



**HAL**  
open science

# Identification de modèles sous forme de représentation d'état pour les systèmes à sortie binaire

Ali Mestrah

► **To cite this version:**

Ali Mestrah. Identification de modèles sous forme de représentation d'état pour les systèmes à sortie binaire. Automatique. Normandie Université, 2023. Français. NNT : 2023NORMC255 . tel-04465048

**HAL Id: tel-04465048**

**<https://theses.hal.science/tel-04465048>**

Submitted on 19 Feb 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité **AUTOMATIQUE, SIGNAL, PRODUCTIQUE, ROBOTIQUE**

Préparée au sein de l'**Université de Caen Normandie**

## Identification de modèles sous forme de représentation d'état pour les systèmes à sortie binaire

Présentée et soutenue par

**ALI MESTRAH**

**Thèse soutenue le 20/12/2023**

devant le jury composé de :

M. XAVIER BOMBOIS	Directeur de recherche - ECOLE CENTRALE LYON	Rapporteur du jury
M. THIERRY POINOT	Professeur des universités - UNIVERSITE POITIERS	Rapporteur du jury
MME ESTELLE CHERRIER-PAWLOWSKI	Maître de conférences HDR - ENSICAEN	Membre du jury
MME CARINE JAUBERTHIE	Professeur des universités - UNIVERSITE TOULOUSE 3 PAUL SABATIER	Membre du jury
M. ERIC PIGEON	Maître de conférences - Université de Caen Normandie	Membre du jury
M. JEROME JUILLARD	Professeur des universités - Ecole Supérieure d'Electricité	Président du jury
M. MATHIEU POULIQUEN	Professeur des universités - Université de Caen Normandie	Directeur de thèse

Thèse dirigée par **MATHIEU POULIQUEN** (Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes)





*If I have seen further, it is by standing on the shoulders of Giants.*

**Sir Isaac Newton**

## Remerciements

---

Je tiens en premier lieu à exprimer ma gratitude envers mes directeurs de thèse, M. **Mathieu Pouliquen** et M. **Eric Pigeon**. Leur expertise, leur soutien constant et leurs conseils avisés ont joué un rôle essentiel dans la réalisation de cette thèse.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers M. **Thierry Pointot** de l'Université de Poitiers et M. **Xavier Bombois**, du Laboratoire Ampère de Lyon, qui ont contribué de manière significative à ma thèse en acceptant le rôle de rapporteur.

Je tiens également à exprimer ma gratitude envers M. **Jérôme Juillard**, du Centrale-Supélec qui a accepté de présider le jury de ma thèse et je tiens à remercier également Mme. **Carine Jauberthie**, de l'Université de Toulouse 3, et Mme. **Estelle Cherrier** de l'université de Caen qui ont accepté le rôle d'examineur et fait partie du comité de suivi de ma thèse.

Je tiens également à remercier chaleureusement tous mes collègues chercheurs du laboratoire LIS. Leurs idées, leurs discussions et leur camaraderie ont motivé mon travail.

Enfin, je ne remercierai jamais assez ma famille pour son soutien indéfectible qui a été le fondement de mon parcours académique, ainsi que mes amis qui ont partagé avec moi des moments inoubliables tout au long de ce parcours.



# Table des Matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
1.1	Contexte et objectif . . . . .	10
1.1.1	Contexte . . . . .	10
1.1.2	Objectif . . . . .	12
1.2	Organisation de la thèse . . . . .	12
1.2.1	Chapitre 2 : état de l'art . . . . .	12
1.2.2	Chapitre 3 : identification d'une réalisation d'état avec excitation périodique . . . . .	12
1.2.3	Chapitre 4 : identification d'une réalisation d'état à partir de la réponse impulsionnelle . . . . .	13
1.2.4	Chapitre 5 : identification d'une réalisation d'état à partir d'une estimation de la sortie . . . . .	13
<b>2</b>	<b>État de l'art</b>	<b>15</b>
2.1	Introduction . . . . .	16
2.2	Système linéaire à temps discret et invariant dans le temps . . . . .	16
2.2.1	Formulation générale . . . . .	16
2.2.2	Modélisation sous forme de représentation d'état . . . . .	18
2.2.3	Propriétés usuelles d'une représentation d'état . . . . .	19
2.2.3.1	Notion de commandabilité . . . . .	20
2.2.3.2	Notion d'observabilité . . . . .	20
2.2.3.3	Réalisation d'état minimale . . . . .	21
2.3	État de l'art de l'identification des systèmes par les méthodes des sous-espaces . . . . .	22
2.3.1	La première méthode pour l'estimation d'une réalisation d'état . . . . .	22
2.3.2	Méthodes usuelles pour l'estimation de modèles sous forme de représentation d'état . . . . .	24
2.3.2.1	Étape 1 : conditionnement des données . . . . .	25

2.3.2.2	Étape 2 : estimation de l'ordre et de la matrice d'observabilité étendue . . . . .	27
2.3.2.3	Étape 3 : estimation des matrices d'état . . . . .	32
2.4	État de l'art de l'identification des systèmes à sortie binaire . . . . .	34
2.4.1	Méthodes basées sur l'utilisation d'une entrée périodique . . . . .	36
2.4.2	Méthodes basées sur la minimisation d'un critère quadratique . . . . .	38
2.4.2.1	Algorithmes basés sur la minimisation d'un critère d'erreur sur la sortie binaire . . . . .	38
2.4.2.2	Variantes pour le temps réel . . . . .	39
2.4.3	Méthodes basées sur une analyse de corrélation . . . . .	41
2.4.4	Méthodes basées sur le maximum de vraisemblance . . . . .	42
2.4.5	Méthodes basées sur une formulation ensembliste . . . . .	43
2.4.5.1	Identification par programmation quadratique . . . . .	43
2.4.5.2	Identification en présence de bruit borné . . . . .	43
2.4.6	Méthodes basées sur une reformulation du problème sous forme d'un problème de classification . . . . .	45
2.5	Conclusion . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Identification d'une réalisation d'état avec excitation périodique</b>	<b>47</b>
3.1	Introduction . . . . .	48
3.2	Problématique et hypothèses . . . . .	48
3.3	Algorithme d'identification . . . . .	50
3.3.1	Conditionnement des données et notations . . . . .	50
3.3.2	Formulation de l'algorithme . . . . .	51
3.3.2.1	Étape 1 : estimation de la matrice de Hankel $Y_f$ . . . . .	52
3.3.2.2	Étape 2 : estimation de l'ordre et de la matrice d'observabilité étendue. . . . .	53
3.3.2.3	Étape 3 : estimation des matrices d'état . . . . .	54
3.4	Analyse de l'algorithme . . . . .	56
3.4.1	Analyse de la première étape . . . . .	56
3.4.2	Analyse de la deuxième étape . . . . .	59
3.4.3	Analyse de la troisième étape . . . . .	64
3.5	Simulations Numériques . . . . .	67
3.5.1	Résultats de l'étape 1 . . . . .	68
3.5.2	Résultats de l'étape 2 . . . . .	69
3.5.3	Résultats de l'étape 3 . . . . .	72



3.6	Conclusion	73
<b>4</b>	<b>Identification d'une réalisation d'état à partir de la réponse impulsionnelle</b>	<b>79</b>
4.1	Introduction	80
4.2	Problématique et hypothèses	81
4.3	Algorithme d'identification	82
4.3.1	Étape 1 : estimation de la réponse impulsionnelle	82
4.3.1.1	Résultat préliminaire	83
4.3.1.2	Estimation de la réponse impulsionnelle	85
4.3.1.3	Interprétation géométrique et formulation algébrique	87
4.3.2	Étape 2 : estimation de l'ordre et de la matrice d'observabilité étendue	90
4.3.3	Étape 3 : estimation des matrices d'état	91
4.4	Analyses de l'algorithme	92
4.4.1	Analyse de la première étape	93
4.4.2	Analyse de la deuxième étape	96
4.4.3	Analyse de la troisième étape	100
4.5	Simulations Numériques	100
4.5.1	Résultats de l'étape 1	102
4.5.2	Résultats de l'étape 2	104
4.5.3	Résultats de l'étape 3	107
4.6	Conclusion	107
<b>5</b>	<b>Identification d'une réalisation d'état à partir d'une estimation de la sortie</b>	<b>111</b>
5.1	Introduction	112
5.2	Problématique et hypothèses	113
5.3	Algorithmes d'identification	113
5.3.1	Estimation de la sortie via la réponse impulsionnelle	114
5.3.2	Estimation de la sortie via la reconstruction de l'état	115
5.3.3	Commentaires et interprétations	117
5.4	Simulation numérique	120
5.4.1	Résultat de l'Algorithme 1	120
5.4.2	Résultats de l'Algorithme 2	122
5.4.3	Troisième expérience : impact du bruit	124
5.5	Application des algorithmes proposés sur un exemple réel	124
5.5.1	Présentation du dispositif et de la problématique d'identification	125
5.5.2	Procédure et résultats d'identification	128

5.6 Conclusion . . . . .	131
<b>6 Conclusion Générale et perspectives</b>	<b>135</b>
<b>A Annexes</b>	<b>139</b>
A.1 Opérateurs de projection . . . . .	140
A.2 Identification de systèmes fractionnaires à l'aide de mesures binaires . .	141
<b>B Bibliographie</b>	<b>149</b>
Références . . . . .	150
Liste des travaux . . . . .	157

# 1

## Introduction

### Sommaire

---

1.1	Contexte et objectif . . . . .	10
1.1.1	Contexte . . . . .	10
1.1.2	Objectif . . . . .	12
1.2	Organisation de la thèse . . . . .	12
1.2.1	Chapitre 2 : état de l'art . . . . .	12
1.2.2	Chapitre 3 : identification d'une réalisation d'état avec excitation périodique . . . . .	12
1.2.3	Chapitre 4 : identification d'une réalisation d'état à partir de la réponse impulsionnelle . . . . .	13
1.2.4	Chapitre 5 : identification d'une réalisation d'état à partir d'une estimation de la sortie . . . . .	13

---

## 1.1 Contexte et objectif

### 1.1.1 Contexte

L'étape de modélisation est une phase importante dans toutes disciplines scientifiques modernes. Cette étape permet en effet une formalisation des interactions entre grandeurs physiques ce qui permet ainsi une compréhension des phénomènes régissant le système étudié. Deux approches sont possibles pour cette phase de modélisation. La première consiste à décomposer le système en sous systèmes élémentaires que l'on sait pouvoir modéliser via des lois fondamentales (loi d'ohm par exemple dans un circuit électrique, loi de Newton pour un système mécanique, etc.). Si cette première approche a l'avantage de permettre une description des phénomènes élémentaires, elle nécessite souvent une bonne expertise du système ainsi qu'une connaissance de paramètres physiques (résistance, coefficient de viscosité, etc.) pas toujours aisément accessibles. La seconde approche consiste à "observer" le comportement du système via des séries de mesures dans des conditions déterminées et à en déduire une relation formalisant les interactions entre les différentes grandeurs mesurées. Cette modélisation basée sur les données, ou "identification" en automatique, est l'approche qui nous intéresse ici.

Dans le formalisme usuellement utilisé en automatique il faut dans un premier temps définir les grandeurs directement manipulables par l'utilisateur du système (les entrées) et les grandeurs disponibles via la mesure (les sorties). Le modèle fait le lien entre les entrées et les sorties du système. Du fait de la diversité des systèmes possibles (linéaire, non-linéaire, etc.), de la diversité des contextes de modélisation (temps réel, temps différé, etc.), de la diversité des structures de modèles (temps discret, temps continu, etc.) et des multiples contraintes expérimentales (mesures disponibles à intervalle régulier, mesures éparsees, mesures binaires, mesures seuillées, etc. ), de nombreuses méthodes d'identification ont été proposées pour l'estimation d'un modèle. Dans cette thèse nous nous focalisons particulièrement sur l'identification des systèmes

dynamiques linéaires et invariants dans le temps à partir de mesures de la sortie quantifiées sur un bit. Nous parlerons dans la suite, un peu par abus de langage mais surtout par facilité, de systèmes à sorties binaires.

Ce contexte original se justifie par le fait que dans de nombreuses applications l'obtention de mesures précises de la sortie du système n'est pas aisée et le stockage de ces données peut représenter un coût élevé en termes énergétique et d'espace mémoire. Cela peut aussi venir des capteurs, un capteur binaire pouvant être à moindre coût par rapport à un capteur à haute résolution. Dans de tels cas, une solution alternative possible consiste à quantifier les données de sortie à l'aide d'un quantificateur à un bit. Cette approche permet de surmonter des contraintes telles que le coût élevé des capteurs analogiques, les difficultés liées à la mise en place de ces capteurs analogiques, les limitations de stockage des données en mémoire, les exigences en termes de bande passante, etc.

En terme de modélisation de systèmes dynamiques linéaires invariants, deux structures de modèle sont usuellement utilisées : les modèles sous forme de fonction de transfert et les modèles sous forme de représentation d'état. Les modèles sous forme de représentation d'état ont l'avantage de permettre une description interne du système étudié. Les méthodes pour l'estimation de ce type de modèle sont les méthodes dites des sous-espaces. Au cours des trois dernières décennies ces méthodes sont devenues des outils importants dans l'identification des systèmes et elles sont à présent disponibles sur des logiciels de calculs numériques tels que MATLAB ou Labview. Ces méthodes se distinguent par leur capacité à estimer l'ordre du modèle pendant le processus d'identification sans nécessité d'avoir une connaissance préalable de celui-ci. Cette caractéristique constitue un avantage important par rapport aux méthodes d'identification de modèles sous forme de fonctions de transfert qui requièrent la connaissance préalable de l'ordre du numérateur et du dénominateur.

En complément de cette caractéristique liée à l'estimation de l'ordre, les méthodes d'identification basées sur les sous-espaces offrent d'autres avantages significatifs. Utilisant des techniques telles que la décomposition QR et la décomposition par valeurs singulières (SVD), ces algorithmes sont très robustes numériquement si on les compare aux méthodes polynomiales. Par ailleurs les méthodes d'identification basées sur les sous-espaces ne sont pas sujettes aux problèmes de convergence vers des minima locaux qui peuvent souvent conduire à des résultats d'identification insatisfaisants.

Enfin, les méthodes basées sur les sous-espaces sont particulièrement adaptées à l'identification de systèmes à entrées/sorties multiples. Il convient cependant de noter ici que les méthodes d'identification basées sur les sous-espaces présentent des limites lorsqu'il s'agit de traiter des systèmes avec une sortie binaire. En effet, la précision des modèles est directement liée à la quantification de la mesure de la sortie, elles ne sont par conséquent pas adaptées au contexte d'une mesure de la sortie binaire.

### **1.1.2 Objectif**

L'objectif de cette thèse est de développer des méthodes d'identification pour les systèmes à sortie binaire, ces méthodes doivent permettre l'obtention de modèles sous forme de représentation d'état.

## **1.2 Organisation de la thèse**

Cette thèse présente en détail nos travaux de recherche, plusieurs solutions sont ainsi proposées pour atteindre l'objectif énoncé auparavant. Dans la suite nous décrivons brièvement chaque chapitre :

### **1.2.1 Chapitre 2 : état de l'art**

Le deuxième chapitre de cette thèse présente le cadre d'étude de cette thèse. Après une description sommaire de structures de modèles pour les systèmes linéaires invariants, nous proposons dans un premier temps un état de l'art des méthodes usuelles d'identification dites des sous-espaces. Dans un second temps nous proposons un état de l'art des méthodes pour l'identification des systèmes à sortie binaire. Nous y énumérons notamment différentes méthodes paramétriques disponibles dans la littérature en fonction du principe sur lequel elles reposent.

### **1.2.2 Chapitre 3 : identification d'une réalisation d'état avec excitation périodique**

Le troisième chapitre de cette thèse présente un algorithme d'identification, basé sur les sous-espaces pour les systèmes à sortie binaire. Cet algorithme est la première contribution en identification dans ce cadre d'étude. L'algorithme est constitué de 3 étapes, les détails techniques et une analyse de convergence sont proposés pour

chacune de ces étapes. Il convient de noter que cet algorithme est spécialement conçu pour les systèmes dont l'entrée est périodique et qu'il requiert la connaissance de la fonction de distribution du bruit. Des simulations numériques sont réalisées sur MATLAB afin de qualifier les performances de l'algorithme et confirmer les résultats de l'analyse.

### **1.2.3 Chapitre 4 : identification d'une réalisation d'état à partir de la réponse impulsionnelle**

Le quatrième chapitre présente un deuxième algorithme d'identification des systèmes à sortie binaire en utilisant des méthodes des sous-espaces. Cet algorithme est lui aussi composé de trois étapes distinctes qui sont détaillées et analysées individuellement. À noter que l'algorithme de ce chapitre ne nécessite plus la périodicité de l'entrée et la connaissance de la fonction de distribution du bruit, il requiert cependant une entrée à distribution gaussienne et une condition sur la longueur de la réponse impulsionnelle. Des simulations numériques sont réalisées pour mettre en évidence les performances de l'algorithme et les propriétés de convergence de la solution proposée.

### **1.2.4 Chapitre 5 : identification d'une réalisation d'état à partir d'une estimation de la sortie**

Le chapitre 5 présente deux nouveaux algorithmes pour l'identification des systèmes à sortie binaire en utilisant les méthodes des sous-espaces. Ces deux algorithmes sont basés dans un premier temps sur une estimation de la sortie non bruitée. Les performances des algorithmes sont analysées via différentes simulations numériques. Ce chapitre propose aussi la mise en œuvre de l'algorithme du chapitre 4 et des deux algorithmes du chapitre 5 sur un système réel (un capteur de gaz en l'occurrence). Cette mise en œuvre a pour but de démontrer l'efficacité des solutions proposées dans un cas pratique.





# 2

## État de l'art

### Sommaire

---

2.1	Introduction . . . . .	16
2.2	Système linéaire à temps discret et invariant dans le temps . . . . .	16
2.2.1	Formulation générale . . . . .	16
2.2.2	Modélisation sous forme de représentation d'état . . . . .	18
2.2.3	Propriétés usuelles d'une représentation d'état . . . . .	19
2.3	État de l'art de l'identification des systèmes par les méthodes des sous-espaces . . . . .	22
2.3.1	La première méthode pour l'estimation d'une réalisation d'état . . . . .	22
2.3.2	Méthodes usuelles pour l'estimation de modèles sous forme de représentation d'état . . . . .	24
2.4	État de l'art de l'identification des systèmes à sortie binaire . . . . .	34
2.4.1	Méthodes basées sur l'utilisation d'une entrée périodique . . . . .	36
2.4.2	Méthodes basées sur la minimisation d'un critère quadratique . . . . .	38
2.4.3	Méthodes basées sur une analyse de corrélation . . . . .	41
2.4.4	Méthodes basées sur le maximum de vraisemblance . . . . .	42
2.4.5	Méthodes basées sur une formulation ensembliste . . . . .	43
2.4.6	Méthodes basées sur une reformulation du problème sous forme d'un problème de classification . . . . .	45
2.5	Conclusion . . . . .	46

---

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous établissons un état de l'art de l'identification des systèmes par les méthodes des sous-espaces et un état de l'art de l'identification des systèmes basée sur une information binaire de la sortie. Au préalable dans la section 2.2 nous décrivons sommairement les structures de modèles adaptées à la représentation des systèmes linéaires invariants. Ensuite dans la section 2.3, nous nous concentrons sur l'identification de ce type de systèmes via les méthodes des sous-espaces. Enfin, la section 2.4 est consacrée aux méthodes d'identification pour les systèmes à sortie binaire. La section 2.5 conclut le chapitre.

## 2.2 Système linéaire à temps discret et invariant dans le temps

### 2.2.1 Formulation générale

Nous considérons dans ce document l'identification des systèmes linéaires à temps discret et invariants dans le temps. Bien que relativement restrictive, cette classe de systèmes est d'un usage courant en ingénierie puisqu'elle permet la modélisation d'une large gamme de processus. Nous utiliserons l'acronyme LTI (Linear Time Invariant) pour décrire ces systèmes. Comme le nom l'indique, un modèle LTI satisfait à deux propriétés : la linéarité et l'invariance temporelle. La linéarité signifie que la sortie du système est une combinaison linéaire des signaux d'entrée. L'invariance temporelle signifie que le comportement du système ne dépend pas du temps auquel il est observé.

La sortie d'un système LTI peut être exprimée à partir des coefficients  $\{h_k\}$  de sa réponse impulsionnelle comme suit

$$y_t = \sum_{k=0}^{\infty} h_k u_{t-k} \quad (2.1)$$

où  $u_t \in \mathbb{R}$  et  $y_t \in \mathbb{R}$  sont respectivement l'entrée et la sortie du système. Afin d'être plus réaliste, nous envisageons la présence d'une perturbation aléatoire additive sur la sortie du système. Cette perturbation aléatoire sera désignée par le terme "bruit" dans la suite. Ceci nous amène à la relation suivante

$$y_t^v = y_t + v_t = \sum_{k=0}^{\infty} h_k u_{t-k} + v_t \quad (2.2)$$

avec  $v_t \in \mathbb{R}$  et  $y_t^v \in \mathbb{R}$  respectivement le bruit et la sortie bruitée. Pour ce qui est de la séquence de bruit  $\{v_t\}$ , nous nous plaçons dans la suite dans un contexte assez confortable au sens que nous supposons cette séquence stationnaire et ergodique.

En notant  $G(q) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k q^{-k}$ , avec  $q^{-1}$  l'opérateur retard tel que  $q^{-1}u_t = u_{t-1}$ ,  $y_t^v$  devient

$$y_t^v = G(q)u_t + v_t. \quad (2.3)$$

La fonction de transfert associée, exprimée via la variable  $z$ , s'écrit ainsi

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k}. \quad (2.4)$$

Dans la suite nous distinguerons deux cas particuliers sur cette structure :

- Soit la réponse impulsionnelle est de longueur finie et dans ce cas  $G(z)$  s'écrit

$$G(z) = \sum_{k=0}^{n_b} h_k z^{-k}. \quad (2.5)$$

Le système est ainsi modélisé ici par un filtre à réponse impulsionnelle finie (Finite Impulse Response - FIR).

- Soit la réponse impulsionnelle est de longueur infinie et dans ce cas  $G(z)$  est paramétré sous forme de fraction rationnelle de deux polynômes de la manière suivante

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (2.6)$$

avec

$$\begin{cases} B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b} \\ A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a}, \end{cases} \quad (2.7)$$

$n_a$  et  $n_b$  sont respectivement les degrés des polynômes  $A(z)$  et  $B(z)$ .

Le système est modélisé par un filtre à réponse impulsionnelle infinie (Infinite Impulse Response - IIR). A noter que cette représentation est unique si le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux.

Nous utiliserons dans la suite les appellations "modèle FIR" et "modèle IIR" pour désigner les systèmes pouvant être modélisés par ces structures.

## 2.2.2 Modélisation sous forme de représentation d'état

Outre la représentation précédente sous forme de fonction de transfert, qui établit la relation directe entre l'entrée et la sortie du système, il est possible d'utiliser une représentation d'état. Cette structure de modèle introduit une notion supplémentaire, l'état du système, qui permet la description du comportement interne du système. Pour cette structure de modèle et en considérant toujours un système LTI à temps discret, la relation entre l'entrée et la sortie est de la forme suivante :

$$\begin{cases} x_{t+1} &= Ax_t + Bu_t \\ y_t^v &= Cx_t + Du_t + v_t \end{cases} \quad (2.8)$$

où  $x_t \in \mathbb{R}^n$  représente l'état.  $n$  et  $(A, B, C, D)$  sont respectivement l'ordre et les matrices d'état du système. Dans cette écriture le terme  $v_t$  intègre le bruit de mesure et le bruit d'état. A noter que pour un même système, il existe une infinité de réalisations d'état de même dimension. En effet, (2.8) peut aussi s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} Tx_{t+1} &= TAT^{-1}Tx_t + TBu_t \\ y_t^v &= CT^{-1}Tx_t + Du_t + v_t \end{cases} \quad (2.9)$$

avec  $T$  une matrice régulière de dimension  $n$ . Ainsi la réalisation  $(TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D)$  associée à l'état  $Tx_t$  a le même comportement d'entrée/sortie que la réalisation  $(A, B, C, D)$  associée à l'état  $x_t$ . La matrice  $T$  n'est ici qu'une matrice de changement de base et n'a aucun effet sur le comportement d'entrée/sortie ni sur la réponse impulsionnelle.

Nous pouvons relier la réponse impulsionnelle  $\{h_k\}$ , la fonction de transfert  $G(z)$  et la réalisation d'état  $(A, B, C, D)$  avec les relations données ci-dessous:

$$\begin{aligned} G(z) &= C(zI_n - A)^{-1}B + D \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} \end{aligned} \quad (2.10)$$

avec

$$h_k = \begin{cases} CA^{k-1}B & \text{pour } k>0 \\ D & \text{pour } k=0 \end{cases} . \quad (2.11)$$

En complément de (2.8), il est possible de formuler la relation entre l'entrée et la sortie sous forme de représentation d'état de plusieurs manières. Ainsi dans (2.8)  $v_t$  représente à la fois le bruit d'état et le bruit de mesure. Il est possible de modéliser ce bruit  $v_t$  par un modèle de bruit, ceci conduit alors à la forme d'innovation suivante :

$$\begin{cases} x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + Ke_t \\ y_t^v = Cx_t + Du_t + e_t \end{cases} \quad (2.12)$$

où l'innovation  $e_t$  est un bruit blanc, indépendant des données d'entrée et de sortie passées.  $e_t$  représente la part de  $y_t^v$  qui ne peut être prédite à partir des échantillons passés.  $K \in \mathbb{R}^n$  est le gain d'innovation.

Il est possible d'associer à la représentation d'état (2.12), une forme d'état prédictive permettant d'exprimer l'état futur à partir des données d'entrée et de sortie. En effet, à partir de (2.12) le système peut également être représenté sous la forme prédictive suivante

$$\begin{cases} x_{t+1} = A_K x_t + B_K z_t \\ y_t^v = Cx_t + Du_t + e_t \end{cases} \quad (2.13)$$

avec  $z_t = \begin{pmatrix} u_t \\ y_t^v \end{pmatrix}$ ,  $A_K = A - KC$  et  $B_K = \begin{pmatrix} B - KD & K \end{pmatrix}$ .

Il convient de noter que chacune des trois formes précédentes (2.8), (2.12) et (2.13), permet une description du même comportement dynamique du système. Chacune de ces formes peut ainsi être utilisée pour l'estimation des matrices d'état  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .

### 2.2.3 Propriétés usuelles d'une représentation d'état

Les propriétés principales d'une représentation d'état sont la commandabilité et l'observabilité. Ces deux propriétés sont essentielles pour la théorie de la commande des systèmes dynamiques. Dans cette sous-section et afin d'illustrer ces notions de commandabilité et d'observabilité, nous considérons le modèle sous forme de représentation d'état sans bruit :  $v_t = 0$ .

### 2.2.3.1 Notion de commandabilité

Un système est dit contrôlable, s'il existe toujours une séquence d'entrée qui, à partir d'un état initial  $x_{t_0}$ , permet d'atteindre un autre état  $x_{t_0+f}$  avec  $f \geq n$ .

A partir de (2.8) il est possible de montrer après  $f$  itérations que  $x_{t_0+f}$  s'exprime comme suit

$$x_{t_0+f} = A^f x_{t_0} + \Delta_f U_{0/1/f} \quad (2.14)$$

avec

$$\Delta_f = \begin{pmatrix} A^{f-1}B & A^{f-2}B & \dots & B \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

et

$$U_{0/1/f} = \begin{pmatrix} u_{t_0} \\ u_{t_0+1} \\ \vdots \\ u_{t_0+f-1} \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

$U_{0/1/f}$  représente le vecteur des  $f$  entrées "futures", cette notation sera de nouveau utilisée ultérieurement.  $\Delta_f$  est appelé la matrice de commandabilité étendue. Il apparaît ainsi que

$$\Delta_f U_{0/1/f} = x_{t_0+f} - A^f x_{t_0}. \quad (2.17)$$

Ainsi la séquence d'entrée  $\{u_{t_0}, u_{t_0+1}, \dots, u_{t_0+f-1}\}$  est calculable si  $\Delta_f \in \mathbb{R}^{n \times f}$  est de rang  $n$ , ceci mène à la propriété suivante :

**Propriété 1 ([Kai80]) :**

*Un système LTI est dit contrôlable si et seulement si sa matrice de commandabilité étendue  $\Delta_f$ , avec  $f \geq n$ , est de rang  $n$ .*

On dit aussi que la paire  $(A, B)$  est contrôlable.

### 2.2.3.2 Notion d'observabilité

La notion d'observabilité est similaire à celle de commandabilité. Un système dynamique est dit observable s'il est possible de déterminer son état  $x_{t_0}$  via la connaissance d'une séquence de sortie sur un horizon de temps  $f \geq n$ .

Comme dans le cas de la commandabilité, à partir de (2.8) et après  $f$  itérations, il est possible de montrer que

$$Y_{0/1/f} = \Gamma_f x_{t_0} + H_{f,u} U_{0/1/f} \quad (2.18)$$

avec

$$\Gamma_f = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{f-1} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

$$H_{f,u} = \begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ CA^{f-2}B & CA^{f-3}B & \dots & D \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

et

$$Y_{0/1/f} = \begin{pmatrix} y_{t_0} \\ y_{t_0+1} \\ \vdots \\ y_{t_0+f-1} \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

$\Gamma_f \in \mathbb{R}^{f \times n}$  est appelé la matrice d'observabilité étendue. Il apparaît ainsi que

$$\Gamma_f x_{t_0} = Y_{0/1/f} - H_{f,u} U_{0/1/f}. \quad (2.22)$$

Ainsi  $x_{t_0}$  peut être calculé si  $\Gamma_f$  est de rang  $n$ , ceci donne la propriété suivante :

**Propriété 2 ([Kai80]) :**

*Un système LTI est dit observable si et seulement si sa matrice d'observabilité étendue  $\Gamma_f$ , avec  $f \geq n$ , est de rang  $n$ .*

On dit aussi que la paire  $(A, C)$  est observable.

### 2.2.3.3 Réalisation d'état minimale

Il peut être remarqué qu'à partir de la représentation (2.8) d'ordre  $n$  il est possible de construire une représentation ayant le même comportement d'entrée/sortie mais de dimension supérieure. Nous nous intéressons dans la suite à la représentation qui utilise le nombre le plus faible de variables d'état. Cette réalisation est appelée réalisation minimale.

**Propriété 3 ([Kai80]) :**

*La réalisation d’état  $\{A, B, C, D\}$  de dimension  $n$  est minimale (du plus petit ordre) si et seulement si elle est à la fois contrôlable et observable.*

La notion de minimalité est utilisée pour identifier la partie interne modélisable d’un système. Si une réalisation d’état est minimale cela implique que les matrices d’observabilité et de commandabilité étendues, respectivement  $\Gamma_f$  et  $\Delta_f$ , sont de rang  $n$  pour  $f \geq n$ .

La section suivante se focalise sur les méthodes permettant l’estimation des matrices d’une telle réalisation d’état minimale à partir d’un ensemble de données.

## 2.3 État de l’art de l’identification des systèmes par les méthodes des sous-espaces

Les méthodes d’identification des sous-espaces sont les méthodes dédiées à l’estimation de modèles sous forme de représentation d’état. Ces méthodes sont des outils importants dans l’identification des systèmes LTI. Elles sont relativement récentes puisque les premières versions ont été proposées dans les années 60. Différentes variantes ont été développées, notamment dans les années 90 et 2000 (voir par exemple [OM96] et [Kat05]) et ces méthodes ont atteint un certain degré de maturité puisqu’elles sont disponible dans des boîtes à outils de logiciels de calculs numériques tels que MATLAB ou Labview. Dans cette section nous décrivons la mécanique interne de ces méthodes.

### 2.3.1 La première méthode pour l’estimation d’une réalisation d’état

La méthode de Ho-Kalman ([HK66]), proposée en 1966, constitue la première contribution dans la famille des méthodes par sous-espaces. Cette méthode de Ho-Kalman permet d’extraire une réalisation d’état à partir des coefficients de la réponse impulsionnelle  $\{h_k\}$ . Elle est particulièrement intéressante du fait que certains aspects de cette méthode se retrouvent dans les méthodes développées ultérieurement. La méthode est constituée des 3 étapes suivantes :



- Tout d'abord, il s'agit de mettre en forme les coefficients de la réponse impulsionnelle au sein de la matrice de Hankel suivante

$$M = \begin{pmatrix} h_f & h_{f-1} & \dots & h_1 \\ h_{f+1} & h_f & \dots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{2f-1} & h_{2f-2} & \dots & h_f \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Il a été vu que  $h_k = CA^{k-1}B$  pour  $k > 0$ , ainsi  $M$  peut s'écrire sous la forme suivante

$$M = \Gamma_f \Delta_f \quad (2.24)$$

où  $\Gamma_f$  et  $\Delta_f$  sont respectivement les matrices d'observabilité et de commandabilité étendues définies dans (2.14) et (2.18).

- Ensuite, si le système est d'ordre minimal  $n$  et si  $f > n$ , alors la décomposition par valeurs singulières (SVD - Singular Value Decomposition) de  $M = \Gamma_f \Delta_f$  est de la forme

$$\Gamma_f \Delta_f = \begin{pmatrix} U_{s_1} & U_{s_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{s_1}^T \\ V_{s_2}^T \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

où  $S_1$  est une matrice diagonale et régulière de dimension  $n$ .  $\begin{pmatrix} U_{s_1} & U_{s_2} \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} V_{s_1}^T & V_{s_2}^T \end{pmatrix}$  sont deux matrices orthogonales. Ceci permet la détermination de l'ordre  $n$  et les extractions de  $\Gamma_f$  et  $\Delta_f$  comme suit

$$n = \mathbf{ordre}(S_1), \quad (2.26)$$

$$\Gamma_f = U_{s_1} S_1^{\frac{1}{2}} T \quad (2.27)$$

et

$$\Delta_f = T^{-1} S_1^{\frac{1}{2}} V_{s_1}^T \quad (2.28)$$

où  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice de changement de base.

- Enfin, à partir de la connaissance de  $\Gamma_f$  et  $\Delta_f$  il est possible d'exprimer les matrices d'état  $A$ ,  $B$  et  $C$  comme suit

$$C = \Gamma_f(1, :)^1 \quad (2.29)$$

$$B = \Delta_f(:, f) \quad (2.30)$$

<sup>1</sup>Nous utilisons ici les notations MATLAB au sens que  $\Gamma_f(1, :)$  désigne la première ligne de la matrice  $\Gamma_f$ .

$$A = \left( \Gamma_f^{+T} \Gamma_f^+ \right)^{-1} \Gamma_f^{+T} \Gamma_f^- \quad (2.31)$$

où  $\Gamma_f^+$  correspond aux  $(f - 1)$  premières lignes de  $\Gamma_f$  et  $\Gamma_f^-$  correspond aux  $(f - 1)$  dernières lignes de  $\Gamma_f$ . Remarquons que si  $f > n$ , alors  $\Gamma_f^{+T} \Gamma_f^+$  est de rang  $n$  et est par conséquent inversible.

Il reste la matrice  $D$  qui est égale à  $h_0$ , le premier terme de la réponse impulsionnelle.

Cet algorithme permet ainsi le calcul des matrices d'état  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  d'une réalisation minimale. La difficulté première de cet algorithme réside dans la disposition d'une estimation fiable de la réponse impulsionnelle. Des méthodes permettant de contourner cette difficulté existent, nous proposons maintenant de détailler ces méthodes.

### 2.3.2 Méthodes usuelles pour l'estimation de modèles sous forme de représentation d'état

Nous considérons dans ce qui suit le modèle sous forme d'état donné dans (2.8) et ses deux formes alternatives, à savoir la forme d'innovation (2.12) et la forme prédictive (2.13).

Il s'agit ici d'estimer les matrices d'état  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ , non plus via la connaissance de la réponse impulsionnelle, mais via la connaissance des échantillons de l'entrée  $\{u_t\}_{t=1}^N$  et de la sortie  $\{y_t^v\}_{t=1}^N$ ,  $N$  représente ici le nombre de données disponibles.

Une présentation générale des étapes des méthodes usuelles des sous-espaces est proposée ci-dessous. La plupart des méthodes sont structurées en 3 étapes communes comme suit :

- Étape 1 : conditionnement des données ;
- Étape 2 : estimation de l'ordre et de la matrice d'observabilité étendue;
- Étape 3 : estimation des matrices d'état.

**Remarque 1** : *les étapes détaillées dans la suite correspondent à ce qui est le plus répandu, il existe d'autres variantes dans la littérature.*

### 2.3.2.1 Étape 1 : conditionnement des données

Les données sont usuellement organisées sous forme de matrice de Hankel [OM96]. La matrice de Hankel des sorties dites futures est définie par

$$Y_{t/j/f}^v = \begin{pmatrix} y_t^v & y_{t+1}^v & \cdots & y_{t+j-1}^v \\ y_{t+1}^v & y_{t+2}^v & \cdots & y_{t+j}^v \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{t+f-1}^v & y_{t+f}^v & \cdots & y_{t+f+j-2}^v \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

où  $j$  représente le nombre de colonnes et  $f$  le nombre lignes. Les matrices de Hankel de l'entrée  $U_{t/j/f}$  et de la séquence d'innovation  $E_{t/j/f}$  sont définies de la même manière. L'indice  $j$  est fixé en fonction du nombre d'échantillons disponibles. Typiquement  $j$  est du même ordre de grandeur que  $N$ . L'indice  $f$  est choisi par l'utilisateur. La conditions sur ce choix sera explicitée plus loin.

A partir des définitions précédentes, plusieurs formulations de  $X_{t/j/f}$  sont possibles suivant que la forme d'innovation (2.12) ou la forme prédictive (2.13) est utilisée.

- À partir de la définition précédente (2.32) et en itérant  $f$  fois (avec  $f \geq n$ ) les équations d'état et de sortie de la forme d'innovation (2.12),  $Y_{t/j/f}^v$  peut être exprimé comme suit

$$Y_{t/j/f}^v = \Gamma_f X_{t/j} + H_{f,u} U_{t/j/f} + H_{f,e} E_{t/j/f} \quad (2.33)$$

avec

$$X_{t/j} = \begin{pmatrix} x_t & x_{t+1} & \cdots & x_{t+j-1} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

une matrice contenant le vecteur d'état  $x_t$ ,  $\Gamma_f$  la matrice d'observabilité étendue,  $H_{f,u}$  et  $H_{f,e}$  deux matrices définies par

$$H_{f,u} = \begin{pmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ CA^{f-2}B & CA^{f-3}B & \cdots & D \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

et

$$H_{f,e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ CK & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ CA^{f-2}K & CA^{f-3}K & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

$H_{f,u}$  et  $H_{f,e}$  sont les matrices contenant les paramètres de Markov respectivement de la partie déterministe du modèle (c'est à dire celle liée à l'entrée  $u_t$ ) et de la partie stochastique du modèle (c'est à dire celle liée à l'innovation  $e_t$ ).

- De la même manière, en itérant  $f$  fois les équations d'états de la forme prédictive (2.13), nous montrons qu'il est aussi possible d'exprimer  $Y_{t/j/f}^v$  sous la forme suivante

$$Y_{t/j/f}^v = \Gamma_f^K X_{t/j} + H_{f,u}^K U_{t/j/f} + H_{f,y}^K Y_{t/j/f}^v + E_{t/j/f} \quad (2.37)$$

où

$$\Gamma_f^K = \begin{pmatrix} C \\ C(A - KC) \\ \vdots \\ C(A - KC)^{f-1} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

est la matrice d'observabilité étendue du prédicteur,

$$H_{f,u}^K = \begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ C(B - KD) & D & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ C(A - KC)^{f-2}(B - KD) & C(A - KC)^{f-3}(B - KD) & \dots & D \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

et

$$H_{f,y}^K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ CK & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ C(A - KC)^{f-2}K & C(A - KC)^{f-3}K & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

sont des matrices contenant les paramètres de Markov du prédicteur.

$X_{t/j}$  peut être exprimé à partir de la forme prédictive (2.13) par

$$X_{t/j} = (A - KC)^p X_{t-p/j} + \Delta_{p,u}^K U_{t-p/j/p} + \Delta_{p,y}^K Y_{t-p/j/p}^v \quad (2.41)$$

avec

$$\Delta_{p,u}^K = \left( (A - KC)^{p-1}(B - KD) \quad (A - KC)^{p-2}(B - KD) \quad \dots \quad (B - KD) \right) \quad (2.42)$$

et

$$\Delta_{p,y}^K = \left( (A - KC)^{p-1}K \quad (A - KC)^{p-2}K \quad \dots \quad K \right). \quad (2.43)$$

Pour  $p \geq n$ ,  $\Delta_{p,u}^K \in \mathbb{R}^{n \times p}$  et  $\Delta_{p,y}^K \in \mathbb{R}^{n \times p}$  sont respectivement les matrices de commandabilité étendues de la forme prédictive vis à vis de la séquence  $\{u_t\}$  et de la séquence  $\{y_t^v\}$ .

Il est possible de remarquer que, pour  $p \gg 1$ , nous avons  $(A - KC)^p \approx 0$  puisque toutes les valeurs propres de  $A - KC$  sont de module strictement inférieur à 1. Il en résulte dans ce cas que  $X_{t/j} \approx \Delta_{p,u}^K U_{t-p/j/p} + \Delta_{p,y}^K Y_{t-p/j/p}^v$ . Ainsi, en utilisant les deux matrices  $\Delta_p^K = \begin{pmatrix} \Delta_{p,u}^K & \Delta_{p,y}^K \end{pmatrix}$  et  $Z_{t-p/j/p} = \begin{pmatrix} U_{t-p/j/p} \\ Y_{t-p/j/p}^v \end{pmatrix}$ , nous obtenons les deux formulations suivantes pour  $Y_{t/j/f}^v$  :

- en utilisant la forme d'innovation (2.33), il vient

$$Y_{t/j/f}^v = \Gamma_f \Delta_p^K Z_{t-p/j/p} + H_{f,u} U_{t/j/f} + H_{f,e} E_{t/j/f}, \quad (2.44)$$

- en utilisant la forme prédictive (2.37), il vient

$$Y_{t/j/f}^v = \Gamma_f \Delta_p^K Z_{t-p/j/p} + H_{f,u}^K U_{t/j/f} + H_{f,y}^K Y_{t/j/f}^v + E_{t/j/f}. \quad (2.45)$$

Ces deux formulations sont au coeur des développements algébriques présentés dans la suite et permettent l'estimation des matrices d'état du modèle.

### 2.3.2.2 Étape 2 : estimation de l'ordre et de la matrice d'observabilité étendue

L'objectif de cette étape est de procéder à une estimation de l'ordre du système ainsi que de la matrice d'observabilité étendue dans le but d'accéder ultérieurement aux matrices de la représentation d'état. Pour y parvenir, quatre hypothèses fondamentales sont considérées tout au long de ce paragraphe :

- **H.1** : le système est d'ordre minimal  $n$ .
- **H.2** : la séquence d'entrée  $\{u_t\}$  utilisé lors du processus d'identification doit satisfaire la condition d'excitation persistante.
- **H.3** : la séquence de bruit  $\{v_t\}$  est de moyenne nulle.
- **H.4** : les séquences  $\{u_t\}$  et  $\{v_t\}$  sont décorréelées (le système opère donc en boucle ouverte).

Dans un premier temps et afin d'isoler le terme contenant la matrice d'observabilité étendue, il est possible d'utiliser l'opérateur de projection orthogonale suivant (voir annexe A.1)

$$\Pi_{U_t^\perp} = I_j - U_{t/j/f}^T (U_{t/j/f} U_{t/j/f}^T)^{-1} U_{t/j/f}. \quad (2.46)$$

$\Pi_{U_t^\perp}$  est tel que  $U_{t/j/f}\Pi_{U_t^\perp} = 0$ . En multipliant (2.44) par  $\Pi_{U_t^\perp}$  à droite nous obtenons

$$Y_{t/j/f}^v \Pi_{U_t^\perp} = \Gamma_f \Delta_p^K Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp} + H_{f,u} U_{t/j/f} \Pi_{U_t^\perp} + H_{f,e} E_{t/j/f} \Pi_{U_t^\perp}. \quad (2.47)$$

En rappelant que les séquences d'entrée et d'innovation sont décorréélées, nous pouvons dire pour  $j \gg 1$  que  $E_{t/j/f} U_{t/j/f}^T (U_{t/j/f} U_{t/j/f}^T)^{-1} \approx 0$ . Par conséquent, l'équation précédente devient

$$Y_{t/j/f}^v \Pi_{U_t^\perp} = \Gamma_f \Delta_p^K Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp} + H_{f,e} E_{t/j/f}. \quad (2.48)$$

L'équation précédente est la base de plusieurs études pour l'estimation de  $\Gamma_f$ . Dans la suite, nous allons lister plusieurs algorithmes d'identification qui estiment l'ordre et la matrice d'observabilité étendue en se basant sur cette équation.

### I- Méthode N4SID pour l'estimation de $\Gamma_f$

La méthode N4SID (Numerical algorithms for Subspace State Space System Identification) a été proposée et étudiée dans [VD94], [VD95] et [DV95] et a également été implémentée en tant que fonction dans le boîte à outils d'identification de MATLAB. Cette méthode est décrite ci-dessous.

- Rappelons que la séquence d'innovation future  $\{e_t\}$  est décorrélée des séquences d'entrée et de sortie passées, par conséquent

$$\frac{1}{j} E_{t/j/f} Z_{t-p/j/p}^T \approx 0 \quad \text{pour } j \gg 1. \quad (2.49)$$

Ainsi, en multipliant l'équation (2.48) par  $\frac{1}{j} Z_{t-p/j/p}^T$  à droite on obtient

$$\frac{1}{j} Y_{t/j/f}^v \Pi_{U_t^\perp} Z_{t-p/j/p}^T = \frac{1}{j} \Gamma_f \Delta_p^K Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp} Z_{t-p/j/p}^T. \quad (2.50)$$

Ceci permet l'obtention d'une estimation de  $\Gamma_f \Delta_p^K$  comme suit

$$\widehat{\Gamma_f \Delta_p^K} = Y_{t/j/f}^v \Pi_{U_t^\perp} Z_{t-p/j/p}^T (Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp} Z_{t-p/j/p}^T)^{-1}. \quad (2.51)$$

où  $\widehat{\Gamma_f \Delta_p^K}$  est l'estimation de  $\Gamma_f \Delta_p^K$ . Ceci revient à estimer  $\Gamma_f \Delta_p^K$  au sens des moindres carrés en minimisant  $\|Y_{t/j/f}^v \Pi_{U_t^\perp} - \Gamma_f \Delta_p^K Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp}\|_F^2$ .

- Pour des valeurs de  $f$  et  $p$  supérieures ou égales à  $n$  et en vertu de l'hypothèse de minimalité sur l'ordre de la représentation d'état, les matrices  $\Gamma_f$  et  $\Delta_p^K$  sont de rang  $n$ . Il est donc possible d'estimer l'ordre du système en analysant le rang

de la matrice  $\widehat{\Gamma_f \Delta_p^K} Z_{t-p/j/p}$ . Il est aussi possible d'obtenir une estimation de la matrice  $\Gamma_f$  en utilisant une SVD de la manière suivante

$$\widehat{\Gamma_f \Delta_p^K} Z_{t-p/j/p} = \begin{pmatrix} U_{s_1} & U_{s_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{s_1}^T \\ V_{s_2}^T \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

où  $S_1$  est une matrice diagonale contenant les  $n$  valeurs singulières dominantes,  $\begin{pmatrix} U_{s_1} & U_{s_2} \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} V_{s_1} & V_{s_2} \end{pmatrix}$  sont deux matrices orthogonales et  $S_2$  est une matrice dont les valeurs singulières sont négligeables par rapport à celles de  $S_1$ .

Ainsi, des estimations de l'ordre  $n$  et de  $\Gamma_f$  sont données par

$$\widehat{n} = \mathbf{ordre}(S_1) \quad (2.53)$$

et

$$\widehat{\Gamma_f} = U_{s_1} S_1^{\frac{1}{2}} T \quad (2.54)$$

où  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice de changement de base. A noter ici que  $T^{-1} S_1^{\frac{1}{2}} V_{s_1}^T$  constitue une estimation de  $X_{t/j}$

## II- Méthode MOESP pour l'estimation de $\Gamma_f$

La méthode MOESP (Multivariable Output Error State Space) est décrite dans [Ver94] et est également implémentée en tant que fonction numérique dans le boîte à outils d'identification de MATLAB. Cette méthode est décrite ci-dessous.

