\sigma_j^c)B(\rho_j^3))$  et  $(B(\rho_j^2)B(\rho_j^3))$ .
- Soit  $\Omega = \lambda + 1$ . Nous ajoutons les  $\Omega^2 - \Omega$  sommets  $v_i^j$  pour  $1 \leq i \neq j \leq \Omega$ .
- Nous ajoutons les obligations  $\pi_i$  pour  $1 \leq i \leq \Omega$ , composées respectivement des sommets  $v_i^j$  pour  $1 \leq j \leq \Omega$ , avec  $j \neq i$ .
- Pour  $1 \leq i \neq j \leq \Omega$ , nous ajoutons l'arête  $(v_i^j v_j^i)$ .
- Soient  $P_1, \dots, P_p$  les  $p$  chemins disjoints précédemment créés.
- Pour  $1 \leq l \leq p - 1$  :
  - Soient  $u_l$  et  $v_l$  les deux extrémités du chemin  $P_l$ . Soient  $u_{l+1}$  et  $v_{l+1}$  les deux extrémités du chemin  $P_{l+1}$ .
  - Nous ajoutons un chemin  $\varphi_1^l, \dots, \varphi_{3\lambda}^l$ .
  - Nous ajoutons trois obligations  $\Phi_1^l, \Phi_2^l$  et  $\Phi_3^l$ , composées respectivement des sommets  $\varphi_1^l, \varphi_3^l$  et  $\varphi_{3\lambda-3}^l$ ,  $\varphi_2^l$  et  $\varphi_{3\lambda-1}^l$  ou  $\varphi_4^l, \varphi_{3\lambda-2}^l$  et  $\varphi_{3\lambda}^l$ .
  - Pour chaque sommet  $\varphi_i^l \in \{\varphi_5^l, \dots, \varphi_{3\lambda-4}^l\}$  :

- Si  $i \pmod 3 = 0$ , nous ajoutons le sommet  $\varphi_i^l$  dans l'obligation  $\Phi_1^l$ .
- Si  $i \pmod 3 = 2$ , nous ajoutons le sommet  $\varphi_i^l$  dans l'obligation  $\Phi_2^l$ .
- Si  $i \pmod 3 = 1$ , nous ajoutons le sommet  $\varphi_i^l$  dans l'obligation  $\Phi_3^l$ .
- Nous ajoutons les arêtes  $(v_i \varphi_1^l)$  et  $(\varphi_{3\lambda}^l u_{i+1})$ .

Pour un élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de seize obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Pour un triplet  $c_j \in \mathcal{C}$ , le gadget associé est composé d'une collection de chemins disjoints et de six obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Les gadgets d'élément et de triplet forment  $24q\lambda$  chemins disjoints. Pour deux chemins disjoints, le gadget de connecteur neutre associé est composé d'un chemin et de trois obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées. Ainsi, l'instance générée à partir du problème  $RX3C$  contient  $3\lambda^3 + (72q + 4)\lambda^2 + (66q - 2)\lambda$  sommets,  $3\lambda^3 + (72q + 4)\lambda^2 + (66q - 2)\lambda - 1$  arêtes et  $3\lambda^2 + (72q + 4)\lambda + 66q - 2$  obligations.

**Théorème 19.** *Soit  $(G = (V, E), \Pi)$  une instance du problème IPDO avec  $\Pi$  un ensemble d'obligations  $\lambda$ -équilibrées. Déterminer s'il existe une solution  $S$  pour le problème IPDO qui domine au moins  $|V| - \lambda^2 + \lambda$  sommets est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet, même si le graphe est une collection de chemins et que les obligations sont stables et  $\lambda$ -équilibrées.*

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $\lambda = 2\kappa + \beta$  un entier avec  $\kappa \geq 1$  et  $\beta \in \{0, 1\}$ . Soient  $(G, \Pi)$  le graphe et les obligations associées suivant la Construction 7 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \lambda)$ . Le problème IPDO est clairement dans  $\mathcal{NP}$ . De plus, construire  $(G', \Pi')$  à partir de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est polynomial.

Supposons qu'il existe une solution  $S$  pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$ . Nous savons qu'il existe un Indépendant Dominant  $S_{IDO}$  de  $G$  qui respecte les Obligations  $\Pi$ . Construisons  $S'$  un Indépendant Dominant  $|V'| - \lambda^2 + \lambda$  sommets de  $G'$  et respectant les Obligations  $\Pi'$  :

1. Pour chaque sommet  $v$  dans  $V \cap S_{IDO}$ , nous ajoutons le sommet  $v$  de  $V'$  dans  $S'$  ( $S'$  domine  $72q\lambda^2 + (66q - 3)\lambda$  sommets).
2. Nous ajoutons les sommets de l'obligation  $\pi_1$  dans  $S'$  ( $S'$  domine  $2\Omega - 2$  sommets).
3. Pour chaque obligation  $\Phi_2^l$  non présente dans  $S'$ , nous ajoutons ses sommets dans  $S'$ .

$G'$  contient  $(3\lambda^3 + (72q + 4)\lambda^2 + (66q - 2)\lambda)$  sommets.  $S'$  est un Indépendant Dominant  $|V'| - \lambda^2 + \lambda$  sommets de  $G'$  et respectant les Obligations  $\Pi'$ .

Supposons qu'il existe un ensemble  $S'$  Indépendant Dominant  $|V'| - \lambda^2 + \lambda$  sommets de  $G'$  et respectant les Obligations  $\Pi'$  pour le problème IPDO. Construisons un Indépendant Dominant  $S_{IDO}$  de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$  :

1. Pour chaque sommet  $v$  dans  $V \cap S'$ , nous ajoutons  $v$  dans  $S_{IDO}$ .

L'ensemble  $S_{IDO}$  est un Indépendant Dominant  $S_{IDO}$  de  $G$  respectant les Obligations  $\Pi$ , car tous les sommets de  $G$  sont dominés par  $S'$  d'après le Lemme 11. Nous savons qu'il existe alors une solution  $S$  pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  définie comme suit :

1. Pour chaque sommet  $D(\rho_j^2)$  dans  $S_{IDO}$ , nous ajoutons le triplet  $c_j$  dans  $S$  (nous savons grâce au Lemme 6 que la présence des sommets de l'obligation  $\rho_j^2$  dans un Indépendant Dominant indique la présence de tous les sommets représentant le triplet  $c_j$ ).

□

Notons que le nombre de sommets ne pouvant pas être dominés est négligeable par rapport au nombre de sommets de l'instance. Ainsi plus l'instance est grande, plus la proportion de sommets dominables par un ensemble indépendant, respectant les Obligations, est élevé.

## 2.5 Conclusion du chapitre

La plupart des problèmes algorithmiques sont triviaux ou faciles à résoudre dans les chemins, les graphes de faible diamètre, ainsi que les graphes de forte ou faible densité. Nous avons montré que le problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations admet une résolution en temps polynomial pour un indépendant, une étoile, un graphe de diamètre un et pour un couplage avec des obligations 2-équilibrées (Théorèmes 1 et 2) ou simplement pour un nombre constant d'obligations (Théorème 3). Cependant, nous avons montré que déterminer l'existence d'une solution pour le problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet dans d'autres topologies de graphes très restreintes, notamment les collections de chemins, les chemins, les cycles, les graphes de forte densité, les graphes de faible densité, les graphes de diamètre deux (Théorèmes 4, 5, 6, 7, 8 et 9). Le problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations ne fait pas partie des problèmes faciles à résoudre.

La contrainte que nous avons ajoutée au problème de l'Indépendant Dominant réside dans les obligations. Nous nous sommes alors penchés sur la complexité du problème selon le nombre d'obligations et la répartition de leur taille dans le cadre d'obligations non équilibrées. Nous avons montré que déterminer l'existence d'une solution pour le problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet pour un nombre quelconque d'obligations équilibrées, ainsi que pour une répartition de leur taille dans des chemins, des graphes de forte densité, des graphes de faible densité, des graphes de diamètre deux (Théorèmes 10, 11, 12, 13, 14 et 15).

Le problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations est difficile pour des topologies de graphes très restreintes et pour différentes propriétés sur les obligations. Le problème étant un problème d'existence de solution, il n'est pas possible de tenter de l'approximer. Nous avons alors relâché la contrainte de domination de l'ensemble des sommets. La question n'est plus de dominer tous les sommets, mais d'en dominer au moins un certain nombre. Nous avons montré que le problème de l'Indépendant Partiellement Dominant avec Obligations admet une résolution en temps polynomial pour  $2\sqrt{|V|} - 1$  sommets à dominer à condition que les obligations soient stables (Théorème 17). Cependant, nous avons également montré que déterminer l'existence d'une solution pour le problème de l'Indépendant Partiellement Dominant avec Obligations est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet pour  $3\sqrt{|V|} - 2$  sommets à dominer, ainsi que pour  $|V| - \lambda^2 + \lambda$  sommets à dominer dans une collection de chemins ou un unique chemin avec des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (Théorèmes 16, 18 et 19).

Les problèmes de l'Indépendant Dominant avec Obligations (*IDO*) et de l'Indépendant Partiellement Dominant avec Obligations (*IPDO*) sont des problèmes difficiles. Cependant, il reste des zones inconnues à étudier autour de ces problèmes et des obligations en général. Nous avons exclu les problèmes du Dominant avec Obligations et de l'Indépendant avec Obligations car une solution existe toujours. Bien qu'il n'y ait pas de question d'existence, il demeure une question d'optimalité. Nous savons que le problème de minimisation de la taille du dominant respectant les obligations est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet,

mais la question reste ouverte pour de nombreuses topologies de graphe.

Le problème *IDO* est difficile pour des obligations stables et équilibrées. Nous avons exclu les obligations non stables car elles peuvent interdire aisément l'existence de toute solution. Nos résultats peuvent s'étendre aux cas avec des obligations non stables en ajoutant simplement une deuxième composante connexe, sous la forme d'un sommet universel sur les sommets d'obligations non stables. Cependant une question persiste. Un seuil ou des propriétés sur les obligations non stables existent-elles pour garantir l'existence ou la non-existence d'une solution ?

Nous avons montré que le problème *IDO* admet une résolution en temps polynomial pour les étoiles (graphes de diamètre deux) et les graphes de diamètre un. Cependant, déterminer l'existence d'une solution est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet pour les graphes de diamètres deux. De plus, le problème admet une résolution en temps polynomial pour les graphes de densité un et zéro, mais déterminer l'existence d'une solution est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet pour les graphes de forte et de faible densité. En parallèle, nous avons montré que le problème *IDO* admet une résolution en temps polynomial pour les couplages avec des obligations 2-équilibrées. Cependant, nous n'avons pas de résultat pour des couplages avec des obligations 3-équilibrées ou quelconques. Le problème *IDO* est-il polynomial ou  $\mathcal{NP}$ -complet pour ces couplages ?

Nous avons montré que le problème *IPDO* admet une résolution en temps polynomial pour  $2\sqrt{|V|} - 1$  sommets à dominer à condition que les obligations soient stables mais déterminer l'existence d'une solution est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet pour  $3\sqrt{|V|} - 2$  sommets à dominer. La question du nombre de sommets dominables reste ouverte. Dominer entre  $2\sqrt{|V|}$  et  $3\sqrt{|V|} - 3$  sommets est-il un problème polynomial ou  $\mathcal{NP}$ -complet ?

Une question similaire demeure. Qu'en est-il si nous maintenons la contrainte de domination, mais relâchons partiellement la contrainte sur les obligations ? Est-il polynomial ou  $\mathcal{NP}$ -complet de déterminer l'existence d'un Indépendant Dominant  $S$  tel que pour chaque obligation soit aucun sommet n'appartient à  $S$  soit au moins un certain nombre (selon un seuil minimal) ? Pour quelles topologies de graphe et quelles propriétés sur les obligations ?

Enfin, nous avons montré que lorsque le nombre d'obligations est constant, il existe un algorithme polynomial en la taille de l'instance pour le problème *IDO*. Cela ouvre la voie à la conception d'algorithmes FPT. Quels sont les paramètres que l'on peut considérer ? Quels sont les meilleurs algorithmes FPT que l'on peut concevoir ?



# Chapitre 3

## Problèmes avec transitions obligatoires

### 3.1 Introduction du chapitre

En fonction des propriétés supplémentaires considérées, il existe de nombreuses variantes des problèmes de tournées, telles que les problèmes de tournées de véhicules périodiques, de tournées de véhicules dynamiques et de tournées de véhicules stochastiques, entre autres (voir [48] pour une nomenclature des problèmes de tournées). Ces problèmes sont centraux en théorie des graphes et en recherche opérationnelle. Ils sont également utiles et utilisés dans des domaines tels que la logistique de livraison et la gestion d'entrepôts automatisés. Il est bien connu que les problèmes de tournées sont principalement  $\mathcal{NP}$ -complets (voir [23]). Cependant, des algorithmes d'approximation polynomiaux ont été développés pour certains problèmes (voir [41]).

Considérons  $D = (V, A)$ , un graphe dirigé (ou *digraphe*), avec  $V$  son ensemble de *sommets* et  $A$  son ensemble d'*arcs*. Une séquence  $P$  de sommets  $v_1, \dots, v_k$  appartenant à  $V$  (ou de manière équivalente une séquence d'arcs  $(v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k)$  de  $A$ ) est une route dirigée (ou *diroute*) si chaque arc  $(v_i, v_{i+1})$  appartient à  $A$  pour  $1 \leq i \leq k-1$ . Une diroute  $P$  est *élémentaire* si tous les sommets sont parcourus au plus une fois ( $v_i \neq v_j$  pour  $1 \leq i \neq j \leq k$ ). Une diroute  $P$  est *simple* si tous les arcs sont différents ( $(v_i, v_{i+1}) \neq (v_j, v_{j+1})$  pour  $1 \leq i \neq j \leq k-1$ ). Une diroute élémentaire  $P$  est *Hamiltonienne* si tous les sommets sont parcourus exactement une fois ( $\forall v_i \in V, v_i \in P$ ). Un diroute simple  $P$  est *Eulérienne* si tous les arcs sont parcourus exactement une fois ( $\forall (v_i, v_j) \in A, (v_i, v_j) \in P$ ).

Dans ce chapitre, nous étudions une généralisation de ces notions. Plus précisément, une instance pour nos problèmes contient un digraphe  $D = (V, A)$  et un ensemble de *transitions obligatoires*  $\Pi$  de  $A^2$  (chaque transition obligatoire est composée de deux arcs contigus).

Une diroute  $P = (v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k)$  dans le digraphe  $D$  *respecte* les transitions obligatoires  $\Pi$  si pour  $1 \leq i \leq k-2$ , nous avons  $(v_i = a, v_{i+1} = b) \implies (v_{i+2} = c)$  pour chaque transition obligatoire  $\langle a, b, c \rangle \in \Pi$  (les arcs  $(a, b)$  et  $(b, c)$  doivent appartenir au digraphe). Pour une instance d'un problème de tournée, une solution est une diroute passant par tous les sommets-cible et respectant chaque transition obligatoire. La longueur d'une solution  $S = (v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k)$  est son nombre d'arcs ( $k-1$  dans ce cas). Plus précisément, une transition obligatoire  $\langle a, b, c \rangle$  est composée d'un *arc-tête* (ou arc de tête)  $(a, b)$  et d'un *arc-queue* (ou arc de queue)  $(b, c)$ . Ainsi, une diroute respecte une transition obligatoire si sa queue est le prochain arc chaque fois que la tête apparaît (sauf si la tête est le dernier arc

de la diroute). Un arc  $(a, b)$  peut être la tête d'au plus une transition obligatoire. Un arc  $(b, c)$  peut être la queue d'autant de transitions obligatoires que le degré entrant du sommet  $b$ . Un arc-queue dans une transition obligatoire peut être un arc-tête dans une autre transition obligatoire. Par conséquent, un digraphe est associé à au plus autant de transitions obligatoires qu'il contient d'arcs. Deux transitions obligatoires sont *consécutives* si l'arc-queue de la première est l'arc-tête de la seconde (la consécutivité est ordonnée :  $\langle a, b, c \rangle$  et  $\langle b, c, d \rangle$  sont consécutives mais  $\langle b, c, d \rangle$  et  $\langle a, b, c \rangle$  ne le sont pas). Les transitions obligatoires consécutives forment une *succession* de transitions obligatoires (par exemple  $\langle a, b, c \rangle$ ,  $\langle b, c, d \rangle$  et  $\langle c, d, e \rangle$ ). Un *circuit* de transitions obligatoires est une succession de transitions obligatoires telle que les dernières et premières transitions obligatoires sont consécutives.

Les transitions obligatoires sont placées dans un contexte de recherche plus large : les obligations. Une obligation peut représenter un sous-ensemble d'appareils devant être utilisés ensemble, et non pas individuellement, ou une équipe de personnes devant toutes être présentes pour effectuer une action. Dans les problèmes de tournées, une obligation peut représenter un panneau "les véhicules doivent tourner à droite/à gauche". Les obligations ont récemment été introduites dans [16] pour de nombreux problèmes de graphes tels que la couverture de sommets, la couverture connectée de sommets, l'ensemble de domination, l'ensemble total de domination, l'ensemble de domination indépendant, l'arbre couvrant, le jumelage et le chemin Hamiltonien. Les auteurs ont principalement obtenu des résultats  $\mathcal{NP}$ -difficiles. Cette approche par obligation s'inscrit en parallèle de l'approche par conflit, plus ancienne. En effet, l'étude de problèmes classiques de graphe avec des contraintes supplémentaires n'est pas nouvelle. Le contexte général des contraintes de conflit est le suivant. Pour un graphe  $G = (V, E)$ , nous ajoutons un ensemble d'éléments de  $G$  (sommets ou arêtes) qui ne peuvent pas apparaître ensemble dans la même solution (en fonction de l'objectif, cela peut être, entre autres, un chemin, un arbre ou un ensemble dominant). Contrairement aux obligations, un conflit modélise le fait que deux éléments d'un système ne peuvent pas être utilisés simultanément, par exemple parce qu'ils sont incompatibles. La plupart des problèmes avec des conflits sont difficiles, même si la version classique sous-jacente est polynomiale. Plusieurs articles récents ont été publiés sur le sujet [15, 17, 31, 32, 33, 39, 40].

Les transitions obligatoires ont été introduites pour la première fois par Cornet et Laforest dans [16] pour divers problèmes de graphes, notamment les problèmes de l'arbre couvrant, du couplage et du chemin hamiltonien. Dans ce chapitre, nous améliorons la connaissance des obligations en nous penchant sur divers problèmes de tournées du problème du Plus Court Chemin ne désignant qu'une seule cible, au problème de la Tournée Totale où tous les sommets sont des cibles.

La suite de cette introduction est structurée en quatre parties. Dans la partie 3.1.1, nous définissons l'ensemble des notions utilisées, telles que les propriétés des graphes et leurs topologies, ou les transitions obligatoires et leurs propriétés. Dans la partie 3.1.2, nous décrivons les différents problèmes étudiés ou employés, notamment le problème de la Tournée avec Transitions Obligatoires et le problème de la couverture exacte par des triplets avec un univers restreint servant de problème d'origine à plusieurs réductions. Dans

la partie 3.1.3, nous proposons quelques résultats préliminaires permettant de préciser le comportement de plusieurs problèmes de tournées avec transitions obligatoires. Enfin, dans la partie 3.1.4, nous précisons l'organisation des différentes sections de ce chapitre.

### 3.1.1 Terminologie et définitions

Nous concentrons ici la terminologie utilisée tout au long de ce chapitre, ainsi que certaines définitions. Les mots-clefs sont séparés en huit catégories afin de faciliter leur accès au lecteur selon ses besoins :

- Le graphe en tant qu'objet mathématique.
- La notation des graphes, des sommets, des arêtes et des arcs.
- Des propriétés sur les graphes non orientés.
- Des propriétés sur les graphes dirigés.
- Des topologies de graphes et de digraphes.
- Des propriétés sur les parcours.
- Des propriétés sur les transitions obligatoires.
- La représentation du problème  $RX3C$  par des sommets.

#### Le graphe en tant qu'objet mathématique.

Le nom de **graphe** ne concerne pas qu'un seul objet mathématique, mais regroupe une famille d'objets, notamment les graphes au sens général, les graphes simples, les graphes orientés ou les graphes à poids.

Un graphe  $G$  est défini par un ensemble fini  $V$  de **sommets** et un ensemble fini  $E$  d'**arêtes** reliant un ou plusieurs sommets entre eux.

Les notations  $|V|$  et  $|E|$  représentent respectivement le nombre de sommets, et le nombre d'arêtes du graphe.

Une **boucle** est une arête qui relie un sommet à lui-même.

Une **arête multiple** est une arête qui relie plus de deux sommets entre eux.

Un **arc** est une arête orientée, elle ne peut-être parcourue que dans un seul sens, de sa tête vers sa queue.

Deux arcs sont **symétriques** si la tête de l'un est la queue de l'autre et réciproquement.

Un graphe **simple** est un graphe sans boucle ni arête multiple.

Un graphe **orienté** est un graphe simple où chaque arête est remplacée par un arc.

Un graphe **dirigé** (ou **digraphe**) est un graphe simple où chaque arête est remplacée par un arc ou deux arcs symétriques.

Un graphe orienté contient au plus un arc entre deux sommets, alors qu'un graphe dirigé en contient au plus deux (seulement s'ils sont symétriques).

Un graphe orienté (ou dirigé)  $D$  est défini par un ensemble fini  $V$  de **sommets** et un ensemble fini  $A$  d'**arcs** reliant un ou plusieurs sommets entre eux.

Un graphe **non orienté** simple est un graphe où chaque arête peut être parcourue dans

les deux sens.

Dans ce chapitre nous considérons à la fois des graphes dirigés et des graphes simples non orientés.

### La notation des graphes, des sommets, des arêtes et des arcs.

La notation  $G = (V, E)$  désigne un graphe simple non orienté  $G$  composé des sommets  $V$  et des arêtes  $E$ .

Soient  $u \in V$  et  $v \in V$ , l'arête entre ces deux sommets de  $V$  s'écrit  $(uv)$ .

La notation  $D = (V, A)$  désigne un digraphe  $D$  composé des sommets  $V$  et des arcs  $A$ .

Soient  $u \in V$  et  $v \in V$ , l'arc entre ces deux sommets de  $V$  s'écrit  $(u, v)$ .

Un arc  $(u, v) \in A$  est composé du sommet de tête  $u$  et du sommet de queue  $v$ .

### Des propriétés sur les graphes non orientés.

Soit un graphe  $G = (V, E)$ .

Deux sommets  $u, v \in V$  sont **voisins** s'il existe une arête  $(uv) \in E$ .

Le **voisinage** d'un sommet  $u \in V$ , noté  $N[u]$ , est l'ensemble des sommets  $v \in V$  tels qu'il existe une arête  $(u, v) \in E$  ainsi que le sommet  $u$ . Le voisinage d'un ensemble de sommets correspond à l'union des voisinages de ces sommets.

Le **degré** d'un sommet  $u \in V$ , noté  $d(u)$ , est le nombre d'arêtes  $(u, v) \in E$  pour chaque sommet  $v \in V$ .

Le **degré maximum** d'un graphe, noté  $\Delta(G)$ , est le degré du sommet  $u \in V$  tel que  $d(u)$  est au moins aussi grand que  $d(v)$  pour tout sommet  $v \in V$ .

Le nombre d'**arêtes maximum** d'un graphe est toujours égal à  $\frac{|V| \times (|V|-1)}{2}$ .

Un **chemin** entre deux sommets  $u_1, u_n \in V$  est une suite finie de sommets  $u_1, u_2, \dots, u_n$  (ou une suite finie d'arêtes  $a_1 = (u_1 u_2), \dots, a_{n-1} = (u_{n-1} u_n)$ ) telle que pour tout  $1 \leq k < n$  il existe une arête  $(u_k u_{k+1}) \in E$ .

La **longueur** d'un chemin est le nombre d'arêtes qui le compose.

La **distance** entre deux sommets  $u, v \in V$ , notée  $d(u, v)$ , est la longueur minimale d'un chemin de  $u$  à  $v$ . Si un tel chemin n'existe pas, la distance est dite infinie  $d(u, v) = \infty$ .

Le **diamètre** d'un graphe, noté  $D(G)$ , est la plus longue distance  $d(u, v)$  pour deux sommets  $u, v \in V$ , telle que  $d(u, v)$  est au moins aussi grand que  $d(s, t)$  pour tout sommet  $s, t \in V$ .

Un graphe est **connexe** si pour toute paire de sommets  $u, v \in V$  il existe un chemin de  $u$  à  $v$ .

La **densité** d'un graphe est égale au nombre d'arêtes  $|E|$  sur le nombre d'arêtes maximum  $\frac{|V| \times (|V|-1)}{2}$ . La densité est comprise entre zéro (le graphe ne contient aucune arête) et un (toutes les arêtes possibles entre les sommets existent).

## Des propriétés sur les graphes dirigés.

Soit un digraphe  $D = (V, A)$ .

Le **degré entrant** d'un sommet  $u \in V$ , noté  $d^-(u)$ , est le nombre d'arcs  $(v, u) \in A$  pour chaque sommet  $v \in V$ .

Le **degré sortant** d'un sommet  $u \in V$ , noté  $d^+(u)$ , est le nombre d'arcs  $(u, v) \in A$  pour chaque sommet  $v \in V$ .

Le nombre d'**arcs maximum** d'un digraphe est toujours égal à  $|V| \times (|V| - 1)$ .

Une **diroute** (ou **chemin orienté** ou simplement chemin lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté) entre deux sommets  $u_1, u_n \in V$  est une suite finie de sommets  $u_1, u_2, \dots, u_n$  (ou une suite finie d'arcs  $a_1 = (u_1, u_2), \dots, a_{n-1} = (u_{n-1}, u_n)$ ) telle que pour tout  $1 \leq k < n$  il existe un arc  $(u_k, u_{k+1}) \in E$ .

La **longueur** d'une diroute est le nombre d'arcs qui le compose.

La **distance** entre deux sommets  $u, v \in V$ , notée  $d(u, v)$ , est la longueur minimale d'une diroute de  $u$  à  $v$ . Si une telle diroute n'existe pas, la distance est dite infinie  $d(u, v) = \infty$ .

Pour un digraphe  $D = (V, A)$ , le **graphe non orienté associé**  $G = (V, E)$  est défini par  $E = \{(uv) \mid (u, v) \in A \text{ ou } (v, u) \in A\}$ .

Le **diamètre** d'un digraphe, noté  $D(D)$ , est égal au diamètre du graphe non orienté associé.

Un digraphe est **faiblement connexe** ou **connexe** si pour toute paire de sommets  $u, v \in V$  il existe un chemin de  $u$  à  $v$  dans le graphe non orienté associé.

Un digraphe est **fortement connexe** si pour toute paire de sommets  $u, v \in V$  il existe une diroute de  $u$  à  $v$ .

La **densité** d'un digraphe est égale au nombre d'arcs  $|A|$  sur le nombre d'arcs maximum  $|V| \times (|V| - 1)$ . La densité est comprise entre zéro (le digraphe ne contient aucun arc) et un (tous les arcs possibles entre les sommets existent).

## Des topologies de graphes et de digraphes.

Un graphe est un **indépendant** si chaque sommet est de degré zéro (il ne contient ni arête ni arc, sa densité est zéro).

Un graphe connexe est un **chemin** si tous les sommets sont de degré deux, sauf deux sommets qui sont de degré un.

Un digraphe connexe est un **chemin orienté** (aussi appelé simplement chemin s'il n'y a pas d'ambiguïté) si tous les sommets ont un degré entrant de un et un degré sortant de un, sauf deux sommets qui ont un degré entrant de zéro et un degré sortant de un pour l'un et un degré entrant de un et un degré sortant de zéro pour l'autre.

Un graphe connexe est un **cycle** si tous les sommets sont de degré deux.

Un digraphe connexe est un **circuit** si tous les sommets ont un degré entrant et un degré sortant de un.

Un graphe est dit de **faible densité** si sa densité est "proche" de zéro.

Un graphe est dit de **forte densité** si sa densité est "proche" de un.

Un graphe **complet** est un graphe dont la densité est un, ce qui est équivalent à un graphe

dont le diamètre est un.

Un digraphe **complet** symétrique est un graphe dont la densité est un.

Un **multi-graphe** est un graphe qui possède plusieurs arcs ou arêtes entre deux mêmes sommets.

### Des propriétés sur les parcours.

Un parcours commence depuis un **sommet-source** (si un sommet de départ est désigné). Nous représentons ce sommet-source par un triangle bleu dans les illustrations.

Un parcours passe par des **sommets-cible** (si des sommets doivent obligatoirement être parcourus) et des sommets quelconques.

Un parcours passe par des **sommets-choix**, ce sont les sommets où l'arc sortant parcouru peut être librement choisi. Un sommet-choix n'est pas atteint par l'arc-tête d'une transition obligatoire.

Un parcours est **simple** s'il passe au plus une fois par chaque arc ou arête.

Un parcours est **élémentaire** s'il passe au plus une fois par chaque sommet.

Un parcours est  **$k$ -élémentaire** s'il passe au plus  $k$  fois par chaque sommet.

Un parcours est **Eulérien** s'il passe exactement une fois par chaque arc ou arête. Notons que tout graphe connexe  $k$ -régulier pour  $k$  pair admet un cycle Eulérien.

Un parcours est **Hamiltonien** s'il passe exactement une fois par chaque sommet.

### Des propriétés sur les transitions obligatoires.

Soit  $\Pi$  un ensemble de transitions obligatoires.

Une **transition obligatoire**  $E_i$  (ou  $A_i$ ) est un ensemble d'arêtes d'un graphe (ou d'arcs d'un digraphe) appartenant toutes aux mêmes solutions. Nous considérons des transitions obligatoires ne contenant que deux arêtes (ou deux arcs).

Soit  $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle \in \Pi$  une transition obligatoire avec  $u_1, u_2, u_3 \in V$  et  $(u_1, u_2), (u_2, u_3) \in A$ . Cette transition obligatoire est composée d'un **arc-tête**  $(u_1, u_2)$  et d'un **arc-queue**  $(u_2, u_3)$  qui définissent une orientation, ainsi que d'un **sommet-tête**  $u_1$ , d'un **sommet-centre**  $u_2$  et d'un **sommet-queue**  $u_3$ .

Un arc ne peut être un arc-tête que pour une unique transition obligatoire.

Un arc peut être un arc-queue d'autant de transitions obligatoires que le sommet-centre a de degré entrant.

Le nombre de transitions obligatoires, noté  $|\Pi|$ , est au plus égal au nombre d'arcs du digraphe.

Deux transitions obligatoires sont **symétriques** si elles partagent le même sommet-centre et que le sommet-tête de l'une est le sommet-queue de l'autre ( $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$  et  $\langle u_3, u_2, u_1 \rangle$  sont deux transitions obligatoires symétriques).

Dans un graphe **non orienté**, une transition obligatoire ne possède pas d'orientation, elle est implicitement définie par deux transitions obligatoires symétriques (la transition obligatoire  $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$  sur les arêtes  $(u_1 u_2)$  et  $(u_2 u_3)$  est équivalente aux deux transitions

obligatoires symétriques  $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$  et  $\langle u_3, u_2, u_1 \rangle$  sur les arcs  $(u_1, u_2)$ ,  $(u_2, u_3)$ ,  $(u_3, u_2)$  et  $(u_2, u_1)$ .

Des obligations  $\Pi = \{A_1, \dots, A_l\}$  sont dites **respectées** dans une solution  $P = (v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k)$  si, pour tout  $1 \leq i \leq k - 2$ , nous avons  $(v_i = a, v_{i+1} = b) \implies (v_{i+2} = c)$  pour toute transition obligatoire  $A_j = \langle a, b, c \rangle$ . C'est-à-dire que si la solution passe par l'arc-tête d'une transition obligatoire  $A_j$ , alors l'arc suivant doit être l'arc-queue de  $A_j$ . Notons que dans le cas de la recherche d'une **diroute** (ou d'un chemin ou d'une route), le dernier arc respecte automatiquement les transitions obligatoires puisqu'il n'y a pas d'arc suivant.

Deux transitions obligatoires sont **successives** si l'arc-queue de l'une est l'arc-tête de l'autre (les transitions obligatoires  $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$  et  $\langle u_2, u_3, u_4 \rangle$  sont successives).

Des transitions obligatoires  $A_1, \dots, A_l$  forment une **succession de transitions obligatoires** si, pour tout  $1 \leq i \leq l - 1$ , l'arc-queue de  $A_i$  est l'arc-tête de  $A_{i+1}$ .

Une succession de transitions obligatoires forme un **circuit de transitions obligatoires** si l'arc-queue de la dernière transition obligatoire est l'arc-tête de la première transition obligatoire. Dans un graphe non-orienté, une telle succession de transitions obligatoires forme un **cycle de transitions obligatoires**.

Si un parcours passe par l'arc-tête d'une transition obligatoire appartenant à un circuit de transitions obligatoires alors aucun arc en dehors de ce circuit ne peut être parcouru. Dans l'ensemble des figures, les transitions obligatoires sont illustrées par un lien rouge entre deux arcs à l'intérieur du sommet-centre.

