



**HAL**  
open science

# Influence des transferts radiatifs sur les écoulements de convection naturelle en régime turbulent, dans des ambiances habitables

Maxime Delort-Laval

► **To cite this version:**

Maxime Delort-Laval. Influence des transferts radiatifs sur les écoulements de convection naturelle en régime turbulent, dans des ambiances habitables. Thermique [physics.class-ph]. Université Paris-Saclay, 2023. Français. NNT : 2023UPAST090 . tel-04461746

**HAL Id: tel-04461746**

**<https://theses.hal.science/tel-04461746>**

Submitted on 16 Feb 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Influence des transferts radiatifs sur les écoulements de convection naturelle en régime turbulent dans des ambiances habitables

*Radiative transfer influence on turbulent natural convection in indoor environment*

## Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

École doctorale n° 579, sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences (SMEMaG)

Spécialité de doctorat : énergétique

Graduate School : Sciences de l'Ingénierie et des Systèmes. Référent : CentraleSupélec

Thèse préparée dans l'unité de recherche **Laboratoire EM2C, Université Paris-Saclay, CNRS, CentraleSupélec, Laboratoire EM2C, 91190, Gif-sur-Yvette, France**, sous la direction de **Anouar SOUFIANI**, Directeur de Recherche au CNRS, le co-encadrement de **Philippe RIVIERE**, Chargé de Recherche au CNRS et de **Laurent SOUCASSE**, Maître de Conférence à CentraleSupélec

Thèse soutenue à CentraleSupélec, le 3 juin 2023, par

**Maxime DELORT-LAVAL**

## Composition du Jury

Membres du jury avec voix délibérative

<b>Shihe XIN</b> Professeur des Universités, CETHIL	Président
<b>Pascal BOULET</b> Professeur des Universités, LEMTA	Rapporteur & Examineur
<b>Anne SERGENT</b> Maître de Conférence, LISN	Rapporteur & Examinatrice
<b>Didier SAURY</b> Professeur des Universités, ENSMA	Examineur
<b>Samira KHERROUF</b> Ingénieur de Recherche, ADEME	Examinatrice

**Titre :** Influence des effets des transferts radiatifs sur les écoulements de convection naturelle en régime turbulent dans des ambiances habitables

**Mots clés :** convection naturelle, rayonnement, DNS, SVV, habitat

**Résumé :** L'influence des transferts radiatifs sur les écoulements de convection naturelle turbulents est ici étudiée au moyen de simulations numériques. Dans un premier temps, la cavité cubique de Rayleigh-Bénard, configuration académique classique, est considérée. Des simulations numériques directes (DNS) pour des nombres de Rayleigh compris entre  $10^3$  et  $10^9$  sont entreprises au moyen d'une méthode spectrale de collocation pour résoudre la convection, couplée à une méthode de lancer de rayon pour les transferts radiatifs, utilisant le modèle ADF qui permet de tenir compte précisément des propriétés radiatives de gaz réels (en l'occurrence un mélange air/CO<sub>2</sub>/H<sub>2</sub>O). Un modèle de sous-maille radiative est également utilisé pour les plus hauts nombres de Rayleigh, afin de limiter le coût de résolution numérique du rayonnement.

Le rayonnement a pour effet de retarder l'apparition du régime convectif aux bas nombres de Rayleigh, et d'augmenter l'énergie cinétique et le flux convectif une fois celui-ci établi. La taille de la cavité joue également un rôle impor-

tant et accroît notablement les effets des transferts radiatifs, qui ont en outre une influence sur la structure de la circulation des grandes échelles dans la cavité et modifient son évolution avec le nombre de Rayleigh.

Pour l'étude des plus hauts nombres de Rayleigh, le modèle de simulation aux grandes échelles *Spectral Vanishing Viscosity* (SVV) est implémenté et validé grâce aux résultats obtenus en DNS. L'utilisation de ce modèle permet de réaliser des simulations à  $Ra = 10^{10}$ .

Des simulations sont ensuite entreprises à  $Ra = 10^9$  pour des conditions de chauffage et refroidissement localisées sur des demi parois verticales de la cavité. Deux cas sont envisagés : la source chaude directement sous la source froide, ou alors positionnée sur la paroi opposée. Dans les deux cas, la prise en compte du rayonnement modifie considérablement la structure de l'écoulement, en augmentant la convection, et diminue fortement la stratification thermique.

**Title :** Radiative transfer influence on turbulent natural convection in indoor environment

**Keywords :** natural convection, radiation, DNS, SVV, habitation

**Abstract :** Radiative transfer influence on turbulent natural convection is studied using numerical simulations. First, the classic Rayleigh-Bénard cubical cell is investigated. Direct Numerical Simulations (DNS) are carried from  $Ra = 10^3$  to  $Ra = 10^9$  using a Chebyshev spectral method for the flow and a ray-tracing method for the radiation field, coupled with the ADF model for precise description of the radiative properties of the real gaz (here, a mixture of air/CO<sub>2</sub>/H<sub>2</sub>O). For the highest Rayleigh numbers, a subgrid model is also used to reduce the computational time of radiative transfer.

At low Rayleigh numbers, the onset of convection is delayed when radiation is taken into account but both kinetic energy and convective flux are increased once the convective regime is established. The size of the cavity has also a significant influence in enhancing the effects of rad-

iative transfer. Furthermore, radiation has a strong impact on the large scale circulation of the flow and alters its evolution with the Rayleigh number.

In order to study higher Rayleigh numbers, the Large Eddy Simulation model *Spectral Vanishing Viscosity* (SVV) is implemented and validated in comparison with the results previously obtained via DNS. Numerical simulations with the SVV model are then carried at  $Ra = 10^{10}$ .

Other sets of boundary conditions are studied at  $Ra = 10^9$ : the hot and cold zones are located on vertical Half-walls of the cell. Two cases are studied: the hot zone under the cold one, or on the opposite wall. In each case, the structure of the flow is considerably modified when radiation is taken into account: convection is enhanced and thermal stratification is strongly reduced.



**RÉPUBLIQUE  
FRANÇAISE**

*Liberté  
Égalité  
Fraternité*



Cette Thèse a été co-financée par l'Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Énergie.





## Résumé

La convection naturelle est un phénomène physique rencontré couramment dans des applications telles que l'étude de la thermique de l'habitat. De nombreuses études ont montré que les échanges radiatifs présents lorsque le fluide est rayonnant ont un effet notable sur les écoulements de convection naturelle. Le fluide considéré ici est un mélange air/CO<sub>2</sub>/H<sub>2</sub>O, afin de se rapprocher des conditions réelles de l'habitat.

Dans un premier temps, la cavité cubique de Rayleigh-Bénard, configuration académique classique, est considérée. Des simulations numériques directes (DNS), pour des nombres de Rayleigh compris entre 10<sup>3</sup> et 10<sup>9</sup>, sont entreprises au moyen d'une méthode spectrale de collocation pour résoudre la convection, couplée à une méthode de lancer de rayon pour les transferts radiatifs, utilisant le modèle ADF qui permet de tenir compte précisément des propriétés radiatives des gaz réels (en l'occurrence, un mélange air/CO<sub>2</sub>/H<sub>2</sub>O). Un modèle de sous-maille radiative est également utilisé pour les plus hauts nombres de Rayleigh, afin de limiter le coût de résolution numérique du rayonnement.

Le rayonnement a pour effet de retarder l'apparition du régime convectif aux bas nombres de Rayleigh, et d'augmenter l'énergie cinétique et le flux convectif une fois celui-ci établi. La taille de la cavité joue également un rôle important et accroît notablement les effets des transferts radiatifs. Ceux-ci ont également une influence sur la structure de la circulation des grandes échelles dans la cavité et modifient son évolution avec le nombre de Rayleigh.

Pour l'étude des plus hauts nombres de Rayleigh, le modèle de simulation aux grandes échelles *Spectral Vanishing Viscosity* (SVV) est implémenté et validé grâce aux résultats obtenus en DNS. L'utilisation de ce modèle permet de réaliser des simulations à  $Ra = 10^{10}$ .

Des simulations sont ensuite entreprises pour des conditions de chauffage et refroidissement localisées sur des demi parois verticales de la cavité. Deux cas sont envisagés : la source chaude directement sous la source froide, ou alors positionnée sur la paroi opposée. Dans les deux cas, la prise en compte du rayonnement modifie considérablement la structure de l'écoulement, en augmentant la convection, et diminuent fortement la stratification thermique. Dans le premier cas (source chaude sous la source froide), le profil de température est même inversé lorsque le rayonnement est pris en compte : les transferts radiatifs parviennent à garder la moitié inférieure de la cavité plus chaude que la moitié supérieure. La position de la source froide par rapport à la source chaude a également un effet notable sur les transferts thermiques entre les parois : lorsque la source froide est en face de la source chaude, les échanges radiatifs entre ces deux source conduisent à une augmentation du flux aux parois, qui se traduit en terme d'habitat par une augmentation des pertes thermiques.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Modélisation des transferts thermiques couplés convection naturelle - rayonnement</b>	<b>11</b>
1.1 Mise en équations . . . . .	12
1.1.1 Bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie .	12
1.1.2 Transferts radiatifs . . . . .	14
1.2 Analyse dimensionnelle . . . . .	17
1.3 Propriétés radiatives du milieu . . . . .	20
1.3.1 Spectre d'absorption raie par raie . . . . .	20
1.3.2 Le modèle ADF . . . . .	22
<b>2 Méthodes numériques</b>	<b>29</b>
2.1 Méthode spectrale pour la convection naturelle . . . . .	30
2.1.1 Discrétisation spatiale : méthode de collocation Tchebychev	30
2.1.2 Discrétisation temporelle . . . . .	33
2.1.3 Couplage pression-vitesse . . . . .	35
2.1.4 Parallélisation . . . . .	37
2.1.5 Validation . . . . .	37
2.2 Méthode numérique pour les transferts radiatifs . . . . .	39
2.2.1 Formulation de l'équation de transfert adaptée aux faibles gradients de température . . . . .	40
2.2.2 Méthode de lancer de rayon . . . . .	42
2.2.3 Modèle de sous-maille radiatif pour les champs turbulents	45
2.2.4 Validation . . . . .	48
2.3 Couplage de codes . . . . .	49
<b>3 Étude en Simulation Numérique Directe (DNS)</b>	<b>55</b>
3.1 Influence du rayonnement dans une cavité de côté 1 mètre, pour $10^3 \leq Ra \leq 10^9$ . . . . .	56
3.1.1 Définition des champs moyens . . . . .	56
3.1.2 Champs d'écoulement et transferts thermiques . . . . .	58
3.1.3 Bilans énergétiques . . . . .	65
3.1.4 Statistiques d'ordre 2 . . . . .	70

3.2	Effet de la taille de la cavité sur le rayonnement en régime turbulent	76
3.2.1	Analyse statistique . . . . .	76
3.2.2	Aspect instationnaire . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Simulations aux grandes échelles (LES)</b>	<b>91</b>
4.1	Introduction à la simulation aux grandes échelles . . . . .	93
4.1.1	Notion de filtrage des équations . . . . .	93
4.1.2	Modélisation du tenseur de sous-maille . . . . .	95
4.1.3	Modélisation du vecteur flux de chaleur de sous-maille . .	104
4.1.4	Conclusion sur les modèles de sous-maille . . . . .	106
4.2	L'approche Spectral Vanishing Viscosity . . . . .	106
4.2.1	Présentation du modèle Spectrale Vanishing Viscosity . .	107
4.2.2	Paramétrage du modèle . . . . .	109
4.2.3	Sensibilité du modèle SVV aux paramètres . . . . .	112
4.2.4	Simulation SVV couplée au rayonnement . . . . .	118
4.3	Validation du modèle SVV en simulations couplées . . . . .	119
4.3.1	Analyse statistique en régime permanent . . . . .	119
4.3.2	Analyse spatiale : autocorrélation du champ de température	122
4.3.3	Analyse temporelle : évolution du nombre de Nusselt aux parois . . . . .	127
4.3.4	Analyse modale : structures de l'écoulement . . . . .	128
4.4	Étude à plus haut nombre de Rayleigh et conclusion sur la confi- guration de Rayleigh-Bénard . . . . .	135
4.4.1	Simulation SVV à $Ra = 10^{10}$ . . . . .	135
4.4.2	Conclusions sur la configuration de Rayleigh-Bénard . . .	139
<b>5</b>	<b>Étude de configurations plus représentatives de l'habitat</b>	<b>143</b>
5.1	Configurations étudiées . . . . .	143
5.1.1	Equations et méthodes numériques . . . . .	143
5.1.2	Conditions aux limites : modélisation du radiateur et de la fenêtre . . . . .	144
5.1.3	Symétries des configurations . . . . .	146
5.2	Radiateur positionné sous une fenêtre . . . . .	147
5.2.1	Structure de l'écoulement en l'absence de rayonnement . .	147
5.2.2	Influence du rayonnement sur l'écoulement . . . . .	157
5.2.3	Nombre de Nusselt aux parois . . . . .	169
5.2.4	Etude à $Ra = 10^{10}$ . . . . .	171
5.3	Radiateur positionné à l'opposé de la fenêtre . . . . .	176
5.3.1	Champs de température . . . . .	176
5.3.2	Structure de l'écoulement . . . . .	176
5.3.3	Nombre de Nusselt aux parois . . . . .	182
5.4	Conclusion sur la position relative des sources chaude et froide .	184
	<b>Conclusion</b>	<b>189</b>

<b>A</b>	<b>Outils d'analyse des écoulements</b>	<b>195</b>
A.1	Décomposition en modes Propres Orthogonaux (POD) . . . . .	195
A.2	Critère $Q$ . . . . .	196
<b>B</b>	<b>Compléments sur l'étude paramétrique du modèle SVV</b>	<b>200</b>
B.1	Profils de température . . . . .	200
B.1.1	$Ra=10^8$ . . . . .	200
B.1.2	$Ra=10^9$ . . . . .	200
B.2	Profils d'énergie cinétique . . . . .	206
B.2.1	$Ra=10^8$ . . . . .	206
B.2.2	$Ra=10^9$ . . . . .	206
B.3	Profils de flux . . . . .	211
B.3.1	$Ra=10^8$ . . . . .	211
B.3.2	$Ra=10^9$ . . . . .	211
<b>C</b>	<b>Compléments sur l'autocorrélation</b>	<b>218</b>
C.1	Autocorrélation d'un champ aléatoire . . . . .	218
C.2	Autocorrélation d'un écoulement tambour . . . . .	222
C.3	Autocorrélation d'un écoulement diagonal . . . . .	223



# Introduction

La convection naturelle thermique désigne les mouvements de fluide, liquide ou gazeux, dont l'origine se situe dans les inhomogénéités spatiales du champ de température. Dans les régions où la température est localement plus élevée, le fluide se dilate généralement et sa densité diminue ; cela entraîne l'apparition, par la poussée d'Archimède, de forces de flottabilité qui vont tendre à entraîner le fluide vers le haut. L'inverse se produit également dans les régions plus froides, où le fluide est alors entraîné vers le bas : le moteur de la convection naturelle réside ainsi dans les variations spatiales de la température du fluide. Les transferts de chaleur au sein du fluide jouent donc un rôle important puisque, modifiant le champ de température, ils influent par conséquent sur la dynamique de l'écoulement. En particulier, lorsque le fluide contient des espèces chimiques capables d'émettre ou d'absorber le rayonnement électromagnétique dans l'infrarouge, les transferts d'énergie par rayonnement thermique modifient sensiblement l'écoulement. Les écoulements de convection naturelle se rencontrent dans de nombreux contextes et leur étude trouve des applications dans de multiples domaines : les phénomènes naturels, tels que la convection thermique dans l'atmosphère (par exemple Hartmann *et al.* (2001) et Folkins *et al.* (2008)), dans l'océan (p. ex. Marshall et Schott (1999) et Lavender *et al.* (2002)) ou dans le manteau terrestre (p. ex. McKenzie *et al.* (1974) et Korenaga (2017)), mais aussi des processus plus industriels, comme la production de métal (p. ex. Brent *et al.* (1988) et Zhao *et al.* (2020)) ou le stockage d'énergie (Fornarelli *et al.*, 2021). Une autre application majeure est la compréhension des écoulements d'air dans l'habitat : la présence, même en faibles quantités, de gaz actifs dans l'infrarouge que sont le dioxyde de carbone et la vapeur d'eau entraîne un fort couplage de la convection naturelle avec le rayonnement.

Une difficulté rencontrée lors de la simulation des écoulements en ambiances habitables est la multiplicité des phénomènes physiques en interaction les uns avec les autres. Cette grande complexité nécessite alors de faire des choix de modélisation pour se concentrer sur un ou deux phénomènes en particulier, en négligeant les autres. Les travaux expérimentaux pionniers de Cooper et Linden (1996) et Hunt et Linden (1999) portent sur la ventilation naturelle combinant les effets du vent (s'infiltrant à l'intérieur de l'habitat) et de la flottabilité induite par des sources locales de chaleur. Plus récemment, les travaux de Wang *et al.* (2017) prennent en compte l'impact de la porosité des murs et du rayonnement des parois sur la dynamique de l'écoulement. Cependant, l'air est lui-même



considéré transparent et n’interagit donc pas avec le rayonnement. D’autres travaux, comme ceux de [Aswatha et al. \(2012\)](#); [Al-Rashed et al. \(2017\)](#); [Alghaseb et al. \(2022\)](#) étudient l’influence de la position des sources et puits de chaleur sur la dynamique de l’écoulement et l’efficacité de la ventilation dans des configurations représentatives de l’habitat, en l’absence de rayonnement. Cependant, ces études sont effectuées à des niveaux de turbulence bien inférieurs à ceux rencontrés dans les ambiances habitables : les nombres de Rayleigh étudiés restent inférieurs à  $Ra = 10^7$ , tandis que les nombres de Rayleigh rencontrés dans l’habitat sont de l’ordre de  $Ra = 10^{10}$ . La simulation des écoulements présents dans les habitations reste donc un sujet largement ouvert.

La présente étude porte sur l’influence du rayonnement sur les écoulements de convection naturelle dans les ambiances habitables. En raison du coût requis par la simulation numérique des transferts radiatifs, les problématiques de ventilation seront écartées et les cavités étudiées seront considérées hermétiques. Le problème sera essentiellement abordé au moyen de l’étude d’une configuration académique classique : la cavité de Rayleigh-Bénard.

L’instabilité dite de Rayleigh-Bénard se développe dans un milieu fluide chauffé par le bas. Le fluide chaud se dilate localement, ce qui diminue sa densité et, par la poussée d’Archimède, se crée à cet endroit une force de flottabilité qui l’entraîne vers le haut. Ce phénomène fut analysé expérimentalement par Henri Bénard ([Bénard, 1901](#)) puis théoriquement par Lord Rayleigh ([Rayleigh, 1916](#)) au début du XXe siècle. Différentes configurations ont depuis été étudiées. Lorsque le fluide est placé entre deux plaques planes horizontales infinies, les premières instabilités apparaissent aux alentours d’un nombre de Rayleigh critique  $Ra_{cr} = 1708$  ([Chandrasekhar, 1981](#)) ; ce nombre de Rayleigh critique augmente lorsque le fluide est placé dans une cavité fermée en raison des frottements visqueux avec les parois latérales. Pour des nombres de Rayleigh modérés, la présence de parois latérales conduit à une grande variété de structures possibles pour l’écoulement dans la cavité : pour une cavité cubique, selon les conditions aux parois latérales, jusqu’à sept (pour des parois latérales isolées ([Pallares et al., 1999](#); [Puigjaner et al., 2004](#); [Bousset et al., 2008](#))) ou même davantage (pour des parois latérales conductrices ([Pallares et al., 2002](#); [Puigjaner et al., 2008](#))) de structures d’écoulement ont été observées et analysées, via des simulations numériques ou des techniques de continuation. A  $Ra = 10^5$ , l’existence de multiples solutions a également été observé expérimentalement ([Leong et al., 1999](#)). En outre, une étude comparative de différents codes de calculs a montré une grande disparité des solutions obtenues dans la gamme  $10^5 < Ra < 10^8$  ([Pepper et Hollands, 2002](#)).

Plus récemment, plusieurs études ont montré que, dans des cavités fermées et pour des nombres de Rayleigh intermédiaires (de l’ordre de  $10^6 < Ra < 10^9$ ), les écoulements de Rayleigh-Bénard se caractérisent généralement par une circulation des grandes échelles (LSC, pour Large Scale Circulation) en rotation dans la cavité, et dont la direction est sujette à des phénomènes de basse fréquence, tels que des réorientations ou des changements du sens de rotation. Dans des cavités cylindriques, des phénomènes de rotation azimuthale de la LSC, ainsi que d’in-

version soudaine du sens de rotation, ont été observés tant expérimentalement (Sreenivasan *et al.*, 2002; Brown *et al.*, 2005) que numériquement (Benzi et Verzicco, 2008; Mishra *et al.*, 2011). Des cavités circulaires ont également été étudiées récemment, expérimentalement (Wang *et al.*, 2018) et numériquement (Xu et Xi, 2021), et font apparaître ce même phénomène de renversement de la LSC. Dans des cavités cubiques, la circulation se fait généralement selon un plan vertical diagonal de la cavité, et des phénomènes de réorientation de la LSC d'un plan à l'autre ont également été observés (Vasiliev *et al.*, 2016; Foroozani *et al.*, 2017; Marichal et Papalexandris, 2022). Cette organisation de la LSC est cependant légèrement affectée par la rugosité des parois horizontales (Foroozani *et al.*, 2019). Plusieurs modèles ont été développés pour prédire ces phénomènes de basse fréquence, fondés soit sur une approche phénoménologique stochastique (Araujo *et al.*, 2005; Brown et Ahlers, 2007, 2008; Bai *et al.*, 2016; Ji et Brown, 2020) ou en utilisant la décomposition modale (Bailon-Cuba *et al.*, 2010; Chandra et Verma, 2011; Giannakis *et al.*, 2018; Soucasse *et al.*, 2019). Ces phénomènes étant rares, ils sont difficiles et très coûteux à observer par simulation numérique directe en raison du long temps d'intégration requis pour en étudier la fréquence. Le développement de ce type de modèles prédictifs est donc d'un grand intérêt pour l'étude de la dynamique de la LSC.

Outre la circulation des grandes échelles, de nombreuses facettes de la convection turbulente de Rayleigh-Bénard ont fait l'objet d'études au cours des dernières années : la détermination de lois d'évolution du nombre de Nusselt aux parois horizontales en fonction du nombre de Rayleigh (Chavanne *et al.*, 1997; Grossmann et Lohse, 2000), les propriétés de la turbulence (Lohse et Xia, 2010) ou encore la structure et la dynamique des émissions de panaches (Grossmann et Lohse, 2004; van der Poel *et al.*, 2015; Wang *et al.*, 2020). Le couplage de la convection au rayonnement thermique reste également un des plus grands défis de ce domaine, notamment en raison du coût numérique majeur requis pour l'étudier.

Il est connu depuis longtemps que les transferts radiatifs pouvaient modifier notablement les écoulements de convection naturelle, et que les faibles traces de vapeur d'eau et de dioxyde de carbone présentes dans l'air ambiant étaient responsables d'un rayonnement suffisant pour faire varier les champs de température moyen et fluctuant, et ainsi altérer la convection. Les études pionnières en configurations de Rayleigh-Bénard avaient pour application la physique atmosphérique (Spiegel, 1957, 1960; Gille et Goody, 1964). Il était montré que le rayonnement augmentait le nombre de Rayleigh critique d'apparition des instabilités, en raison de l'homogénéisation du champ de température au cœur de la cavité et de l'atténuation des fluctuations de température (Bdéoui et Soufiani, 1997). Cet effet a été observé expérimentalement par Gille et Goody (1964) et numériquement par Bdéoui *et al.* (1998) et Lan *et al.* (2003). Ces études sont cependant limitées à la seule transition entre les régimes conductif et convectif, ou juste au-delà de cette transition.

A plus hauts nombres de Rayleigh, il existe peu d'études s'intéressant au couplage entre la convection naturelle et le rayonnement en cavité de Rayleigh-

Bénard. Les premières travaux entrepris par Sakurai *et al.* (2011, 2012) s'intéressent à des nombres de Rayleigh de l'ordre de  $10^6 < Ra < 10^7$ ; néanmoins, le couplage n'est que partiel dans Sakurai *et al.* (2011) et, dans Sakurai *et al.* (2012) qui étudie la convection mixte, le modèle de gaz gris est retenu pour le rayonnement. D'autres études plus récentes, comme Wang *et al.* (2020), conservent également des modèles de gaz gris pour le rayonnement. Ces modèles simples ont été requis jusqu'à récemment en raison du coût numérique extrêmement élevé de la prise en compte du rayonnement. En raison des progrès effectués par les outils de simulation et l'augmentation de la puissance de calcul disponible, il devient peu-à-peu possible d'utiliser des modèles plus précis pour simuler le rayonnement thermique. En régime turbulent, plusieurs études se sont focalisées sur le couplage entre la convection naturelle et le rayonnement dans des cavités différentiellement chauffées (Soucasse *et al.*, 2014c; Cadet, 2015; Soucasse *et al.*, 2016; Kogawa *et al.*, 2017, 2019). Une étude préliminaire en gaz réel dans une cavité rayonnante de Rayleigh-Bénard a permis d'obtenir des premiers résultats à  $Ra = 10^7$  (Soucasse *et al.*, 2014a) : la présence de transferts radiatifs entraîne une augmentation significative de l'énergie cinétique des champs moyen et turbulent. Cette intensification de la convection par le rayonnement a également été observée expérimentalement par Lepot *et al.* (2018); Bouillaut *et al.* (2019) : en présence de rayonnement, les transferts d'énergie ne sont plus limités aux zones proches des parois mais peuvent affecter les zones du fluide au cœur de la cavité.

Une des difficultés rencontrées lors de la simulation des écoulements à très hauts nombres de Rayleigh reste le coût numérique extrêmement important requis pour ces simulations. Pour tenter de contourner cette limitation technique, différentes approches ont été envisagées au cours de ces dernières années. L'une d'entre elles est la simulation aux grandes échelles (ou LES pour Large Eddy Simulation), née avec les travaux de Smagorinsky (1963). Cette méthode consiste en la résolution des plus grandes échelles et la turbulence est introduit dans les équations un terme modélisant les effets des plus petites structures (appelés terme de sous-maille), non résolues. De nombreux modèles de sous-maille ont été développés depuis et la LES est un champ d'étude très dynamique de la mécanique des fluides. Le modèle le plus adapté aux méthodes numériques utilisés dans cette étude est le modèle *Spectral Vanishing Viscosity*, apparu avec les travaux de Tadmor (1989) et qui a montré depuis une très bonne efficacité (Karamanos et Karniadakis, 2000; Pasquetti, 2006).

La configuration de Rayleigh-Bénard permet d'étudier des phénomènes physiques proches de ceux rencontrés en ambiance habitable, mais l'état de l'art fait apparaître un manque de résultats de référence pour comprendre l'influence du rayonnement des gaz réels dans ce type de configuration. Les présents travaux de thèse visent dans un premier temps l'étude de la cavité cubique de Rayleigh-Bénard, afin d'approfondir les effets du couplage entre rayonnement et convection, et d'obtenir des résultats de référence qui manquent pour le moment dans la littérature scientifique. Ces résultats serviront également à valider l'implémentation d'un modèle de simulation aux grandes échelles, permettant

d'effectuer des simulations numériques à un coût réduit. Les écoulements typiquement rencontrés dans l'habitat sont en effet caractérisés par des nombres de Rayleigh très élevés et leur étude, couplée au rayonnement, nécessite une puissance de calcul encore démesurée. L'utilisation d'un tel modèle, validé dans une configuration académique, permettra donc d'étudier dans un troisième temps des configurations plus représentatives de l'habitat.

Le chapitre 1 présente la mise en équation du problème en configuration de Rayleigh-Bénard, ainsi que les choix d'adimensionnement faits. Les propriétés radiatives du gaz et la méthode ADF utilisée pour les décrire sont également détaillées.

Le chapitre 2 présente les méthodes numériques de référence utilisées dans les simulations numériques. La partie mécanique (bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie) est résolue au moyen d'une méthode pseudo-spectrale de collocation. La partie radiative (équation de transfert radiatif) est résolue par une méthode de lancer de rayons, associée à un modèle de sous-maille radiatif pour les études à plus haut nombre de Rayleigh. L'algorithme de couplage entre les deux méthodes est également spécifié.

Le chapitre 3 discute les résultats obtenus en simulation numérique directe, pour des nombres de Rayleigh allant de  $Ra = 10^3$  à  $Ra = 10^9$ , dans des cavités emplies d'un gaz transparent et d'un gaz rayonnant. L'influence de la taille de la cavité sur les transferts radiatifs est également étudiée en comparant les résultats obtenus dans des cavités cubique de un et trois mètres de côté.

Le chapitre 4 présente l'implémentation du modèle *Spectral Vanishing Viscosity* (SVV) de simulation aux grandes échelles dans le code. Ce modèle est paramétré et validé, en situation de convection pure et de couplage convection-rayonnement, en comparant les résultats du modèle avec les résultats obtenus en simulation numérique directe au chapitre 3. Des simulations en cavité de Rayleigh-Bénard à  $Ra = 10^{10}$  sont également entreprises avec le modèle.

Dans le chapitre 5, le modèle SVV validé au chapitre précédent est utilisé pour étudier des cavités représentatives de l'habitation. L'influence du rayonnement thermique dans ces configurations est décrite, ainsi que l'impact du positionnement de la source chaude par rapport à la source froide.



# Chapitre 1

## Modélisation des transferts thermiques couplés convection naturelle - rayonnement

On considère ici une cavité cubique fermée, de côté  $L$ , représentée sur la figure 1.1. Les parois horizontales sont isothermes, l'une à la température chaude  $T_c$  et l'autre à la température froide  $T_f$ . Les parois verticales sont quant à elles adiabatiques. Du point de vue du rayonnement, les parois horizontales sont considérées noires et les parois verticales réfléchissantes. La cavité est remplie d'un mélange d'air, de dioxyde de carbone et de vapeur d'eau. Ces deux dernières espèces sont présentes naturellement dans l'air et sont également produites par la respiration.

L'objectif étant de simuler des écoulements représentatifs de l'habitat. A cette fin, on choisit :

- Des tailles de cavité de l'ordre du mètre ( $L_{max} = 3$  m)
- Des écarts de température entre les parois horizontales de quelques Kelvin maximum :  $\Delta T_{max} = T_c - T_f \sim 10$  K, autour d'une température moyenne  $T_0 = (T_c + T_f) / 2 = 300$  K
- Un mélange air/CO<sub>2</sub>/H<sub>2</sub>O à pression atmosphérique et de composition constante (fractions molaires de l'ordre de 2 % pour H<sub>2</sub>O, soit un taux d'humidité d'environ 60 %, et de l'ordre de 0.1 % pour CO<sub>2</sub>)

NB : les axes seront notés, selon les différentes parties de ce mémoire, indifféremment  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$  et  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ , les variables spatiales  $(x_1, x_2, x_3)$  et  $(x, y, z)$  et les composantes du vecteur vitesse  $(u_1, u_2, u_3)$  et  $(u, v, w)$ , selon ce qui conviendra le mieux.

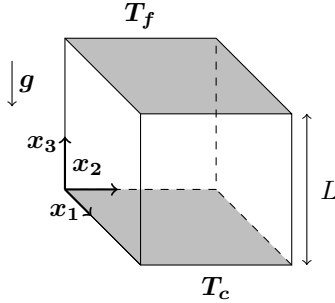


FIGURE 1.1 – Cavité cubique de Rayleigh-Bénard, de côté  $L$ . Les parois  $x_3 = 0$  et  $x_3 = L$  sont maintenues aux températures  $T_c$  et  $T_f$  respectivement, tandis que les parois  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = L$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_2 = L$  sont adiabatiques, sauf mention contraire.

## 1.1 Mise en équations

### 1.1.1 Bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie

En convection naturelle, une approximation couramment utilisée pour décrire les équations régissant les écoulements est l'approximation de Boussinesq (aussi appelée Oberbeck-Boussinesq) (Oberbeck, 1879; Boussinesq, 1903). Cette approximation est généralement formulée ainsi :

- La masse volumique est considérée constante, hormis lorsque sa variation crée une force de flottabilité
- Toutes les propriétés du fluide (viscosité dynamique  $\mu$ , capacité calorifique massique à pression constante  $c_P$ , conductivité  $\lambda$ , etc.) sont considérées constantes et prises égales à celles du gaz à température  $T_0$ .
- L'échauffement dû à la dissipation visqueuse est supposée négligeable

De plus, les variations de masse volumique sont linéarisées autour de la température moyenne  $T_0$  :

$$\rho(T) = \rho_0 (1 + \beta(T_0 - T)), \quad (1.1)$$

où  $\rho_0$  désigne la masse volumique du gaz à  $T_0$ .  $\beta$  désigne le coefficient d'expansion du fluide, pris égalé à  $1/T_0$ .

Les conditions de validité de l'approximation de Boussinesq ont fait l'objet de plusieurs études. Les deux contraintes principales sont l'uniformité des paramètres thermophysiques et de la masse volumique ainsi que la possibilité de négliger l'échauffement visqueux du fluide.

- La condition sur l'uniformité des paramètres peut faire l'objet de plusieurs approches : dans Gray et Giorgini (1976) on considère un fluide newtonien dont la masse volumique et les propriétés thermophysiques dépendent de la température et de la pression. Les équations sous l'hypothèse de Boussinesq sont ensuite retrouvées et font apparaître onze co-

efficaces qui doivent être négligeables pour que l'hypothèse soit valide. La condition nécessaire à l'uniformité des paramètres est alors  $\Delta T/T_0 < 0.1$  (Puigjaner *et al.*, 2004). Une autre approche est celle de Sameen *et al.* (2009), étudiant l'influence de la prise en compte des variations des paramètres thermophysiques avec la température, dans le cadre d'une modélisation de type bas Mach sur les nombres de Nusselt  $Nu$  aux parois. Des variations de l'ordre de 30 % des paramètres thermophysiques sont requis pour faire varier le nombre de Nusselt de manière significative (de quelques pourcents) par rapport aux résultats dans le cadre de l'hypothèse de Boussinesq.

- L'aspect non négligeable de la dissipation visqueuse, devant le terme de conduction dans le bilan d'enthalpie, survient lorsque l'énergie cinétique est significative comparée aux transferts de chaleur, ce qui peut survenir en convection naturelle lorsque la zone de convection est particulièrement grande. Pour caractériser cela, Gebhart (1962) introduit le nombre de Gebhart,  $Ge = g\beta L/c_p$ , déterminant le poids de la dissipation visqueuse dans la variation d'enthalpie du fluide. Pour un fluide donné ( $g$ ,  $\beta$  et  $c_p$  donnés), c'est donc la taille caractéristique de l'écoulement  $L$  qui pilote l'importance de la dissipation. Cette approche a été récemment reprise par Barletta (2022), qui établit que la dissipation visqueuse peut être négligée pour des nombres de Gebhart  $Ge \ll 1$ . Compte tenu des paramètres thermophysiques de l'air, la taille caractéristique limite de écoulement est alors de l'ordre de la dizaine de kilomètres. Gray et Giorgini (1976), quant à eux, déterminent avec leur méthode que, dans l'air, la taille caractéristique n'excède pas  $L_{max} \sim 4.1$  m. Il ajoute également une contrainte sur le gradient de température minimal  $\Delta T/L_{max} \gtrsim 0.1 \text{ Km}^{-1}$  permettant de négliger la dépendance en pression de la masse volumique devant sa dépendance en température.

Dans notre configuration, pour des écarts de température de  $\Delta T = 10$  K autour d'une valeur moyenne  $T_0 = 300$  K, on obtient  $\Delta T/T_0 = 0.036$ . Cela conduit à une variation relative de, par exemple, la conductivité thermique, de  $\Delta\lambda/\lambda = 2.88$  % et de la masse volumique de  $\Delta\rho/\rho = 3.6$  %. Si l'on tient compte de la contrainte sur le gradient de température énoncée par Gray et Giorgini (1976), pour une cavité de taille  $L = 1$  m, la différence de température entre les deux parois doit être au moins  $\Delta T \geq 0.1$  K. Dans ces conditions, il est alors raisonnable d'adopter l'approximation de Boussinesq.

En considérant la masse volumique constante, l'approximation de Boussinesq permet de simplifier les bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie qui décrivent les écoulements de convection naturelle, permettant de calculer les champs de vitesse, de pression et de température.

La masse volumique étant supposée constante, la conservation de la masse implique que la divergence de la vitesse  $\mathbf{u}$  est nulle. Le bilan de masse s'écrit donc

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.2)$$



Le bilan de quantité de mouvement, qui relie les variations de vitesse d'une cellule fluide aux forces s'exerçant dessus (deuxième loi de Newton), s'écrit alors

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \beta (T_0 - T) \mathbf{g} + \nu_f \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1.3)$$

où  $\mathbf{g} = -g\mathbf{x}_3$  est l'accélération de la pesanteur,  $p$  est l'écart à la pression hydrostatique ( $\nabla p = \nabla P - \rho_0 \mathbf{g}$ ), avec  $P$  la pression thermodynamique. L'air est considéré comme un fluide newtonien de viscosité cinématique  $\nu_f = \mu/\rho_0$ . Le terme  $\beta (T_0 - T) \mathbf{g}$  est le terme de flottabilité, moteur de l'écoulement, et indique explicitement le couplage de la vitesse avec le champ de température. Réciproquement, le champ de température dépend du champ de vitesse par le phénomène de convection thermique. Le bilan d'enthalpie, qui traduit l'évolution de la température, s'écrit

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = a \nabla^2 T - \frac{1}{\rho c_p} \nabla \cdot \mathbf{q}^{\text{rad}}, \quad (1.4)$$

avec  $a = \lambda/\rho_0 c_p$  la diffusivité thermique de l'air et  $\mathbf{q}^{\text{rad}}$  désigne le vecteur flux radiatif qui sera explicité dans la partie § 1.1.2. Dans ce bilan, l'échauffement du fluide dû à la dissipation visqueuse et aux variations de pression est négligé.

Les conditions aux limites associées aux équations 1.2, 1.3 et 1.4 sont

$$\begin{cases} \mathbf{u} = 0 & \text{sur les six parois,} \\ T = T_c & \text{sur le plan } x_3 = 0, \\ T = T_f & \text{sur le plan } x_3 = L, \\ (-\lambda \nabla T + \mathbf{q}^{\text{rad}}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur les plans } x_1 = 0, x_1 = L, x_2 = 0, x_2 = L. \end{cases} \quad (1.5)$$

Les parois sont rigides et le fluide, visqueux, y adhère. La température des parois horizontales est imposée et uniforme et le flux total au parois vertical est nul (parois adiabatiques).

### 1.1.2 Transferts radiatifs

Le bilan d'énergie 1.4 fait intervenir le vecteur flux radiatif  $\mathbf{q}^{\text{rad}}$ , qui est défini comme

$$\mathbf{q}^{\text{rad}}(\mathbf{x}) = \int_0^\infty \int_0^{4\pi} I_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) \boldsymbol{\Omega} d\boldsymbol{\Omega} d\nu. \quad (1.6)$$

$I_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega})$  désigne la luminance monochromatique directionnelle et  $I_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) \boldsymbol{\Omega}$  le flux surfacique d'énergie transporté par des photons de fréquence  $\nu$  passant au point de coordonnées  $\mathbf{x}$  dans la direction  $\boldsymbol{\Omega}$ . Le flux radiatif en un point  $\mathbf{x}$  est obtenu en intégrant ces contributions pour toutes les directions ( $4\pi$  stéradians) et pour toutes les fréquences.

Dans un milieu gazeux tel que celui considéré dans cette étude, la présence d'éléments (atomes, molécules) capables d'interagir avec le rayonnement électromagnétique, en émettant, absorbant ou diffusant des photons, contribue à modifier les distributions spatiale et directionnelle de la luminance  $I_\nu$ . Les propriétés du milieu caractérisant ces phénomènes sont :

- l'indice optique  $n$ , supposé constant uniforme et égal à un ;
- le coefficient d'absorption  $\kappa_\nu$ , dépendant de la pression, de la température et de la composition des espèces absorbantes dans le milieu
- le coefficient d'émission  $\eta_\nu$ , égal à  $\kappa_\nu I_\nu^\circ$  lorsque le mélange gazeux est à l'équilibre thermodynamique local (ce qui est le cas ici)
- le coefficient de diffusion  $\sigma_\nu$ . Le phénomène de diffusion moléculaire principal, dans le milieu gazeux considéré ici, est la diffusion de Rayleigh, qui est négligeable en termes énergétiques devant les phénomènes d'absorption et d'émission.

La luminance est obtenue en résolvant l'équation de transfert radiatif (ETR) : la variation de la luminance en un point  $\mathbf{x}$ , selon une direction  $\boldsymbol{\Omega}$ , est liée à la différence entre la luminance émise  $\kappa_\nu(\mathbf{x})I_\nu^\circ(T(\mathbf{x}))$  et la luminance absorbée  $\kappa_\nu(\mathbf{x})I_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega})$  en ce point

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) = \kappa_\nu(\mathbf{x}) (I_\nu^\circ(T(\mathbf{x})) - I_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega})), \quad (1.7)$$

où  $\kappa_\nu$  dépend *a priori* de la température, de la pression et de la composition des espèces absorbantes du gaz.  $I_\nu^\circ(T(\mathbf{x}))$  désigne la luminance d'équilibre au point  $\mathbf{x}$  de température  $T(\mathbf{x})$ , à la fréquence  $\nu$

$$I_\nu^\circ(T(\mathbf{x})) d\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}, \quad (1.8)$$

avec  $c$  la vitesse de la lumière,  $h$  la constante de Planck,  $k_B$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température du gaz.

La luminance d'équilibre intégrée sur toutes les fréquences est

$$\int_0^\infty I_\nu^\circ(T) = \frac{\sigma_{SB} T^4}{\pi}, \quad (1.9)$$

où  $\sigma_{SB} = 2\pi^5 k_B^4 / (15h^3 c^2)$  est la constante de Stephan-Boltzmann.

On suppose ici que la propagation du rayonnement est instantanée, la vitesse de la lumière  $c$  étant très grande devant la vitesse du fluide. La figure 1.2 représente le chemin optique entre un point d'une paroi, de coordonnée  $\mathbf{x}_p$  et un point  $M$  de coordonnées  $\mathbf{x}$ , situé à une distance  $s$  et dans une direction  $\boldsymbol{\Omega}$  du point de la paroi ( $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + s\boldsymbol{\Omega}$ ). L'équation du chemin optique (en pointillés sur la figure) est  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}_p + s'\boldsymbol{\Omega}$ , avec  $s' \in [0, s]$ . La solution à l'équation 1.7 s'écrit alors :

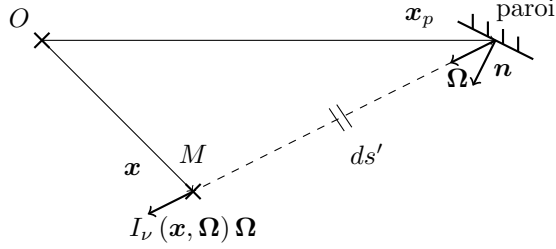


FIGURE 1.2 – Représentation d'un chemin optique entre un point de paroi de coordonnées  $\mathbf{x}_p$  et un point  $M$  de coordonnées  $\mathbf{x}$ , situé à une distance  $s$  de la paroi.

$$\begin{aligned}
 I_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) &= \int_0^s \kappa_\nu(\mathbf{x}') I_\nu^\circ(T(\mathbf{x}')) \exp\left(-\int_{s'}^s \kappa_\nu(s'') ds''\right) ds' \\
 &+ I_\nu(\mathbf{x}_p, \boldsymbol{\Omega}) \exp\left(-\int_0^s \kappa_\nu(s') ds'\right).
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Dans cette expression, la première intégrale quantifie la luminance qui a été émise par le milieu entre la paroi et le point  $M$  et transmise jusqu'au point  $M$ , et la deuxième partie décrit la luminance provenant de la paroi, qui a été partiellement absorbée sur le chemin.

Cette luminance partante de la paroi est la somme de deux composantes : la luminance émise par la paroi (assimilée à un corps opaque), caractérisée par une émissivité  $\epsilon_\nu$ , et la luminance réfléchie par la paroi, caractérisée par une réflectivité  $1 - \epsilon_\nu$ . La paroi étant considérée légèrement rugueuse, la réflexion peut être supposée diffuse et isotrope. La luminance partant de la paroi s'exprime donc

$$I_\nu^p(\mathbf{x}_p) = \epsilon_\nu(\mathbf{x}_p) I_\nu^\circ(T(\mathbf{x}_p)) + \frac{1 - \epsilon_\nu(\mathbf{x}_p)}{\pi} \int_{\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n} < 0} I_\nu(\mathbf{x}_p, \boldsymbol{\Omega}') |\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n}| d\boldsymbol{\Omega}'. \tag{1.11}$$

Les équations 1.7, 1.10 et 1.11 permettent de calculer le flux radiatif  $\mathbf{q}^{\text{rad}}(\mathbf{x})$ . Le terme radiatif intervenant dans le bilan d'énergie 1.4 est l'opposé de la divergence du flux radiatif, également appelée puissance radiative :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}^{\text{rad}}(\mathbf{x}) &= -\nabla \cdot \mathbf{q}^{\text{rad}}(\mathbf{x}) = -\int_0^\infty \int_0^{4\pi} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega})) d\boldsymbol{\Omega} d\nu \\
 &= \int_0^\infty \int_0^{4\pi} \kappa_\nu(\mathbf{x}) I_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} d\nu \\
 &- 4\pi \int_0^\infty \kappa_\nu(\mathbf{x}) I_\nu^\circ(T(\mathbf{x})) d\nu.
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Le flux radiatif à la paroi, apparaissant dans la dernière condition au limite de 1.5 s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}^{\text{rad}} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_p) &= \int_0^\infty \int_0^{4\pi} I_\nu(\mathbf{x}_p, \boldsymbol{\Omega}) \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} d\boldsymbol{\Omega} d\nu \\
&= \pi \int_0^\infty \epsilon_\nu(\mathbf{x}_p) I_\nu^\circ(T(\mathbf{x}_p)) d\nu \\
&\quad - \int_0^\infty \epsilon_\nu(\mathbf{x}_p) \int_{\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n} < 0} I_\nu(\mathbf{x}_p, \boldsymbol{\Omega}') |\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n}| d\boldsymbol{\Omega}' d\nu
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Il est à noter que les termes de puissance radiative et de flux radiatif à la paroi s'expriment tous deux comme la différence entre un terme d'émission (faisant apparaître  $I_\nu^\circ(T)$ ) et un terme d'absorption (intégrale directionnelle sur les luminances). Le terme d'émission est parfaitement déterminé par la loi de Planck (équation 1.8) et ne dépend, pour un mélange gazeux donné, que de la température locale. En revanche, le terme d'absorption en un point  $\mathbf{x}$  dépend de la luminance émise en tous les points  $\mathbf{x}'$  de la cavité et absorbés partiellement le long du chemin optique  $\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}$ , pour toutes les fréquences  $\nu$ . De plus la luminance, et donc la puissance radiative et le flux radiatif aux parois, dépendent du temps lorsque le champ de température en dépend.

## 1.2 Analyse dimensionnelle

L'adimensionnement consiste à substituer les variables dimensionnelles par des grandeurs de référence, construite à partir des grandeurs caractéristiques du problème, afin de simplifier la représentation paramétrique du problème physique. En convection forcée, l'écoulement est caractérisé par un nombre adimensionné, le nombre de Reynolds, qui détermine le rapport entre les forces d'inertie correspondant à l'énergie cinétique de l'écoulement et les forces de viscosité qui s'y opposent :

$$\text{Re} = \frac{u_{\text{ref}} L}{\nu_f}, \tag{1.14}$$

avec  $u_{\text{ref}}$  la vitesse caractéristique de l'écoulement,  $L$  une distance de référence et  $\nu_f$  la viscosité cinématique du fluide. Lorsque les échanges thermiques sont également considérés, un second nombre adimensionné apparaît dans les équations adimensionnées, le nombre de Prandtl, qui donne le rapport entre les diffusivités mécanique et thermique du fluide :

$$\text{Pr} = \frac{\nu_f}{a}, \tag{1.15}$$

où  $a$  désigne la diffusivité thermique du fluide.

Si en convection forcée la vitesse de référence  $u_{\text{ref}}$  peut être déterminée à partir, par exemple, d'un débit imposé ou d'une différence de pression entre les deux extrémités d'une conduite, il n'existe rien de tel en convection naturelle.

En revanche, il est possible de trouver un ordre de grandeur de cette vitesse en comparant les forces inertielles avec les forces de flottabilité à l'origine de l'écoulement

$$\frac{\rho_0 u_{\text{ref}}^2}{L} = \rho_0 g \beta (T_c - T_f), \quad (1.16)$$

avec  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $\beta = 1/T_0$  le coefficient d'expansion thermique du gaz. On a donc

$$u_{\text{ref}} = (g\beta(T_c - T_f)L)^{1/2}. \quad (1.17)$$

On définit alors les nombres de Grashof et de Rayleigh comme :

$$\text{Gr} = \text{Re}^2 = \frac{g\beta(T_c - T_f)L^3}{\nu_f^2}, \quad (1.18)$$

$$\text{Ra} = \text{Gr} \text{Pr} = \frac{g\beta(T_c - T_f)L^3}{\nu_f a}. \quad (1.19)$$

Dans une cavité de Rayleigh-Bénard telle que celle considérée ici, pour un fluide transparent ( $\kappa_\nu = 0, \forall \nu$ ) et des parois verticales parfaitement réfléchissantes ( $\epsilon_\nu = 0, \forall \nu$ ), l'écoulement de convection naturelle ne dépend que des nombres de Prandtl et de Rayleigh. Cela veut dire que le phénomène sera exactement le même, que l'on se trouve dans une petite cavité avec une grande différence de température entre les parois horizontales ou dans une grande cavité avec une différence de température plus faible, tant que les nombres de Rayleigh et de Prandtl caractérisant l'écoulement restent les mêmes.

Dans le cas où le fluide et les parois rayonnent, il reste possible d'adimensionner les équations si les propriétés radiatives du gaz et des parois sont grises ( $\kappa_\nu = \kappa, \forall \nu$  et  $\epsilon_\nu = \epsilon, \forall \nu$ ). Dans ce cas, il faut alors introduire quatre nouveaux nombre adimensionnés : le rapport de température  $\Delta T/T_0$ , l'épaisseur optique du milieu  $\kappa L$ , l'émissivité des parois  $\epsilon$  et le nombre de Planck

$$\text{Pl} = \frac{\lambda \Delta T}{\sigma_{SB} T_0^4 L} \quad (1.20)$$

qui exprime le ratio entre les flux conductif et radiatif.

Cependant, pour un gaz réel tel que celui considéré ici, le spectre d'absorption présente de fortes variations selon la fréquence  $\nu$  (voir la figure 1.3) et ne peut pas être considéré comme gris. Il n'est donc pas possible d'adimensionner le transfert radiatif avec un nombre limité de paramètres puisque l'épaisseur optique  $\kappa_\nu L$  dépend de la fréquence.

### Adimensionnement choisi

Pour adimensionner les bilans de masse 1.2, de quantité de mouvement 1.3 et d'énergie 1.4, on choisit la vitesse et le temps de référence suivants :

$$u_{\text{ref}} = \sqrt{\frac{g\beta(T_c - T_f)L}{\text{Pr}}} = \frac{a\sqrt{\text{Ra}}}{L}, \quad (1.21)$$

temps	longueur	vitesse	pression	température	flux radiatif
$t^+ = \frac{t}{t_{ref}}$	$\mathbf{x}^+ = \frac{\mathbf{x}}{L}$	$\mathbf{u}^+ = \frac{\mathbf{u}}{u_{ref}}$	$p^+ = \frac{p}{\rho_0 u_{ref}^2}$	$\theta = \frac{T-T_0}{\Delta T}$	$\mathbf{q}^{rad+} = \frac{\mathbf{q}^{rad} L}{\lambda \Delta T}$

TABLE 1.1 – Définition des quantités physiques adimensionnées

$$t_{ref} = \frac{L^2}{a\sqrt{Ra}}, \quad (1.22)$$

avec  $a$  la diffusivité thermique du gaz.

La vitesse de référence définie en 1.17, aussi appelée vitesse de chute libre, est très souvent utilisée dans la littérature pour adimensionner les équations (voir par exemple Pallares et al. (2002), Dabagh et al. (2016b), van der Poel et al. (2015) ou Verma et al. (2017)) en configuration de Rayleigh-Bénard. La correction en  $1/\sqrt{Pr}$  apportée ici a été introduite par J.Patterson et Imberger (1980) en cavité différentiellement chauffée, pour tenir compte des différences d'épaisseur entre couches limites mécanique et thermique. Lorsque le régime inertiel est atteint, la vitesse adimensionnée  $\mathbf{u}^+$  reste ainsi du même ordre de grandeur quel que soit le nombre de Rayleigh. Cette correction a ensuite été reprise en cavité de Rayleigh-Bénard (voir par exemple Puigjaner et al. (2004), Sergent et Le Quéré (2011), Podvin et Sergent (2012), Soucasse et al. (2019)) et donne des résultats comparables sur la vitesse. Il est à noter qu'une autre vitesse de référence utilisée par certains auteurs est  $u_{ref} = a/L$  (Pallares et al., 1999; Verma et al., 2017; Bousset et al., 2008).

Les autres quantités physiques sont adimensionnées selon le tableau 1.1. Les bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie adimensionnés s'écrivent alors :

$$\nabla^+ \cdot \mathbf{u}^+ = 0, \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial t^+} + \mathbf{u}^+ \cdot \nabla^+ \mathbf{u}^+ = -\nabla^+ p^+ + Pr \theta \mathbf{x}_3 + \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \nabla^{+2} \mathbf{u}^+, \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t^+} + \mathbf{u}^+ \cdot \nabla^+ \theta = \frac{1}{\sqrt{Ra}} (\nabla^{+2} \theta - \nabla^+ \cdot \mathbf{q}^{rad+}). \quad (1.25)$$

Les conditions aux limites associées sont :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^+ = 0 & \text{sur les six parois,} \\ \theta = 0, 5 & \text{sur le plan } x_3^+ = 0, \\ \theta = -0, 5 & \text{sur le plan } x_3^+ = 1, \\ (-\nabla^+ \theta + \mathbf{q}^{rad+}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur les plans } x_1^+ = 0, x_1^+ = 1, x_2^+ = 0, x_2^+ = 1. \end{cases} \quad (1.26)$$

Pour traiter les transferts radiatifs de manière dimensionnelle, il faut en outre spécifier la taille de la cavité, la température ainsi que les propriétés radiatives des parois et du gaz :

- le champ de température dimensionnel est défini comme :  $T = \theta\Delta T + T_0$ , avec  $\Delta T = \text{RaPr}a^2T_0/(gL^3)$ ;
- les parois de la cavité sont considérées grises
- le coefficient d'absorption  $\kappa_\nu$  du mélange air/CO<sub>2</sub>/H<sub>2</sub>O est considéré uniforme et pris à la température  $T_0$ , étant donnés les faibles écarts de température et de pression au sein de la cavité ; il s'obtient en imposant les concentrations des espèces absorbantes considérées.

Le flux radiatif  $\mathbf{q}^{\text{rad}}$  est divisé par  $\lambda\Delta T/L$ ,  $\lambda$  désignant la conductivité thermique du gaz, pour être intégré au bilan d'énergie 1.4 et à la condition aux limites 1.5. Pour l'ensemble des simulations couplées, on considère de l'air à température  $T_0 = 300$  K, à pression atmosphérique, et dont les propriétés thermophysiques ne sont pas modifiées par la faible présence d'espèces absorbantes (vapeur d'eau et dioxyde de carbone). On prendra donc  $\text{Pr} = 0,707$ ,  $a = 2,25 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  et  $\lambda = 2,63 \times 10^{-2} \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  ; Les fractions molaires de vapeur d'eau et de dioxyde de carbone  $X_{\text{H}_2\text{O}}$  et  $X_{\text{CO}_2}$  sont ici elles aussi fixées à 2 % et 0.1 % respectivement.

Les paramètres variables restants sont le nombre de Rayleigh  $\text{Ra}$  et la taille de la cavité  $L$ .

## 1.3 Propriétés radiatives du milieu

### 1.3.1 Spectre d'absorption raie par raie

À l'Equilibre Thermodynamique Local (ETL), les molécules occupent différents niveaux d'énergie, chacun caractérisé par un état électronique, un état de vibration et un état de rotation de la molécule considérée. Le rayonnement thermique est lié à des transitions radiatives entre niveaux d'énergie : la transition radiative d'un état d'énergie  $E_1$  vers un état d'énergie  $E_2$  est associée à l'émission (si  $E_2 < E_1$ ) ou l'absorption (si  $E_2 > E_1$ ) d'un photon de fréquence  $\nu = (E_2 - E_1)/h$ ,  $h$  désignant la constante de Planck. Les niveaux d'énergie de la molécule étant quantifiés, seuls les photons de certaines fréquences  $\nu_r$  peuvent être émis ou absorbés par celle-ci ; on parle alors de raie d'absorption. Une raie d'absorption à la fréquence  $\nu_r$  est caractérisée par son intensité  $S_r$  (en  $\text{m}^{-1} \text{ atm}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ) et son profil  $F_r(\nu - \nu_r)$  normalisé (en secondes), qui dépend de la température.

Le coefficient d'absorption  $\kappa_{ir\nu}$  de la raie  $r$  d'une espèce  $i$  est une fonction continue de  $\nu$  obtenue en multipliant la pression partielle de l'espèce  $i$ ,  $X_iP$ , par l'intensité  $S_{ir}$  et le profil  $F_{ir}(\nu - \nu_r)$  de sa raie. Pour un gaz comportant plusieurs espèces absorbantes, le coefficient d'absorption  $\kappa_\nu$  est la somme des coefficients d'absorptions de toutes les raies  $r$  de toutes les espèces absorbantes

$i$  présentes :

$$\kappa_\nu = \sum_i \sum_r \kappa_{ir\nu} = \sum_i \sum_r X_i P S_{ir} F_{ir}(\nu - \nu_{ir}). \quad (1.27)$$

Le recouvrement entre les raies d'absorption est ici pris en compte de manière simplifiée en négligeant les effets de couplage de raie.

La méthode raie par raie consiste à représenter le plus fidèlement possible chacune des raies du mélange gazeux dans la plage de fréquences où la luminance du rayonnement d'équilibre donnée par la fonction de Planck (équation 1.8) est non négligeable.

La température moyenne de la cavité étudiée est  $T_0 = 300$  K. A cette température, le rayonnement d'équilibre est quasi exclusivement situé dans l'infrarouge (longueur d'onde comprise entre  $0,7 \mu\text{m}$  et  $1000 \mu\text{m}$ ) : 98% de la luminance est comprise entre 5 et  $80 \mu\text{m}$  ( $125$  et  $2000 \text{cm}^{-1}$ ). Dans cette gamme de fréquences, les émissions et absorptions de photons correspondent à des transitions entre niveaux de rotation-vibration d'un même état électronique : seules les molécules dotées d'un moment dipolaire non nul sont susceptibles d'émettre ou d'absorber du rayonnement de manière significative. L'air, principalement constitué de molécules contenant deux atomes identiques ( $\text{N}_2$  et  $\text{O}_2$ ), peut donc être considéré transparent. En revanche, les molécules d'eau et de dioxyde de carbone vont interagir avec le rayonnement et rendent le mélange semi-transparent.

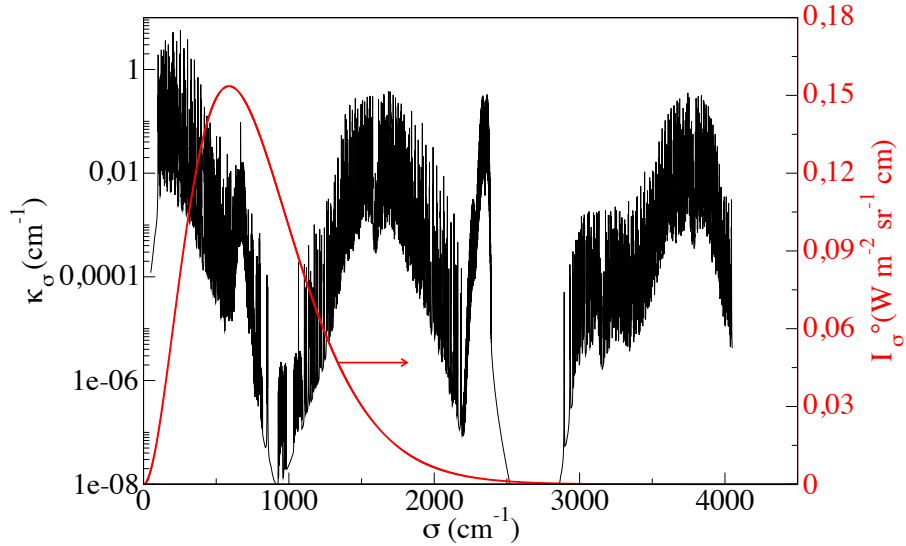


FIGURE 1.3 – Spectre d'absorption du mélange air/ $\text{CO}_2$ / $\text{H}_2\text{O}$  considéré, pour  $P = 1$  atm,  $T_0 = 300$  K,  $X_{\text{H}_2\text{O}} = 0,02$  et  $X_{\text{CO}_2} = 0,001$ . En rouge, la fonction de Planck  $I_\sigma^o(T_0)$  pour  $T_0 = 300$  K.  $\sigma = c\nu$  désigne le nombre d'onde, plus couramment utilisé que la fréquence en spectroscopie infrarouge.



La figure 1.3 représente le spectre d'absorption d'un mélange air/CO<sub>2</sub>/H<sub>2</sub>O de composition  $X_{\text{H}_2\text{O}} = 0,02$  et  $X_{\text{CO}_2} = 0,001$ . Ce spectre a été obtenu à partir de la base de données spectroscopiques HITRAN (Rothman et al., 2009) et est discrétisé pour des nombres d'onde  $\sigma = c\nu$  ( $c$  désignant la célérité de la lumière dans le vide) entre 50 et 4050 cm<sup>-1</sup> avec une résolution de 0,025 cm<sup>-1</sup>, soit 160 000 points au total. Le coefficient d'absorption étant directement proportionnel à la fraction molaire, il est possible d'utiliser ce spectre pour des simulations avec d'autres concentrations en espèces absorbantes dans le gaz, tant que le rapport  $X_{\text{H}_2\text{O}}/X_{\text{CO}_2}$  reste le même.

### 1.3.2 Le modèle ADF

Le spectre d'absorption du mélange gazeux considéré ici et présenté dans la figure 1.3 est caractérisé par de fortes variations selon la fréquence et nécessite de nombreux points pour être représenté fidèlement (160 000 ici). Pour calculer les flux radiatifs, il faut cependant intégrer les luminances sur tout le spectre (équations 1.12 et 1.13). L'idée du modèle *Absorption Distribution Function* (ADF), développé par Pierrot et al. (1999), est de réorganiser les luminances selon les valeurs croissantes du coefficient d'absorption, afin d'avoir une fonction beaucoup plus lisse dont la représentation nécessite beaucoup moins de points, ce qui se traduit par un gain de temps sur le nombre de résolutions de l'équation de transfert radiatif à effectuer.

On suppose que le coefficient d'absorption  $\kappa_\nu(\mathbf{x})$  dépend séparément de la fréquence  $\nu$  et de la position  $\mathbf{x}$  (de par la température, la pression et la composition chimique locales) :

$$\kappa_\nu(\mathbf{x}) = \eta(\nu)\phi(\mathbf{x}). \quad (1.28)$$

On définit la fonction de distribution cumulée de  $\eta(\nu)$ , pondérée par la fonction de Planck à la température  $T$ , comme

$$F(h, T) = \frac{\pi}{\sigma_{SB}T^4} \int_{\nu/\eta(\nu) \leq h} I_\nu^\circ(T) d\nu. \quad (1.29)$$

Cette fonction possède une allure beaucoup plus lisse que le spectre d'absorption raie par raie. Le modèle consiste alors à remplacer l'intégration sur les fréquences  $\nu$  par une intégration sur les valeurs de  $\eta$ . Les luminances  $I_\eta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega})$  et  $I_\eta^\circ(\mathbf{x})$ , fonctions de  $\eta$ , sont définies par :

$$I_\eta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\nu/\eta(\nu) \leq \eta} I_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) d\nu, \quad (1.30)$$

$$I_\eta^\circ(\mathbf{x}) = \frac{\partial F(\eta, T(\mathbf{x}))}{\partial \eta} \frac{\sigma_{SB}T^4}{\pi}. \quad (1.31)$$

$I_\eta d\eta$  est la fraction de la luminance totale  $\int_0^\infty I_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) d\nu$  correspondant aux intervalles de  $\nu$  tels que  $\eta \leq \eta(\nu) \leq \eta + d\eta$  et  $I_\eta^\circ(\mathbf{x})$  est la fraction de la

luminance d'équilibre  $\sigma_{SB}T^4/\pi$  correspondant aux mêmes intervalles de  $\nu$ . La luminance  $I_\eta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega})$  satisfait l'équation de transfert radiatif :

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I_\eta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) = \eta\phi(\mathbf{x}) (I_\eta^\circ(T(\mathbf{x})) - I_\eta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega})). \quad (1.32)$$

La fonction de distribution cumulée est discrétisée en intervalles  $[\eta_i^-; \eta_i^+]$ . La luminance  $I_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega})$  associée à cet intervalle vérifie l'équation discrète

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) = \kappa_i(\mathbf{x}) \left( a_i(\mathbf{x}) \frac{\sigma_{SB}T^4(\mathbf{x})}{\pi} - I_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) \right), \quad (1.33)$$

où  $a_i(\mathbf{x}) = F(\eta_i^+, T(\mathbf{x})) - F(\eta_i^-, T(\mathbf{x}))$  et où  $\kappa_i = \eta_i\phi(\mathbf{x})$  est une valeur moyenne du coefficient d'absorption sur l'intervalle  $[\eta_i^- \phi(\mathbf{x}); \eta_i^+ \phi(\mathbf{x})]$ . La condition aux limites associée est, pour un paroi grise et diffuse :

$$I_i(\mathbf{x}_p) = \epsilon(\mathbf{x}_p) a_i(\mathbf{x}_p) \frac{\sigma_{SB}T^4(\mathbf{x}_p)}{\pi} + \frac{1 - \epsilon(\mathbf{x}_p)}{\pi} \int_{\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n} < 0} I_i(\mathbf{x}_p, \boldsymbol{\Omega}') |\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n}| d\boldsymbol{\Omega}'. \quad (1.34)$$

L'intégration spectrale s'effectue simplement en sommant les contributions de chaque intervalle  $i$ . Tant que l'hypothèse 1.28 est respectée, la formulation du modèles ADF est exacte et sa précision ne dépend que de la discrétisation choisie pour la fonction de distribution cumulée  $F$ . Cependant, le spectre des mélanges gazeux ne vérifie que rarement cette hypothèse. Dans notre cas d'application, les écarts de température et de pression sont toutefois suffisamment faibles pour que cette hypothèse puisse être considérée valide, avec une erreur commise inférieure à 1%. Cependant, pour un mélange gazeux réel, cette hypothèse n'est que rarement vérifiée, notamment en raison des différences de température au sein du domaine. L'erreur commise est alors de l'ordre de  $\Delta T/T_0$  (Soucasse (2013), annexe C).

### Implémentation

Compte tenu des faibles écarts de température et de pression au sein du domaine, le coefficient d'absorption est considéré uniforme et le modèle ADF est appliqué en posant  $\phi(\mathbf{x}) = 1$ . Pour s'adapter aux faibles gradients de température, une luminance modifiée est introduite :

$$\mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) = I_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) - I_\nu^\circ(T_S), \quad (1.35)$$

$$\mathcal{I}_\nu^\circ(\mathbf{x}) = I_\nu^\circ(\mathbf{x}) - I_\nu^\circ(T_S), \quad (1.36)$$

où  $T_S$  est la température de *shift*, choisie légèrement inférieure à la température minimale du domaine  $T_f$ . L'introduction de cette luminance modifiée sera justifiée et expliquée en détail dans le paragraphe § 2.2.1.  $\mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega})$  vérifie également

l'équation de transfert radiatif puisque celle-ci est linéaire en  $I_\nu$ . En utilisant la fonction de Planck modifiée (1.36), la fonction de distribution cumulée devient :

$$F(\kappa) = \frac{\pi}{\sigma_{SB}(T_0^4 - T_S^4)} \int_{\nu/\kappa_\nu(T_0) \leq \kappa} (I_\nu^\circ(T_0) - I_\nu^\circ(T_S)) d\nu. \quad (1.37)$$

De même, l'équation de transfert radiatif (1.33) associée au modèle ADF discrétisé, s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathcal{I}_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) = \kappa_i(\mathbf{x}) \left( a_i(\mathbf{x}) \frac{\sigma_{SB}(T^4(\mathbf{x}) - T_S^4)}{\pi} - \mathcal{I}_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) \right). \quad (1.38)$$

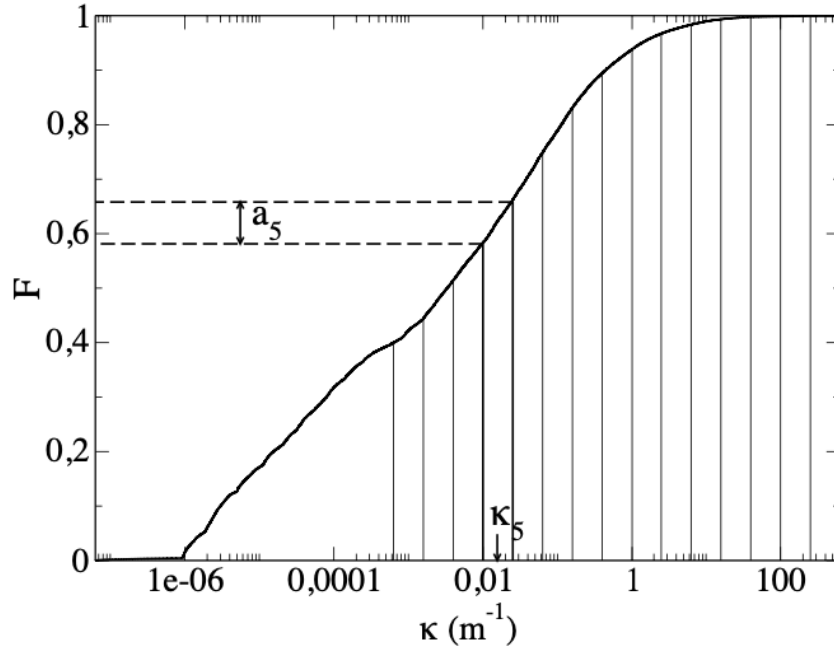


FIGURE 1.4 – Fonction de distribution cumulée du coefficient d'absorption pondérée par la fonction de Planck modifiée (équation (1.37)) relative au spectre du mélange air/CO<sub>2</sub>/H<sub>2</sub>O de composition  $X_{\text{H}_2\text{O}} = 0,02$  et  $X_{\text{CO}_2} = 0,001$ , à  $P = 1$  atm et  $T_0 = 300$  K représenté figure 1.3. La température de shift est de  $T_S = 299,9$  K. Discrétisation sur 16 intervalles de  $\kappa$ .

La figure 1.4 représente la fonction de distribution cumulée du mélange air/CO<sub>2</sub>/H<sub>2</sub>O de composition  $X_{\text{H}_2\text{O}} = 0,02$  et  $X_{\text{CO}_2} = 0,001$ , à haute résolution, construite à partir du spectre d'absorption raie par raie présenté en figure 1.3. Le spectre est discrétisé en  $N_{ADF} = 16$  intervalles entre les valeurs minimale et maximale prises par le coefficient d'absorption de manière logarithmique, mis à

part le premier intervalle des  $\kappa$  les plus faibles dont la taille est fixée arbitrairement (le premier intervalle est optiquement mince ( $\kappa_1 L \ll 1$ ) et peut être plus large que les autres). La valeur moyenne  $\kappa_i$  dans chaque intervalle est calculée selon :

$$\kappa_i = (\kappa_i^-)^{1-\alpha} (\kappa_i^+)^{\alpha}, \quad (1.39)$$

avec  $\alpha = 0,52$  un paramètre optimisé. L'émissivité modifiée d'une colonne de longueur  $l$  homogène et isotherme à la température  $T$  de gaz est alors

$$\epsilon_{\text{tot}} = \frac{\pi}{\sigma_{SB}(T^4 - T_S^4)} \int_0^{\infty} (I_{\nu}^{\circ}(T) - I_{\nu}^{\circ}(T_S))(1 - \exp(-\kappa_{\nu}l)) d\nu. \quad (1.40)$$

$\kappa_i$ (m <sup>-1</sup> )	$a_i$
5,24807645 × 10 <sup>-6</sup>	4,00010060 × 10 <sup>-1</sup>
9,81747956 × 10 <sup>-4</sup>	4,34007700 × 10 <sup>-2</sup>
2,46603926 × 10 <sup>-3</sup>	7,07250000 × 10 <sup>-2</sup>
6,19441015 × 10 <sup>-3</sup>	6,90137200 × 10 <sup>-2</sup>
1,55596562 × 10 <sup>-2</sup>	7,90771500 × 10 <sup>-2</sup>
3,90840871 × 10 <sup>-2</sup>	8,66007100 × 10 <sup>-2</sup>
9,81747891 × 10 <sup>-2</sup>	8,22948400 × 10 <sup>-2</sup>
2,46603933 × 10 <sup>-1</sup>	6,34657800 × 10 <sup>-2</sup>
6,19441082 × 10 <sup>-1</sup>	4,34745600 × 10 <sup>-2</sup>
1,55596567	2,91461900 × 10 <sup>-2</sup>
3,90840911	1,64320300 × 10 <sup>-2</sup>
9,81748026	9,85414000 × 10 <sup>-2</sup>
2,46603959 × 10 <sup>1</sup>	3,95211000 × 10 <sup>-3</sup>
6,19441104 × 10 <sup>1</sup>	1,19208000 × 10 <sup>-3</sup>
1,55596582 × 10 <sup>2</sup>	6,10420000 × 10 <sup>-4</sup>
3,90840927 × 10 <sup>2</sup>	1,65100000 × 10 <sup>-4</sup>

TABLE 1.2 – Paramètres du modèle ADF

Son approximation par le modèle ADF s'écrit :

$$\epsilon_{\text{tot}} \simeq \sum_{i=1}^{N_{ADF}} a_i (1 - \exp(-\kappa_i l)). \quad (1.41)$$

Les paramètres  $a_i$  et  $\kappa_i$  obtenus sont donnés dans la table 1.2.

La figure 1.5 compare l'émissivité d'une colonne de gaz isotherme à température  $T_0$ , obtenues avec la méthode raie par raie et par le modèle ADF, pour différentes longueurs  $l$  de colonne. Pour le mélange air/CO<sub>2</sub>/H<sub>2</sub>O considéré, les écarts sont inférieurs à 1%. Le modèle ADF permet donc un gain de temps considérable dans le calcul des termes radiatifs en réduisant, ici par un facteur 10<sup>4</sup>, le nombre de points nécessaires à la représentation du spectre d'absorption du gaz.

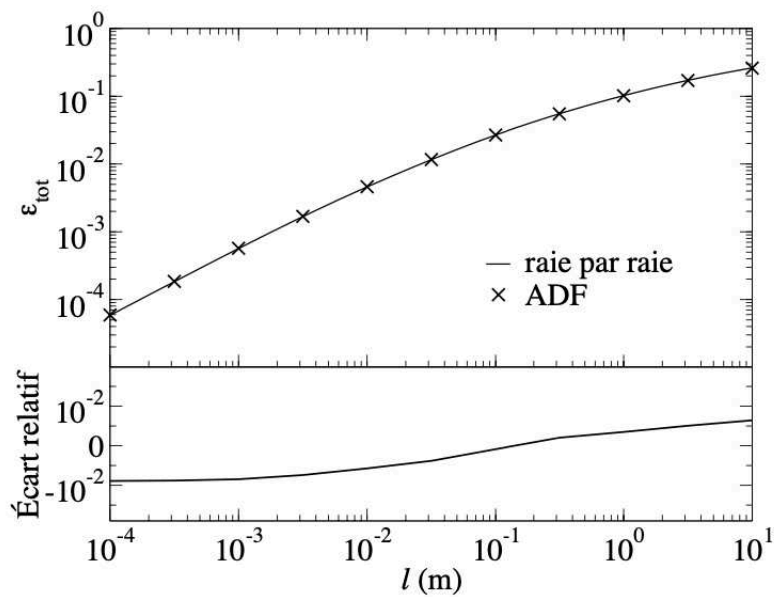


FIGURE 1.5 – Emissivité modifiée d’une colonne homogène isotherme à la température  $T_0 = 300$  K du mélange air/ $\text{CO}_2$ / $\text{H}_2\text{O}$  de composition  $X_{\text{H}_2\text{O}} = 0,02$  et  $X_{\text{CO}_2} = 0,001$ , à  $P = 1$  atm et  $T_0 = 300$  K pour différentes longueur  $l$ . La température de *shift* est de  $T_S = 299,9$  K. Comparaison entre le modèle ADF et l’approche raie par raie.





## Chapitre 2

# Méthodes numériques

Le système d'équations couplées (1.2), (1.3), (1.4) et (1.7) décrivant l'écoulement ne possède pas de solution analytique, sauf dans des cas particuliers très simples. Pour tenter de déterminer une solution approchée aussi proche que possible de la solution exacte, il est nécessaire de recourir à des méthodes numériques précises minimisant les erreurs d'approximation. Cette résolution numérique repose sur une discrétisation spatiale et temporelle des équations de la convection, et spatiale, spectrale et directionnelle pour l'équation du rayonnement, ainsi que sur un schéma d'approximation des opérateurs différentiels

Le maillage discret utilisé pour recouvrir l'espace doit être suffisamment fin pour représenter toutes les structures spatiales de l'écoulement, notamment les plus petites, et la discrétisation temporelle doit être adaptée pour capter les variations de toutes les grandeurs. En régime instationnaire, on parle alors de simulation numérique directe (ou DNS pour Direct Numerical Simulation). L'ordre de convergence du schéma numérique, c'est-à-dire la puissance à laquelle la précision de la solution augmente en fonction de la finesse du maillage utilisé, doit être le plus élevé possible pour limiter la taille du mailles et le pas de temps, et donc le temps de calcul. Les méthodes spectrales ont la particularité d'être très précises et d'avoir un ordre de convergence très élevé, due à leur très bonne représentation des gradients. La contrepartie est d'être limitées à des géométries simples, ce qui est le cas dans cette étude. Une telle méthode est donc choisie, associée à un schéma temporel semi-implicite d'ordre deux.

Pour la résolution des transferts radiatifs, la méthode la plus précise est la méthode de lancer de rayon, qui repose sur une discrétisation rigoureuse de l'équation de transfert radiatif (1.7) sur les variables d'espace et de direction. Cette discrétisation peut être très coûteuse, notamment en ce qui concerne les fréquences, et n'est pas envisageable pour une représentation à haute résolution spectrale (raie par raie) des propriétés radiatives. La méthode de lancer de rayon est donc associée au modèle ADF présenté au paragraphe § 1.3.2 pour les propriétés radiatives, afin de calculer les termes sources radiatifs dans le bilan d'énergie. Il est à noter que, dans le cas présent, le modèle ADF est quasi exact pour la représentation du spectre d'absorption du gaz.



## 2.1 Méthode spectrale pour la convection naturelle

Les méthodes spectrales permettent d'atteindre une bonne précision de la solution pour un coût de calcul raisonnable. Ces méthodes reposent sur l'idée que la solution recherchée  $f(x)$  peut être représentée sur une base de fonctions orthogonales  $\phi_k(x) : f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \check{f}_k \phi_k(x)$ , où les  $\check{f}_k$  sont les coefficients spectraux de  $f$ . La base de fonctions la plus connue est celle de Fourier ( $\phi_k(x) = \exp(ikx)$ ), qui permet d'engendrer les fonctions périodiques. L'avantage de cette représentation est la décroissance exponentielle des coefficients de Fourier pour la représentation des fonctions de classe  $C^\infty$  : en tronquant la représentation à l'ordre  $N$  (soit  $f(x) \simeq \sum_{k=0}^N \check{f}_k \phi_k(x)$ ), l'erreur commise est de l'ordre de  $\mathcal{O}(\exp(-N))$ . Cette base n'est cependant pas adaptée dans notre cas puisque le champ de température n'est pas périodique (particulièrement selon l'axe vertical). Une revue détaillée de ces méthodes pour la mécanique des fluides peut être trouvée dans Canuto et al. (2006a,b).

La méthode numérique utilisée ici est une méthode spectrale de collocation. L'équation aux dérivées partielles est résolue dans l'espace physique aux points de collocations, qui sont les points de quadrature utilisés pour évaluer les coefficients spectraux. La représentation spectrale est exploitée pour calculer les termes différentiels. Un schéma d'approximation temporel d'ordre 2 est choisi et le couplage pression-vitesse est réalisé au moyen d'une méthode de projection. L'algorithme de résolution est parallélisé par décomposition du domaine spatial. Le code informatique a été développé au laboratoire LIMSI par Jalel Chergui, Shihe Xin et Patrick Le Quéré.

