



Reptation et conditionnement de processus de Lévy

Thomas Pellas

► To cite this version:

Thomas Pellas. Reptation et conditionnement de processus de Lévy. Mathématiques générales [math.GM]. Université d'Angers, 2023. Français. $\langle$ NNT : 2023ANGE0032 $\rangle$. $\langle$ tel-04470752 $\rangle$

HAL Id: tel-04470752

<https://theses.hal.science/tel-04470752v1>

Submitted on 21 Feb 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

THÈSE DE DOCTORAT

DE L'UNIVERSITÉ D'ANGERS
COMUE UNIVERSITÉ BRETAGNE LOIRE

ÉCOLE DOCTORALE N° 601
*Mathématiques et Sciences et Technologies
de l'Information et de la Communication*
Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*

Par

Thomas PELLAS

*Reptation et conditionnement
de processus de Lévy*

Thèse présentée et soutenue à Angers, le 2 novembre 2023 à 15h
Unité de recherche : LAREMA, UMR CNRS 6093
Thèse N° : 181249

Rapporteurs avant soutenance :

Aleksandar MIJATOVIĆ Professeur, Université de Warwick
Christophe PROFETA Maître de conférences, Université d'Évry Val d'Essonne

Composition du jury :

Président :	Kilian RASCHEL	Professeur (DR), Université d'Angers
Examineurs :	Rodolphe GARBIT	Maître de Conférence, Université d'Angers
	Hélène GUERIN	Professeure, Université du Québec
	Nathalie KRELL	Maître de Conférence, Université de Rennes 1
	Victor RIVERO	Professeur, CIMAT

Directeur de thèse : Loïc CHAUMONT Professeur, Université d'Angers

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier Loïc Chaumont, mon directeur de thèse, sans lequel ce manuscrit n'existerait pas. En 2016, alors que mon DEA en probabilités avait été obtenu seize ans auparavant, que je travaillais et étais le père de deux enfants en bas âge, il a décidé de m'accorder sa confiance. Depuis, Loïc m'a fait découvrir de merveilleux paysages, partageant sans restriction ses connaissances et intuitions mathématiques. Il m'a constamment encouragé, s'adaptant à mon rythme, valorisant la moindre de mes idées, faisant toujours preuve d'une grande disponibilité et écoute. Je le remercie également pour la franchise et la simplicité qu'il a d'emblée instaurées dans notre relation. Pour tout cela, je lui exprime ma plus profonde gratitude.

Je suis très reconnaissant envers Christophe Profeta et Aleksandar Mijatović d'avoir accepté de rapporter cette thèse et je les remercie pour leur lecture attentive de mon manuscrit et leurs commentaires éclairants.

Pour l'intérêt qu'ils portent à mes travaux, je remercie chaleureusement les différents membres du jury : Hélène Guérin, qui aura assisté à ma soutenance de mémoire de DEA et, quelques 23 années plus tard, à ma soutenance de thèse ; Victor Rivero, que j'ai eu la chance de rencontrer en 2000 rue du Chevaleret alors que nous faisions nos premiers pas dans le monde des processus ; Rodolphe Garbit, qui a accepté de faire partie de mon comité de suivi de thèse aux côtés de Victor et qui m'a toujours chaleureusement accueilli lors de mes passages au LAREMA ; Nathalie Krell, dont je suis heureux d'avoir fait la connaissance lors de la conférence sur les processus de branchement qui s'est tenue à Angers en mai ; Et enfin, Kilian Raschel, qui me fait l'honneur de présider ce jury.

Je remercie Miguel Martinez, mon ami depuis bientôt 30 ans, de m'avoir soutenu tout au long de ces années de thèse. Je le remercie pour nos innombrables discussions et échanges, crayon à la main, qui m'ont tant fait progresser, ses questions toujours pertinentes, sa relecture minutieuse de ce manuscrit et son enthousiasme constant.

Je remercie l'ensemble des membres du LAREMA de m'avoir accueilli au sein de leur laboratoire, notamment Alexandra Le Petitcorps pour son aide concernant toutes les questions administratives et organisationnelles.

Je remercie les professeurs de mathématiques dont j'ai un jour croisé la trajectoire et en particulier Marc Yor, Pierre Priouret, Zhan Shi, Jean Bertoin, Sylvie Méléard, Denis Talay, Jean-Pierre Marco, François Nicoleau, Bernard Landreau, Mohammed El Amrani, Michel Alessandri et François Ducrot.

Je souhaite avoir une pensée plus personnelle pour mes amis de toujours : Matthieu, Alhassane, Philippe, Patricia, Eve, Marc, Zoé, Sarah et leurs enfants, en particulier Lucie et Aïda. Et pour ma « famille » mancelle : Émilie, Ignacio, Myriam, Benjamin, Annabelle, Nadège, Anthony, Gilles, Núria, Amélie, Guillaume, Sébastien, Daisy, Rodolphe, Aurélie et leurs enfants. Je remercie mes collègues et amis si chers du lycée Bellevue au Mans pour leurs encouragements ainsi que l'ensemble de mes élèves qui, jour après jour, m'insufflent tant d'énergie.

Je remercie du fond du cœur ma famille, à commencer par Noëlle, Marc, Maurice, Michèle, Adeline, Joëlle, Dominique, Thomas et Claire, d'avoir toujours été à mes côtés.

Enfin, je remercie Aurélie, avec laquelle j'ai le bonheur de partager ma vie, pour son soutien si précieux ainsi que mes enfants, Anna et Tristan, pour l'amour et le courage qu'ils me donnent.

Je pense à Cybèle et Sébastien, qui me manquent tant, et à Maryline.

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Reptation	7
1.2	Conditionnement	10
1.3	Présentation des chapitres	12
2	Rappels sur les processus de Lévy	15
2.1	Quelques éléments historiques	15
2.1.1	Paul Lévy	15
2.1.2	Processus à accroissements indépendants et lois ID	16
2.2	Lois infiniment divisibles et processus de Lévy	18
2.2.1	Notations	18
2.2.2	Formule de Lévy-Khintchine et premières propriétés	18
2.2.3	Décomposition de Lévy-Itô et nature des trajectoires	22
2.2.4	Processus stables	25
2.3	Propriété de Markov	28
2.3.1	Définitions	28
2.3.2	Quasi-continuité à gauche	30
2.3.3	Dualité	32
2.4	Théorie des fluctuations	33
2.4.1	Polarité et régularité	33
2.4.2	Temps local	34
2.4.3	Processus d'échelle et mesure d'Itô	36
2.4.4	Factorisation de Wiener-Hopf	37
2.5	Reptation à travers un niveau fixe	37
2.5.1	Les résultats de Millar	38
2.5.2	Temps de reptation	39
2.5.3	Résultats complémentaires	40
2.6	Conditionnement de processus de Lévy	41
2.6.1	h -transformation de Doob	41
2.6.2	Exemples	43
3	Résultats principaux	47
3.1	Reptation à travers une courbe	47
3.1.1	Subordinateurs bivariés	48
3.1.2	Processus de Lévy en leurs maximums	55
3.1.3	Processus de Lévy conditionnés à rester positif	59
3.1.4	Processus d'Ornstein-Uhlenbeck α -stable	59
3.1.5	Questions ouvertes	60
3.2	Processus de Lévy conditionnés à être absorbés par une courbe	63
3.2.1	Subordinateurs bivariés	63
3.2.2	Processus de Lévy en leurs maximums	67

4	Creeping through curves	73
4.1	Main results	73
4.1.1	Creeping of bivariate subordinators through curves	73
4.1.2	Creeping of real Lévy processes at their supremum	75
4.1.3	Creeping of Lévy processes conditioned to stay positive	78
4.2	Examples	79
4.3	Application : creeping of α -stable Ornstein-Uhlenbeck processes	80
4.4	Proof of Theorem 4.1.1 and Proposition 4.1.1	81
4.4.1	Proof of the first assertion in Theorem 4.1.1	81
4.4.2	Preliminary lemmas	82
4.4.3	Proof of the lower bound in identities (4.1) and (4.2)	84
4.4.4	Proof of the upper bound in identities (4.1) and (4.2)	86
4.4.5	Proof of Proposition 4.1.1	88
4.4.6	On assumptions of Theorem 4.1.1	88
4.5	Proof of Theorem 4.1.2, Corollary 4.1.3 and Proposition 4.1.2	89
4.5.1	Some reminders in fluctuation theory	89
4.5.2	Proof of Theorem 4.1.2	91
4.5.3	On assumptions of Theorem 4.1.2	91
4.5.4	Proof of Corollary 4.1.3	92
4.5.5	Proof of Proposition 4.1.2	93
4.6	Proof of Theorem 4.1.3	93
5	Conditioning Lévy processes to be absorbed by curves	95
5.1	Main results	95
5.1.1	Bivariate sudordinators conditioned to be absorbed by a curve	95
5.1.2	Lévy processes conditioned to be absorbed by a curve at their supremum	98
5.2	Proofs	101
5.2.1	Proof of Theorem 5.1.1	101
5.2.2	Proof of Proposition 5.1.1	102
5.2.3	Proof of Theorem 5.1.2	103
5.2.4	Proof of Theorem 5.1.3	103
5.2.5	Proof of Theorem 5.1.4	106
5.2.6	Proof of Corollary 5.1.1	107
5.2.7	Proof of Proposition 5.1.2	107
5.2.8	Proof of Proposition 5.1.3	107
5.2.9	Proof of Corollary 5.1.2	108
5.2.10	Proof of Theorem 5.1.5	108
5.2.11	Proof of Theorem 5.1.6	109
	Références	111

Chapitre 1

Introduction

Un processus de Lévy est un processus stochastique dont les trajectoires sont càdlàg et les accroissements indépendants et stationnaires. Un tel processus peut se penser comme l'analogie en temps continu d'une marche aléatoire. La classe des processus de Lévy constitue une sous-classe intéressante de celle des processus de Markov : elle est suffisamment grande pour contenir des objets riches qui interviennent fréquemment en théorie des probabilités tels que le mouvement brownien, les subordinateurs, les processus de Poisson ou les processus α -stables et suffisamment petite pour que chacun de ses éléments admette une caractérisation concise, via la formule de Lévy-Khintchine. Les processus de Lévy trouvent des applications dans des domaines variés : physique, biologie, théorie de l'information, files d'attente, évolution de populations, mesure du risque, finance, percolation, fragmentation, etc. En éthologie, ils permettent de modéliser les déplacements de certains animaux, comme par exemple ceux d'un requin en recherche de nourriture.

En 1934, à l'occasion des recherches qu'il mène sur les lois infiniment divisibles, Paul Lévy introduit, dans son article intitulé *Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes* [48], les processus à accroissements indépendants. Il montre par la suite une correspondance entre les lois infiniment divisibles et les processus à accroissements indépendants et stationnaires. Si l'apparition des processus de Lévy remonte donc aux années 1930, l'étude de la nature et du comportement de leurs trajectoires ne s'est réellement développée qu'à partir de la seconde moitié du vingtième siècle. Cette étude a soulevé et soulève encore de nombreuses questions inhérentes à la complexité des trajectoires d'un processus de Lévy. Par exemple, un processus de Lévy peut posséder une infinité de sauts en un temps fini. La théorie qui regroupe les propriétés des trajectoires des processus de Lévy s'appelle la *théorie des fluctuations* des processus de Lévy. Même si des questions demeurent ouvertes, de nombreux résultats ont été établis et peuvent, pour partie, se trouver dans les ouvrages de Bertoin [5], Doney [24], Kyprianou [40] ou Sato [65].

Dans cette thèse, nous nous intéressons essentiellement à deux questions qui appartiennent à la théorie des fluctuations des processus de Lévy : la reptation d'un processus à travers une courbe et le conditionnement d'un processus à atteindre une courbe. Dans les Sections 1.1 et 1.2, nous présentons brièvement nos résultats concernant ces deux questions et dans la Section 1.3, nous donnons un plan de notre manuscrit.

1.1 Reptation

Un processus de Lévy X à valeurs dans $\mathbb{R}$ partant de 0 *rampe vers le haut à travers un niveau* $x > 0$ (resp. *vers le bas à travers un niveau* $x < 0$) si

$$\mathbb{P}(X_{\tau_x^+} = x) > 0, \quad (1.1)$$

où $\tau_x^+ := \inf\{t > 0 : X_t > x\}$ (resp. $\mathbb{P}(X_{\tau_x^-} = x) > 0$ où $\tau_x^- := \inf\{t > 0 : X_t < x\}$). Cette question de la reptation d'un processus de Lévy à travers un niveau fixe est abordée pour la première fois par Millar [54] en 1973 même si le terme de *reptation* n'apparaîtra que plus tard dans un article de Rogers [63], en 1984. Dans le cas où $\mathbb{P}(X_{\tau_x^+} = x) = 0$, Millar dit que *X saute par-dessus la frontière à sa première sortie de $(-\infty, x]$* et, dans le cas où $\mathbb{P}(X_{\tau_x^+} = x) > 0$, que *X a des passages continus à travers le niveau x* . Il montre notamment que s'il existe $x > 0$ tel que (1.1) est vraie, alors (1.1) est vraie pour tout $x > 0$. Dans ce cas, nous dirons que *X rampe vers le haut*. Dans l'abstract de son article, Millar précise qu'il fournit « *une solution raisonnablement complète* » à la question de la reptation d'un processus de Lévy à travers un niveau fixe. Néanmoins, dans le cas où X est à variation non bornée, le critère de reptation donné par Millar a le défaut d'impliquer à la fois l'exposant caractéristique Ψ de X et sa mesure de Lévy π . Dans sa thèse intitulée *Simplifiez vos Lévy en titillant la factorisation de Wiener-Hopf*, Vigon [73] note ce défaut et y remédie en fournissant un critère ne faisant intervenir que la mesure de Lévy π du processus. Les principaux résultats de Millar et Vigon concernant la reptation peuvent se résumer comme suit. Si X n'est pas un processus de Poisson composé, X rampe vers le haut ssi l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- (i) X est à variation bornée et admet un drift strictement positif.
- (ii) X a une composante brownienne non nulle.
- (iii) X est à variation non bornée, a une composante brownienne nulle et sa mesure de Lévy π vérifie

$$\int_0^1 \frac{x}{\int_{-x}^0 \bar{\pi}_1(u) du} \bar{\pi}(x) dx < \infty \quad (1.2)$$

où, pour $x \in \mathbb{R}$, $\bar{\pi}(x) = \int_{\mathbb{R}} (\mathbb{I}_{\{0 < x \leq u\}} + \mathbb{I}_{\{u \leq x < 0\}}) d\pi(u)$ et pour $x \in [-1, 0)$, $\bar{\pi}_1(x) = \int_{-1}^x \bar{\pi}(u) du$.

Intuitivement, ce dernier critère arbitre une compétition entre la fréquence des sauts positifs et celle des sauts négatifs. Notons que X rampe à la fois vers le haut et vers le bas ssi X admet une composante brownienne non nulle.

Une notion liée à celle de *reptation à travers un niveau* est celle de *point atteint*. Un point $x \in \mathbb{R}$ est dit atteint par le processus X si $\mathbb{P}(\exists t > 0, X_t = x) > 0$. Si X rampe à travers x , alors X atteint le niveau x . Et lorsque X est un subordonateur, la réciproque est vraie. Kesten, qui étudie la question des points atteints en 1968, voir [37], fait une remarque fondamentale à Millar concernant la reptation : le problème de la reptation d'un processus de Lévy X en $x > 0$ est équivalent à celui de la reptation du processus des hauteurs d'échelle ascendant H de X . En effet, cette remarque repose sur le fait que $H_{S_x^+} = X_{\tau_x^+}$, où $S_x^+ = \inf\{t : H_t > x\}$. Or Neveu [56] et Kesten [37] ont montré dans les années 1960 qu'un subordonateur rampe (vers le haut) ssi il a un drift strictement positif. De plus, ces auteurs ont également montré que si $\mathcal{R}_H := \overline{\{H_t : t \geq 0\}}$ désigne l'image du subordonateur H , alors ce dernier rampe ssi la mesure de Lebesgue de $\mathcal{R}_H$ est strictement positive. En résumé, si λ désigne la mesure de Lebesgue et d_H le drift du subordonateur H , nous avons les équivalences suivantes :

$$X \text{ rampe vers le haut en } x \iff H \text{ rampe en } x \iff d_H > 0 \iff \lambda(\mathcal{R}_H) > 0.$$

Enfin, Neveu [56] a établi que si $d_H > 0$, la mesure de potentiel de H admet une densité sur $(0, \infty)$, disons w , qui vérifie

$$\mathbb{P}(X_{\tau_x^+} = x) = d_H w(x). \quad (1.3)$$

La question de la reptation vers le haut d'un processus de Lévy X peut donc s'énoncer de la manière suivante : quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes sur les caractéristiques de X pour que

le drift d_H de son processus des hauteurs d'échelle ascendant soit strictement positif?

Bien plus récemment, en 2016, Griffin et Maller [31] ont étudié la loi du temps de reptation, i.e. la loi du temps de premier passage au-dessus de x conditionnellement à l'événement $\{X_{\tau_x^+} = x\}$. Les résultats de Neveu, Kesten, Millar et Vigon apparaissent également, mais de manière moins directe, dans divers articles portant sur les processus de Lévy au cours de ces dernières années. Citons par exemple ceux de Mijatović et Pistorius [55] en 2012 sur une sextuple loi de premier passage du processus réfléchi $\bar{X} - X$ d'un processus de Lévy X complètement asymétrique au-dessus d'un niveau x , ceux de Grzywny [32] en 2019 sur l'espérance du temps de sortie d'un intervalle de certains processus de Lévy ou encore ceux de Bang *et al.* [3] en 2022 sur la régularité de l'enveloppe convexe des trajectoires d'un processus de Lévy.

En revanche, avant nos travaux, aucun résultat sur la reptation d'un processus de Lévy à travers le graphe d'une fonction n'existait en dehors de celui établi dans un cas particulier en 2015 par Chi [21]. Ce dernier montre que si X est un subordonateur admettant, pour tout $t > 0$, une densité p_t telle que l'application $(t, x) \mapsto p_t(x)$ soit continue sur $(0, \infty)^2$ et f est une fonction dérivable, décroissante sur $(0, \infty)$ et telle que $f(0^+) > 0$, alors, pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(X_{T_f} = f(T_f), T_f \in dt) = -f'(t)p_t(f(t))dt,$$

où $T_f := \inf\{t > 0 : X_t > f(t)\}$. Dans cette thèse, nous généralisons ce résultat dans plusieurs directions.

La première partie de notre travail s'intéresse essentiellement à la reptation d'un processus de Lévy X à travers le graphe d'une fonction continue et décroissante. Pour appréhender cette question, nous avons été amené à étudier, dans un premier temps, le cas d'un subordonateur bivarié pour ensuite appliquer nos résultats au processus d'échelle ascendant (L^{-1}, H) de X . Soit donc (Y, Z) un subordonateur bivarié, i.e. un processus de Lévy issu de $(0, 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ dont chacune des coordonnées est croissante, et $f : (0, \infty) \mapsto (0, \infty)$ une fonction continue et décroissante. Nous donnons une expression de la probabilité que la trajectoire de $\{(Y_t, Z_t) : t > 0\}$ traverse continûment le graphe Γ de f défini par $\Gamma := \{(t, f(t)) : t > 0\}$, i.e.

$$\mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), u_0 < Y_S < u_1),$$

où $S := \inf\{t > 0 : Z_t > f(Y_t)\}$, pour tout $0 \leq u_0 < u_1 \leq \infty$. Cette expression dépend des drifts de Y et Z et de la densité de la mesure de renouvellement du processus (Y, Z) . Nous renvoyons au Théorème 3.1.1 pour un énoncé précis de ce résultat. L'expression obtenue montre en particulier qu'une condition nécessaire pour que le processus (Y, Z) rampe à travers le graphe de f est que l'un des drifts de Y ou Z au moins soit strictement positif. Nous interprétons ensuite l'expression de la probabilité de reptation obtenue comme la circulation d'un champ de vecteurs, qui dépend de la mesure de renouvellement et du drift (d_Y, d_Z) du processus (Y, Z) , le long du graphe de la fonction f . Cette approche donne un éclairage géométrique à la probabilité de reptation du processus à travers la courbe et permet de définir une nouvelle forme de reptation que nous appelons *reptation directionnelle*, ou encore *reptation vectorielle*.

Notre résultat concernant les subordonateurs bivariés est ensuite utilisé pour déterminer une expression de la probabilité qu'un processus de Lévy X rampe en son maximum à travers le graphe d'une fonction f . Plus précisément, nous définissons le premier temps de passage de X au-dessus du graphe de f par

$$T_f := \inf\{t > 0 : X_t > f(t)\}.$$

et donnons ensuite une expression, en fonction de la densité de la mesure de renouvellement du subordonateur d'échelle ascendant (L^{-1}, H) , où

$$\mathbb{P}(X_{T_f} = \bar{X}_{T_f} = f(T_f), t_0 < T_f < t_1),$$

pour tout $0 \leq t_0 < t_1 \leq \infty$, où $\bar{X}_{T_f} = \sup_{t \leq T_f} X_t$. Notons que l'unique hypothèse faite dans ce théorème est que la mesure de renouvellement de (L^{-1}, H) admet une densité. Nous montrons que cette hypothèse est vérifiée dès que X_t admet une densité bornée pour tout $t > 0$ et donnons des exemples de calcul explicite de la probabilité de reptation de X à travers le graphe de certaines fonctions dans le cas où X est le mouvement brownien standard et où X est un subordonateur stable d'indice $1/2$. Notre résultat montre également que cette probabilité est composée de deux termes. Le premier indique la contribution du processus des *hauteurs* d'échelle ascendant et mesure la probabilité que le processus X rampe *vers le haut*, la fonction f agissant comme un plafond, une barrière horizontale. Ce premier terme traduit la reptation usuelle, i.e. une reptation « vers le haut ». Le second terme indique quant à lui la contribution du processus des *temps* d'échelle ascendant et mesure la probabilité que le processus rampe *vers l'avant*, la fonction f agissant alors comme un mur, une barrière verticale. Ce second terme traduit donc une nouvelle forme de reptation, une reptation « vers l'avant ». Comme dans le cas des subordonateurs bivariés, nous interprétons la probabilité de reptation comme la circulation d'un certain champ de vecteurs le long du graphe de la fonction f . Cette interprétation géométrique nous permet là encore de dégager une notion de *reptation directionnelle* qui intègre les reptations « vers le haut » et « vers l'avant » évoquées précédemment. Enfin, nous appliquons le résultat obtenu pour un processus de Lévy X au processus $X^\uparrow$ conditionné à rester positif. À l'aide d'un argument de retournement du temps, nous montrons que la probabilité que $X^\uparrow$ rampe à travers le graphe de f en son minimum futur est égal à la probabilité que X rampe à travers le graphe de f en son maximum passé.

La question de la reptation des processus d'Ornstein-Uhlenbeck (OU) à travers un niveau fixe est en fait à l'origine de notre travail. Étant donné X un processus de Lévy, rappelons que le processus d'OU dirigé par le processus X est défini comme l'unique solution forte, notée Z , de l'équation différentielle stochastique

$$Z_t = z + X_t - \gamma \int_0^t Z_s ds, \quad t \geq 0,$$

avec $\gamma > 0$ et $z < 0$. Nous remarquons alors que Z rampe à travers $y \in (z, 0)$ ssi X rampe à travers le processus continu, décroissant et adapté $t \mapsto y - z + \gamma \int_0^t Z_s ds$. La question de la reptation de Z à travers le niveau fixe $y \in (z, 0)$ demeure ouverte. Néanmoins, dans le cas où X est un processus stable, cette question peut être réduite à celle de la reptation de X à travers une fonction déterministe. Nous obtenons donc, comme corollaire de notre résultat concernant les processus de Lévy, que les processus d'OU dirigés par un processus stable d'indice $\alpha \in (0, 1)$ rampent à travers un niveau fixe.

1.2 Conditionnement

Le conditionnement d'un processus de Lévy, ou de manière plus générale d'un processus de Markov, à éviter ou bien au contraire à atteindre un sous-ensemble de l'espace des états est un problème classique qui remonte à la seconde moitié du vingtième siècle. En 1975 par exemple, Pitman [60] conditionne le mouvement brownien à éviter la demi-droite $(-\infty, 0)$, i.e. à rester positif, et montre que le processus obtenu est égal en loi au processus de Bessel de dimension trois. Mais Doob [27] est le premier en 1957 à modifier les trajectoires du mouvement brownien, i.e. à le conditionner. À l'aide d'une fonction harmonique h , il modifie le semi-groupe de Markov du brownien et dégage certaines propriétés concernant les trajectoires obtenues, qu'il appelle h -trajectoires. Cette transformation, qui va s'avérer particulièrement fructueuse pour construire des processus conditionnés, porte aujourd'hui le nom de h -transformation de Doob. Au début des années 1990, Bertoin [4] conditionne certains processus de Lévy à rester positifs et Chaumont [12] montre en 1996 qu'un processus de Lévy réel partant de $x > 0$ peut être conditionné à atteindre $B = (-\infty, 0]$ continûment dans le sens où le processus conditionné reste positif et visite tous les intervalles $(0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, avant de mourir en atteignant 0. Notons que la mise en évidence, sous certaines hypothèses, de fonctions harmoniques

par Silverstein [66] en 1980 fut un élément déterminant dans la théorie du conditionnement des processus de Lévy. Plus récemment, de nombreux travaux se sont penchés sur le conditionnement de processus de Markov auto-similaires, ou plus spécifiquement de processus stables, à atteindre continûment des ensembles, en général un point ou un intervalle, voir Döring et Weissmann [28], Kyprianou et al. [42], Kyprianou et al. [43], Profeta et Simon [62] notamment.

Pour dire qu'un processus X à valeurs dans $\mathbb{R}$ atteint un borélien $B \subseteq \mathbb{R}$ continûment depuis l'extérieur, i.e. sans toucher l'intérieur de celui-ci, puis meurt au moment où il atteint la frontière de B , nous dirons simplement que X est *absorbé par* B . Le problème du conditionnement d'un processus à être absorbé par un ensemble peut, dans certains cas, être lié à celui de sa reptation à travers un niveau. Soit $(X, \mathbb{P})$ un processus de Lévy à valeurs dans $\mathbb{R}$, partant de 0, et $B \subseteq \mathbb{R}$ un borélien. Nous notons

$$T_B := \inf\{t \geq 0 : X_t \in B\}$$

le temps d'atteinte de B par X . Si $B = (x, \infty)$, $x > 0$, alors $T_B = \tau_x^+$. De plus, sauf cas particuliers, la probabilité qu'un processus de Lévy X atteigne un niveau $x > 0$ par un saut est égal à 0 p.s. Ainsi, en général, la probabilité que X rampe en $x > 0$ est égale à la probabilité que X atteigne continûment la frontière ∂B de B sans atteindre l'intérieur de B .

Lorsque le processus $(X, \mathbb{P})$ rampe à travers $x > 0$, i.e. $\mathbb{P}(X_{\tau_x^+} = x) > 0$, la question du conditionnement de X à être absorbé par $B = (x, \infty)$ est relativement simple. En effet, il suffit de conditionner par l'événement de probabilité non nulle $\{X_{\tau_x^+} = x\}$ pour obtenir une mesure $\mathbb{P}^C$ sous laquelle le processus canonique $(X, \mathbb{P}^C)$ sera absorbé par $[x, \infty)$. Plus précisément, une approche possible est la suivante. Soit $\mathbf{e}$ un temps suivant une loi exponentielle de paramètre 1 qui est indépendant de $(X, \mathbb{P})$. Si X ne tend pas vers $-\infty$, nous avons, pour tout $\Lambda \in \mathcal{F}_{\tau_x^+}$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(\Lambda, \tau_x^+ < \mathbf{e}/\varepsilon \mid X_{\tau_x^+} = x) = \mathbb{P}^C(\Lambda). \quad (1.4)$$

Dans le cas où $\mathbb{P}(X_{\tau_x^+} = x) = 0$, la manière classique de conditionner le processus X à être absorbé par $B = (x, \infty)$ est de considérer une h -transformation de Doob du processus tué quand il entre dans B pour une fonction harmonique h bien choisie.

La seconde partie de notre travail est consacrée au conditionnement de processus de Lévy à être *absorbés par une courbe* et s'inscrit dans le prolongement de la première partie dans laquelle nous étudions la reptation de processus de Lévy à travers une courbe. Suivant le cheminement adopté dans le cadre de la reptation, nous étudions dans un premier temps le cas d'un subordonateur bivarié. Soit $((Y, Z), \mathbb{P})$ un subordonateur éventuellement tué et $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ une fonction continue, décroissante et telle que $f(0) := \lim_{t \downarrow 0} f(t) \in (0, \infty]$. Nous notons $\Gamma := \{(t, f(t)) : t > 0\}$ le graphe de f et $\mathcal{D}$ la partie de $[0, \infty)^2$ se trouvant strictement en dessous du graphe de f , i.e.

$$\mathcal{D} := \{(y, z) \in [0, \infty)^2 : z < f(y)\}$$

et S' le premier temps de sortie par (Y, Z) de $\mathcal{D}$,

$$S' := \inf\{t > 0 : (Y_t, Z_t) \in [0, \infty)^2 \setminus \mathcal{D}\} = \inf\{t : Z_t \geq f(Y_t)\}. \quad (1.5)$$

Avec les notations des paragraphes précédents, $X = (Y, Z)$, $B = [0, \infty)^2 \setminus \mathcal{D}$, $T_B = S'$ et $\partial B = \Gamma$. Ainsi, nous dirons qu'un subordonateur bivarié est *absorbé par* Γ pour dire qu'il est *absorbé par* $B = [0, \infty)^2 \setminus \mathcal{D}$.

Nous identifions alors une famille de fonctions excessives pour le processus (Y, Z) tué quand il entre dans B et harmoniques si aucune des deux coordonnées Y et Z n'est un processus de Poisson

composé. Nous notons $\mathcal{H}_{(Y,Z)}^f$ le sous-ensemble de ces fonctions excessives formé des fonctions harmoniques, strictement positives et finies et montrons que $\mathcal{H}_{(Y,Z)}^f \neq \emptyset$. Cette famille de fonctions nous permet ensuite, via une h -transformation de Doob, de montrer l'existence d'une famille de mesures de probabilités, notée $(\mathbb{P}^{h,C}, h \in \mathcal{H}_{(Y,Z)}^f)$, sous lesquelles les processus canoniques $((Y, Z), \mathbb{P}^{h,C})$ sont conditionnés à atteindre continûment par valeurs inférieures le graphe Γ de f , i.e. à être absorbés par Γ . Plus précisément, si $h \in \mathcal{H}_{(Y,Z)}^f$, le processus conditionné $((Y, Z), \mathbb{P}^{h,C})$ vérifie :

$$\mathbb{P}^{h,C}((Y, Z)_{T_B-} = (Y, Z)_{T_B} \in \Gamma) = 1. \quad (1.6)$$

Dans un second temps, nous conditionnons un processus de Lévy X à être *absorbé* par Γ en son maximum passé, i.e. le processus $\{(t, X_t), t \geq 0\}$ à être absorbé par B en le maximum passé de X (où l'ensemble B est le même que dans le paragraphe précédent mais devrait plutôt être pensé comme défini par $B = ([0, \infty) \times \mathbb{R}) \setminus \tilde{\mathcal{D}}$ où $\tilde{\mathcal{D}} := \{(y, z) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} : z < f(y)\}$). Mais l'application au processus d'échelle ascendant (L^{-1}, H) du processus X de nos résultats relatifs aux subordonateurs bivariés afin d'obtenir des « résultats analogues » pour le processus X en son maximum passé s'avère plus compliquée que dans le cas de la reptation. Nous parvenons néanmoins à construire une mesure de probabilité $\mathbb{P}^f$ sous laquelle le processus de Lévy X est conditionné à être absorbé par la courbe Γ en son maximum, i.e. telle que

$$\mathbb{P}^f(X_{T_B-} = X_{T_B} = \bar{X}_{T_B} = f(T_B)) = 1. \quad (1.7)$$

Cette mesure de probabilité $\mathbb{P}^f$ s'obtient à l'aide d'un processus appelé *pont de premier passage du processus* X . De tels ponts ont déjà été construits dans les cas particuliers d'un mouvement brownien en 2005, voir Bertoin, Chaumont et Pitman [8] et des processus de Lévy stables spectralement négatifs en 2009, voir Chaumont et Pardo, [18]. Notons que nous étendons cette construction, sous certaines hypothèses, à un processus de Lévy quelconque. Pour finir, nous donnons une construction « trajectorielle » d'un processus α -stable conditionné à être absorbé par $B = [x, \infty)$, $x > 0$. Notons qu'une telle construction a été obtenue par Chaumont et Uribe [20] dans le cas particulier où X est un subordonateur α -stable, mais en utilisant une méthode différente de la nôtre.

1.3 Présentation des chapitres

Chapitre 2 : Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et résultats bien connus concernant les processus de Lévy, les processus de Markov et le conditionnement, en cherchant néanmoins, excepté dans la première section, à se cantonner aux besoins de notre propos. Dans la Section 2.1, nous évoquons certains aspects de la vie de Paul Lévy et notamment les motivations qui l'ont amené à introduire les processus à accroissements indépendants. Nous rappelons, dans la Section 2.2, le lien existant entre les lois infiniment divisibles et les processus de Lévy ainsi que la formule de Lévy-Khintchine. Nous donnons ensuite la décomposition de Lévy-Itô et remarquons son importance dans la compréhension de la nature des trajectoires d'un processus de Lévy. Un processus de Lévy appartient à la classe des processus de Markov qui a été particulièrement étudiée depuis plus d'un siècle. Dans la Section 2.3, nous mettons en avant quelques résultats de la théorie des processus de Markov utilisés dans notre travail, notamment pour conditionner un processus de Lévy. Dans la Section 2.4, nous rappelons les notions essentielles que sont la régularité d'un point, les temps locaux, les processus d'échelle, les mesures d'Itô des excursions et la factorisation de Wiener-Hopf. Dans la Section 2.5, nous complétons la revue des résultats existants sur la reptation d'un processus de Lévy commencée en introduction. Enfin, dans la Section 2.6, nous rappelons les définitions d'une fonction excessive et d'une fonction invariante avant de donner quelques exemples emblématiques de processus de Lévy conditionnés.

Chapitre 3 : Dans ce chapitre, nous présentons nos principaux résultats en deux temps, d'abord ceux relatifs à la reptation, puis ceux relatifs au conditionnement. Dans une première section, nous

donnons une expression de la probabilité de reptation d'un subordonateur bivarié à travers une courbe et formulons plusieurs remarques concernant ce résultat. Nous donnons notamment une interprétation géométrique de cette probabilité. Nous appliquons ensuite ce résultat dans diverses situations, ce qui nous permet en particulier d'établir, pour une large classe de processus de Lévy, une formule explicite de la probabilité de reptation à travers une courbe. Un résultat concernant la reptation d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck dirigé par un processus α -stable à travers un niveau fixe est ensuite établi. Enfin, nous concluons cette section par quelques questions ouvertes relatives à la reptation à travers une courbe. Dans une seconde partie, nous conditionnons dans un premier temps via une h -transformation de Doob un subordonateur bivarié à être absorbé par une courbe. Dans un second temps, nous conditionnons, par une autre méthode, un processus de Lévy X à être absorbé par une courbe. Nous construisons d'abord un *pont de premier passage* du processus X que nous utilisons ensuite pour définir une mesure de probabilité sous laquelle X est absorbé par la courbe.

Chapitre 4 : Ce chapitre est le fruit d'un travail commun avec Loïc Chaumont et a été accepté pour publication, voir [18]. Il regroupe l'ensemble des démonstrations des résultats relatifs à la reptation à travers une courbe énoncés dans la Section 3.1 du chapitre 3. Les résultats démontrés sont brièvement repris dans une première section de sorte que ce chapitre peut se lire indépendamment de la Section 3.1. Notons que certains exemples développés dans ce chapitre n'apparaissent pas dans le chapitre 3. A contrario, des interprétations géométriques des probabilités de reptation d'un subordonateur bivarié et d'un processus de Lévy à travers une courbe n'apparaissent que dans le chapitre 3.

Chapitre 5 : Ce chapitre est le fruit d'un travail commun avec Loïc Chaumont et doit prochainement être soumis à publication. Il regroupe l'ensemble des démonstrations des résultats relatifs au conditionnement d'un processus de Lévy à être absorbé par une courbe énoncés dans la Section 3.2 du chapitre 3. De même, dans une première section, ces résultats sont repris de sorte que ce chapitre peut être abordé sans avoir lu le chapitre 3.

Chapitre 2

Rappels sur les processus de Lévy

Les processus de Lévy sont au cœur de cette thèse. Ce chapitre a pour but d'introduire les objets et de rappeler les principaux résultats utilisés dans les chapitres suivants. La Section 2.1 donne quelques éléments de la vie de Paul Lévy et les raisons qui l'ont amené à considérer les processus à accroissements indépendants (PAI). Les notations utilisées dans cette thèse sont définies au début de la Section 2.2. Pour tout approfondissement concernant les processus de Lévy, nous renvoyons aux ouvrages de Applebaum [2], Bertoin [5], Doney [24], Kyprianou [40] et Sato [65].

2.1 Quelques éléments historiques

2.1.1 Paul Lévy

Les processus de Lévy doivent leur nom au mathématicien Paul Lévy (1886-1971). Même si cette dénomination n'est devenue standard qu'au cours des années 1980, elle apparaît ponctuellement dans la littérature bien avant. Ainsi, en 1967, Meyer [53] appelle *processus de Lévy* les subordinateurs et les qualifie d'« *extraordinaires* », tout en rappelant que « *Lévy a inventé quantité d'autres processus !* ». Attribuer le nom de *Lévy* aux processus à accroissements indépendants et stationnaires est un hommage rendu par la communauté mathématique à Paul Lévy.

Nous livrons ci-dessous quelques éléments parcellaires de la vie de Paul Lévy. Pour un inventaire exhaustif de son œuvre constituée d'au moins dix ouvrages et deux cent soixante-huit articles, nous renvoyons au premier numéro de la revue *The Annals of Probability* [1] ou à Taylor [70]. Pour appréhender quelques aspects plus intimes de sa vie et de son rapport à la recherche, nous invitons à la lecture de Loeve [52] et du numéro de novembre 1973 de la revue *La Jaune et la Rouge* de l'École Polytechnique [57] dans laquelle Neveu, Meyer, Schwartz et Mandelbrot entre autres livrent des témoignages concernant Paul Lévy. Enfin, dans son autobiographie [51], Lévy évoque sa trajectoire de mathématicien et « *l'évolution de [ses] idées sur la philosophie* ».

En 1904, à l'âge de dix-huit ans, Lévy est reçu premier à l'École Normale Supérieure et deuxième à l'École Polytechnique. Il intègre l'École Polytechnique et publie dès l'année suivante son premier article intitulé *Sur les séries semi-convergentes* [45]. De 1910 à la fin de la première guerre mondiale, l'essentiel de ses recherches concerne l'analyse fonctionnelle. En 1918, Jacques Hadamard lui propose de mettre au propre les travaux de René Gateaux laissés avant sa mort, à l'âge de vingt-cinq ans. Ce travail donnera lieu en 1919 à la *Publication des œuvres posthumes de R. Gateaux et notes personnelles complétant les résultats obtenus par cet auteur* puis, en 1922, au premier ouvrage de Lévy intitulé *Leçons d'analyse fonctionnelle* [46]. Hadamard écrira dans la préface de ce dernier : « *En même temps que l'œuvre de M. Volterra et la sienne propre, il [Lévy] en continue une autre qui s'annonçait admirable : celle de René Gateaux, tué à l'ennemi en [octobre] 1914, et dont l'œuvre si vite et si brutalement interrompue, avait ouvert au Calcul fonctionnel la voie nouvelle de l'intégra-*

tion. » Après une discussion en 1922 avec Lévy, Norbert Wiener utilise les résultats de Gateaux et Lévy dans son article fondateur sur le mouvement brownien [76]. Wiener rend d'ailleurs hommage aux deux mathématiciens en introduction de celui-ci en précisant qu'ils avaient réalisé « les études les plus profondes sur l'intégration en dimension infinie ».

Laurent Schwartz (1915-2002), qui épousa Marie-Hélène Lévy, fille de Paul Lévy, rapporte dans son autobiographie [68] p 93 : « *Puis un jour, après la mort d'Henri Poincaré, on demanda [à Lévy] de donner un cycle de six leçons de probabilités pour les polytechniciens. Il ignorait tout des probabilités à cette époque. Il avait trois semaines pour préparer son cours. Dans une lettre à sa femme il écrivit : "Trois semaines, ce n'est pas assez pour lire toute la littérature sur les probabilités, mais c'est suffisant pour tout retrouver moi-même." Et c'est ce qu'il fit [...] Il resta probabiliste toute sa vie.* » Lévy est connu pour avoir exercé une recherche solitaire et peu lu les travaux de ses contemporains. Ullmo [71] écrira à l'occasion de sa mort : « *Il a souvent retrouvé, sans le savoir, des résultats déjà connus ; plus souvent encore il a découvert des résultats importants sans leur donner la publicité nécessaire, parfois parce qu'il les croyait déjà connus.* »

S'il est communément admis que ce n'est qu'en 1919 que Lévy se tourna vers les probabilités, ses travaux en analyse débutés dès 1918 à l'occasion de l'étude des manuscrits laissés par Gateaux furent fondamentaux dans la construction de la mesure de Wiener. En ce sens, Paul Lévy aura contribué de manière indirecte mais décisive à la construction théorique du mouvement brownien qui est le plus emblématique des processus de Lévy.

Nous terminons ces quelques brefs rappels concernant la vie de Paul Lévy en citant Neveu [56] qui évoque l'un des aspects les plus visionnaires de ses travaux : « *Pendant longtemps, jusqu'en 1960 peut-on dire, la majorité des probabilistes n'abordaient l'étude des processus aléatoires que par celle des lois de probabilité des v.a. composant ces processus. De manière plus explicite, si l'on imagine qu'une fonction aléatoire représente l'état aléatoire d'un système à chaque instant d'un intervalle de temps, les probabilistes ont d'abord cherché à étudier les n v.a. représentant le système à n instants fixés. Dès les années 1930, Paul Lévy a l'originalité de proposer d'étudier les trajectoires des processus aléatoires pour elles-mêmes d'une part, et pour en déduire, d'autre part, les propriétés des lois des v.a. composant ces processus.* »

2.1.2 Processus à accroissements indépendants et lois ID

Cette section est une brève introduction historique des lois dites infiniment divisibles et montre notamment comment l'étude de ces lois a donné naissance aux processus de Lévy. Cette introduction s'appuie en grande partie sur l'article de Bertoin [7] intitulé *Paul Lévy et l'arithmétique des lois de probabilités*. Cet article repose lui-même essentiellement sur les Sections 55, 55bis et 56 de la seconde édition de l'ouvrage de Paul Lévy [50].

Le théorème fondamental de l'arithmétique énonce que tout nombre entier strictement positif s'écrit comme un produit de nombres premiers, et ce de façon unique à l'ordre des facteurs près. Ce théorème a été démontré par Euclide il y a environ deux mille trois cents ans. La question de la décomposition d'une mesure de probabilité μ , posée il y a un siècle, présente certaines analogies avec le théorème fondamental de l'arithmétique. Il s'agit de déterminer les factorisations possibles de μ pour la convolution :

$$\mu = \mu_1 * \mu_2 * \dots,$$

où le nombre de facteurs peut éventuellement être infini. De façon équivalente, il s'agit d'écrire une variable aléatoire X de loi μ comme somme de variables aléatoires indépendantes

$$X \stackrel{(loi)}{=} X_1 + X_2 + \dots,$$

ou encore la fonction caractéristique $\hat{\mu}(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\theta X})$, $\theta \in \mathbb{R}$, de μ comme produit de fonctions caractéristiques

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2 \dots$$

L'équivalent en terme de loi de probabilité de la notion de nombre premier est celle de loi indécomposable. Une loi μ est dite indécomposable si une variable aléatoire de loi μ admet comme seules décompositions en somme de deux variables aléatoires indépendantes des décompositions de la forme $X = (X - a) + a$ avec $a \in \mathbb{R}$. La loi de Bernoulli est un exemple de loi indécomposable. La loi binomiale admet une factorisation par des lois de Bernoulli, donc par des lois indécomposables.

Cette analogie entre arithmétique des nombres et arithmétique des lois a ses limites. D'une part une décomposition en facteurs indécomposables n'est pas nécessairement unique. Lévy écrit p 190 de [50] : *"La preuve la plus simple en est donnée par la formule*

$$(0 \text{ ou } 1 \text{ ou } 2) + (0 \text{ ou } 3) \sim (0 \text{ ou } 1) + (0 \text{ ou } 2 \text{ ou } 4)$$

où, dans chaque parenthèse, les valeurs indiquées sont supposées également probables." D'autre part, une décomposition peut impliquer un nombre infini de facteurs indécomposables. Par exemple, si $\mathcal{U}$ désigne une variable de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $(Y_k)_{k \geq 1}$ une suite indépendante et identiquement distribuée (iid) de variables de Bernoulli à valeurs dans $\{0, 1\}$, alors $\mathcal{U} \stackrel{(loi)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} Y_k$. Enfin, il existe des lois qu'on ne peut pas décomposer en produit, même infini, de lois indécomposables. Par exemple, si X est une v.a. suivant une loi normale et $X = Y + Z$ avec Y et Z indépendantes, alors Y et Z suivent également des lois normales.

Les limites évoquées ci-dessus conduisent à une notion plus restrictive que celle de loi décomposable en produit de lois indécomposables, la notion de loi infiniment divisible, introduite pour la première fois par De Finetti en 1929.