- Après conditionnement des données, une décomposition QR est appliquée à la réalisation de la projection oblique du sous-espace ligne de  $Y_{t/j/f}^v$  sur le sous-espace ligne de  $Z_{t-p/j/p}$  parallèlement au sous-espace ligne de  $U_{t/j/f}$ . Cette décomposition est donnée par

$$\begin{pmatrix} U_{t/j/f} \\ Z_{t-p/j/p} \\ Y_{t/j/f}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

où  $Q$  est une matrice orthogonale et  $R$  est une matrice triangulaire inférieure. Il est montré dans [Ver94] que  $R_{32} Q_2^T = Y_{t/j/f}^v \Pi_{U_t^\perp} Z_{t-p/j/p} (Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp} Z_{t-p/j/p}^T)^{-1} Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp}$ . Rappelons ensuite que la projection orthogonale de  $E_{t/j/f}$  sur  $Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp}$  dans l'équation (2.48) est nulle pour  $j \gg 1$  donc

$$E_{t/j/f} \Pi_{U_t^\perp} Z_{t-p/j/p}^T (Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp} Z_{t-p/j/p}^T)^{-1} Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp} \approx 0 \quad \text{pour } j \gg 1, \quad (2.56)$$

ainsi l'estimation de  $\Gamma_f \Delta_p^K Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp}$  est donnée par

$$\widehat{\Gamma_f \Delta_p^K} Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp} = Y_{t/j/f}^v \Pi_{U_t^\perp} Z_{t-p/j/p} (Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp} Z_{t-p/j/p}^T)^{-1} Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp}. \quad (2.57)$$

- Comme pour la méthode N4SID, l'application d'une SVD sur  $\widehat{\Gamma_f \Delta_p^K} Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp}$  va s'écrire

$$\widehat{\Gamma_f \Delta_p^K} Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp} = R_{32} Q_2 = \begin{pmatrix} U_{s_1} & U_{s_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{s_1}^T \\ V_{s_2}^T \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

avec  $S_1$  est une matrice diagonale contenant les  $n$  valeurs singulières dominantes et  $S_2$  une matrice dont les valeurs singulières sont négligeables par rapport à celles de  $S_1$ . Ainsi, des estimations de  $n$  et de  $\Gamma_f$  sont données par

$$\widehat{n} = \mathbf{ordre}(S_1) \quad (2.59)$$

et

$$\widehat{\Gamma_f} = U_{s_1} S_1^{\frac{1}{2}} T. \quad (2.60)$$

**Remarque 2 :** *en termes de mise en œuvre, le calcul direct de (2.57) par le biais d'inversion matricielle n'est pas robuste numériquement. Pour cette raison la décomposition QR est utilisée.*

**Remarque 3 :** *dans cette méthode, les décompositions SVD et QR sont appliquées sur la matrice complète de données d'entrée/sortie. Une contribution récente dans [KC22] propose d'estimer la matrice  $\Gamma_f$  en appliquant une décomposition QR séquentielle au lieu d'une décomposition QR classique. Ceci permet un gain en termes de coût de mémoire et de temps de calculs.*

#### IV- Méthode OKID pour l'estimation de $\Gamma_f$

La méthode OKID (Observer/Kalman filter Identification) a été proposée dans [Pha+95]. Cette méthode consiste à suivre les étapes suivantes :

- Estimation du produit  $\Gamma_f \Delta_p^K$  au sens des moindres carrés via la minimisation de  $\|Y_{t/j/f}^v \Pi_{U_t^\perp} - \Gamma_f \Delta_p^K Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp}\|_F^2$ . La solution est

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma_f \Delta_p^K} &= Y_{t/j/f}^v \Pi_{U_t^\perp} (Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp})^T (Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp} (Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp})^T)^{-1} \\ &= Y_{t/j/f}^v \Pi_{U_t^\perp} Z_{t-p/j/p}^T (Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp} Z_{t-p/j/p}^T)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.61)$$



- Application de la SVD sur  $\widehat{\Gamma}_f \Delta_p^K$ , une estimation de  $n$  et une estimation de  $\Gamma_f$  sont données par

$$\widehat{n} = \mathbf{ordre}(S_1) \quad (2.62)$$

et

$$\widehat{\Gamma}_f = U_{s_1} S_1^{\frac{1}{2}} T. \quad (2.63)$$

### V- Méthode CVA pour l'estimation de $\Gamma_f$

La méthode CVA (Canonical Variate Analysis) est proposée [Lar90] et détaillée dans [Sch+90], [BL02] et [Lar97]. Cette méthode est, elle aussi, scindée en deux phases comme décrit ci-dessous :

- Il a été vu dans (2.48) que

$$Y_{t/j/f}^v \Pi_{U_t^\perp} = \Gamma_f \Delta_p^K Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp} + H_{f,e} E_{t/j/f}. \quad (2.64)$$

L'idée ici est de réaliser l'estimation de  $\Gamma_f \Delta_p^K$  via une étude de corrélation entre deux groupes de variables  $Y_{t/j/f}^v \Pi_{U_t^\perp}$  et  $Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp}$ . Cette étude de corrélation mène à la SVD suivante

$$W_1 Y_{t/j/f}^v \Pi_{U_t^\perp} Z_{t-p/j/p}^T W_2 = \begin{pmatrix} U_{s_1} & U_{s_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{s_1}^T \\ V_{s_2}^T \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

avec  $W_1 = (Y_{t/j/f}^v \Pi_{U_t^\perp} Y_{t/j/f}^{vT})^{-\frac{1}{2}}$  et  $W_2 = (Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp} Z_{t-p/j/p}^T)^{\frac{1}{2}}$ . Ces deux matrices sont choisies de manière à maximiser les corrélations canoniques entre d'une part les données passées  $Z_{t-p/j/p}$  conditionnées aux entrées futures  $U_{t/j/f}$  et d'autre part les sorties futures  $Y_{t/j/f}^v$  conditionnées aux entrées futures  $U_{t/j/f}$ .

- Les estimations de l'ordre et de la matrice d'observabilité étendue sont ensuite obtenues par

$$\widehat{n} = \mathbf{ordre}(S_1) \quad (2.66)$$

et

$$\widehat{\Gamma}_f = W_1^{-1} U_{s_1} S_1^{\frac{1}{2}} T. \quad (2.67)$$

### V- Formulation unifiée

Une formulation unifiée des approches précédentes est proposée dans [VD95]. Cette formulation consiste à considérer l'application de la SVD de la manière suivante

$$W_1 Y_{t/j/f}^v \Pi_{U_t^\perp} Z_{t-p/j/p}^T (Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp} Z_{t-p/j/p}^T)^{-1} W_2 = \begin{pmatrix} U_{s_1} & U_{s_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{s_1}^T \\ V_{s_2}^T \end{pmatrix}, \quad (2.68)$$

avec  $W_1$  et  $W_2$  deux matrices de pondération fixées par l'utilisateur. Le choix de ces matrices orientant sur une des variantes présentées ci-dessus :

- pour N4SID,  $W_1 = I_f$  et  $W_2 = Z_{t-p/j/p}$
- pour MOESP,  $W_1 = I_f$  et  $W_2 = \Pi_{U_t^\perp} Z_{t-p/j/p}$
- pour OKID,  $W_1 = I_f$  et  $W_2 = I_{2p}$
- pour CVA,  $W_1 = (Y_{t/j/f}^v \Pi_{U_t^\perp} Y_{t/j/f}^{vT})^{-\frac{1}{2}}$  et  $W_2 = (Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t^\perp} Z_{t-p/j/p}^T)^{\frac{1}{2}}$ .

Par la suite l'ordre  $n$  correspond à l'ordre de  $S_1$  et  $\Gamma_f$  est estimée par  $\widehat{\Gamma}_f = W_1^{-1} U_{s1} S_1^{\frac{1}{2}} T$ .

## VI- Autres Méthodes

Les références précédentes peuvent paraître relativement anciennes, elles restent néanmoins à la base de la majeure partie des variantes proposées par la suite dans la littérature (voir par exemple [Kat05]). Parmi ces variantes on peut citer [SM01], où il a été remarqué que les variantes précédentes n'utilisent pas la propriété de causalité du système et cette causalité conditionne la structure de la matrice  $H_{f,u}$  qui est nécessairement triangulaire inférieure. Ainsi, certaines solutions alternatives utilisent explicitement cette propriété de causalité sous forme d'une contrainte pour l'estimation de la matrice d'observabilité étendue. C'est le cas de la méthode PARSIM par exemple proposée dans [QLL05]. Dans cette méthode, il est proposé de reconstruire, ligne par ligne, les composantes de  $\Gamma_f^K \Delta_f^K$ . Cette reconstruction ligne par ligne permet d'éliminer le terme  $U_{t/j/f}$  sans utiliser la projection orthogonale  $\Pi_{U_t^\perp}$ . Ensuite, comme procédé auparavant, on retrouve l'estimation de l'ordre et de la matrice d'observabilité étendue via une SVD. Les méthodes SSARX et PBSID sont dans le même esprit ([Jan03], [Jan05], [CP05b], [CP05a] et [Chi06]). Elles permettent d'appliquer ces méthodes par sous-espaces sur des systèmes opérant en boucle fermée.

### 2.3.2.3 Étape 3 : estimation des matrices d'état

Il reste à présent à estimer les matrices d'état  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ . Il existe deux approches générales pour cela : la première utilise les propriétés structurelles de la matrice d'observabilité étendue, la seconde reconstruit une partie du vecteur d'état. Ces deux approches sont sommairement décrites dans ce paragraphe.

#### I- Approche utilisant les propriétés structurelle de $\Gamma_f$

Cette approche s'inspire de la méthode de Ho-Kalman décrite dans le paragraphe 2.3.1. Les estimations de  $A$  et  $C$  sont ainsi obtenues directement à partir de l'estimation de la matrice d'observabilité comme suit :

$$\widehat{C} = \widehat{\Gamma}_f(1, :), \quad (2.69)$$

$$\hat{A} = \left( \hat{\Gamma}_f^{+T} \hat{\Gamma}_f^+ \right)^{-1} \hat{\Gamma}_f^{+T} \hat{\Gamma}_f^- \quad (2.70)$$

où  $\hat{\Gamma}_f^+$  correspond aux  $(f - 1)$  premières lignes de  $\hat{\Gamma}_f$  et  $\hat{\Gamma}_f^-$  correspond aux  $(f - 1)$  dernières lignes de  $\hat{\Gamma}_f$ .

Les matrices  $B$  et  $D$  apparaissent dans  $H_{f,u}$ . La procédure ci-dessous est proposée dans [Ver94]. En multipliant d'abord (2.33) à gauche par une matrice  $\Gamma_f^\perp = I_{fn_y} - \Gamma_f(\Gamma_f^T \Gamma_f)^{-1} \Gamma_f^T$  orthogonale à  $\Gamma_f$ , nous avons

$$\Gamma_f^\perp Y_{t/j/f}^v = \Gamma_f^\perp H_{f,u} U_{t/j/f} + \Gamma_f^\perp H_{f,e} E_{t/j/f}. \quad (2.71)$$

En appliquant ensuite une projection orthogonale sur  $U_{t/j/f}$ , ceci donne

$$\Gamma_f^\perp Y_{t/j/f}^v \Pi_{U_t} = \Gamma_f^\perp H_{f,u} U_{t/j/f}. \quad (2.72)$$

Les matrices  $B$  et  $D$  peuvent ensuite être estimées par minimisation de  $\|\Gamma_f^\perp Y_{t/j/f}^v \Pi_{U_t} - \Gamma_f^\perp H_{f,u} U_{t/j/f}\|_F^2$ .

## II- Approche par estimation du vecteur d'état

Cette approche est basée sur l'estimation de la matrice d'état  $X_{t/j}$  et consiste à reconstruire une séquence d'état satisfaisant une relation de récurrence semblable au modèle d'innovation (2.12).

- Pour  $p \gg 1$ , à partir de (2.41) on montre que  $X_{t/j} \approx \Delta_p^K Z_{t-p/j/p}$ . Il est ainsi possible d'écrire (2.50) de la manière suivante

$$Y_{t/j/f}^v \Pi_{U_t}^\perp Z_{t-p/j/p} (Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t}^\perp Z_{t-p/j/p}^T)^{-1} Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t}^\perp = \Gamma_f X_{t/j} \Pi_{U_t}^\perp. \quad (2.73)$$

A partir de  $\hat{\Gamma}_f = U_{s1} S_1^{\frac{1}{2}}$ , nous pouvons calculer  $\hat{X}_{t/j}$ , estimation de  $X_{t/j}$ , comme suit

$$\hat{X}_{t/j} = S_1^{-\frac{1}{2}} U_{s1}^T Y_{t/j/f}^v \Pi_{U_t}^\perp Z_{t-p/j/p} (Z_{t-p/j/p} \Pi_{U_t}^\perp Z_{t-p/j/p}^T) Z_{t-p/j/p}. \quad (2.74)$$

- L'estimation précédente fournit ainsi une estimation du vecteur d'état à différents instants

$$\hat{X}_{t/j} = \begin{pmatrix} \hat{x}_t & \hat{x}_{t+1} & \dots & \hat{x}_{t+j-1} \end{pmatrix}. \quad (2.75)$$

Ces estimations sont à ce stade utilisées, via la forme d'innovation (2.12), pour estimer les matrices d'état.

Cette méthode d'estimation des matrices d'état du système via une estimation du vecteur d'état à différents instants est a priori plus intuitive que la solution utilisant la matrice d'observabilité étendue. Néanmoins cette solution repose sur l'hypothèse que les composantes de  $\hat{x}_t$  ont les mêmes conditions initiales ce qui n'est vérifiée que si  $p \gg 1$ . Des solutions sont proposées dans la littérature pour contourner cette difficulté (voir par exemple [VD94]).

## 2.4 État de l'art de l'identification des systèmes à sortie binaire

Les méthode d'identification des systèmes à sortie binaire sont plus récentes que les méthodes des sous-espaces puisque la première contribution importante date de 2003. Dans cette section, nous présentons différentes familles de méthodes. A noter qu'il n'y a pas, comme pour les méthodes des sous-espaces, de cadre unifié permettant une synthèse des méthodes les plus courantes. A vrai dire l'ensemble des méthodes qui suivent constitue un ensemble de méthodes assez disparates ayant en commun uniquement l'objectif final. Dans ce contexte, nous listons dans ce qui suit les algorithmes d'identification des systèmes FIR et des systèmes IIR selon leurs critères et leurs points de départ. Cela conditionne les hypothèses nécessaires à leur mise en œuvre. Certaines de ces méthodes sont en partie décrite dans [Wan+10] même si beaucoup a été fait depuis.

Dans ce qui suit le signal de sortie du système  $y_t^v = y_t + v_t$  est supposé inconnu, les seuls échantillons disponibles sont fournis par un capteur  $Q_c(\cdot)$  tel que

$$Q_c(y_t^v) = \begin{cases} 1 & \text{si } y_t^v - c \geq 0 \\ 0 & \text{si } y_t^v - c < 0 \end{cases} \quad (2.76)$$

où  $c$  est le seuil du capteur.

Pour ce qui est de la structure du modèle, le problème d'identification pour les systèmes à sortie binaire a principalement été traité dans le cas des systèmes FIR et dans une moindre mesure dans le cas des systèmes IIR, la raison principale étant la facilité d'écriture induite pour un système FIR par la paramétrisation linéaire de  $y_t^v$  en fonction des paramètres à estimer. Néanmoins certaines méthodes développées dans le cas FIR ont une extension proposée dans le cas IIR. Nous distinguerons ces deux structures dans la suite en adoptant les notations suivantes :

- Dans le cas d'un système FIR,  $G(q)$  est tel que  $G(z) = \sum_{k=0}^{n_b} h_k z^{-k}$  et l'objectif est d'estimer les paramètres  $\{h_k\}$  en utilisant les données observées  $\{u_t, \mathbf{Q}_c(y_t^v)\}_1^N$ . Pour cette structure de modèle, la sortie  $y_t^v$  peut être écrite sous la forme régressive

$$\begin{cases} y_t^v = y_t + v_t \\ y_t = \phi_t^T \theta^* \end{cases} \quad (2.77)$$

avec  $\phi_t = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{t-1} \\ \vdots \\ u_{t-n_b} \end{pmatrix}$  et  $\theta^* = \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{n_b} \end{pmatrix}$ . Dans la suite  $\hat{\theta}_t$  désigne une estimation de  $\theta^*$  à l'instant  $t$ .

- Dans le cas d'un système IIR,  $G(z)$  est tel que  $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ , la sortie  $y_t^v$  peut aussi être écrite sous la forme régressive

$$\begin{cases} y_t^v = y_t + v_t \\ y_t = \phi_t^T \theta^* \end{cases} \quad (2.78)$$

avec  $\phi_t = \begin{pmatrix} -y_{t-1} \\ \vdots \\ -y_{t-n_a} \\ u_t \\ \vdots \\ u_{t-n_b} \end{pmatrix}$  et  $\theta^* = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n_a} \\ b_0 \\ \vdots \\ b_{n_b} \end{pmatrix}$ . Il peut être remarqué que le problème posé

ici est plus délicat puisqu'une partie du vecteur de régression  $\phi_t$  est inaccessible. Il en résulte que la littérature est moins dense sur le sujet.

Il est possible de trouver dans la littérature des variations relativement proches du problème posé ici. Il est question par exemple dans [GZZ11], [GZZ12] et [CW12] d'un seuil variable sur le capteur binaire. Dans [Pou+16a] et [Mes+23b], il s'agit d'estimer des modèles à temps continu. Dans [CPR13], [LWN20], [Pou+21] et [Oua+22] l'identification se fait à partir de données binaires à la fois sur l'entrée et la sortie. Dans [Guo+15b] et [Góm17], il est question de réaliser l'identification avec des données transitant via une chaîne de communication numérique sujette à des erreurs de communications. Ces différentes variantes ne seront pas évoquées dans ce document.

### 2.4.1 Méthodes basées sur l'utilisation d'une entrée périodique

Les méthodes présentées dans cette sous-section sont basées sur l'utilisation d'une entrée périodique afin de permettre une estimation de la sortie avant quantification, estimation qui permettra ensuite l'accès aux paramètres.

Définissons au préalable par  $F_v(\cdot)$  la fonction de distribution cumulative de la séquence de bruit  $\{v_t\}$ . En définissant  $s_t$  comme suit

$$s_t = \mathbf{Q}_c(y_t^v) = \begin{cases} 1 & \text{si } y_t^v - c \geq 0 \\ 0 & \text{si } y_t^v - c < 0 \end{cases}, \quad (2.79)$$

nous pouvons remarquer que l'espérance de  $s_t$  définie par  $\mathbb{E}[s_t] = 1 - P(y_t^v < c)$  satisfait

$$\mathbb{E}[s_t] = 1 - F_v(c - y_t) \quad (2.80)$$

avec  $P(\cdot)$  représente la probabilité. Si  $F_v^{-1}(\cdot)$  existe et est supposée connue alors

$$y_t = c - F_v^{-1}(1 - \mathbb{E}[s_t]). \quad (2.81)$$

L'algorithme proposé dans [WZY+03] utilise (2.81) dans le cas d'un système FIR en exprimant l'égalité précédente pour les différents instants  $t, t + 1, \dots, t + n_b$ . Ceci donne

$$\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t+1} \\ \vdots \\ y_{t+n_b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - F_v^{-1}(1 - \mathbb{E}[s_t]) \\ c - F_v^{-1}(1 - \mathbb{E}[s_{t+1}]) \\ \vdots \\ c - F_v^{-1}(1 - \mathbb{E}[s_{t+n_b}]) \end{pmatrix}. \quad (2.82)$$

Si l'entrée est supposée périodique, alors  $\mathbb{E}[s_t]$  peut être estimée empiriquement. En effet, en supposant que l'entrée est de période  $n_b + 1$ , une estimation empirique de  $\mathbb{E}[s_k]$  pour  $k \in \{0, 1, \dots, n_b\}$ , est donnée par  $\widehat{\mathbb{E}[s_k]} \Big|_t = \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} s_{t_0+j(n_b+1)+k}$  où  $t_0$  est l'instant qui marque la disparition des effets des conditions initiales sur la réponse. Ensuite l'estimation de la sortie durant une période peut être donnée par

$$\begin{pmatrix} \widehat{y}_{t_0|t} \\ \widehat{y}_{t_0+1|t} \\ \vdots \\ \widehat{y}_{t_0+n_b|t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - F_v^{-1} \left( 1 - \widehat{\mathbb{E}[s_0]} \Big|_t \right) \\ c - F_v^{-1} \left( 1 - \widehat{\mathbb{E}[s_1]} \Big|_t \right) \\ \vdots \\ c - F_v^{-1} \left( 1 - \widehat{\mathbb{E}[s_{n_b}] } \Big|_t \right) \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

A partir d’ici, en utilisant ces estimations de  $y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+n_b}$  et du fait que  $y_t = \phi_t^T \theta^*$ , il est possible de calculer une estimation de  $\theta^*$  via les moindres carrés.

Cet algorithme est souvent considéré comme la première contribution significative pour l’identification des systèmes à sortie binaire. L’analyse de convergence a été réalisée sur la base des hypothèses suivantes :

- Le seuil  $c$  est connu.
- La séquence d’entrée  $\{u_t\}$  est une séquence périodique de longueur supérieure ou égale au nombre de paramètres à estimer et satisfaisant la condition d’excitation persistente.
- La séquence de bruit  $\{v_t\}$  est une séquence de variables aléatoires i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées) de moyenne nulle et de variance finie. Sa fonction de distribution  $F_v(\cdot)$  est supposée dérivable, avec une densité continue et bornée et son inverse  $F_v(\cdot)^{-1}$  est connue. La séquence de bruit est indépendante de la séquence d’entrée.

A noter que les algorithmes proposés dans [WY07] et [MWY14] sont dans le même esprit et dans [Wan+08] il est proposé trois autres algorithmes récursifs similaires à l’algorithme de [WZY+03]. Dans le premier algorithme le seuil  $c$  et  $F_v^{-1}(\cdot)$  sont supposés connus. Dans le deuxième algorithme le seuil  $c$  est inconnu mais  $F_v^{-1}(\cdot)$  est connue. Dans le troisième algorithme  $F_v^{-1}(\cdot)$  est inconnue mais  $c$  est connu. Une autre variante est celle proposée dans [Guo+15a] où le vecteur de régression est choisi au sein d’un ensemble de patterns possibles, l’estimation de la sortie pour chaque type de patterns récurrents se faisant comme pour l’estimation du pattern périodique de [WZY+03]. Enfin, notons qu’une version étendue aux systèmes IIR a été proposée dans [WYZ+06]. Cette dernière méthode est très semblable à ce qui précède à savoir: utilisation d’une entrée périodique (de période  $na + nb + 1$ ) et de la connaissance de  $F_v^{-1}(\cdot)$  pour remonter à une estimation de la sortie non bruitée dans un premier temps et aux paramètres du modèle dans un second temps.

**Remarque 4 :** *dans le cas où le niveau de bruit est faible, les algorithmes cités précédemment ne peuvent pas être appliqués directement car ils reposent sur l’utilisation de la fonction de distribution du bruit. Une solution proposée dans l’article [WZY+03] pour surmonter ce problème est d’utiliser un signal de tramage. Le signal de tramage est un signal ajouté artificiellement à l’entrée du capteur binaire pour introduire du bruit. La fonction de distribution de ce signal est connue afin de pouvoir être utilisée lors du processus d’identification.*

## 2.4.2 Méthodes basées sur la minimisation d'un critère quadratique

### 2.4.2.1 Algorithmes basés sur la minimisation d'un critère d'erreur sur la sortie binaire

L'algorithme décrit dans [CJ09] est dédié à l'identification des systèmes FIR. Il y est proposé l'estimation du vecteur de paramètres via la minimisation d'une fonction de coût quadratique dépendant de l'erreur entre la sortie binaire et son estimation. Le problème d'identification consiste ainsi en la résolution du problème d'optimisation suivant

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmin}_{\theta} \frac{\sum_{t=1}^N (\phi_t^T \theta + d_t)^2 (s_t - \hat{s}_t)^2}{\sum_{t=1}^N (\phi_t^T \theta + d_t)^2} \quad (2.84)$$

avec  $d_t$  un signal de tramage et  $s_t$  tel que

$$s_t = 2\mathbf{Q}_c(y_t^v + d_t) - 1 = \begin{cases} 1 & \text{si } y_t^v + d_t \geq c \\ -1 & \text{si } y_t^v + d_t < c \end{cases} \quad (2.85)$$

et  $\hat{s}_t = 2\mathbf{Q}_c(\phi_t^T \theta + d_t) - 1$ .

Ainsi la méthode de [CJ09] minimise un coût global sur l'ensemble des données. Par ailleurs, dans cette approche le signal de tramage  $d_t$  est connu par l'utilisateur. L'algorithme associé au critère (2.84) proposé dans [CJ09] est itératif. A noter que le bon comportement de l'algorithme est conditionné à une bonne initialisation, celle-ci pouvant être obtenue via un algorithme annexe.

L'analyse (locale) du critère a été réalisée sur la base des hypothèses suivantes :

- Le seuil  $c$  est nul.
- La séquence d'entrée  $\{u_t\}$  est un bruit gaussien.
- La séquence de bruit  $\{v_t\}$  et le signal de tramage sont des bruits blancs gaussiens, indépendants de la séquence d'entrée.

Un autre algorithme basé sur la minimisation d'une fonction de coût quadratique dépendant de l'erreur entre la sortie binaire et son estimation a été proposé dans [DPS11] (et sa variante de [Dep+12]). En posant  $s_t = \mathbf{Q}_c(y_t^v + d_t)$ , cette autre solution consiste en la minimisation du critère ci-dessous

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmin}_{\theta} \sum_{t=1}^N (c - \phi_t^T \theta)^2 (s_t - \hat{s}_t)^2. \quad (2.86)$$



Comme pour le problème (2.84), la résolution du problème (2.86) est obtenue via un algorithme itératif dont la convergence ne peut être assurée que localement. A noter que les auteurs de [DPS11] se placent dans le cadre de l'identification d'un système IIR.

### 2.4.2.2 Variantes pour le temps réel

Afin de permettre une mise en œuvre en temps réel tout en restant dans l'esprit de minimiser une erreur d'estimation par rapport à la sortie binaire, différentes solutions récursives ont été proposées. Ces solutions ne concernent que l'identification de systèmes FIR, les principales sont les suivantes :

- Dans [JJC10] et [Jaf12], les mêmes auteurs que [CJ09] proposent une version récursive visant à minimiser l'erreur instantanée associée au critère (2.84). Cette version est plus simple dans l'implémentation que [CJ09]. L'algorithme ainsi proposé dans [JJC10] est de la forme

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} - \mu_t \frac{\partial E_{t/t-1}^2}{\partial \hat{\theta}_{t-1}} \quad (2.87)$$

avec  $\mu_t$  un paramètre qui doit satisfaire certaines conditions pour garantir la stabilité et la convergence.  $E_{t/t-1}$  représente l'erreur instantanée définie par

$$E_{t/t-1} = \phi^T \hat{\theta}_{t-1} \left| s_t - Q_c \left( \phi_t \hat{\theta}_{t-1} \right) \right|. \quad (2.88)$$

L'algorithme de [JJC10] se déduit de (2.87) et de (2.88). Il est de la forme

$$\hat{\theta}_t = \frac{1}{w_t} \left( \hat{\theta}_{t-1} + \beta_t |s_t - \hat{s}_{t/t-1}| \right) \quad (2.89)$$

avec

$$\begin{cases} \hat{s}_{t/t-1} = Q_c(\hat{y}_{t/t-1}) \\ \hat{y}_{t/t-1} = \phi_t \hat{\theta}_{t-1} \\ \beta_t \text{ un gain d'adaptation} \\ w_t \text{ un facteur de normalisation} \end{cases} \quad (2.90)$$

Une analyse de convergence est proposée sur la base des hypothèse suivantes :

- Le seuil  $c$  est nul.
- $\theta^*$  est de norme 1,  $\|\theta^*\|_2 = 1$ .
- La séquence d'entrée  $\{u_t\}$  est une suite de variables aléatoires i.i.d. de moyenne nulle.
- Le bruit est nul ( $v_t = 0$ ).

D'autres versions de cet algorithme sont proposées dans [JJR12], [BJ12] et [MPP21]. Les différences entre ces versions résident dans les choix du gain d'adaptation  $\beta_t$  et du facteur de normalisation  $w_t$ .

- Un algorithme récursif a été proposé dans [Wig98] dès 1998. Dans cet article, la quantification de la sortie est vue comme une non-linéarité statique et l'objectif est la minimisation de  $\mathbb{E}[(s_t - \hat{s}_t)^2]$ . On retrouve la forme précédente sur la structure de l'algorithme :

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \beta_t(s_t - \hat{s}_{t/t-1}) \quad (2.91)$$

avec

$$\begin{cases} \hat{s}_{t/t-1} = Q_c(\hat{y}_{t/t-1}) \\ \hat{y}_{t/t-1} = \phi_t^T \hat{\theta}_{t-1} \\ \beta_t \text{ un gain d'adaptation} \end{cases} \quad (2.92)$$

Afin de limiter un comportement incertain lors des premiers instants il est proposé dans [Wig98] d'utiliser un opérateur de projection après chaque mise à jour de l'estimation, afin de projeter l'estimation du vecteur de paramètres dans un ensemble borné.

L'analyse de convergence est proposée sur la base des hypothèses suivantes :

- $\theta^*$  appartient à un ensemble convexe connu.
  - La séquence d'entrée  $\{u_t\}$  est une suite de variables aléatoires i.i.d. de moyenne nulle.
  - La séquence de bruit  $\{v_t\}$  est une suite de variables aléatoires i.i.d. de moyenne nulle et indépendante de la séquence d'entrée.
- Dans [GZZ12], [GZ13] et [ZWZ21], il est proposé d'utiliser la connaissance de la fonction de distribution  $F_v(\cdot)$  de la séquence de bruit  $\{v_t\}$ . En définissant  $s_t = 1 - Q_c(y_t^v + d_t)$  il a été vu dans la sous-section (2.4.1) que l'espérance de la séquence  $\{s_t\}$  est de la forme  $\mathbb{E}[s_t] = F_v(c - \phi_t^T \theta^*)$ . L'algorithme proposé dans [GZ13] est de nouveau de type gradient avec une estimation récursive du vecteur de paramètres de la manière suivante :

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \beta_t(s_t - \hat{s}_{t/t-1}) \quad (2.93)$$

avec

$$\begin{cases} \hat{s}_{t/t-1} = F_v(c - \hat{y}_{t/t-1}) \\ \hat{y}_{t/t-1} = \phi_t^T \hat{\theta}_{t-1} \\ \beta_t \text{ un gain d'adaptation} \end{cases} \quad (2.94)$$

A l'image de ce qui est fait dans [Wig98], il est suggéré dans [GZ13] d'appliquer un opérateur de projection après chaque mise à jour de l'estimation afin de projeter l'estimation du vecteur de paramètres dans un ensemble convexe.

L'analyse de convergence a été réalisée sur la base des hypothèses suivantes :

- $\theta^*$  appartient à un ensemble convexe connu.
- La séquence d'entrée  $\{u_t\}$  est une séquence de variables aléatoires, bornée et satisfaisant la condition d'excitation persistente.
- La séquence de bruit  $\{v_t\}$  est une suite de variables aléatoires i.i.d. de moyenne nulle, indépendante de la séquence d'entrée et dont la fonction de distribution  $F_v(\cdot)$  est connue.

Une extension est proposé dans [Ke+22], la différence avec [GZ13] est au niveau du gain d'adaptation  $\beta_t$ .

A noter que sur toutes ces versions récursives il est nécessaire de faire un choix sur le gain d'adaptation. Ce gain peut être choisi constant ou variant dans le temps (décroissant ou non). Ce choix conditionne la vitesse de convergence et la variance des estimations.

### 2.4.3 Méthodes basées sur une analyse de corrélation

Dans [Son18], les auteurs proposent un algorithme récursif basé sur le calcul de la fonction d'intercorrélation entre la séquence d'entrée  $\{u_t\}$  et la séquence de sortie binaire  $\{s_t\}$  (avec ici  $s_t = \mathbf{Q}_c(y_t^v + d_t)$ ). Il est en effet montré que cette intercorrélation vérifie

$$\mathbb{E}[u_t s_{t+i}] = \alpha h_i \quad (2.95)$$

avec  $s_t = \mathbf{Q}_c(y_t^v)$  et  $\alpha$  un terme de normalisation<sup>2</sup>.

Les termes  $h_i$  sont ainsi obtenus assez simplement par le calcul de la fonction d'intercorrélation. Suite à cette estimation des premiers termes de la réponse impulsionnelle, les auteurs de [Son18] présentent une estimation des paramètres du numérateur et du dénominateur du modèle pour un système IIR via quelques manipulations algébriques.

La démonstration de la propriété (2.95) et l'analyse de convergence qui en découle ont été réalisées sur la base des hypothèses suivantes :

<sup>2</sup>cette relation (2.95) fait écho à la relation  $\mathbb{E}[u_t y_{t+i}] = \alpha h_i$ , avec  $\alpha = \mathbb{E}[u_t u_t]$ , qui peut être aisément démontrée lorsque la séquence d'entrée est bruit blanc gaussien par exemple.

- Le premier terme de la réponse impulsionnelle est 1.
- La séquence d'entrée  $\{u_t\}$  est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle.
- La séquence de bruit  $\{v_t\}$  est un bruit gaussien coloré de moyenne nulle indépendant de la séquence d'entrée.

Une approche similaire est développée dans [JC07] dans le cas FIR, l'objectif y étant l'initialisation de l'algorithme développé dans [CJ09].

#### 2.4.4 Méthodes basées sur le maximum de vraisemblance

Dans [God+11], il est proposé de réaliser l'identification au sens du maximum de vraisemblance pour les systèmes FIR. Après avoir défini un vecteur de paramètres étendu  $\bar{\theta}^* = \begin{pmatrix} \theta^* \\ \sigma_v^2 \end{pmatrix}$  où  $\sigma_v^2$  est la variance de la séquence de bruit  $\{v_t\}$  supposée être un bruit blanc gaussien, l'estimation de  $\bar{\theta}^*$  est obtenue via l'estimateur du maximum de vraisemblance

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\bar{\theta}} \log (P (\{s_t\}_{t=1}^N | \bar{\theta})) \quad (2.96)$$

où  $P (\{s_t\}_{t=1}^N | \bar{\theta})$ <sup>3</sup> est la probabilité de la séquence  $\{s_t\}_{t=1}^N$  étant donnée le vecteur de paramètres étendu  $\bar{\theta}$ .

L'algorithme utilisé pour l'estimation de  $\bar{\theta}^*$  est l'algorithme Espérance-Maximisation, l'identification se faisant ainsi via un algorithme itératif. Dans [CZL12] il est proposé une approche similaire, un terme de régularisation est introduit lors du calcul du vecteur de paramètres afin de réduire la variance d'estimation. A noter que ici aussi il n'y a pas de preuve de convergence globale de la procédure.

Sur la base du même principe, une extension au cas des systèmes IIR est proposée dans [MYF13]. Dans cette extension l'algorithme Espérance-Maximisation n'est utilisé que pour initialiser la procédure dans un premier temps, un algorithme de type gradient est utilisé dans un second temps afin d'accélérer la convergence. Une analyse de convergence locale est proposée.

<sup>3</sup>nous utilisons ici la notation  $P(x|y)$  qui représente la probabilité conditionnelle de x sachant que y.

## 2.4.5 Méthodes basées sur une formulation ensembliste

### 2.4.5.1 Identification par programmation quadratique

L'algorithme proposé par [LWZ+11] aborde l'identification des systèmes à sortie binaire comme un problème d'estimation ensembliste. En définissant la sortie binaire  $s_t$  par  $s_t = \mathbf{Q}_c(y_t^v)$ , il est montré que  $y_t$  est tel que

$$-\alpha(1 - s_t) + cs_t \leq y_t < c(1 - s_t) + \alpha s_t \quad (2.97)$$

où  $\alpha > 0$  est un paramètre de synthèse tel que  $-\alpha < y_t < \alpha$ . Si le système est de type FIR alors ceci devient

$$-\alpha(1 - s_t) + cs_t \leq \phi_t^T \theta^* < c(1 - s_t) + \alpha s_t. \quad (2.98)$$

L'intérêt de cette formulation est qu'elle permet de définir un ensemble d'appartenance au vecteur de paramètres  $\theta^*$ . Ceci mène au problème d'optimisation sous contrainte suivant

$$\begin{aligned} \hat{\theta} = \operatorname{argmin}_{\theta} \sum_{t=1}^N (y_t - \phi_t^T \theta)^2 \\ \text{tel que } -\alpha(1 - s_t) + cs_t \leq \phi_t^T \theta < c(1 - s_t) + \alpha s_t ; \forall t \in [1, N]. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Ce problème d'optimisation sous contrainte est reformulé ensuite sous forme d'un problème standard de programmation quadratique.

Les auteurs de [LWZ+11] abordent aussi le problème de l'identification des systèmes IIR. (2.98) est en effet encore valide pour de tels systèmes, cette inéquation peut donc a priori être utilisée pour l'identification, néanmoins une difficulté est le fait qu'une partie du vecteur  $\phi_t$  est inaccessible (celle avec les composantes  $y_{t-i}$ ). Par suite, la résolution de (2.99) est obtenue via l'utilisation d'un algorithme itératif utilisant encore une méthode de programmation quadratique et réalisant une estimation des composantes  $y_{t-i}$  à chaque itération. A noter qu'aucune preuve de convergence globale n'est fournie pour cet algorithme itératif. Par ailleurs, le bruit n'ayant pas été pris en compte explicitement, les performances peuvent être fragiles en présence de bruit.

### 2.4.5.2 Identification en présence de bruit borné

Dans [Pou+16b] il est aussi proposé une formulation ensembliste du problème d'identification. Suite à cette formulation, il est suggéré l'usage d'un algorithme ellipsoïdal pour l'estimation

du vecteur de paramètres. Dans [Pou+16b] il est en effet fait remarqué que dans le cas d'un système FIR, en l'absence de bruit, le vecteur de paramètres  $\theta^*$  satisfait

$$\left| s_t - \phi_t^T \frac{\theta^*}{\alpha} \right| < 1 \quad (2.100)$$

avec

$$s_t = 2\mathbf{Q}_c(y_t^v) - 1 = \begin{cases} 1 & \text{si } y_t^v \geq c \\ -1 & \text{si } y_t^v < c \end{cases} \quad (2.101)$$

et  $\alpha$  un terme de normalisation. Il en résulte la relation suivante entre  $s_t$  et  $\theta^*$

$$s_t = \phi_t^T \frac{\theta^*}{\alpha} + b_t \quad (2.102)$$

avec  $b_t$  tel que  $|b_t| < 1$ ,  $b_t$  s'apparente donc ici à un bruit borné.

Suite à cette reformulation il est proposé dans [Pou+16b] de résoudre dans un premier temps le problème d'identification ensembliste suivant

$$\hat{\theta} = \arg_{\theta} \{ |s_t - \phi_t^T \theta| < 1 ; \forall t \in [1, N] \}, \quad (2.103)$$

puis de procéder à une normalisation du vecteur de paramètres estimé par rapport à une connaissance sur  $\theta^*$ .

L'algorithme utilisé est un algorithme de type ellipsoïdal, récursif de la forme suivante

$$\hat{\theta}_t = \frac{1}{w_t} \left( \hat{\theta}_{t-1} + \beta_t (s_t - \hat{y}_{t/t-1}) \right) \quad (2.104)$$

avec

$$\begin{cases} \hat{y}_{t/t-1} = \phi_t^T \hat{\theta}_{t-1} \\ \beta_t \text{ un gain d'adaptation} \\ w_t \text{ un facteur de normalisation} \end{cases} \quad (2.105)$$

L'analyse de convergence proposée a été réalisée sur la base des hypothèses suivantes:

- Le seuil  $c$  est nul.
- $\theta^*$  est de norme 1,  $\|\theta^*\| = 1$ .
- La séquence d'entrée  $\{u_t\}$  satisfait la condition d'excitation persistante.
- La séquence de bruit  $\{v_t\}$  est une suite de variables aléatoires i.i.d. de moyenne nulle et indépendante de la séquence d'entrée.

Il convient de noter que cet algorithme nécessite le choix relativement délicat de paramètres de synthèse et que ses performances se dégradent en présence d'un bruit important (notamment la variance d'estimation).

Une solution analogue a été proposée dans [Pou+19] dans le cas d'un système IIR. La résolution du problème d'identification de [Pou+19] passe par un algorithme itératif. A noter qu'aucune preuve de convergence globale n'est fournie pour cet algorithme itératif, seule une preuve de convergence locale est proposée.

### 2.4.6 Méthodes basées sur une reformulation du problème sous forme d'un problème de classification

Il est proposé dans [LW12] et [Gou+15] une autre reformulation du problème d'identification. Le problème d'identification est posé ici sous forme d'un problème de classification en 2 classes. En effet, si on considère le cas des systèmes FIR, d'après (2.76) et (2.77) le vecteur de paramètres  $\theta^*$  apparaît comme un vecteur structurant l'hyperplan séparateur entre les vecteurs  $\phi_t$  appartenant à la classe  $\mathbf{Q}_c(y_t^v) = 1$  et les vecteurs  $\phi_t$  appartenant à la classe  $\mathbf{Q}_c(y_t^v) = 0$ . Il est ainsi proposé d'utiliser un algorithme de classification pour estimer les paramètres de l'hyperplan séparateur.

L'algorithme de classification utilisé est l'algorithme des Séparateurs à Vaste Marge (SVM - Support Vector Machine). Cet algorithme consiste à résoudre tout d'abord le problème d'optimisation suivant

$$\begin{aligned} \hat{\theta} = \operatorname{argmin}_{\theta, c, \epsilon_t} & \left( \frac{1}{2} \|\theta\|_2^2 + \gamma \sum_{t=1}^N \epsilon_t \right) \\ \text{tel que } & s_t(\phi_t^T \theta - c) \geq 1 - \epsilon_t, \text{ et } \epsilon_t \geq 0 ; \forall t \in [1, N] \end{aligned} \quad (2.106)$$

avec

$$s_t = 2\mathbf{Q}_c(y_t^v) - 1 = \begin{cases} 1 & \text{si } y_t^v \geq c \\ -1 & \text{si } y_t^v < c, \end{cases} \quad (2.107)$$

puis à normaliser la solution par rapport à une hypothèse de normalisation.

L'analyse de convergence proposée dans [LW12] a été réalisée sur la base des hypothèses suivantes :

- Le seuil  $c$  est nul.
- Le premier terme de la réponse impulsionnelle est 1.

- La séquence d’entrée  $\{u_t\}$  est une suite de variables aléatoires i.i.d. de moyenne nulle.
- La séquence de bruit  $\{v_t\}$  est un bruit blanc uniforme de moyenne nulle et indépendant de la séquence d’entrée.

Il convient de souligner que l’utilisation des SVM peut entraîner une charge de calcul relativement élevée pour une grande quantité de données  $N$  ou pour un ordre élevé du modèle. Une mise en œuvre en temps réel de cette approche apparaît délicate.

Dans [LW12] il est proposé une extension au cas des systèmes IIR. Cette extension consiste à estimer dans un premier temps un grand nombre de paramètres de la réponse impulsionnelle, puis dans un second temps à en extraire par manipulations algébriques les paramètres des polynômes du numérateur et du dénominateur du modèle.

## 2.5 Conclusion

En conclusion, ce chapitre a permis d’établir deux états de l’art, le premier sur l’identification des systèmes à partir des méthodes des sous-espaces, le second sur l’identification des systèmes à sortie binaire. Nous avons ainsi pu identifier les travaux les plus pertinents et les plus récents dans ces domaines, les mécanismes mis en œuvre ainsi que les limites actuelles. Cette revue de la littérature nous a permis notamment de constater d’une part que le problème d’identification des systèmes à sortie binaire n’aborde pas l’estimation de modèle sous forme de représentation d’état, et d’autre part qu’aucune des méthodes listées pour l’identification pour ce type de système ne propose d’outil d’estimation de l’ordre. Ces constats justifient les études présentées dans les chapitres suivants sur le sujet.



# 3

## Identification d'une réalisation d'état avec excitation périodique

### Sommaire

---

3.1	Introduction . . . . .	48
3.2	Problématique et hypothèses . . . . .	48
3.3	Algorithme d'identification . . . . .	50
3.3.1	Conditionnement des données et notations . . . . .	50
3.3.2	Formulation de l'algorithme . . . . .	51
3.4	Analyse de l'algorithme . . . . .	56
3.4.1	Analyse de la première étape . . . . .	56
3.4.2	Analyse de la deuxième étape . . . . .	59
3.4.3	Analyse de la troisième étape . . . . .	64
3.5	Simulations Numériques . . . . .	67
3.5.1	Résultats de l'étape 1 . . . . .	68
3.5.2	Résultats de l'étape 2 . . . . .	69
3.5.3	Résultats de l'étape 3 . . . . .	72
3.6	Conclusion . . . . .	73

---

## 3.1 Introduction

Le présent chapitre expose un algorithme d'identification permettant d'estimer les matrices d'une réalisation d'état d'un modèle sur la base d'échantillons de la séquence d'entrée et d'échantillons de la séquence de sortie binaire. Cet algorithme nécessite l'utilisation d'une entrée périodique, ainsi que la connaissance de la fonction de distribution du bruit (conditions de mise en œuvre que nous avons déjà évoquées dans le chapitre 2, notamment pour les méthodes présentées dans [WZY+03] et [WYZ+06]).

La contribution de ce chapitre réside dans l'utilisation des sous-espaces dans le processus d'identification. En utilisant les sous-espaces, l'algorithme ne nécessite pas la connaissance de l'ordre de système, ce qui est un avantage significatif par rapport aux approches dédiées aux modèles sous forme de fonction de transfert.

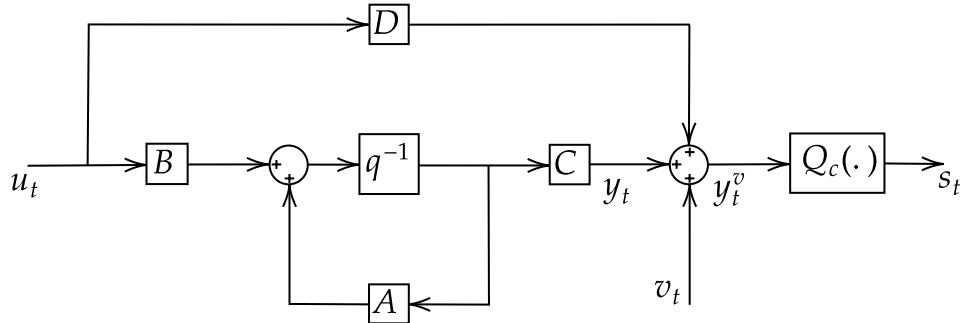
Ce chapitre commence par la présentation du problème et quelques hypothèses dans la section 3.2. La formulation de l'algorithme est ensuite détaillée dans la section 3.3. Une analyse de convergence est effectuée dans la section 3.4 afin de montrer le comportement de l'algorithme en fonction du nombre d'échantillons disponibles et du contenu de l'excitation d'entrée. Enfin, nous présentons les performances de l'algorithme par des simulations numériques dans la section 3.5.

## 3.2 Problématique et hypothèses

Nous considérons un système LTI à temps discret dont le comportement dynamique peut être décrit par la réalisation d'état minimale suivante :

$$\begin{cases} x_{t+1} &= Ax_t + Bu_t \\ y_t^v &= Cx_t + Du_t + v_t \end{cases} \quad (3.1)$$

Il s'agit ici de la structure d'état déjà décrite dans le chapitre 2.



**Figure 3.1** : schéma bloc du modèle de système.

Comme le montre la figure 3.1, l'entrée est disponible pour l'utilisateur mais pas la sortie réelle. La sortie est mesurée à l'aide d'un capteur binaire  $Q_c(\cdot)$ , l'information de sortie disponible est ainsi définie par

$$s_t = Q_c(y_t^v) = \begin{cases} 1 & \text{si } y_t^v - c \geq 0 \\ 0 & \text{si } y_t^v - c < 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

L'objectif est d'estimer  $n$  et une réalisation d'état  $\{A, B, C, D\}$  étant donné  $\{u_t, s_t\}_{t=1}^N$  où  $N$  est le nombre de données disponibles.

Quelques hypothèses pour le développement de l'algorithme proposé dans ce chapitre sont les suivantes:

- **H.1** :  $\{u_t\}$  est une séquence périodique de période  $L$ , avec  $L$  pair, et la matrice circulante ci-dessous

$$\begin{pmatrix} u_t & u_{t+1} & \dots & u_{t+L-1} \\ u_{t+1} & u_{t+2} & \dots & u_t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{t+L-1} & u_t & \dots & u_{t+L-1-1} \end{pmatrix}$$

est inversible.

- **H.2** :  $\{v_t\}$  est une séquence stationnaire de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) de moyenne nulle avec une fonction de distribu-

tion  $F_v(\cdot)$  telle que  $F_v^{-1}(\cdot)$  existe, est continue et connue.

- **H.3** : Le système est strictement stable et d'ordre minimal  $n$ .

**Remarque 5 :**

*L'hypothèse sur l'inversibilité de la matrice circulante correspond à l'habituelle condition d'excitation persistante [Lju99].*

### 3.3 Algorithme d'identification

Cette section est divisée en deux sous-sections : la première sous-section introduit certaines notations nécessaires et comprend le conditionnement des données. La deuxième sous-section fournit des détails techniques sur l'algorithme d'identification proposé.