### 2.1.1 Discrétisation spatiale : méthode de collocation Tchebychev

On note  $\mathcal{L}_w^2([-1; 1], \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions de carré intégrable de  $[-1; 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . On définit la fonction poids  $w(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ; muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_w$ , défini par :

$$\forall f, g \in \mathcal{L}_w^2([-1; 1], \mathbb{R}), (f, g)_w = \int_{-1}^1 f(x)g(x)w(x)dx, \quad (2.1)$$

l'ensemble  $\mathcal{L}_w^2([-1; 1], \mathbb{R})$  est un espace de Hilbert.

On note également  $(\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la famille des polynômes de Tchebychev, construits à partir de la propriété :  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \cos(n\alpha) = \mathcal{T}_n(\cos(\alpha))$ . Ils sont plus couramment définis sur l'intervalle  $[-1; 1]$  par :

$$\forall x \in [-1; 1], \mathcal{T}_n(x) = \cos(n \cos^{-1}(x)). \quad (2.2)$$

Les polynômes de Tchebychev forment une famille orthogonale au sens du produit scalaire défini en (2.1) :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p \neq q \Rightarrow (\mathcal{T}_p, \mathcal{T}_q)_w = \int_{-1}^1 \mathcal{T}_p(x)\mathcal{T}_q(x)w(x)dx = 0, \quad (2.3)$$

et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|\mathcal{T}_k\|_w^2 = (\mathcal{T}_k, \mathcal{T}_k) = \frac{\pi}{2}c_k, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} c_k = 2, & k = 0 \\ c_k = 1, & k \geq 1 \end{cases}. \quad (2.4)$$

Les polynômes de Tchebychev forment une base de Schauder de l'espace  $\mathcal{L}_w^2([-1; 1], \mathbb{R})$ . Toute fonction  $f$  de cet espace peut donc s'écrire comme une combinaison linéaire de polynômes de Tchebychev :

$$\forall f \in \mathcal{L}_w^2([-1; 1], \mathbb{R}), \forall x \in [-1; 1], f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \check{f}_k \mathcal{T}_k(x), \quad (2.5)$$

où les  $\check{f}_k$  sont les coefficients spectraux de  $f$ , obtenus par projection de  $f$  sur la famille  $(\mathcal{T}_k)$  :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \check{f}_k = \frac{2}{\pi c_k} \int_{-1}^1 f(x) \mathcal{T}_k(x) w(x) dx. \quad (2.6)$$

On fait ici l'hypothèse classique que les solutions du système d'équations (1.23), (1.24) et (1.25) sont dans  $\mathcal{L}_w^2([-1; 1], \mathbb{R})$  et peuvent ainsi être représentées sur une base de polynômes de Tchebychev, qui a l'avantage d'être adaptée aux configurations non périodiques.

### Méthode de collocation

Les équations à résoudre sont de type advection/diffusion, qui peuvent s'écrire en une dimension

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (2.7)$$

La méthode de collocation consiste à calculer une solution approchée  $f^N$  de  $f$ , obtenue en tronquant la décomposition spectrale (2.5) à l'ordre  $N$  (soit  $N+1$  polynômes) :

$$f^N(x) = \sum_{k=0}^N \check{f}_k \mathcal{T}_k(x). \quad (2.8)$$

La fonction  $f^N$  vérifie l'équation (2.7) en un nombre fini de points  $x_i$ , appelés points de collocation :

$$\left. \frac{\partial f^N}{\partial t} \right|_{x=x_i} + u \left. \frac{\partial f^N}{\partial x} \right|_{x=x_i} = \left. \frac{\partial^2 f^N}{\partial x^2} \right|_{x=x_i}. \quad (2.9)$$

Les points de collocation  $x_i$  choisis sont les points de la quadrature de Gauss-Lobatto :

$$\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket x_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right) \quad \text{soit} \quad \mathcal{T}_k(x_i) = \cos\left(\frac{ik\pi}{N}\right). \quad (2.10)$$

Les coefficients spectraux de  $f^N$  sont alors calculés comme :

$$\check{f}_k = \frac{2}{\pi c_k} \sum_{k=0}^N f^N(x_i) \cos\left(\frac{ik\pi}{N}\right) w_i, \quad (2.11)$$

avec

$$w_i = \begin{cases} \pi/2N, & i \in 0, N \\ \pi/N, & i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket \end{cases}. \quad (2.12)$$

Les points de collocation  $x_i$  définissent le maillage de l'espace physique. Leur définition en cosinus les rend plus densément répartis proche des parois, comme illustré en deux dimensions sur la figure 2.1, ce qui est très adapté pour le calcul des gradients de température et de vitesse dans la couche limite. La qualité de l'approximation spectrale est donc conditionnée par l'ordre de troncature  $N$  de la représentation spectrale (2.8), qui correspond au nombre de points de quadrature.

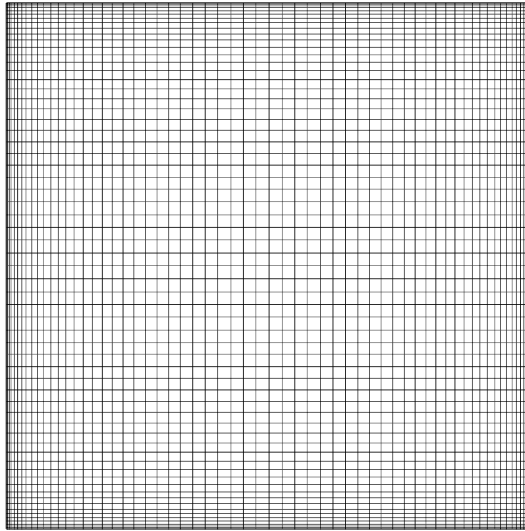


FIGURE 2.1 – Maillage de l'espace physique en deux dimensions en utilisant les points de collocation issus de la quadrature de Gauss-Lobatto

Outre le raffinement naturel du maillage proche des parois, la représentation Tchebychev des solutions possède des avantages certains. En effet les coefficients spectraux Tchebychev ont une décroissance similaire à ceux de Fourier, les deux représentations étant équivalentes avec le changement de variable  $\theta = \cos^{-1}(x)$ . De plus, les dérivées sont aisées à calculer dans l'espace spectral : si  $\check{f}_k^{(1)}$  et  $\check{f}_k^{(2)}$  sont les coefficients spectraux des dérivées première et seconde de  $f^N$ , soit

respectivement  $\partial f^N / \partial x$  et  $\partial^2 f^N / \partial x^2$ , on a :

$$\begin{aligned} \check{f}_k^{(1)} &\simeq \frac{2}{c_k} \sum_{\substack{p=k+1 \\ p+k \text{ impair}}}^N p \check{f}_p, \\ \check{f}_k^{(2)} &\simeq \frac{1}{c_k} \sum_{\substack{p=k+2 \\ p+k \text{ pair}}}^N p(p^2 - k^2) \check{f}_p. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Pour calculer les dérivées première et seconde de  $f^N$ , il faut ainsi :

1. déterminer les coefficients spectraux de  $f^N$  avec la relation de passage (2.11),
2. en déduire les coefficients spectraux des dérivées grâce à (2.13),
3. retourner dans l'espace physique par la relation (2.8) appliquée au terme dérivé.

### Généralisation 3D

Pour des raisons de lisibilité, la décomposition spectrale Tchebuehev a été présentée dans un espace à une dimension  $x$ . Les expressions se généralisent cependant très bien en trois dimensions ; par exemple, les relations de passage entre l'espace physique et l'espace spectral (2.8) et (2.11) deviennent :

$$f^{LMN}(x_i, y_j, z_k, t) = \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \check{f}_{lmn}(t) \mathcal{T}_l(x_i) \mathcal{T}_m(y_j) \mathcal{T}_n(z_k) \quad (2.14)$$

et

$$\check{f}_{lmn}(t) = \frac{8}{\pi^3 c_l c_m c_n} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^N f^{LMN}(x_i, y_j, z_k, t) \mathcal{T}_l(x_i) \mathcal{T}_m(y_j) \mathcal{T}_n(z_k) w_i w_j w_k. \quad (2.15)$$

#### 2.1.2 Discrétisation temporelle

En trois dimensions et en l'absence de terme source, l'équation d'advection/diffusion que l'on cherche à résoudre s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f = \nabla^2 f. \quad (2.16)$$

On s'intéresse ici à la discrétisation du terme de dérivation temporelle. De cette discrétisation apparaît le pas de temps  $\Delta t$ , dont dépendent à la fois la vitesse de calcul des solutions au problème, mais aussi la stabilité du schéma numérique. De manière générale, l'analyse de stabilité des méthodes de collocation est difficile et dépend fortement du degré d'explicitation des termes dans la discrétisation.

La première possibilité, et la plus facile à implémenter, est la discrétisation par schéma temporel purement explicite : pour un petit pas de temps  $\delta t$ , on calcule la valeur des termes d'advection ( $\mathbf{u} \cdot \nabla$ ) et de diffusion ( $\nabla^2$ ) au temps  $t + \delta t$  à partir de l'évaluation de ces opérateurs au temps  $t$ . Cependant, ce type de méthode requiert des pas de temps  $\delta t$  très petit pour garantir la stabilité du schéma, notamment en raison du terme de diffusion  $\nabla^2 f$  : pour satisfaire la contrainte de stabilité, le pas de temps doit donc évoluer en  $\mathcal{O}(N^{-4})$  (Le Quéré et Alziary de Roquefort, 1985), ce qui est rédhibitoire dans notre cas où l'étude des régimes turbulents impose un maillage fin ( $N$  grand).

A l'opposé du spectre des possibilités se trouve la discrétisation par schéma temporel purement implicite, où tous les opérateurs (advection  $\mathbf{u} \cdot \nabla$  et diffusion  $\nabla^2$ ) sont évalués directement au temps  $t + \delta t$ . Cela a comme avantage de relâcher complètement les contraintes de stabilité sur le pas de temps, mais implique en contrepartie la résolution d'un système non-linéaire (dû au terme d'advection), ce qui est aussi extrêmement coûteux.

Entre ces deux extrêmes existent toute une gamme de méthodes semi-implicites. Ici, la discrétisation retenue se fait par un schéma semi-implicite d'ordre 2 : le terme de diffusion est développé de manière implicite (de type Euler-retardé), afin de s'affranchir de la contrainte du pas de temps qui lui est associée, et le terme d'advection est développé de manière explicite (de type Adams-Bashforth), afin d'éviter la résolution d'un système non-linéaire (Vanel et al., 1986). L'évaluation du terme de diffusion se fait donc par la résolution d'un système linéaire (beaucoup plus simple qu'un système non linéaire), et la contrainte sur le pas de temps due à l'explicitation du terme convectif est en  $\mathcal{O}(N^{-2})$  (voir Canuto et al. (2006a) annexe D.2.2), beaucoup moins sévère que lors de l'explicitation du terme de diffusion. Ainsi discrétisée, l'équation (2.16) devient :

$$\frac{3f_{n+1} - 4f_n + f_{n-1}}{2\delta t} + 2(\mathbf{u} \cdot \nabla)f_n - (\mathbf{u} \cdot \nabla)f_{n-1} = \nabla^2 f_{n+1}, \quad (2.17)$$

où  $f_n \equiv f(n\delta t)$ .

En isolant dans (2.17) les termes au temps  $n + 1$ , on obtient une équation de Helmholtz qui doit être résolue pour les trois composantes du vecteur vitesse, ainsi que pour la température :

$$f_{n+1} = \left( \nabla^2 - \frac{3}{2\delta t} \right)^{-1} S_{n,n-1}, \quad (2.18)$$

où  $S_{n,n-1}$  est le terme source dépendant des grandeurs aux temps  $n$  et  $n - 1$  :

$$S_{n,n-1} = -\frac{2}{\delta t}f_n + \frac{1}{2\delta t}f_{n-1} + 2(\mathbf{u} \cdot \nabla)f_n - (\mathbf{u} \cdot \nabla)f_{n-1}. \quad (2.19)$$

Pour résoudre cette équation, l'opérateur de Helmholtz  $H \equiv \nabla^2 - 3/(2\delta t)$  doit être inversé. Comme l'opérateur de Helmholtz discrétisé sur un maillage Tchebychev possède des valeurs propres réelles, il est tridiagonalisable dans chaque direction d'espace. Après calcul des valeurs propres et vecteurs propres

de l'opérateur dérivée seconde  $\nabla^2$ , le terme source  $S_{n,n-1}$  est projeté dans la base des vecteurs propres. Le système diagonal est ensuite résolu et retourné dans l'espace physique de départ. Pour traiter les bords du domaine, on diagonalise l'opérateur de dérivation seconde tout en éliminant la première et la dernière ligne, et les conditions aux limites sont imposées après résolution du système réduit.

### 2.1.3 Couplage pression-vitesse

Une des difficultés de l'étude numérique des écoulements incompressibles est la résolution du couple d'inconnues pression et vitesse, qui doivent simultanément vérifier les bilans de masse (1.2) et de quantité de mouvement (1.3), le champ de pression n'étant pas déterminé explicitement par une équation d'état. Plusieurs méthodes de résolution existent, comme l'algorithme d'Uzawa : le bilan de quantité de mouvement, discrétisé en temps, peut s'écrire sous la forme d'une équation de Helmholtz où la pression est une inconnue :

$$H\mathbf{u}_{n+1} - \nabla p_{n+1} = \mathbf{S}_{n,n+1}. \quad (2.20)$$

On a alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_{n+1} - \nabla \cdot H^{-1} \nabla p_{n+1} = \nabla \cdot H^{-1} \mathbf{S}_{n,n+1}. \quad (2.21)$$

D'après le bilan de masse, la divergence de la vitesse  $\nabla \cdot \mathbf{u}_{n+1}$  est nulle. Puis, en notant  $U = \nabla \cdot H^{-1} \nabla$  l'opérateur d'Uzawa, on a :

$$p_{n+1} = -U^{-1}(\nabla \cdot H^{-1} \mathbf{S}_{n,n+1}). \quad (2.22)$$

La méthode d'Uzawa est rigoureuse, mais l'inversion de l'opérateur d'Uzawa est un problème numérique difficile et coûteux.

Une autre possibilité consiste à prendre la divergence du bilan de quantité de mouvement et d'écrire une équation de Poisson pour la pression, de type  $\nabla^2 p_{n+1} = S'_{n,n-1}$ . Différentes méthodes de résolution existent (méthodes de relaxation, méthode de la matrice d'influence (Le Quéré, 1991), etc.) mais leur coût est trop élevé, particulièrement dans une étude tridimensionnelle.

On utilise ici une résolution par une méthode de projection (Xin et Le Quéré, 2002) où la pression et la vitesse ne sont pas évaluées exactement au même moment. A partir du gradient de pression à un instant  $n$ , on calcule un champ de vitesse intermédiaire  $\mathbf{u}_*$  qui satisfait le bilan de quantité de mouvement, mais pas le bilan de masse (sa divergence est non nulle). La pression au temps  $n+1$  est calculée à partir de cette vitesse intermédiaire, en imposant la contrainte d'incompressibilité. Le champ de vitesse est ensuite corrigé pour satisfaire le bilan de masse. Pour que cette approximation reste correcte, une contrainte existe sur le pas de temps  $\delta t = \mathcal{O}(N^{-3/2})$ , mais celle-ci est moindre que la contrainte de stabilité due à l'explicitation du terme convectif (voir § 2.1.2). Des détails supplémentaires peuvent être trouvés sur la méthode dans Achdou et Guermond (2000).

### Algorithme de résolution

En tenant compte de l'adimensionnement des équations présenté au § 1.2, l'algorithme de résolution des équations de la convection comporte les étapes suivantes :

1. Résolution de l'équation de Helmholtz pour la température (les transferts radiatifs ne sont ici pas pris en compte ; voir la partie 2.3 sur le couplage entre les codes de convection et de rayonnement).

$$T_{n+1}^+ = \left( \nabla^{+2} - \frac{3\sqrt{\text{Ra}}}{2\delta t^+} \right)^{-1} S_{n,n-1}^T \quad (2.23)$$

avec

$$S_{n,n-1}^T = \sqrt{\text{Ra}} \left( -\frac{2}{\delta t^+} T_n^+ + \frac{1}{2\delta t^+} T_{n-1}^+ + 2(\mathbf{u}^+ \cdot \nabla^+) T_n^+ - (\mathbf{u}^+ \cdot \nabla^+) T_{n-1}^+ \right) \quad (2.24)$$

2. Résolution de l'équation de Helmholtz pour la vitesse, à partir du champ de pression à l'instant  $n$ , afin de calculer une vitesse intermédiaire  $\mathbf{u}_*^+$ . Ce champ de vitesse n'est pas à divergence nulle et ne satisfait pas le bilan de masse.

$$\mathbf{u}_*^+ = \left( \nabla^{+2} - \frac{3\sqrt{\text{Ra}}}{2\text{Pr}\delta t^+} \right)^{-1} \mathbf{S}_{n,n-1}^u \quad (2.25)$$

avec

$$\mathbf{S}_{n,n-1}^u = \frac{\sqrt{\text{Ra}}}{\text{Pr}} \left( \nabla^+ p_n^+ - \frac{2}{\delta t^+} \mathbf{u}_n^+ + \frac{1}{2\delta t^+} \mathbf{u}_{n-1}^+ + 2(\mathbf{u}^+ \cdot \nabla^+) \mathbf{u}_n^+ - (\mathbf{u}^+ \cdot \nabla^+) \mathbf{u}_{n-1}^+ \right) - \sqrt{\text{Ra}} T_n^+ \mathbf{x}_3 \quad (2.26)$$

3. Calcul de la pression à l'instant  $n+1$  en imposant l'incompressibilité du champ de vitesse à l'instant  $n+1$  (divergence nulle). L'opérateur Laplacien  $\nabla^{+2}$  s'inverse de la même manière que l'opérateur de Helmholtz et, concernant les conditions au parois, le gradient de pression est considéré nul.

$$p_{n+1}^+ = \frac{3}{2\delta t^+} (\nabla^{+2})^{-1} \left( \nabla^+ \cdot \mathbf{u}_*^+ + \frac{2\delta t^+}{3} \nabla^{+2} p_n^+ \right) \quad (2.27)$$

4. Correction du champ de vitesse pour satisfaire le bilan de masse incompressible.

$$\mathbf{u}_{n+1}^+ = \mathbf{u}_*^+ - \frac{2\delta t^+}{3} \nabla^+ (p_{n+1}^+ - p_n^+) \quad (2.28)$$

### 2.1.4 Parallélisation

Lorsque le nombre de Rayleigh, et donc l'intensité de la turbulence, augmente, les structures de l'écoulement deviennent de plus en plus petite. Afin de pouvoir capter ces structures, le maillage spatial utilisé doit donc être de plus en plus fin, ce qui augmente considérablement le nombre de points requis pour la simulation, et donc le temps de calcul. Ceci, ajouté au fait que l'étude des écoulements moyens dans la cavité requiert des temps d'intégration long, rend nécessaire une implémentation parallèle du code afin de pouvoir obtenir des résultats en un temps raisonnable.

La parallélisation se fait ici par décomposition de domaine selon la direction verticale. La cavité cubique, de côté  $L$ , est divisée en  $N_p$  blocs identiques, de dimensions  $L \times L \times (L/N_p)$ , empilés les uns sur les autres. Chaque bloc est discrétisé par un maillage de Gauss-Lobatto dans les trois directions d'espace, tel que représenté sur la figure 2.2, et la résolution des équations au sein de chaque domaine est confiée à un processeur. Le choix de la direction verticale pour la décomposition présente plusieurs avantages, comme celui de ne pas rompre la symétrie du problème. Le fait de découper le domaine en blocs horizontaux entraîne un maillage "en accordéon" selon la direction verticale, dont le pas spatial moyen est plus faible que pour un maillage de Gauss-Lobatto unique, pour un même nombre de points. La parallélisation est cependant limitée dans son efficacité par le nombre de points (et donc de mode Tchebychev pour la représentation spectrale) minimum dans la direction verticale au sein de chaque domaine (au moins une vingtaine de points est nécessaire). Une autre restriction est la limitation de la parallélisation à une seule direction : la méthode du complément de Schur est très rapide en une dimension, mais beaucoup plus complexe à implémenter et coûteuse à calculer dans les trois directions. Le choix a donc été fait de limiter la décomposition de domaine à la direction  $x_3$ .

Une des difficultés liées à la parallélisation par décomposition de domaine est la communication entre les processeurs afin d'assurer les mêmes conditions aux limites et la continuité des variables à l'interface entre les blocs. Pour ce faire, les équations de Helmholtz sont résolues une première fois au sein de chaque domaine en imposant aux interfaces des grandeurs estimées. La méthode du complément de Schur (Canuto *et al.*, 2006b) est ensuite utilisée pour calculer les valeurs exactes de variables aux interfaces. Enfin, les équations de Helmholtz sont résolues une deuxième fois avec les conditions aux interfaces exactes. Les solutions obtenues vérifient alors la continuité des variables et de leurs dérivées premières aux interfaces (Xin *et al.*, 2008).

### 2.1.5 Validation

Des premières études de validation du code pseudo-spectral sont présentes dans Soucasse *et al.* (2012) en cavité différentiellement chauffée, pour des nombres de Rayleigh variant de  $Ra = 10^5$  à  $Ra = 10^7$ . Des solutions stationnaires du problème de convection naturelle, sans rayonnement, ont été calculées et comparées aux solutions tridimensionnelles de références de Tric *et al.* (2000).



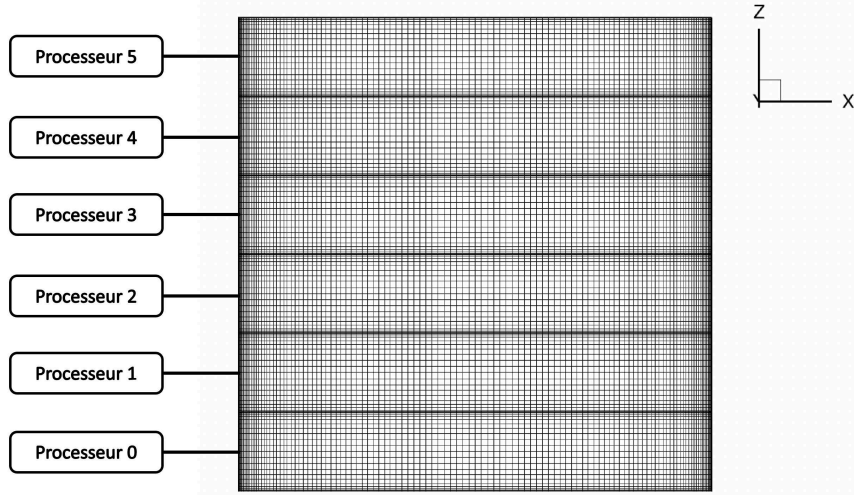


FIGURE 2.2 – Principe de la parallélisation par décomposition de domaine selon la direction verticale. La cavité est ici décomposée en six blocs (domaines) identiques empilés et chaque bloc est discrétisé par un maillage Gauss-Lobatto. Ici, le maillage utilisé dans chaque bloc est de 120 points dans les direction  $x_1$  et  $x_2$ , et 20 points selon la direction  $x_3$ . La résolution des équations dans chaque bloc est confiée à un processeur distinct.

Pour la convection naturelle en régime faiblement turbulent, sans rayonnement, les prédictions du code ont été comparées aux résultats fournis par Trias et al. (2007); F.X.Trias et al. (2010b,a). Ces études portent sur une cavité parallélépipédique différentiellement chauffée, de rapports  $L_{x_3}/L_{x_1} = 4$ ,  $L_{x_2}/L_{x_1} = 1$ , remplie d'air ( $Pr = 0.71$ ), pour un nombre de Rayleigh (calculé à partir de la hauteur de la cavité) de  $Ra = 2 \times 10^9$ . La comparaison a montré une excellente correspondance entre les résultats, tant pour les champs moyens que pour les statistiques de second ordre (Soucasse et al., 2014c). De plus, le sujet de la convergence en maillage est abordé dans Soucasse et al. (2016) pour une cavité différentiellement chauffée à des nombres de Rayleigh allant jusqu'à  $Ra = 3 \times 10^9$ .

En ce qui concerne la cavité cubique de Rayleigh-Bénard, en l'absence de rayonnement, le tableau 2.1 présente la comparaison des nombres de Nusselt (flux conductif adimensionné moyenné sur les parois chaude et froide), obtenus par la présente étude, avec quelques valeurs obtenues dans la littérature. La concordance entre les résultats est bonne : les différences sont de moins de 1% avec les résultats en simulation numérique directe (DNS) de Kaczorowski et Xia

(2013), 2% avec les résultats DNS de Giannakis et al. (2018), 2.5% avec les résultats en simulation aux grandes échelles (LES) de Foroozani et al. (2017) et 0.4% avec les résultats en Lattice-Boltzmann (LB) de Xu et al. (2019). Il est à noter que la différence de 1% entre les nombres de Prandtl utilisés par les différents auteurs ne devrait pas affecter le nombre de Nusselt de plus de 1%, d'après les corrélations classiques pouvant être trouvées dans la littérature (Bejan et Krauss, 2003).

Ra	$10^6$	$10^7$	$10^8$
Kaczorowski et Xia (2013), DNS, Pr = 0.7	8.32	16.30	31.30
Giannakis et al. (2018), DNS, Pr = 0.7	-	16.57	-
Foroozani et al. (2017), LES, Pr = 0.7	8.10	-	31.60
Xu et al. (2019), LB, Pr = 0.7	8.33	16.22	-
Présents travaux, DNS, Pr = 0.707	8.30	16.24	31.06

TABLE 2.1 – Comparaison des nombres de Nusselt moyennés sur les parois horizontales, en cavité cubique de Rayleigh-Bénard

En plus des nombres de Nusselt, le tableau 2.2 compare les intensités de circulation obtenus dans notre étude avec ceux provenant de la simulation Lattice-Boltzmann de Xu et al. (2019). L'intensité de circulation est caractérisée par deux nombres de Reynolds,  $Re^{\text{rms}} = 1/\text{Pr}\sqrt{\text{Ra}\langle\overline{u_i u_i}\rangle_v}$  et  $Re_{u_3}^{\text{rms}} = 1/\text{Pr}\sqrt{\text{Ra}\langle\overline{u_3 u_3}\rangle_v}$ , basés soit sur l'amplitude totale de la vitesse, soit sur l'amplitude de la composante verticale de la vitesse.  $\bar{\cdot}$  désigne ici la moyenne temporelle et  $\langle\cdot\rangle_v$  désigne la moyenne sur tout le volume de la cavité. La comparaison présentée dans le tableau 2.2 montre une excellente correspondance avec une différence de moins de 1% dans tous les cas.

Ra	$Re^{\text{rms}}$			$Re_{u_3}^{\text{rms}}$		
	$10^6$	$3 \times 10^6$	$10^7$	$10^6$	$3 \times 10^6$	$10^7$
Xu et al. (2019), LB, Pr = 0.7	208.80	357.11	654.86	145.58	249.96	454.92
Présents travaux, DNS, Pr = 0.707	208.05	357.44	650.73	144.45	249.43	451.79

TABLE 2.2 – Comparaison des intensités de circulation avec les résultats de Xu et al. (2019)

## 2.2 Méthode numérique pour les transferts radiatifs

La résolution numérique de l'équation de transfert radiatif en milieu non diffusant (1.7) consiste en un calcul d'intégrales le long d'un trajet optique (voir (1.10)). Pour calculer la puissance volumique (1.12) ainsi que le flux aux parois (1.13) intervenant dans le bilan d'énergie (1.4) et dans les conditions aux limites (1.5), ce calcul doit être effectué en chaque point  $\boldsymbol{x}$  de la cavité, dans chaque

direction  $\Omega$ , pour toutes les fréquences  $\nu$  et à chaque pas de temps pour tenir compte de l'évolution du champ de température.

Tout ceci rend le calcul des transferts radiatifs très coûteux, numériquement parlant. Pour contourner ces limites, des méthodes approchées ont été développées pour simplifier la dépendance fréquentielle (tel que le modèle ADF présenté au § 1.3.2) et directionnelle de la luminance.

La méthode  $P_N$ , ou méthode des harmoniques sphériques, introduite par Jeans (1917) et développée par Chandrasekhar (1950), propose de décomposer la luminance directionnelle sur une base de  $N$  fonctions orthogonales (usuellement des harmoniques sphériques, d'où son nom). Cette décomposition permet d'obtenir un jeu d'équations aux dérivées partielles ne dépendant plus de la direction de propagation. Plus l'ordre du développement est élevé, plus la solution est précise mais longue à calculer. Les méthodes des bas ordre  $P_1$  et  $P_3$ , habituellement utilisées, n'apportent des résultats précis que dans le cas optiquement épais ( $\kappa L \gg 1$ ). De plus, la complexité augmente rapidement lorsque l'on augmente l'ordre  $N$  de la méthode (Modest et Lei, 2012).

Une autre approche est la méthode des ordonnées discrètes (dite DOM, pour Discrete Ordinate Method), développée initialement en astrophysique (Chandrasekhar, 1944, 1950) pour l'étude des atmosphères stellaires, et utilisée ensuite en ingénierie nucléaire dans le domaine de la neutronique (Wick, 1943; Lee, 1962; Lathrop, 1966). Elle a commencé à être employée pour étudier les transferts thermiques dans les années 80, avec les travaux de Hyde et Truelove (1977); Truelove (1987); Fiveland (1982, 1984, 1987). Elle consiste à décomposer les intégrales directionnelles au moyen d'une quadrature. Cette méthode se rapproche de l'esprit des méthode de volume fini : la propagation du rayonnement se fait alors de maille en maille. Plus de détails concernant ces méthodes peuvent être trouvés dans les ouvrages de référence concernant le rayonnement thermique (Siegel et Howell, 2002; Modest, 2003; Chandrasekhar, 1950).

Grâce aux progrès de l'informatique et à l'augmentation de la puissance de calcul disponible, des méthodes plus coûteuses, mais permettant d'atteindre une excellente précision, deviennent accessibles. C'est le cas de la méthode de Monte-Carlo, méthode de résolution statistique qui permet de tenir compte des propriétés radiatives raie par raie. La méthode de référence reste néanmoins la méthode de lancer de rayon, méthode déterministe mais qui, en raison de son coût, ne peut être couplée à une représentation fine des propriétés radiatives. Pour contourner cela, le modèle ADF présenté au § 1.3.2 est également utilisé mais, dans les conditions de cette étude, celui-ci est quasi-exact.

### 2.2.1 Formulation de l'équation de transfert adaptée aux faibles gradients de température

Dans les équations (1.12) et (1.5), la puissance radiative et le flux aux parois sont calculés comme différence d'un terme d'émission et d'un terme d'absorption, calculés séparément. Dans un milieu où les gradients de température sont très faibles, les termes d'émission et d'absorption sont très grands devant les puissances échangées, ce qui entraîne des erreurs d'imprécision numérique lors

du calcul de la différence. Pour augmenter fictivement le terme d'échange devant les termes d'émission et d'absorption, on introduit la transformation suivante :

$$\mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) = I_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) - I_\nu^\circ(T_S). \quad (2.29)$$

$\mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega})$  est la luminance modifiée qui s'obtient en retranchant à la luminance réelle  $I_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega})$  la luminance d'équilibre à la température  $T_S$ , appelée température de *shift* et choisie légèrement inférieure à la température de la paroi froide. On introduit de même la luminance d'équilibre modifiée :

$$\mathcal{I}_\nu^\circ(\mathbf{x}) = I_\nu^\circ(\mathbf{x}) - I_\nu^\circ(T_S). \quad (2.30)$$

La luminance d'équilibre à la température  $T_S$   $I_\nu^\circ(T_S)$  étant une constante et l'équation de transfert radiatif étant linéaire, la luminance modifiée  $\mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega})$  vérifie elle aussi l'ETR

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) = \kappa_\nu(\mathbf{x}) (\mathcal{I}_\nu^\circ(T(\mathbf{x})) - \mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega})), \quad (2.31)$$

ainsi que les conditions aux limites dans le cas de parois diffuses

$$\mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}_p) = \epsilon_\nu(\mathbf{x}_p) \mathcal{I}_\nu^\circ(T(\mathbf{x}_p)) + \frac{1 - \epsilon_\nu(\mathbf{x}_p)}{\pi} \int_{\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n} < 0} \mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}_p, \boldsymbol{\Omega}') |\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n}| d\boldsymbol{\Omega}'. \quad (2.32)$$

Par le théorème de superposition, le système (1.7)-(1.11) est équivalent au nouveau système (2.31)-(2.32). Les expressions des puissances radiatives échangées et des flux aux parois sont elles aussi conservées.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\text{rad}}(\mathbf{x}) &= -\nabla \cdot \mathbf{q}^{\text{rad}}(\mathbf{x}) = - \int_0^\infty \int_0^{4\pi} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega})) d\boldsymbol{\Omega} d\nu \\ &= \int_0^\infty \int_0^{4\pi} \kappa_\nu(\mathbf{x}) \mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} d\nu \\ &\quad - 4\pi \int_0^\infty \kappa_\nu(\mathbf{x}) \mathcal{I}_\nu^\circ(T(\mathbf{x})) d\nu. \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{\text{rad}} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_p) &= \int_0^\infty \int_0^{4\pi} \mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}_p, \boldsymbol{\Omega}) \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} d\boldsymbol{\Omega} d\nu \\ &= \pi \int_0^\infty \epsilon_\nu(\mathbf{x}_p) \mathcal{I}_\nu^\circ(T(\mathbf{x}_p)) d\nu \\ &\quad - \int_0^\infty \epsilon_\nu(\mathbf{x}_p) \int_{\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n} < 0} \mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}_p, \boldsymbol{\Omega}') |\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n}| d\boldsymbol{\Omega}' d\nu. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Avec cette nouvelle formulation, les puissances émises ou absorbées sont du même ordre de grandeur que les puissances nettes échangées. Les équations du transfert radiatif restent strictement semblables à celles introduites au paragraphe § 1.1.2, la méthode de lancer de rayons peut être employée sans difficulté.

## 2.2.2 Méthode de lancer de rayon

La méthode de lancer de rayons consiste en une discrétisation fine de l'espace des directions ( $4 \pi$  stéradians), puis de la solution à l'équation de transfert radiatif (1.32) le long d'un chemin optique. La figure 2.3, reprenant la figure 1.2, représente un tel chemin optique d'équation  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}_p + s'\Omega$ , partant d'un point de la paroi de coordonnée  $\mathbf{x}'(s' = 0) = \mathbf{x}_p$  à un point  $M$  du domaine, de coordonnées  $\mathbf{x}'(s' = s) = \mathbf{x}$ .

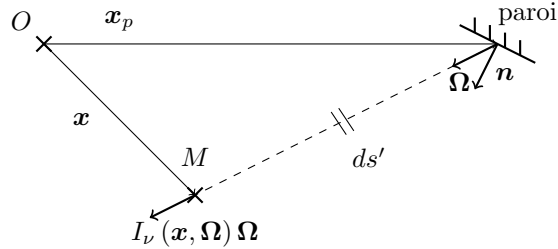


FIGURE 2.3 – Représentation d'un chemin optique entre une paroi de coordonnées  $\mathbf{x}_p$  et un point  $M$  de coordonnées  $\mathbf{x}$ , situé à une distance  $s$  de la paroi.

Les luminances modifiées, aux parois et à l'intérieur du domaine, solutions de l'ETR, sont données respectivement par les expressions (2.32) et (2.35); les termes sources intervenant dans le bilan d'énergie et dans les conditions aux parois sont données par (2.33) et (2.34) respectivement. En discrétisant finement les dimensions spatiale, angulaire et fréquentielle, il est alors possible de calculer tous ces termes.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}, \Omega) &= \int_0^s \kappa_\nu(\mathbf{x}') \mathcal{I}_\nu^c(T(\mathbf{x}')) \exp\left(-\int_{s'}^s \kappa_\nu(s'') ds''\right) ds' \\ &+ \mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}_p, \Omega) \exp\left(\int_0^s \kappa_\nu(s') ds'\right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Dans le cas de parois non noires, la luminance partante de la paroi  $\mathcal{I}_\nu^p(\mathbf{x}_p, \Omega)$ , apparaissant dans (2.35), dépend elle-même du champ de luminance incident à la paroi  $\mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}_p, \Omega')$ . La résolution du problème est donc implicite : les champs de luminance incident  $\mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}_p, \Omega')$  et partant de la paroi  $\mathcal{I}_\nu^p(\mathbf{x}_p, \Omega)$  sont calculés de manière itérative à partir des équations 2.32 et 2.35 jusqu'à la convergence. Du point de vue du coût, le temps de calcul de la méthode de lancer de rayon est proportionnel au nombre de points de discrétisation spatiale, directionnelle et spectrale, ainsi qu'au nombre moyen de cellules traversées lors du tracé d'un rayon. Cette méthode est donc très coûteuse et, dans le cas présent, ne peut être utilisée que couplée à un modèle spectral pour les propriétés radiatives du milieu, ici le modèle ADF présenté au § 1.3.2. Ce modèle permet de réduire la représentation spectrale du mélange air/CO<sub>2</sub>/H<sub>2</sub>O de 160 000 (représentation

raie par raie) à 16 points. Afin de conserver des luminances modifiées  $\mathcal{I}_\nu$  et  $\mathcal{I}_\nu^\circ$  strictement positives, la température de *shift*  $T_S$  est choisie légèrement inférieure à la température minimale du milieu.

### Discrétisation spatiale

On discrétise le domaine en mailles, volumiques pour le gaz et surfaciques pour les parois, isothermes et de coefficient d'absorption uniforme. Le maillage utilisé ici est lui aussi issu de la quadrature de Gauss-Lobatto tel que représenté sur la figure 2.1. Le champ de luminance, le flux surfacique aux parois et la puissance radiative sont calculés au centre de chaque maille et on trace un grand nombre de rayons dans toutes les directions depuis chaque maille.

Un rayon partant d'un point de la paroi  $\mathbf{x}_p$  et arrivant au point de coordonnée discrète  $\mathbf{x}_i$  par une direction  $\Omega$  traverse un nombre  $N_t$  de cellules (numérotées de 1 (en  $\mathbf{x}_i$ ) à  $N_t$  (en  $\mathbf{x}_p$ )), chacune de longueur  $l_k$ . La luminance  $\mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}_i, \Omega)$  s'obtient alors en discrétisant l'équation (2.35) :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}_i, \Omega) = & \sum_{j=1}^{N_t} \left[ \mathcal{I}_\nu^\circ(T(\mathbf{x}_j))(1 - \exp(-\kappa_{\nu,j} l_j)) \prod_{k=1}^{j-1} \exp(-\kappa_{\nu,k} l_k) \right] \\ & + \mathcal{I}_{\nu_{\mathbf{x}_p}} \prod_{k=1}^{N_t} \exp(-\kappa_{\nu,k} l_k). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Pour calculer la propagation du rayon dans le maillage (nombre  $N_t$  de cellules traversées et longueur  $l_k$  de chaque cellule), un calcul d'intersection exact est effectué entre le rayon et le maillage. Pour un point quelconque situé dans une maille  $k$ , on calcule la distance algébrique entre le point et les plans correspondant aux six faces de la maille  $k$ . La plus petite distance strictement positive correspond à la face de la maille interceptant le rayon et le coordonnées du point d'intersection se déduisent immédiatement. On poursuit ensuite de proche en proche jusqu'à atteindre une paroi. Ce calcul est répété pour chaque classe ADF.

Pour pouvoir supposer les mailles isothermes, la taille des mailles radiatives  $\delta x$  doit être suffisamment petite. Une autre contrainte est de limiter l'épaisseur optique  $\kappa \delta x$  de chaque maille, qui augmente la sensibilité du champ de luminance aux faibles variations de température. La précision du calcul est maintenue pour des épaisseurs optiques de maille de l'ordre de l'unité ; au delà, il est nécessaire d'interpoler la température entre les mailles.

### Discrétisation angulaire

La direction  $\Omega$  est décomposée dans le système cartésien en introduisant les angles zénithal  $\vartheta$  et azimutal  $\varphi$  autour de l'axe vertical  $\mathbf{x}_3$  :

$$\Omega = \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{x}_1 + \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{x}_2 + \cos \vartheta \mathbf{x}_3. \quad (2.37)$$

Les angles zénithaux et azimutaux sont discrétisés en respectivement  $N_\vartheta$  et  $N_\varphi$  valeurs, dont les cosinus sont espacés régulièrement entre  $\cos \vartheta = -1$  et

$\cos \vartheta = 1$  pour les angles zénithaux et dont les angles azimutaux sont espacés régulièrement entre  $\varphi = 0$  et  $\varphi = 2\pi$  (les angles zénithaux à la paroi sont définis à partir de la normale pariétale). En ce qui concerne les mailles pariétales surfaciques, la direction  $\boldsymbol{\Omega}'$  d'un rayon issu du centre d'une maille est également définie par ses angles zénithal et azimutal définis autour de la normale à la paroi  $\mathbf{n}$ . Les angles zénithaux et azimutaux sont également discrétisés en respectivement  $N_\vartheta^p$  et  $N_\varphi^p$  valeurs, dont les carrés des cosinus sont espacés régulièrement entre  $\cos^2 \vartheta = 0$  et  $\cos^2 \vartheta = 1$  pour les angles zénithaux et dont les angles azimutaux sont espacés régulièrement entre  $\varphi = 0$  et  $\varphi = 2\pi$ . Le nombre de directions depuis les parois est choisi de manière à conserver la même discrétisation par hémisphère :  $N_\vartheta^p = N_\vartheta/2$  et  $N_\varphi^p = N_\varphi$ .

Les intégrations directionnelles des formules (2.33) et (2.34) définissant la puissance radiative dans le milieu et le flux radiatif aux parois deviennent respectivement, avec cette discrétisation angulaire :

$$\int_{4\pi} \mathcal{I}_\nu d\boldsymbol{\Omega} = \frac{4\pi}{N_\vartheta N_\varphi} \sum_{m=1}^{N_\vartheta} \sum_{n=1}^{N_\varphi} \mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}_{mn}), \quad (2.38)$$

et

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n} < 0} \mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}_p, \boldsymbol{\Omega}') |\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n}| d\boldsymbol{\Omega}' = \frac{\pi}{N_\vartheta N_\varphi} \sum_{m=1}^{N_\vartheta} \sum_{n=1}^{N_\varphi} \mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}_p, \boldsymbol{\Omega}_{mn}). \quad (2.39)$$

Le nombre de directions  $N_\vartheta \times N_\varphi$  doit normalement permettre de relier n'importe quel couple de mailles du domaine de calcul par un rayon. Dans un espace tridimensionnel maillé de  $N^3$  points, le nombre de directions est alors de l'ordre de  $\mathcal{O}(N^2)$ .

Le calcul de la luminance dans une direction est indépendant de celui dans les autres directions. Il est donc possible de paralléliser la méthode de lancer de rayons selon le nombre de directions. Pour un nombre  $N_p$  de processeurs, chacun d'entre eux effectue alors  $N_\vartheta^p \times N_\varphi^p / N_p$  tracés de rayon depuis les points de paroi et  $N_\vartheta \times N_\varphi / N_p$  tracés depuis les points intérieurs du domaine.

## Discrétisation spectrale

La méthode ADF, présentée au § 1.3.2 est utilisée pour modéliser les propriétés radiatives du gaz. L'équation (2.35) donnant la luminance est résolue pour chaque classe ADF  $i$  : la luminance spectrale  $\mathcal{I}_\nu$  devient  $\mathcal{I}_i$ , la luminance d'équilibre  $\mathcal{I}_\nu^o$  devient  $a_i \sigma_{SB} (T^4 - T_S^4)$  et le coefficient d'absorption de la classe  $i$  est noté  $\kappa_i$ . Le calcul des termes sources (2.33) et (2.34) se fait alors selon :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\text{rad}} = -\nabla \cdot \mathbf{q}^{\text{rad}}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{N_{ADF}} \int_{4\pi} \kappa_i(\mathbf{x}) \mathcal{I}_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} \\ &- \sum_{i=1}^{N_{ADF}} 4\kappa_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}) \sigma_{SB} (T^4(\mathbf{x}) - T_S^4) \end{aligned} \quad (2.40)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{\text{rad}} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_p) &= \sum_{i=1}^{N_{ADF}} \epsilon(\mathbf{x}_p) a_i(\mathbf{x}) \sigma_{SB} (T^4(\mathbf{x}_p) - T_S^4) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N_{ADF}} \epsilon_\nu(\mathbf{x}_p) \int_{\Omega' \cdot \mathbf{n} < 0} \mathcal{I}_i(\mathbf{x}_p, \Omega') |\Omega' \cdot \mathbf{n}| d\Omega', \end{aligned} \quad (2.41)$$

où  $N_{ADF}$  désigne le nombre de classes du modèle ADF.

### 2.2.3 Modèle de sous-maille radiatif pour les champs turbulents

Lorsque le nombre de Rayleigh augmente, le maillage requis pour représenter l'écoulement doit être de plus en plus fin, ce qui se traduit par une augmentation du temps de calcul. Pour des nombres de Rayleigh de l'ordre de  $\text{Ra} = 10^8$ , la méthode de lancer de rayon devient impraticable avec les ressources numériques actuelles. Pour palier cette limite, un modèle de sous-maille a été développé par Soucasse *et al.* (2014b) pour traiter le rayonnement.

#### Filtrage des équations

On rappelle le système d'équations décrivant le champ de luminance monochromatique dans le domaine de calcul :

$$\begin{cases} \Omega \cdot \nabla \mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}, \Omega) = \kappa_\nu(\mathbf{x}) (\mathcal{I}_\nu^\circ(T(\mathbf{x})) - \mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}, \Omega)) \\ \mathcal{I}_\nu^p(\mathbf{x}_p) = \epsilon_\nu(\mathbf{x}_p) \mathcal{I}_\nu^\circ(T(\mathbf{x}_p)) + \frac{1 - \epsilon_\nu(\mathbf{x}_p)}{\pi} \int_{\Omega' \cdot \mathbf{n} < 0} \mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}_p, \Omega') |\Omega' \cdot \mathbf{n}| d\Omega' \end{cases} \quad (2.42)$$

La résolution de ce système permet de calculer la puissance radiative et le flux radiatif aux parois monochromatiques

$$\begin{cases} \mathcal{P}_\nu^{\text{rad}}(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \mathbf{q}_\nu^{\text{rad}}(\mathbf{x}) = \kappa_\nu(\mathbf{x}) (G_\nu(\mathbf{x}) - \mathcal{I}_\nu^\circ(T(\mathbf{x}))) \\ \mathbf{q}_\nu^{\text{rad}} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_p) = \epsilon_\nu(\mathbf{x}_p) (\pi \mathcal{I}_\nu^\circ(T(\mathbf{x}_p)) - \int_{\Omega' \cdot \mathbf{n} < 0} \mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}_p, \Omega') |\Omega' \cdot \mathbf{n}| d\Omega') \end{cases} \quad (2.43)$$

avec  $G_\nu(\mathbf{x})$  la luminance, intégrée sur toutes les directions, incidente au point  $\mathbf{x}$

$$G_\nu(\mathbf{x}) = \int_0^{4\pi} \mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}, \Omega) d\Omega. \quad (2.44)$$

Les expressions (2.43) s'expriment comme la différence entre un terme d'émission et un terme d'absorption. Si le terme d'émission ne dépend que des propriétés du milieu et se calcule immédiatement, le terme d'absorption dépend du champ de luminance et en nécessite la résolution.

Le modèle de sous-maille présenté ici consiste en un filtrage spatial de la luminance d'équilibre  $\mathcal{I}_\nu^\circ(\mathbf{x})$ , décomposée en contributions filtrée  $\overline{\mathcal{I}_\nu^\circ(\mathbf{x})}$  et de sous-maille  $\mathcal{I}_\nu^{\circ'}(\mathbf{x})$  :

$$\mathcal{I}_\nu^\circ(\mathbf{x}) = \overline{\mathcal{I}_\nu^\circ(\mathbf{x})} + \mathcal{I}_\nu^{\circ'}(\mathbf{x}), \quad (2.45)$$



Le filtrage utilisé ici consiste en une troncature dans la représentation spectrale Tchebychev de la fonction  $\mathcal{I}_\nu^\circ(\mathbf{x})$ , ce qui se traduit par une représentation dans l'espace physique sur un maillage de Gauss-Lobatto plus grossier.

Si

$$\mathcal{I}_\nu^\circ(x) = \sum_{k=0}^N \check{\mathcal{I}}_{\nu,k}^\circ \mathcal{T}_k(x) \quad (2.46)$$

est la représentation spectrale unidimensionnelle (dans l'espace de Tchebychev) de  $\mathcal{I}_\nu^\circ(x)$ , alors la représentation spectrale des contributions filtrées et de sous-maille de la luminance d'équilibre sont

$$\overline{\mathcal{I}_\nu^\circ(x)} = \sum_{k=0}^{\bar{N}} \check{\mathcal{I}}_{\nu,k}^\circ \mathcal{T}_k(x) \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_\nu^{\circ'}(\mathbf{x}) = \sum_{k=\bar{N}+1}^N \check{\mathcal{I}}_{\nu,k}^\circ \mathcal{T}_k(x), \quad (2.47)$$

où  $N$  et  $\bar{N}$  désignent le nombre de points des maillages fin et grossier respectivement et les  $\check{\mathcal{I}}_{\nu,k}^\circ$  sont les coefficient spectraux du développement Tchebychev. Plus de détails sur la représentation dans l'espace de Tchebychev peuvent être trouvés au § 2.1.1.

L'équation de transfert radiatif est linéaire selon le terme d'émission (terme source) et la résolution du champ de luminance peut donc se décomposer en deux sous-problèmes :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \widetilde{\mathcal{I}}_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) = \kappa_\nu(\mathbf{x}) \left( \overline{\mathcal{I}_\nu^\circ(T(\mathbf{x}))} - \widetilde{\mathcal{I}}_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) \right) \\ \widetilde{\mathcal{I}}_\nu^p(\mathbf{x}_p) = \epsilon_\nu(\mathbf{x}_p) \overline{\mathcal{I}_\nu^\circ(T(\mathbf{x}_p))} + \frac{1-\epsilon_\nu(\mathbf{x}_p)}{\pi} \int_{\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n} < 0} \widetilde{\mathcal{I}}_\nu(\mathbf{x}_p, \boldsymbol{\Omega}') |\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n}| d\boldsymbol{\Omega}' \end{cases} \quad (2.48)$$

et

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathcal{I}_\nu''(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) = \kappa_\nu(\mathbf{x}) \left( \mathcal{I}_\nu^{\circ'}(T(\mathbf{x})) - \mathcal{I}_\nu''(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) \right) \\ \mathcal{I}_\nu^{\prime p}(\mathbf{x}_p) = \epsilon_\nu(\mathbf{x}_p) \mathcal{I}_\nu^{\circ'}(T(\mathbf{x}_p)) + \frac{1-\epsilon_\nu(\mathbf{x}_p)}{\pi} \int_{\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n} < 0} \mathcal{I}_\nu''(\mathbf{x}_p, \boldsymbol{\Omega}') |\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{n}| d\boldsymbol{\Omega}' \end{cases} \quad (2.49)$$

Ces deux sous-problèmes font intervenir les champs de luminance filtrée  $\widetilde{\mathcal{I}}_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega})$  et de sous-maille  $\mathcal{I}_\nu''(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega})$ , qui sont les solutions au système (2.42) respectivement pour un terme source d'émission filtré  $\overline{\mathcal{I}_\nu^\circ(\mathbf{x})}$  et de sous-maille  $\mathcal{I}_\nu^{\circ'}(\mathbf{x})$ . Par linéarité, le champ de luminance total  $\mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega})$  est alors la somme de ces deux contributions :

$$\mathcal{I}_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) = \widetilde{\mathcal{I}}_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) + \mathcal{I}_\nu''(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}). \quad (2.50)$$

### Contribution filtrée

Avec l'opération de filtrage, le nouveau maillage utilisé pour représenter les luminances filtrées est plus grossier. Si ce maillage permet de représenter correctement les propriétés radiatives du milieu ( $\kappa_\nu(\mathbf{x})$  et  $\epsilon_\nu(\mathbf{x}_p)$ ), il est possible de résoudre le système (2.48) par la méthode de lancer de rayons présentée au § 2.2.2 pour obtenir le champ de luminance filtré  $\widetilde{\mathcal{I}}_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega})$ . Le résultat obtenu l'est

sur le maillage grossier et une opération d'interpolation est en ensuite effectuée pour revenir sur le maillage fin.

La puissance radiative filtrée est alors calculée comme :

$$\widetilde{\mathcal{P}}^{\text{rad}}(\mathbf{x}) = \int_0^\infty \kappa_\nu(\mathbf{x}) \left( \widetilde{G}_\nu(\mathbf{x}) - \overline{\mathcal{I}}_\nu^\circ(T(\mathbf{x})) \right) d\nu, \quad (2.51)$$

avec

$$\widetilde{G}_\nu(\mathbf{x}) = \int_0^{4\pi} \widetilde{\mathcal{I}}_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} \quad (2.52)$$

la luminance filtrée intégrée sur toutes les directions.

Le coût de la méthode de lancer de rayon étant proportionnel à  $N^2$  (où  $N$  désigne le nombre de points du maillage), la réduction du maillage due au filtrage entraîne une forte diminution du temps de calcul.

### Contributions de sous-maille

Le modèle de sous-maille est basé sur les hypothèses suivantes :

- la luminance de sous-maille peut être décomposée dans l'espace de Fourier ;
- le coefficient d'absorption est uniforme dans l'espace.

La décomposition d'une fonction  $\psi(\mathbf{x})$  dans l'espace de Fourier s'écrit :

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{k}} \widehat{\psi}(\mathbf{k}) \exp(+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{k}, \quad (2.53)$$

où

$$\widehat{\psi}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.54)$$

est la transformée de Fourier de  $\psi(\mathbf{x})$ .

Sous les hypothèses énoncées ci-dessus, la transformée de Fourier de l'équation de transfert radiatif de sous-maille (2.49) s'écrit :

$$i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega} \widehat{\mathcal{I}}_\nu''(\mathbf{k}, \boldsymbol{\Omega}) = \kappa_\nu \left( \widehat{\mathcal{I}}_\nu^{\circ'}(T(\mathbf{k})) - \widehat{\mathcal{I}}_\nu''(\mathbf{k}, \boldsymbol{\Omega}) \right), \quad (2.55)$$

soit

$$\widehat{\mathcal{I}}_\nu''(\mathbf{k}, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\kappa_\nu}{\kappa_\nu + i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}} \widehat{\mathcal{I}}_\nu^{\circ'}(T(\mathbf{k})). \quad (2.56)$$

Le calcul, dans l'espace de Fourier, de la luminance intégrée sur toutes les directions, est alors immédiat :

$$\begin{aligned} \widehat{G}''(\mathbf{k}) &= \int_{4\pi} \widehat{\mathcal{I}}_\nu''(\mathbf{k}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} \\ &= \int_{4\pi} \frac{\kappa_\nu}{\kappa_\nu + i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}} \widehat{\mathcal{I}}_\nu^{\circ'}(T(\mathbf{k})) d\boldsymbol{\Omega} \\ &= 2\pi \widehat{\mathcal{I}}_\nu^{\circ'}(T(\mathbf{k})) \frac{\kappa_\nu}{k} \int_{-k/\kappa_\nu}^{k/\kappa_\nu} \frac{1 - ix}{1 + x^2} dx, \quad x = \frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}}{\kappa_\nu} \\ &= 4\pi \widehat{\mathcal{I}}_\nu^{\circ'}(T(\mathbf{k})) \frac{\kappa_\nu}{k} \arctan\left(\frac{k}{\kappa_\nu}\right), \end{aligned} \quad (2.57)$$

avec  $k$  le module du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Cette expression analytique a été établie par Spiegel (1957) et Soufiani (1991) en étudiant l'amortissement des fluctuations de température par le rayonnement.

Numériquement parlant, les seuls calculs coûteux sont donc la transformation dans l'espace de Fourier de la luminance fluctuante  $\hat{\mathcal{I}}_\nu'(T(\mathbf{k}))$  et la transformation inverse du résultat  $\hat{G}''(\mathbf{k})$ .

La puissance radiative de sous-maille est alors obtenue comme :

$$\mathcal{P}^{\text{rad}''} = \int_0^\infty \kappa_\nu(\mathbf{x}) \left( G''(\mathbf{x}) - \hat{\mathcal{I}}_\nu'(T(\mathbf{k})) \right) d\nu. \quad (2.58)$$

Concernant la validité des hypothèses requises pour le modèle de sous-maille :

- Des transformées de Fourier discrètes sont effectuées pour naviguer entre les espace physique et spectral. Pour ce faire, il est nécessaire de supposer que les champs de luminance de sous-maille  $\mathcal{I}_\nu^\circ(\mathbf{x})$  et  $\mathcal{I}_\nu''(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega})$  sont périodiques spatialement, et donc de négliger la luminance de sous-maille partant des parois  $\mathcal{I}_\nu^{p''}(\mathbf{x}_p)$ . L'erreur commise est donc plus importante à proximité des parois.
- Dans le cas présent, les variations de température au sein du domaine sont très faibles et la composition du mélange gazeux (concentration en espèces absorbantes) et supposée uniforme. Sous ces conditions, la dépendance spatiale du coefficient d'absorption peut être négligée. Cela peut néanmoins ne plus être le cas dans le cas de fortes variations de température ou d'espèces absorbantes

Plus de détails sur le modèle de sous-maille peuvent être trouvés dans Soucasse et al. (2014b) et Soucasse (2013).

## 2.2.4 Validation

Dans le cas tridimensionnel, peu de calculs de référence existent pour la résolution des transferts radiatifs et les rares cas de référence existants utilisent des modèles approchés (Shouguo et al., 2011). Une validation a été proposée par Soucasse et al. (2012) en comparant les résultats obtenus par la méthode de lancer de rayon et par une méthode de Monte Carlo, dans un milieu gris. Les différences obtenues entre les deux méthodes sont inférieures à 0.3 % pour les puissances radiatives et 0.4 % pour les flux aux parois.

Le modèle de sous-maille pour le rayonnement a, quant à lui, fait l'objet d'une validation tridimensionnelle à partir d'un champ instantané en cavité différentiellement chauffée, à  $\text{Ra} = 3 \times 10^9$  (Soucasse et al., 2014b). A partir d'un champ de température représenté sur un maillage fin, les luminances filtrée, fluctuante et totale  $\tilde{I}_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega})$ ,  $I_\nu''(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega})$  et  $I_\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega})$  obtenues via la méthode présentée au § 2.2.3, sont comparées aux valeurs de références obtenue avec la méthode de lancer de rayon sur le maillage fin, en utilisant comme termes sources respectifs  $\overline{I_\nu^\circ(\mathbf{x})}$ ,  $I_\nu^\circ(\mathbf{x})$  et  $I_\nu^\circ(\mathbf{x})$ . Les écarts relatifs entre les différents champs restent inférieurs à 2.5 % et le modèle de sous-maille s'avère être capable de prédire de manière très précise la contribution de sous-maille au cœur du domaine. Comme

prévu, sa précision baisse légèrement proche des parois mais l'écart à la référence reste très faible.

## 2.3 Couplage de codes

La résolution de l'équation de Helmholtz pour la température a été présentée dans les équations (2.23) et (2.24), dans le cas ne prenant pas en compte le rayonnement. Lorsque l'on tient compte du rayonnement, un terme source radiatif  $\nabla \cdot \mathbf{q}^{\text{rad}+}(\mathbf{x})$  doit être ajouté au terme source  $S_{n,n-1}^T$  dans l'équation (2.24). Ce terme est calculé à partir du champ de température à l'instant  $n$  grâce à une méthode de lancer de rayons, présentée au § 2.2.2. Ce calcul est effectué par un code de calcul distinct de celui résolvant les équations de convection naturelle.

Deux codes tournent donc en parallèle et échangent des informations (champ de température dans un sens et terme source radiatif dans l'autre) à intervalles réguliers. Cependant, il n'est pas nécessaire d'actualiser le terme source radiatif à chaque itération de l'algorithme convectif : en effet, la contrainte sur le pas de temps  $\delta t$  est donnée non pas en fonction de l'évolution temporelle du champ de température, mais pour des raisons de stabilité numérique due à la discrétisation du terme convectif. Il est donc suffisant de n'actualiser le terme source radiatif que tous les  $\alpha \delta t$ ,  $\alpha$  pouvant varier en 10 et 20, les variations du champ de température restant négligeables sur cette plage de temps. L'algorithme de couplage entre les deux codes est présenté à la figure 2.4. L'échange de données a lieu à chaque itération radiative, toutes les  $\alpha$  itérations convectives. Il est nécessaire d'équilibrer le nombre de processeurs attribués à chaque code pour limiter le temps d'attente entre les deux au moment des échanges de données : idéalement, le temps de calcul d'une itération radiative doit être égal au temps de calcul de  $\alpha$  itérations convectives.

Le maillage convectif et le maillage radiatif sont construits différemment et des interpolations sont nécessaires pour passer de l'un à l'autre. La parallélisation du code de convection se fait par décomposition de domaine selon l'axe vertical. Chaque domaine est discrétisé selon un maillage Tchebychev dans les trois directions, comme représenté sur la figure 2.5a ; le champ de température est calculé au nœuds du maillage convectif.

En l'absence de modèle de sous-maille, le maillage radiatif est construit en regroupant par deux les mailles du maillage convectif (figure 2.5b). Le champ de température est discrétisé sur les nœuds du maillage radiatif puis interpolé linéairement au centre de chaque maille ; la puissance radiative est alors calculée au centre des mailles radiatives. La puissance radiative est ensuite interpolée linéairement sur les nœuds du maillage radiatif et, enfin, une interpolation de Lagrange est utilisée pour revenir sur le maillage convectif. Les travaux de Soucasse (2013) ont montré que le regroupement des mailles par deux était suffisant pour effectuer des simulations couplées, en cavité différentiellement chauffée, pour des nombres de Rayleigh allant jusqu'à  $Ra = 3 \times 10^8$ . En cavité de Rayleigh-Bénard, le modèle de sous-maille radiatif est utilisé pour les calculs

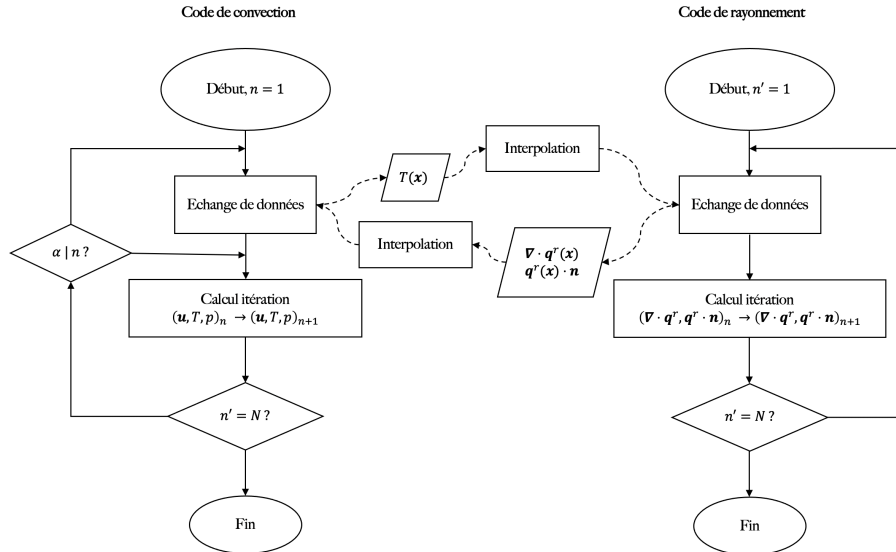
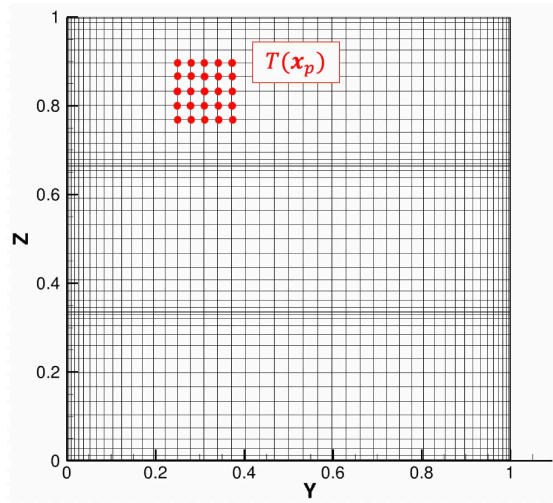


FIGURE 2.4 – Algorithme de couplage entre le code résolvant la convection et celui résolvant le rayonnement.  $N$  désigne le nombre d’itérations du code de convection et  $\alpha$  la fréquence de couplage entre les deux codes.

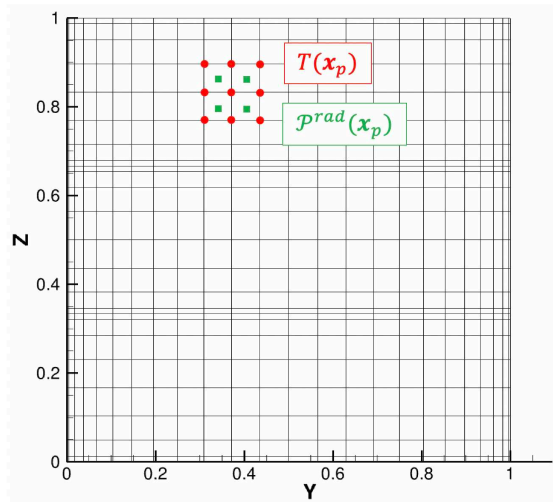
au-delà de  $Ra = 10^7$ .

Lorsque le modèle de sous-maille radiatif est utilisé, le maillage radiatif est construit par une discrétisation Tchebychev globale dans la cavité. Deux maillages sont utilisés : un maillage Tchebychev grossier (figure 2.5c) servant à calculer la puissance radiative filtrée par la méthode de lancer de rayon et un maillage fin (figure 2.5d), comportant le même nombre de points que le maillage convectif mais réparti sur un seul domaine, à partir duquel est calculée la puissance radiative de sous-maille. Le champ de température est projeté sur les nœuds du maillage radiatif (grossier ou fin) ; la température est ensuite interpolée linéairement au centre des mailles afin d’y calculer la puissance radiative filtrée, avant de revenir au maillage convectif par interpolation. Pour la puissance de sous-maille, son expression analytique permet de la calculer directement sur les nœuds du maillage fin. Elle est ensuite projetée sur le maillage convectif.

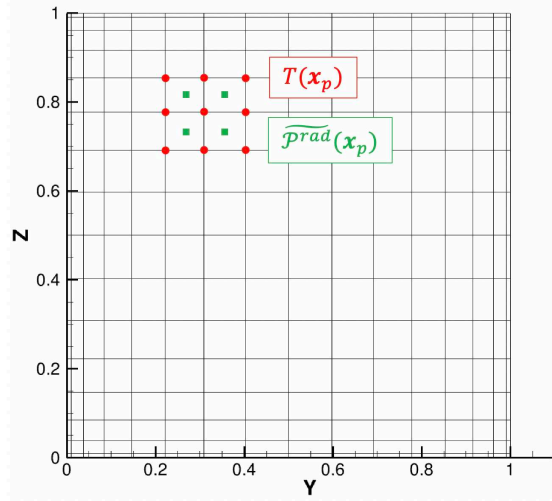
Les deux codes de calcul ont été développés en langage Fortran 95 et la parallélisation a été effectuée via la bibliothèque *Message Passing Interface*. Le traitement des échanges de données entre les deux codes est assuré par l’interface de couplage *Coupling Program Layer*, développée par Jalel Chergui.



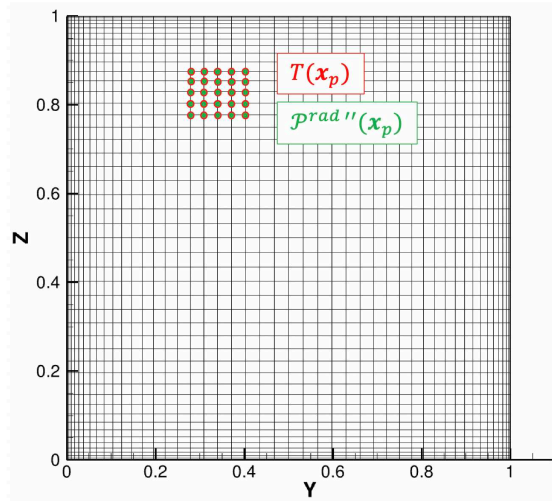
(a) Illustration 2D d'un maillage convectif de  $48 \times (16 \times 3)$  points. La température est calculée au nœuds du maillage.



(b) Maillage radiatif associé au maillage convectif de la figure (a), dans le cas sans modèle de sous-maille, construit en regroupant par deux les mailles convectives. La température est interpolée des nœuds vers le centre des mailles, pour y calculer la puissance radiative.



(c) Maillage radiatif grossier de  $16 \times 16$  points servant à calculer la puissance radiative filtrée, lors de l'utilisation du modèle de sous-maille. La température est interpolée des nœuds vers le centre des mailles, pour y calculer la puissance radiative filtrée.



(d) Maillage radiatif fin de  $48 \times 48$  points, utilisé pour calculer analytiquement la puissance radiative de sous-maille aux nœuds du maillage, à partir du champ de température.

FIGURE 2.5 – Illustration 2D des différents maillages utilisés, pour calculer la température et la puissance radiative.







## Chapitre 3

# Étude en Simulation Numérique Directe (DNS)

Ce chapitre présente les résultats obtenus par Simulation Numérique Directe dans une configuration classiquement étudiée en convection naturelle : la cavité cubique de Rayleigh-Bénard, présentée au début du chapitre 1. L'objectif est d'utiliser la précision et la fiabilité de la DNS, couplée au modèle ADF pour le rayonnement, afin d'obtenir des solutions de référence permettant de mieux comprendre l'influence du rayonnement sur l'écoulement (depuis le déclenchement de la convection aux bas nombres de Rayleigh) et les transferts d'énergie, ainsi que l'influence de la taille de la cavité sur l'effet du rayonnement et sur les structures d'écoulement observées.

Un autre objectif est d'obtenir des données pouvant servir de référence afin de valider le modèle de LES (la simulation aux grandes échelles) développé dans le chapitre 4, au plus haut nombre de Rayleigh accessible en DNS, dans une configuration de référence.

Ainsi, la partie 3.1 montrera l'influence de la présence de rayonnement sur les variables de l'écoulement, dans une cavité cubique d'un mètre de côté. La partie 3.2 se concentrera sur l'influence de la taille de la cavité rayonnante, notamment sur les structures d'écoulement rencontrées. Trois configurations radiatives seront donc étudiées dans ce chapitre :

- le cas d'un gaz transparent , aussi appelé sans rayonnement<sup>1</sup> ou ssR
- le cas d'un gaz rayonnant avec des parois thermostatées rayonnantes (les autres parois étant réfléchissantes), dans une cavité d'un mètre de côté, aussi noté R1m.
- le cas d'un gaz rayonnant avec des parois thermostatées rayonnantes (les autres parois étant réfléchissantes), dans une cavité de trois mètres de

---

1. Dans le cas gaz transparent, il n'y a pas de couplage entre le rayonnement de parois et l'écoulement en raison des conditions au limites imposées : parois adiabatiques complètement réfléchissantes et parois noires thermostatées, d'où la dénominations "sans rayonnement" pour le cas gaz transparent

côté, aussi noté R3m.

### 3.1 Influence du rayonnement dans une cavité de côté 1 mètre, pour $10^3 \leq \text{Ra} \leq 10^9$

Cette partie présente des résultats obtenus pour une large gamme de nombres de Rayleigh ( $10^3 \leq \text{Ra} \leq 10^9$ ), dans les cas ssR et R1m, ou encore sans et avec rayonnement (le cas R3m ne sera abordé que dans la partie 3.2). L'influence du rayonnement sur l'évolution de différentes grandeurs avec le nombre de Rayleigh peut ainsi être discutée. Les résultats présentés ici ont fait l'objet d'une publication (Delort-Laval et al., 2022). Les paramètres numériques utilisés pour les différentes simulations sont regroupés dans le tableau 3.1.

Ra	Maillage conv.	Maillage rad.	$\delta t \times 10^3$	$\Delta t$
$10^3$	41x41x(4x11)	20x20x20	10	N/A
$3 \times 10^3$	41x41x(4x11)	20x20x20	10	N/A
$10^4$	41x41x(4x11)	20x20x20	10	N/A
$3 \times 10^4$	41x41x(4x11)	20x20x20	10	N/A
$10^5$	65x65x(4x17)	32x32x32	10	N/A
$3 \times 10^5$	65x65x(4x17)	32x32x32	10	10,000   N/A <sup>(a)</sup>
$10^6$	81x81x(4x21)	40x40x40	5	10,000
$3 \times 10^6$	81x81x(4x21)	40x40x40	2.5	10,000
$10^7$	81x81x(4x21)	40x40x40	2.5	10,000
$3 \times 10^7$	121x121x(6x21)	30x30x30 <sup>(b)</sup>	2   1.5 <sup>(a)</sup>	5,000
$10^8$	161x161x(8x21)	40x40x40 <sup>(b)</sup>	1	5,000
$10^9$	321x321x(16x41)	40x40x40 <sup>(b)</sup>	0.5   0.25 <sup>(a)</sup>	100

TABLE 3.1 – Paramètres des simulations : maillages pour la convection, maillage pour le rayonnement, pas de temps pour la convection  $\delta t$  et durée d'intégration  $\Delta t$  pour les solutions instationnaires (après avoir atteint un régime statistiquement stationnaire). Pour le maillage de convection, les nombres entre parenthèses indiquent le nombre de domaines spatiaux fois le nombre de points de collocation dans la direction verticale pour chaque domaine. <sup>(a)</sup> Cas d'un gaz transparent (ssR) | Cas d'un gaz rayonnant (R1m). <sup>(b)</sup> Le modèle de sous-maille pour le rayonnement est utilisé.

#### 3.1.1 Définition des champs moyens

Dans cette section, les distributions verticales, moyennées sur les plans horizontaux, de différentes grandeurs clés, sont présentées et analysées. En l'absence de terme source radiatif, le système d'équation (1.23, 1.24, 1.25) satisfait quatre symétries de réflexion indépendantes.  $S_{x_1}$ ,  $S_{x_2}$ ,  $S_{x_3}$  et  $S_d$  désignent donc les réflexions par rapport respectivement aux plans d'équation  $x_1 = 0.5$ ,  $x_2 = 0.5$ ,  $x_3 = 0.5$  et  $x_1 = x_2$  (Puigjaner et al., 2008). Ces symétries transforment les champs de vitesse et de température comme suit :

$$S_{x_1} : \left. \begin{array}{l} (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (1 - x_1, x_2, x_3) \\ (u, v, w, \theta) \rightarrow (-u, v, w, \theta) \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

$$S_{x_2} : \left. \begin{array}{l} (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, 1 - x_2, x_3) \\ (u, v, w, \theta) \rightarrow (u, -v, w, \theta) \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

$$S_{x_3} : \left. \begin{array}{l} (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2, 1 - x_3) \\ (u, v, w, \theta) \rightarrow (u, v, -w, -\theta) \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

$$S_d : \left. \begin{array}{l} (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2, x_1, x_3) \\ (u, v, w, \theta) \rightarrow (v, u, w, \theta) \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

Le groupe engendré par ces quatre symétries élémentaires contient donc seize éléments. La prise en compte du rayonnement devrait normalement briser la symétrie  $S_{x_3}$  : en effet, le gradient moyen de température est dirigé selon l'axe  $x_3$  et la puissance radiative agit schématiquement en  $T^4$ . Cependant, pour de faibles variations de température ( $\Delta T \simeq 10$  K au maximum), les effets non-linéaires peuvent être négligés ; la linéarisation de la dépendance en  $T$  de la puissance radiative permet alors de retrouver la symétrie  $S_{x_3}$  dans le cas rayonnant. L'erreur commise lors de la linéarisation de la puissance radiative est alors de l'ordre de :

$$1 - \frac{4T_0^3 \Delta T}{T_{chaud}^4 - T_{froid}^4} \simeq 3 \times 10^{-4} \quad (3.5)$$

pour  $\Delta T \simeq 10$  K. Il est donc raisonnable de considérer que la symétrie  $S_{x_3}$  est aussi respectée lorsque le rayonnement est pris en compte. Les symétries  $S_{x_1}$ ,  $S_{x_2}$ ,  $S_{x_3}$  et  $S_d$  ont sur le champ de puissance radiative le même effet que sur le champ de température.

La présence de ces nombreuses symétries conduit à de multiples configurations d'écoulements dans la gamme de nombre de Rayleigh étudiée. En l'absence de rayonnement, des solutions brisant les symétries sont observées dès le déclenchement de la convection, à partir du nombre de Rayleigh critique  $Ra_c \simeq 3400$  (Puigjaner *et al.*, 2004; Catton, 1972) : la circulation se fait selon un unique rouleau autour de l'axe  $x_1$  ou de l'axe  $x_2$ , ce qui brise respectivement la symétrie  $S_{x_2}$  ou  $S_{x_1}$ , en plus de la symétrie  $S_d$ . Lorsque le nombre de Rayleigh augmente, l'écoulement devient progressivement instationnaire ; de nombreuses configurations d'écoulement, stables ou instables, ont alors été identifiées. Une description détaillée de ces différentes configurations d'écoulement, ainsi que le diagramme des bifurcations associé, peuvent être retrouvés dans Pallares *et al.* (1999, 2002); Puigjaner *et al.* (2004). L'étude a été menée pour des nombres de Rayleigh allant du déclenchement de la convection à  $Ra = 1.5 \times 10^5$ , avec  $Pr = 0.71$ , en l'absence de rayonnement et dans une cavité cubique.

Pour des nombres de Rayleigh encore supérieurs,  $Ra \geq 10^6$ , en régime instationnaire, la circulation à grande échelle consiste en un unique rouleau aligné avec le plan diagonal  $x_1 = x_2$  ou  $x_1 = 1 - x_2$ , ce qui brise les deux symétries  $S_{x_1}$  et  $S_{x_2}$ . Cependant, toutes les symétries peuvent être retrouvées grâce à un temps d'intégration suffisamment long : des phénomènes de réorientation se produisent, qui correspondent à des rotations de ce rouleau de grande échelle, d'un

angle de  $\pi/2$  autour de l'axe vertical (Foroozani et al., 2017; Bai et al., 2016). Des réorientations similaires peuvent être observées dans le cas d'un gaz rayonnant, dans la gamme  $10^6 \leq Ra \leq 10^8$  (Soucasse et al., 2021), le rayonnement modifiant la fréquence des réorientations.

Compte tenu de la multitude de motifs d'écoulement pouvant être observés, il peut sembler difficile de comparer les résultats des simulations avec et sans rayonnement. C'est pourquoi une moyenne statistique est définie, appliquant les symétries du problème à toutes les variables  $\phi$  de la simulation :

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{16} S_n(\phi) dt, \quad (3.6)$$

$S_n(\phi)$  désignant l'action sur la variable  $\phi$  de la  $n^{\text{ième}}$  symétrie (parmi 16) du groupe de symétrie engendré par les symétries  $S_{x_1}$ ,  $S_{x_2}$ ,  $S_{x_3}$  et  $S_d$  (3.1 - 3.4). L'équation (3.6) n'est appliquée que sur le régime asymptotique des solutions instationnaires.

### 3.1.2 Champs d'écoulement et transferts thermiques

Dans cette section, les distributions verticales des quantités clés, moyennées sur des plans horizontaux, sont présentées et analysées. La moyenne statistique (sur le temps et les symétries) définie en (3.6) est appliquée à toutes les solutions.