Un digraphe et ses transitions obligatoires associées sont représentés dans la Figure 3.1. Nous pouvons y voir :

- Une transition obligatoire incorrecte en pointillé ( $\langle s, u_1, u_5 \rangle$ ). Une seule transition obligatoire peut avoir l'arc-tête  $(s, u_1)$ .
- Une succession de transitions obligatoires ( $\langle s, u_1, u_2 \rangle$  et  $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ ).
- Une diroute du sommet-source  $s$  au sommet-cible  $u_3$  respectant les transitions obligatoires, formée par les arcs  $(s, u_1)$ ,  $(u_1, u_2)$  et  $(u_2, u_3)$ .
- Un circuit de transitions obligatoires ( $\langle u_4, u_5, u_6 \rangle$ ,  $\langle u_5, u_6, u_7 \rangle$ ,  $\langle u_6, u_7, u_4 \rangle$  et  $\langle u_7, u_4, u_5 \rangle$ ).
- Un circuit depuis le sommet-source  $s$ , passant par le sommet-cible  $u_8$  respectant les transitions obligatoires, formé par les arcs  $(s, u_4)$ ,  $(u_4, u_8)$  et  $(u_8, s)$ . En raison du circuit de transitions obligatoires, il n'existe aucun circuit respectant les transitions obligatoires passant par les sommets  $u_4$ ,  $u_5$ ,  $u_6$  et  $u_7$  bien que le circuit formé par les arcs  $(s, u_4)$ ,  $(u_4, u_5)$ ,  $(u_5, u_6)$ ,  $(u_6, u_7)$ ,  $(u_7, u_8)$  et  $(u_8, s)$  est un circuit partant du sommet-source  $s$  et passant par le sommet-cible  $u_8$ .
- Deux transitions obligatoires symétriques ( $\langle u_5, u_6, u_7 \rangle$  et  $\langle u_7, u_6, u_5 \rangle$ ).

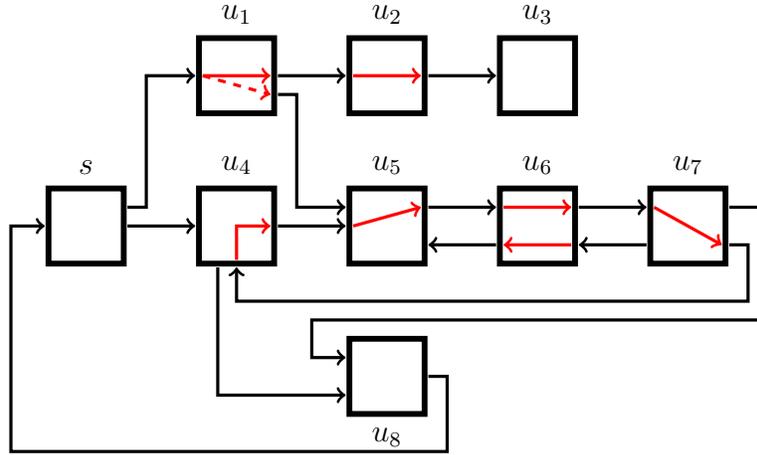


FIGURE 3.1 – Un digraphe et ses transitions obligatoires associées.

### La représentation du problème $RX3C$ par des sommets.

Plusieurs preuves de complexité s'appuient sur le problème  $RX3C$  (nous définissons ce problème dans la sous-section 3.1.2). Une instance du problème sera alors modélisée par un digraphe et des transitions obligatoires. Certains éléments de langages propres à ces réductions sont présentés ici. Un **sommet-élément** est un sommet représentant un élément d'un univers  $\mathcal{X}$ .

Un **sommet-triplet** est un sommet représentant un triplet d'une collection  $\mathcal{C}$ .

Un **sommet-représentant** est un sommet-élément ou un sommet-triplet. Dans une construction, il correspond à un sommet associé à un élément pré-existant à la construction, il le représente sous une autre formulation.

De même, un **sommet-commun** est un sommet pré-existant à une construction. Il est directement associé à un sommet d'un autre graphe ou digraphe.

Dans l'ensemble des figures, les sommets-élément sont illustrés par des carrés verts et les sommets-triplet sont illustrés par des hexagones oranges.

### 3.1.2 Description des problèmes

#### Tournée Multi-cibles ( $TM$ )

**Données :** Un digraphe  $D = (V, A)$ , un sommet-source  $s$ , des sommets-cible  $t_1, \dots, t_k$  et un entier  $w$ .

**Objectif :** Trouver une diroute  $P$  de taille au plus  $w$  qui part du sommet-source et passe par tous les sommets-cible.

Le problème de la Tournée Multi-cibles prend en entrée un digraphe  $D = (V, A)$ , un sommet-source  $s$ , des sommets-cible  $t_1, \dots, t_k$  et un entier  $w$ . Une solution est une diroute

$P$  de taille au plus  $w$  qui part du sommet-source et passe par tous les sommets-cible. Il n'est pas nécessaire de retourner à la source. Une instance et une solution optimale pour cette instance (de taille trois :  $(s, u_1)$ ,  $(u_1, t_1)$  et  $(t_1, t_2)$ ) sont illustrées dans la Figure 3.2. Le problème  $TM$  est associé à deux spécialisations : lorsque tous les sommets sont des cibles (équivalent au problème de la tournée totale) et lorsqu'un seul sommet est une cible (équivalent au problème du plus court chemin). Il s'agit d'un problème  $\mathcal{NP}$ -complet [23].

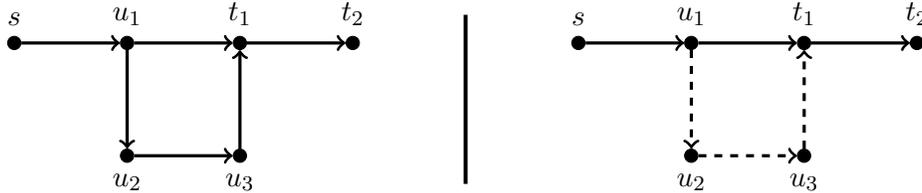


FIGURE 3.2 – Une instance du problème  $TM$  avec une source  $s$  et des sommets-cible  $t_1$  et  $t_2$  (à gauche) et une solution  $P$  (à droite). Les arcs appartenant à  $P$  sont représentés en continu.

### Tournée Totale ( $TT$ )

**Données :** Un digraphe  $D = (V, A)$ , un sommet-source  $s$  et un entier  $w$ .

**Objectif :** Trouver une diroute  $P$  de taille au plus  $w$  qui part du sommet-source et passe par tous les sommets du digraphe.

Le problème de la Tournée Totale prend en entrée un digraphe  $D = (V, A)$ , un sommet-source  $s$  et un entier  $w$ . Une solution est une diroute  $P$  de taille au plus  $w$  qui part du sommet-source et passe par tous les sommets du digraphe. Une instance et une solution pour cette instance (de taille cinq :  $(s, u_1)$ ,  $(u_1, u_2)$ ,  $(u_2, u_3)$ ,  $(u_3, u_4)$  et  $(u_4, u_5)$ ) sont illustrées dans la Figure 3.3. Il s'agit d'un problème  $\mathcal{NP}$ -complet [23].

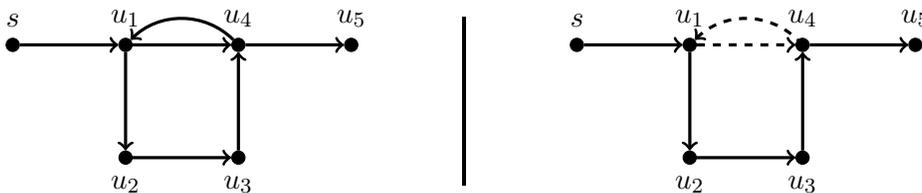


FIGURE 3.3 – Une instance du problème  $TT$  avec une source  $s$  (à gauche) et une solution  $P$  (à droite). Les arcs appartenant à  $P$  sont représentés en continu.

### Plus Court Chemin ( $PCC$ )

**Données :** Un digraphe  $D = (V, A)$ , un sommet-source  $s$  et un sommet-cible  $t$ .

**Objectif :** Trouver la plus courte diroute  $P$  qui part du sommet-source et termine sur le sommet-cible.

Le problème du Plus Court Chemin prend en entrée un digraphe  $D = (V, A)$ , un sommet-source  $s$  et un sommet-cible  $t$ . Une solution est la plus courte diroute  $P$  qui part du sommet-source et termine sur le sommet-cible. Une instance et une solution pour cette instance (de taille deux :  $(s, u_1)$  et  $(u_1, t)$ ) sont illustrées dans la Figure 3.4. Le problème  $PCC$  est associé à deux spécialisations : lorsque la diroute doit être élémentaire et lorsque la diroute doit être  $k$ -élémentaire pour  $k \geq 1$ . Ce problème admet une résolution en temps polynomial [9].

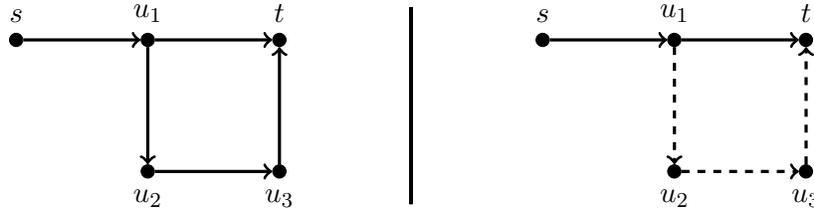


FIGURE 3.4 – Une instance du problème  $PCC$  avec une source  $s$  et un sommet-cible  $t$  (à gauche) et une solution  $P$  (à droite). Les arcs appartenant à  $P$  sont représentés en continu.

### Plus Court Chemin Élémentaire ( $PCCE$ )

**Données :** Un digraphe  $D = (V, A)$ , un sommet-source  $s$ , un sommet-cible  $t$  et un entier  $w$ .

**Objectif :** Trouver une diroute élémentaire  $P$  de taille au plus  $w$  qui part du sommet-source et termine sur le sommet-cible.

Le problème du Plus Court Chemin Élémentaire prend en entrée un digraphe  $D = (V, A)$ , un sommet-source  $s$ , un sommet-cible  $t$  et un entier  $w$ . Une solution est une diroute élémentaire  $P$  de taille au plus  $w$  qui part du sommet-source et termine sur le sommet-cible. Une instance et une solution pour cette instance (de taille trois :  $(s, u_1)$ ,  $(u_1, u_4)$  et  $(u_4, t)$ ) sont illustrées dans la Figure 3.5. Ce problème admet une résolution en temps polynomial [9].

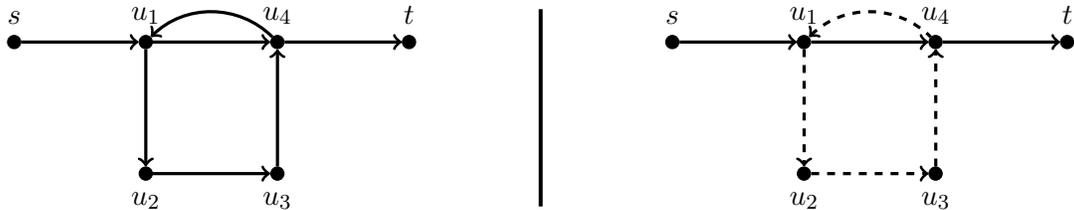


FIGURE 3.5 – Une instance du problème  $PCCE$  avec une source  $s$  et un sommet-cible  $t$  (à gauche) et une solution  $P$  (à droite). Les arcs appartenant à  $P$  sont représentés en continu.

### Plus Court Chemin $k$ -Élémentaire (*PCCKE*)

**Données :** Un digraphe  $D = (V, A)$ , un sommet-source  $s$ , un sommet-cible  $t$ , un entier strictement positif  $k$  et un entier  $w$ .

**Objectif :** Trouver une diroute  $k$ -élémentaire  $P$  de taille au plus  $w$  qui part du sommet-source et termine sur le sommet-cible.

Le problème du Plus Court Chemin  $k$ -Élémentaire prend en entrée un digraphe  $D = (V, A)$ , un sommet-source  $s$ , un sommet-cible  $t$ , un entier strictement positif  $k$  et un entier  $w$ . Une solution est une diroute  $k$ -élémentaire  $P$  de taille au plus  $w$  qui part du sommet-source et termine sur le sommet-cible. Une instance et une solution pour cette instance (de taille trois :  $(s, u_1)$ ,  $(u_1, u_2)$  et  $(u_2, t)$ ) sont illustrées dans la Figure 3.6. Ce problème admet une résolution en temps polynomial [9].

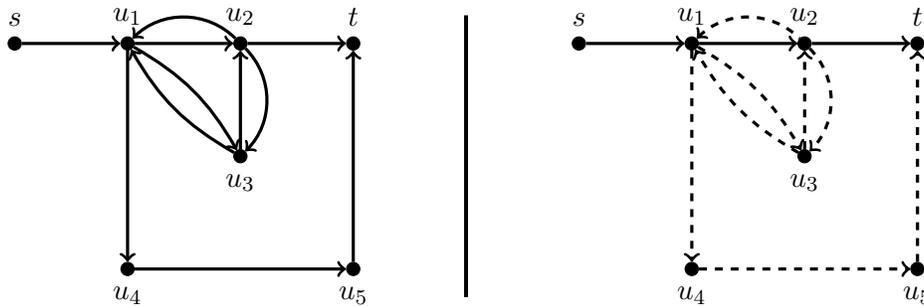


FIGURE 3.6 – Une instance du problème *PCCKE* avec une source  $s$  et un sommet-cible  $t$  (à gauche) et une solution  $P$  (à droite). Les arcs appartenant à  $P$  sont représentés en continu.

### Tournée Multi-cibles avec Transitions Obligatoires (*TMO*)

**Données :** Un digraphe  $D = (V, A)$ , un sommet-source  $s$ , des sommets-cible  $t_1, \dots, t_k$ , un entier  $w$  et des transitions obligatoires  $\Pi$ .

**Objectif :** Trouver une diroute  $P$  de taille au plus  $w$  qui part du sommet-source, passe par tous les sommets-cible et respecte les transitions obligatoires.

Le problème de la Tournée Multi-cibles avec Transitions Obligatoires prend en entrée un digraphe  $D = (V, A)$ , un sommet-source  $s$ , des sommets-cible  $t_1, \dots, t_k$ , un entier  $w$  et des transitions obligatoires  $\Pi$ . Une solution est une diroute  $P$  de taille au plus  $w$  qui part du sommet-source, passe par tous les sommets-cible et respecte les transitions obligatoires. Une instance et une solution pour cette instance (de taille cinq :  $(s, u_1)$ ,  $(u_1, u_2)$ ,  $(u_2, u_3)$ ,  $(u_3, t_1)$  et  $(t_1, t_2)$ ) sont illustrées dans la Figure 3.7. Le problème *TMO* est associé à deux spécialisations : lorsque tous les sommets sont des cibles (équivalent au problème de la tournée totale) et lorsqu'un seul sommet est une cible (équivalent au problème du plus court chemin).

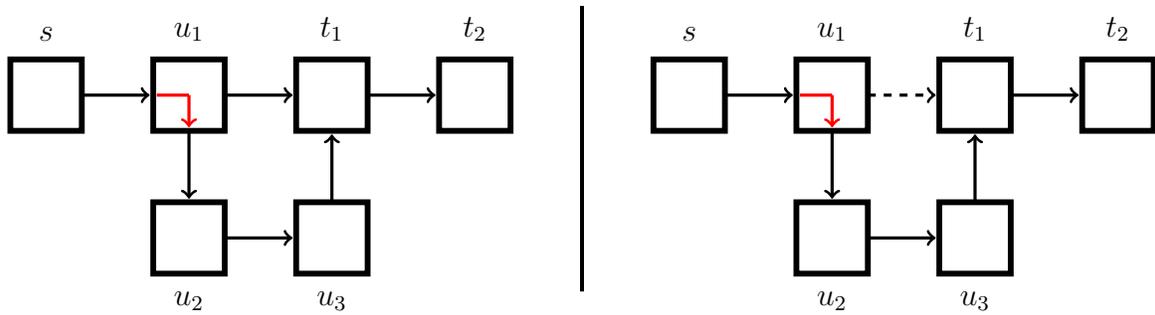


FIGURE 3.7 – Une instance du problème *TMO* avec une source  $s$  et des sommets-cible  $t_1$  et  $t_2$  (à gauche) et une solution  $P$  (à droite). Les arcs appartenant à  $P$  sont représentés en continu.

### Tournée Totale avec Transitions Obligatoires (*TTO*)

**Données :** Un digraphe  $D = (V, A)$ , un sommet-source  $s$ , un entier  $w$  et des transitions obligatoires  $\Pi$ .

**Objectif :** Trouver une diroute  $P$  de taille au plus  $w$  qui part du sommet-source, passe par tous les sommets du digraphe et respecte les transitions obligatoires.

Le problème de la Tournée Totale avec Transitions Obligatoires prend en entrée un digraphe  $D = (V, A)$ , un sommet-source  $s$ , un entier  $w$  et des transitions obligatoires  $\Pi$ . Une solution est une diroute  $P$  de taille au plus  $w$  qui part du sommet-source, passe par tous les sommets du digraphe et respecte les transitions obligatoires. Une instance et une solution pour cette instance (de taille sept :  $(s, u_1)$ ,  $(u_1, u_4)$ ,  $(u_4, u_1)$ ,  $(u_1, u_2)$ ,  $(u_2, u_3)$ ,  $(u_3, u_4)$  et  $(u_4, u_5)$ ) sont illustrées dans la Figure 3.8.

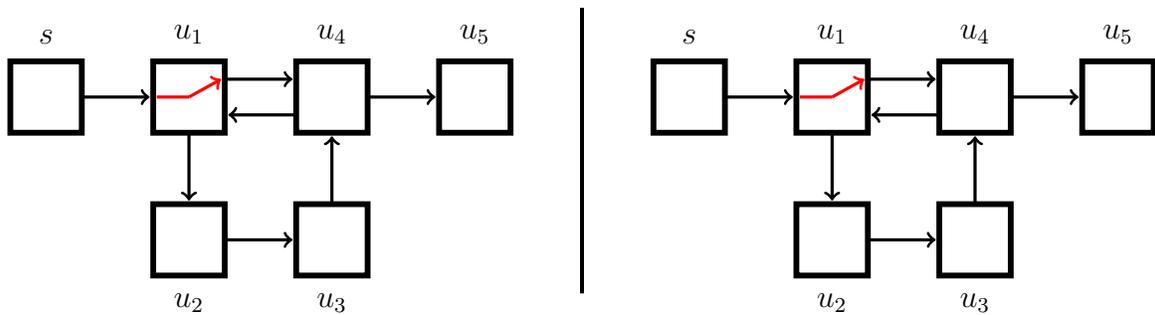


FIGURE 3.8 – Une instance du problème *TTO* avec une source  $s$  (à gauche) et une solution  $P$  (à droite). L'ensemble des arcs appartient à  $P$ .

### Plus Court Chemin avec Transitions Obligatoires (*PCCO*)

**Données :** Un digraphe  $D = (V, A)$ , un sommet-source  $s$ , un sommet-cible  $t$  et des transitions obligatoires  $\Pi$ .

**Objectif :** Trouver la plus courte diroute  $P$  qui part du sommet-source, termine sur le sommet-cible et respecte les transitions obligatoires.

Le problème du Plus Court Chemin avec Transitions Obligatoires prend en entrée un digraphe  $D = (V, A)$ , un sommet-source  $s$ , un sommet-cible  $t$  et des transitions obligatoires  $\Pi$ . Une solution est la plus courte diroute  $P$  qui part du sommet-source, termine sur le sommet-cible et respecte les transitions obligatoires. Une instance et une solution pour cette instance (de taille quatre :  $(s, u_1)$ ,  $(u_1, u_2)$ ,  $(u_2, u_3)$  et  $(u_3, t)$ ) sont illustrées dans la Figure 3.9. Le problème *PCCO* est associé à deux spécialisations : lorsque la diroute doit être élémentaire et lorsque la diroute doit être  $k$ -élémentaire pour  $k \geq 1$ .

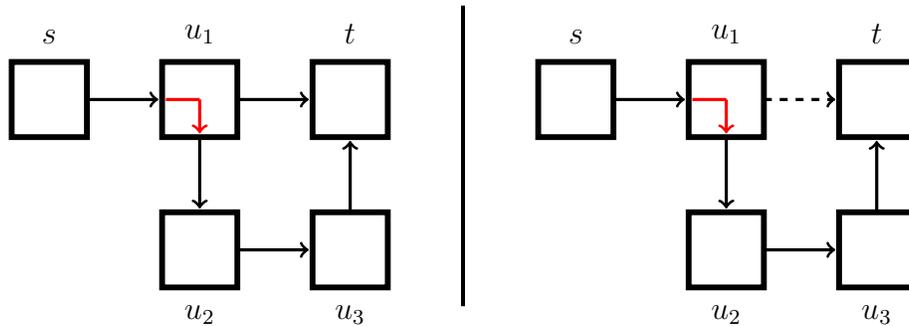


FIGURE 3.9 – Une instance du problème *PCCO* avec une source  $s$  et un sommet-cible  $t$  (à gauche) et une solution  $P$  (à droite). Les arcs appartenant à  $P$  sont représentés en continu.

### Plus Court Chemin Élémentaire avec Transitions Obligatoires (*PC-CEO*)

**Données :** Un digraphe  $D = (V, A)$ , un sommet-source  $s$ , un sommet-cible  $t$ , un entier  $w$  et des transitions obligatoires  $\Pi$ .

**Objectif :** Trouver une diroute élémentaire  $P$  de taille au plus  $w$  qui part du sommet-source, termine sur le sommet-cible et respecte les transitions obligatoires.

Le problème du Plus Court Chemin Élémentaire avec Transitions Obligatoires prend en entrée un digraphe  $D = (V, A)$ , un sommet-source  $s$ , un sommet-cible  $t$ , un entier  $w$  et des transitions obligatoires  $\Pi$ . Une solution est une diroute élémentaire  $P$  de taille au plus  $w$  qui part du sommet-source, termine sur le sommet-cible et respecte les transitions obligatoires. Une instance et une solution pour cette instance (de taille cinq :  $(s, u_1)$ ,  $(u_1, u_2)$ ,  $(u_2, u_3)$ ,  $(u_3, u_4)$  et  $(u_4, t)$ ) sont illustrées dans la Figure 3.10.

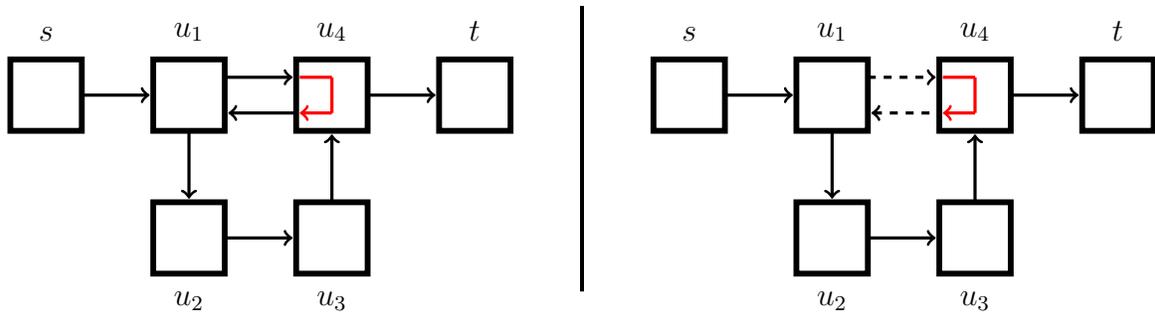


FIGURE 3.10 – Une instance du problème *PCCEO* avec une source  $s$  et un sommet-cible  $t$  (à gauche) et une solution  $P$  (à droite). Les arcs appartenant à  $P$  sont représentés en continu.

### Plus Court Chemin $k$ -Élémentaire avec Transitions Obligatoires (*PCCKEO*)

**Données :** Un digraphe  $D = (V, A)$ , un sommet-source  $s$ , un sommet-cible  $t$ , un entier strictement positif  $k$ , un entier  $w$  et des transitions obligatoires  $\Pi$ .

**Objectif :** Trouver une diroute  $k$ -élémentaire  $P$  de taille au plus  $w$  qui part du sommet-source, termine sur le sommet-cible et respecte les transitions obligatoires.

Le problème du Plus Court Chemin  $k$ -Élémentaire avec Transitions Obligatoires prend en entrée un digraphe  $D = (V, A)$ , un sommet-source  $s$ , un sommet-cible  $t$ , un entier strictement positif  $k$ , un entier  $w$  et des transitions obligatoires  $\Pi$ . Une solution est une diroute  $k$ -élémentaire  $P$  de taille au plus  $w$  qui part du sommet-source, termine sur le sommet-cible et respecte les transitions obligatoires. Une instance et une solution pour cette instance (de taille quatre :  $(s, u_1)$ ,  $(u_1, u_4)$ ,  $(u_4, u_5)$  et  $(u_5, t)$ ) sont illustrées dans la Figure 3.11.

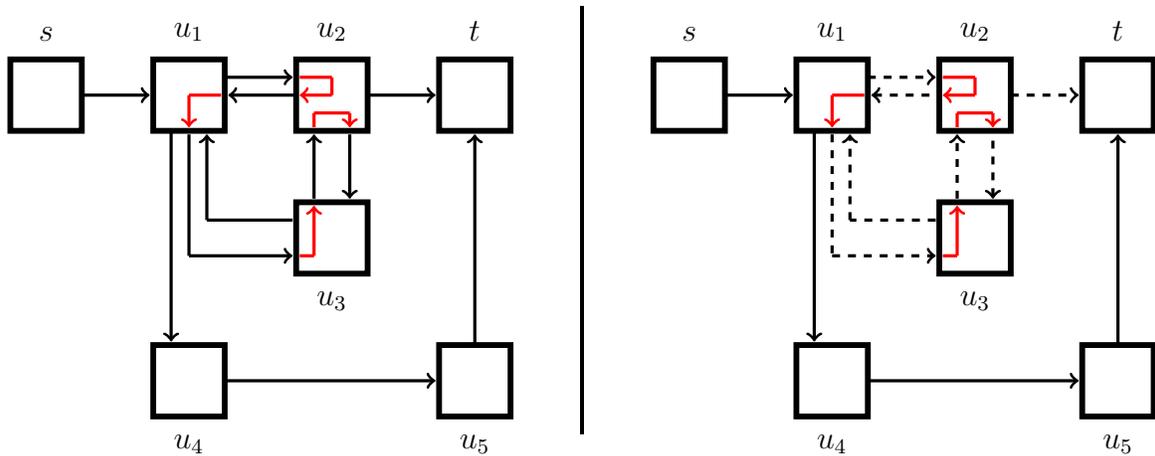


FIGURE 3.11 – Une instance du problème *PCKEO* pour  $k = 2$ , avec une source  $s$  et un sommet-cible  $t$  (à gauche) et une solution  $P$  (à droite). Les arcs appartenant à  $P$  sont représentés en continu.

### Circuit Eulérien (*CE*)

**Données :** Un digraphe  $D = (V, A)$ .

**Objectif :** Trouver un circuit  $P$  qui passe par tous les arcs du digraphe.

Le problème du Circuit Eulérien prend en entrée un digraphe  $D = (V, A)$ . Une solution est un circuit  $P$  qui passe par tous les arcs du digraphe. Une instance et une solution pour cette instance (de taille huit :  $(u_1, u_2)$ ,  $(u_2, u_3)$ ,  $(u_3, u_4)$ ,  $(u_4, u_1)$ ,  $(u_1, u_4)$ ,  $(u_4, u_3)$ ,  $(u_3, u_2)$  et  $(u_2, u_1)$ ) sont illustrées dans la Figure 3.12. Ce problème admet une résolution en temps polynomial [9].

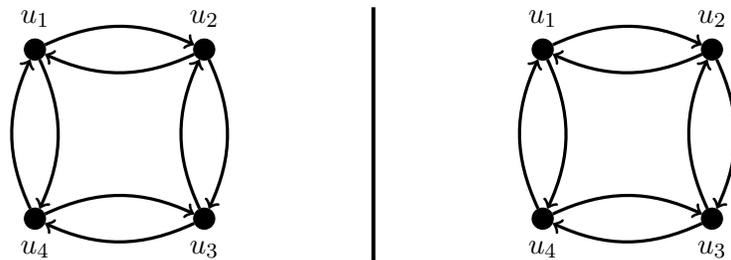


FIGURE 3.12 – Une instance du problème *CE* (à gauche) et une solution  $P$  (à droite). L'ensemble des arcs appartient à  $P$ .

### Circuit Eulérien avec Transitions Obligatoires (*CEO*)

**Données :** Un digraphe  $D = (V, A)$  et des transitions obligatoires  $\Pi$ .

**Objectif :** Trouver un circuit  $P$  qui passe par tous les arcs du digraphe et qui respecte les transitions obligatoires.

Le problème du Circuit Eulérien avec Transitions Obligatoires prend en entrée un

digraphe  $D = (V, A)$  et des transitions obligatoires  $\Pi$ . Une solution est un circuit  $P$  qui passe par tous les arcs du digraphe et qui respecte les transitions obligatoires. Une instance et une solution pour cette instance (de taille huit :  $(u_1, u_2)$ ,  $(u_2, u_3)$ ,  $(u_3, u_2)$ ,  $(u_2, u_1)$ ,  $(u_1, u_4)$ ,  $(u_4, u_3)$ ,  $(u_3, u_4)$  et  $(u_4, u_1)$ ) sont illustrées dans la Figure 3.13.

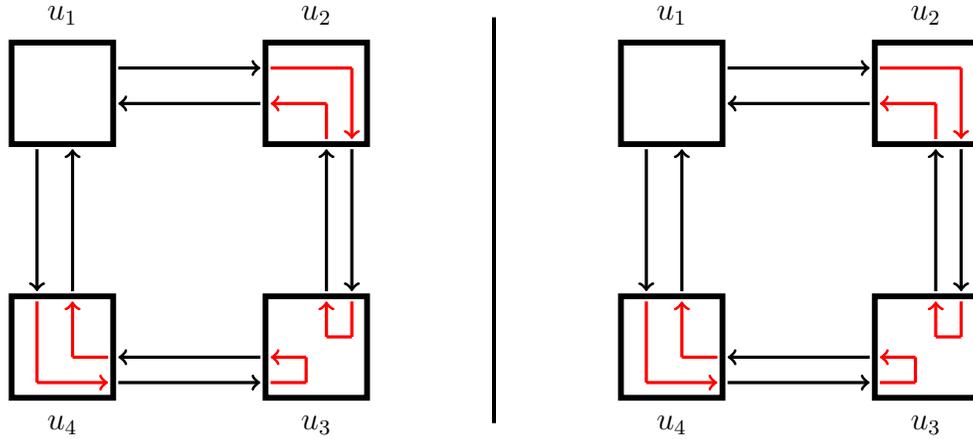


FIGURE 3.13 – Une instance du problème *CEO* (à gauche) et une solution  $P$  (à droite). Les arcs appartenant à  $P$  sont représentés en continu.

### Cycle Hamiltonien (*CH*)

**Données :** Un graphe  $G = (V, E)$ .

**Objectif :** Trouver un cycle élémentaire  $P$  qui passe par tous les sommets du graphe exactement une fois.

Le problème du Cycle Hamiltonien prend en entrée un graphe  $G = (V, E)$ . Une solution est un cycle élémentaire  $P$  qui passe par tous les sommets du graphe. Une instance et une solution pour cette instance (de taille six :  $(u_1, u_2)$ ,  $(u_2, u_3)$ ,  $(u_3, u_4)$ ,  $(u_4, u_5)$ ,  $(u_5, u_6)$  et  $(u_6, u_1)$ ) sont illustrées dans la Figure 3.14. Il s'agit d'un problème  $\mathcal{NP}$ -complet [23].

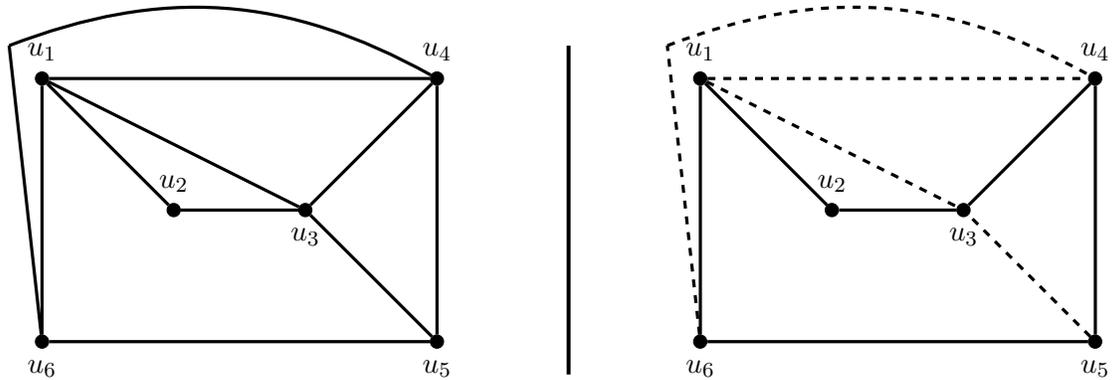


FIGURE 3.14 – Une instance du problème *CH* (à gauche) et une solution *P* (à droite). Les arcs appartenant à *P* sont représentés en continu.

### Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires (*CHO*)

**Données :** Un graphe  $G = (V, E)$  et des transitions obligatoires  $\Pi$ .

**Objectif :** Trouver un cycle élémentaire *P* qui passe par tous les sommets du graphe exactement une fois et qui respecte les transitions obligatoires.

Le problème du Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires prend en entrée un graphe  $G = (V, E)$  et des transitions obligatoires  $\Pi$ . Une solution est un cycle élémentaire *P* qui passe par tous les sommets du graphe et qui respecte les transitions obligatoires. Une instance et une solution pour cette instance (de taille six :  $(u_1, u_6)$ ,  $(u_6, u_4)$ ,  $(u_4, u_5)$ ,  $(u_5, u_3)$ ,  $(u_3, u_2)$  et  $(u_2, u_1)$ ) sont illustrées dans la Figure 3.15.