Définition 2.1.1. (*Infinie divisibilité 1*). *La loi d'une variable aléatoire réelle X est dite infiniment divisible (ID) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n et des variables indépendantes $X_1, \dots, X_n$ tels que*

$$X \stackrel{d}{=} X_1 + \dots + X_n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(|X_k| > \varepsilon) < \varepsilon \quad \text{pour } k = 1, \dots, n$$

Remarque 2.1.1. *Cette définition est équivalente à une définition plus usuelle des lois ID que nous donnons dans la section suivante, voir Définition 2.2.1. Elle présente l'avantage d'éclairer les motivations de son introduction, à savoir les travaux sur "la loi des erreurs". Ainsi, un des résultats de Lévy proche du théorème de la limite centrale énonce que pour qu'une somme de variables aléatoires indépendantes dépende d'une loi très peu différente de celle de Gauss, il suffit que le plus grand de ses termes soit négligeable.*

Paul Lévy, afin d'étudier les lois ID, introduit en 1934 dans son article intitulé *"Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes"* [48], la notion de processus à accroissements indépendants (PAI), c'est à dire de processus $(X_t)_{t \geq 0}$ tels que pour tout $s, t \geq 0$, l'accroissement $X_{t+s} - X_t$ est indépendant de la famille de variables $(X_u)_{u \in [0, t]}$. Il fait donc appel à un processus stochastique, qui est un objet infini-dimensionnel, pour étudier une loi de probabilité, qui est un objet uni-dimensionnel. Si μ est une loi infiniment divisible donnée, l'idée de Paul Lévy, est d'introduire $(X_t)_{t \in [0, T]}$ un PAI tel que $X_0 = 0$ et X_T a pour loi μ pour un certain $T > 0$. Pour $\varepsilon > 0$ et n suffisamment grand, il décompose μ sous la forme $\mu = \mu_1 * \dots * \mu_n$, avec $\mu_k(\{|x| > \varepsilon\}) < \varepsilon$ pour tout $k = 1, \dots, n$. Ensuite il considère des temps $0 < t_1 < \dots < t_n = T$ arbitraires et construit les variables $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$ tels que les accroissements $X_{t_{k+1}} - X_{t_k}$ soient indépendants et aient pour lois μ_{k+1} .

Si $(X_t)_{t \geq 0}$ est un PAI, alors, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $t > 0$, on peut écrire X_t sous la forme d'une somme de v.a. indépendantes

$$X_t = X_{\frac{t}{n}} + \left(X_{\frac{2t}{n}} - X_{\frac{t}{n}}\right) + \dots + \left(X_t - X_{\frac{(n-1)t}{n}}\right) \quad (2.1)$$

Si de plus $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus dont les accroissements sont stationnaires, alors la loi de X_t est ID. En particulier, X_1 est ID. La relation (2.1) montre donc l'un des aspects de la relation entre les lois ID et les processus de Lévy.

2.2 Lois infiniment divisibles et processus de Lévy

2.2.1 Notations

Dans la suite de ce manuscrit, $\mathbb{R}^d$ désigne l'espace Euclidien $(\mathbb{R}^d, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, où $d \in \mathbb{N}^*$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel. Nous munissons $\mathbb{R}^d$ de la tribu Borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et de la mesure de Lebesgue $\lambda(dx)$ ou simplement dx . Le symbole δ désigne un point isolé qui fait office de « point cimetière ». Nous notons Ω l'ensemble des fonctions ou trajectoires

$$\omega : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^d \cup \{\delta\}$$

ayant une durée de vie $\zeta(\omega) := \inf \{t \geq 0 : \omega(t) = \delta\}$ telles que pour tout $t \geq 0$, $\lim_{s \downarrow t} \omega(s) = \omega(t)$, pour tout $t > 0$, $\omega(t-) := \lim_{s \uparrow t} \omega(s)$ existe dans $\mathbb{R}^d$ (trajectoires continues à droite et limitées à gauche, dites *càdlàg*) et qui ont pour valeur δ après le temps $\zeta(\omega)$. L'espace Ω est muni de la *topologie de Skorokhod*, voir Billingsley [9] pour une définition de cette topologie, et nous désignons par $\mathcal{F}$ la tribu borélienne induite. Nous notons $\zeta := \zeta(\omega)$ la durée de vie de X puis $X_{t-} = X_{t-}(\omega) := \omega(t-)$ et $\Delta X_t := X_t - X_{t-}$ respectivement la limite à gauche et le saut à l'instant $t \in (0, \zeta)$. Si $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$, nous notons $(X, \mathbb{P})$ le processus canonique sous la loi $\mathbb{P}$ ou plus simplement, en l'absence d'ambiguïté, $(X_t)_{t \geq 0}$ ou encore X .

La plupart de nos résultats étant en dimension 1, les définitions et résultats rappelés dans ce chapitre le sont avec $d = 1$. Ce choix permet également d'alléger les notations.

2.2.2 Formule de Lévy-Khintchine et premières propriétés

Une marche aléatoire en temps discret est, par définition, une suite $(\sum_{i=1}^n X_i)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a. iid. C'est un processus à accroissements indépendants et stationnaires quelle que soit la loi de X_1 . En temps continu, comme le montre l'égalité (2.1), une condition nécessaire sur la loi de X_1 pour que le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ soit à accroissements indépendants et stationnaires est que celle-ci soit infiniment divisible. Ceci justifie la seconde définition ci-dessous de l'infinie divisibilité d'une loi.

Définition 2.2.1. (*Infinie divisibilité 2*). Une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ est dite *infiniment divisible (ID)* si pour tout $n \geq 1$, il existe une mesure de probabilité μ_n sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\mu = \mu_n^{*n}.$$

Ainsi, une mesure μ sur $\mathbb{R}$ est ID si pour tout $n \geq 1$, il existe une fonction caractéristique $\hat{\mu}_n$ telle que $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_n)^n$. Enfin, une variable aléatoire X est dite ID si pour tout $n \geq 1$, il existe $X_1, \dots, X_n$ variables aléatoires iid telles que $X \stackrel{d}{=} X_1 + \dots + X_n$. Remarquons que si μ_1 et μ_2 sont ID, alors $\mu_1 * \mu_2$ est ID.

Exemples 2.2.1. Voici quelques exemples de lois ID et de lois qui ne sont pas ID :

- (i) Les lois géométriques, de Poisson, exponentielle, normale, de Cauchy standard et Gamma sont ID.

- (ii) Les lois uniformes et Bêta ne sont pas ID. En fait, toute loi ID est à support non borné (hormis la Dirac en un point).

Proposition 2.2.1. *La classe des lois ID est stable par transformation affine, convolution et convergence faible.*

Les premières recherches sur ces lois ont débuté en 1929 avec les travaux de de Finetti. Celui-ci étudie les fonctions caractéristiques de lois ID sans réussir à en donner une représentation générale. En 1932, Kolmogorov donne une représentation des fonctions caractéristiques de lois ID admettant un moment d'ordre deux. Deux ans après, Lévy, voir [48], détermine, indépendamment des travaux de Kolmogorov et de Finetti, une telle représentation dans le cas général en utilisant une approche probabiliste, voir Section 2.1.2. Par ailleurs, Khintchine obtient en 1937, voir [38], la représentation de Lévy par une méthode analytique, en généralisant le résultat de Kolmogorov. Cette représentation des fonctions caractéristiques d'une loi ID est depuis connue sous le nom de *représentation de Lévy-Khintchine* ou *formule de Lévy-Khintchine*.

Soit μ une mesure de probabilité ID. Il est possible de montrer que la fonction caractéristique de μ ne s'annule pas et qu'il existe une unique fonction continue $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, appelée *exposant caractéristique* de μ , telle que $\Psi(0) = 0$ et

$$\widehat{\mu}(u) = \exp(-\Psi(u)), \quad u \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

La formule de Lévy-Khintchine, outil principal pour étudier les lois ID, détermine la classe des fonctions caractéristiques qui correspondent à une loi ID.

Théorème 2.2.1. (*Formule de Lévy-Khintchine*). *Une fonction $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est l'exposant caractéristique d'une loi ID sur $\mathbb{R}$ ssi il existe un triplet (a, σ, π) avec $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ et π une mesure sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\pi(\{0\}) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) \pi(dx) < \infty$ tel que*

$$\Psi(u) = iau + \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{iux} + iux \mathbb{I}_{\{|x|<1\}}) \pi(dx) \quad (2.3)$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.2.1. *Nous pouvons faire quelques remarques concernant la formule de Lévy-Khintchine.*

- (i) La condition $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) \pi(dx) < \infty$ implique que $\pi(B) < \infty$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $0 \notin \overline{B}$.
- (ii) La fonction $x \mapsto 1 - e^{iux} + iux \mathbb{I}_{\{|x|<1\}}$ est π -intégrable car elle est bornée en dehors de tout voisinage de 0 et, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$1 - e^{iux} + iux \mathbb{I}_{\{|x|<1\}} = O(x^2) \quad \text{quand } x \rightarrow 0.$$

- (iii) La fonction $c : x \mapsto \mathbb{I}_{\{|x|<1\}}$ est appelée *fonction de cut-off*. Il existe d'autres choix possibles pour la fonction c , par exemple $c(x) = 1/(1+x^2)$ ou $c(x) = (\sin x)/x$ (valable uniquement si $d = 1$). Notons que le paramètre a dans (2.3) dépend du choix de la fonction de cut-off. Dans cette thèse, nous fixons la fonction de cut-off telle qu'elle apparaît dans la formule (2.3).

- (iv) L'exposant caractéristique Ψ détermine le triplet (a, σ, π) .

Le triplet (a, σ, π) est appelé *triplet caractéristique* de μ . Le réel a , le réel positif σ et la mesure π sont appelés respectivement le *coefficient linéaire*, le *coefficient Gaussien* et la *mesure de Lévy* de μ .

Donnons à présent la définition d'un processus de Lévy, qui, nous le rappelons, peut être pensé comme l'équivalent en temps continu d'une marche aléatoire.

Définition 2.2.2. (*Processus de Lévy*). Soit $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que $\mathbb{P}(\zeta = \infty) = 1$. Le processus $(X, \mathbb{P})$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un processus de Lévy si :

- (i) X est à accroissements indépendants : pour tout $t, s \geq 0$, $X_{t+s} - X_t$ est indépendant de $(X_u, 0 \leq u \leq t)$.
- (ii) X est à accroissements stationnaires : pour tout $t, s \geq 0$, $X_{t+s} - X_t$ est de même loi que de X_s . En particulier $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$.

Soit $(X, \mathbb{P})$ un processus de Lévy. Notons, pour tout $t \geq 0$, μ_t la loi de X_t et Ψ_t l'exposant caractéristique de μ_t . Nous avons vu qu'une conséquence de la relation (2.1) est que les lois unidimensionnelles de X sont ID, i.e. pour tout $t \geq 0$, μ_t est ID. Cette relation ainsi que la continuité à droite p.s. du processus X permettent de montrer davantage : pour tout $t \geq 0$ et pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\Psi_t(u) = t\Psi_1(u)$. Autrement dit, si $\Psi := \Psi_1$ désigne l'exposant caractéristique de μ_1 , alors, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}(e^{iuX_t}) = \exp(-t\Psi(u)), \quad u \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

La fonction $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est appelée l'*exposant caractéristique* du processus de Lévy X et caractérise la loi $\mathbb{P}$. Ainsi, à chaque processus de Lévy peut être associée une loi ID, celle de X_1 . Et réciproquement, si μ est une loi ID sur $\mathbb{R}$, alors il existe une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que $(X, \mathbb{P})$ soit un processus de Lévy vérifiant $X_0 = 0$, $\mathbb{P}$ -ps et $\mathbb{P}(X_1 \in dx) = \mu(dx)$. Autrement dit, à tout triplet (a, σ, π) vérifiant les conditions du Théorème 2.2.1 est associée une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que $(X, \mathbb{P})$ soit un processus de Lévy ayant pour exposant caractéristique Ψ défini par (2.3). Comme nous allons le voir dans la Section 2.2.3, ce dernier résultat, parfois intitulé *Formule de Lévy-Khintchine pour les processus de Lévy*, conduit à une interprétation probabiliste, grâce aux travaux conjugués de Lévy et Itô, du triplet (a, σ, π) . Ce triplet (a, σ, π) caractérise ainsi le processus de Lévy X dont il est appelé le *triplet caractéristique*. En résumé, nous avons les correspondances suivantes :

$$X \longleftrightarrow \mu_1 \longleftrightarrow \Psi \longleftrightarrow (a, \sigma, \pi).$$

Exemples 2.2.2. Nous donnons ci-dessous trois exemples fondamentaux de processus de Lévy et précisons leurs exposants et triplets caractéristiques.

- (i) Un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ est un processus de Lévy qui admet pour exposant caractéristique

$$\Psi(u) = \lambda(1 - e^{iu}), \quad u \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

et pour triplet caractéristique $(0, 0, \lambda\delta_1)$ où δ_1 désigne la mesure de Dirac en 1.

- (ii) Un processus de Poisson composé d'intensité $\lambda > 0$ et de mesure de saut F telle que $F(\{0\}) = 0$, est un processus de Lévy qui admet pour exposant caractéristique

$$\Psi(u) = \lambda \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{iux}) F(dx), \quad u \in \mathbb{R}, \quad (2.6)$$

et pour triplet caractéristique $(-\lambda \int_{(-1,1) \setminus \{0\}} xF(dx), 0, \lambda F)$.

- (iii) Un mouvement brownien avec drift $X_t = (-a)t + \sigma B_t$, $t \geq 0$, où $a, \sigma \in \mathbb{R}$ et B est le mouvement brownien standard, est un processus de Lévy qui admet pour exposant caractéristique

$$\Psi(u) = iua + \frac{\sigma^2 u^2}{2}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

et pour triplet caractéristique $(a, \sigma^2, 0)$.

Remarquons que la somme de deux processus de Lévy indépendants $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$, d'exposants caractéristiques respectivement $\Psi^{(1)}$ et $\Psi^{(2)}$, est encore un processus de Lévy qui admet pour exposant caractéristique $\Psi^{(1)} + \Psi^{(2)}$.

Il est possible d'élargir la classe des processus de Lévy aux *processus de Lévy tués*, utiles notamment pour définir les processus d'échelle. Afin que la propriété de Markov soit vérifiée, le temps de vie d'un tel processus doit suivre une loi exponentielle. Soit donc $(X, \mathbb{P})$ un processus de Lévy d'exposant caractéristique Ψ et $\mathbf{e}_q$ une variable aléatoire indépendante de X suivant une loi exponentielle de paramètre $q \geq 0$. Le processus noté $\tilde{X}$ défini par :

$$\tilde{X}_t = X_t \quad \text{si } t \in [0, \mathbf{e}_q) \quad \text{et} \quad \tilde{X}_t = \delta \quad \text{si } t \in [\mathbf{e}_q, \infty)$$

est appelé *processus de Lévy tué*. Si nous posons $\mathbf{e}_q = \infty$ si $q = 0$, alors la classe des processus de Lévy tués contient celle des processus de Lévy. L'exposant caractéristique $\tilde{\Psi}$ du processus $\tilde{X}$ est

$$\tilde{\Psi}(u) = \Psi(u) + q \quad u \in \mathbb{R}.$$

Notons qu'il est possible d'étendre la notion de processus tué en remplaçant $\mathbf{e}_q$ par un temps d'arrêt, voir Section 2.6.

Nous clôturons cette section en notant qu'un processus de Lévy non tué admet, lorsque $t \uparrow \infty$, l'un des trois comportements suivants : soit il dérive vers $+\infty$, soit il dérive vers $-\infty$, soit il oscille. Rappelons que l'espérance de X_1 est définie ssi

$$\int_1^\infty x\pi(dx) < \infty \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{-1} |x|\pi(dx) < \infty,$$

et dans ce cas $\mathbb{E}(X_1) \in [-\infty, \infty]$. Le comportement asymptotique du processus X est déterminé par $\mathbb{E}(X_1)$ lorsque celle-ci est définie. Plus précisément, nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.2.2. (*Comportement asymptotique d'un processus de Lévy*). Soit X un processus de Lévy non tué, alors

(i) X dérive vers $+\infty$, i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = +\infty$, ssi l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- $\mathbb{E}(X_1)$ est définie et $\mathbb{E}(X_1) \in (0, \infty]$.
- $\mathbb{E}(X_1)$ n'est pas définie et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{|x|\pi(dx)}{\int_0^{|x|} \pi(u, \infty) du} dx < \infty$

(ii) X dérive vers $-\infty$, i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = -\infty$ ssi l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- $\mathbb{E}(X_1)$ est définie et $\mathbb{E}(X_1) \in [-\infty, 0)$.
- $\mathbb{E}(X_1)$ n'est pas définie et $\int_1^\infty \frac{x\pi(dx)}{\int_0^x \pi(-\infty, -u) du} dx < \infty$

(iii) X oscille, i.e. $\limsup_{t \rightarrow \infty} X_t = +\infty$ et $\liminf_{t \rightarrow \infty} X_t = -\infty$ ssi l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- $\mathbb{E}(X_1)$ est définie et $\mathbb{E}(X_1) = 0$.
- $\mathbb{E}(X_1)$ n'est pas définie et les deux intégrales ci-dessus sont infinies.

Un processus de Lévy est dit *transient* si, pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P} \left(\int_0^\infty \mathbb{I}_{\{|X_t| < a\}} dt < \infty \right) = 1.$$

Un processus de Lévy est dit *récurrent* si, pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P} \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{|X_t| < a\}} dt = \infty \right) = 1.$$

Notons qu'un processus qui dérive vers $\pm\infty$ est transient, mais que la réciproque est fausse. Par ailleurs, un processus récurrent oscille. Enfin, tout processus de Lévy est soit transient soit récurrent. Port et Stone [61] ont établi le critère analytique suivant : un processus de Lévy X d'exposant caractéristique Ψ est transient ssi il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\int_{(-\varepsilon, \varepsilon)} \Re \left(\frac{1}{\Psi(u)} \right) du < \infty.$$

2.2.3 Décomposition de Lévy-Itô et nature des trajectoires

Dans la section précédente, nous avons vu que toute loi μ ID peut être vue comme la loi d'un processus de Lévy X au temps 1. Le théorème suivant, connu sous le nom de *décomposition de Lévy-Itô*, contient ce résultat et précise la structure des trajectoires du processus de Lévy X obtenu à partir de (a, σ, π) , où (a, σ, π) est le triplet caractéristique de μ . Sa démonstration exige la construction effective du processus X .

Théorème 2.2.3. (*Décomposition de Lévy-Itô*). Soit $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ et π une mesure sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\pi(\{0\}) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) \pi(dx) < \infty.$$

Alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω tel que $(X, \mathbb{P})$ soit un processus de Lévy admettant Ψ défini par (2.3) comme exposant caractéristique. De plus,

$$X = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}, \tag{2.8}$$

où $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ et $X^{(3)}$ sont trois processus de Lévy indépendants d'exposants caractéristique respectivement $\Psi^{(1)}$, $\Psi^{(2)}$ et $\Psi^{(3)}$ tels que

(i) $X^{(1)}$ est un mouvement brownien avec drift $X_t^{(1)} = -at + \sigma B_t$, $t \geq 0$;

(ii) $X^{(2)}$ est un processus de Poisson composé d'intensité $\pi(\mathbb{R} \setminus (-1, 1))$ et de mesure de saut

$$F(dx) = \frac{\mathbb{1}_{\{\mathbb{R} \setminus (-1, 1)\}}(x) \pi(dx)}{\pi(\mathbb{R} \setminus (-1, 1))} \tag{2.9}$$

(iii) $X^{(3)}$ est une martingale de carré intégrable qui admet un nombre au plus dénombrable de sauts sur tout intervalle de temps fini et dont l'exposant caractéristique est

$$\Psi^{(3)}(u) = \int_{|x| < 1} (1 - e^{iux} + iux) \pi(dx), \quad u \in \mathbb{R}.$$

D'après l'Exemple 2.2.2, nous avons pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\Psi^{(1)}(u) = iau + \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 \quad \text{et} \quad \Psi^{(2)}(u) = \pi(\mathbb{R} \setminus (-1, 1)) \int_{|x| \geq 1} (1 - e^{iux}) \frac{\pi(dx)}{\pi(\mathbb{R} \setminus (-1, 1))},$$

et nous vérifions facilement que $\Psi = \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)} + \Psi^{(3)}$ car $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ et $X^{(3)}$ sont des processus de Lévy indépendants. Par ailleurs, la Remarque 2.2.1 assure en particulier que $\pi(\mathbb{R} \setminus (-1, 1)) < \infty$. Ainsi, la nature des trajectoires des processus $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ est bien comprise. Le cœur de la

décomposition de Lévy-Itô réside donc dans l'interprétation des trajectoires du processus $X^{(3)}$. Pour avoir une intuition de leur nature, remarquons que, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\Psi^{(3)}(u) = \sum_{n \geq 1} \left\{ \lambda_n \int_{\frac{1}{n+1} \leq |x| < \frac{1}{n}} (1 - e^{iux}) F_n(dx) + iu \lambda_n \left(\int_{\frac{1}{n+1} \leq |x| < \frac{1}{n}} x F_n(dx) \right) \right\}$$

où, pour tout $n \geq 1$, $\lambda_n = \pi(\{x : \frac{1}{n+1} \leq |x| < \frac{1}{n}\})$ et $F_n(dx) = \frac{\pi(dx)}{\lambda_n}$, avec la convention que le n -ième terme de cette somme est nul si $\lambda_n = 0$. Ainsi, le processus $X^{(3)}$ peut être considéré comme une somme au plus dénombrable de processus de Poisson composés avec drift, notés $X^{(n,3)}$, d'intensité λ_n , de mesure de saut $\mathbb{I}_{\{\frac{1}{n+1} \leq |x| < \frac{1}{n}\}} F_n(dx)$ et de drift $d_n = \lambda_n \left(\int_{\frac{1}{n+1} \leq |x| < \frac{1}{n}} x F_n(dx) \right)$. Nous parlons alors de somme compensée de petits sauts (leur taille est inférieure à 1) dans la mesure où, pour tout $n \geq 1$, $X^{(n,3)}$ est une martingale.

Les mesures aléatoires de Poisson constituent le bon outil pour démontrer le Théorème 2.2.3. Nous résumons brièvement ci-dessous la décomposition de Lévy-Itô sous cet angle. Soit X un processus de Lévy de triplet caractéristique (a, σ, π) . Alors X peut s'écrire sous la forme

$$X_t = -at + \sigma B_t + \xi_t, \quad t > 0,$$

où $\xi_t = \sum_{s \leq t} \Delta X_s = \sum_{s \leq t} (X_s - X_{s-})$ est un processus de sauts purs. A présent, notons $N_t^{(X)}(\cdot)$ la mesure aléatoire définie pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $0 \notin \overline{B}$ et tout $t > 0$, par

$$N_t^{(X)}(B) = \# \{0 \leq s \leq t, \Delta X_s \in B\}.$$

Remarquons que, pour tout ensemble B tel que $0 < \pi(B) < \infty$, le processus $(N_t^{(X)}(B))_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson composé d'intensité $\pi(B) = \mathbb{E}(N_1^{(X)}(B))$ et de mesure de saut

$$F(dx) = \frac{\mathbb{I}_B(x) \pi(dx)}{\pi(B)}.$$

En particulier, si $B = \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$, alors $(N_t^{(X)}(B))_{t \geq 0} = (X_t^{(2)})_{t \geq 0}$. En notant de plus $\tilde{N}_t^{(X)}(B) = N_t^{(X)}(B) - t\pi(B)$, nous obtenons l'écriture de la décomposition de Lévy-Itô suivante

$$X_t = -at + \sigma B_t + \int_{|x| \geq 1} x N_t^{(X)}(dx) + \int_{0 < |x| < 1} x \tilde{N}_t^{(X)}(dx).$$

Une question importante pour la suite de notre travail est de déterminer si, pour un processus de Lévy donné, il est possible de distinguer la contribution du drift de celle induite par « l'accumulation de petits sauts ». Cette question repose sur le caractère borné ou non des variations des trajectoires du processus. Rappelons qu'une fonction càdlàg $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite à variation bornée si

$$\sup_{\mathfrak{S} \ni (s_0, \dots, s_n)} \sum_{j=1}^n |g(s_j) - g(s_{j-1})| < \infty,$$

où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des partitions de l'intervalle $[0, T]$. Un processus de Lévy est dit à variation bornée si ses trajectoires sont à variation bornée p.s. Reprenant les notations de Sato [65], nous dirons que X est de

- *type A* si $\sigma = 0$ et $\pi(\mathbb{R}) < \infty$;
- *type B* si $\sigma = 0$, $\pi(\mathbb{R}) = \infty$ et $\int_{|x| \leq 1} |x| \pi(dx) < \infty$;
- *type C* si $\sigma > 0$ ou $\int_{|x| \leq 1} |x| \pi(dx) = \infty$.

Proposition 2.2.2. *Soit X un processus de Lévy de triplet caractéristique (a, σ, π) .*

- (i) *Les trajectoires de X sont continues p.s. ssi $\pi = 0$.*
- (ii) *X est un processus de Poisson composé ssi il est de type A avec $a = 0$. Si $a \neq 0$, X est appelé processus de Poisson composé avec drift. Ce sont les seuls processus de Lévy dont les trajectoires sont affines par morceaux.*
- (iii) *X est à variation bornée ssi il est de type A ou B i.e. ssi*

$$\sigma = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} (1 \wedge |x|) \pi(dx) < \infty \quad (2.10)$$

- (iv) *Si $0 < \pi(\mathbb{R}) < \infty$ alors les temps de sauts de X sont discrets dans $[0, \infty)$ et le premier temps de saut suit une loi exponentielle de paramètre $1/\pi(\mathbb{R})$.*
- (v) *Si $\pi(\mathbb{R}) = \infty$ alors les temps de sauts de X sont dénombrables et denses dans $[0, \infty)$.*

Remarquons que lorsque X est à variation bornée, la finitude de l'intégrale dans (2.10) nous permet d'écrire l'exposant caractéristique de X sous la forme

$$\Psi(u) = -id_X u + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{iux}) \pi(dx), \quad u \in \mathbb{R}, \quad (2.11)$$

où

$$d_X = - \left(a + \int_{|x| \leq 1} x \pi(dx) \right) \quad (2.12)$$

Si X est à variation bornée, d_X est appelé le drift de X et l'expression (2.11) montre que

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{\Psi(u)}{u} = -id_X.$$

Notons que dans tous les cas, d'après (2.3),

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{\Psi(u)}{u^2} = \frac{\sigma^2}{2}.$$

La Proposition 2.2.2 montre également que, dans la décomposition de Lévy-Itô, le processus $X^{(2)}$ n'influe pas sur le comportement d'une trajectoire du processus X au voisinage de $t = 0$. Enfin la condition $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) \pi(dx) < \infty$ implique que tout processus de Lévy vérifie :

$$\sum_{s \leq t} |\Delta X_s|^2 < \infty \quad \text{p.s.}$$

Définition 2.2.3. (*Subordonateur*). *Un processus de Lévy à valeurs dans $[0, \infty)$ est appelé subordonateur.*

Cette définition implique que les trajectoires d'un subordonateur sont croissantes. Soit X un processus de Lévy de triplet caractéristique (a, σ, π) . X est un subordonateur ssi

$$\sigma = 0, \quad \pi(-\infty, 0) = 0, \quad \int_{(0, \infty)} (1 \wedge x) \pi(dx) < \infty, \quad \text{et} \quad d_X = - \left(a + \int_{0 < x \leq 1} x \pi(dx) \right) \geq 0.$$

En particulier, tout subordonateur est à variation bornée. Les subordonateurs étant à valeurs dans $[0, \infty)$, il est plus commode de travailler avec la transformée de Laplace plutôt que la transformée de Fourier. Un subordonateur X admet comme exposant caractéristique

$$\Psi(u) = -id_X u + \int_{(0, \infty)} (1 - e^{iux}) \pi(dx), \quad u \in \mathbb{R}, \quad (2.13)$$

où d_X est le drift. La condition $\int_{(0,\infty)} (1 \wedge x) \pi(dx) < \infty$ permet d'étendre le domaine de définition de Ψ au demi-plan complexe supérieur et de définir l'*exposant de Laplace* $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ de X

$$\Phi(u) = \Psi(iu) = d_X u + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-ux}) \pi(dx), \quad u \geq 0, \quad (2.14)$$

et, de même que pour l'exposant caractéristique, $\mathbb{E}(e^{-uX_t}) = \exp(-t\Phi(u))$, $u \geq 0$. La formule (2.14) est la « version subordonateurs » de la formule de Lévy-Khintchine.

Un processus X qui n'est pas un subordonateur et tel que $\pi(-\infty, 0) = 0$ est dit *spectralement positif*. Notons pour finir que tout processus à variation bornée peut s'écrire comme la différence de deux subordonateurs indépendants.

2.2.4 Processus stables

Les processus *strictement stables* sont les seuls processus de Lévy autosimilaires, i.e. qui vérifient la propriété de scaling, voir Définition 2.2.5. Les lois marginales d'un processus stable sont dites stables. Les lois et processus stables apparaissent dans de nombreux domaines des mathématiques, notamment appliquées, et la littérature à leur sujet est vaste. Nous nous contentons ci-dessous de rappeler quelques définitions et propriétés élémentaires en introduisant d'abord les lois stables pour en déduire dans un second temps une définition des processus stables. Nous renvoyons par exemple à Sato [65], Bertoin [5], Chaumont [14], Zolotarev [77], Nolan [58] et Kyprianou [41] pour approfondir ces thèmes.

Dans notre travail, les processus stables interviennent lors de l'étude de la reptation d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck α -stable à travers un niveau fixe, voir Sections 3.1.4 et 4.3. Nous donnons également dans la Section 4.2 un exemple de calcul explicite de la probabilité de reptation d'un subordonateur $1/2$ -stable à travers la fonction $f(t) = 1/t^2$.

Comme le rappelle Watson [74] dans l'introduction de son travail de thèse, la théorie des probabilités s'intéresse souvent à des modèles qui sont le résultat de la somme d'un grand nombre de « petits événements » ou de « petites perturbations ». Même lorsque peu d'informations sont connues à propos de ces « petits événements », il s'avère souvent possible de dégager des propriétés de leur somme. La pertinence de la théorie des probabilités dans divers domaines des sciences, naturelles, physiques, sociales, réside en grande partie dans cette "*universalité à grande échelle*". Considérons par exemple $Y_1, Y_2, \dots$ une suite de variables i.i.d. et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n := Y_1 + \dots + Y_n$. Supposons qu'il existe deux suites de réels (a_n) et (c_n) telles que la suite renormalisée

$$a_n^{-1} S_n - c_n$$

converge en loi vers une variable S non dégénérée. Alors la loi de S est une loi stable. Réciproquement, une loi stable est toujours la limite renormalisée de la somme d'une suite de v.a. i.i.d. En particulier, le théorème central limite montre que la loi normale est une loi stable. Plus formellement, nous avons la définition suivante.

Définition 2.2.4. (*Loi stable*). La loi d'une variable aléatoire réelle Y est dite *stable* si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$, et $Y_1, \dots, Y_n$ copies indépendantes de Y telles que :

$$Y_1 + \dots + Y_n \stackrel{(loi)}{=} a_n Y + b_n. \quad (2.15)$$

De plus, si pour tout $n \geq 1$, $b_n = 0$, la loi de Y est dite *strictement stable*.

À une loi stable est toujours associé un paramètre α , et nous parlons alors de loi α -stable. Ceci découle du résultat suivant, obtenu par Feller [29] : seule la suite $a_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ est possible, avec $\alpha \in (0; 2]$.

L'indice α indique la vitesse de décroissance des queues de distributions. La loi normale est une loi 2-stable. C'est la seule loi stable qui ne soit pas à queue lourde. Plus le paramètre α est proche de 0, plus la loi est à queue lourde. Plus précisément, si la v.a. X suit une loi α -stable, alors $\mathbb{E}(|X|^\eta)$ est fini ssi $\eta \in [0, \alpha)$.

La relation (2.15) montre que toute loi stable est ID. Ainsi, si Y est une v.a. ayant une loi stable (resp. strictement stable), il existe un processus de Lévy $(X_t)_{t \geq 0}$ tel que

$$X_1 \stackrel{(loi)}{=} Y,$$

et ce processus est appelé *processus de Lévy stable* (resp. *strictement stable*). Un processus stable, contrairement à un processus strictement stable, peut posséder un drift. Dans la suite nous considérons uniquement le cas strictement stable et, par abus de langage, appellerons processus stable un processus strictement stable.

Soit à présent $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy α -stable avec $\alpha \in (0, 2]$. Lévy, qui fut le premier à identifier la classe des lois stables, a établi que l'exposant caractéristique du processus X est donné, pour tout $u \in \mathbb{R}$, par

$$\Psi(u) = \begin{cases} c|u|^\alpha (1 - i\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) \operatorname{sgn}(u)) & \text{si } \alpha \in (0, 1) \cup (1, 2) \\ c|u| + i\gamma u & \text{si } \alpha = 1 \\ c\frac{u^2}{2} & \text{si } \alpha = 2 \end{cases} \quad (2.16)$$

où $c > 0$, $\beta \in [-1, 1]$, $\gamma \in \mathbb{R}$ et $\operatorname{sgn}(u) = \mathbb{1}_{\{x>0\}} - \mathbb{1}_{\{x<0\}}$. Le paramètre c est un paramètre d'intensité et le modifier revient à multiplier la variable X par une constante. Le paramètre α est un index de stabilité (par changement d'échelle), voir Définition 2.2.5. Le paramètre β indique l'asymétrie du processus et γ est un paramètre de position.

Le cas $\alpha = 1$ correspond au processus de Cauchy symétrique avec drift et sa mesure de Lévy π est proportionnelle à $|x|^{-2}dx$. Le cas $\alpha = 2$ correspond à celui du mouvement brownien et π est identiquement nulle. Lorsque $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2)$, la mesure de Lévy de $(X_t)_{t \geq 0}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et s'écrit

$$\pi(dx) = c_+ x^{-(1+\alpha)} \mathbb{1}_{\{x>0\}} dx + c_- |x|^{-(1+\alpha)} \mathbb{1}_{\{x<0\}} dx, \quad (2.17)$$

où $c_+, c_- \geq 0$, $c_+ + c_- > 0$ tels que $\beta = (c_+ - c_-)/(c_+ + c_-)$.

D'après la formule (2.16), pour tout $t > 0$, $\int_{\mathbb{R}} |\hat{\mu}_t(u)| du = \int_{\mathbb{R}} |e^{-t\psi(u)}| du < \infty$. Ainsi, d'après le Théorème d'inversion de Fourier, pour tout $t > 0$, la loi μ_t de X_t est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et admet une densité continue $x \mapsto p_t(x)$. Notons qu'en dehors des cas où X est un mouvement brownien, un processus de Cauchy ou un subordonateur 1/2-stable, il n'existe pas de formule explicite pour cette densité. Si X est un subordonateur, $p_t(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $p_t(x) > 0$ si $x > 0$. Si $|X|$ n'est pas un subordonateur, $p_t(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.2.1. Soit X un subordonateur stable d'indice $\alpha = 1/2$. Alors, pour tout $t > 0$, X_t admet pour densité

$$p_t(x) = \frac{t}{\sqrt{2\pi}x^3} e^{-\frac{t^2}{2x}} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x).$$

La formule (2.16) permet également de démontrer qu'un processus stable vérifie la *propriété de scaling* définie ci-dessous, i.e. qu'un processus stable est un processus autosimilaire.

Définition 2.2.5. (*Propriété de scaling*). Un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de scaling d'indice $\alpha > 0$ si

$$\forall k > 0, \quad (kX_{k^{-\alpha}t}, t \geq 0) \stackrel{(loi)}{=} (X_t, t \geq 0).$$

Remarque 2.2.2. La propriété de scaling conduit à de nombreux résultats spécifiques aux processus stables. Nous nous contentons de quelques remarques.

- (i) Un processus de Lévy X est un processus α -stable ssi, pour tout $t > 0$, $X_t \stackrel{(loi)}{=} t^{1/\alpha} X_1$.
- (ii) La propriété de scaling pour un processus de Lévy X d'exposant caractéristique Ψ est équivalente à la propriété suivante : Pour tout $k > 0$, $\Psi(ku) = k^\alpha \Psi(u)$, pour tout $u \in \mathbb{R}$.
- (iii) La quantité $\rho := \mathbb{P}(X_t > 0)$ ne dépend pas de $t > 0$. Ainsi, la paramétrisation classique $(c, \alpha, \beta, \gamma)$ d'une loi stable peut être remplacée par celle introduite par Zolotarev dont un des trois paramètres est ρ , voir [77]. Le paramètre ρ est appelé paramètre de positivité.
- (iv) Soit X un processus de Lévy stable tel que $|X|$ n'est pas un subordonateur. Le processus des temps d'échelle est un subordonateur stable d'indice ρ et le processus des hauteurs d'échelle est un subordonateur stable d'indice $\alpha\rho$. Nous renvoyons à la Section 2.4 pour la définition de ces processus.
- (v) La forme de la mesure de Lévy donnée par (2.17) montre qu'un processus de Lévy α -stable X est à variation bornée ssi $\alpha \in (0, 1)$. De plus, d'après la propriété de scaling, tout processus stable à variation bornée est un processus de saut pur.

Nous terminons cette section par un résultat qui s'appuie sur la propriété de scaling et qui nous sera utile pour démontrer un critère de reptation d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck α -stable. Un processus stochastique $(Y_t, t \in \mathbb{R})$ est dit *stationnaire* si sa loi est invariante par les translations θ_t pour tout $t \in \mathbb{R}$, i.e. s'il vérifie

$$(Y_s, s \in \mathbb{R}) \stackrel{(loi)}{=} (Y_{t+s}, s \in \mathbb{R}) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Nous obtenons alors le résultat suivant, parfois appelé *première représentation de Lamperti*, en référence à deux autres représentations moins immédiates dues à Lamperti concernant les processus à caractère markovien.

Proposition 2.2.3. (*Première représentation de Lamperti*).

- (i) Si $(Y_t, t \in \mathbb{R})$ est un processus stationnaire, alors pour tout $\alpha > 0$, le processus défini par

$$X_t := t^\alpha Y_{\log t}, \text{ pour } t > 0 \text{ et } X_0 = 0$$

est un processus autosimilaire d'indice α .

- (ii) Inversement, si X est un processus autosimilaire d'indice α tel que $X_0 = 0$, alors le processus défini par

$$(Y_t, t \in \mathbb{R}) := (e^{-\alpha t} X_{e^t}, t \in \mathbb{R})$$

est stationnaire.

Le processus stationnaire Y associé à un processus auto-similaire X par la transformation de Lamperti est souvent appelé le processus d'Ornstein-Uhlenbeck associé à X . Nous renvoyons à la Section 3.1.4 pour une définition précise des processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

2.3 Propriété de Markov

Tout processus de Lévy est un processus de Markov, i.e. un processus dont le comportement futur, à tout instant t , ne dépend du passé qu'à travers sa valeur à l'instant t . Nous rappelons brièvement ci-dessous quelques définitions et résultats concernant ces processus qui nous seront indispensables par la suite, en particulier dans les questions relatives au conditionnement d'un processus de Lévy. Pour une étude des processus de Markov et de la théorie du potentiel nous renvoyons à Blumenthal et Gettoor [10], Chung et Walsh [23] et, dans le cadre plus spécifique des processus de Lévy, à Bertoin [5].

2.3.1 Définitions

Afin de définir un processus de Markov, nous enrichissons l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ introduit au début de la Section 2.2 d'une filtration. Soit $(X, \mathbb{P})$ un processus défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Notons $\mathcal{F}_\infty$ la $\mathbb{P}$ -complétion de $\mathcal{F}$ et, pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s, s \leq t)$. La filtration naturelle de X , notée $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$, est la filtration minimale au sens de l'inclusion pour laquelle X est adapté à $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$. Soit à présent, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathcal{F}_t := \{A \cup N : A \in \mathcal{F}_t^X, \exists M \in \mathcal{F}_t^X, \mathbb{P}(M) = 0 \text{ et } N \subset M\}$$

La filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est alors $\mathbb{P}$ -complète et continue à droite, i.e. $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$, pour tout $t \geq 0$. La continuité à droite de $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ implique en particulier que la tribu $\mathcal{F}_0$ est $\mathbb{P}$ -triviale. L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ est appelé *espace probabilisé filtré*.

Définition 2.3.1. (*Processus de Markov*). Un processus X défini sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ (donc adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$) est un processus de Markov si, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $s, t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X_{t+s} \in B | \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(X_{t+s} \in B | \sigma(X_t)). \quad (2.18)$$

L'*homogénéité en temps* pour un processus de Markov signifie que la probabilité de passer d'un état $x \in \mathbb{R}$ à l'instant $t_1 \geq 0$ à un état $y \in \mathbb{R}$ à l'instant $t_2 \geq t_1$ ne dépend des instants t_1 et t_2 qu'au travers de la différence $t_2 - t_1$. Nous rappelons ci-dessous, dans le cadre des processus dits *homogènes en temps*, c'est le cas en particulier pour les processus à accroissements stationnaires, et donc de Lévy, la définition de *fonction de transition* parfois également appelée *semi-groupe de Markov*.

Définition 2.3.2. (*Semi-groupe de Markov*). Une famille $(p_t)_{t \geq 0}$ de fonctions

$$p_t : \mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$$

est appelée *semi-groupe sous-markovien* sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ si elle vérifie

- (i) Pour tout $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, l'application $A \mapsto p_t(x, A)$ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$,
- (ii) Pour tout $t \geq 0$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, l'application $x \mapsto p_t(x, A)$ est mesurable,
- (iii) Pour tout $s, t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, l'équation de Chapman-Kolmogorov, i.e.

$$p_{t+s}(x, A) = \int_{\mathbb{R}} p_t(x, dy) p_s(y, A) \quad (2.19)$$

Si de plus, pour tout $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, nous avons $p_t(x, \mathbb{R}) = 1$, alors la famille $(p_t)_{t \geq 0}$ est appelée *fonction de transition* ou *semi-groupe de Markov*.

Soit $(X, \mathbb{P})$ un processus de Lévy sur l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous notons $\mathbb{P}_x$ la loi de $X + x$ sous $\mathbb{P}$, i.e. la loi du processus partant de x et $\mathbb{E}_x$ l'espérance de $X + x$ sous $\mathbb{P}$. Dans la suite, nous noterons $\mathbb{P}$ pour $\mathbb{P}_0$ et $\mathbb{E}$ pour $\mathbb{E}_0$. L'indépendance et la stationnarité des accroissements de X impliquent que la famille de fonctions $(p_t)_{t \geq 0}$ définie, pour tout $t \geq 0$, par

$$p_t(x, B) := \mathbb{P}_x(X_t \in B) \quad x \in \mathbb{R}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad (2.20)$$

est un semi-groupe de Markov sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, appelé *semi-groupe de Markov associé à X* . Réciproquement, à tout semi-groupe de Markov $(p_t)_{t \geq 0}$ peut être associé, à une version près, un processus de Lévy X tel que (2.20) soit vérifiée. Un processus de Markov $\tilde{X}$ est une *version* du processus de Markov X s'il a le même semi-groupe de Markov que X .

Nous associons à $(X, \mathbb{P})$ une première famille d'opérateurs sur $L^\infty(\mathbb{R})$, notée $(P_t)_{t \geq 0}$, définie pour tout $t \geq 0$ et tout $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ par

$$P_t f(x) := \mathbb{E}_x(f(X_t)), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.21)$$

Remarquons que $P_0 = Id$ et que, d'après l'équation de Chapman-Kolmogorov, pour tout $t, s \geq 0$,

$$P_t \circ P_s = P_{t+s}. \quad (2.22)$$

De plus, pour tout $t \geq 0$ et tout $f \in L^\infty(\mathbb{R})$,

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+y) \mathbb{P}(X_t \in dy) = \int_{\mathbb{R}} f(y) p_t(x, dy), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.23)$$

Les relations (2.20) et (2.21) montrent qu'un processus de Lévy est caractérisé de manière équivalente par la donnée de la fonction de transition $(p_t)_{t \geq 0}$ ou par la donnée de la famille d'opérateurs $(P_t)_{t \geq 0}$ et la relation (2.23) montre comment passer de l'un à l'autre. La famille $(P_t)_{t \geq 0}$ est également appelée *semi-groupe de Markov associé à X* ou *opérateur de transition*. La relation (2.22) justifie a posteriori le terme de semi-groupe (de convolution) pour la famille $(p_t)_{t \geq 0}$.

Notons $\mathcal{C}_0 \subset L^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ tendant vers 0 en l'infini, muni de la norme uniforme. Le semi-groupe $(P_t)_{t \geq 0}$ associé à $(X, \mathbb{P})$ vérifie alors la propriété de Feller :

- (i) $P_t \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_0$, pour tout $t \geq 0$
- (ii) $\lim_{t \rightarrow 0} \|P_t f - f\|_\infty = 0$, pour tout $f \in \mathcal{C}_0$.

Ainsi, un processus de Lévy $(X, \mathbb{P})$ est un processus de Feller, i.e. un processus de Markov vérifiant la propriété de Feller.

Nous associons à $(X, \mathbb{P})$ une seconde famille d'opérateurs $(U^q, q \geq 0)$, appelés *opérateurs q -potentiels*, dont les noyaux jouent un rôle essentiel dans la reptation et le conditionnement. Pour tout $q \geq 0$ et toute fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ positive, nous définissons

$$U^q f(x) := \mathbb{E}_x \left(\int_0^\infty e^{-qt} f(X_t) dt \right) = \int_0^\infty e^{-qt} P_t f(x) dt, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.24)$$

Remarquons que ces intégrales sont éventuellement infinies dans le cas $q = 0$ et que $U^q f$ est la transformée de Laplace de $P_t f$. Nous noterons $U = U^0$. Pour tout $q \geq 0$, la famille des noyaux $(U^q(x, dy), x \in \mathbb{R})$, appelées *mesures q -potentielles* associées à l'opérateur U^q , est définie telle que

$$U^q f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) U^q(x, dy), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.25)$$

pour toute fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ positive. Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, nous définissons V^q , la mesure q -potentiel du processus de Lévy $(X, \mathbb{P})$, par

$$V^q(B) := U^q \mathbb{1}_B(0) = \mathbb{E} \left(\int_0^\infty e^{-qt} \mathbb{1}_B(X_t) dt \right). \quad (2.26)$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, par translation,

$$U^q(x, B) = U^q(0, B - x) = V^q(B - x).$$

La mesure V^0 est appelée la *mesure de renouvellement* de X . Dans ce qui suit, nous noterons V , U ou v la mesure V^0 . Intuitivement, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $V(B) = U \mathbb{1}_B(0)$ mesure le temps moyen passé par le processus $(X, \mathbb{P})$ dans B au cours de sa vie, lorsque $U \mathbb{1}_B(x)$ mesure celui passé par $(X, \mathbb{P}_x)$. Notons également que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $p_t(x, B) = p_t(0, B - x) = \mu_t(B - x)$.