#### Bas nombres de Rayleigh : déclenchement de la convection

La figure 3.1 présente la température, l'énergie cinétique et la puissance radiative (définie comme la différence entre la puissance absorbée et émise) obtenues à différents nombres de Rayleigh, dans les cas d'un gaz transparent et d'un gaz rayonnant. Au nombre de Rayleigh le plus bas ( $10^3$ ), il n'y a pas d'énergie cinétique, tant pour le cas avec rayonnement que pour le cas sans rayonnement, ce qui signifie que la convection n'a pas démarré. Dans le cas d'un gaz transparent, le régime est purement conductif, ce qui se traduit par un profil de température linéaire. En revanche, pour un gaz rayonnant, les transferts d'énergie radiative diminuent le gradient de température au centre de la cavité : les échanges radiatifs gaz-gaz entraînent une homogénéisation du champ de température dans la cavité. Quand le nombre de Rayleigh augmente (entre  $Ra = 3 \times 10^3$  et  $Ra = 10^4$ ), le régime convectif s'installe dans le cas du gaz transparent : le fluide se mélange dans la cavité et le profil de température dans le cœur s'aplatit. Dans le cas du gaz rayonnant, en revanche, la convection dans la cavité ne se déclenche pas : le rayonnement a un effet retardateur sur le passage d'un régime conductif à un régime convectif. Le profil de puissance radiative montre que le gaz est globalement émetteur ( $\mathcal{P}^{\text{rad}} < 0$ ) proche de la paroi chaude et absorbant ( $\mathcal{P}^{\text{rad}} > 0$ ) près de la paroi froide et ces échanges radiatifs rendent le régime conductif plus stable. Cet effet retardateur du rayonnement sur le déclenchement de la convection est étudié depuis longtemps et

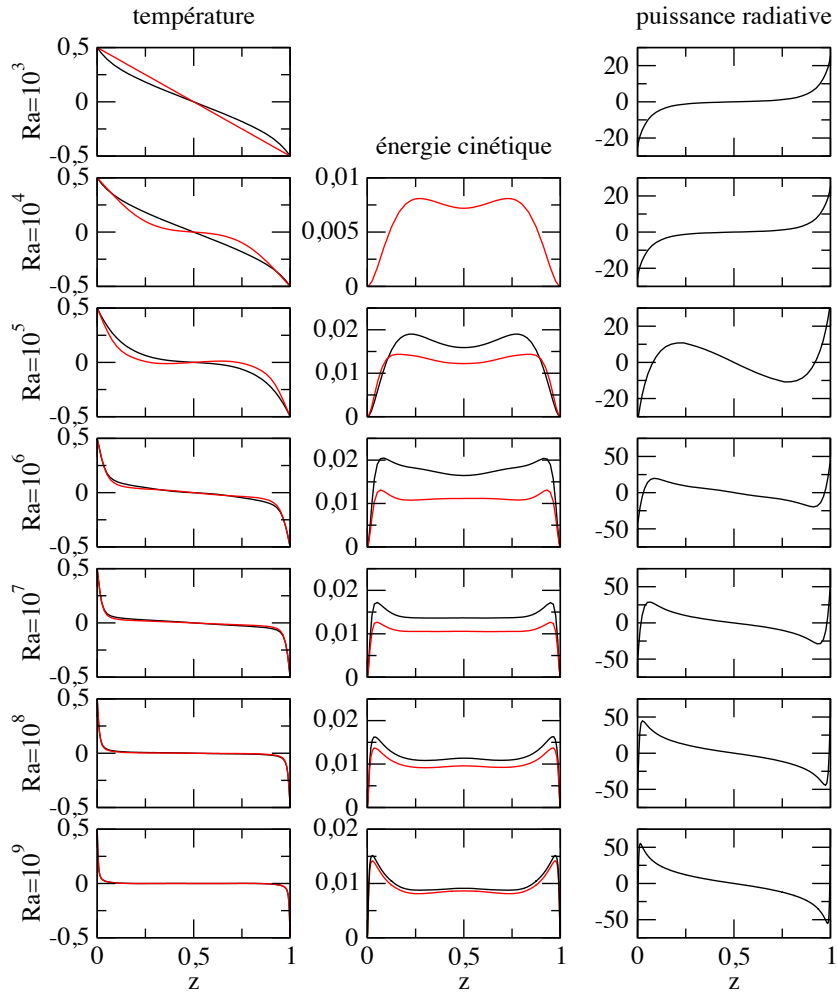


FIGURE 3.1 – Profils verticaux de température, d'énergie cinétique et de puissance radiative à différents nombres de Rayleigh. Température, énergie cinétique et puissance radiative, moyennées statistiquement et sur les plans horizontaux. Cas d'un gaz rayonnant (noir) et transparent (rouge).

est un résultat classique de la littérature (Goody, 1956; Gille et Goody, 1964; Bdéoui et Soufiani, 1997; Lan et al., 2003).

Cependant, lorsque la convection s'installe dans le cas du gaz rayonnant, quelque part entre  $Ra = 10^4$  et  $Ra = 3 \times 10^4$ , l'énergie cinétique dans la cavité est supérieure à celle dans le cas du gaz transparent. Cela est principalement causé par l'augmentation de l'énergie potentielle, due au rayonnement gaz-paroi, dans le cas du gaz rayonnant ; ce point sera discuté de manière plus approfondie dans

la section 3.1.3.

A  $Ra = 10^5$ , comme le régime convectif a démarré, le centre de la cavité est davantage isotherme dans les deux cas mais, lorsque le gaz rayonne, le centre de la cavité reste moins isotherme que dans le cas sans rayonnement. L'énergie cinétique supérieure dans le cas rayonnant pourrait pourtant laisser penser que le fluide se mélange mieux dans ce cas. Parallèlement, on constate un changement du profil de puissance radiative : si dans les régimes conductifs la partie inférieure de la cavité est émettrice et la partie supérieure absorbante, on observe, lorsque la convection s'installe, une zone absorbante dans la moitié inférieure, et émettrice dans la moitié supérieure. Pour expliquer cela, considérons la moitié inférieure de la cavité : proche de la paroi horizontale ( $0 < x_3 \lesssim 0.2$ ), le fluide est plus chaud que dans le centre de la cavité ( $0.2 \lesssim x_3 < 0.5$ ), quasi-isotherme. Le gaz chaud proche de la paroi émet donc fortement vers le centre, et ce rayonnement est absorbé dès la sortie de la couche limite thermique par le gaz isotherme du cœur. Cela contribue à augmenter légèrement la température dans le cœur, par rapport au cas sans rayonnement, et se traduit par l'apparition d'un maximum dans le profil de puissance radiative, qui est absent dans le régime conductif. En raison de la symétrie  $S_{x_3}$ , l'exact opposé se produit dans la moitié supérieure de la cavité.

### Convection instationnaire à plus haut nombre de Rayleigh

L'apparition d'instationnarités dans l'écoulement se produit dans différentes gammes de nombres de Rayleigh, selon la présence ou non de transfert radiatif : entre  $Ra = 10^5$  et  $Ra = 3 \times 10^5$  pour un gaz transparent et entre  $Ra = 3 \times 10^5$  et  $Ra = 10^6$  pour un gaz rayonnant. Il semblerait donc à première vue que le rayonnement retarde l'apparition des instationnarités, mais une étude détaillée de la stabilité de toutes les configurations d'écoulement rencontrées dans cette gamme de nombres de Rayleigh serait nécessaire pour confirmer ce point.

Plus le nombre de Rayleigh augmente, plus la convection devient efficace dans le mélange du fluide : la cavité devient alors quasi-isotherme et des couches limites thermiques se forment près des parois supérieure et inférieure. L'énergie cinétique, également, devient de plus en plus homogène au centre, avec l'apparition de pics proche des parois thermostatées, là où le gradient de température est le plus fort. Comme pour les bas nombres de Rayleigh, la présence d'un gaz rayonnant contribue à augmenter l'énergie cinétique, même si l'effet relatif du rayonnement diminue lorsque le nombre de Rayleigh augmente (Soucasse *et al.*, 2021). Dans le bilan énergétique, la puissance radiative en fonction du nombre de Rayleigh évolue asymptotiquement comme :

$$\frac{1}{\sqrt{Ra}} \mathcal{P}^{\text{rad}} = \mathcal{O} \left( \frac{1}{\sqrt{Ra}} \frac{\kappa_P \sigma_{SB} T_0^3 L^2}{\lambda} \right), \quad (3.7)$$

où  $\kappa_P = \int \kappa_\nu I_\nu^0(T_0) d\nu \times \pi / (\sigma_{SB} T_0^4)$  est le coefficient d'absorption moyen de Planck. Ainsi, la puissance radiative reste du même ordre de grandeur mais est pénalisée par le facteur  $1/\sqrt{Ra}$ , tandis que le terme convectif  $\mathbf{u} \cdot \nabla \theta$  reste du

même ordre de grandeur quel que soit le nombre de Rayleigh, compte tenu de l'adimensionnement choisi.

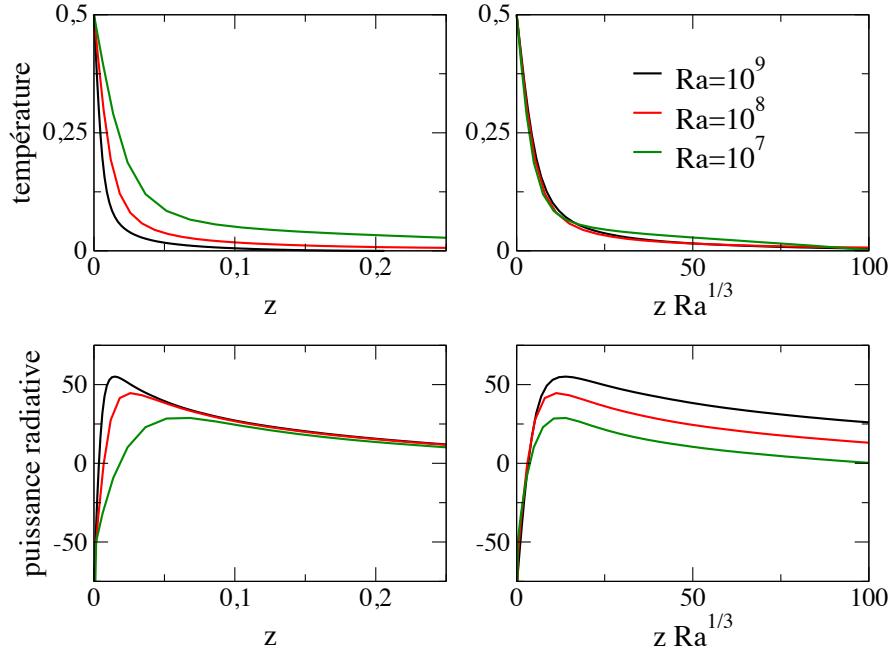


FIGURE 3.2 – Température et puissance radiative au voisinage de la paroi chaude, moyennées statistiquement et sur les plans horizontaux. Cas d'un gaz rayonnant, pour des nombres de Rayleigh dans la gamme  $10^7 \leq Ra \leq 10^9$ . Sur les figures de droite, l'abscisse est ré-échélonnée par  $Ra^{1/3}$ .

Afin de mieux rendre compte de l'évolution des couches limites thermiques dans la gamme  $10^7 \leq Ra \leq 10^9$ , la figure 3.2 montre les profils de température et de la puissance radiative proche de la paroi inférieure. Seul le cas du gaz rayonnant est présenté, car le rayonnement n'a que peu d'effet sur l'épaisseur de la couche limite thermique dans cette gamme de nombres de Rayleigh. Cette figure révèle que l'épaisseur de la couche limite thermique évolue bien, approximativement, selon  $Ra^{-1/3}$ , ce qui est conforme aux résultats de la littérature en régime turbulent (Malkus, 1954; Niemela et al., 2000). Le profil de puissance radiative est similaire à celui décrit pour  $Ra = 10^5$  : dans la partie inférieure de la cavité, le gaz est principalement absorbant, hormis dans une fine couche près de la paroi inférieure chaude, où le gaz est fortement émetteur (l'opposé se produit pour la moitié haute de la cavité). Quand le nombre de Rayleigh augmente, le mélange du gaz causé par la convection est de plus en plus efficace : le gradient de température proche des parois est de plus en plus élevé et donc le gradient de puissance radiative proche-parois augmente de même. L'épaisseur des couches



limites radiatives, ainsi que la position du pic d'absorption, évoluent également en  $Ra^{-1/3}$ .

### Flux de chaleur

La figure 3.3 présente les trois composantes du flux de chaleur total  $q^{tot}$

$$q^{tot} = \underbrace{-\frac{\partial \langle \bar{\theta} \rangle_s}{\partial x_3}}_{q^{cond}} + \underbrace{\sqrt{Ra} \langle \bar{\theta} u_3 \rangle_s}_{q^{conv}} + \underbrace{\frac{L}{\lambda \Delta T} \left\langle \sum_k \int_{4\pi} I_k \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_{x_3} d\boldsymbol{\Omega} \right\rangle_s}_{q^{rad}}, \quad (3.8)$$

où  $q_{cond}$ ,  $q_{conv}$  et  $q_{rad}$  désignent respectivement les flux conductif, convectif et radiatif.  $\langle \cdot \rangle_s$  désigne la moyenne spatiale sur les plans horizontaux et  $\bar{\cdot}$  la moyenne statistique décrite par (3.6). Le flux total  $q^{tot}$  est constant avec la hauteur  $x_3$ , puisque les parois latérales sont adiabatiques. Les valeurs des flux aux parois (moyenne des deux parois isothermes) et à mi-hauteur ( $x_3 = 0.5$ ) sont reproduites dans les tableaux 3.2 et 3.3, respectivement pour les cas du gaz transparent et du gaz rayonnant.

Dans le cas sans rayonnement, il y a un équilibre entre les flux conductif et convectif. Les flux radiatifs présentés dans le Tableau 3.2 correspondent aux échanges entre les parois horizontales supérieure et inférieure, isothermes et noires; le flux radiatif est constant selon la hauteur et le nombre de Rayleigh<sup>2</sup>. La figure 3.3 montre que, pour les hauts nombres de Rayleigh ( $Ra \geq 10^6$ ), les variations des flux conductif et convectif sont limitées aux couches limites : au centre, la convection domine et la conduction s'estompe.

Lorsque le rayonnement du gaz est pris en compte, cependant, l'équilibre entre les flux s'en trouve modifié. Aux bas nombres de Rayleigh, en dessous du seuil d'établissement de la convection dans la cavité, le couplage entre la conduction et le rayonnement entraîne un flux conductif plus important à la paroi, comme présenté dans la figure 3.3. Avec l'établissement de la convection, la présence du gaz rayonnant conduit à un plus grand flux convectif au centre de la cavité : contrairement au cas sans rayonnement, les variations du flux convectif ne sont plus limitées aux couches limites, en raison du couplage convection-rayonnement dans la partie quasi-isotherme de la cavité. Toutefois, l'influence des transferts radiatifs décroît tandis que le nombre de Rayleigh augmente, comme expliqué par l'équation (3.7) : le flux convectif est proportionnel à  $\sqrt{Ra}$ , à la différence des flux conductif et radiatif, dont l'ordre de grandeur ne varie pas avec le nombre de Rayleigh. Leurs effets relatifs deviennent donc de moins en moins important aux plus hauts nombres de Rayleigh (au cœur,  $q_{rad} = \mathcal{O}(\sigma T_0^3 L / \lambda \exp(-\kappa L_e / 2))$  avec  $\kappa L_e$  l'épaisseur optique d'un gaz gris équivalent, la taille de cavité  $L$  demeurant constante).

En comparant les Tableaux 3.2 et 3.3, on peut également remarquer que le flux radiatif à la paroi décroît lorsque le gaz est rayonnant (le gaz rayonnant

2. Pour un fluide et une taille de cavité  $L$  donnés, le flux radiatif ne dépend pas du nombre de Rayleigh tant qu'il est linéarisable.

Ra	paroi		mi-hauteur		
	$q^{\text{cond}}$	$q^{\text{rad}}$	$q^{\text{cond}}$	$q^{\text{conv}}$	$q^{\text{rad}}$
$10^3$	1.00	125.05	1.00	-	125.05
$3 \times 10^3$	1.00	125.05	1.00	-	125.05
$10^4$	1.94	125.05	0.12	1.82	125.05
$3 \times 10^4$	2.67	125.05	-0.13	2.80	125.05
$10^5$	4.24	125.05	-0.11	4.35	125.05
$3 \times 10^5$	5.92	125.05	-0.06	5.99	125.05
$10^6$	8.30	125.05	0.18	8.12	125.05
$3 \times 10^6$	11.48	125.05	0.15	11.34	125.05
$10^7$	16.24	125.05	0.08	16.14	125.05
$3 \times 10^7$	22.06	125.05	0.04	22.02	125.05
$10^8$	31.06	125.05	0.02	31.04	125.05
$10^9$	61.38	125.05	0.002	61.87	125.05

TABLE 3.2 – Flux aux parois et à mi-hauteur à différents nombres de Rayleigh. Flux conductif, convectif et radiatif, moyennés sur les plans horizontaux et moyennés statistiquement. Cas d’un gaz transparent.

Ra	paroi		mi-hauteur		
	$q^{\text{cond}}$	$q^{\text{rad}}$	$q^{\text{cond}}$	$q^{\text{conv}}$	$q^{\text{rad}}$
$10^3$	2.55	116.31	0.71	-	118.15
$3 \times 10^3$	2.55	116.31	0.71	-	118.15
$10^4$	2.55	116.31	0.71	-	118.15
$3 \times 10^4$	2,74	116.48	0.55	1.06	117.61
$10^5$	3.79	118.39	0.10	5.46	116.60
$3 \times 10^5$	6.45	119.28	0.03	9.57	116.10
$10^6$	8.77	119.88	0.09	12.44	116.12
$3 \times 10^6$	11.87	120.29	0.17	15.90	116.08
$10^7$	16.66	120.82	0.12	21.62	115.77
$3 \times 10^7$	22.29	121.93	0.07	28.73	115.46
$10^8$	31.29	121.97	0.03	38.29	114.90
$10^9$	61.82	122.36	0.007	68.61	114.60

TABLE 3.3 – Flux aux parois et à mi-hauteur à différents nombres de Rayleigh. Flux conductif, convectif et radiatif, moyennés sur les plans horizontaux et moyennés statistiquement. Cas d’un gaz rayonnant.

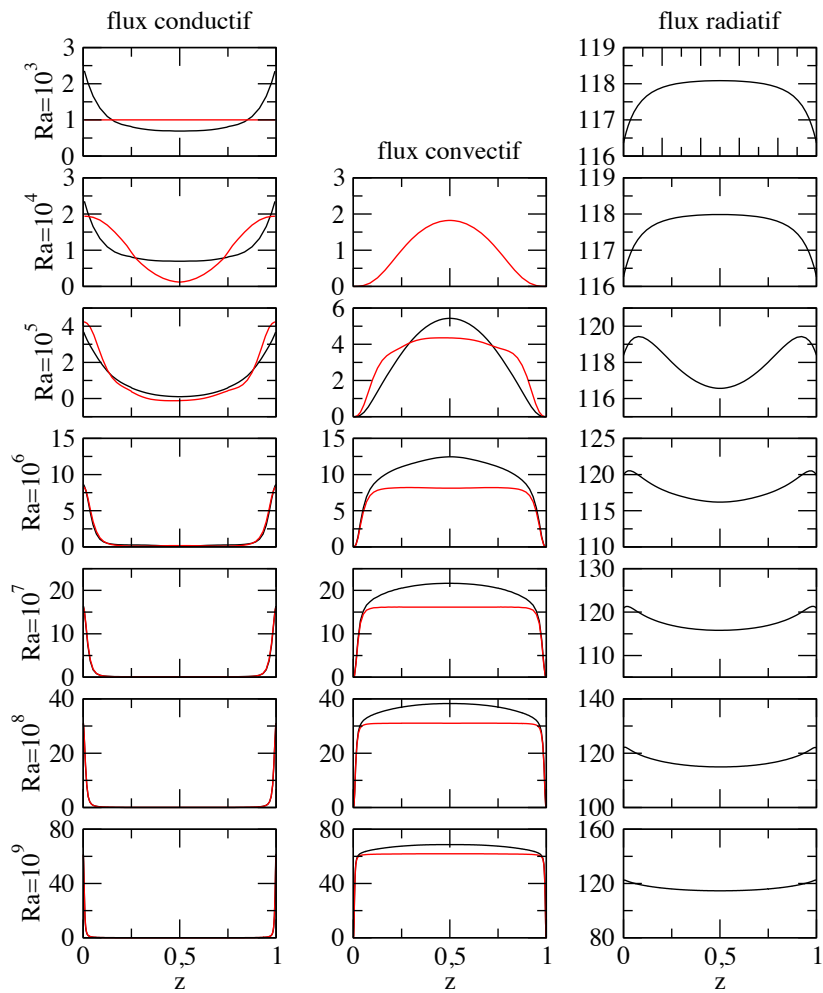


FIGURE 3.3 – Profils verticaux des flux de chaleur à différents nombres de Rayleigh. Flux conductifs, convectifs et radiatifs, moyennés statistiquement et sur les plans horizontaux. Cas d’un gaz rayonnant (noir) et transparent (rouge).

produit un effet écran), et que le rayonnement du gaz n’a que peu d’effet sur le flux conductif pour  $Ra \geq 10^6$ .

### 3.1.3 Bilans énergétiques

Dans cette section, l'attention est portée sur l'effet du rayonnement dans les bilans de trois grandeurs : l'énergie cinétique  $e_k = \frac{1}{2}\overline{u_i u_i}$ , l'énergie potentielle<sup>3</sup>  $e_p = -\text{Pr}\overline{\theta}(x_3 - 0.5)$ , ainsi que l'énergie thermique  $e_\theta = \frac{1}{2}\overline{\theta^2}$  (où  $\overline{\cdot}$  désigne la moyenne statistique définie dans l'équation (3.6)). Pour cette dernière grandeur  $e_\theta$ , le mot *énergie* est utilisé par analogie avec l'énergie cinétique, et non dans un sens physique, ce que l'utilisation de l'italique sert à souligner. La moyenne volumique de ces trois grandeurs dans toute la cavité est présentée dans la Figure 3.4.

Comme établi dans la section 3.1.2, le rayonnement du gaz retarde le déclenchement de la convection dans la cavité : pour un gaz transparent, le régime convectif débute entre  $\text{Ra} = 3 \times 10^3$  et  $\text{Ra} = 10^4$ , tandis que pour un gaz rayonnant il débute entre  $\text{Ra} = 10^4$  et  $\text{Ra} = 3 \times 10^4$ . L'énergie cinétique augmente ensuite avec le nombre de Rayleigh et atteint un pic à  $\text{Ra} = 10^5$ . En l'absence de rayonnement, l'énergie cinétique demeure plutôt constante dans le régime instationnaire ( $\text{Ra} \geq 10^6$ ). La vitesse avait été adimensionnée en utilisant la vitesse de référence  $u_{\text{ref}} = \frac{a\sqrt{\text{Ra}}}{L}$ , issue de l'équilibre entre les forces inertielle et de flottabilité ; le quasi plateau de l'énergie cinétique en régime instationnaire confirme que cette vitesse de référence est bien adaptée pour la présente étude. Pour les nombres de Rayleigh compris entre  $\text{Ra} = 10^5$  et  $\text{Ra} = 10^6$ , le rayonnement du gaz accroît notablement l'énergie cinétique : celle-ci est supérieure de près de 50 % par rapport au cas sans rayonnement. Tout comme pour les flux de chaleur, l'effet relatif de la prise en compte du rayonnement devient de moins en moins important tandis que le nombre de Rayleigh augmente : l'énergie cinétique décroît et se rapproche du niveau du cas sans rayonnement.

L'énergie potentielle et l'énergie thermique sont liées aux écarts entre la température locale et la température moyenne dans la cavité. Les deux décroissent avec le nombre de Rayleigh, étant donné que les épaisseurs de couches limites, où sont localisés les plus forts gradients de température, se réduisent. Comme expliqué dans la section 3.1.2, avant le déclenchement de la convection, les transferts radiatifs avec le gaz diminuent le gradient de température au centre de la cavité, et donc par conséquent l'énergie potentielle et l'énergie thermique. Cependant, une fois le régime convectif installé, ces deux grandeurs sont à des niveaux plus élevés dans le cas rayonnant en raison du plus fort gradient de température au cœur de la cavité.

Le bilan d'énergie cinétique s'écrit :

$$\frac{\partial e_k}{\partial t} + \frac{\partial u_j e_k}{\partial x_j} = -\frac{\partial u_i p}{\partial x_i} + \text{Pr}\theta u_3 + \frac{\text{Pr}}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\text{Pr}}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (3.9)$$

Trois des termes sont écrits sous la forme de divergence de type  $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} = \nabla \cdot \phi$ ,

---

3. L'énergie potentielle, définie localement comme le produit (à  $-\text{Pr}$  près) de l'écart à la moyenne de la température par la distance verticale au centre de la cavité, traduit la capacité d'une région à mettre en mouvement le fluide, en raison de l'instabilité de Rayleigh-Bénard causée par le gradient de température.

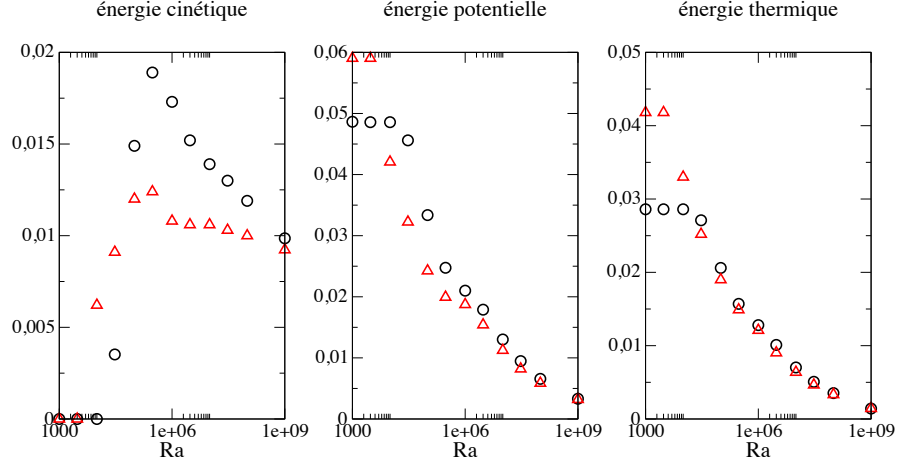


FIGURE 3.4 – Énergie cinétique  $\langle e_k \rangle_v$ , énergie potentielle  $\langle e_p \rangle_v$  et énergie thermique  $\langle e_\theta \rangle_v$  totales (intégrées sur tout le volume de la cavité), en fonction du nombre de Rayleigh. Cas d'un gaz rayonnant (noir) et transparent (rouge).

où  $\phi$  dépend de la vitesse et s'annule à la paroi :  $\frac{\partial u_j e_k}{\partial x_j}$ ,  $\frac{\partial u_i p}{\partial x_i}$  et  $\frac{\text{Pr}}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$ . La moyenne volumique  $\langle \cdot \rangle_v$  appliquée à ces termes s'écrit, par définition :

$$\langle \nabla \cdot \phi \rangle_v = \frac{1}{V} \int_V \nabla \cdot \phi dV, \quad (3.10)$$

avec  $V$  le volume de la cavité. En appliquant le théorème de Green-Ostrogradski, on a alors :

$$\langle \nabla \cdot \phi \rangle_v = \frac{1}{V} \int_S \phi \cdot \mathbf{n} dS, \quad (3.11)$$

où  $S$  désigne les six parois du cube. Le fluide étant visqueux, il adhère aux parois et la vitesse  $y$  est nulle, donc  $\phi$  aussi. Finalement, on a :

$$\langle \nabla \cdot \phi \rangle_v = 0. \quad (3.12)$$

Ainsi, en appliquant la moyenne statistique définie en (3.6) et la moyenne volumique, le bilan d'énergie cinétique devient :

$$\underbrace{\text{Pr} \langle \overline{\theta u_3} \rangle_v}_{\langle \tau_u \rangle_v} = \underbrace{\frac{\text{Pr}}{\sqrt{\text{Ra}}} \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle_v}_{\langle \epsilon_u \rangle_v}, \quad (3.13)$$

où  $\langle \tau_u \rangle_v$  désigne la production totale d'énergie cinétique (le travail des forces de flottabilité) et  $\langle \epsilon_u \rangle_v$  désigne la dissipation mécanique totale. Le terme instationnaire  $\partial e_k / \partial t$  disparaît après application de la moyenne statistique. Il est à

noter que le rayonnement n'apparaît pas directement dans ce bilan.

Le bilan d'énergie potentielle  $e_p = -\text{Pr}\bar{\theta}(x_3 - 0.5)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_p}{\partial t} + \frac{\partial u_j e_p}{\partial x_j} &= -\text{Pr}\theta u_3 - \frac{\text{Pr}}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( (x_3 - 0.5) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \\ &\quad + \frac{\text{Pr}}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} - \frac{\text{Pr}}{\sqrt{\text{Ra}}} (x_3 - 0.5) \mathcal{P}^{\text{rad}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Là encore, le terme instationnaire disparaît lors de l'application de la moyenne statistique. Lorsque l'on prend la moyenne volumique de ce bilan, le terme  $\partial u_j e_p / \partial x_j$  s'annule également, pour les mêmes raisons que dans le bilan d'énergie cinétique. On a ensuite :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \left( (x_3 - 0.5) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \right\rangle_v &= \langle \nabla \cdot ((x_3 - 0.5) \nabla \theta) \rangle_v \\ &= \frac{1}{V} \int_V \nabla \cdot ((x_3 - 0.5) \nabla \theta) dV \\ &= \frac{1}{V} \int_S (x_3 - 0.5) \nabla \theta \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned} \quad (3.15)$$

En décomposant cette dernière intégrale sur les différentes parois,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \left( (x_3 - 0.5) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \right\rangle_v &= \frac{1}{V} \left[ \int_{S_{\text{lat}}} (x_3 - 0.5) \nabla \theta \cdot \mathbf{n} dS \right. \\ &\quad \left. + 0.5 \int_{S_{\text{sup}}} \nabla \theta \cdot \mathbf{n} dS - 0.5 \int_{S_{\text{inf}}} \nabla \theta \cdot \mathbf{n} dS \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Les parois latérales étant adiabatiques et réfléchissantes, le gradient de température  $y$  est nul, dont l'intégrale sur  $S_{\text{lat}}$  est nulle. Pour les parois supérieure et inférieure, le gradient de température à ces parois est orienté selon  $-\mathbf{x}_3$ , et les normales  $\mathbf{n}$  sont opposées ; en raison de la symétrie du problème, les deux intégrales sont donc égales, de signe opposé, et correspondent au flux conductif à la paroi, désigné par le nombre de Nusselt  $\text{Nu}$ . Soit :

$$-\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \left( (x_3 - 0.5) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \right\rangle_v = \text{Nu}. \quad (3.17)$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\text{Pr}}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \right\rangle_v &= \frac{\text{Pr}}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial \theta}{\partial x_3} dV \\ &= \frac{\text{Pr}}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{1}{V} \int_{x_3=0}^1 \frac{\partial \theta}{\partial x_3} dx_3 \\ &= \theta(x_3 = 1) - \theta(x_3 = 0) = -1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ainsi, après application des moyennes statistique et volumique, le bilan d'énergie potentielle devient :

$$\underbrace{\frac{\text{Pr}}{\sqrt{\text{Ra}}} (\text{Nu} - 1)}_{\langle \omega_\theta \rangle_v} - \underbrace{\frac{\text{Pr}}{\sqrt{\text{Ra}}} \langle (x_3 - 0.5) \overline{\mathcal{P}^{\text{rad}}} \rangle_v}_{\langle \omega_{\text{rad}} \rangle_v} = \underbrace{\text{Pr} \langle \overline{\theta u_3} \rangle_v}_{\langle \tau_u \rangle_v}. \quad (3.19)$$

Les termes  $\langle \omega_\theta \rangle_v$  et  $\langle \omega_{\text{rad}} \rangle_v$  correspondent à des sources externes d'énergie potentielle, correspondant à l'injection / retrait d'énergie au niveau des conditions aux limites. En raison de la conservation de l'énergie mécanique, ces termes sources / puits sont équilibrés avec le terme de production d'énergie cinétique  $\langle \tau_u \rangle_v$  (voir l'équation (3.13)). Les répartitions des trois termes du bilan (3.19) sont présentées dans la figure 3.6.

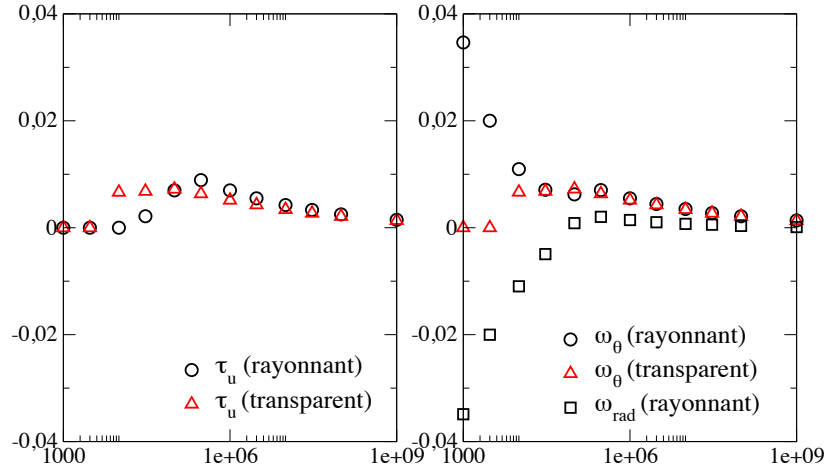


FIGURE 3.5 – Bilan d'énergie potentielle (intégrées sur tout le volume de la cavité) :  $\langle \tau_u \rangle_v$ ,  $\langle \omega_\theta \rangle_v$  et  $\langle \omega_{\text{rad}} \rangle_v$ , en fonction du nombre de Rayleigh. Cas d'un gaz rayonnant (noir) et transparent (rouge).

Aux plus petits nombres de Rayleigh,  $\langle \tau_u \rangle_v = 0$  car il n'y a aucun mouvement de fluide ; ainsi,  $\text{Nu} = 1$  dans le cas sans rayonnement, ce qui est cohérent avec le profil du flux conductif présenté dans la figure 3.3. Cependant dans le cas rayonnant, le flux conductif est augmenté proche des parois, même en l'absence de convection (voir la section 3.1.2). Le nombre de Nusselt est donc supérieur à un et  $\langle \omega_\theta \rangle_v$  est positif aux bas nombres de Rayleigh.

Il est également à noter que le signe du terme  $\langle \omega_{\text{rad}} \rangle_v$  change selon le nombre de Rayleigh : il est négatif à bas nombre de Rayleigh et positif à partir de

$Ra = 10^5$ , lorsque l'énergie cinétique devient plus grande dans le cas rayonnant que dans le cas transparent. Le signe de  $\langle \omega_{\text{rad}} \rangle_v$  permet ainsi de déterminer si le rayonnement freine l'écoulement ou si au contraire il favorise la convection. Le changement de signe de  $\langle \omega_{\text{rad}} \rangle_v$  est également corrélé au changement d'allure du profil de puissance radiative de la figure 3.1. En l'absence de convection, la moitié inférieure ( $x_3 < 0.5$ ) de la cavité est exclusivement émettrice ( $\mathcal{P}^{\text{rad}} < 0$ ) et la moitié supérieure ( $x_3 > 0.5$ ) est exclusivement absorbante ( $\mathcal{P}^{\text{rad}} > 0$ ), ce qui correspond à une destruction d'énergie potentielle ( $\langle \omega_{\text{rad}} \rangle_v < 0$ ). Avec l'établissement de la convection, la moitié inférieure de la cavité devient absorbante, hormis une fine couche proche de la paroi isotherme qui reste émettrice, et l'inverse se produit dans la moitié supérieure : cela conduit à une production d'énergie potentielle ( $\langle \omega_{\text{rad}} \rangle_v > 0$ ).

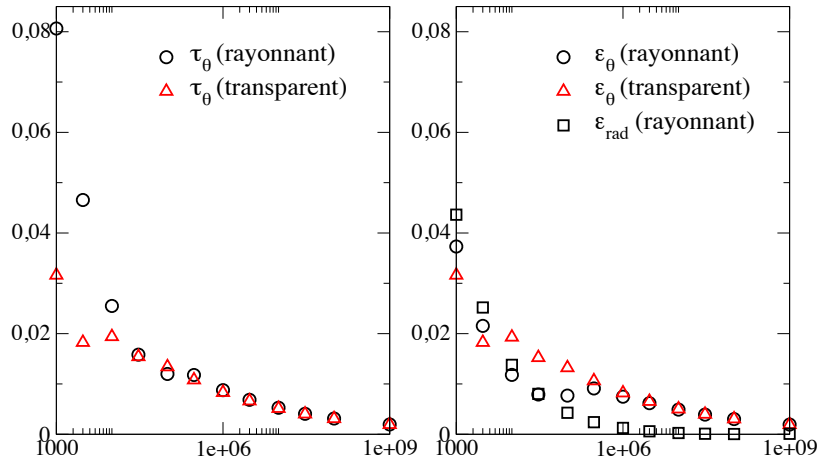


FIGURE 3.6 – Bilan d'énergie thermique (intégrée sur tout le volume de la cavité) :  $\langle \tau_\theta \rangle_v$ ,  $\langle \epsilon_\theta \rangle_v$  et  $\langle \epsilon_{\text{rad}} \rangle_v$ , en fonction du nombre de Rayleigh. Cas d'un gaz rayonnant (noir) et transparent (rouge).

Le bilan d'énergie thermique s'écrit :

$$\frac{\partial e_\theta}{\partial t} + \frac{\partial u_j e_\theta}{\partial x_j} = \frac{1}{\sqrt{Ra}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \theta \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{\sqrt{Ra}} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{1}{\sqrt{Ra}} \theta \mathcal{P}^{\text{rad}}. \quad (3.20)$$

De la même manière, le terme instationnaire disparaît lors de l'application de la moyenne statistique. Lorsque l'on prend la moyenne volumique de ce bilan, le terme  $\partial u_j e_\theta / \partial x_j$  s'annule également, pour les mêmes raisons que dans le bilan d'énergie cinétique et le bilan d'énergie potentielle. En appliquant la moyenne



volumique, on a également :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \theta \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \right\rangle_v &= \frac{1}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{1}{V} \int_V \nabla \cdot (\theta \nabla \theta) dV \\ &= \frac{1}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{1}{V} \int_S \theta \nabla \theta \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (3.21)$$

En décomposant cette dernière intégrale sur les six parois, on obtient :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \theta \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \right\rangle_v &= \frac{1}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{1}{V} \left[ \int_{S_{\text{lat}}} \theta \nabla \theta \cdot \mathbf{n} dS \right. \\ &\quad \left. + \int_{S_{\text{sup}}} \theta \nabla \theta \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_{\text{inf}}} \theta \nabla \theta \cdot \mathbf{n} dS \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\text{Ra}}} \left[ 0 - 0.5 \int_{S_{\text{sup}}} \nabla \theta \cdot \mathbf{n} dS + 0.5 \int_{S_{\text{inf}}} \nabla \theta \cdot \mathbf{n} dS \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

La première intégrale est nulle puisque, les parois latérales étant adiabatiques, le gradient de température y est nul. Les deux autres intégrales correspondent au flux conductif à la parois, c'est à dire le nombre de Nusselt Nu. Ainsi, on a finalement :

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \theta \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \right\rangle_v = \frac{\text{Nu}}{\sqrt{\text{Ra}}}. \quad (3.23)$$

Et, finalement,

$$\underbrace{\frac{\text{Nu}}{\sqrt{\text{Ra}}}}_{\langle \tau_\theta \rangle_v} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\text{Ra}}} \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right\rangle_v}_{\langle \epsilon_\theta \rangle_v} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\text{Ra}}} \langle \theta \mathcal{P}^{\text{rad}} \rangle_v}_{\langle \epsilon_{\text{rad}} \rangle_v}. \quad (3.24)$$

La production d'énergie thermique  $\langle \tau_\theta \rangle_v$  est dissipée à travers deux mécanismes : la conduction ( $\langle \epsilon_\theta \rangle_v$ ) et le rayonnement ( $\langle \epsilon_{\text{rad}} \rangle_v$ ). La répartition des trois termes du bilan 3.24 est présentée dans la figure 3.6.

Aux plus bas nombres de Rayleigh, la production d'énergie thermique est bien plus élevée dans le cas d'un gaz rayonnant que pour un gaz transparent, en raison des différences notables sur le flux conductif. La dissipation se répartit équitablement entre la conduction et le rayonnement dans le régime conductif mais lorsque le régime convectif s'installe, l'importance de la dissipation par rayonnement se réduit comparé à la conduction. En régime instationnaire ( $\text{Ra} \geq 10^6$ ), la dissipation radiative est négligeable devant la dissipation conductive.

### 3.1.4 Statistiques d'ordre 2

En régime instationnaire, les champs de vitesse et de température instantanés peuvent être décomposés de la manière suivante :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad \text{et} \quad \theta = \bar{\theta} + \theta', \quad (3.25)$$

où  $\bar{\mathbf{u}}$  et  $\bar{\theta}$  désignent les champs moyens, au sens de la moyenne statistique définie en (3.6), et  $\mathbf{u}'$  et  $\theta'$  sont les champs turbulents. Cette section rassemble les analyses relatives aux bilans d'énergie cinétique turbulente  $\overline{e_k(\mathbf{u}')} = \frac{1}{2}\overline{u'_i u'_i}$  et de variance des fluctuations de température  $\overline{e_\theta(\theta')} = \frac{1}{2}\overline{\theta' \theta'}$ , dans la gamme de nombres de Rayleigh  $10^7 \leq \text{Ra} \leq 10^9$ .

Dans ces bilans, des moments d'ordre deux ou trois apparaissent, de type  $\overline{\phi' \psi'}$  et  $\overline{\phi' \phi' \psi'}$ . Ces moments peuvent être retrouvés à partir des moyennes statistiques des grandeurs  $\phi\psi$  et  $\phi\phi\psi$ , par les relations suivantes :

$$\overline{\phi' \psi'} = \overline{\phi \psi} - \bar{\phi} \bar{\psi}, \quad (3.26)$$

$$\overline{\phi' \phi' \psi'} = \overline{\phi \phi \psi} - \bar{\phi} \bar{\phi} \bar{\psi} - 2\overline{\phi' \psi'} \bar{\phi} - \overline{\phi' \phi'} \bar{\psi}. \quad (3.27)$$

Compte tenu des remarques précédentes, le bilan d'énergie cinétique turbulente  $\overline{e_k(\mathbf{u}')}$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{e_k(\mathbf{u}')}}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{e_k(\mathbf{u}')}}{\partial x_j} = & \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{u'_j p'} + \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j} - \frac{\text{Pr}}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{\partial \overline{e_k(\mathbf{u}')}}{\partial x_j} \right)}_{\delta_{u'}} \\ & + \underbrace{\text{Pr} \overline{u'_3 \theta'}}_{\tau_{u'}} - \underbrace{\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{\zeta_{u'}} - \underbrace{\frac{\text{Pr}}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_j}}_{-\varepsilon_{u'}}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Dans cette équation,  $\tau_{u'}$  désigne le terme de production d'énergie cinétique turbulente par le travail des forces de flottabilité,  $\zeta_{u'}$  est un terme d'échange d'énergie entre les champs moyen et fluctuant,  $\varepsilon_{u'}$  est la dissipation visqueuse au niveau moléculaire (toujours positive) et  $\delta_{u'}$  apparaît comme un terme de diffusion, qui disparaît une fois intégré volumiquement sur tout le domaine (pour un fluide adhérent à la paroi). Les valeurs des termes de production  $\langle \tau_{u'} \rangle_v$ , d'échange  $\langle \zeta_{u'} \rangle_v$  et de dissipation  $\langle \varepsilon_{u'} \rangle_v$ , intégrés sur toute la cavité, sont regroupés dans le tableau 3.4 dans les cas rayonnant et transparent, pour trois nombres de Rayleigh  $10^7$ ,  $10^8$  et  $10^9$ .

Dans les six configurations considérées, le terme de production moyen  $\langle \tau_{u'} \rangle_v$  domine nettement le terme de transfert  $\langle \zeta_{u'} \rangle_v$ , d'un facteur 10 environ, contrairement à ce qui peut être observé en cavité différentiellement chauffée par exemple (Soucasse et al., 2016). La prise en compte du rayonnement entraîne dans tous les cas une augmentation du terme de production d'énergie cinétique turbulente et donc, par conséquent, du terme de dissipation. L'effet relatif du rayonnement diminue cependant avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. Ces résultats sont consistants avec les effets de renforcement de la convection dus au rayonnement présentés dans les sections précédentes.

La figure 3.7 présente la distribution verticale de chacun des termes du membre de droite de l'équation (3.28), intégrés sur les plans horizontaux. A la différence des termes intégrés volumiquement, on constate ici que chaque terme peut contribuer de manière significative au bilan d'énergie cinétique turbulent

Ra	10 <sup>7</sup>		10 <sup>8</sup>		10 <sup>9</sup>	
	ssR	R1m	ssR	R1m	ssR	R1m
$\langle \tau_{u'} \rangle_v$	2.65	3.45 (30%)	1.77	2.09 (18%)	1.19	1.29 (8%)
$\langle \zeta_{u'} \rangle_v$	0.27	0.27 (—)	0.18	0.20 (13%)	0.10	0.11 (8%)
$\langle \varepsilon_{u'} \rangle_v$	2.96	3.87 (31%)	2.02	2.50 (24%)	1.43	1.56 (9%)

TABLE 3.4 – Termes de production  $\langle \tau_{u'} \rangle_v$ , transfert  $\langle \zeta_{u'} \rangle_v$  et dissipation  $\langle \varepsilon_{u'} \rangle_v$  dans le bilan d'énergie cinétique turbulente, intégrés sur tout le domaine, dans le cas d'un gaz transparent (ssR) et rayonnant (R1m), pour trois nombres de Rayleigh  $Ra = 10^7$ ,  $10^8$ , et  $10^9$ . Les différences relatives dues au rayonnement sont indiquées entre parenthèses.

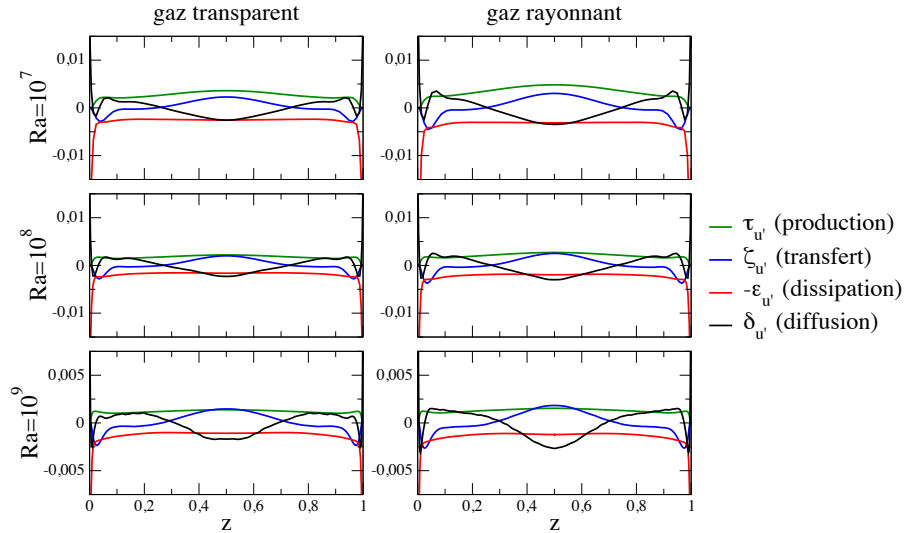


FIGURE 3.7 – Bilan d'énergie cinétique turbulente dans la gamme  $10^7 \leq Ra \leq 10^9$ , intégré sur les plans horizontaux. Termes de production  $\tau_{u'}$  (lignes vertes), de transfert  $\zeta_{u'}$  (lignes bleues), de dissipation  $\varepsilon_{u'}$  (lignes rouges) et de diffusion  $\delta_{u'}$  (lignes noires) d'énergie cinétique turbulente, pour les cas d'un gaz transparent et d'un gaz rayonnant.

local. En outre, au cœur de la cavité, toutes les sources de fluctuation de l'énergie cinétique sont significatives : la dynamique des fluctuations turbulentes n'est pas restreinte aux couches limites, près des parois horizontales chaude et froide. Il est également à noter que les termes de transfert et de diffusion voient leur signe varier à travers la cavité. Cela explique comment ils peuvent contribuer localement au bilan d'énergie cinétique turbulente de manière significative, tout en ayant une influence très faible au niveau global de la cavité. Il est également à noter que le terme de transfert est négatif dans la couche limite et tend donc à diminuer l'énergie cinétique turbulente dans cette zone, tandis que le cisaillement de l'écoulement moyen proche des parois est généralement une source de fluctuations turbulentes dans la plupart des écoulements.

Le bilan de la variance des fluctuations de température  $e_\theta(\theta') = \frac{1}{2}\overline{\theta'\theta'}$  s'écrit :

$$\frac{\partial \overline{e_\theta(\theta')}}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{e_\theta(\theta')}}{\partial x_j} = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \overline{u'_j \theta' \theta'} - \frac{1}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{\partial \overline{e_\theta(\theta')}}{\partial x_j} \right)}_{\delta_{\theta'}} \quad (3.29)$$

$$\underbrace{- \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j}}_{\zeta_{\theta'}} \underbrace{- \frac{1}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}}_{-\varepsilon_{\theta'}} \underbrace{- \frac{1}{\sqrt{\text{Ra}}} \overline{\theta' \mathcal{P}^{\text{rad}'}}}_{-\varepsilon_{\text{rad}'}}$$

Comme pour le bilan d'énergie cinétique turbulente, on voit apparaître un terme de diffusion  $\delta_{\theta'}$  et un terme de transfert entre les champs de température moyen et fluctuant  $\zeta_{\theta'}$ .  $\varepsilon_{\theta'}$  est un terme de dissipation conductive et, dans le cas d'un gaz rayonnant, un terme supplémentaire de dissipation, radiative cette fois, apparaît :  $\varepsilon_{\text{rad}'}$ .

Après intégration volumique sur l'entièreté du domaine, le terme de diffusion disparaît : aux parois isothermes horizontales, les fluctuations de température disparaissent et, aux parois verticales adiabatiques et réfléchissantes, le gradient de température s'annule. Le bilan global de la variance des fluctuations de température se résume donc à un équilibre entre le terme source de transfert  $\langle \zeta_{\theta'} \rangle_v$  et les termes de dissipation conductive  $\langle \varepsilon_{\theta'} \rangle_v$  et, dans le gaz rayonnant, de dissipation radiative  $\langle \varepsilon_{\text{rad}'} \rangle_v$ .

Le tableau 3.5 présente ces termes intégrés volumiquement dans les cas rayonnant et non-rayonnant, pour trois nombres de Rayleigh  $10^7$ ,  $10^8$  et  $10^9$ . Ici encore, le rayonnement augmente le terme de transfert, mais dans une mesure moindre que ce qui se produit pour les fluctuations de vitesse. Le terme de dissipation radiative contribue pour 10% du terme de transfert à  $\text{Ra} = 10^7$ , mais est ramené à 5% et 1% à  $\text{Ra} = 10^8$  et  $\text{Ra} = 10^9$  respectivement. Ce comportement a déjà été observé en cavité différentiellement chauffée (Soucasse et al., 2016) et est relié à la capacité du transfert radiatif à dissiper des structures thermiques de grandes échelles, tandis que la conduction est plus efficace pour dissiper les petites structures thermiques, qui apparaissent davantage aux plus grands nombres de Rayleigh (Soucasse et al., 2020).

Ra	10 <sup>7</sup>		10 <sup>8</sup>		10 <sup>9</sup>	
	ssR	R1m	ssR	R1m	ssR	R1m
$\langle \zeta_{\theta'} \rangle_v$	1.73	1.99 (15%)	1.16	1.23 (6%)	0.774	0.780 (1%)
$\langle \varepsilon_{\theta'} \rangle_v$	1.73	1.81 (5%)	1.16	1.23 (6%)	0.797	0.797 (—)
$\langle \varepsilon_{\text{rad}'} \rangle_v$	—	0.20	—	0.06	—	0.008

TABLE 3.5 – Termes de transfert  $\langle \zeta_{\theta'} \rangle_v$ , de dissipation conductive  $\langle \varepsilon_{\theta'} \rangle_v$  et de dissipation radiative  $\langle \varepsilon_{\text{rad}'} \rangle_v$  du bilan de variance des fluctuations de la température, intégré sur tout le domaine, dans le cas d'un gaz transparent (ssR) et rayonnant (R1m), pour trois nombres de Rayleigh  $Ra = 10^7, 10^8$  et  $10^9$ . Les différences relatives dues au rayonnement sont indiquées entre parenthèses.

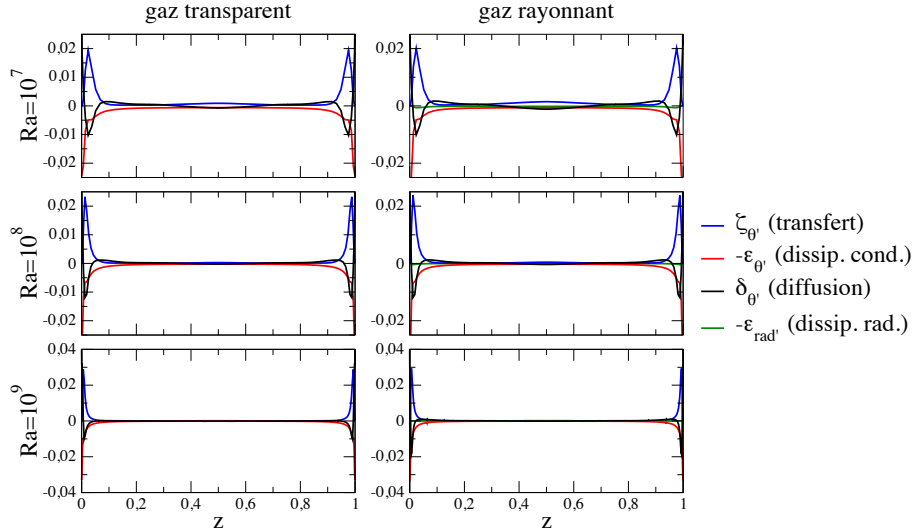


FIGURE 3.8 – Bilan de variance des fluctuations de température dans la gamme  $10^7 \leq Ra \leq 10^9$ , intégré sur les plans horizontaux. Termes de transfert  $\zeta_{\theta'}$  (lignes bleues), dissipation conductive  $\varepsilon_{\theta'}$  (lignes rouges), diffusion  $\delta_{\theta'}$  (lignes noires) et dissipation radiative  $\varepsilon_{\text{rad}'}$  (ligne verte) de la variance de température, pour les cas d'un gaz transparent et d'un gaz rayonnant.

La figure 3.8 présente la distribution verticale de chacun des termes du membre de droite de l'équation (3.29), intégrés sur les plans horizontaux. Il y a une légère augmentation de chacun des termes lorsque le rayonnement est pris en compte, comme observé pour les grandeurs intégrées volumiquement ; ceci est davantage marqué à  $Ra = 10^7$ . Notons également que le terme de diffusion, bien que disparaissant lors de l'intégration sur tout le domaine, peut avoir une contribution locale significative dans la redistribution des fluctuations de température, en particulier dans les couches limites proches des parois horizontales chaude et froide. À la différence des fluctuations de vitesse, le terme de transfert est positif dans les couches limites, et les variations dans le cœur de la cavité sont très faibles.

## 3.2 Effet de la taille de la cavité sur le rayonnement en régime turbulent

Lorsque le fluide présent dans la cavité est transparent, les solutions du système d'équation décrivant l'écoulement ne dépendent que des nombres de Rayleigh et de Prandtl définis respectivement en (1.19) et (1.15). Pour un fluide donné, la taille réelle de la cavité  $L$ , apparaissant dans le nombre de Rayleigh, n'a donc pas d'importance en elle-même, tant que la différence de température entre les parois thermostatées est ajustée pour conserver le nombre de Rayleigh. En revanche, lorsque la cavité est emplie d'un gaz rayonnant tel que celui considéré ici, les fortes variations de l'épaisseur optique du mélange gazeux avec la fréquence empêchent tout adimensionnement des équations du rayonnement et il devient nécessaire de prendre en compte la taille de la cavité.

Les simulations couplées présentées dans la section 3.1 ont été effectuées pour une cavité cubique de côté  $L = 1\text{m}$ . Pour se rapprocher des conditions de rayonnement usuellement présentes dans l'habitation, des simulations ont été entreprises pour une cavité de côté  $L = 3\text{m}$ , pour des valeurs du nombre de Rayleigh allant de  $\text{Ra} = 10^6$  à  $\text{Ra} = 10^9$ . Les paramètres des simulations sont regroupés dans le tableau 3.6.

Ra	Maillage conv.	Maillage rad.	$\delta t \times 10^3$	$\Delta t$
$10^6$	81x81x(4x21)	40x40x40	5	N/A
$10^7$	121x121x(6x21)	40x40x40 <sup>(a)</sup>	2.5	5,000
$10^8$	161x161x(8x21)	40x40x40 <sup>(a)</sup>	1	5,000
$10^9$	321x321x(16x41)	40x40x40 <sup>(a)</sup>	0.5   0.25 <sup>(a)</sup>	100

TABLE 3.6 – Paramètres des simulations couplées dans des cavités de côté 3 mètres : maillages pour la convection, maillage pour le rayonnement, pas de temps pour la convection  $\delta t$  et durée d'intégration  $\Delta t$  pour les solutions instationnaires. Pour le maillage de convection, les nombres entre parenthèses indiquent le nombre de domaines spatiaux fois le nombre de points de collocation dans la direction verticale pour chaque domaine. <sup>(a)</sup> Le modèle de sous-maille pour le rayonnement est utilisé.

### 3.2.1 Analyse statistique

#### Champs d'écoulement et transferts thermiques

La figure 3.9 présente la température, l'énergie cinétique et la puissance radiative obtenues à différents nombres de Rayleigh, dans les cas d'un gaz transparent, d'un gaz rayonnant dans une cavité de 1 mètre de côté et d'un gaz rayonnant dans une cavité de 3 mètres de côté, intégrés statistiquement et sur les plans horizontaux. L'agrandissement de la cavité accroît nettement les effets du rayonnement : augmentation de la stratification thermique dans le cœur et de l'énergie cinétique. Les échanges radiatifs sont également augmentés, avec

une moitié inférieure largement plus absorbante et une moitié supérieure plus émettrice.

La figure 3.10 présente les profils de température et de la puissance radiative proches de la paroi inférieure. Le ré-échelonnage des abscisses selon  $Ra^{1/3}$  met en évidence que l'évolution de l'épaisseur de couche limite en  $Ra^{-1/3}$  est bien conservé lors du passage à une cavité plus grande.

Lors du passage à une cavité de trois mètres de côté, la puissance radiative augmente approximativement d'un facteur six. Or, d'après l'équation (3.7), la puissance radiative est proportionnelle à  $L^2$ , et devrait donc croître ici d'un facteur neuf. Mais l'expression (3.7) est écrite pour un milieu optiquement mince et sa précision décroît lorsque l'épaisseur optique augmente, ce qui est le cas lorsque la taille de la cavité augmente. L'augmentation de l'opacité du milieu entraîne une augmentation des échanges radiatifs entre les parois et le gaz, ce qui se traduit par une modification du flux radiatif.

### Flux de chaleur

La figure 3.11 présente, pour toutes les configurations étudiées, les trois composantes du flux de chaleur total  $q^{tot}$  dont on rappelle ici l'expression :

$$q^{tot} = \underbrace{-\frac{\partial \langle \bar{\theta} \rangle_s}{\partial x_3}}_{q^{cond}} + \underbrace{\sqrt{Ra} \langle \bar{\theta} u_3 \rangle_s}_{q^{conv}} + \underbrace{\frac{L}{\lambda \Delta T} \left\langle \sum_k \int_{4\pi} I_k \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{x}_3} d\boldsymbol{\Omega} \right\rangle_s}_{q^{rad}}, \quad (3.30)$$

où  $q_{cond}$ ,  $q_{conv}$  et  $q_{rad}$  désignent respectivement les flux conductif, convectif et radiatif.  $\langle \cdot \rangle_s$  désigne la moyenne spatiale sur les plans horizontaux et  $\bar{\cdot}$  la moyenne statistique décrite par (3.6). Le flux total  $q^{tot}$  est constant avec la hauteur  $x_3$ , puisque les parois latérales sont adiabatiques et réfléchissantes. Les valeurs des flux aux parois et à mi-hauteur ( $x_3 = 0.5$ ) sont reproduites dans le tableau 3.7 pour les simulations dans une cavité de 3 mètres. Les valeurs dans les autres configurations peuvent être trouvées dans les tableaux 3.2 et 3.3, respectivement pour les cas du gaz transparent et du gaz rayonnant. Dans la figure 3.11, afin de rendre plus lisible la comparaison entre les flux radiatifs dans les cavités de 1 et 3 mètres, le flux radiatif à la paroi a été retranché du flux radiatif, afin d'avoir une ordonnée à l'origine nulle.

Si le passage à une cavité de 3 mètres ne modifie que très légèrement le flux conductif, il en va tout autrement pour les flux convectif et radiatif. Le flux radiatif étant proportionnel à la taille de la cavité (du fait de son adimensionnement), le creux observable dans la distribution verticale du flux radiatif est largement amplifiée par l'augmentation de la taille de la cavité (un deuxième effet est à l'œuvre, l'effet d'écrantage, qui sera traité au paragraphe suivant). Afin de respecter la conservation du flux total, le flux convectif au cœur de la cavité est alors lui aussi accru (le flux radiatif manquant est compensé par le flux convectif). A taille de cavité constante, l'augmentation avec le nombre de Rayleigh du creux observé dans le flux radiatif au cœur de la cavité est dû à l'évolution du profil de température : le cœur devient de plus en plus isotherme,



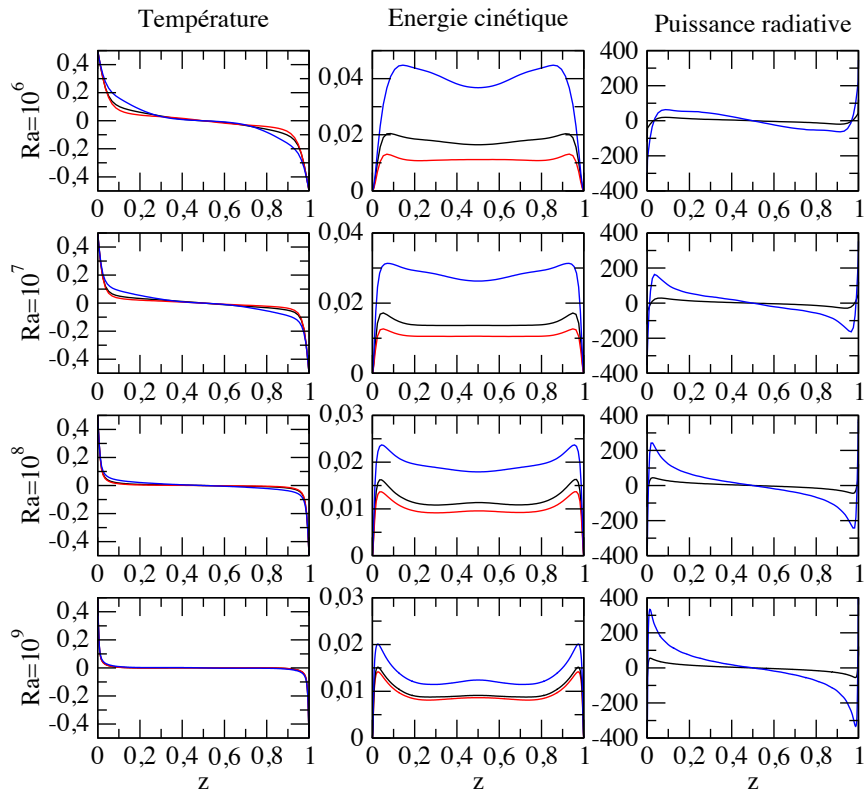


FIGURE 3.9 – Champs d'écoulement à différents nombres de Rayleigh. Température, énergie cinétique et puissance radiative, moyennées statistiquement et sur les plans horizontaux. Cas d'un gaz rayonnant dans une cavité de 3 mètres (bleu), rayonnant dans une cavité de 1 mètre (noir) et transparent (rouge).

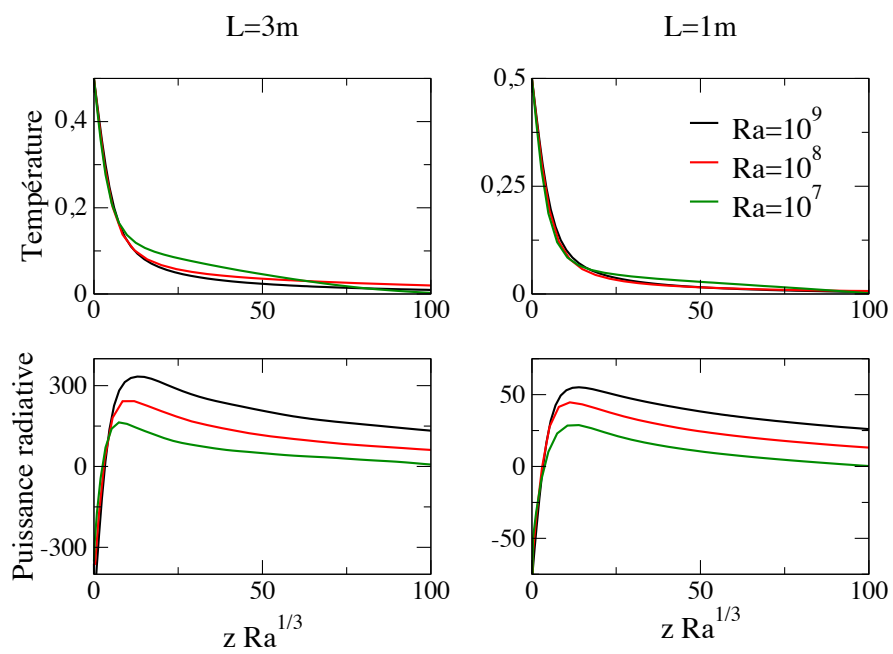


FIGURE 3.10 – Température et puissance radiative au voisinage de la paroi chaude, moyennés statistiquement et sur les plans horizontaux. Cas d'un gaz rayonnant, pour des nombres de Rayleigh dans la gamme  $10^7 \leq \text{Ra} \leq 10^9$ , dans des cavités de côté 1 et 3 mètres. L'abscisse est ré-échelonnée par  $\text{Ra}^{1/3}$ .

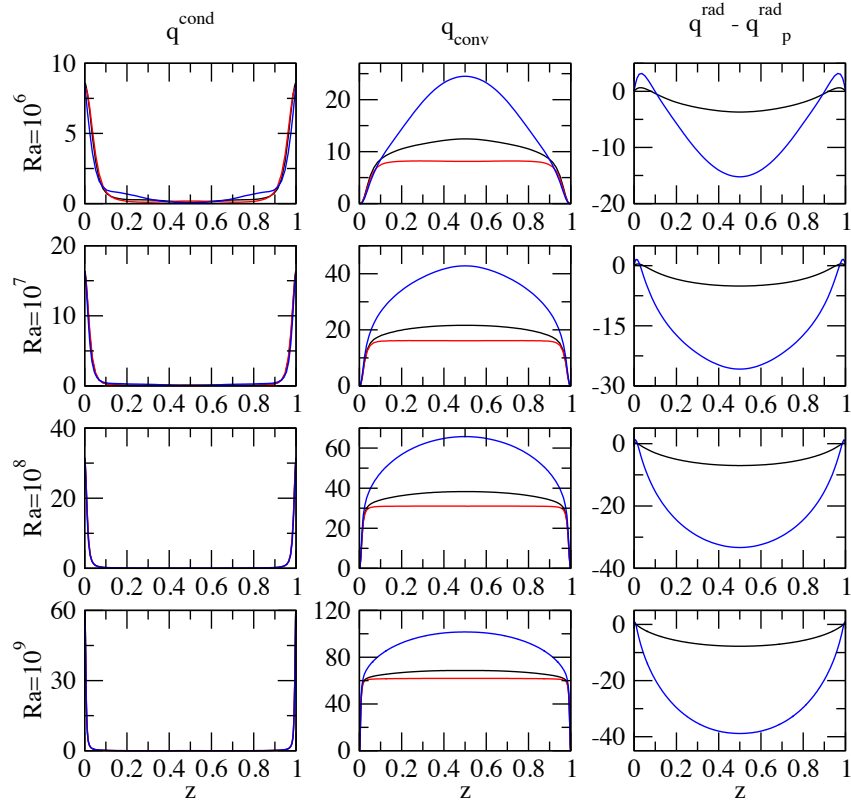


FIGURE 3.11 – Flux de chaleur à différents nombres de Rayleigh. Flux conductifs, convectifs et radiatifs, moyennés statistiquement et sur les plans horizontaux. Cas d'un gaz rayonnant dans une cavité de 3 mètres (bleu), rayonnant dans une cavité de 1 mètre (noir) et transparent (rouge). Pour les flux radiatifs, le flux à la paroi a été enlevé pour faire apparaître uniquement la variation du flux dans la cavité.

et les couches limites aux parois horizontales de plus en plus fines. Les transferts radiatifs se font donc davantage entre régions de même température (surtout au cœur), ce qui diminue le flux radiatif.

### Effet d'écrantage

Deux effets concomitants sont à l'œuvre dans le changement du flux radiatif lors du passage à une cavité de trois mètres. D'une part, l'effet d'échelle du flux radiatif qui évolue proportionnellement à la taille de la cavité, et qui devrait donc

Ra	paroi		mi-hauteur		
	$q^{\text{cond}}$	$q^{\text{rad}}$	$q^{\text{cond}}$	$q^{\text{conv}}$	$q^{\text{rad}}$
$10^6$	9.12	346.63	0.07	24,50	331.40
$10^7$	16.90	352.55	0.07	42.79	326.77
$10^8$	32.45	357.37	0.05	65.74	324.06
$10^9$	62.51	360.92	0.03	101.58	322.07

TABLE 3.7 – Flux aux parois et à mi-hauteur à différents nombres de Rayleigh. Flux conductif, convectif et radiatif, moyennés sur les plans horizontaux et moyennés statistiquement. Cas d’un gaz rayonnant dans une cavité de 3 mètres de côté.

multiplier celui-là par trois. D’autre part, l’épaississement optique du gaz qui, gardant la même composition chimique à un et trois mètres, rend le milieu plus opaque au rayonnement. Pour tenter de mesurer l’influence relative de ces deux effets, la figure 3.12 présente les flux radiatifs à plusieurs nombres de Rayleigh des différentes configurations.

Pour chacun des graphiques, trois courbes sont représentées. La droite rouge correspond au flux radiatif dans une cavité de trois mètres emplie d’un gaz transparent (c’est-à-dire le flux radiatif échangé entre les deux parois horizontales noires, sans interaction du milieu gazeux). Comme le gaz est transparent, ce flux est rigoureusement égal au triple du flux radiatif dans une cavité d’un mètre de côté (cas ssR), dont les valeurs peuvent être trouvées dans le tableau 3.2. La courbe bleue correspond au flux radiatif dans le cas R3m (par rapport au flux radiatif représenté dans la figure 3.11, le flux à la paroi a été ajouté). Enfin, la courbe noire correspond au triple du flux radiatif obtenu dans le cas R1m. D’un point de vue physique, cela correspondrait au flux radiatif obtenu dans une cavité de trois mètres de côté, avec le même profil de température adimensionné qu’à un mètre, mais emplie d’un gaz dont le coefficient d’absorption aurait été divisée par trois pour garder une épaisseur optique égale à celle dans une cavité d’un mètre de côté.

Les différences entre les courbes rouge/bleue et rouge/noire correspondent à l’effet de l’absorption du gaz rayonnant air/CO<sub>2</sub>/H<sub>2</sub>O, dans une cavité de trois mètres et d’un mètre respectivement (au triple de l’effet dans ce dernier cas). Deux effets sont visibles : la diminution du flux radiatif à la paroi (diminution de l’échange par rayonnement entre les parois noires) et la convexité de la distribution verticale du flux, dues aux échanges radiatifs entre les parois et le gaz. La légère croissance du flux proche de la paroi basse (décroissance proche de la paroi haute) est causée par la couche limite radiative émettrice (resp. absorbante), particulièrement mise en évidence dans la figure 3.10.

La différence entre la courbe noire et la courbe bleue correspond à l’effet sur le flux radiatif de l’augmentation de l’épaisseur optique du gaz par le passage à une cavité de trois mètres. L’augmentation de l’épaisseur optique contribue à diminuer le flux radiatif à la paroi ainsi qu’à accentuer l’effet de creux au cœur de la cavité. Les deux phénomènes n’évoluent pas de la même manière quand le

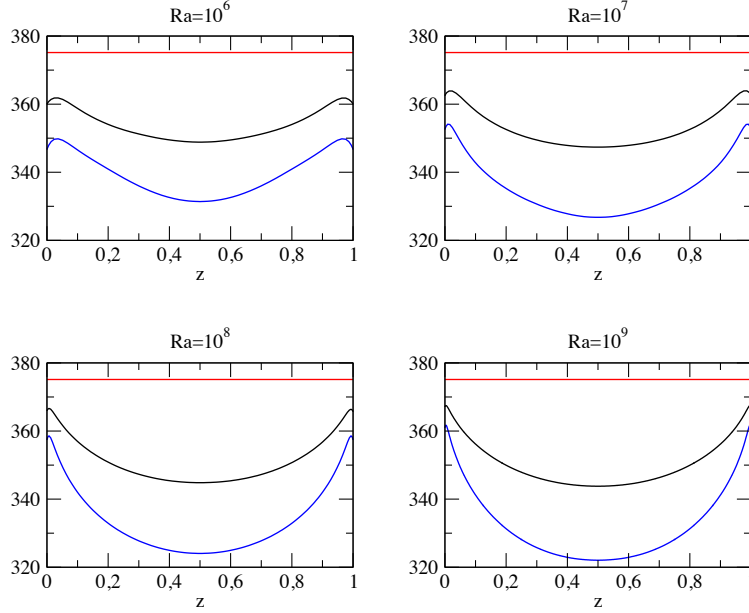


FIGURE 3.12 – Flux radiatifs à différents nombre de Rayleigh, moyennés statistiquement et sur les plans horizontaux. En bleu, le flux radiatif dans une cavité de trois mètres de côté, emplie de gaz rayonnant. En noir, le triple du flux radiatif dans une cavité d’un mètre de côté, emplie de gaz rayonnant. En rouge, le flux radiatif dans une cavité de trois mètres de côté (ou le triple du flux radiatif dans une cavité d’un mètre de côté), emplie d’un gaz transparent.

nombre de Rayleigh augmente : l’influence sur le flux radiatif à la paroi tend à diminuer, en raison de la réduction de l’épaisseur des couches limites radiatives proches des parois horizontales. En revanche, la diminution du flux dans le cœur est une conséquence du moindre couplage entre la convection et le rayonnement à haut nombre de Rayleigh, qui limite l’effet du rayonnement sur la stratification thermique au cœur de la cavité (le profil de température est plus “plat” au centre à haut nombre de Rayleigh, même en présence de rayonnement) : les échanges radiatifs ont principalement lieu entre régions de température similaires. Les effets de changement de l’épaisseur optique sont donc plus efficaces.

### Bilans d’énergie

La figure 3.13 représente, pour chacune des trois configurations, les valeurs intégrées sur tout le domaine de l’énergie cinétique  $e_k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$ , l’énergie potentielle  $e_p = -\text{Pr} \overline{\theta} (x_3 - 0.5)$ , ainsi que l’énergie thermique  $e_\theta = \frac{1}{2} \overline{\theta^2}$ , où  $\bar{\cdot}$  désigne la

moyenne statistique définie dans l'équation (3.6). Pour les trois types d'énergie, le passage à une cavité de trois mètres de côté conduit à une augmentation des niveaux d'énergie par rapport à une cavité d'un mètre de côté.

Les effets du rayonnement augmentent donc avec la taille de la cavité et diminuent avec le nombre de Rayleigh : dans le bilan d'énergie, le terme relatif au rayonnement s'écrit en effet grossièrement

$$\frac{1}{\sqrt{\text{Ra}}} \mathcal{P}^{\text{rad}} = \mathcal{O} \left( \frac{1}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{\kappa_P \sigma T_0^3 L^2}{\lambda} \right), \quad (3.31)$$

avec  $\kappa_P = \int \kappa_\nu I_\nu^0(T_0) d\nu \times \pi / (\sigma_{SB} T_0^4)$  le coefficient d'absorption moyen de Planck. Lorsque le nombre de Rayleigh augmente, l'effet relatif du rayonnement sur la convection est atténué par le facteur  $1/\sqrt{\text{Ra}}$ . Cependant, pour un nombre de Rayleigh donnée, la taille de la cavité peut partiellement compenser ce phénomène, la puissance radiative étant proportionnelle à  $L^2$ .

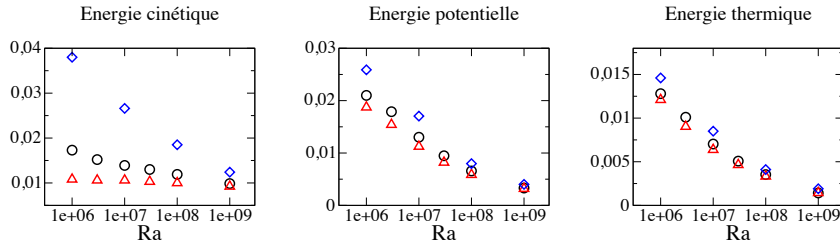


FIGURE 3.13 – Énergie cinétique  $\langle e_k \rangle_v$ , énergie potentielle  $\langle e_p \rangle_v$  et énergie thermique  $\langle e_\theta \rangle_v$  totales (intégrées sur tout le volume de la cavité), en fonction du nombre de Rayleigh. Cas d'un gaz rayonnant dans une cavité de 3 mètres (bleu), rayonnant dans une cavité de 1 mètre (noir) et transparent (rouge).

Il est également à noter que, entre les cavités rayonnantes d'un et trois mètres de côté, la vitesse adimensionnée reste du même ordre de grandeur, surtout aux hauts nombre de Rayleigh : l'énergie cinétique est environ trois fois plus élevée à  $\text{Ra} = 10^6$  et environ 25% plus élevée à  $\text{Ra} = 10^9$ , ce qui donne en première approximation une vitesse adimensionnée dans la cavité de trois mètres  $\mathbf{u}^+ \simeq \sqrt{2e_k}$  1,73 fois plus élevée à  $\text{Ra} = 10^6$  et 1,12 fois plus élevée à  $\text{Ra} = 10^9$  que dans la cavité d'un mètre. Cependant, les vitesses de référence  $u_{\text{ref}} = a\sqrt{\text{Ra}}/L$  décroissent lorsque la taille de la cavité augmente : les vitesses réelles  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^+ \times u_{\text{ref}}$  sont donc inférieures dans la cavité rayonnante de trois mètres à celles dans la cavité rayonnante d'un mètre. Cependant, l'augmentation relative de la vitesse réelle dans le cas d'un gaz rayonnant, par rapport à un gaz transparent, reste bien supérieure dans une grande cavité que dans une plus petite (comparaison entre les nuages de points bleus/rouges et noirs/rouges).

### 3.2.2 Aspect instationnaire

#### Analyse des moments cinétiques

Dans la configuration cubique de Rayleigh-Bénard, la circulation des grandes échelles (souvent abrégée en LSC, pour Large Scale Circulation) s'établit, selon la valeur du nombre de Rayleigh, dans une forme de tambour autour d'un des axes horizontaux ( $x_1$  ou  $x_2$ ), ou alors selon un plan vertical orienté dans une diagonale du cube. Il est possible de détecter la structure de la circulation des grandes échelles en observant le moment cinétique  $\mathbf{L} = \int (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{u} d\mathbf{x}$  de l'écoulement, par rapport au centre de la cavité  $\mathbf{x}_0$ . La figure 3.15 présente l'évolution temporelle des composantes  $L_{x_1}$  et  $L_{x_2}$  du moment angulaire, qui traduisent l'intensité de la rotation globale de l'écoulement autour des axes de direction  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  respectivement.

Lorsque  $L_{x_1}$  et  $L_{x_2}$  sont tous les deux non nuls, l'écoulement a lieu selon un plan diagonal ; lorsque l'une des deux composantes est nulle (ou oscille autour de zéro), l'écoulement est dans une configuration de type tambour. Le signe de  $L_{x_1}$  et  $L_{x_2}$  permet ensuite de déterminer autour de quel axe ou dans quelle diagonale l'écoulement s'établit, ainsi que son sens de rotation. Les changements de signe des composantes du moment angulaire correspondent alors à des réorientations de l'écoulement dans la cavité. La figure 3.14 présente un exemple d'écoulement pour chacune des configurations.

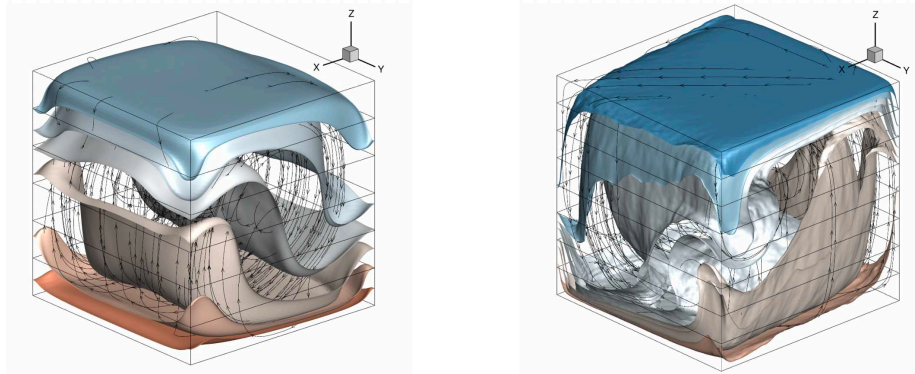


FIGURE 3.14 – Illustration des deux configurations stables rencontrées dans une cavité cubique de Rayleigh Bénard. À gauche, une configuration tambour extraite de la simulation à  $Ra = 10^7$  R3m (pour  $L_{x_1} \sim 0$  et  $L_{x_2} < 0$ ) ; à droite, une configuration diagonale extraite de la simulation à  $Ra = 10^8$  R3m (pour  $L_{x_1} > 0$  et  $L_{x_2} > 0$ ). Des lignes de courant ainsi que des surfaces isothermes (valeurs arbitraires) sont ajoutées pour la lisibilité.