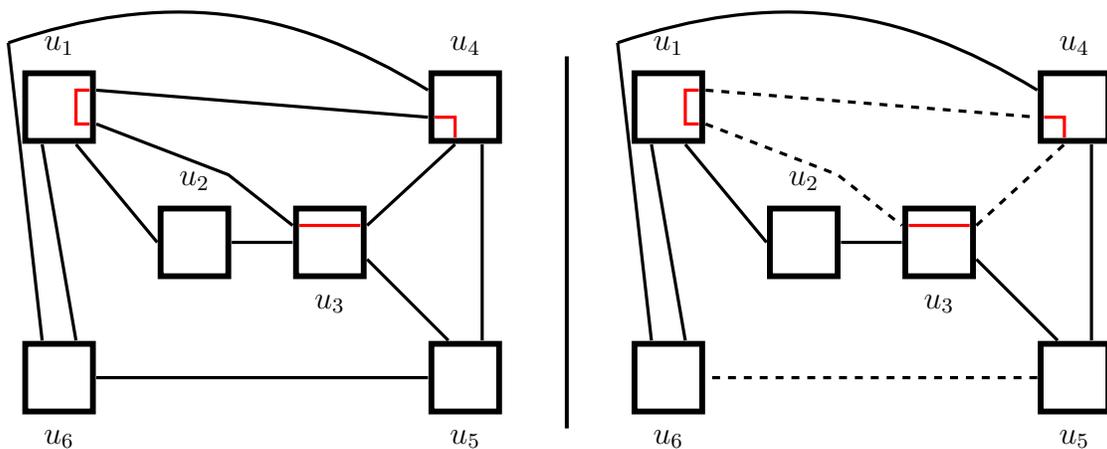


FIGURE 3.15 – Une instance du problème *CHO* (à gauche) et une solution *P* (à droite). Les arcs appartenant à *P* sont représentés en continu.

### Cycle Élémentaire Maximum (*CEM*)

**Données :** Un graphe  $G = (V, E)$ .

**Objectif :** Trouver un cycle élémentaire  $P$  qui passe par le plus de sommets possibles du graphe.

**Mesure :** Le nombre de sommets dans le cycle.

Le problème du Cycle Élémentaire Maximum prend en entrée un graphe  $G = (V, E)$ . Une solution est un cycle élémentaire  $P$  qui passe par le plus de sommets possibles du graphe. La qualité de la solution est mesurée en fonction du nombre de sommets dans le cycle. Une instance et une solution pour cette instance (de taille six :  $(u_1, u_2)$ ,  $(u_2, u_3)$ ,  $(u_3, u_4)$ ,  $(u_4, u_5)$ ,  $(u_5, u_6)$  et  $(u_6, u_1)$ ) sont illustrées dans la Figure 3.16. Il s'agit d'un problème  $\mathcal{NP}$ -complet [23].

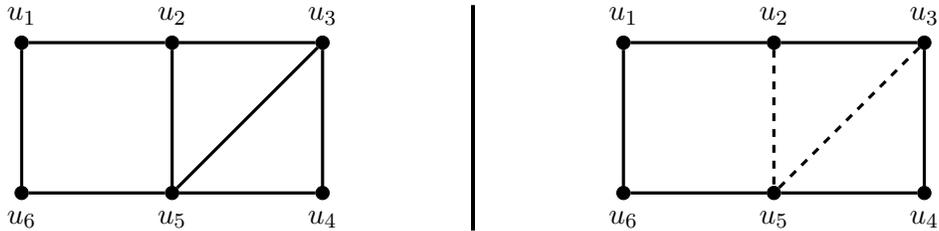


FIGURE 3.16 – Une instance du problème *CEM* (à gauche) et une solution  $P$  (à droite). Les arcs appartenant à  $P$  sont représentés en continu.

### Cycle Élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires (*CEMO*)

**Données :** Un graphe  $G = (V, E)$  et des transitions obligatoires  $\Pi$ .

**Objectif :** Trouver un cycle élémentaire  $P$  qui passe par le plus de sommets possibles du graphe et qui respecte les transitions obligatoires.

**Mesure :** Le nombre de sommets dans le cycle.

Le problème du Cycle Élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires prend en entrée un graphe  $G = (V, E)$  et des transitions obligatoires  $\Pi$ . Une solution est un cycle élémentaire  $P$  qui passe par le plus de sommets possibles du graphe et qui respecte les transitions obligatoires. La qualité de la solution est mesurée en fonction du nombre de sommets dans le cycle. Une instance et une solution pour cette instance (de taille quatre :  $(u_1, u_2)$ ,  $(u_2, u_5)$ ,  $(u_5, u_6)$  et  $(u_6, u_1)$ ) sont illustrées dans la Figure 3.17.

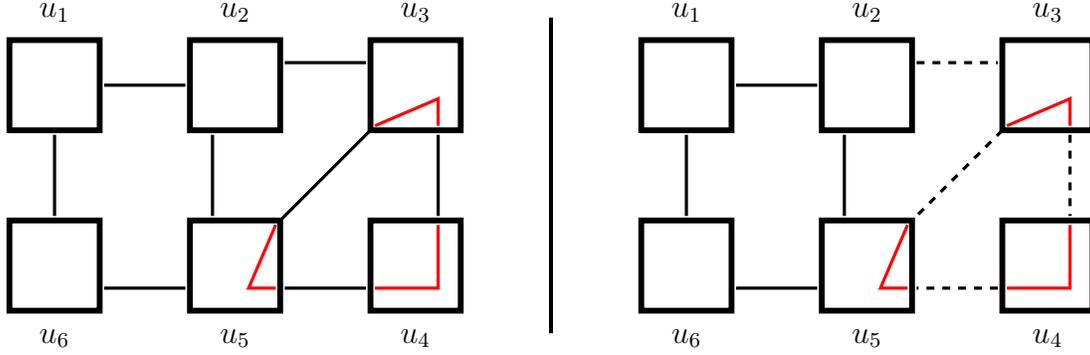


FIGURE 3.17 – Une instance du problème *CEMO* (à gauche) et une solution  $P$  (à droite). Les arcs appartenant à  $P$  sont représentés en continu.

### Couverture exacte (XC)

**Données :** Un univers  $\mathcal{X} = \{1, \dots, k\}$  et une collection d'éléments  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_l\}$ .

**Objectif :** Trouver un sous-ensemble  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  tel que chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$  apparaît exactement une fois dans  $\mathcal{C}'$ .

Le problème de la Couverture exacte prend en entrée un univers  $\mathcal{X} = \{1, \dots, k\}$  et une collection d'éléments  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_l\}$ . Une solution est un sous-ensemble  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  tel que chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$  apparaît exactement une fois dans  $\mathcal{C}'$ . Nous nous intéressons à une version restrictive de ce problème.

### Couverture exacte par des triplets avec univers restreint (RX3C)

**Données :** Un univers  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 3q\}$  et une collection de triplets  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_{3q}\}$ .

**Objectif :** Trouver un sous-ensemble  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  tel que chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$  apparaît exactement une fois dans  $\mathcal{C}'$ .

Le problème de la Couverture exacte par des triplets avec univers restreint (*RX3C*) prend en entrée un univers  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 3q\}$  et une collection de triplets  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_{3q}\}$ . Dans cette version restreinte du problème de la couverture exacte,  $\mathcal{C}$  est une collection de triplets telle que chaque élément de  $\mathcal{X}$  apparaît dans exactement trois triplets. Ainsi, si  $\mathcal{X}$  contient  $3q$  éléments alors  $\mathcal{C}$  contient  $3q$  triplets. Une solution est un sous-ensemble  $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$  tel que chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$  apparaît exactement une fois dans  $\mathcal{C}'$ . Nous savons que  $\mathcal{C}'$  doit contenir  $q$  triplets parmi les  $3q$  triplets de  $\mathcal{C}$  pour couvrir exactement les  $3q$  éléments de  $\mathcal{X}$ . Un exemple d'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  pour le problème *RX3C* est  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$  et  $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ . Une solution  $\mathcal{C}'$  pour cette instance est  $\mathcal{C}' = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$ . Ce problème a été montré  $\mathcal{NP}$ -complet par Karp [34].

### 3.1.3 Des résultats préliminaires

Une instance du problème de la Tournée Multi-cibles, de la Tournée Totale, du Plus Court Chemin, du Plus Court Chemin Élémentaire, du Plus Court Chemin  $k$ -Élémentaire, du Circuit Eulérien, du Cycle Hamiltonien ou du Cycle Élémentaire Maximum contient un graphe ou un digraphe et éventuellement, d'une source, d'un nombre de cibles ou d'une limitation sur la taille d'une solution. Une solution est un parcours de taille bornée ou non, pouvant être simple ou élémentaire, pouvant former un circuit ou un cycle. Lorsque nous introduisons des transitions obligatoires, ce fait reste inchangé. Ainsi, pour chacun des problèmes, si la version sans transitions obligatoires ne contient aucune solution, alors aucune solution ne peut exister une fois les transitions obligatoires associées. Les transitions obligatoires n'ajoutent aucune solution, elles permettent seulement d'ajouter un critère de choix supplémentaire.

Pour chacun des problèmes cités précédemment, nous montrons si l'existence d'au moins une solution est toujours préservée ou non. Dans le cas où l'ensemble des solutions pour une instance ne respectent pas les transitions obligatoires, nous exhibons une topologie de graphe pour laquelle il existe un algorithme polynomial permettant de trouver une solution, si elle existe.

#### Tournée multi-cibles

Le problème de la Tournée Multi-cibles avec Transitions Obligatoires consiste à trouver une diroute de taille bornée passant par toutes les cibles depuis un sommet-source et respectant les transitions obligatoires. Dans sa version sans transitions obligatoires, le problème est connu pour être  $\mathcal{NP}$ -complet [23]. La  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème  $TMO$  est ainsi déjà connue. Dans la Figure 3.18, nous proposons une instance du problème de la Tournée Multi-cibles pour laquelle il existe une solution  $((s, u_1), (u_1, t_1)$  et  $(t_1, t_2))$ , ainsi qu'une affectation des transitions obligatoires éliminant toutes les solutions possibles (depuis le sommet-source, il n'est possible que d'atteindre les sommets  $u_1$  et  $u_2$ ). Nous proposons par la suite une preuve supplémentaire de la  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème  $TMO$ . Cette preuve permet de présenter plusieurs gadgets utiles pour la suite des résultats. Notons que dans la suite du chapitre, l'étude de la complexité du problème  $TMO$  est uniquement effectuée à travers ces deux cas particuliers : lorsque un seul sommet est une cible et lorsque tous les sommets sont des cibles.

Nous montrons que déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour le problème de la Tournée Multi-cibles avec Transitions Obligatoires ( $TMO$ ) est un problème  $NP$ -complet. Nous nous réduisons à une version restreinte du problème de la Couverture Exacte par des triplets ( $RX3C$ ). Une instance du problème  $RX3C$  est composée d'un univers  $\mathcal{X}$  contenant  $3q$  éléments et d'une collection  $\mathcal{C}$  de  $3q$  triplets de ces éléments. Une solution est une sous-collection  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$  de taille  $q$  telle que chaque élément est couvert par un unique triplet (*propriété d'unicité*) et chaque triplet couvre ses trois éléments (*propriété de totalité*). Nous créons un *gadget de représentation* (Construction 25) pour modéliser les éléments et les triplets d'une instance du problème  $RX3C$  sous la forme de

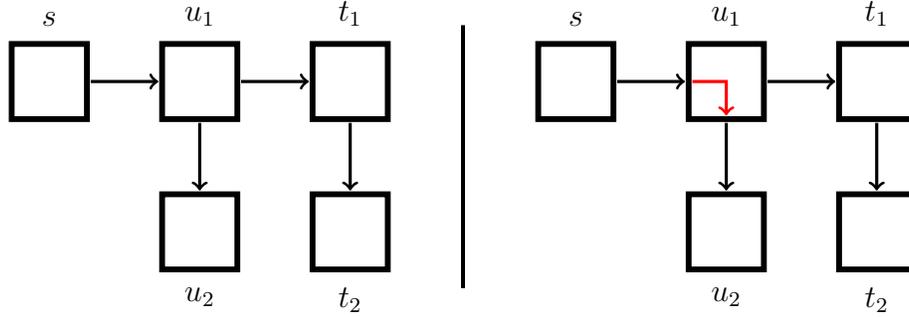


FIGURE 3.18 – Une instance du problème  $TM$  (à gauche) et l’instance associée du problème  $TMO$  (à droite) avec une source  $s$  et des sommets-cible  $t_1$  et  $t_2$ .

sommets (sommets-élément et sommets-triplet), d’arcs et de transitions obligatoires d’une instance du problème  $TMO$ . Nous concluons ainsi sur la  $NP$ -complétude du problème de l’existence d’une solution au problème  $TMO$  (Théorème 1).

**Idée 25.** *Le gadget de représentation.*

Chaque élément est représenté par un sommet-élément, tandis que chaque triplet est représenté par quatre sommets-triplet. Pour passer par tous les sommets-élément, nous devons choisir un certain nombre de chemins à partir du sommet-source (vers un sommet-triplet). Les transitions obligatoires garantissent que pour chaque triplet le chemin choisi passe par les sommets-représentant des trois éléments qui le composent (propriété de totalité) avant de pouvoir choisir un autre chemin en retournant à la source. Chaque succession de transitions obligatoires est appelée un collecteur d’éléments. Le sommet-source est le seul sommet où un arc peut être choisi librement. Une fois un arc choisi, le chemin emprunte une succession de transitions obligatoires jusqu’à retourner à la source.

**Construction 25.** *Le gadget de représentation.*

Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Nous construisons une instance  $(D = (V, A), \Pi)$  du problème  $TMO$  comme suit :

- Nous ajoutons le sommet-source  $s$ .
- Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , nous ajoutons le sommet  $x_i$ .
- Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$  :
  - Nous ajoutons les sommets  $c_{j,1}$ ,  $c_{j,2}$ ,  $c_{j,3}$  et  $c_{j,4}$ .
  - Nous ajoutons les arcs  $(s, c_{j,1})$  et  $(c_{j,4}, s)$ .
  - Soient  $x_a, x_b, x_c \in \mathcal{X}$  les trois éléments du triplet  $c_j$ .
  - Nous ajoutons les arcs  $(c_{j,1}, x_a)$ ,  $(x_a, c_{j,2})$ ,  $(c_{j,2}, x_b)$ ,  $(x_b, c_{j,3})$ ,  $(c_{j,3}, x_c)$  et  $(x_c, c_{j,4})$ .
  - Nous ajoutons le collecteur d’élément  $\alpha_j$  (c’est-à-dire la succession de transitions obligatoires) de taille sept  $\langle s, c_{j,1}, x_a \rangle$ ,  $\langle c_{j,1}, x_a, c_{j,2} \rangle$ ,  $\langle x_a, c_{j,2}, x_b \rangle$ ,  $\langle c_{j,2}, x_b, c_{j,3} \rangle$ ,  $\langle x_b, c_{j,3}, x_c \rangle$ ,  $\langle c_{j,3}, x_c, c_{j,4} \rangle$  et  $\langle x_c, c_{j,4}, s \rangle$ .

L'instance générée à partir du problème  $RX3C$  contient  $15q + 1$  sommets,  $24q$  arcs et  $3q$  successions de transitions obligatoires de taille sept soit  $21q$  transitions obligatoires. La Construction 25 est illustrée dans les Figures 3.19 et 3.20. La Figure 3.19 montre une vision schématique de la construction omettant les transitions obligatoires. Nous considérons chaque sommet-représentant d'un triplet comme un seul et unique sommet (par exemple  $c_{j,1}$ ,  $c_{j,2}$ ,  $c_{j,3}$  et  $c_{j,4}$  deviennent  $c_j$ ). Les arcs symétriques sont remplacés par une arête. La Figure 3.20 se concentre sur l'illustration de la succession de transitions obligatoires associée à un triplet.

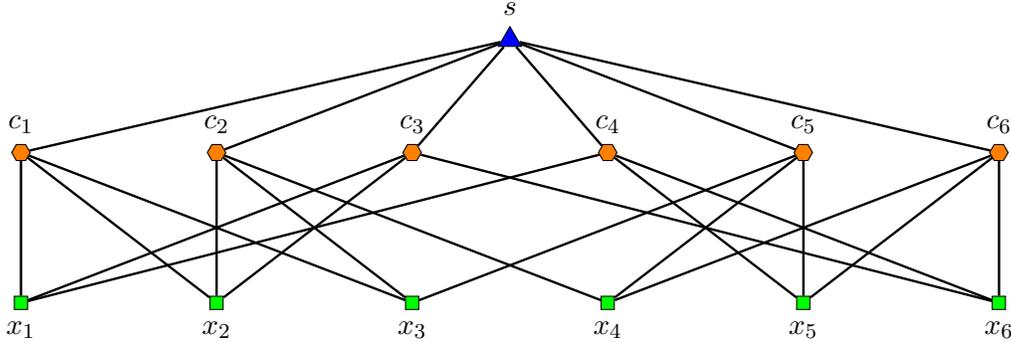


FIGURE 3.19 – Schéma de la Construction 25 pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$  et  $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ .

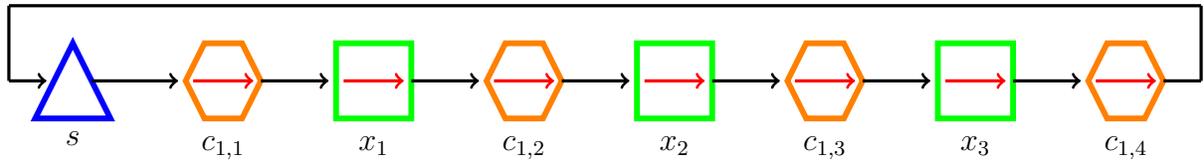


FIGURE 3.20 – Illustration d'une succession de transitions obligatoires selon la Construction 25 pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$  et  $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ .

**Théorème 1.** *Déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour le problème de la Tournée Multi-cibles avec Transitions Obligatoires est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet.*

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soient  $(D, \Pi)$  le graphe et les transitions obligatoires associées suivant la Construction 25 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ . Soient  $x_1, \dots, x_{3q}$  les sommets-cible et  $w = 8q - 2$ . Le problème  $TMO$  est clairement dans  $\mathcal{NP}$ . De plus, construire  $(D, \Pi)$  à partir de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est polynomial.

Soit  $P$  la plus courte diroute partant du sommet-source  $s$ , passant par les sommets-éléments  $x_1, \dots, x_{3q}$  et respectant les transitions obligatoires. La diroute  $P$  peut être vue comme un ensemble de  $\kappa$  successions de transitions obligatoires (un ensemble de collecteurs d'éléments). Chaque collecteur d'éléments  $\alpha_k$  pour  $1 \leq k \leq \kappa$  est un chemin orienté

de transitions obligatoires composé de huit arcs distincts. Le chemin  $\alpha_k$  part du sommet  $s$ , continue vers un sommet-triplet  $c_{j,1}$  suivi par son premier sommet-élément  $x_a$ , alterne entre ses sommets-triplet et ses sommets-élément, et termine sur le sommet  $s$  :  $\alpha_k = \alpha_j = (s, c_{j,1}), (c_{j,1}, x_a), (x_a, c_{j,2}), (c_{j,2}, x_b), (x_b, c_{j,3}), (c_{j,3}, x_c), (x_c, c_{j,4}), (c_{j,4}, s)$ , pour tout triplet  $c_j = \{x_a, x_b, x_c\} \in \mathcal{C}$ . Ainsi  $P = \alpha_1, \dots, \alpha_\kappa$ , privé de ses deux derniers arcs. En effet, la diroute termine lorsque la dernière cible est atteinte, sans retourner au sommet-source. Chaque collecteur d'éléments  $\alpha_k$  contient exactement trois sommets-élément parmi les  $3q$  existants. La plus courte diroute ne peut utiliser moins de  $8q - 2$  arcs.

Supposons que  $P$  est une diroute partant du sommet-source  $s$ , passant par les sommets-cible  $x_1, \dots, x_{3q}$  et respectant les transitions obligatoires contenant exactement  $8q - 2$  arcs. Construisons une couverture exacte  $S$  de  $\mathcal{X}$  :

— Pour chaque arc  $(s, c_{j,1})$  dans  $P$ , nous ajoutons le triplet  $c_j$  dans  $S$ .

La diroute  $P$  ne peut emprunter que  $q$  collecteurs d'éléments pour passer par les  $3q$  cibles. Les propriétés d'unicité et de totalité sont respectées par  $S$ . Ainsi,  $S$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$ .

Supposons qu'il existe une couverture exacte  $S$  pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$ . Construisons une diroute  $P'$  dans le digraphe  $D$  partant du sommet-source  $s$ , passant par les sommets-cible  $x_1, \dots, x_{3q}$  et respectant les transitions obligatoires  $\Pi$  :

— La diroute  $P'$  part du sommet-source  $s$ .

— Soient  $c_1, \dots, c_q$  les triplets de  $S$ .

— Pour chaque triplet  $c_j = \{x_a, x_b, x_c\} \in S$  pour  $1 \leq j \leq q - 1$ , nous ajoutons les arcs  $(s, c_{j,1}), (c_{j,1}, x_a), (x_a, c_{j,2}), (c_{j,2}, x_b), (x_b, c_{j,3}), (c_{j,3}, x_c), (x_c, c_{j,4})$  et  $(c_{j,4}, s)$  du collecteur d'éléments correspondant  $\alpha_j$ .

— Pour le triplet  $c_q = \{x_a, x_b, x_c\} \in S$ , nous ajoutons les arcs  $(s, c_{q,1}), (c_{q,1}, x_a), (x_a, c_{q,2}), (c_{q,2}, x_b), (x_b, c_{q,3})$  et  $(c_{q,3}, x_c)$  du collecteur d'éléments correspondant  $\alpha_q$ .

La diroute  $P'$  contient exactement  $8q - 2$  arcs, part du sommet-source  $s$ , passe par tous les sommets-cible et respecte les transitions obligatoires. Ainsi,  $P'$  est une solution pour le problème  $TMO$ .  $\square$

Nous avons montré qu'il existe des instances du problème  $TM$  qui n'admettent plus aucune solution lorsque nous ajoutons des transitions obligatoires et que déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour les problèmes  $TM$  et  $TMO$  sont des problèmes  $\mathcal{NP}$ -complets. Cependant, il existe des cas pour lesquels le problème  $TMO$  admet une résolution en temps polynomial :

— Lorsque le digraphe est un chemin. Il suffit de suivre ledit chemin jusqu'à passer par toutes les cibles (il existe une solution si au plus  $w$  arcs sont nécessaires) ou par un circuit de transitions obligatoires (il n'existe aucune solution).

— Lorsque le digraphe est une étoile. Il suffit, pour chaque arc du centre vers une feuille, de regarder les sommets parcourus une fois le centre de nouveau atteint sans devoir suivre une transition obligatoire ou une fois un circuit de transitions obligatoires obtenus. Les parcours ne correspondent pas à des circuits de transitions obligatoires

peuvent être suivis les uns après les uns. Il suffit de choisir l'ordre de parcours en fonction du coût engendré par sommet-cible atteint. Une fois fait, un unique circuit de transitions obligatoires peut être suivi, il faut alors regarder s'il est possible de passer par les dernières cibles.

- Lorsque le nombre de cibles est constant. Il suffit d'organiser les cibles selon toutes les combinaisons possibles, et pour chaque combinaison calculer la plus courte diroute permettant de passer de la source à la première cible, puis d'une cible à la suivante. Cette procédure peut s'effectuer en temps polynomial grâce à l'existence d'un algorithme polynomial pour le problème du Plus Court Chemin avec Transitions Obligatoires (Théorème 7).

**Théorème 2.** *Le problème de la Tournée Multi-cibles avec Transitions Obligatoires admet une résolution en temps polynomial si le digraphe est un chemin ou une étoile ou si le nombre de cibles est constant.*

## Tournée Totale

Le problème de la Tournée Totale avec Transitions Obligatoires consiste à trouver une diroute de taille bornée passant par tous les sommets du digraphe depuis un sommet-source et respectant les transitions obligatoires. Comme pour le problème *TMO*, déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour le problème *TTO* est connu pour être un problème  $\mathcal{NP}$ -complet dans sa version sans transitions obligatoires [23]. Le problème *TT* admet cependant une résolution en temps polynomial dans certaines topologies de graphes telles que les digraphes complets symétriques ou les chemins pour lesquels il existe toujours une solution. Dans la Figure 3.21, nous proposons une instance du problème de la Tournée Totale pour laquelle il existe une solution  $((s, u_1), (u_1, u_2) \text{ et } (u_2, u_3))$ , ainsi qu'une affectation des transitions obligatoires éliminant toutes les solutions possibles (les circuits symétriques de transitions obligatoires entre les sommets  $s$ ,  $u_2$  et  $u_3$  ainsi que le circuit de transitions obligatoires entre les sommets  $s$  et  $u_1$  ne permettent pas à une diroute de passer à la fois par le sommet  $u_1$  et le sommet  $u_2$ ).

Comme nous pouvons le constater, il existe une affectation des transitions obligatoires telle qu'aucune solution ne peut exister dans un graphe complet. De manière générale, l'existence de deux circuits symétriques de transitions obligatoires comprenant tous les sommets d'un digraphe complet symétrique à l'exception d'un seul interdit toute solution. Il existe cependant des cas pour lesquels le problème *TTO* admet une résolution en temps polynomial :

- Lorsque le digraphe est un chemin. Il suffit de suivre ledit chemin jusqu'à passer par tous les sommets (il existe une solution si au plus  $w$  arcs sont nécessaires) ou par un circuit de transitions obligatoires (il n'existe aucune solution).
- Lorsque le digraphe est une étoile. Il suffit, pour chaque arc du centre vers une feuille, de regarder les sommets parcourus une fois le centre de nouveau atteint sans devoir suivre une transition obligatoire ou une fois un circuit de transitions obligatoires obtenus. Les parcours ne correspondant pas à des circuits de transitions obligatoires

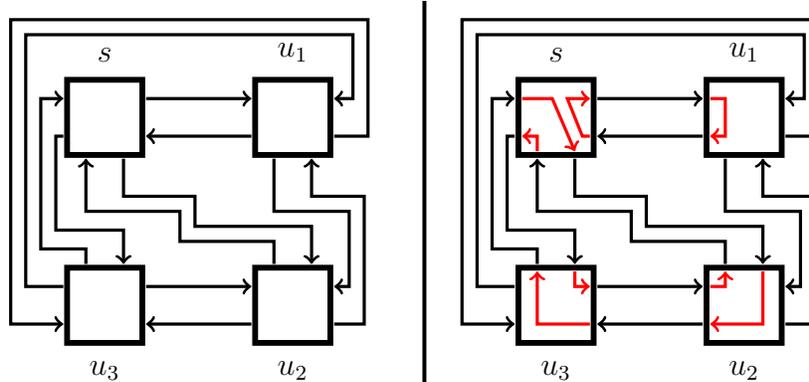


FIGURE 3.21 – Une instance du problème  $TT$  (à gauche) et l’instance associée du problème  $TTO$  (à droite) avec une source  $s$ .

peuvent être suivis les uns après les uns. Il suffit de choisir l’ordre de parcours en fonction du coût engendré par un sommet atteint. Une fois fait, un unique circuit de transitions obligatoires peut être suivi, il faut alors regarder s’il est possible de passer par les dernières cibles.

**Théorème 3.** *Le problème de la Tournée Totale avec Transitions Obligatoires admet une résolution en temps polynomial si le digraphe est un chemin ou une étoile.*

### Plus Court Chemins

Le problème du Plus Court Chemin avec Transitions Obligatoires et ses variantes - élémentaire et  $k$ -élémentaire - consistent à trouver une diroute (de taille bornée ou non) depuis un sommet-source vers un sommet-cible respectant les transitions obligatoires. Sans transitions obligatoires, les problèmes  $PCC$ ,  $PCCE$  et  $PCCKE$  admettent une résolution en temps polynomial [13]. Dans la Figure 3.22, nous proposons une instance à la fois du problème  $PCCO$ , du problème  $PCCEO$  et du problème  $PCCKEO$  pour laquelle il existe une solution  $((s, u_1)$  et  $(u_1, t))$ , ainsi qu’une affectation des transitions obligatoires éliminant toutes les solutions possibles (seuls les sommets  $u_1$  et  $u_2$  sont accessibles depuis le sommet-source  $s$ ).

Comme nous pouvons le constater, il existe une affectation des transitions obligatoires telle qu’il n’existe plus aucune solution. Cependant, il existe deux cas pour lesquels les problèmes  $PCCO$ ,  $PCCEO$  et  $PCCKEO$  admettent une résolution en temps polynomial :

- lorsque le digraphe est un chemin. Il suffit de suivre ledit chemin jusqu’à atteindre le sommet-cible (il existe une solution si au plus  $w$  arcs sont nécessaires) ou jusqu’à être passé par tous les sommets accessibles (il n’existe aucune solution).
- lorsque le digraphe est complet symétrique. Il suffit alors de prendre l’arête directe entre le sommet-source et le sommet-cible.

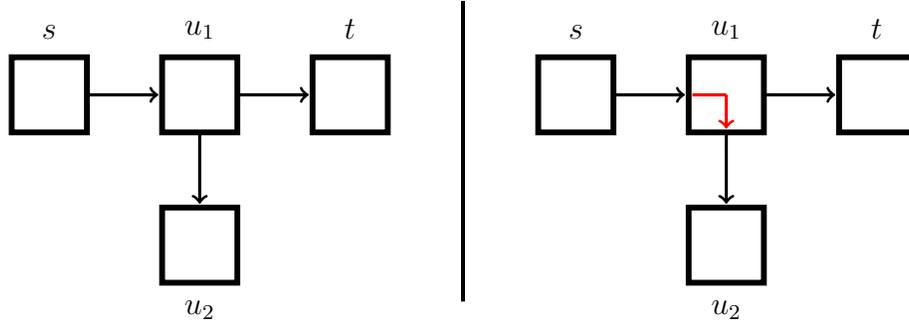


FIGURE 3.22 – Une instance des problèmes *PCC*, *PCCE* et *PCCKE* (à gauche) et l’instance associée des problèmes *PCCO*, *PCCEO* et *PCCKEO* (à droite) avec une source  $s$ , une cible  $t$  et  $k > 0$ .

**Théorème 4.** *Les problèmes du Plus Court Chemin avec Transitions Obligatoires, du Plus Court Chemin Élémentaire avec Transitions Obligatoires et du Plus Court Chemin  $k$ -Élémentaire avec Transitions Obligatoires admettent une résolution en temps polynomial si le digraphe est un chemin ou complet symétrique.*

### Circuit Eulérien

Le problème du Circuit Eulérien consiste à trouver un circuit passant par tous les arcs d’un digraphe. Pour tout digraphe  $D = (V, A)$ , nous savons qu’il contient un circuit Eulérien si et seulement si  $D$  est connexe et que pour chacun de ses sommets  $v \in V$ , le degré sortant du sommet  $d^+(v)$  est égal à son degré entrant  $d^-(v)$  (extension naturelle du Théorème d’Euler [13]).

Considérons  $(D = (V, A), \Pi)$ , une instance du problème du Circuit Eulérien avec Transitions Obligatoires. Un circuit Eulérien doit passer par chacun des arcs du digraphe  $D$ , toutes les transitions obligatoires de  $\Pi$  sont parcourues. Ainsi, nous pouvons remplacer les successions de transitions obligatoires maximales par un arc unique de la source de chacune de ces successions vers le dernier sommet atteint :

- Si une transition obligatoire  $\langle u, a, v \rangle \in \Pi$  est indépendante des autres transitions obligatoires, nous remplaçons ses arcs par l’arc  $(u, v)$  (qui peut être un multi-arc).
- Pour chaque succession de transition obligatoire maximale  $\langle u_0, u_1, u_2 \rangle, \dots, \langle u_{k-2}, u_{k-1}, u_k \rangle$ , nous remplaçons l’ensemble de ces arcs par l’arc  $(u_0, u_k)$  sauf s’il s’agit d’un circuit de transitions obligatoires (dans ce cas, il n’existe aucune solution à moins que ce circuit soit eulérien).

À la suite de cette procédure, le digraphe  $D$  ne contient plus aucune transition obligatoire et le degré sortant de chaque sommet a évolué strictement de la même manière que son degré entrant. Il existe ainsi un Circuit Eulérien avec Transitions Obligatoires pour l’instance  $(D = (V, A), \Pi)$  si et seulement s’il existe un Circuit Eulérien dans  $(D' = (V, A'))$  tel que défini ci-dessus.

**Théorème 5.** *Le problème du Circuit Eulérien avec Transitions Obligatoires admet une résolution en temps polynomial.*

### Cycles hamiltoniens et élémentaires

Le problème du Cycle Élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires consiste à trouver le plus grand cycle respectant les transitions obligatoires dans un graphe. Si le cycle passe par tous les sommets, il s'agit d'une solution pour le problème du Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires. Dans leur version sans transitions obligatoires, déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour ces problèmes est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet [23]. Dans la Figure 3.23, nous proposons une instance des problèmes du Cycle Élémentaire Maximum et du Cycle Hamiltonien pour laquelle il existe une solution passant par tous les sommets  $((u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_3, u_4), (u_4, u_5), (u_5, u_6)$  et  $(u_6, u_1))$ , ainsi qu'une affectation des transitions obligatoires éliminant toutes les solutions possibles pour le problème *CHO* (le sommet  $u_4$  ne peut être atteint qu'en utilisant deux arêtes du cycle de transitions obligatoires comprenant les sommets  $u_3, u_4$  et  $u_4$ , interdisant à son tour les sommets qui lui sont extérieurs) et ne permettant plus qu'un cycle maximum de taille trois pour le problème *CEMO*  $((u_1, u_2), (u_2, u_3)$  et  $(u_3, u_1))$ .