#### 3.3.1 Conditionnement des données et notations

D'après le chapitre 2, la matrice de Hankel des sorties futures non bruitées  $Y_{t/j/f}$  s'exprime à partir d'une matrice des états  $X_{t/j}$  et de la matrice de Hankel des entrées futures  $U_{t/j/f}$  comme suit

$$Y_{t/j/f} = \Gamma_f X_{t/j} + H_{f,u} U_{t/j/f}. \quad (3.3)$$

De même,  $X_{t/j}$  s'exprime à partir des états passés et des entrées passés comme suit

$$X_t = A^f X_{t-f/j} + \Delta_f U_{t-f/j/f}. \quad (3.4)$$

Dans ce qui suit, nous supposerons tout au long de ce chapitre que  $f = \frac{L}{2}$ . En tenant compte de l'hypothèse **H.1** sur la périodicité,  $u_{t-2f} = u_t$ , ceci implique  $U_{t-2f/j/f} = U_{t/j/f}$  et  $U_{t-3f/j/f} = U_{t-f/j/f}$ , etc. En utilisant ceci dans (3.4) pour  $t - f$ ,  $t - 2f$ ,  $t - 3f$ , etc. nous avons

$$\begin{cases} X_{t-f/j} &= A^f X_{t-2f/j} + \Delta_f U_{t/j/f} \\ X_{t-2f/j} &= A^f X_{t-3f/j} + \Delta_f U_{t-f/j/f} \\ X_{t-3f/j} &= A^f X_{t-4f/j} + \Delta_f U_{t/j/f} \\ X_{t-4f/j} &= etc. \end{cases} \quad (3.5)$$

Ainsi, de (3.3) et (3.5),  $Y_{t/j/f}$  se développe comme suit

$$\begin{aligned}
 Y_{t/j/f} &= \Gamma_f (A^f X_{t-f/j} + \Delta_f U_{t-f/j/f}) + H_{f,u} U_{t/j/f} \\
 &= \Gamma_f (A^{2f} X_{t-2f/j} + A^f \Delta_f U_{t/j/f} + \Delta_f U_{t-f/j/f}) + H_{f,u} U_{t/j/f} \\
 &= \Gamma_f (A^{3f} X_{t-3f/j} + A^{2f} \Delta_f U_{t-f/j/f} + A^f \Delta_f U_{t/j/f} + \Delta_f U_{t-f/j/f}) + H_{f,u} U_{t/j/f} \\
 &= \Gamma_f ((I_n + A^{2f} + A^{4f} + \dots) \Delta_f U_{t-f/j/f} + (A^f + A^{3f} + \dots) \Delta_f U_{t/j/f}) + H_{f,u} U_{t/j/f}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

ou encore

$$Y_{t/j/f} = M_f U_{t/j/f} + M_p U_{t-f/j/f} \tag{3.7}$$

avec

$$M_f = H_{f,u} + \Gamma_f (A^f + A^{3f} + \dots) \Delta_f \in \mathbb{R}^{f \times f} \tag{3.8}$$

et

$$M_p = \Gamma_f (I_n + A^{2f} + A^{4f} + \dots) \Delta_f \in \mathbb{R}^{f \times f}. \tag{3.9}$$

Du fait de la périodicité,  $Y_{t/j/f}$  est redondante pour  $j > L$ , dans la suite nous prendrons donc  $j = L$ . Par ailleurs dans ce qui suit, pour simplifier la présentation, nous noterons  $U_f = U_{t/j/f}$ ,  $U_p = U_{t-f/j/f}$  et  $Y_f = Y_{t/j/f}$ . Ceci donne

$$Y_f = M_f U_f + M_p U_p. \tag{3.10}$$

L'idée dans la méthode proposée dans ce chapitre est de profiter de cette formulation particulière pour extraire dans un premier temps  $M_p$  puis, du fait de la structure de  $M_p$ , d'en déduire les matrices d'état.

**Remarque 6 :**

*Il est remarqué que dans les méthodes d'identification avec une excitation périodique le système à identifier est généralement considéré comme étant à l'état stationnaire, ceci permet de négliger les conditions initiales et ainsi d'obtenir (3.10).*

### 3.3.2 Formulation de l'algorithme

Dans le chapitre 2, nous avons vu que les méthodes des sous-espaces habituelles sont composées de plusieurs étapes : le conditionnement des données, l'estimation de la matrice d'observabilité étendue et de l'ordre, puis enfin l'estimation des matrices d'état. Ces étapes sont communes à toutes ces méthodes et sont basées sur la connaissance

des données d'entrée/sortie. Cependant, dans notre cas, la sortie du système est inconnue, ce qui rend ce processus habituel inapplicable.

Afin de surmonter ce problème, nous avons complété l'étape de conditionnement des données en y intégrant une phase d'estimation de sortie  $y_t$  sur la durée d'une période. Ainsi, l'algorithme proposé repose sur trois étapes : la première étape est dédiée à l'estimation de la matrice de Hankel de la sortie sans bruit  $Y_f$ . Sur la base de cette estimation, la deuxième étape se concentre sur l'estimation de la matrice d'observabilité, tandis que la troisième étape vise à estimer les matrices d'état. Les détails techniques sont donnés ci-dessous.

### 3.3.2.1 Étape 1 : estimation de la matrice de Hankel $Y_f$

Comme fait remarqué dans le chapitre 2, la probabilité d'obtenir  $s_t = 1$  est la même que la probabilité d'obtenir  $c - y_t < v_t$ . Ainsi, pour chaque  $t \in \{1, 2, \dots, L\}$ , nous avons

$$\mathbb{E}[s_t] = 1 - F_v(c - y_t). \quad (3.11)$$

Si  $F_v^{-1}(\cdot)$  existe et est connue (hypothèse **H.2**) et si une estimation de  $\mathbb{E}[s_t]$  est disponible nous pouvons estimer  $y_t$  comme suit

$$\hat{y}_t|_N = c - F_v^{-1}(1 - \widehat{\mathbb{E}}[s_t]|_N) \quad (3.12)$$

où  $\widehat{\mathbb{E}}[s_t]|_N$  une estimation de  $\mathbb{E}[s_t]$  et  $\hat{y}_t|_N$  une estimation de  $y_t$ .

Une première solution pour le calcul de  $\widehat{\mathbb{E}}[s_t]|_N$  consiste en le calcul de la moyenne empirique

$$\widehat{\mathbb{E}}[s_t]|_N^{emp} = \frac{1}{N_L} \sum_{a=0}^{N_L-1} s_{aL+t} \quad (3.13)$$

où  $N_L = \lfloor \frac{N}{L} \rfloor$  désigne le nombre de périodes de longueur  $L$  dans  $N$  échantillons ( $\lfloor \cdot \rfloor$  est l'opérateur valeur entière).

Il peut être remarqué que ce mode d'estimation de  $\mathbb{E}[s_t]$  risque de faire intervenir les cas  $F_v^{-1}(0)$  et  $F_v^{-1}(1)$  dans (3.12), notamment pour un nombre d'échantillons faible. Aussi, nous proposons d'utiliser une seconde estimation en utilisant une troncature sur l'estimation empirique comme proposé dans [ZWB18]. Nous avons alors

$$\widehat{\mathbb{E}[s_t]} \Big|_N = \begin{cases} \frac{1}{N_L} & \text{if } \widehat{\mathbb{E}[s_t]} \Big|_N^{emp} = 0 \\ \widehat{\mathbb{E}[s_t]} \Big|_N^{emp} & \text{if } 0 < \widehat{\mathbb{E}[s_t]} \Big|_N^{emp} < 1 \\ 1 - \frac{1}{N_L} & \text{if } \widehat{\mathbb{E}[s_t]} \Big|_N^{emp} = 1. \end{cases} \quad (3.14)$$

Il convient de noter aussi que pour une estimation précise, le nombre de données ( $N$  ou  $N_L$ ) dans l'expérience doit être suffisamment grand. Ceci est confirmé dans les sections suivantes (sections 3.4 et 3.5).

Une fois que tous les  $\widehat{y}_t \Big|_N$  sont calculés pour  $t \in \{1, 2, \dots, L\}$ , nous pouvons construire la matrice de Hankel estimée  $\widehat{Y}_f$  (la dépendance de  $\widehat{Y}_f$  en  $N$  est omise pour des raisons de lisibilité).

### 3.3.2.2 Étape 2 : estimation de l'ordre et de la matrice d'observabilité étendue.

Il a été vu que  $Y_f$  est de la forme  $Y_f = M_f U_f + M_p U_p$  et que la matrice d'observabilité étendue  $\Gamma_f$  apparaît dans la définition de  $M_f$  et  $M_p$  dans (3.8) et (3.9). D'après l'hypothèse **H.3**, le système est strictement stable, il peut ainsi être montré que la matrice  $I_n + A^{2f} + A^{4f} + \dots$  est de rang  $n$ . Par suite,  $M_p = \Gamma_f (I_n + A^{2f} + A^{4f} + \dots) \Delta_f$  est de rang  $n$ . Ainsi l'estimation de  $M_p$  va permettre l'extraction de  $\Gamma_f$  et l'estimation de l'ordre  $n$ . Dans (3.10), afin d'éliminer  $M_f U_f$ , nous appliquons dans un premier temps l'opérateur de projection  $\Pi_{U_f}^\perp = I - U_f^T (U_f U_f^T)^{-1} U_f$ , nous obtenons donc

$$Y_f \Pi_{U_f}^\perp = M_p U_p \Pi_{U_f}^\perp. \quad (3.15)$$

Ceci permet l'extraction de  $M_p$  comme suit

$$M_p = Y_f U \quad (3.16)$$

avec  $U = \Pi_{U_f}^\perp U_p^T (U_p \Pi_{U_f}^\perp U_p^T)^{-1}$ . A noter que l'hypothèse **H.1**, notamment l'hypothèse sur le rang de la matrice circulante, assure l'inversibilité de  $U_p \Pi_{U_f}^\perp U_p^T$ .

En utilisant l'estimation de la première étape, il s'ensuit qu'il est possible de calculer une estimation de  $M_p$  comme suit

$$\widehat{M}_p = \widehat{Y}_f U. \quad (3.17)$$

En appliquant une SVD sur  $\widehat{M}_p$  nous avons alors

$$\widehat{M}_p = \begin{pmatrix} \widehat{U}_{s1} & \widehat{U}_{s2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{S}_1 & 0 \\ 0 & \widehat{S}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{V}_{s1}^T \\ \widehat{V}_{s2}^T \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

où  $\widehat{S}_1$  est une matrice diagonale avec les  $\widehat{n}$  premières plus grandes valeurs singulières dominantes de  $\widehat{M}_p$ ,  $\widehat{S}_2$  est une matrice négligeable par rapport à  $\widehat{S}_1$ ,  $(\widehat{U}_{s1} \ \widehat{U}_{s2})$ ,  $(\widehat{V}_{s1} \ \widehat{V}_{s2})$  sont deux matrices orthogonales. L'ordre estimé est alors donné par

$$\widehat{n} = \mathbf{ordre}(\widehat{S}_1) \quad (3.19)$$

et  $\widehat{\Gamma}_f$  est donné par

$$\widehat{\Gamma}_f = \widehat{U}_{s1}. \quad (3.20)$$

Il est bien entendu possible d'estimer  $\Gamma_f$  dans une autre base en utilisant une matrice de changement de base non singulière  $T \in \mathbb{R}^{\widehat{n} \times \widehat{n}}$  comme suit  $\widehat{\Gamma}_f = \widehat{U}_{s1} T$ .

### 3.3.2.3 Étape 3 : estimation des matrices d'état

Nous avons vu dans le chapitre 2 qu'il y a plusieurs voies pour estimer les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ , nous présentons ici la voie qui nous apparaît la plus simple tout en gardant à l'esprit que d'autres solutions sont possibles.

- $C$  correspond à la première ligne de  $\Gamma_f$ , son estimation correspond à

$$\widehat{C} = \widehat{\Gamma}_f(1, :). \quad (3.21)$$

- Nous savons que la matrice  $A$  satisfait

$$A = \left( \Gamma_f^{+T} \Gamma_f^+ \right)^{-1} \Gamma_f^{+T} \Gamma_f^-, \quad (3.22)$$

une estimation de  $A$  est alors donnée par

$$\widehat{A} = \left( \widehat{\Gamma}_f^{+T} \widehat{\Gamma}_f^+ \right)^{-1} \widehat{\Gamma}_f^{+T} \widehat{\Gamma}_f^-. \quad (3.23)$$

- $B$  et  $D$  peuvent être obtenues en utilisant  $A$ ,  $C$ . Il peut être facilement montré que  $y_t$  satisfait

$$y_t = \begin{pmatrix} u_t & C(zI_{n \times n} - A)^{-1} u_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ B \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Définissons le vecteur de régression suivant  $\phi_t$  comme suit

$$\phi_t = \begin{pmatrix} u_t \\ [C(qI_{n \times n} - A)^{-1}]^T u_t \end{pmatrix} \quad (3.25)$$



---



---

**Étape 1 : estimation de  $Y_f$**

Étant donné  $\{u_t, s_t\}_{t \in [1;N]}$  :

- Calculer  $\mathbb{E}[s_t]$  pour  $t \in \{1, 2, \dots, L\}$  via (3.14).
  - Calculer  $\widehat{y}_t|_N$  pour  $t \in \{1, 2, \dots, L\}$  via (3.12).
  - Construire  $\widehat{Y}_f$ .
- 

**Étape 2 : estimation de  $n$  et  $\Gamma_f$**

- Calculer  $\widehat{M}_p$  via (3.17).
  - Appliquer SVD (3.18).
  - Estimer l'ordre  $n$  et  $\widehat{\Gamma}_f$  de (3.19) et (3.20).
- 

**Étape 3 : estimation de  $\{A, B, C, D\}$**

- Calculer  $\widehat{C}$  de (3.21).
  - Calculer  $\widehat{A}$  de (3.23).
  - Calculer  $\widehat{B}$  et  $\widehat{D}$  de (3.27).
- 
- 

**Table 3.1** : résumé de l'algorithme du chapitre 3.

ainsi  $y_t$  peut être exprimé par

$$y_t = \phi_t^T \begin{pmatrix} D \\ B \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Du fait que  $y_t$ ,  $A$  et  $C$  sont estimés dans (3.12), (3.23) et (3.21), nous les remplaçons par leurs estimations. Enfin, en utilisant la méthode de moindres carrés, nous obtenons les estimations suivantes de  $B$  et  $D$

$$\begin{pmatrix} \widehat{D} \\ \widehat{B} \end{pmatrix} = \left( \sum_{t=1}^N \widehat{\phi}_t \widehat{\phi}_t^T \right)^{-1} \sum_{t=1}^N \widehat{\phi}_t \widehat{y}_t \quad (3.27)$$

avec

$$\widehat{\phi}_t = \begin{pmatrix} u_t \\ \left[ \widehat{C} \left( qI_{\widehat{n} \times \widehat{n}} - \widehat{A} \right)^{-1} \right]^T u_t \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

L'algorithme global est résumé dans le tableau 3.1.

**Remarque 7 :**

Comme indiqué dans [WZY+03], si le niveau de bruit n'est pas suffisant ou si le seuil n'est pas bien choisi, "it is possible that for a selected input,  $s_t$  is a constant (0 or 1) for all  $t$ , hence no information is obtained in observations" et ainsi aucune identification n'est possible. Pour éviter ce problème, comme suggéré dans [WZY+03] et [CJ09] par exemple, il est possible d'appliquer un signal de tramage  $d_t$  indépendant de  $v_t$  à la sortie du système, juste avant le capteur binaire. Dans ce cas-ci, la fonction de distribution de  $v_t + d_t$  prend la place de  $F_v(\cdot)$ .

### 3.4 Analyse de l'algorithme

L'algorithme précédent comporte trois étapes. Des propriétés de convergence sont établies dans cette section pour chacune de ces étapes.

#### 3.4.1 Analyse de la première étape

Les propriétés de convergence de l'estimation de  $y_t$  sont données par les deux théorèmes suivants.

**Théorème 1 :**

Si les conditions de la section 3.2 sont vérifiées, alors pour chaque  $t \in \{1, 2, \dots, L\}$ ,  $\widehat{y}_t|_N$  converge presque sûrement et converge en moyenne quadratique vers  $y_t$  quand  $N$  tend vers l'infini.

■

**Preuve 1 :**

De l'hypothèse **H.3** le système est strictement stable, il s'ensuit que pour chaque  $t \in \{1, 2, \dots, L\}$ ,  $y_t$  est périodique :  $y_{t+kL} = y_t$ .  $\{v_t\}$  est ergodique et stationnaire, il s'ensuit que la séquence  $\{y_t + v_{t+kL}\}_k$  est ergodique et stationnaire, et donc la séquence  $\{s_{t+kL}\}_k$  est ergodique et stationnaire. Par conséquent  $\widehat{\mathbb{E}}[s_t]|_N^{emp}$  converge presque sûrement vers  $\mathbb{E}[s_t]$ .

Nous pouvons remarquer que d'après (3.14),  $\lim_{N \rightarrow \infty} \widehat{\mathbb{E}}[s_t]|_N - \widehat{\mathbb{E}}[s_t]|_N^{emp} = 0$ , ceci implique que  $\widehat{\mathbb{E}}[s_t]|_N$  converge presque sûrement vers  $\mathbb{E}[s_t]$  aussi.

À propos de la convergence au sens de la moyenne quadratique, nous avons

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[ \left( \widehat{\mathbb{E}[s_t]} \Big|_N^{emp} - \mathbb{E}[s_t] \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[ \left( \widehat{\mathbb{E}[s_t]} \Big|_N^{emp} \right)^2 - 2 \widehat{\mathbb{E}[s_t]} \Big|_N^{emp} \mathbb{E}[s_t] + \mathbb{E}[s_t]^2 \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[ \left( \widehat{\mathbb{E}[s_t]} \Big|_N^{emp} \right)^2 \right] - \mathbb{E}[s_t]^2.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Or

$$\begin{aligned}
 \left( \widehat{\mathbb{E}[s_t]} \Big|_N^{emp} \right)^2 &= \left( \frac{1}{N_L} \sum_{a=0}^{N_L-1} s_{aL+t} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{N_L^2} \left( \sum_{a=0}^{N_L-1} s_{aL+t}^2 + 2 \sum_{a=0}^{N_L-2} \sum_{b=a+1}^{N_L-1} s_{aL+t} s_{bL+t} \right)
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

du fait que  $\{v_t\}$  est i.i.d.,  $\mathbb{E}[s_{aL+t} s_{bL+t}] = \mathbb{E}[s_{aL+t}] \mathbb{E}[s_{bL+t}] = \mathbb{E}[s_t]^2$  et  $s_t^2 = s_t$ , pour tout  $a \neq b$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[ \left( \widehat{\mathbb{E}[s_t]} \Big|_N^{emp} \right)^2 \right] &= \frac{1}{N_L} \mathbb{E}[s_t] + 2 \sum_{a=0}^{N_L-2} \sum_{b=a+1}^{N_L-1} \mathbb{E}[s_t]^2 \\
 &= \frac{1}{N_L} \mathbb{E}[s_t] + \frac{1}{N_L^2} (N_L(N_L - 1)) \mathbb{E}[s_t]^2 \\
 &= \frac{1}{N_L} \mathbb{E}[s_t] + \mathbb{E}[s_t]^2 - \frac{1}{N_L} \mathbb{E}[s_t]^2.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Nous en déduisons que

$$\mathbb{E} \left[ \left( \widehat{\mathbb{E}[s_t]} \Big|_N^{emp} - \mathbb{E}[s_t] \right)^2 \right] = \frac{1}{N_L} \mathbb{E}[s_t] (1 - \mathbb{E}[s_t]). \tag{3.32}$$

À propos de  $\mathbb{E} \left[ \left( \widehat{\mathbb{E}[s_t]} \Big|_N - \mathbb{E}[s_t] \right)^2 \right]$ , nous avons

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[ \left( \widehat{\mathbb{E}[s_t]} \Big|_N - \mathbb{E}[s_t] \right)^2 \right] &= P_0 \left( \frac{1}{N_L} - \mathbb{E}[s_t] \right)^2 \\
 &\quad + P_1 \left( \left( 1 - \frac{1}{N_L} \right) - \mathbb{E}[s_t] \right)^2 \\
 &\quad + (1 - P_0 - P_1) \mathbb{E} \left[ \left( \widehat{\mathbb{E}[s_t]} \Big|_N^{emp} - \mathbb{E}[s_t] \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

où  $P_0$  est la probabilité que  $\widehat{\mathbb{E}[s_t]} \Big|_N = \frac{1}{N_L}$  et  $P_1$  est la probabilité que  $\widehat{\mathbb{E}[s_t]} \Big|_N = 1 - \frac{1}{N_L}$ . Notons  $p_0$  la probabilité que  $s_t = 0$ , alors pour  $N_L$  échantillons, on a  $P_0 = p_0^{N_L}$ . De

même, notons  $p_1$  la probabilité que  $s_t = 1$ , alors on a  $P_1 = p_1^{N_L}$ . Nous avons ensuite

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( \mathbb{E}[s_t] \Big|_N - \mathbb{E}[s_t] \right)^2 \right] &= p_0^{N_L} \left( \frac{1}{N_L} - \mathbb{E}[s_t] \right)^2 \\ &+ p_1^{N_L} \left( \left( 1 - \frac{1}{N_L} \right) - \mathbb{E}[s_t] \right)^2 \\ &+ (1 - p_0^{N_L} - p_1^{N_L}) \left( \frac{1}{N_L} \mathbb{E}[s_t] (1 - \mathbb{E}[s_t]) \right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Du fait que  $0 < p_0 < 1$  et  $0 < p_1 < 1$ , il s'ensuit que  $\mathbb{E}[s_t] \Big|_N$  converge au sens de la moyenne quadratique vers  $\mathbb{E}[s_t]$ .

À propos de  $\hat{y}_t \Big|_N$  nous avons en utilisant (3.12)

$$\hat{y}_t \Big|_N - y_t = -F_v^{-1} \left( 1 - \mathbb{E}[s_t] \Big|_N \right) + F_v^{-1} (1 - \mathbb{E}[s_t]) \quad (3.35)$$

avec  $\frac{1}{N_L} \leq 1 - \mathbb{E}[s_t] \Big|_N \leq 1 - \frac{1}{N_L}$ . D'après l'hypothèse **H.2**,  $F_v^{-1}(\cdot)$  est continue alors  $F_v^{-1}$  est Lipschitz sur  $\left[ \frac{1}{N_L}; 1 - \frac{1}{N_L} \right]$ , par conséquent il existe une constante  $W \in \mathbb{R}_+^*$  tel que

$$(\hat{y}_t \Big|_N - y_t)^2 \leq W \left( \mathbb{E}[s_t] \Big|_N - \mathbb{E}[s_t] \right)^2. \quad (3.36)$$

Avec le fait que  $\mathbb{E}[s_t] \Big|_N$  converge au sens de la moyenne quadratique vers  $\mathbb{E}[s_t]$ , il en résulte que  $\hat{y}_t \Big|_N$  converge au sens de la moyenne quadratique vers  $y_t$ . ■

### **Théorème 2 :**

Si les conditions de la section 3.2 sont vérifiées, alors pour chaque  $t \in \{1, 2, \dots, L\}$   $\hat{y}_t \Big|_N$  est asymptotiquement sans biais et tel que

$$\hat{y}_t \Big|_N - \mathbb{E}[\hat{y}_t \Big|_N] = O \left( \frac{1}{\sqrt{N_L}} \right). \quad (3.37)$$

Le taux de convergence est alors de  $\frac{1}{2}$ . ■

### **Preuve 2 :**

Pour chaque  $t \in \{1, 2, \dots, L\}$ ,  $\hat{y}_t \Big|_N$  est tel que

$$\mathbb{E} [(\hat{y}_t \Big|_N - y_t)^2] = \mathbb{E} [(\hat{y}_t \Big|_N - \mathbb{E}[\hat{y}_t \Big|_N])^2] + (\mathbb{E}[\hat{y}_t \Big|_N] - y_t)^2. \quad (3.38)$$

Nous avons déjà démontré dans la preuve du théorème 1 dans (3.34) que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(\widehat{y}_t|_N - y_t)^2] &\leq W p_0^{N_L} \left( \frac{1}{N_L} - \mathbb{E}[s_t] \right)^2 \\ &\quad + W p_1^{N_L} \left( \left( 1 - \frac{1}{N_L} \right) - \mathbb{E}[s_t] \right)^2 \\ &\quad + (1 - p_0^{N_L} - p_1^{N_L}) \frac{W}{N_L} \mathbb{E}[s_t] (1 - \mathbb{E}[s_t]), \end{aligned} \quad (3.39)$$

il s'ensuit que  $\lim_{N_L \rightarrow \infty} \mathbb{E} [(\widehat{y}_t|_N - \mathbb{E}[\widehat{y}_t|_N])^2] = 0$  et  $\lim_{N_L \rightarrow \infty} (\mathbb{E}[\widehat{y}_t|_N] - y_t)^2 = 0$ .  $\widehat{y}_t|_N$  est alors asymptotiquement sans biais.

De plus, à partir de l'inégalité de Chebyshev, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  nous avons asymptotiquement

$$P (|\widehat{y}_t|_N - \mathbb{E}[\widehat{y}_t|_N]| \geq \alpha) \leq \frac{W \mathbb{E}[s_t] (1 - \mathbb{E}[s_t])}{N_L \alpha^2}. \quad (3.40)$$

Notons que  $\epsilon = \frac{W}{\alpha^2 N_L} \mathbb{E}[s_t] (1 - \mathbb{E}[s_t])$ , il s'ensuit que pour tout  $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$P \left( |\widehat{y}_t|_N - \mathbb{E}[\widehat{y}_t|_N]| \geq \frac{1}{\sqrt{N_L}} \sqrt{W \frac{\mathbb{E}[s_t] (1 - \mathbb{E}[s_t])}{\epsilon}} \right) \leq \epsilon. \quad (3.41)$$

Cela valide (3.37) et le taux de convergence. ■

Ces théorèmes montrent la cohérence de la première étape de l'algorithme et établissent le taux de convergence de cette étape en fonction de  $N$ .

### 3.4.2 Analyse de la deuxième étape

Dans cette sous-section, nous considérons les propriétés de convergence de  $\widehat{M}_p$  et  $\widehat{\Gamma}_f$  estimés dans la deuxième étape de l'algorithme.

#### Théorème 3 :

Si les conditions de la section 3.2 sont vérifiées, alors  $\widehat{M}_p$  converge au sens de la moyenne quadratique, asymptotiquement sans biais et tel que

$$\widehat{M}_p - \mathbb{E}[\widehat{M}_p] = O \left( \frac{1}{\sqrt{N_L}} \right) \quad (3.42)$$

et il existe  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  tel que

$$\mathbb{E} \left[ \left\| \widehat{M}_p - M_p \right\|_F^2 \right] \leq \frac{\alpha}{N_L} \text{Tr} \left( \left( U_p \Pi_{U_f}^\perp U_p^T \right)^{-1} \right). \quad (3.43)$$

■

**Preuve 3 :**

D'après le théorème 1,  $\widehat{Y}_t$  converge au sens de la moyenne quadratique et asymptotiquement sans biais et tel que

$$\widehat{Y}_f - \mathbb{E}[\widehat{Y}_f] = O\left(\frac{1}{\sqrt{N_L}}\right). \quad (3.44)$$

Du fait que  $\widehat{M}_p = \widehat{Y}_f U$ ,  $\widehat{M}_p$  dépend linéairement de  $\widehat{Y}_f$ , alors il s'ensuit que  $\widehat{M}_p$  converge également au sens de la moyenne quadratique et asymptotiquement sans biais d'où

$$\widehat{M}_p - \mathbb{E}[\widehat{M}_p] = O\left(\frac{1}{\sqrt{N_L}}\right). \quad (3.45)$$

$\mathbb{E} \left[ \left\| \widehat{M}_p - M_p \right\|_F^2 \right]$  peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left\| \widehat{M}_p - M_p \right\|_F^2 \right] &= \mathbb{E} \left[ \text{Tr} \left( \left( \widehat{M}_p - M_p \right) \left( \widehat{M}_p - M_p \right)^T \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \text{Tr} \left( \left( \widehat{Y}_f - Y_f \right) U U^T \left( \widehat{Y}_f - Y_f \right)^T \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \text{Tr} \left( \left( \widehat{Y}_f - Y_f \right)^T \left( \widehat{Y}_f - Y_f \right) U U^T \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Comme les matrices  $\left( \widehat{Y}_f - Y_f \right)^T \left( \widehat{Y}_f - Y_f \right)$  et  $U U^T$  sont définies positives alors

$$\text{Tr} \left( \left( \widehat{Y}_f - Y_f \right)^T \left( \widehat{Y}_f - Y_f \right) U U^T \right) \leq \text{Tr} \left( \left( \widehat{Y}_f - Y_f \right)^T \left( \widehat{Y}_f - Y_f \right) \right) \text{Tr} (U U^T), \quad (3.47)$$

ceci conduit à

$$\mathbb{E} \left[ \left\| \widehat{M}_p - M_p \right\|_F^2 \right] \leq \mathbb{E} \left[ \left\| \widehat{Y}_f - Y_f \right\|_F^2 \right] \text{Tr} (U U^T). \quad (3.48)$$

De la preuve du théorème 1 nous savons qu'il existe  $W$  tel que, pour tout  $t \in \{1, 2, \dots, L\}$ ,

$$\mathbb{E} \left[ (\widehat{y}_t - y_t)^2 \right] \leq W \frac{1}{N_L} \mathbb{E}[s_t] (1 - \mathbb{E}[s_t]).$$

Alors il existe  $\beta \in \mathbb{R}_+^*$  tel que

$$\mathbb{E} \left[ \left\| \widehat{Y}_f - Y_f \right\|_F^2 \right] \leq \frac{\beta}{N_L} \quad (3.49)$$

ensuite

$$\mathbb{E} \left[ \left\| \widehat{M}_p - M_p \right\|_F^2 \right] \leq \frac{\beta}{N_L} \text{Tr} (UU^T) \quad (3.50)$$

et enfin, à partir de la définition de  $U$  nous obtenons

$$\mathbb{E} \left[ \left\| \widehat{M}_p - M_p \right\|_F^2 \right] \leq \frac{\beta}{N_L} \text{Tr} \left( \left( U_p \Pi_{U_f}^\perp U_p^T \right)^{-1} \right). \quad (3.51)$$

■

Ce résultat conduit à plusieurs conclusions sur la deuxième étape de l'algorithme. Premièrement, la cohérence de l'estimation de  $M_p$  est démontrée. Deuxièmement, il semble que la qualité de l'estimation dépend de  $\frac{1}{N_L} \text{Tr} \left( \left( U_p \Pi_{U_f}^\perp U_p^T \right)^{-1} \right)$ . Ce terme peut être minimisé en réglant deux paramètres : la période  $L$  et le contenu de la séquence  $L$ -périodique  $\{u_t\}$ . Plus  $L$  est petit, plus la matrice angulaire entre  $U_f$  et  $U_p$  est petite, plus  $\mathbb{E} \left[ \left\| \widehat{M}_p - M_p \right\|_F^2 \right]$  est petit. Il s'ensuit qu'il est recommandé de choisir  $\frac{L}{2}$  proche de  $n$  et de choisir  $U_f$  orthogonal à  $U_p$ . Cette analyse est confirmée dans les simulations numériques de la section 3.5.

Afin de comparer les sous-espaces engendrés par  $\Gamma_f$  et  $\widehat{\Gamma}_f$ , nous avons besoin d'une notion décrivant la distance entre deux sous-espaces. Une distance naturelle est la matrice angulaire entre  $\Gamma_f$  et  $\widehat{\Gamma}_f$  définie par

$$\Theta(\Gamma_f, \widehat{\Gamma}_f) = \arccos \left( \left( \Gamma_f^T \Gamma_f \right)^{-\frac{1}{2}} \Gamma_f^T \widehat{\Gamma}_f \left( \widehat{\Gamma}_f^T \widehat{\Gamma}_f \right)^{-1} \widehat{\Gamma}_f^T \Gamma_f \left( \Gamma_f^T \Gamma_f \right)^{-\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.52)$$

Les angles canoniques entre l'espace colonne de  $\Gamma_f$  et l'espace colonne de  $\widehat{\Gamma}_f$  sont les valeurs singulières de  $\Theta(\Gamma_f, \widehat{\Gamma}_f)$ . Plus ces espaces colonne sont proches, plus  $\Theta(\Gamma_f, \widehat{\Gamma}_f)$  est petit. Notons qu'à partir de ([Li98]) nous avons

$$\left\| \sin \left( \Theta(\Gamma_f, \widehat{\Gamma}_f) \right) \right\|_F = \left\| \widehat{U}_{s_2}^T U_{s_1} \right\|_F = \| U_{s_2}^T \widehat{U}_{s_1} \|_F. \quad (3.53)$$

Deux théorèmes sur l'estimation de  $\Gamma_f$  sont donnés dans la suite.

#### **Théorème 4 :**

*Si les conditions de la section 3.2 sont vérifiées et si  $\widehat{n} = n$ , alors il existe  $\beta \in \mathbb{R}_+^*$  tel*

que la matrice des angles canoniques  $\Theta(\Gamma_f, \widehat{\Gamma}_f)$  satisfait

$$\mathbb{E} \left[ \left\| \sin \left( \Theta(\Gamma_f, \widehat{\Gamma}_f) \right) \right\|_F^2 \right] \leq \frac{4n\beta}{\sigma_n^2 N_L} \text{Tr} \left( \left( U_p \Pi_{U_f}^\perp U_p^T \right)^{-1} \right) \quad (3.54)$$

où  $\sigma_n$  est la  $n$ ième valeur singulière de  $M_p$ . ■

#### Preuve 4 :

En se référant à [Wed72] et [Li98], nous savons que

$$\left\| \sin \left( \Theta(\Gamma_f, \widehat{\Gamma}_f) \right) \right\|_F \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma_n} \|M_p - \widehat{M}_p\|_F \quad (3.55)$$

avec  $\widehat{M}_p = \widehat{U}_{s_1} \widehat{S}_1 \widehat{V}_{s_1}^T$ .

En utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons

$$\|M_p - \widehat{M}_p\|_F \leq \|M_p - \widehat{M}_p\|_F + \|\widehat{M}_p - \widehat{M}_p\|_F. \quad (3.56)$$

D'après le lemme d'approximation matricielle donné dans [GHS87],  $\widehat{M}_p$  est la meilleure estimation d'ordre  $n$  de  $\widehat{M}_p$ , nous avons donc  $\|\widehat{M}_p - \widehat{M}_p\|_F \leq \|\widehat{M}_p - M_p\|_F$ , il s'ensuit que

$$\|M_p - \widehat{M}_p\|_F \leq 2\|M_p - \widehat{M}_p\|_F. \quad (3.57)$$

Ceci donne

$$\left\| \sin \left( \Theta(\Gamma_f, \widehat{\Gamma}_f) \right) \right\|_F \leq \frac{2\sqrt{n}}{\sigma_n} \|M_p - \widehat{M}_p\|_F. \quad (3.58)$$

Avec (3.43), il s'ensuit qu'il existe  $\beta \in \mathbb{R}_+^*$  tel que

$$\mathbb{E} \left[ \left\| \sin \left( \Theta(\Gamma_f, \widehat{\Gamma}_f) \right) \right\|_F^2 \right] \leq \frac{4n\beta}{\sigma_n^2 N_L} \text{Tr} \left( \left( U_p \Pi_{U_f}^\perp U_p^T \right)^{-1} \right) \quad (3.59)$$

ce qui démontre le théorème 4. ■

A noter que la borne sur  $\mathbb{E} \left[ \left\| \sin \left( \Theta(\Gamma_f, \widehat{\Gamma}_f) \right) \right\|_F^2 \right]$  fournie dans ce théorème est conservatrice. Cependant il apparaît que l'espérance de la norme de Frobenius du sinus de la matrice angulaire entre  $\Gamma_f$  et  $\widehat{\Gamma}_f$  converge vers zéro lorsque  $N_L$  tend vers l'infini et dépend du choix de la séquence d'entrée, comme pour l'estimation de  $M_p$ . Cet angle dépend aussi de l'ordre  $n$  et de la valeur singulière  $\sigma_n$  au sens que l'identification



sera à priori plus facile pour un système d'ordre faible et pour un système hautement observable et contrôlable (valeur élevée de  $\sigma_n$ ).

**Théorème 5 :**

Si les conditions de la section 3.2 sont vérifiées et si  $\hat{n} = n$ , alors il existe  $\beta \in \mathbb{R}_+^*$  et deux matrices  $T_\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $Q_\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times (f-n)}$  telles que  $\hat{\Gamma}_f$  s'écrit

$$\hat{\Gamma}_f = \Gamma_f T_\Gamma + \Gamma_f^\perp Q_\Gamma \quad (3.60)$$

où  $\Gamma_f^\perp \in \mathbb{R}^{f \times n}$ ,  $T_\Gamma$  et  $Q_\Gamma$  sont tels que

$$\begin{cases} (\Gamma_f^\perp)^T \Gamma_f = 0 \\ \mathbb{E} [\|T_\Gamma\|_F^2] \leq n - \frac{4n\beta}{\sigma_n^2 N_L} \text{Tr} \left( (U_p \Pi_{U_f}^\perp U_p^T)^{-1} \right) \\ \mathbb{E} [\|Q_\Gamma\|_F^2] \leq \frac{4n\beta}{\sigma_n^2 N_L} \text{Tr} \left( (U_p \Pi_{U_f}^\perp U_p^T)^{-1} \right) \end{cases} . \quad (3.61)$$

■

**Preuve 5 :**

$U_{s_1}$  et  $U_{s_2}$  sont tels que

$$U_{s_1} U_{s_1}^T + U_{s_2} U_{s_2}^T = I_f \quad (3.62)$$

donc en multipliant par  $\hat{U}_{s_1}$  à droite, nous avons

$$\hat{U}_{s_1} = U_{s_1} U_{s_1}^T \hat{U}_{s_1} + U_{s_2} U_{s_2}^T \hat{U}_{s_1}. \quad (3.63)$$

Du fait que  $\hat{\Gamma}_f = \hat{U}_{s_1}$ ,  $\Gamma_f = U_{s_1}$  et avec  $T_\Gamma = U_{s_1}^T \hat{U}_{s_1}$ ,  $Q_\Gamma = U_{s_2}^T \hat{U}_{s_1}$  et  $\Gamma_f^\perp = U_{s_2}$ , (3.63) devient

$$\hat{\Gamma}_f = \Gamma_f T_\Gamma + \Gamma_f^\perp Q_\Gamma. \quad (3.64)$$

A propos de  $T_\Gamma$ , nous avons

$$T_\Gamma^T T_\Gamma = \hat{U}_{s_1}^T U_{s_1} U_{s_1}^T \hat{U}_{s_1}, \quad (3.65)$$

à partir des propriétés des matrices  $U_{s_1}$  et  $U_{s_2}$ , on obtient

$$T_\Gamma^T T_\Gamma = I_n - \hat{U}_{s_1}^T U_{s_2} U_{s_2}^T \hat{U}_{s_1}. \quad (3.66)$$

Nous savons que

$$\text{Tr} (T_{\Gamma}^T T_{\Gamma}) = \text{Tr} (I_n) - \text{Tr} \left( \widehat{U}_{s_1}^T U_{s_2} U_{s_2}^T \widehat{U}_{s_1} \right), \quad (3.67)$$

il s'ensuit que

$$\|T_{\Gamma}\|_F^2 = \|I_n\|_F^2 - \|U_{s_2}^T \widehat{U}_{s_1}\|_F^2. \quad (3.68)$$

de  $\|U_{s_2}^T \widehat{U}_{s_1}\|_F^2 = \left\| \sin \left( \Theta(\Gamma_f, \widehat{\Gamma}_f) \right) \right\|_F^2$ , nous obtenons

$$\|T_{\Gamma}\|_F^2 = \|I_n\|_F^2 - \left\| \sin \left( \Theta(\Gamma_f, \widehat{\Gamma}_f) \right) \right\|_F^2. \quad (3.69)$$

A propos de  $Q_{\Gamma}$ , nous avons

$$\|Q_{\Gamma}\|_F^2 = \|U_{s_2}^T \widehat{U}_{s_1}\|_F^2 = \left\| \sin \left( \Theta(\Gamma_f, \widehat{\Gamma}_f) \right) \right\|_F^2. \quad (3.70)$$

Les deux dernières inégalités dans (3.61) sont des conséquences du théorème 4 sur (3.68) et (3.70). ■

Dans ce théorème 5,  $T_{\Gamma}$  peut être assimilé à une matrice de changement de base et donc le seul terme qui peut introduire une erreur d'estimation est  $\Gamma_f^{\perp} Q_{\Gamma}$ . Il ressort de (3.61) que  $\Gamma_f^{\perp} Q_{\Gamma}$  converge vers zéro quand  $N$  tends vers l'infini donc cette erreur va décroître avec le nombre d'échantillons.

### 3.4.3 Analyse de la troisième étape

Cette sous-section se focalise uniquement sur des propriétés de convergence des estimations des matrices  $A$  et  $C$ . La consistance de ces estimations suffisent à montrer le bon comportement de l'algorithme vis à vis des estimations des matrices  $B$  et  $D$ .

#### Théorème 6 :

Si les conditions de la section 3.2 sont vérifiées et si  $\widehat{n} = n$ , alors la matrice d'état  $\widehat{C}$  est telle que

$$\widehat{C} = C T_{\Gamma} + \Gamma_f^{\perp}(1, :) Q_{\Gamma} \quad (3.71)$$

et il existe  $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$  tel que la matrice d'état  $\widehat{A}$  satisfait

$$\|\widehat{A} - T_{\Gamma}^{-1} A T_{\Gamma}\|_F^2 \leq 12 \frac{n}{\gamma^2} \mathbf{F}_{\Gamma} \|T_{\Gamma}\|_F^2 \|Q_{\Gamma}\|_F^2 \quad (3.72)$$

avec  $\mathbf{F}_\Gamma$  tel que

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\Gamma = & \left( \|\Gamma_f^{+T} \Gamma_f^{\perp-}\|_F^2 + \|\Gamma_f^{\perp+T} \Gamma_f^-\|_F^2 + \|\Gamma_f^{\perp+T} \Gamma_f^{\perp-}\|_F^2 \right. \\ & \left. + \|T_\Gamma^{-1} A T_\Gamma\|_F^2 \left( \|\Gamma_f^{+T} \Gamma_f^{\perp+}\|_F^2 + \|\Gamma_f^{\perp+T} \Gamma_f^+\|_F^2 + \|\Gamma_f^{\perp+T} \Gamma_f^{\perp+}\|_F^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (3.73)$$

■

### Preuve 6 :

La propriété de convergence de la matrice  $C$  dans (4.71) provient de (3.60) et (3.21).

Définissons les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\widehat{\mathbf{M}}$  et  $\widehat{\mathbf{N}}$  tel que

$$\begin{cases} \mathbf{M} = T_\Gamma^T \Gamma_f^{+T} \Gamma_f^+ T_\Gamma \\ \mathbf{N} = T_\Gamma^T \Gamma_f^{+T} \Gamma_f^- T_\Gamma \\ \widehat{\mathbf{M}} = \widehat{\Gamma}_f^{+T} \widehat{\Gamma}_f^+ \\ \widehat{\mathbf{N}} = \widehat{\Gamma}_f^{+T} \widehat{\Gamma}_f^- \end{cases}. \quad (3.74)$$

A partir de (3.22) et (3.23), nous avons

$$\begin{cases} T_\Gamma^{-1} A T_\Gamma = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N} \\ \widehat{A} = \widehat{\mathbf{M}}^{-1} \widehat{\mathbf{N}}. \end{cases} \quad (3.75)$$

Par suite

$$\widehat{A} - T_\Gamma^{-1} A T_\Gamma = \widehat{\mathbf{M}}^{-1} \widehat{\mathbf{N}} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N}. \quad (3.76)$$

Développons cette équation,

$$\begin{aligned} \widehat{A} - T_\Gamma^{-1} A T_\Gamma &= \widehat{\mathbf{M}}^{-1} (\widehat{\mathbf{N}} - \mathbf{N}) + (\widehat{\mathbf{M}}^{-1} - \mathbf{M}^{-1}) \mathbf{N} \\ &= \widehat{\mathbf{M}}^{-1} (\widehat{\mathbf{N}} - \mathbf{N}) + \widehat{\mathbf{M}}^{-1} (\mathbf{M} - \widehat{\mathbf{M}}) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N} \\ &= \widehat{\mathbf{M}}^{-1} (\widehat{\mathbf{N}} - \mathbf{N}) + \widehat{\mathbf{M}}^{-1} (\mathbf{M} - \widehat{\mathbf{M}}) T_\Gamma^{-1} A T_\Gamma. \end{aligned} \quad (3.77)$$

En utilisant ensuite l'inégalité triangulaire et la norme de Frobenius ceci donne

$$\|\widehat{A} - T_\Gamma^{-1} A T_\Gamma\|_F \leq \|\widehat{\mathbf{M}}^{-1}\|_F \left( \|\widehat{\mathbf{N}} - \mathbf{N}\|_F + \|\widehat{\mathbf{M}} - \mathbf{M}\|_F \|T_\Gamma^{-1} A T_\Gamma\|_F \right). \quad (3.78)$$

$\widehat{\mathbf{M}}$  est une matrice définie positive et inversible, alors la plus petite valeur propre de  $\widehat{\mathbf{M}}$  est supérieure ou égale à une valeur a priori strictement positive. Notons  $\gamma$  cette valeur,

ceci donne

$$\|\widehat{\mathbf{M}}^{-1}\|_F \leq \frac{\sqrt{n}}{\gamma}, \quad (3.79)$$

il s'ensuit que

$$\|\widehat{A} - T_\Gamma^{-1} A T_\Gamma\|_F \leq \frac{\sqrt{n}}{\gamma} \left( \|\widehat{\mathbf{N}} - \mathbf{N}\|_F + \|\widehat{\mathbf{M}} - \mathbf{M}\|_F \|T_\Gamma^{-1} A T_\Gamma\|_F \right). \quad (3.80)$$

Ceci donne

$$\|\widehat{A} - T_\Gamma^{-1} A T_\Gamma\|_F^2 \leq 4 \frac{n}{\gamma^2} \left( \|\widehat{\mathbf{N}} - \mathbf{N}\|_F^2 + \|\widehat{\mathbf{M}} - \mathbf{M}\|_F^2 \|T_\Gamma^{-1} A T_\Gamma\|_F^2 \right). \quad (3.81)$$

Reprenant (3.64), on obtient les équations suivantes

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}_f^+ &= \Gamma_f^+ T_\Gamma + \Gamma_f^{\perp+} Q_\Gamma \\ \widehat{\Gamma}_f^- &= \Gamma_f^- T_\Gamma + \Gamma_f^{\perp-} Q_\Gamma \end{aligned} \quad (3.82)$$

Ensuite de (3.74)

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} + T_\Gamma^T \Gamma_f^{+T} \Gamma_f^{\perp+} Q_\Gamma + Q_\Gamma^T \Gamma_f^{\perp+T} \Gamma_f^+ T_\Gamma \\ &\quad + Q_\Gamma^T \Gamma_f^{\perp+T} \Gamma_f^{\perp+} Q_\Gamma \\ \widehat{\mathbf{N}} &= \mathbf{N} + T_\Gamma^T \Gamma_f^{+T} \Gamma_f^{\perp-} Q_\Gamma + Q_\Gamma^T \Gamma_f^{\perp+T} \Gamma_f^- T_\Gamma \\ &\quad + Q_\Gamma^T \Gamma_f^{\perp+T} \Gamma_f^{\perp-} Q_\Gamma, \end{aligned} \quad (3.83)$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathbf{M}} - \mathbf{M}\|_F &\leq \|T_\Gamma^T\|_F \|\Gamma_f^{+T} \Gamma_f^{\perp+}\|_F \|Q_\Gamma\|_F \\ &\quad + \|Q_\Gamma^T\|_F \|\Gamma_f^{\perp+T} \Gamma_f^+\|_F \|T_\Gamma\|_F \\ &\quad + \|Q_\Gamma^T\|_F \|\Gamma_f^{\perp+T} \Gamma_f^{\perp+}\|_F \|Q_\Gamma\|_F \end{aligned} \quad (3.84)$$

et

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathbf{N}} - \mathbf{N}\|_F &\leq \|T_\Gamma^T\|_F \|\Gamma_f^{+T} \Gamma_f^{\perp-}\|_F \|Q_\Gamma\|_F \\ &\quad + \|Q_\Gamma^T\|_F \|\Gamma_f^{\perp+T} \Gamma_f^-\|_F \|T_\Gamma\|_F \\ &\quad + \|Q_\Gamma^T\|_F \|\Gamma_f^{\perp+T} \Gamma_f^{\perp-}\|_F \|Q_\Gamma\|_F. \end{aligned} \quad (3.85)$$

En élevant au carré ces équations, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathbf{M}} - \mathbf{M}\|_F^2 &\leq 3\|T_\Gamma^T\|_F^2 \|\Gamma_f^{+T} \Gamma_f^{\perp+}\|_F^2 \|Q_\Gamma\|_F^2 \\ &\quad + 3\|Q_\Gamma^T\|_F^2 \|\Gamma_f^{\perp+T} \Gamma_f^+\|_F^2 \|T_\Gamma^T\|_F^2, \\ &\quad + 3\|Q_\Gamma^T\|_F^2 \|\Gamma_f^{\perp+T} \Gamma_f^{\perp+}\|_F^2 \|Q_\Gamma\|_F^2 \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathbf{N}} - \mathbf{N}\|_F^2 &\leq 3\|T_\Gamma^T\|_F^2 \|\Gamma_f^{+T} \Gamma_f^{\perp-}\|_F^2 \|Q_\Gamma\|_F^2 \\ &\quad + 3\|Q_\Gamma^T\|_F^2 \|\Gamma_f^{\perp+T} \Gamma_f^-\|_F^2 \|T_\Gamma^T\|_F^2. \\ &\quad + 3\|Q_\Gamma^T\|_F^2 \|\Gamma_f^{\perp+T} \Gamma_f^{\perp-}\|_F^2 \|Q_\Gamma\|_F^2 \end{aligned} \quad (3.87)$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathbf{A}} - T_\Gamma^{-1} A T_\Gamma\|_F^2 &\leq 12 \frac{n}{\gamma^2} \left( \|\Gamma_f^{+T} \Gamma_f^{\perp-}\|_F^2 + \|\Gamma_f^{\perp+T} \Gamma_f^-\|_F^2 + \|\Gamma_f^{\perp+T} \Gamma_f^{\perp-}\|_F^2 \right. \\ &\quad \left. + \|T_\Gamma^{-1} A T_\Gamma\|_F^2 \left( \|\Gamma_f^{+T} \Gamma_f^{\perp+}\|_F^2 + \|\Gamma_f^{\perp+T} \Gamma_f^+\|_F^2 + \|\Gamma_f^{\perp+T} \Gamma_f^{\perp+}\|_F^2 \right) \right) \|T_\Gamma\|_F^2 \|Q_\Gamma\|_F^2. \end{aligned} \quad (3.88)$$

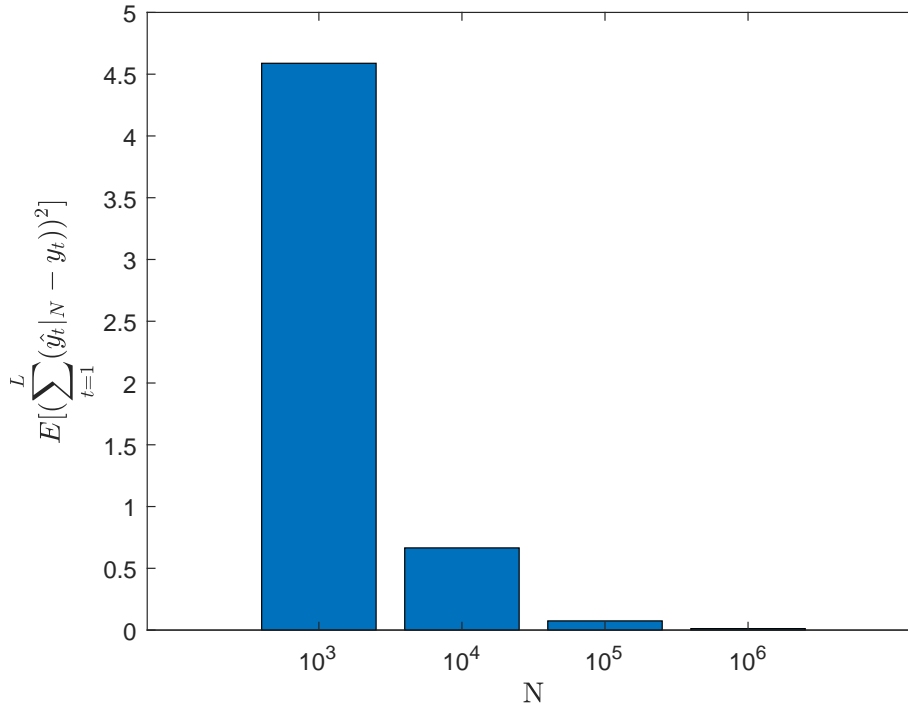
Ce qui prouve le théorème 6. ■

### 3.5 Simulations Numériques

Dans cette section, nous illustrons les résultats de convergence des trois étapes de l'algorithme sur un système du quatrième ordre mentionné dans [OM96] et dont les matrices d'état sont

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0.603 & 0.603 & 0 & 0 \\ -0.603 & 0.603 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.603 & -0.603 \\ 0 & 0 & 0.603 & -0.603 \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} 0.9238 \\ 2.7577 \\ 4.3171 \\ -2.6436 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} -0.5749 & 1.0751 & -0.5225 & 0.1830 \end{pmatrix} & D &= -0.7139 \end{aligned} \quad (3.89)$$

L'entrée est un signal périodique, pour une partie des expériences le motif périodique est uniformément distribué dans  $[-1; 1]$  et  $v_t$  est un bruit blanc gaussien avec une variance fixée de manière à avoir un rapport signal sur bruit (SNR - Signal Noise Ratio) de  $SNR = 0dB$ .