Nos résultats relatifs à la reptation d'un processus de Lévy X nécessitent des hypothèses d'absolue continuité par rapport à la mesure de Lebesgue des mesures q -potentiel ou des mesures de transition de X . Dans ce qui suit, quand nous parlons d'*absolue continuité*, il s'agit d'absolue continuité par rapport à la mesure de Lebesgue. Reprenant les notations de Sato [65], nous appelons (ACP) et (ACT) les deux conditions suivantes :

(ACP) Pour tout $q \geq 0$, V^q est absolument continue.

(ACT) Pour tout $t > 0$, μ_t est absolument continue.

Remarque 2.3.1. Nous formulons ci-dessous quelques remarques sur les conditions (ACP) et (ACT). Nous rappelons également des résultats relatifs à l'existence de certaines densités dans les sections suivantes.

- (i) Par définition de V^q , (ACT) implique (ACP). La réciproque est fausse. Considérons par exemple le processus réduit à un drift pur $X_t := \gamma t$ où $\gamma > 0$. Dans ce cas $\mu_t = \delta_{\gamma t}$ et pour $0 \leq a < b$, $V^q([a, b]) = (e^{-a/\gamma} - e^{-b/\gamma})/q$ si $q > 0$ et $v([a, b]) = (b - a)/\gamma$.
- (ii) (ACP) est équivalente à la condition suivante : il existe $q \geq 0$ tel que V^q est absolument continue. En revanche, l'absolue continuité de μ_t pour un certain $t > 0$ n'implique pas (ACT). Voir Sato [65] Théorème 27.23.
- (iii) Il n'existe pas de condition nécessaire et suffisante connue sur le triplet caractéristique de X pour que la condition (ACP) ou (ACT) soit vérifiée. Néanmoins, chacune des conditions suivantes est suffisante pour que (ACT) soit vérifiée :

- (a) $\sigma > 0$;
- (b) Pour tout $t > 0$, $u \mapsto e^{-t\Psi(u)} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$;
- (c) $\pi_{ac}(\mathbb{R}) = \infty$ où π_{ac} est la partie absolument continue de la mesure de Lévy π de X .

Dans le chapitre 4, Proposition 4.4.1, nous complétons le point (b) en montrant que (b) est équivalent à la condition suivante : pour tout $t > 0$, μ_t est absolument continue et il existe une version de sa densité qui est bornée. Cette condition est notée (H_4) dans le chapitre 3.

2.3.2 Quasi-continuité à gauche

Dans cette section, $(X, \mathbb{P})$ désigne un processus de Lévy. Les processus de Lévy possèdent en réalité la propriété dite *forte* de Markov, i.e. nous pouvons, dans l'égalité (2.18), remplacer t par un temps d'arrêt. Rappelons qu'une variable aléatoire $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ est un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -temps d'arrêt

si, pour tout $t \in [0, \infty]$, $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Cette condition est équivalente à $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ du fait de la continuité à droite de $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Pour tout $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -temps d'arrêt T , nous définissons

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : \forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}. \quad (2.27)$$

Nous avons alors le théorème suivant pour les processus de Lévy.

Théorème 2.3.1. (*Propriété forte de Markov pour les processus de Lévy*). Soit T un temps d'arrêt. Sous la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot \mid T < \infty)$, le processus $(X_{T+t} - X_T, t \geq 0)$ est indépendant de $\mathcal{F}_T$ et a la même loi que X , en particulier $(X_{T+t} - X_T, t \geq 0)$ est un processus de Lévy.

Nous donnons deux exemples de temps d'arrêt qui jouent un rôle essentiel dans les questions relatives à la reptation et au conditionnement d'un processus de Lévy. Soit $B \subseteq \mathbb{R}$ un borélien. Le premier temps d'entrée dans B et le premier temps d'atteinte de B par le processus X sont des temps d'arrêt définis respectivement par

$$T_B = \inf\{t \geq 0 : X_t \in B\} \quad \text{et} \quad \tau_B = \inf\{t > 0 : X_t \in B\}.$$

Notons que, dans la définition (1.1), $\tau_x^+ = \tau_B$ avec $B = (x, \infty)$. Dans la plupart des situations, $T_B = \tau_B$, en particulier lorsque $X_0 \notin B$. Si X est un processus de Poisson composé avec drift, nous pouvons avoir $T_B \neq \tau_B$ p.s. Dans tous les cas, nous avons

$$\mathbb{P}(X_{T_B} \in \overline{B} \mid T_B < \infty) = \mathbb{P}(X_{\tau_B} \in \overline{B} \mid \tau_B < \infty) = 1.$$

Lorsque B est réduit au singleton $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$, nous notons $T_x = T_{\{x\}}$ et $\tau_x = \tau_{\{x\}}$.

La question de la continuité des trajectoires est essentielle dans notre travail. En effet, nous étudions des processus dont les trajectoires possèdent une infinité de discontinuités sur tout intervalle de temps non réduit à un point, mais qui néanmoins *passent des frontières* de manière *continue* (avec une probabilité non nulle), pour reprendre l'expression de Millar [54]. Nous avons pris le parti de définir un processus de Lévy sur l'espace des fonctions càdlàg $(\Omega, \mathcal{F})$. Or, il existe une autre manière de définir un processus de Lévy réel, sur un espace probabilisé quelconque, et cette définition fait intervenir la notion de *continuité stochastique* ou *continuité en probabilité*. Un processus X à valeurs dans $\mathbb{R}$ défini sur un espace probabilisé $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ est un *processus de Lévy en loi* si

- (i) $\tilde{\mathbb{P}}(X_0 = 0) = 1$,
- (ii) ses accroissements sont indépendants et stationnaires,
- (iii) X est stochastiquement continu, i.e. pour tout $t \geq 0$ et $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{s \rightarrow t} \tilde{\mathbb{P}}(|X_s - X_t| > \varepsilon) = 0. \quad (2.28)$$

Si de plus il existe $\tilde{\Omega}_0 \in \tilde{\mathcal{F}}$ vérifiant $\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{\Omega}_0) = 1$ tel que pour tout $\omega \in \tilde{\Omega}_0$, $t \mapsto X_t(\omega)$ est càdlàg, alors X est un processus de Lévy tel que défini en 2.2.2. Il est en fait possible de montrer que tout processus de Lévy en loi X possède une modification qui est un processus de Lévy, i.e. il existe un processus Y dont les trajectoires sont càdlàg et tel que $\tilde{\mathbb{P}}(X_t = Y_t) = 1$ pour tout $t \geq 0$.

Tout processus de Lévy X possède des trajectoires continues à droite mais pas à gauche, hormis le cas où X est un brownien avec drift. Néanmoins, la condition (2.28) montre qu'il existe une notion plus faible de continuité à gauche, celle de *quasi-continuité à gauche*. Pour tout $t > 0$ fixé, la probabilité que X saute au temps t est nulle. Ainsi, pour toute suite déterministe de temps $(t_n)_{n \geq 0}$ telle que $t_n \uparrow t$ quand $n \rightarrow \infty$, $X_{t_n} - X_t \rightarrow 0$ $\mathbb{P}$ -p.s. Notons que cela ne contredit pas le fait que X peut avoir une infinité de sauts dans tout voisinage de t . Le résultat suivant montre que l'on peut remplacer t par un temps d'arrêt, i.e. définir une notion de quasi-continuité à gauche en un temps d'arrêt.

Théorème 2.3.2. (*Quasi-continuité à gauche*). Si T est un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -temps d'arrêt et $(T_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -temps d'arrêt tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ $\mathbb{P}$ -ps, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} X_{T_n} = X_T$ sous la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot \mid T < \infty)$.

En résumé, tout processus de Lévy est de Feller et tout processus de Feller est un processus de Markov fort qui admet une version càdlàg et quasi-continue à gauche.

2.3.3 Dualité

Le processus dual de X est par définition $X^* := -X$. Le dual X^* est un processus de Lévy sous $\mathbb{P}$ qui admet $\Psi^*(u) = \Psi(-u)$, $u \in \mathbb{R}$, comme exposant caractéristique. Dans toute la suite, la notation $*$ renvoie au processus dual. Nous rappelons trois lemmes de la théorie de la dualité.

Lemme 2.3.1. (*Retournement du temps*). Pour tout $t > 0$ fixé, les processus

$$(X_{(t-s)^-} - X_t, 0 \leq s \leq t) \quad \text{et} \quad (X_s^*, 0 \leq s \leq t) \quad (2.29)$$

ont la même loi sous $\mathbb{P}$ en posant $X_{0-} := X_0$.

Nous définissons $\bar{X}$ le processus du maximum passé et $\underline{X}$ le processus du minimum passé par

$$\bar{X}_t = \sup_{s \leq t} X_s, \quad t \geq 0 \quad \text{et} \quad \underline{X}_t = \inf_{s \leq t} X_s, \quad t \geq 0. \quad (2.30)$$

Nous introduisons ensuite les processus réfléchis respectivement en leur maximum et en leur minimum qui permettront de définir les processus d'échelles ascendants et descendants dans la Section 2.4 :

$$(\bar{X}_t - X_t, t \geq 0) \quad \text{et} \quad (X_t - \underline{X}_t, t \geq 0). \quad (2.31)$$

Ces processus sont fortement Markoviens sous $\mathbb{P}$.

Lemme 2.3.2. Pour tout $t > 0$ fixé, les couples

$$(\bar{X}_t, \bar{X}_t - X_t) \quad \text{et} \quad (X_t - \underline{X}_t, -\underline{X}_t)$$

ont la même loi sous $\mathbb{P}$.

Si B est un borélien de $\mathbb{R}$, alors, pour tout $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus B$ et $f \in L^\infty(\mathbb{R} \setminus B)$,

$$Q_t f(x) = \int_{\mathbb{R} \setminus B} f(y) \mathbb{P}_x(X_t \in dy, t < T_B) = \mathbb{E}_x(f(X_t) \mathbb{1}_{\{t < T_B\}}) \quad (2.32)$$

est l'opérateur de transition du processus $(X, \mathbb{P})$ tué en son premier temps d'entrée T_B dans B , voir Section 2.6. L'opérateur q -potentiel associé à $(Q_t)_{t \geq 0}$ est noté U_B^q . La relation de dualité peut alors s'exprimer à travers les semi-groupes $(Q_t)_{t \geq 0}$ et $(Q_t^*)_{t \geq 0}$ et les opérateurs q -potentiels U_B^q et U_B^{*q} via la formule d'inversion de Hunt.

Lemme 2.3.3. Soit B un borélien de $\mathbb{R}$. Pour toutes fonctions positives et mesurables f et g nulles sur B et pour tout $t \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) Q_t f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) Q_t^* g(x) dx. \quad (2.33)$$

De plus, pour tout $q > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) U_B^q f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) U_B^{*q} g(x) dx. \quad (2.34)$$

Notons que lorsque le processus $(X, \mathbb{P}_x)$ n'est pas tué, la formule d'inversion demeure valide et que sa démonstration consiste en un simple changement de variable.

2.4 Théorie des fluctuations

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats utiles de la théorie des fluctuations des processus de Lévy, notamment pour la vérification de certaines de nos hypothèses, et introduisons les objets qui sont au cœur de notre travail. Nous renvoyons à Bertoin [5], Kyprianou [40] et Doney [24] pour davantage de détails.

Dans ce qui suit, $(X, \mathbb{P})$ désigne un processus de Lévy.

2.4.1 Polarité et régularité

L'atteinte de l'ensemble $\{x\}$ où $x > 0$ par le processus X , autrement dit le fait que $\mathbb{P}(\tau_x < \infty) > 0$, est une condition nécessaire de reptation de X à travers le niveau x . Ceci notamment motive l'introduction des notions suivantes.

Définition 2.4.1. (*Ensembles polaire et essentiellement polaire*). Un ensemble fermé B est dit

(i) *polaire si*

$$\mathbb{P}_x(\text{Il existe } t > 0 \text{ tel que } X_t \in B) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R};$$

(ii) *essentiellement polaire si*

$$\mathbb{P}_x(\text{Il existe } t > 0 \text{ tel que } X_t \in B) = 0 \quad \text{pour presque-tout } x \in \mathbb{R}.$$

Un ensemble polaire est essentiellement polaire mais l'inverse est faux. Par exemple, si X est un processus de Poisson, l'ensemble $B = \mathbb{N}$ est essentiellement polaire mais non polaire. Hawkes [33] a montré qu'il y a équivalence entre les deux notions ssi (ACP) est vérifiée. En dimension un, Kesten [37] a montré que si X n'est pas un processus de Poisson composé, la polarité et l'essentielle polarité sont équivalentes pour les singletons (en dimension $d \geq 2$, tout point est essentiellement polaire). Notons par ailleurs que $\mathbb{P}_y(\tau_x = \infty) = \mathbb{P}_{y-x}(\tau_0 = \infty)$, donc $\{0\}$ est polaire ssi $\{x\}$ est polaire pour tout $x \in \mathbb{R}$ et qu'il est en est de même pour l'essentielle polarité. Le théorème suivant est du à Kesten [37] et Bretagnolle [5].

Théorème 2.4.1. Soit $q > 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $\{0\}$ n'est pas essentiellement polaire.

(ii)

$$\int_{\mathbb{R}} \Re \left(\frac{1}{q + \Psi(u)} \right) du < \infty. \quad (2.35)$$

(iii) V^q est absolument continue et sa densité est bornée.

(iv) (ACP) est vérifiée et, si v^q désigne la densité de V^q , v^q est bornée et nous avons

$$v^q(x) = v^0(x) \mathbb{E}_0(e^{-q\tau_x}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nous introduisons à présent la notion de *régularité d'un point pour un ensemble*. Intuitivement, cette notion décrit la manière dont « démarre » un processus, i.e. décrit le comportement des trajectoires à des instant arbitrairement petits et permet de déterminer si un processus partant de x atteint un ensemble instantanément. Cette notion permet de dégager des conditions nécessaires et suffisantes pour que la condition (ACP) soit vérifiée et intervient également dans la construction d'un temps local d'un processus, voir Section 2.4.2.

Définition 2.4.2. (*Points réguliers pour un ensemble*). Le point $x \in \mathbb{R}$ est dit *régulier* (resp. *irrégulier*) pour un ensemble ouvert ou fermé B si $\mathbb{P}_x(\tau_B = 0) = 1$ (resp. $\mathbb{P}_x(\tau_B = 0) = 0$). Le point x est dit *régulier pour lui-même* si x est régulier pour l'ensemble $\{x\}$.

Remarquons que d'après la loi du 0-1 de Blumenthal, $\mathbb{P}_x(\tau_B = 0)$ ne peut prendre que 0 ou 1 comme valeurs. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, x est régulier pour lui-même ssi 0 l'est. Nous complétons le Théorème 2.4.1 par le théorème suivant.

Théorème 2.4.2. *Soit $q > 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) $\{0\}$ n'est pas essentiellement polaire et 0 est régulier pour lui-même.
- (ii) (ACP) est vérifiée et, si v^q désigne la densité de V^q , v^q est bornée, continue et positive sur $\mathbb{R}$.

Notons que dans le cas où X est transient, les Théorèmes 2.4.1 et 2.4.2 sont également valables pour $q = 0$. Le théorème suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que 0 soit régulier pour $(0, \infty)$ et s'avère utile pour déterminer les cas d'existence d'un temps local en 0 pour le processus $\bar{X} - X$, voir la Section 2.4.2.

Théorème 2.4.3. *Soit X un processus de Lévy qui n'est pas un processus de Poisson composé. Alors 0 est régulier pour $(0, \infty)$ ssi*

$$\int_0^1 \frac{1}{t} \mathbb{P}(X_t > 0) dt = \infty. \quad (2.36)$$

De plus, (2.36) a lieu ssi une des trois conditions suivantes est satisfaite :

- (i) X est à variation non bornée.
- (ii) X est à variation bornée et $d_X > 0$ (où d_X désigne le drift de X défini par (2.12)).
- (iii) X est à variation bornée, $d_X = 0$ et

$$\int_0^1 \frac{x}{\int_0^x \pi(-\infty, -y) dy} \pi(dx) < \infty.$$

Remarque 2.4.1.

- (i) Les processus de Poisson composés sont les seuls processus pour lesquels 0 est régulier pour $[0, \infty)$ et $(-\infty, 0]$ sans l'être pour $(0, \infty)$ et $(-\infty, 0)$. Autrement dit, lorsque X n'est pas un processus de Poisson composé, 0 est régulier pour au moins une des deux demi-droites $(0, \infty)$ ou $(-\infty, 0)$.
- (ii) Si 0 est régulier pour $(0, \infty)$ alors $\tau_x^+ = \inf\{t : X_t > x\} = \inf\{t : X_t \geq x\}$, voir Millar [54] p 467 et Rogozin [64].
- (iii) Si X est à variation bornée, alors

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t \downarrow 0} \frac{X_t}{t} = d_X\right) = 1. \quad (2.37)$$

2.4.2 Temps local

Nous nous intéressons à présent aux instants en lesquels X est en son maximum (resp. son minimum), i.e. aux instants en lesquels le processus $\bar{X} - X$ (resp. $X - \underline{X}$) est en 0. Dans ce qui suit, nous formulons les résultats pour le processus $\bar{X} - X$, ceux-ci étant facilement transposables pour le processus $X - \underline{X}$.

Rappelons que $\bar{X} - X$ est un processus de Markov fort. Les temps locaux sont l'outil utilisé pour l'étude des zéros d'un processus de Markov. Intuitivement, le temps local en 0 est une mesure du temps passé par le processus dans un voisinage de 0. Nous nous contentons de donner la définition du temps local du processus de Markov $\bar{X} - X$ en 0 que nous appelons *temps local de X en son maximum*.

Définition 2.4.3. (*Temps local en le maximum*). Un processus $(L_t, t \geq 0)$ continu, croissant et $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adapté est appelé temps local en son maximum du processus de Lévy $(X, \mathbb{P})$ si

(i) Le support de la mesure de Stieltjes dL_t est l'ensemble $\overline{\{t \geq 0 : X_t = \overline{X}_t\}}$.

(ii) Pour tout $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -temps d'arrêt T tel que $\overline{X}_T = X_T$ p.s. sur $\{T < \infty\}$, le processus

$$\{L_{T+t} - L_T : t \geq 0\}$$

est indépendant de $\mathcal{F}_T$ sur $\{T < \infty\}$ et a la même loi que L sous $\mathbb{P}$.

Le temps local de X en son maximum est défini de manière unique à une constante près. Dans ce qui suit, nous dirons le temps de local du processus X en omettant de préciser qu'il est défini à une constante multiplicative près. Le résultat principal concernant le temps local est le suivant : le temps local de X en son maximum existe ssi 0 est régulier pour lui-même, pour le processus $\overline{X} - X$. Or 0 est régulier pour lui-même, pour le processus $\overline{X} - X$ ssi 0 est régulier pour $[0, \infty)$, pour le processus X . Lorsque c'est le cas, nous écrirons simplement que $[0, \infty)$ est régulier. De même nous dirons que l'ensemble $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est régulier (resp. irrégulier) pour dire que le point 0 est régulier (resp. irrégulier) pour B pour le processus X . Ainsi, nous distinguons les deux situations suivantes :

1. Si $[0, \infty)$ est régulier, X admet un temps local en son maximum défini à une constante près par 2.4.3. Nous normalisons L de la manière suivante

$$\mathbb{E} \left(\int_0^\infty e^{-t} dL_t \right) = 1.$$

2. Si $[0, \infty)$ est irrégulier, l'ensemble $\{t : X_t = \overline{X}_t\}$ est discret et le processus des temps de retours en 0 de $\overline{X} - X$ est un processus de renouvellement. Nous définissons alors le processus L , que nous appelons également, par abus de langage, le temps local en son maximum de X , par

$$L_t = \sum_{k=0}^{R_t} \mathbf{e}^{(k)},$$

où $R_0 = 0$ et pour $t > 0$, $R_t = \text{Card}\{s \in (0, t] : X_s = \overline{X}_s\}$ et $\mathbf{e}^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, est une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre

$$\gamma = \left(1 - \mathbb{E}(e^{-\tau_0^+})\right)^{-1},$$

où $\tau_0^+ = \inf\{t > 0 : X_t > 0\}$. Notons que le choix du paramètre γ est consistant avec la normalisation $\mathbb{E} \left(\int_0^\infty e^{-t} dL_t \right) = 1$ dans le cas où $[0, \infty)$ est régulier. Remarquons que le processus L ainsi défini n'est pas continu mais vérifie (i) et (ii) dans la Définition 2.4.3. Il est possible d'augmenter la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^X)$ en incluant la tribu $\sigma(\mathbf{e}^{(k)}, k = 0, 1, \dots)$ avant de la compléter.

Nous renvoyons au Théorème 2.4.3 et à la Remarque 2.4.1 pour avoir une caractérisation des processus pour lesquels il existe un temps local continu. Nous définissons le temps local en le minimum de la même manière en considérant le processus $X - \underline{X}$ et le notons L^* . Il correspond au temps local en son maximum du processus dual $X^* := -X$.

Remarque 2.4.2.

(i) Si X est spectralement négatif, i.e. $\pi(0, \infty) = 0$, alors $L := \overline{X}$ est le temps local de X .

(ii) Soit X un processus de Lévy tel que 0 est régulier pour $[0, \infty)$ et L une version de son temps local. Alors la constante $a \geq 0$ telle que

$$\int_0^t \mathbb{1}_{\{\overline{X}_s = X_s\}} ds = aL_t, \quad t \geq 0,$$

est strictement positive ssi 0 est irrégulier pour $(-\infty, 0)$. C'est le cas en particulier si X est un subordonateur ou un processus de Poisson composé avec un drift $d_X \geq 0$.

2.4.3 Processus d'échelle et mesure d'Itô

Dans cette section nous définissons les processus des hauteurs d'échelle ascendants et descendants. Les processus des temps d'échelle τ et τ^* , et les processus des hauteurs d'échelle H et H^* sont des subordonateurs, éventuellement tués, voir Remarque 2.4.3 ci-dessous, définis par :

$$\tau_t = \inf\{s : L_s > t\}, \quad \tau_t^* = \inf\{s : L_s^* > t\}, \quad H_t = X_{\tau_t}, \quad H_t^* = -X_{\tau_t^*}, \quad t \geq 0,$$

où $\tau_t = H_t = +\infty$, pour $t \geq L_\infty$ et $\tau_t^* = H_t^* = +\infty$, pour $t \geq L_\infty^*$. Les processus (τ, H) et (τ^*, H^*) sont des subordonateurs bivariés. Remarquons également que, pour tout $t \geq 0$, τ_t et τ_{t-} sont des $(\mathcal{F}_t)$ -temps d'arrêts.

Remarque 2.4.3. Si X est un processus de Lévy et $\mathbf{e}_q$ une v.a. indépendante suivant une loi exponentielle de paramètre $q \geq 0$, alors $\mathbb{P}(\limsup_{t \uparrow \infty} X_t < \infty) = 0$ ou 1 et le processus d'échelle (τ, H) vérifie

(i) Si $\mathbb{P}(\limsup_{t \uparrow \infty} X_t < \infty) = 0$ alors (τ, H) est un subordonateur bivarié.

(ii) Si $\mathbb{P}(\limsup_{t \uparrow \infty} X_t < \infty) = 1$ alors il existe $q > 0$ tel que $L_\infty \stackrel{(loi)}{=} \mathbf{e}_q$ et

$$\{(\tau_t, H_t), t < L_\infty\} \stackrel{(loi)}{=} \{(\tilde{\tau}_t, \tilde{H}_t), t < \mathbf{e}_q\},$$

où $(\tilde{\tau}, \tilde{H})$ est un subordonateur bivarié indépendant de $\mathbf{e}_q$.

Nous noterons U et U^* les mesures de renouvellement des processus d'échelle $((\tau, H), \mathbb{P})$ et $((\tau^*, H^*), \mathbb{P})$ définies sur $[0, \infty)^2$ par :

$$U(dt, dh) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\tau_u \in dt, H_u \in dh) du \quad \text{and} \quad U^*(dt, dh) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\tau_u^* \in dt, H_u^* \in dh) du.$$

Les drifts d_τ et d_{τ^*} des subordonateurs τ et τ^* vérifient :

$$\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s = \overline{X}_s\}} ds = d_\tau L_t, \quad \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s = \underline{X}_s\}} ds = d_{\tau^*} L_t^*. \quad (2.38)$$

Nous rappelons, voir Remarque 2.4.2, que $d_\tau > 0$ ssi $(-\infty, 0)$ est irrégulier et $d_{\tau^*} > 0$ ssi $(0, \infty)$ est irrégulier. Ainsi, si X n'est pas un processus de Poisson composé, alors une des deux demi-droites $(-\infty, 0)$ et $(0, \infty)$ au moins est régulière et nous avons $d_\tau d_{\tau^*} = 0$. Si X est un processus de Poisson composé, alors $d_\tau > 0$ et $d_{\tau^*} > 0$.

Nous définissons à présent la mesure d'Itô n^* des excursions en dehors de 0 du processus $X - \underline{X}$. Cette mesure est la mesure caractéristique du processus ponctuel de Poisson suivant

$$t \mapsto \begin{cases} \{(X - \underline{X})_{\tau_{t-}^* + s}, 0 \leq s < \tau_t^* - \tau_{t-}^*\} & \text{si } \tau_{t-}^* < \tau_t^* \\ \delta & \text{si } \tau_{t-}^* = \tau_t^*, \end{cases}$$

où δ est un point isolé ajouté à l'espace des excursions. La mesure n^* est une mesure markovienne dont le semi-groupe est celui d'un processus de Lévy tué lorsqu'il atteint $(-\infty, 0]$. Plus précisément, pour tout $x > 0$, nous notons $\mathbb{Q}_x^*$ la loi du processus $(X_t \mathbb{1}_{\{t < \tau_0^-\}} + \infty \cdot \mathbb{1}_{\{t \geq \tau_0^-\}}, t \geq 0)$ sous $\mathbb{P}_x$, où $\tau_0^- = \inf\{t > 0 : X_t < 0\}$. Nous avons, pour tout $\Lambda \in \mathcal{F}_t$,

$$\mathbb{Q}_x^*(\Lambda, t < \zeta) = \mathbb{P}_x(\Lambda, t < \tau_0^-). \quad (2.39)$$

où ζ est le temps de vie des excursions. Pour toute fonction borélienne f et g et pour tout $s, t > 0$,

$$n^*(f(X_t)g(X_{s+t}), s+t < \zeta) = n^*(f(X_t)\mathbb{E}_{X_t}^*(g(X_s)), s < \zeta), \quad (2.40)$$

où $\mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}^*}$ est l'espérance sous $\mathbb{Q}_x^*$. De plus, nous définissons la loi d'entrée $(q_t^*(dx), t > 0)$ de la mesure d'excursion n^* par

$$n^*(f(X_t), t < \zeta) = \int_0^\infty f(x) q_t^*(dx). \quad (2.41)$$

La mesure d'Itô des excursions en dehors de 0 du processus réfléchi en son maximum $\bar{X} - X$ est définie de la même manière. Nous notons n cette mesure et $q_t(dx)$ sa loi d'entrée. Nous désignons également par $\mathbb{Q}_x$ la loi du processus $(X_t^* \mathbb{1}_{\{t < \tau_0^{*-}\}} + \infty \cdot \mathbb{1}_{\{t \geq \tau_0^{*-}\}}, t \geq 0)$ sous $\mathbb{P}_x$, où $\tau_0^{*-} = \inf\{t > 0 : X_t^* < 0\}$.

Nous rappelons pour finir le lien qui existe entre les lois $q_t(dh)$ et $q_t^*(dh)$ et les mesures de renouvellement $U(dt, dh)$ et $U^*(dt, dh)$ de (τ, H) et (τ^*, H^*) :

$$d_{\tau^*} \delta_{\{(0,0)\}}(dt, dh) + q_t^*(dh) dt = U(dt, dh) \quad (2.42)$$

$$d_{\tau} \delta_{\{(0,0)\}}(dt, dh) + q_t(dh) dt = U^*(dt, dh). \quad (2.43)$$

Ces égalités entre mesures sur $[0, \infty)^2$ sont vérifiées dès que X n'est pas un processus de Poisson composé, voir Lemme 1 dans Chaumont [13]. En particulier, sous les hypothèses du Théorème 4.1.2, i.e. si $U(dt, dh)$ admet une densité sur $(0, \infty)^2$, cette densité est égale à celle de $q_t^*(dh) dt$, ce qui explique notre notation $q_t^*(h)$, $t, h \in (0, \infty)$ dans ce théorème.

2.4.4 Factorisation de Wiener-Hopf

Nous nous contentons de formuler brièvement la factorisation de Wiener-Hopf en espace sachant que nous n'utilisons celle-ci que de manière indirecte dans notre travail. Cette factorisation permet d'exprimer l'exposant caractéristique Ψ de X en fonction des exposants de Laplace des processus d'échelle ascendant et descendant de X . Soit κ et κ^* les exposants de Laplace respectivement de (τ, H) et (τ^*, H^*) . Pour tout $\alpha, \beta > 0$,

$$\kappa(\alpha, \beta) = \mathbb{E} \left(e^{-\alpha \tau_1 - \beta H_1} \mathbb{1}_{\{1 < L_\infty\}} \right) = q + d_\tau \alpha + d_H \beta + \int_{t \geq 0} \int_{x \geq 0} (1 - e^{-\alpha t - \beta x}) \pi_{(\tau, H)}(dt, dx) \quad (2.44)$$

où L_∞ suit une loi exponentielle de paramètre q . Notons que κ et κ^* peuvent être prolongées analytiquement à $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \geq 0\}$ en leur seconde variable. Alors, dans le cas où X n'est pas un processus de Poisson composé, la factorisation de Wiener-Hopf en espace s'écrit :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad k' \Psi(u) = \kappa(0, -iu) \kappa^*(0, iu) \quad (2.45)$$

où k' est une constante strictement positive.

2.5 Reptation à travers un niveau fixe

Nous complétons dans cette section la revue des résultats, évoqués en introduction, relatifs à la reptation d'un processus de Lévy à travers un niveau fixe. L'essentiel de ces résultats a été établi par Neveu [56] en 1962 et Kesten [37] en 1968 dans le cas des subordonateurs et par Millar [54] en 1973 et Vigon [73] en 2002 dans le cas des processus de Lévy, en particulier à variation non bornée. Notons que les raisonnements suivis par Millar reposent principalement sur une étude des trajectoires des processus en utilisant de nombreux outils de la théorie des fluctuations, mais sans faire usage de la factorisation de Wiener-Hopf. Le travail de thèse de Vigon, qui a marqué par sa portée, s'appuie également sur la théorie des fluctuations mais exploite de manière approfondie la factorisation de Wiener-Hopf. Notre approche de la question de la reptation à travers une courbe est « trajectorielle » et en ce sens s'inscrit davantage dans la continuité des travaux de Millar. Les résultats de Neveu et Kesten ont été rappelés en introduction. Ci-dessous nous revenons sur l'article de Millar, fondateur concernant la reptation à travers un niveau fixe, puis, dans un second temps, sur l'article de Griffin et Maller [31] concernant le *temps en lequel un processus rampe*. Enfin, nous

donnons quelques résultats complémentaires relatifs à la reptation à travers un niveau fixe.

Soit $(X, \mathbb{P})$ un processus de Lévy à valeurs dans $\mathbb{R}$ de triplet caractéristique (a, σ, π) et $x > 0$. Rappelons que, par définition, X rampe vers le haut à travers le niveau x si $\mathbb{P}(X_{\tau_x^+} = x) > 0$ où $\tau_x^+ = \inf\{t : X_t > x\}$.

2.5.1 Les résultats de Millar

Millar, en préambule de son article, évacue le cas qu'il juge « *inintéressant* » des processus de Poisson composés et remarque que la question de la reptation vers le haut du processus X n'est pertinente qu'à deux conditions :

- (i) X doit avoir des sauts vers le haut, i.e. $\pi(0, \infty) > 0$. Sinon, $\mathbb{P}(X_{\tau_x^+} = x) = 1$ dès que $\limsup_{t \rightarrow \infty} X_t = \infty$;
- (ii) X doit avoir une probabilité non nulle d'atteindre le niveau x , i.e. $\mathbb{P}(T_x < \infty) > 0$. Remarquons que $\mathbb{P}(\tau_x^+ \leq T_x) = 1$ et que $\{\tau_x^+ = T_x\} = \{X \text{ rampe vers le haut à travers } x\}$ p.s. Les conditions pour que $\mathbb{P}(T_x < \infty) > 0$ sont données par Kesten, voir également Bretagnolle [11], à la suite d'une question posée par Chung [22]. Kesten montre que, sous l'hypothèse $\pi(\mathbb{R}) = \infty$, si $C_0 = \{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(T_x < \infty) > 0\}$ désigne l'ensemble des points atteints par le processus X partant de 0, alors

$$C_0 \neq \emptyset \iff \int_{\mathbb{R}} \Re \left(\frac{1}{1 + \Psi(u)} \right) du < \infty.$$

De plus, il distingue différents cas que nous pouvons regrouper de la manière suivante :

- (a) Si $\sigma > 0$, alors $C_0 = \mathbb{R}$.
- (b) Si $\sigma = 0$, X est à variation non bornée et $C_0 \neq \emptyset$, alors $C_0 = \mathbb{R}$.
- (c) Si X est à variation bornée, alors $C_0 \neq \emptyset$ ssi $d_X \neq 0$. Dans ce cas, $C_0 = \mathbb{R}$ sauf si X ou $-X$ est un subordonateur (et $C_0 = (0, \infty)$ ou $C_0 = (-\infty, 0)$ respectivement).

Ainsi, lorsque X n'est pas un processus de Poisson composé, C_0 est soit vide soit égal à l'un des ensembles $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}^-$.

Millar précise ensuite que, sous ces hypothèses, X ne peut ni atteindre le niveau x pour la première fois par un saut ni sauter depuis le niveau x , i.e.

$$\mathbb{P}(X_{\tau_x^+ -} < X_{\tau_x^+} = x) = \mathbb{P}(X_{\tau_x^+ -} = x < X_{\tau_x^+}) = 0. \quad (2.46)$$

Il classifie alors comme suit les différents cas possibles :

- (a) $\sigma^2 = 0$, $\int_{-1}^1 |x| \pi(dx) < \infty$, $d > 0$.
- (b) $\sigma^2 = 0$, $\int_{-1}^1 |x| \pi(dx) < \infty$, $d < 0$.
- (c) $\sigma^2 \neq 0$.
- (d) $\sigma^2 = 0$, $\int_{-1}^0 |x| \pi(dx) = \infty$, $\int_0^1 x \pi(dx) < \infty$.
- (e) $\sigma^2 = 0$, $\int_{-1}^0 |x| \pi(dx) < \infty$, $\int_0^1 x \pi(dx) = \infty$.
- (f) $\sigma^2 = 0$, $\int_{-1}^0 |x| \pi(dx) = \int_0^1 x \pi(dx) = \infty$.

Quand X est à variation bornée, i.e. dans les cas (a) et (b), il rampe vers le haut ssi $d > 0$, i.e. dans le cas (a). Quand X est à variation non bornée, il rampe vers le haut s'il a une composante brownienne non nulle, cas (c), ou si sa mesure de Lévy vérifie $\int_0^1 x\pi(dx) < \infty$, i.e. les sauts vers le hauts ne sont pas « trop nombreux », cas (d). Dans le cas (e), X ne rampe pas vers le haut. Dans le cas (f), le plus difficile à traiter, il peut y avoir ou non reptation. Millar fournit alors un critère analytique permettant de trancher dans ce dernier cas :

$$X \text{ rampe vers le haut} \iff \int_0^1 K(y)\pi(y,1)dy < \infty, \quad (2.47)$$

où

$$K(y) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos(uy)) \Re \left(\frac{1}{\lambda - \psi(u)} \right) du.$$

Ce critère admet pour corollaire que, toujours dans le cas (f) et sous l'hypothèse que 0 est régulier pour $(0, \infty)$, si $\pi(-\infty, -x) = O(\pi(x, \infty))$ quand $x \downarrow 0$, alors X ne rampe pas vers le haut. Millar montre également que si $\pi(-\infty, -x) = O(\pi(x, \infty))$ et $\pi(x, \infty) = O(\pi(-\infty, -x))$ quand $x \downarrow 0$, alors X ne rampe ni vers le haut ni vers le bas. Enfin, Millar montre, sans utiliser la factorisation de Wiener-Hopf, que X rampe à la fois vers le haut et le bas ssi il a une composante gaussienne non nulle. Ce résultat se déduit facilement de la factorisation de Wiener-Hopf qui permet d'établir que les drifts d_H et d_{H^*} de H et H^* vérifient $2d_H d_{H^*} = \sigma^2$, avec notre normalisation du temps local. Dans le cas (f), nous renvoyons au test intégral de Vigon énoncé en introduction, voir (1.2), qui a l'avantage de ne porter que sur la mesure de Lévy de X . La démonstration de ce résultat repose sur la factorisation de Wiener-Hopf.

S'il ne s'intéresse qu'à la reptation à travers un niveau fixe d'un processus de Lévy à valeurs dans $\mathbb{R}$, Millar inscrit néanmoins dès 1973 cette question dans un cadre plus général qu'il formule ainsi : soit X un processus de Lévy partant de 0, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et B un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ ne contenant pas 0. À quelles conditions sur l'exposant caractéristique du processus X a-t-on $\mathbb{P}(X_{T_B} \in \partial B, T_B < \infty) > 0$? Millar précise qu'au delà de son intérêt intrinsèque dans la description du comportement des trajectoires d'un processus de Lévy, la condition $\mathbb{P}(X_{T_B} \in \partial B, T_B < \infty) = 0$ apparaît comme hypothèse dans au moins un article « important », voir Ikeda et Watanabe [34]. Notre travail établit des résultats permettant de répondre en partie à cette question.

2.5.2 Temps de reptation

Dans cette section, nous relevons quelques résultats établis par Griffin et Maller [31] en 2011 relatifs au *temps en lequel un processus de Lévy rampe* à travers un niveau fixe. Dans la suite, nous parlerons plus simplement du *temps de reptation* à travers un niveau fixe. Ces résultats sont à rapprocher de la Remarque 3.1.3 concernant la loi du temps de reptation d'un processus de Lévy à travers une courbe.

Soit $(X, \mathbb{P})$ un processus de Lévy de triplet (a, σ, π) . Nous notons pour tout $t \geq 0$ et $x \geq 0$, $V(t, x) = U([0, t], [0, x])$, i.e.

$$V(t, x) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\tau_s \leq t, H_s \leq x) ds \quad t \geq 0, x \geq 0,$$

la fonction de renouvellement du processus d'échelle $((\tau, H), \mathbb{P})$. Les auteurs définissent alors la fonction

$$p(t, x) := \mathbb{P}(\tau_x^+ \leq t, X_{\tau_x^+} = x), \quad t \geq 0, x > 0, \quad (2.48)$$

et établissent le résultat suivant :

Théorème 2.5.1. (*Temps de reptation*).

(i) Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) Il existe $t > 0$ et $x > 0$ tels que $p(t, x) > 0$.
- (b) $p(t, x) > 0$ pour tout $x > 0$ et $t > 0$ suffisamment grand (dépendant de x).
- (c) $p(t, x) > 0$ pour tout $t > 0$ et $x > 0$ suffisamment petit (dépendant de t).
- (d) $d_H > 0$.

(ii) Si $d_H > 0$ et X n'est pas un processus de Poisson composé (avec un drift strictement positif), alors :

(a) $V(t, 0) = 0$, $x \mapsto V(t, x)$ est dérivable sur $(0, \infty)$ et

$$p(t, x) = d_H \frac{\partial}{\partial x} V(t, x). \quad (2.49)$$

(b) Pour tout $t \geq 0$, $x \mapsto p(t, x)$ est continue sur $(0, \infty)$.

(c) Pour tout $x > 0$, $t \mapsto p(t, x)$ est continue sur $[0, \infty)$.

Les auteurs donnent également un critère de reptation d'un processus de Lévy à l'aide de la mesure de Lévy $\pi_{(\tau, H)}$ du processus d'échelle $((\tau, H), \mathbb{P})$: si X n'est pas un processus de Poisson composé, alors X rampe (vers le haut) ssi $\pi_{(\tau, H)}(ds, \{0\})$ n'est pas la mesure nulle. Notons enfin qu'ils établissent une « quadruple loi de premier passage » pour un subordonateur bivarié que nous utilisons dans la démonstration du Théorème 3.1.1. Dans le théorème suivant, si Y est un subordonateur et $x \geq 0$, nous notons $T_x^Y = \inf\{t \geq 0 : Y_s > x\}$.

Théorème 2.5.2. (Quadruple loi). Soit (Y, Z) un subordonateur bivarié tel que Z n'est pas un processus de Poisson composé. Pour $u > 0$, $0 \leq y \leq u$, $s \geq 0$, $t \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(Z_{T_u^Z} - u \in dx, u - Z_{T_u^Z-} \in dy, \Delta Y_{T_u^Z} \in ds, Y_{T_u^Z-} \in dt \right) \\ &= \mathbb{I}_{\{x>0\}} V_{(Y,Z)}(dt, u - dy) \pi_{(Y,Z)}(ds, dx + y) + d_Z \frac{\partial}{\partial u} V_{(Y,Z)}(dt, du) \delta_0(ds, dx, dy), \end{aligned} \quad (2.50)$$

où $V_{(Y,Z)}(t, x) = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y \leq t, Z \leq x) ds$ et avec la convention que le terme contenant la dérivée partielle est absent si $d_Z = 0$.

Notons pour finir que Maller et Griffin généralisent la « quintuple loi » de Doney et Kyprianou [26] en ajoutant un terme prenant en compte la probabilité de reptation, i.e. quand l'overshoot est nul.

2.5.3 Résultats complémentaires

Nous mentionnons ci-dessous quelques résultats complémentaires liés à la reptation à travers un niveau fixe, sans volonté d'exhaustivité.

1. Rogers [63] fournit en 1984, le critère de non reptation suivant. Soit X un processus de Lévy tel que $\int_{-1}^0 |x| \pi(dx) = \int_0^1 x \pi(dx) = \infty$ et sans composante brownienne. Alors :

$$\liminf_{x \downarrow 0} \frac{\int_x^1 \bar{\pi}(du)}{\int_x^1 \pi^*(du)} > 0 \quad \Rightarrow \quad X \text{ ne rampe pas vers le haut}, \quad (2.51)$$

où, pour tout $x > 0$, $\bar{\pi}(x) = \pi(x, \infty)$ et π^* est la mesure de Lévy de X^* .

2. Comme nous l'avons souligné en introduction, voir remarque de Kesten dans Millar [54], la clé de la reptation d'un processus de Lévy X à travers un niveau $x > 0$ réside dans l'égalité suivante :

$$\overline{\{X_t : t \geq 0\}} = \overline{\{H_t : t \geq 0\}} \quad \text{p.s.} \quad (2.52)$$

Cette relation nous permet de déduire le critère de reptation suivant, pour tout processus de Lévy X tel que X n'est pas un processus de Poisson composé :

$$X \text{ rampe vers le haut} \iff \lim_{\beta \uparrow \infty} \frac{\kappa(0, \beta)}{\beta}. \quad (2.53)$$

Notons que pour démontrer ce critère dans le cas où $(0, \infty)$ n'est pas régulier, il faut faire appel à un prolongement de l'équation amicale de Vigon [73], démontrée par Doney et Kyprianou [26] :

$$\pi_{(\tau, H)}(dt, dx) = \int_{u \geq 0} U^*(dt, du) \pi(dx + u). \quad (2.54)$$

3. Le résultat suivant a été établi par Bertoin [6] en 1995 et permet de déduire de la reptation vers le bas d'un processus de Lévy une propriété sur le comportement de ses trajectoires. Un processus de Lévy $(X, \mathbb{P})$ est dit *ne jamais être croissant* si l'ensemble des t pour lesquels il existe $\varepsilon \in (0, t)$ tels que

$$X_{t'} \leq X_t \leq X_{t''} \quad \text{pour tout } t' \in [t - \varepsilon, t] \text{ and } t'' \in [t, t + \varepsilon]$$

est vide p.s. Si un processus de Lévy X rampe vers le bas alors X n'est jamais croissant.

2.6 Conditionnement de processus de Lévy

Dans cette section, nous résumons la « méthode » permettant de conditionner un processus de Lévy via une *h-transformation de Doob* avant de donner quelques exemples bien connus d'application de celle-ci. Nous nous appuyons sur Chaumont [12], Chaumont et Doney [15], Chung et Walsh [23] et Weißmann [75] notamment. Les résultats sont formulés en dimension un mais nous les utiliserons essentiellement en dimension deux dans la Section 3.2 et le Chapitre 5 relatifs au conditionnement de processus à être absorbés par une courbe.

2.6.1 h-transformation de Doob

Processus de Lévy tué quand il atteint un ensemble

Nous avons déjà vu qu'il est possible d'élargir la classe des processus de Lévy en considérant des processus éventuellement tués après un temps indépendant suivant une loi exponentielle. Nous définissons ci-dessous un processus de Lévy tué lorsqu'il atteint un ensemble.