La figure 3.15 récapitule l'évolution temporelle des composantes  $L_{x_1}$  et  $L_{x_2}$

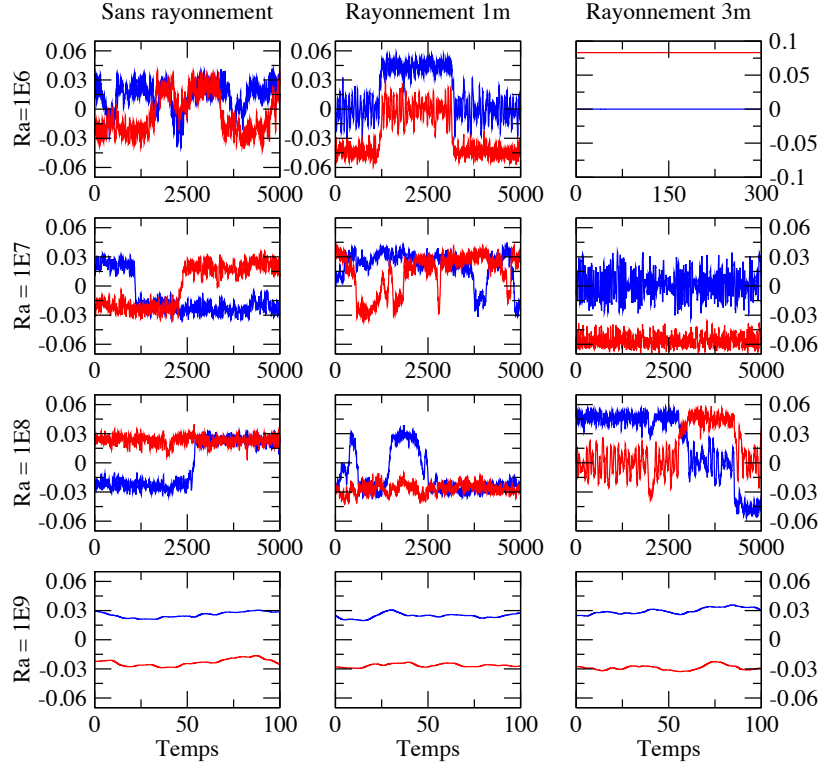


FIGURE 3.15 – Evolution temporelle des composantes selon  $x_1$  et  $x_2$  du moment cinétique,  $L_{x_1}$  (bleu) et  $L_{x_2}$  (rouge), pour différents nombres de Rayleigh. Cas d'un gaz rayonnant dans une cavité de 3 mètres (droite), rayonnant dans une cavité de 1 mètre (milieu) et transparent (gauche).

du moment cinétique, à différents nombres de Rayleigh, pour les trois configurations étudiées.

De tous les écoulements, seul le cas  $Ra = 10^6$  dans une cavité de trois mètres est un écoulement stationnaire. La valeur particulièrement élevée du moment angulaire est liée à la valeur plus grande de l'énergie cinétique (et donc de la vitesse) dans cette configuration. Dans les autres cas, on observe principalement deux cas : soit l'écoulement est diagonal et les valeurs absolues (moyenne) des composantes en  $x_1$  et  $x_2$  du moment angulaire sont à peu près égales à 0.03 ; soit l'écoulement est tambour et la valeur absolue (moyenne) de la composante non nulle est plus élevée (entre 0.05 et 0.06), tandis que l'amplitude d'oscillation autour de zéro de l'autre composante est plus grande.

Cela est particulièrement visible à  $Ra = 10^8$ , trois mètres et, dans une moindre mesure, à  $Ra = 10^6$  sans rayonnement. Dans le premier cas ( $Ra =$



$10^8$  R3m), l'écoulement est majoritairement en tambour, avec quelques moments épisodiques et instables d'écoulement diagonal, autour de  $t^+ = 2000$  et  $t^+ = 2800$ . A ces moments, la valeur absolue de la composante non nulle du moment angulaire diminue, et l'autre composante prend également (en valeur absolue) la même valeur. A  $Ra = 10^6$  sans rayonnement, l'écoulement est majoritairement diagonal, avec des périodes instables d'écoulement tambour, autour de  $t^+ = 2200$  et  $t^+ = 3800$ , mais ces périodes d'écoulement tambour ne s'accompagnent pas d'une augmentation en valeur absolue très nette de la composante non nulle du moment. Mais, compte tenu du caractère assez instable des moments (fréquentes réorientations, changement de structures d'écoulement), il est difficile d'en juger.

A  $Ra = 10^9$ , l'écoulement est diagonal dans les trois configurations. La finesse du maillage requis à si haut nombre de Rayleigh entraîne un coût du calcul numérique très élevé et la simulation n'a pas pu être conduite sur un temps d'intégration très étendu. Ce court temps d'intégration n'a pas permis de mettre en évidence des phénomènes de réorientation ; il serait intéressant de les poursuivre sur une plus grande durée.

### Influence du rayonnement sur les structures d'écoulement

La figure 3.15 montre une modification de l'évolution des structures d'écoulement avec le nombre de Rayleigh et selon les conditions radiatives. A partir de ces courbes, et en observant les évolutions temporelles du moment angulaire dans les autres configurations étudiées et présentées dans la partie 3.1, il est alors possible de construire le graphe de la figure 3.16. Ce graphique est construit de manière purement qualitative et les points représentés ont été placés d'après les observations effectuées sur les moments angulaires.

Pour faciliter la compréhension, la figure 3.16 est donc à lire à la lumière de la figure 3.15. Par exemple, d'après l'évolution des composantes du moment du moment angulaire (figure 3.15), dans le cas  $Ra = 10^8$ , trois mètres, l'écoulement est majoritairement tambour, avec des épisodes diagonaux ; dans le cas  $Ra = 10^6$  sans rayonnement, l'écoulement est majoritairement diagonal, avec des épisodes tambours. Les deux cas sont donc clairement des cas de transitions entre l'écoulement tambour et l'écoulement diagonal, mais le second penche légèrement plus du côté diagonal que le premier, et donc le point correspondant sur le graphique de la figure 3.16 est placé légèrement plus haut. Les bandes représentant les différentes structures d'écoulement sont de tailles égales et ne représentent aucunement une quelconque importance relative de telle ou telle structure.

L'évolution des structures d'écoulement avec le nombre de Rayleigh se décompose en différentes étapes. Par souci de lisibilité, les différentes configurations seront dénommées de manière compacte par "Ra (configuration radiative)", avec le nombre de Rayleigh sous la forme  $10^n$  et la configuration radiative abrégée en "ssR", "R1m" et "R3m" (définis au début du chapitre). Ainsi, les structures d'écoulement évoluent de la manière suivante :

- En dessous du nombre de Rayleigh critique qui marque le déclenchement

de la convection dans la cavité, le fluide est immobile et les transferts d'énergie ont lieu uniquement par conduction, et éventuellement rayonnement. Le moment angulaire est nul. C'est le cas pour les configurations  $10^3$  (ssR),  $3 \times 10^3$  (ssR) et  $10^3$  (R1m),  $3 \times 10^3$  (R1m),  $10^4$  (R1m).

- Lorsque le nombre de Rayleigh critique est dépassé, le régime convectif s'installe dans la cavité. La première structure rencontrée est une structure tambour stationnaire, qui se traduit par un moment angulaire constant dans le temps, avec une composante nulle et une autre non nulle. On retrouve cette structure pour les cas  $10^4$  (ssR),  $3 \times 10^4$  (ssR),  $3 \times 10^4$  (R1m),  $10^5$  (R1m),  $3 \times 10^5$  (R1m) et  $10^5$  (R3m),  $10^6$  (R3m).
- Au delà d'un deuxième nombre de Rayleigh critique, les premières instationnarités apparaissent. L'écoulement est en moyenne toujours dans une structure tambour, mais le moment angulaire n'est plus constant et les valeurs des composantes oscillent autour de zéro pour l'une et d'une valeur non nulle pour l'autre. On rencontre cette configuration à  $3^5$  (ssR) et  $10^7$  (R3m).
- Lorsque le nombre de Rayleigh augmente encore, les oscillations du moment angulaire deviennent suffisamment importantes pour causer des phénomènes de réorientation de l'écoulement, aux cours desquels l'axe de rotation du tambour pivote de 90 degrés. Les configurations de ce type peuvent être trouvées épisodiquement à  $10^6$  (ssR) et à  $3 \times 10^6$  (R1m) et  $10^8$  (R3m). Le faible nombre d'exemples de réorientations dans l'étape précédente peut laisser penser soit qu'il s'agit d'une courte période de transition entre deux états stables, soit que les durées d'intégration temporelle étaient trop courtes pour capter une réorientation.
- Aux hauts nombres de Rayleigh, la structure de l'écoulement change à nouveau et la circulation des grandes échelles se déplace dans une diagonale du cube. Au niveau du moment angulaire, cela se traduit par des composantes  $L_{x_1}$  et  $L_{x_2}$  d'amplitudes moyennes égales ou opposées. Au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh augmente, la transition entre la configuration tambour et la configuration diagonale semble se faire de la manière suivante : les réorientations en configuration tambour se font de plus en plus fréquentes, avec des périodes instables où l'écoulement est diagonal, comme dans le cas  $10^8$  (R3m). Puis on bascule dans un état où les deux configurations sont instables et l'écoulement alterne entre les deux configurations, comme à  $10^6$  (ssR), avant de passer à un écoulement majoritairement diagonal, avec des épisodes tambours instables, comme à  $10^7$  (R1m).
- Après cette période de transition, la circulation des grandes échelle se fait dans une diagonale du cube. Des réorientations peuvent survenir mais, au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh augmente, elles tendent à se raréfier ( $10^8$  (R1m),  $10^7$  puis  $10^8$  (ssR)). En raison de l'importante puissance de calcul requise, les simulations effectuées à  $Ra = 10^9$  n'ont pas pu être prolongées sur une durée suffisante pour capturer une éventuelle réorientation, et donc les points correspondant sur la figure 3.16 sont placés avec une certaine incertitude. Cependant, il est raison-

nable de penser que, pour des nombre de Rayleigh encore plus élevés, l'écoulement finirait par se stabiliser dans une diagonale, sans qu'il survienne de réorientation.

La présence de rayonnement semble donc augmenter les nombres de Rayleigh qui définissent les zones de transitions entre les différentes structures d'écoulement. Il avait déjà été montré dans la section 3.1.2 que la rayonnement contribuait à retarder le déclenchement de la convection dans la cavité. Ici, il semble manifeste que le rayonnement a un effet retardateur sur toute l'évolution de l'écoulement selon le nombre de Rayleigh, et l'effet est encore amplifié lorsque la taille de la cavité augmente. En présence de rayonnement, il ne semble donc pas possible de classifier les écoulements uniquement à partir du nombre de Rayleigh.

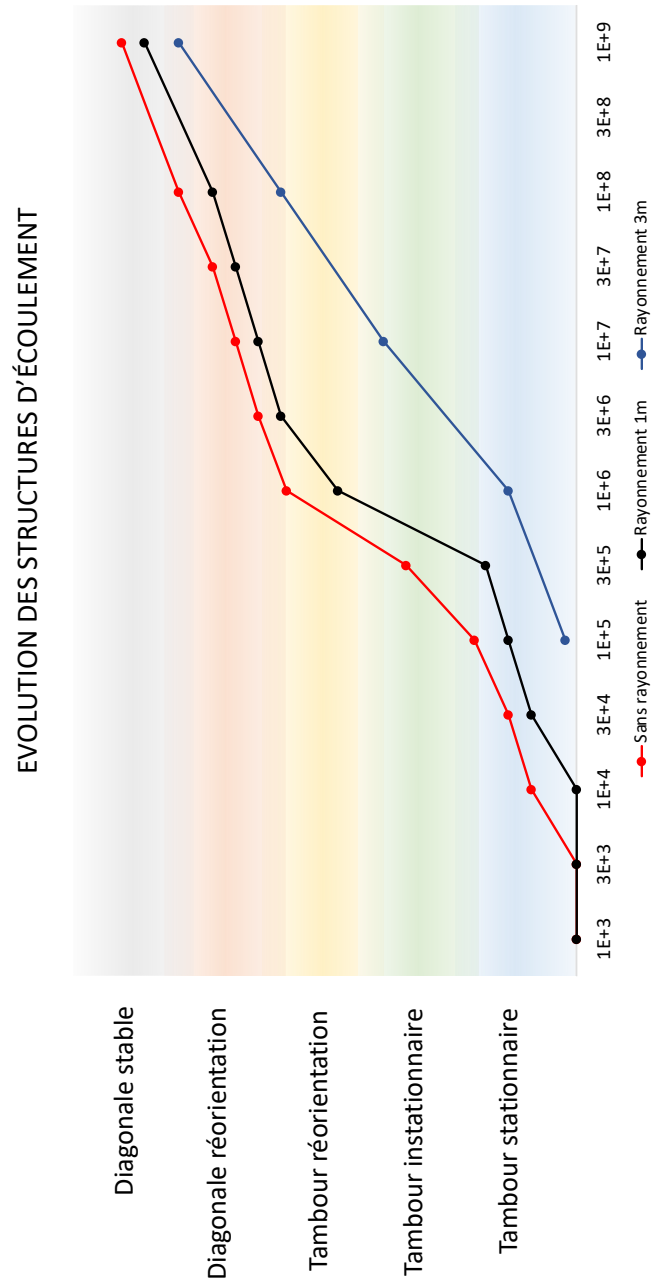


FIGURE 3.16 – Evolution, selon le nombre de Rayleigh, des différentes structures d'écoulement rencontrées dans la cavité cubique de Rayleigh-Bénard. Cas d'un gaz rayonnant dans une cavité de 3 mètres (bleu), rayonnant dans une cavité de 1 mètre (noir) et d'un gaz transparent (rouge).



## Chapitre 4

# Simulations aux grandes échelles (LES)

Dans un écoulement turbulent, des structures tourbillonnaires de différentes tailles apparaissent dans le fluide. C'est dans les structures de plus grandes tailles que l'énergie cinétique turbulente est produite. Ces grands tourbillons vont donner naissances à des tourbillons de plus petite taille dans lesquels est transférée l'énergie cinétique turbulente produite. Ces plus petits tourbillons vont entraîner la formations de tourbillons encore plus petits, et ainsi de suite jusqu'à ce que les tourbillons soient de taille inférieure à une taille critique, appelée dimension de Kolmogorov, à partir de laquelle la viscosité du fluide permet de dissiper l'énergie cinétique turbulente qui a été transmise à travers toutes les échelles intermédiaires.

La figure 4.1 présente une représentation dans l'espace de Fourier de la densité d'énergie cinétique turbulente  $E(k)$  en fonction du nombre d'ondes  $k$ . Cette répartition d'énergie cinétique turbulente peut se décomposer en trois parties. Aux petits nombres d'ondes (ce qui correspond aux grandes structures spatiales, c'est à dire l'échelle macroscopique), il y a une zone de production d'énergie cinétique turbulente. Aux plus grands nombres d'ondes (les structures spatiales de taille inférieure à la dimension de Kolmogorov), les forces de viscosité sont suffisamment importantes pour dissiper cette énergie cinétique par échauffement du fluide. Entre les deux, on trouve la zone inertielle, caractérisée par des structures de tailles variées qui transfèrent l'énergie cinétique turbulente depuis l'échelle macroscopique vers l'échelle de Kolmogorov.

Lors de la résolution d'un écoulement par DNS (Direct Numerical Simulation, ou simulation numérique directe), telle que présentée dans les chapitres précédents, toutes les échelles de la turbulence sont résolues. Pour ce faire, le maillage spatiale doit être suffisamment fin pour capter la dissipation visqueuse, c'est-à-dire que la taille des mailles doit être inférieure à la dimension de Kolmogorov. Or, la taille de la dimension de Kolmogorov dépend de l'intensité de turbulence de l'écoulement, caractérisée (selon le type d'écoulement) par le

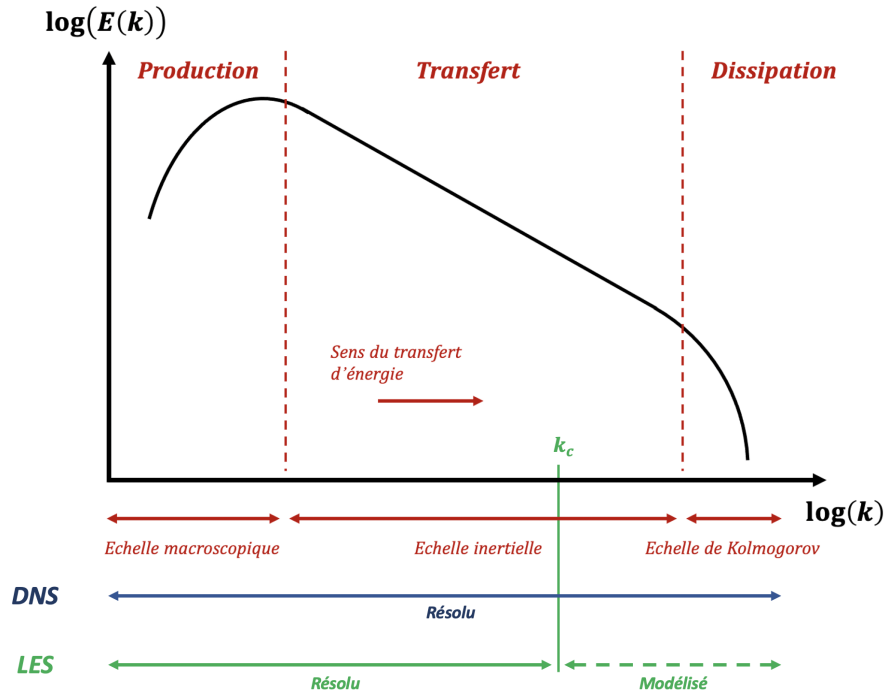


FIGURE 4.1 – Représentation spectrale schématique de la cascade de Kolmogorov décrivant les zones de production, de transfert et de dissipation de l'énergie cinétique turbulente en fonction de la taille caractéristique des structures tourbillonnaires de l'écoulement. Schéma des approches de simulation numérique directe (DNS) et de simulation aux grandes échelles (LES).

nombre de Reynolds  $Re$  ou le nombre de Rayleigh  $Ra$  (les définitions et liens entre ces nombres peuvent être trouvées dans la partie 1.2). En particulier, le rapport entre l'échelle macroscopique et l'échelle de Kolmogorov évolue selon  $Re^{3/4}$  (Tennekes et Lumley, 1972). En convection naturelle, pour une cavité cubique (tridimensionnelle) de taille constante, le nombre de points nécessaires pour mailler le domaine doit donc évoluer approximativement en  $Re^{9/4}$ , ce qui est rédhibitoire pour effectuer des simulations à haut niveau de turbulence, en dépit des progrès des calculateurs modernes.

Pour palier cette limite technique, la LES (Large Eddy Simulation, ou simulation aux grandes échelles) propose de ne résoudre que les grandes échelles de l'écoulement, associées aux nombres d'ondes  $k \leq k_c$ , où  $k_c$  est le nombre d'ondes de coupure. Cela permet ainsi de représenter l'écoulement sur un maillage plus grossier et de limiter ainsi la puissance de calcul requis. Les plus petites échelles ( $k > k_c$ ) doivent alors faire l'objet d'une modélisation pour que leurs effets soit intégrés dans la simulation. Cette modélisation est cruciale : l'effet associé

aux petites échelles est la dissipation de l'énergie. Si le modèle utilisé pour représenter ce phénomène n'est pas précis, les résultats obtenus peuvent donc être totalement faussés.

## 4.1 Introduction à la simulation aux grandes échelles

### 4.1.1 Notion de filtrage des équations

La résolution des grandes échelles de l'écoulement se fait au moyen d'un filtrage des équations (1.23), (1.24) et (1.25) le décrivant.

Mathématiquement, le filtrage est effectué par produit de convolution de l'équation avec une fonction filtre  $G$ . Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble  $\Omega$ . La fonction filtrée  $\bar{f}$  est définie par :

$$\bar{f}(x) = G * f(x) = \int_{\Omega} f(x-t)G(t)dt \quad (4.1)$$

Le filtrage LES est un filtrage passe-bas, c'est-à-dire qu'il supprime les contributions des hauts nombres d'ondes (associés aux petites structures spatiales). Le filtre est généralement caractérisé par une longueur  $\Delta$  et un nombre d'ondes de coupure  $k_c = 1/\Delta$ . Ce nombre d'ondes de coupure est choisi pour être situé dans la zone inertielle de la cascade de Kolmogorov (figure 4.1). Ainsi, le filtrage permet de capter les phénomènes de production d'énergie cinétique turbulente (dont les nombres d'ondes associés sont plus petits que  $k_c$ ) mais pas les phénomènes de dissipation, qui interviennent aux grands nombres d'ondes. Physiquement, le filtrage permet donc de représenter les grandes structures de l'écoulement, mais pas les plus petits tourbillons.

La figure 4.2 illustre la dégradation de la résolution de l'écoulement lors du procédé de filtrage. Elle représente un détail d'un champ de température instantané à mi-hauteur, obtenu par DNS, sur un maillage de  $320 \times 320 \times (16 \times 20)$  points de collocation (a). Les champs (b) et (c) sont obtenus en filtrant ce premier champ pour le faire passer sur des maillages de  $160 \times 160 \times (8 \times 20)$  et  $80 \times 80 \times (4 \times 20)$  respectivement. Au fur et à mesure que le maillage grossit, la résolution se dégrade et les structures les plus fines sont de moins en moins bien représentées. Cela permet néanmoins un grand gain de temps de calcul considérable, d'un facteur 8 dans le premier cas et 54 dans le second. Sous réserve de pouvoir trouver un modèle fiable pour prendre en compte l'effet des petites structures, qui ne sont plus représentées, le filtrage des équations et leur résolution par des méthodes de LES permettent donc de simuler des problèmes physiques trop coûteux pour la DNS.

Dans ce chapitre, les grandeurs filtrées seront symbolisées par  $\bar{\cdot}$ . Les équations filtrées sont alors :

Bilan de masse :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (4.2)$$



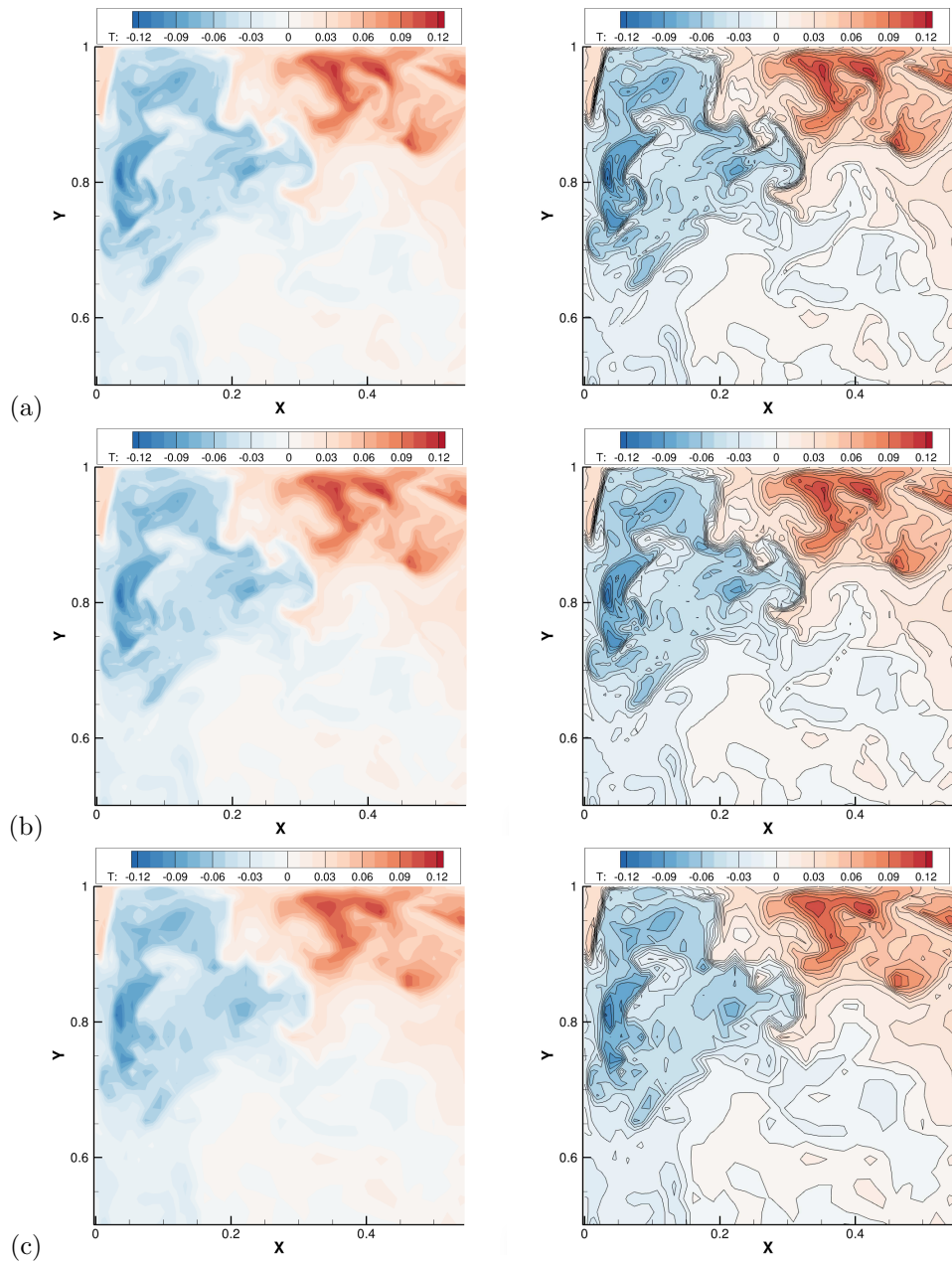


FIGURE 4.2 – Illustration de la dégradation de la résolution due au filtrage : un même champ de température est représenté, mais sur des nombres différents de points de collocations (et donc de modes Tchebychev) dans chaque direction. (a) 320 points, (b) 160 points, (c) 80 points. A droite, les isothermes de température ont été ajoutés.

Bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} = -\nabla \bar{p} + \text{Pr} \bar{\theta} \mathbf{x}_3 + \frac{\text{Pr}}{\sqrt{\text{Ra}}} \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}(\bar{\mathbf{u}}) \quad (4.3)$$

Bilan d'énergie

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\theta} = \frac{1}{\sqrt{\text{Ra}}} \nabla^2 \bar{\theta} - \nabla \cdot \bar{\mathbf{h}}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta}) \quad (4.4)$$

Où  $\bar{\mathbf{u}}$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $\bar{p}$  désignent respectivement les champs de vitesse, température et pression filtrés. On voit apparaître dans chacun des deux bilans un nouveau terme : le tenseur des contraintes de sous-maille  $\bar{\boldsymbol{\tau}}(\bar{\mathbf{u}}) = \overline{\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{u}}$  et le vecteur flux de chaleur de sous-maille  $\bar{\mathbf{h}}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta}) = \overline{\mathbf{u} \theta} - \bar{\mathbf{u}} \bar{\theta}$ . Ces termes représentent les contributions, respectivement mécaniques et thermiques, des échelles de sous-maille, à l'écoulement global. Ces contributions ne sont pas directement accessibles, car elles se rapportent à des phénomènes de longueur caractéristique inférieure à la taille du filtre.

Il est cependant nécessaire de prendre en compte les effets de ces termes sur l'écoulement. Puisqu'ils ne peuvent être calculés (la résolution offerte par le maillage étant trop grossière pour capter ces phénomènes), il est nécessaire d'établir un modèle pour exprimer ces termes en fonction de paramètres connus. Une présentation plus exhaustive de la simulation aux grandes échelles peut être trouvée en Sagaut (1998).

#### 4.1.2 Modélisation du tenseur de sous-maille

Le phénomène dominant à l'échelle de sous-maille (grands nombres d'ondes) est la dissipation d'énergie cinétique turbulente par frottements visqueux. Le modèle choisi pour exprimer  $\bar{\boldsymbol{\tau}}(\bar{\mathbf{u}})$  doit donc être capable de représenter cette réalité physique. Ainsi, le modèle le plus largement utilisé est le modèle de viscosité turbulente (eddy-viscosity), introduit initialement par Smagorinsky (1963) :

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}(\bar{\mathbf{u}}) \approx -2\nu_e S(\bar{\mathbf{u}}) = -2\nu_e \bar{\mathbf{S}} \quad (4.5)$$

Le tenseur des contraintes de sous-maille est modélisé comme le simple produit d'une viscosité de sous-maille  $\nu_e$  et du tenseur des déformations :

$$(S(\bar{\mathbf{u}}))_{ij} = \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.6)$$

Il est à noter que la viscosité de sous-maille  $\nu_e$  introduite ici dépend de l'écoulement et non des caractéristiques du fluide considéré. Ce modèle considère donc que l'effet dominant aux échelles de sous-maille est la dissipation visqueuse ; l'introduction de  $\nu_e$  permet de prendre en compte ce phénomène.

Afin de fermer le système d'équations, il est nécessaire de modéliser cette viscosité de sous-maille  $\nu_e$  en fonction des caractéristiques de l'écoulement. De nombreux modèles ont proposé une expression de  $\nu_e$  ; plusieurs d'entre eux sont décrits ci-après.

### Premières tentatives : les modèles de Smagorinsky et Eidson

En 1963, Joseph Smagorinsky propose le premier modèle pour exprimer la viscosité de sous-maille, fondé sur l'analyse dimensionnelle (Smagorinsky, 1963). En effet, dans les équations non adimensionnées,  $\nu_e$  est homogène à des  $m^2.s^{-1}$  : il est donc possible de l'exprimer en fonction d'une échelle de longueur au carré et d'une échelle de temps. L'échelle de longueur la plus évidente est la taille du filtre  $\Delta$ . Quant à l'échelle de temps, Smagorinsky propose la norme du tenseur des déformations filtré  $|\bar{S}| = (2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})^{1/2}$ . L'expression de  $\nu_e$  obtenue est donc :

$$\nu_e = (C_S \Delta)^2 |\bar{S}|, \quad (4.7)$$

où  $C_S$  désigne la constante de Smagorinsky qui est une donnée d'entrée a priori du modèle, généralement comprise entre 0,1 et 0,2 (Eidson, 1985).

En 1985, Eidson propose une modification du modèle de Smagorinsky plus adaptée à la convection naturelle et en particulier pour les écoulements de Rayleigh-Bénard (Eidson, 1985). Il ajoute à l'expression de  $\nu_e$  un terme représentant la participation des forces de flottabilité à l'établissement de l'écoulement :

$$\nu_e = (C\Delta)^2 \left( |\bar{S}|^2 + \sqrt{2} \frac{\text{PrRa}}{\text{Pr}_e} \frac{\partial T}{\partial x_3} \right)^{1/2}. \quad (4.8)$$

$C$  est, comme pour le modèle de Smagorinsky, une constante et  $\text{Pr}_e$  désigne un nombre de Prandtl de sous-maille dépendant, de la même manière que  $\nu_e$ , de l'écoulement. La notion de nombre de Prandtl de sous-maille sera abordée plus en détail dans la partie 4.1.3.

La force de ces deux modèles réside dans leur simplicité, ce qui se traduit en termes de temps de calcul par un coût très faible. Cependant, ils présentent aussi de lourds inconvénients, les plus notables étant :

- La constante  $C_S$  est une donnée d'entrée a priori de l'écoulement et ne permet pas de représenter correctement la diversité des écoulements turbulents ;
- La viscosité de sous-maille  $\nu_e$  ne s'annule pas lorsque l'écoulement est laminaire (notamment proche des parois) ;
- $C_S$  est constant dans le domaine, et positive, ce qui implique que :

[o] Le modèle ne permet pas de capter les variations dans la dynamique de la turbulence au sein du domaine (par exemple proche-paroi, au centre de la cavité ou encore dans des zones de recirculation)

[o] Le phénomène de rétrodiffusion (backscatter) de l'énergie, dans lequel de l'énergie cinétique turbulente peut être diffusé des petites échelles vers les grandes échelles, n'est pas non plus capté. Ce phénomène se traduirait localement par une constante négative.

Ces limites du modèle de Smagorinsky conduisent à l'établissement d'autres modèles tentant de les dépasser.

## Les modèles de Smagorinsky dynamiques

Ces modèles reprennent l'expression générale de la viscosité de sous-maille proposée par Smagorinsky (4.7). Cependant, le paramètre  $C$ , nommé paramètre de Smagorinsky, n'est ici plus considéré constant mais dépend de l'espace et du temps. Le calcul est effectué au moyen d'un double filtrage des équations de bilan. Germano et al. (1991) proposent en 1991 le modèle suivant : on considère un premier filtre  $\overline{G}$  de longueur caractéristique  $\overline{\Delta}$  et un filtre test  $\widehat{G}$  de longueur caractéristique  $\widehat{\Delta}$  tel que  $\widehat{\Delta} > \overline{\Delta}$ . On note alors :

- $\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}$  le tenseur des contraintes de Reynolds associé au filtrage par  $\overline{G}$ ,
- $T_{ij} = \widehat{\overline{u_i u_j}} - \widehat{\overline{u_i}} \widehat{\overline{u_j}}$  le tenseur des contraintes de Reynolds associé au filtrage par  $\overline{G}$  puis  $\widehat{G}$ ,
- $L_{ij} = \widehat{\overline{u_i u_j}} - \widehat{\overline{u_i}} \widehat{\overline{u_j}}$  le tenseur des contraintes turbulentes résolues, appelé aussi identité de Germano. Ce tenseur correspond à la contribution des échelles de turbulence de longueur caractéristique comprise entre les longueurs des deux filtres, échelles appelées "fenêtre de test". On notera que  $L_{ij} = T_{ij} - \widehat{\tau_{ij}}$ .

En posant :

- $\tau_{ij} - \delta_{ij} \tau_{kk} = -2C m_{ij}$  avec  $m_{ij} = -2\overline{\Delta}^2 |\overline{S}| \overline{S}_{ij}$ ,
- $T_{ij} - \delta_{ij} T_{kk} = -2C M_{ij}$  avec  $M_{ij} = -2\widehat{\Delta}^2 |\widehat{S}| \widehat{S}_{ij}$ ,
- $L_{ij} - \delta_{ij} L_{kk} = -2C K_{ij}$  avec  $K_{ij} = \widehat{\Delta}^2 |\widehat{S}| \widehat{S}_{ij} - \overline{\Delta}^2 |\overline{S}| \widehat{\overline{S}}_{ij}$ ,

on obtient que  $C$  doit satisfaire un système de six équations indépendantes (pour respecter  $L_{ij} = T_{ij} - \widehat{\tau_{ij}}$ ), ce qu'aucune valeur de  $C$  ne prétend pouvoir faire. Afin de minimiser l'erreur, on a alors :

$$C = \frac{\langle L_{ij} S_{ij} \rangle}{\langle M_{ij} S_{ij} \rangle}. \quad (4.9)$$

La notation  $\langle \cdot \rangle$  désigne la moyenne effectuée sur les directions homogènes de l'écoulement. En effet, il est constaté que la valeur de  $C$  varie très fortement spatialement ; pour lisser ces variations, Germano et al. recommandent donc d'effectuer cette opération de moyenne.

Peu après, en 1992, Lilly (1992) reprend le modèle de Germano en y ajoutant une modification pour limiter l'erreur de calcul de  $C$ , en introduisant le carré de l'erreur associée au calcul de  $C$ , notée  $Q$  :

$$Q = (L_{ij} - \delta_{ij} L_{kk} + 2C K_{ij})^2. \quad (4.10)$$

$C$  est alors calculée comme la valeur minimisant l'erreur  $Q$ , ie telle que  $\partial Q / \partial C = 0$ , soit

$$C = \frac{L_{ij} M_{ij}}{2M_{ij}^2}. \quad (4.11)$$

Là aussi, il est recommandé d'utiliser la moyenne de  $C$  selon les directions

homogènes, pour minimiser ses variations au sein du domaine :

$$C = \frac{\langle L_{ij} M_{ij} \rangle}{2 \langle M_{ij}^2 \rangle}. \quad (4.12)$$

Le modèle ainsi obtenu est souvent appelé modèle de Germano-Lilly. Il permet de prédire correctement l'écoulement, mais est souvent coûteux en temps de calcul.

Ce modèle fonctionne bien pour la convection forcée où, puisque l'écoulement possédant une direction privilégiée, il est facile d'effectuer la moyenne de  $C$ . Cependant, dans le cadre de la convection naturelle, de telles directions homogènes n'existent pas et il est nécessaire de trouver un autre moyen de limiter les fluctuations du paramètre de Smagorinsky. En 2000, Zhang et Chen (2000) proposent de filtrer à nouveau l'expression de  $C$  obtenue à l'aide du filtre LES ou du filtre test :

$$C = \frac{\widehat{L_{ij} M_{ij}}}{2 M_{ij}^2}. \quad (4.13)$$

Il est à noter que ce modèle permet à  $C$  de prendre des valeurs négatives, ce qui illustre la prise en compte de la rétrodiffusion de l'énergie. Cependant, des telles valeurs négatives risquent fortement de rendre le schéma numérique instable et les auteurs recommandent donc de prendre

$$C = \max \left( \frac{\widehat{L_{ij} M_{ij}}}{2 M_{ij}^2}, 0 \right). \quad (4.14)$$

En effet, le phénomène de rétrodiffusion de l'énergie est souvent extrêmement court, bien plus que le pas de temps  $\Delta t$  de la simulation : le schéma numérique rétrodiffuse donc de l'énergie (au lieu de la dissiper) sur une période beaucoup trop longue par rapport au phénomène réel, ce qui peut facilement entraîner une accumulation locale d'énergie trop importante et rendre instable le schéma.

Le modèle de Smagorinsky filtré permet de prédire correctement les champs de vitesse et de température, mais peine à calculer les transferts thermiques aux parois ainsi que la distribution de l'énergie cinétique turbulente. Il reste néanmoins beaucoup plus précis que le modèle de Smagorinsky originel (Su et al., 2001).

### Le modèle de Bardina

La modélisation de la viscosité de sous-maille se fait à partir de l'énergie cinétique de sous-maille  $q_{sm}^2$ , ce qui permet de s'assurer que la viscosité de sous-maille est nulle lorsque l'écoulement est totalement résolu (Bardina et al., 1983) :

$$\nu_e = C \overline{\Delta} \sqrt{q_{sm}^2} \text{ avec } q_{sm}^2 = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}. \quad (4.15)$$

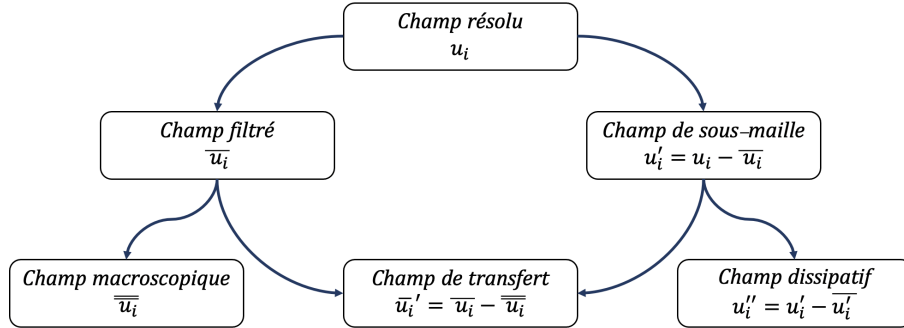


FIGURE 4.3 – Décomposition de la structure de l’écoulement dans le modèle de Bardina en trois niveaux, selon les opérations de filtrage effectuées.

**Hypothèse de similarité d’échelles de Bardina :** En appliquant deux fois le filtre au champ de vitesse, sous réserve que l’opérateur de filtrage ne soit pas un opérateur de Reynolds (ie  $G^2 \neq G$ , voir l’appendice A de Sagaut (1998) pour de plus amples détails), il est possible de décomposer l’écoulement en trois niveaux, illustrés dans la figure 4.3 :

- $\overline{\overline{u_i}}$ , les plus grandes échelles de turbulence, résolues
- $\overline{u'_i} = \overline{u_i} - \overline{\overline{u_i}}$ , les échelles de transfert entre les grandes échelles et les échelles de sous-maille, à la frontière de la résolution
- $u''_i = u'_i - \overline{u'_i}$ , les plus petites échelles responsables de la dissipation (NB :  $u'_i$  désigne les échelles de sous-maille).

L’hypothèse de similarité d’échelles consiste à supposer que les échelles de transfert sont égales aux échelles de sous-maille filtrées, soit

$$\overline{u'_i} = \overline{\overline{u'_i}}. \quad (4.16)$$

Cette hypothèse sera réutilisée dans les modèles d’échelles mixtes et d’échelles mixtes locales.

### Le modèle d’échelles mixtes

Ce modèle, développé par Sagaut durant sa thèse dans les années 1990, modélise la viscosité de sous-maille en s’appuyant sur les modèles de Smagorinsky et de Bardina, en s’appuyant sur l’hypothèse de similarité d’échelles de Bardina (Sagaut, 1995; Sagaut et al., 1996). La viscosité de sous-maille est exprimée comme une moyenne pondérée de deux expressions provenant de deux stratégies de modélisations des échelles de sous-maille (voir Sagaut (1998) pour de plus amples détails sur ces deux stratégies) :

- La modélisation structurelle, qui consiste à trouver la meilleure approximation possible du tenseur  $\overline{\tau}(\overline{\mathbf{u}})$  à partir de  $\overline{\mathbf{u}}$
- La modélisation fonctionnelle, qui consiste à modéliser les effets du terme de sous-maille sur  $\overline{\mathbf{u}}$  et non le tenseur  $\overline{\tau}(\overline{\mathbf{u}})$  lui-même

On a alors :

$$\nu_e(\alpha) = C \left( \overline{\Delta}^2 \sqrt{|\overline{S}^2|} \right)^\alpha \left( \overline{\Delta} \sqrt{|q_{sm}^2|} \right)^{1-\alpha}, \quad (4.17)$$

avec  $C$  une constante,  $\overline{\Delta}$  la taille du filtre,  $0 < \alpha < 1$ ,  $q_{sm}^2$  l'énergie cinétique de sous-maille et  $|\overline{S}^2| = 2S_{ij}S_{ij}$ . On a  $q_{sm}^2 = \frac{1}{2}\overline{u'_i u'_i} \approx \frac{1}{2}\overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2}(\overline{u_i - \overline{u_i}})(\overline{u_i - \overline{u_i}})$  d'après l'hypothèse de similarité d'échelles de Bardina (4.16).  $\alpha$  est généralement pris égale à 0.5.

Ce modèle est intéressant car il permet de pondérer les effets de différents phénomènes ayant lieu à différentes échelles ; de plus, pour la simulation d'écoulements en convection naturelle, il se marie bien avec son pendant en thermique, le modèle d'échelles mixtes locales (voir 4.1.3).

### Les modèles basés sur des invariants de tenseurs

Les modèles suivants sont construits à partir des invariants des tenseurs des taux de déformation et des taux de rotation. Pour une matrice  $A$ , les trois invariants, dits de Cayley-Hamilton, sont :

1.  $P_A = \text{tr}(A)$ ,
2.  $Q_A = \frac{1}{2}(\text{tr}^2(A) - \text{tr}(A^2))$ ,
3.  $R_A = \det(A)$ .

L'idée commune à ces modèles fondés sur les invariants de tenseur est que la viscosité de sous-maille est invariante par changement de référentiel. En tant que telle, elle doit donc être modélisée à partir de grandeurs elles aussi invariantes par changement de référentiel.

#### Le modèle de Vreman

En 2004, Vreman (2004) propose un nouveau modèle qui s'affranchit de la nécessité d'utiliser différents niveaux de filtrage pour déterminer la viscosité de sous-maille. Dans ce modèle, les grandeurs suivantes sont introduites :

- $\alpha_{ij} = \partial \overline{u_j} / \partial x_i$  la matrice des gradients de vitesse,
- $\beta_{ij} = \overline{\Delta} \alpha_{mi} \alpha_{mj}$ ,
- $Q_\beta = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 + \beta_{22}\beta_{33} - \beta_{23}^2 + \beta_{33}\beta_{11} - \beta_{31}^2$ .

La viscosité de sous-maille est alors définie comme :

$$\nu_e = C \sqrt{\frac{Q_\beta}{\alpha_{ij}\alpha_{ij}}}. \quad (4.18)$$

NB :  $Q_\beta$  est le deuxième invariant de Cayley-Hamilton de la matrice  $\beta$  tandis que  $\alpha_{ij}\alpha_{ij}$  est le premier invariant de la matrice  $\alpha^T \alpha$ , où  $\cdot^T$  désigne l'opérateur de transposition.

Ce modèle, bien que facile à implémenter et rapide à calculer, ne prédit pas la bonne décroissance de la viscosité au voisinage de la paroi (en  $\mathcal{O}(y^1)$  au lieu de  $\mathcal{O}(y^3)$ , où  $y$  désigne la distance à la paroi) (Chapman et Kuhn, 1986).

### Le modèle WALE

Ce modèle, proposé en 1999 par Nicoud et Ducros, est conçu dans le but de prédire le bon comportement proche-paroi de la viscosité de sous-maille, en  $\mathcal{O}(y^3)$  (Chapman et Kuhn, 1986; Nicoud et Ducros, 1999). Les notations suivantes sont introduites :

- $\mathbf{G} = \nabla \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{S} + \mathbf{\Omega}$ , le gradient de la vitesse, décomposé en partie symétrique  $\mathbf{S}$  et partie antisymétrique  $\mathbf{\Omega}$  ;
- $\mathbf{S}_d = \frac{1}{2} (\mathbf{G}^2 + (\mathbf{G}^T)^2) = \mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$  ;
- $\widehat{\mathbf{S}}_d = \mathbf{S}_d - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{S}_d)$  ;
- $V^2 = 4 (\text{tr}(\mathbf{S}^2 \mathbf{\Omega}^2) - 2Q_S Q_\Omega)$  ;
- $Q_{\widehat{\mathbf{S}}_d} = - \left( \frac{V^2}{4} + \frac{Q_G^2}{3} \right)$ .

où  $Q_A$  désigne le deuxième invariant de Cayley-Hamilton de la matrice  $A$ .

En étudiant le comportement proche-paroi des grandeurs ci-dessus, il est alors possible de déterminer une expression de la viscosité de sous-maille qui ait le comportement proche-paroi souhaité :

$$\nu_e = (C\bar{\Delta})^2 \frac{\left(-2Q_{\widehat{\mathbf{S}}_d}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(-2Q_S\right)^{\frac{5}{2}} + \left(-2Q_{\widehat{\mathbf{S}}_d}\right)^{\frac{5}{4}}} = (C\bar{\Delta})^2 \frac{\left(\frac{V^2}{2} + \frac{2Q_G^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(-2Q_S\right)^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{V^2}{2} + \frac{2Q_G^2}{3}\right)^{\frac{5}{4}}}. \quad (4.19)$$

$C$  est une constante du modèle, évaluée à  $C = 0,5$ . Ce modèle présente les avantages suivants vis-à-vis du modèle de Smagorinsky :

- Le modèle est construit à partir des taux de déformation et de rotation (contrairement au modèle de Smagorinsky qui n'est construit qu'à partir du taux de déformation) ; il permet donc de capter toutes les structures impliquées dans la dissipation de l'énergie cinétique ;
- La viscosité de sous-maille s'annule naturellement au contact des parois
- La viscosité de sous-maille s'annule dans le cas d'un écoulement laminaire, ce qui permet d'étudier la transition laminaire – turbulent.

### Le modèle $\sigma$

Nicoud et al. (2011) proposent une amélioration du modèle WALE en élaborant quatre propriétés que doivent satisfaire les modèles de viscosité de sous-maille.

Les propriétés sont les suivantes :

- $P_0$  la viscosité de sous-maille doit être positive et locale ;
- $P_1$  la viscosité de sous-maille doit décroître en  $\mathcal{O}(y^3)$  proche des parois (Chapman et Kuhn, 1986)
- $P_2$  le modèle de sous-maille doit s'annuler pour un écoulement 2D
- $P_3$  le modèle doit s'annuler dans le cas d'un écoulement laminaire

On note :

$\mathbf{G} = \nabla \bar{\mathbf{u}}$  le tenseur du gradient de la vitesse, de valeurs propres  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

$\mathbf{G}^T \mathbf{G}$  le carré du gradient de vitesse, de valeurs propres  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ . Ces



valeurs propres sont racines du polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + P_{\mathbf{G}^T \mathbf{G}} \lambda^2 - Q_{\mathbf{G}^T \mathbf{G}} \lambda + R_{\mathbf{G}^T \mathbf{G}}, \quad (4.20)$$

avec  $P_{\mathbf{G}^T \mathbf{G}}$ ,  $Q_{\mathbf{G}^T \mathbf{G}}$  et  $R_{\mathbf{G}^T \mathbf{G}}$  les trois invariants de Cayley-Hamilton du tenseur  $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ .

- $P_{\mathbf{G}^T \mathbf{G}} = \text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ ,
- $Q_{\mathbf{G}^T \mathbf{G}} = \frac{1}{2} (\text{tr}^2(A) - \text{tr}(A^2)) = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1$ ,
- $R_{\mathbf{G}^T \mathbf{G}} = \det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ .

L'étude du comportement proche-paroi de ces grandeurs révèle que  $\lambda_1 = \mathcal{O}(y^0)$ ,  $\lambda_2 = \mathcal{O}(y^2)$ ,  $\lambda_3 = \mathcal{O}(y^4)$ , soit  $\sigma_1 = \mathcal{O}(y^0)$ ,  $\sigma_2 = \mathcal{O}(y^1)$ ,  $\sigma_3 = \mathcal{O}(y^2)$ .

Il est alors remarqué que la quantité  $\sigma_3(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)$  vérifie les propriétés  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ . La viscosité de sous-maille du modèle retenue est donc :

$$\nu_e = (C\bar{\Delta})^2 \frac{\sigma_3(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)}{\sigma_1^2}, \quad (4.21)$$

le facteur  $\sigma_1^2$  étant un facteur de scaling n'influant pas sur les propriétés requises.

#### Le modèle S3PQR

Proposé par Trias *et al.* (2015), ce modèle est aussi fondé sur les invariants du tenseur  $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$  le carré du gradient de vitesse, en raison du comportement asymptotique du tenseur de sous-maille :

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{\bar{\Delta}^2}{12} \mathbf{G}^T \mathbf{G} + \mathcal{O}(\bar{\Delta}^4). \quad (4.22)$$

Une expression générique pour la viscosité de sous-maille peut donc être :

$$\nu_e^{S3PQR} = (C_{S3PQR} \bar{\Delta})^2 P_{\mathbf{G}^T \mathbf{G}}^p Q_{\mathbf{G}^T \mathbf{G}}^q R_{\mathbf{G}^T \mathbf{G}}^r, \quad (4.23)$$

avec  $P_{\mathbf{G}^T \mathbf{G}}$ ,  $Q_{\mathbf{G}^T \mathbf{G}}$  et  $R_{\mathbf{G}^T \mathbf{G}}$  les trois invariants de Cayley-Hamilton du tenseur  $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ .

L'analyse dimensionnelle conduit à la relation suivante entre  $p$ ,  $q$  et  $r$  :

$$-6r - 4q - 2p = -1 \quad (4.24)$$

En notant  $s$  la pente de la courbe désirée pour l'évolution proche-paroi de la viscosité de sous-maille, on obtient une deuxième relation :

$$6r + 4q = s \quad (4.25)$$

Ce qui conduit à

$$\begin{cases} -6r - 4q - 2p = -1 \\ 6r + 4q = s \end{cases} \iff \begin{cases} q = \frac{1-s}{2} - p \\ r = \frac{2s-1}{2} + \frac{p}{3} \end{cases}. \quad (4.26)$$

En fixant  $s = 3$  pour obtenir la bonne décroissance de la viscosité (Chapman et Kuhn, 1986), ce qui donne son nom au modèle, on obtient alors :

$$\nu_e^{S3PQR} = (C_{S3PQR} \bar{\Delta})^2 P_{\mathbf{G}^T \mathbf{G}}^p Q_{\mathbf{G}^T \mathbf{G}}^{-(1+p)} R_{\mathbf{G}^T \mathbf{G}}^{\left(\frac{p}{3} + \frac{5}{6}\right)}. \quad (4.27)$$

Modèle	Smagorinsky	WALE	Vreman	$\sigma$	S3PQR
Formule	Eq. (4.7)	Eq. (4.19)	Eq. (4.18)	Eq. (4.21)	Eq. (4.27)
<b>P0</b>	oui	oui	oui	oui	oui
<b>P1</b>	$\mathcal{O}(y^0)$	$\mathcal{O}(y^3)$	$\mathcal{O}(y^1)$	$\mathcal{O}(y^3)$	$\mathcal{O}(y^3)$
<b>P2</b>	non	non	non	oui	oui ( $p > -\frac{5}{2}$ )
<b>P3</b>	$\sim 0.094$	$\sim 0.075$	$\sim 0.086$	0	$0.07 \left(\frac{2^{5/3}}{3}\right)^{p+1}$
<b>P4</b>	++++	++	+++	+	+++

TABLE 4.1 – Comparaison des performances des modèles de viscosité de sous-maille, par Trias et al. (2015)

En se restreignant ensuite à l’emploi de deux invariants seulement, il est alors possible de définir une nouvelle famille de modèles :

$$\begin{aligned} \nu_e^{S3PQ} &= (C_{S3PQ}\overline{\Delta})^2 P_{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}^{-5/2} Q_{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}^{3/2} \text{ pour } p = -5/2; \\ \nu_e^{S3PR} &= (C_{S3PR}\overline{\Delta})^2 P_{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}^{-1} R_{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}^{1/2} \text{ pour } p = -1; \\ \nu_e^{S3QR} &= (C_{S3QR}\overline{\Delta})^2 Q_{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}^{-1} R_{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}^{5/6} \text{ pour } p = 0. \end{aligned}$$

Les constantes sont obtenues en égalisant la dissipation moyenne du modèle avec celle du modèle de Smagorinsky :

$$\langle 2\nu_e^{S3PQR}\overline{\mathbf{S}} : \overline{\mathbf{S}} \rangle = \langle 2\nu_e^{Smag}\overline{\mathbf{S}} : \overline{\mathbf{S}} \rangle, \quad (4.28)$$

ce qui donne  $C_{S3PQ} = 0.572$ ;  $C_{S3PR} = 0.709$  et  $C_{S3QR} = 0.762$ .

#### Comparaison des différents modèles basés sur les invariants de tenseurs

Trias et al. (2015) comparent différents modèle de sous-maille et leurs performances par rapport aux propriétés exigées par Nicoud et al. (2011). Les résultats sont donnés dans le tableau 4.1. La propriété  $P_4$  est ajoutée par Trias et al. (2015) et concerne la rapidité de temps de calcul de la viscosité de sous-maille, + étant le plus lent et + + + + le plus rapide.

L’idée de modéliser la viscosité de sous-maille à l’aide des invariants de tenseurs est intéressante et se justifie par l’argument physique que la viscosité de sous-maille est, elle aussi, invariante. Cependant, les expressions de la viscosité modélisée peuvent être plus difficiles à justifier : pourquoi telle forme et non une autre ? Par exemple, pour les modèles S3PQR, pourquoi se limiter à deux invariants (sur les trois existants), autrement que pour une raison pratique ? Une autre limite à ces modèles est que, s’ils sont reconnus efficaces pour modéliser le tenseur de sous-maille, il est très difficile de les adapter pour modéliser le flux de chaleur de sous-maille, et donc pour les appliquer en convection naturelle. Par conséquent, leurs utilisateurs sont souvent contraints de passer par l’introduction d’un nombre de Prandtl de sous-maille, qui sera développé dans la section 4.1.3.

## Autres approches

D'autres approches existent que celle de la viscosité de sous-maille. On peut par exemple citer la méthode Defiltering-Transport-Filtering (DFT) proposée par Pasquetti et Xu (2002), qui consiste à introduire un opérateur de "défiltrage" des équations, fondé sur une méthode de déconvolution de type ADM (Approximate Deconvolution Method). Pour des schémas numériques de différences finies, des méthodes numériques ont aussi été développées afin de calibrer la dissipation numérique de la méthode pour qu'elle soit sensiblement égale à celle attendue pour le terme de sous-maille (Lamballais *et al.*, 2011). Une revue plus approfondie des autres méthodes utilisées pour la simulation aux grandes échelles peut être trouvée dans l'ouvrage de Sagaut (1998).

### 4.1.3 Modélisation du vecteur flux de chaleur de sous-maille

Comme dans le bilan de quantité de mouvement, le bilan d'énergie filtré (4.4) fait apparaître un terme de sous-maille  $\bar{\mathbf{h}}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta}) = \overline{\mathbf{u}\theta} - \bar{\mathbf{u}}\bar{\theta}$ , appelé vecteur flux de chaleur de sous-maille. Ce terme représente le phénomène de dissipation de l'énergie thermique à l'échelle de sous-maille, et doit lui aussi faire l'objet d'une modélisation.

De manière analogue à ce qui est fait pour le tenseur des contraintes de sous-maille, le vecteur flux de chaleur de sous-maille est modélisé en introduisant une diffusivité thermique de sous-maille  $\kappa_e$  :

$$\bar{\mathbf{h}}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\theta}) = -\kappa_e \nabla \bar{\theta}. \quad (4.29)$$

Peu de modèles ont été développés pour modéliser cette diffusivité thermique; les deux modèles les plus répandus sont décrits ci-après.

#### Analogie de Reynolds et notion de Prandtl de sous-maille

La modélisation la plus répandue pour la diffusivité de sous-maille se fait en introduisant un nombre de Prandtl turbulent (ou Prandtl de sous-maille)  $\text{Pr}_e$ ; cette modélisation est nommée analogie de Reynolds :

$$\text{Pr}_e = \frac{\nu_e}{\kappa_e}. \quad (4.30)$$

Le nombre de Prandtl turbulent est généralement pris constant, à des valeurs généralement de 0.4, parfois 0.55 (Eidson, 1985; Dabbagh *et al.*, 2016a). Bien que les simulations numériques montrent que le nombre de Prandtl turbulent est bien constant dans la cavité, cela n'est plus vrai proche des parois où il est constaté qu'il augmente jusqu'à prendre des valeurs supérieures à 1 (Dabbagh *et al.*, 2016a). Il semble donc nécessaire, pour étudier le comportement du fluide proche-parois, de disposer d'un modèle plus complet pour la diffusivité de sous-maille.

### Modèle d'échelles mixtes locales

Ce modèle, proposé au début des années 2000 par Sergent et al. (2000, 2003), tente d'exprimer la diffusivité de sous-maille de la même manière que le modèle d'échelles mixtes : comme une moyenne géométrique pondérée entre deux expressions décrivant des échelles différentes. Pour rappel, le modèle d'échelles mixtes exprime la viscosité de sous-maille comme :

$$\nu_e(\alpha) = C \left( \overline{\Delta}^2 \sqrt{|\overline{S}^2|} \right)^\alpha \left( \overline{\Delta} \sqrt{|q_{sm}^2|} \right)^{1-\alpha}, \quad (4.31)$$

avec  $C$  une constante,  $\overline{\Delta}$  la taille du filtre,  $0 < \alpha < 1$ ,  $q_{sm}^2 = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$  l'énergie cinétique de sous-maille et  $|\overline{S}^2| = 2S_{ij}S_{ij}$ .

Par analogie, on introduit le flux thermique de sous-maille :

$$\Phi_{sm}^2 = \frac{1}{2} h_{i\theta} h_{i\theta}, \quad (4.32)$$

où  $h_{i\theta}$  est la composante selon  $i$  du vecteur  $\overline{\mathbf{h}}(\overline{\mathbf{u}}, \overline{\theta})$

#### Modélisation fonctionnelle

La modélisation fonctionnelle tend à modéliser l'effet des échelles de sous-maille sur les grandeurs  $\overline{\mathbf{u}}$  et  $\overline{\theta}$ , et non le terme de sous-maille lui-même. Dans le cas du bilan d'énergie, le flux de chaleur de sous-maille représente un transfert d'énergie des grandes échelles vers les petites échelles, énergie qui est dissipée au échelles de sous-maille. C'est donc cet effet dissipatif qui est à modéliser. Cette approche conduit à l'expression de  $\kappa_e$  suivante :

$$\kappa_e = C_1^2 \frac{\overline{\Delta}^3}{\Delta\theta} |\overline{\mathbf{T}}^2|^{1/2}, \quad (4.33)$$

où  $C_1$  est une constante,  $\Delta\theta$  un écart caractéristique de température et  $\overline{\mathbf{T}}$  le vecteur défini par

$$T_{i\theta} = \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} S_{ij}. \quad (4.34)$$

#### Modélisation structurelle

La modélisation structurelle cherche à trouver une approximation la plus juste possible du terme de sous-maille  $\overline{\mathbf{h}}(\overline{\mathbf{u}}, \overline{\theta})$ , en l'exprimant à partir des grandeurs  $\overline{\mathbf{u}}$  et  $\overline{\theta}$  évaluées au plus proche de la coupure, grâce à l'utilisation d'une deuxième opération de filtrage et en utilisant l'hypothèse de similarité d'échelles de Bardina (4.16). Cette approche conduit à l'expression de la diffusivité thermique de sous-maille suivante :

$$\kappa_e = C_2^2 \frac{\overline{\Delta}^3}{\Delta\theta} |\Phi_{sm}^2|^{1/2}, \quad (4.35)$$

où  $C_2$  est une constante et  $\Phi_{sm}^2$  le flux thermique de sous-maille.

#### Modélisation d'échelles mixtes

La diffusivité est finalement exprimée comme une moyenne pondérée des expressions obtenues via les deux approches de modélisation :

$$\kappa_e(\alpha) = C_\alpha \frac{\overline{\Delta}^{-2\alpha+1}}{\Delta\theta} \cdot |\overline{T}^2|^{\alpha/2} \cdot |\Phi_{sm}^2|^{(1-\alpha)/2}. \quad (4.36)$$

L'intérêt de ce modèle est qu'il complète le modèle d'échelles mixtes de Sagaut et Ta Phuoc : l'on dispose alors de deux modèles d'esprits similaires pour modéliser la viscosité et la diffusivité de sous-maille.

#### 4.1.4 Conclusion sur les modèles de sous-maille

Si de nombreux modèles existent pour modéliser la viscosité de sous-maille, il n'en est pas de même pour la modélisation de la diffusivité. Cela conduit la quasi-totalité des simulations à s'appuyer sur l'introduction d'un nombre de Prandtl turbulent, choisi constant par défaut. Or, l'expérience montre que, si ce Prandtl turbulent est bien constant au cœur de la cavité, il n'en va pas de même proche des parois, ce qui peut conduire à des imprécisions dans les simulations.

La LES par modélisation d'une viscosité de sous-maille n'est cependant pas compatible avec une méthode spectrale telle que celle utilisée ici. En effet, le fait de devoir calculer une viscosité et une diffusivité de sous-maille à chaque pas de temps contraint à expliciter, dans le schéma numérique, un terme de diffusion. Cela engendre alors des contraintes trop sévères sur le pas de temps requis pour garantir la stabilité du schéma numérique, ce qui était une de ses forces originelles (voir section 2.1.2). Il est donc nécessaire de se tourner vers une autre approche de la LES, plus adaptée aux méthodes spectrales : le modèle Spectral Vanishing Viscosity.

## 4.2 L'approche Spectral Vanishing Viscosity

Le modèle Spectral Vanishing Viscosity (SVV) diffère des modèles de viscosité de sous-maille, présentés précédemment, dans son approche du problème. Comme leur nom l'indique, ces modèles visent à modéliser le tenseur des contraintes de sous-mailles  $\overline{\boldsymbol{\tau}}(\overline{\boldsymbol{u}}) = \overline{\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}} - \overline{\boldsymbol{u}} \otimes \overline{\boldsymbol{u}}$  apparaissant dans le bilan de quantité de mouvement lors de l'opération de filtrage, en exprimant son effet au moyen d'une viscosité de sous-maille. La modélisation de cette viscosité de sous-maille passe par une compréhension et une modélisation des interactions entre les échelles résolues et les échelles de sous-maille, ce qui conduit à une multiplicité de modèles. L'approche SVV, quant à elle, vise plutôt à agir directement sur la représentation spectrale de la cascade de Kolmogorov (voir figure 4.4) en sur-dissipant artificiellement dans la zone inertielle, passé un certain nombre d'ondes.

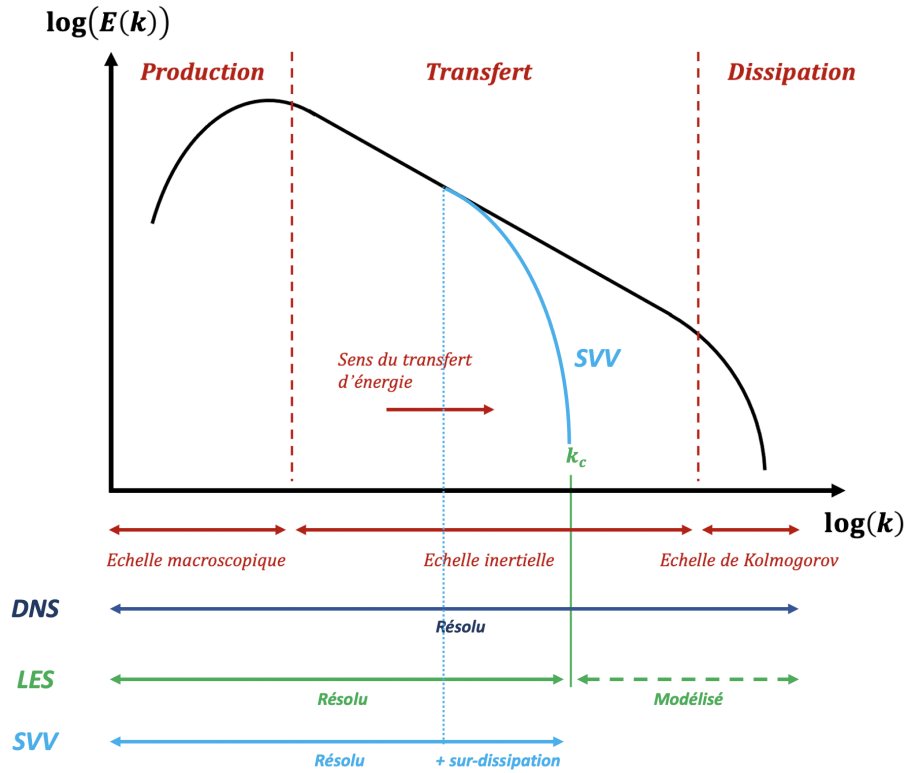


FIGURE 4.4 – Représentation spectrale schématique de la cascade de Kolmogorov et des différentes approches de simulation numérique : simulation directe (DNS), simulation aux grandes échelles avec modèle de viscosité de sous-maille (LES), et simulations avec l’approche Spectral Vanishing Viscosity (SVV).

Cette sur-dissipation se fait via l’ajout d’un opérateur dans les bilans de quantité de mouvement et d’énergie. Dans les fait, bien que les philosophies sous-jacentes soient différentes, les modèles de viscosité de sous-maille et de viscosité spectrale cherchent à avoir le même effet sur les bilans et les approches se rejoignent.

#### 4.2.1 Présentation du modèle Spectrale Vanishing Viscosity

Le modèle Spectral Vanishing Viscosity a été développé en 1989 par Tadmor dans le but de stabiliser des simulations numériques effectuées avec des méthodes spectrales (Tadmor, 1989; Maday et Tadmor, 1989). Les méthodes spectrales ont comme caractéristique d’apporter très peu de dissipation numérique à la résolution, ce qui leur confère une précision d’ordre très élevé. Cependant,

si le maillage utilisé est trop grossier (nombre de modes insuffisant dans la représentation spectrale), le manque de dissipation dû à la trop grossière résolution n'est alors pas compensé par la dissipation numérique du schéma et conduit à une forte instabilité de la simulation.

Pour contrebalancer cela, Tadmor propose d'ajouter à l'équation de bilan de quantité de mouvement un terme supplémentaire de dissipation :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \beta (\bar{T} - T_0) \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot (\epsilon Q \nabla) \bar{\mathbf{u}}, \quad (4.37)$$

avec  $\epsilon$  une constante et  $Q$  un opérateur agissant sur les hauts modes de la représentation spectrale du gradient. Du point de vue de la représentation spectrale, l'énergie cinétique est transférée depuis les bas modes vers les hauts modes où, lorsque suffisamment de modes sont présents (en DNS), elle est alors dissipée. Mais lorsque le nombre de modes est insuffisant pour que cette dissipation ait lieu, l'énergie transférée est alors réfléchie vers les bas modes, ce qui affecte les grandes structures de l'écoulement. L'opérateur  $\nabla \cdot (\epsilon Q \nabla)$  agit donc pour rendre le fluide hypervisqueux uniquement dans les hauts modes, là où se trouve l'énergie excédentaire à dissiper.

L'opérateur  $Q$  est défini en dimension finie comme :

$$Q = \sum_{k=0}^N \widehat{Q}_k P_k \quad (4.38)$$

où  $N$  désigne le nombre de points utilisés dans la représentation spectrale et  $P_k$  le projecteur sur l'élément  $k$  de la base de fonctions associée (initialement les modes de Fourier dans les travaux de Tadmor, puis la méthode sera adaptée avec les polynômes de Tchebychev et de Legendre (Maday *et al.*, 1993; Ma, 1998a,b)). Tadmor propose initialement la représentation spectrale de  $Q$  suivante :

$$\widehat{Q}_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq M \\ 1 & \text{si } k > M \end{cases} \quad (4.39)$$

avec  $M$  la fréquence de coupure de l'opérateur SVV.

Andreassen *et al.* (1994) proposent une fonction plus continue de la représentation spectrale de  $Q$ , ce qui permet d'obtenir des champs plus réguliers dans la représentation des écoulements d'air de l'atmosphère. Dans les années 2000, les travaux de Karamanos et Karniadakis (2000) puis de Pasquetti (2006) reprennent le principe de la stabilisation des méthodes spectrales par SVV pour effectuer des études LES, consacrant alors la formulation exponentielle de l'opérateur SVV :

$$\widehat{Q}_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq M \\ \exp\left(-\frac{(k-N)^2}{(k-M)^2}\right) & \text{si } k > M \end{cases}. \quad (4.40)$$

Cette représentation spectrale sera ensuite largement adoptée dans les études ultérieures utilisant le modèle SVV, y compris dans des configurations plus complexes (Minguez *et al.*, 2008; Pitz *et al.*, 2019). Ces études sont rendues

possibles par le développement de méthodes de pénalisation, qui permettent au méthodes spectrales de s'adapter à des géométries moins régulières (Pasquetti et al., 2008; Minguez et al., 2008).

Avec le modèle SVV, le système d'équations adimensionnées à résoudre devient :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} = -\nabla \bar{p} + \text{Pr} \bar{\theta} \mathbf{x}_3 + \frac{\text{Pr}}{\sqrt{\text{Ra}}} \nabla_{SVV}^2 \bar{\mathbf{u}} \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\theta} = \frac{1}{\sqrt{\text{Ra}}} \nabla_{SVV}^2 \bar{\theta} \quad (4.43)$$

L'opérateur SVV  $\nabla_{SVV}^2$  est ainsi introduit, défini pour le bilan de quantité de mouvement comme

$$\nabla_{SVV}^2 = \nabla^2 + \frac{\sqrt{\text{Ra}}}{\text{Pr}} \epsilon \nabla \cdot \tilde{\nabla} \quad \text{avec} \quad \tilde{\nabla} = Q \nabla. \quad (4.44)$$

Pour le bilan d'énergie, le facteur  $\sqrt{\text{Ra}}/\text{Pr}$  est remplacé par  $\sqrt{\text{Ra}}$ .

L'avantage du modèle SVV est qu'il est facile d'impliciter l'opérateur SVV dans le schéma numérique, relâchant fortement la contrainte sur le pas de temps par rapport aux modèles LES de viscosité et de diffusivité de sous-maille présentés dans les sections 4.1.2 et 4.1.3.

Il est à noter que certains schémas numériques utilisant une méthode de différences finies peuvent avoir une précision semblable à celle des méthodes spectrales (Lele, 1992). Des comparaisons ont ainsi pu être effectuées avec ce type de schéma entre des modélisations de type viscosité de sous-maille et SVV pour la LES (Dairay et al., 2014, 2017). Le modèle SVV semble être particulièrement pertinent pour déterminer le comportement du fluide proche des parois, en particulier le nombre de Nusselt.

## 4.2.2 Paramétrage du modèle

L'opérateur SVV dépend de deux paramètres : le poids  $\epsilon$  et le mode de coupure  $M$  à partir duquel l'opérateur  $Q$ , défini dans (4.40), agit. Ces deux paramètres doivent être calibrés afin de stabiliser la simulation tout en influant le moins possible sur les grandeurs calculées. Un autre facteur à prendre en compte est le dégrossissement, caractérisé par un Facteur de Réduction du Maillage (FRM)  $\text{FRM} = N_{\text{DNS}}/N$ , où  $N_{\text{DNS}}$  est le nombre de modes utilisés pour la représentation spectrale en DNS et  $N$  est le nombre de modes utilisés dans la simulation SVV. Une étude a donc été menée afin d'évaluer la sensibilité de la solution à trois paramètres : le dégrossissement du maillage, le poids et le mode de coupure. Cette étude a été menée à deux valeurs du nombre



de Rayleigh différentes ( $Ra = 10^8$  et  $Ra = 10^9$ ), pour lesquels des résultats ont précédemment été obtenus en DNS (voir chapitre 3). Pour cette étude paramétrique, le rayonnement du gaz n'a pas été pris en compte. La prise en compte du rayonnement dans les simulations SVV est à retrouver en partie 4.3.

FRM	$[\Delta t]$	1 (DNS)	2	2,67	4
$Ra = 10^8$	[1200]	160 (8)	80 (4)	60 (3)	-
$Ra = 10^9$	[400]	320 (16)	160 (8)	120 (6)	80 (4)

TABLE 4.2 – Nombre de points de maillage dans chaque direction, à différents nombres de Rayleigh, pour chaque dégrossissement étudié. Entre parenthèses, le nombre de domaines dans la décomposition verticale de la cavité (20 points de collocation par domaine dans la direction verticale). Entre crochets, la durée d'intégration utilisée pour calculer les moyennes temporelles.

Les résultats DNS obtenus à  $Ra = 10^8$  utilisaient un maillage de  $N = 160^3$  points et ceux obtenus à  $Ra = 10^9$  utilisaient un maillage de  $N = 320^3$ . Les dégrossissements suivants ont été étudiés : FRM=2 (la moitié du nombre de points dans chaque direction), FRM=4 (un quart du nombre de points dans chaque direction) et, entre les deux, FRM=2,67 (environ un tiers des points dans chaque direction). Le tableau 4.2 récapitule le nombre de points utilisé dans chaque cas.

Dans la littérature, le poids  $\epsilon$  est pris inversement proportionnel au nombre de points du maillage utilisé (Tadmor, 1989; Andreassen *et al.*, 1994; Karamanos et Karniadakis, 2000; Pasquetti, 2006; Minguez *et al.*, 2008). Ici, les poids suivants ont été étudiés :

$$\epsilon \in \left\{ \frac{1}{N}, \frac{1}{2N}, \frac{1}{3N}, \frac{1}{4N} \right\} \quad (4.45)$$

Concernant le mode de coupure, la stabilité du modèle SVV requiert, pour une simulation monodimensionnelle, que  $M \sim N^\beta$ , avec  $\beta \leq 1/2$  (Andreassen *et al.*, 1994), voire  $\beta < 1/4$  (Tadmor, 1989; Maday et Tadmor, 1989). Mais, pour des études multidimensionnelles, le critère n'est pas aussi strict et  $M$  est souvent pris comme une fraction de  $N$  (Andreassen *et al.*, 1994; Karamanos et Karniadakis, 2000; Pasquetti, 2006). Les modes de coupure suivants ont été étudiés :

$$M \in \left\{ \frac{N}{2}, \frac{2N}{3}, \frac{3N}{4}, \frac{4N}{5} \right\} \quad (4.46)$$

L'ensemble des paramétrages possibles est résumé dans le tableau 4.3. Par souci de lisibilité, les paramétrages sont désignés de la manière suivante : en premier le mode de coupure relatif au nombre de point du maillage ( $M = N/2, 2N/3$ , etc.), puis une indication sur le poids  $\epsilon$  associé : de ++ pour le poids le plus élevé ( $1/N$ ) à -- pour le poids le plus faible ( $1/4N$ ). Compte tenu du nombre de paramétrages possibles, seule la moitié d'entre eux a été choisie pour l'étude paramétrique, de manière à balayer efficacement les plages de  $M$  et  $\epsilon$ . Les paramétrages choisis sont colorés en gris dans le tableau.

$M \backslash \epsilon$	$1/N$	$1/2N$	$1/3N$	$1/4N$
$N/2$	$N/2++$	$N/2+$	$N/2-$	$N/2--$
$2N/3$	$2N/3++$	$2N/3+$	$2N/3-$	$2N/3--$
$3N/4$	$3N/4++$	$3N/4+$	$3N/4-$	$3N/4--$
$4N/5$	$4N/5++$	$4N/5+$	$4N/5-$	$4N/5--$

TABLE 4.3 – Paramétrages envisagés pour l’étude de sensibilité du modèle SVV aux paramètres. Les modèles en gris sont ceux finalement retenus pour l’étude paramétrique.

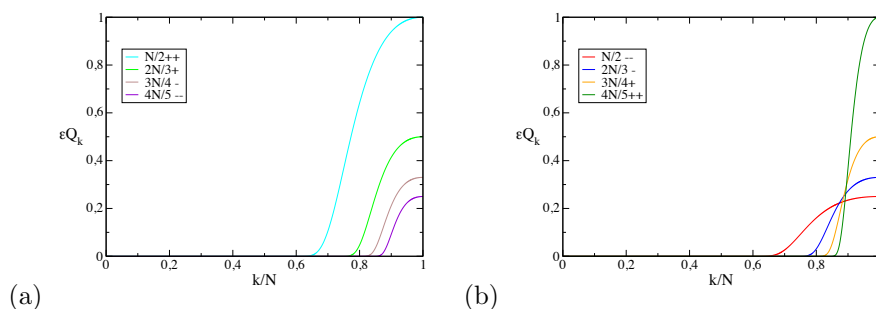


FIGURE 4.5 – Représentation spectrale des paramétrages SVV sélectionnés pour l’étude :  $\epsilon \widehat{Q}_k$  en fonction de  $k/N$ . (a) Modèles situés sur la diagonale du tableau 4.3. (b) Modèles situés sur l’antidiagonale.

La représentation spectrale des différents paramétrages étudiés est donnée dans la figure 4.5. Le rôle des paramètres  $M$  et  $\epsilon$  dans le modèle  $y$  apparaît clairement : plus  $M$  est petit, plus le modèle agit tôt dans les modes spectraux (modèles  $N/2++$  et  $N/2--$  par exemple); plus  $M$  est élevé, plus le modèle n’agira que dans les hauts modes (modèles  $4N/5++$  et  $4N/5--$ ). Le poids  $\epsilon$  représente quant à lui l’intensité du modèle et influence la limite atteinte par le modèle dans les hauts modes. La différence d’évolution entre les paramétrages diagonaux et antidiagonaux est nette : en parcourant la diagonale, les modèles ne changent pas de profil mais seulement d’amplitude. En revanche, pour les modèles antidiagonaux, on passe d’un modèle qui agit tôt, mais faiblement ( $N/2--$ ) à un modèle qui agit tard, mais intensément ( $4N/5++$ ). Il est à noter qu’avec les paramétrages choisis pour l’étude, il y a pour chaque mode de coupure deux poids différents étudiés et, pour chaque poids donné, deux modes de coupure. Cette sélection permet donc d’étudier l’influence des deux paramètres à la fois.

### 4.2.3 Sensibilité du modèle SVV aux paramètres

Les différents modèles ont été comparés au regard de deux critères principaux :

- La capacité à stabiliser la simulation et à l'empêcher de diverger ;
- La capacité à retrouver des grandeurs simples habituellement étudiées en convection naturelle (profil de température, nombre de Nusselt aux parois, flux convectif au cœur de la cavité, etc.) ;

Concernant le deuxième critère, une intégration temporelle est conduite afin de disposer de grandeurs moyennées statistiquement sur une suffisamment longue période de temps.