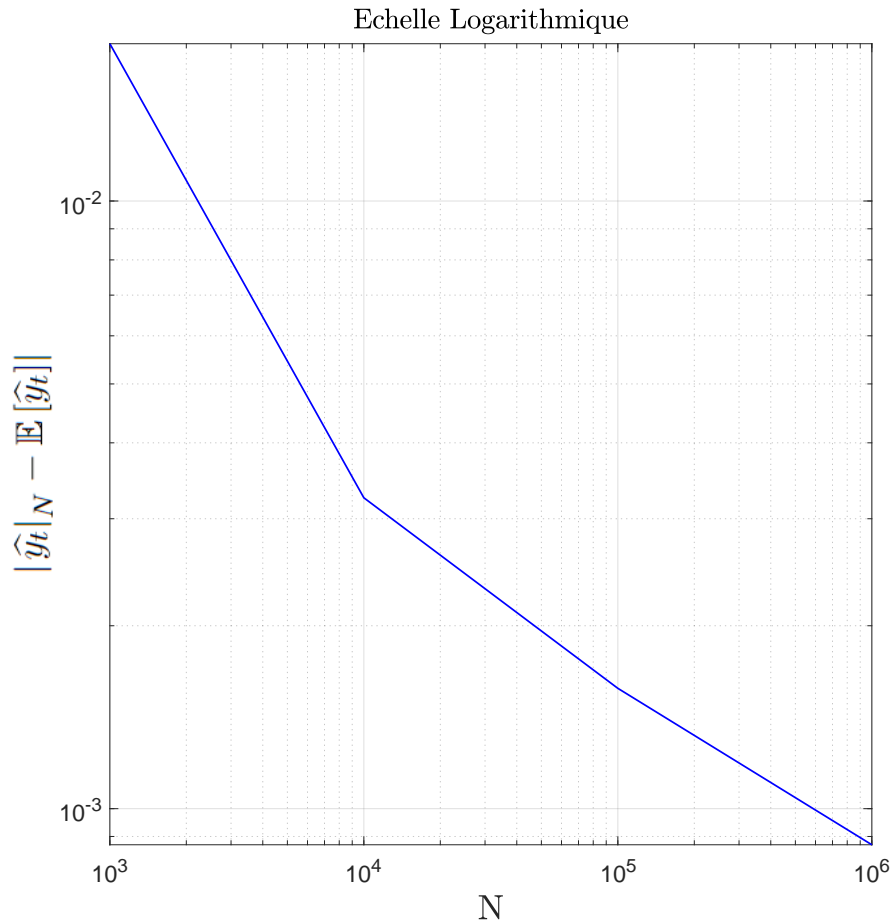


**Figure 3.2 :** graphique à barres montrant la variation de  $\mathbb{E}\left[\left(\sum_{t=1}^L (\hat{y}_t|_N - y_t)\right)^2\right]$  pour  $N = 10^3$ ,  $N = 10^4$ ,  $N = 10^5$  et  $N = 10^6$  échantillons et avec  $SNR = 0dB$  et  $L = 20$ .

### 3.5.1 Résultats de l'étape 1

Dans cette étape nous procédons à une estimation de la sortie non bruitée  $y_t$ . Le seuil du capteur est  $c = 0$ . Nous réalisons ici deux expériences :

- Dans une première expérience, une simulation de Monte Carlo est effectuée avec 100 exécutions et nous estimons, sur ces 100 exécutions, l'erreur quadratique  $\mathbb{E}\left[\left(\sum_{t=1}^L (\hat{y}_t|_N - y_t)\right)^2\right]$  pour quatre valeurs de  $N$  :  $N = 10^3$ ,  $N = 10^4$ ,  $N = 10^5$  et  $N = 10^6$  avec  $L = 20$ . Comme le montrent les résultats présentés sur la figure 3.2, l'estimation est de meilleure qualité pour  $N$  grand.
- Dans une seconde expérience, une simulation de Monte Carlo est de nouveau effectuée avec 100 exécutions. Nous examinons ici l'évolution de  $\hat{y}_t - \mathbb{E}[\hat{y}_t|_N]$  et de  $\mathbb{E}[(\hat{y}_t|_N - y_t)^2]$  en fonction de  $N$ . Les résultats sont illustrés respectivement dans les figures 3.3 et 3.4. Nous constatons que les courbes décroissent lorsque  $N$  augmente, ce qui confirme que l'estimation est asymptotiquement non biaisée



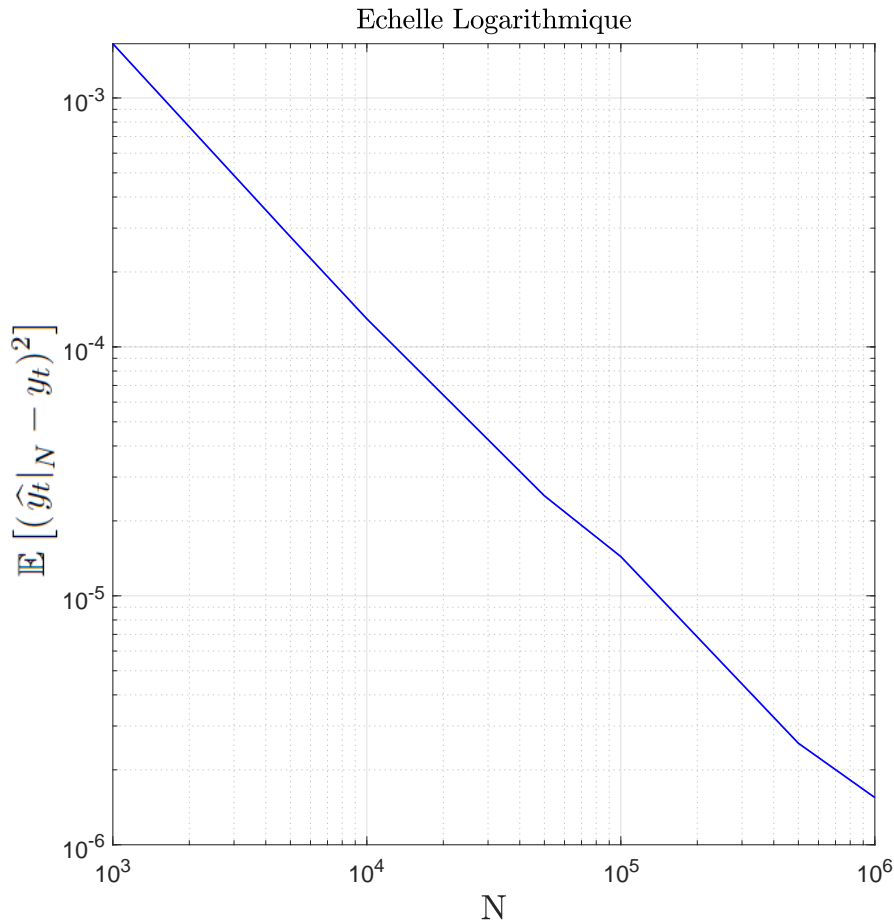
**Figure 3.3 :** diagramme logarithmique de  $|\hat{y}_t|_N - \mathbb{E}[\hat{y}_t|_N]|$  en fonction de  $N$  et avec  $SNR = 0dB$ .

et converge au sens de la moyenne quadratique conformément aux théorèmes 1 et 2 de la section précédente.

### 3.5.2 Résultats de l'étape 2

Dans l'étape 2, nous estimons la matrice  $M_p$ , l'ordre  $n$  et la matrice d'observabilité étendue  $\Gamma_f$ . Le seuil du capteur est  $c = 0$ . Nous réalisons ici trois expériences.

- Dans une première expérience, nous présentons l'estimation de l'ordre du système pour un  $SNR = 0dB$  et avec  $L = 20$ . Une simulation de Monte Carlo est effectuée avec 100 exécutions. La figure 3.5 et la figure 3.6 montrent les estimations de valeurs singulières obtenues en fonction de  $N$ . Ces figures montrent la moyenne  $\mathbb{E}[\hat{\sigma}_j]$  et l'écart type  $\mathbb{E}[(\hat{\sigma}_j - \mathbb{E}[\hat{\sigma}_j])^2]$  de chaque valeur singulière estimée. Il apparaît clairement que le nombre de valeurs singulières dominantes est 4, ce qui

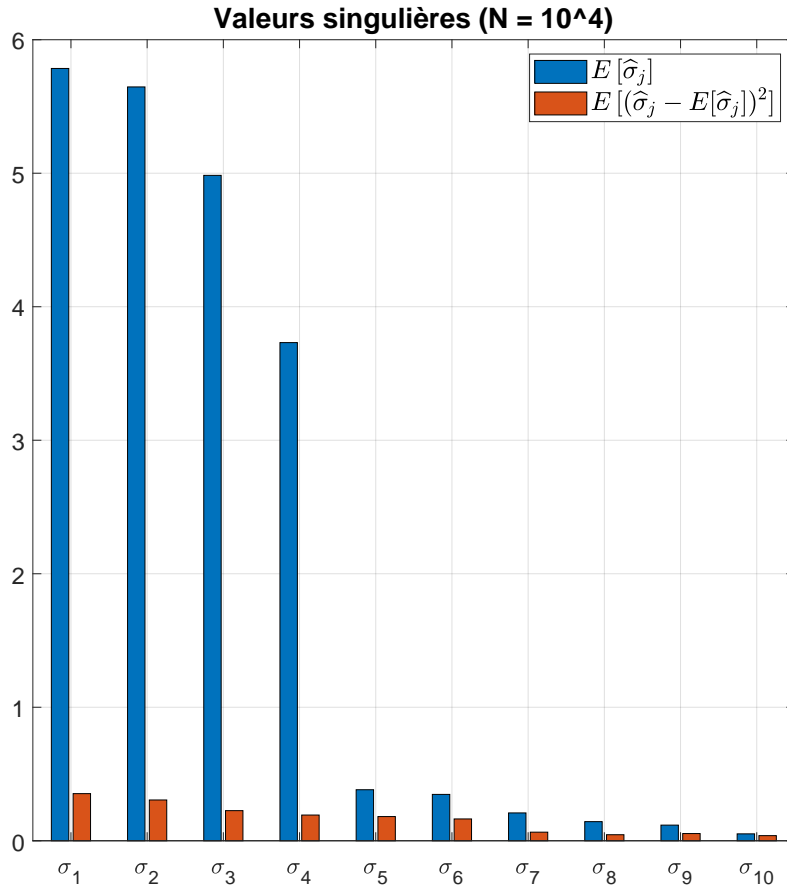


**Figure 3.4 :** diagramme logarithmique de  $\mathbb{E}[(\hat{y}_t|_N - y_t)^2]$  en fonction de  $N$  et avec  $SNR = 0dB$ .

est égal à l'ordre  $n$ . De plus, l'écart type des valeurs singulières dans la figure 3.6 (lorsque  $N = 10^5$ ) est plus petit que celui de la figure 3.5 (lorsque  $N = 10^4$ ). Cela signifie que plus le nombre d'échantillons est grand, plus l'estimation des valeurs singulières est précise.

- Dans une seconde expérience, nous étudions l'impact de la séquence d'entrée sur l'estimation. D'après le théorème 3, la qualité de l'estimation de  $M_p$  dépend de  $\frac{1}{N_L} Tr \left( \left( U_p \Pi_{U_f}^\perp U_p^T \right)^{-1} \right)$  c'est-à-dire qu'elle dépend de l'angle entre les sous-espaces engendrés par  $U_p$  et  $U_f$  et par conséquent du contenu du motif de la séquence d'entrée et de  $L$ . Pour cela deux simulations de Monte Carlo sont réalisées avec 100 réalisations avec  $N$  allant de  $10^3$  à  $10^6$  et en utilisant deux séquences d'entrée ayant les motifs périodiques suivants de la séquence d'entrée de longueur  $L = 20$  :



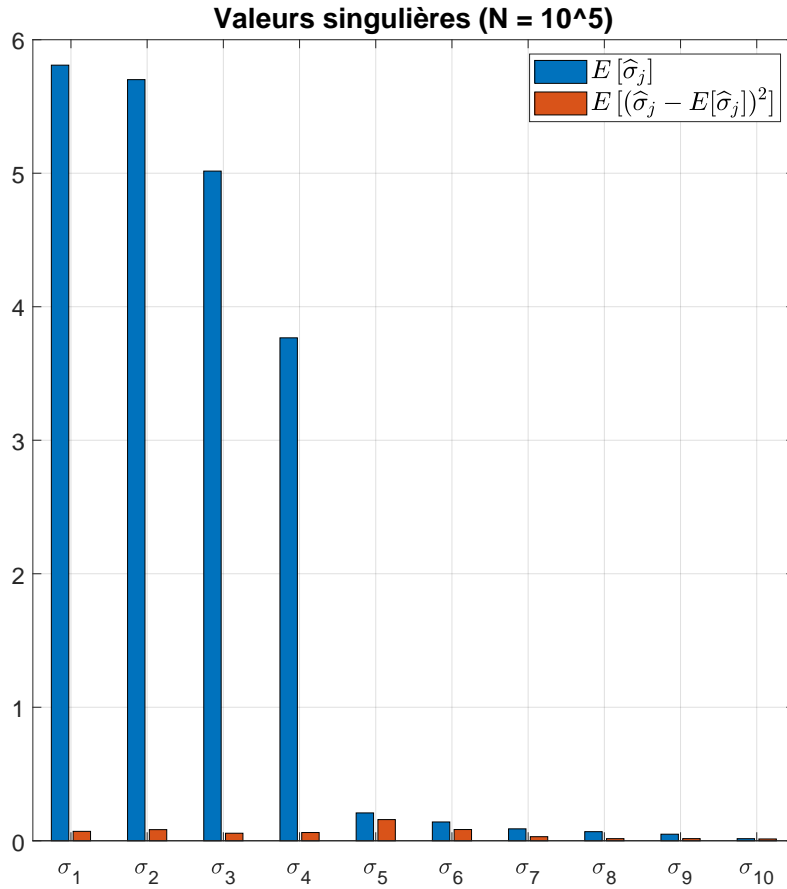


**Figure 3.5 :** moyenne et variance de chaque valeur singulière estimée avec  $N = 10^4$  échantillons,  $SNR = 0dB$  et  $L = 20$ .

- le motif périodique de la première séquence d'entrée est uniformément distribué dans  $[-1; 1]$ . Notons  $\Theta_1 = \Theta(U_f, U_p)$  pour cette première séquence d'entrée ( $\Theta(U_f, U_p)$  est défini comme dans (3.52)).
- le motif périodique de la deuxième séquence d'entrée est  $[1; 0_{L-1}]$ . Notons  $\Theta_2 = \Theta(U_f, U_p)$  pour cette deuxième séquence d'entrée.

A noter que  $\|\sin(\Theta_1)\|_F < \|\sin(\Theta_2)\|_F = \frac{L}{2}$ . Sur la figure 3.7, nous présentons le tracé de  $\mathbb{E} \left[ \left\| M_p - \widehat{M}_p \right\|_F^2 \right]$  pour chaque séquence. Comme attendu du théorème 3, plus  $U_f$  et  $U_p$  sont orthogonaux, plus la qualité de l'estimation est bonne.

A propos de l'impact de  $L$ , deux autres simulations de Monte Carlo sont réalisées avec 100 réalisations avec le motif périodique  $[1; 0_{L-1}]$  avec deux valeurs différentes de  $L$  :  $L = 10$  et  $L = 30$ . Sur la figure 3.8,  $\mathbb{E} \left[ \left\| M_p - \widehat{M}_p \right\|_F^2 \right]$  est plus faible pour



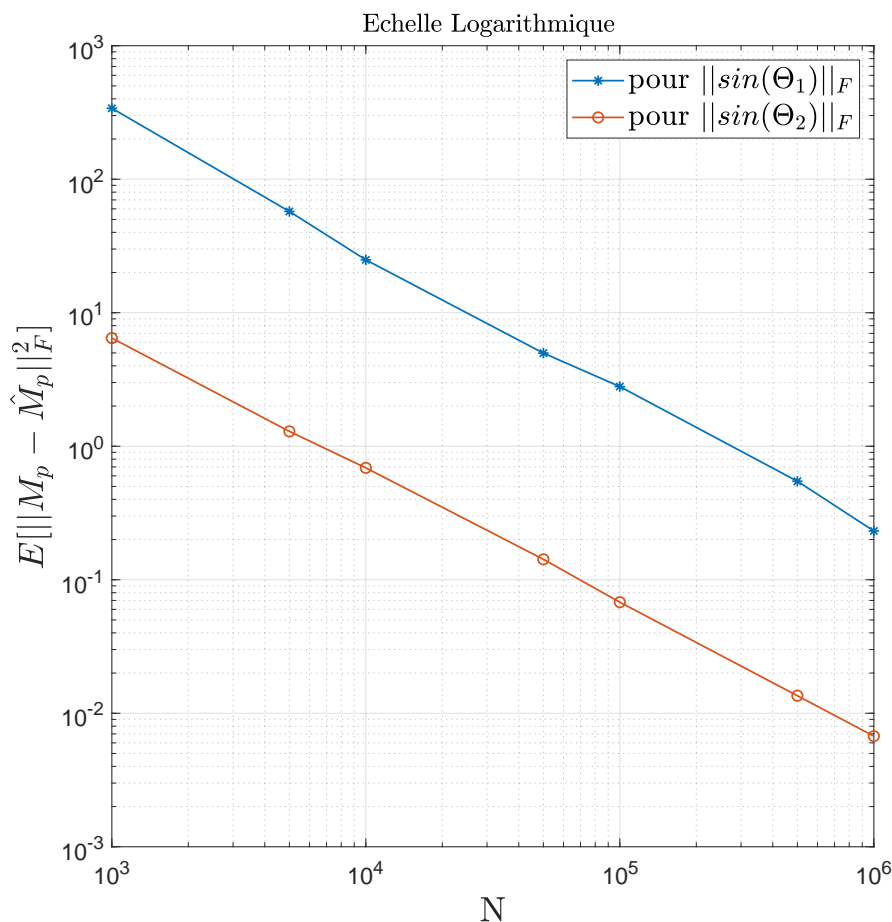
**Figure 3.6 :** moyenne et variance de chaque valeur singulière estimée avec  $N = 10^5$  échantillons,  $SNR = 0dB$  et  $L = 20$ .

$L = 10$  que pour  $L = 30$  comme annoncé par le théorème 3.

- Dans une troisième expérience, nous nous concentrons sur l'estimation de  $\Gamma_f$  et plus particulièrement sur la matrice angulaire  $\Theta(\Gamma_f, \hat{\Gamma}_f)$ . Une simulation de Monte Carlo est réalisée avec 100 réalisations avec  $N$  de  $N = 10^3$  à  $10^6$ . Ici, le motif périodique de la première séquence d'entrée est uniformément distribué dans  $[-1; 1]$  et  $L = 20$ . La figure 3.9 donne  $\mathbb{E} \left[ \left\| \sin \left( \Theta(\Gamma_f, \hat{\Gamma}_f) \right) \right\|_F^2 \right]$  en fonction de  $N$ . Cette figure confirme le résultat du théorème 4 et le taux de convergence.

### 3.5.3 Résultats de l'étape 3

Dans l'étape 3, nous estimons les matrices d'état  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ . Les estimations de ces matrices sont montrées via le diagramme de Bode pour différentes valeurs de

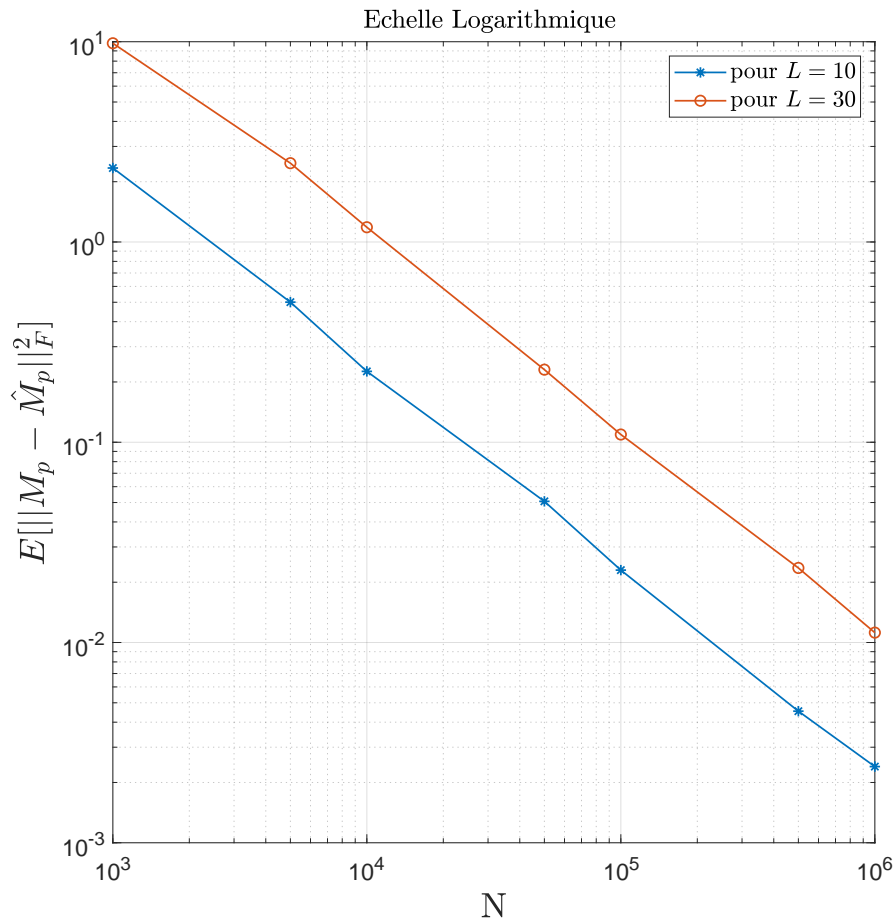


**Figure 3.7 :** diagramme logarithmique de  $\mathbb{E} \left[ \left\| M_p - \widehat{M}_p \right\|_F^2 \right]$  en fonction de  $N$  pour deux angles avec  $\|\sin(\Theta_1)\|_F < \|\sin(\Theta_2)\|_F$  et  $SNR = 0dB$ .

seuil,  $c = 0$  et  $c = 1$  et la carte de pôle du modèle estimé. Une simulation de Monte Carlo est effectuée avec 100 réalisations pour chaque seuil avec  $N = 10^4$  échantillons,  $SNR = 20dB$  et  $L = 20$ . Le diagramme de Bode de la magnitude du système, les pôles et leurs centaines d'estimations sont représentés sur les figures 3.10 et 3.11. On peut voir que les diagrammes de Bode estimés pour  $c = 0$  et  $c = 1$  sont proches du diagramme de Bode du système. Ce résultat confirme la qualité des matrices estimées et la bonne efficacité de l'algorithme même pour un seuil différent de zéro.

## 3.6 Conclusion

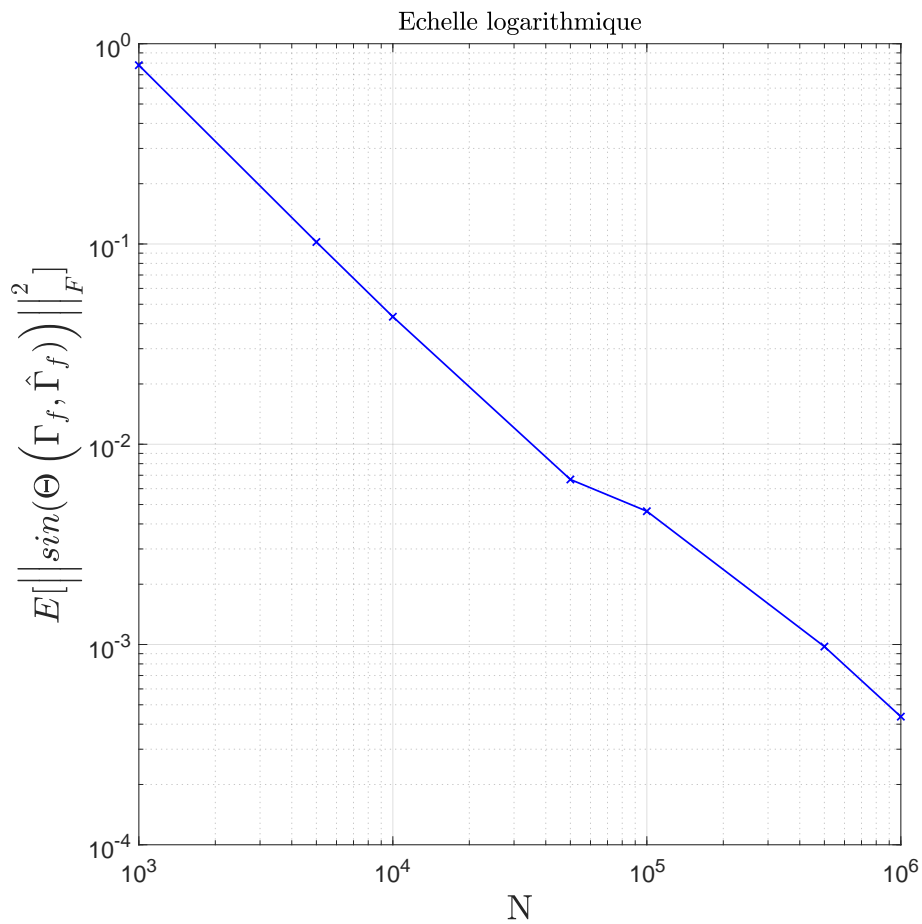
Dans ce chapitre, nous avons présenté un algorithme en trois étapes, basé sur les sous-espaces pour identifier les systèmes à sortie binaire. Nous avons ensuite établi



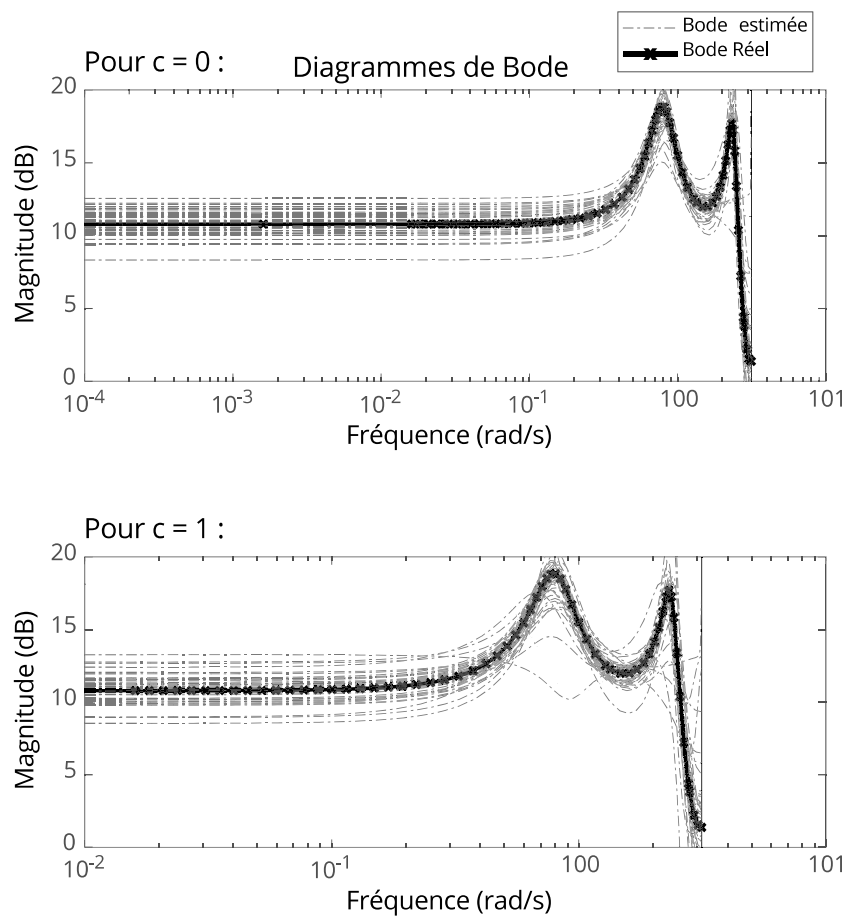
**Figure 3.8 :** diagramme logarithmique de  $\mathbb{E} \left[ \left\| M_p - \widehat{M}_p \right\|_F^2 \right]$  en fonction de  $N$  pour différentes longueurs de période  $L = 10$  et  $L = 30$  et  $SNR = 0dB$ .

une preuve de convergence de chaque étape de l’algorithme. Nous avons réalisé des simulations numériques sous différentes conditions dont les résultats sont en adéquation avec les preuves théoriques. Ces différents travaux ont été publiés dans [Mes+22].

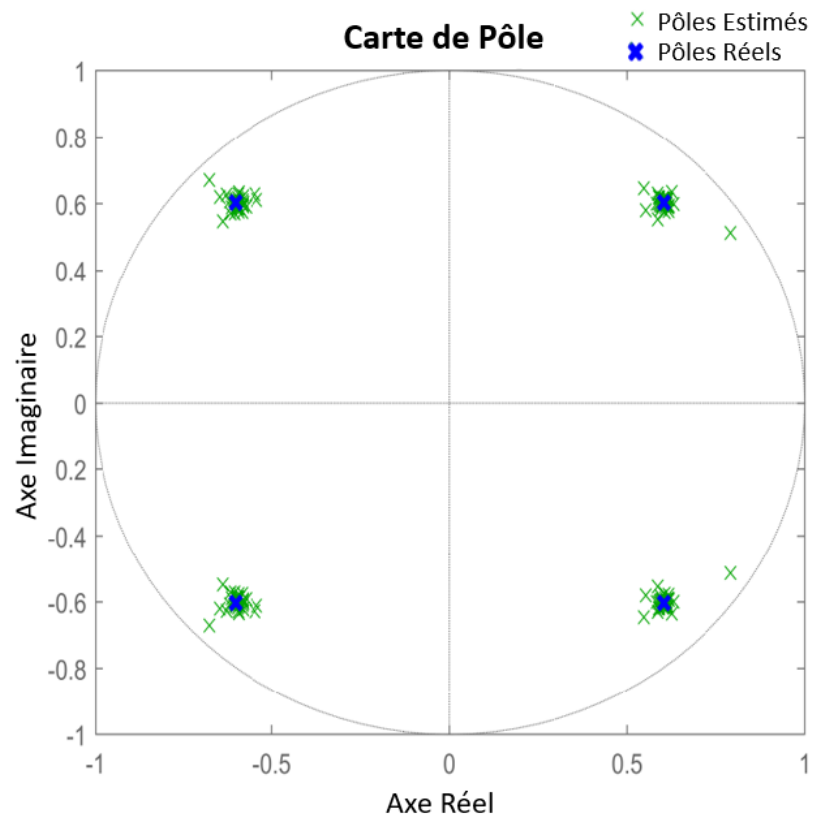
L’algorithme apparaît efficace pour l’estimation des matrices d’état. Cependant, cet algorithme nécessite certaines conditions, notamment la périodicité de l’entrée et la connaissance de la fonction de distribution, ce qui peut limiter son champ d’application. Par conséquent, nous proposons dans le chapitre suivant un autre algorithme moins restrictifs ne reposant pas sur ces hypothèses.



**Figure 3.9 :** diagramme logarithmique de  $\mathbb{E} \left[ \left\| \sin \left( \Theta(\Gamma_f, \hat{\Gamma}_f) \right) \right\|_F^2 \right]$  en fonction de  $N$ ,  $SNR = 0dB$  et  $L = 10$ .



**Figure 3.10** : diagramme de Bode du système et de ses estimations, avec  $N = 10^4$  et  $SNR = 20dB$ .



**Figure 3.11** : carte des pôles du système et de ses estimations, avec  $N = 10^4$  et  $SNR = 20dB$ .





# 4

## Identification d'une réalisation d'état à partir de la réponse impulsionnelle

### Sommaire

---

4.1	Introduction . . . . .	80
4.2	Problématique et hypothèses . . . . .	81
4.3	Algorithme d'identification . . . . .	82
4.3.1	Étape 1 : estimation de la réponse impulsionnelle . . . . .	82
4.3.2	Étape 2 : estimation de l'ordre et de la matrice d'observabilité étendue . . . . .	90
4.3.3	Étape 3 : estimation des matrices d'état . . . . .	91
4.4	Analyses de l'algorithme . . . . .	92
4.4.1	Analyse de la première étape . . . . .	93
4.4.2	Analyse de la deuxième étape . . . . .	96
4.4.3	Analyse de la troisième étape . . . . .	100
4.5	Simulations Numériques . . . . .	100
4.5.1	Résultats de l'étape 1 . . . . .	102
4.5.2	Résultats de l'étape 2 . . . . .	104
4.5.3	Résultats de l'étape 3 . . . . .	107
4.6	Conclusion . . . . .	107

---

## 4.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de présenter un nouvel algorithme d'identification de systèmes à sortie binaire utilisant les méthodes des sous-espaces. Cet algorithme d'identification se veut plus simple par rapport à l'algorithme du chapitre 3, notamment en termes de condition sur le signal d'entrée et en termes de connaissances requises sur le bruit.

Cet algorithme est aussi structuré en trois étapes : la première consiste à estimer la réponse impulsionnelle à partir de l'estimation empirique des corrélations entre l'entrée et la sortie binaire. Dans cette perspective, nous proposons une interprétation géométrique afin de montrer que l'estimation de la réponse impulsionnelle peut être également réalisée en utilisant la méthode de décomposition par valeur singulière. Les deuxième et troisième étapes s'appuient sur l'algorithme de Ho-Kalman [HK66] déjà présenté dans le chapitre de l'état de l'art (chapitre 2). Ces étapes ont pour objet d'estimer une réalisation d'état à partir de la réponse impulsionnelle estimée.

Le chapitre commence donc par la présentation du problème et des hypothèses dans la section 4.2. Une formulation de l'algorithme est présentée dans la section 4.3. Nous procédons ensuite à une analyse détaillée dans la section 4.4, analyse établissant la convergence pour chacune des estimations à chacune des étapes de l'algorithme. Enfin, nous donnons un exemple numérique dans la section 4.5 permettant de vérifier la consistance de chacune des étapes et la cohérence des résultats de simulation vis à vis des résultats d'analyse.

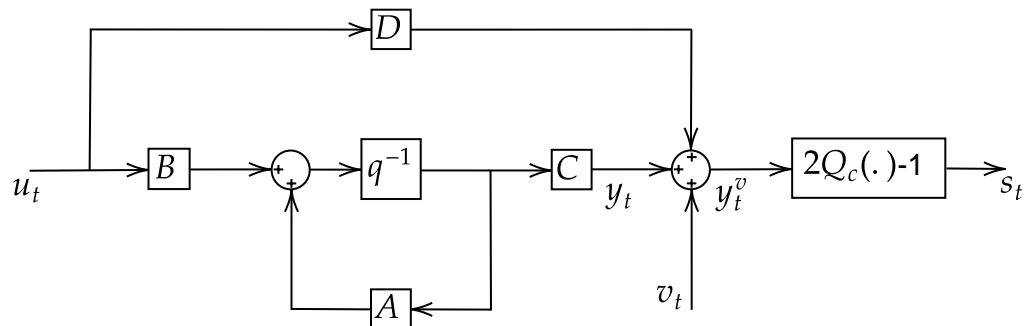


Figure 4.1 : schéma bloc du modèle de système.

## 4.2 Problématique et hypothèses

Nous considérons de nouveau un système LTI à temps discret dont le comportement dynamique peut être décrit par la réalisation d'état minimale suivante :

$$\begin{cases} x_{t+1} = Ax_t + Bu_t \\ y_t^v = Cx_t + Du_t + v_t \end{cases} \quad (4.1)$$

Nous considérons ainsi la même structure de modèle que dans le chapitre précédent.

Comme le montre la figure 4.1, la sortie du système est inconnue mais elle est mesurée à l'aide d'un capteur binaire  $Q_c(\cdot)$ . Dans la suite nous désignons la sortie binaire par  $s_t$  telle que

$$s_t = 2Q_c(y_t^v) - 1 = \begin{cases} 1 & \text{si } y_t^v - c \geq 0 \\ -1 & \text{si } y_t^v - c < 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

L'objectif est d'estimer  $n$  et une réalisation d'état  $\{A, B, C, D\}$  étant donné  $\{u_t, s_t\}_{t=1}^N$  où  $N$  est le nombre de données disponibles.

Les quelques hypothèses requises pour le développement de la stratégie proposée dans ce chapitre sont les suivantes :

- **H.1** :  $\{u_t\}$  est une séquence de moyenne nulle, stationnaire avec une distribution gaussienne.
- **H.2** :  $\{v_t\}$  est une séquence de moyenne nulle de variables aléatoires, stationnaire et non corrélée avec l'entrée.
- **H.3** : le gain statique du système  $G = D + \sum_{j=1}^{\infty} CA^{j-1}B$  est connu et non nul.
- **H.4** : le système est strictement stable, d'ordre minimal  $n$  et sa réponse impulsionnelle est nulle au delà d'un ordre  $L_{max}$  :  $CA^iB = 0$  pour  $i > L_{max}$ .

Notons que l'hypothèse **H.3** est une hypothèse de normalisation. Comme vu dans le chapitre 2 cette hypothèse est couramment utilisée dans l'identification de systèmes à partir de mesures binaires.

Par comparaison des hypothèses **H.1** et **H.2** précédentes et des hypothèses **H.1** et **H.2** du chapitre 3, il apparaît que le cadre d'application de l'algorithme présenté dans ce chapitre apparaît nettement moins restrictif. En effet, il n'est plus nécessaire d'avoir une entrée périodique et il n'est plus nécessaire de connaître la fonction de distribution du bruit. Il y a un prix à payer néanmoins, il s'agit de l'hypothèse **H.4** sur la structure du système.

## 4.3 Algorithme d'identification

L'algorithme d'identification est présenté dans cette section. Il se compose de trois étapes. La première décrite dans la sous-section 4.3.1 concerne l'estimation de la réponse impulsionnelle, la deuxième puis la troisième, respectivement décrite dans les sous-sections 4.3.2 et 4.3.3, mènent naturellement à une estimation des matrices d'état.

### 4.3.1 Étape 1 : estimation de la réponse impulsionnelle

Cette première étape est centrée sur l'estimation de la réponse impulsionnelle du système. Cette estimation permettra par la suite l'usage de la méthode de Ho-Kalman ([HK66]) pour l'estimation des matrices d'état. Il est possible d'utiliser certaines solutions citées dans le chapitre 2, notamment les solutions dédiées à l'estimation de modèle FIR pour estimer la réponse impulsionnelle. Cependant, les cadres d'application de certaines de ces solutions sont parfois trop restrictifs (charge de calcul importante pour une réponse impulsionnelle longue, conditions sur l'entrée, choix délicat des paramètres de synthèse, etc. . . ). L'objectif de la présente sous-section est de proposer une solution simple.

### 4.3.1.1 Résultat préliminaire

A partir de (4.1), la sortie  $y_t^v$  est exprimée comme suit :

$$y_t^v = Du_t + CBu_{t-1} + \dots + CA^{L-1}Bu_{t-L} + CA^Lx_{t-L} + v_t \quad (4.3)$$

où  $L$  est un paramètre défini par l'utilisateur. Pour  $L \geq L_{max}$  nous avons  $CA^Lx_{t-L} = 0$ , il vient alors

$$y_t^v = \phi_t^T \theta^* + v_t \quad (4.4)$$

où  $\theta^* = \begin{pmatrix} D \\ CB \\ \vdots \\ CA^{L-1}B \end{pmatrix}$  contient les termes significatifs de la réponse impulsionnelle et  $\phi_t = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{t-1} \\ \vdots \\ u_{t-L} \end{pmatrix}$  est le vecteur de régression.

Si on considère un vecteur  $\psi_t$  de dimension  $L$ , constitué de composantes stationnaires, nous pouvons montrer que

$$\mathbb{E}[\psi_t y_t^v] = \mathbb{E}[\psi_t \phi_t^T] \theta^* + \mathbb{E}[\psi_t v_t]. \quad (4.5)$$

Si les composantes de  $\psi_t$  sont indépendantes de  $v_t$  alors

$$\mathbb{E}[\psi_t y_t^v] = \mathbb{E}[\psi_t \phi_t^T] \theta^*. \quad (4.6)$$

D'après les hypothèses **H.1** et **H.2** et si  $\psi_t = \phi_t$ , il est possible de montrer que

$$\begin{pmatrix} R_{yy}(0) \\ R_{yy}(1) \\ \vdots \\ R_{yy}(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{uu}(0) & R_{uu}(1) & \dots & R_{uu}(L) \\ R_{uu}(1) & R_{uu}(0) & \dots & R_{uu}(L-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{uu}(L) & R_{uu}(L-1) & \dots & R_{uu}(0) \end{pmatrix} \theta^* \quad (4.7)$$

où  $R_{yy}(k) = \mathbb{E}[u_t y_{t+k}]$  désigne l'intercorrélacion et  $R_{uu}(k) = \mathbb{E}[u_t u_{t+k}]$  l'autocorrélacion.

Afin de parvenir à une estimation de  $\theta^*$  à partir de (4.7) il est nécessaire de disposer d'estimations de  $R_{yy}(k)$  et de  $R_{uu}(k)$  pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, L\}$ . L'estimation de  $R_{uu}(k)$

est assez simple, mais ce n'est pas immédiat pour l'estimation de  $R_{uy}(k)$ . Nous pouvons remarquer néanmoins que

$$\mathbb{E} \left[ \left( u_t - \frac{R_{uy}(k)}{R_{yy}(0)} y_{t+k} \right) y_{t+k} \right] = 0 \quad (4.8)$$

pour chaque  $t$ . Ceci implique que les séquences  $\{u_t - \frac{R_{uy}(k)}{R_{yy}(0)} y_{t+k}\}$  et  $\{y_{t+k}\}$  sont décorrélés, il s'ensuit que

$$\mathbb{E} \left[ \left( u_t - \frac{R_{uy}(k)}{R_{yy}(0)} y_{t+k} \right) \middle| y_{t+k} \right] = \mathbb{E} \left[ \left( u_t - \frac{R_{uy}(k)}{R_{yy}(0)} y_{t+k} \right) \right]^1. \quad (4.9)$$

De **H.1** et **H.2**, nous savons que l'entrée et le bruit sont des séquences stationnaires de moyennes nulles, il s'ensuit que la sortie est elle aussi de moyenne nulle et par conséquent

$$\mathbb{E} \left[ \left( u_t - \frac{R_{uy}(k)}{R_{yy}(0)} y_{t+k} \right) \right] = 0. \quad (4.10)$$

Alors à partir de (4.9), nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [u_t | y_{t+k}] &= \frac{R_{uy}(k)}{R_{yy}(0)} \mathbb{E} [y_{t+k} | y_{t+k}] \\ &= \frac{R_{uy}(k)}{R_{yy}(0)} y_{t+k}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

L'intercorrélacion entre  $u_t$  et  $s_t$  est définie par  $R_{us}(k) = \mathbb{E} [u_t s_{t+k}]$ , comme dans [Son18], elle peut ainsi s'exprimer par

$$\begin{aligned} R_{us}(k) &= \mathbb{E} [u_t s_{t+k}] \\ &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} [u_t s_{t+k} | y_{t+k}] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ s_{t+k} \mathbb{E} [u_t | y_{t+k}] \right] \\ &= \frac{R_{uy}(k)}{R_{yy}(0)} \mathbb{E} [s_{t+k} y_{t+k}] \\ &= \alpha R_{uy}(k) \end{aligned} \quad (4.12)$$

---

<sup>1</sup>nous utilisons ici la notation  $\mathbb{E} [x|y]$  qui représente l'espérance conditionnelle de  $x$  sachant que  $y$

où  $\alpha = \frac{R_{sy}(0)}{R_{yy}(0)}$  est une constante. Il découle de (4.7) et (4.12) que  $\theta^*$  satisfait

$$\begin{pmatrix} R_{us}(0) \\ R_{us}(1) \\ \vdots \\ R_{us}(L) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} R_{uu}(0) & R_{uu}(1) & \dots & R_{uu}(L) \\ R_{uu}(1) & R_{uu}(0) & \dots & R_{uu}(L-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{uu}(L) & R_{uu}(L-1) & \dots & R_{uu}(0) \end{pmatrix} \theta^*. \quad (4.13)$$

En définissant  $\bar{\theta}^*$  par

$$\bar{\theta}^* = \begin{pmatrix} R_{uu}(0) & R_{uu}(1) & \dots & R_{uu}(L) \\ R_{uu}(1) & R_{uu}(0) & \dots & R_{uu}(L-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{uu}(L) & R_{uu}(L-1) & \dots & R_{uu}(0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R_{us}(0) \\ R_{us}(1) \\ \vdots \\ R_{us}(L) \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

nous avons  $\theta^*$  tel que

$$\theta^* = \frac{1}{\alpha} \bar{\theta}^* \quad (4.15)$$

où  $\alpha$  est donné plus haut.  $\frac{1}{\alpha}$  correspond à un terme de normalisation si  $R_{sy}(0)$  et  $R_{yy}(0)$  sont inconnus (ce qui est probablement le cas en pratique) alors il est possible d'exprimer  $\alpha$  en utilisant l'hypothèse **H.3** par  $\alpha = \bar{G}/G$  où  $\bar{G}$  représente la somme des composantes de  $\bar{\theta}^*$ .