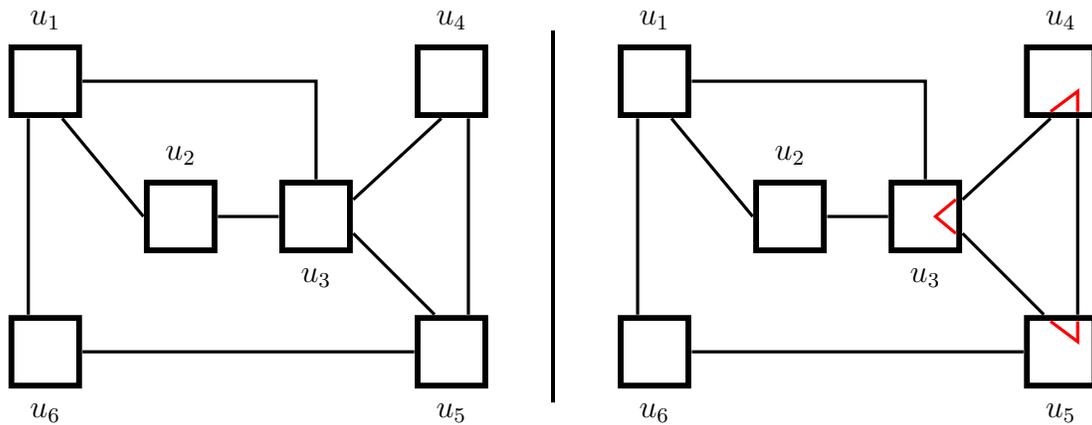


FIGURE 3.23 – Une instance des problèmes *CH* et *CEM* (à gauche) et l'instance associée des problèmes *CHO* et *CEMO* (à droite).

Comme nous pouvons le constater, il existe une affectation des transitions obligatoires telle que plus aucune solution ne peut exister pour le problème *CHO*, et telle que le plus grand cycle élémentaire est de taille strictement inférieure pour le problème *CEMO*. Il existe cependant un cas pour lequel les problèmes *CHO* et *CEMO* admettent une résolution en temps polynomial :

- Lorsque le graphe a une faible densité. Si le degré de chaque sommet est au plus deux, il suffit de chercher les composantes connexes puis de suivre les chemins qu'elles définissent.

**Théorème 6.** *Les problèmes du Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires et du Cycle Élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires admettent une résolution en temps polynomial si le graphe a une faible densité  $(\frac{|V|}{0.5|V|^2 - 0.5|V|})$ .*

### 3.1.4 Organisation du chapitre

Ce chapitre est organisé en deux sections, ainsi qu’une introduction et une conclusion. Chacune de ces sections est dotée d’une carte générale ainsi que d’une carte par partie pour retrouver plus facilement les résultats ainsi que les constructions et lemmes éventuels utilisés pour y parvenir. La plupart des résultats de ce chapitre ont fait l’objet d’une publication [37].

Dans les parties précédentes, nous avons décrit les problèmes de la Tournée Multi-cibles avec Transitions Obligatoires (*TMO*), de la Tournée Totale avec Transitions Obligatoires (*TTO*), du Plus Court Chemin avec Transitions Obligatoires (*PCCO*), du Plus Court Chemin Élémentaire avec Transitions Obligatoires (*PCCEO*), du Plus Court Chemin  $k$ -Élémentaire avec Transitions Obligatoires (*PCKEKO*), du Circuit Eulérien avec Transitions Obligatoires (*CEO*), du Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires (*CHO*) et du Cycle Élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires (*CEMO*). Nous avons vu que l’ajout de transitions obligatoires ne permet pas toujours l’existence d’une solution pour l’ensemble de ces problèmes (Figures 3.18, 3.21, 3.22 et 3.23), mais qu’il existe des topologies de graphes pour lesquelles les problèmes demeurent polynomiaux. Le problème *TMO* admet une résolution en temps polynomial si le digraphe est un chemin ou une étoile, ou si le nombre de cibles est constant (Théorème 2). Le problème *TTO* admet une résolution en temps polynomial si le digraphe est un chemin ou une étoile (Théorème 3). Les problèmes *PCCO*, *PCCEO* et *PCKEKO* admettent une résolution en temps polynomial si le digraphe est un chemin ou complet symétrique (Théorème 4). Le problème *CEO* admet toujours une résolution en temps polynomial (Théorème 5). Les problèmes *CHO* et *CEMO* admettent une résolution en temps polynomial si le digraphe a une faible densité (Théorème 6).

Dans la Section 3.2 nous étudions le problème du Plus Court Chemin avec Transitions Obligatoires, ainsi que ses formes élémentaires et  $k$ -élémentaires. Nous montrons alors :

- La polynomialité du problème *PCCO* (Théorème 7).
- La non-approximabilité du problème *PCCEO* (Théorème 9).
- La non-approximabilité du problème *PCCEO* dans un digraphe de forte densité (Théorème 10).
- La non-approximabilité du problème *PCCEO* dans un digraphe de faible densité (Théorème 11).
- La non-approximabilité du problème *PCKEKO* dans un digraphe de forte densité (Théorème 12).

Dans la Section 3.3 nous étudions le problème de la Tournée avec Transitions Obligatoires, pour l’ensemble des sommets comme cible, ainsi que pour des solutions formant un cycle hamiltonien ou un cycle élémentaire maximum. Nous montrons alors :

- La non-approximabilité du problème *TTO* dans un digraphe complet symétrique (Théorème 13).
- La  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème de l'existence d'un Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires dans un graphe complet (Théorème 14).
- La  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème de l'existence d'un Cycle élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires de taille bornée dans un graphe complet (Théorème 15).
- L'impossibilité pour un algorithme de garantir trouver un Cycle élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires de taille strictement supérieure à trois même dans un graphe complet (Théorème 16).

L'ensemble des résultats de  $\mathcal{NP}$ -complétude de ce chapitre s'entendent sous l'hypothèse  $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ .

## 3.2 Recherche d'un Plus Court Chemin

Dans cette section, nous étudions le problème du Plus Court Chemin avec Transitions Obligatoires (*PCCO*) et ses deux spécialisations (*PCCEO* et *PCKEKO*). Nous y présentons quatre résultats principaux :

1. La polynomialité du problème *PCCO* (Théorème 7).
2. La non-approximabilité du problème *PCCEO* (Théorème 9).
3. La non-approximabilité du problème *PCCEO* dans des digraphes de forte et faible densité (Théorèmes 10 et 11).
4. La non-approximabilité du problème *PCKEKO* dans des digraphes de forte densité (Théorème 12).

**Carte 23.** Le problème *PCCO* est polynomial dans le cas général, mais non-approximable pour la recherche d'une diroute élémentaire (Théorèmes 7 et 9).

**Départ :** Le problème *RX3C* est  $\mathcal{NP}$ -complet [34].

**Points d'étape :**

1. Polynomialité du problème *PCCO* (Algorithmes 2 et 3 - Construction 26 - Lemmes 1, 2 et 3 - Théorème 7).
2. Non-approximabilité, pour tout ratio, du problème *PCCEO* (Construction 27 - Théorèmes 8 et 9).
3. Non-approximabilité, pour tout ratio, du problème *PCCEO* dans un digraphe de forte densité (Constructions 28 et 29 - Théorème 10).
4. Non-approximabilité, pour tout ratio, du problème *PCCEO* dans un digraphe connexe de faible densité (Construction 30 - Théorème 11).
5. Non-approximabilité, pour tout ratio, du problème *PCKEKO* dans un digraphe de forte densité (Construction 31 - Théorème 12).

Nous montrons en premier lieu que le problème du Plus Court Chemin avec Transitions Obligatoires (*PCCO*) admet une résolution en temps polynomial dans le cas général (Théorème 7). Nous retranscrivons l'instance du problème *PCCO* en une instance pondérée sans transitions obligatoires afin de pouvoir utiliser les algorithmes de résolution classiques (Algorithmes 2 et 3 - Construction 26 - Lemmes 1, 2 et 3). Les diroutes ainsi obtenues demeurent simples, mais pas toujours élémentaires. Nous montrons alors que déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour le problème *PCCEO* (spécialisation du problème *PCCO* pour la recherche d'une diroute élémentaire) est un problème non-approximable pour tout ratio (Théorèmes 8 et 9). Nous nous réduisons (Construction 27) à une version restreinte du problème de la Couverture Exacte par des triplets (*RX3C*). Nous étendons alors ce résultat dans des digraphes de forte densité (Constructions 28 et 29 - Théorème 10) et des digraphes connexes de faible densité (Construction 30 - Théorème 11). déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour le problème *PCCEO*

étant un problème non-approximable, même dans des topologies de digraphes très restreintes, nous relâchons partiellement la contrainte d'élémentarité. Nous montrons alors que déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour le problème *PCKEO* (spécialisation du problème *PCCO* pour la recherche d'une diroute  $k$ -élémentaire) est un problème non-approximable pour tout ratio, même dans un digraphe de forte densité (Construction 31 - Théorème 12).

### 3.2.1 Polynomialité pour une diroute simple

**Carte 24. Le problème *PCCO* admet une résolution en temps polynomial (Théorème 7).**

**Points d'étape :**

1. Création d'un algorithme pour la recherche de successions de transitions obligatoires (Algorithme 2 - Lemme 1).
2. Création d'un algorithme pour la recherche de successions de transitions obligatoires sans perte d'information (Algorithme 3 - Lemme 2).
3. Le problème *PCCO* admet une résolution en temps polynomial (Construction 26 - Lemme 3 - Théorème 7).

Nous avons vu dans la Figure 3.22 que dès lors que toutes les diroutes possibles entre un sommet-source et un sommet-cible ne permettent pas de respecter les transitions obligatoires, aucune solution pour le problème *PCCO* ne peut exister. Il n'est alors pas possible d'utiliser des algorithmes de recherche de plus court chemin classiques (par exemple l'algorithme de Dijkstra [13]). Pour résoudre le problème *PCCO*, nous créons un algorithme pour la recherche de successions de transitions obligatoires (Algorithme 2 - Lemme 1). Si un arc d'une telle succession est utilisé, il n'est plus possible de choisir d'arcs tant que toute la succession n'a pas été traversée. L'Algorithme 2 permet de les détecter afin de les remplacer par la suite par un unique arc pondéré. Cependant, ce fonctionnement masque la présence potentielle du sommet-cible sur le parcours. Nous proposons alors une version alternative mettant en évidence les successions de transitions obligatoires traversant le sommet-cible (Algorithme 3 - Lemme 2). Nous nous servons alors de l'Algorithme 3 pour remplacer chaque succession de transitions obligatoires par un unique arc pondéré (Construction 26 - Lemme 3). L'instance ne contient plus aucune transition obligatoire. Nous appliquons alors un algorithme classique du plus court chemin dans les multi-graphes pondérés [13]. Nous concluons ainsi sur la polynomialité du problème *PCCO* (Théorème 7).

**Principe 2.** Soit  $D = (V, A)$  un graphe dirigé,  $\Pi = \{\Pi_1, \dots, \Pi_k\}$  ses obligations associées et  $(u, v)$  un arc du digraphe. L'Algorithme 2 est un algorithme glouton qui construit une succession de transitions obligatoires en ajoutant des arcs au fur et à mesure à partir de l'arc  $(u, v)$ . À chaque étape, nous partons du dernier arc connu et cherchons s'il est la tête d'une transition obligatoire. Nous répétons alors cette procédure seulement si une telle

transition obligatoire existe. Nous obtenons finalement deux résultats possibles : soit la plus longue succession de transitions obligatoires à partir de l'arc  $(u, v)$ , soit une impossibilité due à un circuit de transitions obligatoires.

---

**Algorithme 2** : Plus longue succession de transitions obligatoires (**SuccesMT**).

---

```

1 Donnée(s) :  $D = (V, A)$  un graphe dirigé,  $\Pi$  ses transitions obligatoires
   associées et  $(u, v) \in A$  un arc.
2 Résultat(s) : Si l'arc  $(u, v)$  appartient à un circuit de transitions obligatoires
   alors le retour est  $\emptyset, 0$  et  $u$ . Sinon si l'arc  $(u, v)$  n'appartient à aucune
   transition obligatoire alors le retour est  $(u, v), 1$  et  $v$ . Sinon le retour est une
   succession de transitions obligatoires maximum à partir de l'arc  $(u, v)$  sous la
   forme d'une liste d'arcs, ainsi que sa taille et le dernier sommet atteint.
3 Liste  $\leftarrow (u, v)$ ;
4 Taille  $\leftarrow 1$ ;
5 if  $\forall w \in V, \langle u, v, w \rangle \notin \Pi$  then
6   | return Liste, Taille,  $v$ ;
7 else
8   |  $Temp_V \leftarrow v$ ;
9   |  $Temp_W \leftarrow w$  tel que  $\langle u, v, w \rangle \in \Pi$ ;
10  | while  $Temp_W \neq \emptyset$  do
11  |   | if  $(Temp_V, Temp_W) \in Liste$  then
12  |   | | return  $\emptyset, 0, u$ ;
13  |   | Liste  $\leftarrow Liste + (Temp_V, Temp_W)$ ;
14  |   | Taille  $\leftarrow Taille + 1$ ;
15  |   |  $Temp_{echange} \leftarrow Temp_W$ ;
16  |   |  $Temp_W \leftarrow w$  tel que  $\langle Temp_V, Temp_W, w \rangle \in \Pi$ ;
17  |   |  $Temp_V \leftarrow Temp_{echange}$ ;
18  | return Liste, Taille,  $Temp_V$ ;

```

---

**Lemme 1.** L'Algorithme 2 termine, s'exécute en temps polynomial et retourne  $\emptyset, 0$  et  $u$  si l'arc  $(u, v)$  appartient à un circuit de transitions obligatoires;  $(u, v), 1$  et  $v$  si l'arc  $(u, v)$  n'appartient à aucune transition obligatoire; la plus longue succession de transitions obligatoires à partir de l'arc  $(u, v)$  sous la forme d'une liste d'arcs, ainsi que sa taille et le dernier sommet atteint sinon.

*Démonstration.* L'Algorithme 2 termine. À chaque itération de la structure itérative *while* un nouvel arc est choisi parmi un nombre fini d'arcs.

L'Algorithme 2 s'exécute en temps polynomial. À chaque arc ajouté dans la solution (au plus  $|A|$ ), l'ensemble des arcs restants est examiné (au plus  $|A|$ ). Les autres traitements ne sont pas significatifs dans la complexité de l'algorithme, ainsi l'Algorithme 2 admet une complexité quadratique  $O(|A|^2)$ .

L'Algorithme 2 répond à sa spécification. Si l'arc  $(u, v)$  n'appartient à aucune transition obligatoire, l'algorithme termine à la ligne 6 et retourne la plus longue succession de transitions obligatoires à partir de l'arc  $(u, v)$ , c'est-à-dire seulement l'arc  $(u, v)$ , une taille de un et le sommet de fin  $v$ . À chaque itération  $i$  de la structure itérative *while*, les variables *Liste*, *Taille* et  $Temp_V$  contiennent respectivement  $\emptyset$ , 0,  $u$  si un circuit de transitions obligatoires peut être repéré et une succession de transitions obligatoires à partir de l'arc  $(u, v)$  de longueur  $i + 1$ , sa taille  $i + 1$  et le dernier sommet atteint sinon :

- Première itération ( $i = 0$ ) :
  - L'arc  $(Temp_V, Temp_W)$  (tel que défini au début de l'itération) n'a jamais pu être parcouru. La liste contient alors une succession de transitions obligatoires de taille 2 et  $Temp_V$  contient bien le dernier sommet de cette succession.
- Pour une itération  $i$  quelconque. Supposons que la liste contienne bien une succession de transitions obligatoires de taille  $i - 1$  et que  $Temp_V$  contienne bien le dernier sommet de cette succession :
  - Si l'arc  $(Temp_V, Temp_W)$  (tel que défini au début de l'itération) est nouveau, la liste contient alors une succession de transitions obligatoires de taille  $i$  et  $Temp_V$  contient bien le dernier sommet de cette succession.
  - Sinon  $\emptyset, 0$  et  $u$  sont bien retournés.
- Dernière itération  $k$ . Supposons que la liste contienne bien une succession de transitions obligatoires de taille  $k - 1$  et  $Temp_V$  contient bien le dernier sommet de cette succession :
  - Si l'arc  $(Temp_V, Temp_W)$  (tel que défini au début de l'itération) est nouveau, la liste contient alors une succession de transitions obligatoires de taille  $k$  et  $Temp_V$  contient bien le dernier sommet de cette succession.
  - Sinon  $\emptyset, 0$  et  $u$  sont bien retournés.

Aucun nouveau sommet ne peut prolonger la succession de transitions obligatoires. L'Algorithme termine bien en respectant sa spécification.

□

Si la plus grande succession de transitions obligatoires à partir de l'arc  $(u, v)$  passe par le sommet-cible du problème *PCCO*, nous perdons cette information. Une illustration est proposée dans les Figures 3.24 et 3.25. Il est nécessaire de mettre en évidence la présence de la cible dans cette retranscription de l'instance. Nous créons alors une version alternative s'arrêtant sur un sommet-cible donné.

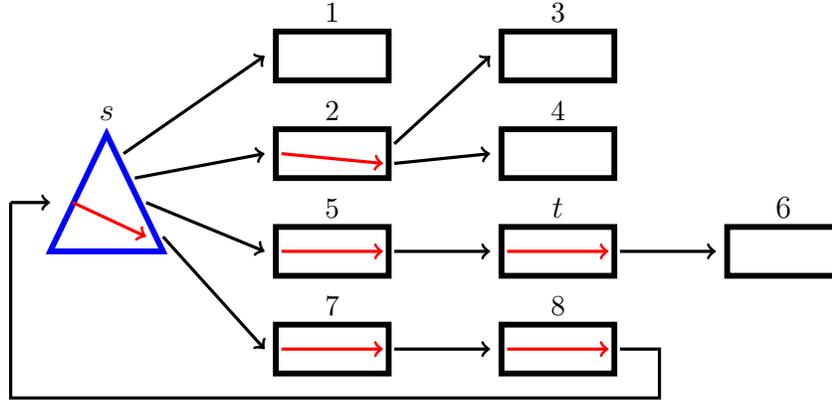


FIGURE 3.24 – Une instance pour le problème *PCCO*.

**Principe 3.** Soit  $D = (V, A)$  un graphe dirigé,  $\Pi = \{\Pi_1, \dots, \Pi_k\}$  ses obligations associées et  $(u, v)$  un arc du digraphe. L'Algorithme 3 est un algorithme glouton qui construit une succession de transitions obligatoires en ajoutant des arcs au fur et à mesure à partir de l'arc  $(u, v)$ . À chaque étape, nous partons du dernier arc connu et cherchons s'il est la tête d'une transition obligatoire. Nous répétons alors cette procédure seulement si une telle transition obligatoire existe et si le sommet atteint n'est pas la cible. Nous obtenons finalement deux résultats possibles : soit une succession de transitions obligatoires (s'arrêtant sur le sommet-cible si elle est rencontrée) à partir de l'arc  $(u, v)$ , soit une impossibilité due à un circuit de transitions obligatoires.

**Lemme 2.** L'Algorithme 3 termine, s'exécute en temps polynomial et retourne  $\emptyset$ , 0 et  $u$  si l'arc  $(u, v)$  appartient à un circuit de transitions obligatoires ne contenant pas le sommet-cible ;  $(u, v)$ , 1 et  $v$  si l'arc  $(u, v)$  n'appartient à aucune transition obligatoire ; une succession de transitions obligatoires maximale (s'arrêtant sur le sommet-cible si elle est rencontrée) à partir de l'arc  $(u, v)$  sous la forme d'une liste d'arcs, ainsi que sa taille et le dernier sommet atteint sinon.

*Démonstration.* L'Algorithme 3 termine. À chaque itération de la structure itérative *while* un nouvel arc est choisi parmi un nombre fini d'arcs.

L'Algorithme 3 s'exécute en temps polynomial. À chaque arc ajouté dans la solution (au plus  $|A|$ ), l'ensemble des arcs restants est examiné (au plus  $|A|$ ). Les autres traitements ne sont pas significatifs dans la complexité de l'algorithme, ainsi l'Algorithme 3 admet une complexité quadratique  $O(|A|^2)$ .

L'Algorithme 3 répond à sa spécification. Si l'arc  $(u, v)$  n'appartient à aucune transition obligatoire, l'algorithme termine à la ligne 6 et retourne la plus longue succession de transitions obligatoires à partir de l'arc  $(u, v)$ , c'est-à-dire seulement l'arc  $(u, v)$ , une taille de un et le sommet de fin  $v$ . À chaque itération  $i$  de la structure itérative *while*, les variables *Liste*, *Taille* et  $Temp_v$  contiennent respectivement  $\emptyset$ , 0,  $u$  si un circuit de transitions obligatoires peut être repéré et une succession de transitions obligatoires à partir de l'arc  $(u, v)$  de longueur  $i + 1$ , sa taille  $i + 1$  et le dernier sommet atteint sinon :

---

**Algorithme 3** : Plus longue succession de transitions obligatoires avec cible (SuccesMT<sub>t</sub>).

---

```

1 Donnée(s) :  $D = (V, A)$  un graphe dirigé,  $\Pi$  ses transitions obligatoires
   associées,  $(u, v)$  un arc présent dans  $A$  et une cible  $t$ .

2 Résultat(s) : Si l'arc  $(u, v)$  appartient à un circuit de transitions obligatoires ne
   comprenant pas le sommet-cible alors le retour est  $\emptyset, 0$  et  $u$ . Sinon si l'arc
    $(u, v)$  n'appartient à aucune transition obligatoire alors le retour est  $(u, v), 1$  et
    $v$ . Sinon le retour est une succession de transitions obligatoires maximale
   (s'arrêtant sur le sommet-cible si elle est rencontrée) à partir de l'arc  $(u, v)$  sous
   la forme d'une liste d'arcs, ainsi que sa taille et le dernier sommet atteint.

3 Liste  $\leftarrow (u, v)$ ;
4 Taille  $\leftarrow 1$ ;
5 if  $\forall w \in V, \langle u, v, w \rangle \notin \Pi$  then
6   | return Liste, Taille,  $v$ ;
7 else
8   |  $Temp_V \leftarrow v$ ;
9   |  $Temp_W \leftarrow w$  tel que  $\langle u, v, w \rangle \in \Pi$ ;
10  | while  $Temp_W \neq \emptyset$  do
11  |   | if  $(Temp_V, Temp_W) \in Liste$  then
12  |   | | return  $\emptyset, 0, u$ ;
13  |   | if  $Temp_V == t$  then
14  |   | | return Liste, Taille,  $Temp_V$ ;
15  |   | Liste  $\leftarrow$  Liste +  $(Temp_V, Temp_W)$ ;
16  |   | Taille  $\leftarrow$  Taille + 1;
17  |   |  $Temp_{echange} \leftarrow Temp_W$ ;
18  |   |  $Temp_W \leftarrow w$  tel que  $\langle Temp_V, Temp_W, w \rangle \in \Pi$ ;
19  |   |  $Temp_V \leftarrow Temp_{echange}$ ;
20  | return Liste, Taille,  $Temp_V$ ;

```

---

- Première itération ( $i = 0$ ) :
  - L'arc  $(Temp_V, Temp_W)$  (tel que défini au début de l'itération) n'a jamais pu être parcouru. Si le sommet contenu dans la variable  $Temp_V$  est le sommet-cible, l'algorithme termine à la ligne 14 et retourne  $(u, v)$ , 1 et  $v$ . Sinon la liste contient alors une succession de transitions obligatoires de taille 2 et  $Temp_V$  contient bien le dernier sommet de cette succession.
- Pour une itération  $i$  quelconque. Supposons que la liste contienne bien une succession de transitions obligatoires de taille  $i - 1$  et que  $Temp_V$  contienne bien le dernier sommet de cette succession. La liste ne contient aucun arc impliquant le sommet-cible en dehors de l'arc  $(Temp_V, Temp_W)$  (tel que défini au début de l'itération) :
  - Si le sommet  $Temp_V$  (tel que défini au début de l'itération) est le sommet-cible, l'algorithme termine à la ligne 14 et retourne la succession de transitions obligatoires partant du sommet  $u$  jusqu'au sommet-cible, sa taille  $i$  et  $Temp_V$  contient le sommet-cible.
  - Sinon si l'arc  $(Temp_V, Temp_W)$  (tel que défini au début de l'itération) est nouveau, la liste contient alors une succession de transitions obligatoires de taille  $i$  et  $Temp_V$  contient bien le dernier sommet de cette succession.
  - Sinon  $\emptyset, 0$  et  $u$  sont bien retournés.
- Dernière itération  $k$ . Supposons que la liste contienne bien une succession de transitions obligatoires de taille  $k - 1$  et que  $Temp_V$  contienne bien le dernier sommet de cette succession :
  - Si le sommet  $Temp_V$  (tel que défini au début de l'itération) est le sommet-cible, l'algorithme termine à la ligne 14 et retourne la succession de transitions obligatoires maximale (s'arrêtant sur le sommet-cible) partant du sommet  $u$  jusqu'au sommet-cible, sa taille  $k$  et  $Temp_V$  contient le sommet-cible.
  - Sinon si l'arc  $(Temp_V, Temp_W)$  (tel que défini au début de l'itération) est nouveau, la liste contient alors une succession de transitions obligatoires maximum de taille  $k$  et  $Temp_V$  contient bien le dernier sommet de cette succession.
  - Sinon  $\emptyset, 0, u$  sont bien retournés.

Aucun nouveau sommet ne peut prolonger la succession de transitions obligatoires. L'Algorithme termine bien en respectant sa spécification.

□

Nous pouvons finalement exhiber une construction réutilisant l'Algorithme 3 pour retranscrire l'instance du problème du Plus Court Chemin avec Transitions Obligatoires (*PCCO*) en une instance du problème du Plus Court Chemin Pondéré (*WSP*).

**Idée 26.** *Une retranscription sans transitions obligatoires.*

*Nous savons qu'une succession de transitions obligatoires se doit d'être suivie jusqu'à la fin avant qu'un arc puisse être à nouveau choisi. Ainsi, une telle succession depuis un sommet  $u$  vers un sommet  $v$  peut être remplacée par un arc  $(u, v)$  si le sommet-cible n'est*

pas atteint. L'Algorithme 3 permet de faire ce remplacement tout en évitant les circuits de transitions obligatoires. La Construction 26 parcourt alors l'ensemble des arcs afin de les remplacer suivant l'Algorithme 3 et ainsi construire une instance sans transitions obligatoires. Pour chaque arc  $(u, v)$  de  $A'$ , une liste ordonnée de chaque arc de  $A$  emprunté par la retranscription  $(u, v)$  est maintenue en correspondance avec une numérotation des arcs afin de pouvoir recomposer la solution au problème WSP en une solution pour le problème PCCO.

**Construction 26.** Une retranscription sans transitions obligatoires.

Soit  $(D = (V, A), \Pi)$  une instance du problème PCCO. Soient  $s, t \in V$ , respectivement le sommet-source et le sommet-cible. Nous construisons l'instance  $(D' = (V, A'))$  du problème du WSP et une liste d'équivalence  $L$  contenant, pour chaque arc  $(u, v)$  de  $A'$ , la liste ordonnée de chaque arc de  $A$  emprunté par la retranscription  $(u, v)$  comme suit :

- Pour chaque arc  $(u, v) \in A'$  :
  - Soit  $(List_{uv}, Taille_{uv}, w)$  le retour de l'Algorithme 3 avec l'entrée  $(D, \Pi, (u, v), t)$ .
  - Soit  $i$  le numéro du dernier arc ajouté.
  - Nous ajoutons l'arc  $(u, w)$ , numéroté  $i + 1$ , de poids  $Taille_{uv}$  dans  $A'$ .
  - Nous ajoutons la liste  $List_{uv}$  à la position  $i + 1$  de la liste d'équivalence  $L$  ( $L_{i+1} = List_{uv}$ ).

Le multi-graphe dirigé pondéré  $D'$  contient  $|V|$  sommets et au plus  $|A|$  arcs. Il est construit en temps  $O(|A|^3)$ . La Construction 26 est illustrée dans la Figure 3.26. Chaque arc est associé à une liste d'arcs de la Figure 3.24 :

- l'arc  $(s, 1)$  est associé à la liste d'arcs  $(s, 1)$  ;
- l'arc  $(s, 4)$  est associé à la liste d'arcs  $(s, 2), (2, 4)$  ;
- l'arc  $(s, t)$  est associé à la liste d'arcs  $(s, 5), (5, t)$  ;
- l'arc  $(2, 3)$  est associé à la liste d'arcs  $(2, 3)$  ;
- l'arc  $(2, 4)$  est associé à la liste d'arcs  $(2, 4)$  ;
- l'arc  $(5, t)$  est associé à la liste d'arcs  $(5, t)$  ;
- l'arc  $(t, 6)$  est associé à la liste d'arcs  $(t, 6)$ .

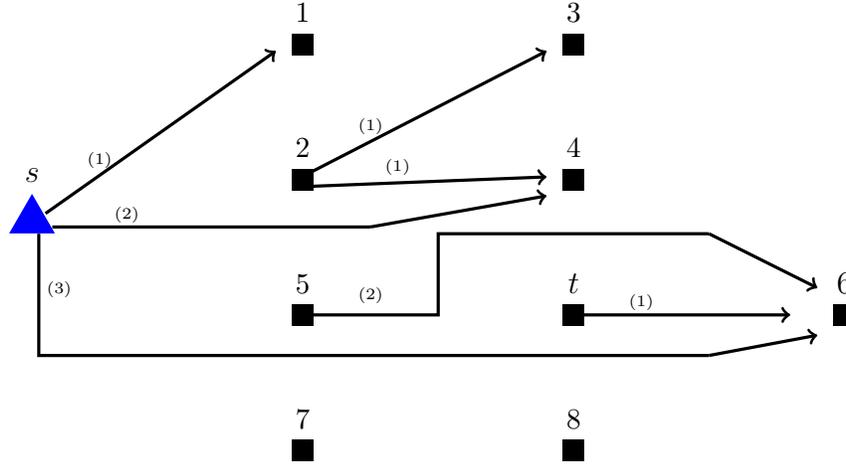


FIGURE 3.25 – Retranscription de l’instance du problème *PCCO* associée à la Figure 3.24 suivant la Construction 26 sans l’utilisation d’une cible.

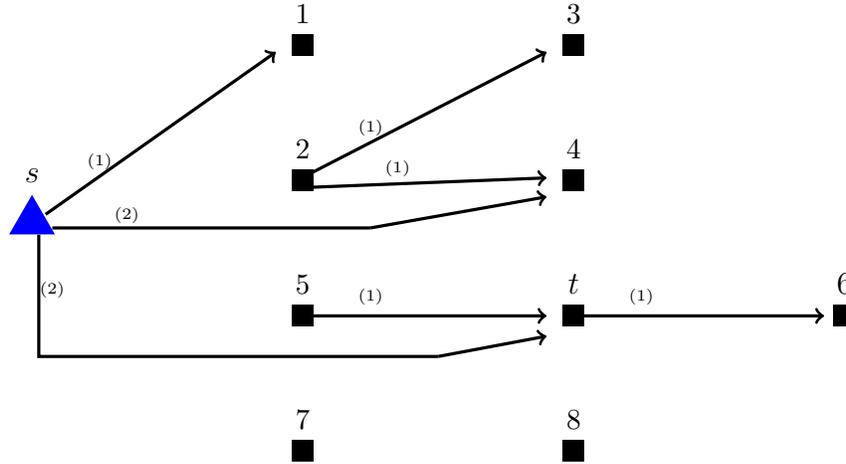


FIGURE 3.26 – Retranscription de l’instance du problème *PCCO* associée à la Figure 3.24 suivant la Construction 26 avec le sommet  $t$  pour cible.

**Lemme 3.** Soit  $(D = (V, A), \Pi)$  une instance du problème *PCCO*. Soient  $s, t \in V$ , respectivement le sommet-source et le sommet-cible. Soient  $(D' = (V, A'))$  et  $L$  respectivement l’instance du problème *WSP* et la liste d’équivalence obtenues en suivant la Construction 26.

Il existe une diroute du sommet-source  $s$  au sommet-cible  $t$  de taille  $k$  dans le digraphe  $D$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi$  si et seulement s’il existe une diroute du sommet-source  $s$  au sommet-cible  $t$  de taille  $k$  dans  $D'$ .

*Démonstration.* Supposons qu’il existe une diroute  $P = (u_0, u_1), \dots, (u_{k-1}, u_k)$  du sommet-source  $s = u_0$  au sommet-cible  $t = u_k$  de taille  $k$  dans le digraphe  $D$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi$ . Construisons une diroute  $P'$  du sommet-source  $s$  au sommet-cible  $t$  de taille  $k$  dans  $D'$  :

- Nous prenons la même diroute  $P' = P$ .
- Tant que  $P'$  contient au moins une transition obligatoire :
  - Soit  $(u_i, u_{i+1}), \dots, (u_{j-1}, u_j)$  la plus longue succession de transitions obligatoires dans  $P'$ .
  - Tous ces arcs sont remplacés par l'arc  $(u_i, u_j)$  de poids  $j - i$ .

$P'$  est une diroute du sommet-source  $s$  au sommet-cible  $t$  de taille  $k$  dans  $D'$ .

Supposons qu'il existe une diroute  $P = (u_0, u_1), \dots, (u_{k-1}, u_k)$  du sommet-source  $s = u_0$  au sommet-cible  $t$  de taille  $k$  dans  $D'$ . Construisons une diroute  $P'$  du sommet-source  $s$  au sommet-cible  $t$  de taille  $k$  dans le digraphe  $D$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi$  :

- Nous prenons la même diroute  $P' = P$ .
- Pour chaque arc  $(u_i, u_{i+1})$  ( $0 \leq i < k$ ), numéroté  $j$ , substituons dans  $P'$  l'arc  $(u_i, u_{i+1})$  par les arcs définis dans la liste  $L_j$ .