Soit $(X, \mathbb{P}_x)$, $x \in \mathbb{R}$, un processus de Lévy et $B \subseteq \mathbb{R}$ un borélien. Rappelons que le $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -temps d'arrêt T_B désigne le premier temps en lequel le processus $(X, \mathbb{P}_x)$ entre dans B et est défini par $T_B = \inf\{t \geq 0 : X_t \in B\}$. Nous posons $\mathcal{D} := \mathbb{R} \setminus B$ le complémentaire de B dans $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \geq 0$,

$$q_t(x, dy) = \mathbb{P}_x(X_t \in dy, t < T_B), \quad x, y \in \mathcal{D}. \quad (2.55)$$

Alors $(q_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe sous-markovien sur $(\mathcal{D}, \mathcal{B}(\mathcal{D}))$, i.e. pour tout $t > 0$ et $x \in \mathcal{D}$, $q_t(x, \mathcal{D}) = \mathbb{P}_x(t < T_B) \leq 1$. Nous pouvons néanmoins l'étendre à un semi-groupe markovien sur $(\mathcal{D} \cup \{\delta\}, \mathcal{B}(\mathcal{D} \cup \{\delta\}))$ en définissant

$$q_t(x, \{\delta\}) = \begin{cases} \mathbb{P}_x(t \geq T_B) & \text{si } x \in \mathcal{D} \\ 1 & \text{si } x = \delta \end{cases}. \quad (2.56)$$

Notons que si $(Q_t)_{t \geq 0}$ désigne l'opérateur de transition associé à $(q_t)_{t \geq 0}$, alors, pour tout $t \geq 0$, $x \in \mathcal{D}$ et $f \in L^\infty(\mathcal{D})$,

$$Q_t f(x) = \int_{\mathcal{D}} f(y) q_t(x, dy) = \int_{\mathcal{D}} f(y) \mathbb{P}_x(X_t \in dy, t < T_B) = \mathbb{E}_x(f(X_t) \mathbb{1}_{\{t < T_B\}}). \quad (2.57)$$

Il est alors possible de montrer qu'il existe une famille de mesures de probabilité $((\mathbb{Q}_x)_{x \in \mathcal{D}})$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ sous laquelle le processus canonique X est un processus de Markov ayant pour semi-groupe $(q_t)_{t \geq 0}$. Ceci se traduit par l'égalité en loi suivante, valable pour tout $x \in \mathcal{D}$,

$$((X_t \mathbb{I}_{\{t < \zeta\}})_{t \geq 0}, \mathbb{Q}_x) \stackrel{(loi)}{=} ((X_t \mathbb{I}_{\{t < T_B\}})_{t \geq 0}, \mathbb{P}_x), \quad (2.58)$$

et notons qu'en particulier, pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{Q}_x(X_t \in B) = 0$. Remarquons que comme $x \notin B$, $T_B = \tau_B$ p.s. et les notions d'entrée dans B et d'atteinte de B sont équivalentes. Nous emploierons donc les deux termes indistinctement.

Définition 2.6.1. (*Processus tué quand il atteint B*). Pour tout $x \in \mathcal{D}$, le processus $(X, \mathbb{Q}_x)$ est appelé processus $(X, \mathbb{P}_x)$ tué quand il atteint B .

Fonctions excessives, invariantes et harmoniques

Soit $(X, \mathbb{P}_x)$, $x \in \mathbb{R}$, un processus de Lévy et $B \subseteq \mathbb{R}$ un borélien et $(q_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe markovien du processus $(X, \mathbb{P}_x)$ tué quand il atteint B . Nous définissons une fonction excessive, invariante et harmonique pour le processus tué $(X, \mathbb{Q}_x)$.

Définition 2.6.2. (*Fonction excessive*). Une fonction $h : \mathcal{D} \rightarrow [0, \infty]$ est dite excessive pour le processus tué $(X, \mathbb{Q}_x)$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout $t \geq 0$ et $x \in \mathcal{D}$,

$$\mathbb{E}_x(h(X_t) \mathbb{I}_{\{t < T_B\}}) \leq h(x).$$

(ii) Pour tout $x \in \mathcal{D}$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{E}_x(h(X_t) \mathbb{I}_{\{t < T_B\}}) = h(x).$$

Définition 2.6.3. (*Fonction invariante*). Une fonction $h : \mathcal{D} \rightarrow [0, \infty)$ est dite invariante pour le processus tué $(X, \mathbb{Q}_x)$ si, pour tout $t \geq 0$ et $x \in \mathcal{D}$,

$$\mathbb{E}_x(h(X_t) \mathbb{I}_{\{t < T_B\}}) = h(x).$$

Notons que h est excessive ssi $(h(X_t) \mathbb{I}_{\{t < T_B\}})_{t \geq 0}$ est une sur-martingale et h est invariante ssi $(h(X_t) \mathbb{I}_{\{t < T_B\}})_{t \geq 0}$ est une martingale.

Définition 2.6.4. (*Fonction harmonique*). Une fonction $h : \mathcal{D} \rightarrow [0, \infty)$ est dite harmonique pour le processus tué $(X, \mathbb{Q}_x)$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) h est excessive pour le processus tué $(X, \mathbb{Q}_x)$.

(ii) Pour tout ouvert $O \in \mathbb{R}$ tel que $\overline{O \cap \mathcal{D}}$ est un ensemble compact non vide inclus dans $\mathcal{D}$ et pour tout $x \in \mathcal{D}$,

$$\mathbb{E}_x(h(X_T) \mathbb{I}_{\{T < T_B\}}) = h(x), \quad (2.59)$$

où $T := T_{\mathcal{D} \setminus O} = \inf\{t \geq 0 : X_t \in \mathcal{D} \setminus O\}$.

Notons que toute fonction invariante est harmonique.

h -transformé de Doob du processus $(X, \mathbb{P}_x)$ tué

Nous définissons à présent le h -transformé de Doob du processus $(X, \mathbb{P}_x)$ tué que nous appelons également le processus obtenu via la h -transformation de Doob du processus $(X, \mathbb{P}_x)$ tué. Nous commençons par définir le h -transformé de Doob du semi-groupe $(q_t)_{t \geq 0}$.

Définition 2.6.5. (*h -transformé de Doob du semi-groupe*). Soit h une fonction excessive pour le processus tué $(X, \mathbb{Q}_x)$. Le semi-groupe sous markovien $(q_t^h)_{t \geq 0}$ défini par

$$q_t^h(x, dy) = \begin{cases} \frac{h(y)}{h(x)} q_t(x, dy) & \text{si } h(x) > 0 \\ 0 & \text{si } h(x) = 0 \end{cases}, \quad x, y \in \mathcal{D}, \quad (2.60)$$

est appelé h -transformé de Doob du semi-groupe $(q_t)_{t \geq 0}$.

Remarquons que si h est invariante et strictement positive, alors, pour tout $x \in \mathcal{D}$,

$$q_t^h(x, \mathcal{D}) = \frac{1}{h(x)} \mathbb{E}_x(h(X_t) \mathbb{I}_{\{t < T_B\}}) = \frac{h(x)}{h(x)} = 1. \quad (2.61)$$

Si h n'est pas invariante, nous suivons la même démarche pour étendre le semi-groupe sous markovien $(q_t^h)_{t \geq 0}$ à un semi-groupe markovien sur $(\mathcal{D} \cup \{\delta\}, \mathcal{B}(\mathcal{D} \cup \{\delta\}))$ en définissant

$$q_t^h(x, \{\delta\}) = \begin{cases} 1 - q_t^h(x, \mathcal{D}) & \text{si } x \in \mathcal{D} \\ 1 & \text{si } x = \delta \end{cases}. \quad (2.62)$$

De même que pour le semi-groupe $(q_t)_{t \geq 0}$, il est possible de montrer qu'il existe une famille de mesures de probabilité $((\mathbb{Q}_x^h)_{x \in \mathcal{D}})$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ sous lesquelles le processus canonique $(X, \mathbb{Q}_x^h)$ est un processus de Markov fort ayant pour semi-groupe markovien le semi-groupe $(q_t^h)_{t \geq 0}$ étendu à $(\mathcal{D} \cup \{\delta\}, \mathcal{B}(\mathcal{D} \cup \{\delta\}))$. Dans la pratique, pour tout $x \in \mathcal{D}$, la mesure de probabilité $\mathbb{Q}_x^h$ est caractérisée par : pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{Q}_x^h(\Lambda, t < \zeta) = \frac{1}{h(x)} \mathbb{E}_x(h(X_t) \mathbb{I}_\Lambda \mathbb{I}_{\{t < T_B\}}), \quad \text{pour tout } \Lambda \in \mathcal{F}_t. \quad (2.63)$$

Notons que cette égalité reste vraie en remplaçant t par un $(\mathcal{F}_t)_{(t \geq 0)}$ -temps d'arrêt.

Définition 2.6.6. (*h -transformé de Doob du processus $(X, \mathbb{P}_x)$*). Pour tout $x \in \mathcal{D}$, le processus de Markov fort $(X, \mathbb{Q}_x^h)$ est appelé h -transformé de Doob du processus de Lévy $(X, \mathbb{P}_x)$ tué quand il atteint B .

Si h est invariante et strictement positive, alors, pour tout $x \in \mathcal{D}$ et pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{Q}_x^h(X_t \in \mathcal{D}) = 1$, i.e. $\mathbb{Q}_x^h(\zeta = \infty) = 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{D}$, nous avons transformé le processus tué $(X, \mathbb{Q}_x)$ qui atteignait éventuellement δ , i.e. éventuellement non conservatif, en le processus h -transformé $(X, \mathbb{Q}_x^h)$ qui n'atteint p.s. jamais δ , i.e. conservatif. En conclusion, pour tout $x \in \mathcal{D}$, un processus de Lévy $(X, \mathbb{P}_x)$ qui atteignait éventuellement B a été transformé en un processus de Markov fort $(X, \mathbb{Q}_x^h)$ qui n'atteint p.s. jamais B .

Pour conclure, soulignons que si h est une fonction harmonique alors le h -transformé $(X, \mathbb{Q}_x^h)$ obtenu à partir de h quitte p.s. tout ensemble ouvert $O \in \mathbb{R}$ tel que $\overline{O \cap \mathcal{D}}$ est un ensemble compact non vide inclus dans $\mathcal{D}$, avant d'éventuellement mourir (si h n'est pas invariante) ou non (si h est invariante). En effet, si $T = T_{\mathcal{D} \setminus O}$ est le $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -temps d'arrêt défini dans l'égalité (2.59), grâce au point (ii) de la définition de l'harmonicité,

$$\mathbb{Q}_t^h(T < \zeta) = \frac{1}{h(x)} \mathbb{E}_x(h(X_T) \mathbb{I}_{\{T < T_B\}}) = \frac{h(x)}{h(x)} = 1. \quad (2.64)$$

2.6.2 Exemples

Dans cette section, nous livrons deux exemples « canoniques » de conditionnement d'un processus de Lévy tué quand il atteint $(-\infty, 0]$ via une h -transformation de Doob. Le premier d'entre eux,

voir Chaumont [12] et Chaumont et Doney [15], est un conditionnement à *rester positif* et le second, voir Chaumont [12], un conditionnement à *être absorbé par* $(-\infty, 0]$. Dans la Section 3.1.3, nous obtenons un résultat relatif à la reptation à travers une courbe d'un processus conditionné à *rester positif*. Dans la Section 3.2, consacrée au conditionnement à *être absorbé par une courbe*, l'intuition permettant de déterminer des fonctions candidates à être harmoniques pour le processus tué lorsqu'il « passe au-dessus de la courbe » repose à la fois sur notre travail relatif à la reptation et sur le second exemple ci-dessous.

Processus conditionné à rester positif

Soit $(X, \mathbb{P})$ un processus de Lévy tel que $|X|$ n'est pas un subordonateur, X n'est pas un processus de Poisson composé et ne dérive pas vers $-\infty$. Nous supposons de plus que 0 est régulier pour $(-\infty, 0)$. Nous rappelons brièvement la construction du processus $(X, \mathbb{P})$ conditionné à rester positif, obtenu en deux temps, par Chaumont [12] en 1996 pour le processus $(X, \mathbb{P}_x)$, $x > 0$, puis par Chaumont et Doney [15] en 2005 pour le processus $(X, \mathbb{P})$.

Soit $x > 0$. Nous notons $(X, \mathbb{P}_x^\uparrow)$ le h -transformé du processus $(X, \mathbb{P}_x)$ tué en entrant dans $(-\infty, 0]$ obtenu, avec les notations de la Section 2.6.1, en posant :

$$B = (-\infty, 0] \quad \text{et} \quad h(x) = \mathbb{E} \left(\int_{[0, \infty)} \mathbb{I}_{\{\underline{X}_t \geq -x\}} dL_t^* \right), \quad x > 0. \quad (2.65)$$

Notons que $h(x) = \int_0^\infty \mathbb{P}(H_t^* \in [0, x]) dt$ et que son harmonicité a été montrée par Silverstein [66] en 1980 et par Chaumont et Doney [15] en 2005, via d'autres arguments. Le processus $(X, \mathbb{P}_x^\uparrow)$, fortement markovien, éventuellement non conservatif, admet pour loi $\mathbb{P}_x^\uparrow$ définie, pour tout $t \geq 0$, par

$$\mathbb{P}_x^\uparrow(\Lambda, t < \zeta) = \frac{1}{h(x)} \mathbb{E}_x(h(X_t) \mathbb{I}_\Lambda \mathbb{I}_{\{t < T_{(-\infty, 0]}\}}), \quad \text{pour tout } \Lambda \in \mathcal{F}_t. \quad (2.66)$$

Chaumont [12] a montré que le processus $(X, \mathbb{P}_x^\uparrow)$ correspond bien au processus conditionné à rester positif au sens usuel.

Chaumont et Doney [15] montrent ensuite que si 0 est régulier pour $(0, \infty)$ pour le processus X , le processus $X^{x, \uparrow}$ converge faiblement dans l'espace de Skorokhod, quand $x \downarrow 0$, vers un processus non dégénéré noté $X^\uparrow$ qui vérifie $X_0^\uparrow = 0$ p.s. De plus, si $\limsup_{t \rightarrow \infty} X_t = \infty$ p.s., alors, pour tout $x > 0$, le processus $X^{x, \uparrow}$ est conservatif et $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t^\uparrow = \infty$, p.s. Notons que nous obtenons dans le Théorème 3.1.3 une expression de la probabilité de reptation à travers une courbe continue et décroissante en son minimum futur du processus $X^\uparrow$.

Processus conditionné à être absorbé par $(-\infty, 0]$

Soit $(X, \mathbb{P})$ un processus de Lévy tel que X n'est pas un processus de Poisson composé et ne dérive pas vers $-\infty$ et tel que 0 est régulier pour $(-\infty, 0)$. Nous notons $(\mathcal{H})$ l'ensemble de ces hypothèses. Nous rappelons les étapes de la construction du processus $(X, \mathbb{P}_x)$, $x > 0$, conditionné à être absorbé par $(-\infty, 0]$ (ou à atteindre 0 continûment), obtenu par Chaumont [12].

Sous l'hypothèse 0 est régulier pour $(-\infty, 0)$, la mesure de renouvellement du subordonateur des hauteurs d'échelle descendant, notée $W^*(dx) = \int_0^\infty \mathbb{P}(H_t^* \in dx) dt$, est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Si w^* désigne une version de sa densité, Silverstein [66] a montré que w^* est harmonique pour le processus $(X, \mathbb{P}_x)$, $x > 0$, tué quand il entre dans $(-\infty, 0]$.

Chaumont, après avoir montré que w^* est strictement positive et finie, établit que le h -transformé, noté $(X, \mathbb{P}_x^{\searrow})$, obtenu en posant :

$$B = (-\infty, 0] \quad \text{et} \quad h(x) = w^*(x) \quad x > 0, \quad (2.67)$$

est absorbé par $(-\infty, 0]$, i.e. vérifie, pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}_x^{\searrow}(X_0 = 0; \zeta < \infty; \forall t < \zeta, X_t > 0; X_{\zeta-} = 0) = 1. \quad (2.68)$$

Rappelons que, pour tout $x > 0$, $\mathbb{Q}_x$ désigne la mesure de probabilité telle que $(X, \mathbb{Q}_x)$ est le processus $(X, \mathbb{P}_x)$ tué quand il entre dans $(-\infty, 0]$. Notons que si $(X, \mathbb{P})$ n'a pas de sauts négatifs, alors $h \equiv k$ où $k > 0$ est une constante et par conséquent $\mathbb{P}_x^{\searrow} = \mathbb{Q}_x$.

Remarque 2.6.1. *Chaumont relève que si $(X, \mathbb{P})$ ne vérifie plus les hypothèses $(\mathcal{H})$ mais que h présente certaines régularités, alors il est possible de montrer que le h -transformé est absorbé par $(-\infty, 0]$. C'est le cas notamment dans les situations suivante où h admet une expression explicite :*

(i) *Si le processus $(X, \mathbb{P})$ rampe vers le bas, alors, pour tout $x \geq 0$,*

$$h(x) = \frac{\mathbb{P}\left(X_{T_{(-\infty, -x)}} = -x\right)}{h(0)}$$

où $h(0) = d_{H^*}$ est le drift du subordonateur des hauteurs d'échelle descendant. Nous avons alors, pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}_x^{\searrow}(\Lambda) = \mathbb{Q}_x(\Lambda | X_{T_{(-\infty, 0)}} = 0), \quad \text{pour tout } \Lambda \in \mathcal{F}_t.$$

(ii) *Si le processus $(X, \mathbb{P})$ est un processus stable d'indice $\alpha \in (0, 2]$, alors il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $x > 0$,*

$$h(x) = cx^{\alpha(1-\rho)-1}$$

où $\rho = \mathbb{P}(X_1 \geq 0)$ et le h -transformé $(X, \mathbb{P}_x^{\searrow})$ défini par (2.67) vérifie (2.68).

Chapitre 3

Résultats principaux

Dans ce chapitre, nous présentons les principaux résultats de cette thèse. La Section 3.1 est consacrée à la reptation de processus à travers une courbe et la Section 3.2 au conditionnement de processus de Lévy à mourir sur une courbe. À la fin de la Section 3.1, nous soulevons quelques questions qui, à notre connaissance, demeurent ouvertes. Les résultats figurant dans ce chapitre sont repris et démontrés dans leur intégralité dans le chapitre 4 pour ce qui concerne la reptation, et dans le chapitre 5 pour ce qui concerne le conditionnement. Les chapitres 4 et 5 contiennent quelques résultats et exemples qui n'apparaissent pas dans ce chapitre. À l'inverse, ce chapitre offre une interprétation géométrique des résultats concernant la reptation qui n'apparaît pas dans le chapitre 4.

Tout au long de ce chapitre, sauf mention contraire, $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ désigne une fonction continue et décroissante. Nous notons $f(0) = \lim_{u \rightarrow 0^+} f(u)$ et $f(\infty) = \lim_{u \rightarrow \infty} f(u)$ éventuellement égales respectivement à ∞ et 0. Pour tout u_0, u_1 tels que $0 \leq u_0 < u_1 \leq \infty$, nous notons

$$\Gamma_{(u_0, u_1)} = \{(u, f(u)) : u_0 < u < u_1\} \quad \text{et} \quad \Gamma = \Gamma_{(0, \infty)} = \{(u, f(u)) : u > 0\}. \quad (3.1)$$

3.1 Reptation à travers une courbe

Dans cette section nous présentons nos différents résultats relatifs à la reptation. Ils apparaissent dans un ordre qui maintenant semble naturel, mais qui ne reflète pas la réalité de notre cheminement. En effet, notre questionnement initial concernait la reptation d'une certaine classe de processus d'Ornstein-Uhlenbeck à travers un niveau fixe. Plus précisément, nous avons constaté que, dans le cas où Z est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck dirigé par un processus de Lévy α -stable X , la reptation de Z à travers un niveau fixe était équivalente à la reptation de X à travers le graphe d'une certaine fonction déterministe, voir Section 3.1.4. Nous nous sommes donc penchés sur l'existence de conditions suffisantes (et éventuellement nécessaires) de reptation d'un processus de Lévy à travers le graphe d'une fonction déterministe, voir Section 3.1.2. Cette question demeure ouverte mais nous y avons apporté une réponse partielle. Nous donnons une formule explicite de la probabilité de reptation d'un processus de Lévy X , sous certaines hypothèses peu restrictives sur X , à travers le graphe d'une fonction continue et décroissante à un instant où le processus atteint son maximum passé. Cela nous a notamment permis de dégager des conditions suffisantes de reptation pour un processus de Lévy, voir Théorème 3.1.2 et Corollaire 3.1.3. Pour parvenir à une expression de la probabilité de reptation d'un processus de Lévy en son maximum à travers une courbe, nous avons naturellement été amenés à étudier la reptation d'un subordonateur bivarié à travers une courbe. En effet, le comportement d'un processus de Lévy X en son maximum est entièrement codé par son processus d'échelle ascendant (τ, H) qui est un subordonateur bivarié. En particulier, un processus de Lévy X rampe en son maximum à travers une courbe si, et seulement si, son processus d'échelle ascendant (τ, H) rampe à travers cette courbe. L'étude de la reptation d'un subordonateur bivarié (Y, Z) à travers une courbe nous a conduit, sous certaines hypothèses sur

(Y, Z) , à l'obtention d'une expression explicite de la probabilité de cette reptation, voir Théorème 3.1.1. Nous avons finalement remarqué que cette dernière expression est égale à la circulation d'un certain champ vectoriel le long de la courbe, ce qui nous a permis de donner une interprétation géométrique de nos résultats. Cette interprétation, conforme à l'intuition, révèle une reptation que nous avons appelée *reptation directionnelle*, voir Section 3.1.1.

3.1.1 Subordinateurs bivariés

Nous considérons ici un subordonneur bivarié $((Y, Z), \mathbb{P})$, éventuellement tué, partant de $(0, 0)$, de drift $d_{(Y, Z)} = (d_Y, d_Z) \in [0, \infty)^2$ et d'exposant caractéristique Ψ . Nous posons $Y_t = Z_t = \infty$, pour tout $t \in [\zeta, \infty]$, où ζ est le temps de vie de (Y, Z) . Par ailleurs, nous notons

$$\mathbb{P}(Y_t \in dy, Z_t \in dz) = p_t(dy, dz), \quad t > 0, (y, z) \in [0, \infty)^2$$

le semi-groupe de Markov de (Y, Z) . Lorsque, pour $t > 0$ fixé, $\mathbb{P}(Y_t \in dy, Z_t \in dz)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ , nous désignons par $p_t(x, y)$ une version de ses densités. Toutes les versions sont λ -pp égales et dans la suite, quand nous parlons de « *la densité* » d'une mesure, il faut entendre : « *il existe une version de ses densités* ». Enfin, nous notons la mesure de renouvellement de (Y, Z)

$$v(dy, dz) = \int_0^{+\infty} p_t(dy, dz) dt.$$

Hypothèses et définitions

Nous appelons (H_1) , (H_2) , (H_3) et (H_4) les hypothèses suivantes :

- (H_1) La mesure de renouvellement $v(dy, dz)$ est absolument continue sur $(0, \infty)^2$.
- (H_2) La mesure de renouvellement $v(dy, dz)$ est absolument continue sur $(0, \infty)^2$ et sa densité, notée $(y, z) \mapsto v(y, z)$, est continue sur $(0, \infty)^2$.
- (H_3) Pour tout $t > 0$, la mesure $p_t(dy, dz)$ est absolument continue sur $(0, \infty)^2$ et la fonction $(t, y, z) \mapsto p_t(y, z)$ est continue sur $(0, \infty)^3$.
- (H_4) Pour tout $t > 0$, la mesure $p_t(dy, dz)$ est absolument continue sur $(0, \infty)^2$ et, pour tout $t > 0$, sa densité $(y, z) \mapsto p_t(y, z)$ est bornée.

Notons que $(H_3) \Rightarrow (ACT)$ et, en vertu de la Remarque 2.3.1 (ii), $(ACP) \Leftrightarrow (H_1)$. Par ailleurs, nous avons également les implications suivantes : $(H_4) \Rightarrow (H_3)$ et $(H_2) \Rightarrow (H_1)$. Nous montrons $(H_4) \Rightarrow (H_3)$ dans le chapitre 4, Proposition 4.4.1, dans le cadre d'un processus de Lévy quelconque à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. De plus, rappelons que nous montrons également dans cette proposition que (H_4) est équivalent à (H'_4) où :

- (H'_4) Pour tout $t > 0$, l'application $u \mapsto e^{-t\Psi(u)}$, $u \in \mathbb{R}^2$, est dans $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^2)$.

Précisons que l'hypothèse (H_4) n'est pas nécessaire dans nos résultats mais permet de s'assurer que ces derniers concernent une classe large de processus de Lévy.

Dans cette section, nous nous intéressons à l'événement $\{Z_S = f(Y_S)\} = \{(Y_S, Z_S) \in \Gamma\}$ où S est le premier temps de passage du processus (Y, Z) au-dessus de la courbe Γ défini par

$$S = \inf\{t : Z_t > f(Y_t)\}. \quad (3.2)$$

Notons que S est un temps d'arrêt et que, f étant positive et décroissante, le processus (Y, Z) franchit Γ , autrement dit,

$$0 < S < \infty, \quad Y_{S-} < \infty, \quad \text{et} \quad Z_{S-} < \infty, \quad \mathbb{P} - \text{p.s.} \quad (3.3)$$

Définition 3.1.1. *Un subordonateur bivarié $((Y, Z), \mathbb{P})$ rampe à travers la courbe Γ si*

$$\mathbb{P}(Z_S = f(Y_S)) > 0. \quad (3.4)$$

Dans ce qui suit, nous dirons par extension qu'une trajectoire $\omega \in \Omega$ rampe à travers Γ si

$$\omega \in \{Z_S = f(Y_S)\}.$$

Pour fixer les idées, nous illustrons la Définition 3.1.1 à l'aide de la figure 3.1 qui fournit un exemple de trajectoire qui rampe à travers Γ et un exemple de trajectoire qui ne rampe pas à travers Γ dans le cas où (Y, Z) pourrait être un processus de Poisson composé.

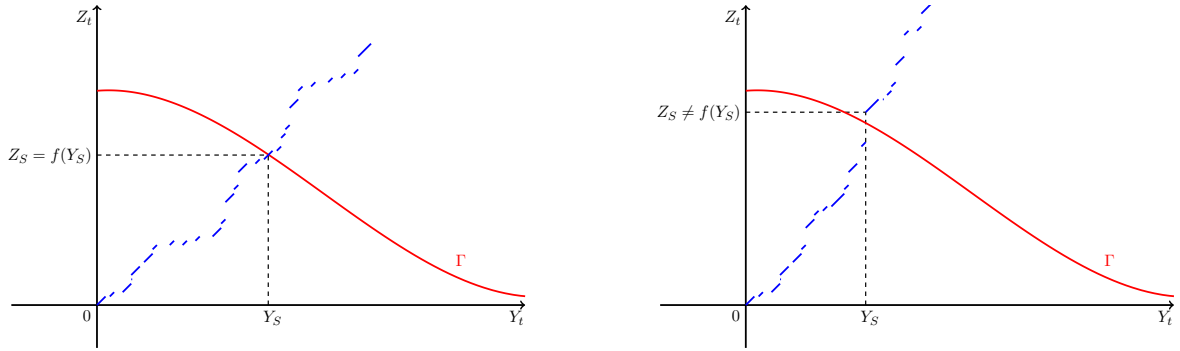


FIGURE 3.1 – À gauche, une trajectoire de (Y, Z) qui rampe à travers le graphe Γ de la fonction f et à droite, une trajectoire de (Y, Z) qui ne rampe pas à travers Γ .

Théorème principal

Notre premier résultat montre que si (Y, Z) franchit Γ par un saut alors ce saut est « franc », i.e. le processus (Y, Z) ne peut ni sauter sur Γ , ni sauter depuis Γ . Plus précisément,

Lemme 3.1.1. *Soit (Y, Z) un subordonateur bivarié vérifiant (H_1) . Alors*

$$\mathbb{P}(Z_{S-} = f(Y_{S-}), \Delta(Y, Z)_S \neq 0) = \mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), \Delta(Y, Z)_S \neq 0) = 0 \quad (3.5)$$

où pour tout $t > 0$, $\Delta(Y, Z)_t = (Y, Z)_t - (Y, Z)_{t-}$ désigne le saut de (Y, Z) à l'instant t .

Notons que ce résultat, utilisé dans la démonstration du Théorème 3.1.1, est un corollaire du résultat nettement plus général, voir Lemme 4.4.1, suivant : si $\mathcal{L}$ est un processus de Lévy quelconque à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $G : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et λ -presque tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}(G(\mathcal{L}_t + x) = 0) = 0$, alors

$$\mathbb{P}(\exists t \geq 0, G(\mathcal{L}_{t-}) = 0, \Delta \mathcal{L}_t \neq 0) = \mathbb{P}(\exists t \geq 0, G(\mathcal{L}_t) = 0, \Delta \mathcal{L}_t \neq 0) = 0. \quad (3.6)$$

où $\Delta \mathcal{L}_t = \mathcal{L}_t - \mathcal{L}_{t-}$, $t > 0$. Cette dernière relation montre notamment que (3.5) reste vraie pour toute fonction $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ mesurable. La formule (3.6) est une généralisation du Lemme

5.1 dans Griffin Maller [31] relatif aux niveaux fixes.

Nous arrivons maintenant au résultat principal de cette section qui donne une expression de la probabilité de reptation du subordonateur bivarié (Y, Z) à travers la courbe Γ en fonction de f , de la mesure de renouvellement v du processus (Y, Z) et de son drift (d_Y, d_Z) .

Théorème 3.1.1. *Soit (Y, Z) vérifiant (H_2) et u_0, u_1 tels que $0 \leq u_0 < u_1 \leq \infty$. Alors la probabilité de reptation de (Y, Z) à travers $\Gamma_{(u_0, u_1)}$ est donnée par*

$$\mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), u_0 < Y_S < u_1) = d_Z \int_{u_0}^{u_1} v(u, f(u)) du - d_Y \int_{u_0}^{u_1} v(u, f(u)) df(u). \quad (3.7)$$

Ce théorème implique que le membre de droite dans (3.7) est bien défini et appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

Remarques relatives au Théorème 3.1.1

Nous formulons ci-dessous trois remarques relatives au Théorème 3.1.1. La première offre une interprétation géométrique de la probabilité de reptation, la seconde s'intéresse à la loi du temps de reptation et la dernière au cas particulier où f est bijective.

Remarque 3.1.1. Interprétation géométrique de la probabilité de reptation. *Le membre de droite dans l'égalité (3.7) peut être vu comme la circulation d'un champ de vecteurs le long de la courbe $\Gamma_{(u_0, u_1)}$. Plus précisément, soit (Y, Z) vérifiant (H_2) et u_0, u_1 tels que $0 \leq u_0 < u_1 \leq \infty$. Nous définissons dans $(0, \infty)^2$ l'arc paramétré γ par*

$$\gamma : u \mapsto (u, f(u)) \quad u > 0. \quad (3.8)$$

Ainsi, $\Gamma = \gamma((0, \infty))$ et $\Gamma_{(u_0, u_1)} = \gamma((u_0, u_1)) = \{(u, f(u)) : u_0 < u < u_1\}$. Soit $w : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ le champ vectoriel défini pour tout $(y, z) \in (0, \infty)^2$ par

$$w(y, z) = (d_Z v(y, z), -d_Y v(y, z)). \quad (3.9)$$

Nous obtenons alors l'expression suivante de la probabilité de reptation de (Y, Z) à travers $\Gamma_{(u_0, u_1)}$, où l'intégrale est prise au sens de l'intégrale de Stieltjes,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), u_0 < Y_S < u_1) &= \int_{u_0}^{u_1} \langle (d_Z v(u, f(u)), -d_Y v(u, f(u))), (du, df(u)) \rangle \\ &= \int_{u_0}^{u_1} \langle w \circ \gamma, d\gamma \rangle = \int_{\Gamma_{(u_0, u_1)}} \langle w, d\gamma \rangle. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ainsi, la probabilité de la reptation du processus (Y, Z) à travers $\Gamma_{(u_0, u_1)}$ admet l'interprétation suivante : $\mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), u_0 < Y_S < u_1)$ est égale au travail du champ vectoriel w le long de la courbe $\Gamma_{(u_0, u_1)}$. En remarquant que, pour tout $u \in (u_0, u_1)$, $\langle w \circ \gamma(u), d\gamma(u) \rangle = \langle (w \circ \gamma(u))^\perp, d\gamma(u)^\perp \rangle$, cette expression devient

$$\mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), u_0 < Y_S < u_1) = \int_{\Gamma_{(u_0, u_1)}} \langle w^\perp, d\gamma^\perp \rangle$$

et en prenant $u_0 = 0$ et $u_1 = \infty$, nous obtenons la probabilité que le processus (Y, Z) rampe à travers la courbe Γ

$$\mathbb{P}(Z_S = f(Y_S)) = \int_{\Gamma} \langle w^\perp, d\gamma^\perp \rangle.$$

Or, pour tout $y, z \in (0, \infty)^2$, $w(y, z)^\perp = v(y, z) (d_Z, -d_Y)^\perp = v(y, z)(d_Y, d_Z)$. Par conséquent, la loi de la reptation de (Y, Z) en $(u, f(u))$, i.e. la probabilité que le processus (Y, Z) rampe à travers la courbe Γ_{du} , s'écrit donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), Y_S \in du) &= \langle (w \circ \gamma(u))^\perp, d\gamma(u)^\perp \rangle \\ &= v(u, f(u)) \langle (d_Y, d_Z), (-df(u), du) \rangle. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à variation bornée, donc en particulier monotone, est λ -pp dérivable. La fonction f est donc dérivable λ -pp. Soit $u > 0$ tel que f est dérivable en u . Nous avons alors $df(u) = f'(u)du$, $d\gamma(u) = \gamma'(u)du = (1, f'(u))du$ et

$$\mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), Y_S \in du) = v(u, f(u)) \langle (d_Y, d_Z), (-f'(u), 1) \rangle du.$$

Cette expression, sous forme de produit scalaire, se révèle fidèle à l'intuition et permet d'introduire

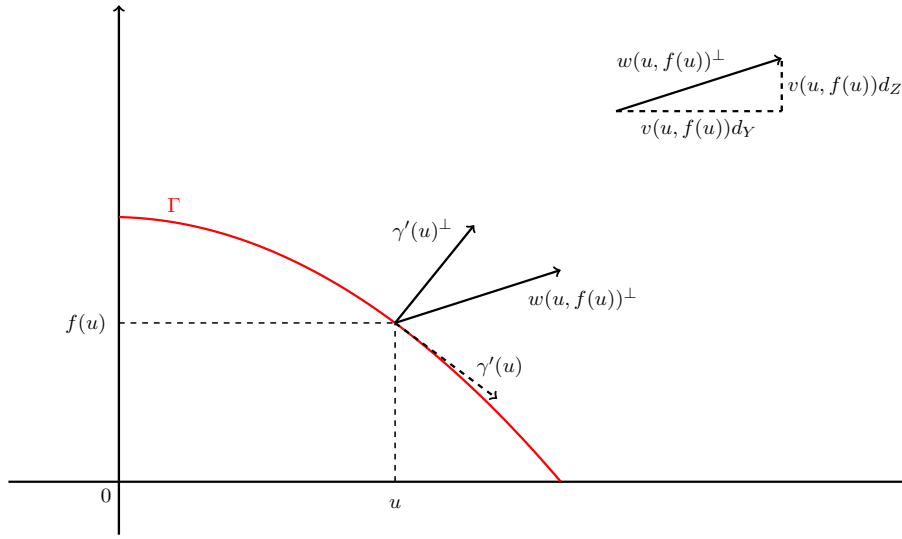


FIGURE 3.2 – **Reptation directionnelle** : Si f est dérivable en u , la probabilité de reptation du processus (Y, Z) à travers Γ_{du} est égale à $\langle w(u, f(u))^\perp, \gamma'(u)^\perp \rangle du$ et peut être interprétée comme le produit scalaire $\langle (d_Y, d_Z), (-f'(u), 1) \rangle du$ pondéré par $v(u, f(u)) \geq 0$.

une nouvelle notion, celle de reptation directionnelle d'un subordonateur bivarié. Elle doit s'entendre comme une version vectorielle (en dimension deux) de l'expression connue de la probabilité de reptation d'un subordonateur à travers un niveau fixe (en dimension un). Soit $u > 0$ tel que f est dérivable en u . À valeurs de $v(u, f(u))$ et $f'(u)$ fixées, plus la mesure de l'angle $((d_Y, d_Z), \gamma'(u)^\perp)$ est proche de zéro, plus la probabilité infinitésimale que le processus (Y, Z) rampe est grande. Nous illustrons cette interprétation géométrique de la probabilité de reptation $\mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), Y_S \in du)$ par la figure 3.2, dans le cas où f est dérivable en u .

Notons enfin qu'il est possible de montrer que l'expression de la probabilité de reptation d'un subordonateur bivarié à travers une courbe s'étend de manière naturelle, sous certaines hypothèses, au cas d'un subordonateur multivarié à travers une hypersurface. De plus, lorsque cette hypersurface est différentiable, nous obtenons là encore l'expression de la probabilité de reptation sous la forme du flux d'un champ vectoriel dépendant du subordonateur à travers cette hypersurface.

Remarque 3.1.2. Loi du temps de reptation. Comme le montre la Remarque 3.1.1, l'égalité (3.7) donne la loi de probabilité spatiale de reptation du processus (Y, Z) à travers Γ , i.e. la probabilité que, pour tout $0 \leq u_0 < u_1 \leq \infty$, la reptation ait lieu précisément à travers $\Gamma_{(u_0, u_1)}$. Nous donnons ci-dessous la loi de probabilité du temps de reptation à travers Γ et en fait la loi conjointe en espace et en temps de reptation. Sous des hypothèses sur le semi-groupe du processus (Y, Z) ,

nous obtenons en effet une expression de la probabilité de reptation de (Y, Z) à travers $\Gamma_{(u_0, u_1)}$, entre deux instants t_0 et t_1 . Plus précisément, si (Y, Z) vérifie (H_3) , pour tout t_0, t_1, u_0, u_1 tels que $0 \leq t_0 < t_1 \leq \infty$ et $0 \leq u_0 < u_1 \leq \infty$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), u_0 < Y_S < u_1, t_0 < S < t_1) \\ = d_Z \int_{u_0}^{u_1} \int_{t_0}^{t_1} p_t(u, f(u)) dt du - d_Y \int_{u_0}^{u_1} \int_{t_0}^{t_1} p_t(u, f(u)) dt df(u). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Cette dernière relation admet également une interprétation en terme de circulation d'un champ vectoriel le long de Γ . Soit, pour tout $t > 0$, $r_t : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs défini pour tout $(y, z) \in (0, \infty)^2$ par

$$r_t(y, z) = (d_Z p_t(y, z), -d_Y p_t(y, z)). \quad (3.13)$$

Notons que, de même que pour le champ vectoriel w , nous avons $r_t(y, z)^\perp = p_t(y, z) (d_Z, -d_Y)^\perp = p_t(y, z) (d_Y, d_Z)$. Nous obtenons alors, grâce au Théorème de Fubini, l'expression suivante de la probabilité de reptation de (Y, Z) à travers $\Gamma_{(u_0, u_1)}$, entre les instants t_0 et t_1 , où l'intégrale en espace doit à nouveau s'entendre au sens de Stieltjes,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), u_0 < Y_S < u_1, t_0 < S < t_1) \\ = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{u_0}^{u_1} \langle (p_t(u, f(u)) d_Z, -d_Y p_t(u, f(u))), (du, df(u)) \rangle \right) dt \\ = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\Gamma_{(u_0, u_1)}} \langle r_t, d\gamma \rangle \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\Gamma_{(u_0, u_1)}} \langle r_t^\perp, d\gamma^\perp \rangle \right) dt. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ainsi, la loi du temps de reptation de (Y, Z) à travers la courbe $\Gamma_{(u_0, u_1)}$ est égale au travail du champ vectoriel r_t le long de la courbe $\Gamma_{(u_0, u_1)}$ et est donnée par

$$\mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), u_0 < Y_S < u_1, S \in dt) = \left(\int_{\Gamma_{(u_0, u_1)}} \langle r_t^\perp, d\gamma^\perp \rangle \right) dt, \quad (3.15)$$

et la loi du temps de reptation de (Y, Z) à travers la courbe Γ s'écrit

$$\mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), S \in dt) = \left(\int_{\Gamma} \langle r_t^\perp, d\gamma^\perp \rangle \right) dt. \quad (3.16)$$

Nous terminons cette remarque en explicitant l'analogie entre les dimensions un et deux des lois de reptation jointes espace-temps. Soit $(X, \tilde{\mathbb{P}})$ un subordonateur unidimensionnel dont le semi-groupe de Markov $\tilde{\mathbb{P}}(X_t \in du)$ est absolument continu par rapport à λ et dont la mesure de Lévy $\tilde{\pi}$ vérifie $\tilde{\pi}(0, \infty) = \infty$. Nous notons $u \mapsto \tilde{p}_t(u)$ la densité $\tilde{\mathbb{P}}(X_t \in du)$. Alors X rampe à travers le niveau $u > 0$ ssi son drift $d_X > 0$. Dans ce cas, la Proposition 7 dans Savov et Winkel [67], attribuée par ces auteurs à Kyprianou, appliquée à X , donne

$$\tilde{\mathbb{P}}(X_{\tau_u^+} = u, \tau_u^+ \in dt) du = d_X \tilde{p}_t(u) du dt.$$

Soit à présent (Y, Z) un subordonateur bivarié vérifiant (H_3) et $u > 0$ tel que f soit dérivable en u . L'analogie entre les formules donnant la probabilité de reptation en dimension un et en dimension deux s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\mathbb{P}}(X_{\tau_u^+} = u, \tau_u^+ \in dt) du & = & d_X & \times & \tilde{p}_t(u) du dt \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), Y_S \in du, S \in dt) & = & \langle (d_Y, d_Z), (-f'(u), 1) \rangle & \times & p_t(u, f(u)) du dt. \end{array}$$

Enfin, la condition nécessaire et suffisante de reptation $d_X > 0$ en dimension un admet la traduction suivante en dimension deux. Soit (Y, Z) un subordonateur bivarié vérifiant (H_2) et tel que $v(y, z) > 0$ pour tout $y, z > 0$. Alors (Y, Z) rampe à travers Γ ssi l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- (i) $\exists u_0, u_1 > 0, \int_{u_0}^{u_1} \langle (d_Y, d_Z), (-df(u), du) \rangle > 0,$
- (ii) $d_Z > 0$ ou $(d_Y > 0 \text{ et } f(u_1) < f(u_0))$.

Notons que lors de nos recherches relatives au conditionnement d'un processus bivarié à être absorbé par Γ , nous avons établi la loi du triplet $(S, (Y_{S-}, Z_{S-}), (Y_S, Z_S))$ que nous donnons ci-dessous :

Proposition 3.1.1. (Triple loi : premier temps de passage au-dessus de f , undershoot, overshoot). Pour tout subordonateur bivarié (Y, Z) et pour toute fonction décroissante $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$,

$$\mathbb{P}(S \in dt, (Y_{S-}, Z_{S-}) \in (dy, dz), (Y_S, Z_S) \in (du, dv)) = \pi(du - y, dv - z) p_t(dy, dz) dt, \quad (3.17)$$

pour $t \geq 0, 0 \leq y \leq u, 0 \leq z \leq v, z \leq f(y), f(u) \leq v$.

Remarque 3.1.3. Symétrie dans le cas f strictement décroissante. Il existe une pseudo-symétrie entre les coordonnées du subordonateur bivarié (Y, Z) qui devient effective lorsque f est bijective. Si f est strictement décroissante, alors $f : (0, \infty) \rightarrow (f(\infty), f(0))$ est bijective et f^{-1} est continue et strictement décroissante. L'expression (3.7) qui donne la probabilité de reptation de (Y, Z) à travers $\Gamma_{(u_0, u_1)}$ peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), u_0 < Y_S < u_1) \\ = d_Y \int_{f(u_1)}^{f(u_0)} v(f^{-1}(u), u) du - d_Z \int_{f(u_1)}^{f(u_0)} v(f^{-1}(u), u) df^{-1}(u). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Cette dernière égalité montre la symétrie qui existe entre les deux composantes du processus (Y, Z) et qui se traduit de la manière suivante

$$\mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), u_0 < Y_S < u_1) = \mathbb{P}(Y_S = f^{-1}(Z_S), f(u_1) < Z_S < f(u_0)). \quad (3.19)$$

Plus précisément, nous définissons l'arc paramétrique γ^* , pour tout $0 \leq u_0 < u_1 \leq \infty$, le graphe $\Gamma_{(f(u_1), f(u_0))}^*$, le graphe Γ^* et le champ scalaire v^* par

$$\begin{aligned} \gamma^* : u &\mapsto (u, f^{-1}(u)) & u &\in (f(\infty), f(0)); \\ \Gamma_{(f(u_1), f(u_0))}^* &= \gamma^*((f(u_1), f(u_0))) = \{(u, f^{-1}(u)) : f(u_1) < u < f(u_0)\}; \\ \Gamma^* &= \gamma^*(f(\infty), f(0)) = \{(u, f^{-1}(u)) : f(u_1) < u < f(u_0)\}; \\ v^*(y, z) &= v(z, y) & (y, z) &\in (0, \infty)^2. \end{aligned}$$

Avec ces nouvelles notations la relation (3.18) devient

$$\mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), u_0 < Y_S < u_1) = d_Y \int_{f(u_1)}^{f(u_0)} v^*(\gamma^*(u)) du + d_Z \int_{u_1}^{u_0} v(\gamma(u)) du. \quad (3.20)$$

Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, nous désignons par $\mathcal{D}_0^1(I)$ l'ensemble des fonctions h définies et dérivables sur I telles que pour tout $u \in I$, $h'(u) \neq 0$. Supposons à présent qu'il existe une

suite strictement croissante $(a_n) \in (\overline{\mathbb{R}_+})^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{/(a_n, a_{n+1})} \in \mathcal{D}_0^1(a_n, a_{n+1})$ avec la convention $(\infty, \infty) = \emptyset$. Notons $A = (0, \infty) \setminus \{a_n \neq \infty : n \geq 0\}$ et $A^* = (f(\infty), f(0)) \setminus \{f(a_n) : n \geq 0, a_n \neq \infty\}$ et remarquons que, pour tout $u \in A$, f^{-1} est dérivable en $f(u)$ et $(f^{-1})'(f(u)) = 1/f'(u)$. Par ailleurs, pour tout $u \in A$, $\|\gamma'(u)\| \geq 1$ et pour tout $u \in A^*$, $\|\gamma^{*'}(u)\| \geq 1$. Nous introduisons alors les champs scalaires $\tilde{v}$ et $\tilde{v}^*$, définis respectivement sur A et A^* par

$$\begin{aligned} \tilde{v} : u &\mapsto \frac{v \circ \gamma(u)}{\|\gamma'(u)\|} & u \in A; \\ \tilde{v}^* : u &\mapsto \frac{v^* \circ \gamma^*(u)}{\|\gamma^{*'}(u)\|} & u \in A^*. \end{aligned}$$

Dans ce cas, la probabilité de reptation de (Y, Z) à travers $\Gamma_{(u_0, u_1)}$ peut s'exprimer comme la somme de deux intégrales curvilignes des champs scalaires $\tilde{v}$ et $\tilde{v}^*$ pondérée par les drifts d_Y et d_Z

$$\mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), u_0 < Y_S < u_1) = d_Y \beta^*(u_0, u_1) + d_Z \beta(u_0, u_1), \quad (3.21)$$

où

$$\beta^*(u_0, u_1) = \int_{\Gamma_{(f(u_1), f(u_0))}^* \cap A^*} \tilde{v}^* d\gamma^* \quad \text{et} \quad \beta(u_0, u_1) = \int_{\Gamma_{(u_0, u_1)} \cap A} \tilde{v} d\gamma.$$

La relation (3.21), dont le membre de droite peut s'écrire $\langle (d_Y, d_Z), (\beta^*(u_0, u_1), \beta(u_0, u_1)) \rangle$, est à comparer à la formule exprimant la probabilité de reptation à travers un niveau fixe d'un subordonateur en dimension un, voir le rappel à la suite du Corollaire 3.1.2 ci-dessous. Soulignons que β et β^* dépendent des drifts d_Y et d_Z au travers des mesures de potentiel v et v^* .