#### 4.3.1.2 Estimation de la réponse impulsionnelle

Nous proposons ainsi l'estimation de  $\theta^*$  de la manière suivante

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\hat{\alpha}} \hat{\bar{\theta}} \quad (4.16)$$

avec

$$\hat{\bar{\theta}} = \begin{pmatrix} \hat{R}_{uu}(0) & \hat{R}_{uu}(1) & \dots & \hat{R}_{uu}(L) \\ \hat{R}_{uu}(1) & \hat{R}_{uu}(0) & \dots & \hat{R}_{uu}(L-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{R}_{uu}(L) & \hat{R}_{uu}(L-1) & \dots & \hat{R}_{uu}(0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{R}_{us}(0) \\ \hat{R}_{us}(1) \\ \vdots \\ \hat{R}_{us}(L) \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

où  $\widehat{R}_{uu}(k)$  et  $\widehat{R}_{us}(k)$  sont calculés empiriquement par les formules suivantes

$$\widehat{R}_{uu}(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u_t u_{t+k} \quad (4.18)$$

$$\widehat{R}_{us}(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u_t s_{t+k} \quad (4.19)$$

où

$$\widehat{\alpha} = \widehat{G}/G. \quad (4.20)$$

avec  $\widehat{G}$  la somme des composantes de  $\widehat{\theta}$ .

Notons que l'implémentation de (4.16) et (4.17) nécessite deux précautions.

- Premièrement la matrice de Toeplitz de l'auto-corrélation estimée  $\widehat{R}_{uu}(L)$  doit être de rang complet afin de pouvoir calculer son inverse. D'après l'hypothèse **H.1** ceci devrait être le cas, cependant pour un nombre fini de données disponibles cette condition peut ne pas être satisfaite. Nous considérons donc la mise en œuvre de la solution (4.17) lorsque la plus petite valeur propre de la matrice de Toeplitz de l'auto-corrélation estimée  $\widehat{R}_{uu}(L)$  est supérieure ou égale à une valeur strictement positive donnée ( $10^{-9}$  par exemple).
- Deuxièmement,  $\widehat{G}$  doit être différent de 0 afin de pouvoir réaliser la normalisation. Cette condition amène à nous poser la question de la valeur du seuil  $c$ . En effet, pour un nombre fini de données disponibles, si  $c$  est trop faible (respectivement trop élevé) par rapport à  $y_t$ , alors  $s_t = 1$  (respectivement  $s_t = -1$ ) pour tout  $t$  et donc  $\widehat{\theta} = 0$  du fait que l'entrée est une moyenne nulle. Dans ce qui suit, afin d'éviter un tel cas, nous considérons l'implémentation de l'étape ci-dessus uniquement si  $\widehat{G}$  est supérieur ou égal à une valeur définie par l'utilisateur ( $10^{-9}$  par exemple). En pratique, il est parfois suggéré (comme dans [WZY+03] et [CJ09]) d'ajouter un signal de tramage sur l'entrée du capteur binaire. Un tel bruit « complémentaire » permet d'éviter le cas pathologique décrit ci-dessus (ceci a déjà été mentionné auparavant dans le chapitre 2). Une autre solution est de procéder à l'estimation de cette corrélation via une troncature sur l'estimation empirique comme dans le chapitre 3, équation (3.14).

### Remarque 8 :

*Il peut être remarqué que si l'entrée est un bruit blanc gaussien, la matrice contenant les corrélations  $R_{uu}(k)$  est diagonale et donc la solution proposée dans (4.17) correspond à ce qui est décrit dans [Son18].*



En termes de mise en œuvre et de choix de  $L$ , si l'entrée est un bruit blanc gaussien, alors même si les termes  $CA^{L_{max}+1}x_{t-L_{max}-1}$ ,  $CA^{L_{max}+2}x_{t-L_{max}-2}$ , etc. ne peuvent être négligés, l'estimation de  $\theta^*$  reste réalisable. En effet, ces termes peuvent être intégrés au terme de bruit et ce nouveau terme de bruit reste indépendant des composantes de  $\phi_t$ . Le choix de  $L$  apparaît ainsi moins critique lorsque l'entrée est un bruit blanc. En revanche, si l'entrée n'est pas un bruit blanc, ces termes  $CA^{L_{max}+1}x_{t-L_{max}-1}$ ,  $CA^{L_{max}+2}x_{t-L_{max}-2}$ , etc. ne peuvent être intégrés au terme de bruit car dépendant des composantes de  $\phi_t$ .

### 4.3.1.3 Interprétation géométrique et formulation algébrique

Dans ce paragraphe, nous présentons une interprétation géométrique de la première étape. Cette interprétation conduit à une formulation algébrique de (4.14). Afin de simplifier la présentation, nous supposons que le nombre de paramètres à estimer est  $L + 1 = 2$  et que le seuil  $c = 0$ . La présentation de cette interprétation est décomposée en plusieurs phases décrites et illustrées ci-dessous via la figure 4.2.

- La figure 4.2.a montre le diagramme de dispersion de l'ensemble de données  $\phi_t = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{t-1} \end{pmatrix}$  pour  $t$  allant de 1 à  $N$ , les points bleus et jaunes représentent respectivement les ensembles de données pour  $s_t$  égal à 1 et  $-1$ . La ligne rouge sur la figure 4.2.a) correspond à l'équation  $\phi_t^T \theta^* = 0$ . L'inspection visuelle montre que le nuage de points a deux directions principales :  $\vec{i}$  est le vecteur primaire et  $\vec{j}$  est le vecteur secondaire.
- Soit  $\Phi$  la matrice de régression définie par

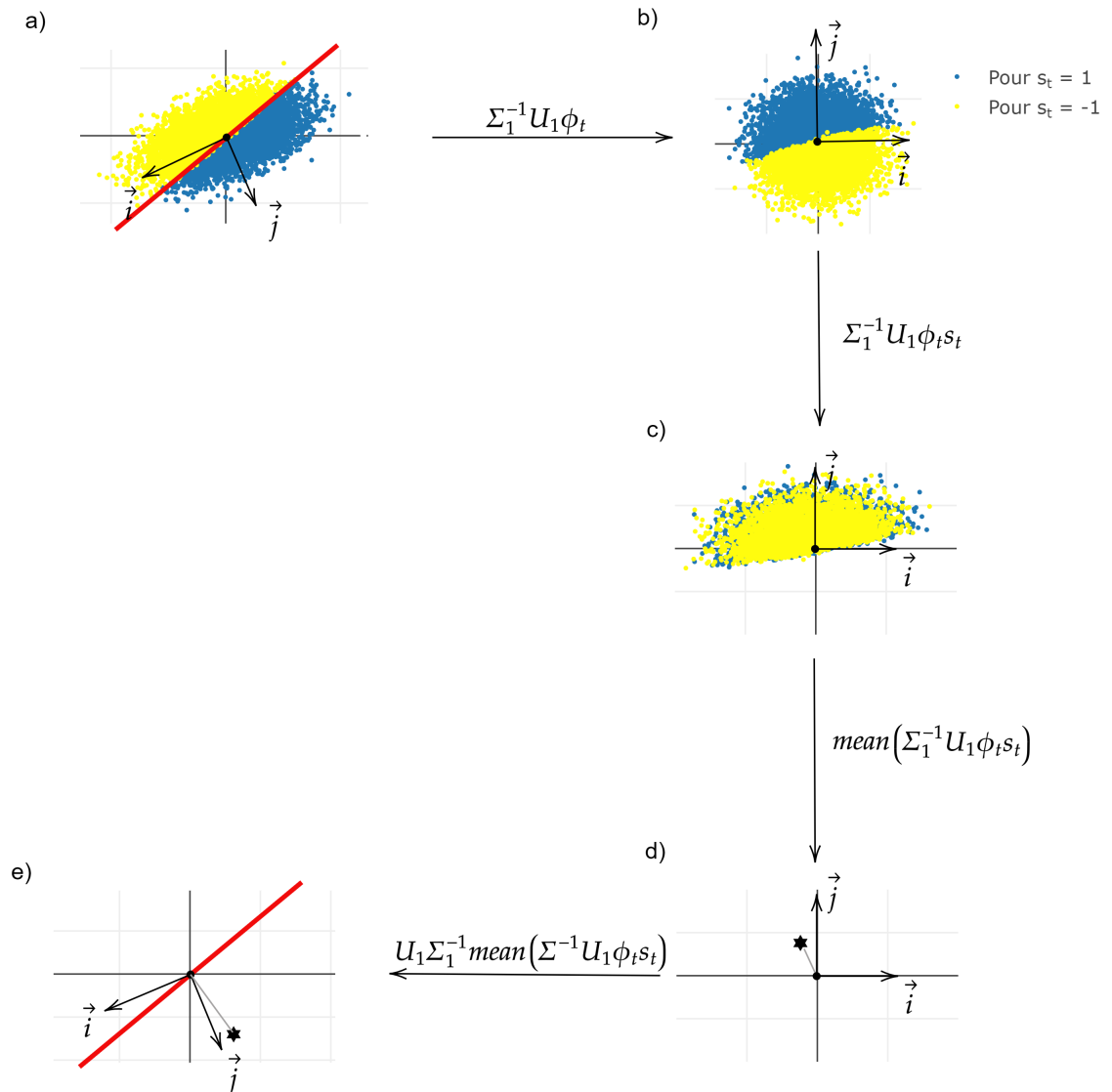
$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_N \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

En appliquant une SVD sur  $\Phi$ , on obtient

$$\Phi = U_1 \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} = U_1 \Sigma_1 V_1^T \quad (4.22)$$

où  $\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  est une matrice carrée diagonale,  $U_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  et  $V_1^T \in \mathbb{R}^{2 \times N}$  tels que  $U_1^T U_1 = I_2$  et  $V_1^T V_1 = I_2$ .

En multipliant les données par  $\Sigma_1^{-1} U_1^T$ , nous obtenons le nuage de points de la figure 4.2.b) ( $U_1$  assure la rotation et  $\Sigma_1^{-1}$  réalise la décompression des données).



**Figure 4.2 :** interprétation géométrique 2D : nuage de points de  $\begin{pmatrix} u_t \\ u_{t-1} \end{pmatrix}$  dans des bases différentes et estimation d'un vecteur orthogonal à  $h_0 u_t + h_1 u_{t-1} = 0$ .

- En multipliant chaque vecteur de la figure 4.2.b) par sa sortie binaire correspondante, on obtient figure 4.2.c).
- En calculant la moyenne du nuage de points de la figure 4.2.c), on obtient l'étoile noire sur la figure 4.2.d). Le vecteur correspondant à cette étoile noire est donné par  $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\Sigma_1^{-1} U_1^T \phi_t) s_t = \Sigma_1^{-1} U_1^T \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \phi_t s_t$ . Notons que ce vecteur est orthogonal à la ligne de séparation de la figure 4.2.b).
- En multipliant le vecteur précédent  $\Sigma_1^{-1} U_1^T \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \phi_t s_t$  par  $U_1 \Sigma_1^{-1}$ , on obtient le vecteur  $U_1 \Sigma_1^{-2} U_1^T \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \phi_t s_t$ . Ce vecteur représente le vecteur avec l'étoile noire représentée dans la figure 4.2.e) et est orthogonal à la ligne rouge d'équation  $\phi^T \theta^* = 0$ . Ce vecteur est par conséquent proportionnel à  $\theta^*$ .

Notons que  $\frac{1}{N} U_1 \Sigma_1^2 U_1^T = \frac{1}{N} \Phi \Phi^T$  correspond à la matrice des auto-corrélations estimées  $\widehat{R}_{uu}(L)$  utilisée dans (4.14). Il s'ensuit que  $\widehat{\theta}$  dans (4.14) correspond à

$$\begin{aligned} \widehat{\theta} &= \left( \frac{1}{N} U_1 \Sigma_1^2 U_1^T \right)^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \phi_t s_t \\ &= U_1 \Sigma_1^{-2} U_1^T \sum_{t=1}^N \phi_t s_t. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Ceci montre que  $\widehat{\theta}$  est proportionnel au vecteur avec l'étoile noire représentée dans la figure 4.2.e).

A partir des étapes ci-dessus, nous obtenons la formulation suivante sur  $\widehat{\theta}$  :

$$\widehat{\theta} = N U_1 \Sigma_1^{-2} U_1^T \text{mean}(U_1 \Sigma_1 V_1^T \odot S) \quad (4.24)$$

où  $\text{mean}(U_1 \Sigma_1 V_1^T \odot S)$  désigne le vecteur construit avec la moyenne de chaque ligne de  $U_1 \Sigma_1 V_1^T \odot S$ ,  $\odot$  désigne le produit de Hadamard et  $S$  la matrice définie par

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_N \\ s_1 & s_2 & \dots & s_N \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Enfin (4.24) fournit la formulation suivante pour le calcul de  $\widehat{\theta}$

$$\widehat{\theta} = N U_1 \Sigma_1^{-1} \text{mean}(V_1^T \odot S). \quad (4.26)$$

Cette formulation algébrique est équivalente à (4.14), son intérêt est l'utilisation d'un outil d'algèbre linéaire robuste numériquement (la SVD) pour l'estimation de  $\overline{\theta^*}$ .

**Remarque 9 :**

*Cette première étape peut être considérée comme un algorithme complet pour l'identification des systèmes FIR.*

### 4.3.2 Étape 2 : estimation de l'ordre et de la matrice d'observabilité étendue

Une fois que le vecteur  $\theta^*$  est estimé, nous appliquons la méthode de Ho-Kalman présentée dans le chapitre 2. A cet effet, rappelons que le produit  $\Gamma_f \Delta_f$  est de la forme

$$\Gamma_f \Delta_f = \begin{pmatrix} CA^{f-1}B & CA^{f-2}B & \dots & CB \\ CA^f B & CA^{f-1}B & \dots & CAB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{2f-2}B & CA^{2f-3}B & \dots & CA^{f-1}B \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Dans notre cas, le dernier paramètre de la réponse impulsionnelle qui peut être estimé est  $CA^{L-1}B$ , donc la valeur de  $f$  doit être inférieure ou égale à  $\frac{L+1}{2}$ .

A partir des composantes du vecteur  $\hat{\theta}$ , nous pouvons ainsi construire une estimation  $\widehat{\Gamma_f \Delta_f}$  de  $\Gamma_f \Delta_f$ . La matrice  $\widehat{\Gamma_f \Delta_f}$  est ainsi donnée par

$$\widehat{\Gamma_f \Delta_f} = \begin{pmatrix} \widehat{CA^{f-1}B} & \widehat{CA^{f-2}B} & \dots & \widehat{CB} \\ \widehat{CA^f B} & \widehat{CA^{f-1}B} & \dots & \widehat{CAB} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{CA^{2f-2}B} & \widehat{CA^{2f-3}B} & \dots & \widehat{CA^{f-1}B} \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Suite à la construction de  $\widehat{\Gamma_f \Delta_f}$ , nous appliquons la SVD suivante

$$\widehat{\Gamma_f \Delta_f} = \begin{pmatrix} \widehat{U}_{s_1} & \widehat{U}_{s_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{S}_1 & 0 \\ 0 & \widehat{S}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{V}_{s_1}^T \\ \widehat{V}_{s_2}^T \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

où  $\widehat{S}_1$  est une matrice diagonale,  $\widehat{S}_2$  est une matrice négligeable devant  $\widehat{S}_1$ . Les estimations de l'ordre  $n$  et de la matrice d'observabilité étendue consécutives à cette décomposition sont ainsi données par

$$\hat{n} = \mathbf{ordre}(\widehat{S}_1) \quad (4.30)$$

et

$$\widehat{\Gamma}_f = \widehat{U}_{s1}. \quad (4.31)$$

### 4.3.3 Étape 3 : estimation des matrices d'état

Il s'agit à présent d'estimer les matrices d'état  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .

Une estimation de la matrice  $C$  est obtenue à partir de la première ligne de  $\widehat{\Gamma}_f$ ,

$$\widehat{C} = \widehat{\Gamma}_f(1, :). \quad (4.32)$$

Une estimation de la matrice  $A$  peut être donnée par

$$\widehat{A} = \left( \widehat{\Gamma}_f^{+T} \widehat{\Gamma}_f^+ \right)^{-1} \widehat{\Gamma}_f^{+T} \widehat{\Gamma}_f^-. \quad (4.33)$$

$D$  représente le premier terme de  $\theta^*$ , son estimation est

$$\widehat{D} = \widehat{\theta}(1). \quad (4.34)$$

Pour ce qui est de  $B$ , nous proposons les 3 variantes suivantes :

**Variante 1 :** cette variante correspond à ce qui est fait dans la méthode de Ho-Kalman. Elle consiste à extraire une estimation de la matrice  $B$  à partir de la matrice de commandabilité étendue comme suit :

$$\widehat{B} = \widehat{\Delta}_f \quad (4.35)$$

avec

$$\widehat{\Delta}_f = \widehat{S}_1 \widehat{V}_{s1}^T. \quad (4.36)$$

Bien que cette méthode soit la plus directe, elle s'est avérée décevante en terme de performance.

**Variante 2 :** il est aussi possible d'estimer  $B$  directement à partir de la matrice d'observabilité  $\widehat{\Gamma}_f$  et du dernier vecteur colonne de la matrice  $\widehat{\Gamma}_f \widehat{\Delta}_f$ . En effet,  $B$  satisfait

$$\begin{pmatrix} CB \\ CAB \\ \vdots \\ CA^{f-1}B \end{pmatrix} = \Gamma_f \widehat{B} \quad (4.37)$$

et donc

$$B = [\Gamma_f^T \Gamma_f]^{-1} \Gamma_f^T \begin{pmatrix} CB \\ CAB \\ \vdots \\ CA^{f-1}B \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Une estimation de  $B$  peut ainsi être donnée par

$$\hat{B} = [\hat{\Gamma}_f^T \hat{\Gamma}_f]^{-1} \hat{\Gamma}_f^T \begin{pmatrix} \widehat{CB} \\ \widehat{CAB} \\ \vdots \\ \widehat{CA^{f-1}B} \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

**Variante 3 :** une troisième variante consiste à estimer les matrices  $B$  et  $D$  en procédant de manière analogue à ce qui est fait dans le chapitre 3.  $y_t$  peut s'exprimer à partir de  $B$  et  $D$  comme suit

$$y_t = \phi_t^T \begin{pmatrix} D \\ B \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

avec

$$\phi_t = \begin{pmatrix} u_t \\ [C(qI_{n \times n} - A)^{-1}]^T u_t \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

A partir de cette formulation, connaissant les données  $\{u_t, s_t\}_{t=1}^N$  et connaissant des estimations  $A$  et  $C$ , les matrices  $B$  et  $D$  peuvent ainsi être estimées en appliquant un des algorithmes d'identification de systèmes à sortie binaire adaptés aux modèles FIR (voir chapitre 2) ou aussi en utilisant la solution par SVD de l'étape 1 du présent chapitre.

Le résumé de l'algorithme permettant l'estimation de  $A, B, C$  et  $D$  est donné dans le tableau 4.1.

## 4.4 Analyses de l'algorithme

Une analyse de chaque étape de l'algorithme est fournie dans cette section.

---



---

**Étape 1 : estimation de  $\theta^*$**

- Calculer  $\widehat{R}_{uu}(k)$  and  $\widehat{R}_{us}(k)$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, L\}$  respectivement de (4.18) et (4.19).
  - Calculer  $\widehat{\theta}$  de (4.14), puis calculer  $\widehat{\alpha}$  de (4.20).
  - Calculer  $\widehat{\theta}$  de (4.16).
- 

**Étape 2 : estimation de  $n$  et  $\Gamma_f$**

- Construire  $\widehat{\Gamma}_f \widehat{\Delta}_f$  comme dans (4.28).
  - Appliquer SVD comme dans (4.29).
  - Estimer l'ordre  $n$ ,  $\widehat{\Gamma}_f$  respectivement de (4.30) et (4.31).
- 

**Étape 3 : estimation de  $\{A, B, C, D\}$**

- Calculer  $\widehat{C}$  de (4.32).
  - Calculer  $\widehat{A}$  de (4.33).
  - Calculer  $\widehat{D}$  de (4.34) et  $\widehat{B}$  de (4.35), (4.39) ou (4.40).
- 

**Table 4.1** : résumé de l'algorithme du chapitre 4.

### 4.4.1 Analyse de la première étape

Des propriétés de convergence de la réponse impulsionnelle estimée sont données dans le théorème suivant.

**Théorème 7 :**

*Si les conditions de la section 4.2 sont vérifiées et si  $L \geq L_{max}$ , alors  $\widehat{\theta}$  défini dans (4.16) est asymptotiquement sans biais, converge au sens de la moyenne quadratique et il existe  $\Sigma \in \mathbb{R}_+^*$  tel que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \|\widehat{\theta} - \theta^*\|_2^2 \right] \leq \frac{(L+1)\Sigma}{N}. \quad (4.42)$$

■

**Preuve 7 :**

*La preuve est divisée en deux parties : nous nous concentrons d'abord sur  $\widehat{\theta} - \overline{\theta^*}$  puis nous nous concentrons sur  $\widehat{\theta} - \theta^*$ .*

- Considérons  $\widehat{\theta} - \overline{\theta^*}$ ,  $\widehat{\theta}$  et  $\overline{\theta^*}$  définis respectivement dans (4.17) et (4.14). Nous dénotons

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} R_{uu}(0) & R_{uu}(1) & \dots & R_{uu}(L) \\ R_{uu}(1) & R_{uu}(0) & \dots & R_{uu}(L-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{uu}(L) & R_{uu}(L-1) & \dots & R_{uu}(0) \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

et

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} R_{us}(0) \\ R_{us}(1) \\ \vdots \\ R_{us}(L) \end{pmatrix}, \quad (4.44)$$

ainsi nous avons  $\widehat{\theta} = \widehat{\mathbf{M}}^{-1}\widehat{\mathbf{N}}$  et

$$\widehat{\theta} - \overline{\theta^*} = \widehat{\mathbf{M}}^{-1}\widehat{\mathbf{N}} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}. \quad (4.45)$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} \widehat{\theta} - \overline{\theta^*} &= \widehat{\mathbf{M}}^{-1}(\widehat{\mathbf{N}} - \mathbf{N}) + (\widehat{\mathbf{M}}^{-1} - \mathbf{M}^{-1})\mathbf{N} \\ &= \widehat{\mathbf{M}}^{-1}(\widehat{\mathbf{N}} - \mathbf{N}) + \widehat{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{M} - \widehat{\mathbf{M}})\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \\ &= \widehat{\mathbf{M}}^{-1}(\widehat{\mathbf{N}} - \mathbf{N}) + \widehat{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{M} - \widehat{\mathbf{M}})\overline{\theta^*}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et la norme de Frobenius, nous avons

$$\|\widehat{\theta} - \overline{\theta^*}\|_2 \leq \|\widehat{\mathbf{M}}^{-1}\|_F \left( \|\widehat{\mathbf{N}} - \mathbf{N}\|_2 + \|\widehat{\mathbf{M}} - \mathbf{M}\|_F \|\overline{\theta^*}\|_2 \right). \quad (4.47)$$

Il est considéré que la plus petite valeur propre de  $\widehat{\mathbf{M}}$  est supérieure ou égale à une valeur strictement positive définie par l'utilisateur. Dénotons  $\eta$  cette valeur définie par l'utilisateur, cela donne

$$\|\widehat{\mathbf{M}}^{-1}\|_F \leq \frac{\sqrt{L+1}}{\eta} \quad (4.48)$$

et donc

$$\|\widehat{\theta} - \overline{\theta^*}\|_2 \leq \frac{\sqrt{L+1}}{\eta} \left( \|\widehat{\mathbf{N}} - \mathbf{N}\|_2 + \|\widehat{\mathbf{M}} - \mathbf{M}\|_F \|\overline{\theta^*}\|_2 \right). \quad (4.49)$$

- Considérons maintenant  $\widehat{\theta} - \overline{\theta^*}$ .  $\widehat{\theta}$  est défini dans (4.16), il vient



$$\begin{aligned}
 \hat{\theta} - \theta^* &= \frac{1}{\hat{\alpha}} \hat{\theta} - \frac{1}{\alpha} \theta^* \\
 &= \frac{1}{\hat{\alpha}} (\hat{\theta} - \theta^*) + \left( \frac{1}{\hat{\alpha}} - \frac{1}{\alpha} \right) \theta^* \\
 &= \frac{G}{\hat{G}} (\hat{\theta} - \theta^*) + \frac{G}{\hat{G}G} (\bar{G} - \hat{G}) \theta^* \\
 &= \frac{G}{\hat{G}} (\hat{\theta} - \theta^*) + \frac{1}{\hat{G}} (\bar{G} - \hat{G}) \theta^*.
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et le fait que  $|\bar{G} - \hat{G}| \leq 2\|\bar{\theta} - \hat{\theta}\|_2$  et que  $|G| \leq \|\theta^*\|_2$  nous obtenons

$$\|\hat{\theta} - \theta^*\|_2 \leq 4 \frac{\|\theta^*\|_2}{\hat{G}} \|\hat{\theta} - \bar{\theta}\|_2. \tag{4.51}$$

Il a été considéré que  $\hat{G}$  est supérieur ou égal à une valeur définie a priori par l'utilisateur, ceci implique que  $\hat{G}$  est aussi supérieur ou égal à une valeur définie. Dénotons  $\beta$  cette valeur, cela donne

$$\|\hat{\theta} - \theta^*\|_2 \leq 4 \frac{\|\theta^*\|_2}{\beta} \|\hat{\theta} - \bar{\theta}\|_2. \tag{4.52}$$

Avec (4.49) nous obtenons

$$\|\hat{\theta} - \theta^*\|_2 \leq 4 \frac{\|\theta^*\|_2}{\beta} \frac{\sqrt{L+1}}{\eta} \left( \|\hat{\mathbf{N}} - \mathbf{N}\|_2 + \|\hat{\mathbf{M}} - \mathbf{M}\|_F \|\bar{\theta}\|_2 \right). \tag{4.53}$$

Ce qui donne

$$\|\hat{\theta} - \theta^*\|_2^2 \leq 32 \left( \frac{\|\theta^*\|_2^2}{\beta^2} \frac{L+1}{\eta^2} \right) \left( \|\hat{\mathbf{N}} - \mathbf{N}\|_2^2 + \|\hat{\mathbf{M}} - \mathbf{M}\|_F^2 \|\bar{\theta}\|_2^2 \right) \tag{4.54}$$

et donc

$$\mathbb{N}\mathbb{E} \left[ \|\hat{\theta} - \theta^*\|_2^2 \right] \leq 32 \left( \frac{\|\theta^*\|_2^2}{\beta^2} \frac{L+1}{\eta^2} \right) \left( \mathbb{N}\mathbb{E} \left[ \|\hat{\mathbf{N}} - \mathbf{N}\|_2^2 \right] + \mathbb{N}\mathbb{E} \left[ \|\hat{\mathbf{M}} - \mathbf{M}\|_F^2 \right] \|\bar{\theta}\|_2^2 \right). \tag{4.55}$$

D'après l'hypothèse **H.1**, la séquence  $\{u_t\}$  est un bruit gaussien coloré, par suite  $\{u_t\}$  est un  $\varrho$ -mixing process ([KR60]). Ceci signifie simplement que les échantillons de  $\{u_t\}$  suffisamment bien séparés dans le temps sont approximativement indépendants. Il découle alors de [Mas11] que pour tout  $j \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\hat{R}_{uu}(j)$  converge au sens de la moyenne quadratique et il existe  $\Sigma_j^{uu} \in \mathbb{R}_+^*$  tel que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{N}\mathbb{E} \left[ (\hat{R}_{uu}(j) - R_{uu}(j))^2 \right] = \Sigma_j^{uu}. \tag{4.56}$$

Il s'ensuit qu'il existe  $\Sigma^M \in \mathbb{R}_+^*$  tel que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \mathbb{E} \left[ \|\widehat{\mathbf{M}} - \mathbf{M}\|_F^2 \right] = \Sigma^{\mathbf{M}}. \quad (4.57)$$

$\{y_t\}$  est modélisé comme la sortie d'un filtre FIR avec  $\{u_t\}$  en entrée, ainsi  $\{u_t; y_t\}$  est également un processus de mélange  $\varrho$ .  $\{s_t\}$  étant la sortie égal à  $1 - 2Q_c(y_t)$ , alors on peut montrer que  $\{u_t; s_t\}$  est aussi un processus  $\varrho$ -mixing. Il s'ensuit d'après ([Mas11]) que pour tout  $j$   $\widehat{R}_{us}(j)$  converge au sens de la moyenne quadratique et il existe  $\Sigma_j^{us} \in \mathbb{R}_+^*$  tel que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \mathbb{E} \left[ (\widehat{R}_{us}(j) - R_{us}(j))^2 \right] = \Sigma_j^{us}. \quad (4.58)$$

Ainsi, il existe  $\Sigma^{\mathbf{N}} \in \mathbb{R}_+^*$  tel que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \mathbb{E} \left[ \|\widehat{\mathbf{N}} - \mathbf{N}\|_2^2 \right] = \Sigma^{\mathbf{N}}. \quad (4.59)$$

Remplaçons (4.57) et (4.59) dans (4.55), ceci donne

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \mathbb{E} \left[ \|\widehat{\theta} - \theta^*\|_2 \right] \leq 32(L+1) \frac{\|\theta^*\|_2^2}{a^2 b^2} (\Sigma^{\mathbf{N}} + \Sigma^{\mathbf{M}} \|\bar{\theta}\|_2^2). \quad (4.60)$$

En prenant  $\Sigma = 32 \frac{\|\theta^*\|_2^2}{a^2 b^2} (\Sigma^{\mathbf{N}} + \Sigma^{\mathbf{M}} \|\bar{\theta}\|_2^2)$ , nous obtenons (4.42). ■

Nous pouvons constater que l'estimation de la réponse impulsionnelle dépend de deux paramètres, à savoir  $L$  et  $N$ . Plus le nombre de paramètres de la réponse impulsionnelle est élevé, plus l'erreur quadratique est importante. Par ailleurs, cette erreur quadratique tend vers zéro lorsque la valeur de  $N$  devient de plus en plus grande.

#### 4.4.2 Analyse de la deuxième étape

Dans cette sous-section nous poursuivons l'analyse via une analyse de la deuxième étape.

##### **Théorème 8 :**

Si les conditions de la section 4.2 sont vérifiées et si  $L \geq L_{max}$ , alors  $\widehat{\Gamma}_f \Delta_f$  défini dans (4.28) est asymptotiquement sans biais, converge au sens de la moyenne quadratique et il existe  $\Sigma \in \mathbb{R}_+^*$  tel que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \|\widehat{\Gamma}_f \Delta_f - \Gamma_f \Delta_f\|_F^2 \right] \leq \frac{(L+1)^2}{2N} \Sigma. \quad (4.61)$$

**Preuve 8 :**

La norme de chaque vecteur colonne de la matrice  $\widehat{\Gamma_f \Delta_f} - \Gamma_f \Delta_f$  est majorée par  $\|\widehat{\theta} - \theta^*\|_2$  et comme la norme de la matrice  $\widehat{\Gamma_f \Delta_f} - \Gamma_f \Delta_f$  est bornée par la somme des normes de ses vecteurs colonnes, nous déduisons ensuite (4.61).

On déduit de ce théorème que la qualité de l'estimation de  $\Gamma_f \Delta_f$  est meilleur lorsque  $L$  est petit et que  $N$  est grand.

L'analyse sur la matrice d'observabilité et la matrice de commandabilité est donnée par les deux théorèmes suivants. Dans ces théorèmes,  $\Theta(\Gamma_f, \widehat{\Gamma}_f)$  et  $\Theta(\Delta_f, \widehat{\Delta}_f)$  représentent les matrices angulaires entre respectivement  $\Gamma_f$  et  $\widehat{\Gamma}_f$ ,  $\Delta_f$  et  $\widehat{\Delta}_f$ .

**Théorème 9 :**

Si les conditions de la section 4.2 sont vérifiées et si  $L \geq L_{max}$ , alors il existe  $\Sigma \in \mathbb{R}_+^*$  tel que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \left\| \sin \left( \Theta(\Gamma_f, \widehat{\Gamma}_f) \right) \right\|_F^2 \right] \leq \frac{2n(L+1)^2}{N\sigma_n^2} \Sigma \quad (4.62)$$

et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \left\| \sin \left( \Theta(\Delta_f, \widehat{\Delta}_f) \right) \right\|_F^2 \right] \leq \frac{2n(L+1)^2}{N\sigma_n^2} \Sigma \quad (4.63)$$

où  $\sigma_n$  est la  $n^{\text{ième}}$  valeur singulière de  $\Gamma_f \Delta_f$ .

**Preuve 9 :**

La preuve de ce théorème est similaire à l'analyse détaillée dans la preuve 4 du chapitre 3 (page 62).

En se référant à [Wed72] et [Li98], nous pouvons montrer que

$$\begin{cases} \left\| \sin \left( \Theta(\Gamma_f, \widehat{\Gamma}_f) \right) \right\|_F \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma_n} \|\Gamma_f \Delta_f - \widehat{\Gamma_f \Delta_f}\|_F \\ \left\| \sin \left( \Theta(\Delta_f, \widehat{\Delta}_f) \right) \right\|_F \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma_n} \|\Gamma_f \Delta_f - \widehat{\Gamma_f \Delta_f}\|_F \end{cases} \quad (4.64)$$

avec  $\widehat{\Gamma_f \Delta_f} = \widehat{U}_{s_1} \widehat{S}_1 \widehat{V}_{s_1}^T$ .

En utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons

$$\|\Gamma_f \Delta_f - \widehat{\Gamma_f \Delta_f}\|_F \leq \|\Gamma_f \Delta_f - \widehat{\Gamma_f \Delta_f}\|_F + \|\widehat{\Gamma_f \Delta_f} - \widehat{\Gamma_f \Delta_f}\|_F. \quad (4.65)$$

D'après le lemme d'approximation matricielle dans [GHS87],  $\widehat{\Gamma_f \Delta_f}$  est la meilleure estimation d'ordre  $n$  de  $\Gamma_f \Delta_f$ , nous avons donc  $\|\widehat{\Gamma_f \Delta_f} - \Gamma_f \Delta_f\|_F \leq \|\widehat{\Gamma_f \Delta_f} - \Gamma_f \Delta_f\|_F$ , il s'ensuit que

$$\|\Gamma_f \Delta_f - \widehat{\Gamma_f \Delta_f}\|_F \leq 2\|\widehat{\Gamma_f \Delta_f} - \Gamma_f \Delta_f\|_F. \quad (4.66)$$

Ceci donne

$$\begin{cases} \left\| \sin \left( \Theta(\Gamma_f, \widehat{\Gamma_f}) \right) \right\|_F \leq \frac{2\sqrt{n}}{\sigma_n} \|\Gamma_f \Delta_f - \widehat{\Gamma_f \Delta_f}\|_F \\ \left\| \sin \left( \Theta(\Delta_f, \widehat{\Delta_f}) \right) \right\|_F \leq \frac{2\sqrt{n}}{\sigma_n} \|\Gamma_f \Delta_f - \widehat{\Gamma_f \Delta_f}\|_F \end{cases}. \quad (4.67)$$

Avec (4.61) il s'ensuit qu'il existe  $\Sigma \in \mathbb{R}_+^*$  tel que

$$\begin{cases} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \left\| \sin \left( \Theta(\Gamma_f, \widehat{\Gamma_f}) \right) \right\|_F^2 \right] \leq \frac{2n(L+1)^2}{N\sigma_n^2} \Sigma \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \left\| \sin \left( \Theta(\Delta_f, \widehat{\Delta_f}) \right) \right\|_F^2 \right] \leq \frac{2n(L+1)^2}{N\sigma_n^2} \Sigma \end{cases} \quad (4.68)$$

qui correspond à (4.62) et (4.63). ■

Il apparaît que la norme de la matrice angulaire entre  $\Gamma_f$  et  $\widehat{\Gamma_f}$  est influencée par  $N$ ,  $L$ , l'ordre  $n$  du système et la valeur singulière  $\sigma_n$ . Rappelons que  $\widehat{\Gamma_f}$  est proche de  $\Gamma_f$  si la norme de cette matrice angulaire est faible. Ainsi, d'après ce résultat, l'estimation de  $\Gamma_f$  sera meilleure si  $L$  est faible (réponse impulsionnelle courte), si  $n$  est faible,  $\sigma_n$  est grand (système fortement contrôlable et observable) et si  $N$  est grand. Il peut être remarqué que nous avons constaté ces mêmes influences de  $n$ ,  $N$  et  $\sigma_n$  sur l'estimation  $\widehat{\Gamma_f}$  dans l'algorithme du chapitre 3, notamment dans le théorème 4 page 61.

### Théorème 10 :

Si les conditions de la section 4.2 sont vérifiées, si  $L \geq L_{max}$  et si  $\hat{n} = n$ , alors il existe  $\Sigma \in \mathbb{R}_+^*$  et deux matrices  $T_\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $Q_\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times (f-n)}$  telles que  $\widehat{\Gamma_f}$  s'écrit

$$\widehat{\Gamma_f} = \Gamma_f T_\Gamma + \Gamma_f^\perp Q_\Gamma \quad (4.69)$$

où  $\Gamma_f^\perp \in \mathbb{R}^{f \times n}$ ,  $T_\Gamma$  et  $Q_\Gamma$  sont tels que

$$\begin{cases} (\Gamma_f^\perp)^T \Gamma_f = 0 \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\|T_\Gamma\|_F^2] \leq n - \frac{2n(L+1)^2}{N\sigma_n^2} \Sigma \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\|Q_\Gamma\|_F^2] \leq \frac{2n(L+1)^2}{N\sigma_n^2} \Sigma \end{cases}. \quad (4.70)$$

■

**Preuve 10 :**

*La preuve de ce théorème suit le même cheminement que la preuve 5 du chapitre 3 (page 63).*

*Avec  $U_{s_1}$  et  $U_{s_2}$  sont tels que*

$$U_{s_1}U_{s_1}^T + U_{s_2}U_{s_2}^T = I_f. \quad (4.71)$$

*En multipliant l'équation ci-dessus par  $\widehat{U}_{s_1}$  à droite, nous avons*

$$\widehat{U}_{s_1} = U_{s_1}U_{s_1}^T\widehat{U}_{s_1} + U_{s_2}U_{s_2}^T\widehat{U}_{s_1}. \quad (4.72)$$

*Du fait que  $\widehat{\Gamma}_f = \widehat{U}_{s_1}$  et  $\Gamma_f = U_{s_1}$ , nous obtenons*

$$\widehat{\Gamma}_f = \Gamma_f T_\Gamma + \Gamma_f^\perp Q_\Gamma \quad (4.73)$$

*avec  $T_\Gamma = U_{s_1}^T \widehat{U}_{s_1}$  et  $Q_\Gamma = U_{s_2}^T$ . A propos de  $T_\Gamma$ , nous avons*

$$T_\Gamma^T T_\Gamma = \widehat{U}_{s_1}^T U_{s_1} U_{s_1}^T \widehat{U}_{s_1}, \quad (4.74)$$

*avec (4.71)*

$$T_\Gamma^T T_\Gamma = I_n - \widehat{U}_{s_1}^T U_{s_2} U_{s_2}^T \widehat{U}_{s_1}. \quad (4.75)$$

*Nous savons que*

$$Tr(T_\Gamma^T T_\Gamma) = Tr(I_n) - Tr(\widehat{U}_{s_1}^T U_{s_2} U_{s_2}^T \widehat{U}_{s_1}), \quad (4.76)$$

*il s'ensuit que*

$$\|T_\Gamma\|_F^2 = \|I_n\|_F^2 - \|U_{s_2}^T \widehat{U}_{s_1}\|_F^2. \quad (4.77)$$

*Comme  $S_1$  et  $\widehat{S}_1$  sont des matrices non-singulières, à partir de  $\|U_{s_2}^T \widehat{U}_{s_1}\|_F^2 = \left\| \sin(\Theta(\Gamma_f, \widehat{\Gamma}_f)) \right\|_F^2$ , nous obtenons*

$$\|T_\Gamma\|_F^2 = \|I_n\|_F^2 - \left\| \sin(\Theta(\Gamma_f, \widehat{\Gamma}_f)) \right\|_F^2. \quad (4.78)$$

*De même, pour  $Q_\Gamma$ , nous avons*

$$\|Q_\Gamma\|_F^2 = \left\| \sin(\Theta(\Gamma_f, \widehat{\Gamma}_f)) \right\|_F^2 \quad (4.79)$$

*ce qui donne (4.70).*

■

### 4.4.3 Analyse de la troisième étape

Dans cette sous-section il nous reste à présenter les résultats d'analyse pour les estimations des matrices  $A$  et  $C$ .

**Théorème 11 :**

Si les conditions de la section 4.2 sont vérifiées, si  $L \geq L_{max}$  et si  $\hat{n} = n$ , alors la matrice d'état  $\hat{C}$  est telle que

$$\hat{C} = CT_{\Gamma} + \Gamma_f^{\perp}(1, :)Q_{\Gamma} \quad (4.80)$$

et il existe  $\beta \in \mathbb{R}_+^*$  tel que la matrice d'état  $\hat{A}$  satisfait

$$\|\hat{A} - T_{\Gamma}^{-1}AT_{\Gamma}\|_F^2 \leq 12 \frac{n}{\beta^2} \mathbf{F}_{\Gamma} \|T_{\Gamma}\|_F^2 \|Q_{\Gamma}\|_F^2 \quad (4.81)$$

avec  $\mathbf{F}_{\Gamma}$  tel que

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\Gamma} = & \left( \|\Gamma_f^{+T} \Gamma_f^{\perp-}\|_F^2 + \|\Gamma_f^{\perp+T} \Gamma_f^-\|_F^2 + \|\Gamma_f^{\perp+T} \Gamma_f^{\perp-}\|_F^2 \right. \\ & \left. + \|T_{\Gamma}^{-1}AT_{\Gamma}\|_F^2 \left( \|\Gamma_f^{+T} \Gamma_f^{\perp+}\|_F^2 + \|\Gamma_f^{\perp+T} \Gamma_f^+\|_F^2 + \|\Gamma_f^{\perp+T} \Gamma_f^{\perp+}\|_F^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (4.82)$$

■

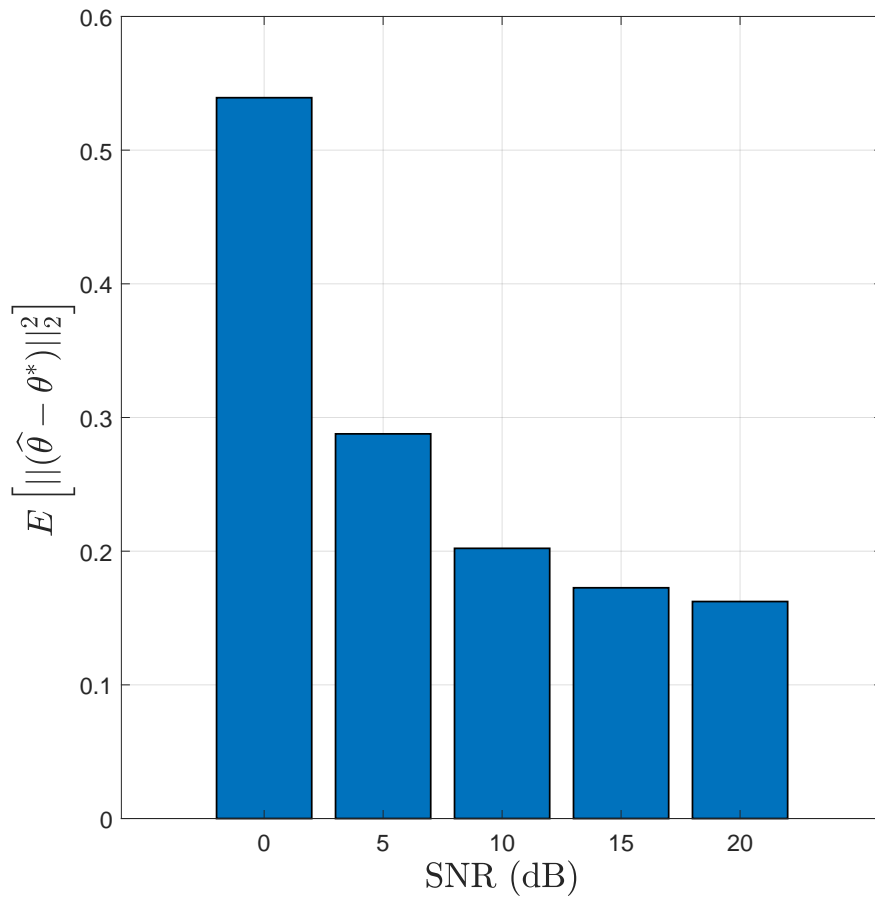
**Preuve 11 :**

La preuve de ce théorème est semblable à la preuve 6 dans le chapitre 3 page 65.

■

## 4.5 Simulations Numériques

Dans cette section, des simulations numériques sont effectuées pour montrer l'efficacité de l'algorithme proposé et confirmer l'analyse de convergence présentée dans la section 4.4. Nous utilisons le même exemple que celui présenté dans le chapitre 3 à savoir



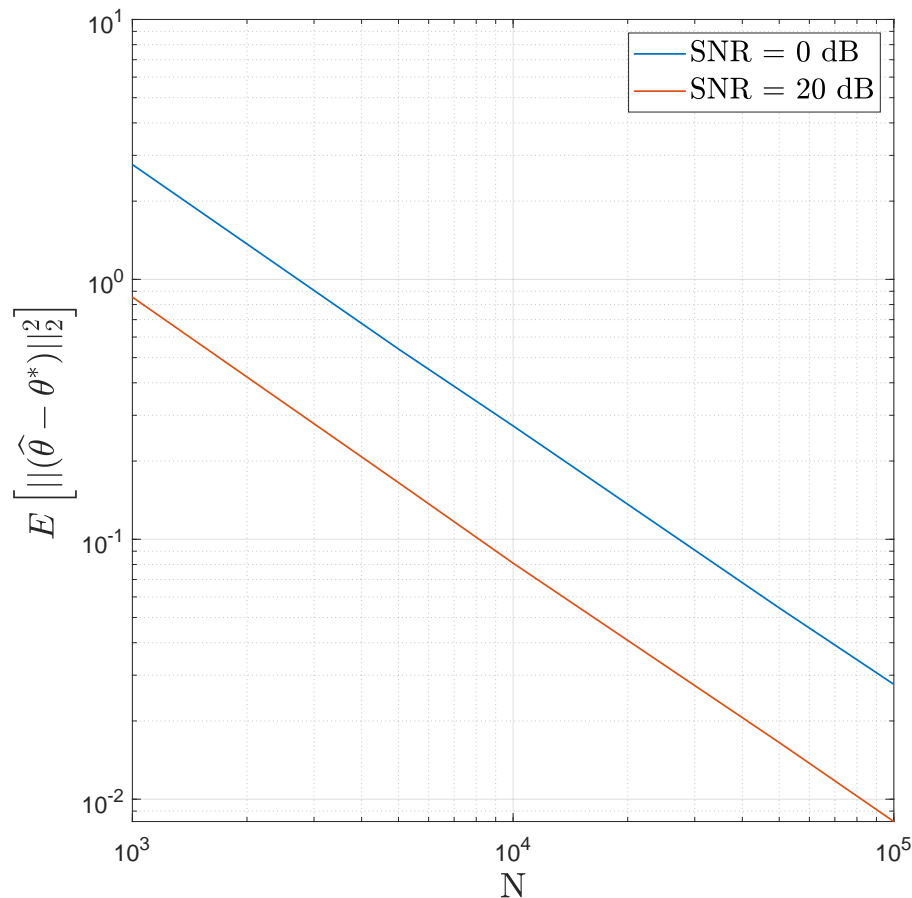
**Figure 4.3 :**  $\mathbb{E} [\|\hat{\theta} - \theta^*\|_2^2]$  en fonction du SNR avec  $N = 5000$  et  $L = 50$ .

un système d'ordre 4 dont les matrices d'état sont

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 0.603 & 0.603 & 0 & 0 \\ -0.603 & 0.603 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.603 & -0.603 \\ 0 & 0 & 0.603 & -0.603 \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} 0.9238 \\ 2.7577 \\ 4.3171 \\ -2.6436 \end{pmatrix} \\
 C &= \begin{pmatrix} -0.5749 & 1.0751 & -0.5225 & 0.1830 \end{pmatrix} & D &= -0.7139
 \end{aligned} \tag{4.83}$$

Dans cet exemple, nous supposons que le gain statique du système est connu (hypothèse **H.3**).

Dans la suite l'entrée  $\{u_t\}$  est un bruit gaussien coloré de moyenne nulle conformément à l'hypothèse **H.1**. Le bruit  $\{v_t\}$  est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle non



**Figure 4.4 :**  $\mathbb{E} \left[ \|\hat{\theta} - \theta^*\|_2^2 \right]$  en fonction de  $N$  avec  $SNR = 0dB$  et  $20dB$  et  $L = 50$ .