$P'$  est une diroute du sommet-source  $s$  au sommet-cible  $t$  de taille  $k$  dans le digraphe  $D$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi$ . □

Nous savons qu'il existe des algorithmes permettant d'obtenir la plus courte diroute entre deux sommets dans un multi-graphe pondéré en temps polynomial. Nous en déduisons le théorème qui suit.

**Théorème 7.** *Le problème PCCO admet une résolution en temps polynomial.*

*Démonstration.* Soit  $(D = (V, A), \Pi)$  une instance du problème PCCO. Soient  $s, t \in V$ , respectivement le sommet-source et le sommet-cible. D'après les Lemmes 1, 2 et 3, il est possible de transformer cette instance  $(D, \Pi)$  en une instance  $(D' = (V, A'))$  du problème WSP telle qu'à toute solution dans  $(D, \Pi)$  corresponde une solution de même taille dans  $(D')$ . Ainsi, toute instance  $I = (D = (V, A), \Pi)$  du problème PCCO peut être résolue en temps polynomial en suivant la procédure :

1. Transformation de l'instance  $I$  du problème PCCO en une instance  $I'$  du problème WSP suivant la Construction 26.
2. Recherche de la meilleure solution  $S$  pour l'instance  $I'$  par un algorithme classique de recherche de plus court chemin [13].
3. Retranscription de la solution  $S$  pour l'instance  $I$ .

□

Nous avons montré que le problème du Plus Court Chemin admet toujours une résolution en temps polynomial lors de l'ajout de transitions obligatoires. Dans une solution pour le problème du Plus Court Chemin classique, une solution est une diroute à la fois simple et élémentaire. Cependant, dans sa version avec transitions obligatoires, une solution demeure une diroute simple, mais l'élémentarité n'est plus garantie. Nous nous penchons alors sur le problème du Plus Court Chemin Élémentaire entre deux sommets avec transitions obligatoires.

### 3.2.2 Non-approximabilité pour une diroute élémentaire

**Carte 25.** Le problème *PCCEO* est non-approximable pour tout ratio (Théorème 9).

**Départ :** Le problème *RX3C* est  $\mathcal{NP}$ -complet [34].

**Points d'étape :**

1.  $\mathcal{NP}$ -complétude pour la recherche d'une diroute élémentaire (Construction 27 - Théorème 8).
2. Non-approximabilité pour la recherche d'une diroute élémentaire (Théorème 9).

Une instance du problème *RX3C* est composée d'un univers  $\mathcal{X}$  contenant  $3q$  éléments et d'une collection  $\mathcal{C}$  de  $3q$  triplets de ces éléments. Une solution est une sous-collection  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$  de taille  $q$  telle que chaque élément est couvert par un unique triplet (*propriété d'unicité*) et chaque triplet couvre ses trois éléments (*propriété de totalité*). Nous avons montré dans la Construction 25 comment représenter les triplets et les éléments du problème *RX3C* sous la forme de sommets, d'arcs et de transitions obligatoires de sorte à conserver les propriétés d'unicité et de totalité. Nous avons, par cette construction,  $3q$  collecteurs d'éléments qui commencent et terminent sur le sommet-source. Cependant, cela ne permet pas de créer un lien entre le problème *RX3C* et une diroute élémentaire. Nous dupliquons alors une partie du digraphe. Le digraphe ainsi obtenu (Construction 27) admet une diroute élémentaire passant par tous les sommets-élément selon l'instance du problème *RX3C*, nous concluons alors sur la  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème de déterminer l'existence d'une solution de taille bornée au problème *PCCEO* (Théorème 8). Si une solution existe pour une instance du problème *RX3C* alors la solution pour l'instance associée du problème *PCCEO* est unique. Nous concluons alors sur la non-approximabilité du problème de déterminer l'existence d'une solution de taille bornée au problème *PCCEO* pour tout ratio (Théorème 9).

**Idée 27.** Une diroute élémentaire passant par tous les éléments.

Pour toute instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème *RX3C*, l'objectif est de trouver les triplets permettant une couverture exacte des éléments. Contrairement au problème *TMO*, il n'est ici pas possible de désigner l'ensemble des sommets-élément pour cibles pour établir une correspondance. Nous créons alors un sommet-cible ne pouvant être atteint qu'une fois les  $q$  sommets-triplet choisis et les  $3q$  sommets-élément traversés. L'idée est de séparer le sommet-source du sommet-cible par le choix de  $q$  collecteurs d'éléments différents. Le sommet-cible est atteint par une diroute élémentaire si et seulement si l'instance du problème *RX3C* admet une solution.

**Construction 27.** Une diroute élémentaire passant par tous les éléments.

Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème *RX3C* avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Nous construisons une instance  $(D = (V, A), \Pi)$  du problème *PCCEO* comme suit :

- Nous ajoutons le sommet-source  $s^1$ , le sommet-cible  $s^{q+1}$  et les sommets-choix  $s^2, \dots, s^q$ .

- Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , nous ajoutons le sommet-élément  $x_i$ .
- Pour  $1 \leq l \leq q$  :
  - Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$  :
    - Nous ajoutons les sommets-triplet  $c_{j,1}^l, c_{j,2}^l, c_{j,3}^l$  et  $c_{j,4}^l$ .
    - Nous ajoutons les arcs  $(s^l, c_{j,1}^l)$  et  $(c_{j,4}^l, s^{l+1})$ .
    - Soient  $x_a, x_b, x_c \in \mathcal{X}$  les trois éléments du triplet  $c_j$ .
    - Nous ajoutons les arcs  $(c_{j,1}^l, x_a), (x_a, c_{j,2}^l), (c_{j,2}^l, x_b), (x_b, c_{j,3}^l), (c_{j,3}^l, x_c)$  et  $(x_c, c_{j,4}^l)$ .
    - Nous ajoutons le collecteur d'éléments  $\alpha_j^l$  (c'est-à-dire la succession de transitions obligatoires) de taille sept  $\langle s^l, c_{j,1}^l, x_a \rangle, \langle c_{j,1}^l, x_a, c_{j,2}^l \rangle, \langle x_a, c_{j,2}^l, x_b \rangle, \langle c_{j,2}^l, x_b, c_{j,3}^l \rangle, \langle x_b, c_{j,3}^l, x_c \rangle, \langle c_{j,3}^l, x_c, c_{j,4}^l \rangle$  et  $\langle x_c, c_{j,4}^l, s^{l+1} \rangle$ .

L'instance  $(D, \Pi)$  contient  $12q^2 + 4q + 1$  sommets,  $24q^2$  arcs et  $3q^2$  successions de transitions obligatoires de taille sept soit  $21q^2$  transitions obligatoires. Un schéma de la Construction 27 est représenté dans la Figure 3.27. Pour chaque sommet de choix, y compris le sommet-source, seulement un collecteur d'éléments est illustré.

Soit  $P$  une diroute élémentaire dans le digraphe  $D$  du sommet-source  $s^1$ , au sommet-cible  $s^{q+1}$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi$ . La diroute  $P$  peut être vue comme un ensemble de  $\kappa$  successions de transitions obligatoires (un ensemble de collecteurs d'éléments). Chaque collecteur d'éléments  $\alpha^k$  pour  $1 \leq k \leq \kappa$  est un chemin orienté de transitions obligatoires composé de huit arcs distincts. Le chemin  $\alpha^1$  part du sommet-source  $s^1$  vers un sommet-triplet  $c_{j,1}^1$  et suit le collecteur d'éléments associé  $\alpha_j^1$  jusqu'à atteindre le sommet-choix  $s^2$ . Le chemin  $\alpha^k$  ( $k \neq 1$ ) part du sommet-choix  $s^k$  vers un sommet-triplet  $c_{j,a}^k$  suivi par son premier sommet-élément  $x_a$ , alterne entre ses sommets-triplet et ses sommets-élément suivant le collecteur d'éléments  $\alpha_j^k$  jusqu'à atteindre le sommet-choix  $s^{k+1}$  (ou le sommet-cible  $s^{q+1}$  lorsque  $k = q$ ) :  $\alpha^k = \alpha_j^k = (s^k, c_{j,1}^k), (c_{j,1}^k, x_a), (x_a, c_{j,2}^k), (c_{j,2}^k, x_b), (x_b, c_{j,3}^k), (c_{j,3}^k, x_c), (x_c, c_{j,4}^k), (c_{j,4}^k, s^{k+1})$ , pour tout triplet  $c_j = \{x_a, x_b, x_c\} \in \mathcal{C}$ . Ainsi  $P = \alpha^1, \dots, \alpha^\kappa$ .

Chaque collecteur d'éléments  $\alpha^k$  contient exactement trois sommets-élément parmi les  $3q$  existants. Toute diroute élémentaire ne peut utiliser que  $8q$  arcs.

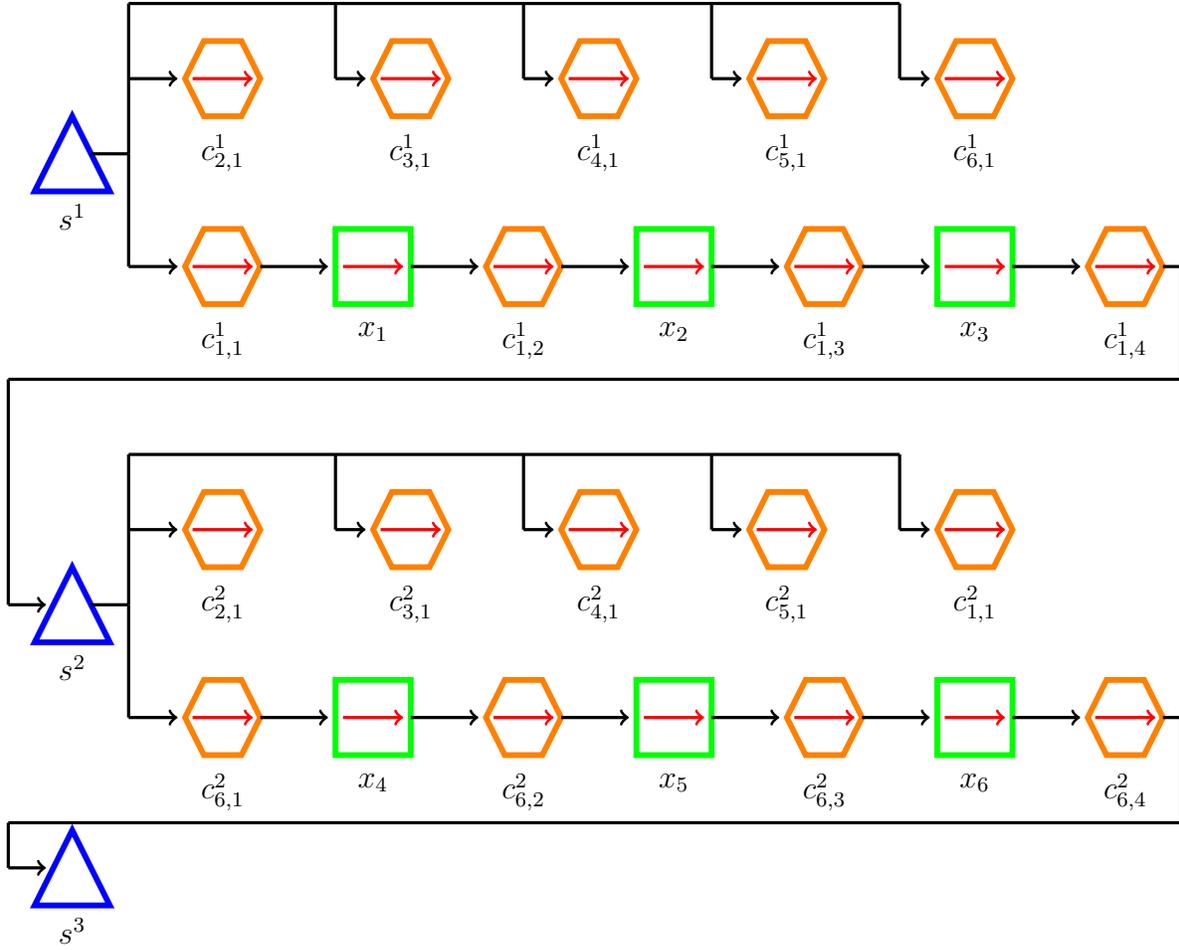


FIGURE 3.27 – Illustration de la Construction 27 pour l’instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$  et  $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ .

**Théorème 8.** *Le problème PCCEO est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet.*

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soient  $(D, \Pi)$  le digraphe et les transitions obligatoires associées suivant la Construction 27 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \lambda)$ . Soient  $s^1$  le sommet-source,  $s^{q+1}$  le sommet-cible et  $w = 8q$ .

Le problème  $PCCEO$  est clairement dans  $\mathcal{NP}$ . De plus, construire  $(D, \Pi)$  à partir de l’instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est polynomial.

Supposons que  $P$  est une diroute élémentaire dans le digraphe  $D$  du sommet-source  $s^1$  au sommet-cible  $s^{q+1}$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi$ . Construisons une couverture exacte  $S$  de  $\mathcal{X}$  :

- Pour  $1 \leq k \leq q$ , si l’arc  $(s^k, c_{j,1}^k)$  est dans  $P$  alors nous ajoutons le triplet  $c_j$  dans  $S$ .

La diroute  $P$  emprunte  $q$  collecteurs d'éléments (représentant chacun un triplet) passant par exactement  $3q$  sommets-élément différents. Les propriétés d'unicité et de totalité sont respectées par  $S$ . Ainsi,  $S$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$ .

Supposons qu'il existe une couverture exacte  $S$  pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$ . Construisons une diroute élémentaire  $P'$  dans le digraphe  $D$  du sommet-source  $s^1$  au sommet-cible  $s^{q+1}$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi$  :

- La diroute  $P'$  part du sommet-source  $s^1$ .
- Soient  $c_1, \dots, c_q$  les triplets de  $S$ .
- Pour chaque triplet  $c_j = \{x_a, x_b, x_c\} \in S$  pour  $1 \leq j \leq q$ , nous ajoutons les arcs  $(s^j, c_{j,1}^j)$ ,  $(c_{j,1}^j, x_a)$ ,  $(x_a, c_{j,2}^j)$ ,  $(c_{j,2}^j, x_b)$ ,  $(x_b, c_{j,3}^j)$ ,  $(c_{j,3}^j, x_c)$ ,  $(x_c, c_{j,4}^j)$  et  $(c_{j,4}^j, s^{j+1})$  du collecteur d'éléments correspondant  $\alpha_j^j$ .

La diroute élémentaire  $P'$  contient exactement  $8q$  arcs, part du sommet-source  $s^1$ , termine sur le sommet-cible  $s^{q+1}$  et respecte les transitions obligatoires.  $P'$  est une solution pour le problème  $PCCEO$ .

Ainsi, il existe une solution pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  si et seulement s'il existe, dans l'instance  $(D, \Pi)$  associée du problème  $PCCEO$ , une diroute élémentaire de taille  $8q$ , commençant depuis le sommet-source  $s^1$ , terminant sur le sommet-cible  $s^{q+1}$  et respectant les transitions obligatoires.  $\square$

Le sommet-source  $s^1$  et les sommets-choix  $s^2, \dots, s^q$  sont les seuls sommets depuis lesquels un arc sortant peut être choisi librement. Tous les autres sommets sont atteints au cours d'une succession de transitions obligatoires, induisant une unique possibilité pour en partir. Nous avons également vu que toute diroute élémentaire respectant les transitions obligatoires entre le sommet-source  $s^1$  et le sommet-cible  $s^q$  a une taille de  $8q$ . La solution optimale est l'unique solution possible. Ainsi, aucun algorithme d'approximation ne peut exister à moins que  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ .

**Théorème 9.** *Déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour le problème  $PCCEO$  est un problème non-approximable pour tout ratio, sauf si  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ .*

*Démonstration.* Nous pouvons également nous convaincre du Théorème 9 en modifiant la Construction 27 pour la recherche de la plus courte diroute élémentaire. Nous créons une diroute élémentaire alternative entre le sommet-source et le sommet-cible. Cette diroute est un chemin orienté n'empruntant aucun des sommets précédemment définis et associée à aucune transition obligatoire. Il est alors possible de choisir la longueur de cette diroute en fonction du ratio d'approximation supposé.

Supposons qu'il existe un algorithme  $A$  permettant d'approximer la taille de la plus courte diroute élémentaire par un facteur deux en temps polynomial. Nous choisissons alors une taille de  $16q + 2$  pour la diroute alternative. D'une manière plus générale, pour un facteur d'approximation de  $c$ , nous choisissons une taille de  $8qc + c$ . Ainsi, un écart subsiste entre la solution optimale de taille  $8q$  et la solution approximée de taille  $8qc + c$ . Aucun algorithme d'approximation ne peut exister à moins que  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ .  $\square$

### 3.2.3 Non-approximabilité pour une diroute élémentaire même dans un digraphe de forte densité

**Carte 26.** Le problème *PCCEO* est non-approximable pour tout ratio, même dans un digraphe de forte densité (Théorème 10).

**Départ :** Le problème *PCCEO* est  $\mathcal{NP}$ -complet (Construction 27).

**Points d'étape :**

1. Création d'un gadget de densification (Construction 28).
2. Non-approximabilité pour la recherche d'une diroute élémentaire même dans un digraphe de forte densité (Construction 29 - Théorème 10).

Nous avons montré que déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour le problème *PCCEO* est un problème non-approximable pour tout ratio, sauf si  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ . Nous proposons une construction afin d'étendre ce résultat aux digraphes de forte densité. Nous créons tout d'abord un gadget de densification permettant d'ajouter des arcs n'appartenant à aucune solution dans les instances que nous construisons (Construction 28). Pour obtenir un digraphe de forte densité (Construction 29), nous ajoutons tous les arcs absents mis à part les arcs entre le sommet-source et le sommet-cible ou entre les sommets-choix et le sommet-cible en suivant les principes du gadget de densification. Nous concluons alors sur la non-approximabilité du problème de déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour le problème *PCCEO* pour tout ratio dans un digraphe de forte densité (Théorème 10).

**Idée 28.** *Le gadget de densification.*

*Ce gadget présente une méthode d'ajout d'arcs n'influençant pas nos réductions pour les problèmes de plus courte tournée avec transitions obligatoires. Nous utilisons deux principes : 1) aucun arc induisant un rallongement ne peut appartenir à une solution sans apporter d'opportunités de direction et 2) aucun arc appartenant à un circuit de transitions obligatoires excluant les sommets-cible ne peut être emprunté. L'ajout des nouveaux arcs se fait ainsi avec l'ajout de transitions obligatoires relevant d'au moins un de ces deux principes.*

**Construction 28.** *Le gadget de densification.*

*Soient  $(D = (V, A), \Pi)$  un digraphe et ses transitions obligatoires associées. Soient  $u$  et  $v$  deux sommets du digraphe  $D$ . Nous ajoutons les arcs absents comme suit :*

- *Si l'arc  $(u, v)$  est absent du digraphe  $D$ , nous ajoutons l'arc  $(u, v)$  dans  $A$  ainsi que la transition obligatoire  $\langle u, v, u \rangle$  dans  $\Pi$ .*
- *Si l'arc  $(v, u)$  est absent du digraphe  $D$ , nous ajoutons l'arc  $(v, u)$  dans  $A$  ainsi que la transition obligatoire  $\langle v, u, v \rangle$  dans  $\Pi$ .*

Pour deux sommets, il existe trois configurations possibles. Il n'existe soit aucun arc entre eux, soit un seul, soit deux (aucun arc n'est manquant dans ce cas, aucun traitement n'est nécessaire). Les deux premières configurations (à gauche) et l'ajout des nouveaux arcs (à droite) sont illustrés dans la Figure 3.28.

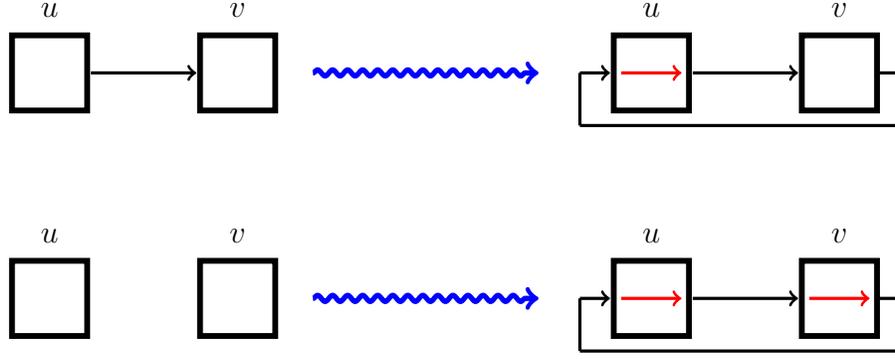


FIGURE 3.28 – Illustration de la Construction 28.

**Idée 29.** Une diroute élémentaire dans un digraphe de forte densité.

Nous avons vu comment construire un digraphe avec des transitions obligatoires à partir d'une instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème *RX3C*. Pour obtenir un digraphe de forte densité, nous ajoutons les arcs absents mis à part l'arc entre le sommet-source et le sommet-cible et les arcs entre les sommets-choix et le sommet-cible. Ainsi, chaque sommet du digraphe  $D = (V, A)$  possède au moins  $|V| - 2$  arcs sortants.

**Construction 29.** Une diroute élémentaire dans un digraphe de forte densité.

Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème *RX3C* avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Nous construisons une instance  $(D = (V, A), \Pi)$  du problème *PCCEO* comme suit :

- Nous ajoutons le sommet-source  $s^1$ , le sommet-cible  $s^{q+1}$  et les sommets-choix  $s^2, \dots, s^q$ .
- Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , nous ajoutons le sommet-élément  $x_i$ .
- Pour  $1 \leq l \leq q$  :
  - Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$  :
    - Nous ajoutons les sommets-triplet  $c_{j,1}^l, c_{j,2}^l, c_{j,3}^l$  et  $c_{j,4}^l$ .
    - Nous ajoutons les arcs  $(s^l, c_{j,1}^l)$  et  $(c_{j,4}^l, s^{l+1})$ .
    - Soient  $x_a, x_b, x_c \in \mathcal{X}$  les trois éléments du triplet  $c_j$ .
    - Nous ajoutons les arcs  $(c_{j,1}^l, x_a), (x_a, c_{j,2}^l), (c_{j,2}^l, x_b), (x_b, c_{j,3}^l), (c_{j,3}^l, x_c)$  et  $(x_c, c_{j,4}^l)$ .
    - Nous ajoutons le collecteur d'éléments  $\alpha_j^l$  (c'est-à-dire la succession de transitions obligatoires) de taille sept  $\langle s^l, c_{j,1}^l, x_a \rangle, \langle c_{j,1}^l, x_a, c_{j,2}^l \rangle, \langle x_a, c_{j,2}^l, x_b \rangle, \langle c_{j,2}^l, x_b, c_{j,3}^l \rangle, \langle x_b, c_{j,3}^l, x_c \rangle, \langle c_{j,3}^l, x_c, c_{j,4}^l \rangle$  et  $\langle x_c, c_{j,4}^l, s^{l+1} \rangle$ .
- Nous ajoutons l'arc  $(s^{q+1}, s^l)$  pour  $1 \leq l \leq q$ .
- Pour tous sommets  $u$  et  $v$  parmi  $s^{q+1}, x_1, \dots, x_{3q}, c_{1,1}^l, \dots, c_{3q,1}^l, c_{1,2}^l, \dots, c_{3q,2}^l, c_{1,3}^l, \dots, c_{3q,3}^l$  et  $c_{1,4}^l, \dots, c_{3q,4}^l$  pour  $1 \leq l \leq q$ , si l'arc  $(u, v)$  n'existe pas, nous ajoutons l'arc  $(u, v)$  ainsi que la transition obligatoire  $\langle u, v, u \rangle$  dans  $\Pi$ .
- Pour tous sommets  $u$  et  $v$  parmi  $x_1, \dots, x_{3q}, c_{1,1}^l, \dots, c_{3q,1}^l, c_{1,2}^l, \dots, c_{3q,2}^l, c_{1,3}^l, \dots, c_{3q,3}^l, c_{1,4}^l, \dots, c_{3q,4}^l$  et  $s^l$  pour  $1 \leq l \leq q$ , si l'arc  $(u, v)$  n'existe pas, nous ajoutons l'arc  $(u, v)$  ainsi que la transition obligatoire  $\langle u, v, u \rangle$  dans  $\Pi$ .

L'instance  $(D, \Pi)$  contient  $12q^2 + 4q + 1$  sommets,  $144q^4 + 96q^3 + 28q^2 + 3q$  arcs et  $144q^4 + 96q^3 + 25q^2 + 3q$  transitions obligatoires. Chaque sommet du digraphe  $D$  possède au moins  $|V| - 2$  arcs sortants.

Nous savons que seuls le sommet-source  $s^1$  et les  $q - 1$  sommets-choix  $s^2, \dots, s^q$  permettent de choisir librement un arc sortant. Ainsi, pour chaque sommet-élément et chaque sommet-triplet, seuls les arcs appartenant à un collecteur d'éléments peuvent être empruntés dans une diroute élémentaire vers le sommet-cible  $s^{q+1}$ . De même, tout arc depuis le sommet-source ou un sommet-choix vers un sommet quelconque n'appartenant pas à un collecteur d'éléments appartient à un circuit de transitions obligatoires ne passant pas par le sommet-cible. Ainsi, ces arcs ne peuvent pas être empruntés dans une diroute élémentaire vers le sommet-cible  $s^{q+1}$ .

Soit  $P$  une diroute élémentaire dans le digraphe  $D$  du sommet-source  $s^1$ , au sommet-cible  $s^{q+1}$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi$ . La diroute  $P$  peut être vue comme un ensemble de  $\kappa$  successions de transitions obligatoires (un ensemble de collecteurs d'éléments). Chaque collecteur d'éléments  $\alpha^k$  pour  $1 \leq k \leq \kappa$  est un chemin orienté de transitions obligatoires composé de huit arcs distincts. Le chemin  $\alpha^1$  part du sommet-source  $s^1$  vers un sommet-triplet  $c_{j,1}^1$  et suit le collecteur d'éléments associé  $\alpha_j^1$  jusqu'à atteindre le sommet-choix  $s^2$ . Le chemin  $\alpha^k$  ( $k \neq 1$ ) part du sommet-choix  $s^k$  vers un sommet-triplet  $c_{j,a}^k$  suivi par son premier sommet-élément  $x_a$ , alterne entre ses sommets-triplet et ses sommets-élément suivant le collecteur d'éléments  $\alpha_j^k$  jusqu'à atteindre le sommet-choix  $s^{k+1}$  (ou le sommet-cible  $s^{q+1}$  lorsque  $k = q$ ) :  $\alpha^k = \alpha_j^k = (s^k, c_{j,1}^k), (c_{j,1}^k, x_a), (x_a, c_{j,2}^k), (c_{j,2}^k, x_b), (x_b, c_{j,3}^k), (c_{j,3}^k, x_c), (x_c, c_{j,4}^k), (c_{j,4}^k, s^{k+1})$ , pour tout triplet  $c_j = \{x_a, x_b, x_c\} \in \mathcal{C}$ . Ainsi  $P = \alpha^1, \dots, \alpha^\kappa$ .

Chaque collecteur d'éléments  $\alpha^k$  contient exactement trois sommets-élément parmi les  $3q$  existants. Toute diroute élémentaire ne peut utiliser que  $8q$  arcs.

**Théorème 10.** *Déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour le problème PCCEO est un problème non-approximable pour tout ratio, sauf si  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ , même dans un digraphe de forte densité  $(1 - \frac{1}{|V|-1})$ .*

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soient  $(D, \Pi)$  le digraphe et les transitions obligatoires associées suivant la Construction 29 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \lambda)$ . Soient  $s^1$  le sommet-source,  $s^{q+1}$  le sommet-cible et  $w = 8q$ .

Le problème PCCEO est clairement dans  $\mathcal{NP}$ . De plus, construire  $(D, \Pi)$  à partir de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est polynomial.

Supposons que  $P$  est une diroute élémentaire dans le digraphe  $D$  du sommet-source  $s^1$  au sommet-cible  $s^{q+1}$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi$ . Construisons une couverture exacte  $S$  de  $\mathcal{X}$  :

— Pour  $1 \leq k \leq q$ , si l'arc  $(s^k, c_{j,1}^k)$  est dans  $P$  alors nous ajoutons le triplet  $c_j$  dans  $S$ . La diroute  $P$  emprunte  $q$  collecteurs d'éléments (représentant chacun un triplet) passant par exactement  $3q$  sommets-élément différents. Les propriétés d'unicité et de totalité sont respectées par  $S$ . Ainsi,  $S$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$ .

Supposons qu'il existe une couverture exacte  $S$  pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$ . Construisons une diroute élémentaire  $P'$  dans le digraphe  $D$  du sommet-source  $s^1$  au sommet-cible  $s^{q+1}$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi$  :

- La diroute  $P'$  part du sommet-source  $s^1$ .
- Soient  $c_1, \dots, c_q$  les triplets de  $S$ .
- Pour chaque triplet  $c_j = \{x_a, x_b, x_c\} \in S$  pour  $1 \leq j \leq q$ , nous ajoutons les arcs  $(s^j, c_{j,1}^j)$ ,  $(c_{j,1}^j, x_a)$ ,  $(x_a, c_{j,2}^j)$ ,  $(c_{j,2}^j, x_b)$ ,  $(x_b, c_{j,3}^j)$ ,  $(c_{j,3}^j, x_c)$ ,  $(x_c, c_{j,4}^j)$  et  $(c_{j,4}^j, s^{j+1})$  du collecteur d'éléments correspondant  $\alpha_j^j$ .

La diroute élémentaire  $P'$  contient exactement  $8q$  arcs, part du sommet-source  $s^1$ , termine sur le sommet-cible  $s^{q+1}$  et respecte les transitions obligatoires.  $P'$  est une solution pour le problème  $PCCEO$ .

Ainsi, il existe une solution pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  si et seulement s'il existe, dans l'instance  $(D, \Pi)$  associée du problème  $PCCEO$ , une diroute élémentaire de taille  $8q$ , commençant depuis le sommet-source  $s^1$ , terminant sur le sommet-cible  $s^{q+1}$  et respectant les transitions obligatoires.  $\square$

### 3.2.4 Non-approximabilité pour une diroute élémentaire même dans un digraphe connexe de faible densité

**Carte 27.** Le problème  $PCCEO$  est non-approximable pour tout ratio, même dans un digraphe connexe de faible densité (Théorème 11).

**Départ :** Le problème  $PCCEO$  est  $\mathcal{NP}$ -complet (Construction 27).

**Points d'étape :**

1. Non-approximabilité pour la recherche d'une diroute élémentaire dans un digraphe connexe de faible densité (Construction 30 - Théorème 11).

Nous avons montré que déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour le problème  $PCCEO$  est un problème non-approximable pour tout ratio, sauf si  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ . Nous proposons une construction afin d'étendre ce résultat aux digraphes connexes de faible densité. Pour obtenir un digraphe connexe de faible densité (Construction 30), nous ajoutons un nouveau chemin orienté arbitrairement grand à partir du sommet-source. Nous concluons alors sur la non-approximabilité du problème de déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour le problème  $PCCEO$  pour tout ratio dans un digraphe connexe de faible densité (Théorème 11).

**Idée 30.** Une diroute élémentaire dans un digraphe connexe de faible densité.

Nous avons vu comment construire un digraphe avec des transitions obligatoires à partir d'une instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$ . Pour obtenir un digraphe connexe de faible densité, nous ajoutons un nouveau chemin orienté arbitrairement grand à partir du sommet-source. Ce chemin n'étant relié qu'au sommet-source, il n'influence pas les autres sommets.

**Construction 30.** Une diroute élémentaire dans un digraphe connexe de faible densité. Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème *RX3C* avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Nous construisons une instance  $(D = (V, A), \Pi)$  du problème *PCCEO* comme suit :

- Nous ajoutons le sommet-source  $s^1$ , le sommet-cible  $s^{q+1}$  et les sommets-choix  $s^2, \dots, s^q$ .
- Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , nous ajoutons le sommet-élément  $x_i$ .
- Pour  $1 \leq l \leq q$  :
  - Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$  :
    - Nous ajoutons les sommets-triplet  $c_{j,1}^l, c_{j,2}^l, c_{j,3}^l$  et  $c_{j,4}^l$ .
    - Nous ajoutons les arcs  $(s^l, c_{j,1}^l)$  et  $(c_{j,4}^l, s^{l+1})$ .
    - Soient  $x_a, x_b, x_c \in \mathcal{X}$  les trois éléments du triplet  $c_j$ .
    - Nous ajoutons les arcs  $(c_{j,1}^l, x_a), (x_a, c_{j,2}^l), (c_{j,2}^l, x_b), (x_b, c_{j,3}^l), (c_{j,3}^l, x_c)$  et  $(x_c, c_{j,4}^l)$ .
    - Nous ajoutons le collecteur d'éléments  $\alpha_j^l$  (c'est-à-dire la succession de transitions obligatoires) de taille sept  $\langle s^l, c_{j,1}^l, x_a \rangle, \langle c_{j,1}^l, x_a, c_{j,2}^l \rangle, \langle x_a, c_{j,2}^l, x_b \rangle, \langle c_{j,2}^l, x_b, c_{j,3}^l \rangle, \langle x_b, c_{j,3}^l, x_c \rangle, \langle c_{j,3}^l, x_c, c_{j,4}^l \rangle$  et  $\langle x_c, c_{j,4}^l, s^{l+1} \rangle$ .
- Soit  $\Omega$  un grand nombre avec  $\Omega \gg q$ .
- Nous ajoutons un chemin orienté de  $\omega_1$  à  $\omega_\Omega$  ainsi que l'arc  $(s^1, \omega_1)$ .