Deux corollaires du Théorème 3.1.1

Nous donnons à présent deux corollaires du Théorème 3.1.1. Le premier fournit la probabilité de reptation à travers un niveau fixe de la norme euclidienne $\|(Y, Z)\| = \sqrt{Y^2 + Z^2}$ d'un subordonateur bivarié, i.e. $\mathbb{P}(\|(Y, Z)_{U_a}\| = a)$, pour $a > 0$ et $U_a = \inf\{t : \|(Y, Z)_t\| > a\}$. En posant $f(y) = \sqrt{a^2 - y^2}$, on obtient $S = U_a$ et le Théorème 3.1.1 donne le corollaire suivant :

Corollaire 3.1.1. *Soit (Y, Z) vérifiant (H_2) et $a > 0$. Alors*

$$\mathbb{P}(\|(Y, Z)\|_{U_a} = a) = d_Z \int_0^a v(u, \sqrt{a^2 - u^2}) du + d_Y \int_0^a \frac{uv(u, \sqrt{a^2 - u^2})}{\sqrt{a^2 - u^2}} du. \quad (3.22)$$

Le second corollaire donne la probabilité de reptation à travers le graphe de f d'un subordonateur. Rappelons que ce résultat a été montré en 2016 par Chi [21] dans le cas où f est décroissante et différentiable. Nous le généralisons à f décroissante. Soit X un subordonateur dont le semi-groupe admet des densités continues $(t, x) \mapsto p_t(x)$ sur $(0, \infty)^2$. En posant $(Y_t, Z_t) = (t, X_t)$, on obtient $v(t, x) dt dx = p_t(x) dt dx$. De plus, $Y_t = t$ implique $Y_S = \inf\{t : X_t > f(t)\}$ et le Théorème 3.1.1 s'écrit alors comme suit :

Corollaire 3.1.2. *Soit $(Y, Z) = ((t, X_t), t \geq 0)$ vérifiant (H_2) et $T_f = \inf\{t > 0 : X_t > f(t)\}$. Alors, pour tout t_0 et t_1 tels que $0 \leq t_0 < t_1 \leq \infty$,*

$$\mathbb{P}(X_{T_f} = f(T_f), t_0 < T_f < t_1) = d_X \int_{t_0}^{t_1} p_u(f(u)) du - \int_{t_0}^{t_1} p_u(f(u)) df(u). \quad (3.23)$$

Si f est une constante égale à $x > 0$, alors $T_f = \tau_x^+$, $df \equiv 0$ et nous retrouvons la formule qui donne la probabilité de reptation d'un subordonateur à travers un niveau fixe x , $\mathbb{P}(X_{\tau_x^+} = x) = d_X w(x)$ où w est la densité de la mesure de potentiel de X .

Remarque 3.1.4. *Il paraît difficile de trouver une expression de la probabilité de reptation lorsque f est une fonction continue quelconque. Néanmoins, si f est une fonction croissante, nous pouvons majorer cette probabilité. Soit (Y, Z) vérifiant (H_2) et u_0, u_1 tels que $0 \leq u_0 < u_1 \leq \infty$. Alors*

$$\mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), u_0 < Y_S < u_1) \leq d_Z \int_{u_0}^{u_1} v(u, f(u)) du. \quad (3.24)$$

Ce résultat, démontré dans la Proposition 4.1.1, montre notamment que si f est croissante et $d_Z = 0$ alors (Y, Z) ne rampe jamais à travers Γ .

Dans la Section 4.2 du Chapitre 4, nous donnons des exemples d'application numérique du Théorème 3.1.1 dans différentes situations.

3.1.2 Processus de Lévy en leurs maximums

Soit $(X, \mathbb{P})$ un processus de Lévy non tué, de semi-groupe de Markov $\mathbb{P}(X_t \in dx) = p_t(dx)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ et d'exposant caractéristique Ψ . Nous désignons par $\bar{X}_t = \sup_{s \leq t} X_s$ le processus de son maximum passé et (τ, H) son processus d'échelle ascendant, voir Section 2.4. Le processus (τ, H) est un subordonateur bivarié, éventuellement tué. Nous notons (d_τ, d_H) son drift et U sa mesure de potentiel définie par

$$U(dt, dh) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\tau_s \in dt, H_s \in dh) ds.$$

Lorsque $U(dt, dh)$ est absolument continue sur $(0, \infty)^2$, nous notons $(t, h) \mapsto q_t^*(h)$, $(t, h) \in (0, \infty)^2$ sa densité (et non $v(t, h)$), voir (2.42) et (2.43) de la Section 2.4 pour une explication du choix de cette notation.

Hypothèses et définitions

Nous appelons $(\tilde{H}_1)$ et $(\tilde{H}_2)$ les hypothèses suivantes :

- $(\tilde{H}_1)$ La mesure de renouvellement $U(dt, dh)$ est absolument continue sur $(0, \infty)^2$ et $(t, h) \mapsto q_t^*(h)$ est continue sur $(0, \infty)^2$.
- $(\tilde{H}_2)$ Pour tout $t > 0$, la mesure $p_t(dx)$ est absolument continue et $x \mapsto p_t(x)$ est bornée. De plus, pour tout $c \geq 0$, $(|X_t - ct|, t \geq 0)$ n'est pas un subordonateur.

Nous montrons dans la Proposition 4.5.1 que $(\tilde{H}_2) \Rightarrow (\tilde{H}_1)$. Par ailleurs, rappelons que nous montrons également dans la Proposition 4.4.1 que $(\tilde{H}_2)$ est équivalent à $(\tilde{H}_2')$:

- $(\tilde{H}_2')$ Pour tout $t > 0$, l'application $u \mapsto e^{-t\Psi(u)}$, $u \in \mathbb{R}^2$, est dans $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^2)$. De plus, pour tout $c \geq 0$, $(|X_t - ct|, t \geq 0)$ n'est pas un subordonateur.

Nous montrons de plus que si X vérifie $(\tilde{H}_2)$, alors pour tout $t > 0$ et pour tout $h \in (0, \infty)$, $q_t^*(h) > 0$.

Nous nous intéressons à présent à la reptation, dans l'intervalle de temps (t_0, t_1) , du processus X à travers Γ en un temps où X atteint son maximum passé, i.e. à l'événement

$$\{X_{T_f} = \bar{X}_{T_f} = f(T_f), t_0 < T_f < t_1\}, \quad (3.25)$$

où

$$T_f = \inf\{t > 0 : X_t > f(t)\}.$$

Définition 3.1.2. Soit $0 \leq t_0 < t_1 \leq \infty$. Un processus de Lévy $(X, \mathbb{P})$ rampe en son maximum à travers la courbe Γ dans l'intervalle de temps (t_0, t_1) si

$$\mathbb{P}(X_{T_f} = \bar{X}_{T_f} = f(T_f), t_0 < T_f < t_1) > 0. \quad (3.26)$$

Si $\mathbb{P}(X_{T_f} = \bar{X}_{T_f} = f(T_f)) > 0$, nous dirons que X rampe en son maximum à travers Γ .

Si $\mathbb{P}(X_{T_f} = f(T_f)) > 0$, nous dirons que X rampe à travers Γ .

À nouveau, nous dirons qu'une trajectoire $\omega \in \Omega$ rampe à travers Γ si $\omega \in \{X_{T_f} = f(T_f)\}$. Pour fixer les idées, nous illustrons la Définition 3.1.2 à l'aide de la figure 3.3 qui fournit un exemple d'une trajectoire qui rampe en son maximum à travers Γ et un exemple de trajectoire qui rampe à travers Γ mais en un temps où X n'est pas à son maximum.

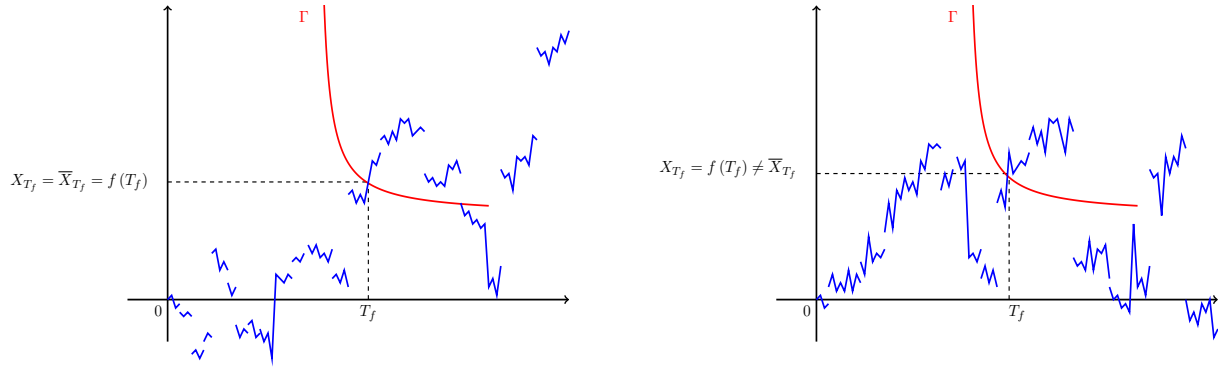


FIGURE 3.3 – À gauche, une trajectoire d'un processus de Lévy X qui rampe à travers Γ en un temps où elle atteint son maximum passé et à droite, une trajectoire d'un processus de Lévy X qui rampe à travers Γ en un temps où elle n'atteint pas son maximum passé.

Théorème principal

De même que pour les subordonateurs bivariés, un premier résultat, qui nous sera utile dans la preuve du Théorème 3.1.2, montre que si X franchit Γ par un saut alors ce saut est « franc », i.e. X ne peut ni sauter sur Γ , ni sauter depuis Γ . Plus précisément,

Lemme 3.1.2. Soit $(X, \mathbb{P})$ un processus de Lévy vérifiant $(\tilde{H}_1)$. Alors

$$\mathbb{P}(X_{T_f-} = f(T_f) < X_{T_f}, T_f < \infty) = \mathbb{P}(X_{T_f-} < X_{T_f} = f(T_f), T_f < \infty) = 0.$$

Rappelons que ce résultat, utilisé dans la démonstration du Théorème 3.1.2, est un corollaire du Lemme 4.4.1. Nous donnons dans le théorème qui suit une expression de la probabilité de reptation, dans l'intervalle de temps (t_0, t_1) , d'un processus de Lévy X à travers Γ en un temps où X atteint son maximum passé en fonction de f , de la mesure de potentiel q_t^* du processus (τ, H) et de son drift (d_τ, d_H) .

Théorème 3.1.2. Soit $(X, \mathbb{P})$ un processus de Lévy vérifiant $(\tilde{H}_1)$. Alors

- (i) X rampe en son maximum à travers Γ ssi (τ, H) rampe à travers Γ .
- (ii) Pour tout t_0 et t_1 tels que $0 \leq t_0 < t_1 \leq \infty$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{T_f} = \bar{X}_{T_f} = f(T_f), t_0 < T_f < t_1) \\ &= d_H \int_{t_0}^{t_1} q_u^*(f(u)) du - d_\tau \int_{t_0}^{t_1} q_u^*(f(u)) df(u). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Notons que $x \mapsto \int_0^\infty q_t^*(x) dt$ est la densité de la mesure de renouvellement de H (si X est un subordonateur alors $q_t^*(x) = p_t(x)$ et $d_H = d_X$). Ainsi, pour tout $x > 0$, en prenant $f \equiv x$, nous retrouvons la formule (1.3) rappelée en introduction donnant la probabilité de reptation d'un processus de Lévy à travers le niveau fixe x .

Remarques relatives au Théorème 3.1.2

Nous formulons ci-dessous deux remarques relatives au Théorème 3.1.2. La première concerne, comme dans le cas des subordonateurs, une interprétation géométrique de la probabilité de reptation, et la seconde porte sur des conditions suffisantes de reptation.

Remarque 3.1.5. Interprétation géométrique de la probabilité de reptation. *De même que dans la Section 3.1.1, l'égalité (3.27) peut être vue comme la circulation d'un champ de vecteurs le long de la courbe $\Gamma_{(t_0, t_1)}$. Rappelons que γ désigne l'arc paramétré défini par $\gamma : u \mapsto (u, f(u))$, $u > 0$. Soit $w : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ le champ vectoriel défini pour tout $(t, h) \in (0, \infty)^2$ par*

$$w(t, h) = (d_H q_t^*(h), -d_\tau q_t^*(h)) . \quad (3.28)$$

Nous obtenons alors l'expression suivante de la probabilité de reptation de X en son maximum à travers $\Gamma_{(t_0, t_1)}$, où l'intégrale est prise au sens de l'intégrale de Stieltjes,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{T_f} = \bar{X}_{T_f} = f(T_f), t_0 < T_f < t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \langle (d_H q_t^*(h), -d_\tau q_t^*(h)), (du, df(u)) \rangle \\ &= \int_{\Gamma_{(t_0, t_1)}} \langle w, d\gamma \rangle . \end{aligned} \quad (3.29)$$

La probabilité de reptation est donc égale au travail du champ vectoriel w le long de la courbe $\Gamma_{(t_0, t_1)}$ et de (3.29), nous déduisons immédiatement les deux égalités suivantes,

$$\mathbb{P}(X_{T_f} = \bar{X}_{T_f} = f(T_f), t_0 < T_f < t_1) = \int_{\Gamma_{(t_0, t_1)}} \langle w^\perp, d\gamma^\perp \rangle \quad (3.30)$$

$$\mathbb{P}(X_{T_f} = \bar{X}_{T_f} = f(T_f)) = \int_\Gamma \langle w^\perp, d\gamma^\perp \rangle \quad (3.31)$$

Ainsi, à la reptation classique « vers le haut » (continûment ou par une accumulation de sauts) d'un processus de Lévy, dont la probabilité est non nulle dès que $d_H > 0$, s'ajoute une reptation « vers l'avant » (continûment ou par une accumulation de sauts), dès que $d_\tau > 0$ (rappelons que $d_\tau > 0$ ssi 0 n'est pas régulier pour $(0, \infty)$, ce qui exclut le cas des processus à variation non bornée). La somme des deux termes du membre de droite dans l'expression 3.27 donne ainsi naissance à une nouvelle reptation de X en son maximum que nous nommons reptation directionnelle de X en son maximum à travers Γ . Ce nouveau type de reptation peut se résumer de la manière suivante : la loi de la reptation de X en son maximum en $(u, f(u))$, i.e. la probabilité que le processus X rampe en son maximum à travers la courbe Γ_{du} est donnée par

$$\mathbb{P}(X_{T_f} = \bar{X}_{T_f} = f(T_f), T_f \in du) = q_u^*(f(u)) \langle (d_\tau, d_H), (-df(u), du) \rangle . \quad (3.32)$$

Nous renvoyons à la figure 3.2 en remplaçant (d_Y, d_Z) par (d_τ, d_H) et $v(u, f(u))$ par $q_u^*(f(u))$ pour une illustration de la formule (3.32).

Remarque 3.1.6. Conditions suffisantes de reptation. *Si X vérifie l'hypothèse $(\tilde{H}_2)$, alors, d'après le Lemme 2 dans Chaumont et Matecki [16], pour tout $t > 0$ et $h > 0$, $q_t^*(h) > 0$. Nous*

obtenons par conséquent que X rampe à travers Γ en son maximum dès que l'une des deux conditions suivantes équivalentes est vérifiée :

$$(i) \quad \exists t_0, t_1 > 0, \int_{u_0}^{u_1} \langle d_\tau, d_H \rangle, (-df(u), du) > 0 \quad (3.33)$$

$$(ii) \quad d_H > 0 \text{ ou } (d_\tau > 0 \text{ et } (\exists t_0, t_1 > 0, f(t_1) < f(t_0))) . \quad (3.34)$$

Notons que, pour tout processus de Lévy X , nous avons l'inclusion évidente

$$\{X_{T_f} = \bar{X}_{T_f} = f(T_f)\} \subset \{X_{T_f} = f(T_f)\}. \quad (3.35)$$

Donc dès que l'une des conditions équivalentes (i) ou (ii) ci-dessus est vérifiée, le processus X rampe à travers Γ . L'inclusion (3.35) est stricte dès que X n'est pas un subordonateur et f est telle que $f(\infty) < f(0)$. Nous donnons ci-dessous un exemple « radical » d'un processus de Lévy X pour lequel cette inclusion est stricte : X rampe à travers une fonction f décroissante en un temps où il n'est pas à son maximum p.s. Soit X le processus de Lévy tel que $X_t = S_t - at$, $t \geq 0$, où S est un subordonateur sans drift et $a > 0$. Alors 0 n'est pas régulier pour $(0, \infty)$ et est régulier pour $(-\infty, 0)$, d'où $d_H = d_\tau = 0$. Donc, d'après le Théorème 3.1.2, pour toute fonction f continue et décroissante, $\mathbb{P}(X_{T_f} = \bar{X}_{T_f} = f(T_f)) = 0$, i.e. le processus ne rampe pas en son maximum à travers n'importe quelle fonction. Néanmoins, X rampe à travers la fonction continue $f(t) = 1 - t$. En effet, pour tout $a < 1$, le subordonateur $S_t + (1 - a)t$ admet pour drift $1 - a > 0$ et rampe donc à travers le niveau fixe 1. Cet exemple nous a inspiré le corollaire suivant qui donne une condition suffisante de reptation d'un processus de Lévy à variation bornée à travers une fonction presque quelconque.

Corollaire 3.1.3. *Soit X un processus de Lévy à variation bornée vérifiant $(\tilde{H}_2)$ et $d_X \geq 0$. Soit $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant : $\exists 0 \leq t_0 < t_1 \leq \infty$ et $a > 0$, tels que $t \mapsto f(t) + at$ est positive, continue et décroissante sur (t_0, t_1) . Alors,*

$$\mathbb{P}(X_{T_f} = f(T_f), t_0 < T_f < t_1) > 0.$$

Ce corollaire nous sera utile pour démontrer la Proposition 3.1.2 qui concerne les processus d'Ornstein-Uhlenbeck, voir Section 3.1.4. Remarquons pour finir que, d'après le Théorème 3.1.2, ($d_H > 0$ ou $d_\tau > 0$) est une condition nécessaire pour qu'un processus de Lévy X rampe en son maximum à travers f . En particulier, si 0 n'est pas régulier pour $[0, \infty)$, alors $d_\tau = d_H = 0$ et X ne rampe jamais en son maximum à travers une fonction continue et décroissante. Si X est à variation non bornée, alors $d_\tau = 0$ et le processus X ne peut ramper en son maximum que si $d_H > 0$.

Cas f croissante

Nous concluons cette section concernant la reptation des processus de Lévy en donnant une majoration de la probabilité de reptation dans le cas où f est une fonction continue et croissante.

Proposition 3.1.1. *Soit $(X, \mathbb{P})$ un processus de Lévy vérifiant $(\tilde{H}_1)$ et $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ une fonction continue et croissante telle que $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) > 0$. Alors, pour tout t_0 et t_1 tels que $0 \leq t_0 < t_1 \leq \infty$,*

$$\mathbb{P}(X_{T_f} = f(T_f), t_0 < T_f < t_1) \leq d_H \int_{t_0}^{t_1} q_u^*(f(u)) du.$$

La Proposition 3.1.1 implique qu'un processus de Lévy tel que $d_H = 0$ ne rampe jamais à travers le graphe d'une fonction continue et croissante. Remarquons également que, puisque f est croissante, lorsque X rampe à travers f , alors c'est nécessairement en un temps en lequel X est en son maximum, i.e. $\{X_{T_f} = f(T_f)\} = \{X_{T_f} = \bar{X}_{T_f} = f(T_f)\}$.

3.1.3 Processus de Lévy conditionnés à rester positif

Dans cette section, X est un processus de Lévy non tué tel que $|X|$ n'est pas un subordonateur. Nous notons $X^\uparrow$ le processus X conditionné à rester positif, voir Section 2.6 pour une définition de ce processus. Nous notons $(\underline{X}_t^\uparrow)$ le minimum futur du processus $X^\uparrow$ et σ_f son dernier temps de passage en dessous de la fonction f , définis respectivement par

$$\underline{X}_t^\uparrow = \inf_{s \geq t} X_s^\uparrow, \quad t \geq 0 \quad \text{et} \quad \sigma_f = \sup\{t : X_t^\uparrow \leq f(t)\}.$$

De même que pour les subordonateurs bivariés et les processus de Lévy, nous montrons dans un premier temps que le processus $X^\uparrow$ ne peut ni sauter sur le graphe Γ , ni sauter depuis le graphe Γ .

Lemme 3.1.3. *Soit X un processus de Lévy à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant $(\tilde{H}_1)$, tel que $\limsup_{t \rightarrow \infty} X_t = \infty$, p.s. et 0 est régulier pour $(0, \infty)$. Alors $0 < \sigma_f < \infty$, p.s. et au temps σ_f , nous avons*

$$\mathbb{P}(X_{\sigma_f-}^\uparrow = f(\sigma_f) < X_{\sigma_f}^\uparrow) = \mathbb{P}(X_{\sigma_f-}^\uparrow < X_{\sigma_f}^\uparrow = f(\sigma_f)) = 0.$$

Dans le théorème ci-dessous, nous obtenons la probabilité de reptation du processus $X^\uparrow$ à travers Γ en son minimum futur.

Théorème 3.1.3. *Soit X un processus de Lévy à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant $(\tilde{H}_1)$, tel que $\limsup_{t \rightarrow \infty} X_t = \infty$, p.s. et 0 est régulier pour $(0, \infty)$. Alors, pour t_0 et t_1 tels que $0 \leq t_0 < t_1 \leq \infty$,*

$$\mathbb{P}(X_{\sigma_f}^\uparrow = \underline{X}_{\sigma_f}^\uparrow = f(\sigma_f), t_0 < \sigma_f < t_1) = d_H \int_{t_0}^{t_1} q_u^*(f(u)) du - d_\tau \int_{t_0}^{t_1} q_u^*(f(u)) df(u).$$

Remarquons que la probabilité de reptation du processus $X^\uparrow$ à travers Γ en son minimum futur a la même expression que la probabilité de reptation de X à travers Γ en son maximum passé. Cela s'explique par la formule de retournement du temps suivante :

$$[(X_{T_f} - X_{(T_f-t)-}, 0 \leq t \leq T_f) \mid X_{T_f} = \bar{X}_{T_f}] \stackrel{(loi)}{=} [(X_t^\uparrow, 0 \leq t \leq \sigma_f) \mid X_{\sigma_f}^\uparrow = \underline{X}_{\sigma_f}^\uparrow],$$

où $X_{0-} := X_0 = 0$. Cette identité en loi se montre notamment en utilisant l'extension aux processus de Lévy de la construction de Tanaka pour les marches aléatoires, voir Doney [25] et la preuve du Théorème 3.1.3, Section 4.6.

3.1.4 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck α -stable

Les processus d'Ornstein-Uhlenbeck ont été introduits par Leonard Ornstein et George Uhlenbeck [59] en 1930 pour décrire la vitesse d'une particule dans un fluide soumise à un frottement. Ces processus sont les solutions de l'équation différentielle stochastique suivante, connue également sous le nom d'équation de Langevin :

$$m dZ_t = -k Z_t dt + dB_t \tag{3.36}$$

où Z est la vitesse de la particule, m sa masse, k un coefficient de frottement et B un mouvement Brownien. L'équation (3.36) s'écrit sous forme intégrale :

$$Z_t = z + \frac{1}{m} B_t - \frac{k}{m} \int_0^t Z_s ds, \quad t \geq 0. \tag{3.37}$$

où $z \in \mathbb{R}$ est tel que $Z_0 = z$, p.s. Cette équation différentielle stochastique admet comme unique solution forte $Z_t = e^{-kt/m} (z + \frac{1}{m} \int_0^t e^{ks/m} dB_s)$, qui est appelée *processus d'Ornstein-Uhlenbeck*. Lorsque B est remplacé par un processus de Lévy X , l'unique solution forte de l'équation (3.37) est appelée *processus de type Ornstein-Uhlenbeck* ou encore *processus d'Ornstein-Uhlenbeck dirigé par un processus de Lévy*.

Soit X un processus de Lévy non tué tel que $|X|$ n'est pas un subordonateur et $X_0 = 0$, p.s. Nous considérons le processus d'Ornstein-Uhlenbeck partant de $z \in \mathbb{R}$ et dirigé par X qui est défini comme étant l'unique solution forte de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$Z_t = z + X_t - \gamma \int_0^t Z_s ds, \quad t \geq 0, \quad \gamma > 0. \quad (3.38)$$

Cette équation admet pour solution explicite

$$Z_t = e^{-\gamma t} \left(z + \int_0^t e^{\gamma s} dX_s \right), \quad t \geq 0. \quad (3.39)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous définissons :

$$T_x^+ = \inf\{t : Z_t > x\} \quad \text{et} \quad T_x^- = \inf\{t : Z_t < x\}.$$

Définition 3.1.3. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck Z tel que défini par (3.39) rampe à travers le niveau $x \neq z$ si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

(i) $x > z$ et $\mathbb{P}(Z_{T_x^+} = x, T_x^+ < \infty) > 0$.

(ii) $x < z$ et $\mathbb{P}(Z_{T_x^-} = x, T_x^- < \infty) > 0$.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à la reptation de Z à travers x dans le cas où X est un processus de Lévy α -stable avec $\alpha \in (0, 1)$. Nous savons qu'un processus de Lévy α -stable avec $\alpha \in (0, 1)$ est à variation bornée et tel que $d_X = 0$. Il ne rampe donc jamais à travers un niveau fixe. En revanche, nous allons voir qu'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck dirigé par un processus α -stable avec $\alpha \in (0, 1)$ rampe. Ceci s'explique par le caractère régularisant de la fonctionnelle $t \mapsto \int_0^t Z_s ds$ apparaissant dans (3.38). Jakubowski [35] a montré que, sous l'hypothèse X symétrique, Z rampe. Nous étendons ce résultat au cas des processus α -stables quelconques (avec $\alpha \in (0, 1)$) dans la proposition ci-dessous.

Proposition 3.1.2. *Soit Z le processus d'Ornstein-Uhlenbeck solution de (3.38) avec $\gamma > 0$, partant de $z \in \mathbb{R}$, dirigé par un processus de Lévy α -stable avec $\alpha \in (0, 1)$ et tel que $|X|$ n'est pas un subordonateur.*

(i) Si $z \in (-\infty, 0)$, alors Z rampe à travers x ssi $x \in (z, 0)$.

(ii) Si $z \in (0, \infty)$, alors Z rampe à travers x ssi $x \in (0, z)$.

(iii) Si $z = 0$, alors Z ne rampe à travers aucun niveau.

Rappelons que la première représentation de Lamperti, voir Section 2.2.4, permet d'obtenir l'égalité en loi suivante, valable pour tout $\alpha \in (0, 2]$:

$$(Z_t, t \geq 0) \stackrel{(law)}{=} \left(e^{-\gamma t} \left(z + X_{\frac{e^{\alpha\gamma t} - 1}{\alpha\gamma}} \right), t \geq 0 \right). \quad (3.40)$$

Ainsi, la démonstration de la Proposition 3.1.2 repose essentiellement sur le fait que Z rampe à travers x ssi X rampe à travers la fonction $f(s) = x(\alpha\gamma s + 1)^{1/\alpha} - z$.

3.1.5 Questions ouvertes

Dans cette section, nous soulevons quelques questions relatives à la reptation à travers une courbe et formulons également quelques conjectures.

Reptation d'un subordonateur bivarié à travers Γ

Nous ne connaissons pas de condition nécessaire et suffisante pour qu'un subordonateur bivarié (Y, Z) rampe à travers le graphe d'une fonction f continue et décroissante, en particulier lorsque sa mesure de renouvellement $v(dy, dz)$ n'est pas absolument continue. Nous émettons les conjectures suivantes :

Conjecture 3.1.1. *Soit (Y, Z) un subordonateur bivarié éventuellement tué et $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ une fonction continue et décroissante telle que $f(0) := \lim_{u \rightarrow 0^+} f(u) > 0$. Alors*

(i) *Si $d_Y > 0$ et $d_Z > 0$, alors (Y, Z) rampe à travers le graphe de f .*

(ii) *Si $d_Y = 0$ et $d_Z = 0$, alors (Y, Z) ne rampe pas à travers le graphe de f .*

(iii) *Si $\pi_Z(0, \infty) = \infty$ alors*

$$d_Z > 0 \implies (Y, Z) \text{ rampe à travers } \Gamma. \quad (3.41)$$

(iv) *Si $\pi_Y(0, \infty) = \infty$ et $\pi_Z(0, \infty) = \infty$, alors, pour tout $0 \leq u_0 < u_1 \leq \infty$, nous avons l'équivalence suivante :*

$$(Y, Z) \text{ rampe à travers } \Gamma_{(u_0, u_1)} \iff d_Z > 0 \text{ ou } (d_Y > 0 \text{ et } f(u_1) < f(u_0)). \quad (3.42)$$

Reptation d'un processus de Lévy en son maximum à travers Γ

Là encore, nous ne connaissons pas de condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Lévy X rampe en son maximum à travers le graphe d'une fonction continue et décroissante. Nous renvoyons à la Remarque 3.2.1 pour une réponse partielle à cette question. Nous pensons que dans le cas où X est à variation bornée, il est possible de montrer des résultats similaires à ceux obtenus dans le cas d'un subordonateur bivarié. Dans le cas à variation non bornée, $d_\tau = 0$ et nous pensons que les critères de reptation à travers une fonction continue et décroissante sont les mêmes que ceux à travers un niveau fixe. Un résultat dû à Vigon [73] montre que cette conjecture est vraie dans le cas des fonctions continues, décroissantes et affines par morceaux. Voici ce résultat : soit X est un processus de Lévy à variation non bornée et $\tilde{X} := X + at$ où $a \in \mathbb{R}$. Alors X rampe vers le haut ssi $\tilde{X}$ rampe vers le haut. Ainsi, lorsque X est à variation non bornée, l'ajout d'un drift n'influence pas la reptation à travers un niveau fixe. Nous émettons les conjectures suivantes :

Conjecture 3.1.2. *Soit X un processus de Lévy et $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ une fonction continue et décroissante telle que $f(0) := \lim_{u \rightarrow 0^+} f(u) > 0$.*

(i) *Si X est à variation bornée, alors, pour tout $0 \leq u_0 < u_1 \leq \infty$,*

$$X \text{ rampe en son max. à travers } \Gamma_{(u_0, u_1)} \iff (d_H > 0 \text{ ou } (d_\tau > 0 \text{ et } f(u_1) < f(u_0))). \quad (3.43)$$

(ii) *Si X est à variations non bornée, alors*

$$X \text{ rampe en son max. à travers } \Gamma \iff d_H > 0. \quad (3.44)$$

Hypothèses sur f

Si f est une fonction continue par morceaux et décroissante, alors, dans le cas d'un subordonateur bivarié comme de celui d'un processus de Lévy réel, nos résultats restent vrais sur tout intervalle où f est continue. La probabilité de reptation sur un intervalle de $[0, \infty]$ contenant des discontinuités s'obtient à l'aide d'une somme d'un nombre éventuellement infini de termes. Si f est croissante, nous obtenons une majoration de la probabilité de reptation, voir Remarque 3.1.4 dans le cas d'un

subordonateur bivarié, et Proposition 3.1.1 dans le cas des processus de Lévy réels. Si f est une fonction quelconque, nous renvoyons au Corollaire 3.1.3 dans le cas des processus de Lévy. Il nous paraît difficile d'affaiblir les hypothèses sur f mais nous émettons néanmoins la conjecture ci-dessous qui, dans le cas des subordinateurs bivariés, généralise la formule (3.10) à un arc paramétré de la forme $\gamma(u) = (g(u), f(u))$. Si cette conjecture s'avérait vraie, elle permettrait d'obtenir une symétrie pleine entre les deux variables du subordinateur :

Conjecture 3.1.3. *Soit g et f deux fonctions continues définies sur $(0, 1)$ et à valeurs dans $[0, \infty)$ telles que g est croissante et f est décroissante. Nous définissons les limites, éventuellement infinies, aux bornes de $(0, 1)$ des fonctions f et g par*

$$g(0) = \lim_{0+} g(u), \quad f(0) = \lim_{0+} f(u), \quad g(1) = \lim_{1-} g(u), \quad f(1) = \lim_{1-} f(u).$$

Nous supposons que $f(0) > 0$, $g(1) > 0$ et définissons dans $(0, \infty)^2$ l'arc paramétré γ par

$$\gamma : u \mapsto (g(u), f(u)) \quad u \in (0, 1). \quad (3.45)$$

et, pour tout $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$, $\Gamma_{(u_0, u_1)} = \gamma((u_0, u_1)) = \{(g(u), f(u)) : u_0 < u < u_1\}$.

Soit (Y, Z) un subordinateur bivarié vérifiant (H_2) et $w : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ le champ vectoriel défini pour tout $(y, z) \in (0, \infty)^2$ par $w(y, z) = (dzv(y, z), -dyv(y, z))$. Alors, pour tout $0 < u_0 \leq u_1 < 1$,

$$\mathbb{P}((Y, Z) \text{ rampe à travers } \Gamma_{(u_0, u_1)}) = dz \int_{u_0}^{u_1} v(g(u), f(u)) dg(u) - dy \int_{u_0}^{u_1} v(g(u), f(u)) df(u). \quad (3.46)$$

Notons que là encore, la probabilité de reptation de (Y, Z) à travers $\Gamma_{(u_0, u_1)}$ pourrait s'écrire :

$$\mathbb{P}((Y, Z) \text{ rampe à travers } \Gamma_{(u_0, u_1)}) = \int_{u_0}^{u_1} \langle w \circ \gamma, d\gamma \rangle = \int_{\Gamma_{(u_0, u_1)}} \langle w, d\gamma \rangle.$$

Enfin, si $g \neq id$, le temps d'arrêt S n'est plus le temps de reptation. Si nous notons

$$\begin{aligned} S_1^Y &= \inf\{t : Y_t > g(0)\}, & S_2^Y &= \inf\{t : Y_t > g(1)\}, \\ S_1^Z &= \inf\{t : Z_t > f(1)\}, & S_2^Z &= \inf\{t : Z_t > f(0)\}, \end{aligned}$$

alors le temps de reptation, s'il existe, appartient à l'intervalle $[S_1^Y \vee S_1^Z ; S_2^Y \wedge S_2^Z]$.

Reptation d'un processus d'O-U dirigé par X α -stable d'indice $\alpha \in (1, 2)$

Tout processus α -stable d'indice $\alpha \in (1, 2)$ est à variation non bornée. Ainsi, au regard de la démonstration de la Proposition 3.1.2 et du point 2. de la Conjecture 3.1.2, nous formulons la conjecture suivante :

Conjecture 3.1.4. *Soit Z le processus d'Ornstein-Uhlenbeck solution de (3.38) avec $\gamma > 0$, partant de $z \in \mathbb{R}$, dirigé par un processus de Lévy α -stable avec $\alpha \in (1, 2)$ et tel que $|X|$ n'est pas un subordinateur. Alors Z ne rampe ni vers le haut, ni vers le bas.*

Néanmoins, remarquons que Chaumont et Uribe [20] ont montré que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, x n'est pas polaire pour le processus Z lorsque celui-ci est dirigé par un processus de Lévy α -stable avec $\alpha \in (0, 2]$. Si la conjecture 3.1.4 était vérifiée, cela signifierait que tout processus d'Ornstein-Uhlenbeck dirigé par un processus de Lévy α -stable avec $\alpha \in (1, 2)$ atteint tous les points mais forcément « en leur tournant autour » avant de les atteindre. Notons que c'est par exemple le cas des processus α -stables symétriques avec $\alpha \in (1, 2)$.

Reptation d'un processus de Lévy à travers un processus adapté continu et décroissant

Si X n'est pas un processus α -stable, il n'admet pas la représentation (3.40). La question de la reptation d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck Z partant de $z < 0$ et dirigé par un processus de Lévy quelconque soulève donc la question de la reptation de X à travers la fonctionnelle $(\mathcal{F}_t)$ -adaptée

$$A(t) = x - z + \gamma \int_0^t Z_s ds \quad t \geq 0 \quad (3.47)$$

tuée au temps $T_{(0,\infty)}^Z = \inf\{t > 0 : Z_t > 0\}$ où $x \in (z, 0)$. Notons que $T_{(0,\infty)}^Z$ est un $(\mathcal{F}_t)$ -temps d'arrêt et que la fonctionnelle A est continue et décroissante comme le montre l'équation différentielle (3.38).

Définition 3.1.4. Soit $(X, \mathbb{P})$ un processus de Lévy et A un processus $(\mathcal{F}_t)$ -adapté, continu et décroissant tel que $A_0 > 0$ p.s. Nous notons T_A le premier temps de passage de X au dessus de A défini par

$$T_A = \inf\{t > 0 : X_t > A_t\}. \quad (3.48)$$

Nous dirons que X rampe en son maximum à travers A si

$$\mathbb{P}(X_{T_A} = \bar{X}_{T_A} = A_{T_A}) > 0. \quad (3.49)$$

Nous émettons la conjecture suivante :

Conjecture 3.1.5. Soit X un processus de Lévy et A un processus $(\mathcal{F}_t)$ -adapté, continu et décroissant tel que $A_0 > 0$ p.s. Alors si $d_H > 0$, le processus de Lévy X rampe en son maximum à travers A .

3.2 Processus de Lévy conditionnés à être absorbés par une courbe

Dans cette section, nous présentons nos différents résultats relatifs au conditionnement d'un processus de Lévy à être *absorbé par une courbe*.

Dans la Section 3.2.1, nous nous intéressons au cas des subordonateurs bivariés. Si (Y, Z) est un tel processus, nous identifions dans un premier temps une famille de fonctions harmoniques pour (Y, Z) tué lorsqu'il passe « au-dessus » de Γ . Puis, nous montrons que le processus obtenu via une h -transformation de Doob de (Y, Z) à l'aide d'une de ces fonctions harmoniques est en fait un processus conditionné à être absorbé par Γ .

Comme nous l'avons signalé en introduction, la méthode consistant à établir dans un premier temps un résultat pour un subordonateur bivarié, puis à l'appliquer au processus d'échelle ascendant d'un processus de Lévy X afin d'obtenir un « résultat analogue » pour le processus X en son maximum passé n'a pas pu être formellement employée dans le cas du conditionnement. Dans la Section 3.2.2, nous parvenons néanmoins à construire une probabilité $\mathbb{P}^f$ sous laquelle un processus de Lévy donné X est conditionné à atteindre la courbe Γ en son maximum. Mais la construction de $\mathbb{P}^f$ revêt un caractère quelque peu artificiel dans la mesure où celle-ci s'obtient à l'aide d'un processus appelé *pont de premier passage*. Nous expliquons en introduction de la Section 3.2.2 les étapes de notre démarche avant de présenter en détail nos résultats, qui s'appuient néanmoins partiellement sur les résultats de la Section 3.2.1.

3.2.1 Subordonateurs bivariés

Soit $((Y, Z), \mathbb{P})$ un subordonateur bivarié, éventuellement tué. Dans cette section, le processus (Y, Z) est vu comme un processus de Markov dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un « point cimetière » $\delta = (\infty, \infty)$,

i.e. tel que $Y_t = Z_t = \infty$, pour $t \in [\zeta, \infty]$, où ζ est le temps de vie de (Y, Z) . Pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ nous notons $\mathbb{P}_{(y,z)}$ la mesure de probabilité sous laquelle (Y, Z) a pour valeur initiale (y, z) , i.e. $\mathbb{P}_{(y,z)}((Y_0, Z_0) = (y, z)) = 1$ et nous posons $\mathbb{P} := \mathbb{P}_{(0,0)}$. Rappelons que nous notons, pour tout $t > 0$,

$$p_t(dy, dz) := \mathbb{P}(Y_t \in dy, Z_t \in dz) \text{ and } v(dy, dz) := \int_0^{+\infty} p_t(dy, dz) dt$$

où p_t désigne le semi-groupe de (Y, Z) et v sa mesure de renouvellement. Lorsque, pour $t > 0$ fixé, $\mathbb{P}(Y_t \in dy, Z_t \in dz)$ est une mesure absolument continue, nous désignons par $p_t(y, z)$ une version de ses densités et, lorsque la mesure v est absolument continue, par v une version de ses densités. Si $y < 0$ ou $z < 0$, nous posons $p_t(y, z) = 0$ et $v(y, z) = 0$. Nous rappelons les hypothèses (H_2) et (H_3) , et formulons l'hypothèse (H'_2) suivante :

- (H_2) La mesure de renouvellement $v(dy, dz)$ est absolument continue sur $(0, \infty)^2$ et sa densité, notée $(y, z) \mapsto v(y, z)$, est continue sur $(0, \infty)^2$.
- (H'_2) Pour tout $t > 0$, la mesure $p_t(dy, dz)$ est absolument continue sur $(0, \infty)^2$ et, pour tout $t > 0$, la fonction $(y, z) \mapsto p_t(y, z)$ est continue sur $(0, \infty)^2$.
- (H_3) Pour tout $t > 0$, la mesure $p_t(dy, dz)$ est absolument continue sur $(0, \infty)^2$ et la fonction $(t, y, z) \mapsto p_t(y, z)$ est continue sur $(0, \infty)^3$.

Notons que (H_3) implique (H'_2) . Nous ne travaillons pas sous l'hypothèse (H_3) dans cette section, mais rappelons que c'est sous (H_3) que nous avons obtenu une expression de la loi conjointe espace-temps de la probabilité de reptation d'un subordonateur bivarié à travers Γ , voir Section 3.1.1.

Dans cette section, dédiée aux subordonateurs bivariés, nous nous intéressons au conditionnement du processus (Y, Z) à atteindre continûment Γ (par en-dessous). Pour cela, nous introduisons l'ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathcal{D} := \{(y, z) \in [0, \infty)^2 : z < f(y)\} \quad (3.50)$$

et S' le premier temps de sortie de $\mathcal{D}$ du processus (Y, Z) défini par

$$S' := \inf\{t : (Y_t, Z_t) \in [0, \infty)^2 \setminus \mathcal{D}\} = \inf\{t : Z_t \geq f(Y_t)\}. \quad (3.51)$$

Processus (Y, Z) tué lorsqu'il quitte $\mathcal{D}$

Nous désignons par $\mathbb{Q}_{(y,z)}$ la loi du processus (Y, Z) partant de $(y, z) \in \mathcal{D}$ et tué au temps S' , i.e. $\mathbb{Q}_{(y,z)}$ est la loi du processus de Markov fort $(\tilde{Y}, \tilde{Z})$ défini par

$$(\tilde{Y}_t, \tilde{Z}_t) = \begin{cases} (Y_t, Z_t) & \text{si } t < S' \\ \delta & \text{si } t \geq S' \end{cases} \quad (3.52)$$

sous la probabilité $\mathbb{P}_{(y,z)}$. Pour tout $(y, z) \in \mathcal{D}$ et $\Lambda \in \mathcal{F}_t$, $t > 0$, nous avons donc

$$\mathbb{Q}_{(y,z)}(\Lambda, t < \zeta) = \mathbb{P}_{(y,z)}(\Lambda, t < S'), \quad (3.53)$$

où ζ est le temps de vie du processus tué. Rappelons que, sous l'hypothèse (H_2) , le processus (Y, Z) ne peut ni sauter sur Γ , ni sauter depuis Γ , voir Lemme 3.1.1. Ainsi, la durée de vie ζ du processus (Y, Z) est égale à S' et par ailleurs, nous avons également $S := \inf\{t : Z_t > f(Y_t)\} = S'$. Rappelons enfin que la décroissance de f entraîne $S' < \infty$ p.s. Dans ce qui suit, nous noterons $q_t((y, z), (dr, ds))$ le semi-groupe de Markov du processus tué et $\mathbb{E}_{(y,z)}^{\mathbb{Q}}$ l'espérance sous la probabilité $\mathbb{Q}_{(y,z)}$.

Famille de fonctions excessives et harmoniques pour le processus tué $(\tilde{Y}, \tilde{Z})$

Notre premier résultat identifie une famille de fonctions excessives, et dans certains cas harmoniques, pour le processus tué $(\tilde{Y}_t, \tilde{Z}_t)$. Avant de l'énoncer, nous rappelons, dans le cadre d'un subordonateur bivarié tué tel que défini ci-dessus, les définitions d'une fonction excessive et d'une fonction harmonique :

Définition 3.2.1. (*Fonction excessive*). La fonction $h : \mathcal{D} \rightarrow [0, \infty]$ est dite excessive pour le processus tué $(\tilde{Y}_t, \tilde{Z}_t)$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout $t \geq 0$ et $(y, z) \in \mathcal{D}$,

$$\mathbb{E}_{(y,z)}^{\mathbb{Q}}(h(Y_t, Z_t) \mathbb{1}_{\{t < S\}}) \leq h(y, z).$$

(ii) Pour tout $(y, z) \in \mathcal{D}$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{E}_{(y,z)}^{\mathbb{Q}}(h(Y_t, Z_t) \mathbb{1}_{\{t < S\}}) = h(y, z).$$

Définition 3.2.2. (*Fonction harmonique*). La fonction $h : \mathcal{D} \rightarrow [0, \infty]$ est dite harmonique pour le processus tué $(\tilde{Y}_t, \tilde{Z}_t)$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) h est excessive pour le processus tué $(\tilde{Y}_t, \tilde{Z}_t)$.