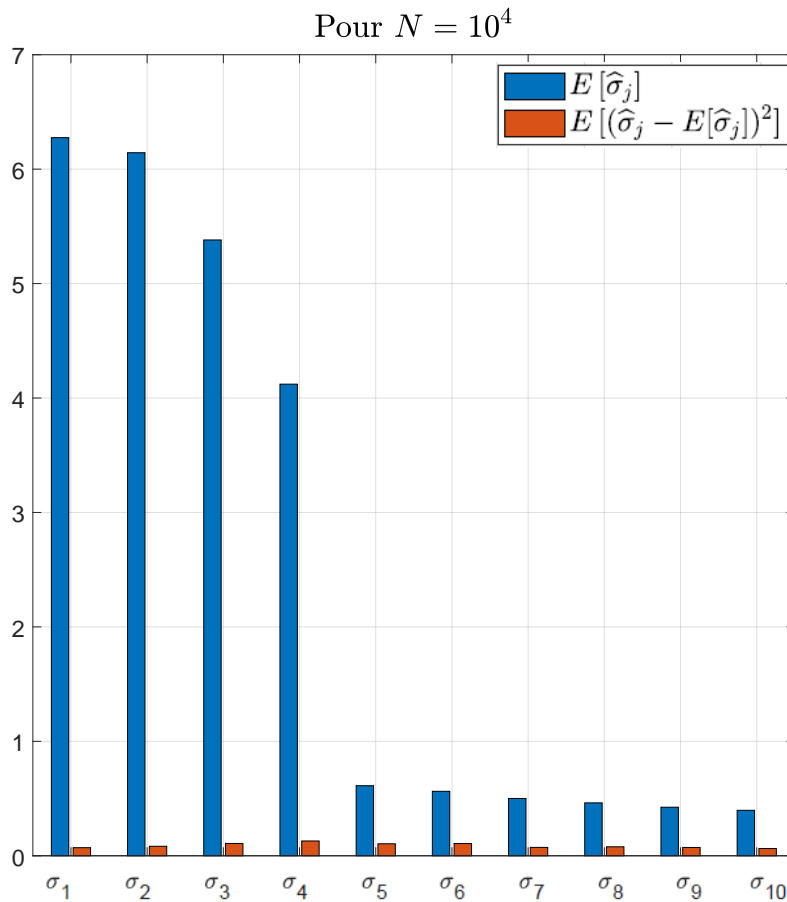
corrélé avec  $\{u_t\}$  (hypothèse **H.2**). Le seuil est  $c = 1$ . A noter que pour le système décrit ci-dessus, les termes de la réponse impulsionnelle sont négligeables au delà du 50<sup>ème</sup> terme, nous avons donc  $L_{max} = 50$ .

### 4.5.1 Résultats de l’étape 1

Dans cette étape nous procédons à une estimation de la réponse impulsionnelle et nous examinons plus particulièrement l’impact du niveau de bruit et l’impact du nombre d’échantillons pour  $L = 50$ .

- Influence du niveau de bruit : dans cette expérience, nous étudions l’effet du bruit sur les estimations. Une simulation de Monte Carlo est réalisée avec 100 d’exécutions pour plusieurs valeurs du SNR (de 0dB à 20dB avec un pas de 5dB) et avec  $N = 5000$  données disponibles.

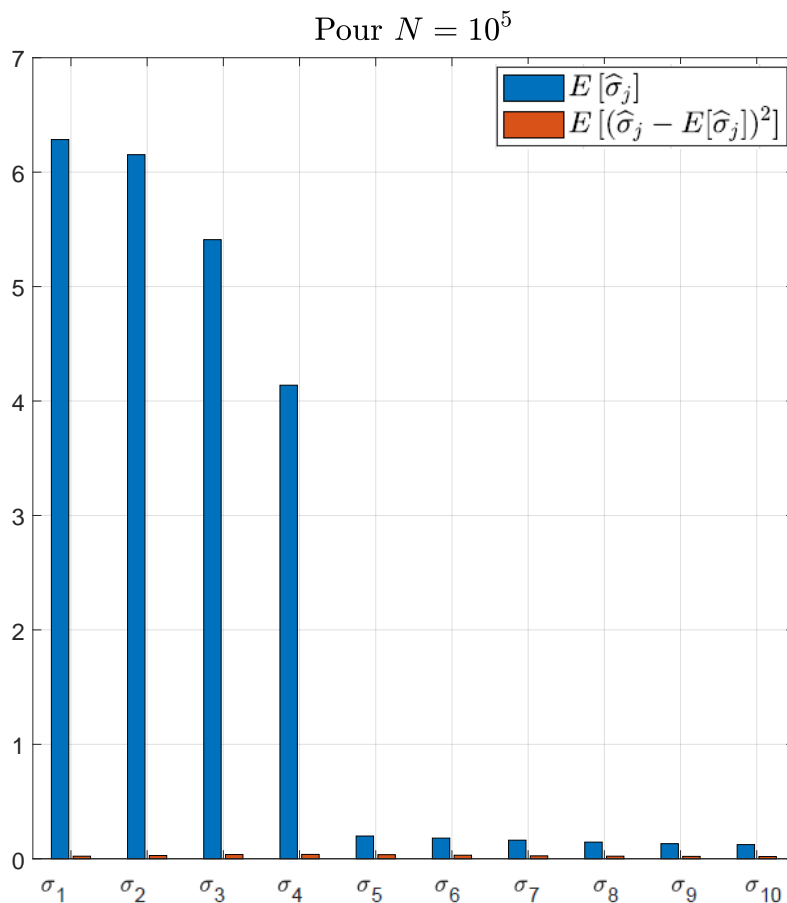




**Figure 4.5 :** moyenne et variance de chaque valeur singulière estimée avec  $N = 10^4$  échantillons,  $SNR = 0dB$  et  $L = 50$ .

L'erreur quadratique moyenne  $\mathbb{E} \left[ \|\hat{\theta} - \theta^*\|_2^2 \right]$  est représentée sur la figure 4.3 en fonction du SNR. Nous remarquons que plus le SNR est élevé, plus l'estimation est précise.

- Influence de  $N$  : dans une seconde expérience nous confirmons l'analyse de la sous-section 4.4.1. Une simulation de Monte Carlo est réalisée avec 100 exécutions avec plusieurs  $N$  (de  $10^3$  à  $10^5$ ) et avec  $SNR = 0dB$  et  $SNR = 20dB$ . La figure 4.4 représente la variation de  $\mathbb{E} \left[ \|\hat{\theta} - \theta^*\|_2^2 \right]$  en échelle logarithmique en fonction de  $N$ . Nous remarquons que ces résultats confirment la conclusion précédente concernant l'impact du bruit. De plus il apparaît que  $\mathbb{E} \left[ \|\hat{\theta} - \theta^*\|_2^2 \right]$  décroît en  $N^{-1}$  ce qui confirme (4.42).

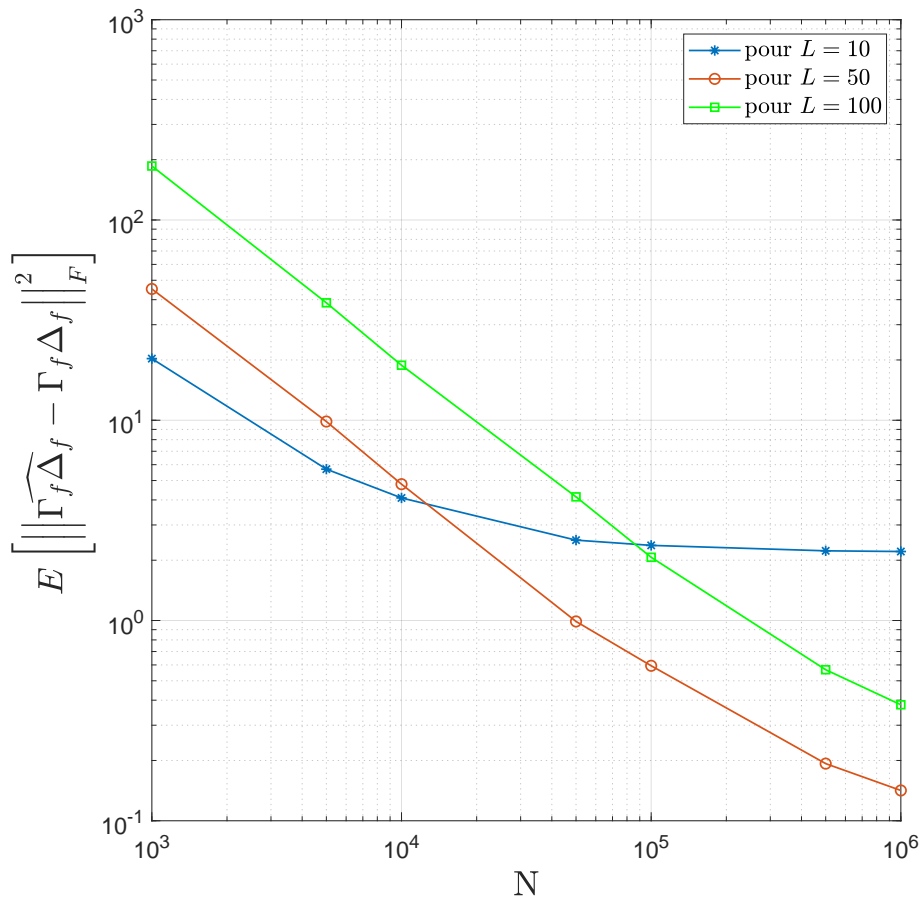


**Figure 4.6 :** moyenne et variance de chaque valeur singulière estimée avec  $N = 10^5$  échantillons,  $SNR = 0dB$  et  $L = 50$ .

## 4.5.2 Résultats de l'étape 2

Dans l'étape 2, nous estimons la matrice  $\Gamma_f \Delta_f$ , l'ordre  $n$  et la matrice d'observabilité étendue  $\Gamma_f$ , ainsi trois expériences sont rapportées.

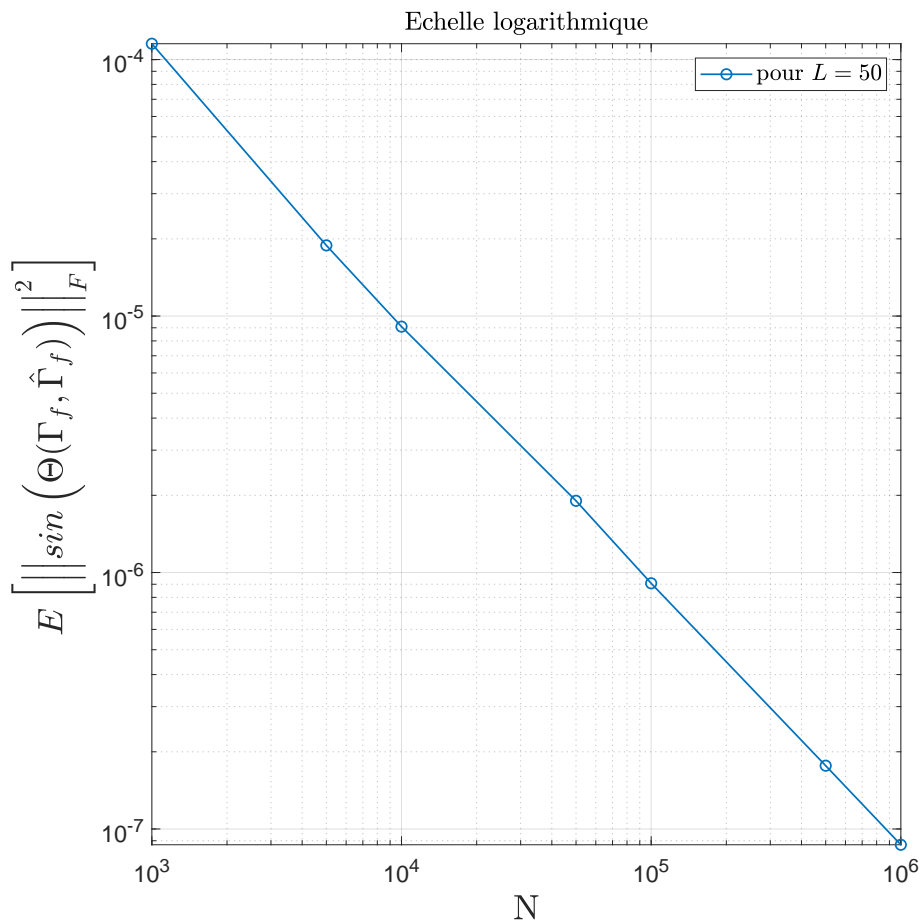
- Estimation de l'ordre : une simulation de Monte Carlo est effectuée avec 100 exécutions avec  $SNR = 0dB$  et  $L = 50$ . La figure 4.5 et la figure 4.6 montrent les estimations des valeurs singulières obtenues avec  $N = 10^4$  et avec  $N = 10^5$  échantillons respectivement. Ces figures illustrent la variation de  $\mathbb{E}(\hat{\sigma}_j)$  et  $\mathbb{E}[(\hat{\sigma}_j - \mathbb{E}[\hat{\sigma}_j])^2]$  de chaque valeur singulière estimée. Il apparaît ici que le nombre de valeurs singulières dominantes représentant l'ordre estimé est 4 ce qui est égal à l'ordre  $n$ . De plus, l'écart type des valeurs singulières dans la figure 4.6 (lorsque  $N = 10^5$ ) est plus petit que celui de la figure 4.5 (lorsque  $N = 10^4$ ). Cela



**Figure 4.7 :** diagramme logarithmique de  $\mathbb{E} \left[ \left\| \widehat{\Gamma_f \Delta_f} - \Gamma_f \Delta_f \right\|_F^2 \right]$  en fonction de  $N$  pour différentes longueurs  $L = 10, 50$  et  $100$  avec  $SNR = 0dB$ .

signifie que plus le nombre d'échantillons est grand, plus l'estimation des valeurs singulières est précise.

- Estimation de la matrice  $\Gamma_f \Delta_f$  : une simulation de Monte Carlo est réalisée avec 100 exécutions pour trois valeurs différentes de  $L$  :  $L = 10, L = 50$  et  $L = 200$  et pour un  $SNR = 0dB$  et  $N = 5000$ . La variation de  $\mathbb{E} \left[ \left\| \widehat{\Gamma_f \Delta_f} - \Gamma_f \Delta_f \right\|_F^2 \right]$  pour chaque valeur de  $L$  est illustrée dans la figure 4.7. Pour  $L = 50$  et  $L = 200$ ,  $\mathbb{E} \left[ \left\| \frac{\widehat{\Gamma_f \Delta_f} - \Gamma_f \Delta_f}{(L+1)} \right\|_F^2 \right]$  est décroissant en  $N^{-1}$ , ceci confirme la conclusion du théorème 8. Pour  $L = 10$ , la condition  $L \geq L_{max}$  n'est pas respectée, la décroissance de  $\mathbb{E} \left[ \left\| \widehat{\Gamma_f \Delta_f} - \Gamma_f \Delta_f \right\|_F^2 \right]$  en  $N^{-1}$  est ainsi tronquée du fait de la



**Figure 4.8 :** diagramme logarithmique de  $\mathbb{E} \left[ \left\| \sin \left( \Theta(\Gamma_f, \hat{\Gamma}_f) \right) \right\|_F^2 \right]$  en fonction de  $N$  pour  $L = 50$  avec  $SNR = 0dB$ .

présence d’un biais d’estimation.

- Estimation de  $\Gamma_f$  : nous nous concentrons plus particulièrement ici sur la matrice angulaire  $\Theta(\Gamma_f, \hat{\Gamma}_f)$  afin d’examiner l’estimation de  $\Gamma_f$ . Une simulation de Monte Carlo est réalisée avec 100 exécutions avec  $N$  allant de  $10^3$  à  $10^6$  pour  $L = 50$ . La figure 4.8 présente  $\mathbb{E} \left[ \left\| \sin \left( \Theta(\Gamma_f, \hat{\Gamma}_f) \right) \right\|_F^2 \right]$  en fonction de  $N$ . Cette figure confirme le résultat du théorème 9 et le taux de convergence.

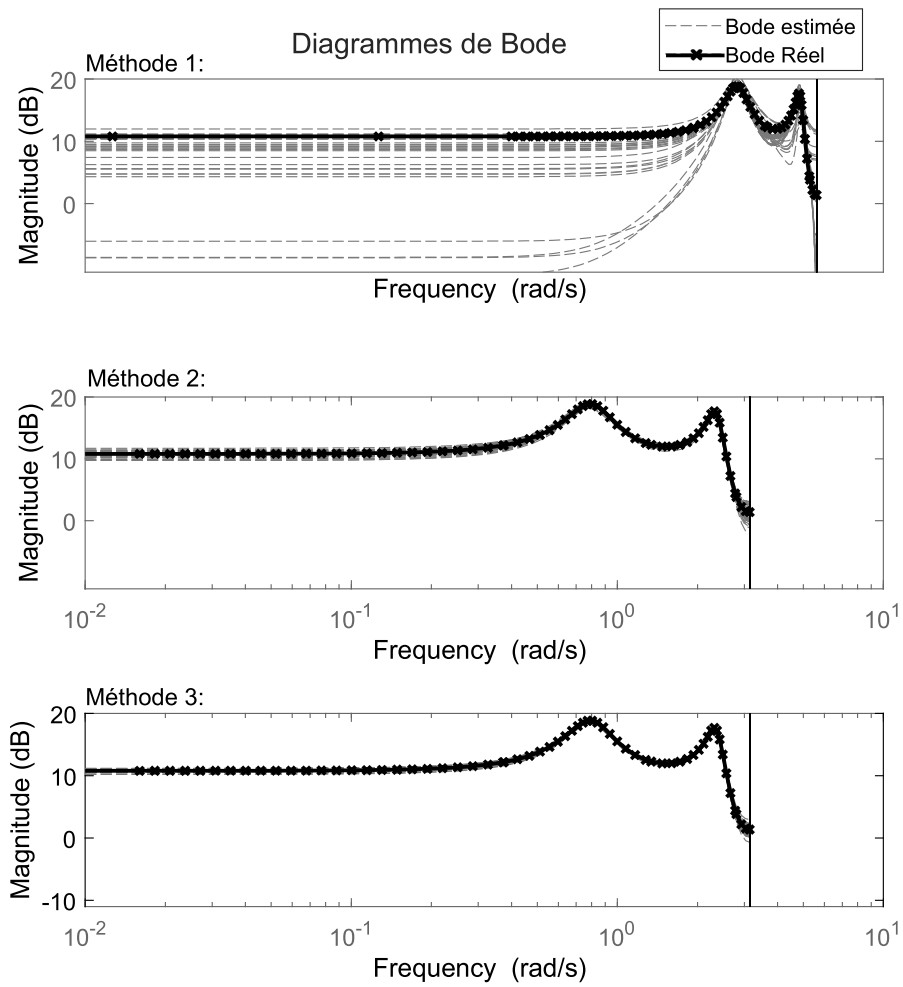
### 4.5.3 Résultats de l'étape 3

Dans cette dernière étape, nous estimons les matrices d'état et nous utilisons le diagramme de Bode et la carte de pôle pour qualifier la qualité des modèles estimés. Une simulation de Monte Carlo est effectuée avec 100 exécutions avec  $SNR = 0dB$ ,  $N = 10^4$  échantillons et  $L = 50$ . Le diagramme de Bode de la magnitude réelle et les pôles du système et leurs centaines d'estimations sont représentés sur les figures 4.9 et 4.10. Dans la figure 4.9 nous présentons les résultats obtenus avec les trois variantes pour l'estimation de  $B$  et  $D$ . A partir de ces résultats nous pouvons constater que les meilleures estimations sont celles obtenues avec la variante 3. Les résultats des figures 4.9 et 4.10 confirment la qualité dans l'estimation des matrices d'état et finalement l'efficacité de notre algorithme.

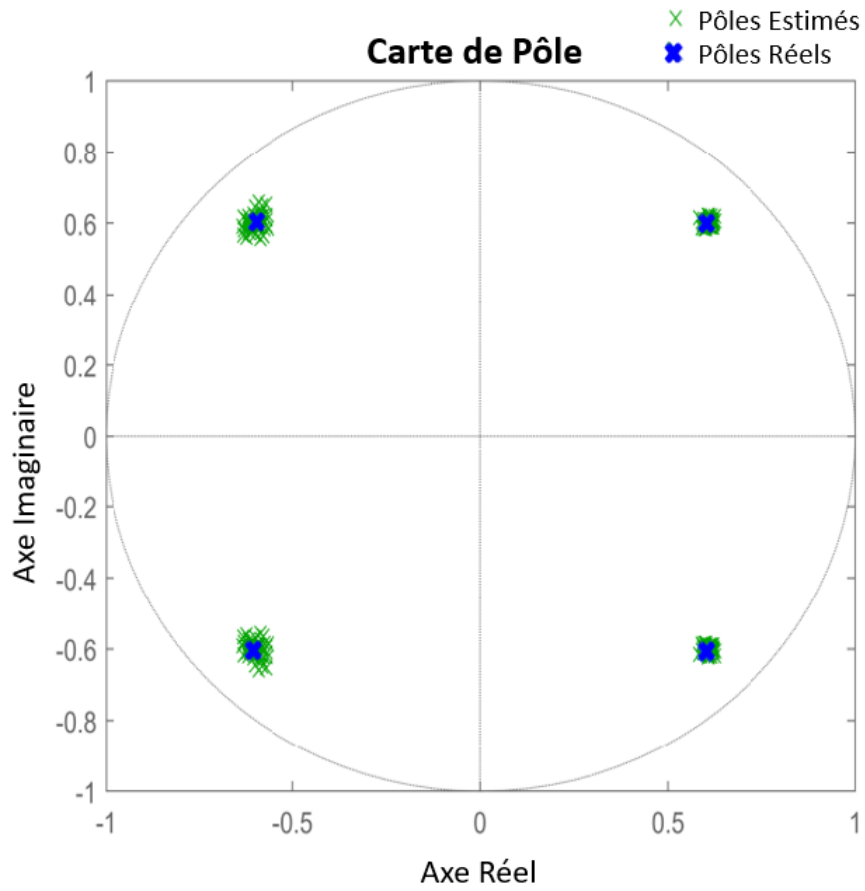
## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un algorithme en trois étapes, basé sur l'estimation de la réponse impulsionnelle et sur les sous-espaces pour identifier les systèmes à sortie binaire. Cet algorithme d'identification offre une approche alternative et efficace par rapport à l'algorithme du chapitre précédent en éliminant la nécessité de connaître préalablement la fonction de distribution du bruit et la nécessité de la périodicité de l'entrée. Les résultats obtenus à travers les analyses et les simulations démontrent la pertinence de l'algorithme proposé, une partie de ces travaux a été publié dans [Mes+23a].

En dépit des bonnes performances de l'algorithme présenté ici, il convient de noter que sa mise en œuvre requiert une hypothèse forte sur la longueur de la réponse impulsionnelle, hypothèse pouvant mener à l'estimation d'un nombre important de paramètres si cette réponse impulsionnelle est longue. Nous proposons donc dans le chapitre suivant un algorithme permettant de contourner cette difficulté.



**Figure 4.9 :** diagramme de Bode du vrai système et de ses estimations avec  $N = 10^4$ ,  $SNR = 0dB$  et  $L = 50$ .



**Figure 4.10** : carte des pôles du système et de ses estimations, avec  $N = 10^4$ ,  $SNR = 0dB$  et  $L = 50$ .





# 5

## Identification d'une réalisation d'état à partir d'une estimation de la sortie

### Sommaire

---

5.1	Introduction . . . . .	112
5.2	Problématique et hypothèses . . . . .	113
5.3	Algorithmes d'identification . . . . .	113
5.3.1	Estimation de la sortie via la réponse impulsionnelle . .	114
5.3.2	Estimation de la sortie via la reconstruction de l'état . .	115
5.3.3	Commentaires et interprétations . . . . .	117
5.4	Simulation numérique . . . . .	120
5.4.1	Résultat de l'Algorithme 1 . . . . .	120
5.4.2	Résultats de l'Algorithme 2 . . . . .	122
5.4.3	Troisième expérience : impact du bruit . . . . .	124
5.5	Application des algorithmes proposés sur un exemple réel . . .	124
5.5.1	Présentation du dispositif et de la problématique d'identification	125
5.5.2	Procédure et résultats d'identification . . . . .	128
5.6	Conclusion . . . . .	131

---

## 5.1 Introduction

Ce chapitre présente deux méthodes d'identification supplémentaires basées sur les sous-espaces pour les systèmes à sortie binaire. Un des objectifs ici est de contourner une des difficultés de l'algorithme du chapitre précédent, plus précisément la nécessité d'estimer un grand nombre de paramètres si la réponse impulsionnelle du système est longue.

Comme point de départ, le premier algorithme proposé dans ce chapitre est dans l'esprit de ce qui a été proposé dans le chapitre précédent, à savoir produire une estimation de la réponse impulsionnelle pour ensuite estimer la sortie non quantifiée. Cette sortie estimée est ensuite utilisée pour l'estimation d'un modèle d'état. Il a été vu dans le chapitre précédent que cette stratégie pose un problème si la réponse impulsionnelle est longue. Afin de palier ce défaut, le second algorithme propose d'estimer la sortie non quantifiée à partir d'une reconstruction de l'état, ceci via une procédure itérative. Ce second algorithme devrait être moins pénalisé par la longueur de la réponse impulsionnelle.

Ce chapitre commence donc par la présentation du problème et des hypothèses dans la section 5.2. Ensuite, les deux algorithmes d'identification sont présentés et commentés dans la section 5.3. Pour évaluer et comparer ces deux algorithmes, une simulation numérique est fournie dans la section 5.4. Par la suite, ces deux algorithmes, ainsi que celui du chapitre précédent, sont mis en œuvre sur des données réelles, les résultats sont présentés dans la section 5.5.

## 5.2 Problématique et hypothèses

Nous considérons de nouveau le système LTI déjà décrit auparavant dans les chapitres 3 et 4.

$$\begin{cases} x_{t+1} &= Ax_t + Bu_t \\ y_t^v &= Cx_t + Du_t + v_t \end{cases} \quad (5.1)$$

En termes de signaux disponibles pour l'estimation du modèle nous nous plaçons aussi dans le même cadre que précédemment, c'est à dire que les échantillons du signal d'entrée sont disponibles, en revanche la sortie est mesurée via un capteur binaire  $\mathbf{Q}_c(\cdot)$ . La sortie quantifiée disponible est

$$s_t = 2\mathbf{Q}_c(y_t^v) - 1. \quad (5.2)$$

L'objectif est d'estimer  $n$  et une réalisation d'état  $\{A, B, C, D\}$  étant donné  $\{u_t, s_t\}_{t=1}^N$  où  $N$  est le nombre de données disponibles.

Nous considérons les quelques premières hypothèses suivantes tout au long de ce chapitre

- **H.1** : l'entrée  $\{u_t\}$  est une séquence d'excitation persistante ([Lju99]).
- **H.2** :  $\{v_t\}$  est une séquence de moyenne nulle de variables aléatoires stationnaires non corrélées avec l'entrée.
- **H.3** : le système est strictement stable et d'ordre minimal  $n$ .

Certaines hypothèses complémentaires pourront s'avérer nécessaires par la suite, ceci est discuté dans la sous-section 5.3.3.

## 5.3 Algorithmes d'identification

Dans cette section, nous présentons les deux algorithmes proposés. Sur le principe, les deux algorithmes estiment la sortie non bruitée  $y_t$  dans un premier temps et dans un second temps estiment les matrices d'état en utilisant les méthodes usuelles basées sur les sous-espaces telles que celles présentées

dans le chapitre 2. L'étape clé apparaît bien entendu l'estimation de la sortie non bruitée.

### 5.3.1 Estimation de la sortie via la réponse impulsionnelle

Pour ce qui est du premier algorithme présenté dans ce chapitre, rappelons tout d'abord que la sortie bruitée  $y_t^v$  peut être exprimée comme suit :

$$y_t^v = Du_t + CBu_{t-1} + \dots + CA^{L-1}Bu_{t-L} + CA^Lx_{t-L} + v_t \quad (5.3)$$

où  $L$  est un paramètre défini par l'utilisateur. Comme nous sommes ici dans le cas d'un système avec une entrée et une sortie, ceci donne

$$y_t^v = \phi_t^T \theta^* + CA^Lx_{t-L} + v_t \quad (5.4)$$

$$\text{avec } \theta^* = \begin{pmatrix} D \\ CB \\ \vdots \\ CA^{L-1}B \end{pmatrix} \text{ et } \phi_t = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{t-1} \\ \vdots \\ u_{t-L} \end{pmatrix}.$$

Le système est supposé stable (hypothèse **H.3**) et par conséquent pour  $L \gg 1$  on a considéré que

$$y_t^v = \phi_t^T \theta^* + v_t. \quad (5.5)$$

Cette approximation a déjà été vue dans le paragraphe 4.3.1.1 du chapitre 4. Avec cette forme de régression (5.5), le système est modélisé par un filtre FIR d'ordre élevé. L'intérêt de cette forme de modèle réside dans le fait que son vecteur de régression  $\phi_t$  est connu. L'idée principale est d'estimer le vecteur de grande dimension  $\theta^*$  afin d'avoir accès ensuite à une approximation de  $y_t$ .

Comme les données disponibles sont les entrées et la mesure de la sortie binaire, le vecteur  $\theta^*$  peut être estimé à l'aide d'un algorithme d'identification spécifiquement conçu pour les mesures binaires et adapté à la forme de régression linéaire (5.5). Plusieurs solutions ont été vues dans le chapitre 2, une solution complémentaire a été proposée dans le chapitre 4, il en sera question dans la sous-section 5.3.3.

Une fois la sortie estimée, l’identification d’une réalisation de l’état devient un problème d’identification d’un système à partir de données d’entrée/sortie connues. Par conséquent, nous pouvons utiliser l’un des algorithmes d’identification appropriés pour estimer les matrices d’état. C’est sur ce dernier point que l’algorithme proposé ici diffère de celui proposé au chapitre 3. Nous ne cherchons pas à extraire les matrices d’états à partir d’une estimation de  $\theta^*$ , nous cherchons à calculer une estimation  $\hat{y}_t$  qui servira ensuite au sein d’une méthode des sous-espaces standard.

Cet algorithme d’identification est résumé dans le tableau 5.1 et le bloc diagramme 5.1 ci-dessous.

---



---

### Algorithme 1

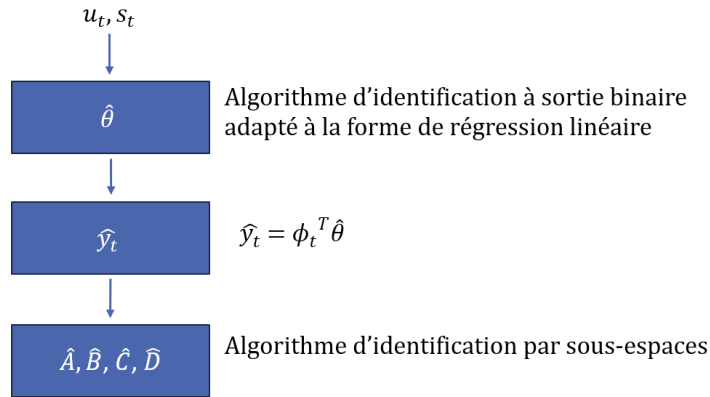
---

1. **Étape 1 :**
    - 1.1 Choisir  $L \gg 1$  et construire  $\phi_t$ .
    - 1.2 À partir de  $\{\phi_t, s_t\}_{t \in [1;N]}$ , estimer  $\theta^*$  en utilisant l’un des algorithmes d’identification adapté à la forme de régression linéaire (5.5).
    - 1.3 Calculer  $\hat{y}_t = \phi_t^T \hat{\theta}$ .
  2. **Étape 2 :**
    - 2.1 À partir de  $\{u_t, \hat{y}_t\}_{t \in [1;N]}$ , estimer une réalisation  $\{A, B, C, D\}$  en utilisant l’un des algorithmes d’identification par sous-espaces de la littérature.
- 
- 

**Table 5.1 :** Algorithme 1 pour l’estimation de  $\{A, B, C, D\}$ .

### 5.3.2 Estimation de la sortie via la reconstruction de l’état

Le principal inconvénient de l’algorithme de la sous-section précédente est le fait que, pour avoir une erreur de troncature négligeable ( $CA^L x_{t-L} = 0$ ),  $L$  doit être choisi égal ou supérieur à la longueur de la réponse impulsionnelle. Dans un tel cas, le nombre de données disponibles doit également être suffisamment important pour minimiser la variance de l’estimation. Afin de contourner cette



**Figure 5.1** : bloc diagramme de l'Algorithme 1 pour l'estimation de  $\{A, B, C, D\}$ .

difficulté, il peut être remarqué que  $y_t^v$  se réécrit comme suit

$$y_t^v = \bar{\phi}_t^T \bar{\theta} + v_t \quad (5.6)$$

avec  $\bar{\theta} = \begin{pmatrix} \theta^* \\ CA^L \end{pmatrix}$  and  $\bar{\phi}_t = \begin{pmatrix} \phi_t \\ x_{t-L} \end{pmatrix}$ .

Ici encore, nous avons une forme de régression, mais ce qui distingue le vecteur de régression dans (5.6) du vecteur de régression dans (5.5) est la présence du vecteur d'état  $x_{t-L}$ . Ceci présente deux avantages principaux : premièrement, il s'agit d'une égalité dans (5.6) au lieu d'une approximation dans (5.5) ; deuxièmement, (5.6) n'est plus un modèle FIR d'ordre élevé, ce qui signifie que  $L$  peut être choisi plus petit que dans l'Algorithme 1. Le principal inconvénient de la forme (5.6) réside dans le fait que  $x_{t-L} = (qI_n - A)^{-1}Bu_{t-L}$  est inconnu, ce qui rend l'estimation de  $\bar{\theta}^*$  impossible directement.

Le deuxième algorithme proposé ici est donc itératif et utilise la forme de régression linéaire (5.6). Le processus itératif vise à construire le vecteur d'état  $x_{t-L}$  dans  $\bar{\phi}_t$ . Cet algorithme d'identification itératif est résumé dans le tableau 5.2 et le bloc diagramme 5.2 ci-dessous. Notons que le nombre maximum d'itérations dans cet algorithme peut être choisi a priori ou il peut être arrêté sur un critère de convergence.

---



---

## Algorithme 2

---

### Étape d'initialisation

- 0.1 Choisir  $L$  et construire  $\phi_t$ .
- 0.2 A partir de  $\{\phi_t, s_t\}_{t \in [1;N]}$ , estimer  $\theta^*$  à l'aide de l'un des algorithmes d'identification adapté à la forme de régression linéaire (5.5).
- 0.3 Calculer  $\hat{y}_t = \phi_t^T \hat{\theta}$ .
- 0.4 À partir de  $\{u_t, \hat{y}_t\}_{t \in [1;N]}$ , estimer une réalisation  $\{A, B, C, D\}$  à l'aide de l'un des algorithmes d'identification de sous-espaces de la littérature.

### Étapes itératives

#### 1. Étape 1 :

- 1.1 À partir des estimations précédentes  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  et  $\hat{D}$ , calculer  $\hat{x}_t$ .
- 1.2 Construire  $\hat{\phi}_t = \begin{pmatrix} \phi_t \\ \hat{x}_{t-L} \end{pmatrix}$ .
- 1.3 A partir de  $\{\hat{\phi}_t, s_t\}_{t \in [1;N]}$ , estimer  $\bar{\theta}$  en utilisant l'un des algorithmes d'identification adaptés à la forme de régression linéaire (5.6).
- 1.4 Calculer  $\hat{y}_t = \hat{\phi}_t^T \bar{\theta}$ .

#### 2. Étape 2 :

- 2.1 À partir de  $\{u_t, \hat{y}_t\}_{t \in [1;N]}$ , estimer une réalisation  $\{A, B, C, D\}$  à l'aide de l'un des algorithmes d'identification par sous-espaces de la littérature.
- 

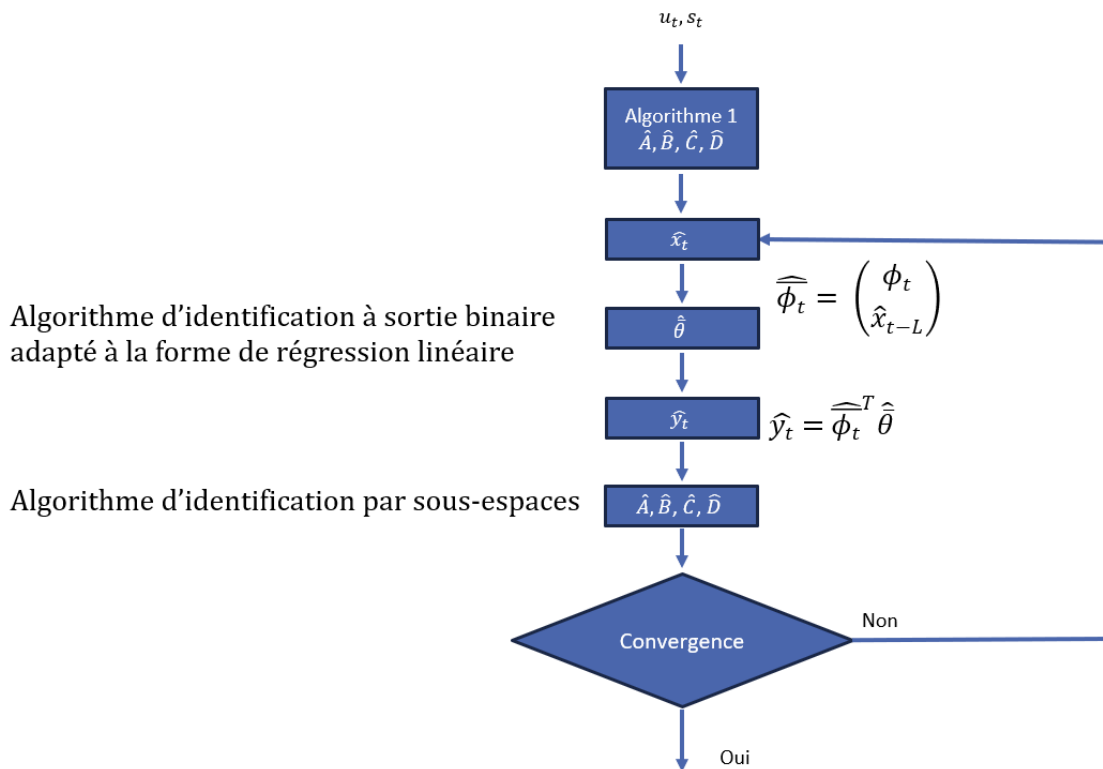
**Table 5.2 :** Algorithme 2 pour l'estimation de  $\{A, B, C, D\}$ .

### 5.3.3 Commentaires et interprétations

La mise en œuvre des deux algorithmes proposés implique quelques choix techniques comme le choix de  $L$ , le choix de l'algorithme pour le calcul du vecteur de paramètres et le choix de l'algorithme pour le calcul des matrices d'état.

Le choix de  $L$  peut être relativement délicat, il conditionne en effet la part d'information modélisé via la vecteur de régression.

- Dans le cas du premier algorithme, il s'agit simplement de prendre  $L$  suffisamment grand pour ne pas tronquer trop fortement la réponse impulsionnelle.
- Dans le cas du second algorithme, si  $L$  est trop petit alors la partie manquante de la réponse impulsionnelle doit être modélisée par  $\hat{x}_{t-L}$  ce qui fragilise la procédure itérative. Si  $L$  est trop grand, alors le nombre de paramètres est plus grand d'où une variance d'estimation plus grande (voir



**Figure 5.2** : bloc diagramme de l’Algorithme 2 pour l’estimation de  $\{A, B, C, D\}$ .

théorème 7 du chapitre 4 page 93). Une possibilité dans la mise en œuvre peut être de prendre un  $L$  grand pour les premières itérations quitte à réduire ce paramètre ensuite en fonction de l’ordre du modèle.

Le choix de  $L$  est illustré dans la section 5.4 via quelques simulations numériques.

Du fait que la pierre angulaire des deux solutions précédentes est l’estimation de  $y_t$ , nous ne discuterons pas du choix de l’algorithme pour l’estimation de  $\{A, B, C, D\}$ . Cet algorithme peut être un des algorithmes des sous-espaces cités dans l’état de l’art dans le chapitre 2. De tels algorithmes ont des propriétés de consistance convenables, ils ont aussi l’avantage de permettre l’estimation de l’ordre du système et d’être déjà disponibles sur différents logiciels de calcul numérique.

Concernant le choix de l’algorithme d’estimation de  $y_t$ , nous avons besoin d’un algorithme dédié à une forme de régression telle que (5.5) ou (5.6). Deux aspects principaux doivent guider notre choix : le contenu du vecteur de régression et



la connaissance de la séquence de bruit. A ce titre nous rappelons ci-dessous quelques éléments décrits dans le chapitre 2, éléments qui doivent mener au choix de l’algorithme le plus pertinent.

- Concernant la séquence de bruit, certains algorithmes sont développés dans un cadre strict, par exemple les algorithmes proposés dans [WZY+03], [Wan+08], [CZL12] et [GZ13] qui utilisent explicitement la fonction de distribution du bruit. Dans [Son18], la séquence de bruit est un bruit gaussien coloré de moyenne nulle, dans [CJ09] la séquence de bruit est un bruit blanc gaussien, dans [LW12] le bruit est blanc uniforme de moyenne nulle et dans [Mes+23a] le bruit est une séquence de moyenne nulle de variables aléatoires stationnaires. D’autres algorithmes sont développés dans le cas sans bruit ([JJR12] et [Gou+15] notamment).
- Concernant la séquence d’entrée, il peut y avoir aussi des restrictions. Dans [WZY+03], [Wan+08] et [MWY14] la séquence d’entrée doit être périodique, dans [CJ09] la séquence d’entrée est un bruit gaussien de moyenne nulle, dans [JJR12] c’est une séquence i.i.d. de moyenne nulle de variables aléatoires. Dans [Son18] il faut un bruit blanc gaussien et dans [Mes+23a] l’entrée est un bruit gaussien coloré.

En tenant compte de ces différents éléments et eu égard au problème posé dans ce chapitre, certaines solutions de la littérature n’apparaissent pas pertinentes. Nous suggérons dans la suite l’utilisation d’une variante de l’algorithme proposé dans [Mes+23a] et que nous avons décrit dans la sous-section 4.3.1 du chapitre 4. Dans cette variante, le vecteur de régression ne serait pas constitué uniquement d’échantillons du signal d’entrée mais aussi de composantes de l’état. Cet algorithme a l’avantage d’être simple dans sa mise en œuvre via la SVD proposée dans le paragraphe 4.3.1.3, par ailleurs il ne nécessite pas non plus des conditions trop contraignantes tant sur la nature de l’entrée que sur la séquence de bruit. De part ce choix, citons ici des hypothèses supplémentaires, nécessaires à la mise en œuvre de l’algorithme de [Mes+23a] :

- **H.4** :  $\{u_t\}$  est une séquence de moyenne nulle, stationnaire avec une distribution gaussienne.
- **H.5** : le gain statique du système  $G = D + \sum_{j=1}^{\infty} CA^{j-1}B$  est connu et non nul.

## 5.4 Simulation numérique

Dans cette section, nous rapportons des résultats de simulation sur un exemple numérique afin de comparer les algorithmes des tableaux 5.1 et 5.2 et vérifier leurs performances. Nous considérons ici l'exemple des chapitres 3 et 4, exemple caractérisé par les matrices d'état suivantes:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0.603 & 0.603 & 0 & 0 \\ -0.603 & 0.603 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.603 & -0.603 \\ 0 & 0 & 0.603 & -0.603 \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} 0.9238 \\ 2.7577 \\ 4.3171 \\ -2.6436 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} -0.5749 & 1.0751 & -0.5225 & 0.1830 \end{pmatrix} & D &= -0.7139 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Plusieurs expériences sont présentées ci-dessous. Pour chaque expérience, la séquence d'entrée  $\{u_t\}$  est un bruit blanc gaussien de variance unitaire.  $\{v_t\}$  est une séquence de bruit gaussien.

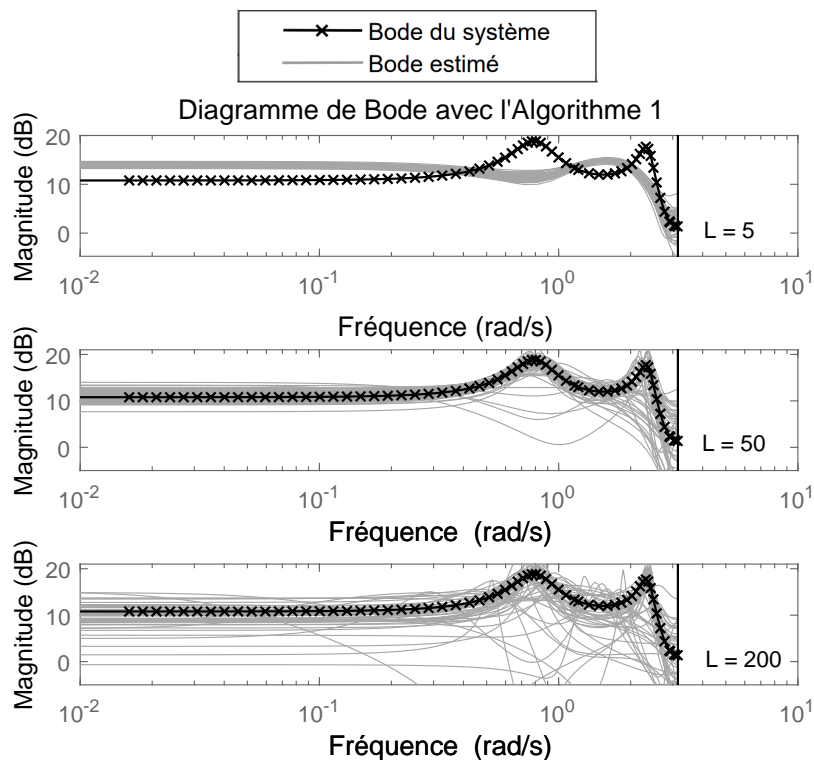
Concernant le choix de l'algorithme pour l'estimation de  $y_t$  (à la fois dans l'Algorithme 1 et l'Algorithme 2), nous utilisons l'algorithme proposé dans [Mes+23a] (voir aussi sous-section 4.3.1 - chapitre 4).

Concernant l'estimation de l'ordre et l'estimation des matrices d'état (étape 1.4 dans le tableau 5.1, étapes 0.4 et 2.1 dans le tableau 5.2) nous choisissons la commande "`ssest(.)`" sur MATLAB. Cette commande utilise différentes méthodes, paramétrables via des options, pour identifier une réalisation d'état du système à partir de données expérimentales.

### 5.4.1 Résultat de l'Algorithme 1

Dans cette première expérience, nous nous concentrons sur l'Algorithme 1. Dans un premier temps nous choisissons  $N = 500$  et  $SNR = 20dB$ . Trois expériences de Monte-Carlo sont réalisées avec 100 exécutions et avec différentes valeurs de  $L$  (5, 50 et 200). Nous faisons remarquer ici que la longueur de la réponse impulsionnelle complète du système est de l'ordre de 50.

Ici, nous comparons le diagramme de Bode du système et ses estimations avec l'Algorithme 1. Les résultats sont représentés sur la figure 5.3. Nos observations sur l'Algorithme 1 sont les suivantes :

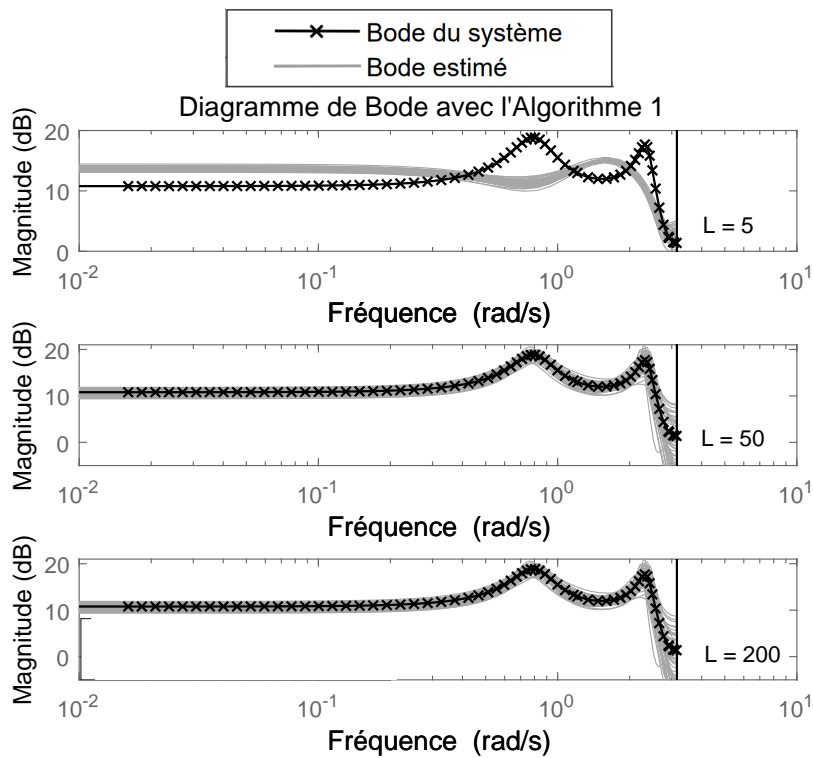


**Figure 5.3 :** comparaison du diagramme de Bode du système et des estimations par l'Algorithme 1 pour différentes valeurs de  $L$  avec  $N = 500$  et  $SNR = 20dB$ .