#### Stabilité des modèles

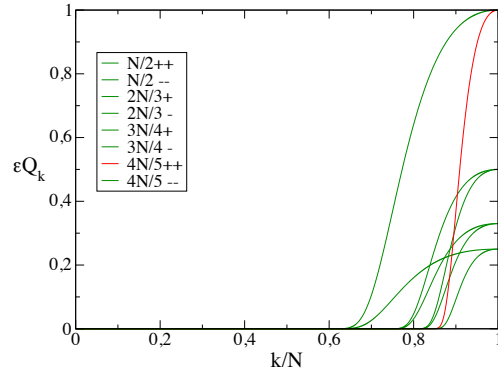
A  $Ra = 10^9$ , tous les paramétrages n'ont pas permis de stabiliser les calculs, selon le dégrossissement choisi. La figure 4.6 présente la stabilité des différents paramétrages : plus le dégrossissement est important, plus le modèle SVV peine à stabiliser les calculs. Des deux paramètres  $M$  et  $\epsilon$ , il est net que c'est le mode de coupure  $M$  qui pilote la stabilité de la méthode. Cela est particulièrement visible dans le cas du plus fort dégrossissement (FRM=4, soit un maillage de  $80^3$  points) où seuls les deux modèles agissant le plus tôt sont stables, quel que soit le poids associé. Le poids joue un effet plus faible sur la stabilité : généralement (pour les paramétrages ayant divergé), à modes de coupure égaux, le paramétrage avec le plus faible poids diverge le premier mais celui avec un poids plus fort n'est pas stable beaucoup plus longtemps. Une exception notable est présente dans le cas FRM=2 (maillage de  $160^3$  points) où seul le paramétrage  $4N/5++$  diverge, le paramétrage  $4N/5--$  restant stable. Il s'agit du seul cas où cela s'est produit : dans les autres cas, le paramétrage  $4N/5--$  diverge le premier.

A  $Ra = 10^8$ , tous les paramétrages ont permis de stabiliser le calcul pour les deux dégrossissements étudiés (FRM=2 et FRM=2,67). Une hypothèse pouvant expliquer ce phénomène est le moins grand degré de turbulence présent dans l'écoulement à  $Ra = 10^8$  par rapport à  $Ra = 10^9$ . Dans le premier cas, il y a donc moins d'énergie turbulente transférée dans les hauts modes et qui doit être sur-dissipée par le modèle SVV, ce qui contribue à la plus grande stabilité de ces simulations.

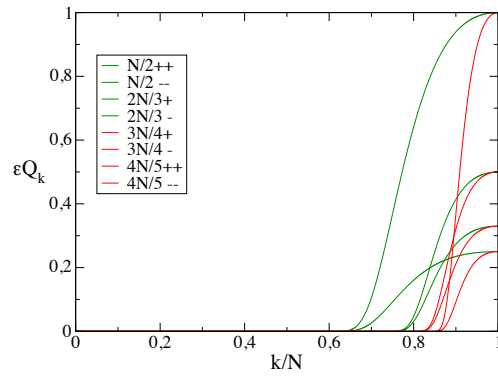
#### Flux et énergie cinétique moyens

##### Nombre de Nusselt aux parois

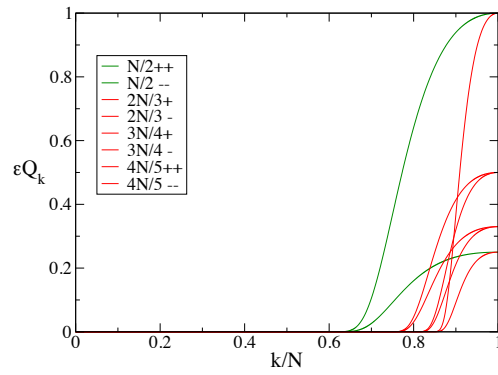
Les tableaux 4.4 et 4.5 rassemblent les valeurs du nombre de Nusselt moyen sur les parois horizontales (la moyenne des deux parois), à  $Ra = 10^8$  et  $Ra = 10^9$ , en fonction du dégrossissement et du modèle SVV utilisé. Pour un dégrossissement de FRM=2, quel que soit le paramétrage utilisé (hormis pour le paramétrage  $N/2++$ ), l'écart obtenu avec la DNS est extrêmement faible.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 4.6 – Présentation des paramétrages SVV stables (en vert) et instables (en rouge) à  $Ra = 10^9$ , pour différents niveaux de dégrossissement du maillage. (a) Maillage de 160 points dans chaque direction ; (b) Maillage de 120 points dans chaque direction ; (c) Maillage de 80 points dans chaque direction.

En revanche, dès que le dégrossissement augmente, la précision des résultats se dégrade. Le cas FRM=2,67 à  $Ra = 10^8$  est précieux pour comprendre l'influence des paramètres de poids et de mode de coupure dans la précision des résultats : c'est d'abord le mode de coupure qui influe, et le poids agit dans une moindre mesure. L'influence du poids sur la précision est plus importante lorsque le mode de coupure est faible (c'est-à-dire que la sur-dissipation SVV agit dès les bas modes) qu'élevé : l'écart dû au poids est de 3 points pourcentage entre les modèles  $N/2++$  et  $N/2--$  alors qu'il n'est que de 0,7 points pourcentage entre les modèles  $4N/5++$  et  $4N/5--$ . A noter que la diminution du maillage impacte très fortement la prédiction du nombre de Nusselt à la paroi : pour FRM=4, l'écart relatif avec la DNS est de plus de 25%.

Cas \ FRM	2,67		2	
	$N/2++$	33,99	9,4 %	31,54
$N/2--$	33,03	6,3 %	31,28	0,7%
$2N/3+$	32,25	3,8 %	30,97	-0,3 %
$2N/3-$	32,12	3,4 %	30,93	-0,4 %
$3N/4+$	31,81	2,4 %	30,93	-0,4 %
$3N/4-$	31,73	2,2 %	30,92	-0,5 %
$4N/5++$	31,65	1,9 %	30,09	-0,5 %
$4N/5--$	31,44	1,2 %	30,94	-0,4 %
DNS	31,06			

TABLE 4.4 – Nombre de Nusselt aux parois à  $Ra = 10^8$ , selon le dégrossissement (FRM) et le paramétrage SVV utilisé. La partie de gauche de chaque colonne correspond à la valeur absolue, la partie droite à l'écart relatif au résultat en DNS.

#### Flux convectif au centre de la cavité

Les tableaux 4.6 et 4.7 rassemblent les valeurs du flux convectif moyen au centre de la cavité (dans le plan  $x_3 = 0, 5$ ), à  $Ra = 10^8$  et  $Ra = 10^9$ , en fonction du dégrossissement et du modèle SVV utilisé. Le calcul du flux convectif apparaît moins sensible au paramétrage que celui du nombre de Nusselt, mais la même tendance à l'imprécision lors de l'augmentation du FRM est observable. Là encore, la précision est diminuée lorsque le mode de coupure est plus faible.

#### Énergie cinétique intégrée dans toute la cavité

Les tableaux 4.8 et 4.9 rassemblent les valeurs de l'énergie cinétique moyenne, intégrée dans toute la cavité, à  $Ra = 10^8$  et  $Ra = 10^9$ , en fonction du dégrossissement et du modèle SVV utilisé. Le calcul de l'énergie cinétique est le moins sensible au paramétrage choisi, même si là encore un mode de coupure plus élevé garantit une meilleure précision. La précision est également moins affectée par le dégrossissement, avec une erreur maximale d'environ 10% pour FRM=4, contre environ 15% pour le flux convectif au centre et 25% pour le nombre de Nusselt

Cas	FRM		4		2,67		2	
	$N/2++$	77,48	25,6 %	68,63	11,3 %	63,14	2,4 %	
$N/2--$	73,85	19,8 %	66,57	7,9 %	62,19	0,8 %		
$2N/3+$	-	-	65,1	5,6 %	61,68	0,0 %		
$2N/3-$	-	-	64,82	5,1 %	61,41	-0,4 %		
$3N/4+$	-	-	-	-	61,34	-0,5 %		
$3N/4-$	-	-	-	-	61,33	-0,5 %		
$4N/5++$	-	-	-	-	-	-		
$4N/5--$	-	-	-	-	61,44	-0,4 %		
DNS			61,67					

TABLE 4.5 – Nombre de Nusselt aux parois à  $Ra = 10^9$ , selon le dégrossissement (FRM) et le paramétrage SVV utilisé. La partie de gauche de chaque colonne correspond à la valeur absolue, la partie droite à l'écart relatif au résultat en DNS. Les symboles “-” représentent les paramétrages qui ont divergé.

à la paroi.

### Choix d'un paramétrage

Des deux paramètres du modèle SVV, le mode de coupure  $M$  a la plus grande influence tant sur la stabilité de la simulation que sur la précision des résultats. Lorsque le FRM augmente, la stabilité requiert que le mode de coupure diminue, mais ceci dégrade fortement la précision des résultats. Ainsi, aucun paramétrage ne peut assurer à la fois la stabilité et la précision pour un FRM élevé. Le modèle SVV ne peut donc pas être utilisé avec un maillage trop grossier, et le FRM doit être gardé proche de 2.

Parmi les paramétrages étudiés, le compromis entre la stabilité et la précision conduit à choisir le paramétrage  $2N/3-$ , composé d'un mode de coupure  $M = 2N/3$  et d'un poids  $\epsilon = 1/3N$ .

Des résultats supplémentaires de l'étude de sensibilité du paramétrage SVV peuvent être trouvés en annexe B.

Cas \ FRM	2,67		2	
	$N/2++$	34,02	9,6 %	32,22
$N/2--$	32,44	4,5 %	31,62	1,9 %
$2N/3+$	32,8	5,7 %	31,58	1,7 %
$2N/3-$	32,54	4,8 %	31,48	1,4 %
$3N/4+$	31,6	1,8 %	31,26	0,7 %
$3N/4-$	31,74	2,3 %	31,24	0,6 %
$4N/5++$	33,32	7,3 %	31,15	0,4 %
$4N/5--$	32,55	4,9 %	31,15	0,4 %
DNS	31,04			

TABLE 4.6 – Flux convectif moyen au cœur de la cavité à  $Ra = 10^8$ , intégré sur le plan  $x_3 = 0,5$ , selon le dégrossissement (FRM) et le paramétrage SVV utilisé. La partie de gauche de chaque colonne correspond à la valeur absolue, la partie droite à l'écart relatif au résultat en DNS.

Cas \ FRM	4		2,67		2	
	$N/2++$	71,37	15,4 %	67,69	9,4 %	64,44
$N/2--$	68,03	10,0 %	66,5	7,5 %	63,08	2,0 %
$2N/3+$	-	-	66,44	7,4 %	62,95	1,7 %
$2N/3-$	-	-	65,92	6,5 %	62,57	1,1 %
$3N/4+$	-	-	-	-	61,95	0,1 %
$3N/4-$	-	-	-	-	62,07	0,3 %
$4N/5++$	-	-	-	-	-	-
$4N/5--$	-	-	-	-	62,01	0,2 %
DNS	61,87					

TABLE 4.7 – Flux convectif moyen au cœur de la cavité à  $Ra = 10^9$ , intégré sur le plan  $x_3 = 0,5$ , selon le dégrossissement (FRM) et le paramétrage SVV utilisé. La partie de gauche de chaque colonne correspond à la valeur absolue, la partie droite à l'écart relatif au résultat en DNS. Les symboles “-” représentent les paramétrages qui ont divergé.

Cas \ FRM	2,67		2	
	$N/2++$	1,07E-2	6,5 %	1,03E-2
$N/2--$	1,04E-2	4,1 %	1,02E-2	1,5 %
$2N/3+$	1,05E-2	4,6 %	1,01E-2	1,1 %
$2N/3-$	1,04E-2	3,6 %	1,01E-2	0,3 %
$3N/4+$	1,03E-2	3,2 %	1,00E-2	0,1 %
$3N/4-$	1,03E-2	2,3 %	1,01E-2	0,5 %
$4N/5++$	1,04E-2	4,4 %	1,00E-2	-0,2 %
$4N/5--$	1,04E-2	3,4 %	1,01E-2	0,7 %
DNS	1,00E-2			

TABLE 4.8 – Energie cinétique totale dans la cavité à  $Ra = 10^8$ , selon le dégrossissement (FRM) et le paramétrage SVV utilisé. La partie de gauche de chaque colonne correspond à la valeur absolue, la partie droite à l'écart relatif au résultat en DNS.

Cas \ FRM	4		2,67		2	
	$N/2++$	1,02E-2	10,9 %	9,76E-3	5,7 %	9,34E-3
$N/2--$	9,23E-3	7,0 %	9,51E-3	3,0 %	9,23E-3	0,0 %
$2N/3+$	-	-	9,69E-3	5,0 %	9,21E-3	-0,2 %
$2N/3-$	-	-	9,57E-3	5,7 %	9,23E-3	0,0 %
$3N/4+$	-	-	-	-	9,22E-3	-0,1 %
$3N/4-$	-	-	-	-	9,18E-3	-0,5 %
$4N/5++$	-	-	-	-	-	-
$4N/5--$	-	-	-	-	9,16E-3	-0,8 %
DNS	9,23E-3					

TABLE 4.9 – Energie cinétique totale dans la cavité à  $Ra = 10^9$ , selon le dégrossissement (FRM) et le paramétrage SVV utilisé. La partie de gauche de chaque colonne correspond à la valeur absolue, la partie droite à l'écart relatif au résultat en DNS. Les symboles “-” représentent les paramétrages qui ont divergé.



#### 4.2.4 Simulation SVV couplée au rayonnement

Les équations couplées avec le modèle SVV décrivant les bilans de masse (4.47), de quantité de mouvement (4.48) et d'énergie (4.49) sont :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} = -\nabla \bar{p} + \text{Pr} \bar{\theta} \mathbf{x}_3 + \frac{\text{Pr}}{\sqrt{\text{Ra}}} \nabla_{SVV}^2 \bar{\mathbf{u}}, \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\theta} = \frac{1}{\sqrt{\text{Ra}}} \left( \nabla_{SVV}^2 \bar{\theta} - \nabla \cdot \overline{\mathbf{q}^{\text{rad}}(\theta)} \right), \quad (4.49)$$

avec

$$\nabla_{SVV}^2 = \begin{cases} \nabla^2 + \sqrt{\text{Ra}}/\text{Pr} \left( \nabla \cdot \tilde{\nabla} \right) & \text{dans le bilan de qdm} \\ \nabla^2 + \sqrt{\text{Ra}} \left( \nabla \cdot \tilde{\nabla} \right) & \text{dans le bilan d'énergie} \end{cases} \quad (4.50)$$

et  $\tilde{\nabla} = \epsilon Q \nabla$ .

Le filtrage du bilan d'énergie fait apparaître le flux radiatif filtré  $\overline{\mathbf{q}^{\text{rad}}(\theta)}$ . En raison des conditions suivantes :

- les écarts de température sont faibles,
- le coefficient d'absorption  $\kappa_\nu$  est uniforme,
- l'équation de transfert radiatif (1.7) est linéaire,

on peut raisonnablement négliger les effets de sous-maille radiatif et faire l'approximation

$$\overline{\mathbf{q}^{\text{rad}}(\theta)} \simeq \mathbf{q}^{\text{rad}}(\bar{\theta}). \quad (4.51)$$

La puissance radiative  $\mathcal{P}^{\text{rad}} = -\nabla \cdot \mathbf{q}^{\text{rad}}(\bar{\theta})$  est calculée sur le maillage SVV par la méthode de lancer de rayon avec le modèle de sous-maille radiatif (voir § 2.2.3).

Dans ce modèle, une puissance radiative filtrée sur un maillage radiatif dégrossi (par rapport au maillage SVV) est calculée par lancer de rayon sur ce maillage radiatif puis interpolée sur le maillage SVV ; la puissance radiative de sous-maille radiative (structures captées par le maillage SVV mais pas par le maillage radiatif dégrossi) est calculée directement grâce à un modèle de sous-mailles radiatif sur le maillage SVV. La puissance radiative filtrée (au sens SVV) est la somme de ces deux contributions.

L'approximation (4.51) implique que la contribution des petites structures à la puissance radiative filtrée, non résolues par le modèle SVV, est négligée. Au contraire, dans une approche DNS, la contribution de ces petites structures (résolues par la DNS) était prise en compte via le modèle de sous-maille radiatif.

## 4.3 Validation du modèle SVV en simulations couplées

La validation du modèle SVV a été réalisée à  $Ra = 10^9$ , pour les cas sans rayonnement (gaz transparent) et rayonnement dans une cavité de trois mètres de côté, où l'effet du rayonnement est maximal.

### 4.3.1 Analyse statistique en régime permanent

Les figures 4.7 et 4.8 présentent, respectivement pour les cas sans rayonnement et rayonnement dans une cavité de trois mètres, les profils verticaux de grandeurs clefs de l'écoulement, moyennées statistiquement et sur les plans horizontaux à  $Ra = 10^9$ . Ces grandeurs sont : la température  $\bar{\theta}$ , le carré des fluctuations de température  $\overline{\theta'^2}$  (zoom), le flux conductif  $-\partial\bar{\theta}/\partial x_3$  (zoom), le flux convectif  $\overline{u_3\theta}$ , l'énergie cinétique de l'écoulement moyen  $\overline{u_i u_i}/2$  et l'énergie cinétique turbulente  $\overline{u'_i u'_i}/2$ . Pour le cas rayonnant, on trouve également la puissance radiative  $\mathcal{P}^{\text{rad}} = -\nabla \cdot \mathbf{q}^{\text{rad}}$  et le flux radiatif  $\mathbf{q}^{\text{rad}}$ .

Les profils obtenus par la simulation SVV montrent un très bon accord avec les résultats de DNS. Les profils de température, de flux conductif et d'énergie cinétique du champ moyen, ainsi que les statistiques d'ordre deux (énergie cinétique turbulente et carré des fluctuations de température) sont quasi-identiques entre les simulations DNS et SVV. Un très léger écart est observable sur le profil de flux convectif<sup>1</sup>. Concernant le rayonnement, la puissance radiative comme le flux radiatif sont précisément prédits par la méthode de lancer de rayon, couplée au modèle de sous-maille pour le rayonnement. Cela confirme l'hypothèse du §4.2.4 selon laquelle le rayonnement des plus petites structures, non captées pas le modèle de sous-maille, est négligeable devant celui modélisé.

Le modèle SVV est donc capable de prédire les profils statistiques d'ordre un et deux avec une très bonne précision.

---

1. Ainsi que de faibles oscillations, mais celles-ci semblent être localisées dans des zones correspondant aux premier et dernier domaines de calcul, proches des parois et le phénomène est absent au cœur. Il est plus marqué sur certaines figures visibles en annexe B.

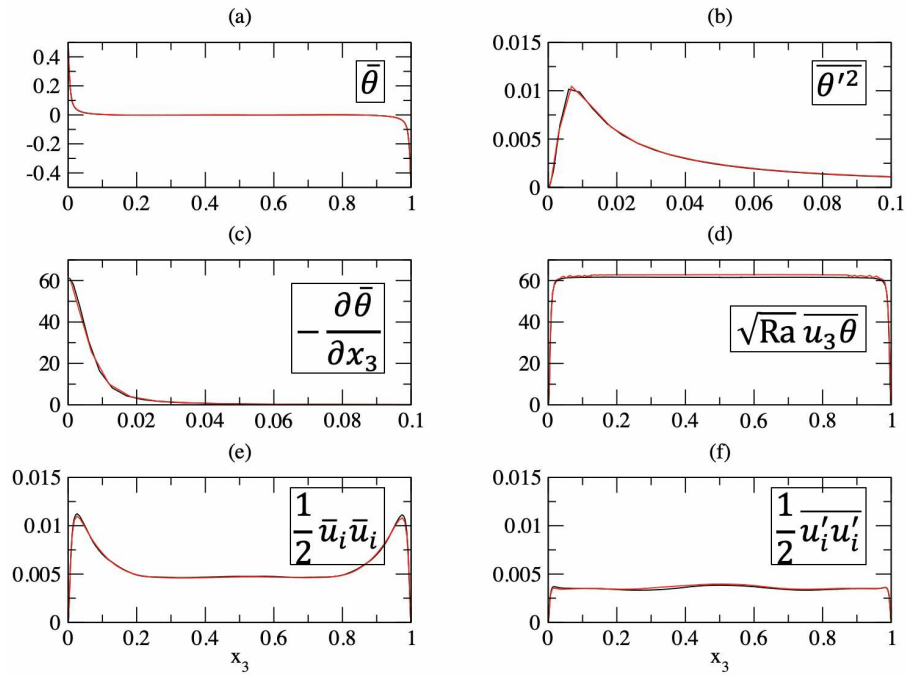


FIGURE 4.7 – Profils verticaux de grandeurs clefs, moyennées statistiquement et sur les plans horizontaux, à  $\text{Ra} = 10^9$ , dans le cas d'un fluide transparent. (a) Température  $\bar{\theta}$ , (b) Carré des fluctuations de température  $\overline{\theta'^2}$  (zoom), (c) Flux conductif  $-\partial\bar{\theta}/\partial x_3$  (zoom), (d) Flux convectif  $\sqrt{\text{Ra}}\overline{u_3\theta}$ , (e) Energie cinétique de l'écoulement moyen  $\overline{u_i u_i}/2$ , (f) Energie cinétique turbulente  $\overline{u'_i u'_i}/2$ . DNS (noir) et LES avec le modèle SVV 2N/3- (rouge).

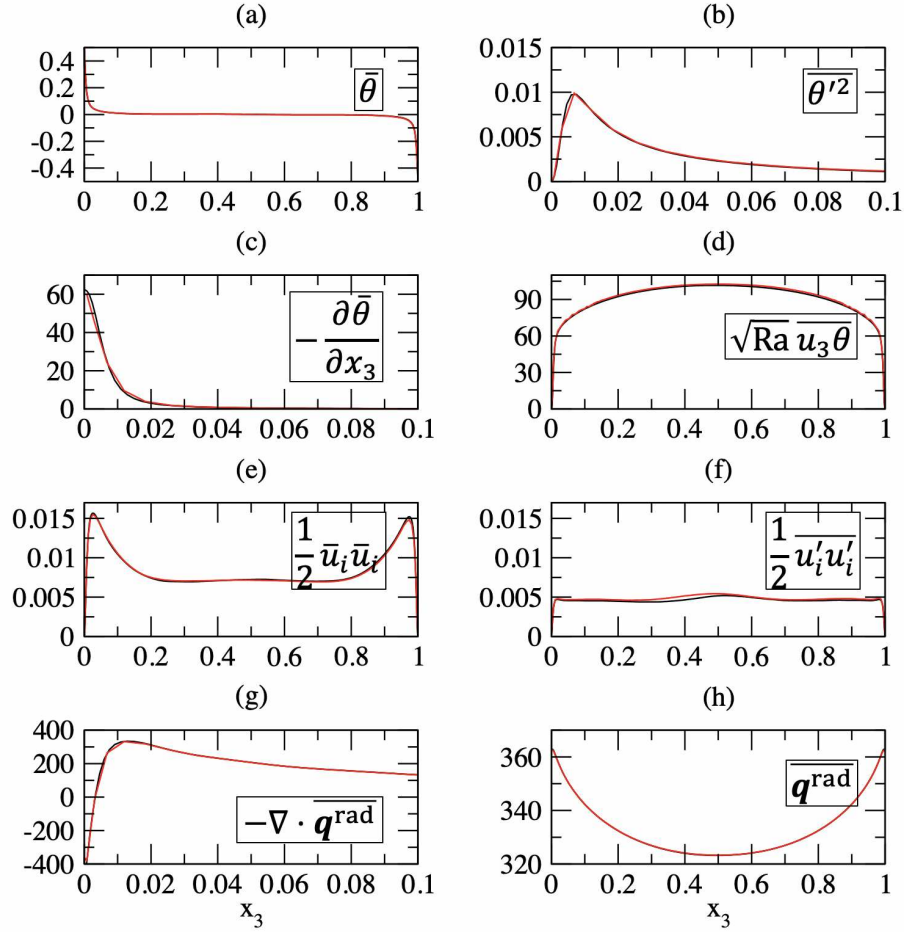


FIGURE 4.8 – Profils verticaux de grandeurs clefs, moyennées statistiquement et sur les plans horizontaux, à  $Ra = 10^9$ , pour un fluide rayonnant dans une cavité de trois mètres. (a) Température  $\bar{\theta}$ , (b) Carré des fluctuations de température  $\overline{\theta'^2}$  (zoom), (c) Flux conductif  $-\partial \bar{\theta} / \partial x_3$  (zoom), (d) Flux convectif  $\sqrt{Ra} \overline{u_3 \theta}$ , (e) Énergie cinétique de l'écoulement moyen  $\overline{u_i u_i} / 2$ , (f) Énergie cinétique turbulente  $\overline{u'_i u'_i} / 2$ , (g) Puissance radiative  $\mathcal{P}^{\text{rad}}$  (zoom), (h) Flux radiatif  $\mathbf{q}^{\text{rad}}$ . DNS (noir) et LES avec le modèle SVV 2N/3- (rouge).

### 4.3.2 Analyse spatiale : autocorrélation du champ de température

La fonction d'autocorrélation est un outil mathématique permettant de détecter des régularités dans un signal. Ici, elle est utilisée sur des champs horizontaux 2D de la température pour évaluer la capacité du modèle SVV à capter la distribution des structures spatiales de l'écoulement.

Soit  $\phi(\mathbf{r})$  un champ multi-dimensionnel et  $\widehat{\phi}(\mathbf{k})$  sa transformée de Fourier, définie par :

$$\widehat{\phi}(\mathbf{k}) = \iint_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{r}) \exp(-2i\pi\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (4.52)$$

La fonction  $R_\phi(\mathbf{r})$  d'autocorrélation de  $\phi$  est définie comme :

$$R_\phi(\mathbf{r}) = \iint_{\Omega} \phi(\mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}' + \mathbf{r}) d\mathbf{r}' \quad (4.53)$$

Le calcul de la fonction d'autocorrélation nécessite de calculer une intégrale sur tout le domaine (ici, un plan horizontal), ce qui est coûteux numériquement, notamment à cause de l'irrégularité du maillage utilisé.

Pour contourner cette difficulté, le théorème de Wiener-Khinchin permet de calculer facilement la fonction d'autocorrélation dans l'espace de Fourier : pour un processus stationnaire, la décomposition spectrale de la fonction d'autocorrélation de  $\phi$  est égale à la densité spectrale de  $\phi$ , soit :

$$R_\phi(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \|\widehat{\phi}(\mathbf{k})\|^2 \exp(2i\pi\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k}. \quad (4.54)$$

Ici, les calculs de fonctions d'autocorrélation sont effectués à partir de tranches horizontales 2D du champ de température, à différentes altitudes proches des parois. Afin de capter au mieux les structures et leurs variations spatiales, la valeur moyenne spatiale  $\langle\theta\rangle_s$  de la température est retranchée, pour mettre en valeur les fluctuations  $\theta'' = \theta - \langle\theta\rangle_s$ .

Afin de lisser les variations temporelles de la fonction d'autocorrélation, ce processus est répété pour un nombre  $N_{\text{snap}}$  de champs instantanés, et la fonction d'autocorrélation moyenne du champ de température à l'altitude  $x_3 = z_0$  est alors définie comme :

$$\overline{R_{\theta''_{z_0}}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{N_{\text{snap}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{snap}}} R_{\theta''_{z_0},i}(\mathbf{r}) \quad (4.55)$$

Les figures 4.9, 4.10, 4.11 et 4.12 représentent, à différentes altitudes  $z_0$ , un exemple de champ instantané de température, ainsi que la fonction d'autocorrélation moyenne calculée à partir de  $N_{\text{snap}} = 78$  champs instantanés, en DNS et avec le modèle SVV, pour les cas sans rayonnement et rayonnement dans une cavité de trois mètres.

Les fonction d'autocorrélation moyennes se présentent comme des champs 2D ayant leur maximum en  $\mathbf{r} = 0$ . Elles suivent une décroissance d'abord isotrope

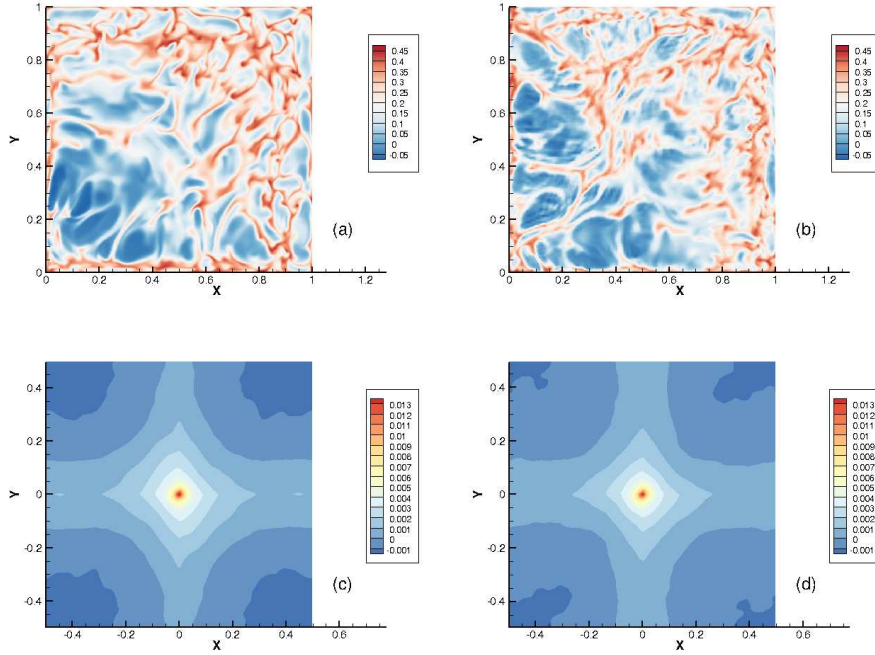


FIGURE 4.9 – Champs instantanés de température à l’altitude  $x_3=0.007$  obtenu par DNS (a) et SVV avec le modèle  $2N/3-$  (b). Fonction d’autocorrélation moyenne du champ de température à l’altitude  $x_3=0.007$  pour les simulations DNS (c) et SVV (d), calculées à partir de 78 champs instantanés.  $Ra = 10^9$ , gaz transparent.

( $r \lesssim 0,07$ ) puis deux directions privilégiées, selon  $x_1$  et  $x_2$ , apparaissent. Cela est dû à la structure diagonale de l’écoulement : les similitudes dans les structures sont plus fortes en suivant des directions parallèles aux paroi, et plus faibles dans la diagonale. Dans une simulation de turbulence homogène isotrope, il n’y aurait pas de direction privilégiée et la fonction d’autocorrélation se présenterait sous forme de cercles concentriques.

Une étude plus poussée de la forme de la fonction d’autocorrélation selon la structure de la circulation des grandes échelles peut être trouvée en annexe C. A titre d’exemple, la figure 4.13 présente un champ instantané et la fonction d’autocorrélation moyenne correspondante, obtenus à partir d’un calcul DNS à  $Ra = 10^8$ , dans une cavité de 3 mètres remplie de gaz rayonnant, autour de  $t^+ = 8000$ . Dans cette configuration, l’écoulement est en forme de tambour (voir la figure 3.15 au paragraphe 3.2.2) ; les similitudes dans les structures sont plus grandes dans les directions parallèles à l’axe de rotation du tambour, ici l’axe  $x_1$ . La fonction d’autocorrélation présente donc, à partir d’une certaine taille de structure, une direction de similarité privilégiée.

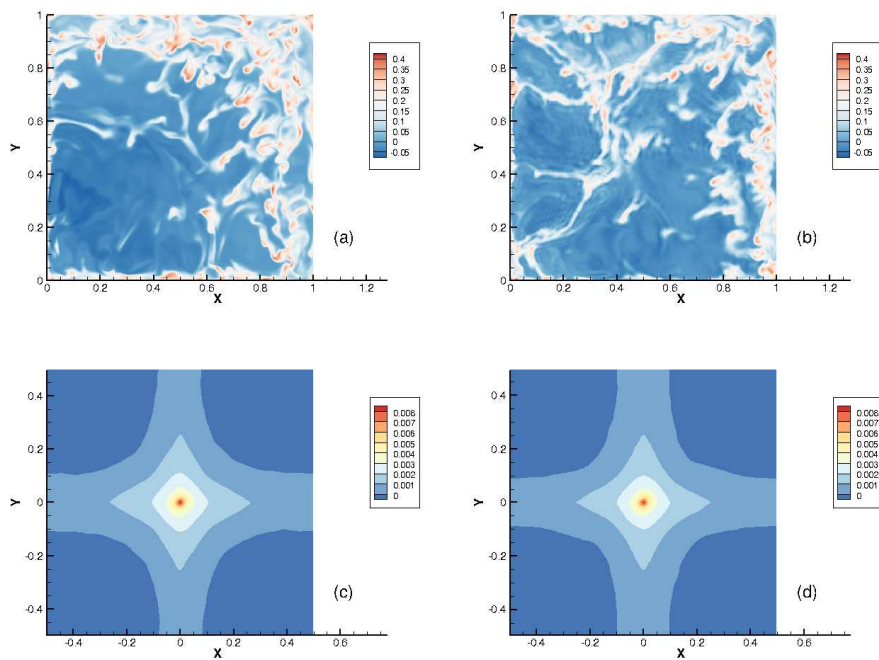


FIGURE 4.10 – Champs instantanés de température à l’altitude  $x_3=0.02$  obtenu par DNS (a) et SVV avec le modèle  $2N/3-$  (b). Fonction d’autocorrélation moyenne du champ de température à l’altitude  $x_3=0.02$  pour les simulations DNS (c) et SVV (d), calculées à partir de 78 champs instantanés.  $Ra = 10^9$ , gaz transparent.

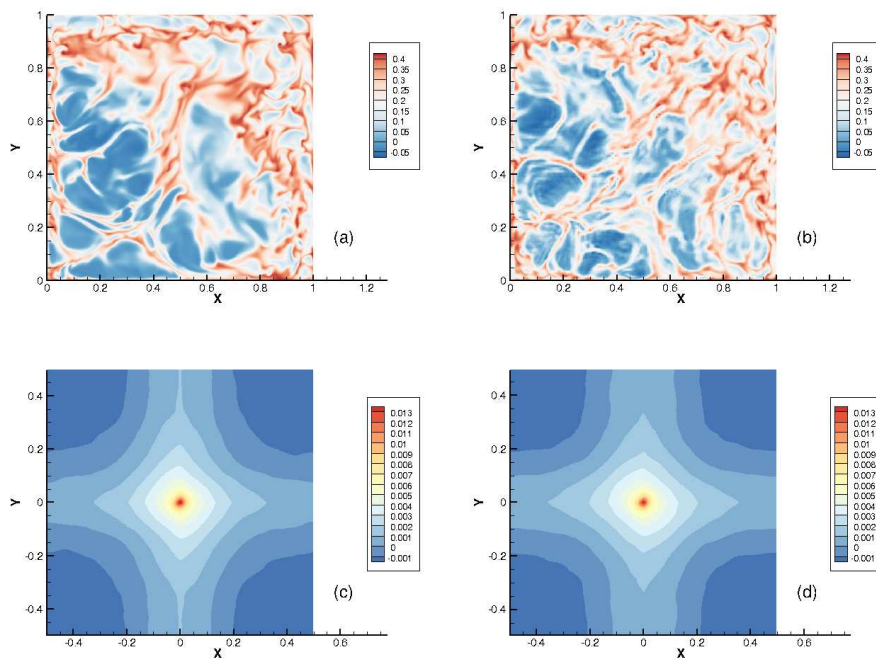


FIGURE 4.11 – Champs instantanés de température à l’altitude  $x_3=0.007$  obtenu par DNS (a) et SVV avec le modèle  $2N/3-$  (b). Fonction d’autocorrélation moyenne du champ de température à l’altitude  $x_3=0.007$  pour les simulations DNS (c) et SVV (d), calculées à partir de 78 champs instantanés.  $Ra = 10^9$ , cavité de trois mètres de côté avec un gaz rayonnant.



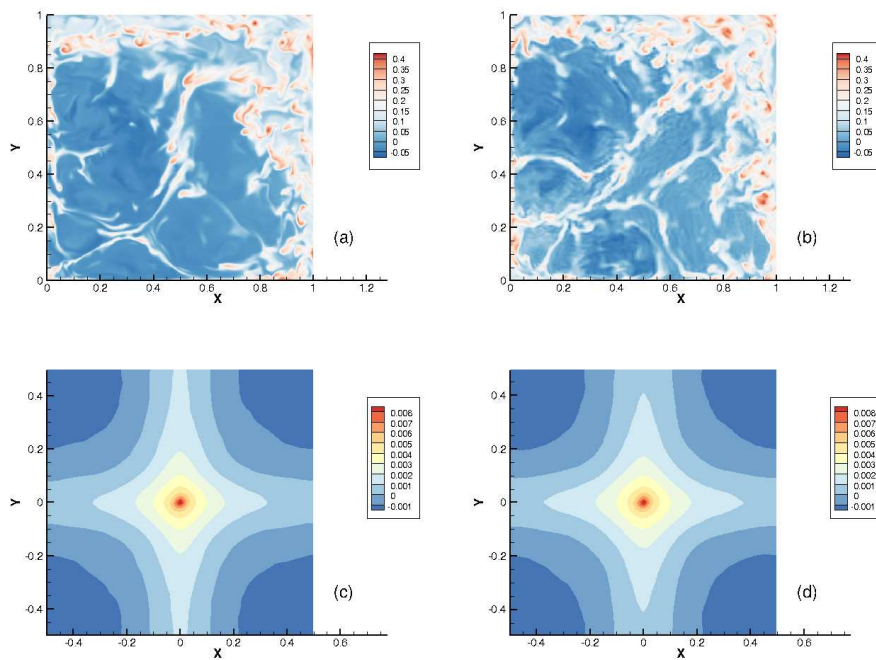


FIGURE 4.12 – Champs instantanés de température à l'altitude  $x_3=0.02$  obtenu par DNS (a) et SVV avec le modèle  $2N/3-$  (b). Fonction d'autocorrélation moyenne du champ de température à l'altitude  $x_3=0.02$  pour les simulations DNS (c) et SVV (d), calculées à partir de 78 champs instantanés.  $Ra = 10^9$ , cavité de trois mètres de côté avec un gaz rayonnant.

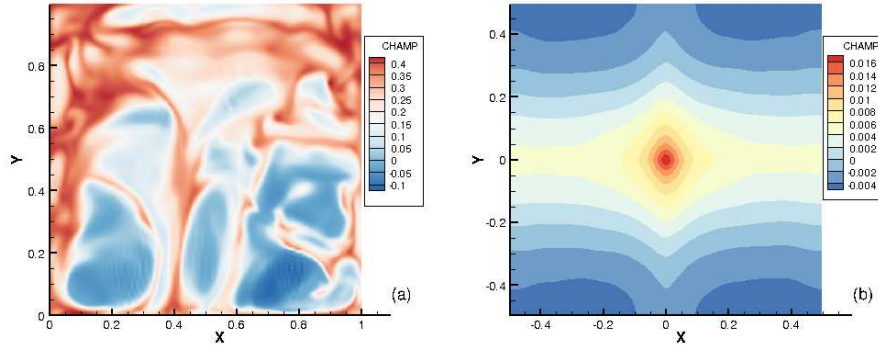


FIGURE 4.13 – (a) Champ instantané de température à l’altitude  $x_3=0.012$  obtenu par DNS ; (b) Fonction d’autocorrélation moyenne correspondante, calculée à partir de 78 champs instantanés.  $Ra = 10^8$ , rayonnement dans une cavité de 3 mètres.

Ici encore, le modèle SVV montre une très bonne précision dans la prédiction de la distribution des tailles de structures caractéristiques de l’écoulement.

### 4.3.3 Analyse temporelle : évolution du nombre de Nusselt aux parois

Dans le §4.2.3, il a été vu que, sous réserve que le dégrossissement du maillage ne soit pas trop fort, le modèle SVV est capable de prédire précisément le flux conductif moyen à la paroi (nombre de Nusselt). Ce paragraphe vise à étudier la capacité du modèle SVV à reproduire l’évolution temporelle du flux conductif à la paroi.

Les figures 4.14 et 4.15 montrent, pour les cas sans rayonnement et rayonnement dans une cavité de trois mètres, l’évolution temporelle du nombre de Nusselt à la paroi horizontale chaude et son spectre dans l’espace de Fourier, pour des simulations DNS et SVV. Les évolutions des nombres de Nusselt présentent des allures similaires, ce qui est confirmé par les spectres Fourier, également très proches. Les évolutions temporelles ne semblent faire apparaître aucun motif périodique particulier, ce qui est confirmé dans l’espace spectral où aucune fréquence n’a d’amplitude particulièrement élevée. Les deux spectres ont également la même fréquence de coupure.

Une légère différence apparaît dans le comportement à haute fréquence du spectre : dans les deux cas (dits ssR pour le calcul sans rayonnement et R3m pour le calcul avec rayonnement dans une cavité de 3 mètres), la quantité d’énergie présente dans les hautes fréquences est plus importante dans les simulations SVV qu’en DNS. Néanmoins, l’accord reste très bon entre la DNS et le modèle SVV.

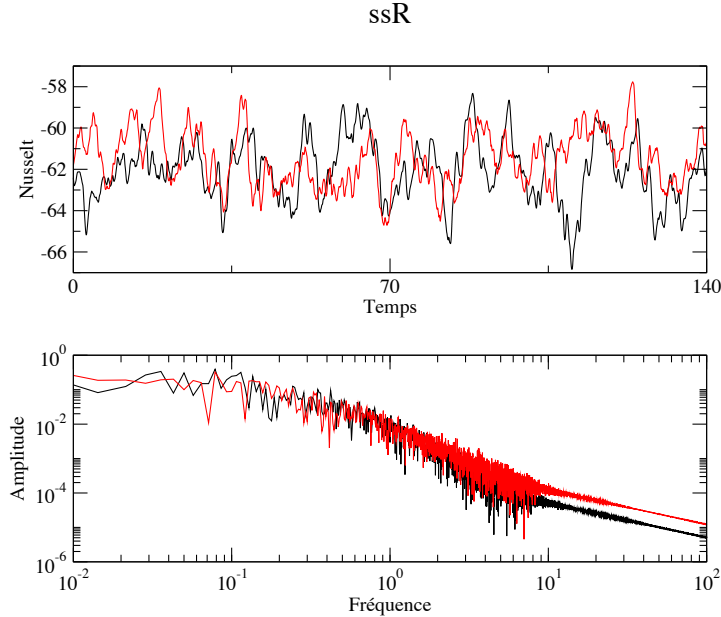


FIGURE 4.14 – Evolution temporelle du nombre de Nusselt à la paroi chaude (haut) et spectre correspondant dans l’espace de Fourier(bas), dans le cas ssR. Simulations DNS (noir) et LES avec le modèle SVV  $2N/3-$  (rouge).

#### 4.3.4 Analyse modale : structures de l’écoulement

La figure 4.16 présente les évolutions temporelles des composantes  $L_{x_1}$  et  $L_{x_2}$  du moment angulaire (voir §3.2.2), sur une période de  $200 t+$  pour le cas sans rayonnement et  $110 t+$  pour le cas rayonnant dans une cavité de trois mètres, pour des simulations DNS et SVV. Dans chacun des cas, les moments angulaires sont tous les deux de moyenne non nulle, ce qui traduit une circulation dans une diagonale de la cavité. Le modèle SVV semble donc capable de prédire correctement la structure diagonale de la circulation des grandes échelles (LSC) de l’écoulement. Cependant, il est difficile d’en dire davantage à partir de cette seule figure.

La méthode POD (voir annexe A.1) permet de décomposer l’écoulement pour en extraire les différentes structures élémentaires qui, recomposées, permettent de retrouver l’écoulement. Les modes de bas ordre, les plus énergétiques, correspondent aux grandes structures de l’écoulement et pilotent la circulation des grandes échelles. Les modes intermédiaires sont en lien avec la dynamique de la LSC : sa stabilité et les phénomènes de réorientation. Les modes de plus haut ordre, quant-à-eux, ont des niveaux d’énergie très bas et ont une influence sur les

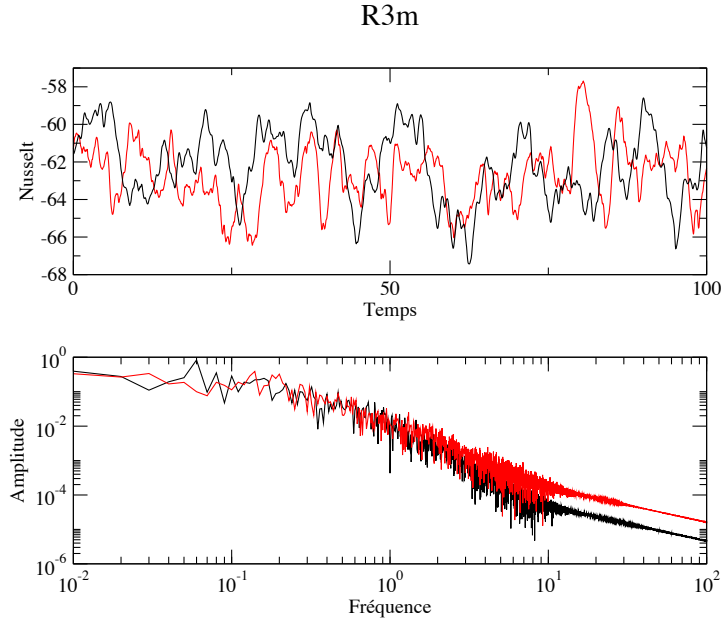


FIGURE 4.15 – Evolution temporelle du nombre de Nusselt à la paroi chaude (haut) et spectre correspondant dans l'espace de Fourier (bas), dans le cas R3m. Simulations DNS (noir) et LES avec le modèle SVV  $2N/3-$  (rouge).

petites échelles de l'écoulement. Il est donc intéressant de comparer les modes POD issus des simulations DNS et SVV et leurs niveaux d'énergie associés afin de voir si, au-delà de la LSC, la LES est capable de capter les différents modes spatiaux de l'écoulement.

Les échantillons utilisés pour la méthode POD sont des champs instantanés extraits des différentes simulations. 109 champs ont été utilisés dans chaque cas, et les 16 symétries du problème ont été appliquées sur chacun des champs, pour un total de 1744 échantillons.

Les figures 4.17 et 4.18 présentent les huit premiers modes POD obtenus pour les simulations DNS et SVV, respectivement dans le cas sans rayonnement et rayonnement dans une cavité de trois mètres. Une analyse approfondie des modes POD habituellement rencontrés en cavité de Rayleigh-Bénard peut être trouvée dans Soucasse *et al.* (2019, 2021); une brève description des premiers modes est ici donnée.

- Le mode  $M$  correspond à l'écoulement moyen : il est constitué de deux tores dans chaque demi-cavité, en rotation contraire l'un par rapport à l'autre;

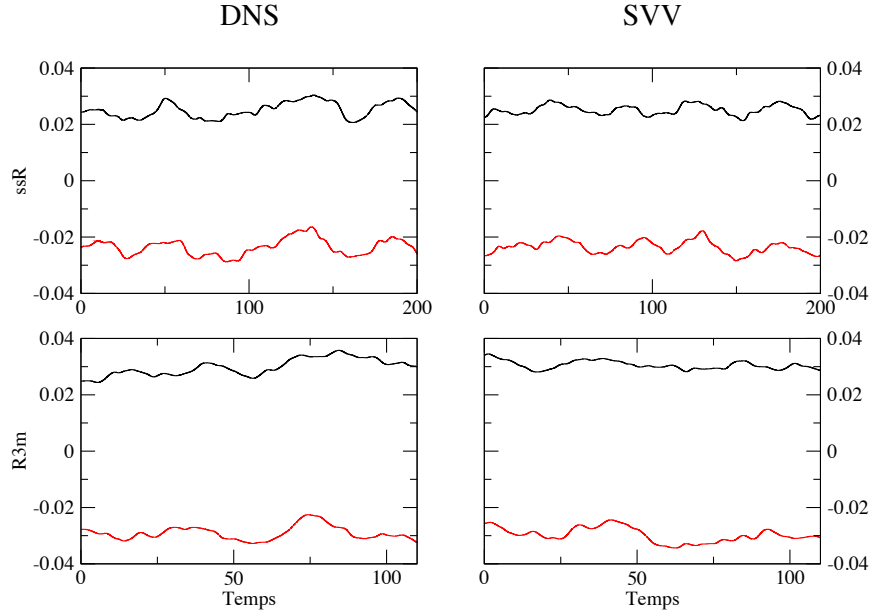


FIGURE 4.16 – Evolution temporelle des composantes selon  $x_1$  et  $x_2$  du moment angulaire,  $L_{x_1}$  (noir) et  $L_{x_2}$  (rouge), pour des simulations DNS (gauche) et LES avec le modèle SVV  $2N/3-$  (droite). Cas d'un gaz transparent (haut) et rayonnant dans une cavité de 3 mètres (bas).

- Les modes  $L_x$  et  $L_y$  forment une paire de modes dégénérés (il possèdent la même énergie, ce qui se traduit par la même valeur propre dans le spectre) : ils consistent en un écoulement tambour autour des axes  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  respectivement. La combinaison de ces deux modes produit un écoulement diagonal ;
- Le mode  $D$  est lui aussi séparé selon les demi-cavités en rouleaux transportant le fluide en diagonale d'un coin à un autre ;
- Les modes  $BL_x$  et  $BL_y$  forment également une paire de modes dégénérés : ils consistent en deux rouleaux longitudinaux en co-rotation, autour des axes  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  respectivement ;
- Le mode  $L_z$  est un simple rouleau autour de l'axe  $z$  : il s'agit d'un mode purement mécanique, dont la contribution au flux convectif est nettement plus faible que les autres modes ;
- Le mode  $C$  est formé de rouleaux contra-rotatifs dans les coins de la cavité : il a été montré qu'il jouait un rôle crucial dans les phénomènes de réorientation.

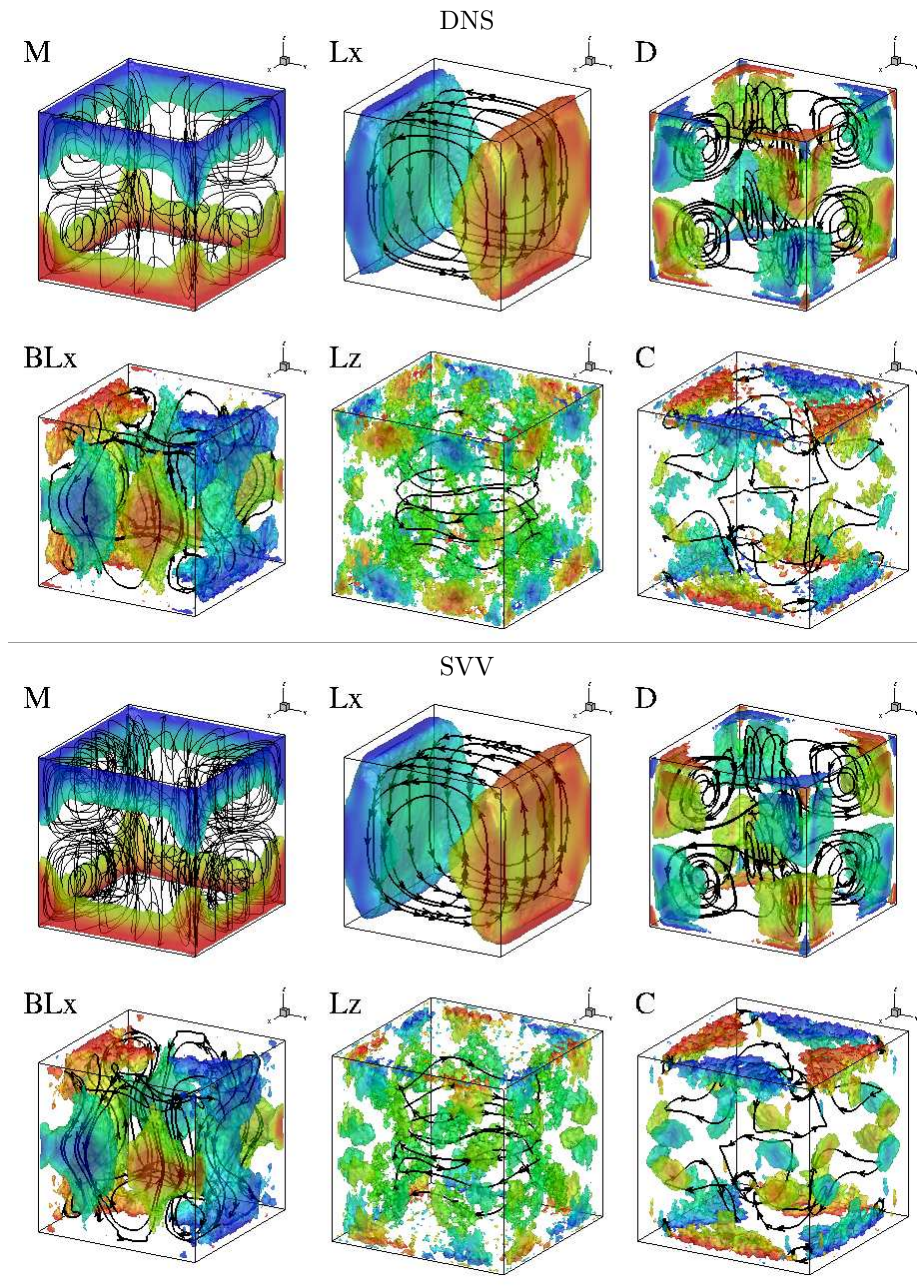


FIGURE 4.17 – Huit premiers modes POD obtenus dans le cas sans rayonnement, pour des simulations DNS (haut) et LES avec le modèle SVV 2N/3– (bas). Lignes de courant et iso-surfaces de la contribution du flux convectif moyen  $\phi^w \phi^\theta = 0,1$  (0,01 pour le mode  $L_z$ ). Pour les modes dégénérés  $L_x/L_y$  et  $BL_x/BL_y$ , seul le mode orienté selon  $x_1$  est présenté. Les iso-surfaces sont colorées selon la température variant de -0,5 (bleu) à +0,5 (rouge).



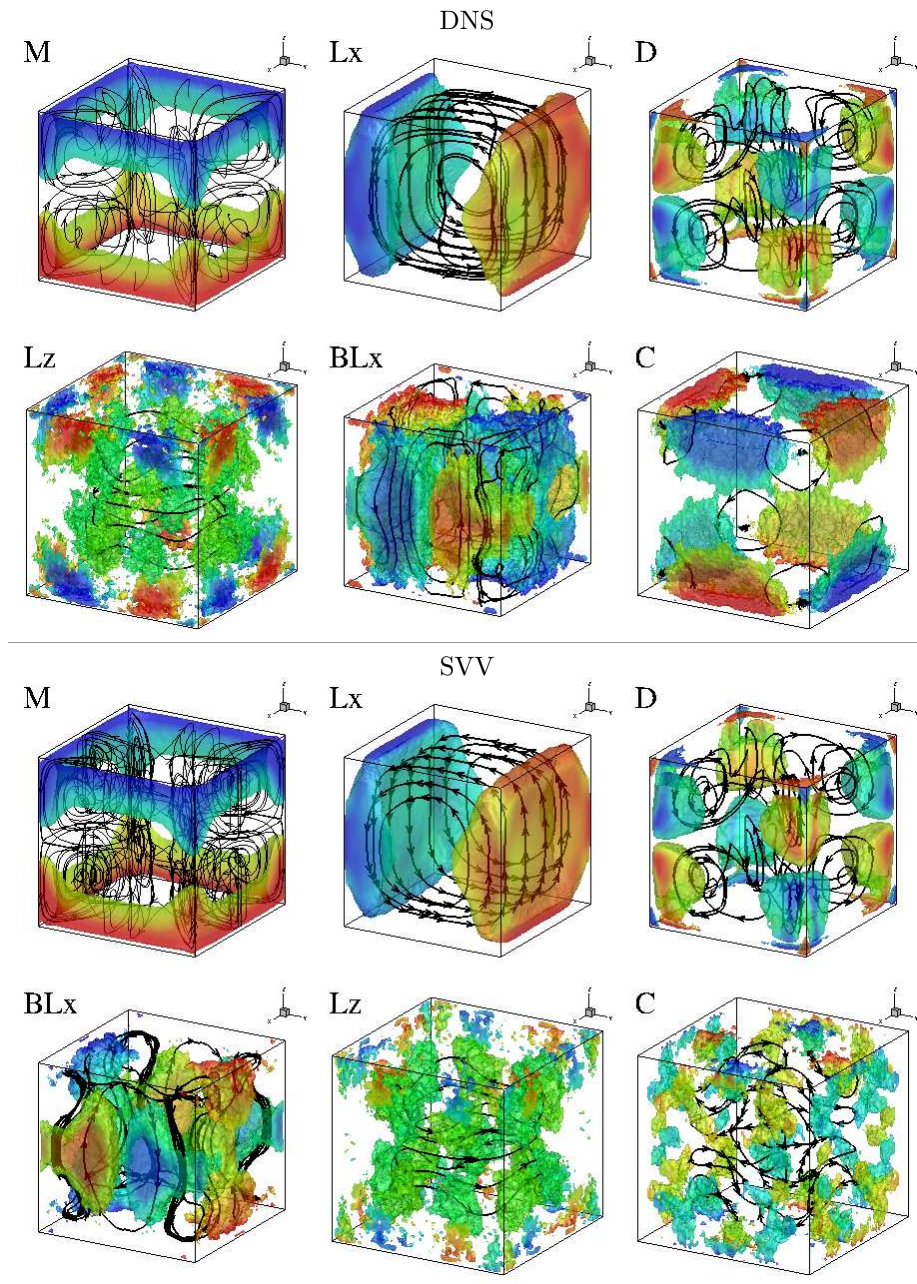


FIGURE 4.18 – Huit premiers modes POD obtenus dans le cas rayonnement dans une cavité de trois mètres, pour des simulations DNS (haut) et LES avec le modèle SVV  $2N/3-$  (bas). Lignes de courant et iso-surfaces de la contribution du flux convectif moyen  $\phi^w \phi^\theta = 0, 1$  (0,01 pour le mode  $L_z$ ). Pour les modes dégénérés  $L_x/L_y$  et  $BL_x/BL_y$ , seul le mode orienté selon  $\mathbf{x}_1$  est présenté. Les iso-surfaces sont colorées selon la température variant de -0,5 (bleu) à +0,5 (rouge).

Dans le cas sans rayonnement, les modes POD obtenus en SVV montrent un excellent accord avec ceux obtenus en DNS : l'ordre des modes est le même et ils présentent la même apparence dans les lignes de courant et les iso-surfaces du flux convectif  $\phi^w \phi^\theta$ .

Dans le cas rayonnant, quelques différences sont cependant à noter. Les quatre premiers modes ( $M$ ,  $L_x$ ,  $L_y$  et  $D$ ), directement liés à la LSC, sortent dans le même ordre et sont très similaires. Les quatre modes suivants sont en revanche moins en accord. En DNS, le mode  $L_z$  apparaît avant les modes  $BL_x$  et  $BL_y$ , alors qu'en SVV c'est l'inverse qui se produit ; les niveaux d'énergie associés sont cependant extrêmement proches (voir figure 4.20). On remarque également un plus faible niveau du flux convectif par rapport à la DNS, pour les quatre modes  $L_z$ ,  $BL_x$ ,  $BL_y$  et  $C$ . Pour ce dernier, la température apparaît également beaucoup plus homogène (les contraste rouge/bleu est moins marqué). Ce mode est celui qui pilote principalement les phénomènes de réorientation dans la cavité (Soucasse et al., 2019) : sa moins bonne représentation par le modèle SVV pourrait impacter la prédiction de ces phénomènes. La puissance des ordinateurs actuels ne permet cependant pas de réaliser des simulations couplées de plus de quelques centaines de  $t+$ , et le phénomène de réorientation est relativement rare (période de plusieurs milliers de  $t+$  à  $Ra = 10^8$ , et le phénomène se raréfie lorsque le nombre de Rayleigh augmente (voir §3.2.2). Cette hypothèse ne peut donc pas être étudiée pour le moment.

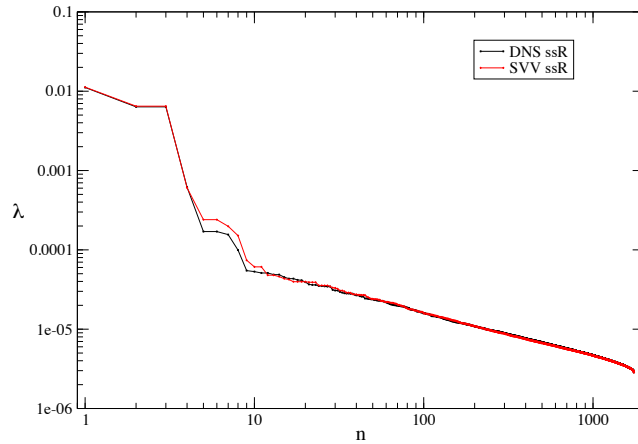


FIGURE 4.19 – Comparaison des spectres POD obtenus dans le cas ssR, pour des simulations DNS (noir) et LES avec le modèle SVV  $2N/3-$  (rouge).

Les figures 4.19 et 4.20 présentent les spectres POD obtenus en DNS et avec les modèles SVV. Les niveaux d'énergie des quatre premiers modes sont quasi



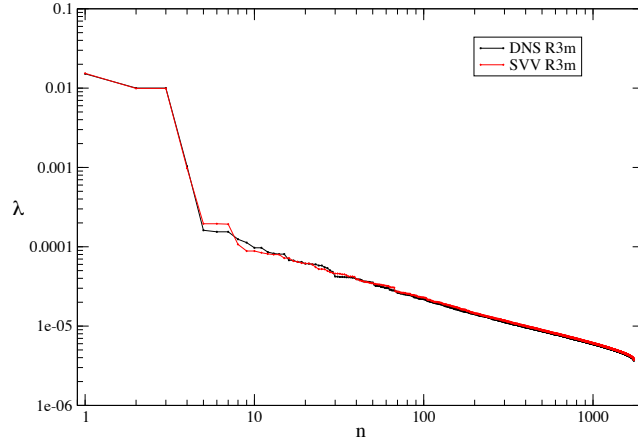


FIGURE 4.20 – Comparaison des spectres POD obtenus dans le cas R3m, pour des simulations DNS (noir) et LES avec le modèle SVV 2N/3– (rouge).

identiques, ce qui confirme la capacité des simulations SVV à reproduire correctement la LSC. A partir du 5ème mode (les modes dégénérés  $L_x$  et  $L_y$ ), le modèle SVV a tendance à sur-estimer légèrement l'énergie des modes intermédiaires, dans le cas sans rayonnement. Dans le cas rayonnant, l'énergie des modes est d'abord sur-estimée, puis sous-estimée. Pour les plus hauts modes ( $n > 15$ ), l'accord entre les spectres DNS et SVV est excellent.

Le modèle SVV prédit donc globalement très bien l'énergie des modes POD, avec une légère différence au niveau des modes intermédiaires.

## 4.4 Étude à plus haut nombre de Rayleigh et conclusion sur la configuration de Rayleigh-Bénard

Le modèle SVV s'est révélé être une méthode robuste pour limiter le coût numérique des simulations, tout en gardant une bonne précision des résultats et une capacité à prédire une grande variété de phénomènes. Il est utilisé ici pour porter plus loin l'étude de la configuration de Rayleigh-Bénard, avec des simulations à très haut nombre de Rayleigh, afin de tirer un bilan plus global de cette configuration d'écoulement.

### 4.4.1 Simulation SVV à $Ra = 10^{10}$

Deux cas sont étudiés à  $Ra = 10^{10}$  : le cas sans rayonnement et le cas rayonnant dans une cavité de trois mètres. En effet, dès lors que le rayonnement est pris en compte, la taille de la cavité doit être fixée, ce qui, pour un nombre de Rayleigh et un fluide donnés, fixe également la différence de température entre les parois chaude et froide.

A  $Ra = 10^{10}$ , la différence de température entre les parois chaude et froide dans une cavité de trois mètres est d'environ 3,9 K, mais de plus de 100 K pour une cavité d'un mètre, ce qui rend inapplicable l'approximation de Boussinesq. A  $Ra = 10^9$ , dans une cavité d'un mètre, la différence de température est de 10,6 K, ce qui est la limite haute de validité de l'approximation de Boussinesq. De plus, le cadre de ce travail porte sur les ambiances habitables, dont les dimensions sont davantage proches de trois mètres !

Le maillage utilisé est le même que pour les simulations en DNS à  $Ra = 10^9$ , soit  $320 \times 320 \times (16 \times 20)$  points sans rayonnement et  $320 \times 320 \times (16 \times 40)$  avec rayonnement. Le paramétrage SVV utilisé est le  $2N/3$  – (voir §4.2.3).

#### Aspect statistique

La figure 4.21 présente les profils verticaux de différentes grandeurs de l'écoulement, moyennées statistiquement et sur les plans horizontaux. Les effets du rayonnement décroissant avec l'augmentation du nombre de Rayleigh, la différence entre les cas sans rayonnement et rayonnement est moins marquée qu'aux nombres de Rayleigh précédemment étudiés. La présence de rayonnement n'a aucun effet sur le carré des fluctuations de température  $\theta'^2$  et l'influence sur le champ de température n'est plus perceptible à ce nombre de Rayleigh. En revanche, le rayonnement continue d'augmenter l'énergie cinétique de l'écoulement moyen  $\overline{u_i u_i}/2$ , et très légèrement l'énergie cinétique turbulente  $\overline{u'_i u'_i}/2$ . La forme convexe du flux radiatif  $\mathbf{q}^{\text{rad}}$  s'accroît et entraîne en retour une augmentation du flux convectif au cœur de la cavité, mais cette augmentation est relativement plus faible par rapport à l'augmentation du flux due au nombre de Rayleigh.

La figure 4.22 montre les champs de température et de puissance radiative au voisinage de la paroi inférieure. L'abscisse est ré-échelonnée par  $Ra^{1/3}$  :

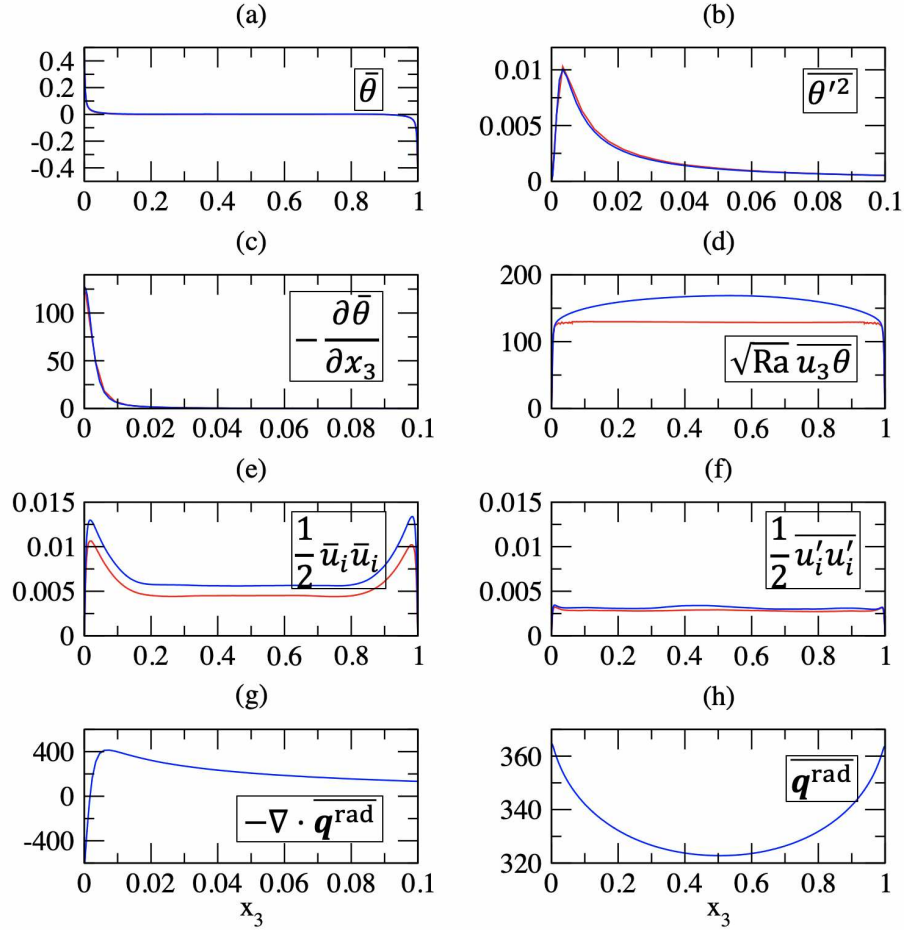


FIGURE 4.21 – Profils verticaux de grandeurs clefs, moyennées statistiquement et sur les plans horizontaux, à  $Ra = 10^{10}$ , pour un fluide transparent (rouge) et rayonnant dans une cavité de trois mètres (bleu). (a) Température  $\bar{\theta}$ , (b) Carré des fluctuations de température  $\overline{\theta'^2}$  (zoom), (c) Flux conductif  $-\partial\bar{\theta}/\partial x_3$  (zoom), (d) Flux convectif  $\sqrt{Ra} u_3 \theta$ , (e) Energie cinétique de l'écoulement moyen  $\overline{u_i u_i}/2$ , (f) Energie cinétique turbulente  $\overline{u_i' u_i'}/2$ , (g) Puissance radiative  $\mathcal{P}^{\text{rad}}$ , (h) Flux radiatif  $\mathbf{q}^{\text{rad}}$ .

l'évolution de l'épaisseur des couches limites thermique et radiative en  $Ra^{-1/3}$  est bien confirmée à  $Ra = 10^{10}$ .

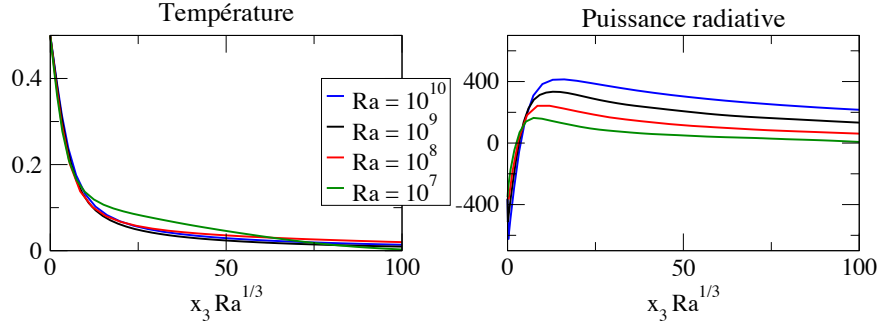


FIGURE 4.22 – Température et puissance radiative au voisinage de la paroi chaude, moyennés statistiquement et sur les plans horizontaux. Cas d’un gaz rayonnant, pour des nombres de Rayleigh dans la gamme  $10^7 \leq Ra \leq 10^{10}$ , dans une cavité de côté 3 mètres. L’abscisse est ré-échelonnée par  $Ra^{1/3}$ .

### Aspect modal

Les figures 4.23 et 4.24 présentent les spectres POD obtenus respectivement dans les cas sans rayonnement et rayonnement dans une cavité de trois mètres, à  $Ra = 10^{10}$  et à  $Ra = 10^9$ . L’augmentation du nombre de Rayleigh entraîne une légère diminution de l’énergie cinétique contenue dans les premiers modes. L’ordre de sortie des modes est également légèrement modifié : dans le cas sans rayonnement, le mode  $L_z$  apparaît en 5<sup>e</sup> position à  $Ra = 10^{10}$  (7<sup>e</sup> à  $Ra = 10^9$ ), et dans le cas rayonnant il apparaît en 7<sup>e</sup> position (5<sup>e</sup> à  $Ra = 10^9$  en DNS).

Au niveau des plus hauts modes, la décroissance du spectre est plus faible avec l’augmentation du nombre de Rayleigh, ce qui correspond à la tendance déjà observée à plus bas nombres de Rayleigh (Soucasse *et al.*, 2021).

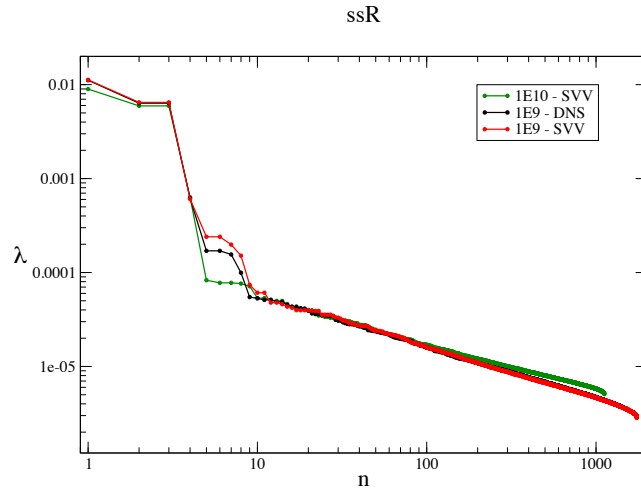


FIGURE 4.23 – Comparaison des spectres POD obtenus dans le cas sans rayonnement, pour des simulations SVV à  $Ra = 10^{10}$  (vert), DNS à  $Ra = 10^9$  (noir) et SVV à  $Ra = 10^9$  (rouge).

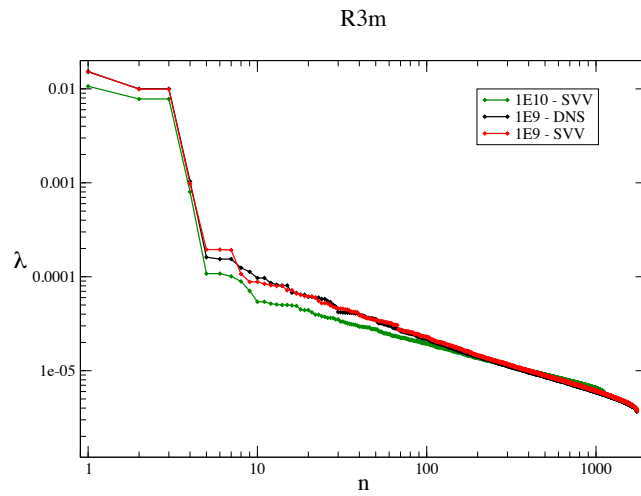


FIGURE 4.24 – Comparaison des spectres POD obtenus dans le cas rayonnement dans une cavité de trois mètres, pour des simulations SVV à  $Ra = 10^{10}$  (vert), DNS à  $Ra = 10^9$  (noir) et SVV à  $Ra = 10^9$  (rouge).

#### 4.4.2 Conclusions sur la configuration de Rayleigh-Bénard

L'étude DNS effectuée au chapitre 3 a permis de balayer une large gamme de nombres de Rayleigh, et différentes configurations radiatives. La méthode SVV de simulations au grandes échelles analysée dans le chapitre 4 a ouvert la voie à des simulations couplées à plus haut nombre de Rayleigh pouvant enrichir l'étude DNS. La figure 4.25 récapitule l'évolution des flux principaux en configuration de Rayleigh-Bénard : le flux conductif à la paroi (nombre de Nusselt) et le flux convectif dans le plan horizontal médian de la cavité.

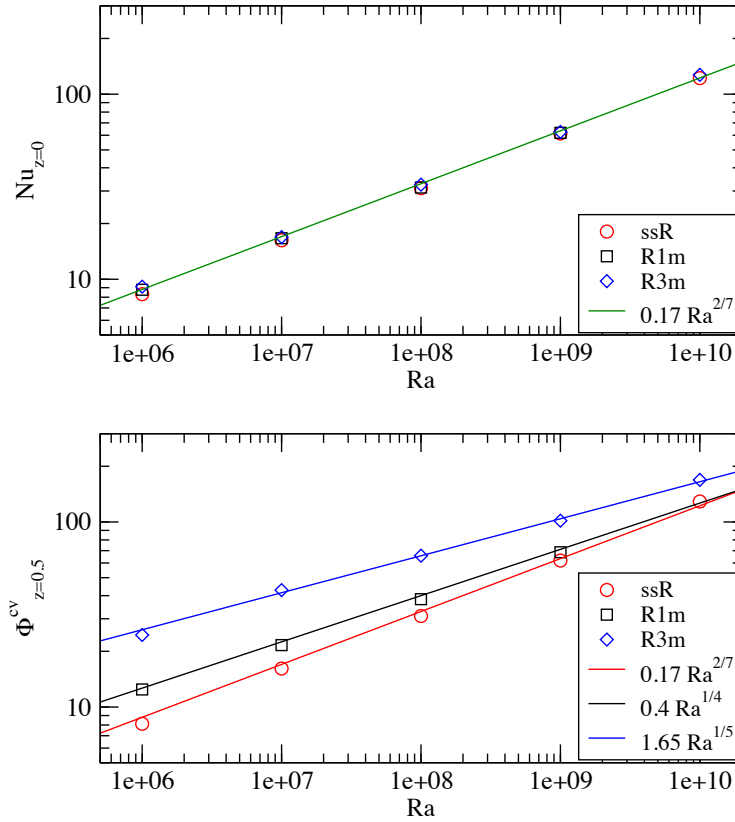


FIGURE 4.25 – Nombre de Nusselt à la paroi et flux convectif au centre de la cavité en fonction du nombre de Rayleigh. Cas sans rayonnement (rouge), rayonnement dans une cavité d'un mètre (noir) et rayonnement dans une cavité de trois mètres (bleu). Les points à  $Ra = 10^9$  sont issus des simulations DNS.

La présence de rayonnement n'a pas d'influence sur le nombre de Nusselt : quelle que soit la configuration radiative, l'évolution du nombre de Nusselt en  $Ra^{2/7}$  est retrouvée (Chavanne et al., 1997; Grossmann et Lohse, 2000; Chavanne et al., 2001; Ahlers et al., 2009). Pour les flux convectifs, dans le cas sans rayonnement on retrouve également l'évolution en  $Ra^{2/7}$ , puisqu'il y a un équilibre entre les flux conductif et convectif. Lorsque le rayonnement est pris en compte, le flux radiatif au cœur de la cavité modifie l'équilibre et affecte l'évolution selon le nombre de Rayleigh :  $\phi_{z=0,5}^{cv} = \mathcal{O}(Ra^{1/4})$  dans le cas un mètre, et  $\phi_{z=0,5}^{cv} = \mathcal{O}(Ra^{1/5})$  dans le cas trois mètres.

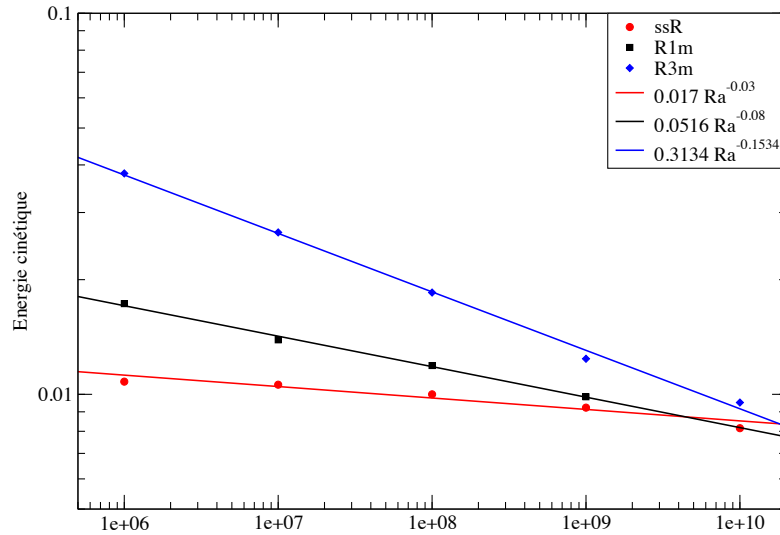


FIGURE 4.26 – Evolution de l'énergie cinétique totale dans la cavité en fonction du nombre de Rayleigh. Cas sans rayonnement (rouge), rayonnement dans une cavité d'un mètre (noir) et rayonnement dans une cavité de trois mètres (bleu). Les points à  $Ra = 10^9$  sont issus des simulations DNS.

La figure 4.26 montre l'évolution de l'énergie cinétique totale dans la cavité en fonction du nombre de Nusselt. Le rayonnement augmente l'énergie cinétique de l'écoulement, notamment aux plus bas nombres de Rayleigh, mais cette augmentation diminue lorsque le nombre de Rayleigh augmente et que l'effet relatif du rayonnement diminue devant la convection. Les grandeurs de références utilisées pour adimensionner les équations dans le §1.2,  $u_{ref} = a\sqrt{Ra}/L$  et  $t_{ref} = L^2/(a\sqrt{Ra})$ , proviennent de l'équilibre entre les forces de flottabilité

et d'inertie dans la cavité. Cet adimensionnement permet de conserver une énergie cinétique quasi constante en l'absence de rayonnement dans la gamme  $10^6 \leq Ra \leq 10^9$ , bien que l'énergie cinétique diminue légèrement à partir de  $Ra = 10^9$ . En revanche, en présence de rayonnement, ces grandeurs de référence ne permettent plus de garder constante l'énergie cinétique dans cette gamme de nombres de Rayleigh.