(ii) Pour tout ouvert $O \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overline{O \cap \mathcal{D}}$ est un ensemble compact non vide inclus dans $\mathcal{D}$ et pour tout $(y, z) \in \mathcal{D}$,

$$\mathbb{E}_{(y,z)}^{\mathbb{Q}}(h(Y_T, Z_T) \mathbb{1}_{\{T < S\}}) = h(y, z), \quad (3.54)$$

où $T = \inf\{t : (Y_t, Z_t) \in \mathcal{D} \setminus O\}$.

Rappelons que le support d'une mesure m définie sur $\mathbb{R}$, noté $S(m)$, est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tel que $m(G) > 0$ pour tout ensemble ouvert G contenant x . Le support d'une mesure est un ensemble fermé. Nous notons $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures boréliennes sur $(0, \infty)$, non nulles et σ -finies. Le théorème suivant est le premier résultat clé dans la construction de la h -transformation de Doob du subordonateur bivarié tué $(\tilde{Y}, \tilde{Z})$:

Théorème 3.2.1. Soit (Y, Z) un subordonateur bivarié vérifiant (H'_2) , $m \in \mathcal{M}$ et h la fonction définie par

$$h(y, z) := \int_{(0, \infty)} v(u - y, f(u) - z) m(du), \quad (y, z) \in \mathcal{D}. \quad (3.55)$$

Alors :

(i) La fonction h est excessive pour le processus tué $(\tilde{Y}, \tilde{Z})$.

(ii) Si aucune des coordonnées Y et Z n'est un processus de Poisson composé ou si f est strictement décroissante, alors h est harmonique pour le processus tué $(\tilde{Y}, \tilde{Z})$.

(iii) Si $S(m)$ est dense dans $(0, \infty)$, alors h est strictement positive sur $\mathcal{D}$.

Nous introduisons, pour tout subordonateur bivarié (Y, Z) vérifiant (H'_2) et toute fonction f telle que définie en introduction de ce chapitre, la famille $\mathcal{E}_{(Y,Z)}^f$ de fonctions excessives définies sur $\mathcal{D}$ suivante :

$$\mathcal{E}_{(Y,Z)}^f = \left\{ h : (y, z) \mapsto \int_{(0, \infty)} v(u - y, f(u) - z) m(du), \quad m \in \mathcal{M} \right\}.$$

Dans la suite de cette section, nous supposons que l'hypothèse (H'_2) est vérifiée, de sorte que la famille de fonctions excessives $\mathcal{E}_{(Y,Z)}^f$ est bien définie.

Remarque 3.2.1. Interprétation de la mesure m . L'introduction d'une mesure $m \in \mathcal{M}$ dans la définition de la fonction excessive h est artificielle. Cette mesure est une mesure sur le graphe Γ et doit être vue comme un moyen de « pondérer » la probabilité de la zone du graphe Γ par laquelle le processus va être absorbé, i.e. de « charger » plus ou moins des zones du graphe Γ lors du conditionnement. Typiquement, si $m = \delta_u$ est la masse de Dirac en $u \in (0, \infty)$, le processus conditionné via la h -transformation de Doob le sera à être absorbé par le graphe Γ en le point de coordonnées $(u, f(u))$, i.e. le processus conditionné sera un pont. À l'inverse, si $m = \lambda$ est la mesure de Lebesgue, aucune zone du graphe Γ ne sera « privilégiée ». Notons enfin que, si $m(du) = d_Z \lambda(du) - d_Y df(u)$, alors, pour tout $(y, z) \in \mathcal{D}$, $h(y, z)$ est la probabilité de reptation du processus $((Y, Z), \mathbb{P}_{(y,z)})$ à travers Γ , voir Théorème 3.1.1.

Conditionnement du processus tué $(\tilde{Y}, \tilde{Z})$ via la h -transformation de Doob

Pour construire le processus obtenu par la h -transformation de Doob du processus tué $(\tilde{Y}, \tilde{Z})$ à l'aide d'une fonction $h \in \mathcal{E}_{(Y,Z)}^f$, cette dernière doit être harmonique, strictement positive et finie sur son ensemble de définition $\mathcal{D}$. D'après le point (ii) du Théorème 3.2.1, l'harmonicité est acquise dès qu'aucune des coordonnées Y et Z n'est un processus de Poisson composé ou dès que f est décroissante. D'après le point (iii) du même théorème, la stricte positivité est acquise dès que le support de m est dense dans $(0, \infty)$. La proposition suivante fournit des conditions suffisantes pour que h soit de plus finie sur $\mathcal{D}$:

Proposition 3.2.1. Soit $m \in \mathcal{M}$ telle que $S(m)$ est dense dans $(0, \infty)$ et $h \in \mathcal{E}_{(Y,Z)}^f$. La fonction h est finie dans les deux cas suivants :

(i) La densité $(y, z) \mapsto v(y, z)$ est continue sur $(0, \infty)^2$ et la mesure m est définie par

$$m(du) = d_Z \lambda(du) - d_Y df(u).$$

(ii) La densité $(y, z) \mapsto v(y, z)$ est continue et bornée sur $(0, \infty)^2$ et la mesure m est de masse totale finie. Dans ce cas, la fonction h est continue sur $\mathcal{D}$.

Remarquons que dans les points (i) et (ii) de la Proposition 3.2.1, l'hypothèse $(y, z) \mapsto v(y, z)$ est continue sur $(0, \infty)^2$ est inutile car nous avons supposé (H'_2) pour définir h . De plus, le point (i) est immédiat au regard du Théorème 3.1.1. Nous notons $\mathcal{H}_{(Y,Z)}^f \subset \mathcal{E}_{(Y,Z)}^f$ la famille de fonctions harmoniques suivante :

$$\mathcal{H}_{(Y,Z)}^f = \left\{ h \in \mathcal{E}_{(Y,Z)}^f, \quad h \text{ est strictement positive, finie et harmonique} \right\}.$$

Si $h \in \mathcal{H}_{(Y,Z)}^f$, nous pourrions écrire de manière équivalente que la fonction h vérifie l'hypothèse (H).

Soit à présent $h \in \mathcal{H}_{(Y,Z)}^f$ fixée. La stricte positivité et la finitude de la fonction h nous permettent de définir le processus h -transformé de Doob du processus tué $(\tilde{Y}, \tilde{Z})$. De même que le processus $(\tilde{Y}, \tilde{Z})$, le h -transformé est un processus de Markov fort, non conservatif et d'espace d'états $\mathcal{D}$. Sa famille de lois, notée $(\mathbb{P}_{(y,z)}^C, (y, z) \in \mathcal{D})$, est définie par

$$\mathbb{P}_{(y,z)}^C(\Lambda_t, t < \zeta) := \frac{1}{h(y, z)} \mathbb{E}_{(y,z)}^Q(h(Y_t, Z_t) \mathbb{1}_{\Lambda_t} \mathbb{1}_{\{t < \zeta\}}), \quad t \geq 0, \quad \Lambda_t \in \mathcal{F}_t, \quad (y, z) \in \mathcal{D}, \quad (3.56)$$

où dans chaque membre, ζ est le temps de vie du processus considéré. Nous noterons $\mathbb{P}^C := \mathbb{P}_{(0,0)}^C$. De plus, si nous désignons par $p_t^C((y, z), (dr, ds))$ le semi-groupe de Markov du processus h -transformé, la définition (3.56) de la famille $(\mathbb{P}_{(y,z)}^C, (y, z) \in \mathcal{D})$ est équivalente à la donnée de $p_t^C((y, z), (dr, ds))$ définie par

$$p_t^C((y, z), (dr, ds)) := \frac{h(r, s)}{h(y, z)} q_t((y, z), (dr, ds)), \quad (y, z), (r, s) \in \mathcal{D}. \quad (3.57)$$

Propriétés des trajectoires du processus conditionné

À présent que le h -transformé du processus (Y, Z) tué a été défini, nous nous intéressons aux propriétés de ses trajectoires. Pour tout $(y, z) \in \mathcal{D}$, nous noterons $((Y, Z), \mathbb{P}_{(y,z)}^C)$ le processus (Y, Z) sous la loi $\mathbb{P}_{(y,z)}^C$. Le théorème ci-dessous montre que, pour tout $(y, z) \in \mathcal{D}$, le processus $((Y, Z), \mathbb{P}_{(y,z)}^C)$ est p.s. croissant, atteint p.s. le graphe Γ continûment et fournit une expression explicite en fonction de h , v et m de la loi de $(Y_{\zeta-}, Z_{\zeta-})$ sous la loi $\mathbb{P}_{(y,z)}^C$, i.e. de la loi du point d'atteinte.

Théorème 3.2.2. *Soit $(y, z) \in \mathcal{D}$. Alors :*

(i) *Les coordonnées du processus $((Y, Z), \mathbb{P}_{(y,z)}^C)$ sont croissantes p.s., i.e. pour tout $s \leq t$,*

$$\mathbb{P}_{(y,z)}^C(Y_s \leq Y_t, Z_s \leq Z_t \mid t < \zeta) = 1.$$

(ii) *Le processus $((Y, Z), \mathbb{P}_{(y,z)}^C)$ atteint p.s. continûment le graphe Γ , i.e.*

$$\mathbb{P}_{(y,z)}^C(Z_{\zeta-} = f(Y_{\zeta-})) = 1.$$

(iii) *La loi de $Y_{\zeta-}$ sous $\mathbb{P}_{(y,z)}^C$ est donnée par*

$$\mathbb{P}_{(y,z)}^C(Y_{\zeta-} \in dy) = \frac{1}{h(0,0)} v(y, f(y)) m(dy), \quad y \in (0, \infty).$$

3.2.2 Processus de Lévy en leurs maximums

Soit $(X, \mathbb{P})$ un processus de Lévy non tué tel que X n'est pas un processus de Poisson composé et $-X$ n'est pas un subordonateur. Cette dernière hypothèse est naturelle dans la mesure où nous cherchons à conditionner X à être absorbé par une fonction positive. Nous rappelons que nous notons $\mathbb{P}(X_t \in dx) = p_t(dx)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ son semi-groupe de Markov et Ψ son exposant caractéristique. Nous désignons par $\bar{X}_t = \sup_{s \leq t} X_s$ le processus de son maximum passé et (τ, H) son processus d'échelle ascendant, voir Section 2.4. Le processus (τ, H) est un subordonateur bivarié, éventuellement tué. Nous notons (d_τ, d_H) son drift et U sa mesure de potentiel définie par

$$U(dt, dh) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\tau_s \in dt, H_s \in dh) ds.$$

Lorsque la mesure U admet une densité, nous noterons celle-ci $(r, s) \mapsto v(r, s)$ plutôt que $(r, s) \mapsto q_r^*(s)$ comme nous l'avons fait dans la Section 3.1. Cela nous permet d'avoir une notation cohérente avec celle utilisée dans la Section 3.2.1 concernant les subordonateurs bivariés. Nous appelons $(\tilde{H}'_1)$ l'hypothèse suivante, qui correspond à l'hypothèse $(\tilde{H}_1)$ légèrement renforcée :

$(\tilde{H}'_1)$ La mesure de renouvellement $U(dt, dh)$ est absolument continue sur $(0, \infty)^2$ et $(r, s) \mapsto v(r, s)$ est continue et strictement positive sur $(0, \infty)^2$.

Dans ce qui suit, nous supposons que $(\tilde{H}'_1)$ est vérifiée et que 0 est régulier pour $(0, \infty)$. Dans cette section $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ désigne l'ensemble défini par

$$\mathcal{D} := \{(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} : x < f(t)\}.$$

Nous nous intéressons au conditionnement du processus X à être absorbé en son maximum par la courbe Γ . Nous expliquons ci-dessous notre démarche avant de la détailler.

Plan de la Section 3.2.2

Si $(X, \mathbb{P})$ rampe en son maximum à travers Γ , il est possible de montrer que la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par

$$h : (t, x) \mapsto \int_{(0, \infty)} v(u - t, f(u) - x) m(du)$$

où $m(du) = d_H \lambda(du) - d_\tau df(u)$ est excessive pour le processus de Markov fort $((t, X_t), t \geq 0)$ tué lorsqu'il quitte $\mathcal{D}$, finie et strictement positive, voir notamment Théorème 3.1.2. Mais h n'est pas harmonique pour $((t, X_t), t \geq 0)$ et nous ne pouvons donc pas conditionner ce processus formellement via une h -transformation de Doob afin d'obtenir, in fine, un résultat portant sur le processus de Lévy $(X, \mathbb{P})$. Pour conditionner le processus X à être absorbé par Γ , nous avons donc mené un autre type de raisonnement dont nous résumons les deux étapes principales ci-dessous avant de les détailler dans la suite de cette section :

1. **Pont de premier passage du processus X .** Dans un premier temps, nous construisons la loi d'un processus appelé *pont de premier passage du processus X* . Intuitivement, étant donné un temps $u > 0$ et un niveau $x > 0$, le *pont de premier passage du processus X , de longueur u , de 0 à x* est le processus

$$(X_s, 0 \leq s \leq u) \quad \text{conditionnellement à l'événement } \{X_u = \bar{X}_u = x\}. \quad (3.58)$$

L'événement $\{X_u = \bar{X}_u = x\}$ étant de mesure nulle, la construction du *pont de premier passage* n'est pas immédiate. Nous effectuons celle-ci en trois temps :

- (i) D'abord, nous caractérisons la loi du *pont de premier passage* à l'aide de g_t , le *temps d'atteinte du maximum passé avant t* .
- (ii) Ensuite, à l'aide de cette caractérisation, nous montrons que la fonction $(s, y) \mapsto v(u - s, x - y)$ est invariante pour le processus (t, X_t) tué lorsqu'il quitte le domaine R défini par

$$R := [0, u] \times (-\infty, x] \setminus (u, x).$$

- (iii) Enfin, nous utilisons la loi du processus obtenu via la h -transformation de Doob du processus tué (t, X_t) à l'aide de la fonction invariante $(s, y) \mapsto v(u - s, x - y)$ pour caractériser la loi du *pont de premier passage du processus X , de longueur u , de 0 à x* . Et nous montrons que sous cette loi, le processus canonique atteint continûment x .

Notons qu'en 2005, Bertoin, Chaumont et Pitman [8] ont défini les ponts de premier passage d'un mouvement brownien. Puis, en 2009, Chaumont et Pardo [18] ont étendu cette définition au cas particulier des processus de Lévy stables spectralement négatifs. Nous généralisons ici ce résultat à tout processus de Lévy X vérifiant $(\tilde{H}'_1)$ et tel que 0 est régulier pour $(0, \infty)$.

2. **Processus de Lévy conditionné à être absorbé en son maximum par Γ .** La seconde étape consiste en la construction d'une loi, notée $\mathbb{P}^f$, sous laquelle le processus X est conditionné à atteindre continûment Γ . Cette construction se fait en « intégrant contre la bonne mesure » la loi du *pont de premier passage du processus X , de longueur u , de 0 à $f(u)$* , autrement dit, en intégrant la loi du pont le long de la courbe Γ . Nous établissons en conclusion un lien entre la mesure de probabilité $\mathbb{P}^f$ ainsi obtenue et la mesure de probabilité $\mathbb{P}^C$, construite dans la Section 3.2.1 : la loi du processus (τ, H) sous la probabilité $\mathbb{P}^f$ est la même que sous la probabilité $\mathbb{P}^C$.

Pont de premier passage pour le processus X

Dans tout ce paragraphe, nous fixons un temps $u > 0$ et un niveau $x > 0$. Pour tout $t > 0$, nous notons g_t l'unique *temps d'atteinte du maximum passé avant t* qui est défini par

$$g_t := \sup\{s \leq t : X_s = \bar{X}_s\}.$$

Remarquons que l'hypothèse 0 est régulier pour $(0, \infty)$ pour le processus X assure que $g_t > 0$. Une première manière de décrire la loi du *pont de premier passage* est de considérer la loi du processus $(X_s, 0 \leq s \leq g_t)$ conditionnellement à l'événement $\{g_t = u, X_{g_t} = x\}$, pour un certain $t > 0$. Plus précisément, nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.2.3. *Soit $t > u$. Alors :*

- (i) *La loi du processus $(X_s, 0 \leq s \leq g_t)$ conditionnellement à $g_t = u$ et $X_{g_t} = x$ ne dépend pas de t .*
- (ii) *Cette loi conditionnelle est définie, pour tout $s < u$ et $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$, par*

$$\mathbb{P}(\Lambda_s, s < \tau_x^+ | g_t = u, X_{g_t} = x) = \frac{1}{v(u, x)} \mathbb{E} \left(v(u - s, x - X_s) \mathbb{I}_{\Lambda_s} \mathbb{I}_{\{s < \tau_x^+\}} \right). \quad (3.59)$$

Les points (i) et (ii) restent vrais pour $t = u$ si 0 n'est pas régulier pour $(-\infty, 0)$.

Notons que la démonstration de ce théorème repose sur le résultat relevant de la théorie des excursions obtenu par Chaumont [14], qui établit, sous nos hypothèses (0 est régulier pour $(0, \infty)$ et (τ, H) admet une densité v), l'expression suivante de la loi conjointe de (g_t, X_{g_t}) :

$$\mathbb{P}(g_t \in du, X_{g_t} \in dx) = v(u, x) n(t - u < \zeta) du dx + d_{\tau^*} \delta_{\{t\}}(du) v(t, x) dx, \quad (3.60)$$

où n est la mesure d'Itô des excursions en dehors de 0 du processus $\bar{X} - X$, voir Section 2.4.

Considérons à présent le processus $((t, X_t), t \geq 0)$ à valeurs dans $(0, \infty) \times \mathbb{R}$. Nous notons $\mathbb{P}_{(s,y)}$ la probabilité sous laquelle le processus $((v, X_v), v \geq 0)$ a la même loi que le processus $((s + v, y + X_v), v \geq 0)$ sous $\mathbb{P}$. De même, nous notons $\mathbb{E}_{(s,y)}$ l'espérance sous $\mathbb{P}_{(s,y)}$. Soit σ le premier temps en lequel le processus $((t, X_t), t \geq 0)$ quitte le domaine $R = [0, u] \times (-\infty, x] \setminus (u, x)$, i.e.

$$\sigma := \inf\{v > 0 : (v, X_v) \in R^c\}.$$

Remarquons que $\sigma = \tau_x^+ \wedge u$ et rappelons dans ce contexte la définition d'une fonction invariante pour le processus $((t, X_t), t \geq 0)$ tué au temps σ :

Définition 3.2.3. *(Fonction invariante). La fonction $h : R \rightarrow [0, \infty)$ est dite invariante pour le processus $((t, X_t), t \geq 0)$ tué au temps σ si pour tout $(s, y) \in R$ et $v \geq 0$,*

$$\mathbb{E}_{(s,y)}(h(v, X_v), v < \sigma) = h(s, y).$$

Rappelons que toute fonction h invariante est harmonique, i.e. vérifie de plus la propriété suivante : pour tout ouvert $O \subset \mathbb{R}^2$ tel que $\overline{O} \cap R$ est un ensemble compact non vide inclus dans R et pour tout $(s, y) \in [0, u) \times [0, x)$,

$$\mathbb{E}_{(s,y)}(h(T, X_T), T < \sigma) = h(s, y), \quad (3.61)$$

où $T = \inf\{t : (t, X_t) \in R \setminus O\}$. Nous identifions, grâce au Théorème 3.2.3, une fonction invariante pour le processus $((s, X_s), s \geq 0)$ tué au temps σ :

Corollaire 3.2.1. *La fonction $(s, y) \mapsto v(u - s, x - y)$ définie sur $R = [0, u] \times (-\infty, x] \setminus (u, x)$ est invariante (donc harmonique) pour le processus $((s, X_s), s \geq 0)$ tué au temps σ .*

Nous définissons à présent le h -transformé du processus de Markov fort $((t, X_t), t \geq 0)$ tué lorsqu'il quitte le domaine R . Nous notons $\mathbb{P}_{u,x}^b$ sa loi qui est définie, pour tout $s < u$, sur $\mathcal{F}_s$ par

$$\mathbb{P}_{u,x}^b(\Lambda_s) = \frac{1}{v(u, x)} \mathbb{E} \left(v(u - s, x - X_s) \mathbb{I}_{\Lambda_s} \mathbb{I}_{\{s < \tau_x^+\}} \right), \quad s < u, \Lambda_s \in \mathcal{F}_s. \quad (3.62)$$

Définition 3.2.4. (*Pont de premier passage*). Le processus $(X, \mathbb{P}_{u,x}^b)$ est appelé pont de premier passage du processus $(X, \mathbb{P})$, de longueur u , de 0 à x .

La propriété suivante justifie a posteriori la définition ci-dessus et montre par ailleurs que le niveau x est atteint continûment par le pont de premier passage $(X, \mathbb{P}_{u,x}^b)$.

Proposition 3.2.1. *Nous avons les assertions suivantes :*

- (i) *Le pont de premier passage $(X, \mathbb{P}_{u,x}^b)$ vérifie $\mathbb{P}_{u,x}^b(X_u = \bar{X}_u = x) = 1$.*
- (ii) *Le niveau x est atteint continûment par le pont de premier passage $(X, \mathbb{P}_{u,x}^b)$, i.e.*

$$\mathbb{P}_{u,x}^b(X_{u-} = X_u = \bar{X}_u = x, \bar{X}_s < x, 0 \leq s < u) = 1.$$

Remarquons que nous avons défini la loi du pont de premier passage $\mathbb{P}_{u,x}^b$ comme une h -transformée du processus bivarié $((s, X_s), s \geq 0)$ tué au temps σ . Par conséquent, le processus $((s, X_s), s \geq 0)$ sous $\mathbb{P}_{u,x}^b$ est un processus de Markov fort homogène. En revanche, le processus $(X_s)_{s \geq 0}$ sous $\mathbb{P}_{u,x}^b$ est également un processus de Markov fort, mais inhomogène.

Remarque 3.2.2. *Le Corollaire 3.2.1 permet de retrouver différemment le résultat de Silverstein [66] suivant. Soit $x > 0$ et w la densité de la mesure de renouvellement du processus des hauteurs d'échelle ascendant H . Si w est continue sur $(0, \infty)$, alors la fonction $y \mapsto w(x - y)$ est excessive et harmonique pour le processus de $(X, \mathbb{P})$ tué au temps τ_x^+ . Notons néanmoins que Silverstein montre ce résultat sans l'hypothèse de continuité de w .*

Processus de Lévy conditionné à être absorbé en son maximum par Γ

Nous pouvons à présent définir la loi du processus de Lévy $(X, \mathbb{P})$ conditionné à être absorbé en son maximum par la courbe Γ . Nous posons $(Y, Z) = (\tau, H)$ et nous appuyons sur les résultats obtenus pour les subordonateurs bivariés dans la Section 3.2.1. Ainsi, soit $h \in \mathcal{H}_{(\tau, H)}^f$ vérifiant (H) , i.e. harmonique pour le processus (τ, H) tué lorsqu'il quitte $\mathcal{D}$, strictement positive et finie. Soit $\mathbb{P}_{u,x}^b$ la loi telle que définie en (3.62). Nous définissons la mesure suivante

$$\mathbb{P}^f(\cdot) = \frac{1}{h(0, 0)} \int_{(0, \infty)} \mathbb{P}_{u, f(u)}^b(\cdot) v(u, f(u)) m(du). \quad (3.63)$$

Alors la mesure $\mathbb{P}^f$ est une mesure de probabilité sur $\Omega \cup \{\delta\}$. D'après la Proposition 3.2.1, le processus $(X, \mathbb{P}_{u, f(u)}^b)$ a pour temps de vie $\zeta = \inf\{t > 0 : X_t = f(t)\}$ et il en est donc de même pour le processus $(X, \mathbb{P}^f)$. Remarquons que nous avons $\zeta = u$, $\mathbb{P}_{u, f(u)}^b$ -p.s. et $\zeta \in (0, \infty)$, $\mathbb{P}^f$ -p.s.

Définition 3.2.5. (*Loi du processus de Lévy conditionné*). La loi de probabilité $\mathbb{P}^f$ est appelée loi du processus de Lévy $(X, \mathbb{P})$ conditionné à être absorbé en son maximum par la courbe Γ .

Cette terminologie trouve sa justification dans la Proposition 3.2.2 ci-dessous. Nous considérons la mesure de probabilité $\mathbb{P}^C$ définie dans la Section 3.2.1 par (3.56) en posant $(Y, Z) = (\tau, H)$. Dans ce cas $S' = \inf\{t : H_t \geq f(\tau_t)\}$ et le résultat suivant montre que la mesure de probabilité $\mathbb{P}^C$ s'obtient également à partir de la mesure de probabilité $\mathbb{P}^f$.

Proposition 3.2.2. *La loi du processus (τ, H) sous la probabilité $\mathbb{P}^f$ est la même que sous la probabilité $\mathbb{P}^C$.*

Si nous n'avons pas pu obtenir le processus conditionné à être absorbé en son maximum par Γ directement à l'aide d'une h -transformation de Doob, la Proposition 3.2.2 montre néanmoins que le conditionnement du processus X à être absorbé en son maximum tel que nous l'avons construit implique le conditionnement au sens de la h -transformation de Doob du subordonateur bivarié d'échelle ascendant à être absorbé par Γ .

Conditionnement d'un processus α -stable

Nous terminons cette section par un résultat en lien avec les ponts de premier passage utilisés précédemment. Dans ce paragraphe, nous obtenons une construction trajectorielle d'un processus α -stable conditionné à être absorbé par un niveau fixe. Notons que Chaumont et Uribe [20] ont obtenu une telle construction dans le cas particulier où X est un subordonateur α -stable.

Soit pour commencer $(X, \mathbb{P})$ un processus de Lévy et $x > 0$. D'après la Remarque 3.2.2, si la densité de la mesure de renouvellement du processus des hauteurs d'échelle ascendant de $(X, \mathbb{P})$, notée w , est continue alors la fonction $y \mapsto w(x - y)$ est excessive et harmonique pour le processus $(X, \mathbb{P})$ tué au temps τ_x^+ , voir Définitions 2.6.2 et 2.6.4 avec $B = [x, \infty)$. Nous notons alors $(X, \mathbb{P}_y^{x,*})$, $y < x$, le h -transformé du processus $(X, \mathbb{P}_y)$ tué au temps τ_x^+ qui est défini par

$$\mathbb{P}_y^{x,*}(\Lambda_t, t < \zeta) = \frac{1}{w(x - y)} \mathbb{P}_y(\Lambda_t, t < \tau_x^+), \quad \Lambda_t \in \mathcal{F}_t, y < x.$$

Nous rappelons, voir Chaumont [12] et Section 2.6.2, que ce processus, appelé processus $(X, \mathbb{P}_y)$ conditionné à être absorbé par $B = [x, \infty)$, vérifie

$$\mathbb{P}_y^{x,*}(X_t < x, 0 \leq t < \zeta = \inf\{t : X_{t-} = x\} < \infty) = 1,$$

et nous posons $\mathbb{P}^{x,*} := \mathbb{P}_0^{x,*}$.

Nous supposons à présent que le processus $(X, \mathbb{P})$ est α -stable d'indice $\alpha \in (0, 2]$. La propriété de scaling nous permet d'obtenir une construction du processus $(X, \mathbb{P}^{x,*})$ à partir des trajectoires du processus initial $(X, \mathbb{P})$.

Théorème 3.2.4. *Soit $(X, \mathbb{P})$ un processus α -stable d'indice $\alpha \in (0, 2]$. Nous posons*

$$K_x := \frac{x}{\bar{X}_{\tau_x^+ -}} = \frac{x}{X_{g_{\tau_x^+ -}}}.$$

Nous avons alors l'égalité en loi suivante :

$$\left(\left(K_x X_{t(K_x)^{-\alpha}}, t < g_{\tau_x^+ -} (K_x)^\alpha \right), \mathbb{P} \right) \stackrel{(loi)}{=} (X, \mathbb{P}^{x,*})$$

En particulier, la durée de vie ζ du processus $(X, \mathbb{P}^{x,*})$ a la même loi que la variable aléatoire $g_{\tau_x^+ -} (K_x)^\alpha$ sous $\mathbb{P}$.

Remarque 3.2.3. *Cette construction trajectorielle repose sur la propriété de scaling mais également sur le Théorème 3.2.5 ci-dessous qui permet de caractériser différemment que dans le Théorème 3.2.3 la loi du pont de premier passage du processus $(X, \mathbb{P})$ de longueur u , de 0 à x . Intuitivement, nous passons d'un conditionnement sur l'événement $\{X_u = \bar{X}_u = x\}$ avec une « indépendance temporelle » à un conditionnement sur le même événement avec une « indépendance spatiale ».*

Théorème 3.2.5. *Soit $z \geq x$. Alors :*

- (i) *La loi du processus $(X_s, 0 \leq s \leq g_{\tau_z^+ -})$ conditionnellement à $g_{\tau_z^+ -} = u$ et $X_{g_{\tau_z^+ -}} = x$ ne dépend pas de z .*
- (ii) *Cette loi conditionnelle est définie, pour tout $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$, $s \geq 0$, par*

$$\mathbb{P}(\Lambda_s, s < \tau_x^+ \mid g_{\tau_z^+ -} = u, \bar{X}_{\tau_z^+ -} = x) = \frac{1}{v(u, x)} \mathbb{E} \left(v(u - s, x - X_s) \mathbb{I}_{\Lambda_s} \mathbb{I}_{\{s < \tau_x^+\}} \right), \quad (3.64)$$

Chapter 4

Creeping through curves

In this chapter, we first recall and sometimes complete our main results about creeping which have been, for most of them, presented in Section 3.1 of chapter 3. We underline that there are in Section 3.1 geometric interpretations of the creeping probability of bivariate subordinator that do not appear in this chapter. In Section 4.2, we give two examples of application of theorem 4.1.1 and in Section 4.3, we apply our results to α -stable Ornstein-Uhlenbeck processes. We then prove all those results in Section 4.4, 4.5 and 4.6.

4.1 Main results

4.1.1 Creeping of bivariate subordinators through curves

A bivariate subordinator (Y, Z) is a possibly killed two dimensional Lévy process starting from 0, whose coordinates Y and Z are non decreasing. We set $Y_t = Z_t = \infty$, for $t \in [\zeta, \infty]$, where ζ is the lifetime of (Y, Z) . In what follows, the drift of a (univariate) subordinator Y will be denoted by d_Y . Moreover, a measure on some subset of $\mathbb{R}^d$ is said to be absolutely continuous if it is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on this subset.

Our first theorem concerns the creeping of a bivariate subordinator (Y, Z) through the curve defined by the graph of a continuous, non increasing function f . More specifically, we are interested in the probability that the path $\{(Y_t, Z_t) : t \geq 0\}$ crosses continuously the graph $\{(u, f(u)) : u \geq 0\}$ of f . This event can be written as $\{Z_S = f(Y_S)\}$, where $S = \inf\{t : Z_t > f(Y_t)\}$, see Figure 3.1. When it holds, we will say that (Y, Z) creeps through the graph of f .

Theorem 4.1.1. *Let (Y, Z) be a bivariate subordinator with semigroup $\mathbb{P}(Y_t \in dy, Z_t \in dz) = p_t(dy, dz)$, $t > 0$, $y, z \in [0, \infty)$, and let $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ be a continuous, non increasing function. Set $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$, $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ and define,*

$$S = \inf\{t : Z_t > f(Y_t)\}.$$

1. *Then almost surely, $0 < S < \infty$, $Y_{S-} < \infty$ and $Z_{S-} < \infty$. Assume moreover that the renewal measure $v(dy, dz) := \int_0^{+\infty} p_t(dy, dz) dt$ is absolutely continuous on $(0, \infty)^2$. Then the process (Y, Z) can neither jump on the graph $\{(u, f(u)) : u > 0\}$ nor jump from this graph, that is*

$$\mathbb{P}(Z_{S-} = f(Y_{S-}), \Delta(Y, Z)_S \neq 0) = \mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), \Delta(Y, Z)_S \neq 0) = 0,$$

where $\Delta(Y, Z)_S = (Y, Z)_S - (Y, Z)_{S-}$.

2. *Let u_0, u_1 be such that $0 \leq u_0 < u_1 \leq \infty$. Assume that $v(dy, dz)$ is absolutely continuous and that its density $(y, z) \mapsto v(y, z)$ is continuous on $(0, \infty)^2$. Then the creeping probability of (Y, Z) through the graph of f is given by,*

$$\mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), u_0 < Y_S < u_1) = d_Z \int_{u_0}^{u_1} v(u, f(u)) du - d_Y \int_{u_0}^{u_1} v(u, f(u)) df(u). \quad (4.1)$$

3. Assume that the measure $p_t(dy, dz)$ is absolutely continuous on $(0, \infty)^2$ for all $t > 0$ and that the densities $(t, y, z) \mapsto p_t(y, z)$ are continuous on $(0, \infty)^3$. Then for all t_0, t_1, u_0, u_1 such that $0 \leq t_0 < t_1 \leq \infty$ and $0 \leq u_0 < u_1 \leq \infty$,

$$\mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), u_0 < Y_S < u_1, t_0 < S < t_1) = d_Z \int_{u_0}^{u_1} \int_{t_0}^{t_1} p_t(u, f(u)) dt du - d_Y \int_{u_0}^{u_1} \int_{t_0}^{t_1} p_t(u, f(u)) dt df(u). \quad (4.2)$$

Let us note that the assumptions of Theorem 4.1.1 can be slightly changed by assuming that for fixed t_0 and t_1 such that $0 \leq t_0 < t_1 \leq \infty$, the measure $\int_{t_0}^{t_1} p_t(dy, dz) dt$ is absolutely continuous on $(0, \infty)^2$ and has a continuous density $\bar{v}(y, z)$ on this set. Then we obtain the following assertion that can, in a way, be regarded as an intermediate result between those of parts 2. and 3. of Theorem 4.1.1:

- 2'. For all u_0, u_1 such that $0 \leq u_0 < u_1 \leq \infty$,

$$\mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), u_0 < Y_S < u_1, t_0 < S < t_1) = d_Z \int_{u_0}^{u_1} \bar{v}(u, f(u)) du - d_Y \int_{u_0}^{u_1} \bar{v}(u, f(u)) df(u).$$

The proof of 2' is quite similar to this of part 3. of Theorem 4.1.1, see subsections 4.4.3 and 4.4.4, so it is omitted.

Let us now focus on two direct applications of Theorem 4.1.1. The first one gives the probability for the Euclidian norm $\|(Y, Z)\| = \sqrt{Y^2 + Z^2}$ of a bivariate subordinator to creep through a fixed level, that is $\mathbb{P}(\|(Y, Z)_{U_a}\| = a)$, for $a > 0$ and $U_a = \inf\{t : \|(Y, Z)_t\| > a\}$. This is simply obtained from Theorem 4.1.1 by choosing $f(y) = \sqrt{a^2 - y^2}$, so that $S = U_a$.

Corollary 4.1.1. *Let (Y, Z) be a bivariate subordinator. Then with the same notation and assumptions than in Theorem 4.1.1,*

$$\mathbb{P}(\|(Y, Z)\|_{U_a} = a) = d_Z \int_0^a v(u, \sqrt{a^2 - u^2}) du + d_Y \int_0^a \frac{uv(u, \sqrt{a^2 - u^2})}{\sqrt{a^2 - u^2}} du. \quad (4.3)$$

The second direct application concerns the probability for a (one dimensional) subordinator to creep through the graph of a continuous non increasing function. Let X be a subordinator whose semigroup has continuous densities $(t, x) \mapsto p_t(x)$ on $(0, \infty)^2$ and let us apply identity (4.1) to the bivariate subordinator $(Y_t, Z_t) = (t, X_t)$. The renewal measure of (Y, Z) is then $v(t, x) dt dx = p_t(x) dt dx$. Hence it satisfies the assumption of part 2. of Theorem 4.1.1. Moreover, since $Y_t = t$, one has $Y_S = \inf\{t : X_t > f(t)\}$. This leads to the following corollary.

Corollary 4.1.2. *Assume that X is a subordinator whose semigroup $\mathbb{P}(X_t \in dx)$ is absolutely continuous on $(0, \infty)$ for each $t > 0$, with continuous densities $(t, x) \mapsto p_t(x)$ on $(0, \infty)^2$. Set $T_f = \inf\{t > 0 : X_t > f(t)\}$, where f is as in the statement of Theorem 4.1.1. Then for all t_0 and t_1 such that $0 \leq t_0 < t_1 \leq \infty$,*

$$\mathbb{P}(X_{T_f} = f(T_f), t_0 < T_f < t_1) = d_X \int_{t_0}^{t_1} p_u(f(u)) du - \int_{t_0}^{t_1} p_u(f(u)) df(u). \quad (4.4)$$

Let us mention that the creeping probability for subordinators with no drift has been determined in [21] when f is differentiable. We will actually extend (4.4) to the creeping probability of any Lévy process at its supremum in the next section.

Note that if f is decreasing, then (4.1) can also be written as

$$\mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), u_0 < Y_S < u_1) = d_Y \int_{u_0}^{u_1} v(f^{-1}(u), u) du - d_Z \int_{u_0}^{u_1} v(f^{-1}(u), u) df^{-1}(u),$$

and this applies to (4.3) and (4.4).

The question of finding necessary and sufficient conditions for a bivariate subordinator (Y, Z) to creep through a given continuous, non increasing function is still open. In particular, nothing is known when the renewal measure $v(dy, dz)$ is not absolutely continuous. Looking at (4.1) in Theorem 4.1.1, one is tempted to think that when $d_Y > 0$ and $d_Z > 0$, the probability $\mathbb{P}(Z_S = f(Y_S))$ is always positive and when $d_Y = 0$ and $d_Z = 0$, this probability is always equal to 0. Let us also mention that the absolute continuity condition of Theorem 4.1.1 is discussed in Subsection 4.4.6.

It seems hardly possible to obtain an expression of the creeping probability when f is a general continuous function. When f is continuous and non decreasing we can still obtain an upper bound for the creeping probability as the following proposition shows.

Proposition 4.1.1. *Let (Y, Z) be a bivariate subordinator which satisfies the same assumptions as in part 2. of Theorem 4.1.1. Keep the same notation as in this theorem. Let $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ be a continuous non decreasing function such that $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) > 0$. Set $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$, $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ and define $S = \inf\{t : Z_t > f(Y_t)\}$.*

1. *Then $\mathbb{P}(S > 0) = 1$ and the process (Y, Z) can neither jump on the graph $\{(u, f(u)) : u > 0\}$ nor jump from this graph, that is*

$$\mathbb{P}(Z_{S-} = f(Y_{S-}), \Delta(Y, Z)_S \neq 0, Y_S < \infty) = \mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), \Delta(Y, Z)_S \neq 0, Y_S < \infty) = 0.$$

2. *Let u_0, u_1 be such that $0 \leq u_0 < u_1 \leq \infty$. Then the creeping probability of (Y, Z) through the graph of f is bounded from above as follows,*

$$\mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), u_0 < Y_S < u_1) \leq d_Z \int_{u_0}^{u_1} v(u, f(u)) du. \quad (4.5)$$

Proposition 4.1.1 implies that when $d_Z = 0$, the process (Y, Z) never creeps through the graph of any continuous non decreasing function. This result and its consequence in Proposition 4.1.2 will be useful for our application to Ornstein-Uhlenbeck processes in Section 4.3.

4.1.2 Creeping of real Lévy processes at their supremum

Let us now consider a non killed real Lévy process X . We will always assume in the sequel that $X_0 = 0$, a.s. Since our interest lies in creeping upward of X , it is natural to assume throughout this paper that $-X$ is not a subordinator. Moreover the case of subordinators has already been dealt with in Corollary 4.1.2. Therefore in this subsection, we will assume that $|X|$ is not a subordinator. We write $\overline{X}$ for the supremum process, that is,

$$\overline{X}_t = \sup_{s \leq t} X_s, \quad t \geq 0.$$

Then let us first recall a few basic definitions. It is well known that the reflected process $\overline{X} - X$ is strongly Markovian under $\mathbb{P}$. Let L be the local time at 0 of $\overline{X} - X$ (a proper definition is given in Subsection 4.5.1) and denote by (τ, H) the upward ladder process of X , that is the bivariate Lévy process whose coordinates are the following (possibly killed) subordinators:

$$\tau_t = \inf\{s : L_s > t\} \quad \text{and} \quad H_t = X_{\tau_t}, \quad t \geq 0,$$

where $\tau_t = H_t = \infty$, for $t \geq L_\infty$. The process τ (resp. H) is called the upward ladder time (resp. height) process of X . We will denote by d_τ and d_H their respective drift coefficients. Let us introduce the renewal measure U on $[0, \infty)^2$ of the ladder process (τ, H) , that is,

$$U(dt, dh) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\tau_u \in dt, H_u \in dh) du.$$

We specify that when the measure $U(dt, dh)$ is absolutely continuous on $(0, \infty)^2$, its density will be denoted by $q_t^*(h)$. This notation may seem unnatural but it comes from the fact that this density corresponds to the entrance law of the reflected excursions, see Subsection 4.5.1, which is thus noted in older references, see [13] and [16] for instance.

Throughout this paper, for any function $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, we set

$$T_f := \inf\{t > 0 : X_t > f(t)\}.$$

When a Lévy process X satisfies $\mathbb{P}(X_{T_f} = \bar{X}_{T_f} = f(T_f), t_0 < T_f < t_1) > 0$, we will say that X creeps at its supremum through the function f over the interval (t_0, t_1) . Omission of (t_0, t_1) will simply mean that X creeps over the whole half line $(0, \infty)$, see Figure 3.3. The following result gives an expression of the probability of this event when f is a continuous, non increasing function.

Theorem 4.1.2. *Let X be a real Lévy process and $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ be a continuous, non increasing function. Assume that the renewal measure $U(dt, dx)$ of the ladder process (τ, H) has a continuous density $(t, x) \mapsto q_t^*(x)$ on $(0, \infty)^2$.*

1. *Then $\mathbb{P}(T_f > 0) = 1$ and the process X can neither jump on the graph $\{(u, f(u)) : u > 0\}$ nor jump from this graph, that is*

$$\mathbb{P}(X_{T_f-} = f(T_f) < X_{T_f}, T_f < \infty) = \mathbb{P}(X_{T_f-} < X_{T_f} = f(T_f), T_f < \infty) = 0.$$

2. *The process X creeps at its supremum through f if and only if its ladder process (τ, H) creeps through the graph of f . Moreover, for all t_0 and t_1 such that $0 \leq t_0 < t_1 \leq \infty$,*

$$\mathbb{P}(X_{T_f} = \bar{X}_{T_f} = f(T_f), t_0 < T_f < t_1) = d_H \int_{t_0}^{t_1} q_u^*(f(u)) du - d_\tau \int_{t_0}^{t_1} q_u^*(f(u)) df(u). \quad (4.6)$$

The creeping probability of part 2. of Theorem 4.1.2 reveals two types of creeping at the supremum, each of which corresponds to one of the two terms involved. When $d_H > 0$, the process creeps upward either continuously (in absence of positive jumps) or through an accumulation of jumps of H as in the case of a fixed barrier. In the case where $d_\tau > 0$ (which is equivalent to the fact that 0 is not regular for $(-\infty, 0)$), another type of creeping occurs. Then the process creeps forward through an accumulation of jumps of τ provided f decreases at the creeping time. Recall that the later jumps correspond to the lengths of the excursions of $\bar{X} - X$. This new kind of creeping happens as if f were acting as a vertical barrier.

We point out that the assumption of absolute continuity in part 2. of the above result is not as strong as it may appear. Indeed, we will see in Proposition 4.5.1, that it is satisfied whenever the transition semigroup of X admits densities, $x \mapsto p_t(x)$, $x \in \mathbb{R}$, which are bounded for all $t > 0$, and for all $c \geq 0$, the process $(|X_t - ct|, t \geq 0)$ is not a subordinator. Moreover, from the same proposition, q_t^* is positive on $(0, \infty)$, for all $t > 0$, which ensures the positivity of the creeping probability (4.6) whenever $d_H > 0$ or $d_\tau > 0$ and f is decreasing. On the other hand, when the assumption of Theorem 4.1.2 is not satisfied, we can still expect that the process creeps at its supremum through f with positive probability, but finding necessary and sufficient conditions for this to hold is an open question which is closely related to the question raised by Theorem 4.1.1, see the discussion

after Corollary 4.1.2.

Recall from (3.3) in [16] that the function $x \mapsto u(x) = \int_0^\infty q_t^*(x) dt$ is the potential density of H (this is true by definition when X is a subordinator since $q_t^*(x) = p_t(x)$). Hence by taking $f \equiv x$ in the statement of the above theorem, as well as in Corollary 4.1.2, we recover the classical creeping result for Lévy processes recalled in the introduction.

When $\mathbb{P}(X_{T_f} = f(T_f), t_0 < T_f < t_1) > 0$ we will say that X creeps through the function f (over the interval (t_0, t_1)). Finding an expression for the probability $\mathbb{P}(X_{T_f} = f(T_f), t_0 < T_f < t_1)$ seems more complicated than for $\mathbb{P}(X_{T_f} = \bar{X}_{T_f} = f(T_f), t_0 < T_f < t_1)$. Indeed, in the second case, we only need to ensure that X stays below its past supremum before time T_f , whereas in the first case the condition is that the whole path of X stays below the curve of f before time T_f . Therefore, the expression of this probability must strongly depend on the behaviour of whole paths of X with respect to the curve of f before time T_f and it seems hardly possible to perform this computation for a general function. However the example below and Corollary 4.1.3 give conditions for X to creep through a function f in some particular cases.

Let X be the Lévy process $X_t = S_t - at$, $t \geq 0$, where S is a subordinator without drift and $a > 0$. Then 0 is not regular for $(0, \infty)$ and it is regular for $(-\infty, 0)$, so that $d_H = d_\tau = 0$ (see Subsection 4.5.1) and from Theorem 4.1.2, the process does not creep at its supremum through any continuous non increasing function. However, it does creep through the function $f(t) = 1 - t$, since for any $a < 1$, the subordinator with positive drift $S_t + (1 - a)t$ creeps through the level 1. This simply means that the creeping time of X through f is a.s. not a time at which X reaches its past supremum. From this example, we can build a more general result regarding the probability to creep through a function (not necessarily at the supremum) of Lévy processes with bounded variation.