- si  $L$  est trop petit alors l'identification est biaisée.
- si  $L$  est trop grand alors la variance d'estimation est plus importante.
- Les meilleurs résultats sont obtenus pour  $L$  de l'ordre de grandeur de la longueur de la réponse impulsionnelle du système.

Nous retrouvons ici les conclusions du chapitre 4.

Dans un second temps, nous augmentons  $N$  à 1000 en gardant  $SNR = 20dB$ . A nouveau trois simulations de Monte Carlo sont réalisées avec 100 exécutions et avec  $L = 5$ ,  $L = 50$  et  $L = 200$ . Les résultats sont représentés sur la figure 5.4. Il apparaît que les performances sont meilleures pour  $N$  grand dans les cas  $L = 50$  et  $L = 200$ , ceci s'explique par une réduction de la variance des estimations.



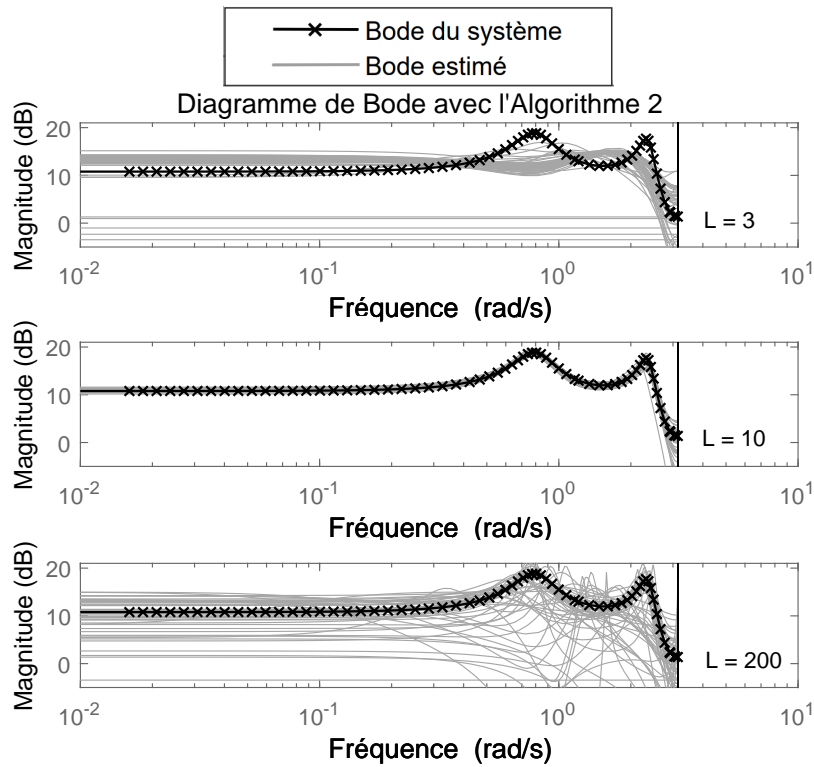
**Figure 5.4 :** comparaison du diagramme de Bode du système et des estimations par l'Algorithme 1 pour différentes valeurs de  $L$  avec  $N = 1000$  et  $SNR = 20dB$ .

### 5.4.2 Résultats de l'Algorithme 2

Dans une deuxième expérience nous nous concentrons sur l'Algorithme 2. Nous choisissons  $N = 500$  et  $SNR = 20dB$ . Trois simulations de Monte Carlo sont réalisées avec 100 exécutions et avec  $L = 3$ ,  $L = 10$  et  $L = 200$ . Le nombre d'itérations est 10.

Ici, nous comparons le diagramme de Bode du système et ses estimations avec l'Algorithme 2 à l'itération finale. Les résultats sont représentés sur la figure 5.5. Nos observations sont les suivantes :

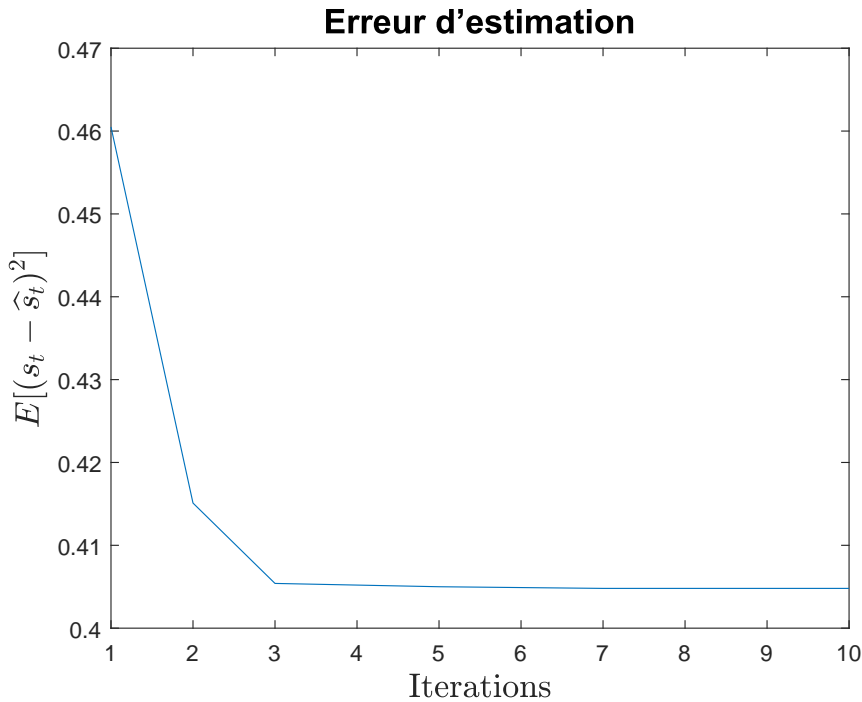
- Les plus mauvaises estimations du diagramme de bode du système sont obtenues pour  $L$  trop faible et  $L$  trop grand.
- les meilleures estimations sont obtenues pour  $L = 10$ .



**Figure 5.5 :** comparaison du diagramme de Bode du système et des estimations par l’Algorithme 2 pour différentes valeurs de  $L$  avec  $N = 500$  et  $SNR = 20dB$ .

En comparant la figure 5.3 et la figure 5.5, il apparaît également que l’Algorithme 2 performe mieux que l’Algorithme 1.

L’effet des itérations sur l’estimation peut être étudié par l’évolution de la variance de l’erreur entre la sortie binaire réelle et la sortie binaire estimée après chaque itération. La figure 5.6 présente cette variance en fonction des itérations. Il apparaît que la variance diminue après chaque itération. Premièrement, cela montre l’intérêt de l’aspect itératif de l’algorithme 2. Deuxièmement la forme exponentielle de la décroissance de la variance de l’erreur d’estimation met en avant l’efficacité de cet algorithme. Le surcout calculatoire est donc limité de part cette vitesse de convergence



**Figure 5.6 :** évolution de  $\mathbb{E}[s_t - \hat{s}_t]$  en fonction des itérations pour l’Algorithme 2 avec  $N = 500$ ,  $SNR = 20dB$  et  $L = 10$ .

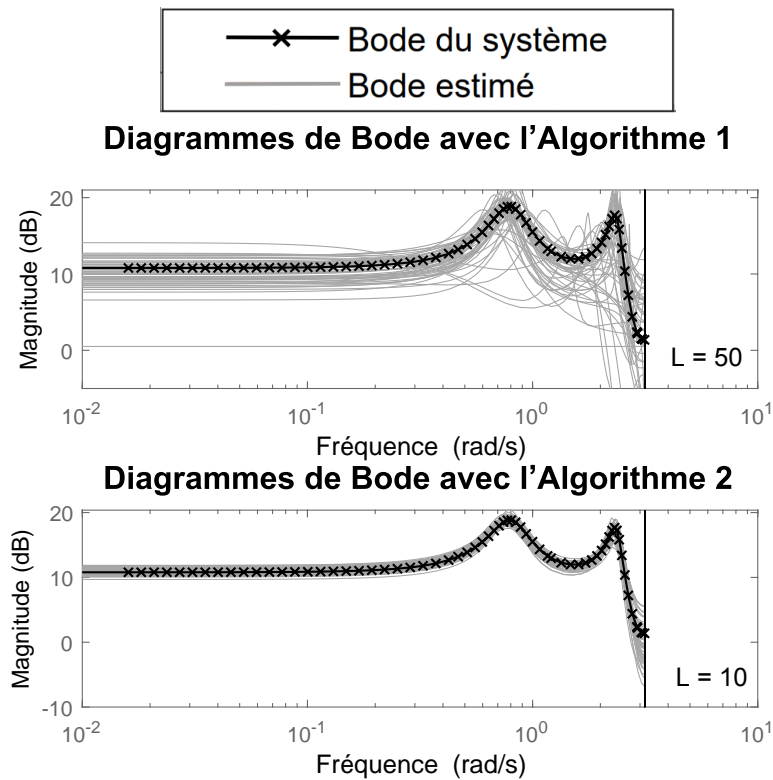
### 5.4.3 Troisième expérience : impact du bruit

Dans cette troisième expérience, nous étudions l’effet du bruit sur les algorithmes 1 et 2. Une simulation Monte Carlo est réalisée avec 100 exécutions avec  $N = 500$  et  $SNR = 0dB$ . Pour l’Algorithme 1, nous choisissons  $L = 50$ , pour l’Algorithme 2, nous choisissons  $L = 10$ .

Là encore, nous montrons une comparaison du diagramme de Bode et de la carte de pole du système et ses estimations. Les résultats sont représentés sur les figures 5.7 et 5.8. Il apparaît que les performances de l’Algorithme 1 et de l’Algorithme 2 dépendent du niveau de bruit, L’Algorithme 2 apparaît moins sensible que l’Algorithme 1.

## 5.5 Application des algorithmes proposés sur un exemple réel

Nous proposons dans cette section une mise en œuvre des 2 algorithmes du présent chapitre et de l’algorithme du chapitre 4 sur des données issues d’un

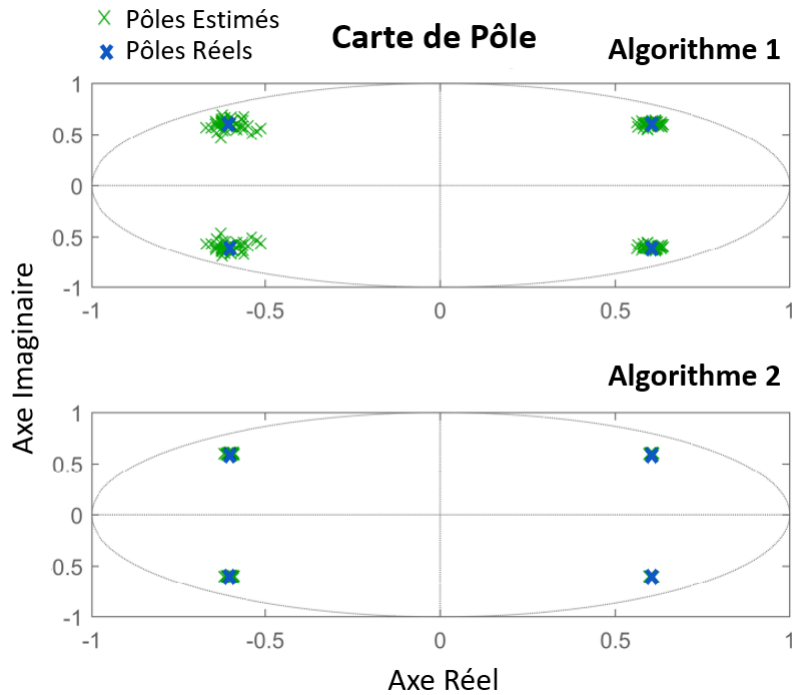


**Figure 5.7 :** comparaison du diagramme de Bode du système et des estimations par l’Algorithme 1 ( $L = 50$ ) et l’Algorithme 2 ( $L = 10$ ) avec  $N = 500$  et  $SNR = 0dB$ .

micro procédé thermique afin de démontrer le bon comportement de ces solutions dans des conditions réelles.

### 5.5.1 Présentation du dispositif et de la problématique d’identification

Le système en question est un capteur de concentration de gaz développé au sein du laboratoire GREYC (UMR 60720) de Caen. Une présentation sommaire de ce capteur est donnée dans [Pou+18]. Le capteur en question est composé d’un substrat en silicium sur lequel une couche de zéolite est déposée. La zéolite est un matériau poreux qui présente une capacité thermique élevée. Lorsque le dispositif est exposé à un gaz et du fait de cette structure poreuse, des molécules gazeuses sont absorbées par la couche de zéolite ce qui entraîne une augmentation de la capacité thermique. Le principe du capteur de gaz réside ainsi dans une estimation de la capacité thermique, estimation réalisée via une identification, afin d’avoir une image de la concentration de gaz. La photo du dispositif est donné sur la figure 5.9.



**Figure 5.8 :** comparaison de la carte de pole du système et des estimations par l'Algorithme 1 ( $L = 50$ ) et l'Algorithme 2 ( $L = 10$ ) avec  $N = 500$  et  $SNR = 0dB$ .

La figure 5.10 présente le schéma bloc de mise en œuvre du dispositif. Cette mise en œuvre est réalisée en boucle fermée afin de réguler la température du dispositif. Les différents éléments de la boucle fermée sont les suivants:

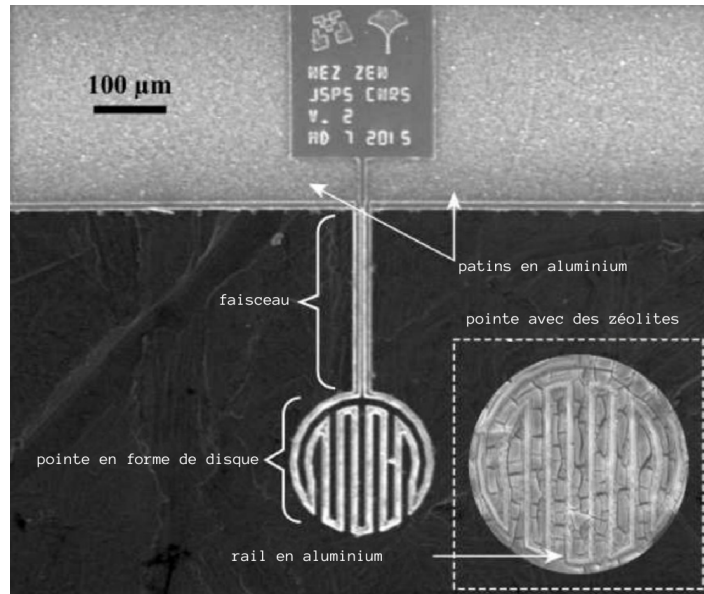
- $T_{bias}$  désigne la température de consigne et  $T_t$  la température effective du dispositif.
- Le système est régulé en température via un régulateur PI, la fonction de transfert de ce régulateur est (comme donné dans [Pou+18])

$$C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} \quad (5.8)$$

où  $K_p$  et  $K_i$  sont les paramètres du régulateur,  $p$  est la variable de Laplace.

- $\{r_t\}$  est une séquence d'excitation exogène permettant d'assurer la condition d'excitation persistente lors de la procédure d'identification.
- $G(p)$  est la fonction de transfert du modèle à temps continu du capteur. Il





**Figure 5.9 :** photos du dispositif constitué d'un faisceau de 250 µm et d'un disque (la pointe) de diamètre 200 µm, le tout d'une épaisseur de 9 µm. Encart en bas à gauche : le disque rempli de zéolithe (image extraite de [Pou+18]).

peut être montré que  $G(p)$  est de la forme

$$G(p) = \frac{G_0 G_e}{1 + \tau_{th} p} \quad (5.9)$$

où  $\tau_{th}$  est la constante de temps,  $G_0$  et  $G_e$  sont respectivement le gain du capteur et le gain de l'électronique de conditionnement inclus dans le capteur.

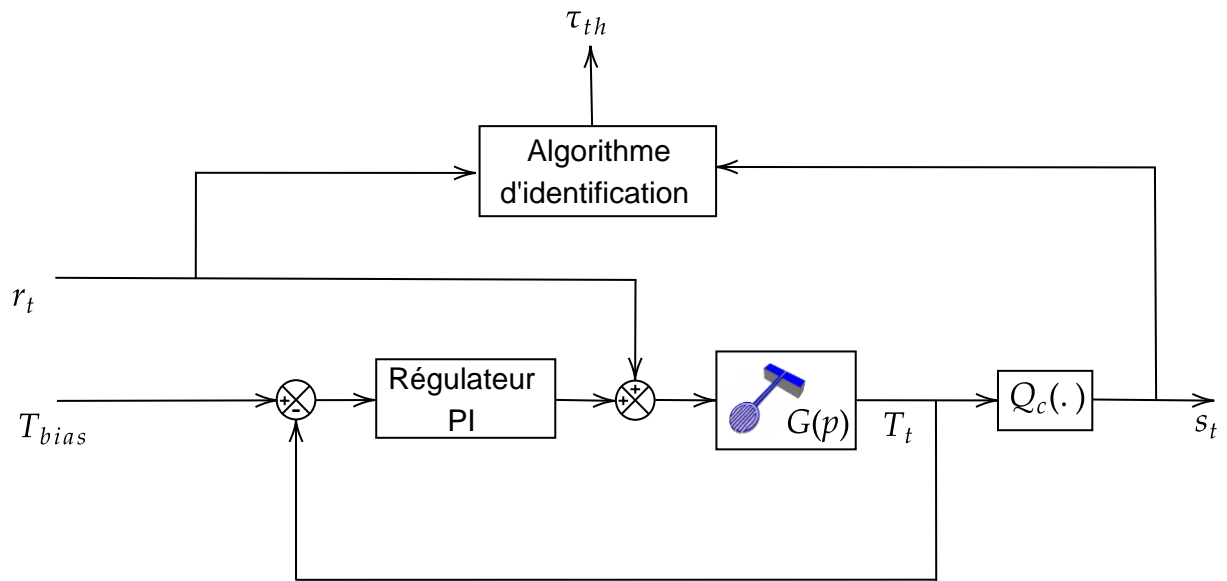
- $Q_c(.)$  est un capteur binaire, comme défini dans les chapitres précédents. L'usage de ce capteur binaire va permettre de limiter l'usage des ressources mémoire du dispositif.  $s_t$  est la sortie du capteur.

A propos de la constante de temps  $\tau_{th}$ , celle-ci s'exprime à partir de la capacité thermique  $C_{th}$  comme suit :

$$\tau_{th} = \frac{C_{th}}{G_{th}} \quad (5.10)$$

où  $G_{th}$  représente la conductivité thermique.

En terme de problématique d'identification, l'objectif ici d'estimer cette constante de temps  $\tau_{th}$  afin de remonter à la variation relative de la capacité thermique  $C_{th}$  en



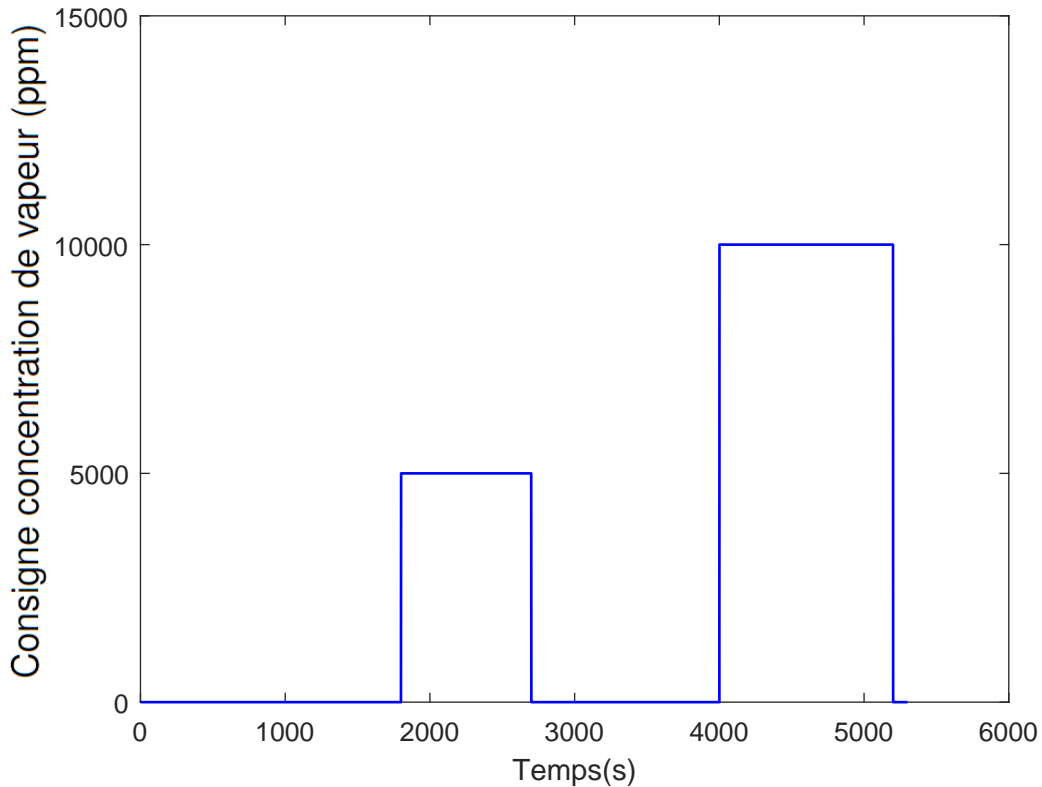
**Figure 5.10** : schéma bloc représentant le fonctionnement en boucle fermée et l'usage d'un algorithme d'identification afin d'estimer une caractéristique physique du dispositif et par suite d'estimer la concentration de gaz.

fonction du temps, variation dépendant elle-même de la variation de concentration de gaz.

## 5.5.2 Procédure et résultats d'identification

Nous proposons ici l'utilisation des deux algorithmes du présent chapitre ainsi que de l'algorithme du chapitre 4 afin de permettre la résolution de ce problème d'identification. Les données disponibles sont la séquence d'entrée exogène  $\{r_t\}$  et la séquence de sortie binaire  $\{s_t\}$ . La procédure d'identification est la suivante :

- Découpage des données expérimentales en tranches successives de longueur  $T_{tranche}$ .
- Estimation sur chaque tranche de la constante de temps  $\tau_{th}$  en suivant les trois étapes ci-dessous :
  - \* Étape 1 : estimation de la fonction de transfert entre la séquence  $\{r_t\}$  et la séquence  $\{T_t\}$  par utilisation d'un des algorithmes d'identification précédents par sous-espaces à partir des données de la séquence binaire  $\{s_t\}$ .
  - \* Étape 2 : conversion du modèle à temps discret de la boucle fermée en un modèle à temps continu. Ce modèle à temps continu est alors de la



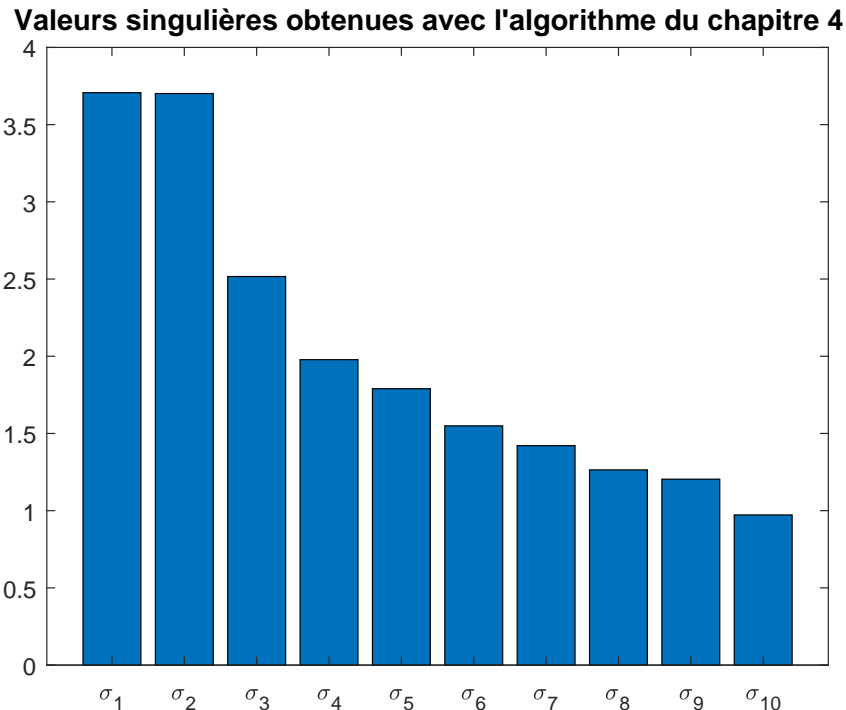
**Figure 5.11** : consigne concentration de vapeur dans le flux d'argon.

forme

$$G_{bf}(p) = \frac{\frac{p}{K_i}}{1 + \frac{1+G_0G_eK_p}{G_0G_eK_i}p + \frac{\tau_{th}}{G_0G_eK_i}p^2}. \quad (5.11)$$

- \* Étape 3 : extraction de la constante de temps  $\tau_{th}$  à partir du dénominateur de  $G_{bf}(p)$  et de la connaissance des paramètres du régulateur.

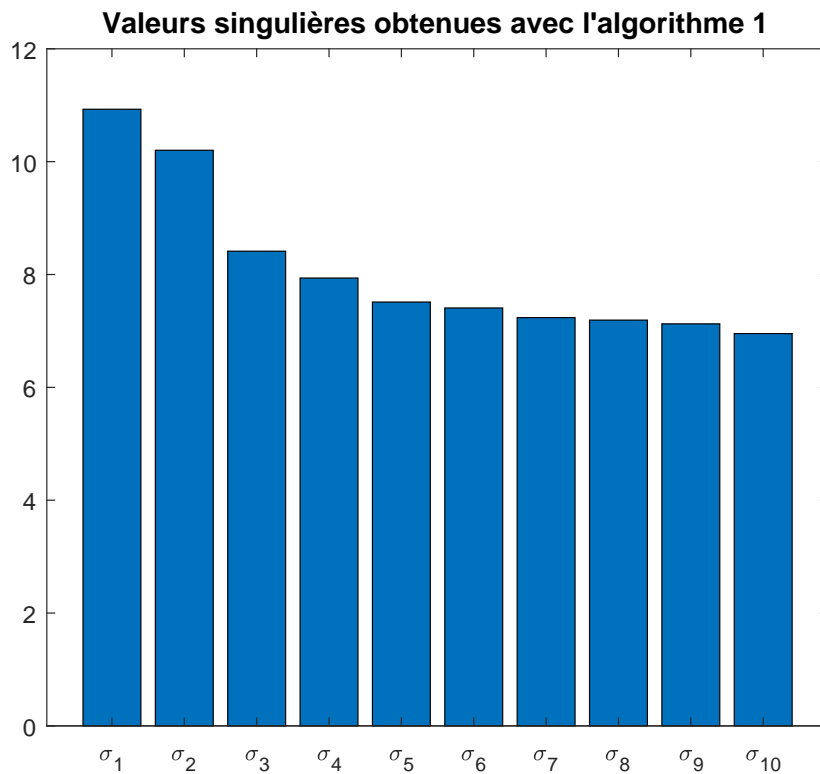
Cette procédure a été mise en œuvre sur des données gérées lors d'une expérience ayant duré un peu moins de 2 heures. Lors de cette expérience il s'agissait d'estimer la concentration de vapeur d'eau. Comme le montre le profil de consigne de la figure 5.11, cette concentration a été successivement de  $0ppm$ ,  $5000ppm$ ,  $0ppm$ ,  $10000ppm$  et  $0ppm$ . La séquence d'entrée exogène  $\{r_i\}$  était un bruit gaussien coloré et la période d'échantillonnage était de  $5ms$ . Lors du traitement des données nous avons choisi une longueur de tranche de  $T_{tranche} = 120s$ .



**Figure 5.12** : les valeurs singulières obtenues avec l'algorithme du chapitre 4.

L'une des étapes intermédiaires des méthodes proposées dans cette thèse est la détermination de l'ordre du système en regardant la décroissance des valeurs singulières. Nous examinons dans ce qui suit l'estimation de l'ordre pour chaque algorithme pour une concentration de vapeur d'eau de  $0ppm$ . Les figures 5.12, 5.13 et 5.14 montrent respectivement l'estimation de l'ordre via l'algorithme du chapitre 4, l'algorithme non itératif du chapitre 5 et l'étape finale de l'algorithme itératif du chapitre 5. Ces différentes figures montrent que l'ordre du système est 2, ce qui est cohérent avec (5.11) et qui valide ainsi par la pratique l'intérêt des méthodes proposées dans cette thèse.

La figure 5.15 présente les variations relatives estimées de la capacité thermique, variations en fonction du temps suite à l'application de la procédure décrite ci-dessus tranche par tranche. Ces estimations sont comparées aux résultats présentés dans [Pou+18]. À noter que l'algorithme d'identification utilisé dans [Pou+18] est l'algorithme d'identification en boucle fermée "Closed Loop Simplified Refined Instrumental Variable Continuous-time" présenté dans [Gil+08] et utilisant les données de la séquence d'entrée exogène, de la séquence de commande et de la séquence de sortie non binaire. Les résultats présentés sur cette figure 5.15 montrent que les trois algorithmes se comportent de manière relativement similaire.



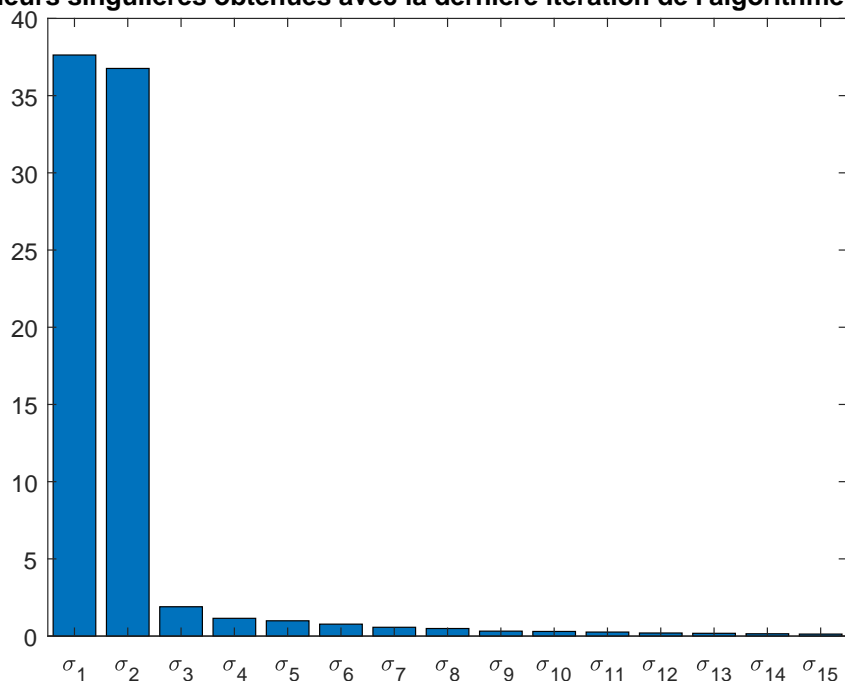
**Figure 5.13** : les valeurs singulières obtenues avec l’algorithme non itératif du chapitre 5.

Par ailleurs, ces résultats sont très semblables à ceux présentés dans [Pou+18], les algorithmes proposés dans cette thèse apparaissant ainsi compétitifs dans des conditions réelles d’utilisation. Enfin, on peut observer graphiquement que les variations relatives estimées par l’algorithme 2 du chapitre 5 présente une variance moindre que celles estimées par les deux autres algorithmes.

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé deux nouvelles méthodes d’identification basées sur les sous-espaces pour les systèmes à sortie binaire. Une présentation détaillée de ces deux algorithmes a été effectuée. Les deux approches reposent sur une première estimation de la sortie, suivie d’une estimation des matrices d’état. Dans un sens le premier algorithme ressemble à ce qui est proposé dans le chapitre 4 et souffre du même défaut sur la nécessité d’estimer un grand nombre de paramètres. L’intérêt majeur de l’Algorithme 2 réside dans sa capacité à contourner cette difficulté en réduisant considérablement le nombre de paramètres à estimer grâce à son processus itératif. Les exemples présentés

Valeurs singulières obtenues avec la dernière itération de l'algorithme 2



**Figure 5.14** : les valeurs singulières obtenues avec l'étape finale de l'algorithme itératif du chapitre 5.

montrent une convergence exponentielle de cet algorithme itératif mais la preuve de convergence n'a pas été établie dans le cadre de ce travail faute de temps.

Des simulations numériques ont été réalisées afin de permettre une comparaison des performances des deux algorithmes. De plus, une application réelle a été étudiée dans ce chapitre dans le but de montrer que les algorithmes développés dans ce chapitre et dans le chapitre précédent peuvent être efficaces dans des conditions réelles d'utilisation. Les travaux présentés dans ce chapitre ont été en partie publiés dans [MPP22].

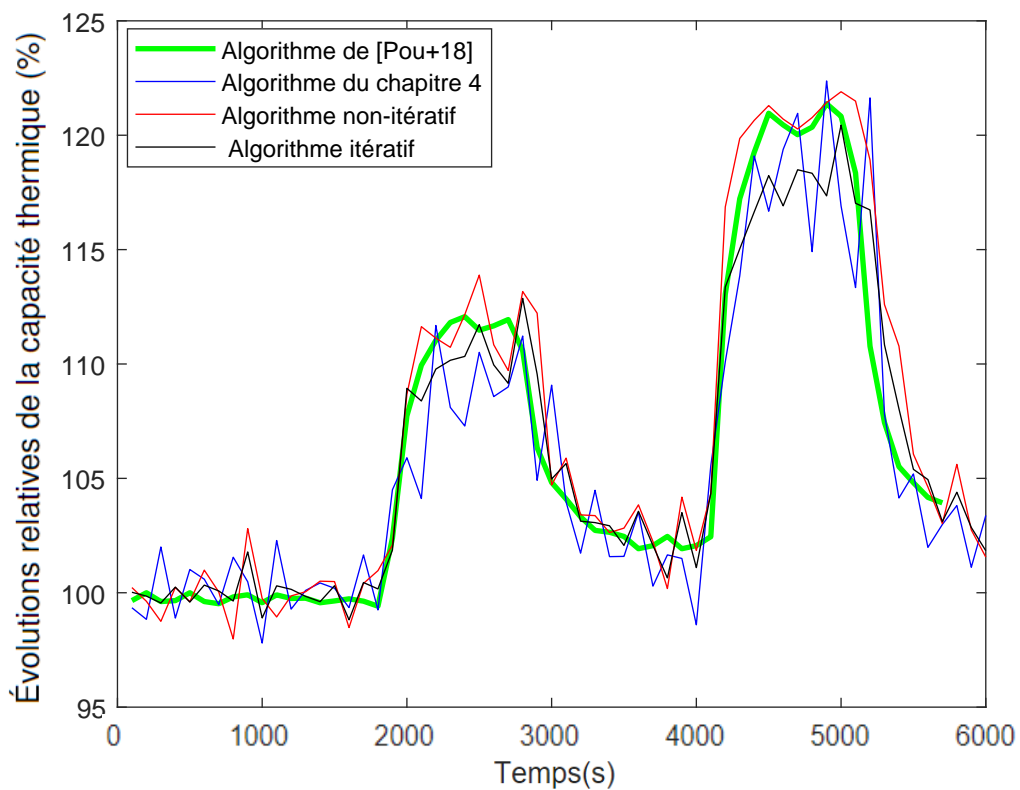


Figure 5.15 : évolutions relatives de la capacité thermique estimée au cours du temps.







## Conclusion Générale et perspectives

Les travaux présentés dans cette thèse concernent l'identification de systèmes linéaires invariants dans le contexte particulier d'une connaissance binaire de la sortie. La contribution principale de cette thèse réside dans la proposition de solutions pour l'estimation de modèles sous forme de représentation d'état, cette structure de modèle n'ayant pas encore été traitée dans la littérature pour ce contexte.

Dans le chapitre 2, un état de l'art des méthodes d'identification utilisant les techniques des sous-espaces, ainsi qu'un état de l'art des méthodes d'identification des systèmes à sortie binaire ont été réalisés. Ces études ont permis de mettre en évidence certaines limitations dans la littérature. D'une part les méthodes usuelles basées sur les sous-espaces sont conçues pour les systèmes à haute résolution de sortie, d'autre part les méthodes d'identification des systèmes à sortie binaire sont dédiées aux modèles sous forme de fonction de transfert et nécessitent souvent une connaissance au préalable de l'ordre du système. Ces constats justifient les travaux présentés dans cette thèse.

Au final, quatre algorithmes spécifiques ont été développés dans cette thèse pour l'identification des systèmes à sortie binaire en exploitant les méthodes basées sur les sous-espaces. Ces 4 algorithmes sont présentés dans les chapitres 3, 4 et 5.

Dans le chapitre 3, un premier algorithme d'identification a été exposé. Cet algorithme nécessite l'utilisation d'une entrée périodique, ainsi que la connaissance de la fonction de distribution du bruit. Il est divisé en trois étapes :

- Étape 1 : estimation de la sortie non bruitée du système en présence d'une entrée périodique et via la connaissance de la fonction de distribution du bruit;
- Étape 2 : estimation de l'ordre et de la matrice d'observabilité à partir d'une SVD;
- Étape 3 : estimation des matrices d'état.

Une analyse de convergence ainsi qu'une analyse numérique ont permis de quantifier et commenter les bonnes performances de la solution proposée.

Dans le chapitre 4, afin de s'affranchir des hypothèses sur la périodicité de l'entrée et la connaissance de la fonction de distribution du bruit de la méthode du chapitre 3, nous avons proposé un deuxième algorithme. Ce nouvel algorithme est lui aussi constitué de trois étapes :

- Étape 1 : estimation de la réponse impulsionnelle du système à partir de l'estimation empirique des corrélations entre l'entrée et la sortie binaire;
- Étape 2 : estimation de l'ordre et de la matrice d'observabilité via une SVD;
- Étape 3 : estimation des matrices d'état.

Une interprétation géométrique de la première étape de cet algorithme, une analyse de convergence et une analyse numérique structurent ce chapitre 4 et permettent d'évaluer les bonnes performances de cet algorithme.

Nous avons constaté que l'algorithme du chapitre 4 présente des performances limitées lorsqu'il s'agit d'estimer un système avec une longue réponse impulsionnelle. Afin de remédier à cette limitation, deux nouveaux algorithmes ont été introduits dans le chapitre 5, l'un non itératif et l'autre itératif. L'algorithme itératif a été spécifiquement conçu pour surmonter la limitation de la longueur de la réponse impulsionnelle du chapitre 4. Les deux algorithmes dans ce chapitre sont constitués de deux étapes :

- Étape 1 : estimation de la sortie haute résolution à l'aide d'un des algorithmes d'identification disponibles dans la littérature adapté à une forme de régression linéaire ;
- Étape 2 : estimation des matrices d'état à l'aide d'un des algorithmes d'identification par sous-espace de la littérature.

Les options dans la mise en oeuvre des deux algorithmes de ce chapitre 5 ont été commentées en tenant compte des conditions sur l'entrée et le bruit. Des simulations numériques ont mis en évidence les performances comparatives de l'algorithme non itératif et de l'algorithme itératif. Les résultats obtenus démontrent une différence significative en termes de qualité d'estimation, montrant ainsi l'intérêt de l'algorithme itératif.

Nous avons aussi mis en oeuvre les algorithmes des chapitres 4 et 5 sur une application réelle, un capteur de concentration de gaz en l'occurrence. Cette application a permis de montrer la viabilité des solutions proposées dans des

conditions réelles et démontre ainsi l'intérêt des travaux présentés dans cette thèse.

A noter que lors de cette thèse nous avons aussi proposé un algorithme d'identification pour les systèmes fractionnaires sur la base de données binaires de la sortie. Cet algorithme étant dédié à l'estimation de modèle sous forme de fonction de transfert nous avons préféré ne pas présenter ces travaux dans le corps de ce document. Ces travaux ont été publiés dans [Mes+23b], l'article correspondant est en annexe A.2 page 142.

En terme de perspectives, nous distinguons plusieurs voies possibles pour la poursuite de ces travaux. Tout d'abord il serait intéressant d'effectuer une étude de convergence, même locale, de l'algorithme itératif présenté dans le chapitre 5. Cette analyse permettrait de confirmer le bon comportement de l'algorithme observé en simulation. Ensuite, nous pourrions aussi proposer une solution pour l'estimation de la partie stochastique du modèle puisque jusqu'ici nous n'avons considéré que l'estimation de la partie déterministe liée à la séquence d'entrée. Enfin, nous souhaiterions aussi proposer et analyser un autre outil pour l'estimation de la réponse impulsionnelle. Cet outil, basé sur l'algorithme d'apprentissage des plus proches voisins, serait complémentaire à ce qui est décrit dans le chapitre 2 et le chapitre 4.



# Annexes

## Sommaire

---

A.1 Opérateurs de projection . . . . .	140
A.2 Identification de systèmes fractionnaires à l'aide de mesures binaires . . . . .	141

---

## A.1 Opérateurs de projection

Les opérateurs de projection sont couramment utilisés au sein des méthodes des sous-espaces. Ils permettent en effet d'isoler le sous-espace vectoriel généré par la matrice d'observabilité étendue, étape clé pour ces méthodes d'identification.

Un premier opérateur de projection est l'opérateur de projection orthogonale. La projection orthogonale du sous-espace ligne de  $A$  sur le sous-espace ligne de  $B$  est définie par

$$A\Pi_B = AB^T(BB^T)^{-1}B.$$

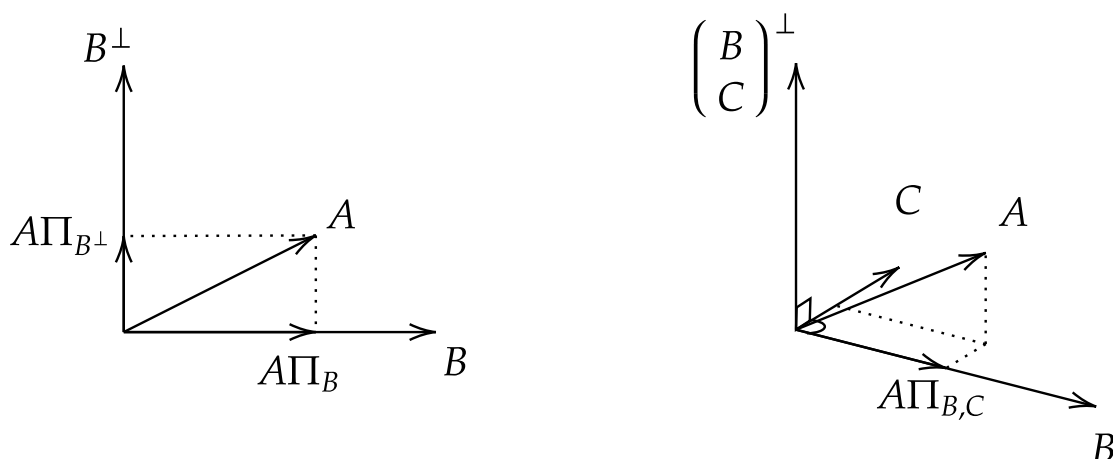
De même, la projection orthogonale du sous-espace ligne de  $A$  sur le complément du sous-espace ligne de  $B$  est exprimé comme suit :

$$A\Pi_{B^\perp} = A - A\Pi_B = A - AB^T(BB^T)^{-1}B.$$

Un second opérateur de projection est l'opérateur de projection oblique. La projection oblique du sous-espace ligne de  $A$  sur le sous-espace ligne de  $B$  parallèlement au sous-espace ligne de  $C$  est définie par

$$A\Pi_{B,C} = A\Pi_C B^T (B\Pi_C B^T)^{-1} B$$

Ces deux opérateurs de projection sont illustrés sur la figure A.1 ci-dessous.



**Figure A.1** : Projections orthogonale et oblique

## A.2 Identification de systèmes fractionnaires à l'aide de mesures binaires

### Fractional System Identification using Binary Measurements

Ali Mestrah \* Mathieu Pouliquen \* Rachid Malti \*\* Eric Pigeon \*

\* Normandie Univ, UNICAEN, ENSICAEN, LIS, 14000 Caen, France (e-mail: [ali.mestrah@unicaen.fr](mailto:ali.mestrah@unicaen.fr)).

\*\* Univ. Bordeaux, CNRS, Bordeaux INP, IMS, UMR 5218, F-33400 Talence, France

---

**Abstract:** This paper focuses on the identification of commensurate fractional order systems from binary measurements on the output. The proposed algorithm allows the estimation of both the parameters of the model and the commensurate order. The algorithm is based on a specific design of the output signal as a sum of sinusoids. It allows the parametrization of the output signal on a basis of sinusoids and the estimation of the high resolution output. Numerical simulation results are provided to show the efficiency of the method.

*Keywords:* Fractional Order System Identification, Binary measurements

---

#### 1. INTRODUCTION

This paper deals with modeling using fractional operators. Fractional calculus is commonly used in different engineering and science fields (see for instance Benchellal et al. (2006), Gabano et al. (2011), Wang et al. (2015), Prasad et al. (2019), etc.). From an identification point of view, different specific algorithms have been proposed in literature for such class of systems (see for instance Lin (2001), Aoun et al. (2007), Malti et al. (2008a), Malti et al. (2008b), Nazarian et al. (2010), Victor et al. (2013), Tavakoli-Kakhki and Tavazoei (2014)). These algorithms include non-parametric and parametric identification methods, time domain and frequency domain algorithms, etc. Some of these algorithms have well-known suitable properties which lead to their implementation on some engineering softwares (see the CRONE Toolbox for MATLAB Malti and Victor (2015)). These algorithms are not detailed below because we focus in this paper on a particular framework for which they are not adapted.

Indeed, we consider the identification of systems characterized by fractional differential equations in the particular context of using binary-valued measurements on the output. Several reasons justify the use of a binary sensor: it allows reducing the memory load (on an embedded device for instance) and the implementation and maintenance costs (a low resolution sensor may be less expensive than a high resolution sensor), etc. The hard limitation on the output does not allow the use of classical identification algorithms (such as those cited previously). Some identification algorithms have already been specifically designed to such a particular context. Main contributions are

given in Wang et al. (2003), Colinet and Juillard (2010), Jafari et al. (2012), Guo and Zhao (2013) and Goudjil et al. (2015) which concentrate on FIR discrete-time systems and Liu et al. (2011), Li and Wen (2012), Marelli et al. (2013), Son (2018), Pouliquen et al. (2019) and Mestrah et al. (2022) which concentrate on IIR discrete-time systems. To our knowledge, there is no contribution to the identification from binary-valued measurements dedicated to systems characterized by fractional differential equations. Such a contribution is the objective of this paper.

Our paper takes inspiration from Pouliquen et al. (2016). To our knowledge, this paper is the only one allowing the identification of a continuous-time system from binary-valued measurements. This identification is realized using a sine sequence on the input in order to estimate the high resolution output signal. An improvement of this method is proposed in this paper by allowing the identification of systems characterized by fractional differential equations, i.e. the estimation of both the parameters of the model and the commensurate order.

The rest of the paper is organized as follows. The identification problem is described and some notations are introduced in Section 2. The proposed identification algorithm is presented and commented in Section 3. A numerical example is provided in Section 4. Section 5 concludes the paper.

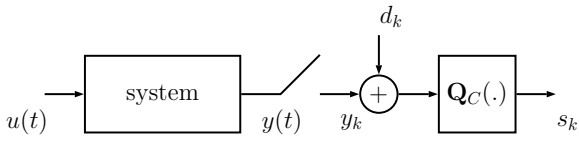


Fig. 1. Considered continuous-time system with a binary sensor on the output.

## 2. PROBLEM STATEMENT AND NOTATION

### 2.1 The considered system and preliminaries on fractional calculus

In this paper we consider a system which dynamical behavior is described by the following fractional differential equation:

$$y(t) + a_1 \mathbf{D}^{\alpha_1} y(t) + \dots + a_N \mathbf{D}^{\alpha_N} y(t) = b_0 u(t) + b_1 \mathbf{D}^{\beta_1} u(t) + \dots + b_M \mathbf{D}^{\beta_M} u(t) \quad (1)$$

where  $u(t)$  and  $y(t)$  are respectively the input and the output of the system,  $\mathbf{D}^\gamma = \left(\frac{d}{dt}\right)^\gamma$  is the  $\gamma$ -order fractional derivative operator and the differentiation orders  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_N$ ,  $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_M$  are non-integer positive numbers.