Un autre effet du rayonnement est de fortement perturber la structure de la circulation des grandes échelles dans la cavité (voir figure 3.16) ; ainsi, pour caractériser un écoulement en simulations couplées, le seul nombre de Rayleigh ne suffit plus, il faut également prendre en compte la taille de la cavité et la composition du mélange air/CO<sub>2</sub>/H<sub>2</sub>O.





## Chapitre 5

# Étude de configurations plus représentatives de l'habitat

Les études précédentes en configuration de Rayleigh-Bénard ont permis de valider l'utilisation du modèle SVV pour réaliser des simulations couplées. Ce modèle va permettre ici de réaliser de nouvelles simulations avec un coût numérique bien moindre que dans les études DNS. Dans ce chapitre, les conditions aux limites sont modifiées pour effectuer des simulations où le chauffage et le refroidissement sont localisés, afin de davantage se rapprocher des conditions que l'on peut retrouver dans les ambiances habitables. Deux configurations sont étudiées : dans la première, on positionne une zone chaude sous une zone froide le long d'une même paroi ; dans la seconde, la zone chaude est positionnée sur la paroi opposée à celle où est située la zone froide. Par commodité de langage, et bien que cela ne corresponde pas tout à fait à la réalité dans le domaine de l'habitat, nous parlerons de radiateur pour désigner la zone chaude et de fenêtre pour désigner la zone froide. L'effet du rayonnement sur les structures de l'écoulement et sur les transferts d'énergie entre les parois et le gaz est étudié dans ces deux configurations.

Du point de vue des notations de ce chapitre, les axes  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$ ,  $\mathbf{x}_3$  seront désignés respectivement par  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  et  $\mathbf{e}_z$  et les variables  $(x_1, x_2, x_3)$  et  $(u_1, u_2, u_3)$  par  $(x, y, z)$  et  $(u, v, w)$  respectivement.

### 5.1 Configurations étudiées

#### 5.1.1 Equations et méthodes numériques

On considère une cavité cubique fermée, dont deux parois verticales opposées sont maintenues à température constante (mais non uniforme) et les quatre autres adiabatiques. Du point de vue du rayonnement, les parois thermostatées

sont noires et les autres sont parfaitement réfléchissantes. Dans le cas rayonnant, la taille de la cavité utilisée est  $L = 3\text{m}$  et la cavité est remplie du même mélange air/CO<sub>2</sub>/H<sub>2</sub>O que celui étudié jusqu'à présent (cf. §1.3). La convection naturelle couplée au rayonnement dans la cavité est régie par le même système d'équations adimensionnées (1.23), (1.24), (1.25) et (1.7) que dans les chapitres précédents, seules les conditions aux limites adimensionnées sont modifiées :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = 0 & \text{sur les six parois,} \\ \theta = \theta_0(y, z) & \text{sur le plan } x = 0, \\ \theta = \theta_1(y, z) & \text{sur le plan } x = 1, \\ (-\nabla\theta + \mathbf{q}^{\text{rad}}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur les plans } y = 0, y = 1, z = 0, z = 1. \end{cases} \quad (5.1)$$

Les équations sont résolues avec la méthode LES couplée décrite dans le chapitre 4, avec le modèle SVV 2N/3-. La cavité est découpée en dix domaines horizontaux comportant chacun  $200 \times 200 \times 20$  points de Gauss-Lobatto.

### 5.1.2 Conditions aux limites : modélisation du radiateur et de la fenêtre

Le radiateur et la fenêtre sont modélisés en imposant un profil de température, constant dans le temps mais non uniforme dans l'espace, aux parois  $x = 0$  et  $x = 1$ . La méthode numérique employée n'étant pas compatible avec des conditions aux limites discontinues, les champs de température choisis pour modéliser le radiateur et la fenêtre sont sinusoidaux selon l'axe  $\mathbf{e}_z$  et homogènes selon l'axe  $\mathbf{e}_y$ .

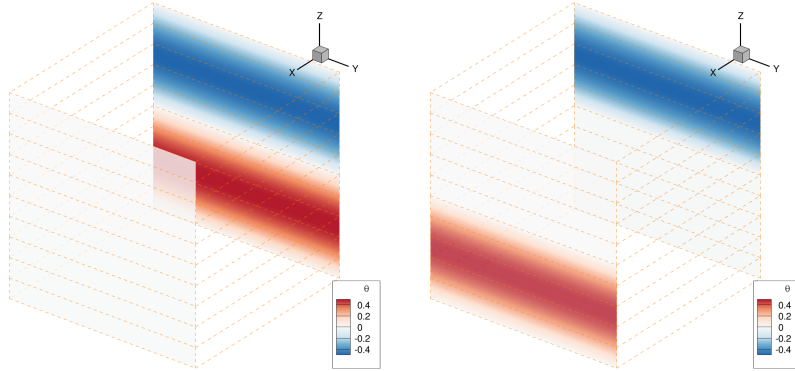


FIGURE 5.1 – Champs de température aux parois  $x = 0$  et  $x = 1$  dans les configurations Radiateur Sous la Fenêtre (RSF) (gauche) et Radiateur Opposé à la Fenêtre (ROF) (droite).

La fenêtre est placée sur la moitié supérieure de la paroi  $x = 0$ . Le champ de température associé est :

$$\theta(y, z) = \sin(2\pi z) \quad x = 0, z > 0.5 \quad (5.2)$$

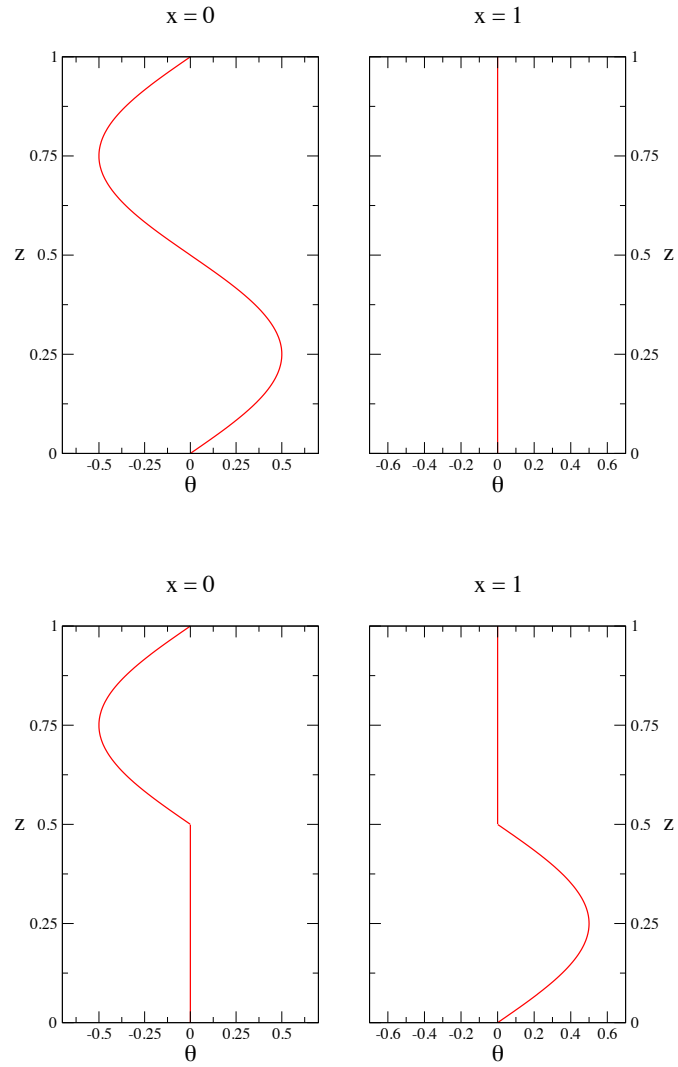


FIGURE 5.2 – Profils de température selon l’axe  $e_z$  aux parois  $x = 0$  et  $x = 1$  dans les configurations Radiateur Sous la Fenêtre (RSF) (haut) et Radiateur Opposé à la Fenêtre (ROF) (bas).

Pour la position du radiateur, deux configurations sont étudiées : dans la première, le radiateur est positionné sous la fenêtre, en  $x = 0$  (RSF) ; dans la seconde, il est positionné sur la face opposée à la fenêtre, en  $x = 1$  (ROF). Le champ de

température associé est :

$$\theta(y, z) = \sin(2\pi z) \quad x = 0 \text{ (RSF) ou } x = 1 \text{ (ROF)}, \quad z < 0.5 \quad (5.3)$$

Les parties des faces  $x = 0$  et  $x = 1$  ne comportant ni radiateur ni fenêtre sont considérées isotherme à  $\theta = 0$ .

La figure 5.1 représente, dans les cas RSF et ROF, les champs de température des parois modélisant le radiateur et la fenêtre. La figure 5.2 montre les profils verticaux de température des parois dans les deux configurations.

La longueur utilisée pour la définition du nombre de Rayleigh est la taille de la cavité  $L$  et l'écart de température correspond à la différence entre les maximum et minimum de température rencontrés sur les profils, soit :

$$\Delta T = \begin{cases} \theta(x = 0, y, z = 0.25) - \theta(x = 0, y, z = 0.75) & \text{(RSF)} \\ \theta(x = 1, y, z = 0.25) - \theta(x = 0, y, z = 0.75) & \text{(ROF)} \end{cases} \quad (5.4)$$

Les simulations sont conduites à  $Ra = 10^9$  dans les deux configurations. Des résultats préliminaires ont été obtenus à  $Ra = 10^{10}$  et font l'objet d'un paragraphe dédié.

### 5.1.3 Symétries des configurations

De la même manière que dans la configuration de Rayleigh-Bénard, les deux configurations étudiées ici présentent un certain nombre de plans de symétries. La discussion sur les symétries a été effectuée au §3.1.1 ; à partir de ces symétries, une moyenne statistique peut être définie, combinant à la fois la moyenne temporelle et les transformations issues des symétries (voir l'équation (3.6)).

Les deux configurations présentent une symétrie par rapport au plan  $y = 0.5$ , qui transforme les champs de température et de vitesse comme suit :

$$S_y : \left. \begin{array}{l} (x, y, z) \rightarrow (x, 1 - y, z) \\ (u, v, w, \theta) \rightarrow (u, -v, w, \theta) \end{array} \right\} \quad (5.5)$$

La configuration RSF vérifie également une symétrie par rapport au plan  $z = 0.5$ , agissant comme :

$$S_z : \left. \begin{array}{l} (x, y, z) \rightarrow (x, y, 1 - z) \\ (u, v, w, \theta) \rightarrow (u, v, -w, -\theta) \end{array} \right\} \quad (5.6)$$

Enfin, la configuration ROF présente une symétrie centrale dans le plan  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ , donc l'action sur les champs de température et de vitesse est :

$$S_d : \left. \begin{array}{l} (x, y, z) \rightarrow (1 - x, y, 1 - z) \\ (u, v, w, \theta) \rightarrow (-u, v, -w, -\theta) \end{array} \right\} \quad (5.7)$$

Chaque configuration vérifie donc deux symétries et le groupe engendré par ces deux symétries contient donc 4 éléments. Ces symétries sont utilisées pour calculer la moyenne statistique définie en (3.6).

## 5.2 Radiateur positionné sous une fenêtre

La particularité de cette configuration est sa symétrie selon le plan  $z = 0.5$ , associée à la proximité entre les zones de chauffage et de refroidissement. Le gaz refroidi par la fenêtre descend le long de la paroi  $x = 0$  et rencontre le gaz qui monte, réchauffé par le radiateur, ce qui crée une zone de forte turbulence.

### 5.2.1 Structure de l'écoulement en l'absence de rayonnement

#### Etude d'un champ instantané

La figure 5.3 montre le champ de la composante verticale  $w$  de la vitesse dans le plan  $z = 0.5$  et les isosurfaces de  $w$ , coloriées par la température, pour  $w = \pm 0.1$ . Dans le plan  $z = 0.5$ , les courants de gaz ascendant, chauffés par le radiateur, rencontrent le gaz descendant, refroidi par la fenêtre. La rencontre entre ces deux courants crée à proximité de la paroi  $x = 0$  des panaches de gaz chauds ascendants et froids descendants qui se croisent : le gaz chaud pénètre dans la partie haute de la cavité et le gaz froid dans la partie basse, par ces panaches entrecroisés. Lorsque le temps évolue, ces panaches se déplacent le long de la paroi et ne restent pas statiques.

Les figures 5.4 et 5.5 présentent des surfaces isothermes pour plusieurs valeurs de température. L'air chaud est expulsé vers le haut de la cavité (et respectivement l'air froid vers le bas) au moyen de ces panaches, qui viennent buter contre la paroi haute (respectivement la paroi basse) et finissent par former des nappes quasi horizontales loin de la paroi  $x = 0$ .

Cela se confirme en regardant la figure 5.6, qui représente le champ de température instantané dans le plan  $y = 0.5$ . Proche de  $x = 0$ ,  $z = 0.5$ , on voit l'entrecroisement des panaches qui font passer l'air chaud dans la moitié haute de la cavité et l'air froid dans la moitié basse, ce qui crée une zone de forte turbulence. Loin de la paroi, le champ de température est fortement stratifié, avec l'air froid dans le bas de la cavité et l'air chaud dans le haut. Les isothermes forment des lignes presque horizontales, sauf au voisinage de la paroi  $x = 1$ , maintenue à température  $\theta = 0$  uniforme. En particulier, l'isotherme  $\theta = 0$  forme une ligne quasi horizontale au milieu de la cavité.

La figure 5.7 montre les lignes de courant dans la cavité, vues dans le plan  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$  et coloriées par la température. Aux alentours de  $x = 0$ ,  $z = 0.5$ , le croisement entre les flux d'air chaud ascendant et froid descendant est bien visible. Il semble y avoir des zones de recirculation proche de la paroi  $x = 0$ , où l'air chaud (resp. froid) émis dans les panaches est refroidi au contact de la fenêtre (resp. réchauffé au contact du radiateur) et expulsé de nouveau vers le bas (resp. le haut) par un autre panache. Plus loin de la paroi  $x = 0$ , le mouvement de l'air semble principalement horizontal, et l'air chaud (resp. froid) qui arrive proche de la paroi  $x = 1$  se refroidit (resp. se réchauffe) à son contact se dirigeant alors vers le plan médian. Ce mouvement proche de la paroi  $x = 1$

explique la déformation des isothermes dans cette région, observée sur la figure 5.6.

Le croisement des panaches dans la région alentour de  $x = 0$ ,  $z = 0.5$  crée une zone de forte turbulence et de vorticité. Le critère  $Q$  est utilisé (voir annexe A.2) afin de localiser les régions où la vorticité domine localement le taux de déformation des cellules fluides ; ce critère permet d'identifier les zones tourbillonnaires. La figure 5.8 présente des isosurfaces du critère  $Q$ , coloriées par la température : comme attendu, les tourbillons sont concentrés dans la région où les panaches s'entrecroisent. Les zones de forte vorticité suivent également les panaches et sont plus étendues là où les panaches sont les plus volumineux. Cela est particulièrement visible sur la partie gauche de la figure 5.8 (b) (à comparer avec la localisation des panaches visible sur les sous-figures 5.4 (a) et (b)).

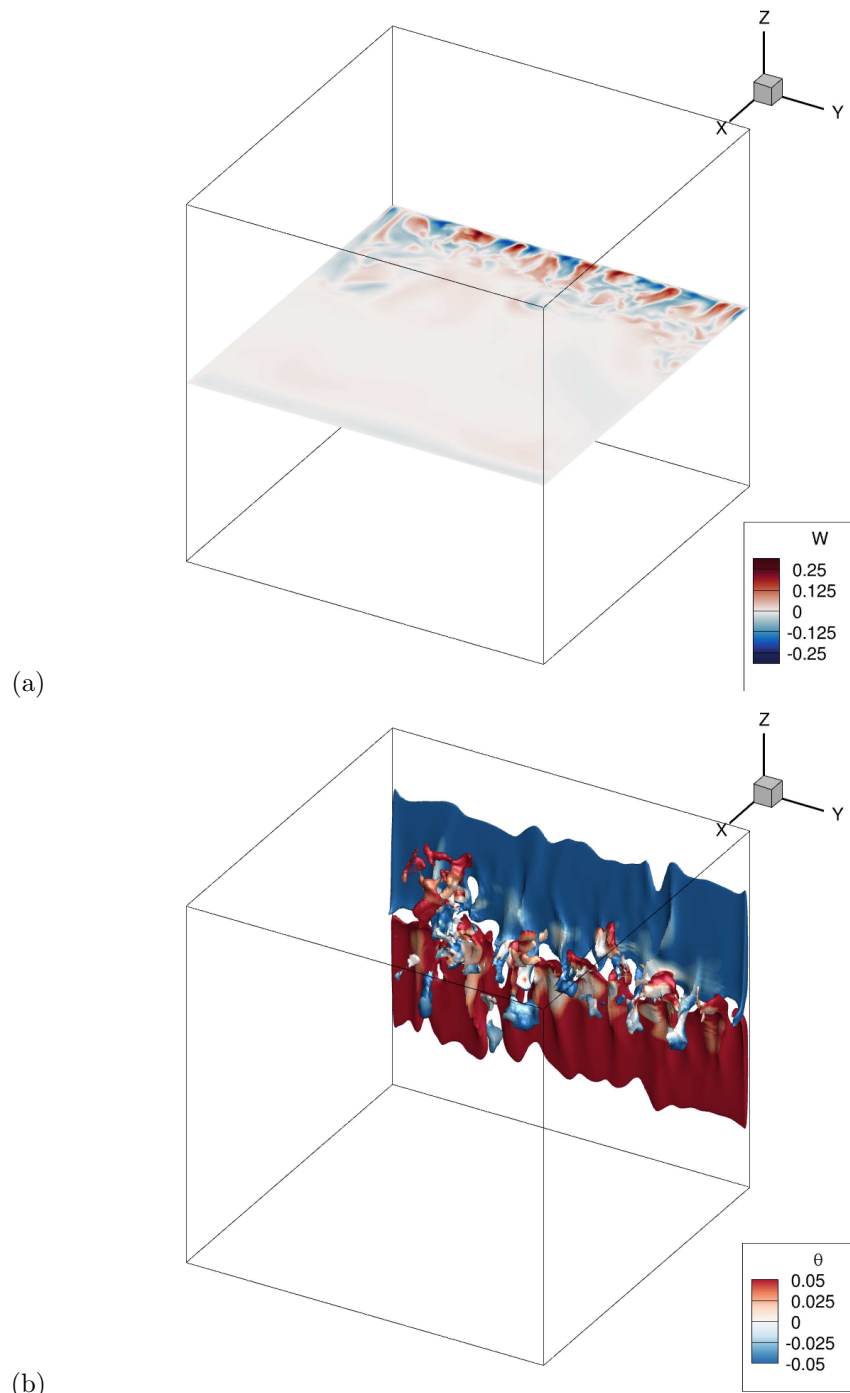


FIGURE 5.3 – Composante verticale de la vitesse  $w$  dans le plan  $z=0.5$  (a) et isosurfaces de  $w = \pm 0.1$ , coloriées par la température (b).



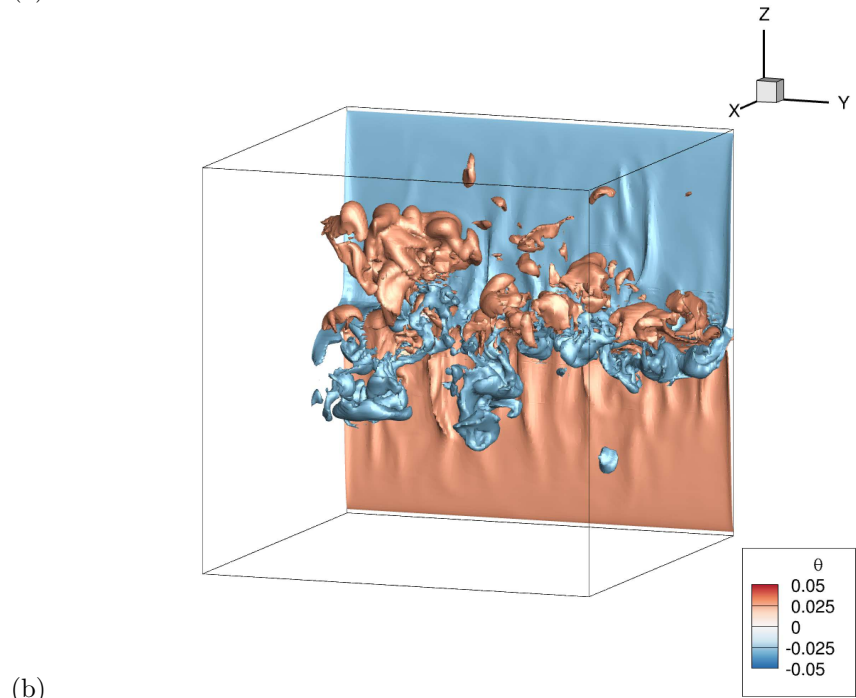
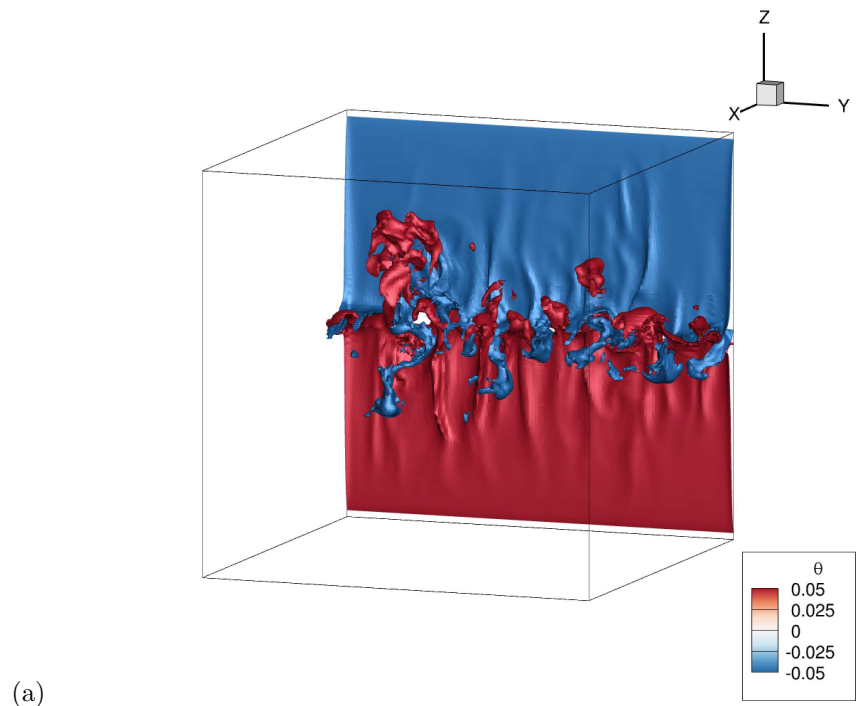


FIGURE 5.4 – Isosurfaces de température :  $\theta = \pm 0.05$  (a),  $\theta = \pm 0.03$  (b).

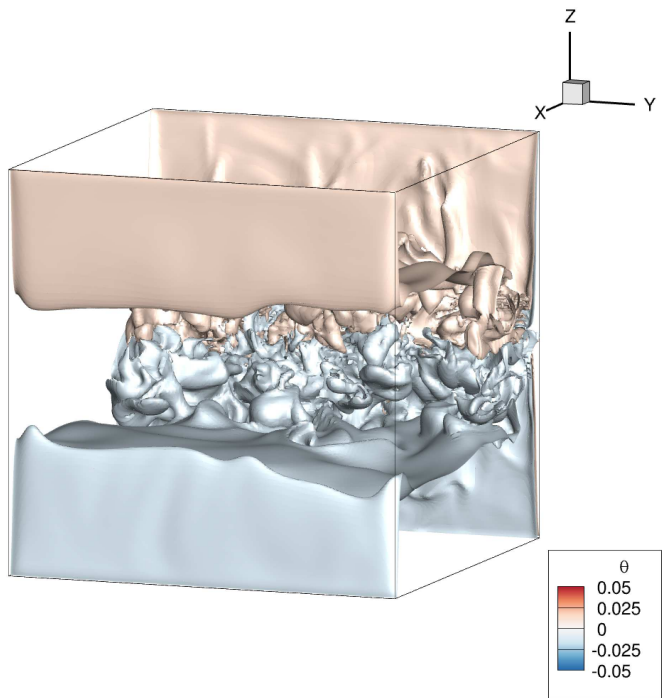
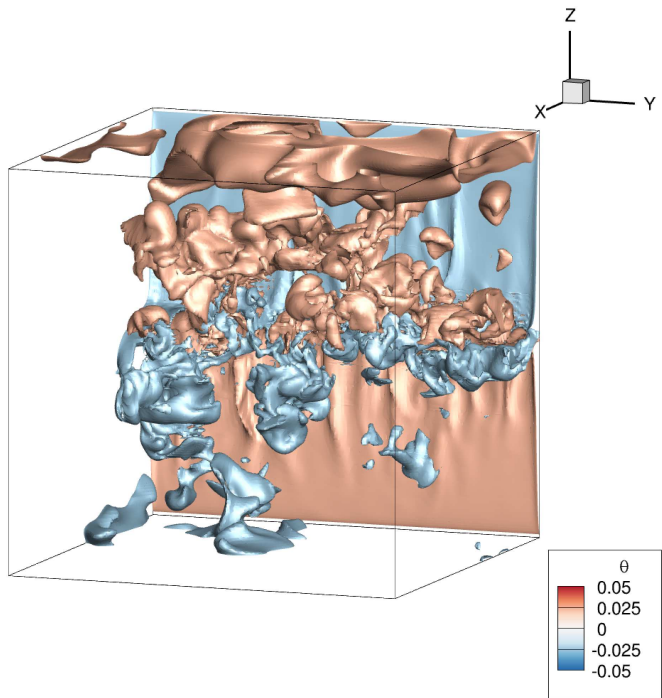


FIGURE 5.5 – Isosurfaces de température :  $\theta = \pm 0.025$  (c),  $\theta = \pm 0.015$  (d).

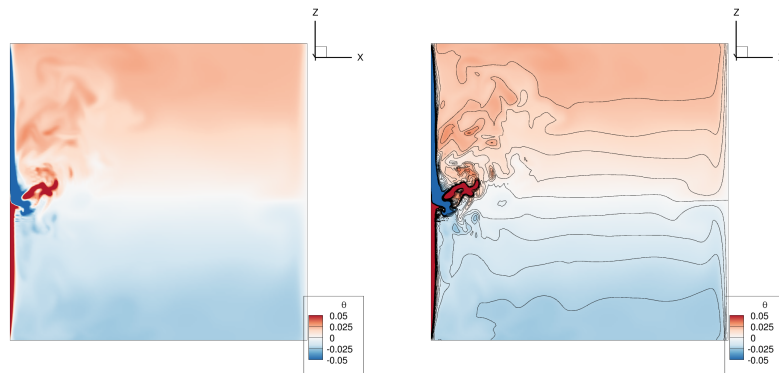


FIGURE 5.6 – Champ de température dans le plan  $y=0.5$ . Sur la figure de droite, les lignes d'isothermes ont été ajoutées.

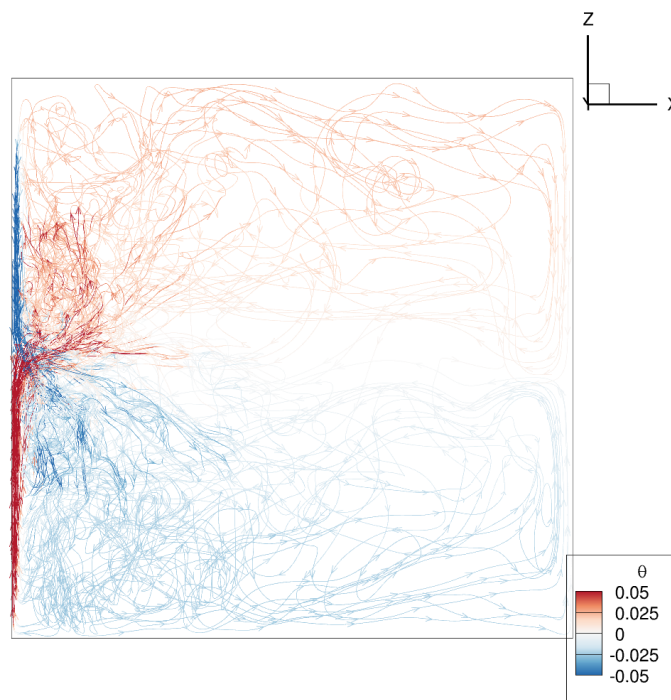


FIGURE 5.7 – Lignes de courant d'un champ instantané, coloriées selon la température, projetées dans le plan  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ .

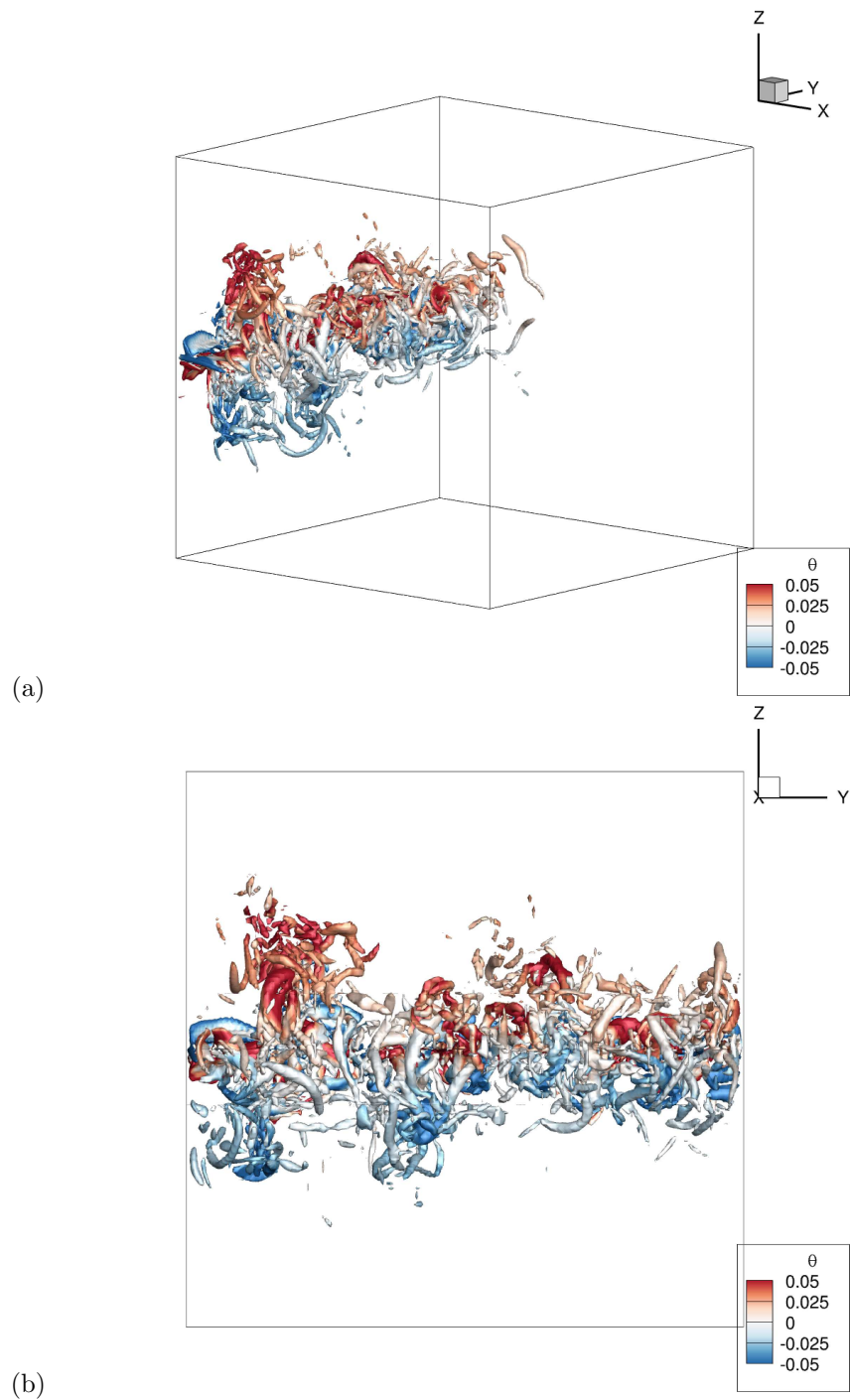


FIGURE 5.8 – Isosurface du critère  $Q$ ,  $Q = 10$ . Vue tridimensionnelle (a) et vue bidimensionnelle depuis la paroi  $x = 1$ .

### Etude du champ moyen

Le champ moyen est obtenu par la moyenne statistique sur une période d'intégration  $\Delta t^+ = 700$  et en utilisant les quatre symétries du problème. La figure 5.9 présente le champ de température moyen dans le plan  $y = 0.5$  et les lignes de courant moyennes.

Compte-tenu du fait que la localisation des panaches évolue dans le temps, ils disparaissent lors de l'opération de moyenne et, sur le champ moyen, le mouvement du fluide projeté du radiateur vers le haut de la cavité, et de la fenêtre vers le bas n'est plus visible. Son effet reste cependant bien visible sur le champ de température. La stratification est nette dans cette configuration : loin de la paroi  $x = 0$ , les lignes d'isothermes sont quasi-horizontales, avec l'air chaud dans la partie haute de la cavité et l'air froid en bas. La figure 5.10 présente l'évolution de la température et de son gradient selon  $z$  au milieu de la cavité. au cœur de la cavité ( $0.25 < z < 0.75$ ), le gradient de température est quasi-constant  $\partial\theta/\partial z \simeq 0.08$ , ce qui correspond à la stratification thermique dans cette configuration.

Concernant le mouvement moyen du fluide, l'air réchauffé par le radiateur est envoyé dans la moitié haute de la cavité. Là, le flux semble se scinder en deux parties. On observe d'une part un phénomène de recirculation, où le fluide chaud retourne vers la fenêtre, est refroidi puis retourne dans la moitié inférieure de la cavité. D'autre part, une partie du flux d'air provenant du radiateur est projetée contre le plafond et le longe jusqu'à atteindre la paroi opposée ( $x = 1$ ), isotherme à  $\theta = 0$ . L'air est alors refroidi et redescend vers le plan horizontal médian. Comme le même phénomène se produit en moitié inférieure de la cavité, deux flux verticaux se rencontrent à cet endroit ; les deux flux se redirigent alors horizontalement vers la paroi  $x = 0$ .

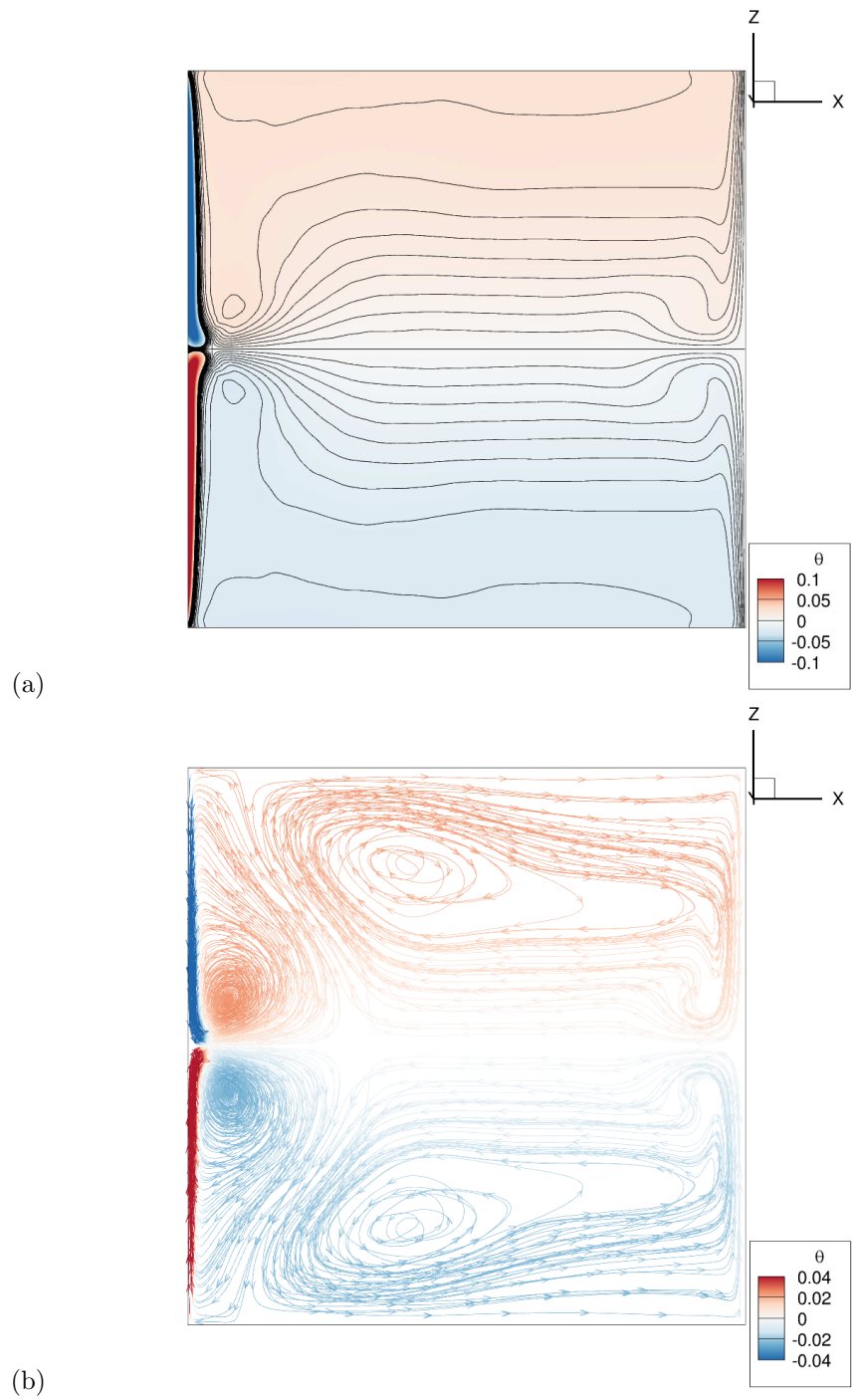


FIGURE 5.9 – Champ de température moyen avec les lignes d'isothermes dans le plan  $y = 0.5$  (a) et lignes de courant du champ moyen, coloriées par la température (b).

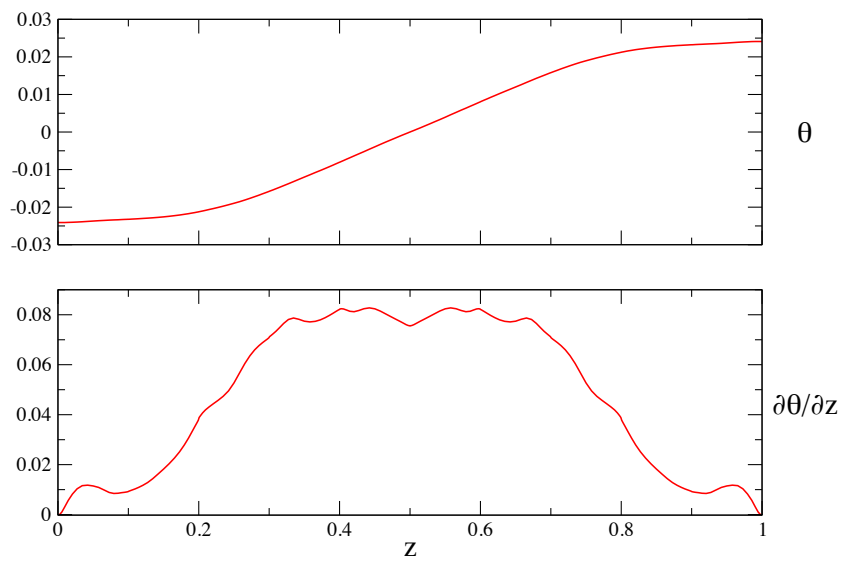


FIGURE 5.10 – Evolution de la température moyenne et gradient de la température moyenne selon l'axe vertical, sur la ligne  $x = 0.5$  et  $y = 0.5$

## 5.2.2 Influence du rayonnement sur l'écoulement

### Etude d'un champ instantané

La figure 5.11 montre le champ de la composante verticale  $w$  de la vitesse dans le plan  $z = 0.5$  et les isosurfaces de  $w$ , coloriées par la température, pour  $w = \pm 0.1$ . De la même manière que dans le cas sans rayonnement, on observe la présence de panaches d'air chaud ascendants et froid descendants au niveau de l'interface entre le radiateur et la fenêtre. Cependant, le mouvement du fluide entre les moitiés haute et basse de la cavité n'est pas limité à une région proche de la paroi  $x = 0$ , comme dans le cas sans rayonnement, mais se produit dans tout le plan  $z = 0.5$ . Les isosurfaces de  $w$  montrent également des structures plus éloignées de la paroi.

Les figures 5.12 et 5.13 présentent des surfaces isothermes pour les mêmes valeurs de la température que les figures 5.4 et 5.5. Le champ de température apparaît largement différent lorsque le rayonnement est pris en compte : si les sous-figures (a) et (b) sont relativement semblables, la sous-figure (c) ne montre plus des panaches atteignant le plafond et le plancher de la cavité, mais qui restent concentrés non loin de l'interface. Il en va de même pour la sous-figure (d) : les nappes horizontales des isothermes disparaissent avec le rayonnement et ne sont plus présentes que près de la paroi  $x = 0$ . La figure 5.14 montre le champ de température instantané dans le plan  $y = 0.5$  : contrairement au cas sans rayonnement, les zones chaude et froide du fluide sont inversées : ici, le fluide chaud est positionné dans la moitié inférieure de la cavité et le fluide froid est maintenu dans la moitié supérieure.

Cette modification majeure du champ de température dans la cavité est due au rayonnement du radiateur vers le gaz et du gaz vers la fenêtre. La figure 5.15 présente le champ de puissance radiative  $\mathcal{P}^{\text{rad}} = \mathcal{P}_a - \mathcal{P}_e$  et la figure 5.16 présente des isosurfaces de puissance radiative dans la cavité : ces deux figures font apparaître des zones de forts échanges radiatifs au voisinage de la paroi  $x = 0$ . Dans la moitié inférieure, on trouve une très fine couche de gaz émettrice (en bleu) le long de la paroi. Hormis celle-ci, le gaz de la moitié inférieure absorbe fortement le rayonnement provenant du radiateur, ce qui contribue à le réchauffer. De manière analogue, dans la moitié supérieure, le gaz émet fortement du rayonnement vers la fenêtre, ce qui a pour effet de le refroidir. Loin de la paroi  $x = 0$ , la puissance radiative diminue fortement mais le transfert reste présent ; les isosurfaces de puissance radiative forment alors des nappes verticales dans la cavité.



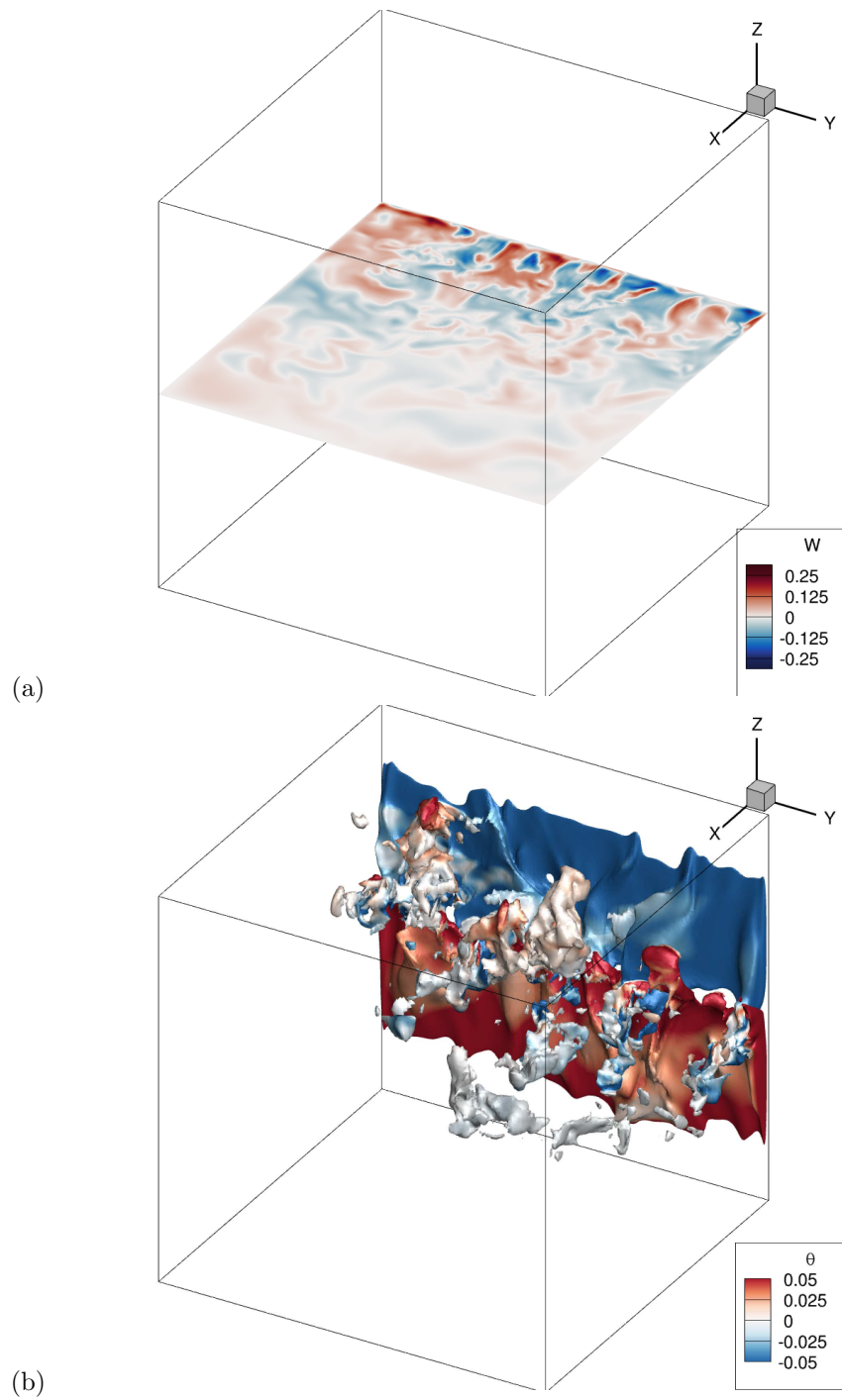


FIGURE 5.11 – Composante verticale de la vitesse  $w$  dans le plan  $z=0.5$  (a) et isosurfaces de  $w = \pm 0.1$ , coloriées par la température (b).

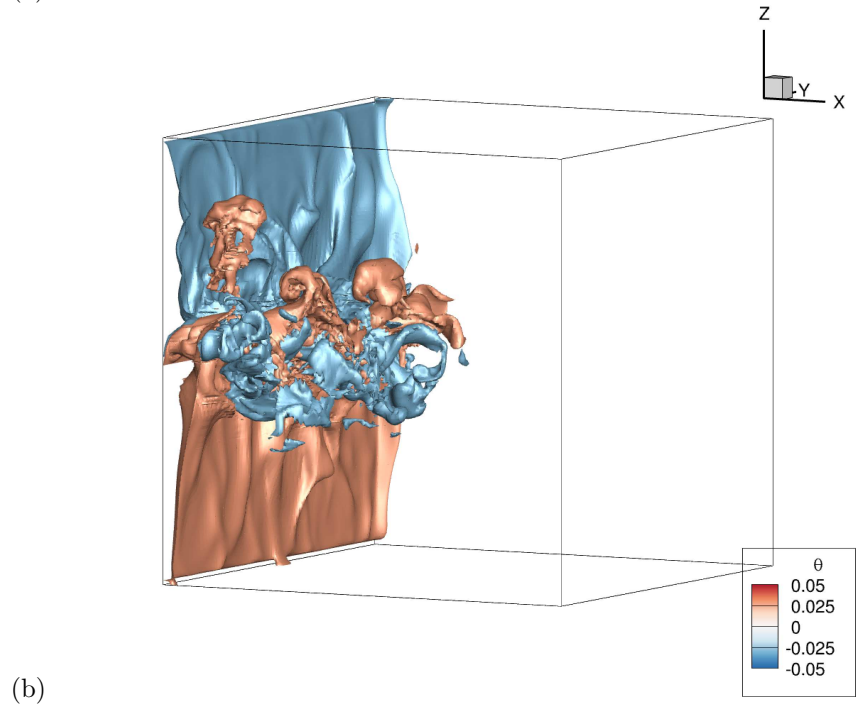
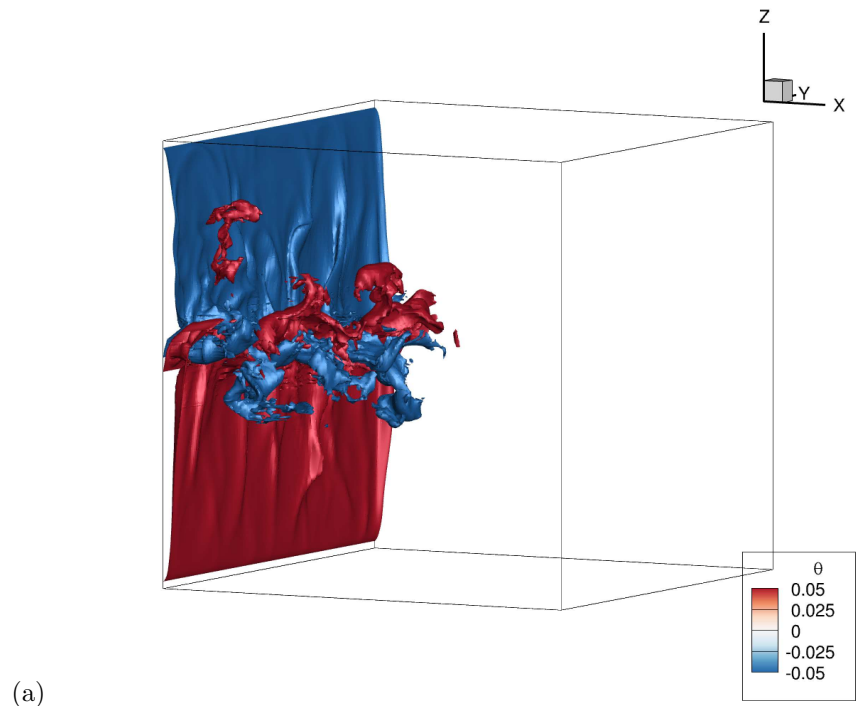


FIGURE 5.12 – Isosurfaces de température :  $\theta = \pm 0.05$  (a),  $\theta = \pm 0.03$  (b).

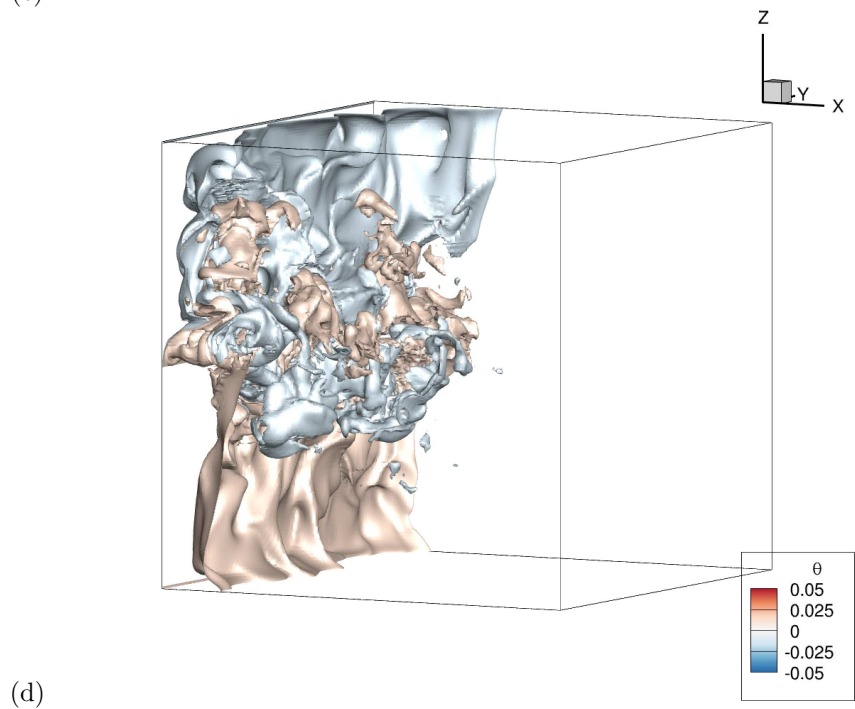
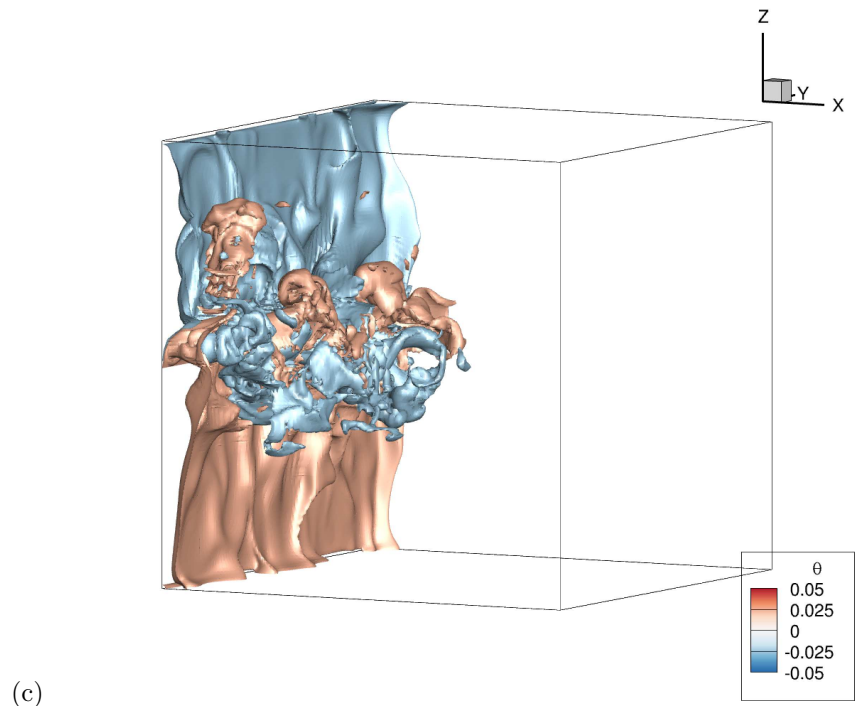


FIGURE 5.13 – Isosurfaces de température :  $\theta = \pm 0.025$  (c),  $\theta = \pm 0.015$  (d).

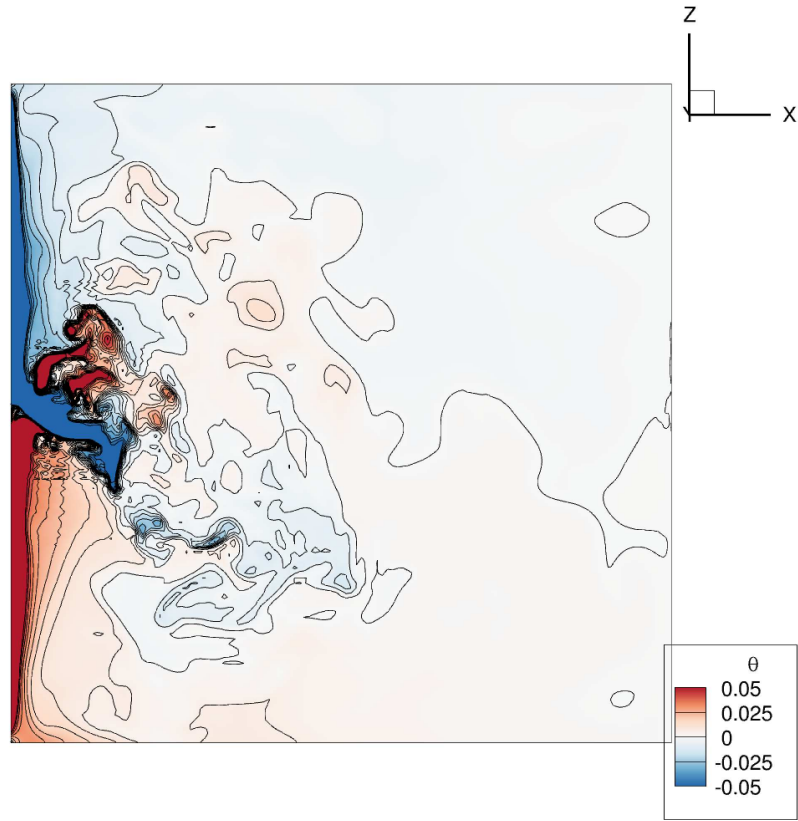


FIGURE 5.14 – Champ de température dans le plan  $y=0.5$ , avec les lignes d'isothermes.

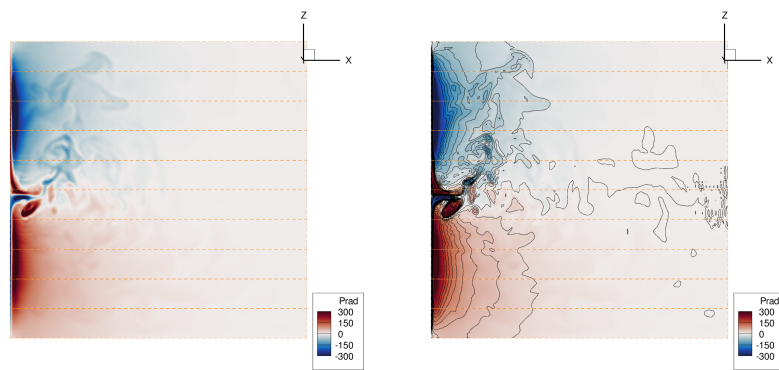


FIGURE 5.15 – Puissance radiative  $\mathcal{P}^{\text{rad}}$  dans le plan  $y=0.5$ . Sur la figure de droite, les lignes d'isovaleur ont été ajoutées.

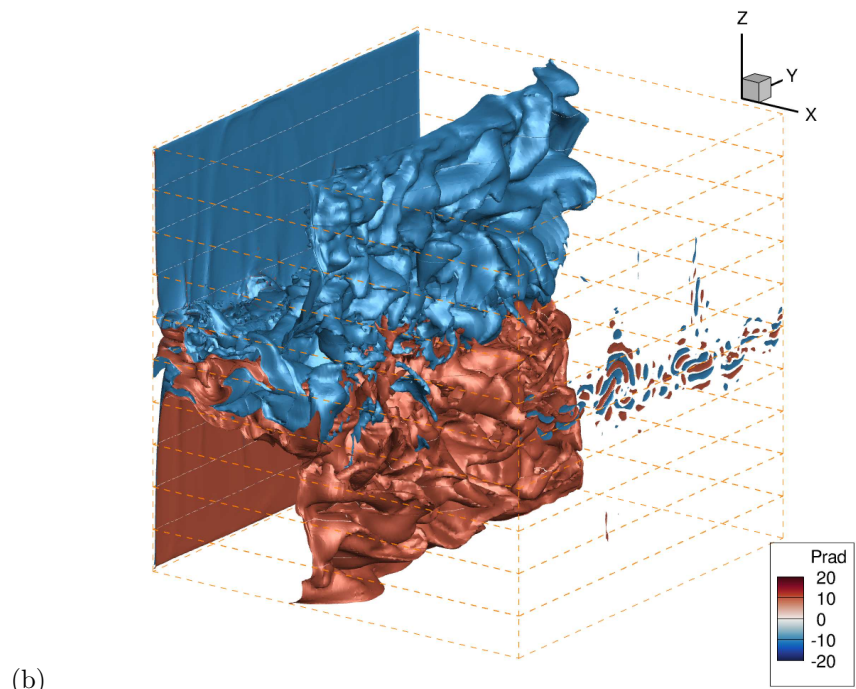
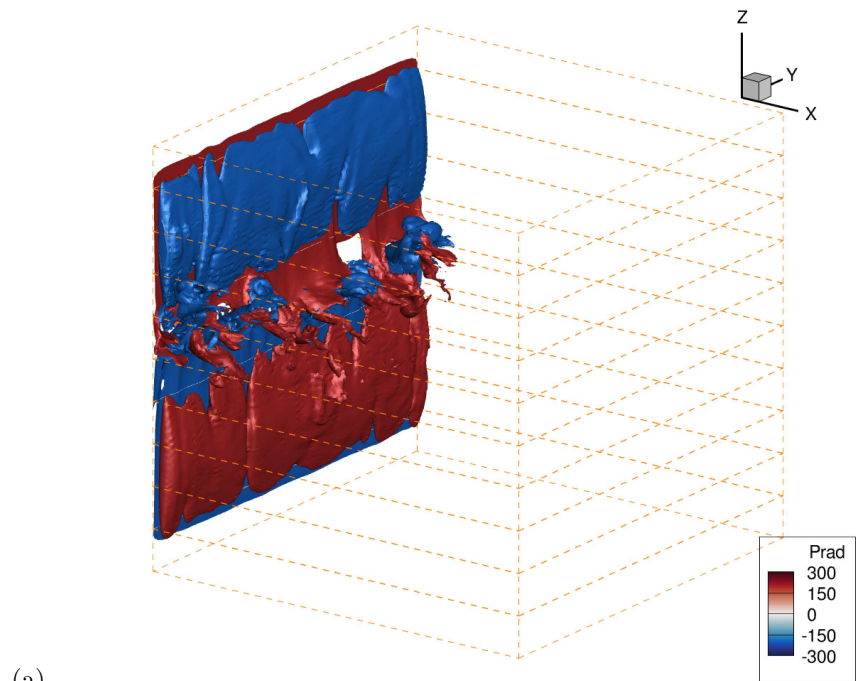


FIGURE 5.16 – Isosurfaces de puissance radiative :  $\mathcal{P}^{\text{rad}} = \pm 200$  (a),  $\mathcal{P}^{\text{rad}} = \pm 10$  (b).

La figure 5.17 montre les lignes de courant instantanées : si la présence des panaches dans la zone voisine de  $x = 0, z = 0.5$  reste manifeste, on n'observe plus la structure d'écoulement en deux moitiés distinctes, que l'on retrouvait dans le cas sans rayonnement. L'écoulement semble beaucoup plus chaotique et le fluide semble passer d'une moitié à l'autre de la cavité dans tout le plan médian  $z = 0.5$ .

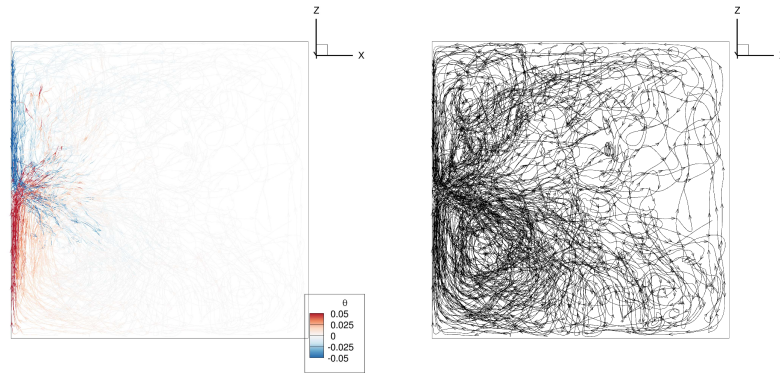


FIGURE 5.17 – Lignes de courant du champ instantané, coloriées selon la température (gauche) et non coloriées (droite), vues dans le plan  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ .

La présence de rayonnement fait également évoluer les zones de vorticité du fluide : la figure 5.18 présente les isosurfaces du critère  $Q$ , coloriées par la température, avec la même valeur du critère  $Q$  que dans la figure 5.8 du cas sans rayonnement. La zone de vorticité est plus étendue dans le cas rayonnant et est moins liée au champ de température : même des zones de température proche de la valeur moyenne présentent un critère  $Q$  notable.

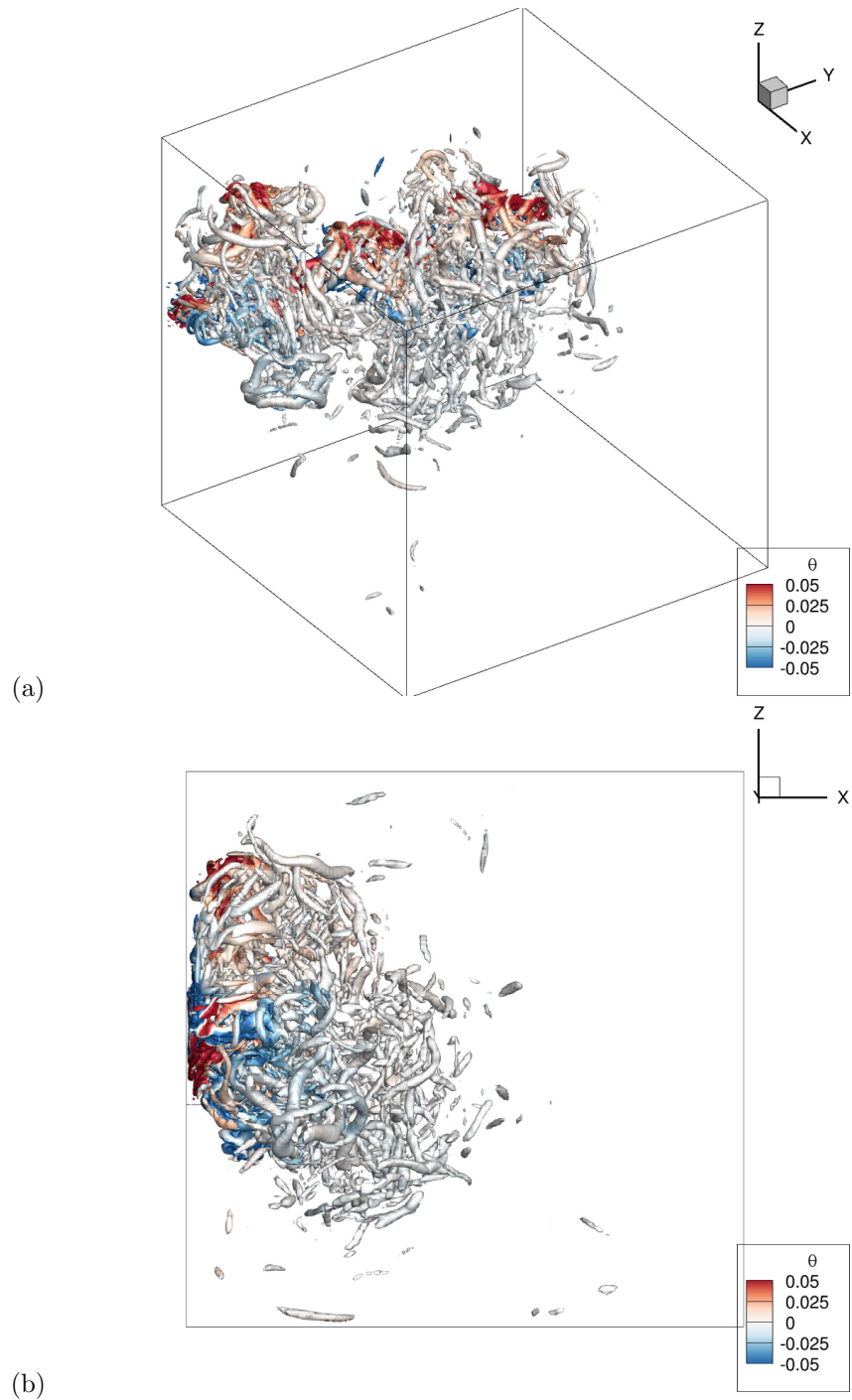


FIGURE 5.18 – Isosurface du critère  $Q$ ,  $Q = 10$ . Vue tridimensionnelle (a) et vue bidimensionnelle dans le plan  $(e_x, e_z)$ .

### Etude du champ moyen

De la même manière que dans le cas sans rayonnement, le champ moyen est obtenu par la moyenne statistique de l'écoulement sur une période d'intégration  $\Delta t^+ = 700$  et en utilisant les quatre symétries du problème. La figure 5.19 présente le champ de température moyen dans le plan  $y = 0.5$ .

La figure 5.19 montre le champ de température moyen dans le plan  $y = 0.5$ . Pour la figure (a), les valeurs de la palette de couleurs et des isothermes affichés sont les mêmes que pour la figure 5.9 dans le cas sans rayonnement. Le champ de température est beaucoup plus homogène dans la cavité lorsque le rayonnement des parois et du gaz est pris en compte. La sous-figure (b) présente le même champ de température moyen, avec une palette de couleur plus resserrée autour de  $\theta = 0$ ; le rayonnement de la cavité entraîne une répartition opposée de la température par rapport au cas sans rayonnement. L'air dans le bas de la cavité est maintenu chaud par le rayonnement du radiateur, et l'air du haut reste froid en raison du rayonnement émis vers la fenêtre.

La figure 5.20 montre le champ de température et son gradient le long de la ligne verticale  $x = 0.5$ ,  $y = 0.5$  : contrairement au cas sans rayonnement, la température décroît avec la hauteur. Le gradient est, en valeur absolue, nettement plus faible au centre de la cavité : s'il est en moyenne de 0.08 pour  $0.25 < z < 0.75$  dans le cas sans rayonnement, il n'est que de 0.0052 dans le cas rayonnant.

La figure 5.21 présente le champ de puissance radiative moyen dans le plan  $y = 0.5$  : le gaz dans la moitié haute est majoritairement émetteur vers la fenêtre, et le gaz en partie basse absorbe le rayonnement provenant du radiateur. On observe également de fines couches de gaz émettrice, proche du radiateur, et absorbante, le long de la fenêtre.



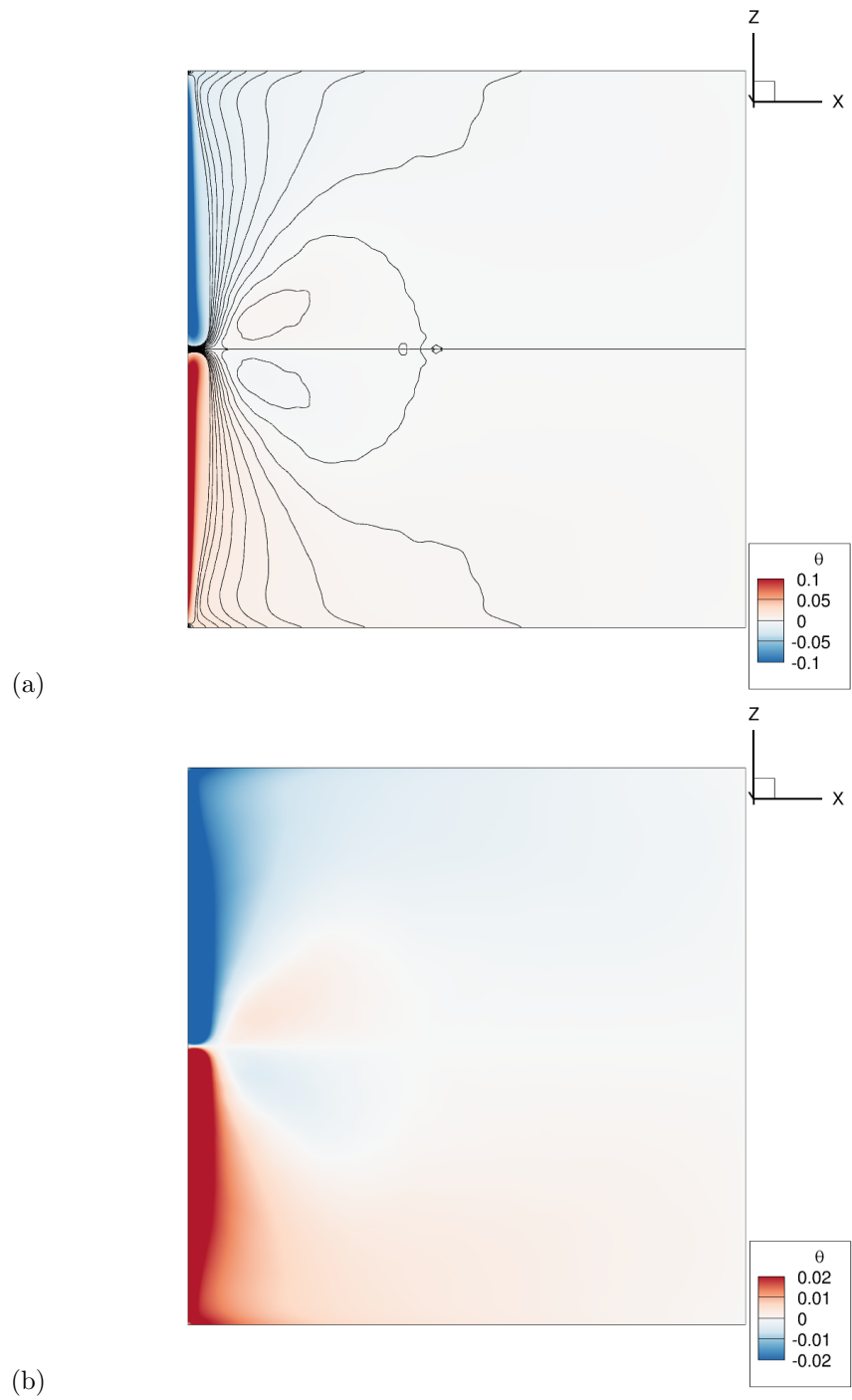


FIGURE 5.19 – Champ de température moyen avec les lignes d'isotherme dans le plan  $y = 0.5$  (a) et (b). Sur la figure (b), la palette de couleurs a été resserrée autour de la valeur moyenne.

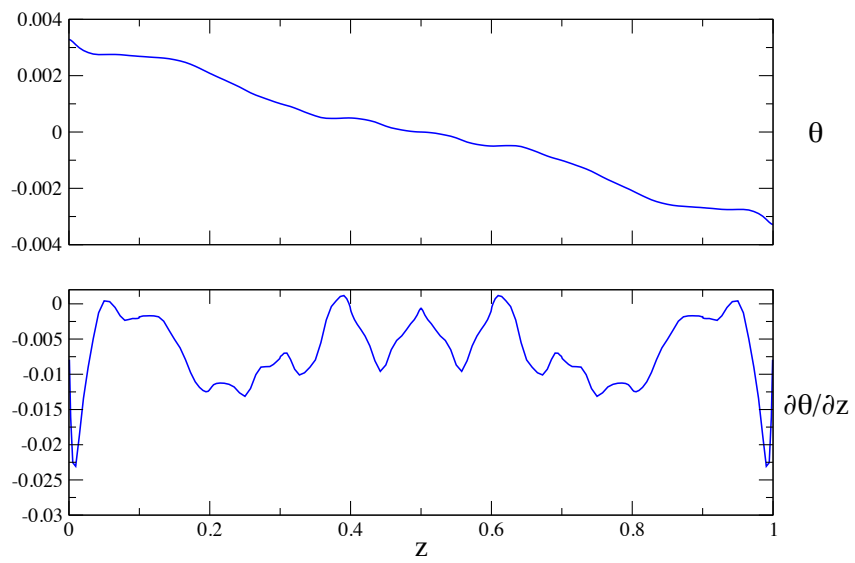


FIGURE 5.20 – Evolution de la température moyenne et gradient de la température moyenne selon l'axe vertical, sur la ligne  $x = 0.5$  et  $y = 0.5$

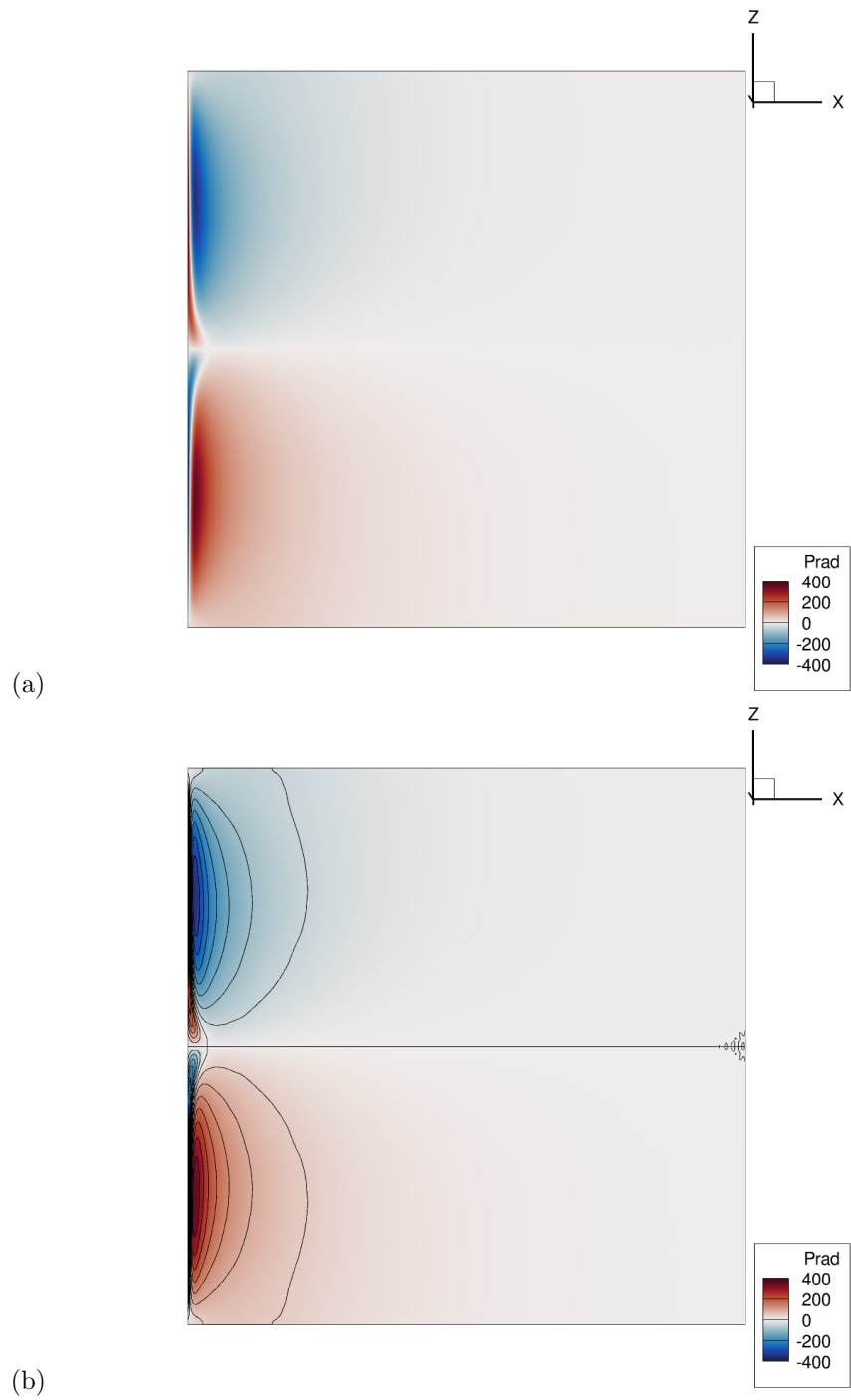


FIGURE 5.21 – Puissance radiative moyenne dans le plan  $y = 0.5$  (a) et (b). Sur la figure (b), les lignes d'isovaleurs ont été ajoutées.

### 5.2.3 Nombre de Nusselt aux parois

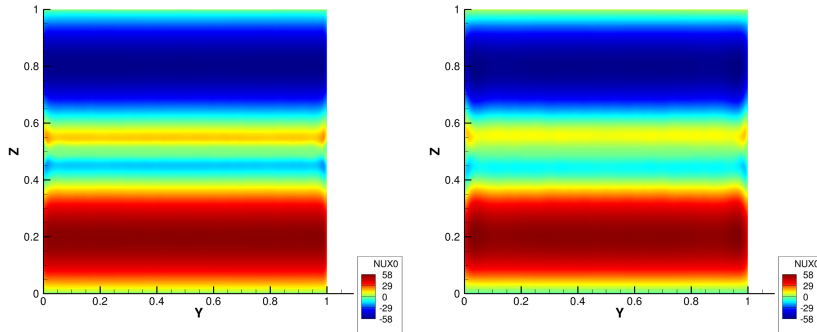


FIGURE 5.22 – Nombre de Nusselt moyen à la paroi  $x = 0$  en configuration RSF, dans le cas sans rayonnement (gauche) et rayonnement (droite).

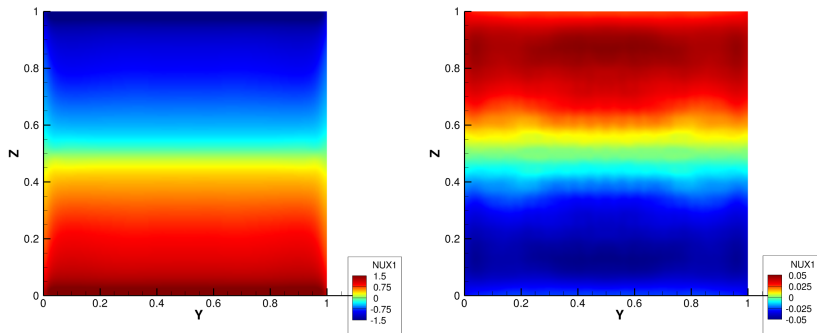


FIGURE 5.23 – Nombre de Nusselt moyen à la paroi  $x = 1$  en configuration RSF, dans le cas sans rayonnement (gauche) et rayonnement (droite).