Corollary 4.1.3. *Let X be a Lévy process with bounded variation and nonnegative drift. Assume that for all $c \geq 0$, the process $(|X_t - ct|, t \geq 0)$ is not a subordinator and that for all $t > 0$, the distribution $\mathbb{P}(X_t \in dx)$ is absolutely continuous on $\mathbb{R}$ with a bounded density. Let $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ be a function such that for some $0 \leq t_0 < t_1 \leq \infty$ and $a > 0$, $f(t) + at$ is positive, continuous and non increasing over the interval (t_0, t_1) . Then X creeps through f over the interval (t_0, t_1) , that is*

$$\mathbb{P}(X_{T_f} = f(T_f), t_0 < T_f < t_1) > 0.$$

The above corollary will be useful for our application to the creeping of Ornstein-Uhlenbeck processes in Section 4.3.

From Theorem 4.1.2, for X to creep at its supremum through f , it is necessary that $d_H > 0$ or $d_\tau > 0$. In particular, if 0 is not regular for $[0, \infty)$, then $d_\tau = d_H = 0$ (see Subsection 4.5.1) and X never creeps at its supremum through a continuous non increasing function. On the other hand, when X has unbounded variation, $d_\tau = 0$ and hence the process can creep at its supremum through f only if $d_H > 0$. We conjecture that when X has unbounded variation and $d_H = 0$, then X never creeps through any continuous, non increasing function. Indeed, from the results of this section it is reasonable to think that the only chance for a Lévy process X to creep through such a function is that either $d_H > 0$ or X has bounded variation.

We end this subsection with the case of a continuous non decreasing function.

Proposition 4.1.2. *Let X be a real Lévy process and $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ be a continuous, non decreasing function such that $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) > 0$. Assume that the renewal measure $U(dt, dx)$ of the ladder process (τ, H) has a continuous density $(t, x) \mapsto q_t^*(x)$ on $(0, \infty)^2$.*

1. Then $\mathbb{P}(T_f > 0) = 1$ and the process X can neither jump on the graph $\{(u, f(u)) : u > 0\}$ nor jump from this graph, that is

$$\mathbb{P}(X_{T_f-} = f(T_f) < X_{T_f}, T_f < \infty) = \mathbb{P}(X_{T_f-} < X_{T_f} = f(T_f), T_f < \infty) = 0.$$

2. For all t_0 and t_1 such that $0 \leq t_0 < t_1 \leq \infty$,

$$\mathbb{P}(X_{T_f} = f(T_f), t_0 < T_f < t_1) \leq d_H \int_{t_0}^{t_1} q_u^*(f(u)) du.$$

Proposition 4.1.2 implies that a Lévy process such that $d_H = 0$ never creeps through a continuous non decreasing function. Note that since f is non decreasing, when the process X creeps through f , it necessarily creeps at its supremum, that is $\{X_{T_f} = f(T_f)\} = \{X_{T_f} = \bar{X}_{T_f} = f(T_f)\}$.

4.1.3 Creeping of Lévy processes conditioned to stay positive

Recall that X is a non killed real Lévy process such that $X_0 = 0$, a.s. Moreover, we assume again that $|X|$ is not a subordinator. The process X conditioned to stay positive is a Doob h -transform of the process killed at its first hitting time of the negative half-line. Let us briefly recall the definition of this process of which one will find a more complete description in [15]. Let us set,

$$\tau_{-x}^- = \inf\{t > 0 : X_t < -x\},$$

for $x \geq 0$ and let $h(x) = \int_0^\infty \mathbb{P}(H_t^* \in [0, x]) dt$ be the renewal function of the downward ladder height process H^* of X (see Subsection 4.5.1 for a full definition). Then the process X conditioned to stay positive is a (possibly non conservative) strong Markov process with state space $(0, \infty)$, which we denote by $X^{x,\uparrow}$ when it is issued from x and whose semigroup is given by

$$\mathbb{P}(X_t^{x,\uparrow} \in dy) = \frac{1}{h(x)} \mathbb{P}(h(x + X_t) \in dy, t < \tau_{-x}^-), \quad x, y > 0.$$

It is proved in [15] that when 0 is regular for $(0, \infty)$ and X , the process $X^{x,\uparrow}$ converges weakly in the Skorohod's space, as x tends to 0 toward a non degenerate process which will be denoted here by $X^\uparrow$. This process satisfies $X_0^\uparrow = 0$, a.s. and if moreover $\limsup_{t \rightarrow \infty} X_t = \infty$, a.s., then $(X^{x,\uparrow}, x > 0)$ is conservative and $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t^\uparrow = \infty$, a.s. Let us now define the future infimum process of $X^\uparrow$ and its last passage time below the graph of a function f respectively by,

$$\underline{X}_t^\uparrow = \inf_{s \geq t} X_s^\uparrow, \quad t \geq 0 \quad \text{and} \quad \sigma_f = \sup\{t : X_t^\uparrow \leq f(t)\}.$$

Theorem 4.1.3. *Let X be a real Lévy process such that $\limsup_{t \rightarrow \infty} X_t = \infty$, a.s. and assume that 0 is regular for $(0, \infty)$. Assume moreover that the renewal measure $U(dt, dx)$ of the ladder process (τ, H) has a continuous density $(t, x) \mapsto q_t^*(x)$ on $(0, \infty)^2$. Let $X^\uparrow$ be the process X conditioned to stay positive and let $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ be a continuous, non increasing function.*

1. Then $0 < \sigma_f < \infty$, a.s. and at time σ_f , the process $X^\uparrow$ can neither jump on the graph $\{(u, f(u)) : u > 0\}$ nor jump from this graph, that is

$$\mathbb{P}(X_{\sigma_f-}^\uparrow = f(\sigma_f) < X_{\sigma_f}^\uparrow) = \mathbb{P}(X_{\sigma_f-}^\uparrow < X_{\sigma_f}^\uparrow = f(\sigma_f)) = 0.$$

2. For all t_0 and t_1 such that $0 \leq t_0 < t_1 \leq \infty$,

$$\mathbb{P}(X_{\sigma_f}^\uparrow = \underline{X}_{\sigma_f}^\uparrow = f(\sigma_f), t_0 < \sigma_f < t_1) = d_H \int_{t_0}^{t_1} q_u^*(f(u)) du - d_\tau \int_{t_0}^{t_1} q_u^*(f(u)) df(u).$$

It appears that the creeping probability of $X^\uparrow$ at its future infimum through the graph of f has the same expression as the creeping probability of X at its past supremum stated in Theorem 4.1.2. This can be explained by the following time reversal property

$$[(X_{T_f} - X_{(T_f-t)-}, 0 \leq t \leq T_f) | X_{T_f} = \bar{X}_{T_f}] \stackrel{(law)}{=} [(X_t^\uparrow, 0 \leq t \leq \sigma_f) | X_{\sigma_f}^\uparrow = \underline{X}_{\sigma_f}^\uparrow],$$

where $X_{0-} = X_0 = 0$. The later identity in law is itself a consequence of the proof of Theorem 4.1.3, see Section 4.6.

4.2 Examples

Illustrating Theorem 4.1.1 with a bivariate subordinator (Y, Z) such that none of the coordinates Y and Z is a pure drift and whose renewal density measure is explicit seems to be quite challenging. Our only examples bear on Corollary 4.1.2, that is the case when one of the subordinators is a pure drift.

a) Let X be a stable subordinator with index $1/2$. Then for $t > 0$, X_t has density

$$p_t(x) = \frac{t}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-\frac{t^2}{2x}} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x).$$

From Corollary 4.1.2, the distribution of the creeping time is then

$$\mathbb{P}(X_{T_f} = f(T_f), T_f \in dt) = -\frac{t}{\sqrt{2\pi f(t)^3}} e^{-t^2/(2f(t))} df(t), \quad t > 0.$$

Taking $f(t) = 1/t^2$ gives the probability that X creeps through f over the interval $(0, \infty)$ and the distribution of the creeping time conditionally on this event:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{T_f} = f(T_f)) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty t e^{-t^4/2} dt = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(T_f \in dt | X_{T_f} = f(T_f)) &= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} t e^{-t^4/2} dt, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Our second example illustrates Theorem 4.1.2.

b) Standard Brownian motion creeping at its supremum. When X is standard Brownian motion, 0 is regular for both half-lines $(-\infty, 0)$ and $(0, \infty)$ and hence $d_\tau = 0$. On the other hand, our normalisation of the local time L (see Subsection 4.5.1) gives $d_H = 1/\sqrt{2}$ and for $t > 0$,

$$q_t^*(x) = \frac{x}{\sqrt{\pi t^3}} e^{-x^2/2t} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x).$$

From part 2. of Theorem 4.1.2, the distribution of the creeping time at the supremum with respect to any continuous non increasing function $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ is given by

$$\mathbb{P}(X_{T_f} = \bar{X}_{T_f} = f(T_f), T_f \in dt) = \frac{f(t)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-f(t)^2/2t} dt, \quad t > 0.$$

For instance, the probability for the standard Brownian motion to creep at its supremum through the function $f(t) = 1/t$ on $(0, \infty)$ and the distribution of the creeping time T_f conditionally on this event are respectively,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{T_f} = \bar{X}_{T_f} = f(T_f)) &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t^5}} e^{-1/2t^3} dt = \frac{1}{3} \\ \mathbb{P}(T_f \in dt | X_{T_f} = \bar{X}_{T_f} = f(T_f)) &= \frac{3}{\sqrt{2\pi t^5/2}} e^{-1/2t^3} dt, \quad t > 0. \end{aligned}$$

A slight generalisation of the above computation can be obtained by considering the case of Brownian motion with drift $\mu \in \mathbb{R}$. The expression of $q_t^*(x)$ is then $\frac{x}{\sqrt{\pi t^3}} e^{-(x+\mu)^2/2t}$. The density $(t, x) \mapsto q_t^*(x)$ of the renewal measure can actually be made explicit in very few cases and the few known expressions are too complicated to allow the calculation of the creeping probability.

Actually both examples a) and b) are closely related to each other. Indeed, for standard Brownian motion, the ladder process (τ, H) is such that τ is a stable subordinator with index $1/2$ and H is a pure drift process, that is $H_t = d_H \cdot t$, $t \geq 0$. So, example b) is also a consequence of Corollary 4.1.2.

4.3 Application : creeping of α -stable Ornstein-Uhlenbeck processes

Let X be a non killed real Lévy process such that $|X|$ is not a subordinator and $X_0 = 0$, a.s. The Ornstein-Uhlenbeck process starting from $z \in \mathbb{R}$ and driven by X is the unique strong solution of the following stochastic differential equation:

$$Z_t = z + X_t - \gamma \int_0^t Z_s ds, \quad t \geq 0, \quad \gamma > 0. \quad (4.7)$$

It is explicitly given by $Z_t = e^{-\gamma t}(z + \int_0^t e^{\gamma s} dX_s)$. For $x \in \mathbb{R}$, we set $T_x^+ = \inf\{t : Z_t > x\}$ and $T_x^- = \inf\{t : Z_t < x\}$ and we say that Z creeps through the state $x \neq z$ if either $x > z$ and $\mathbb{P}(Z_{T_x^+} = x, T_x^+ < \infty) > 0$ or $x < z$ and $\mathbb{P}(Z_{T_x^-} = x, T_x^- < \infty) > 0$. We are interested here in the creeping property of Z , when X is a stable Lévy process with index $\alpha \in (0, 1)$. Actually stable Lévy processes never creep across any level. Creeping of an Ornstein-Uhlenbeck process Z driven by a stable Lévy process with index $\alpha \in (0, 1)$ is actually due to the smoothing effect of the functional $t \mapsto \int_0^t Z_s ds$, as the proof of the next proposition shows. Recall that when X is stable with any index $\alpha \in (0, 2]$, Z fulfils the following representation:

$$(Z_t, t \geq 0) \stackrel{(law)}{=} \left(e^{-\gamma t} \left(z + X_{\frac{e^{\alpha\gamma t} - 1}{\alpha\gamma}} \right), t \geq 0 \right), \quad (4.8)$$

see for instance E 18.17, p.116 in [65]. When moreover X is symmetric and $\alpha \in (0, 1)$, it is proved in [35] (see Proposition 12 on p.618) that Z creeps through $x \in (z, 0)$ when $z < 0$ and through $x \in (0, z)$, when $z > 0$. Proposition 4.3.1 below provides an extension of this result.

Proposition 4.3.1. *Let Z be the Ornstein-Uhlenbeck process solution of (4.7) with $\gamma > 0$, starting point $z \in \mathbb{R}$ and driven by a stable Lévy process X with index $\alpha \in (0, 1)$ such that $|X|$ is not a subordinator.*

1. *If $z \in (-\infty, 0)$, then Z creeps through x if and only if $x \in (z, 0)$.*
2. *If $z \in (0, \infty)$, then Z creeps through x if and only if $x \in (0, z)$.*
3. *If $z = 0$, then Z does not creep through any level.*

Proof. From the representation (4.8), we can write by setting $s = (e^{\alpha\gamma t} - 1)/(\alpha\gamma)$,

$$\begin{aligned} T_x^+ &= \frac{1}{\alpha\gamma} \log(\alpha\gamma \inf\{s : X_s > x(\alpha\gamma s + 1)^{1/\alpha} - z\} + 1) \\ T_x^- &= \frac{1}{\alpha\gamma} \log(\alpha\gamma \inf\{s : X_s < x(\alpha\gamma s + 1)^{1/\alpha} - z\} + 1), \end{aligned}$$

so that Z creeps through x if and only if X creeps through $f(s) = x(\alpha\gamma s + 1)^{1/\alpha} - z$.

Let $z \in (-\infty, 0)$ and $x \in (z, 0)$. Then recall that X has bounded variation and zero drift and that for all $t > 0$, $\mathbb{P}(X_t \in dx)$ is absolutely continuous on $\mathbb{R}$ with a bounded density, see Theorem

53.1, p.404 in [65]. Therefore, X satisfies the conditions of Corollary 4.1.3. On the other hand, note that $f(0) = x - z > 0$ and that f is continuous. Moreover, $f(s) + as$ is non increasing on $(0, \infty)$ whenever $0 < a < -x\gamma$. Let us take such a value a and note that there is $t_1 > 0$ such that $f(s) + as$ is positive on $(0, t_1)$. Then the result follows from Corollary 4.1.3.

If $z < 0 \leq x$, then $f(0) > 0$ and f is non decreasing. Since X satisfies $d_H = 0$ (H is a stable subordinator), the result follows from Proposition 4.1.2.

If $x < z < 0$ then $f(0) < 0$ and f is non increasing. The result follows again from Proposition 4.1.2 by considering $-X$ and $-f$.

The proof of 2. is deduced from this of 1. by considering the Ornstein-Uhlenbeck process $-Z$ which is solution of (4.7) with $\gamma > 0$, starting point $-z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ and driven by the stable process $-X$.

If $z = 0$ and $x > 0$, then f is non decreasing and the result follows again from Proposition 4.1.2. For $x < 0$, we derive the result by considering $-Z$ from the same argument as above. $\square$

Looking at the previous proof and in accordance with the remarks made in Subsection 4.1.2, we conjecture that when $\alpha > 1$, since X has unbounded variation, the process Z never creeps across any level. However, as proved in [20], points are not polar for Z when the leading Lévy process is stable with any index $\alpha \in (0, 2]$.

Finally let us mention that dealing with the creeping through $x \in (z, 0)$ of an Ornstein-Uhlenbeck process Z starting from $z < 0$ and driven by any Lévy process X would require to study the creeping property of X through the continuous non increasing adapted functional $t \mapsto x - z + \gamma \int_0^t Z_s ds$, as equation (4.7) shows. This raises the more general question of the creeping of a Lévy process through any adapted, continuous and non increasing functional.

4.4 Proof of Theorem 4.1.1 and Proposition 4.1.1

Let us note that from monotone convergence, we do not lose any generality by proving Theorem 4.1.1 in the case where $t_0, u_0 > 0$ and $t_1, u_1 < \infty$. Therefore in all this section, t_0, u_0, t_1 and u_1 will be chosen so that

$$0 < u_0 < u_1 < \infty \quad \text{and} \quad 0 < t_0 < t_1 < \infty.$$

4.4.1 Proof of the first assertion in Theorem 4.1.1

The following lemma actually shows a much stronger result than the first assertion of Theorem 4.1.1. It will also be used in further results.

Lemma 4.4.1. *Let $\mathcal{L}$ be any $\mathbb{R}^d$ -valued Lévy process with infinite lifetime and set $\Delta\mathcal{L}_t = \mathcal{L}_t - \mathcal{L}_{t-}$, $t > 0$. Let $G : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ be any Borel function such that for all $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{P}(G(\mathcal{L}_t + x) = 0) = 0$, for λ -a.e. $t \geq 0$ (λ being the Lebesgue measure on $[0, \infty)$). Then*

$$\mathbb{P}(\exists t \geq 0, G(\mathcal{L}_{t-}) = 0, \Delta\mathcal{L}_t \neq 0) = \mathbb{P}(\exists t \geq 0, G(\mathcal{L}_t) = 0, \Delta\mathcal{L}_t \neq 0) = 0. \quad (4.9)$$

Proof. Recall that $t \mapsto \Delta\mathcal{L}_t$ is a Poisson point process with characteristic measure ν , where ν is the Lévy measure of $\mathcal{L}$. Then from the compensation formula for Poisson point processes, for every $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sum_{t \geq 0} \mathbb{I}_{\{G(\mathcal{L}_{t-})=0\}} \mathbb{I}_{\{\|\Delta\mathcal{L}_t\| > \varepsilon\}} \right) &= \mathbb{E} \left(\int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{I}_{\{G(\mathcal{L}_{t-})=0\}} \mathbb{I}_{\{\|x\| > \varepsilon\}} \nu(dx) \right) \\ &= \int_{\{\|x\| > \varepsilon\}} \nu(dx) \mathbb{E} \left(\int_0^\infty \mathbb{I}_{\{G(\mathcal{L}_t)=0\}} dt \right) \\ &= \nu(\{x : \|x\| > \varepsilon\}) \mathbb{E} \left(\int_0^\infty \mathbb{I}_{\{G(\mathcal{L}_t)=0\}} dt \right). \end{aligned}$$

But from our assumption, the last term is 0. Then the equality

$$\mathbb{P}(\exists t \geq 0, G(\mathcal{L}_{t-}) = 0, \Delta \mathcal{L}_t \neq 0) = 0$$

in (4.9) is obtained by taking ε to 0 and using monotone convergence. We prove the second equality through the same argument by writing

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sum_{t \geq 0} \mathbb{I}_{\{G(\mathcal{L}_{t-} + \Delta \mathcal{L}_t) = 0\}} \mathbb{I}_{\{\|\Delta \mathcal{L}_t\| > \varepsilon\}} \right) &= \int_0^\infty dt \mathbb{E} \left(\int_{\{x: \|x\| > \varepsilon\}} \nu(dx) \mathbb{I}_{\{G(\mathcal{L}_{t-} + x) = 0\}} \right) \\ &= \int_{\{x: \|x\| > \varepsilon\}} \nu(dx) \int_0^\infty \mathbb{P}(G(\mathcal{L}_t + x) = 0) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

and the conclusion follows as for the first equality. $\square$

Let us now prove the first assertion of Theorem 4.1.1. First of all, since f is positive and non increasing, it is clear that $0 < S < \infty$, a.s., so that Y_{S-} , Z_{S-} are well defined and $Y_{S-} < \infty$ and $Z_{S-} < \infty$, a.s. Then let us apply Lemma 4.4.1 to the Lévy process $\mathcal{L} = (Y, Z)$ and the Borel function $G(y, z) = f(y) - z$ under the assumption that $\mathcal{L}$ has infinite lifetime. The condition: for all $x = (y, z) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{P}(G(\mathcal{L}_t + x) = 0) = \mathbb{P}(f(Y_t + y) = Z_t + z) = 0$, for λ -a.e. $t \geq 0$ is satisfied since, by assumption, the renewal measure $\nu(dy, dz)$ of (Y, Z) is absolutely continuous. Then part 1. of Theorem 4.1.1 follows from Lemma 4.4.1 and the equalities

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_{S-} = f(Y_{S-}), \Delta(Y, Z)_S \neq 0) &= \mathbb{P}(\exists t \geq 0, Z_{t-} = f(Y_{t-}), \Delta(Y, Z)_t \neq 0) \\ \mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), \Delta(Y, Z)_S \neq 0) &= \mathbb{P}(\exists t \geq 0, Z_t = f(Y_t), \Delta(Y, Z)_t \neq 0). \end{aligned}$$

Now let $\tilde{\mathcal{L}} = (\tilde{Y}, \tilde{Z})$ be a Lévy process with infinite lifetime such that $\mathcal{L}$ is obtained by killing $\tilde{\mathcal{L}}$ at an independent exponential time $\mathbf{e}$. Denote by ζ the lifetime of $\mathcal{L}$. Then,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_{S-} = f(Y_{S-}), \Delta(Y, Z)_S \neq 0) &= \mathbb{P}(\exists t \leq \zeta, Z_{t-} = f(Y_{t-}), \Delta \mathcal{L}_t \neq 0) \\ &= \mathbb{P}(\exists t \leq \mathbf{e}, \tilde{Z}_{t-} = f(\tilde{Y}_{t-}), \Delta \tilde{\mathcal{L}}_t \neq 0) \\ &\leq \mathbb{P}(\tilde{Z}_{S-} = f(\tilde{Y}_{S-}), \Delta(\tilde{Y}, \tilde{Z})_S \neq 0) = 0. \end{aligned}$$

The case of $\mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), \Delta(Y, Z)_S \neq 0) = 0$ is handled in the same way.

4.4.2 Preliminary lemmas

Recall that (Y, Z) is a bivariate subordinator as defined in Subsection 4.1.1. Its semigroup and its renewal measure are respectively denoted by $p_t(dy, dz)$ and $\nu(dy, dz)$. In all the remainder of this chapter we set for all $y, z \geq 0$,

$$T_y^Y = \inf\{t : Y_t > y\} \quad \text{and} \quad T_z^Z = \inf\{t : Z_t > z\}.$$

Lemma 4.4.2. *Assume that the renewal measure $\nu(dy, dz)$ is absolutely continuous on $(0, \infty)^2$ and let us denote by $v(y, z)$ its density, then for $y, z \in (0, \infty)$,*

$$\mathbb{P}(Y_{T_y^Y} = y, Z_{T_y^Y} \in dz) dy = d_Y \nu(y, z) dy dz \quad (4.10)$$

$$\mathbb{P}(Z_{T_z^Z} = z, Y_{T_z^Z} \in dy) dz = d_Z \nu(y, z) dy dz. \quad (4.11)$$

Assume that for all $t > 0$, the semigroup $p_t(dy, dz)$ is absolutely continuous on $(0, \infty)^2$ and let us denote by $p_t(y, z)$ its densities, then for $t, y, z \in (0, \infty)$,

$$\mathbb{P}(Y_{T_y^Y} = y, Z_{T_y^Y} \in dz, T_y^Y \in dt) dy = d_Y p_t(y, z) dt dy dz \quad (4.12)$$

$$\mathbb{P}(Z_{T_z^Z} = z, Y_{T_z^Z} \in dy, T_z^Z \in dt) dz = d_Z p_t(y, z) dt dy dz. \quad (4.13)$$

Proof. Let us prove (4.10) and (4.12). Note that the time T_y^Y satisfies $d_Y T_y^Y = \int_0^y \mathbb{I}_{\{Y_{T_s^Y}=s\}} ds$, for all $y \geq 0$. Hence for $\alpha, \beta, \gamma > 0$,

$$\begin{aligned} & \int_{y=0}^{\infty} \int_{t,z \in [0,\infty)^2} e^{-\alpha y - \beta z - \gamma t} \mathbb{P}(Y_{T_y^Y} = y, Z_{T_y^Y} \in dz, T_y^Y \in dt) dy \\ &= \mathbb{E} \left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha Y_{T_y^Y} - \beta Z_{T_y^Y} - \gamma T_y^Y} d_Y dT_y^Y \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha Y_t - \beta Z_t - \gamma t} d_Y dt \right) \\ &= \int_{y=0}^{\infty} \int_{t,z \in [0,\infty)^2} e^{-\alpha y - \beta z - \gamma t} d_Y p_t(dy, dz) dt, \end{aligned}$$

which proves both identities. The proof of (4.11) and (4.13) is the same. $\square$

Let us mention that expressions similar to (4.10) and (4.11) have been obtained in Section 4 of [31], see Lemma 4.2 therein. We also use Theorem 4.2 in [31] for the proof of the next Lemma.

Lemma 4.4.3. *Assume that the renewal measure $v(dy, dz)$ is absolutely continuous on $(0, \infty)^2$ and that its density $(y, z) \mapsto v(y, z)$ is locally bounded. Then there are functions ε_1 and ε_2 satisfying $\varepsilon_1(h), \varepsilon_2(h) \rightarrow 0$, as $h \rightarrow 0$ and such that for all $h \in (0, u_1 - u_0)$ and $u \in [u_0, u_1 - h]$,*

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(Y_{T_{u+h}^Y-} \in (u, u+h), Z_{T_{u+h}^Y-} \in (f(u+h), f(u))) \leq h\varepsilon_1(h), \\ & \mathbb{P}(Z_{T_{f(u)}^Z-} \in (f(u+h), f(u)), Y_{T_{f(u)}^Z-} \in (u, u+h)) \leq h\varepsilon_2(h). \end{aligned}$$

Proof. Let us denote by π_Y and π_Z the Lévy measures of Y and Z and set $\bar{\pi}_Y(y) = \pi_Y(y, \infty)$ and $\bar{\pi}_Z(z) = \pi_Z(z, \infty)$. Recall that ζ is the lifetime of (Y, Z) and let us denote by $q \in [0, \infty)$ its rate. Applying Theorem 4.2 in [31] we obtain,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(Y_{T_{u+h}^Y-} \in (u, u+h), Z_{T_{u+h}^Y-} \in (f(u+h), f(u)), T_{u+h}^Y < \zeta) \\ &= \int_{z=f(u+h)}^{f(u)} \int_{y=u}^{u+h} v(y, z) \bar{\pi}_Y(y) dy dz \leq \bar{\pi}_Y(u_0) C h \sup_{u \in [u_0, u_1-h]} (f(u) - f(u+h)), \end{aligned} \quad (4.14)$$

where C is a bound for v on $[u_0, u_1] \times [f(u_1), f(u_0)]$ (recall that $u_0 > 0$). On the other hand,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(Y_{T_{u+h}^Y-} \in (u, u+h), Z_{T_{u+h}^Y-} \in (f(u+h), f(u)), T_{u+h}^Y = \zeta) \\ & \leq \mathbb{P}(Y_{\zeta-} \in (u, u+h), Z_{\zeta-} \in (f(u+h), f(u))) \\ &= q \int_{z=f(u+h)}^{f(u)} \int_{y=u}^{u+h} v(y, z) dy dz \leq q C h \sup_{u \in [u_0, u_1-h]} (f(u) - f(u+h)). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Then the first inequality of the statement follows from (4.14), (4.15) and the uniform continuity of f on $[u_0, u_1]$.

Similarly, we have from Theorem 4.2 in [31],

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(Z_{T_{f(u)}^Z-} \in (f(u+h), f(u)), Y_{T_{f(u)}^Z-} \in (u, u+h), T_{f(u)}^Z < \zeta) \\ &= \int_{z=f(u+h)}^{f(u)} \int_{y=u}^{u+h} v(y, z) \bar{\pi}_Z(z) dy dz \leq \bar{\pi}_Z(f(u_1)) C h \sup_{u \in [u_0, u_1-h]} (f(u) - f(u+h)), \end{aligned}$$

and the same conclusion follows from the same argument. $\square$

4.4.3 Proof of the lower bound in identities (4.1) and (4.2)

Let us first prove the lower bound in equation (4.2), that is the inequality,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), u_0 < Y_S < u_1, t_0 < S < t_1) \\ \geq d_Z \int_{u_0}^{u_1} \int_{t_0}^{t_1} p_t(u, f(u)) dt du - d_Y \int_{u_0}^{u_1} \int_{t_0}^{t_1} p_t(u, f(u)) dt df(u). \end{aligned} \quad (4.16)$$

We define the sequence $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ of subdivisions of $[u_0, u_1]$,

$$\sigma_n = \left\{ u_k^n = u_0 + \frac{k}{n}(u_1 - u_0), 0 \leq k \leq n \right\}, \quad n \geq 1, \quad (4.17)$$

and we set, for all $n \geq 1$, $B_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} B_{n,k}^{(1)} \cup B_{n,k}^{(2)}$, where

$$B_{n,k}^{(1)} = \left\{ Z_{T_{f(u_k^n)}^Z} = f(u_k^n), u_k^n \leq Y_{T_{f(u_k^n)}^Z} < u_{k+1}^n, t_0 < T_{f(u_k^n)}^Z < t_1 \right\} \quad (4.18)$$

$$B_{n,k}^{(2)} = \left\{ Y_{T_{u_{k+1}^n}^Y} = u_{k+1}^n, f(u_{k+1}^n) \leq Z_{T_{u_{k+1}^n}^Y} < f(u_k^n), t_0 < T_{u_{k+1}^n}^Y < t_1 \right\}. \quad (4.19)$$

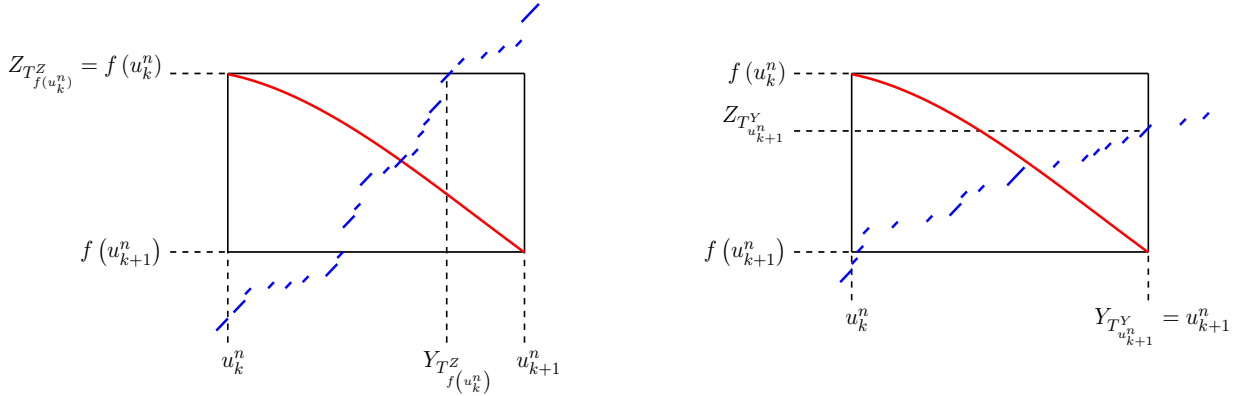


Figure 4.1 – An occurrence of the event $B_{n,k}^{(1)}$ on the left and $B_{n,k}^{(2)}$ on the right

Then let us check that

$$\limsup_n B_n \subset \{Z_S = f(Y_S), u_0 \leq Y_S \leq u_1, t_0 \leq S \leq t_1\}, \quad \text{almost surely.} \quad (4.20)$$

Let us first note that

$$\begin{aligned} \omega \in B_{n,k}^{(1)} &\Rightarrow \|(Y_{T_{f(u_k^n)}^Z}, Z_{T_{f(u_k^n)}^Z}) - (u_k^n, f(u_k^n))\| \leq u_{k+1}^n - u_k^n = \frac{u_1 - u_0}{n} \quad \text{and} \\ \omega \in B_{n,k}^{(2)} &\Rightarrow \|(Y_{T_{u_{k+1}^n}^Y}, Z_{T_{u_{k+1}^n}^Y}) - (u_{k+1}^n, f(u_{k+1}^n))\| \leq f(u_k^n) - f(u_{k+1}^n) \leq \varepsilon(n), \end{aligned}$$

where in the last inequality, the mapping $n \mapsto \varepsilon(n)$ does not depend on k and satisfies $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(n) = 0$. This follows from the uniform continuity of f on $[u_0, u_1]$. Therefore if $\omega \in \limsup_n B_n$, then there is a subsequence $u_{j_n}^n(\omega) := u_n$ of $(u_k^n)_{n \geq 1, 0 \leq k \leq n}$ which converges to $u \in [u_0, u_1]$ and such that $(Y_{T_{f(u_n)}^Z}, Z_{T_{f(u_n)}^Z})$ converges to $(u, f(u))$ or $(Y_{T_{u_n}^Y}, Z_{T_{u_n}^Y})$ converges to $(u, f(u))$. Assume for instance that $(Y_{T_{f(u_n)}^Z}, Z_{T_{f(u_n)}^Z})$ converges to $(u, f(u))$. Since Y and Z are non decreasing, this

means that $T_{f(u_n)}^Z$ tends to some value S such that $(Y_{S-}, Z_{S-}) = (u, f(u))$. Moreover $t_0 \leq S \leq t_1$ and $u_0 \leq Y_{S-} \leq u_1$. In particular, $Z_{S-} = f(Y_{S-})$, so that $S = \inf\{t : Z_t \geq f(Y_t)\}$, since Y and Z are non decreasing. If $(Y_{T_{u_n}^Y}, Z_{T_{u_n}^Y})$ converges to $(u, f(u))$, then the same argument leads to the same conclusion. Then (4.20) follows from part 1. of Theorem 4.1.1.

Now, let us prove that

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n) = d_Z \int_{u_0}^{u_1} \int_{t_0}^{t_1} p_t(u, f(u)) dt du - d_Y \int_{u_0}^{u_1} \int_{t_0}^{t_1} p_t(u, f(u)) dt df(u). \quad (4.21)$$

We first notice that, for all $n \in \mathbb{N}$ and all integer $0 \leq k \leq n-1$, $B_{n,k}^{(1)} \cap B_{n,k}^{(2)} = \emptyset$. Moreover, σ_n being a subdivision of $[u_0, u_1]$, for all integers $n \geq 2$, k', k'' such that $k' \neq k''$ and $0 \leq k', k'' \leq n-1$, $(B_{n,k'}^{(1)} \cup B_{n,k'}^{(2)}) \cap (B_{n,k''}^{(1)} \cup B_{n,k''}^{(2)}) = \emptyset$. On the other hand, from (4.12) and (4.13) in Lemma 4.4.2, we obtain

$$\mathbb{P}(B_{n,k}^{(1)}) = d_Z \int_{u_k^n}^{u_{k+1}^n} \int_{t_0}^{t_1} p_t(u, f(u_k^n)) dt du \quad \text{and} \quad \mathbb{P}(B_{n,k}^{(2)}) = d_Y \int_{f(u_{k+1}^n)}^{f(u_k^n)} \int_{t_0}^{t_1} p_t(u_{k+1}^n, s) dt ds,$$

so that

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} [\mathbb{P}(B_{n,k}^{(1)}) + \mathbb{P}(B_{n,k}^{(2)})] \\ &= d_Z \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k^n}^{u_{k+1}^n} \int_{t_0}^{t_1} p_t(u, f(u_k^n)) dt du + d_Y \sum_{k=0}^{n-1} \int_{f(u_{k+1}^n)}^{f(u_k^n)} \int_{t_0}^{t_1} p_t(u_{k+1}^n, s) dt ds. \end{aligned}$$

Recall that $0 < t_0 < t_1 < \infty$ and $0 < u_0 < u_1 < \infty$ and assume first that $f(u_1) < f(u_0)$, in particular $0 < f(u_1) < f(u_0) < \infty$. Then we derive from the continuity of $(t, y, z) \mapsto p_t(y, z)$ on $[t_0, t_1] \times [u_0, u_1] \times [f(u_1), f(u_0)]$ that the mapping $(y, z) \mapsto \int_{t_0}^{t_1} p_t(y, z) dt$ is uniformly continuous on $[u_0, u_1] \times [f(u_1), f(u_0)]$. Set $\bar{v}(y, z) := \int_{t_0}^{t_1} p_t(y, z) dt$. We derive from the uniform continuity of $(y, z) \mapsto \bar{v}(y, z)$ on $[u_0, u_1] \times [f(u_1), f(u_0)]$ and this of the mapping $u \mapsto f(u)$ on $[u_0, u_1]$ that there are functions $\alpha(n), \beta(n) \rightarrow 0$, as $n \rightarrow \infty$, such that for all $0 \leq k \leq n-1$, $|\bar{v}(u, f(u_k^n)) - \bar{v}(u_k^n, f(u_k^n))| \leq \alpha(n)$, for all $u \in [u_k^n, u_{k+1}^n]$ and $|\bar{v}(u_{k+1}^n, s) - \bar{v}(u_{k+1}^n, f(u_{k+1}^n))| \leq \beta(n)$, for all $s \in [f(u_{k+1}^n), f(u_k^n)]$. These arguments and the Riemann-Stieltjes integrability of the function $u \mapsto \bar{v}(u, f(u))$ with respect to the measures du and $df(u)$ imply that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k^n}^{u_{k+1}^n} \bar{v}(u, f(u_k^n)) du = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \bar{v}(u_k^n, f(u_k^n))(u_{k+1}^n - u_k^n) = \int_{u_0}^{u_1} \bar{v}(u, f(u)) du,$$

and that

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{f(u_{k+1}^n)}^{f(u_k^n)} \bar{v}(u_{k+1}^n, s) ds &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \bar{v}(u_{k+1}^n, f(u_{k+1}^n))(f(u_k^n) - f(u_{k+1}^n)) \\ &= - \int_{u_0}^{u_1} \bar{v}(u, f(u)) df(u), \end{aligned} \quad (4.22)$$

which proves (4.21) in this case. If $f(u_0) = f(u_1) := w$, then the result follows from the same arguments. We only need to replace the mapping $(y, z) \mapsto \int_{t_0}^{t_1} p_t(y, z) dt$ by the mapping $y \mapsto \int_{t_0}^{t_1} p_t(y, w) dt$ and the function $u \mapsto \bar{v}(u, f(u))$ by the function $u \mapsto \bar{v}(u, w)$. (The term (4.22) is then clearly equal to 0.) Finally, recall that $\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n \subset \{Z_S = f(Y_S), u_0 \leq Y_S \leq u_1, t_0 \leq S \leq t_1\}$, a.s. Then by Fatou's lemma,

$$\mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), u_0 \leq Y_S \leq u_1, t_0 \leq S \leq t_1) \geq \mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n),$$

and (4.21) implies that

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), u_0 \leq Y_S \leq u_1, t_0 \leq S \leq t_1) \\ \geq d_Z \int_{u_0}^{u_1} \int_{t_0}^{t_1} p_t(u, f(u)) dt du - d_Y \int_{u_0}^{u_1} \int_{t_0}^{t_1} p_t(u, f(u)) dt df(u). \end{aligned}$$

Since the latter inequality is valid for all u_0, u_1, t_0 and t_1 , large inequalities in the left member can be replaced by strict inequalities, so that (4.16) holds.

The proof of the corresponding inequality in (4.1) uses (4.10) and (4.11) instead of (4.12) and (4.13) in the above arguments. It is actually simpler so it is omitted.

4.4.4 Proof of the upper bound in identities (4.1) and (4.2)

Let us first prove the upper bound in equation (4.2), that is the inequality

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), u_0 < Y_S < u_1, t_0 < S < t_1) \\ \leq d_Z \int_{u_0}^{u_1} \int_{t_0}^{t_1} p_t(u, f(u)) dt du - d_Y \int_{u_0}^{u_1} \int_{t_0}^{t_1} p_t(u, f(u)) dt df(u). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Recall the definition (4.17) of the sequence $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ of subdivisions of $[u_0, u_1]$. We define the two following sequences of events which are slightly different from those introduced in (4.18) and (4.19),

$$\begin{aligned} \overline{B}_{n,k}^{(1)} &= \left\{ Z_{T_{f(u_k^n)}^Z} = f(u_k^n), u_k^n \leq Y_{T_{f(u_k^n)}^Z} \leq u_{k+1}^n, t_0 \leq T_{f(u_k^n)}^Z \leq t_1 + o_1(n) \right\} \\ \overline{B}_{n,k}^{(2)} &= \left\{ Y_{T_{u_{k+1}^n}^Y} = u_{k+1}^n, f(u_{k+1}^n) \leq Z_{T_{u_{k+1}^n}^Y} \leq f(u_k^n), t_0 \leq T_{u_{k+1}^n}^Y \leq t_1 + o_2(n) \right\}, \end{aligned}$$

where $o_1(n) = d_Z^{-1} \max_{0 \leq k \leq n-1} (f(u_k^n) - f(u_{k+1}^n))$, if $d_Z > 0$ and $o_2(n) = (nd_Y)^{-1}$, if $d_Y > 0$. If $d_Y = 0$ (resp. $d_Z = 0$), we set $o_2(n) = \infty$ (resp. $o_1(n) = \infty$), for all $n \geq 1$. Note that from uniform continuity of f on $[u_0, u_1]$, if $d_Z > 0$, then $o_1(n) \rightarrow 0$, as $n \rightarrow \infty$ (which is also clearly verified for o_2 , when $d_Y > 0$). Then let us also define the sequences,

$$\begin{aligned} B_{n,k}^{(3)} &= \left\{ f(u_{k+1}^n) \leq Z_{T_{f(u_k^n)}^Z} \leq f(u_k^n), u_k^n \leq Y_{T_{f(u_k^n)}^Z} \leq u_{k+1}^n \right\} \\ B_{n,k}^{(4)} &= \left\{ u_k^n \leq Y_{T_{u_{k+1}^n}^Y} \leq u_{k+1}^n, f(u_{k+1}^n) \leq Z_{T_{u_{k+1}^n}^Y} \leq f(u_k^n) \right\}, \end{aligned}$$

for $n \geq 1$ and $k = 0, \dots, n-1$ and let us check the inclusion,

$$A := \{Z_S = f(Y_S), u_k^n \leq Y_S < u_{k+1}^n, t_0 < S < t_1\} \subset \overline{B}_{n,k}^{(1)} \cup \overline{B}_{n,k}^{(2)} \cup B_{n,k}^{(3)} \cup B_{n,k}^{(4)}. \quad (4.24)$$

Assume that A holds and note that $T_{f(u_k^n)}^Z \geq S$ and $T_{u_{k+1}^n}^Y \geq S$. Then, only the two events described below in (a) and (b) can occur:

(a) In the first case, either Z creeps through the level $f(u_k^n)$ before time $T_{u_{k+1}^n}^Y$ or Y creeps through the level u_{k+1}^n before time $T_{f(u_k^n)}^Z$.

Let us consider the subcase where Z creeps through the level $f(u_k^n)$ before time $T_{u_{k+1}^n}^Y$. Then we have $Z_{T_{f(u_k^n)}^Z} = f(u_k^n)$ and since $u_k^n \leq Y_S < u_{k+1}^n$ and $S \leq T_{f(u_k^n)}^Z \leq T_{u_{k+1}^n}^Y$, we also have $u_k^n \leq Y_{T_{f(u_k^n)}^Z} \leq u_{k+1}^n$. Moreover, recall that $S \geq t_0$, therefore $T_{f(u_k^n)}^Z \geq t_0$. On the other hand since $Z_S = f(Y_S)$, then from time S , the process Z will reach the level $f(u_k^n)$ in a time which is at most equal to $d_Z^{-1}(f(u_k^n) - f(Y_S))$. Hence $T_{f(u_k^n)}^Z \leq S + d_Z^{-1}(f(u_k^n) - f(Y_S)) \leq t_1 + o_1(n)$. We conclude that $\overline{B}_{n,k}^{(1)}$ holds in this subcase.

In the subcase where Y creeps through the level u_{k+1}^n before time $T_{f(u_k^n)}^Z$, we prove in the same way that $\overline{B}_{n,k}^{(2)}$ holds.

(b) In the second case, either Z jumps through the level $f(u_k^n)$ and the event $B_{n,k}^{(3)}$ holds or Y jumps through the level u_{k+1}^n and the event $B_{n,k}^{(4)}$ holds. Note the both events can occur at the same time.

Then the inclusion (4.24) is proved.

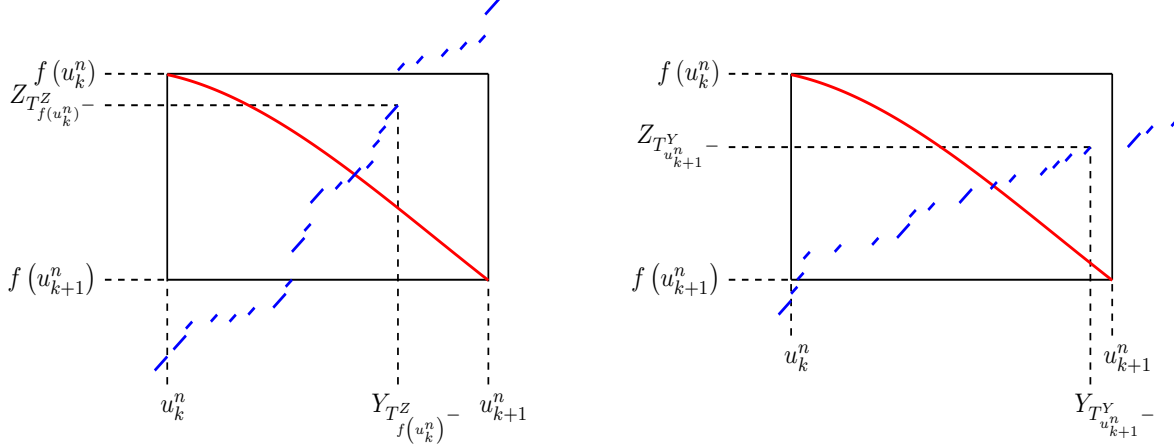


Figure 4.2 – An occurrence of the event $B_{n,k}^{(3)}$ on the left and $B_{n,k}^{(4)}$ on the right

Let us set $v_1^{(n)}(y, z) := \int_{t_0}^{t_1 + o_1(n)} p_t(y, z) dt$ and $v_2^{(n)}(y, z) := \int_{t_0}^{t_1 + o_2(n)} p_t(y, z) dt$. Then the inclusion (4.24) implies that

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), u_0 < Y_S < u_1, t_0 < S < t_1) \\ & \leq \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(Z_S = f(Y_S), u_k^n \leq Y_S \leq u_{k+1}^n, t_0 < S < t_1) \\ & \leq \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(\overline{B}_{n,k}^{(1)}) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(\overline{B}_{n,k}^{(2)}) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(B_{n,k}^{(3)}) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(B_{n,k}^{(4)}), \end{aligned}$$

and Lemmas 4.4.2 and 4.4.3 imply that

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(\overline{B}_{n,k}^{(1)}) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(\overline{B}_{n,k}^{(2)}) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(B_{n,k}^{(3)}) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(B_{n,k}^{(4)}) \\ & \leq \sum_{k=0}^{n-1} d_Z \int_{u_k^n}^{u_{k+1}^n} v_1^{(n)}(u, f(u_k^n)) du + \sum_{k=0}^{n-1} d_Y \int_{f(u_{k+1}^n)}^{f(u_k^n)} v_2^{(n)}(u_{k+1}^n, s) ds \\ & \quad + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} (\varepsilon_1(n) + \varepsilon_2(n)). \end{aligned}$$

We prove in a similar way as in the previous subsection that the sum of the two first sums in the last expression tends to $d_Z \int_{u_0}^{u_1} v(u, f(u)) du - d_Y \int_{u_0}^{u_1} v(u, f(u)) df(u)$, when n tend to ∞ . The third sum tends clearly to 0, as n tends to ∞ , so that inequality (4.23) is proved.