L'instance  $(D, \Pi)$  contient  $\Omega + 12q^2 + 4q + 1$  sommets,  $\Omega + 24q^2$  arcs et  $21q^2$  transitions obligatoires.

Parmi les sommets  $\omega_1, \dots, \omega_\Omega$ , aucun ne peut appartenir à une diroute entre le sommet-source et le sommet-cible. En effet, chacun de leurs arcs sortants est dirigé vers un autre sommet parmi  $\omega_1, \dots, \omega_\Omega$ .

Soit  $P$  une diroute élémentaire dans le digraphe  $D$  du sommet-source  $s^1$ , au sommet-cible  $s^{q+1}$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi$ . La diroute  $P$  peut être vue comme un ensemble de  $\kappa$  successions de transitions obligatoires (un ensemble de collecteurs d'éléments). Chaque collecteur d'éléments  $\alpha^k$  pour  $1 \leq k \leq \kappa$  est un chemin orienté de transitions obligatoires composé de huit arcs distincts. Le chemin  $\alpha^1$  part du sommet-source  $s^1$  vers un sommet-triplet  $c_{j,1}^1$  et suit le collecteur d'éléments associé  $\alpha_j^1$  jusqu'à atteindre le sommet-choix  $s^2$ . Le chemin  $\alpha^k$  ( $k \neq 1$ ) part du sommet-choix  $s^k$  vers un sommet-triplet  $c_{j,a}^k$  suivi par son premier sommet-élément  $x_a$ , alterne entre ses sommets-triplet et ses sommets-élément suivant le collecteur d'éléments  $\alpha_j^k$  jusqu'à atteindre le sommet-choix  $s^{k+1}$  (ou le sommet-cible  $s^{q+1}$  lorsque  $k = q$ ) :  $\alpha^k = \alpha_j^k = (s^k, c_{j,1}^k), (c_{j,1}^k, x_a), (x_a, c_{j,2}^k), (c_{j,2}^k, x_b), (x_b, c_{j,3}^k), (c_{j,3}^k, x_c), (x_c, c_{j,4}^k), (c_{j,4}^k, s^{k+1})$ , pour tout triplet  $c_j = \{x_a, x_b, x_c\} \in \mathcal{C}$ . Ainsi  $P = \alpha^1, \dots, \alpha^\kappa$ .

Chaque collecteur d'éléments  $\alpha^k$  contient exactement trois sommets-élément parmi les  $3q$  existants. Toute diroute élémentaire ne peut utiliser que  $8q$  arcs.

Avant de montrer que le problème de déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour le problème *PCCEO* est non-approximable dans notre cas restreint, nous évaluons la densité du digraphe  $D$ . Le graphe contient  $\Omega + 12q^2 + 4q + 1$  sommets, ce qui correspond à :

$$\Omega^2 + \Omega(24q^2 + 8q + 1) + 144q^4 + 96q^3 + 28q^2 + 4q$$

arcs maximum. Ainsi, la densité du graphe est définie par :

$$\frac{\Omega + 24q^2}{\Omega^2 + \Omega(24q^2 + 8q + 1) + 144q^4 + 96q^3 + 28q^2 + 4q}$$

Lorsque ce polynôme tend vers l'infini, la composante la plus significative est  $\Omega$ . Calculer sa limite lorsque  $\Omega$  tend vers l'infini revient alors à calculer la limite de  $\frac{1}{\Omega}$ . Ainsi, lorsque  $\Omega$  tend vers l'infini, la densité du graphe s'approche de sa valeur minimale sans jamais l'atteindre : le graphe a une faible densité. Pour tout  $\varepsilon > \frac{1}{|V|-1}$ , il existe un facteur  $\Omega$  telle que la densité du graphe est au plus de  $\varepsilon$ .

**Théorème 11.** *Déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour le problème PCCEO est un problème non-approximable pour tout ratio, sauf si  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ , même dans un digraphe connexe de faible densité (au plus  $\varepsilon$  avec  $\varepsilon > \frac{1}{|V|-1}$ ).*

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soient  $(D, \Pi)$  le digraphe et les transitions obligatoires associées suivant la Construction 30 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \lambda)$ . Soient  $s^1$  le sommet-source,  $s^{q+1}$  le sommet-cible et  $w = 8q$ .

Le problème  $PCCEO$  est clairement dans  $\mathcal{NP}$ . De plus, construire  $(D, \Pi)$  à partir de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est polynomial.

Supposons que  $P$  est une diroute élémentaire dans le digraphe  $D$  du sommet-source  $s^1$  au sommet-cible  $s^{q+1}$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi$ . Construisons une couverture exacte  $S$  de  $\mathcal{X}$  :

— Pour  $1 \leq k \leq q$ , si l'arc  $(s^k, c_{j,1}^k)$  est dans  $P$  alors nous ajoutons le triplet  $c_j$  dans  $S$ . La diroute  $P$  emprunte  $q$  collecteurs d'éléments (représentant chacun un triplet) passant par exactement  $3q$  sommets-élément différents. Les propriétés d'unicité et de totalité sont respectées par  $S$ . Ainsi,  $S$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$ .

Supposons qu'il existe une couverture exacte  $S$  pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$ . Construisons une diroute élémentaire  $P'$  dans le digraphe  $D$  du sommet-source  $s^1$  au sommet-cible  $s^{q+1}$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi$  :

- La diroute  $P'$  part du sommet-source  $s^1$ .
- Soient  $c_1, \dots, c_q$  les triplets de  $S$ .
- Pour chaque triplet  $c_j = \{x_a, x_b, x_c\} \in S$  pour  $1 \leq j \leq q$ , nous ajoutons les arcs  $(s^j, c_{j,1}^j)$ ,  $(c_{j,1}^j, x_a)$ ,  $(x_a, c_{j,2}^j)$ ,  $(c_{j,2}^j, x_b)$ ,  $(x_b, c_{j,3}^j)$ ,  $(c_{j,3}^j, x_c)$ ,  $(x_c, c_{j,4}^j)$  et  $(c_{j,4}^j, s^{j+1})$  du collecteur d'éléments correspondant  $\alpha_j^j$ .

La diroute élémentaire  $P'$  contient exactement  $8q$  arcs, part du sommet-source  $s^1$ , termine sur le sommet-cible  $s^{q+1}$  et respecte les transitions obligatoires.  $P'$  est une solution pour le problème  $PCCEO$ .

Ainsi, il existe une solution pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  si et seulement s'il existe, dans l'instance  $(D, \Pi)$  associée du problème  $PCCEO$ , une diroute élémentaire de taille  $8q$ , commençant depuis le sommet-source  $s^1$ , terminant sur le sommet-cible  $s^{q+1}$  et respectant les transitions obligatoires.  $\square$

### 3.2.5 Non-approximabilité pour une diroute $k$ -élémentaire

**Carte 28.** Le problème *PCKEO* est non-approximable pour tout ratio, même si le digraphe a une forte densité (Théorème 12).

**Départ :** Le problème *PCCEO* est non-approximable même dans un digraphe de forte densité (Construction 29).

**Points d'étape :**

1. Non-approximabilité pour la recherche d'une diroute  $k$ -élémentaire (Construction 31 - Théorème 12).

Nous avons montré que le problème *PCCO* admet une résolution en temps polynomial dans le cas général (Théorème 7). Au contraire, nous avons montré que déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour le problème *PCCEO* (spécialisation du problème *PCCO* pour la recherche d'une diroute élémentaire) est un problème non-approximable pour tout ratio même si le digraphe a une forte densité, sauf si  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$  (Théorème 10). Le nombre de passages autorisés pour un même sommet semble jouer un rôle dans la complexité du problème. Nous autorisons ainsi à parcourir chaque sommet au plus  $k$  fois. Nous modifions alors la Construction 29 afin de consommer ces passages supplémentaires avant le choix des triplets au travers des collecteurs d'éléments (Construction 31). Nous concluons alors sur la non-approximabilité du problème de déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour le problème *PCKEO* (spécialisation du problème *PCCO* pour la recherche d'une diroute  $k$ -élémentaire pour tout  $k \geq 1$ ) pour tout ratio (Théorème 12).

**Idée 31.** Une diroute  $k$ -élémentaire.

Nous avons vu comment construire un digraphe de forte densité avec des transitions obligatoires à partir d'une instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème *RX3C*. Nous créons un chemin orienté commençant depuis un nouveau sommet-source  $s^0$ . Avant de pouvoir atteindre  $s^1$  ainsi que le reste des sommets précédemment définis, nous traversons chaque sommet-élément  $k - 1$  fois. Ainsi, le sommet-cible  $s^{q+1}$  n'est toujours atteignable qu'à la condition qu'il existe une couverture exacte des éléments de  $\mathcal{X}$ .

**Construction 31.** Une diroute  $k$ -élémentaire.

Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème *RX3C* avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soit  $k \geq 2$  un entier. Nous construisons une instance  $(D = (V, A), \Pi)$  du problème *PCKEO* comme suit :

- Nous ajoutons les sommets-choix  $s^1, \dots, s^q$  et le sommet-cible  $s^{q+1}$ .
- Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , nous ajoutons le sommet-élément  $x_i$ .
- Pour  $1 \leq l \leq q$  :
  - Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$  :
    - Nous ajoutons les sommets-triplet  $c_{j,1}^l, c_{j,2}^l, c_{j,3}^l$  et  $c_{j,4}^l$ .
    - Nous ajoutons les arcs  $(s^l, c_{j,1}^l)$  et  $(c_{j,4}^l, s^{l+1})$ .

- Soient  $x_a, x_b, x_c \in \mathcal{X}$  les trois éléments du triplet  $c_j$ .
- Nous ajoutons les arcs  $(c_{j,1}^l, x_a), (x_a, c_{j,2}^l), (c_{j,2}^l, x_b), (x_b, c_{j,3}^l), (c_{j,3}^l, x_c)$  et  $(x_c, c_{j,4}^l)$ .
- Nous ajoutons le collecteur d'éléments  $\alpha_j^l$  (c'est-à-dire la succession de transitions obligatoires) de taille sept  $\langle s^l, c_{j,1}^l, x_a \rangle, \langle c_{j,1}^l, x_a, c_{j,2}^l \rangle, \langle x_a, c_{j,2}^l, x_b \rangle, \langle c_{j,2}^l, x_b, c_{j,3}^l \rangle, \langle x_b, c_{j,3}^l, x_c \rangle, \langle c_{j,3}^l, x_c, c_{j,4}^l \rangle$  et  $\langle x_c, c_{j,4}^l, s^{l+1} \rangle$ .
- Nous ajoutons l'arc  $(s^{q+1}, s^l)$  pour  $1 \leq l \leq q$ .
- Pour tous sommets  $u$  et  $v$  parmi  $s^{q+1}, x_1, \dots, x_{3q}, c_{1,1}^l, \dots, c_{3q,1}^l, c_{1,2}^l, \dots, c_{3q,2}^l, c_{1,3}^l, \dots, c_{3q,3}^l$  et  $c_{1,4}^l, \dots, c_{3q,4}^l$  pour  $1 \leq l \leq q$ , si l'arc  $(u, v)$  n'existe pas, nous ajoutons l'arc  $(u, v)$  ainsi que la transition obligatoire  $\langle u, v, u \rangle$  dans  $\Pi$ .
- Pour tous sommets  $u$  et  $v$  parmi  $x_1, \dots, x_{3q}, c_{1,1}^l, \dots, c_{3q,1}^l, c_{1,2}^l, \dots, c_{3q,2}^l, c_{1,3}^l, \dots, c_{3q,3}^l, c_{1,4}^l, \dots, c_{3q,4}^l$  et  $s^l$  pour  $1 \leq l \leq q$ , si l'arc  $(u, v)$  n'existe pas, nous ajoutons l'arc  $(u, v)$  ainsi que la transition obligatoire  $\langle u, v, u \rangle$  dans  $\Pi$ .
- Nous ajoutons le sommet-source  $s^0$ .
- Pour  $1 \leq l \leq k-1$  :
  - Pour  $1 \leq i \leq 3q$ , nous ajoutons le sommet-postiche  $\zeta_i^l$  ainsi que l'arc  $(x_i, \zeta_i^l)$ .
  - Pour  $1 \leq i \leq 3q-1$ , nous ajoutons l'arc  $(\zeta_i^l, x_{i+1})$  ainsi que les transitions obligatoires  $\langle x_i, \zeta_i^l, x_{i+1} \rangle$  et  $\langle \zeta_i^l, x_{i+1}, \zeta_{i+1}^l \rangle$ .
- Nous ajoutons les arcs  $(s^0, x_1)$  et  $(\zeta_{3q}^{k-1}, s^1)$  ainsi que les transitions obligatoires  $\langle s^0, x_1, \zeta_1^1 \rangle$  et  $\langle x_{3q}, \zeta_{3q}^{k-1}, s^1 \rangle$ .
- Pour  $1 \leq l \leq k-2$ , nous ajoutons l'arc  $(z_{3q}^l, x_1)$  ainsi que la transition obligatoire  $\langle x_{3q}, \zeta_{3q}^l, x_1 \rangle$ .
- Nous ajoutons l'arc  $(s^{q+1}, s^0)$ .
- Pour tous sommets  $u$  et  $v$  parmi  $s^{q+1}, x_1, \dots, x_{3q}, c_{1,1}^l, \dots, c_{3q,1}^l, c_{1,2}^l, \dots, c_{3q,2}^l, c_{1,3}^l, \dots, c_{3q,3}^l, c_{1,4}^l, \dots, c_{3q,4}^l, \zeta_1^1, \dots, \zeta_l^{k-1}, \zeta_{l+q}^1, \dots, \zeta_{l+q}^{k-1}$  et  $\zeta_{l+2q}^1, \dots, \zeta_{l+2q}^{k-1}$  pour  $1 \leq l \leq q$ , si l'arc  $(u, v)$  n'existe pas, nous ajoutons l'arc  $(u, v)$  ainsi que la transition obligatoire  $\langle u, v, u \rangle$  dans  $\Pi$ .
- Pour tous sommets  $u$  et  $v$  parmi  $s^0, x_1, \dots, x_{3q}, c_{1,1}^l, \dots, c_{3q,1}^l, c_{1,2}^l, \dots, c_{3q,2}^l, c_{1,3}^l, \dots, c_{3q,3}^l, c_{1,4}^l, \dots, c_{3q,4}^l, \zeta_1^1, \dots, \zeta_l^{k-1}, \zeta_{l+q}^1, \dots, \zeta_{l+q}^{k-1}, \zeta_{l+2q}^1, \dots, \zeta_{l+2q}^{k-1}$  et  $s^l$  pour  $1 \leq l \leq q$ , si l'arc  $(u, v)$  n'existe pas, nous ajoutons l'arc  $(u, v)$  ainsi que la transition obligatoire  $\langle u, v, u \rangle$  dans  $\Pi$ .

L'instance  $(D, \Pi)$  contient  $3qk + 12q^2 + q + 2$  sommets,  $144q^4 + 72q^3k + 24q^3 + 9q^2k^2 + 6q^2k + 37q^2 + 9qk + 2q + 1$  arcs et  $144q^4 + 72q^3k + 24q^3 + 9q^2k^2 + 6q^2k + 34q^2 + 9qk + 2q + 1$  transitions obligatoires. Chaque sommet du digraphe  $D$  possède au moins  $|V| - 2$  arcs sortants. Les sommets, arcs et transitions obligatoires apparaissant dans la succession de transitions obligatoires entre  $s^0$  et  $s^1$  sont illustrés dans la Figure 3.29. Les sommets-postiche sont représentés par un pentagone pourpre.

Nous savons que seuls les  $q$  sommets-choix  $s^1, \dots, s^q$  permettent de choisir librement un arc sortant. Ainsi, pour chaque sommet-élément et chaque sommet-triplet, seuls les

arcs appartenant à un collecteur d'éléments peuvent être empruntés dans une diroute élémentaire vers le sommet-cible  $s^{q+1}$ . De même, tout arc depuis le sommet-source ou un sommet-choix vers un sommet quelconque n'appartenant pas à un collecteur d'éléments appartient à un circuit de transitions obligatoires ne passant pas par le sommet-cible. Ainsi, ces arcs ne peuvent pas être empruntés dans une diroute élémentaire vers le sommet-cible  $s^{q+1}$ . Enfin, pour chaque sommet-postiche, seuls les arcs appartenant à la succession de transitions obligatoires du sommet-source  $s^0$  vers le sommet-choix  $s^1$  peuvent être empruntés dans une diroute élémentaire vers le sommet-cible  $s^{q+1}$ .

Soit  $P$  une diroute  $k$ -élémentaire dans le digraphe  $D$  du sommet-source  $s^0$  au sommet-cible  $s^{q+1}$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi$ . La diroute  $P$  peut être vue comme un collecteur de postiches puis un ensemble de  $\kappa$  collecteurs d'éléments (chaque collecteur est une succession de transitions obligatoires). Le collecteur de postiches  $\Omega$  est un chemin orienté de transitions obligatoires composé de  $6qk - 6q + 1$  arcs distincts du sommet-source  $s^0$  au sommet-choix  $s^1$ . Chaque collecteur d'éléments  $\alpha^k$  pour  $1 \leq k \leq \kappa$  est un chemin orienté de transitions obligatoires composé de huit arcs distincts. Le chemin  $\alpha^k$  part du sommet-choix  $s^k$  vers un sommet-triplet  $c_{j,a}^k$  suivi par son premier sommet-élément  $x_a$ , alterne entre ses sommets-triplet et ses sommets-élément suivant le collecteur d'éléments  $\alpha_j^k$  jusqu'à atteindre le sommet-choix  $s^{k+1}$  (ou le sommet-cible  $s^{q+1}$  lorsque  $k = q$ ) :  $\alpha^k = \alpha_j^k = (s^k, c_{j,1}^k), (c_{j,1}^k, x_a), (x_a, c_{j,2}^k), (c_{j,2}^k, x_b), (x_b, c_{j,3}^k), (c_{j,3}^k, x_c), (x_c, c_{j,4}^k), (c_{j,4}^k, s^{k+1})$ , pour tout triplet  $c_j = \{x_a, x_b, x_c\} \in \mathcal{C}$ . Ainsi  $P = \Omega, \alpha^1, \dots, \alpha^\kappa$ .

Chaque collecteur d'éléments  $\alpha^k$  contient exactement trois sommets-élément parmi les  $3q$  existants. Toute diroute  $k$ -élémentaire ne peut utiliser que  $6qk + 2q + 1$  arcs.

**Théorème 12.** *Déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour le problème PCCKEO est un problème non-approximable pour tout ratio, sauf si  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ , même dans un digraphe de forte densité  $(1 - \frac{1}{|V|-1})$ .*

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soient  $(D, \Pi)$  le digraphe et les transitions obligatoires associées suivant la Construction 31 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \lambda)$ . Soient  $s^0$  le sommet-source,  $s^{q+1}$  le sommet-cible et  $w = 6qk + 2q + 1$ .

Le problème PCCKEO est clairement dans  $\mathcal{NP}$ . De plus, construire  $(D, \Pi)$  à partir de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est polynomial.

Supposons que  $P$  est une diroute  $k$ -élémentaire dans le digraphe  $D$  du sommet-source  $s^0$  au sommet-cible  $s^{q+1}$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi$ . Construisons une couverture exacte  $S$  de  $\mathcal{X}$  :

— Pour  $1 \leq k \leq q$ , si l'arc  $(s^k, c_{j,1}^k)$  est dans  $P$  alors nous ajoutons le triplet  $c_j$  dans  $S$ . La diroute  $P$  emprunte  $q$  collecteurs d'éléments (représentant chacun un triplet) passant par exactement  $3q$  sommets-élément différents. Les propriétés d'unicité et de totalité sont respectées par  $S$ . Ainsi,  $S$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$ .

Supposons qu'il existe une couverture exacte  $S$  pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$ . Construisons une diroute  $k$ -élémentaire  $P'$  dans le digraphe  $D$  du sommet-source  $s^0$  au sommet-cible  $s^{q+1}$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi$  :

- La diroute  $P'$  part du sommet-source  $s^0$  et suit les arcs du collecteur de postiches jusqu'au sommet-choix  $s^1$ .
- Soient  $c_1, \dots, c_q$  les triplets de  $S$ .
- Pour chaque triplet  $c_j = \{x_a, x_b, x_c\} \in S$  pour  $1 \leq j \leq q$ , nous ajoutons les arcs  $(s^j, c_{j,1}^j)$ ,  $(c_{j,1}^j, x_a)$ ,  $(x_a, c_{j,2}^j)$ ,  $(c_{j,2}^j, x_b)$ ,  $(x_b, c_{j,3}^j)$ ,  $(c_{j,3}^j, x_c)$ ,  $(x_c, c_{j,4}^j)$  et  $(c_{j,4}^j, s^{j+1})$  du collecteur d'éléments correspondant  $\alpha_j^j$ .

La diroute élémentaire  $P'$  contient exactement  $6qk + 2q + 1$  arcs, part du sommet-source  $s^0$ , termine sur le sommet-cible  $s^{q+1}$  et respecte les transitions obligatoires.  $P'$  est une solution pour le problème  $PCCKEO$ .

Ainsi, il existe une solution pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  si et seulement s'il existe, dans l'instance  $(D, \Pi)$  associée du problème  $PCCKEO$ , une diroute élémentaire de taille  $6qk + 2q + 1$ , commençant depuis le sommet-source  $s^0$ , terminant sur le sommet-cible  $s^{q+1}$  et respectant les transitions obligatoires.  $\square$

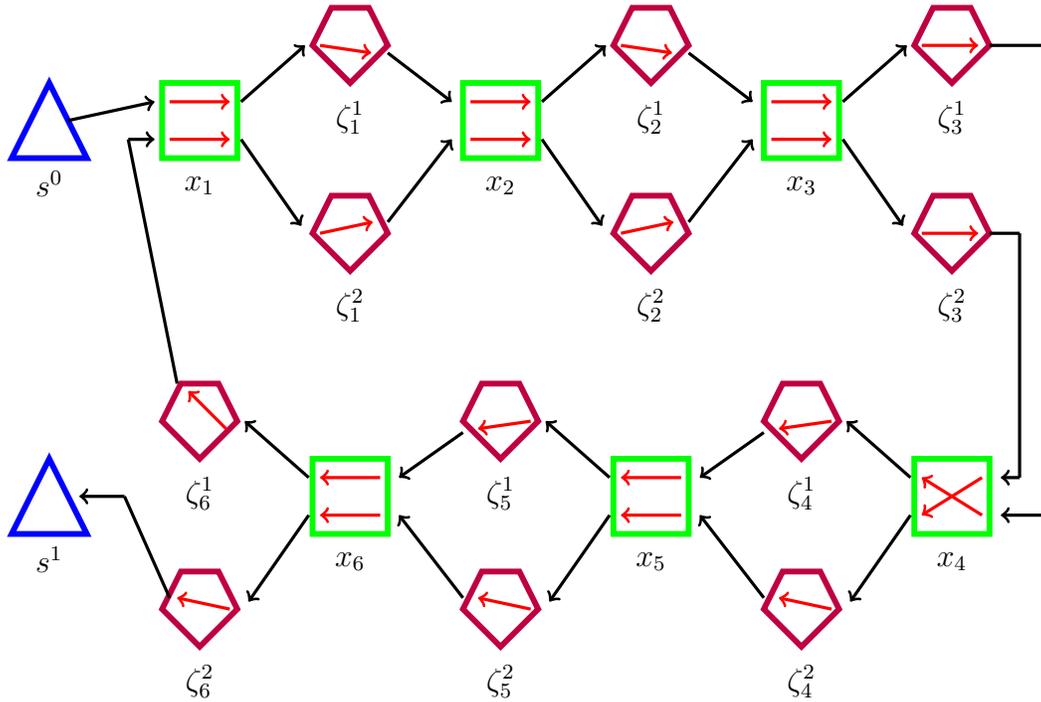


FIGURE 3.29 – Illustration de la Construction 31 pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$  et  $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$  avec  $k = 3$ .

Nous avons montré que trouver un Plus Court Chemin avec Transitions Obligatoires est un problème admettant une résolution en temps polynomial dans le cas général, mais est un problème difficile pour la recherche d'une diroute élémentaire, même pour des topologies de graphes très restreintes. Dans la prochaine section, nous nous penchons sur le problème de la tournée lorsque plusieurs sommets sont des cibles et non plus un seul.

### 3.3 Recherche d'une tournée

Dans cette section, nous étudions le problème de la Tournée avec Transitions Obligatoires selon les propriétés recherchées pour ladite tournée. Nous y présentons quatre résultats principaux :

1. La non-approximabilité du problème de la Tournée avec Transitions Obligatoires lorsque tous les sommets sont des cibles (Théorème 13).
2. La  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème de l'existence d'un Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires même dans un graphe complet (Théorème 14).
3. La  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème de l'existence d'un Cycle élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires de taille bornée même dans un graphe complet (Théorème 15).
4. L'impossibilité pour un algorithme de garantir trouver un Cycle élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires de taille strictement supérieure à trois même dans un graphe complet (Théorème 16).

**Carte 29. Le problème de la Tournée avec Transitions Obligatoires est  $\mathcal{NP}$ -complet (Théorèmes 13 et 15).**

**Points d'étape :**

1. Non-approximabilité, pour tout ratio, du problème de la Tournée avec Transitions Obligatoires lorsque tous les sommets sont des cibles même dans un digraphe complet symétrique (Construction 32 - Théorème 13).
2.  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème de l'existence d'un Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires même dans un graphe complet (Construction 33 - Théorème 14).
3.  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème de l'existence d'un Cycle élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires de taille bornée même dans un graphe complet (Construction 34 - Théorème 15).
4. Impossibilité pour un algorithme de garantir trouver un Cycle élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires de taille strictement supérieure à trois même dans un graphe complet (Construction 35 - Théorème 16).

Nous montrons en premier lieu que déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour le problème de la Tournée avec Transitions Obligatoires est un problème non-approximable pour tout ratio lorsque tous les sommets sont des cibles, même si le digraphe est complet symétrique. Nous nous réduisons à une version restreinte du problème de la Couverture Exacte par des triplets ( $RX3C$ ). Nous savons que dans toute solution pour une instance quelconque du problème  $RX3C$ , chaque élément ne peut être couvert que par un unique triplet (propriété d'unicité). Nous garantissons l'équivalent de cette propriété dans le digraphe en empêchant de choisir plus de triplets que le nombre nécessaire lorsque l'instance contient une solution. De même, chaque triplet doit couvrir ses trois éléments (propriété de totalité). Nous créons alors un collecteur d'élément pour

chaque triplet sous la forme d'une succession de transitions obligatoires. Toute diroute solution est contrainte de passer par les sommets-éléments associés aux sommets-triplets sélectionnés. Nous ajoutons finalement un collecteur de triplets et toutes les arêtes manquantes pour obtenir un digraphe complet symétrique dans lequel il est possible de passer par tous les sommets (Construction 32). Nous prouvons alors que déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour le problème de la Tournée avec Transitions Obligatoires est un problème non-approximable pour tout ratio lorsque tous les sommets sont des cibles, même dans un digraphe complet symétrique (Théorème 13).

Déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour le problème de la Tournée avec Transitions Obligatoires est un problème non-approximable pour la recherche d'une diroute élémentaire entre deux sommets, mais aussi pour la recherche d'une diroute passant par tous les sommets du graphe. Nous nous penchons alors sur le problème du Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires. Nous partons d'un graphe connexe  $k$ -régulier ( $k \geq 3$ ,  $k$  impair) contenant un nombre pair de sommets et ajoutons les arêtes manquantes en les interdisant à l'aide de cycles de transitions obligatoires (Construction 33). Nous montrons alors que déterminer l'existence d'un Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un graphe complet (Théorème 14).

Nous relâchons alors la contrainte de passer par tous les sommets du graphe pour nous pencher sur l'existence d'un cycle élémentaire. L'objectif est de trouver le plus grand ensemble de sommets admettant un cycle élémentaire respectant les transitions obligatoires. Nous procédons à une réduction à partir du problème du Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires dans les graphes complets en ajoutant un grand nombre de sommets contraints dans des cycles de transitions obligatoires (Construction 34). Nous montrons alors que déterminer l'existence d'un Cycle élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires de taille bornée est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un graphe complet (Théorème 15). Finalement, nous construisons une infinité de graphes complets dont le plus grand cycle élémentaire est petit (Construction 35). Nous montrons alors qu'aucun algorithme ne peut garantir trouver un Cycle élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires de taille strictement supérieure à trois (Théorème 16).

### 3.3.1 Non-approximabilité pour une tournée totale

**Carte 30.** Le problème *TTO* est non-approximable pour tout ratio même si le digraphe est complet symétrique (Théorème 13).

**Départ :** Le problème *PCCO* est non-approximable pour la recherche d'une diroute élémentaire (Construction 27).

**Points d'étape :**

1. Non-approximabilité dans un digraphe complet symétrique (Construction 32 - Théorème 13).

Nous étendons le résultat de non-approximabilité du problème de déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour le problème *PCCEO* (spécialisation du problème

*PCCO* pour la recherche d'une diroute élémentaire) au problème *TTO*, lorsque tous les sommets sont des cibles. Pour ce faire, nous complétons la construction 27 de telle sorte que chaque sommet apparaît dans une diroute si et seulement s'il existe une solution pour le problème *RX3C*. Nous créons ainsi un collecteur de triplets permettant d'atteindre tous les sommets-triplet précédemment ignorés. Toute solution est alors décomposable en  $q$  collecteurs d'éléments suivis par un collecteur de triplets. Nous ajoutons finalement les arcs manquants afin d'obtenir un digraphe complet symétrique (Construction 32). Nous concluons alors sur la non-approximabilité du problème de déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour le problème *TTO* (Théorème 13).

**Idée 32.** *Une diroute passant par tous les sommets.*

*Nous avons vu comment construire un digraphe avec des transitions obligatoires à partir d'une instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème *RX3C*. Les sommets-élément  $y$  sont considérés comme des cibles indirectes. Contrairement au problème *PCCO*, nous désignons cette fois l'ensemble des sommets du digraphe comme cibles. Nous réutilisons les collecteurs d'éléments pour conserver la véracité des propriétés d'unicité et de totalité, mais nous ajoutons également un collecteur de triplets permettant de passer par l'ensemble des sommets-triplet une fois tous les sommets-éléments traversés. Une fois ces collecteurs définis, nous ajoutons l'ensemble des arcs absents selon la méthode de la Construction 28 afin d'obtenir un digraphe complet symétrique.*

**Construction 32.** *Une diroute passant par tous les sommets.*

*Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème *RX3C* avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Nous construisons une instance  $(D = (V, A), \Pi)$  du problème *TTO* comme suit :*

- *Nous ajoutons les sommets-choix  $s^1, \dots, s^q$  ainsi que le sommet-intermédiaire  $s^{q+1}$ .*
- *Pour chaque élément  $x_i \in \mathcal{X}$ , nous ajoutons le sommet-élément  $x_i$ .*
- *Pour  $1 \leq l \leq q$  :*
  - *Pour chaque triplet  $c_j \in \mathcal{C}$  :*
    - *Nous ajoutons les sommets-triplet  $c_{j,1}^l, c_{j,2}^l, c_{j,3}^l$  et  $c_{j,4}^l$ .*
    - *Nous ajoutons les arcs  $(s^l, c_{j,1}^l)$  et  $(c_{j,4}^l, s^{l+1})$ .*
    - *Soient  $x_a, x_b, x_c \in \mathcal{X}$  les trois éléments du triplet  $c_j$ .*
    - *Nous ajoutons les arcs  $(c_{j,1}^l, x_a), (x_a, c_{j,2}^l), (c_{j,2}^l, x_b), (x_b, c_{j,3}^l), (c_{j,3}^l, x_c)$  et  $(x_c, c_{j,4}^l)$ .*
    - *Nous ajoutons le collecteur d'éléments  $\alpha_j^l$  (c'est-à-dire la succession de transitions obligatoires) de taille sept  $\langle s^l, c_{j,1}^l, x_a \rangle, \langle c_{j,1}^l, x_a, c_{j,2}^l \rangle, \langle x_a, c_{j,2}^l, x_b \rangle, \langle c_{j,2}^l, x_b, c_{j,3}^l \rangle, \langle x_b, c_{j,3}^l, x_c \rangle, \langle c_{j,3}^l, x_c, c_{j,4}^l \rangle$  et  $\langle x_c, c_{j,4}^l, s^{l+1} \rangle$ .*
- *Nous ajoutons le sommet final  $F$ .*
- *Nous ajoutons un collecteur de triplets sous la forme d'un circuit de transitions obligatoires commençant par le sommet-intermédiaire  $s^{q+1}$ , puis traversant dans l'ordre  $c_{j,1}^1, \dots, c_{j,1}^q, c_{j,2}^1, \dots, c_{j,2}^q, c_{j,3}^1, \dots, c_{j,3}^q, c_{j,4}^1, \dots, c_{j,4}^q$  et le sommet final  $F$ .*
- *Pour tous sommets  $u$  et  $v$  parmi  $s^1, \dots, s^{q+1}, F, x_1, \dots, x_{3q}, c_{j,1}^1, \dots, c_{j,1}^q, c_{j,2}^1, \dots, c_{j,2}^q, c_{j,3}^1, \dots, c_{j,3}^q, c_{j,4}^1, \dots, c_{j,4}^q$ , si l'arc  $(u, v)$  n'existe pas, nous ajoutons l'arc  $(u, v)$  ainsi que la transition obligatoire  $\langle u, v, u \rangle$ .*

L'instance  $(D, \Pi)$  contient  $12q^2 + 4q + 2$  sommets,  $144q^4 + 96q^3 + 52q^2 + 12q + 2$  arcs et  $144q^4 + 96q^3 + 49q^2 + 12q + 2$  transitions obligatoires.