La figure 5.22 montre les champs du nombre de Nusselt moyen à la paroi  $x = 0$ , dans les cas sans rayonnement et rayonnant ; les profils verticaux correspondant peuvent être trouvés dans la figure 5.24. Le champ de nombre de Nusselt ressemble au champ de température, avec néanmoins quelques différences. Le profil vertical a un aspect rappelant le profil sinusoïdal de la température ; cependant, la localisation des extrema est différente ( $z \in \{0.2, 0.8$  au lieu de  $z \in \{0.25, 0.75$  pour la température), et on observe une oscillation autour du plan horizontal médian.

Cette oscillation peut s'expliquer de la manière suivante : considérons l'air longeant la fenêtre de haut en bas. D'après les lignes de courant des figures 5.7 et 5.17, il s'agit principalement d'air chaud, expulsé de la moitié inférieure de la cavité par les panaches issus du radiateur, et qui est ramené contre la fenêtre

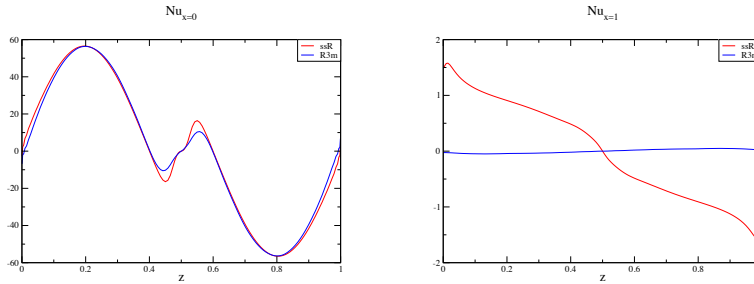


FIGURE 5.24 – Evolution verticale du nombre de Nusselt moyen aux parois  $x = 0$  (gauche) et  $x = 1$  (droite), en configuration RSF, pour  $y = 0.5$ , dans le cas sans rayonnement (rouge) et rayonnement (bleu).

par l'appel d'air créé en raison des panaches d'air froid expulsés vers le bas. Cet air est plus froid pour un gaz rayonnant que transparent (la figure 5.15 montre que l'air dans cette zone rayonne fortement vers la fenêtre, ce qui contribue à le refroidir), mais demeure dans les deux cas plus chaud que la fenêtre et se refroidit à son contact (nombre de Nusselt négatif). L'air descend donc le long de la fenêtre en se refroidissant ; en raison du profil sinusoïdal de température, arrivé proche de l'interface  $z = 0.5$ , le gaz est alors plus froid que la paroi, ce qui entraîne un changement de signe du nombre de Nusselt. Le même phénomène se produit en miroir le long du radiateur.

Dans le cas rayonnant, les figures 5.15 et 5.21 font apparaître une fine couche de gaz le long de la fenêtre, qui absorbe le rayonnement provenant du reste de la moitié supérieure de la cavité. Cette couche de gaz s'épaissit proche de  $z = 0.5$ , ce qui contribue à réchauffer le fluide dans cette région ; pour cette raison, l'écart de température avec la paroi est moins important qu'en l'absence de rayonnement. Cela explique que l'amplitude des oscillations du nombre de Nusselt dans cette région est moins grande lorsque le rayonnement est pris en compte.

La figure 5.23 présente les champs du nombre de Nusselt moyen à la paroi  $x = 1$ , dans les cas sans rayonnement et rayonnant ; les profils verticaux correspondant peuvent être trouvés dans la sous-figure de droite de la figure 5.24. Deux effets peuvent être principalement notés lorsque le rayonnement est pris en compte.

Le plus notable est l'inversion du signe du nombre de Nusselt entre les moitiés haute et basse de la paroi : dans le cas sans rayonnement, le fluide cède de la chaleur en moitié haute et en gagne en moitié basse, alors que c'est l'inverse dans le cas rayonnant. Cela est dû à la modification du champ de température causée par le rayonnement : si, en l'absence de rayonnement, le fluide chaud se situe dans la moitié haute de la cavité et se refroidit donc au contact de la paroi  $x = 1$  (l'inverse se produisant en moitié basse), les échanges radiatifs entre le gaz et la fenêtre / le radiateur permettent de maintenir la moitié haute de la cavité plus froide que la moitié basse. Dans le cas rayonnant, au contact de

la paroi  $x = 1$ , le fluide se réchauffe donc au contact de la moitié haute et se refroidit au contact de la moitié basse.

Un autre effet est la grande diminution de l'amplitude du nombre de Nusselt à la paroi avec la prise en compte du rayonnement. En effet, le rayonnement homogénéise grandement la température du fluide dans la cavité, ce qui réduit fortement les échanges conducto-convectifs avec la paroi  $x = 1$ .

#### 5.2.4 Etude à $Ra = 10^{10}$

Une étude a été entamée dans la configuration RSF pour les cas ssR et R3m, pour un nombre de Rayleigh  $Ra = 10^{10}$ , afin de se rapprocher encore des conditions ayant cours dans l'habitation (pour une pièce de taille caractéristique  $L = 3m$ , ce nombre de Rayleigh correspond à un écart de température entre le maximum du profil de température du radiateur et le minimum du profil de la fenêtre  $\Delta T \simeq 4K$ ).

La cavité est décomposée, pour ces deux simulations, en dix domaines de calcul, et le nombre de mode Tchebychev utilisés dans chaque directions pour représenter les solutions est, pour chaque domaine,  $N_x \times N_y \times N_z = 240 \times 300 \times 40$  dans le cas ssR et  $N_x \times N_y \times N_z = 240 \times 360 \times 40$  dans le cas R3m. En raison de la taille du maillage utilisé, le temps de calcul requis pour ces simulations est très élevé et n'a pas permis de les conduire sur un temps d'intégration suffisant pour observer les champs moyens ( $\Delta t^+ = 26,4$  dans les deux cas). Cependant, les résultats observables à partir des champs instantanés montrent une structure de l'écoulement différente de ce qui a été observé à  $Ra = 10^9$ . Ces résultats préliminaires sont donc encourageants pour poursuivre l'étude à  $Ra = 10^{10}$  afin de mieux comprendre les phénomènes rencontrés à très haut nombre de Rayleigh.

Ce paragraphe présente donc les conclusions tirées à partir des champs instantanés obtenus, en comparant côte-à-côte les cas ssR et R3m.

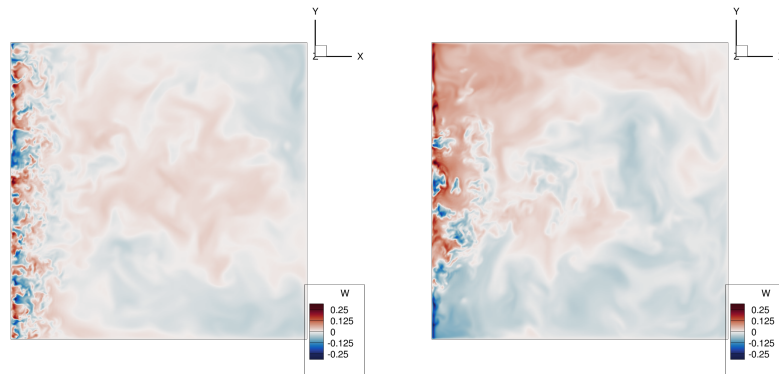


FIGURE 5.25 – Composante verticale de la vitesse  $w$  dans le plan  $z = 0.5$  dans les cas sans rayonnement (gauche) et rayonnant (droite).

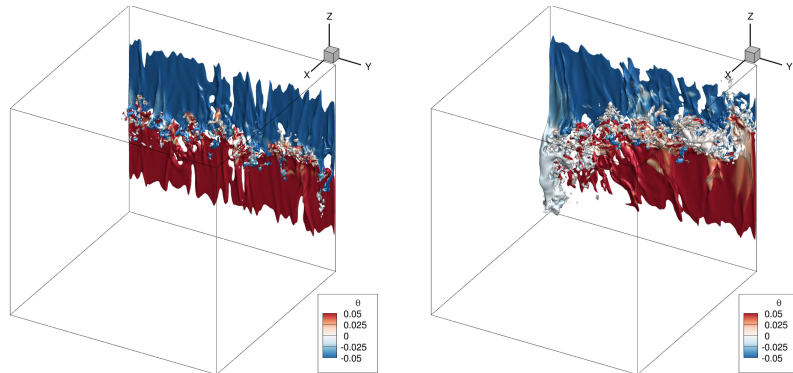


FIGURE 5.26 – Isosurfaces de  $w = \pm 0.1$ , coloriées par la température, dans les cas sans rayonnement (gauche) et rayonnant (droite).

Les figures 5.25 et 5.26 présentent respectivement les champs de la composante verticale de la vitesse  $w$  dans le plan médian  $z = 0.5$  ainsi que les isosurface de  $w$ , coloriées par la température. Comme à  $Ra = 10^9$ , la zone située au voisinage de la paroi  $x = 0$  est une zone d'interface où les flux ascendant et descendant, provenant du radiateur et de la fenêtre, se rencontre, provoquant des structures en panache propulsant l'air alternativement vers les moitiés supérieure et inférieure de la cavité. Comme pour la plupart des structures en convection naturelle, la taille caractéristique des panaches diminue avec l'augmentation du nombre de Rayleigh.

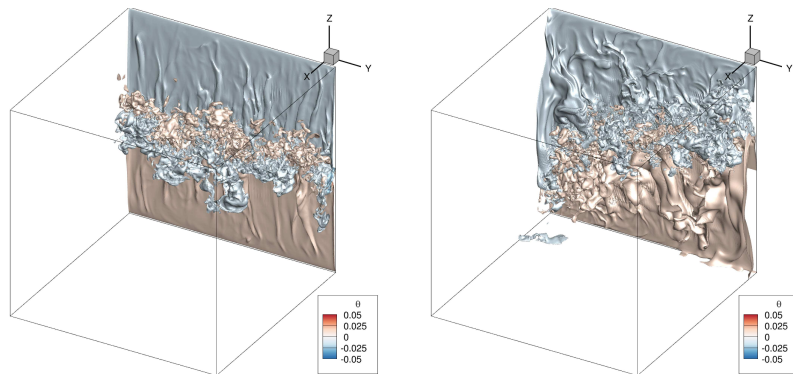


FIGURE 5.27 – Isosurfaces de la température  $\theta = \pm 0.015$ , dans les cas sans rayonnement (gauche) et rayonnant (droite).

Cependant, des différences majeures apparaissent, par rapport aux simulations à  $Ra = 10^9$ . Dans le cas ssR, le transfert de fluide entre les deux moitiés de la cavité n'est plus limité au voisinage de la paroi mais se produit dans toute la cavité. La différence la plus notable se trouve dans le cas R3m : on voit apparaître une claire antisymétrie du champ de  $w$  selon le plan  $y = 0.5$ , avec une moitié de la

cavité où le fluide est majoritairement ascendant et l'autre où il est descendant. Du point de vue du moment angulaire, il est à noter que la composante selon  $\mathbf{e}_x$  du moment angulaire est de moyenne spatiale non nulle dans le cas R3m, alors qu'elle est de moyenne nulle dans toutes les autres simulations RSF : le fluide est légèrement en rotation autour de l'axe  $\mathbf{e}_x$ . Il pourrait être intéressant, en poursuivant la simulation dans le temps, d'observer si des phénomènes de réorientation se produisent et si le sens de rotation de l'écoulement s'inverse.

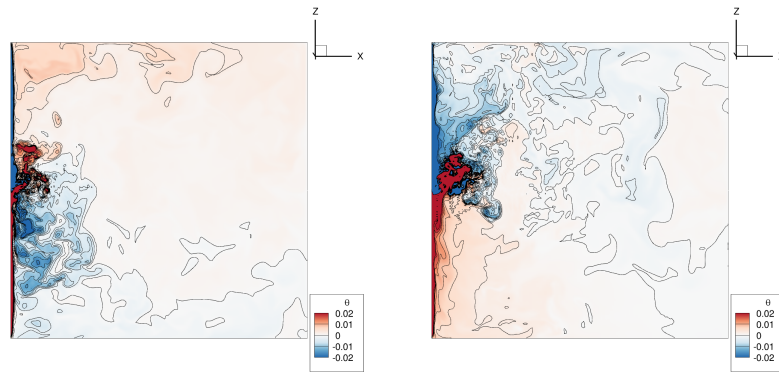


FIGURE 5.28 – Champ de température dans le plan  $y = 0.5$ , dans les cas sans rayonnement (gauche) et rayonnant (droite).

Cette antisymétrie du champ de vitesse dans le cas R3m entraîne également une asymétrie dans le champ de température. Les figures 5.27 et 5.28 montrent respectivement des isosurfaces de la température et le champ de température dans le plan vertical médian  $y = 0.5$ . Si les isothermes de la figure 5.27 ont les mêmes valeurs que pour la figure 5.13 (c), la palette de couleurs de la figure 5.28 a été resserrée autour de la valeur médiane par rapport à celle des figures 5.6 et 5.14, le champ de température étant beaucoup plus homogène à  $Ra = 10^{10}$ .

En l'absence de rayonnement, contrairement à ce qui se produit à  $Ra = 10^9$ , les panaches ont une relativement faible amplitude verticale et ne s'étendent pas jusqu'au plafond et au plancher, mais restent cantonnés à une zone proche du plan horizontal médian. De plus, on n'observe plus la forme quasi horizontale des surfaces isothermes loin de la paroi  $x = 0$ ; le champ de température de toute la cavité est fortement instationnaire.

Pour le cas R3m, deux champs de température additionnels ont été représentés dans la figure 5.29, dans les plans  $y = 0.1$  et  $y = 0.9$ , soit dans les plans où le fluide est principalement descendant et ascendant respectivement. Le champ de température suit logiquement la dissymétrie du champ de  $w$  et la moitié de la cavité où le fluide descend est plus froide que celle où le fluide monte.

Un autre phénomène intéressant qui se produit à  $Ra = 10^{10}$ , dans le cas R3m, est la perte relative de la capacité du radiateur et de la fenêtre à maintenir chaude / froide la température de l'air loin de la paroi, par rayonnement. A  $Ra = 10^9$ , les transferts radiatifs gaz-fenêtre et gaz-radiateur sont suffisants



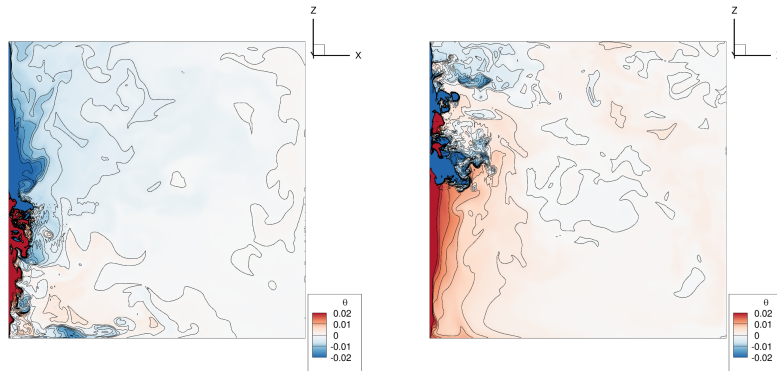


FIGURE 5.29 – Champ de température dans les plan  $y = 0.1$  et  $y = 0.9$ , dans le cas R3m.

pour maintenir la moitié inférieure de la cavité chaude et la moitié supérieure froide, malgré le déséquilibre engendré par les forces de flottabilité dans cette configuration. Il semblerait qu'à  $Ra = 10^{10}$  cet effet du rayonnement soit relativement moins important par rapport à la convection (pour rappel, dans le bilan d'énergie (1.25), le terme source radiatif est pénalisé par un facteur  $1/\sqrt{Ra}$ , ce qui n'est pas le cas du terme convectif). En effet, dans la figure 5.28 et, dans une moindre mesure, dans la figure 5.29, le rayonnement semble capable de maintenir chaud le gaz dans la moitié inférieure de la cavité, et froid le gaz situé en moitié supérieure, mais seulement sur une certaine distance. Proche de la paroi  $x = 1$ , le champ de température semble retrouver son équilibre naturel, avec le gaz chaud au dessus du gaz froid.

Il serait intéressant, en poursuivant cette étude, de tenter de déterminer la "distance efficace" du rayonnement et son lien avec le nombre de Rayleigh, distance jusqu'à laquelle les transferts radiatifs sont capables de contrebalancer l'homogénéisation du fluide due à la convection entraînée par les forces de flottabilité.

Pour finir la présentation de ces résultats préliminaires à  $Ra = 10^{10}$ , la figure 5.30 présente la cartographie des nombres de Nusselt à la paroi  $x = 0$ , dans les deux cas étudiés. Si l'allure du champ de Nu dans le cas ssR ressemble, aux amplitudes près, fortement à ce qui était obtenu à  $Ra = 10^9$ , le champ de Nu dans le cas R3m est fortement modifié par la dissymétrie du champ de température. A  $Ra = 10^9$ , la présence du rayonnement n'a que peu d'influence sur le nombre de Nusselt à la paroi  $x = 0$ . Il pourrait être intéressant de voir, à l'étude des champs moyens, dans quelle mesure cette nouvelle structure d'écoulement se répercute sur le flux à la paroi.

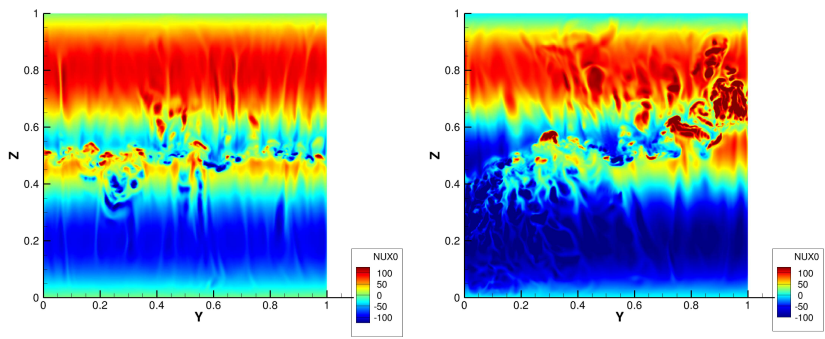


FIGURE 5.30 – Cartographie du nombre de Nusselt à la paroi  $x = 0$ , dans les cas sans rayonnement (gauche) et rayonnant (droite).

## 5.3 Radiateur positionné à l’opposé de la fenêtre

L’écoulement en configuration ROF est beaucoup plus simple à décrire et se rapproche de ce qui peut se passer en cavité différentiellement chauffée. L’analyse des champs instantanés n’apporte pas spécialement d’information par rapport à celle des champs moyens, aussi seuls les champs moyens seront étudiés. Les champs moyens ont été obtenus en prenant la moyenne statistique de l’écoulement sur une durée d’intégration  $\Delta t^+ = 400$ . On rappelle également que les résultats qui suivent ont été obtenus à  $Ra = 10^9$  et que le maillage utilisé est de  $200 \times 200 \times (20 \times 10)$  points.

A noter également que cette configuration se rapproche d’une des configurations étudiées par Al-Rashed *et al.* (2017). Cette étude se limitait néanmoins à des nombres de Rayleigh beaucoup plus faibles ( $10^3 < Ra < 10^6$ ) et les profils de température étaient uniformes sur les demi-parois chaude et froide (et non sinusoïdal comme ici).

### 5.3.1 Champs de température

La figure 5.31 présente les champs de température dans le plan  $y = 0.5$  et les lignes d’isothermes associées, pour les cas sans rayonnement et rayonnement (3 mètres), et la figure 5.32 montre les profils verticaux de température au centre de la cavité pour les deux cas. La prise en compte du rayonnement dans la cavité conduit à l’obtention d’un champ de température radicalement différent de celui observé lorsque le gaz est transparent.

Dans le cas sans rayonnement, la cavité se scinde schématiquement en deux moitiés supérieure chaude / inférieure froide quasi isothermes, avec une transition quasi linéaire entre les deux, entre les plans  $z \simeq 0.4$  et  $z \simeq 0.6$ . Lorsque le rayonnement est pris en compte, la température est en revanche beaucoup plus homogène dans la cavité : la température est proche de la valeur moyenne dans le cœur, avec une fine couche d’air chaud en partie haute et froide en partie basse. Sans rayonnement, la stratification thermique est donc très forte au milieu de la cavité, avec un plateau central approchant 0.15, tandis que le rayonnement la rend très proche de zéro, avec néanmoins des pics aux extrémités.

### 5.3.2 Structure de l’écoulement

Le rayonnement a également un effet notable sur la structure de l’écoulement et le champ de vitesse. La figure 5.33 montre, dans le plan  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ , les lignes de courant du champ moyen, dans les cas non rayonnant et rayonnant (3 mètres). Dans les deux cas, il y a un mouvement circulaire de l’air dans la cavité, qui est refroidi par la fenêtre et descend au niveau de la paroi  $x = 0$ , traverse la cavité dans sa moitié inférieure, est réchauffé par le radiateur et propulsé dans la moitié supérieure, avant de rejoindre la fenêtre par la moitié supérieure.

En l’absence de rayonnement, le flux d’air longeant les parois  $x = 0$  et  $x = 1$  se décolle rapidement de la paroi en dessous de la fenêtre / au dessus du radiateur et se dirige vers l’intérieur de la cavité, ce qui entraîne la formation de zones

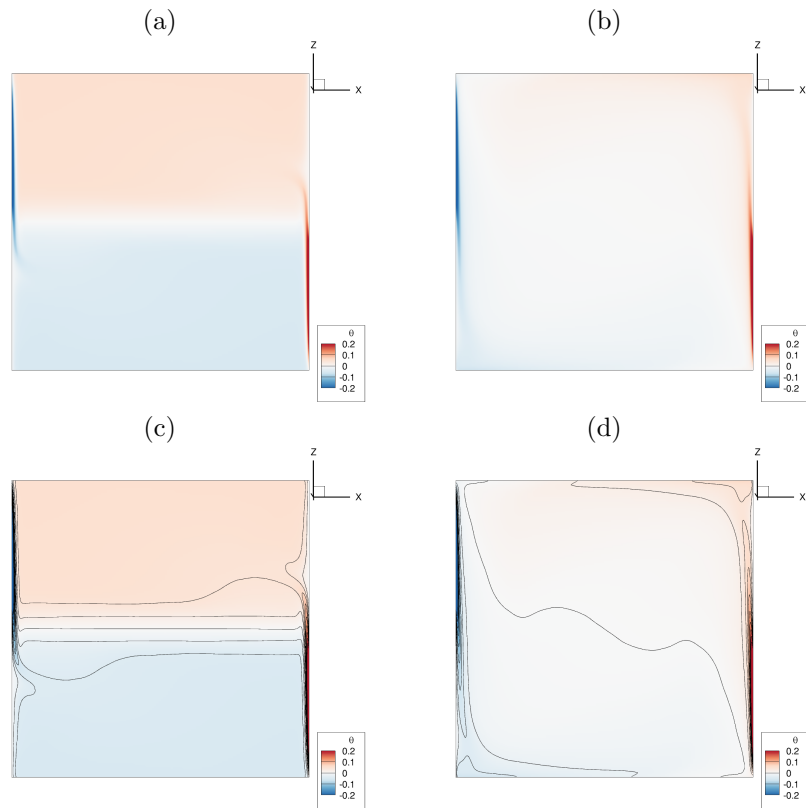


FIGURE 5.31 – Champ de température moyen dans le plan  $y = 0.5$ . (a) et (c) : cas sans rayonnement ; (b) et (d) : cas rayonnant (3 mètres). Sur les figure (c) et (d), les lignes d’isothermes ont été ajoutées.

de recirculation dans les coins ( $x \sim 0, z \sim 0$  et  $x \sim 1, z \sim 1$ ). Le mouvement de l’air dans la cavité apparaît alors schématiquement comme deux couches de fluide se déplaçant horizontalement, chacune dans sa moitié de cavité.

En revanche, lorsque le gaz est rayonnant, la couche limite de fluide descendante le long de la fenêtre et ascendante le long du radiateur ne se décolle que très tardivement de la paroi et ne crée qu’une très faible zone de recirculation dans les coins. Le mouvement moyen du fluide au centre de la cavité est circulaire, qui épouse peu-à-peu les contours de la cavité à mesure qu’il s’en rapproche.

L’analyse des profils de vitesse dans la cavité permet de comprendre ce phénomène de décollement de couche limite. La figure 5.34 représente la composante selon  $e_x$  de la vitesse le long de la ligne verticale centrale de la cavité  $x = 0.5, y = 0.5$ . Les deux profils ont une allure similaire, avec un pic de vitesse atteint au voisinage des parois horizontales et une vitesse au centre nulle, mais

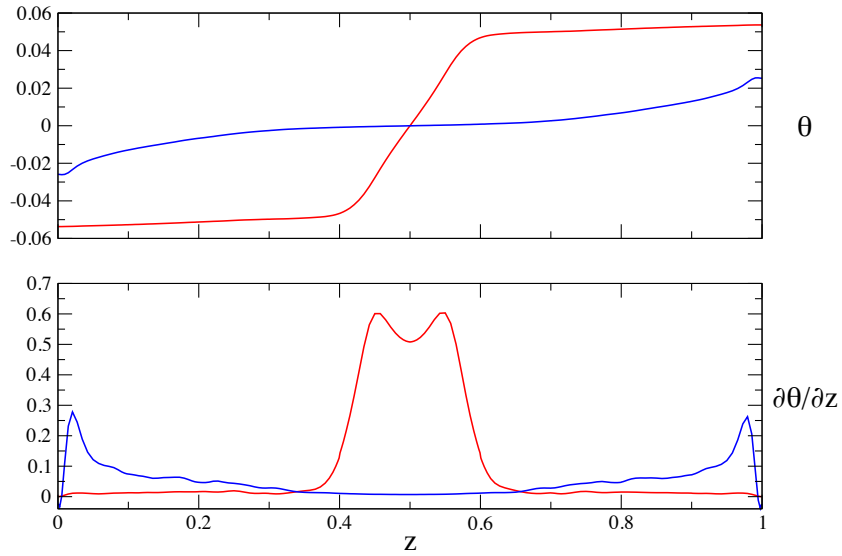


FIGURE 5.32 – Evolution de la température moyenne et gradient de la température moyenne selon l’axe vertical, sur la ligne  $x = 0.5$  et  $y = 0.5$ , pour les cas sans rayonnement (en rouge) et rayonnement 3 mètres (en bleu).

les valeurs sont beaucoup plus élevées dans le cas rayonnant. Les recirculations présentes dans le cas sans rayonnement ralentissent le fluide et limitent son mouvement.

La figure 5.35 montre les profils horizontaux de la composante selon  $e_z$  de la vitesse, le long des lignes  $y = 0.5$ ,  $z \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$ , au voisinage de la paroi  $x = 0$ . En l’absence de rayonnement, le mouvement vertical du fluide est concentré dans une fine couche proche de la paroi, avec un mouvement restreint au plan horizontal hors de cette couche limite. L’ajout du rayonnement, s’il n’augmente que très légèrement le maximum de vitesse dans la couche limite, entraîne également un mouvement vertical du fluide hors de la couche limite.

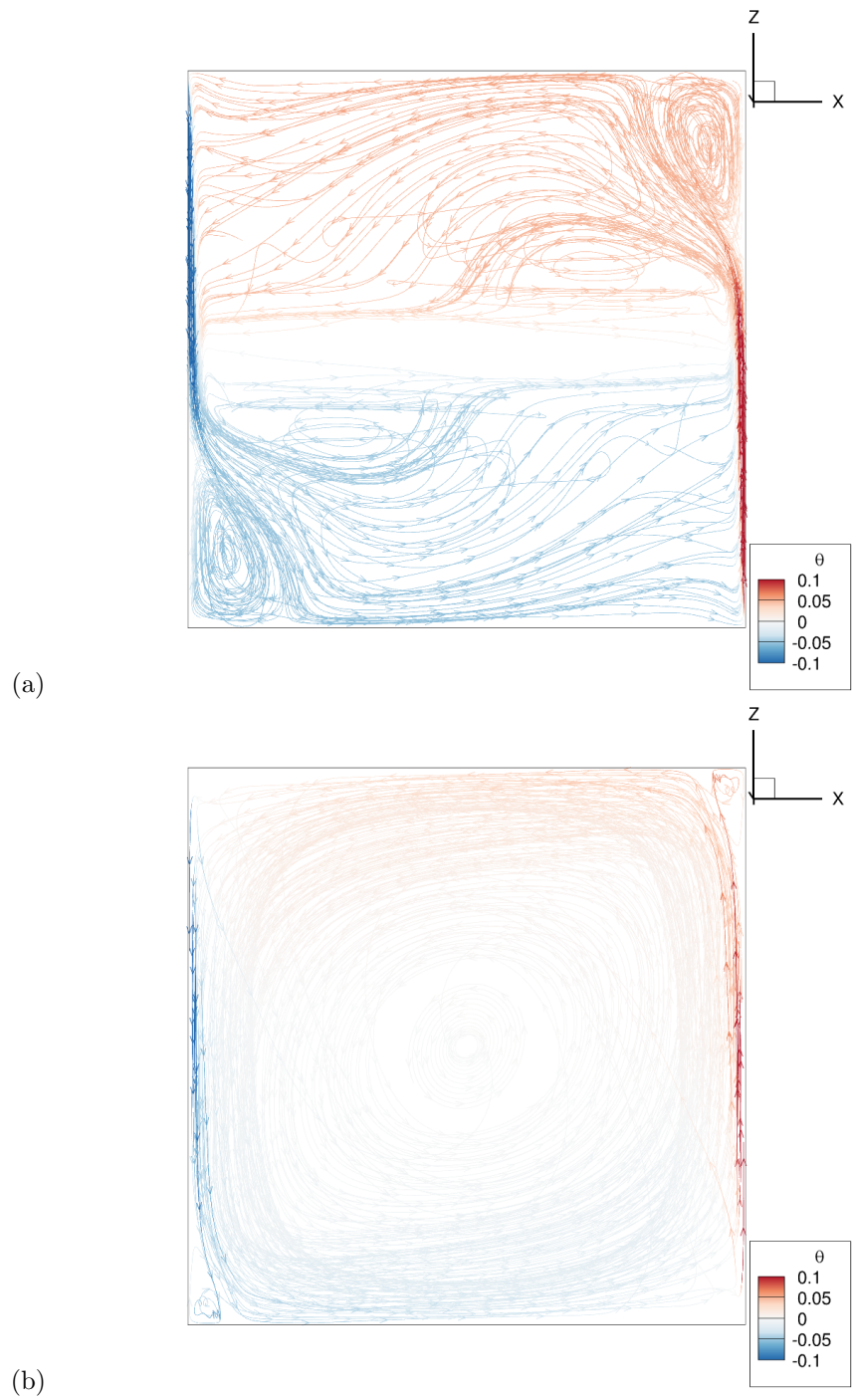


FIGURE 5.33 – Lignes de courant du champ moyen, vues dans le plan  $(e_x, e_z)$  et coloriées par la température. (a) : cas sans rayonnement et (b) : cas rayonnant (3 mètres).

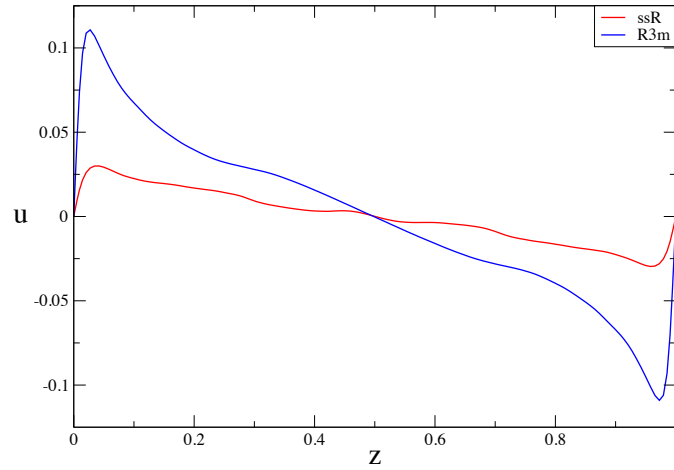


FIGURE 5.34 – Profil vertical de la composante  $u$  de la vitesse, selon la ligne  $x = 0.5, y = 0.5$ .

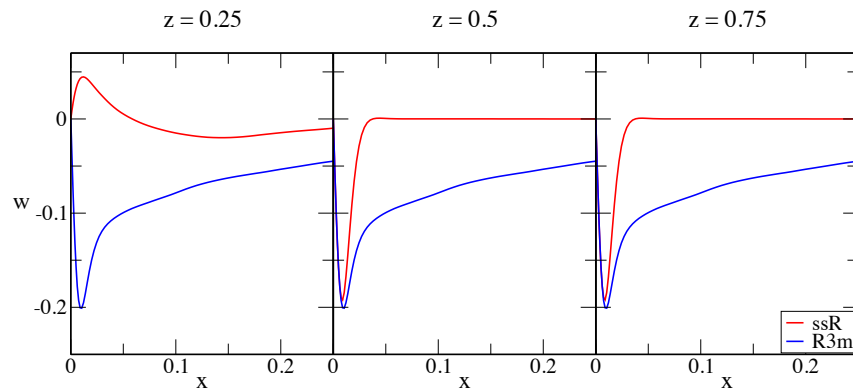


FIGURE 5.35 – Profil horizontal de la composante  $w$  de la vitesse à différentes hauteurs de la cavité, selon les lignes  $y = 0.5, z \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$ .

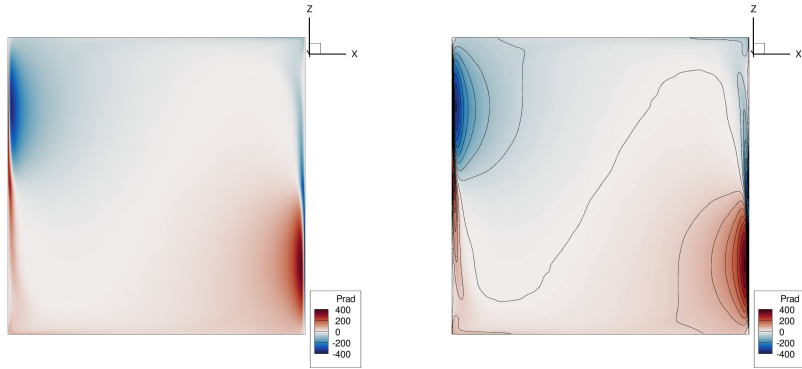


FIGURE 5.36 – Puissance radiative moyenne dans le plan  $y = 0.5$ . Sur la figure de droite, les lignes d'isovaleurs ont été ajoutées.

Le rayonnement a pour effet que les transferts de chaleur entre les parois thermostatées et le gaz n'ont pas lieu uniquement proche des parois, mais également à distance : la fenêtre refroidit donc l'air au delà de la couche limite conducto-convective, comme représenté sur la figure 5.36. Le moteur de l'écoulement étant, en convection naturelle, les variations spatiales de température, cette modification à distance de la température par le rayonnement a une forte influence sur l'écoulement. En absorbant plus de chaleur, le gaz se dilate davantage, ce qui augmente les forces de flottabilité et donc finalement l'énergie cinétique dans la cavité

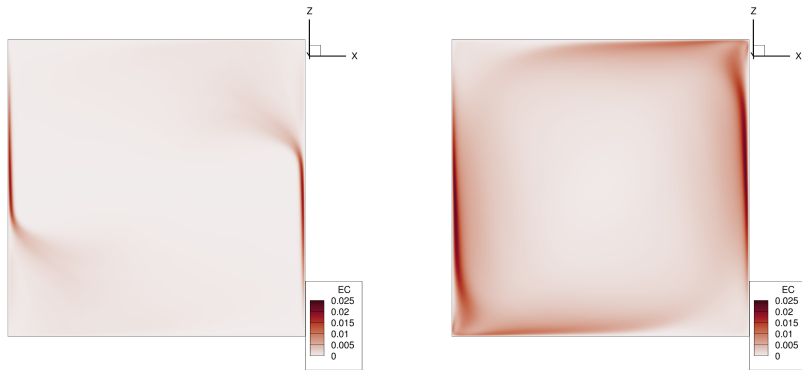


FIGURE 5.37 – Energie cinétique moyenne dans le plan  $y = 0.5$ , dans les cas sans rayonnement (gauche) et rayonnement (droite).

La figure 5.37 représente le champ d'énergie cinétique  $E_c = 1/2 (\bar{u}_i \bar{u}_i + \overline{u'_i u'_i})$  dans le plan  $y = 0.5$ . En l'absence de rayonnement, les régions où l'énergie cinétique est élevée se limitent aux couches limites le long du radiateur et de la fenêtre, et au niveau du décollement de la couche limite. En présence



de rayonnement, l'augmentation de la circulation du fluide dans la cavité entraîne également une augmentation de l'énergie cinétique dans la cavité, et particulièrement le long des parois. La mise en mouvement du fluide s'étend même au cœur de la cavité, tandis que la circulation du fluide au cœur reste très limitée en l'absence de rayonnement.

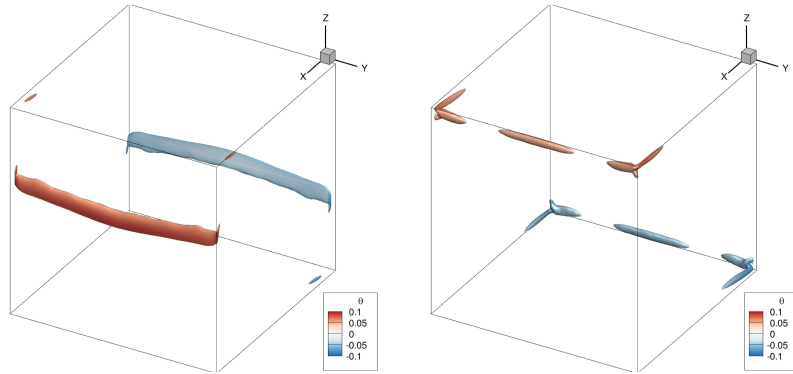


FIGURE 5.38 – Isosurfaces du critère  $Q$ ,  $Q = 0.3$ , coloriées par la température. Cas sans rayonnement (gauche) et rayonnant (droite).

La différence dans localisation du décollement de la couche limite le long de parois entraîne également une différence dans la localisation des zones de l'écoulement dominées par la vorticité. Dans la configuration ROF, le critère  $Q$  reste très peu élevé dans la cavité; il est cependant positif au voisinage des zones de décollement de la couche limite : au dessus et radiateur et en dessous de la fenêtre, dans le cas sans rayonnement, et le long des arêtes  $(x, z) = (0, 0)$  et  $(x, z) = (1, 1)$  dans le cas rayonnant.

### 5.3.3 Nombre de Nusselt aux parois

La figure 5.39 représente les champs de nombre de Nusselt à la paroi  $x = 0$ ; les champs à la paroi  $x = 1$  en sont les exactes symétries, comme le montre la figure 5.40 repr santant le profil vertical du nombre de Nusselt aux parois. Comme pour la configuration RSF, les extrema du nombre de Nusselt sont décalés par rapport aux extrema de la température de paroi, pour les mêmes raisons physiques.

En l'absence de rayonnement, pour la paroi  $x = 0$ , le transfert de chaleur est largement le long de la fenêtre; dans la moitié inférieure, passé le décollement de la couche limite, le nombre de Nusselt est très petit en raison de la faible vitesse du fluide à cet endroit. En revanche, la présence de rayonnement retardant le décollement de la couche limite, le nombre de Nusselt garde une valeur non négligeable sur une bonne partie de la moitié inférieure de la paroi. Le phénomène se produit de manière analogue du côté du radiateur.

Cependant, contrairement à la configuration RSF, la valeur des extrema est légèrement inférieure dans le cas d'un gaz rayonnant, comme cela se produit

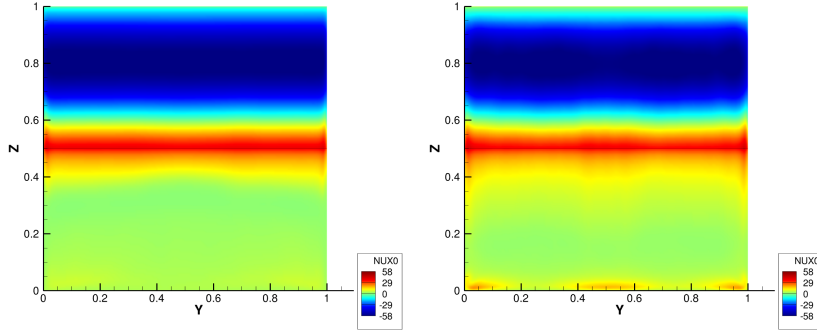


FIGURE 5.39 – Nombre de Nusselt moyen à la paroi  $x = 0$  en configuration ROF, dans le cas sans rayonnement (gauche) et rayonnement (droite).

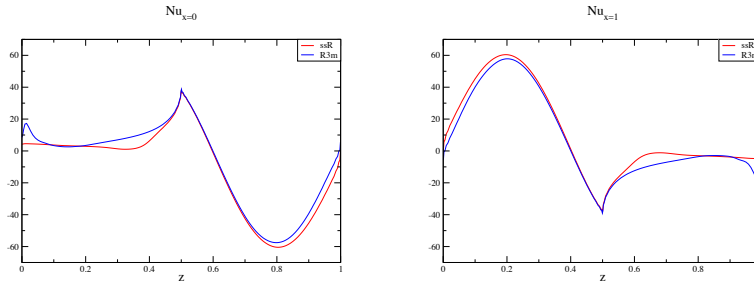


FIGURE 5.40 – Evolution verticale du nombre de Nusselt moyen aux parois  $x = 0$  (gauche) et  $x = 1$  (droite), pour  $y = 0.5$ , en configuration ROF, dans le cas sans rayonnement (rouge) et rayonnement (bleu).

en cavité différentiellement chauffée (Soucasse *et al.*, 2012) : le rayonnement homogénéisant la température dans la cavité, le gradient de température à la paroi est nécessairement plus faible. La valeur maximale du nombre de Nusselt est de 60.42 sans rayonnement et 57.82 avec rayonnement. Une corrélation reliant le nombre de Nusselt au nombre de Rayleigh pour une cavité différentiellement chauffée de rapport  $L_x/L_z = 4$  a été proposée par F.X.Trias *et al.* (2010a) :

$$\text{Nu} = 0.182 \text{ Ra}^{0.275} = 54.62 \quad \text{pour} \quad \text{Ra} = 10^9, \quad (5.8)$$

ce qui est proche de la valeur obtenue en configuration ROF.

## 5.4 Conclusion sur la position relative des sources chaude et froide

Cette section vise à comparer l'influence de la position du radiateur dans la pièce sur les pertes de chaleur ainsi que le confort thermique, à partir des simulations obtenues en configurations RSF et ROF à  $Ra = 10^9$ . L'objectif de ce chapitre étant de se rapprocher des conditions d'une pièce d'habitation réelle, seules les configurations avec un gaz rayonnant seront comparées. Les figures 5.41 et 5.42 présentent les évolutions verticales des flux conductif et radiatif le long des parois  $x = 0$  et  $x = 1$  respectivement, pour les configurations RSF et ROF. Dans la configuration RSF, les échanges thermiques à la paroi  $x = 1$  sont négligeables devant ceux en  $x = 0$  ; pour la configuration ROF, les profils sont antisymétriques entre les deux parois.

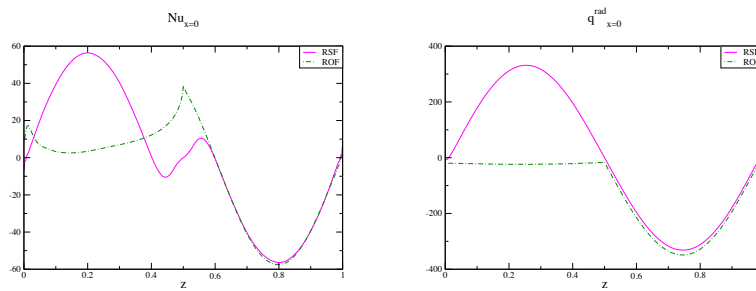


FIGURE 5.41 – Evolution verticale du nombre de Nusselt (gauche) et du flux radiatif (droite) moyens à la paroi  $x = 0$ , selon la ligne  $y = 0.5$ , pour les configurations RSF et ROF, dans le cas d'un gaz réel rayonnant.

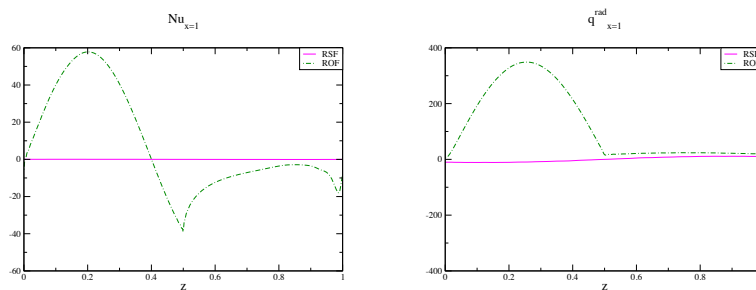


FIGURE 5.42 – Evolution verticale du nombre de Nusselt (gauche) et du flux radiatif (droite) moyens à la paroi  $x = 1$ , selon la ligne  $y = 0.5$ , pour les configurations RSF et ROF, dans le cas d'un gaz réel rayonnant.

Dans les deux cas, les échanges radiatifs dominent largement les échanges

	Inf		Sup.	
	$\Phi^{cd}$	$\Phi^{rad}$	$\Phi^{cd}$	$\Phi^{rad}$
RSF	13.63	102.48	-13.63	-102.48
ROF	4.53	-10.84	-12.46	-110.85

TABLE 5.1 – Flux conductif et radiatif à la paroi  $x = 0$ , intégrés par demi-paroi inférieure ( $y < 0.5$ ) et supérieure ( $y > 0.5$ ), dans les configurations RSF et ROF

	Inf		Sup.	
	$\Phi^{cd}$	$\Phi^{rad}$	$\Phi^{cd}$	$\Phi^{rad}$
RSF	-0.016	-3.98	0.016	3.98
ROF	12.46	110.85	-4.53	10.84

TABLE 5.2 – Flux conductif et radiatif à la paroi  $x = 1$ , intégrés par demi-paroi inférieure ( $y < 0.5$ ) et supérieure ( $y > 0.5$ ), dans les configurations RSF et ROF

conducto-convectifs aux parois. Les tables 5.1 et 5.2 présentent les valeurs des flux en  $x = 0$  et  $x = 1$ , intégrés sur les demi-parois (pour faciliter la lecture, les cellules correspondant au radiateur et à la fenêtre sont coloriées respectivement en bleu et rouge) : l'écart entre les flux conductif et radiatifs intégrés est d'un ordre de grandeur. Compte tenu de l'importance du rayonnement, la position du radiateur influe grandement sur les pertes thermiques  $\Phi_{pertes}$  dans la pièce, définies comme :

$$\Phi_{pertes} = 1/2 \iint_{\partial\Omega} |\phi^{tot}| dS. \quad (5.9)$$

Si le radiateur est positionné à l'opposé de la fenêtre, des échanges radiatifs ont lieu directement entre le radiateur et la fenêtre, ce qui contribue à augmenter le flux radiatif entrant par le radiateur et sortant par la fenêtre. Le tableau 5.3 récapitule la somme des flux sortant de la cavité dans les deux configurations.

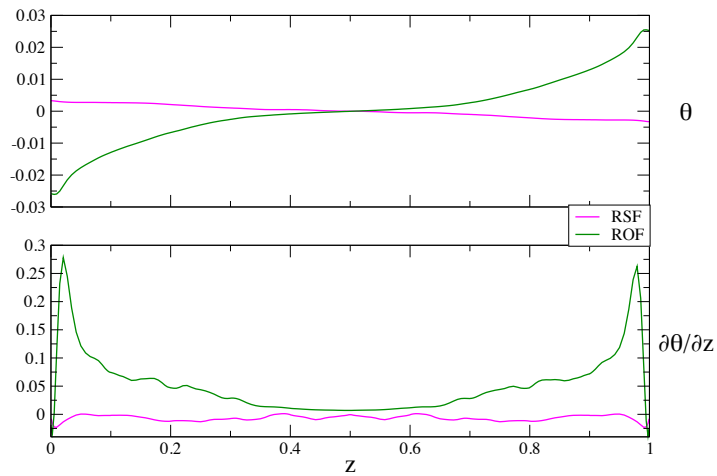
Le calcul des pertes par la formule (5.9) donne les valeurs suivantes :  $\Phi_{pertes}^{RSF} = 121.45$  et  $\Phi_{pertes}^{ROF} = 142.93$ . Le placement du radiateur à l'opposé de la fenêtre entraîne une augmentation de 17,63 % des pertes thermiques dans la cavité, par rapport à un radiateur situé sous la fenêtre.

Concernant la stratification thermique, la figure 5.43 montre les profils verticaux de température et le gradient vertical de température au centre de la cavité. La configuration RSF entraîne un meilleur brassage de l'air dans la cavité et diminue fortement la stratification thermique dans la cavité, par rapport à la configuration ROF.

En conclusion, le placement du radiateur par rapport à la fenêtre a une influence notable sur l'écoulement dans la cavité. Un radiateur placé sous la fenêtre permet de diminuer les pertes de chaleur ainsi que de fournir un meilleur confort thermique grâce au brassage de l'air dans la cavité.

	Conduction	Rayonnement	Total
RSF	13,65	106,46	120,11
ROF	16,99	121,69	138,68

TABLE 5.3 – Pertes thermiques (en flux) aux parois, par conduction et rayonnement, dans les configurations RSF et ROF



d

FIGURE 5.43 – Evolution de la température moyenne et gradient de la température moyenne selon l'axe vertical, sur la ligne  $x = 0.5$  et  $y = 0.5$ , pour les configurations RSF et ROF, dans le cas d'un gaz réel rayonnant.





# Conclusion

Les travaux de cette thèse visent une meilleure compréhension des effets des transferts radiatifs sur la dynamique des écoulements de convection naturelle. La cavité cubique de Rayleigh-Bénard est étudiée dans un premier temps afin d'obtenir des résultats de référence et de valider un modèle de simulation aux grandes échelles, qui est ensuite utilisé pour étudier des configurations représentatives de l'habitation. Un mélange gazeux air/CO<sub>2</sub>/H<sub>2</sub>O est considéré pour une représentation du rayonnement fidèle de ce qui est rencontré dans l'habitat.

Les écoulements de convection naturelle étudiés dans cette thèse, basés sur l'approximation de Boussinesq, sont simulés au moyen d'une méthode spectrale de collocation spatiale, basée sur les polynômes de Tchebychev, et par un schéma temporel semi-implicite d'ordre 2. Les transferts radiatifs, quant à eux, sont résolus au moyen d'une méthode de lancer de rayon déterministe, auquel s'ajoute un modèle de sous-maille radiatif qui est également employé à haut nombre de Rayleigh pour limiter le temps de calcul. Les propriétés radiatives du gaz sont modélisées par la méthode ADF qui est à la fois précise (pour les faibles écarts de température considérés) et permet un gain de temps de calcul considérable par rapport à un modèle raie par raie.

Une étude en Simulation Numérique Directe (DNS) a permis de décrire l'influence des transferts radiatifs sur les structures d'écoulement, les niveaux d'énergie et les flux thermiques dans la cavité. Lorsque le rayonnement est pris en compte, la taille de la cavité doit être spécifiée et une cavité de côté un mètre a été choisie dans un premier temps. Aux bas nombres de Rayleigh, le rayonnement retarde l'apparition de la convection dans la cavité en homogénéisant la température dans le cœur, même en l'absence d'écoulement. En revanche, une fois le régime convectif établi, les transferts radiatifs augmentent l'énergie cinétique dans la cavité et le flux convectif.

Des simulations dans des cavités de trois mètres de côté, plus représentatives des dimensions de l'habitat, montrent une forte influence de la taille de la cavité sur les effets du rayonnement. Les phénomènes observés dans les cavités d'un mètre sont amplifiés, notamment en ce qui concerne le flux convectif et l'énergie cinétique. Le ratio entre les termes sources radiatif et convectif adimensionnés



est proportionnel à un facteur  $1/\sqrt{\text{Ra}}$  dans le bilan d'énergie, contrairement au terme convectif; à très haut nombre de Rayleigh, l'influence du rayonnement diminue donc fortement et la convection devient peu affectée par les transferts parois-gaz et gaz-gaz.

La large gamme de nombres de Rayleigh étudiés a permis de mettre en évidence une évolution, avec le nombre de Rayleigh, des structures de la circulation des grandes échelles (LSC) rencontrées dans la cavité de Rayleigh-Bénard. Après la transition vers l'instationnarité, le fluide s'écoule selon une forme de tambour parallèle à deux parois verticales. Cette structure est temporellement stable selon une direction mais, lorsque le nombre de Rayleigh augmente, des phénomènes de réorientation se produisent, qui se traduisent par des rotations d'un quart de tour de l'écoulement. A plus haut nombre de Rayleigh, la circulation se fait selon un plan vertical diagonal de la cavité; les phénomènes de réorientation persistent mais leur fréquence diminue avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. Le rayonnement a une forte influence sur l'évolution de la LSC en retardant le passage d'une structure à l'autre : les structures rencontrées à un nombre de Rayleigh donné dans une cavité rayonnante sont similaires à cette rencontrées, en l'absence de rayonnement, à des nombres de Rayleigh bien plus petits.

Aux nombres de Rayleigh caractéristiques des écoulements dans l'habitat, la finesse du maillage requise pour simuler la convection naturelle en DNS entraîne un coût de calcul prohibitif compte tenu des capacités des ordinateurs actuelles. Une méthode de simulation aux grandes échelles (LES) est donc envisagée et le modèle Spectral Vanishing Viscosity (SVV), adapté aux méthodes numériques spectrales, est implémenté et testé. Ce modèle repose sur deux paramètres, un mode de coupure et un poids; une étude paramétrique a été réalisée pour étudier l'influence de ces deux paramètres dans la stabilisation de la simulation et la précision des résultats. Cette étude a également permis de calibrer le modèle SVV pour trouver un bon compromis entre stabilité et précision.

Le modèle a été ensuite testé pour des configurations sans et avec rayonnement et les résultats montrent un bon accord entre la LES et la DNS. Le modèle SVV se révèle capable de prédire correctement les flux thermiques et les niveaux d'énergie cinétique moyen et turbulent de l'écoulement, ainsi que de capter la distribution spatiale de la taille des structures rencontrées. Le modèle est ensuite utilisé pour réaliser des simulations à  $\text{Ra} = 10^{10}$ ; les résultats sont cohérents avec ceux obtenus à plus bas nombre de Rayleigh.

La méthode de LES implémentée est finalement utilisée pour étudier des configurations plus représentatives de l'habitat, notamment le chauffage localisé : une modélisation simple est adoptée pour représenter les sources chaude et froide. Deux configurations sont envisagées : un radiateur positionné sous une fenêtre (RSF) ou positionné sur le mur opposé à la fenêtre (ROF). Les simulations sont effectuées pour des nombres de Rayleigh de  $10^9$  (RSF et ROF) et  $10^{10}$  (RSF uniquement).

Lorsque le radiateur est positionné sous la fenêtre, les flux d'air longeant la fenêtre et le radiateur se rencontrent au niveau du plan médian, ce qui forme des

panaches ascendant et descendant entrecroisés. En l’absence de rayonnement, le gaz se stratifie dans la cavité : la moitié supérieure est emplie de gaz chaud et la moitié inférieure de gaz froid. Le champ de température se caractérise par la formation de plans isothermes quasi horizontaux dans une grande partie de la cavité. Lorsque le rayonnement est pris en compte, en revanche, la dynamique de l’écoulement est grandement modifiée. On retrouve toujours la présence de panaches entrecroisés à l’interface entre le radiateur et la fenêtre, mais ceux-ci sont plus petits : le rayonnement entre le gaz et la fenêtre contribue à refroidir les panaches ascendants, et inversement pour le radiateur et les panaches descendants. A  $Ra = 10^9$ , le rayonnement provenant du radiateur s’avère suffisant pour réchauffer le fluide en moitié basse, et vice-versa en moitié haute ; le profil de température dans la cavité est donc inversé par rapport au cas sans rayonnement. Les résultats préliminaires obtenus à  $Ra = 10^{10}$  semblent montrer que cet effet du rayonnement sur le champ de température reste notable mais ne s’étend pas à toute la cavité : loin de la paroi les forces de flottabilité paraissent prédominer et le fluide chaud se retrouve dans la moitié haute de la cavité. La présence de transferts radiatifs diminue également très fortement la stratification thermique dans la cavité.

Lorsque le radiateur est positionné sur le mur opposé à la fenêtre, la prise en compte du rayonnement augmente notablement la circulation du fluide dans la cavité. En l’absence de rayonnement, l’injection d’énergie potentielle dans la cavité est limitée à des zones restreintes et le fluide est peu mobile en dehors des régions proches du radiateur et de la fenêtre. En revanche, l’action à distance du rayonnement met le fluide en mouvement au cœur de la cavité, ce qui conduit à un meilleur mélange du fluide et à une baisse de la stratification thermique. Ces résultats sont similaires à ceux obtenus en cavité différentiellement chauffée (Soucasse, 2013).

La position du radiateur par rapport à la fenêtre influe également sur les flux thermiques dans la cavité : lorsque le radiateur est en face de la fenêtre, les échanges radiatifs directs entre les deux conduisent à un plus grand flux radiatif sortant par la fenêtre, par rapport au cas où le radiateur ne rayonne pas directement vers la fenêtre. La différence de flux sortant de la cavité entre les deux configurations est de l’ordre de 15 %, ce qui n’est pas négligeable.

Ces simulations de référence couplées en cavité de Rayleigh-Bénard permettront de développer et valider des modèles simplifiés, notamment pour la meilleure compréhension des phénomènes de réorientation de la LSC dans la cavité. Par exemple, un modèle réduit basé sur une analyse POD a été proposé par Soucasse *et al.* (2019), expliquant les phénomènes de réorientation en termes de modes POD. Les effets des transferts radiatifs ont fait l’objet d’une modélisation à part dans Soucasse *et al.* (2020) et un modèle réduit couplé a été proposé dans Soucasse *et al.* (2021), pour des nombres de Rayleigh allant jusqu’à  $Ra = 10^8$ . Les résultats obtenus dans cette thèse pourront permettre de valider ce modèle à plus haut nombre de Rayleigh, ainsi que d’en vérifier la robustesse au changement de la taille de la cavité.

En termes de modélisation des écoulements dans l’habitat, l’étude de la configuration RSF mériterait une étude plus approfondie : de nombreux phénomènes n’ont pas été analysés à  $Ra = 10^9$ , notamment dans les bilans d’énergie globaux au sein de la cavité et l’étude des statistiques d’ordre 2. L’étude à  $Ra = 10^{10}$ , bien que n’ayant produit que des résultats préliminaires, montre une grande influence du nombre de Rayleigh dans l’équilibre entre les effets convectif et radiatif et devra également être prolongée.

L’influence des conditions aux limites radiatives des parois est aussi un champ d’investigation intéressant : des études comme celle de Xin *et al.* (2013) ont montré un fort couplage des transferts radiatif paroi-paroi sur la convection thermique. Il serait donc intéressant, dans les conditions RSF et ROF où le rayonnement a montré une forte influence sur l’écoulement, d’étudier l’effet de la prise en compte du rayonnement de toutes les parois, et non plus seulement les parois isothermes. Cette étude pourrait également s’enrichir de la considération de conditions aux limites de type Neumann (en flux) et non de type Dirichlet (en température), voire des conditions aux limites mixtes Dirichlet-Neumann.

Les travaux réalisés dans cette thèse portent sur la seule modélisation des transferts thermiques dans la cavité. La prise en compte des transferts radiatifs a montré qu’il s’agissait d’un phénomène important dans l’habitat, mais d’autres phénomènes courant importants pour cette application ont dû être négligés ici.

On peut par exemple penser aux problématiques de ventilation et de renouvellement de l’air, qui se traduisent par l’étude de la convection mixte dans la cavité avec l’ajout de flux d’air entrant et sortant. Les récents travaux de Alghaseb *et al.* (2022) montrent l’importance du positionnement de la source chaude dans l’obtention d’une bonne ventilation, mais le rayonnement thermique n’est pas pris en compte, et il a été montré qu’il pouvait avoir un impact fort sur la structure de l’écoulement.

Le modèle utilisé pour représenter les sources chaude (radiateur) et froide (fenêtre) de la pièce d’habitation dans cette thèse sont plutôt rudimentaires. Il pourrait être également intéressant d’affiner la modélisation, en prenant en compte des conditions aux limites plus localisées, afin d’obtenir une représentation plus fidèle de la réalité.

Enfin, les études sur la circulation et les transferts thermiques s’enrichiraient de la prise en compte des transports de matière dans le gaz. La densité du fluide et les propriétés radiatives du gaz sont en effet directement liées à la concentration en vapeur d’eau et dioxyde de carbone, et leurs variations locales, peuvent avoir un effet important sur l’écoulement et les transferts thermiques. Cela avait été montré en deux dimensions pour des cavités différentiellement chauffées (Meftah *et al.*, 2009; Ibrahim et Lemonnier, 2009) mais le sujet a peu évolué depuis. La modification des propriétés radiatives des parois en raison des phénomènes de condensation est aussi une piste d’exploration potentiellement très riche.





# Annexe A

## Outils d'analyse des écoulements

### A.1 Décomposition en modes Propres Orthogonaux (POD)

La décomposition en modes propres orthogonaux (ou POD, pour Proper Orthogonal Decomposition) a été initialement développée par Berkooz *et al.* (1993). Cette méthode vise à trouver, pour un champ de vecteurs aléatoires  $\chi(\mathbf{x}, t)$  de moyenne statistique nulle  $\overline{\chi(\mathbf{x}, t)} = 0$ , une base optimale de modes spatiaux  $\phi_n(\mathbf{x})$  selon sa variance  $\overline{\chi^2(\mathbf{x}, t)}$ , de manière à obtenir une décomposition de type :

$$\chi(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(\mathbf{x}) \quad (\text{A.1})$$

où les  $\phi_n(\mathbf{x})$  sont les modes spatiaux et les  $a_n(t)$  sont les coefficients de projection. Ces modes sont cherchés de manière à maximiser en moyenne la projection de  $\chi(\mathbf{x}, t)$  :

$$\max_{\|\phi\|=1} \overline{(\chi, \phi)}, \quad (\text{A.2})$$

où  $(\cdot, \cdot)$  désigne le produit scalaire de deux champs de vecteurs, défini comme :

$$(\chi, \phi) = \int_{\Omega} \sum_{m=1}^M \phi^m(\mathbf{x}) \chi^m(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (\text{A.3})$$

avec  $M$  la dimension des champs de vecteur,  $\phi^m$  la  $m^{ieme}$  composante du vecteur  $\phi$  et  $\Omega$  le domaine spatial.  $\|\cdot\|$  désigne la norme associée à ce produit scalaire :

$$\|\phi\| = \sqrt{(\phi, \phi)} \quad (\text{A.4})$$

L'équation (A.2) est équivalent au problème aux valeurs propres suivant :

$$\int_{\Omega} \sum_{k=1}^M \overline{\chi^m(\mathbf{x}, t) \chi^k(\mathbf{x}, t)} \phi^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}' = \lambda \phi^m(\mathbf{x}) \quad (\text{A.5})$$

La famille de modes  $\phi_n(\mathbf{x})$  obtenue forme alors une base orthonormée de l'espace des champs de vecteurs. De plus, les coefficients de projection  $a_n(t)$  sont statistiquement décorrélés et leur énergie est égale à la valeur propre associée :  $\overline{a_n(t) a_m(t)} = \delta_{nm} \lambda_n$  ( $\delta_{nm}$  désignant le symbol de Kronecker). Le spectre POD associé à la décomposition représente donc la distribution de l'énergie selon les modes et il devient donc intéressant de tronquer la décomposition (A.1), afin de représenter la dynamique de l'écoulement au moyen d'un nombre restreint de modes portant la majeure partie de l'énergie du champ  $\chi(\mathbf{x}, t)$ .

En convection naturelle, le champ de vecteur  $\chi$  contient les variables de vitesse et de température :  $\chi(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t), \gamma\theta(\mathbf{x}, t))$  ; les modes spatiaux contiennent quant-à eux des champs associés aux mêmes composantes de la vitesse et à la température :  $\phi_n(\mathbf{x}) = (\phi_n^u(\mathbf{x}), \phi_n^v(\mathbf{x}), \phi_n^w(\mathbf{x}), \phi_n^\theta(\mathbf{x}))$ . Le facteur  $\gamma$  (devant la température) a été introduit par Podvin et Le Quéré (2001) afin d'égaliser les niveaux d'énergie des champs de vitesse et de température. Il est calculé comme :

$$\gamma = \frac{\int_{\Omega} (u^2(\mathbf{x}, t) + v^2(\mathbf{x}, t) + w^2(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} \theta^2(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}} \quad (\text{A.6})$$

Pour résoudre le problème aux valeurs propres (A.5), la méthode des snapshots (Sirovich, 1987) est utilisée. Un nombre  $N$  de champs instantanés sont échantillonnés à partir des simulations numériques, à des instants  $t_i$  réguliers, et utilisés pour construire leur matrice de corrélation temporelle

$$C_{ij} = \frac{1}{N} (\chi(\mathbf{x}, t_i), \chi(\mathbf{x}, t_j)). \quad (\text{A.7})$$

Le problème aux valeurs propres discret équivalent est alors :

$$\mathbf{C} \psi_n = \lambda_n \psi_n. \quad (\text{A.8})$$

Les modes propres sont alors reconstruits par combinaison linéaire des vecteurs propres  $\psi_n$  et des champs instantanés échantillonnés :

$$\phi_n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \chi(\mathbf{x}, t_i) \psi_n^i. \quad (\text{A.9})$$

## A.2 Critère $Q$

Les écoulements turbulents sont caractérisés par l'apparition de structures tourbillonnaires, ou vortex, dont l'identification apporte une meilleure compréhension

de la dynamique de l'écoulement. Les mouvements de rotation du fluide, que l'on peut intuitivement relier à ces structures tourbillonnaires, sont contenus dans le tenseur des gradients de vitesse  $\nabla \mathbf{u}$ , dont les composantes peuvent être décomposés comme :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{S_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\Omega_{ij}} \quad (\text{A.10})$$

Le tenseur des gradients de vitesse peut donc être décomposé en une partie symétrique  $\mathbf{S}$ , appelée tenseur des déformations, et une partie antisymétrique  $\mathbf{\Omega}$ , appelée tenseur des rotations. Le taux de rotation  $\omega = \|\mathbf{\Omega}\|$  pourrait être un bon indicateur de la présence d'un vortex et il l'est, loin des parois. En revanche, dans les couches limites proches des parois, on observe un fort taux de rotation, mais celui-ci est dû au cisaillement et non aux tourbillons. Le taux de rotation en lui-même est donc insuffisant pour identifier les vortex dans le fluide.

Hunt *et al.* (1988) proposent d'identifier les structures tourbillonnaires en se basant sur le deuxième invariant du tenseur des déformations  $\mathbf{S}$ , habituellement noté  $Q$  :

$$Q = \frac{1}{2} (\text{tr}^2(\mathbf{S}) - \text{tr}(\mathbf{S}^2)) = \frac{1}{2} (\|\mathbf{\Omega}\|^2 - \|\mathbf{S}\|^2) \quad (\text{A.11})$$

$Q$  compare donc les taux de rotation et de déformation locaux : un  $Q$  positif indique une zone où la vorticité est dominante. L'avantage du critère  $Q$  sur le taux de rotation est que, contrairement à ce dernier, il s'annule proche des parois et permet donc d'ignorer le cisaillement pariétal.





## Annexe B

# Compléments sur l'étude paramétrique du modèle SVV

Dans le §4.2.3 présentant les résultats de l'étude de sensibilité du paramétrage SVV, le choix du paramétrage se fait en comparant les flux conductifs et convectifs intégrés sur des plans horizontaux, ainsi que les énergies cinétiques intégrées sur toute la cavité. Cette annexe présente les profils verticaux de température, énergie cinétique, flux conductif et flux radiatif, intégrés sur les plans horizontaux, pour tous les cas étudiés lors de l'étude paramétrique.

### B.1 Profils de température

La température moyenne est bien représentée par le modèle SVV, quel que soit le paramétrage utilisé et quel que soit le dégrossissement.

#### B.1.1 $Ra=10^8$

Figure B.1 : maillage  $80 \times 80 \times (4 \times 20)$ .

Figure B.2 : maillage  $60 \times 60 \times (3 \times 20)$ .

#### B.1.2 $Ra=10^9$

Figure B.3 : maillage  $160 \times 160 \times (8 \times 20)$ .

Figure B.4 : maillage  $120 \times 120 \times (6 \times 20)$ .

Figure B.5 : maillage  $80 \times 80 \times (4 \times 20)$ .

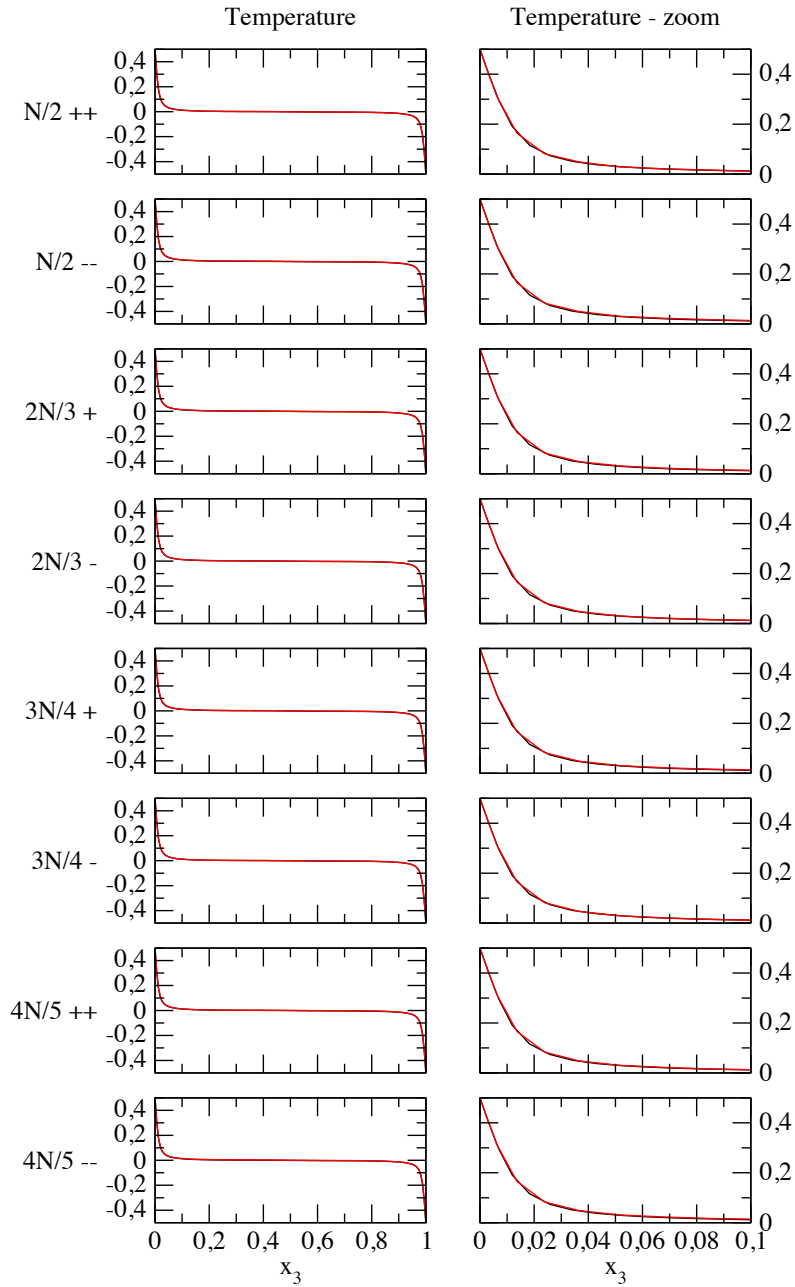


FIGURE B.1 – Profils de température obtenus à  $Ra = 10^8$ , maillage  $80^3$  points, moyennés sur les plans horizontaux, pour les différents modèles SVV stables (en rouge). En noir, le profil obtenu par la DNS. A droite, le profil zoomé entre les plans  $x_3 = 0$  et  $x_3 = 0.1$ .

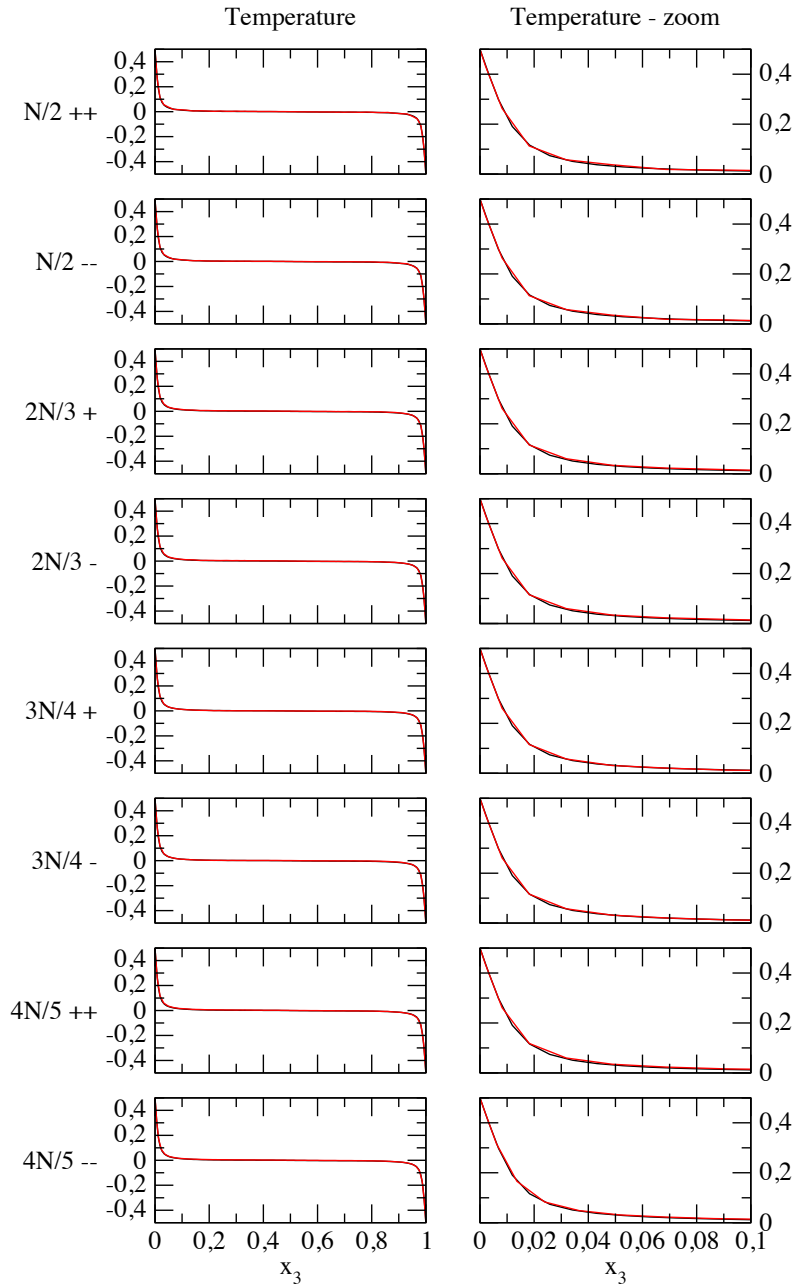


FIGURE B.2 – Profils de température obtenus à  $Ra = 10^8$ , maillage  $60^3$  points, moyennés sur les plans horizontaux, pour les différents modèles SVV stables (en rouge). En noir, le profil obtenu par la DNS. A droite, le profil zoomé entre les plans  $x_3 = 0$  et  $x_3 = 0.1$ .

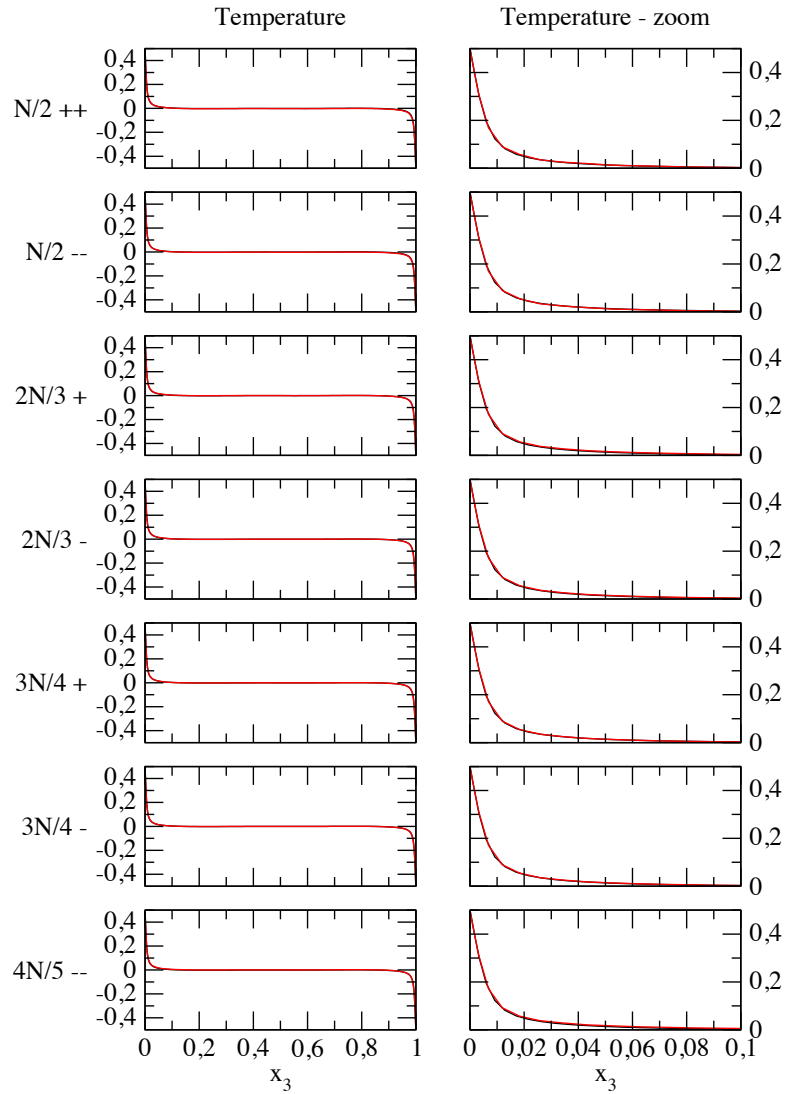


FIGURE B.3 – Profils de température obtenus à  $Ra = 10^9$ , maillage  $160^3$  points, moyennés sur les plans horizontaux, pour les différents modèles SVV stables (en rouge). En noir, le profil obtenu par la DNS. A droite, le profil zoomé entre les plans  $x_3 = 0$  et  $x_3 = 0.1$ .

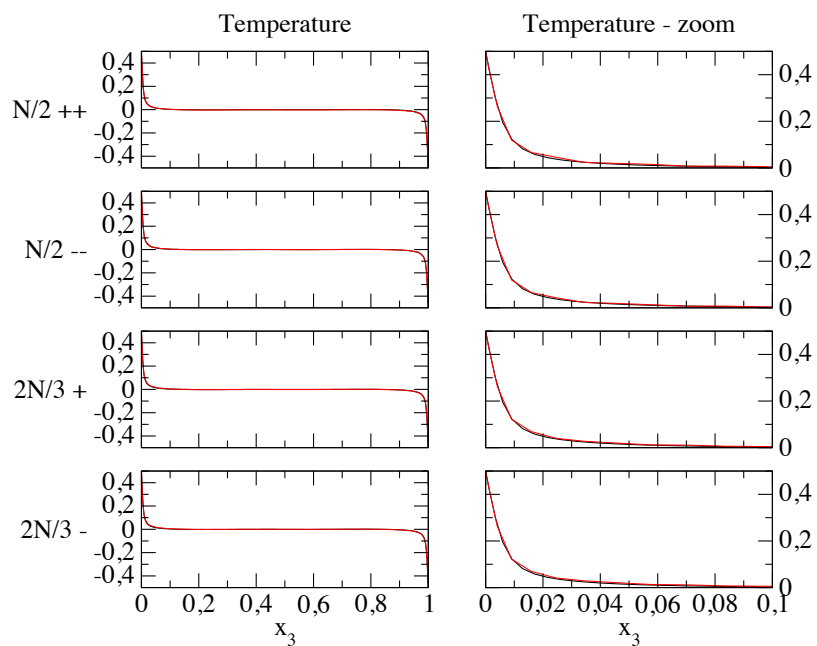


FIGURE B.4 – Profils de température obtenus à  $Ra = 10^9$ , maillage  $120^3$  points, moyennés sur les plans horizontaux, pour les différents modèles SVV stables (en rouge). En noir, le profil obtenu par la DNS. A droite, le profil zoomé entre les plans  $x_3 = 0$  et  $x_3 = 0.1$ .