The concept of differentiation to a non-integer order  $\gamma$  was defined by Grünwald Letnikov (see Podlubny (1999) for instance),  $\mathbf{D}^\gamma x(t)$  can be expressed as

$$\mathbf{D}^\gamma x(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\gamma} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{\gamma}{k} x(t - kh) \quad (2)$$

where  $\lfloor \cdot \rfloor$  is the floor operator and  $\binom{\gamma}{k}$  is the Newton binomial coefficient generalized to real numbers:

$$\binom{\gamma}{k} = \frac{\gamma(\gamma-1)\dots(\gamma-k+1)}{k!} \quad (3)$$

Denote  $x^{(\gamma)}(t) = \mathbf{D}^\gamma x(t)$ . In the following, for simplicity, commensurate fractional systems are considered. In this case, all differentiation orders are set as integral multiples of a commensurate order  $\nu^*$ . (1) is then rewritten as

$$y(t) + a_1 y^{(\nu^*)}(t) + \dots + a_N y^{(N\nu^*)}(t) = b_0 u(t) + b_1 u^{(\nu^*)}(t) + \dots + b_M u^{(M\nu^*)}(t) \quad (4)$$

Using the Laplace transform, the fractional differential equation (4) can be represented by a transfer function  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (5)$$

with  $A(s) = 1 + a_1 s^{\nu^*} + \dots + a_N s^{N\nu^*}$  and  $B(s) = b_0 + b_1 s^{\nu^*} + \dots + b_M s^{M\nu^*}$ . Denote  $T$  and  $R$  two coprime polynomials such that  $G(s) = \frac{T(s^{\nu^*})}{R(s^{\nu^*})}$ , from Maignon (1998) the fractional system (4) is stable if and only if  $0 < \nu^* < 2$  and  $|\arg(s_k)| > \nu^* \frac{\pi}{2}$  for all  $s_k \in \mathbb{C}$  such that  $R(s_k) = 0$ .

### 2.2 The considered identification problem

As depicted in Fig. 1, in this paper we consider the case where the input is available for the user but not the output. The output is measured using a binary sensor  $\mathbf{Q}_C(\cdot)$  characterized by

$$\mathbf{Q}_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x - C \geq 0 \\ -1 & \text{if } x - C < 0 \end{cases} \quad (6)$$

$C$  is the threshold of the sensor. It follows that available data at time-instants  $t_k$  are

$$\begin{cases} u_k = u(t = t_k) \\ s_k = \mathbf{Q}_C(y_k + d_k) \end{cases} \quad (7)$$

where  $d_k$  is the measurement noise.

The **Objective** of the paper is, given the orders  $N$  and  $M$ , to realize the estimation of the commensurate order  $\nu^*$  and parameters  $\{a_i\}_{i \in [1;N]}$  and  $\{b_i\}_{i \in [0;M]}$  from  $K$  available data  $\{u_k, s_k\}_{k=1}^K$ .

At first the commensurate order  $\nu^*$  is assumed known. Then two complementary processes are proposed for the joint estimation of both  $\nu^*$  and  $\{a_i\}_{i \in [1;N]}$  and  $\{b_i\}_{i \in [0;M]}$ .

The following assumptions complete the identification framework:

**Assumption 1.**  $\{d_k\}$  is a zero mean noise uncorrelated with the input signal.

**Assumption 2.**  $A(s)$  and  $B(s)$  are coprime, the system is stable.

**Assumption 3.** The magnitude of  $G(s)$  is a priori known for a given angular frequency  $\omega_{\text{known}}$ .

**Remark 1.** The latest assumption is a normalization assumption, such an assumption is usual in system identification from binary measurements. Sometimes this normalization assumption corresponds to a known norm of the parameter vector (see Jafari et al. (2012) for instance) or a known parameter (see Li and Wen (2012) for instance). If the threshold is known and different from zero, then this assumption is useless.

## 3. IDENTIFICATION ALGORITHM

In this section, we present our identification scheme. This identification scheme is based on the fact that (4) can be rewritten in the following linear regression form:

$$y(t) = \phi(t)^T \theta^* \quad (8)$$

with

$$\theta^* = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_M \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \quad \phi(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ \vdots \\ u^{(M\nu^*)}(t) \\ -y^{(\nu^*)}(t) \\ \vdots \\ -y^{(N\nu^*)}(t) \end{pmatrix} \quad (9)$$

$\theta^* \in \mathbb{R}^n$  and  $\phi(t) \in \mathbb{R}^n$  with  $n = N + M + 1$ .



The direct estimation of the parameter vector  $\theta^*$  from (8) requires knowledge of  $\phi(t)$  i.e. knowledge of  $u(t)$  and its  $M$  time-derivatives of order  $v^*$ , knowledge of  $y(t)$  and its  $N$  time-derivatives of order  $v^*$ . Unfortunately, some of these components are not available. The proposed identification scheme is thus organized in two successive steps: in the first step  $y(t)$  and components of  $\phi(t)$  are estimated (presented in subsection 3.1), in the second step  $\theta^*$  is estimated (presented in subsection 3.2). The overall algorithm is summarized and commented in subsection 3.3. Note that the second step uses the knowledge of  $v^*$ . Two complementary processes are thus provided in subsection 3.4 in the case where  $v^*$  is unknown, these processes allow the estimation of both  $v^*$  and  $\theta^*$ .

### 3.1 Step 1: estimation of components of $\phi(t)$

The proposed algorithm is based on the following design of  $u(t)$ .

**Assumption 4.**  $u(t)$  is the sum of  $q$  sinusoids as follows

$$u(t) = \sum_{i=1}^q \mu_i \sin(\omega_i t) \quad (10)$$

where  $\{\omega_i\}_{i=1}^q$  are the angular frequencies and  $\mu_i$  are the amplitudes chosen by the user.

Recall that from Assumption 3 the magnitude of  $G(s)$  for a given angular frequency  $\omega_{\text{known}}$  is assumed known. This angular frequency  $\omega_{\text{known}}$  is supposed to belong to  $\{\omega_i\}_{i=1}^q$ .

A first interest of such choice is that the  $jv^*$  th time-derivative of  $u(t)$  can easily be computed by (Podlubny (1999))

$$u^{(jv^*)}(t) = \sum_{i=1}^q \mu_i \omega_i^{jv^*} \sin\left(\omega_i t + jv^* \frac{\pi}{2}\right). \quad (11)$$

A Second interest of such choice is that, due to the linearity of the system,  $y(t)$  is also the sum of  $q$  sinusoids as follows

$$y(t) = \sum_{i=1}^q \eta_{i/\sin} \sin(\omega_i t) + \sum_{i=1}^q \eta_{i/\cos} \cos(\omega_i t). \quad (12)$$

Note that the previous form of  $y(t)$  is only valid for an established sine response, i.e. it is valid after a sufficiently long period with polynomial convergence (Podlubny (1999)), it follows that the identification process is in steady state.

From (12),  $y(t)$  can be parameterized by a vector  $\eta \in \mathbb{R}^{2q}$  as follows

$$y(t) = \varphi(t)^T \eta \quad (13)$$

with

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_{1/\sin} \\ \vdots \\ \eta_{q/\sin} \\ \eta_{1/\cos} \\ \vdots \\ \eta_{q/\cos} \end{pmatrix} \quad \varphi(t) = \begin{pmatrix} \sin(\omega_1 t) \\ \vdots \\ \sin(\omega_q t) \\ \cos(\omega_1 t) \\ \vdots \\ \cos(\omega_q t) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Hence, if components of  $\eta$  are known, then it is possible to compute the  $jv^*$  th time-derivative of  $y(t)$  as follows

$$y^{(jv^*)}(t) = \sum_{i=1}^q \eta_{i/\sin} \omega_i^{jv^*} \sin\left(\omega_i t + jv^* \frac{\pi}{2}\right) + \sum_{i=1}^q \eta_{i/\cos} \omega_i^{jv^*} \cos\left(\omega_i t + jv^* \frac{\pi}{2}\right). \quad (15)$$

The main issue of the first step is then the estimation of  $\eta$ .

To this end, consider (6), (7) and (13). It appears that  $s_k$  satisfies

$$s_k (\varphi(t_k)^T \eta + d_k - C) > 0. \quad (16)$$

The estimation problem on  $\eta$  corresponds then to the estimation of a separating hyperplane parameterized by  $\eta$  and  $C$  in a binary supervised linear classification problem. Such a problem can be solved by Support Vector Machines (SVM). SVM are supervised learning algorithms suitable for regression analysis (Vapnik (1995), Scholkopf and Smola (2001) and Steinwart and Christman (2008)). They allow the estimation of the optimal separating hyperplane between the two classes, in this paragraph our two classes are represented by  $s_k = -1$  or  $s_k = 1$ . The optimal hyperplane is the hyperplane with the largest margin. Denote  $\bar{\eta}$  and  $\bar{C}$  the parameters of this optimal hyperplane. The estimation of  $\bar{\eta}$  and  $\bar{C}$  is realized through the following primal problem:

$$\{\hat{\eta}, \hat{C}\} = \begin{cases} \arg \min_{\bar{\eta}, \bar{C}, e} \frac{1}{2} \|\bar{\eta}\|^2 + \gamma \sum_{k=1}^K e_k \\ \text{s.t. } s_k (\varphi(t_k)^T \bar{\eta} - \bar{C}) \geq 1 - e_k \text{ and } e_k \geq 0; \forall k \end{cases} \quad (17)$$

where  $\gamma \in \mathbb{R}_0^+$  corresponds to the regularization constant.

From  $\hat{\eta}$  it is next possible to estimate  $\eta$ . Indeed, from Assumption 3 the magnitude of  $G(s)$  is a priori known for a given angular frequency  $\omega_{\text{known}}$ . Denote  $i_{\text{known}}$  the number of the angular frequency  $\omega_{\text{known}}$  in  $\{\omega_i\}_{i=1}^q$ ,  $\hat{\eta}$  can be computed as follows

$$\hat{\eta} = \mu \hat{\eta} \quad (18)$$

with

$$\mu = \frac{|G(j\omega_{\text{known}})|}{\sqrt{\hat{\eta}_{i_{\text{known}}/\sin}^2 + \hat{\eta}_{i_{\text{known}}/\cos}^2}}. \quad (19)$$

**Remark 2.** If the threshold  $C$  is unknown, then it is possible to compute an estimate from  $\hat{C} = \mu \hat{C}$ . This means that, as stated in Remark 1, if  $C$  is known and different from zero, then Assumption 3 is useless. Indeed, in this case it is possible to compute  $\hat{\eta}$  as follows  $\hat{\eta} = \frac{\hat{C}}{C} \hat{\eta}$  with  $\hat{\eta}$  and  $\hat{C}$  obtained in (17).

Once an estimate  $\hat{\eta}$  is available, it only remains to reconstruct the high resolution sampled output signal as follow:

$$\hat{y}(t_k) = \varphi(t_k)^T \hat{\eta} \quad (20)$$

where  $\hat{y}(t_k)$  denotes the estimate of  $y(t)$  at  $t_k$  and it corresponds to  $\hat{y}(t_k) = \hat{y}^{(j=0)}(t_k)$ . It is also possible to estimate the regression

vector  $\phi(t)$  at  $t_k$  in the following manner:

$$\widehat{\phi}(t_k) = \begin{pmatrix} u(t_k) \\ \vdots \\ u^{(Mv^*)}(t_k) \\ -\widehat{y}^{(v^*)}(t_k) \\ \vdots \\ -\widehat{y}^{(Nv^*)}(t_k) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

The algorithm proposed in step 1 is summarized in table 1.

---

**Algorithm for step 1**


---

**a- Estimation of  $\bar{\eta}$  using SVM**

$$\{\widehat{\eta}, \widehat{C}\} = \begin{cases} \arg \min_{\bar{\eta}, \bar{C}, e} \frac{1}{2} \|\bar{\eta}\|^2 + \gamma \sum_{k=1}^K e_k \\ \text{s.t. } s_k (\varphi(t_k)^T \bar{\eta} - \bar{C}) \geq 1 - e_k \text{ and } e_k \geq 0; \forall k \end{cases} \quad (22)$$

**b- Estimation of  $\eta$ :  $\widehat{\eta} = \mu \widehat{\eta}$  where**

$$\mu = \frac{|G(j\omega_{\text{known}})|}{\sqrt{\widehat{\eta}_{i/\sin}^2 + \widehat{\eta}_{i/\cos}^2}} \quad (23)$$

**c- Estimation of  $y(t)$  and its time-derivatives at  $t_k$** 

$$\widehat{y}(t_k) = \sum_{i=1}^q \widehat{\eta}_{i/\sin} \sin(\omega_i t_k) + \sum_{i=1}^q \widehat{\eta}_{i/\cos} \cos(\omega_i t_k) \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \widehat{y}^{(jv^*)}(t_k) &= \sum_{i=1}^q \widehat{\eta}_{i/\sin} \omega_i^{jv^*} \sin\left(\omega_i t_k + jv^* \frac{\pi}{2}\right) \\ &+ \sum_{i=1}^q \widehat{\eta}_{i/\cos} \omega_i^{jv^*} \cos\left(\omega_i t_k + jv^* \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (25)$$

where  $\widehat{\eta}_{i/\sin}$  and  $\widehat{\eta}_{i/\cos}$  are components of  $\widehat{\eta}$ :

$$\widehat{\eta} = \begin{pmatrix} \widehat{\eta}_{1/\sin} \\ \vdots \\ \widehat{\eta}_{q/\sin} \\ \widehat{\eta}_{1/\cos} \\ \vdots \\ \widehat{\eta}_{q/\cos} \end{pmatrix} \quad (26)$$

---

Table 1. Algorithm for step 1: estimation of  $y(t)$  and its time-derivatives

### 3.2 Step 2: estimation of $\theta^*$

Now, from the regression form (8), we want to realize the estimation of the parameter vector  $\theta^*$ . Denote  $\widetilde{y}(t_k) = y(t_k) - \widehat{y}(t_k)$  and  $\widetilde{\phi}(t_k) = \phi(t_k) - \widehat{\phi}(t_k)$ . From (8),  $\theta^*$  is solution of

$$\widetilde{y}(t_k) + \widetilde{y}(t_k) = \left(\widehat{\phi}(t_k) + \widetilde{\phi}(t_k)\right)^T \theta^* \quad (27)$$

i.e.

$$\widehat{Y} + \widetilde{Y} = \left(\widehat{\Phi} + \widetilde{\Phi}\right)^T \theta^* \quad (28)$$

with

$$\widehat{Y} = \begin{pmatrix} \widehat{y}(t_1) \\ \vdots \\ \widehat{y}(t_K) \end{pmatrix} \text{ and } \widehat{\Phi}^T = \begin{pmatrix} \widehat{\phi}(t_1)^T \\ \vdots \\ \widehat{\phi}(t_K)^T \end{pmatrix}. \quad (29)$$

From (28),  $\theta^*$  can be estimated solving the Total Least Square (TLS) problem described by

$$\widehat{\theta} = \arg \min_{\theta} \|(\widetilde{Y} \ \widetilde{\Phi}^T)\|_F \quad (30)$$

where  $\|\cdot\|_F$  is the Frobenius norm. TLS problem is commonly solved using a Singular Value Decomposition (SVD). Consider the following SVD of  $(\widetilde{Y} \ \widetilde{\Phi}^T)$

$$(\widetilde{Y} \ \widetilde{\Phi}^T) = USV^T \quad (31)$$

where

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \quad (32)$$

with  $V_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $V_{12} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $V_{21} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  and  $V_{22} \in \mathbb{R}$ . When the TLS solution exists and is unique,  $\widehat{\theta}$  is obtained with

$$\widehat{\theta} = \frac{V_{12}}{V_{22}}. \quad (33)$$

Note that the solution to be unique, the matrix  $(\widetilde{Y} \ \widetilde{\Phi}^T)$  must be exactly of rank  $n$ . If the input signal is persistently exciting and if  $A(s)$  and  $B(s)$  are coprime (Assumption 2), then this rank condition is satisfied.

The algorithm proposed in step 2 is summarized in table 2.

---

**Algorithm for step 2**


---

**a- Singular Value Decomposition**

$$(\widetilde{Y} \ \widetilde{\Phi}^T) = USV^T \quad (34)$$

**b- Estimation of  $\theta^*$ :  $\widehat{\theta} = \frac{V_{12}}{V_{22}}$ .**


---

Table 2. Algorithm for step 2: estimation of  $\theta^*$

### 3.3 Summary and comments

The overall algorithm is summarized in Fig. 2.

Since  $y(t)$  is parameterized on a basis of functions depending on time the algorithm can be implemented even for irregular sampling. In this case, step 1 is still valid for the estimation of  $\eta$  and consequently for the estimation of  $y(t)$  and its time-derivatives.

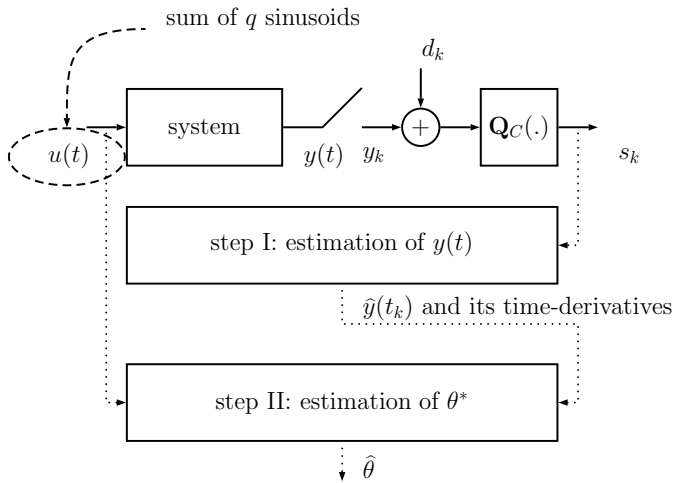


Fig. 2. Overall algorithm using step I (Tab. 1), step II (Tab. 2).

About the choice of the input sequence, it is well known that a sum of  $q$  sinusoids is persistently exciting of order  $2q$  for  $\omega_i \neq 0$ , it follows that we must choose  $2q \geq n$ . Moreover, the estimated model will be more accurate in the frequency region of the chosen angular frequencies  $\{\omega_i\}_{i=1}^q$ . It is usually advised to choose these angular frequencies in the system bandwidth.

### 3.4 Unknown commensurate order $v^*$

The implementation of the previous algorithm requires the commensurate order  $v^*$  to be known. Two processes are given below when unknown.

- A first possible process is to apply the previous algorithm with different commensurate orders and compute the cost function

$$J(v) = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (s_k - \hat{s}_{k/v})^2} \quad (35)$$

where  $\hat{s}_{k/v} = \mathbf{Q}_C(\hat{y}_{k/v})$  and  $\hat{y}_{k/v}$  is the model output obtained with the algorithm of the previous subsection assuming the commensurate order equal to  $v$ . The "optimal" commensurate order is the one minimizing  $J(v)$ .

- A second possible process can be designed in order to realize the joint estimation of  $\theta^*$  and  $v^*$ . In this second process we define the extended parameters vector  $\bar{\theta}^* = \begin{pmatrix} \theta^* \\ v^* \end{pmatrix}$ . Instead of using step II described in subsection 3.2, this extended parameters vector can be estimated using a gradient-based algorithm, such as the Marquardt algorithm. The estimate of  $\theta^*$  at the  $i^{\text{th}}$  iteration is noted  $\hat{\theta}_i$  and defined by

$$\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_{i-1} - \{(f''(\bar{\theta}) + \xi I_{n+1})^{-1} f'(\bar{\theta})\}_{\bar{\theta}=\hat{\theta}_{i-1}} \quad (36)$$

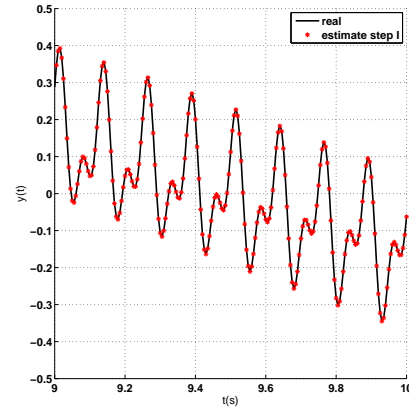


Fig. 3. First experiment: real high resolution output and its estimate after step I.

where  $\xi$  is the Marquardt parameter,  $f'(\bar{\theta})$  and  $f''(\bar{\theta})$  are the approximated first and second derivative of the quadratic function  $f(\bar{\theta}) = \sum_{k=1}^K \tilde{y}(t_k/\bar{\theta})^2$  with

$$\tilde{y}(t_k/\bar{\theta}) = \hat{y}(t_k) - \hat{y}(t_k/\bar{\theta}). \quad (37)$$

$\hat{y}(t_k/\bar{\theta})$  being the estimate of  $y(t_k)$  using parameters of  $\bar{\theta}$  in (8).  $f'(\bar{\theta})$  and  $f''(\bar{\theta})$  are defined by

$$f'(\bar{\theta}) = -2 \sum_{k=1}^K \tilde{y}(t_k/\bar{\theta}) S(t_k/\bar{\theta}) \quad (38)$$

$$f''(\bar{\theta}) = 2 \sum_{k=1}^K S(t_k/\bar{\theta}) S(t_k/\bar{\theta})^T \quad (39)$$

$$S(t_k/\bar{\theta}) = \frac{d\hat{y}(t_k/\bar{\theta})}{d\bar{\theta}} \quad (40)$$

Due to the parametrization of subsection 3.1, the derivative of  $\hat{y}(t_k/\bar{\theta})$  with respect to components of  $\bar{\theta}$ , and particularly with respect to the commensurate order, is easy to compute.

These two processes can obviously be used successively: the first process allows obtaining an initial value, the second process yields a better estimate. A numerical simulation is proposed in the next section which allows the estimation of the commensurate order.

## 4. NUMERICAL EXAMPLE

Data are generated according to (4), (6) and (7) with the following system:

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^{v^*}}{r} + 1\right) \left(\frac{s^{2v^*}}{\omega_o^2} + 2\zeta \frac{s^{v^*}}{\omega_o} + 1\right)} \quad (41)$$

where  $v^* = \frac{5}{6}$ ,  $r = 4\pi$ ,  $\omega_o = 20\pi$  and  $\zeta = 0.2$ . The threshold  $C$  is equal to zero.

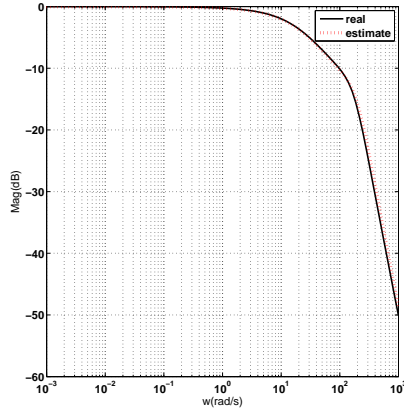


Fig. 4. First experiment: magnitude Bode diagrams of the system and the model.

The input  $u(t)$  is designed as proposed in Assumption 4: it corresponds to the sum of three sinusoids with  $\omega_1 = 1\text{rad/s}$ ,  $\omega_2 = 50\text{rad/s}$ ,  $\omega_3 = 100\text{rad/s}$  and  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ . In the following experiments, take  $\omega_{\text{known}} = \omega_1 = 1\text{rad/s}$ . For each experiment the noise on the output  $d_k$  is a white gaussian noise, the sampling rate is  $2 * 10^2\text{Hz}$ , and the total simulation time is equal to 10s.

In a first experiment the magnitude of the noise is adjusted so as to have a Signal to Noise Ratio (SNR) equal to 20dB. The objective here is to show the effectiveness of the proposed algorithm.

Fig. 3 shows the plot of the real output  $y(t)$  and its estimate with the model obtained in step I. Fig. 4 represents the Bode plots of the system and of the model estimated in step II. These results show that the high resolution output can be estimated correctly with a constant estimation of system transfer function.

In a second experiment the influence of the noise is investigated. The magnitude of the noise is adjusted so as to have a SNR from 10dB to 40dB with a step of 5dB, a Monte Carlo simulation is carried out with 100 runs for each SNR. Define the Mean Square Error (MSE) on parameter vector  $\theta^*$  as

$$MSE = \text{mean}\|\theta^* - \hat{\theta}\|^2 \quad (42)$$

The MSE is depicted in Fig. 5 as a function of SNR. It appears that the impact of the noise decreases with the increase of SNR.

In a third experiment strategies introduced in subsection 3.4 for the estimation of the commensurate order are investigated. The magnitude of the noise is adjusted so as to have SNR= 20dB.

A Monte Carlo simulation is carried out with 100 runs, for each one the first estimation process is applied with a commensurate order varying from 0.5 to 0.95 with a step of 0.025. Fig. 6 presents  $J(v)$  (defined in (35)) as a function of the commensurate order of the estimated model for each run. The mean of

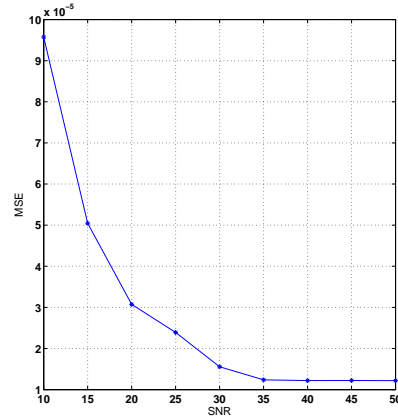


Fig. 5. Second experiment:  $MSE = \text{mean}\|\theta^* - \hat{\theta}\|^2$  as a function of SNR.

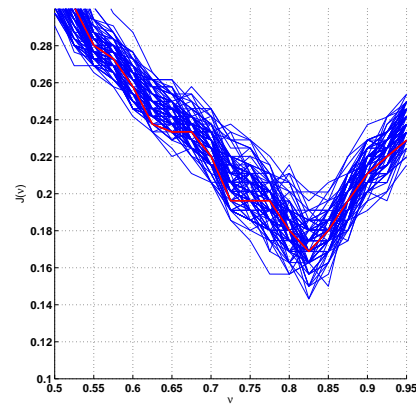


Fig. 6. Third experiment:  $J(v)$  (35) as a function of the commensurate order for 100 runs (one realization in red).

curves seems minimal for  $v = v^*$  but, due variance induced by the noise, the estimation of  $v^*$  remains difficult.

The second estimation process, using the Marquardt algorithm, is applied with an initial value  $v = 0.5$ . Fig. 7 presents the estimate of  $v^*$  over 20 iterations for each run. It appears that it is easier to estimate the commensurate order with this second strategy, estimates converge not far from  $v^*$ .

## 5. CONCLUSION

In this paper, an identification algorithm has been proposed for commensurate fractional order systems. This algorithm is dedicated to the original context of identification from binary measurements on the output. The algorithm requires the use of a sum of sinusoids on the input of the system. It can be applied if the commensurate order is known or not. Performance of

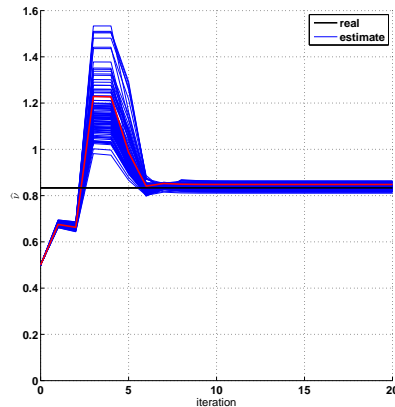


Fig. 7. Third experiment: estimate of  $v^*$  using the Marquardt algorithm for 100 runs (one realization in red).

the proposed method is illustrated through several numerical simulations.

#### REFERENCES

- Aoun, M., Malti, R., Levron, F., and Oustaloup, A. (2007). Synthesis of fractional laguerre basis for system approximation. *Automatica*, 43(9), 1640–1648.
- Benchellal, A., Poinot, T., and Trigeassou, J. (2006). Approximation and identification of diffusive interfaces by fractional models. *Signal Processing*, 86(10), 2712–2727.
- Colinet, E. and Juillard, J. (2010). A weighted least-squares approach to parameter estimation problems based on binary measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(1), 148–152.
- Gabano, J., Poinot, T., and Kanoun, H. (2011). Identification of a thermal system using continuous linear parameter-varying fractional modeling. *IET Control Theory and Applications*, 5(7), 889–899.
- Goudjil, A., Pouliquen, M., Pigeon, E., Gehan, O., and M'Saad, M. (2015). Identification of systems using binary sensors via support vector machines. *IEEE Conference on Decision and Control, Osaka*.
- Guo, J. and Zhao, Y. (2013). Recursive projection algorithm on FIR system identification with binary-valued observations. *Automatica*, 49(11), 3396–3401.
- Jafari, K., Juillard, J., and Roger, M. (2012). Convergence analysis of an online approach to parameter estimation problems based on binary observations. *Automatica*, 48(11), 2837–2842.
- Li, G. and Wen, C. (2012). Identification of Wiener systems with clipped observations. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 60(7), 3845–3852.
- Lin, J. (2001). Modelisation et identification de systemes d'ordre non entier. *PhD thesis Universite de Poitiers, France*.
- Liu, X., Wang, J., and Zhang, Q. (2011). A quadratic programming-based method for quantized system identification. *IFAC World Congress, Milano*.
- Malti, R. and Victor, S. (2015). CRONE toolbox for system identification using fractional differentiation models. *IFAC Symposium on System Identification, Beijing*.
- Malti, R., Victor, S., and Oustaloup, A. (2008a). Advances in system identification using fractional models. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 3(2).
- Malti, R., Victor, S., Oustaloup, A., and Garnier, H. (2008b). An optimal instrumental variable method for continuous-time fractional order model identification. *IFAC World Congress, Seoul*.
- Marelli, D., You, K., and Fu, M. (2013). Identification of ARMA models using intermittent and quantized output observations. *Automatica*, 49(2), 360–369.
- Matignon, D. (1998). Stability properties for generalized fractional differential systems. *ESAIM : Proceedings, Fractional Differential Systems: Models, Methods and Applications*, 5, 145–158.
- Mestrah, A., Pouliquen, M., and Pigeon, E. (2022). Two identification algorithms for state space modeling from binary output measurements. *Conference on Decision and Control, Cancun*.
- Nazarian, P., Haeri, M., and Tavazoei, M.S. (2010). Identifiability of fractional-order systems using input output frequency contents. *ISA Transactions*, 49(2), 207–214.
- Podlubny, I. (1999). *Fractional differential equations*. San Diego: Academic Press.
- Pouliquen, M., Goudjil, A., Gehan, O., and Pigeon, E. (2016). Continuous-time system identification using binary measurements. *IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas*.
- Pouliquen, M., Pigeon, E., Gehan, O., and Goudjil, A. (2019). Identification using binary measurements for IIR systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(2), 786–793.
- Prasad, R., Kothari, K., and Mehta, U. (2019). Flexible fractional supercapacitor model analyzed in time domain. *IEEE Access*, 7.
- Scholkopf, B. and Smola, A. (2001). *Learning With Kernels*. MIT Press, Cambridge.
- Son, Q. (2018). Recursive identification of systems with binary-valued outputs and with arma noises. *Automatica*, 93, 106–113.
- Steinwart, I. and Christman, A. (2008). *Support Vector Machines*. Springer, New York.
- Tavakoli-Kakhki, M. and Tavazoei, M. (2014). Estimation of the order and parameters of fractional order models from a noisy step response data. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 136(3).
- Vapnik, V. (1995). *The Nature of Statistical Learning Theory*. Springer Series in Statistics.
- Victor, S., Malti, R., Garnier, H., and Oustaloup, A. (2013). Parameter and differentiation order estimation in fractional

- models. *Automatica*, 49, 926–935.
- Wang, B., Li, S., Peng, H., and Liu, Z. (2015). Fractional-order modeling and parameter identification for lithium-ion batteries. *Journal of Power Sources*, 293(20), 151–161.
- Wang, L., Zhang, J., and Yin, G. (2003). System identification using binary sensors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(11), 1892–1907.

# B

## Bibliographie

### Sommaire

---

Références . . . . .	150
Liste des travaux . . . . .	157

---

# Références

- [BL02] Dietmar Bauer and Lennart Ljung. “Some Facts about the Choice of the Weighting Matrices in Larimore Type of Subspace Algorithms”. In: *Automatica* 38.5 (2002), pp. 763–773.
- [BJ12] Laurent Bourgois and Jérôme Juillard. “Convergence Analysis of an Online Approach to Parameter Estimation Problems based on Binary Noisy Observations”. In: *IEEE, 51th Conference on Decision and Control (CDC)* (2012), pp. 1506–1511.
- [CPR13] Vito Cerone, Dario Piga, and Diego Regruto. “Fixed-order FIR Approximation of Linear Systems from Quantized Input and Output Data”. In: *Systems & Control Letters* 62.12 (2013), pp. 1136–1142.
- [CZL12] Tianshi Chen, Yanlong Zhao, and Lennart Ljung. “Impulse Response Estimation with Binary Measurements: A Regularized FIR Model Approach”. In: *IFAC Proceedings Volumes* 45.16 (2012), pp. 113–118.
- [Chi06] Alessandro Chiuso. “Asymptotic Variance of Closed-Loop Subspace Identification Methods”. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 51.8 (2006), pp. 1299–1314.
- [CP05a] Alessandro Chiuso and Giorgio Picci. “Consistency Analysis of some Closed-Loop Subspace Identification Methods”. In: *Automatica* 41.3 (2005), pp. 377–391.
- [CP05b] Alessandro Chiuso and Giorgio Picci. “Prediction Error vs Subspace Methods in Closed Loop Identification”. In: *IFAC Proceedings Volumes* 38.1 (2005), pp. 506–511.
- [CJ09] Eric Colinet and Jérôme Juillard. “A Weighted Least-Squares Approach to Parameter Estimation Problems based on Binary Mea-



- surements”. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 55.1 (2009), pp. 148–152.
- [CW12] Balázs Csanád Csáji and Erik Weyer. “Recursive Estimation of ARX Systems Using Binary Sensors with Adjustable Thresholds”. In: *IFAC Proceedings Volumes* 45.16 (2012), pp. 1185–1190.
- [DV95] Bart De Moor and Peter Van Overschee. “Numerical Algorithms for Subspace State Space System Identification”. In: *Trends in Control: A European Perspective* (1995), pp. 385–422.
- [DPS11] Bruno Depraetere, Gregory Pinte, and Jan Swevers. “Identification of Linear Systems using Output Measurements with Only Two Possible Values”. In: (2011), pp. 1473–1478.
- [Dep+12] Bruno Depraetere et al. “Identification of Linear Systems with Binary Outputs Using Short Independent Experiments”. In: *IFAC Proceedings Volumes* 45.16 (2012), pp. 7–12.
- [Gil+08] Marion Gilson et al. “Instrumental Variable Methods for Closed-loop Continuous-time Model Identification”. In: *Identification of Continuous-time Models from Sampled Data* (2008), pp. 133–160.
- [God+11] Boris I Godoy et al. “On Identification of FIR Systems having Quantized Output Data”. In: *Automatica* 47.9 (2011), pp. 1905–1915.
- [GHS87] Gene H Golub, Alan Hoffman, and Gilbert W Stewart. “A Generalization of the Eckart-Young-Mirsky Matrix Approximation Theorem”. In: *Linear Algebra and its applications* 88 (1987), pp. 317–327.
- [Góm17] Juan Carlos Gómez. “Identification of IIR Systems with Binary-Valued Outputs and Lossy Memoryless Channels with Uncertainties”. In: *IEEE, 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)* (2017), pp. 17–22.
- [Gou+15] Abdelhak Goudjil et al. “Identification of Systems using Binary Sensors via Support Vector Machines”. In: *IEEE Conference on Decision and Control, Osaka* (2015), pp. 3385–3390.
- [GZZ11] Jin Guo, Ji-Feng Zhang, and Yanlong Zhao. “Adaptive Tracking Control of a Class of First-Order Systems with Binary-Valued Observations and time-Varying Thresholds”. In: *IEEE transactions on automatic control* 56.12 (2011), pp. 2991–2996.
- [GZZ12] Jin Guo, Ji-Feng Zhang, and Yanlong Zhao. “Adaptive Tracking via Binary-Valued Observations with Fixed Threshold”. In: *IFAC Proceedings Volumes* 45.16 (2012), pp. 1239–1244.

- [GZ13] Jin Guo and Yanlong Zhao. “Recursive Projection Algorithm on FIR System Identification with Binary-Valued Observations”. In: *Automatica* 49.11 (2013), pp. 3396–3401.
- [Guo+15a] Jin Guo et al. “Asymptotically Efficient Identification of FIR Systems with Quantized Observations and General Quantized Inputs”. In: *Automatica* 57.1 (2015), pp. 113–122.
- [Guo+15b] Jin Guo et al. “Recursive Identification of FIR Systems with Binary-Valued Outputs and Communication Channels”. In: *Automatica* 60.1 (2015), pp. 165–172.
- [HK66] Bin-Lun Ho and Rudolf Kálmán. “Effective Construction of Linear State-Variable Models from Input/Output Functions”. In: *Automatisierungstechnik* 14.1-12 (1966), pp. 545–548.
- [Jaf12] Kian Jafari. “Parameter Estimation Methods based on Binary Observations-Application to Micro-Electromechanical Systems (MEMS)”. PhD thesis. Supélec, (2012).
- [JJC10] Kian Jafari, Jérôme Juillard, and Eric Colinet. “A Recursive System Identification Method Based on Binary Measurements”. In: *IEEE, 49th Control and Decision Conference, Atlanta* (2010), pp. 1154–1158.
- [JJR12] Kian Jafari, Jérôme Juillard, and Morgan Roger. “Convergence Analysis of an Online Approach to Parameter Estimation Problems based on Binary Observations”. In: *Automatica* 48.11 (2012), pp. 2837–2842.
- [Jan03] Magnus Jansson. “Subspace Identification and ARX Modeling”. In: *IFAC Proceedings Volumes* 36.16 (2003), pp. 1585–1590.
- [Jan05] Magnus Jansson. “A New Subspace Identification Method for Open and closed Loop Data”. In: *IFAC Proceedings Volumes* 38.1 (2005), pp. 500–505.
- [JC07] Jerome Juillard and Eric Colinet. “Initialization of the BIMBO Self-Test Method using Binary Inputs and Outputs”. In: *IEEE, 46th Conference on Decision and Control* (2007), pp. 578–583.
- [Kai80] Thomas Kailath. *Linear Systems*. Vol. 156. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, (1980).
- [Kat05] Tohru Katayama. “Subspace Methods for System Identification”. In: *Springer* (2005).

- [Ke+22] Jieming Ke et al. “Recursive Identification of Set-Valued Systems under Uniform Persistent Excitations”. In: *arXiv preprint arXiv:2212.01777* (2022).
- [KC22] Vatsal Kedia and Debraj Chakraborty. “Fast Subspace Identification for Large Input-Output Data”. In: *American Control Conference (ACC)* (2022), pp. 3973–3978.
- [KR60] Andrei Nikolaevich Kolmogorov and Yu A Rozanov. “On Strong Mixing Conditions for Stationary Gaussian Processes”. In: *Theory of Probability & Its Applications* 5.2 (1960), pp. 204–208.
- [Lar90] Wallace E Larimore. “Canonical Variate Analysis in Identification, Filtering, and Adaptive Control”. In: *IEEE, 29th Conference on Decision and Control* (1990), pp. 596–604.
- [Lar97] Wallace E Larimore. “Canonical Variate Analysis in Control and Signal Processing”. In: *Statistical methods in control and signal processing* (1997), pp. 83–120.
- [LWN20] Alex S Leong, Erik Weyer, and Girish N Nair. “Identification of FIR Systems with Binary Input and Output Observations”. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 66.3 (2020), pp. 1190–1198.
- [LW12] Guoqi Li and Changyun Wen. “Identification of Wiener Systems with Clipped Observations”. In: *IEEE Transactions on Signal Processing* 60.7 (2012), pp. 3845–3852.
- [Li98] Ren-Cang Li. “Relative Perturbation Theory: II. Eigenspace and Singular Subspace Variations”. In: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 20.2 (1998), pp. 471–492.
- [LWZ+11] Xian’en Liu, Jiandong Wang, Qinghua Zhang, et al. “A Quadratic Programming-Based Method for Quantized System Identification”. In: *IFAC World Congress, Milano* 44.1 (2011), pp. 9052–9057.
- [Lju99] Lennart Ljung. *System Identification - Theory for the User*. Prentice-Hall, (1999).
- [MYF13] D. Marelli, K. You, and M. Fu. “Identification of ARMA Models using Intermittent and Quantized Output Observations”. In: *Automatica* 49 (2013), pp. 360–369.
- [Mas11] Elias Masry. “The Estimation of the Correlation Coefficient of Bivariate Data Under Dependence: Convergence Analysis”. In: *Statistics & Probability Letters* 81 (2011), pp. 1039–1045.

- [MWY14] Hongwei Mei, Le Yi Wang, and George Yin. “Almost Sure Convergence Rates for System Identification using Binary, Quantized, and Regular Sensors”. In: *Automatica* 50.8 (2014), pp. 2120–2127.
- [MPP21] Ali Mestrah, Mathieu Pouliquen, and Eric Pigeon. “Adaptation of Recursive Least Squares Identification for Binary Output Systems”. In: *IEEE, 9th International Conference on Systems and Control (2021)*, pp. 282–287.
- [MPP22] Ali Mestrah, Mathieu Pouliquen, and Eric Pigeon. “Two Identification Algorithms for State Space Modeling from Binary Output Measurements”. In: *IEEE, 61th Conference on Decision and Control (2022)*, pp. 2147–2152.
- [Mes+22] Ali Mestrah et al. “Subspace Identification from Binary Output Measurements”. In: *IEEE, IFAC, 8th International Conference on Control, Decision and Information Technologies 1 (2022)*, pp. 314–319.
- [Mes+23a] Ali Mestrah et al. “An Identification Algorithm for FIR Systems from Binary Output Measurements”. In: *IEEE, IFAC, 9th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (2023)*.
- [Mes+23b] Ali Mestrah et al. “Fractional System Identification using Binary Measurements”. In: *IFAC World Congress (2023)*.
- [Oua+22] Hicham Oualla et al. “Closed-loop System Parametric Identification based on Binary Measurement on the Input and the Output”. In: *IEEE, IFAC, 8th International Conference on Control, Decision and Information Technologies 1 (2022)*, pp. 681–686.
- [OM96] Peter Van Overchee and Bart De Moor. “Subspace Identification for Linear System”. In: *Kluwer Academic Publishers (1996)*.
- [Pha+95] Minh Phan et al. “Improvement of Observer/Kalman Filter Identification (OKID) by Residual Whitening”. In: *Journal of Vibration and Acoustics* 117.2 (1995), pp. 232–239.
- [Pou+16a] Mathieu Pouliquen et al. “Continuous-Time System Identification using Binary Measurements”. In: *IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas (2016)*, pp. 3787–3792.
- [Pou+16b] Mathieu Pouliquen et al. “Recursive System Identification Algorithm using Binary Measurements”. In: *European Control Conference, Aalborg (2016)*, pp. 1353–1358.

- [Pou+18] Mathieu Pouliquen et al. “Self-Identification Algorithm for Zeolite-Based Thermal Capacity Gas Sensor”. In: *Microsystem Technologies* (2018), pp. 1–7.
- [Pou+19] Mathieu Pouliquen et al. “Identification using Binary Measurements for IIR Systems”. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 65.2 (2019), pp. 786–793.
- [Pou+21] Mathieu Pouliquen et al. “Impulse Response Identification from Input/Output Binary Measurements”. In: *Automatica* 123 (2021), p. 109307.
- [QLL05] Si-Zhao Joe Qin, Weilu Lin, and Lennart Ljung. “A Novel Subspace Identification Approach with Enforced Causal Models”. In: *Automatica* 41.12 (2005), pp. 2043–2053.
- [Sch+90] Charles Schaper et al. “Identification of Chemical Processes using Canonical Variate Analysis”. In: *IEEE, 29th Conference on Decision and Control* (1990), pp. 605–610.
- [SM01] Ruijie Shi and John Frederick MacGregor. “A Framework for Subspace Identification Methods”. In: *IEEE Proceedings of the American Control Conference* 5 (2001), pp. 3678–3683.
- [Son18] Qijiang Son. “Recursive Identification of Systems with Binary-Valued Outputs and with ARMA Noises”. In: *Automatica* 93 (2018), pp. 106–113.
- [VD94] Peter Van Overschee and Bart De Moor. “N4SID Subspace Algorithms for the Identification of Combined Deterministic Stochastic System”. In: *Automatica* 30.1 (1994), pp. 75–93.
- [VD95] Peter Van Overschee and Bart De Moor. “A Unifying Theorem for Three Subspace System Identification Algorithms”. In: *Automatica* 31.12 (1995), pp. 1853–1864.
- [Ver94] Michel Verhaegen. “Identification of the Deterministic Part of MIMO State Space Models given in Innovations from Input-Output Data”. In: *Automatica* 30.1 (1994), pp. 61–74.
- [WY07] Le Yi Wang and George Yin. “Asymptotically Efficient Parameter Estimation Using Quantized Output Observations”. In: *Automatica* 43.7 (2007), pp. 1178–1191.
- [WYZ+06] Le Yi Wang, George Yin, Ji-Feng Zhang, et al. “Joint Identification of Plant Rational Models and Noise Distribution Functions using Binary-Valued Observations”. In: *Automatica* 42.4 (2006), pp. 535–547.

- [WZY+03] Le Yi Wang, Ji-Feng Zhang, George Yin, et al. "System Identification using Binary Sensors". In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 48.11 (2003), pp. 1892–1907.
- [Wan+08] Le Yi Wang et al. "Identification Input Design for Consistent Parameter Estimation of Linear Systems with Binary-Valued Output Observations". In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 53.4 (2008), pp. 867–880.
- [Wan+10] Le Yi Wang et al. *System identification with quantized observations*. Springer, (2010).
- [Wed72] Per-Åke Wedin. "Perturbation Bounds in Connection with Singular Value Decomposition". In: *BIT Numerical Mathematics* 12 (1972), pp. 99–111.
- [Wig98] Torbjørn Wigren. "Adaptive Filtering using Quantized Output Measurements". In: *IEEE transactions on signal processing* 46.12 (1998), pp. 3423–3426.
- [ZWZ21] Hang Zhang, Ting Wang, and Yanlong Zhao. "Asymptotically Efficient Recursive Identification of FIR Systems with Binary-Valued Observations". In: *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems* 51.5 (2021), pp. 2687–2700.
- [ZWB18] Yanlong Zhao, Ting Wang, and Wenjian Bi. "Consensus Protocol for Multiagent Systems With Undirected Topologies and Binary-Valued Communications". In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 64.1 (2018), pp. 206–221.

# Liste des Travaux

## Conférences internationales

- **Ali Mestrah**, Mathieu Pouliquen and Eric Pigeon. “Adaptation of recursive least squares identification for binary output systems”. In: *IEEE, International Conference on Systems and Control (ICSC), Caen, France (2021)*.
- **Ali Mestrah**, Mathieu Pouliquen, Eric Pigeon and Hicham Oualla. “Subspace Identification from Binary Output Measurements”. In: *IEEE-IFAC, International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT), Istanbul, Turkey (2022)*.
- **Ali Mestrah**, Mathieu Pouliquen and Eric Pigeon. “Two Identification Algorithms for State Space Modeling from Binary Output Measurements”. In: *IEEE, Conference on Decision and Control (CDC), Cancun, Mexico (2022)*.
- Hicham Oualla, Mathieu Pouliquen, Miloud Frikel, Said Safi, and **Ali Mestrah**. “Closed-loop system parametric identification based on binary measurement on the input and the output”. In: *IEEE-IFAC, International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT), Istanbul, Turkey (2022)*.
- **Ali Mestrah**, Mathieu Pouliquen, Rachid Malti and Eric Pigeon. “Fractional System Identification using Binary Measurements”. In: *IFAC World Congress, Yokohama, Japon (2023)*.
- **Ali Mestrah**, Hicham Oualla, Mathieu Pouliquen and Eric Pigeon. “An Identification Algorithm for FIR Systems from Binary Output Measurements”. In: *IEEE-IFAC, International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT), Rome, Italy (2023)*.





## Identification de modèles sous forme de représentation d'état pour les systèmes à sortie binaire

**Résumé :** Cette thèse porte sur la modélisation paramétrique des systèmes linéaires invariants à partir de mesures binaires de la sortie. Ce problème de modélisation est abordé via l'usage des méthodes des sous-espaces. Ces méthodes permettent l'estimation de modèles sous forme de représentation d'état, un des avantages de ces méthodes étant que leur mise en œuvre ne nécessite pas la connaissance préalable de l'ordre du système. Ces méthodes ne sont initialement pas adaptées au traitement de données binaires, l'objectif de cette thèse est ainsi leur adaptation à ce contexte d'identification. Dans cette thèse nous proposons trois méthodes des sous-espaces. Les propriétés de convergence de deux d'entre elles sont établies. Des résultats de simulations de Monte-Carlo sont présentés afin de montrer les bonnes performances, mais aussi les limites, de ces méthodes.

---

**Mots clés :** Identification, méthodes des sous-espaces, systèmes à sortie binaire.

## Model identification as state representation for binary output systems

**Abstract:**

This thesis focuses on parametric modeling of invariant linear systems from binary output measurements. This identification problem is addressed via the use of subspace methods. These methods allow the estimation of state-space models, an added benefit of these methods being the fact that their implementation does not require the prior knowledge of the order of the system. These methods are initially adapted to high resolution data processing, the objective of this thesis is therefore their adaptation to the identification using binary measurements. In this thesis we propose three subspace methods. Convergence properties of two of them are established. Monte Carlo simulation results are presented to show the good performance, but also limits, of these methods.

---

**Keywords:** Identification, subspaces methods, binary output system.