Nous savons que seuls le sommet-source  $s^1$  et les  $q - 1$  sommets-choix  $s^2, \dots, s^q$  permettent de choisir librement un arc sortant. Ainsi, pour chaque sommet-élément et chaque sommet-triplet, seuls les arcs appartenant à un collecteur d'éléments ou à un collecteur de triplets peuvent être empruntés dans une diroute passant par tous les sommets. De même, tout arc depuis un sommet-choix vers un sommet quelconque n'appartenant pas à un collecteur d'éléments appartient à un circuit de transitions obligatoires ne permettant pas de passer par tous les sommets. Ainsi, ces arcs ne peuvent pas être empruntés.

Soit  $P$  une diroute dans le digraphe  $D$  partant du sommet-source  $s^1$ , passant par tous les sommets et respectant les transitions obligatoires  $\Pi$ . La diroute  $P$  peut être vue comme un ensemble de  $\kappa$  collecteurs d'éléments suivis par un collecteur de triplet (chaque collecteur est une succession de transitions obligatoires). Chaque collecteur d'éléments  $\alpha^k$  pour  $1 \leq k \leq \kappa$  est un chemin orienté de transitions obligatoires composé de huit arcs distincts. Le chemin  $\alpha^1$  part du sommet-source  $s^1$  vers un sommet-triplet  $c_{j,1}^1$  et suit le collecteur d'éléments associé  $\alpha_j^1$  jusqu'à atteindre le sommet-choix  $s^2$ . Le chemin  $\alpha^k$  ( $k \neq 1$ ) part du sommet-choix  $s^k$  vers un sommet-triplet  $c_{j,a}^k$  suivi par son premier sommet-élément  $x_a$ , alterne entre ses sommets-triplet et ses sommets-élément suivant le collecteur d'éléments  $\alpha_j^k$  jusqu'à atteindre le sommet-choix  $s^{k+1}$  (ou le sommet-intermédiaire  $s^{q+1}$  lorsque  $k = q$ ) :  $\alpha^k = \alpha_j^k = (s^k, c_{j,1}^k), (c_{j,1}^k, x_a), (x_a, c_{j,2}^k), (c_{j,2}^k, x_b), (x_b, c_{j,3}^k), (c_{j,3}^k, x_c), (x_c, c_{j,4}^k), (c_{j,4}^k, s^{k+1})$ , pour tout triplet  $c_j = \{x_a, x_b, x_c\} \in \mathcal{C}$ . Le collecteur de triplets  $\Omega$  part du sommet-intermédiaire  $s^{q+1}$  puis traverse dans l'ordre  $c_{j,1}^1, \dots, c_{j,1}^q, c_{j,2}^1, \dots, c_{j,2}^q, c_{j,3}^1, \dots, c_{j,3}^q, c_{j,4}^1, \dots, c_{j,4}^q$  et le sommet final  $F$ . Ainsi  $P = \alpha^1, \dots, \alpha^\kappa, \Omega$ . Chaque collecteur d'éléments  $\alpha^k$  contient exactement trois sommets-élément parmi les  $3q$  existants. Toute diroute ne peut utiliser moins de  $3q^2 + 8q + 1$  arcs.

**Théorème 13.** *Déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour le problème TTO est un problème non-approximable pour tout ratio, sauf si  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ , même dans un digraphe complet symétrique.*

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  une instance du problème  $RX3C$  avec  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  et  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{3q}\}$ . Soient  $(D, \Pi)$  le digraphe et les transitions obligatoires associées suivant la Construction 32 depuis  $(\mathcal{X}, \mathcal{C}, \lambda)$ . Soient  $s^1$  le sommet-source et  $w = 3q^2 + 8q + 1$ . Le problème TTO est clairement dans  $\mathcal{NP}$ . De plus, construire  $(D, \Pi)$  à partir de l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  est polynomial.

Supposons que  $P$  est une diroute dans le digraphe  $D$  partant du sommet-source  $s^1$ , passant par tous les sommets et respectant les transitions obligatoires  $\Pi$ . Construisons une couverture exacte  $S$  de  $\mathcal{X}$  :

— Pour  $1 \leq k \leq q$ , si l'arc  $(s^k, c_{j,1}^k)$  est dans  $P$  alors nous ajoutons le triplet  $c_j$  dans  $S$ . La diroute  $P$  emprunte  $q$  collecteurs d'éléments (représentant chacun un triplet) passant par exactement  $3q$  sommets-élément différents. Les propriétés d'unicité et de totalité sont respectées par  $S$ . Ainsi,  $S$  est une couverture exacte de  $\mathcal{X}$ .

Supposons qu'il existe une couverture exacte  $S$  pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$ . Construisons une diroute  $P'$  dans le digraphe  $D$  partant du sommet-source  $s^1$ , passant par tous les sommets et respectant les transitions obligatoires  $\Pi$  :

- La diroute  $P'$  part du sommet-source  $s^1$ .
- Soient  $c_1, \dots, c_q$  les triplets de  $S$ .
- Pour chaque triplet  $c_j = \{x_a, x_b, x_c\} \in S$  pour  $1 \leq j \leq q$ , nous ajoutons les arcs  $(s^j, c_{j,1}^j)$ ,  $(c_{j,1}^j, x_a)$ ,  $(x_a, c_{j,2}^j)$ ,  $(c_{j,2}^j, x_b)$ ,  $(x_b, c_{j,3}^j)$ ,  $(c_{j,3}^j, x_c)$ ,  $(x_c, c_{j,4}^j)$  et  $(c_{j,4}^j, s^{j+1})$  du collecteur d'éléments correspondant  $\alpha_j^j$ .
- Nous ajoutons un chemin partant du sommet-intermédiaire  $s^{q+1}$  puis passant dans l'ordre par les sommets  $c_{j,1}^1, \dots, c_{j,1}^q, c_{j,2}^1, \dots, c_{j,2}^q, c_{j,3}^1, \dots, c_{j,3}^q, c_{j,4}^1, \dots, c_{j,4}^q$  et terminant sur le sommet final  $F$ .

La diroute  $P'$  contient exactement  $3q^2 + 8q + 1$  arcs, part du sommet-source  $s^1$ , passe par tous les sommets et respecte les transitions obligatoires.  $P'$  est une solution pour le problème  $TTO$ .

Ainsi, il existe une solution pour l'instance  $(\mathcal{X}, \mathcal{C})$  du problème  $RX3C$  si et seulement s'il existe, dans l'instance  $(D, \Pi)$  associée du problème  $TTO$ , une diroute de taille  $3q^2 + 8q + 1$ , commençant depuis le sommet-source  $s^1$ , passant par tous les sommets et respectant les transitions obligatoires.  $\square$

### 3.3.2 $\mathcal{NP}$ -complétude pour la recherche d'un cycle Hamiltonien

**Carte 31.** Déterminer l'existence d'un Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet, même si le graphe est complet (Théorème 14).

**Départ :** Déterminer l'existence d'un cycle Hamiltonien est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un graphe connexe  $k$ -régulier ( $k \geq 3$ ,  $k$  impair) contenant un nombre pair de sommets [47].

**Points d'étape :**

1.  $\mathcal{NP}$ -complétude dans un graphe complet (Construction 33 - Théorème 14).

Une instance du problème de la recherche d'un cycle Hamiltonien est composée d'un graphe  $G = (V, E)$ . Une solution est une suite d'arêtes formant un cycle Hamiltonien. Nous nous réduisons à une version restreinte où  $|V|$  est un nombre pair et où  $G$  est un graphe connexe  $k$ -régulier pour  $k \geq 3$  avec  $k$  impair. Nous ajoutons les arêtes manquantes afin de former un graphe complet mais nous les interdisons à l'aide de transitions obligatoires (Construction 33). Nous concluons alors sur la  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème de la recherche d'un cycle Hamiltonien respectant les transitions obligatoires (Théorème 14).

**Idée 33.** *Un cycle passant par tous les sommets.*

Nous partons d'une instance  $G = (V, E)$  du problème de la recherche d'un cycle Hamiltonien où  $G$  est un graphe connexe  $k$ -régulier pour  $k \geq 3$  avec  $k$  impair. Pour obtenir un graphe complet, nous ajoutons toutes les arêtes manquantes. Ces nouvelles arêtes ne doivent appartenir à aucune solution. Ainsi, chaque solution pour une instance est aussi solution dans l'autre instance. Pour ce faire, nous recherchons un cycle Eulérien (qui existe toujours dans le sous-graphe induit par les nouvelles arêtes), et nous forçons tout parcours passant par ces nouvelles arêtes à le suivre. Un cycle Eulérien dans un graphe plus dense qu'un chemin ne peut pas être un cycle Hamiltonien. Notre graphe est alors un graphe complet, mais seules les arêtes initiales peuvent être utilisées dans une solution.

**Construction 33.** *Un cycle passant par tous les sommets.*

Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe  $k$ -régulier ( $k \geq 3$ ,  $k$  impair), avec  $|V| = n$  pair et  $n > k + 3$ . Nous construisons le graphe  $G' = (V, E')$  et ses transitions obligatoires  $\Pi$  comme suit :

- Pour chaque paire de sommet  $u, v \in V$ , nous ajoutons l'arête  $(uv)$  si et seulement si  $(uv) \notin E$ .
- Soient  $H_1, \dots, H_\kappa$  les composantes connexes du graphe  $G'$  tel que défini dans les étapes précédentes (chaque composante est  $k$ -régulière pour  $k$  pair).
- Soient  $C_1^E, \dots, C_\kappa^E$  des cycles Eulériens respectivement associés aux composantes  $H_1, \dots, H_\kappa$ .
- Pour  $1 \leq i \leq \kappa$  :
  - Soient  $(u_1u_2), (u_2u_3), (u_3u_4), \dots, (u_{l-1}u_l), (u_lu_1)$  les arêtes du cycle Eulérien  $C_i^E$ .
  - Nous ajoutons les transitions obligatoires  $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle, \langle u_2, u_3, u_4 \rangle, \dots, \langle u_{l-1}, u_l, u_1 \rangle, \langle u_l, u_1, u_2 \rangle$ .
- Pour chaque paire de sommet  $u, v \in V$ , nous ajoutons l'arête  $(uv)$  si et seulement si  $(uv) \in E$ .

Le nombre de sommets  $|V|$  est pair. Nous avons ajouté  $k' = |V| - k - 1$  (pair) nouvelles arêtes à chaque sommet. Ainsi, le graphe  $H = (V, E' \setminus E)$  admet toujours un cycle Eulérien pour chacune de ses composantes connexes. Un graphe 3-régulier est illustré dans la Figure 3.30. Les nouvelles arêtes suivant la Construction 33 ainsi que les transitions obligatoires associées sont illustrées dans la Figure 3.31.

**Théorème 14.** *Déterminer l'existence d'un cycle Hamiltonien respectant les transitions obligatoires associées est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet, même si le graphe est complet.*

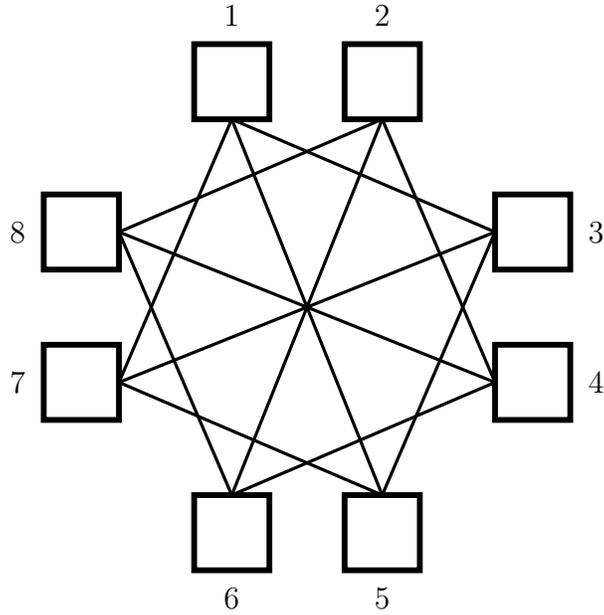


FIGURE 3.30 – Un graphe 3-régulier contenant 8 sommets.

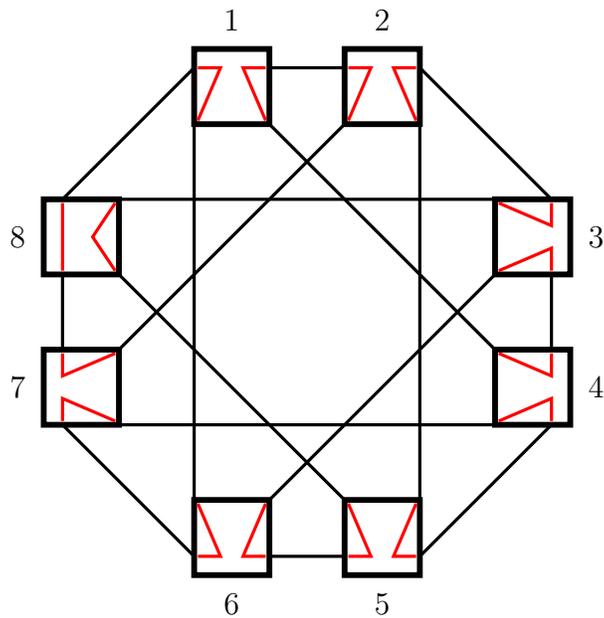


FIGURE 3.31 – Illustration des nouvelles arêtes et des transitions obligatoires suivant la Construction 33 depuis l'instance de la Figure 3.30.

*Démonstration.* Soit  $(G = (V, E))$  une instance du problème de la recherche d'un cycle Hamiltonien avec  $G$  un graphe connexe  $k$ -régulier ( $k \geq 3$ ,  $k$  impair),  $|V| = n$  pair et  $n > k + 3$ . Soient  $(G' = (V, E'), \Pi)$  le graphe et les transitions obligatoires associées suivant la Construction 33 depuis  $(G)$ .

Le problème de la recherche d'un Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires est clairement dans  $\mathcal{NP}$ . De plus, construire  $(G', \Pi)$  à partir de l'instance  $(G)$  est polynomial.

Supposons qu'il existe un cycle Hamiltonien  $S$  dans le graphe  $G$ . L'ensemble des arêtes utilisées dans  $S$  sont présentes dans le graphe  $G'$ . Il n'existe aucune transition obligatoire ayant pour arête de tête ou de queue l'une des arêtes de  $S$ . Ainsi,  $S$  est un cycle Hamiltonien de  $G'$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi$ .

Supposons qu'il existe un cycle Hamiltonien  $S$  dans  $G'$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi$ . Soient  $(v_1v_2), (v_2v_3), (v_3v_4), \dots, (v_{n-1}v_n), (v_nv_1)$  les arêtes du cycle Hamiltonien  $S$ , pour  $n = |V|$ . Supposons qu'il existe une arête  $(v_iv_{i+1})$  exclusive au graphe  $G'$  ( $(u_iu_{i+1}) \in E' \setminus E$ ) dans  $S$ . Soit  $C_j^E$  le cycle Eulérien auquel l'arête  $(u_iu_{i+1})$  est associée. Par construction, l'arête  $(u_iu_{i+1})$  appartient à un cycle de transitions obligatoires suivant exactement le cycle Eulérien  $C_j^E$ . Par conséquent, le cycle Hamiltonien  $S$  doit suivre le cycle Eulérien  $C_j^E$ , ce qui est une contradiction. Toutes les arêtes du cycle Hamiltonien  $S$  sont présentes dans le graphe  $G$ . Ainsi,  $S$  est un cycle Hamiltonien du graphe  $G$ .  $\square$

### 3.3.3 $\mathcal{NP}$ -complétude pour la recherche du plus grand cycle élémentaire

**Carte 32.** Déterminer l'existence d'un Cycle élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires de taille au moins  $\sqrt[n]{n} > 4$  est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet, même si le graphe est complet (Théorème 15).

**Départ :** Déterminer l'existence d'un Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un graphe complet (Théorème 14).

**Points d'étape :**

1.  $\mathcal{NP}$ -complétude dans un graphe complet (Construction 34 - Théorème 15).

Une instance du problème de la recherche d'un Cycle élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires, composée d'un graphe  $G = (V, E)$  et de transitions obligatoires  $\Pi$ , est associée à une mesure : le nombre de sommets (ou d'arêtes) dans le cycle. Une solution est une suite d'arêtes de taille  $k$  formant un cycle élémentaire dans le graphe  $G$  et respectant les transitions obligatoires  $\Pi$ . Nous nous réduisons au problème de la recherche d'un Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires dans un graphe complet. Nous ajoutons des paires de sommets formant un cycle de transitions obligatoires avec chacun des autres sommets (Construction 33). Nous concluons alors sur la  $\mathcal{NP}$ -complétude du problème de la recherche d'un cycle élémentaire maximum respectant les transitions obligatoires (Théorème 14).

**Idée 34.** *Un cycle passant par le plus grand nombre de sommets.*

*Nous avons vu que le problème de la recherche d'un cycle Hamiltonien avec des transitions obligatoires est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet dans les graphes complets. Nous nous réduisons à ce problème. À partir d'un graphe complet associé à certaines transitions obligatoires, nous ajoutons un nombre arbitrairement grand de couples de sommets  $(u, v)$  et des transitions*

obligatoires de telle sorte que tout parcours passant par l'un de ces sommets est piégé dans un cycle de transitions obligatoires entre les sommets  $u$  et  $v$ . Tout cycle passant par les nouveaux sommets est de taille au plus quatre. Ainsi, tout cycle Hamiltonien dans l'instance initiale existe dans la nouvelle instance et tout cycle élémentaire de taille supérieure à quatre dans la nouvelle instance existe dans l'instance initiale.

**Construction 34.** *Un cycle passant par le plus grand nombre de sommets.*

Soient  $G = (V, E)$  un graphe complet et  $\Pi$  ses transitions obligatoires. Nous construisons le graphe  $G' = (V', E')$  et ses transitions obligatoires  $\Pi'$  comme suit :

- Pour chaque sommet  $u \in V$ , nous ajoutons le sommet-commun  $u$ .
- Pour chaque arête  $(u, v) \in E$ , nous ajoutons l'arête  $(u, v)$ .
- Soit  $\Omega$  un grand nombre pair avec  $\Omega \gg |V|$ .
- Nous ajoutons  $\Omega$  sommets  $\omega_1^1, \dots, \omega_{\frac{\Omega}{2}}^1$  et  $\omega_1^2, \dots, \omega_{\frac{\Omega}{2}}^2$ .
- Pour chaque paire de sommet  $u, v \in V$ , nous ajoutons l'arête  $(uv)$  si et seulement si  $(uv) \notin E$ .
- Pour  $1 \leq i \leq \frac{\Omega}{2}$  :
  - Pour tout sommet  $u \in \{(V \cup \omega_1^1, \dots, \omega_{\frac{\Omega}{2}}^1, \omega_1^2, \dots, \omega_{\frac{\Omega}{2}}^2) \setminus \{\omega_i^1, \omega_i^2\}\}$ , nous ajoutons la transition obligatoire  $\langle \omega_i^1, u, \omega_i^2 \rangle$ .

Le graphe  $G'$  est un graphe complet contenant  $\Omega + |V|$  sommets. La paire de sommets  $\omega_1^1, \omega_1^2$  ainsi que trois sommets-commun quelconques sont illustrés dans la Figure 3.32. Nous pouvons voir que toute paire de sommets  $\omega$  apparaît dans un cycle élémentaire de taille quatre. Dans la Figure 3.32, la paire de sommets  $\omega_1^1, \omega_1^2$  apparaît par exemple dans le cycle de taille quatre  $\omega_1^1, u_1, \omega_1^2, u_2$ .

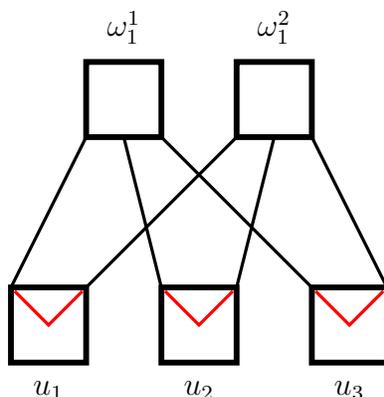


FIGURE 3.32 – Représentation d'une paire de nouveaux sommets suivant la Construction 34.

Avant de montrer que le problème de la recherche d'un cycle élémentaire avec transitions obligatoires est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet dans notre cas restreint, nous évaluons

la taille du plus grand cycle élémentaire respectant les transitions obligatoires dans l'instance  $(G', \Pi')$  pour une valeur particulière de  $\Omega$ . Soient  $n = |V|$  et  $x \in \mathcal{N}^+$  deux entiers. Soit  $\Omega = n^x - n$ . Le graphe  $G'$  contient  $n^x$  sommets. Aucun cycle élémentaire passant par une paire de sommets  $\omega$  ne peut avoir une taille supérieure à quatre. Si le graphe  $G$  contient un cycle Hamiltonien  $S$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi$ , alors  $S$  est le plus grand cycle élémentaire dans  $G'$ , de taille  $n$  et respectant les transitions obligatoires  $\Pi'$ . Ainsi l'instance  $(G', \Pi')$  contient un cycle élémentaire de taille  $\sqrt[x]{n}$  si et seulement si l'instance  $(G, \Pi)$  contient un cycle Hamiltonien.

**Théorème 15.** *Déterminer s'il existe un Cycle élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires de taille au moins  $\sqrt[x]{n} > 4$  ( $x \in \mathbf{N}^+$ ) est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet, même si le graphe est un graphe complet de taille  $n$ .*

*Démonstration.* Soit  $(G = (V, E), \Pi)$  une instance du problème de la recherche d'un Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires, avec  $G$  un graphe complet de taille  $n > 4$ . Soient  $(G' = (V', E'), \Pi)$  le graphe et les transitions obligatoires associées suivant la Construction 34 depuis  $(G, \Pi)$ .

Le problème de la recherche d'un Cycle élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires est clairement dans  $\mathcal{NP}$ . De plus, construire  $(G', \Pi')$  à partir de l'instance  $(G, \Pi)$  est polynomial.

Supposons qu'un cycle élémentaire contienne un sommet quelconque  $\omega_i^1$ . Soit  $u \neq \omega_i^2$  le deuxième sommet du cycle (si  $\omega_i^2$  est le sommet  $u$ , alors quelque soit le sommet suivant le cycle sera de taille au plus trois, une transition obligatoire forçant le retour au point de départ). En raison de la transition obligatoire  $\langle \omega_i^1, u, \omega_i^2 \rangle$ , le troisième sommet du cycle doit être le sommet  $\omega_i^2$ . Quelque soit le sommet  $v$  suivant, le cycle terminera sur  $\omega_i^1$  en raison de la transition obligatoire  $\langle \omega_i^2, v, \omega_i^1 \rangle$ . Le raisonnement est symétrique pour un sommet quelconque  $\omega_i^2$ . Ainsi, aucun cycle élémentaire de taille supérieure à quatre ne peut contenir un sommet  $\omega$ .

Supposons qu'il existe un cycle Hamiltonien  $S$  dans le graphe  $G$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi$ . L'ensemble des arêtes utilisées dans  $S$  sont présentes dans le graphe  $G'$ . Il n'existe aucune transition obligatoire ayant pour arête de tête et de queue l'une des arêtes de  $E' \setminus E$  dans  $\Pi' \setminus \Pi$ . Ainsi,  $S$  est un cycle élémentaire de taille  $n$  dans  $G'$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi'$ . Aucun sommet de  $V' \setminus V$  ne pouvant appartenir à un cycle élémentaire de taille supérieure,  $S$  est ainsi le plus grand cycle élémentaire dans  $G'$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi'$ .

Supposons qu'il existe un cycle élémentaire maximum  $S$  de taille  $|S|$  dans  $G'$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi'$ . Supposons que la taille du cycle élémentaire est strictement inférieure à  $n$ . Il n'existe aucun cycle élémentaire passant par les  $n$  sommets-commun. Ainsi, il n'existe aucun cycle Hamiltonien dans le graphe  $G$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi$ . Au contraire, supposons que la taille du cycle élémentaire est au moins égale à  $n$ . Aucun sommet de  $V' \setminus V$  ne peut appartenir à ce cycle élémentaire  $S$ . Tous les sommets de  $S$  sont des sommets-commun présents également dans le graphe  $G$ . Aucune transition obligatoire ayant pour arête de tête et de queue l'une des arêtes de  $E' \setminus E$

dans  $\Pi \setminus \Pi$  n'existe. Ainsi,  $S$  est un cycle Hamiltonien dans le graphe  $G$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi$ . Il existe un cycle élémentaire maximum de taille au moins  $n$  dans  $G'$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi'$  si et seulement s'il existe un cycle Hamiltonien dans le graphe  $G$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi$ .  $\square$

### 3.3.4 Limite structurelle dans les graphes complets pour la recherche du plus grand cycle élémentaire

**Carte 33.** Aucun algorithme ne peut garantir trouver un Cycle élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires de taille strictement supérieure à trois, même si le graphe est complet (Théorème 16).

**Départ :** Tout graphe complet de taille  $n$  admet une décomposition en cycles de taille  $k$  si et seulement si  $n$  est impair,  $3 \leq k \leq n$  et  $n(n-1) \equiv 0 \pmod{2k}$  [4, 49].

**Points d'étape :**

1. Inexistence d'un cycle élémentaire avec transitions obligatoires de taille strictement supérieure à trois dans une infinité de graphes complets (Construction 35 - Théorème 16).

Soient  $n$  et  $k$  deux entiers positifs. Tout graphe complet de taille  $n$  admet une décomposition en cycles de taille  $k$  si et seulement si  $n$  est impair,  $3 \leq k \leq n$  et  $n(n-1) \equiv 0 \pmod{2k}$ . Nous utilisons cette décomposition pour créer des cycles de transitions obligatoires de taille  $k$  (Construction 35). Nous concluons alors sur l'inexistence d'un cycle élémentaire avec transitions obligatoires de taille strictement supérieure à trois dans une infinité de graphes complets (Théorème 16).

**Idée 35.** Des graphes complets contenant seulement des petits cycles élémentaires.

Nous savons que tout graphe complet de taille  $n$  admet une décomposition en cycles de taille  $k$  si et seulement si  $n$  est impair,  $3 \leq k \leq n$  et  $n(n-1) \equiv 0 \pmod{2k}$ . Nous partons d'un graphe complet puis nous le décomposons en cycles de taille  $k$ . Nous créons ensuite, pour chacun de ces cycles, un cycle de transitions obligatoires. Ainsi, seuls ces cycles sont des cycles élémentaires respectant les transitions obligatoires.

**Construction 35.** Des graphes complets contenant seulement des petits cycles élémentaires.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe complet de taille impaire  $n$ . Soit  $3 \leq k \leq n$  un entier, avec  $n(n-1) \equiv 0 \pmod{2k}$ . Nous ajoutons au graphe  $G = (V, E)$  les transitions obligatoires  $\Pi$  définies comme suit :

- Soient  $C = \{C_1, \dots, C_\kappa\}$  les cycles du graphe  $G$  suivant sa décomposition en cycles de taille  $k$ .
- Pour chaque cycle  $C_i \in C$  :
  - Soient  $u_1, \dots, u_k$  les sommets du cycle  $C_i$ .

- Nous ajoutons le cycle de transitions obligatoires  $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle, \langle u_2, u_3, u_4 \rangle, \dots, \langle u_{k-2}, u_{k-1}, u_k \rangle, \langle u_{k-1}, u_k, u_1 \rangle$  et  $\langle u_k, u_1, u_2 \rangle$ .

La Construction 35 est illustrée dans la Figure 3.33.

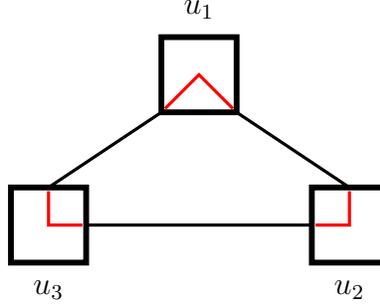


FIGURE 3.33 – Illustration de la Construction 35 pour  $n = k = 3$ .

**Théorème 16.** *Aucun algorithme ne peut garantir trouver un Cycle élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires de taille strictement supérieure à trois, même si le graphe est complet.*

*Démonstration.* Soit  $(G = (V, E))$  un graphe complet de taille impaire  $n$ . Soit  $3 \leq k \leq n$  un entier, avec  $n(n-1) \equiv 0 \pmod{2k}$ . Soient  $(G = (V, E), \Pi)$  le graphe et les transitions obligatoires associées suivant la Construction 35 depuis  $(G)$ .

Supposons qu'il existe un cycle élémentaire  $S$  dans le graphe  $G$  qui respecte les transitions obligatoires  $\Pi$ . Supposons que le cycle élémentaire  $S$  contient au moins  $k+1$  sommets. Soient  $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}$  les  $k+1$  premiers sommets de  $S$ . Par construction, nous savons qu'il existe un cycle de transitions obligatoires contenant exactement les sommets  $u_1, \dots, u_k$ . Ainsi, un tel cycle élémentaire ne peut exister. Aucun cycle élémentaire n'a une taille strictement supérieure à  $k$ . Au contraire,  $u_1, \dots, u_k$  est un cycle élémentaire de taille  $k$  dans le graphe  $G$  respectant les transitions obligatoires  $\Pi$ .

Prenons  $k = 3$ . Soient  $l$  un entier positif impair et  $n = 2kl$ . Nous avons bien  $n(n-1) = 2k \times 2l^2k - 2k \times l = 6 \times 6l^2 - 6 \times l$  qui est un multiple de  $2k (= 6)$ . Par construction, aucun cycle élémentaire de taille supérieure à trois ne peut exister.  $\square$

## 3.4 Conclusion du chapitre

La plupart des problèmes algorithmiques sont triviaux ou faciles à résoudre dans les chemins, les graphes de faible diamètre, ainsi que les graphes de forte ou faible densité. Bien que l'ajout de transitions obligatoires puisse conduire à la perte de solutions dans les problèmes de tournées, nous avons montré que les problèmes de la Tournée Multi-cibles avec Transitions Obligatoires (*TMO*), de la Tournée Totale avec Transitions Obligatoires (*TTO*), du Plus Court Chemin avec Transitions Obligatoires (*PCCO*), du Plus Court Chemin Élémentaire avec Transitions Obligatoires (*PCCEO*), du Plus Court Chemin  $k$ -Élémentaire avec Transitions Obligatoires (*PCCKEO*), du Circuit Eulérien avec Transitions Obligatoires (*CEO*), du Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires (*CHO*) et du Cycle Élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires (*CEMO*) admettent une résolution en temps polynomial pour certaines topologies de graphes. Il s'agit d'un chemin ou d'une étoile pour les problèmes *TMO* et *TTO* (Théorèmes 2 et 3), d'un graphe quelconque pour le problème *PCCO* (Théorème 7), d'un chemin ou d'un complet symétrique pour les problèmes *PCCEO* et *PCCKEO* (Théorème 4), d'un graphe quelconque pour le problème *CEO* (Théorème 5) et d'un graphe de faible densité pour les problèmes *CHO* et *CEMO* (Théorème 6). Nous avons également montré que le problème *TMO* admet une résolution en temps polynomial si le nombre de cibles est constant (Théorème 2).

Cependant, nous avons montré que déterminer l'existence d'une solution (de taille bornée ou non) pour les problèmes de la Tournée Multi-cibles avec Transitions Obligatoires (*TMO*), de la Tournée Totale avec Transitions Obligatoires (*TTO*), du Plus Court Chemin Élémentaire avec Transitions Obligatoires (*PCCEO*), du Plus Court Chemin  $k$ -Élémentaire avec Transitions Obligatoires (*PCCKEO*), du Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires (*CHO*) et du Cycle Élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires (*CEMO*) est un problème difficile ( $\mathcal{NP}$ -complet ou non-approximable) dans d'autres topologies de graphes très restreintes, comme les digraphes complets symétriques. Déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour les problèmes *TMO* et *TTO* est un problème non-approximable pour tout ratio même si le digraphe est complet symétrique (Théorème 13). Déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour le problème *PCCEO* est un problème non-approximable pour tout ratio, même si le graphe est de forte ou faible densité (Théorèmes 10 et 11). Déterminer l'existence d'une solution de taille bornée pour le problème *PCCKEO* est un problème non-approximable pour tout ratio, même si le graphe a une forte densité (Théorème 12). Déterminer l'existence d'un *CHO* est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un graphe complet (Théorème 14). Enfin, déterminer l'existence d'un *CEMO* de taille bornée est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un graphe complet (Théorème 15) et aucun algorithme ne peut garantir trouver un *CEMO* de taille strictement supérieure à trois même dans un graphe complet (Théorème 16).

Les problèmes de la Tournée Multi-cibles avec Transitions Obligatoires (*TMO*), de la Tournée Totale avec Transitions Obligatoires (*TTO*), du Plus Court Chemin Élémentaire avec Transitions Obligatoires (*PCCEO*), du Plus Court Chemin  $k$ -Élémentaire avec Transitions Obligatoires (*PCCKEO*), du Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires

(*CHO*) et du Cycle Élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires (*CEMO*) sont des problèmes difficiles. Cependant, il reste des zones inconnues à étudier autour de ces problèmes de tournées et des transitions obligatoires en général. Nous avons abordé ces problèmes de tournées sous l'angle de la densité du graphe (par exemple faible densité, forte densité ou complet), mais ils peuvent également être abordés en fonction du degré des sommets, du diamètre du graphe ou de la répartition des arcs entrants et sortants. Déterminer l'existence d'une solution (de taille bornée ou non) à ces problèmes de tournées est-ce un problème  $\mathcal{NP}$ -complet ou non-approximable pour la recherche d'une solution dans un graphe de faible degré ou de grand diamètre ou pour une répartition donnée des arcs entrants et sortants ?