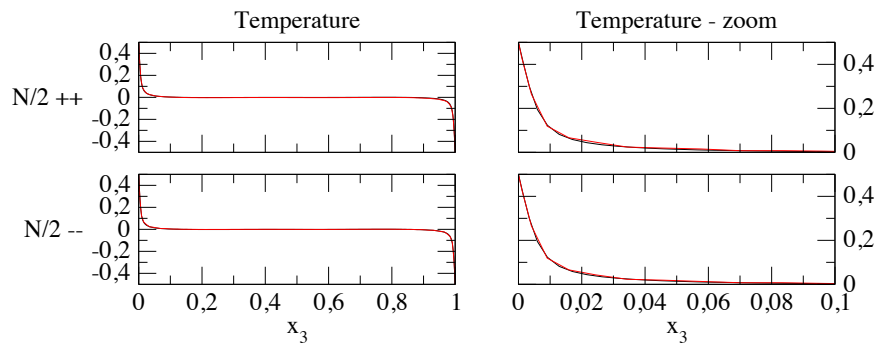


FIGURE B.5 – Profils de température obtenus à  $Ra = 10^9$ , maillage  $80^3$  points, moyennés sur les plans horizontaux, pour les différents modèles SVV stables (en rouge). En noir, le profil obtenu par la DNS. A droite, le profil zoomé entre les plans  $x_3 = 0$  et  $x_3 = 0.1$ .

## B.2 Profils d'énergie cinétique

La précision du modèle SVV dans la prédiction du profil d'énergie cinétique est dépendante du dégrossissement utilisé : pour  $\text{FRM} = 2$ , les profils sont fidèles à la DNS mais, lorsque le FRM augmente, la simulation SVV surestime l'énergie cinétique. L'imprécision est également plus grande lorsque le mode de coupure diminue.

### B.2.1 $\text{Ra}=10^8$

Figure B.6 : maillage  $80 \times 80 \times (4 \times 20)$ . Pour le modèle  $4N/5 - -$ , l'énergie cinétique totale est similaire entre DNS et SVV, mais la répartition entre énergie du champ moyen et énergie turbulente est différente : cela est dû à un renversement entre deux diagonales (voir §3.2.2) dans la simulation SVV, qui modifie la répartition moyen-turbulent.

Figure B.7 : maillage  $60 \times 60 \times (3 \times 20)$ .

### B.2.2 $\text{Ra}=10^9$

Figure B.8 : maillage  $160 \times 160 \times (8 \times 20)$ .

Figure B.9 : maillage  $120 \times 120 \times (6 \times 20)$ .

Figure B.10 : maillage  $80 \times 80 \times (4 \times 20)$ .



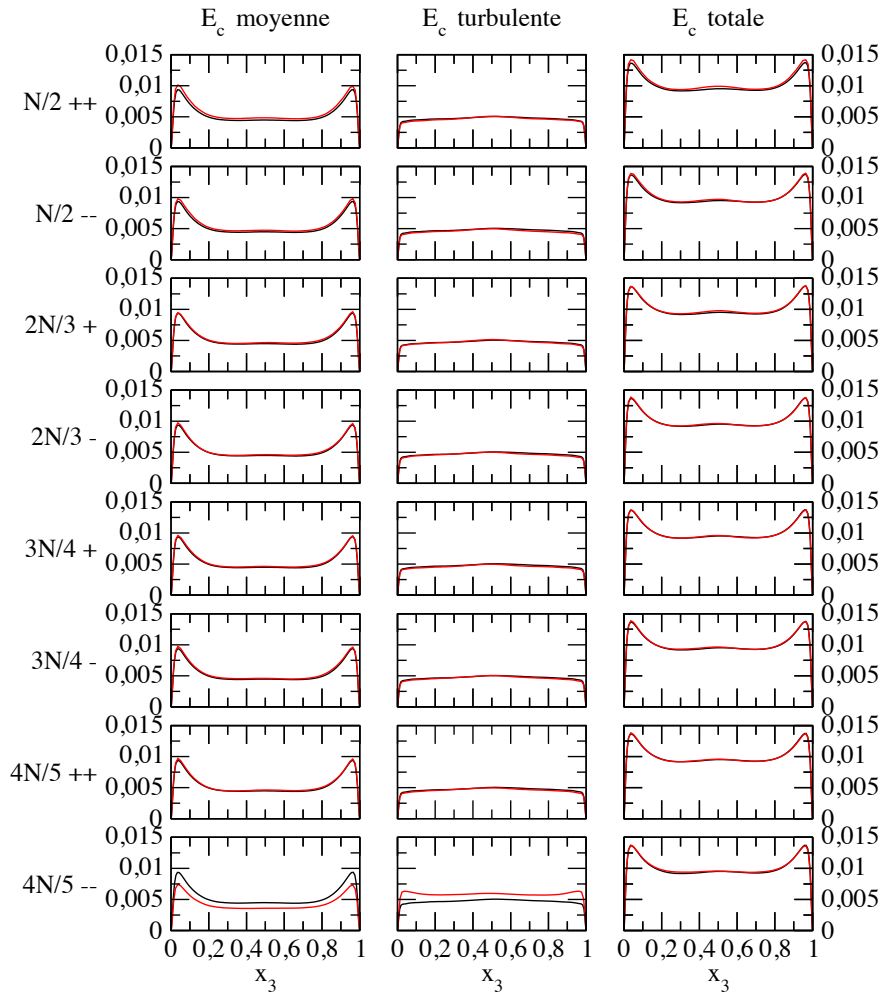


FIGURE B.6 – Profils d'énergie cinétique obtenus à  $Ra = 10^8$ , maillage  $80^3$  points, moyennés sur les plans horizontaux, pour les différents modèles SVV stables (en rouge). En noir, le profil obtenu par la DNS.

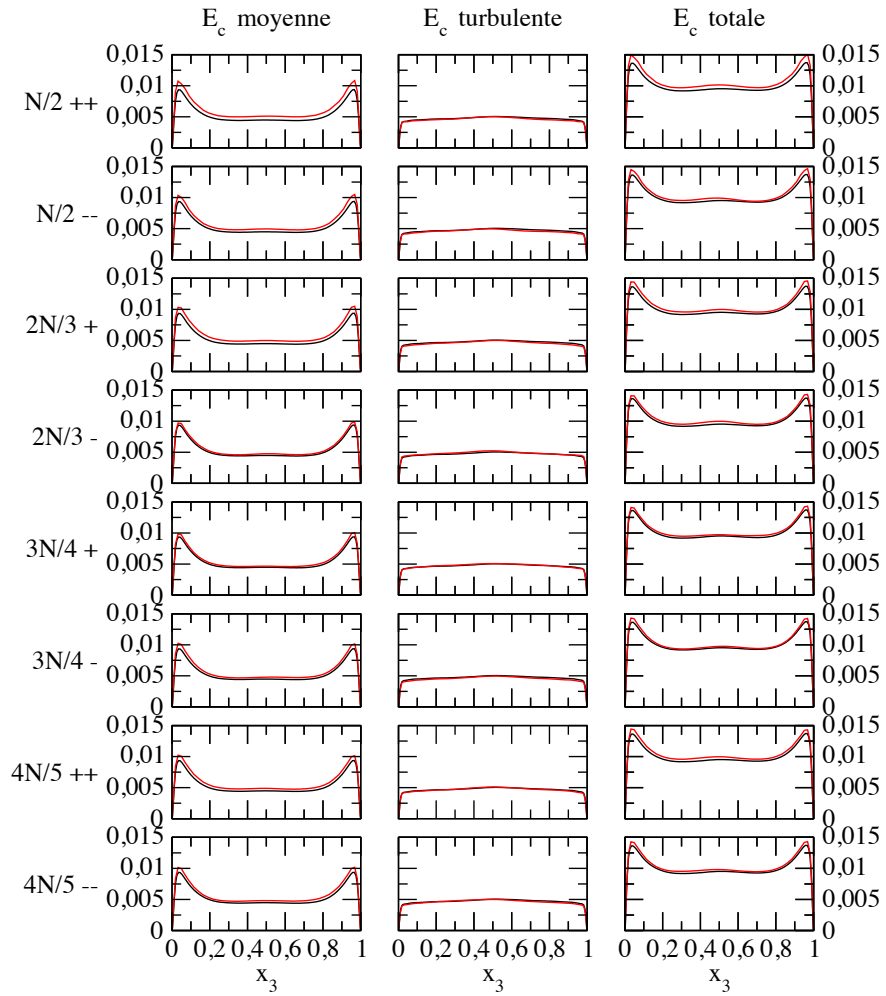


FIGURE B.7 – Profils d'énergie cinétique obtenus à  $Ra = 10^8$ , maillage  $60^3$  points, moyennés sur les plans horizontaux, pour les différents modèles SVV stables (en rouge). En noir, le profil obtenu par la DNS.

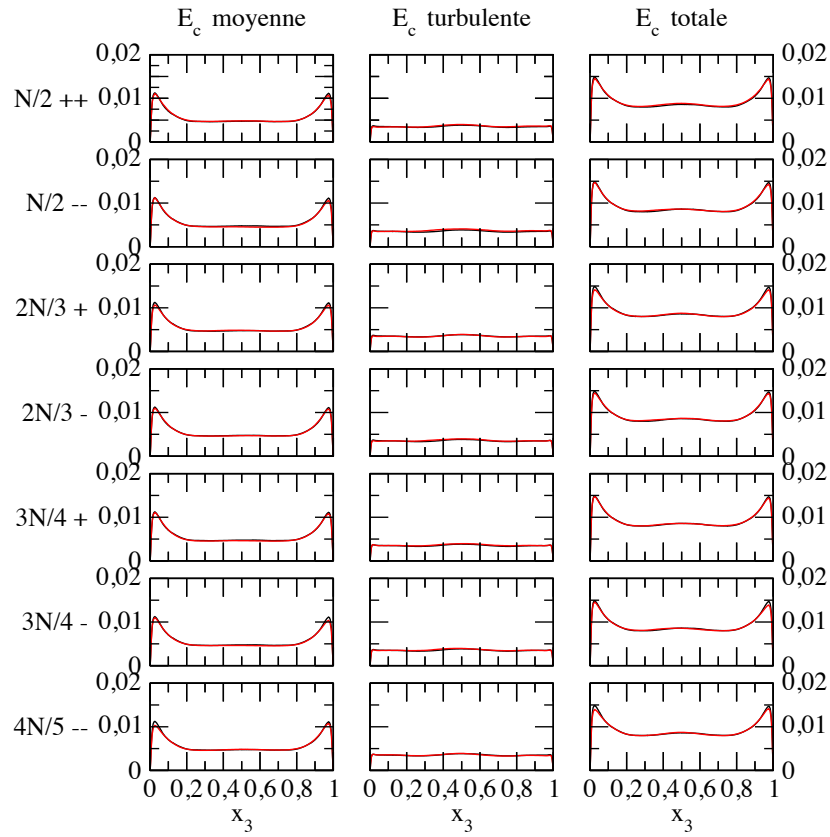


FIGURE B.8 – Profils d'énergie cinétique obtenus à  $Ra = 10^9$ , maillage  $160^3$  points, moyennés sur les plans horizontaux, pour les différents modèles SVV stables (en rouge). En noir, le profil obtenu par la DNS.

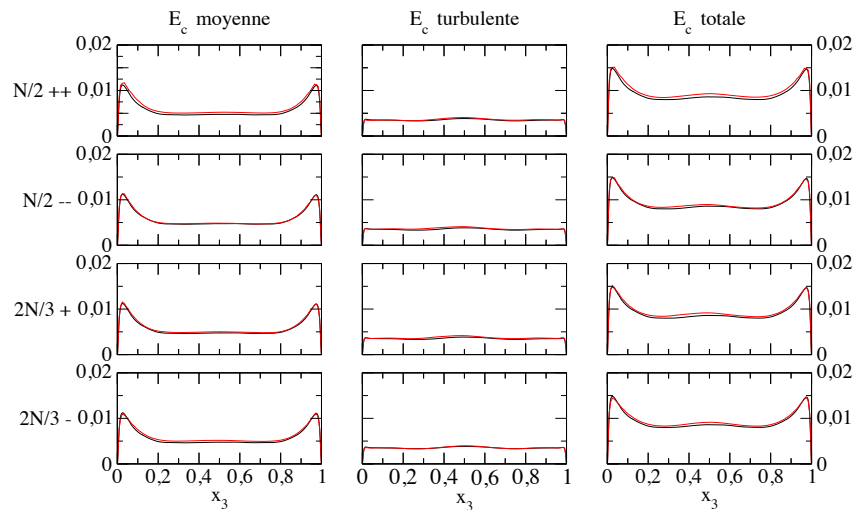


FIGURE B.9 – Profils d'énergie cinétique obtenus à  $Ra = 10^9$ , maillage  $120^3$  points, moyennés sur les plans horizontaux, pour les différents modèles SVV stables (en rouge). En noir, le profil obtenu par la DNS.

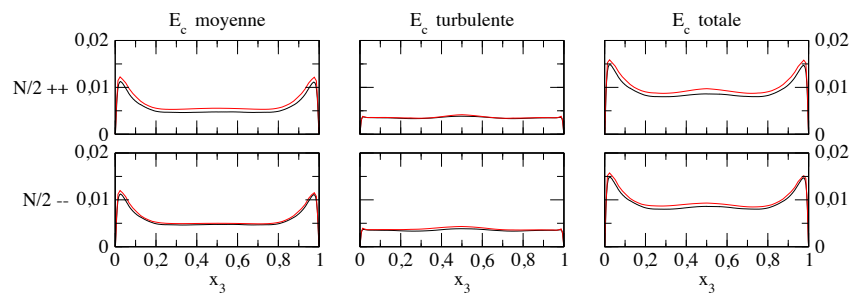


FIGURE B.10 – Profils d'énergie cinétique obtenus à  $Ra = 10^9$ , maillage  $80^3$  points, moyennés sur les plans horizontaux, pour les différents modèles SVV stables (en rouge). En noir, le profil obtenu par la DNS.

## B.3 Profils de flux

Si la précision pour le flux conductif est bonne quels que soient le paramétrage et le dégrossissement utilisés, il en va autrement pour le flux convectif qui est nettement plus sensible. La précision sur le flux convectif se dégrade fortement avec le dégrossissement et également, mais légèrement moins, pour des modes de coupure trop faibles. On assiste également à l'apparition, proche des parois horizontales, d'oscillations, dont l'amplitude augmente lorsque le mode de coupure diminue.

### B.3.1 $\text{Ra}=10^8$

Figure B.11 : maillage  $80 \times 80 \times (4 \times 20)$ .

Figure B.12 : maillage  $60 \times 60 \times (3 \times 20)$ .

### B.3.2 $\text{Ra}=10^9$

Figure B.13 : maillage  $160 \times 160 \times (8 \times 20)$ .

Figure B.14 : maillage  $120 \times 120 \times (6 \times 20)$ .

Figure B.15 : maillage  $80 \times 80 \times (4 \times 20)$ .

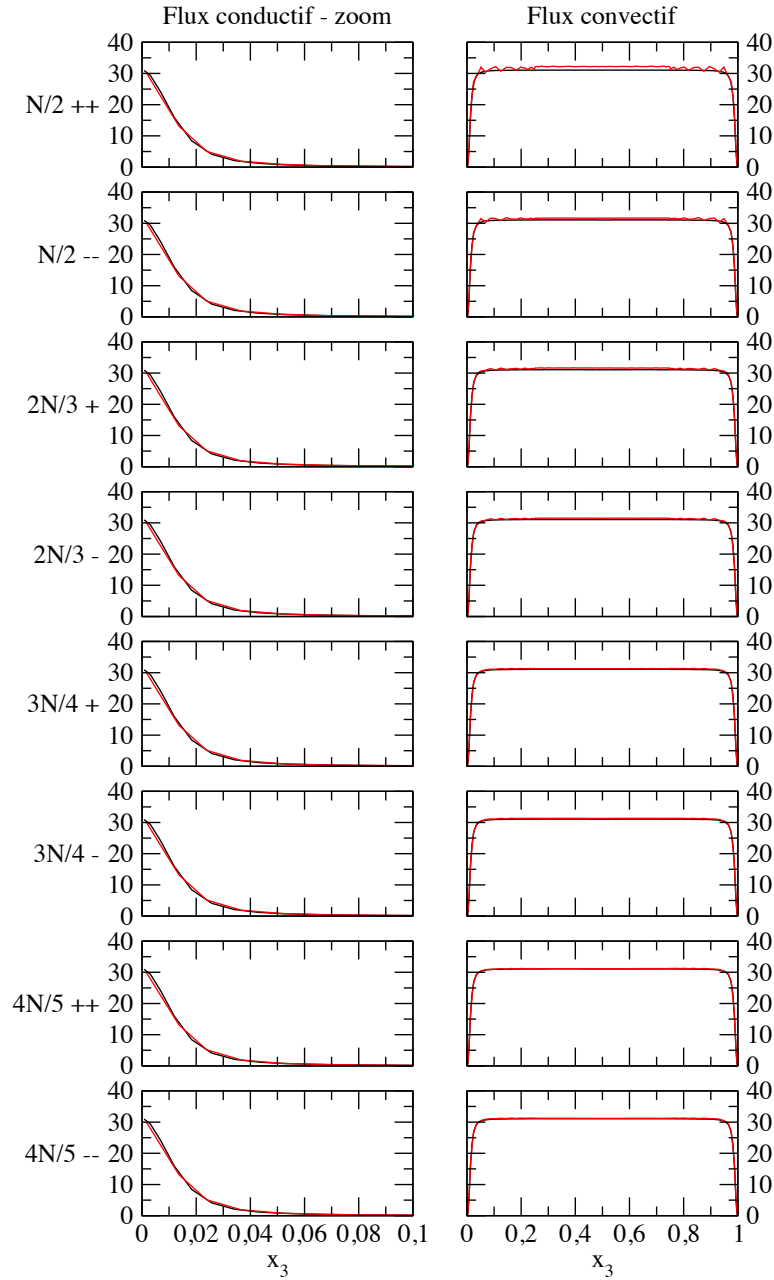


FIGURE B.11 – Profils de flux conductif et convectif obtenus à  $Ra = 10^8$ , maillage  $80^3$  points, moyennés sur les plans horizontaux, pour les différents modèles SVV stables (en rouge). En noir, le profil obtenu par la DNS. A gauche, le profil est zoomé entre les plans  $x_3 = 0$  et  $x_3 = 0.1$ .

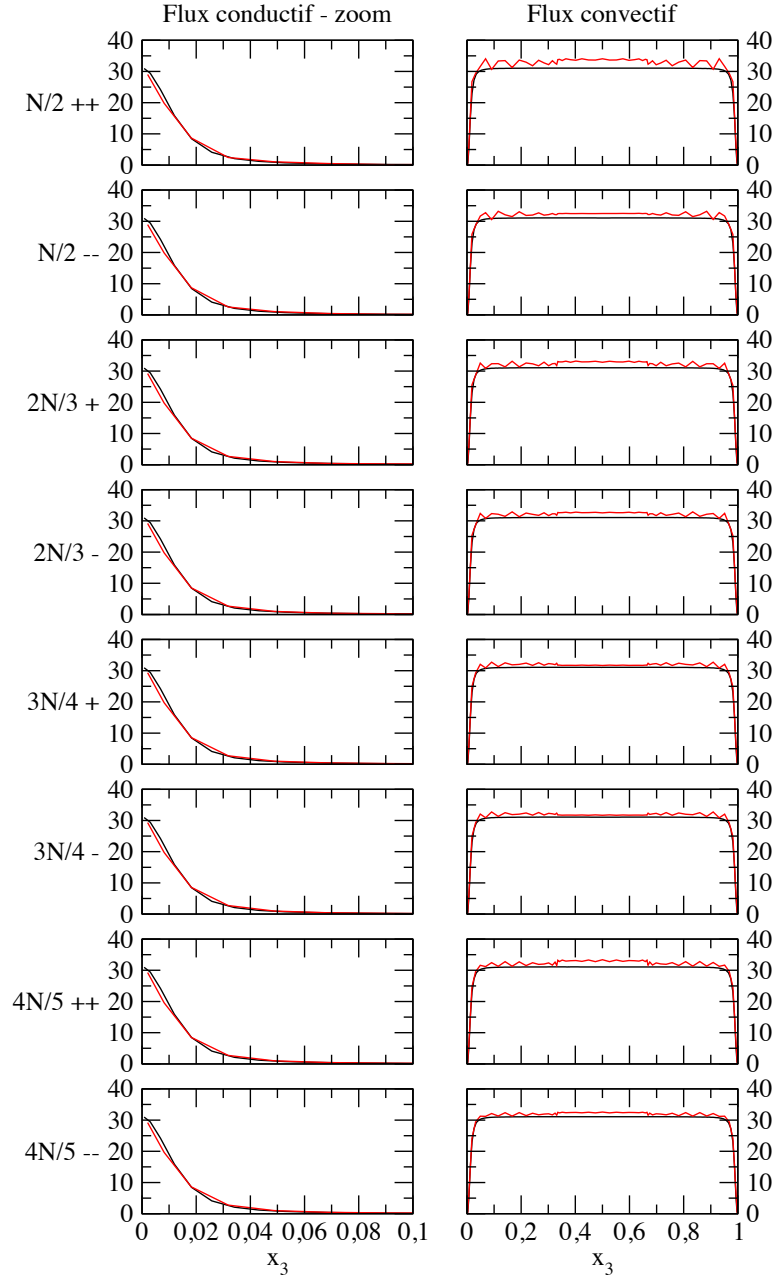


FIGURE B.12 – Profils de flux conductif et convectif obtenus à  $Ra = 10^8$ , maillage  $60^3$  points, moyennés sur les plans horizontaux, pour les différents modèles SVV stables (en rouge). En noir, le profil obtenu par la DNS. A gauche, le profil est zoomé entre les plans  $x_3 = 0$  et  $x_3 = 0.1$ .

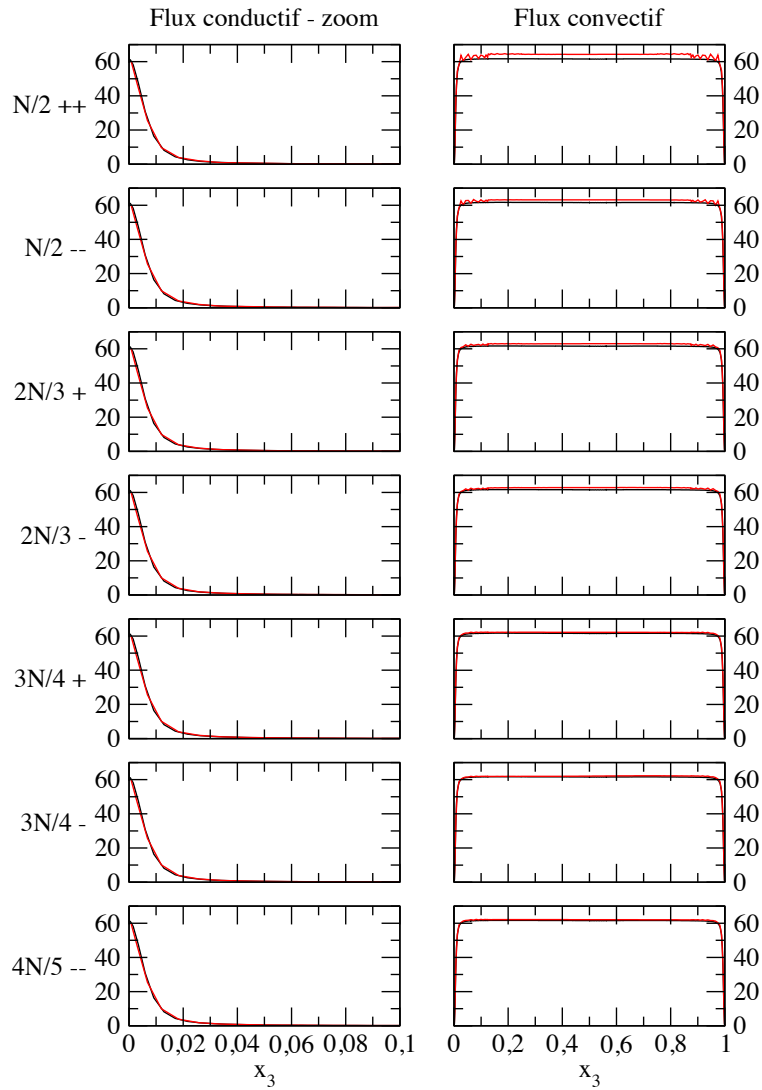


FIGURE B.13 – Profils de flux conductif et convectif obtenus à  $Ra = 10^9$ , maillage  $160^3$  points, moyennés sur les plans horizontaux, pour les différents modèles SVV stables (en rouge). En noir, le profil obtenu par la DNS. A gauche, le profil est zoomé entre les plans  $x_3 = 0$  et  $x_3 = 0.1$ .



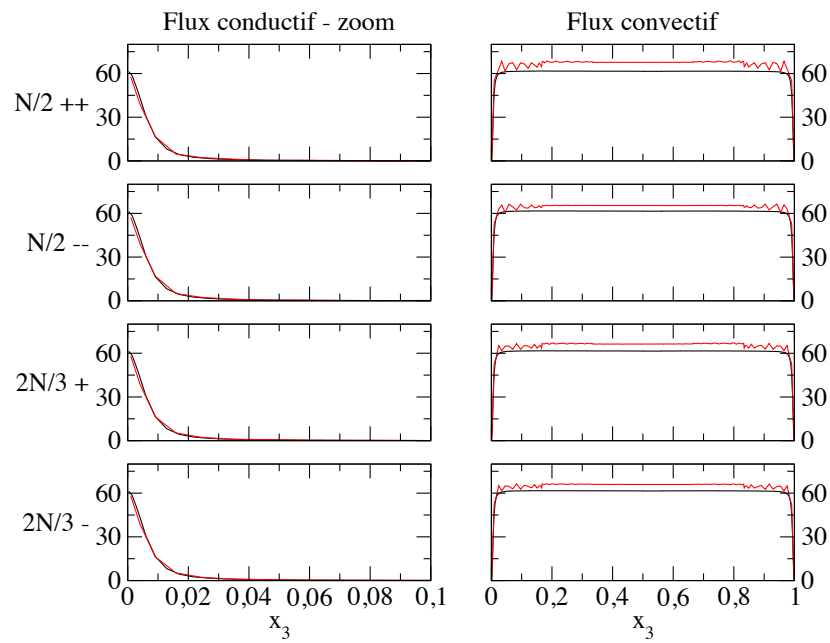


FIGURE B.14 – Profils de flux conductif et convectif obtenus à  $Ra = 10^9$ , maillage  $120^3$  points, moyennés sur les plans horizontaux, pour les différents modèles SVV stables (en rouge). En noir, le profil obtenu par la DNS. A gauche, le profil est zoomé entre les plans  $x_3 = 0$  et  $x_3 = 0.1$ .

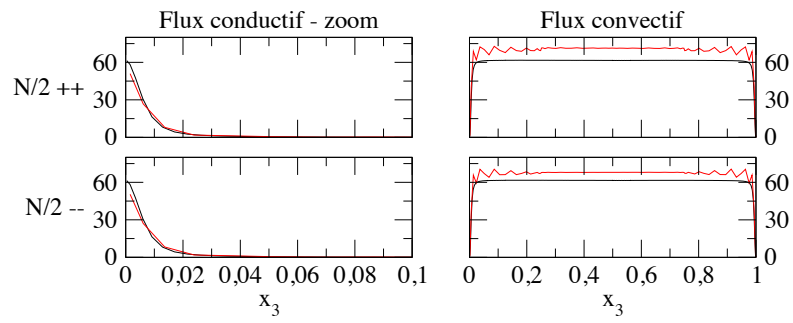


FIGURE B.15 – Profils de flux conductif et convectif obtenus à  $Ra = 10^9$ , maillage  $80^3$  points, moyennés sur les plans horizontaux, pour les différents modèles SVV stables (en rouge). En noir, le profil obtenu par la DNS. A gauche, le profil est zoomé entre les plans  $x_3 = 0$  et  $x_3 = 0.1$ .



## Annexe C

# Compléments sur l'autocorrélation

Les figures d'autocorrélation présentées dans le §4.3.2 présentent une anisotropie : les structures restent corrélées sur une plus grande distance selon les axes  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_y$  que selon la diagonale et l'antidiagonale. Ce chapitre vise à étudier ce phénomène en plusieurs temps : en premier, discuter les figures d'autocorrélation obtenues pour un champ homogène, débarrassé du mouvement moyen du fluide dans la cavité. Ensuite, les cas de l'écoulement tambour et de l'écoulement diagonal seront étudiés.

### C.1 Autocorrélation d'un champ aléatoire

L'objectif de cette partie est de générer des champs aléatoires respectant *a priori* une certaine fonction d'autocorrélation, puis d'observer la fonction d'autocorrélation obtenue par le théorème de Wiener-Khinchin. Pour générer de tels champs, la méthode employée est adaptée de celle développée dans Kritzstein et Soufiani (1993). Soit un champ de température bidimensionnel  $\theta(\mathbf{r})$  ( $\mathbf{r} = xe_x + ye_y$ ), de moyenne  $\theta_0$  (dans toute ce chapitre, on considèrera un champ de moyenne nulle :  $\theta_0 = 0$ ). On note  $\theta'(\mathbf{r}) = \theta(\mathbf{r}) - \theta_0$  les fluctuations spatiales de la température, dont on suppose que l'écart-type est  $\Theta$  et qu'elles satisfont statistiquement une loi de corrélation spatiale  $C(\mathbf{r})$  :

$$\begin{aligned}\langle \theta'(\mathbf{r}) \rangle &= 0, \\ \langle \theta(\mathbf{r})\theta(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \rangle &= \Theta^2 C(\mathbf{r}')\end{aligned}\tag{C.1}$$

$\langle \cdot \rangle$  désigne la moyenne statistique, approximée par la moyenne spatiale.

Les fluctuations de température sont initialement calculées dans l'espace de Fourier à partir d'un champ aléatoire  $\zeta(\mathbf{k})$  de nombres complexes, ayant une

densité de probabilité gaussienne et satisfaisant :

$$\begin{cases} \langle \zeta(\mathbf{k}) \rangle = 0, \\ \zeta(-\mathbf{k}) = \zeta^*(\mathbf{k}), \\ \langle \zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{k}') \rangle = \begin{cases} 1 & \text{pour } \mathbf{k}' = \pm\mathbf{k}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Dans l'espace de Fourier, on calcule alors :

$$\hat{\theta}'(\mathbf{k}) = \Theta \zeta(\mathbf{k}) \sqrt{\hat{C}(\mathbf{k})} \quad (\text{C.3})$$

Le champ de température dans l'espace physique  $\theta(\mathbf{r})$  est ensuite obtenu par transformée de Fourier inverse.

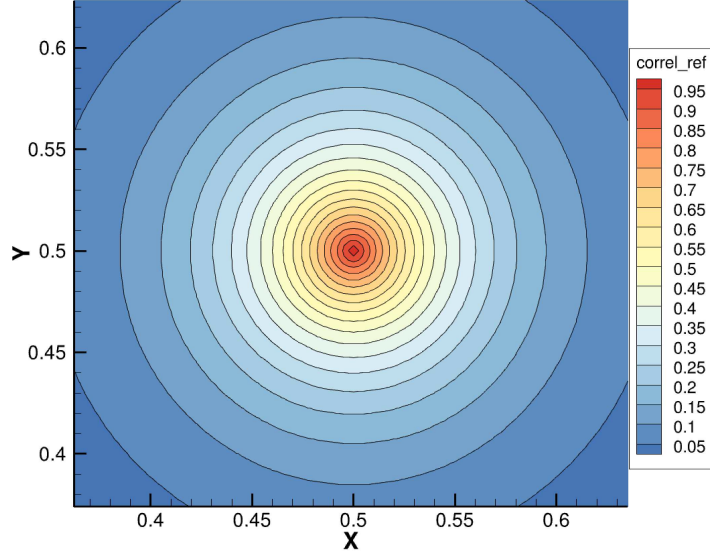


FIGURE C.1 – Fonction de corrélation de référence  $C(\mathbf{r}) = \exp(-\|\mathbf{r}\|/\Lambda)$  à partir de laquelle est calculé le champ aléatoire de température.

La fonction de corrélation choisie est de la forme  $C(\mathbf{r}) = \exp(-\|\mathbf{r}\|/\Lambda)$ , où  $\Lambda$  correspond à l'échelle intégrale des fluctuations turbulentes de la température, prise telle que  $\Lambda/L = 0.05$ . Sa représentation en deux dimensions peut être trouvée dans la figure C.1. Le champ de température est représenté dans l'espace physique sur un maillage uniforme de  $N = 400$  points dans chaque direction et la représentation Fourier de  $\theta'(\mathbf{r})$  est tronquée à  $k_{\max}^x = k_{\max}^y = 200$ . Un exemple de champ de température (de moyenne  $\theta_0 = 0$ ) obtenu par cette méthode est représenté dans la figure C.2.

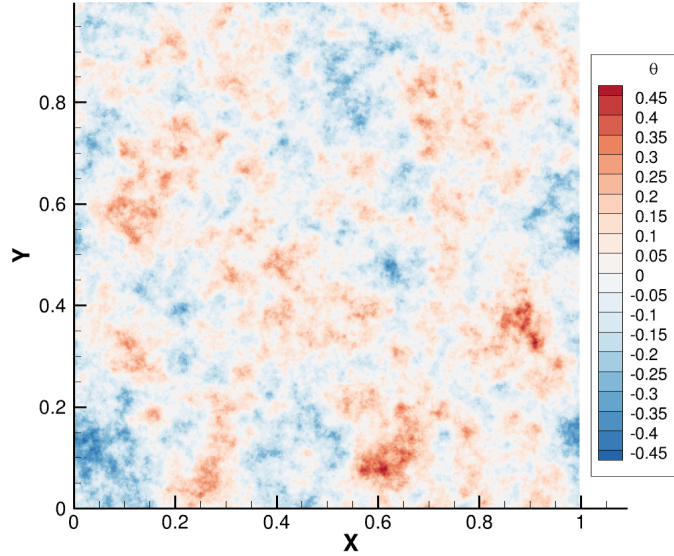


FIGURE C.2 – Champ de température aléatoire obtenu à partir de la fonction  $C$ .

Une fois le champ de température aléatoire calculé, sa fonction d'autocorrélation  $C_1(\mathbf{r})$  est calculée au moyen de la méthode exposée dans le §4.3.2. Pour lisser les variations de la fonction d'autocorrélation, une moyenne est effectuée sur un nombre  $N_{\text{snap}} = 500$  champs aléatoires.

La fonction d'autocorrélation moyenne est montrée dans la figure C.3 et une comparaison unidimensionnelle des fonctions d'autocorrélation  $C$  et  $C_1$  en fonction de la distance  $r = \|\mathbf{r}\|$  (dans toutes les directions pour  $C_1$ ) est représentée dans la figure C.4. L'accord entre la fonction de référence  $C$  et la fonction calculée  $C_1$  est très bon, particulièrement pour les faibles valeurs de  $r$ . A partir d'une certaine taille de structures ( $r \geq 0.1$ ), les effets de bord liés aux parois se font sentir et l'accord devient légèrement moins bon ; de plus, on observe une anisotropie dans la forme de la fonction d'autocorrélation  $C_1$  en raison de l'influence des parois.

En turbulence homogène isotrope, la fonction d'autocorrélation du champ de température est circulaire. Les paragraphes suivants ont pour but d'observer l'influence de l'ajout d'un champ moyen au champ aléatoire sur la forme de la fonction d'autocorrélation.

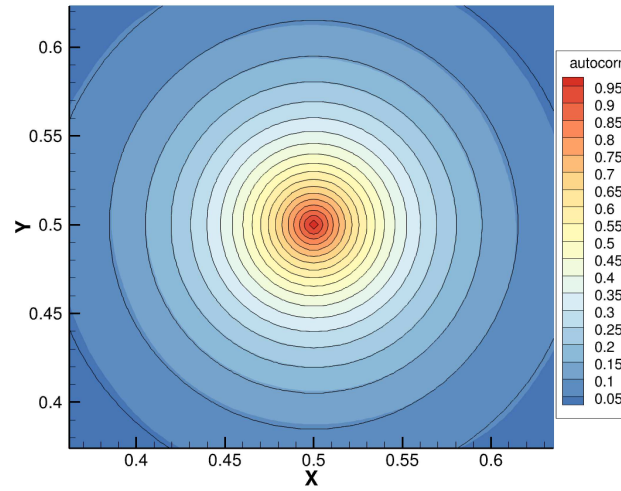


FIGURE C.3 – Fonction d’autocorrélation moyenne du champ de température aléatoire  $C_1(\mathbf{r})$ . Les lignes correspondent aux isovaleurs de la fonction de corrélation de référence  $C(\mathbf{r})$ .

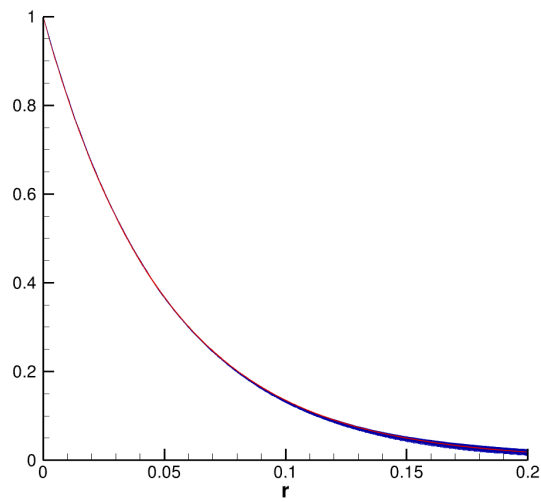


FIGURE C.4 – Comparaison unidimensionnelle des fonctions d’autocorrélation  $C$  (rouge) et  $C_1$  (bleu) en fonction de la distance  $r = \|\mathbf{r}\|$ .

## C.2 Autocorrélation d'un écoulement tambour

Dans cette section, un champ moyen simulant un écoulement tambour est ajouté au champ aléatoire  $\theta(\mathbf{r}) = \theta_{\text{moy}}(\mathbf{r}) + \theta'(\mathbf{r})$ , afin d'observer son influence sur la forme des fonctions d'autocorrélation obtenues. Le champ moyen est construit de manière analytique et deux fonctions sont envisagées pour  $\theta_{\text{moy}}(\mathbf{r})$  :

- un profil linéaire :  $\theta_{\text{moy}}^{\text{lin}}(\mathbf{r}) = (1 - x)/2$ ,
- un profil sinusoïdal :  $\theta_{\text{moy}}^{\text{sin}}(\mathbf{r}) = \sin(2\pi x)/2$ .

De tels profils de champs moyens modélisent des écoulements tambour où le fluide est en rotation autour de l'axe  $\mathbf{e}_y$ , ce qui se traduirait par des composantes du moment cinétique moyen  $L_x > 0$ ,  $L_y = 0$ .

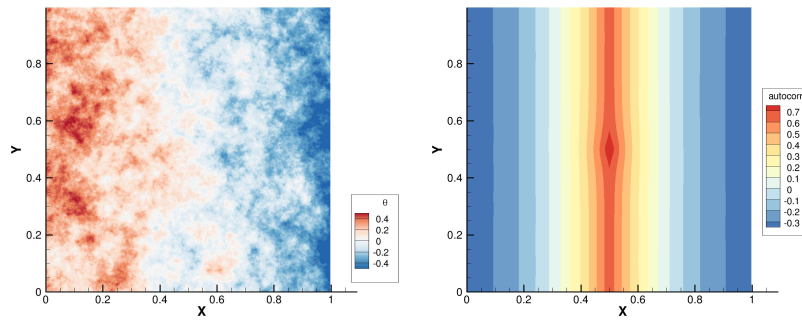


FIGURE C.5 – Exemple d'un champ de température (gauche) et fonction d'autocorrélation moyenne associée (droite) dans le cas d'un écoulement tambour simulé par un profil de température du champ moyen linéaire  $\theta_{\text{moy}}^{\text{lin}}(\mathbf{r}) = (1 - 2x)/2$ .

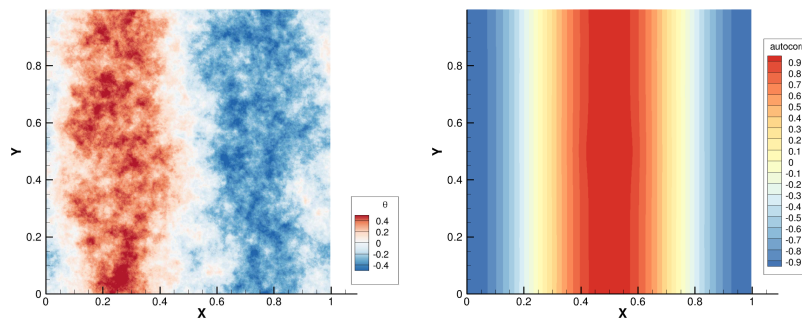


FIGURE C.6 – Exemple d'un champ de température (gauche) et fonction d'autocorrélation moyenne associée (droite) dans le cas d'un écoulement tambour simulé par un profil de température du champ moyen sinusoïdal  $\theta_{\text{moy}}^{\text{sin}}(\mathbf{r}) = \sin(2\pi x)/2$ .



Les figures C.5 et C.6 représentent, pour les profils du champ moyen linéaire et sinusoïdal respectivement, un exemple de champ obtenu ainsi que la fonction d'autocorrélation moyenne obtenue sur  $N_{\text{snap}} = 300$  champs. L'introduction d'un champ moyen modifie la forme de la fonction d'autocorrélation qui présente alors une direction privilégiée : l'autocorrélation est supérieure dans la direction  $\mathbf{e}_x$ , qui est orthogonale à la direction autour de laquelle le fluide modélisé est en rotation.

### C.3 Autocorrélation d'un écoulement diagonal

Cette section vise à représenter grossièrement, au moyen de fonctions analytiques, des champs de température similaires à ceux obtenus en DNS et présentés dans la partie 4.3.2, ainsi qu'à observer les fonctions d'autocorrélation moyennes associées. L'écoulement à représenter est diagonal ; comme pour l'écoulement tambour deux options de modélisation sont envisagées : la représentation par un profil linéaire ou sinusoïdal.

- le profil linéaire est modélisé par une fonction  $\theta_{\text{moy}}^{\text{lin}}(\mathbf{r}) = (1 - x - y)/2$ ,
- le profil sinusoïdal prend la forme  $\theta_{\text{moy}}^{\text{sin}}(\mathbf{r}) = (\sin(2\pi x) + \sin(2\pi y))/4$ .
- un profil combiné  $\theta_{\text{moy}}(\mathbf{r}) = (\theta_{\text{moy}}^{\text{lin}}(\mathbf{r}) + \theta_{\text{moy}}^{\text{sin}}(\mathbf{r}))/2$  est également étudié.

Ces profils analytique correspondent à un écoulement diagonal caractérisé par des composantes du moment cinétique moyen  $L_x < 0$  et  $L_y > 0$ .

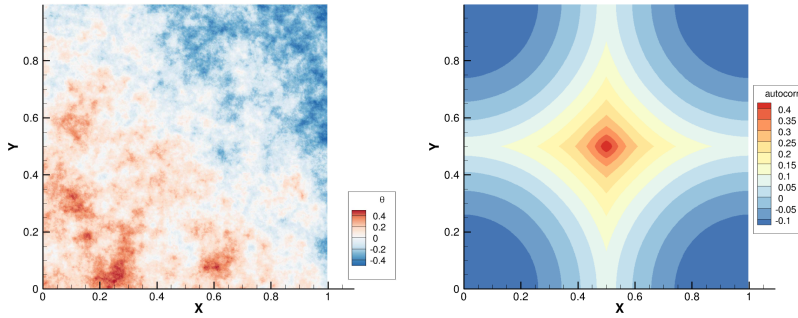


FIGURE C.7 – Exemple d'un champ de température (gauche) et fonction d'autocorrélation moyenne associée (droite) dans le cas d'un écoulement diagonal simulé par un profil de température du champ moyen linéaire  $\theta_{\text{moy}}^{\text{lin}}(\mathbf{r}) = (1 - x - y)/2$ .

Les figures C.7, C.8 et C.9 représentent chacune un exemple de champ de température modélisé ainsi que la fonction d'autocorrélation moyenne (calculée sur  $N_{\text{snap}} = 300$  champs) associée, dans les cas respectifs des profils linéaire, sinusoïdal et combiné.

Dans les trois cas, la fonction d'autocorrélation présente la même structure que celles obtenues dans la section 4.3.2, avec l'apparition de deux directions

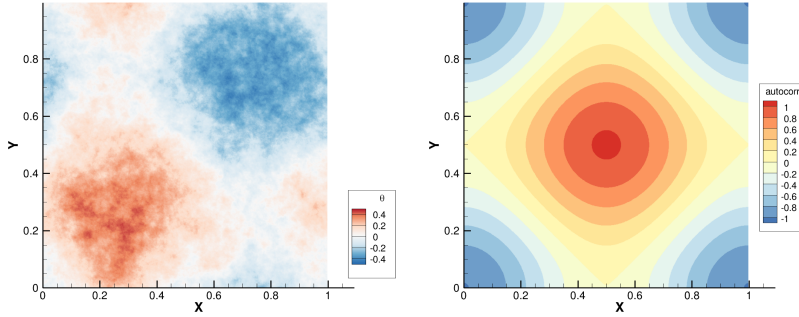


FIGURE C.8 – Exemple d'un champ de température (gauche) et fonction d'autocorrélation moyenne associée (droite) dans le cas d'un écoulement diagonal simulé par un profil de température du champ moyen sinusoïdal  $\theta_{\text{moy}}^{\text{sin}}(\mathbf{r}) = (\sin(2\pi x) + \sin(2\pi y)) / 4$ .

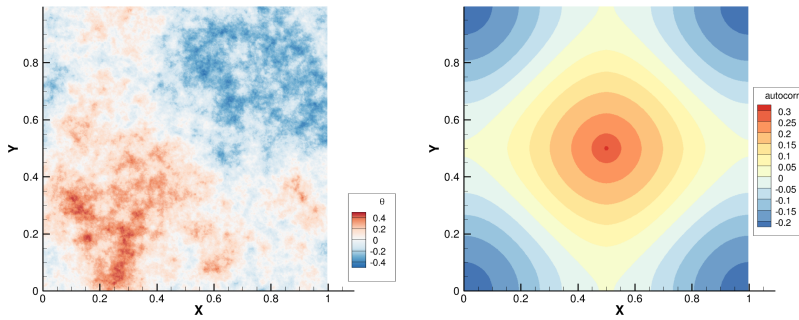


FIGURE C.9 – Exemple d'un champ de température (gauche) et fonction d'autocorrélation moyenne associée (droite) dans le cas d'un écoulement diagonal avec un profil de température du champ moyen simulé par une combinaison des différentes modélisations  $\theta_{\text{moy}}(\mathbf{r}) = (\theta_{\text{moy}}^{\text{lin}}(\mathbf{r}) + \theta_{\text{moy}}^{\text{sin}}(\mathbf{r})) / 2$ .

privilegiées  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_y$ . Le profil linéaire entraîne une forme très anguleuse de la fonction d'autocorrélation, où même les lignes d'isovaleur au centre présentent des directions privilégiées (anisotropie). A l'inverse, le profil sinusoïdal rend bien compte de l'isotropie de la fonction d'autocorrélation aux petites échelles, mais la décroissance du niveau de corrélation avec la distance est différente de celle du cas réel : pour cet aspect, le profil linéaire est plus fidèle. Le profil combiné conduit à une fonction d'autocorrélation présentant une isotropie des tailles de structures à petite échelle (grâce au profil sinusoïdal) tout en ayant une décroissance de la corrélation avec la distance plus proche de la réalité (grâce au profil linéaire) que dans le cas sinusoïdal pur.

L'accord avec les fonctions d'autocorrélation obtenues à partir des champs DNS peut cependant être amélioré. Une étude plus poussée pourrait être envisagée dans le but de trouver une modélisation analytique réduite permettant de reproduire la distribution de la taille des structures spatiales de l'écoulement.





# Bibliographie

- ACHDOU, Y. et GUERMOND, J. L. (2000). Convergence analysis of a finite element projection/lagrange-galerkin method for the incompressible navier-stokes equations. SIAM Journal of Numerical Analysis, 37(3):799–826.
- AHLERS, G., GROSSMANN, S. et LOHSE, D. (2009). Heat transfer and large scale dynamics in turbulent rayleigh-bénard convection. Review of Modern Physics, 81:503–537.
- AL-RASHED, A., KOLSI, L., HUSSEIN, A. K., HASSEN, W., AICHOUNI, M. et BORJINI, M. N. (2017). Numerical study of three-dimensional natural convection and entropy generation in a cubical cavity with partially active vertical walls. Case Studies in Thermal Engineering, 10:100–110.
- ALGHASEB, M. A., HASSEN, W., MESLOUB, A. et KOLSI, L. (2022). Effect of heat source position in fluid flow, heat transfer and entropy generation in a naturally ventilated room. Mathematics, 10(2):178.
- ANDREASSEN, O., LIE, I. et WASBERG, C. (1994). The spectral viscosity method applied to simulation of waves in a stratified atmosphere. Journal of Computational Physics, 110:257–273.
- ARAUJO, F. F., GROSSMANN, S. et LOHSE, D. (2005). Wind reversals in turbulent Rayleigh-Bénard convection. Physical Review Letters, 95:084502.
- ASWATHA, GANGADHARA GOWDA, C. J. et SEETHARAMU, S. N. S. K. N. (2012). Buoyancy driven heat transfer in cavities subjected to thermal boundary conditions at bottom wall. Journal of Applied Fluid Mechanics, 5:43–53.
- BAI, K., JI, D. et BROWN, E. (2016). Ability of a low-dimensional model to predict geometry-dependent dynamics of large-scale coherent structures in turbulence. Physical Review E, 93:023117.
- BAILON-CUBA, J., EMRAN, M. S. et SCHUMACHER, J. (2010). Aspect ratio dependence of heat transfer and large-scale flow in turbulent convection. Journal of Fluid Mechanics, 655:152–173.
- BARDINA, J., FERZIGER, J. et REYNOLDS, W. (1983). Improved turbulence models based on large eddy scale of homogeneous, incompressible, turbulent

- flows. Technical Report TF- 19, Stanford University, Dept. of Mechanical Engineering.
- BARLETTA, A. (2022). The boussinesq approximation for buoyant flows. Mechanics Research Communications, 124:103939.
- BDÉOUI, F. et SOUFIANI, A. (1997). The onset of Rayleigh–Bénard instability in molecular radiating gases. Physics of Fluids, 9:3858–3872.
- BDÉOUI, F., SOUFIANI, A. et P., L. (1998). A numerical study of rayleigh–bénard convection in radiating gases. In Proc. of 11th International Heat Transfer Conference, pp. 261-266. Taylor and Francis.
- BEJAN, A. et KRAUSS, A. D. (2003). Heat Transfer Handbook. H-John Wiley & Sons.
- BENZI, R. et VERZICCO, R. (2008). Numerical simulations of flow reversal in Rayleigh–Bénard convection. Europhysics Letters, 80(64008).
- BERKOOZ, G., HOLMES, P. et LUMLEY, J. L. (1993). The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. Annual Review of Fluid Mechanics, 25:539–575.
- BOUILLAUT, V., LEPOT, S., AUMAÎTRE, S. et GALLET, B. (2019). Transition to the ultimate regime in a radiatively driven convection experiment. Journal of Fluid Mechanics, 861(R5).
- BOUSSET, F., LYUBIMOV, D. V. et SEDEL’NIKOV, G. A. (2008). Three-dimensional convection regimes in a cubical cavity. Fluid Dynamics, 43:3–11.
- BOUSSINESQ, J. (1903). Théorie Analytique de la Chaleur, Vol. 2. Gauthier-Villars, Paris.
- BRENT, A. D., VOLLER, V. R. et REID, K. J. (1988). Enthalpy-porosity technique for modeling convection-diffusion phase change : application to the melting of a pure metal. Numerical Heat Transfer, 13:297–318.
- BROWN, E. et AHLERS, G. (2007). Large-scale circulation model for turbulent Rayleigh–Bénard convection. Physical Review Letters, 98:134501.
- BROWN, E. et AHLERS, G. (2008). Azimuthal asymmetries of the large-scale circulation in turbulent Rayleigh–Bénard convection. Physics of Fluids, 20:105105.
- BROWN, E., NIKOLAENKO, A. et AHLERS, G. (2005). Reorientation of the large-scale circulation in turbulent Rayleigh–Bénard convection. Physical Review Letters, 95:084503.
- BÉNARD, H. (1901). Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent,. Annales de chimie et de physique, Série 7, 23:62–144.

- CADET, L. (2015). Etude du couplage convection-rayonnement en cavité différentiellement chauffée à haut nombre de Rayleigh en ambiances habitables. Thèse de doctorat, Université de La Rochelle, France.
- CANUTO, C., HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A. et ZANG, T. A. (2006a). Spectral methods. 1. Fundamentals in single domains. Springer Verlag.
- CANUTO, C., HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A. et ZANG, T. A. (2006b). Spectral methods. 2. Evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics. Springer Verlag.
- CATTON, I. (1972). The effect of insulating vertical walls on the onset of motion in a fluid heated from below. International Journal of Heat and Mass Transfer, 15:665.
- CHANDRA, M. et VERMA, M. K. (2011). Dynamics and symmetries of flow reversals in turbulent convection. Physical Review E, 83:067303.
- CHANDRASEKHAR, S. (1944). On the radiative equilibrium of a stellar atmosphere ii. The Astrophysical Journal, 100:76–86.
- CHANDRASEKHAR, S. (1950). Radiative Transfer. London : Oxford University Press.
- CHANDRASEKHAR, S. (1981). Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Dover, New York.
- CHAPMAN, D. R. et KUHN, G. D. (1986). The limiting behavior of turbulence near a wall. Journal of Fluid Mechanics, 170:265–292.
- CHAVANNE, X., CHABAUD, F. C. B., , CASTAING, B. et HEBRAL, B. (2001). Turbulent Rayleigh-Bénard convection in gaseous and liquid he. Physics of Fluids, 13(5):1300–1320.
- CHAVANNE, X., CHILLA, F., CASTAING, B., HEBRAL, B., CHABAUD, B. et CHAUSSY, J. (1997). Observation of the ultimate regime in Rayleigh-Bénard convection. Physics Review Letter, 79:3648–3651.
- COOPER, P. et LINDEN, P. F. (1996). Natural ventilation of an enclosure containing two buoyancy sources. Journal of Fluid Mechanics, 311:153–176.
- DABBAGH, F., TRIAS, F. X., GOROBETS, A. et OLIVA, A. (2016a). New subgrid-scale models for large-eddy simulation of rayleigh-bénard convection. Journal of Physics : Conference Series, 745:032041.
- DABBAGH, F., TRIAS, F. X., GOROBETS, A. et OLIVA, A. (2016b). On the evolution of flow topology in turbulent rayleigh-bénard convection. Physics of Fluids, 28:115105.



- DAIRAY, T., FORTUNÉ, V., LAMBALLAIS, E. et BRIZZI, L. (2014). Les of a turbulent jet impinging on a heated wall using high-order numerical schemes. International Journal of Heat and Fluid Flow, 50:177–187.
- DAIRAY, T., LAMBALLAIS, E., LAIZET, S. et VASSILICOS, J. (2017). Numerical dissipation vs. subgrid-scale modelling for large eddy simulation. Journal of computational Physics, 337:252–274.
- DELORT-LAVAL, M., SOUCASSE, L., RIVIÈRE, P. et SOUFIANI, A. (2022). Rayleigh–bénard convection in a cubic cell under the effects of gas radiation up to  $ra=10^9$ . International Journal of Heat and Mass Transfer, 187:122453.
- EIDSON, T. (1985). Numerical simulation of the turbulent rayleigh–bénard problem using subgrid modelling. Journal of Fluid Mechanics, 158:245–268.
- FIVELAND, W. A. (1982). A discrete ordinates method for predicting radiative heat transfer in axisymmetric enclosures. ASME Paper, pages No. 82–HT–20.
- FIVELAND, W. A. (1984). Discrete-ordinates solutions of the radiative transport equation for rectangular enclosures. Journal of Heat Transfer, 106:699–706.
- FIVELAND, W. A. (1987). Discrete ordinate methods for radiative heat transfer in isotropically and anisotropically scattering media. Journal of Heat Transfer, 109:809–812.
- FOLKINS, I., FUEGLISTALER, S., LESINS, G. et MITOVSKI, T. (2008). A low-level circulation in the tropics. Journal of the Atmospheric Science, 65:1019–1034.
- FORNARELLI, F., CAMPOREALE, S. M. et FORTUNATO, B. (2021). Convective effects in a latent heat thermal energy storage. Heat Transfer Engineering, 42:1–22.
- FOROOZANI, N., NIEMELA, J. J., ARMENIO, V. et SREENIVASAN, K. R. (2017). Reorientations of the large-scale flow in turbulent convection in a cube. Physical Review E, 95:033107.
- FOROOZANI, N., NIEMELA, J. J., ARMENIO, V. et SREENIVASAN, K. R. (2019). Turbulent convection and large scale circulation in a cube with rough horizontal surfaces. Physical Review E, 99:033116.
- F.X.TRIAS, A.GOROBETS, M.SORIA et A.OLIVA (2010a). Direct numerical simulation of a differentially heated cavity of aspect ratio 4 with rayleigh numbers up to  $10^{11}$  – part i : Heat transfer and flow dynamics. International Journal of Heat and Mass Transfer, 53:674–683.
- F.X.TRIAS, A.GOROBETS, M.SORIA et A.OLIVA (2010b). Direct numerical simulation of a differentially heated cavity of aspect ratio 4 with rayleigh numbers up to  $10^{11}$  – part i : Numerical methods and time-averaged flow. International Journal of Heat and Mass Transfer, 53:665–673.

- GEBHART, B. (1962). Effects of viscous dissipation in natural convection. Journal of Fluid Mechanics, 14:225–232.
- GERMANO, M., PIOMELLI, U., MOIN, P. et CABOT, W. H. (1991). A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. Physics of Fluids, 7:1760–1765.
- GIANNAKIS, D., KOLCHINSKAYA, A., KRASNOV, D. et SCHUMACHER, J. (2018). Koopman analysis of the long-term evolution in a turbulent convection cell. Journal of Fluid Mechanics, 847:735–767.
- GILLE, J. et GOODY, R. (1964). Convection in a radiating gas. Journal of Fluid Mechanics, 20:47–79.
- GOODY, R. M. (1956). The influence of radiative transfer on cellular convection. Journal of Fluid Mechanics, 1:424–435.
- GRAY, D. et GIORGINI, A. (1976). The validity of the boussinesq approximation for liquids and gases. International Journal of Heat and Mass Transfer, 19: 545–551.
- GROSSMANN, S. et LOHSE, D. (2000). Scaling in thermal convection : a unifying theory. Journal of Fluid Mechanics, 407:27–56.
- GROSSMANN, S. et LOHSE, D. (2004). Fluctuations in turbulent rayleigh-benard convection : The role of plumes. Physics of Fluids, 16:4462–4472.
- HARTMANN, D. L., MOY, L. A. et FU, Q. (2001). Tropical convection and the energy balance at the top of the atmosphere. Journal of Climate, 14:4495–4511.
- HUNT, G. R. et LINDEN, P. F. (1999). The fluid mechanics of natural ventilation - displacement ventilation by buoyancy-driven flows assisted by wind. Building and Environment, 34:707–720.
- HUNT, J. C. R., WRAY, A. A. et MOIN, P. (1988). Eddies, streams and convergence zones in turbulent flows. In Center for Turbulence Research, Proceedings of the Summer Program.
- HYDE, D. J. et TRUELOVE, J. S. (1977). The discrete ordinates approximation for multidimensional radiant heat transfer in furnaces. UKAEA Report, No AERE-R8502.
- IBRAHIM, A. et LEMONNIER, D. (2009). Numerical study of coupled double-diffusive natural convection and radiation in a square cavity filled with a  $n_2$ - $co_2$  mixture. International Communications in Heat and Mass Transfer, 36:197–202.
- JEANS, J. H. (1917). The equations of radiative transfer of energy. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 78:28–36.

- JI, D. et BROWN, E. (2020). Low-dimensional model of the large-scale circulation of turbulent Rayleigh-Bénard convection in a cubic container. Physical Review Fluids, 5:064606.
- J.PATTERSON et IMBERGER, J. (1980). Unsteady natural convection in a rectangular cavity. Journal of Fluid Mechanics, 100:65–86.
- KACZOROWSKI, M. et XIA, K.-Q. (2013). Turbulent flow in the bulk of Rayleigh-Bénard convection : small-scale properties in a cubic cell. Journal of Fluid Mechanics, 722:596–617.
- KARAMANOS, G. et KARNIADAKIS, G. (2000). A spectral vanishing viscosity method for large eddy simulations. Journal of Computational Physics, 163:22–50.
- KOGAWA, T., OKAJIMA, J., SAKURAI, A., KOMIYA, A. et MARUYAMA, S. (2017). Influence of radiation effect on turbulent natural convection in cubic cavity at normal temperature atmospheric gas. International Journal of Heat and Mass Transfer, 104:456–466.
- KOGAWA, T., SHOJI, E., OKAJIMA, J., KOMIYA, A. et MARUYAMA, S. (2019). Experimental evaluation of thermal radiation effects on natural convection with a Rayleigh number of  $10^8$ - $10^9$  by using an interferometer. International Journal of Heat and Mass Transfer, 132:1239–1249.
- KORENAGA, J. (2017). Pitfalls in modeling mantle convection with internal heat production. Journal of Geophysical Research : Solid Earth, 122:4064–4085.
- KRITZSTEIN, F. et SOUFIANI, A. (1993). Infrared gas radiation from a homogeneously turbulent medium. International Journal of Heat and Mass Transfer, 36:1749–1762.
- LAMBALLAIS, E., FORTUNÉ, V. et LAIZET, S. (2011). Straightforward high-order numerical dissipation via the viscous term for direct and large eddy simulation. Journal of computational Physics, 230:3270–3275.
- LAN, C. H., EZEKOYE, O. A., HOWELL, J. R. et BALL, K. S. (2003). Stability analysis for three-dimensional Rayleigh-Bénard convection with radiatively participating medium using spectral methods. International Journal of Heat and Mass Transfer, 46:1371–1383.
- LATHROP, K. D. (1966). Use of discrete-ordinates methods for solution of photon transport problems. Nuclear Science and Engineering, 24:381–388.
- LAVENDER, K. L., DAVIS, R. E. et OWENS, W. B. (2002). Observations of open-ocean deep convection in the labrador sea from subsurface floats. Journal of Physical Oceanography, 32:511–526.
- LE QUÉRÉ, P. (1991). Accurate solutions to the square thermally driven cavity at high rayleigh number. Computers and Fluids, 20(1):29–41.

- LE QUÉRÉ, P. et ALZIARY DE ROQUEFORT, T. (1985). Computation of natural convection in two-dimensional cavities with chebyshev polynomial. Journal of Computational Physics, 57:210–228.
- LEE, C. E. (1962). The discrete sn approximation to transport theory. Lawrence Livermore Laboratory, Technical Information Series Report No. LA 2595.
- LELE, S. K. (1992). Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. Journal of Computational Physics, 103:16–42.
- LEONG, W., HOLLANDS, K. et BRUNGER, A. (1999). Experimental Nusselt numbers for a cubical-cavity benchmark problem in natural convection. International Journal of Heat and Mass Transfer, 42(11):1979–1989.
- LEPOT, S., AUMAÎTRE, S. et GALLET, B. (2018). Radiative heating achieves the ultimate regime of thermal convection. Proceedings of the National Academy of Sciences, 115(36).
- LILLY, D. K. (1992). A proposed modification of the germano subgrid-scale closure method. Physics of Fluid, 4:633–635.
- LOHSE, D. et XIA, K.-Q. (2010). Small-scale properties of turbulent Rayleigh-Bénard convection. Annual Review of Fluid Mechanics, 42(1):335–364.
- MA, H. (1998a). Chebyshev–legendre spectral viscosity method for nonlinear conservation laws. SIAM Journal of Numerical Analysis, 35:869–892.
- MA, H. (1998b). Chebyshev–legendre super spectral viscosity method for nonlinear conservation laws. SIAM Journal of Numerical Analysis, 35:893–908.
- MADAY, Y., KABER, S. M. O. et TADMOR, E. (1993). Legendre pseudospectral viscosity method for nonlinear conservation laws. SIAM Journal of Numerical Analysis, 30:321–342.
- MADAY, Y. et TADMOR, E. (1989). Analysis of the spectral vanishing viscosity for periodic conservation laws. Siam Journal on Numerical Analysis, 26:854–870.
- MALKUS, W. (1954). The heat transport and spectrum of thermal turbulence. Proceeding of the Royal Society, 225:1161.
- MARICHAL, J. et PAPAEXANDRIS, M. V. (2022). On the dynamics of the large scale circulation in turbulent convection with a free-slip upper boundary. International Journal of Heat and Mass Transfer, 183:122220.
- MARSHALL, J. et SCHOTT, F. (1999). Open-ocean convection : Observations, theory, and models. Reviews of Geophysics, 37:1–64.
- MCKENZIE, D. P., ROBERTS, J. M. et WEISS, N. O. (1974). Convection in the earth’s mantle : towards a numerical simulation. Journal of Fluid Mechanics, 62:465–538.

- MEFTAH, S., and D. LEMONNIER, A. I. et BENBRIK, A. (2009). Coupled radiation and double diffusive convection in nongray air- $CO_2$  and air- $H_2O$  mixtures in cooperating situations. Numerical Heat Transfer, Part A, 56:1–19.
- MINGUEZ, M., PASQUETTI, R. et SERRE, E. (2008). High-order large-eddy simulation of flow over the “ahmed body” car model. Physics of Fluids, 20:095101.
- MISHRA, P. K., DE, A. K., VERMA, M. K. et ESWARAN, V. (2011). Dynamics of reorientations and reversals of large-scale flow in Rayleigh-Bénard convection. Journal of Fluid Mechanics, 668:480–499.
- MODEST, M. F. (2003). Radiative heat transfer 2nd edition. Academic Press, New York.
- MODEST, M. F. et LEI, S. (2012). The simplified spherical harmonics method for radiative heat transfer. Journal of Physics Conference Series, 369:012019.
- NICOUD, F. et DUCROS, F. (1999). Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor. Flow, Turbulence and Combustion, 62:183–200.
- NICOUD, F., TODA, H. B., CABRIT, O., BOSE, S. et LEE, J. (2011). Using singular values to build a subgrid-scale model for large eddy simulations. Physics of Fluids, 23:085106.
- NIEMELA, J. J., SKRBEK, L., SREENIVASAN, K. R. et DONNELLY, R. J. (2000). Turbulent convection at very high rayleigh numbers. Nature, 404:837–840.
- OBERBECK, A. (1879). Über die wärmeleitung der flüssigkeiten bei berücksichtigung der stömungen infolge von temperatur differenzen. Annalen der Physik, 7:271–292.
- PALLARES, J., CUESTA, I. et GRAU, F. (2002). Laminar and turbulent rayleigh-bénard convection in a perfectly conducting cubical cavity. International Journal of Heat and Fluid Flow, 23:346–358.
- PALLARES, J., GRAU, F. et GIRALT, F. (1999). Flow transitions in laminar rayleigh-bénard convection in a cubical cavity at moderate rayleigh numbers. International Journal of Heat and Mass Transfer, 42:753–769.
- PASQUETTI, R. (2006). Spectral vanishing viscosity method for large-eddy simulation of turbulent flows. Journal of scientific Computing, 27:365–375.
- PASQUETTI, R., BWEMBA, R. et COUSIN, L. (2008). A pseudo-penalization method for high reynolds number unsteady flows. Applied Numerical Mathematics, 58:946–954.
- PASQUETTI, R. et XU, C. J. (2002). High-order algorithms for large-eddy simulation of incompressible flows. Journal of scientific Computing, 17:273–284.

- PEPPER, D. W. et HOLLANDS, K. G. T. (2002). Summary of benchmark numerical studies for 3-D natural convection in an air-filled enclosure. Numerical Heat Transfer, Part A : Applications, 42(1-2):1–11.
- PIERROT, L., RIVIÈRE, P., SOUFIANI, A. et TAINE, J. (1999). A fictitious-gas-based absorption distribution function global model for radiative transfer in hot gases. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 62:609–624.
- PITZ, D., CHEWA, J. et MARXEN, O. (2019). Effect of an axial throughflow on buoyancy-induced flow in a rotating cavity. International Journal of Heat and Fluid Flow, 80:108468.
- PODVIN, B. et LE QUÉRÉ, P. (2001). Low-order models for the flow in a differentially heated cavity. Physics of Fluids, 13(11):3204–3214.
- PODVIN, B. et SERGENT, A. (2012). Proper orthogonal decomposition investigation of turbulent Rayleigh-Bénard convection in a rectangular cavity. Physics of Fluids, 24:105106.
- PUIGJANER, D., HERRERO, J., GIRALT, F., et SIMÓ, C. (2004). Stability analysis of the flow in a cubical cavity heated from below. Physics of Fluids, 16(10):3639.
- PUIGJANER, D., HERRERO, J., SIMÓ, C. et GIRALT, F. (2008). Bifurcation analysis of steady Rayleigh-Bénard convection in a cubical cavity with conducting sidewalls. Journal of Fluid Mechanics, 598:393–427.
- RAYLEIGH, J. W. (1916). On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Sixth series, 32: 529–546.
- ROTHMAN, L. S., GORDON, I. E., BARBE, A., D., C. B., BERNATH, P. F., BIRK, M., BOUDON, V., BROWN, L. R., CAMPARGUE, A., CHAMPION, J. P., CHANCE, K., COUDERT, L. H., DANA, V., DEVI, V., FALLY, S., FLAUD, J. M., GAMACHE, R. R., GOLDMAN, A., JACQUEMART, D., KLEINER, I., LACOME, N., LAFFERTY, W. J., MANDIN, J. Y., MASSIE, S. T., MIKHAILENKO, S. N., MILLER, C. E., MOAZZEN-AHMADI, N., NAUMENKO, O. V., NIKITIN, A. V., ORPHAL, J., PEREVALOV, V. I., PERRIN, A., PREDOI-CROSS, A., RINSLAND, C. P., ROTGER, M., ŠIMEČKOVÀ, M., SMITH, M. A. H., SUNG, K., TASHKUN, S. A., TENNYSON, J., TOTH, R. A., VANDAELE, A. C. et VANDER AUWERA, J. (2009). The hitran 2008 molecular spectroscopic database. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 110:533–572.
- SAGAUT, P. (1995). Simulations numériques d'écoulements décollés avec des modèles de sous-maille. Thèse de doctorat, Université Paris 6, France.

- SAGAUT, P. (1998). Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluide incompressible, Mathématique et Applications. Springer édition.
- SAGAUT, P., TROFF, B., LÊ, T. et LOC, T. P. (1996). Large eddy simulation of turbulent flow past a backward facing step with a new mixed scale sgs model. Notes on Numerical Fluid Mechanics, 49:271–277.
- SAKURAI, A., KANBAYASHI, R., MATSUBARA, K. et MARUYAMA, S. (2011). Radiative heat transfer analysis in a turbulent natural convection obtained from direct numerical simulation. Journal of Thermal Science and Technology, 6(3):449–462.
- SAKURAI, A., MATSUBARA, K., TAKAKUWA, K. et KANBAYASHI, R. (2012). Radiation effects on mixed turbulent natural and forced convection in a horizontal channel using direct numerical simulation. International Journal of Heat and Mass Transfer, 55:2539–2548.
- SAMEEN, A., VERZICCO, R. et SREENIVASAN, K. R. (2009). Specific roles of fluid proper ties in non-boussinesq thermal convection at the rayleigh number of  $2 \times 10^8$ . Europhysics Letters, 86:14006.
- SERGET, A., JOUBERT, P. et QUÉRÉ, P. L. (2003). Development of a local subgrid diffusivity model for large-eddy simulation of buoyancy-driven flows : Application to a square differentially heated cavity. Numerical Heat Transfer ; Part A : Applications, 44 :8:789–810.
- SERGET, A., JOUBERT, P., QUÉRÉ, P. L. et TENAUD, C. (2000). Extension du modèle d'échelles mixtes à la diffusivité de sous-maille. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Série Iib : Mécanique, pages 891–897.
- SERGET, A. et LE QUÉRÉ, P. (2011). Long time evolution of large-scale patterns in a rectangular rayleigh-bénard cell. Journal of Physics : Conference Series, 318:082010.
- SHOUGUO, D., YANG, P., WENG, F., LIU, Q., HAN, Y., van DELST, P., LI, J. et BAUM, B. (2011). Validation of the community radiative transfer model. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 112:1050–1064.
- SIEGEL, R. et HOWELL, J. (2002). Thermal radiation heat transfer 4th edition. Taylor & Francis.
- SIROVICH, L. (1987). Turbulence and the dynamic of coherent structures. Part I : Coherent structures. Quarterly of Applied Mathematics, 45(3):561–571.
- SMAGORINSKY, J. (1963). General circulation experiment with the primitive equations. Monthly Weather Review, 91:99–164.

- SOUCASSE, L. (2013). Effets des transferts radiatifs sur les écoulements de convection naturelle dans une cavité différentiellement chauffée en régimes transitionnel et faiblement turbulent. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, France.
- SOUCASSE, L., PODVIN, B., RIVIÈRE, Ph. et SOUFIANI, A. (2019). Proper orthogonal decomposition analysis and modelling of large-scale flow reorientations in a cubic Rayleigh-Bénard cell. Journal of Fluid Mechanics, 881:23–50.
- SOUCASSE, L., PODVIN, B., RIVIÈRE, Ph. et SOUFIANI, A. (2020). Reduced-order modelling of radiative transfer effects on Rayleigh-Bénard convection in a cubic cell. Journal of Fluid Mechanics, 898:A2.
- SOUCASSE, L., PODVIN, B., RIVIÈRE, Ph. et SOUFIANI, A. (2021). Low-order models for predicting radiative transfer effects on Rayleigh-Bénard convection in a cubic cell at different rayleigh numbers. Journal of Fluid Mechanics, 917:A5.
- SOUCASSE, L., RIVIÈRE, Ph. et SOUFIANI, A. (2014a). Effects of molecular gas radiation on Rayleigh-Bénard convection in a 3D cubical cavity. In Proceedings of the 15th International Heat Transfer Conference, pages IHTC15–9563.
- SOUCASSE, L., RIVIÈRE, Ph. et SOUFIANI, A. (2014b). Subgrid-scale model for radiative transfer in turbulent participating media. Journal of Computational Physics, 257, Part A:442–459.
- SOUCASSE, L., RIVIÈRE, Ph. et SOUFIANI, A. (2016). Natural convection in a differentially heated cubical cavity under the effects of wall and molecular gas radiation at Rayleigh numbers up to  $3 \times 10^9$ . International Journal of Heat and Fluid Flow, 61-B:510–530.
- SOUCASSE, L., RIVIÈRE, Ph., SOUFIANI, A., XIN, S. et LE QUÉRÉ, P. (2014c). Transitional regimes of natural convection in a differentially heated cavity under the effects of wall and molecular gas radiation. Physics of Fluids, 26:024105.
- SOUCASSE, L., RIVIÈRE, Ph., XIN, S., LE QUÉRÉ, P. et SOUFIANI, A. (2012). Numerical study of coupled molecular gas radiation and natural convection in a differentially heated cubical cavity. Computational Thermal Sciences, 4:335–350.
- SOUFIANI, A. (1991). Temperature turbulence spectrum for high-temperature radiating gases. Journal of Thermophysics, 5(4):489–494.
- SPIEGEL, E. A. (1957). The smoothing of temperature fluctuations by radiative transfer. Astrophysical Journal, 126:202–207.
- SPIEGEL, E. A. (1960). The convective instability of a radiating fluid layer. Astrophysical Journal, 132:716–728.



- SREENIVASAN, K. R., BERSHADSKI, A. et NIEMELA, J. J. (2002). Mean wind and its reversal in thermal convection. Physical Review E, 65(056306).
- SU, M., CHEN, Q. et CHIANG, C.-M. (2001). Comparison of different subgrid-scale models of large eddy simulation for indoor airflow modeling. Journal of Fluids Engineering, 123:628–639.
- TADMOR, E. (1989). Convergence of spectral methods for nonlinear conservation laws. Siam Journal on Numerical Analysis, 26:30–44.
- TENNEKES, H. et LUMLEY, J. L. (1972). A first course in turbulence. MIT press.
- TRIAS, F. X., FOLCH, D., GOROBETS, A. et OLIVIA, A. (2015). Building proper invariants for eddy-viscosity subgrid-scale models. Physics of Fluids, 27:065103.
- TRIAS, F. X., SORIA, M., OLIVA, A. et PÉREZ-SEGARRA, C. D. (2007). Direct numerical simulation of a two- and three-dimensional turbulent natural convection flows in a differentially heated cavity of aspect ratio 4. Journal of Fluid Mechanics, 586:259–293.
- TRIC, E., LABROSSE, G. et BETROUNI, M. (2000). A first incursion into the 3d structure of natural convection of air in a differentially heated cubic cavity, from accurate numerical solutions. International Journal of Heat and Mass Transfer, 43:4043–4056.
- TRUELOVE, J. S. (1987). Discrete-ordinates solutions of the radiation transport equation. Journal of Heat Transfer, 109:1048–1051.
- VAN DER POEL, E. P., VERZICCO, R., GROSSMANN, S. et LOHSE, D. (2015). Plume emission statistics in turbulent Rayleigh-Bénard convection. Journal of Fluid Mechanics, 772:5–15.
- VANEL, J. M., PEYRET, R. et BONToux, P. (1986). A pseudo-spectral solution of vorticity-stream-function equations using the influence matrix technique. Numerical Methods for Fluid Dynamics, 2:463–475.
- VASILIEV, A., SUKHANOVSKII, A., FRICK, P., BUDNIKOV, A., FOMICHEV, V., BOLSHUKHIN, M. et ROMANOV, R. (2016). High Rayleigh number convection in a cubic cell with adiabatic sidewalls. International Journal of Heat and Mass Transfer, 102:201–212.
- VERMA, M. K., KUMAR, A. et PANDEY, A. (2017). Phenomenology of buoyancy-driven turbulence : recent results. New Journal of Physics, 19:025012.
- VREMAN, A. W. (2004). An eddy-viscosity subgrid-scale model for turbulent shear flow : Algebraic theory and applications. Physics of Fluids, 16:3670–3681.

- WANG, Y., LAI, P.-Y., SONG, H. et TONG, P. (2018). Mechanism of large-scale flow reversals in turbulent thermal convection. Science Advance, 4:eaat7480.
- WANG, Y., SERGENT, A., SAURY, D., LEMONNIER, D. et JOUBERT, P. (2020). Numerical study of an unsteady confined thermal plume under the influence of gas radiation. International Journal of Thermal Sciences, 156:106474.
- WANG, Y., YU, Y., LU, Z., QU, A. et YUN, Y. (2017). Indoor turbulent natural convection heat transfer with thermal radiation in rooms with porous building envelopes. 10th International Symposium on Heating, Ventilation and Air Conditioning, page SHVAC2017.
- WICK, G. C. (1943). Über ebene diffusionsprobleme. Zeitschrift für Physik, 121:702–718.
- XIN, S., CHERGUI, J. et LE QUÉRÉ, P. (2008). 3d spectral parallel multidomain computing for natural convection flows. In Parallel Computational Fluid Dynamics, pages 163–171.
- XIN, S. et LE QUÉRÉ, P. (2002). An extended chebyshev pseudo-spectral benchmark for the 8 :1 differentially heated cavity. Numerical Methods in Fluids, 40:981–998.
- XIN, S., SALAT, J., JOUBERT, P., SERGENT, A., PENOT, F. et LE QUÉRÉ, P. (2013). Resolving the stratification discrepancy of turbulent natural convection in differentially heated air-filled cavities. part iii : A full convection–conduction–surface radiation coupling. International Journal of Heat and Fluid Flow, 42:33–48.
- XU, A., SHI, L. et XI, H. D. (2019). Lattice boltzmann simulations of three-dimensional thermal convective flows at high rayleigh number. International Journal of Heat and Mass Transfer, 140:359–370.
- XU, A. et XI, H. D. (2021). Tristable flow states and reversal of the large-scale circulation in two-dimensional circular convection cells. Journal of Fluid Mechanics, 910:A33–1.
- ZHANG, W. et CHEN, Q. (2000). Large eddy simulation of natural and mixed convection airflows indoors with two simple filtered dynamic subgrid-scale models. Numerical Heat Transfer, 37:447–463.
- ZHAO, P., DAI, R., LI, W., WANG, Q. et ZENG, M. (2020). Modeling the mushy zone during the melting process under neumann boundary condition using the improved enthalpy-porosity method. Numerical Heat Transfer, Part A : Applications, 78:423–442.