Il est également possible de se pencher sur des garanties minimales d'existence d'une solution. Existe-t-il des propriétés nécessaires ou suffisantes pour garantir l'existence d'une solution, ou une taille de solution bornée, dans des cas restreints ?

L'étude du rôle des transitions obligatoires dans la complexité des problèmes de tournées peut être approfondie. Si les transitions obligatoires sont définies non plus à deux arcs, mais à trois arcs telles que le troisième arc doit obligatoirement être parcouru si les deux premiers viennent d'être traversés, est-ce un problème  $\mathcal{NP}$ -complet ou non-approximable de déterminer l'existence d'une solution (de taille bornée ou non) à ces problèmes de tournées ?

De même, est-ce un problème  $\mathcal{NP}$ -complet ou non-approximable de déterminer l'existence d'une solution (de taille bornée ou non) à ces problèmes de tournées lorsque nous relâchons partiellement la contrainte des transitions obligatoires ? Une transition obligatoire ne contraint plus au choix d'un unique arc-queue, mais laisse choisir l'arc suivant du parcours entre plusieurs arcs-queue.

Enfin, il est possible d'étudier le lien entre les sommets-centre dans les transitions obligatoires et la complexité sous-jacente du problème. Les graphes associés à des transitions obligatoires peuvent par exemple être modifiés pour assimiler directement les transitions obligatoires à des arcs dès lors qu'aucune cible n'est sommet-centre d'une transition obligatoire.



# Chapitre 4

## Conclusion générale

Nous avons, dans un premier temps, défini des obligations sur les sommets telles que chaque sommet appartient à exactement une obligation. En les associant à une instance de l'Indépendant Dominant, les sommets ne sont plus traités séparément. Pour chaque obligation, soit tous ses sommets appartiennent à une solution soit aucun. Nous savons, par une étude pré-existante, que le problème de déterminer l'existence d'un Indépendant Dominant avec Obligations (*IDO*) était un problème  $\mathcal{NP}$ -complet pour un ensemble d'obligations non stables. Pour enrichir ce fait, nous nous sommes penchés sur la recherche d'un sous-ensemble indépendant dominant tous les sommets d'un graphe associé uniquement à des obligations stables et équilibrées. Nous avons alors montré que le problème de déterminer l'existence d'un indépendant dominant respectant les obligations associées est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet pour des obligations stables et 2-équilibrées et ce, même dans une collection de chemins disjoints (Théorème 4). Pour raffiner ce résultat, nous pouvons élargir la taille des obligations afin de montrer que leur taille ne joue pas un rôle dans la complexité du problème, ou étudier le problème dans une topologie de graphes plus restrictives. Nous montrons alors que le problème de déterminer l'existence d'un indépendant dominant respectant les obligations associées est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet pour des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (pour tout  $\lambda \geq 2$ ) et ce, même dans une collection de chemins disjoints (Théorème 5) mais aussi pour des obligations stables et  $\lambda$ -équilibrées (pour tout  $\lambda \geq 2$ ) et ce, même dans un chemin (Théorème 6). Nous savons que le problème *IDO* est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet même pour des topologies de graphes très restrictives, notamment dans un graphe de degré maximum de deux et de diamètre élevé. Pour raffiner une fois de plus notre connaissance de la complexité du problème à la recherche de cas admettant une résolution en temps polynomial, nous pouvons alors nous pencher sur diverses topologies de graphes ou sur diverses proportions des obligations. Nous avons alors montré que le problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations admet une résolution en temps polynomial pour un indépendant, une étoile, un graphe de diamètre un et pour un couplage avec des obligations 2-équilibrées (Théorèmes 1 et 2) ou simplement pour un nombre constant d'obligations (Théorème 3), notamment dans le cas où les obligations sont 1-équilibrées (il s'agit alors du problème de l'Indépendant Dominant classique, il existe toujours une solution). Cependant, nous avons montré que le problème de déterminer l'existence d'un Indépendant Dominant avec Obligations est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet dans d'autres topologies de graphes très restreintes, notamment les cycles, les graphes de forte densité, les graphes de faible densité et les graphes de diamètre deux (Théorèmes 7, 8 et 9). Ainsi le problème *IDO* est un problème particulièrement difficile. Il admet une résolution en temps polynomial dans des graphes de diamètre un ou avec

des obligations 1-équilibrées, mais déterminer l'existence d'une solution est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet dans les graphes de diamètre deux ou avec des obligations 2-équilibrées.

La contrainte que nous avons ajoutée au problème de l'Indépendant Dominant réside dans les obligations. Nous nous sommes alors penchés sur la complexité du problème en fonction du nombre d'obligations et de la répartition de leur taille dans le cadre d'obligations non équilibrées, et ce pour les différentes topologies de graphes pour lesquelles le problème est  $\mathcal{NP}$ -complet. Nous avons montré que déterminer l'existence d'une solution pour le problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet pour un nombre quelconque d'obligations équilibrées, ainsi que pour une répartition de leur taille dans des chemins, des graphes de forte densité, des graphes de faible densité, des graphes de diamètre deux (Théorèmes 10, 11, 12, 13, 14 et 15).

Le problème de l'Indépendant Dominant avec Obligations est difficile pour des topologies de graphes très restreintes et pour différentes propriétés sur les obligations. Le problème étant un problème d'existence de solution, il n'est pas possible de tenter de l'approximer. Nous avons alors relâché la contrainte de domination de l'ensemble des sommets. La question n'est plus de dominer tous les sommets, mais d'en dominer au moins un certain nombre. Nous avons montré que le problème de l'Indépendant Partiellement Dominant avec Obligations (*IPDO*) admet une résolution en temps polynomial permettant de dominer  $2\sqrt{|V|} - 1$  sommets à condition que les obligations soient stables (Théorème 17). Cependant, nous avons également montré que déterminer l'existence d'une solution pour le problème de l'Indépendant Partiellement Dominant avec Obligations est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet pour  $3\sqrt{|V|} - 2$  sommets à dominer, ainsi que pour  $|V| - \lambda^2 + \lambda$  sommets à dominer dans une collection de chemins ou un unique chemin avec des obligations  $\lambda$ -équilibrées (pour tout  $\lambda \geq 2$ ) et stables (Théorèmes 16, 18 et 19).

Les problèmes de l'Indépendant Dominant avec Obligations (*IDO*) et de l'Indépendant Partiellement Dominant avec Obligations (*IPDO*) sont tous deux des problèmes difficiles. Cependant, il reste des zones inconnues à étudier autour de ces problèmes et des obligations en général. Nous avons laissé de côté les problèmes du Dominant avec Obligations et de l'Indépendant avec Obligations car une solution existe toujours. Bien qu'il n'y ait pas de questions d'existence, il demeure une question d'optimalité. Nous savons que le problème de la minimisation de la taille du dominant respectant les obligations est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet, mais la question reste ouverte pour de nombreuses topologies de graphe.

Le problème *IDO* est difficile pour des obligations stables et équilibrées. Nous avons exclu les obligations non stables car elles peuvent interdire aisément l'existence de toute solution. Nos résultats peuvent s'étendre aux cas avec des obligations non stables en ajoutant simplement une deuxième composante connexe, sous la forme d'un sommet universel sur les sommets d'obligations non stables. Cependant une question persiste. Un seuil ou des propriétés sur les obligations non stables existent-elles pour garantir l'existence ou la non-existence d'une solution ?

Nous avons montré que le problème *IDO* admet une résolution en temps polynomial pour les étoiles (graphes de diamètre deux) et les graphes de diamètre un, mais déterminer l'existence d'une solution est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet pour les graphes de diamètres

deux, admet une résolution en temps polynomial pour les graphes de densité un et zéro, mais déterminer l'existence d'une solution est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet pour les graphes de forte et de faible densité. En parallèle, nous avons montré que le problème *IDO* admet une résolution en temps polynomial pour les couplages avec des obligations 2-équilibrées, mais nous n'avons pas de résultat pour des couplages avec des obligations 3-équilibrées ou quelconques. Le problème *IDO* est-il polynomial ou  $\mathcal{NP}$ -complet pour ces couplages ? Nous avons montré que le problème *IPDO* admet une résolution en temps polynomial permettant de dominer  $2\sqrt{|V|} - 1$  sommets à condition que les obligations soient stables mais déterminer l'existence d'une solution est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet pour  $3\sqrt{|V|} - 2$  sommets à dominer. La question du nombre de sommets dominables reste ouverte. Dominer entre  $2\sqrt{|V|}$  et  $3\sqrt{|V|} - 3$  sommets est-il un problème polynomial ou  $\mathcal{NP}$ -complet ? Une question similaire demeure. Qu'en est-il si nous maintenons la contrainte de domination, mais relâchons partiellement la contrainte sur les obligations ? Est-il polynomial ou  $\mathcal{NP}$ -complet de déterminer l'existence d'un Indépendant Dominant  $S$  tel que pour chaque obligation soit aucun sommet n'appartient à  $S$  soit au moins un certain nombre (selon un seuil minimal) ? Pour quelles topologies de graphe et quelles propriétés sur les obligations ?

Enfin, nous avons montré que lorsque le nombre d'obligations est constant, il existe un algorithme polynomial en la taille de l'instance pour le problème *IDO*. Cela ouvre la voie à la conception d'algorithmes FPT. Quels sont les paramètres que l'on peut considérer ? Quels sont les meilleurs algorithmes FPT que l'on peut concevoir ?

Il existe également de nombreuses applications pour les problèmes de domination (notamment dans les réseaux de communication, dans les réseaux électriques, dans le positionnement d'appareils de surveillance ou encore dans les réseaux sociaux), ainsi que de nombreuses variantes soumises à des contraintes additionnelles (notamment les problèmes du Dominant Total, du Dominant avec Propagation, du  $k$ -Dominant, du Dominant par Paire ou encore du Dominant pondéré). Il est alors possible de combiner ces différentes contraintes afin de raffiner les résultats. Les problèmes du Dominant Total avec Obligations, du Dominant avec Propagation et Obligations, du  $k$ -Dominant avec Obligations, du Dominant par Paire avec Obligations ou encore du Dominant pondéré avec Obligations sont-ils des problèmes polynomiaux ou  $\mathcal{NP}$ -complets ? De même, des propriétés sur les obligations, issues des domaines d'application, existent-elles afin de mieux représenter les problèmes ou pour améliorer les algorithmes de résolution existants ?

Afin d'élargir notre compréhension des obligations, nous avons dans un second temps défini des transitions obligatoires sur les arêtes et les arcs telles que le choix d'un arête ou d'un arc dans un parcours dépende du choix précédent. Nous avons alors montré que l'ajout de transitions obligatoires entraîne la perte de solutions dans les problèmes de tournées, c'est-à-dire que ces problèmes ne peuvent être résolus par des algorithmes existants pour leurs versions sans transitions obligatoires. Il est alors devenu nécessaire de raffiner ce fait en étudiant la complexité des problèmes de tournées avec obligations. Nous avons choisi de nous concentrer sur un sous-ensemble de problèmes particulièrement étudiés (la recherche d'une route et la recherche d'un cycle) et ce, avec un type de contrainte additionnelle classique (chaque arc, arête ou sommet ne peut être parcouru qu'au plus

une fois). Nous avons montré que les problèmes de la Tournée Multi-cibles avec Transitions Obligatoires (*TMO*), de la Tournée Totale avec Transitions Obligatoires (*TTO*), du Plus Court Chemin Élémentaire avec Transitions Obligatoires (*PCCEO*), du Plus Court Chemin  $k$ -Élémentaire avec Transitions Obligatoires (*PCKKEO*), du Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires (*CHO*) et du Cycle Élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires (*CEMO*) sont difficiles ( $\mathcal{NP}$ -complets ou non-approximables) dans des topologies de graphes très restreintes, comme les digraphes complets symétriques. Les problèmes *TMO* et *TTO* sont non-approximables pour tout ratio même si le digraphe est complet symétrique (Théorème 13). Le problème *PCCEO* est non-approximable pour tout ratio, même si le graphe est dense ou peu dense (Théorèmes 10 et 11). Le problème *PCKKEO* est non-approximable pour tout ratio, même si le graphe est dense (Théorème 12). Déterminer l'existence d'un *CHO* est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un graphe complet (Théorème 14). Enfin, déterminer l'existence d'un *CEMO* de taille bornée est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet même dans un graphe complet (Théorème 15) et aucun algorithme ne peut garantir trouver un *CEMO* de taille strictement supérieure à trois même dans un graphe complet (Théorème 16). Pour raffiner une fois de plus notre connaissance de la complexité des problèmes de tournées à la recherche de cas admettant une résolution en temps polynomial, nous nous penchons alors sur diverses topologies de graphes.

Nous avons montré que les problèmes de la Tournée Multi-cibles avec Transitions Obligatoires (*TMO*), de la Tournée Totale avec Transitions Obligatoires (*TTO*), du Plus Court Chemin avec Transitions Obligatoires (*PCCO*), du Plus Court Chemin Élémentaire avec Transitions Obligatoires (*PCCEO*), du Plus Court Chemin  $k$ -Élémentaire avec Transitions Obligatoires (*PCKKEO*), du Circuit Eulérien avec Transitions Obligatoires (*CEO*), du Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires (*CHO*) et du Cycle Élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires (*CEMO*) admettent une résolution en temps polynomial pour certaines topologies de graphes. Il s'agit d'un chemin ou d'une étoile pour les problèmes *TMO* et *TTO* (Théorèmes 2 et 3), d'un graphe quelconque pour le problème *PCCO* (Théorème 7), d'un chemin ou d'un complet symétrique pour les problèmes *PCCEO* et *PCKKEO* (Théorème 4), d'un graphe quelconque pour le problème *CEO* (Théorème 5) et d'un graphe peu dense pour les problèmes *CHO* et *CEMO* (Théorème 6). Nous avons également montré que le problème *TMO* admet une résolution en temps polynomial si le nombre de cibles est constant (Théorème 2).

Les problèmes de la Tournée Multi-cibles avec Transitions Obligatoires (*TMO*), de la Tournée Totale avec Transitions Obligatoires (*TTO*), du Plus Court Chemin Élémentaire avec Transitions Obligatoires (*PCCEO*), du Plus Court Chemin  $k$ -Élémentaire avec Transitions Obligatoires (*PCKKEO*), du Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires (*CHO*) et du Cycle Élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires (*CEMO*) sont des problèmes difficiles. Cependant, il reste des zones inconnues à étudier autour de ces problèmes de tournées et des transitions obligatoires en général. Nous avons abordé ces problèmes de tournées sous l'angle de la densité du graphe (par exemple peu dense, dense ou complet), mais ils peuvent également être abordés en fonction du degré des sommets, du diamètre du graphe ou de la répartition des arcs entrants et sortants. Ces problèmes de tournées sont-ils  $\mathcal{NP}$ -complets ou non-approximables pour la recherche d'une solution

dans un graphe de faible degré ou de grand diamètre ou pour une concentration donnée des arcs entrants et sortants ?

Il est également possible de se pencher sur des garanties minimales d'existence d'une solution. Existe-t-il des propriétés nécessaires ou suffisantes pour garantir l'existence d'une solution, ou une taille de solution bornée dans des cas restreints ?

L'étude du rôle des transitions obligatoires dans la complexité des problèmes de tournée peut être approfondie. Si les transitions obligatoires sont définies non plus à deux arcs, mais à trois arcs telles que le troisième arc doit obligatoirement être parcouru si les deux premiers viennent d'être traversés, les problèmes de tournées sont-ils  $\mathcal{NP}$ -complets ou non-approximables ?

De même, les problèmes de tournées sont-ils  $\mathcal{NP}$ -complets ou non-approximables lorsque nous relâchons partiellement la contrainte des transitions obligatoires ? Une transition obligatoire ne contraint plus au choix d'un unique arc-queue, mais laisse choisir l'arc suivant du parcours entre plusieurs arcs-queue.

Il est aussi possible d'étudier le lien entre les sommets-centre dans les transitions obligatoires et la complexité sous-jacente du problème. Les graphes associés à des transitions obligatoires peuvent par exemple être modifiés pour assimiler directement les transitions obligatoires à des arcs dès lors qu'aucune cible n'est sommet-centre d'une transition obligatoire.

Finalement, nous nous sommes concentrés sur des transitions obligatoires définies localement. Le choix d'un arc ou d'une arête dans un parcours dépendant directement du choix précédent. Mais il est possible d'adopter une autre définition, plus globale, des transitions obligatoires. Un choix dans un parcours peut dépendre d'un autre choix effectué précédemment. Les transitions obligatoires peuvent également être définies non plus en terme de succession de liens mais en terme de présence dans une solution. Les arcs ou arêtes d'une transition obligatoire ne doivent alors plus se suivre les uns les autres, mais appartenir au parcours, quel que soit leur ordre de passage et leur positionnement dans ce parcours. Les questions de l'existence d'une solution et la recherche d'une solution optimale se posent ainsi de nouveaux pour l'ensemble des problèmes de tournées. Les problèmes de la Tournée Multi-cibles avec Transitions Obligatoires (*TMO*), de la Tournée Totale avec Transitions Obligatoires (*TTO*), du Plus Court Chemin avec Transitions Obligatoires (*PCCO*), du Plus Court Chemin Élémentaire avec Transitions Obligatoires (*PCCEO*), du Plus Court Chemin  $k$ -Élémentaire avec Transitions Obligatoires (*PCKEO*), du Circuit Eulérien avec Transitions Obligatoires (*CEO*), du Cycle Hamiltonien avec Transitions Obligatoires (*CHO*) et du Cycle Élémentaire Maximum avec Transitions Obligatoires (*CEMO*) sont-ils des problèmes polynomiaux ou  $\mathcal{NP}$ -complets avec cette nouvelle définition des transitions obligatoires ?

Il existe également de nombreuses applications pour les problèmes de tournées (notamment dans le transport d'enfants, dans la planification de la main-d'oeuvre, dans le transport de patients à l'hôpital ou encore dans la gestion d'une flotte en temps réel), ainsi que de nombreuses variantes soumises à des contraintes additionnelles (notamment les problèmes de la Tournée à Distance Contrainte, de la Tournée avec Flotte Hétérogène, de la Tournée avec Dépôts Multiples ou encore de la Tournée avec Fenêtres Temporelles). Il est alors possible de combiner ces différentes contraintes avec les transitions obligatoires afin

de raffiner les résultats. Les problèmes de la Tournée à Distance Contrainte avec Transitions Obligatoires, de la Tournée avec Flotte Hétérogène et Transitions Obligatoires, de la Tournée avec Dépôts Multiples Transitions Obligatoires ou encore de la Tournée avec Fenêtres Temporelles Transitions Obligatoires sont-ils des problèmes polynomiaux ou  $\mathcal{NP}$ -complets? De même, des propriétés sur les transitions obligatoires, issues des domaines d'application, existent-elles afin de mieux représenter les problèmes ou pour améliorer les algorithmes de résolution existants?

Finalement, la question des obligations peut se poser sur d'autres problèmes algorithmiques, en dehors des problèmes de domination et de tournées. Bien que des problèmes comme le Vertex Cover, l'Arbre couvrant ou le Couplage ont été abordés avec l'introduction d'obligations et nécessitent encore des raffinements pour appréhender pleinement leur complexité, d'autres problèmes peuvent voir l'ajout d'obligations. En théorie des jeux, des obligations peuvent s'ajouter à la définition des stratégies mixtes afin de les faire dépendre d'un choix précédent. En compression d'images, des pixels peuvent être liés entre eux par des obligations afin de leur réserver arbitrairement une compression commune. En partitionnement, des sommets peuvent devoir appartenir à un même *cluster* malgré leur différence ou des arêtes peuvent devoir appartenir à une même coupe.



# Bibliographie

- [1] Ashkan AAZAMI et Kael STILP. « Approximation Algorithms and Hardness for Domination with Propagation ». In : *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 23.3 (2009), p. 1382-1399. DOI : 10.1137/06066672X.
- [2] A. AKBARI, S. AKBARI, A. DOOSTHOSSEINI, Z. HADIZADEH, Michael A. HENNING et A. NARAGHI. *Independent Domination in Subcubic Graphs*. 2020. arXiv : 2001.02946 [cs.DM].
- [3] J. ALBER, H. L. BODLAENDER, H. FERNAU, T. KLOKS et R. NIEDERMEIER. « Fixed parameter algorithms for DOMINATING SET and related problems on planar graphs ». In : *Algorithmica* 33.4 (2002), p. 461-493. ISSN : 0178-4617. DOI : 10.1007/s00453-001-0116-5.
- [4] Brian ALSPACH et Heather GAVLAS. « Cycle Decompositions of  $K_n$  and  $K_n - I$  ». In : *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 81.1 (2001), p. 77-99. ISSN : 0095-8956. DOI : <https://doi.org/10.1006/jctb.2000.1996>.
- [5] Andrea ATTANASIO, Jay BREGMAN, Gianpaolo GHIANI et Emanuele MANNI. « Real-time fleet management at Ecourier Ltd ». In : *Dynamic Fleet Management : Concepts, Systems, Algorithms & Case Studies* (2007), p. 219-238.
- [6] Xin BAI, Danning ZHAO, Sen BAI, Qiang WANG, Weilue LI et Dongmei MU. « Minimum connected dominating sets in heterogeneous 3D wireless ad hoc networks ». In : *Ad Hoc Networks* 97 (2020), p. 102023.
- [7] Roberto BALDACCI, Maria BATTARRA et Daniele VIGO. « Routing a Heterogeneous Fleet of Vehicles ». In : *The Vehicle Routing Problem : Latest Advances and New Challenges*. Sous la dir. de Bruce GOLDEN, S. RAGHAVAN et Edward WASIL. Boston, MA : Springer US, 2008, p. 3-27. ISBN : 978-0-387-77778-8. DOI : 10.1007/978-0-387-77778-8\_1.
- [8] Alexandre BEAUDRY, Gilbert LAPORTE, Teresa MELO et Stefan NICKEL. « Dynamic transportation of patients in hospitals ». In : *OR spectrum* 32 (2010), p. 77-107.
- [9] Claude BERGE. *Théorie des graphes et ses applications*. Collection universitaire de Mathématiques, Dunod, 1958.
- [10] Yossi BORENSTEIN, Nazaraf SHAH, Edward TSANG, Raphael DORNE, Abdullah ALSHEDDY et Christos VOUDOURIS. « On the partitioning of dynamic workforce scheduling problems ». In : *Journal of Scheduling* 13 (2010), p. 411-425.
- [11] Elfe BULUC, Meltem PEKER, Bahar Y KARA et Manoj DORA. « Covering vehicle routing problem : application for mobile child friendly spaces for refugees ». In : *OR Spectrum* (2022), p. 1-24.

- [12] Miroslav CHLEBÍK et Janka CHLEBÍKOVÁ. « Approximation Hardness of Dominating Set Problems ». In : *Algorithms – ESA 2004*. Sous la dir. de Susanne ALBERS et Tomasz RADZIK. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2004, p. 192-203.
- [13] Thomas H. CORMEN, Charles E. LEISERSON, Ronald L. RIVEST et Clifford STEIN. *Introduction to Algorithms, Third Edition*. 3rd. The MIT Press, 2009. ISBN : 0262033844.
- [14] Alexis CORNET. « Algorithmes et résultats de complexité pour des problèmes de graphes avec contraintes additionnelles ». Theses. Université Clermont Auvergne [2017-2020], déc. 2018.
- [15] Alexis CORNET et Christian LAFOREST. « Domination problems with no conflicts ». In : *Discret. Appl. Math.* 244 (2018), p. 78-88.
- [16] Alexis CORNET et Christian LAFOREST. « Graph Problems with Obligations ». In : *Combinatorial Optimization and Applications*. Sous la dir. de Donghyun KIM, R. N. UMA et Alexander ZELIKOVSKY. T. (LNCS) 11346. Cham : Springer International Publishing, 2018, p. 183-197.
- [17] Alexis CORNET et Christian LAFOREST. « Total Domination, Connected Vertex Cover and Steiner Tree with Conflicts ». In : *Discret. Math. Theor. Comput. Sci.* 19.3 (2017).
- [18] George B DANTZIG et John H RAMSER. « The truck dispatching problem ». In : *Management science* 6.1 (1959), p. 80-91.
- [19] Guy DESAULNIERS, Oli B.G. MADSEN et Stefan ROPKE. « Chapter 5 : The Vehicle Routing Problem with Time Windows ». In : *Vehicle Routing*, p. 119-159. DOI : 10.1137/1.9781611973594.ch5. URL : <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611973594.ch5>.
- [20] Wyatt J. DESORMEAUX, Teresa W. HAYNES et Michael A. HENNING. « Paired Domination in Graphs ». In : *Topics in Domination in Graphs*. Sous la dir. de Teresa W. HAYNES, Stephen T. HEDETNIEMI et Michael A. HENNING. Cham : Springer International Publishing, 2020, p. 31-77. ISBN : 978-3-030-51117-3. DOI : 10.1007/978-3-030-51117-3\_3.
- [21] Merrill M FLOOD. « The traveling-salesman problem ». In : *Operations research* 4.1 (1956), p. 61-75.
- [22] H.N. GABOW, S.N. MAHESHWARI et L.J. OSTERWEIL. « On Two Problems in the Generation of Program Test Paths ». In : *IEEE Transactions on Software Engineering* SE-2.3 (1976), p. 227-231. DOI : 10.1109/TSE.1976.233819.
- [23] Michael R. GAREY et David S. JOHNSON. *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*. New York, NY, USA : W. H. Freeman & Co., 1979.
- [24] Wayne GODDARD et Michael A. HENNING. « Independent domination in graphs : A survey and recent results ». In : *Discrete Mathematics* 313.7 (2013), p. 839-854. ISSN : 0012-365X. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.11.031>.

- [25] Teresa W HAYNES, Sandra M HEDETNIEMI, Stephen T HEDETNIEMI et Michael A HENNING. « Domination in graphs applied to electric power networks ». In : *SIAM journal on discrete mathematics* 15.4 (2002), p. 519-529.
- [26] Teresa W HAYNES, Stephen HEDETNIEMI et Peter SLATER. *Domination in Graphs : Advanced Topics*. CRC press, 1998.
- [27] Teresa W HAYNES, Stephen HEDETNIEMI et Peter SLATER. *Fundamentals of domination in graphs*. Marcel Dekker, 1998.
- [28] Michael A HENNING et Nader Jafari RAD. « Locating-total domination in graphs ». In : *Discrete Applied Mathematics* 160.13-14 (2012), p. 1986-1993.
- [29] Michael A. HENNING. « A survey of selected recent results on total domination in graphs ». In : *Discrete Mathematics* 309.1 (2009), p. 32-63. ISSN : 0012-365X. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.disc.2007.12.044>.
- [30] Robert W. IRVING. « On approximating the minimum independent dominating set ». In : *Information Processing Letters* 37.4 (1991), p. 197-200.
- [31] Mamadou Moustapha KANTÉ, Christian LAFOREST et Benjamin MOMÈGE. « An Exact Algorithm to Check the Existence of (Elementary) Paths and a Generalisation of the Cut Problem in Graphs with Forbidden Transitions ». In : *SOFSEM 2013 Proceedings*. T. 7741. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2013, p. 257-267.
- [32] Mamadou Moustapha KANTÉ, Christian LAFOREST et Benjamin MOMÈGE. « Trees in Graphs with Conflict Edges or Forbidden Transitions ». In : *Theory and Applications of Models of Computation, 10th International Conference, TAMC 2013, Hong Kong, China, May 20-22, 2013. Proceedings*. Sous la dir. de T.-H. Hubert CHAN, Lap Chi LAU et Luca TREVISAN. T. 7876. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2013, p. 343-354.
- [33] Mamadou Moustapha KANTÉ, Fatima Zahra MOATAZ, Benjamin MOMÈGE et Nicolas NISSE. « Finding Paths in Grids with Forbidden Transitions ». In : *41st International Workshop, WG 2015*. Sous la dir. d'Ernst W. MAYR. T. 9224. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2015, p. 154-168.
- [34] Richard KARP. « Reducibility Among Combinatorial Problems ». In : t. 40. Jan. 1972, p. 85-103. DOI : 10.1007/978-3-540-68279-0\_8.
- [35] Petr KOLMAN et Ondřej PANGRÁC. « On the complexity of paths avoiding forbidden pairs ». In : *Discrete Applied Mathematics* 157.13 (2009), p. 2871-2876. ISSN : 0166-218X. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.dam.2009.03.018>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X0900119X>.
- [36] Jakub KOVÁČ. « Complexity of the path avoiding forbidden pairs problem revisited ». In : *Discrete Applied Mathematics* 161.10 (2013), p. 1506-1512. ISSN : 0166-218X. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.dam.2012.12.022>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X13000115>.

- [37] Christian LAFOREST et Timothée MARTINOD. « Introduction to Routing Problems with Mandatory Transitions ». In : *SOFSEM 2023 : Theory and Practice of Computer Science*. Sous la dir. de Leszek GAŚSIENIEC. Cham : Springer International Publishing, 2023, p. 254-266.
- [38] Christian LAFOREST et Timothée MARTINOD. « On the complexity of independent dominating set with obligations in graphs ». In : *Theoretical Computer Science* 904 (2022), p. 1-14. ISSN : 0304-3975.
- [39] Christian LAFOREST et Benjamin MOMÈGE. « Nash-Williams-type and Chvátal-type Conditions in One-Conflict Graphs ». In : *SOFSEM 2015 Proceedings*. Sous la dir. de Giuseppe F. ITALIANO, Tiziana MARGARIA-STEFFEN, Jaroslav POKORNÝ, Jean-Jacques QUISQUATER et Roger WATTENHOFER. T. 8939. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2015, p. 327-338.
- [40] Christian LAFOREST et Benjamin MOMÈGE. « Some Hamiltonian Properties of One-Conflict Graphs ». In : *25th International Workshop, IWOCA 2014*. Sous la dir. de Jan KRATOCHVÍL, Mirka MILLER et Dalibor FRONCEK. T. 8986. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2014, p. 262-273.
- [41] Gilbert LAPORTE. « The traveling salesman problem : An overview of exact and approximate algorithms ». In : *European Journal of Operational Research* 59.2 (1992), p. 231-247. ISSN : 0377-2217.
- [42] Gilbert LAPORTE, Martin DESROCHERS et Yves NOBERT. « Two exact algorithms for the distance-constrained vehicle routing problem ». In : *Networks* 14.1 (1984), p. 161-172. DOI : <https://doi.org/10.1002/net.3230140113>. URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/net.3230140113>.
- [43] Geng LIN, Jian GUAN et Huibin FENG. « An ILP based memetic algorithm for finding minimum positive influence dominating sets in social networks ». In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 500 (2018), p. 199-209.
- [44] Benjamin MOMÈGE. « Autour de la connexité dans les graphes avec conflits ». Theses. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, juill. 2015.
- [45] Jairo R. MONTOYA-TORRES, Julián LÓPEZ FRANCO, Santiago NIETO ISAZA, Heriberto FELIZZOLA JIMÉNEZ et Nilson HERAZO-PADILLA. « A literature review on the vehicle routing problem with multiple depots ». In : *Computers & Industrial Engineering* 79 (2015), p. 115-129. ISSN : 0360-8352. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cie.2014.10.029>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S036083521400360X>.
- [46] Oystein ORE. *Theory of graphs*. T. 38. American Mathematical Soc., 1965.
- [47] C. PICOULEAU. « Complexity of the hamiltonian cycle in regular graph problem ». In : *Theoretical Computer Science* 131.2 (1994), p. 463-473. ISSN : 0304-3975. DOI : [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(94\)90185-6](https://doi.org/10.1016/0304-3975(94)90185-6).

- [48] M Haj RACHID, Wahiba Ramdane CHERIF, Christelle BLOCH et Pascal CHATONNAY. « Proposition de notation pour les problèmes de tournées ». In : *9ème congrès de la ROADEF : ROADEF'08*. Presses universitaires de l'Université Blaise Pascal. 2008, p. 63-77.
- [49] Mateja ŠAJNA. « Cycle decompositions III : Complete graphs and fixed length cycles ». In : *Journal of Combinatorial Designs* 10.1 (2002), p. 27-78. DOI : <https://doi.org/10.1002/jcd.1027>. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/jcd.1027>.
- [50] S. SZEIDER. « Finding paths in graphs avoiding forbidden transitions. » In : *Discrete applied mathematics*. 126.2-3 (mars 2003), p. 261-273.
- [51] Johan M.M. VAN ROOIJ et Hans L. BODLAENDER. « Exact algorithms for dominating set ». In : *Discrete Applied Mathematics* 159.17 (2011), p. 2147-2164.
- [52] Hananya YINNONE. « On paths avoiding forbidden pairs of vertices in a graph ». In : *Discrete Applied Mathematics* 74.1 (1997), p. 85-92. ISSN : 0166-218X. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0166-218X\(96\)00017-0](https://doi.org/10.1016/S0166-218X(96)00017-0). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X96000170>.
- [53] Feng ZOU, Yuexuan WANG, Xiao-Hua XU, Xianyue LI, Hongwei DU, Pengjun WAN et Weili WU. « New approximations for minimum-weighted dominating sets and minimum-weighted connected dominating sets on unit disk graphs ». In : *Theoretical Computer Science* 412.3 (2011). Combinatorial Optimization and Applications, p. 198-208. ISSN : 0304-3975. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2009.06.022>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397509004162>.