The upper bound in equality (4.1) is proved in the same way. This achieves the proof of Theorem 4.1.1.

4.4.5 Proof of Proposition 4.1.1

Part 1. is proved as part 1. of Theorem 4.1.1, see Subsection 4.4.1. (Note that $\mathbb{P}(S > 0) = 1$ since $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) > 0$. In particular, Y_{S-} and Z_{S-} are well defined.)

The proof of part 2. follows very similar arguments as those used for the proof of the upper bound in identities (4.1) and (4.2) which is given in Subsection 4.4.4. We only describe it here in broad outline. Recall the sequence $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ of subdivisions of $[u_0, u_1]$ defined in (4.17). Then define the two following sequences of events

$$\begin{aligned} C_{n,k}^{(1)} &= \left\{ Z_{T_{f(u_{k+1}^n)}^Z} = f(u_{k+1}^n), u_k^n \leq Y_{T_{f(u_{k+1}^n)}^Z} \leq u_{k+1}^n \right\} \\ C_{n,k}^{(2)} &= \left\{ f(u_k^n) \leq Z_{T_{f(u_{k+1}^n)}^Z} < f(u_{k+1}^n), u_k^n \leq Y_{T_{f(u_{k+1}^n)}^Z} < u_{k+1}^n \right\}. \end{aligned}$$

Since f is non decreasing, the inclusion,

$$C := \{Z_S = f(Y_S), u_k^n \leq Y_S < u_{k+1}^n\} \subset C_{n,k}^{(1)} \cup C_{n,k}^{(2)} \quad (4.25)$$

holds for all n sufficiently large and $k = 0, \dots, n-1$. Indeed, by definition of S , there is $\varepsilon > 0$ such that the path of (Y, Z) stays above the graph of f on the interval $[S, S + \varepsilon]$. This implies that for all n sufficiently large, if $t \geq 0$ is such that $Y_{S+t} \in [u_k^n, u_{k+1}^n]$ for some $k = 0, 1, \dots, n-1$, then $Z_{S+t} \geq f(S+t)$ so that either the process Z creeps above the level $f(u_{k+1}^n)$, that is $C_{n,k}^{(1)}$ holds, or Z jumps above this level, that is $C_{n,k}^{(2)}$ holds. There is no other possibility.

The remainder of the proof is then very similar to the arguments of the end of Subsections 4.4.1 and 4.4.4, the main difference being that the term due to the creeping of Y is now absent.

4.4.6 On assumptions of Theorem 4.1.1

The aim of this subsection is to show that Theorem 4.1.1 holds whenever the transition semigroup of (Y, Z) is absolutely continuous with bounded densities. Proposition 4.4.1 will also be used for the proof of Proposition 4.5.1. Let $d \geq 1$ and let $\mathcal{L}$ be any possibly killed $\mathbb{R}^d$ -valued Lévy process.

Proposition 4.4.1. *Let Ψ be the characteristic exponent of $\mathcal{L}$, that is $\mathbb{E}(e^{i\langle \xi, \mathcal{L}_1 \rangle}, 1 < \zeta) = e^{-\Psi(\xi)}$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, where ζ is the lifetime of $\mathcal{L}$. Then the following assertions are equivalent:*

(i) *The transition semigroup of $\mathcal{L}$ is absolutely continuous and there is a version of its densities, denoted by $x \mapsto l_t(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, which are bounded for all $t > 0$.*

(ii) *For all $t > 0$,*

$$e^{-t\Psi(\xi)} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^d).$$

If these conditions are satisfied, then the function $(t, x) \mapsto l_t(x)$ is continuous on $(0, \infty) \times \mathbb{R}^d$. In particular, if all coordinates of $\mathcal{L}$ are subordinators, then $l_t(0) = 0$, for all $t > 0$.

Proof. The proof follows similar arguments as those used in the beginning of Section 2 in [16]. Boundedness of l_t implies that $l_t \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ and consequently $e^{-t\Psi(\xi)} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d)$, for all $t > 0$, which implies that $e^{-t\Psi(\xi)} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^d)$, for all $t > 0$. Conversely, if $e^{-t\Psi(\xi)} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^d)$, for all $t > 0$, then Fourier inversion theorem implies (i). Indeed, by the Riemann-Lebesgue lemma, $l_t \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. Furthermore, from Fourier inversion theorem we have, for all $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d$,

$$l_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} e^{-t\Psi(\xi)} d\xi. \quad (4.26)$$

Let $(t_0, x_0) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ and K be a compact neighborhood of (t_0, x_0) such that $K \subset (0, \infty) \times \mathbb{R}^d$. Then, there exists $t_1 > 0$ such that for all $(t, x, \xi) \in K \times \mathbb{R}^d$, $|e^{-i\langle x, \xi \rangle} e^{-t\Psi(\xi)}| = e^{-t\operatorname{Re}(\Psi(\xi))} \leq |e^{-t_1\Psi(\xi)}| = e^{-t_1\operatorname{Re}(\Psi(\xi))}$, (recall that $\operatorname{Re}(\Psi(\xi)) \geq 0$). Since $e^{-t_1\Psi(\xi)} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^d)$, we obtain from (4.26) and Lebesgue's dominated convergence theorem, that $(t, x) \mapsto l_t(x)$ is continuous in (t_0, x_0) and finally on $(0, \infty) \times \mathbb{R}^d$. $\square$

Recall (from Subsection 4.4.1) that the absolute continuity of $v(dy, dz)$ is enough for part 1. of Theorem 4.1.1 to hold. Therefore, condition (i) (or (ii)) of Proposition 4.4.1 implies part 1. of Theorem 4.1.1. Moreover, condition (i) (or (ii)) of Proposition 4.4.1 applied to the bivariate subordinator (Y, Z) immediately implies the assumption of part 3. of Theorem 4.1.1. The mapping $(t, y, z) \mapsto p_t(y, z)$ is then locally bounded on $(0, \infty)^3$. Hence the assumption of assertion 2' (stated after Theorem 4.1.1) is satisfied for all t_0, t_1 such that $0 < t_0 < t_1 < \infty$ and this implies part 2. of Theorem 4.1.1 by monotone convergence.

Let us finally notice that assumptions of Theorem 4.1.1 could be weakened. Indeed, it appears from the limits in (4.22) that the continuity assumption of v could be replaced by an assumption close to the Riemann integrability of this function. (Recall that continuity of v is not required in lemmas 4.4.3 and 4.4.2.)

4.5 Proof of Theorem 4.1.2, Corollary 4.1.3 and Proposition 4.1.2

Recall that X is a real non killed Lévy process and that we have assumed that $|X|$ is not a subordinator.

4.5.1 Some reminders in fluctuation theory

We refer to Chap. IV of [5], Chap. 6 of [40] and [24] for more details on the results of this subsection. Recall that $\bar{X}_t = \sup\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$ and let $\underline{X}_t = \inf\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$. It is well known that both processes $\bar{X} - X$ and $\underline{X} - X$ are strongly Markovian. The state 0 is regular for itself, for the process $\bar{X} - X$ (resp. $\underline{X} - X$) if and only if 0 is regular for $[0, \infty)$ (resp. $(-\infty, 0]$) for the process X . When it is the case, we will simply write that $[0, \infty)$ (resp. $(-\infty, 0]$) is regular. Similarly, we will write that $(0, \infty)$ (resp. $(-\infty, 0)$) is regular when 0 is regular for $(0, \infty)$ (resp. $(-\infty, 0)$) for the process X . Recall also that when X is not a compound Poisson process, at least one of the half lines $(-\infty, 0)$ or $(0, \infty)$ is regular. Moreover compound Poisson processes are the only Lévy processes for which $[0, \infty)$ and $(-\infty, 0]$ are regular but not $(0, \infty)$ and $(-\infty, 0)$.

Let us briefly recall the definition of the local time at 0 of the process $\bar{X} - X$ which we denote by L . If $[0, \infty)$ is regular, L is a continuous, increasing, additive functional such that $L_0 = 0$, a.s., and the support of the measure dL_t is the set $\{t : X_t = \bar{X}_t\}$. Moreover L is the unique process, up to a multiplicative constant, satisfying these properties. We can normalize it for instance in the following way,

$$\mathbb{E} \left(\int_0^\infty e^{-t} dL_t \right) = 1.$$

When $[0, \infty)$ is not regular, the set $\{t : (X - \bar{X})_t = 0\}$ is discrete and the local time at 0 of the process $\bar{X} - X$ is defined as follows

$$L_t = \sum_{k=0}^{R_t} \mathbf{e}^{(k)},$$

where $R_0 = 0$, for $t > 0$, $R_t = \text{Card}\{s \in (0, t] : X_s = \bar{X}_s\}$ and $\mathbf{e}^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$ is a sequence of independent and exponentially distributed random variables with parameter

$$\gamma = \left(1 - \mathbb{E}(e^{-\tau_0^+}) \right)^{-1},$$

and $\tau_0^+ = \inf\{t > 0 : X_t > 0\}$. The choice of the parameter γ is consistent with the normalisation $\mathbb{E} \left(\int_0^\infty e^{-t} dL_t \right) = 1$ of the regular case. The process L is called the local time at the supremum of X . The local time at the infimum is defined in the same way with respect to the process $\underline{X} - X$ and

is denoted by L^* . It corresponds to the local time at the supremum of the dual process $X^* := -X$.

Let us now recall the definition of the ladder processes. The ladder time processes τ and τ^* , and the ladder height processes H and H^* are the following (possibly killed) subordinators:

$$\tau_t = \inf\{s : L_s > t\}, \quad \tau_t^* = \inf\{s : L_s^* > t\}, \quad H_t = X_{\tau_t}, \quad H_t^* = -X_{\tau_t^*}, \quad t \geq 0,$$

where $\tau_t = H_t = +\infty$, for $t \geq L_\infty$ and $\tau_t^* = H_t^* = +\infty$, for $t \geq L_\infty^*$. Recall that the processes (τ, H) and (τ^*, H^*) are bivariate subordinators. The renewal measures of the ladder processes (τ, H) and (τ^*, H^*) are the measures on $[0, \infty)^2$ defined by,

$$U(dt, dh) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\tau_u \in dt, H_u \in dh) du \quad \text{and} \quad U^*(dt, dh) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\tau_u^* \in dt, H_u^* \in dh) du.$$

The drifts d_τ and d_{τ^*} of the subordinators τ and τ^* satisfy

$$\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s = \overline{X}_s\}} ds = d_\tau L_t, \quad \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s = \underline{X}_s\}} ds = d_{\tau^*} L_t^*. \quad (4.27)$$

Recall that $d_\tau > 0$ if and only if $(-\infty, 0)$ is not regular. Similarly, $d_{\tau^*} > 0$ if and only if 0 is not regular for $(0, \infty)$. Hence if X is not a compound Poisson process, then $d_\tau d_{\tau^*} = 0$ holds since 0 is necessarily regular for at least one of the half lines. If X is a compound Poisson process, then $d_\tau > 0$ and $d_{\tau^*} > 0$.

Given our normalisation of the local time L , the drifts d_H and d_{H^*} of H and H^* satisfy $2d_H d_{H^*} = \sigma^2$, where σ represents the Brownian part of X in its Lévy-Khintchine decomposition (this follows from the Wiener-Hopf factorisation of the characteristic exponent of X , see p.166 in [5]). When X has bounded variation, we define its drift as the almost sure limit $d := \lim_{t \rightarrow 0} X_t/t$. It was proved in Section 2. of [54] that in this case, $d > 0$ if and only if $d_H > 0$. Note that if moreover $d_\tau > 0$, then $d_H = dd_\tau$, since $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{H_t}{t} = d_H = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X_{\tau_t}}{\tau_t} \frac{\tau_t}{t} = dd_\tau$, a.s. When X has unbounded variation and no Brownian part, Theorem Kaa of [73] asserts that $d_H > 0$ if and only if

$$\int_0^1 \frac{x}{\int_{-x}^0 \bar{\pi}_1(u) du} \hat{\pi}(x) dx < \infty,$$

where π is the Lévy measure of X , for $x \in \mathbb{R}$, $\hat{\pi}(x) = \int_{\mathbb{R}} (\mathbb{1}_{\{0 < x \leq u\}} + \mathbb{1}_{\{u \leq x < 0\}}) d\pi(u)$ and for $x \in [-1, 0)$, $\bar{\pi}_1(x) = \int_{-1}^x \hat{\pi}(u) du$.

The Itô measure n^* of the excursions away from 0 of the process $X - \underline{X}$ is the characteristic measure of the (possibly stopped) Poisson point process

$$t \mapsto \begin{cases} \{(X - \underline{X})_{\tau_{t-}^* + s}, 0 \leq s < \tau_t^* - \tau_{t-}^*\} & \text{if } \tau_{t-}^* < \tau_t^* \\ \delta & \text{if } \tau_{t-}^* = \tau_t^*, \end{cases}$$

where δ is some isolated point added to the space of excursions. We refer to [5], Chap. IV, [40], Chap. 6 and [24] for a more detailed definition of n^* . The measure n^* is a Markovian measure whose semigroup is that of the killed Lévy process when it enters the negative half line. More specifically, for $x > 0$, let us denote by $\mathbb{Q}_x^*$ the law of the process $(X_t \mathbb{1}_{\{t < \tau_0^-\}} + \infty \cdot \mathbb{1}_{\{t \geq \tau_0^-\}}, t \geq 0)$ under $\mathbb{P}_x$, where $\tau_0^- = \inf\{t > 0 : X_t < 0\}$. That is for $\Lambda \in \mathcal{F}_t$,

$$\mathbb{Q}_x^*(\Lambda, t < \zeta) = \mathbb{P}_x(\Lambda, t < \tau_0^-). \quad (4.28)$$

Then for all Borel positive functions f and g and for all $s, t > 0$,

$$n^*(f(X_t)g(X_{s+t}), s+t < \zeta) = n^*(f(X_t)\mathbb{E}_{X_t}^{\mathbb{Q}_x^*}(g(X_s)), s < \zeta), \quad (4.29)$$

where $\mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}^*}$ means the expectation under $\mathbb{Q}_x^*$ and ζ is the lifetime of the excursions. Moreover, we define the entrance law $(q_t^*(dx), t > 0)$ of the excursion measure n^* as

$$n^*(f(X_t), t < \zeta) = \int_0^\infty f(x) q_t^*(dx). \quad (4.30)$$

The Itô measure of the excursions away from 0 of the reflected process at its supremum $\bar{X} - X = X^* - \underline{X}^*$ is defined in the same way as for $X - \underline{X}$. It will be denoted by n and its entrance law by $q_t(dx)$. We define the probability measures $\mathbb{Q}_x$ in the same way as in (4.28) with respect to the dual process $X^* = -X$. Let us finally recall that the entrance laws $q_t(dh)$ and $q_t^*(dh)$ are related to the renewal measures $U(dt, dh)$ and $U^*(dt, dh)$ of (τ, H) and (τ^*, H^*) as follows,

$$d_{\tau^*} \delta_{\{(0,0)\}}(dt, dh) + q_t^*(dh) dt = U(dt, dh) \quad (4.31)$$

$$d_\tau \delta_{\{(0,0)\}}(dt, dh) + q_t(dh) dt = U^*(dt, dh). \quad (4.32)$$

These identities between measures on $[0, \infty)^2$ are valid (at least) when X is not a compound Poisson process and can be found in Lemma 1 of [13]. In particular, under the additional assumption of Theorem 4.1.2, that is when $U(dt, dh)$ has a density on $(0, \infty)^2$, this density is the same as this of $q_t^*(dh) dt$, which explains the notation $q_t^*(h)$, $t, h \in (0, \infty)$ in the latter theorem.

4.5.2 Proof of Theorem 4.1.2

Part 1. of Theorem 4.1.2 is a direct application of Lemma 4.4.1. It suffices to consider $\mathcal{L}_t = (X_t, t)$ and $G(u, v) = u - f(v)$ in this lemma. (Note that $\mathbb{P}(T_f > 0) = 1$ follows from the fact that f is positive. In particular, X_{T_f-} is well defined on $\{T_f < \infty\}$.)

Then part 2. is a consequence of Lemma 4.4.1 and Theorem 4.1.1. Recall first from Subsection 4.5.1 that (τ, H) is a bivariate subordinator. If the time $T_f = \inf\{t : X_t > f(t)\}$ satisfies $X_{T_f} = \bar{X}_{T_f} = f(T_f)$, then it is a zero of $\bar{X} - X$ and hence there is S' such that $T_f = \tau_{S'}$ or $T_f = \tau_{S'-}$. Therefore $H_{S'} = f(\tau_{S'})$ or $X_{\tau_{S'-}} = \bar{X}_{\tau_{S'-}} = f(\tau_{S'-})$ but we know, applying again Lemma 4.4.1 to the function G as above, that in the latter case, X is necessarily a.s. continuous at time $\tau_{S'-}$. In particular, $H_{S'-} = X_{\tau_{S'-}} = f(\tau_{S'-})$. On the other hand, applying again Lemma 4.4.1, it follows that if $H_{S'-} = f(\tau_{S'-})$, then (τ, H) is necessarily a.s. continuous at time S' , so that $\tau_{S'} = \tau_{S'-}$. This proves that $H_{S'} = f(\tau_{S'})$, a.s. Moreover, since the subordinator H is not lattice, the time S' is necessarily unique, so that $S' = S = \inf\{t \geq 0 : H_t > f(\tau_t)\}$. This proves in particular that $\tau_S = T_f$.

Conversely assume that $S = \inf\{t \geq 0 : H_t > f(\tau_t)\}$ satisfies $H_S = X_{\tau_S} = \bar{X}_{\tau_S} = f(\tau_S)$. Since X is not lattice and f is non increasing, the time τ_S is necessarily unique and satisfies $\tau_S = \inf\{t : \bar{X}_t > f(t)\} = T_f$. Hence $X_{T_f} = \bar{X}_{T_f} = f(T_f)$ and we have proved the identity

$$\{H_S = f(\tau_S), u_0 < \tau_S < u_1\} = \{X_{T_f} = \bar{X}_{T_f} = f(T_f), u_0 < T_f < u_1\}$$

which allows us to conclude thanks to part 2. of Theorem 4.1.1.

4.5.3 On assumptions of Theorem 4.1.2

It is assumed in theorems 4.1.2 and 4.1.3 that the renewal measure of the ladder process (τ, H) has continuous densities $(t, x) \mapsto q_t^*(x)$ on $(0, \infty)^2$. The next proposition provides conditions for this to hold. Moreover, when the later are satisfied, q_t^* is positive on $(0, \infty)$, for all $t > 0$. This ensures the positivity of the creeping probability (4.6) whenever $d_H > 0$ or $d_\tau > 0$ and $f(t_1) < f(t_0)$.

Proposition 4.5.1. *Assume that X is a non killed real Lévy process which satisfies the equivalent conditions (i) and (ii) of Proposition 4.4.1, then*

1. *the semigroup $q_t^*(x, dy)$ of the killed process $(X, \mathbb{Q}_x^*)$ defined in (4.28) is absolutely continuous and its densities $(t, x, y) \mapsto q_t^*(x, y)$ are continuous in $(0, \infty)^2 \times [0, \infty)$.*

2. Assume moreover that for all $c \geq 0$, the process $(|X_t - ct|, t \geq 0)$ is not a subordinator. Then the entrance law, $q_t^*(dx)$ is absolutely continuous on $[0, \infty)$ for all $t > 0$ and there is a version $q_t^*(x)$, $x \geq 0$, $t > 0$ of its densities such that the function $(t, x) \mapsto q_t^*(x)$ is continuous on $(0, \infty) \times [0, \infty)$. Moreover, for all $t > 0$, q_t^* is positive on $(0, \infty)$.

Denote by h the renewal function of H , that is $h(x) = \int_0^\infty \mathbb{P}(H_t \leq x) dt$, then $\lim_{y \rightarrow 0+} q_t^*(x, y) = h(0)q_t(x)$. Moreover for all $t > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+} q_t^*(x) = h(0)p_t(0)/t$. We then set $q_t^*(x, 0) = h(0)q_t(x)$ and $q_t^*(0) = h(0)p_t(0)/t$, for all $t, x > 0$.

Proof. The first assertion is a slight reinforcement of Lemma 2 in [72] and our proof follows the same arguments. Recall first the definition (4.28) of the killed process $(X, \mathbb{Q}_x^*)$ and let us denote by $q_t^*(x, dy)$ its semigroup. Then from Lemma 2 in [72], under our assumption and thanks to Proposition 4.4.1, this semigroup admits densities $q_t^*(x, y)$ which satisfy for all $t > 0$, $x > 0$, $y \geq 0$,

$$q_t^*(x, y) = \mathbb{P}_{x,y}^t(\Lambda_t)p_t(y - x),$$

where $\mathbb{P}_{x,y}^t$ is the law of the bridge of $(X, \mathbb{P})$ starting from x and ending in y at time t and $\Lambda_t = \{\underline{X}_t > 0\} \cup \{X_s > 0, 0 \leq s < t, X_t = 0\}$. Here, in order to define $q_t^*(x, 0)$ for all $t > 0$ and $x > 0$, we have included $y = 0$ since the right member is then well defined. From Corollary 1 of [20], the measures $\mathbb{P}_{x,y}^t$ are weakly continuous in $(t, x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^2$. Then from the same arguments as in Lemma 2 of [72], these measures satisfy $\mathbb{P}_{x,y}^t(\partial\Lambda_t) = 0$ for all $t, x > 0$ and $y \geq 0$. Hence from portemanteau theorem and Proposition 4.4.1, the mapping $(t, x, y) \mapsto \mathbb{P}_{x,y}^t(\Lambda_t)p_t(y - x)$ is continuous in $(0, \infty)^2 \times [0, \infty)$.

In order to prove 2., recall from part 3. of Lemma 1 in [13] that $q_t^*(dx)$ is absolutely continuous under our assumptions. Let us denote by $q_t^*(x)$ the corresponding densities and recall the Chapman-Kolmogorov equation,

$$q_{t+s}^*(y) = \int_0^\infty q_s^*(x)q_t^*(x, y) dx, \quad s, t, y > 0, \quad (4.33)$$

which can be derived for instance from (4.29). From Proposition 1 in [16], for all $x > 0$ and $t > 0$, $\lim_{y \rightarrow 0+} q_t^*(x, y) = h(0)q_t(x)$. Let us set $q_t^*(x, 0) = h(0)q_t(x)$. Let Ψ be the characteristic exponent of X , that is $\mathbb{E}(e^{i\xi X_1}) = e^{-\Psi(\xi)}$. From Lemma 2 in [72], $q_t^*(x, y) \leq p_t(y - x)$, for all $t > 0$ and $x, y \in (0, \infty)^2$, so that,

$$q_t^*(x, y) \leq p_t(y - x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(y-x)\xi} e^{-t\Psi(\xi)} d\xi \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |e^{-t\Psi(\xi)}| d\xi, \quad (4.34)$$

and this bound can be extended to $y = 0$. From the same arguments as in the proof of Proposition 4.4.1, the mapping $t \mapsto \int_{\mathbb{R}} |e^{-t\Psi(\xi)}| d\xi$ is continuous on $(0, \infty)$. Let $(t_0, y_0) \in (0, \infty) \times [0, \infty)$, then from (4.34) and the continuity of $t \mapsto \int_{\mathbb{R}} |e^{-t\Psi(\xi)}| d\xi$, there is $\varepsilon > 0$ and $C_\varepsilon > 0$ such that $q_t^*(x, y) \leq C_\varepsilon$, for all $x > 0$, $y \geq 0$ and $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Moreover, from (4.29), $\int_0^\infty q_s^*(x) dx = n^*(s < \zeta) < \infty$, hence, (4.33) can be extended to $y = 0$ and we can set $q_t^*(0) = \lim_{y \rightarrow 0+} q_t^*(y)$, $t > 0$. Moreover, continuity of $(t, y) \mapsto q_t^*(y)$ at (t_0, y_0) follows from (4.33), continuity of $(t, x, y) \mapsto q_t^*(x, y)$ in $(0, \infty)^2 \times [0, \infty)$ proved in assertion 1. and Lebesgue theorem of dominated convergence.

The positivity of q_t^* for all $t > 0$ follows from Lemma 2 in [16] and the two last assertions in 2. follow from Proposition 1 in [16]. $\square$

Note that the last two assertions of part 2. of Proposition 4.5.1 are of no use in the paper. However, these supplements have arisen naturally over the proof and we thought it is worth mentioning them for completeness.

4.5.4 Proof of Corollary 4.1.3

As recalled in Subsection 4.5.1, since the process $Y_t := X_t + at$, $t \geq 0$ has bounded variation and positive drift, its upward ladder height process also has positive drift. Moreover, by assumption,

for all $t > 0$ the distribution $\mathbb{P}(X_t \in dx)$ is absolutely continuous with a bounded density, and for all $c \geq 0$, the process $(|X_t - ct|, t \geq 0)$ is not a subordinator. Then these conditions are clearly also satisfied by the process Y . Let us denote by $q_t^{*,a}(x)$ the density of the renewal measure of the ladder process associated to Y . Then from part 2. of Proposition 4.5.1, $(t, x) \mapsto q_t^{*,a}(x)$ is continuous on $(0, \infty)^2$. Moreover, $q_t^{*,a}$ is positive on $(0, \infty)$ for all $t > 0$. These properties imply, from part 2. of Theorem 4.1.2, that the process Y creeps at its supremum through the function $f(t) + at$ over the interval (t_0, t_1) , so that X creeps through the function $f(t)$ over the interval (t_0, t_1) .

4.5.5 Proof of Proposition 4.1.2

Proposition 4.1.2 is a consequence of Proposition 4.1.1 and its proof follows the same arguments as those used for the proof of Theorem 4.1.2 in Subsection 4.5.2. The details are omitted.

4.6 Proof of Theorem 4.1.3

The proof is a direct application of the extension of Tanaka's construction of random walks conditioned to stay positive obtained in [25]. Let us first state this transformation. Recall that $\bar{X}_t = \sup_{s \leq t} X_s$ and let us set for $t > 0$,

$$g_t = \sup\{s < t : X_s = \bar{X}_s\} \quad \text{and} \quad d_t = \inf\{s > t : X_s = \bar{X}_s\}.$$

Then the process defined by

$$\begin{aligned} W_0 &= 0 \\ W_t &= \bar{X}_{d_t} + \mathbb{1}_{\{d_t > g_t\}}(\bar{X} - X)_{(d_t + g_t - t)-}, \quad t > 0, \end{aligned}$$

has the law of X conditioned to stay positive, $X^\uparrow$. According to this construction, the process W is obtained by time reversing of each excursion of the reflected process $\bar{X} - X$ and then by gluing them back together.

The assertion $0 < \sigma_f < \infty$, a.s. is straightforward since $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) > 0$ and $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t^\uparrow = \infty$, almost surely. Then we derive from the above construction that almost surely,

$$\bar{X}_t = \underline{\underline{W}}_t, \quad \text{for all } t \geq 0.$$

Moreover, the sets $\{t \geq 0 : X_t = \bar{X}_t\}$ and $\{t \geq 0 : W_t = \underline{\underline{W}}_t\}$ are identical. It follows that $\bar{X}_{T_f} = \underline{\underline{W}}_{T_f}$, almost surely and that $X_{T_f} = \bar{X}_{T_f}$ if and only if $W_{T_f} = \underline{\underline{W}}_{T_f}$. Then it remains to observe that on the set $\{X_{T_f} = \bar{X}_{T_f}\} = \{W_{T_f} = \underline{\underline{W}}_{T_f}\}$, $T_f = \sup\{t : W_t \leq f(t)\} = \sigma_f$ and this proves parts 1. and 2. of Theorem 4.1.3.

Chapter 5

Conditioning Lévy processes to be absorbed by curves

In this chapter, we first recall our main results about conditioning bivariate subordinators and Lévy processes to be absorbed by curves in Section 5.1, before proving them in Section 5.2. This chapter is self-contained but we emphasize that our results have been presented in detail in Section 3.2. Moreover, we also refer to Section 2.6 which offers a reminder of the steps to condition a process via a Doob h -transformation.

5.1 Main results

5.1.1 Bivariate sudordinators conditioned to be absorbed by a curve

A bivariate subordinator (Y, Z) is a possibly killed two dimensional Lévy process whose coordinates Y and Z are non decreasing. We consider (Y, Z) as a strong Markov process with state space $\mathbb{R}^2$ and cemetery state $\delta = (\infty, \infty)$, that is $Y_t = Z_t = \infty$, for $t \in [\zeta, \infty]$, where ζ is the lifetime of (Y, Z) . We denote by $\mathbb{P}_{(y,z)}$, $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ the probability measures under which the process (Y, Z) starts from (y, z) , that is $\mathbb{P}_{(y,z)}((Y_0, Z_0) = (y, z)) = 1$ and we set $\mathbb{P} := \mathbb{P}_{(0,0)}$.

Our first results concern the conditioning of a bivariate subordinator (Y, Z) to hit continuously from below the graph $\{(u, f(u)) : u > 0\}$ of a continuous non increasing function $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$. From now on, we fix such a function, then we set $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$, $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$. The distribution at time $t > 0$ of (Y_t, Z_t) under $\mathbb{P}$ and the renewal measure of (Y, Z) are respectively denoted by

$$p_t(dy, dz) := \mathbb{P}(Y_t \in dy, Z_t \in dz) \text{ and } v(dy, dz) := \int_0^{+\infty} p_t(dy, dz) dt.$$

Let us now define the process (Y, Z) killed when exiting the domain

$$\mathcal{D} = \{(y, z) \in [0, \infty)^2 : z < f(y)\}.$$

The first exit time of $\mathcal{D}$ by (Y, Z) is

$$S := \inf\{t : (Y_t, Z_t) \in [0, \infty)^2 \setminus \mathcal{D}\} = \inf\{t : Z_t \geq f(Y_t)\}. \quad (5.1)$$

Then we recall the following result from Theorem 2.1 in [19].

Lemma 5.1.1. *For all $(y, z) \in \mathcal{D}$, $\mathbb{P}_{(y,z)}$ -almost surely, $0 < S < \infty$, $Y_{S-} < \infty$ and $Z_{S-} < \infty$. Moreover if the renewal measure $v(dy, dz)$ is absolutely continuous with respect to the Lebesgue*

measure on $(0, \infty)^2$. Moreover, the process (Y, Z) cannot jump on the graph $\{(u, f(u)) : u > 0\}$, that is

$$\mathbb{P}_{(y,z)}(Z_S = f(Y_S), \Delta(Y, Z)_S \neq 0) = 0,$$

where $\Delta(Y, Z)_S = (Y, Z)_S - (Y, Z)_{S-}$.

We denote by $\mathbb{Q}_{(y,z)}$ the law of the process (Y, Z) starting at $(y, z) \in \mathcal{D}$ and killed at time S , that is $\mathbb{Q}_{(y,z)}$ is the law of the strong Markov process $(\tilde{Y}, \tilde{Z})$ defined by

$$(\tilde{Y}_t, \tilde{Z}_t) = (Y_t, Z_t), \text{ if } t < S \text{ and } \tilde{Y}_t = \tilde{Z}_t = \infty, \text{ if } t \geq S,$$

under the probability $\mathbb{P}_{(y,z)}$. We will denote by $\mathbb{E}_{(y,z)}^{\mathbb{Q}}$ the expectation under the probability $\mathbb{Q}_{(y,z)}$. The state space of this process is $\mathcal{D}$. Observe that from Lemma 5.1.1, the lifetime of the process $(\tilde{Y}, \tilde{Z})$ is then equal to S .

Recall that a function $h : \mathcal{D} \rightarrow [0, \infty)$ is said to be excessive for the killed process if for every $t \geq 0$ and $(y, z) \in \mathcal{D}$,

$$\mathbb{E}_{(y,z)}^{\mathbb{Q}}(h(Y_t, Z_t), t < S) \leq h(y, z),$$

and for every $(y, z) \in \mathcal{D}$, $\mathbb{E}_{(y,z)}^{\mathbb{Q}}(h(Y_t, Z_t), t < S) \rightarrow h(y, z)$, as $t \rightarrow 0$. We will say that an excessive function h is harmonic for the killed process if for any open set O such that $\overline{O \cap \mathcal{D}}$ is a non empty compact and contained in $\mathcal{D}$ and for every $(y, z) \in \mathcal{D}$,

$$\mathbb{E}_{(y,z)}^{\mathbb{Q}}(h(Y_T, Z_T), T < S) = h(y, z), \quad (5.2)$$

where $T = \inf\{t : (Y_t, Z_t) \in \mathcal{D} \setminus O\}$. In our first theorem we give a family of positive functions which are both excessive and harmonic for the killed process.

Theorem 5.1.1. *Let (Y, Z) be a bivariate subordinator whose distribution $p_t(dy, dz)$ is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on $[0, \infty)^2$ for every $t > 0$. Let us denote by $p_t(y, z)$ and $v(y, z)$ the densities of $p_t(dy, dz)$ and $v(dy, dz)$, respectively. We assume that for every $t > 0$, $(y, z) \mapsto p_t(y, z)$ is continuous on $(0, \infty)^2$. We agree that $v(y, z) = 0$ whenever $y < 0$ or $z < 0$. Let $m(du)$ be some σ -finite, non-zero Borel measure on $(0, \infty)$ and define the function*

$$h(y, z) := \int_{(0, \infty)} v(u - y, f(u) - z) m(du), \quad \text{for } (y, z) \in \mathcal{D}. \quad (5.3)$$

Then

1. the function h is excessive for the killed process.
2. If none of the coordinates Y and Z is a compound Poisson process or if f is decreasing, then the function h is harmonic for the killed process.
3. If the support of $m(du)$ is dense in $(0, \infty)$, then function h is positive on $\mathcal{D}$.

When the excessive function h defined in Theorem 5.1.1 is positive and finite on $\mathcal{D}$, it is natural to consider the associated Doob h -transform of the killed process. As for the latter process, this h -transform is a non conservative strong Markov process with $\mathcal{D}$ as a state space and whose family of distributions $(\mathbb{P}_{(y,z)}^C)$ is defined as follows:

$$\mathbb{E}_{(y,z)}^C(\Lambda_t, t < \zeta) = \frac{1}{h(y, z)} \mathbb{E}_{(y,z)}^{\mathbb{Q}}(h(Y_t, Z_t) \mathbb{1}_{\Lambda_t}, t < \zeta), \quad t \geq 0, \quad \Lambda_t \in \mathcal{F}_t, \quad (y, z) \in \mathcal{D}, \quad (5.4)$$

where on each side, ζ is the lifetime of the considered process. The probability $\mathbb{P}_{(0,0)}^C$ will simply be denoted by $\mathbb{P}^C$. On the other hand, if we denote by $q_t((y, z), (dr, ds))$ the semigroup of the killed

process and $p_t^C((y, z), (dr, ds))$ this of the above h -transform, then the definition (5.4) is equivalent to

$$p_t^C((y, z), (dr, ds)) := \frac{h(r, s)}{h(y, z)} q_t((y, z), (dr, ds)), \quad (y, z), (r, s) \in \mathcal{D}. \quad (5.5)$$

In order to be able to build the measure and semigroup given in (5.4) and (5.5), we will always assume that h is positive and finite on $\mathcal{D}$. From part 3. of Theorem 5.1.1, positivity is easily ensured. The following proposition asserts that finiteness is also satisfied in many cases.

Proposition 5.1.1. *Provided the support of $m(du)$ is dense in $(0, \infty)$, the excessive function h defined in (5.3) is positive and finite on $\mathcal{D}$ in the following cases:*

1. *The density $(y, z) \mapsto v(y, z)$ is continuous on $(0, \infty)^2$ and the measure m is given by $m(du) = d_Z \lambda(du) - d_Y f(du)$, where d_Y and d_Z are the drift coefficients of the subordinators Y and Z .*
2. *The density $(y, z) \mapsto v(y, z)$ is continuous and bounded on $(0, \infty)^2$ and the measure $m(du)$ has finite mass. In this case, the function h is continuous on $\mathcal{D}$.*

From now on we will always make the following assumption:

(H) *h is an excessive function of the form (5.3) which is positive, finite and harmonic.*

Then we are interested in the path properties of the process (Y, Z) under the probabilities $\mathbb{P}_{(y, z)}^C$, $(y, z) \in \mathcal{D}$, which will henceforth be denoted by $\{(Y, Z), \mathbb{P}_{(y, z)}^C\}$. The main results in this direction can be summarized in the following proposition.

Theorem 5.1.2. *Let $(y, z) \in \mathcal{D}$, then*

1. *the coordinates of the process $\{(Y, Z), \mathbb{P}_{(y, z)}^C\}$ are non decreasing almost surely, that is*

$$\mathbb{P}_{(y, z)}^C(Y_s \leq Y_t, Z_s \leq Z_t \mid t < \zeta) = 1,$$

for all $(y, z) \in \mathcal{D}$ and $s \leq t$.

2. *The process $\{(Y, Z), \mathbb{P}_{(y, z)}^C\}$ reaches continuously the graph $\{(u, f(u)) : u > 0\}$, almost surely. More specifically,*

$$\mathbb{P}_{(y, z)}^C(Z_{\zeta-} = f(Y_{\zeta-})) = 1,$$

for all $(y, z) \in \mathcal{D}$.

3. *The distribution of $Y_{\zeta-}$ under $\mathbb{P}_{(y, z)}^C$ is given by*

$$\mathbb{P}_{(y, z)}^C(Y_{\zeta-} \in dy) = \frac{1}{h(0, 0)} v(y, f(y)) m(dy), \quad y \in (0, \infty).$$

(From 2. this clearly characterises the distribution of $(Y_{\zeta-}, Z_{\zeta-})$.)

From Theorem 5.1.2 the process $((Y, Z), \mathbb{P}^C)$ can be interpreted as the bivariate subordinator $((Y, Z), \mathbb{P})$, conditioned to hit continuously from below the graph of f . The measure $m(du)$ determines how (Y, Z) targets this graph. Henceforth, we will refer to $((Y, Z), \mathbb{P}_{(y, z)}^C)$, $(y, z) \in \mathcal{D}$, as the process started from (y, z) and conditioned to be absorbed by the graph of f .

The latter interpretation is reinforced in the particular case where the function f is affine and the measure $m(du)$ is the Lebesgue measure on some compact set. We show in the next result that $\mathbb{P}_{(y, z)}^C$ is the limit law of the process under $\mathbb{P}_{(y, z)}$ conditioned to reach a strip around the graph of f , when the thickness of this strip tends to 0.

Theorem 5.1.3. *Let $m(du)$ be the Lebesgue measure on $[y_1, y_2]$, for $0 < y_1 < y_2 < \infty$. Assume that f is affine and that $(y, z) \mapsto v(y, z)$ is continuous on $(0, \infty)^2$. Define the strip $A_\varepsilon = \{(y, z) \in \mathcal{D} : y_1 < y < y_2, f(y) - \varepsilon < z < f(y)\}$. Then for all $(y, z) \in \mathcal{D}$, $t > 0$ and $\Lambda \in \mathcal{F}_t$,*

$$\mathbb{P}_{(y,z)}^C(\Lambda, y_1 < Y_{\zeta-} < y_2, t < \zeta) = \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{P}_{(y,z)}(\Lambda, t < T_{A_\delta} | T_{A_\varepsilon} < S).$$

Note that Theorems 5.1.1 and 5.1.2 can in principle be deduced from the theory of Martin boundary, see Sections 11 and 12 of [44]. However, the proofs we give here rely on the duality of Markov processes, which makes them very simple.

5.1.2 Lévy processes conditioned to be absorbed by a curve at their supremum

Let us now consider a non killed real Lévy process X . We will always assume in the sequel that $X_0 = 0$, a.s. under the probability $\mathbb{P}$. Since our interest lies in conditioning X to be absorbed at positive levels, it is natural to assume throughout this paper that $-X$ is not a subordinator. We will also assume that X is not a compound Poisson process. Then we write $\bar{X}$ for the supremum process, that is,

$$\bar{X}_t = \sup_{s \leq t} X_s, \quad t \geq 0.$$

We will denote by $(\mathcal{F}_t)$ the natural filtration generated by the process X . Then let us first recall a few basic definitions. It is well known that the reflected process $\bar{X} - X$ is strongly Markovian under $\mathbb{P}$. Let L be the local time at 0 of $\bar{X} - X$ and denote by (τ, H) the upward ladder process of X , that is the bivariate Lévy process whose coordinates are the following (possibly killed) subordinators:

$$\tau_t = \inf\{s : L_s > t\} \quad \text{and} \quad H_t = X_{\tau_t}, \quad t \geq 0,$$

where $\tau_t = H_t = \infty$, for $t \geq L_\infty$. The process τ (resp. H) is called the upward ladder time (resp. height) process of X . We will denote by d_τ and d_H their respective drift coefficients. Let us introduce the renewal measure U on $[0, \infty)^2$ of the ladder process (τ, H) , that is,

$$U(dt, dh) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\tau_u \in dt, H_u \in dh) du.$$

We assume that the measure $U(dt, dh)$ is absolutely continuous on $(0, \infty)^2$, and that its density $(r, s) \mapsto v(r, s)$ is continuous and strictly positive on $(0, \infty)^2$. We will also assume that 0 is regular for $(0, \infty)$ for X . Then for $t > 0$, we denote by g_t the unique time at which the process X hits its past supremum before t , that is

$$g_t = \sup\{s \leq t : X_s = \bar{X}_s\}.$$

We also define the first passage time by X above a level x by,

$$\tau_x^+ = \inf\{t : X_t > x\}.$$

Note that since we have assumed that 0 is regular for $(0, \infty)$ for X , this process is not a compound Poisson and in particular $\tau_x^+ = \inf\{t : X_t \geq x\}$, a.s.

From now on and throughout this section we fix $x > 0$ and $u > 0$.

We begin with a characterisation of the distribution of the first passage bridge. Roughly speaking, the latter is a process with finite and deterministic length u , whose law is this of the process $(X_s, 0 \leq s \leq u)$ given $X_u = \bar{X}_u = x$. A better way to describe this distribution is to consider the conditional law of the process $(X_s, 0 \leq s \leq g_t)$ given g_t and X_{g_t} , for some $t > 0$. (We also refer to Theorem 5.1.5 below for another description of the first passage bridge.)

Theorem 5.1.4. *Let s be such that $0 < s < u$. Let $t > u$, then the law of the process $(X_s, 0 \leq s \leq g_t)$ given $g_t = u$ and $X_{g_t} = x$ does not depend on t (in the sense that t can be replaced by any other value $t' > u$). A regular version of this conditional distribution is given on the σ -field $\mathcal{F}_s$ as follows,*

$$\mathbb{P}(\Lambda_s, s < \tau_x^+ | g_t = u, X_{g_t} = x) = \frac{1}{v(u, x)} \mathbb{E} \left(v(u - s, x - X_s) \mathbb{I}_{\Lambda_s} \mathbb{I}_{\{s < \tau_x^+\}} \right), \quad (5.6)$$

for all $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$.

If 0 is not regular for $(-\infty, 0)$, then the result is still valid in the case $u = t$.

Define the domain $R = [0, u] \times (-\infty, x] \setminus (u, x)$. We will say that a function $h(s, y)$ is invariant for the Lévy process $\{(v, X_v), v \geq 0\}$ killed at time $\sigma = \inf\{v : (v, X_v) \in R^c\} = \tau_x^+ \wedge u$, if for every $(s, y) \in [0, u) \times (-\infty, x)$ and $v \geq 0$,

$$\mathbb{E}_{s,y}(h(v, X_v), v < \sigma) = h(s, y).$$

Here we have denoted by $\mathbb{P}_{s,y}$ the probability under which $\{(v, X_v), v \geq 0\}$ has the same law as the process $\{(s + v, y + X_v), v \geq 0\}$ under $\mathbb{P}$. Moreover the function h is harmonic for the process $\{(v, X_v), v \geq 0\}$ killed at time σ if for any open set O such that $\overline{O \cap R}$ is non empty, compact and contained in R and for every $(s, y) \in [0, u) \times (-\infty, x)$,

$$\mathbb{E}_{(s,y)}(h(T, X_T), T < \sigma) = h(s, y), \quad (5.7)$$

where $T = \inf\{s : (s, X_s) \in R \setminus O\}$. It follows from classical arguments that an invariant function is also harmonic.

Corollary 5.1.1. *The function $(s, y) \mapsto v(u - s, x - y)$ is invariant for the process $\{(s, X_s), s \geq 0\}$ killed at time σ .*

Then we define the first passage bridge of X with length u from 0 to $x > 0$ as the Doob h -transform of the strong Markov process $\{(s, X_s), s \geq 0\}$ killed at time $\sigma = \inf\{s : (s, X_s) \in R^c\} = \tau_x^+ \wedge u$. We denote by $\mathbb{P}_{u,x}^b$ this law which is defined on each σ -field $\mathcal{F}_s$ such that $s < u$, by

$$\mathbb{P}_{u,x}^b(\Lambda_s) = \frac{1}{v(u, x)} \mathbb{E} \left(v(u - s, x - X_s) \mathbb{I}_{\Lambda_s} \mathbb{I}_{\{s < \tau_x^+\}} \right), \quad s < u, \Lambda_s \in \mathcal{F}_s.$$

The following proposition completes the characterization of the law $\mathbb{P}_{u,x}^b$.

Proposition 5.1.2. *The first passage bridge from 0 to x with length u reaches x for the first time at time u , with probability one. Moreover if we define the process at time u under $\mathbb{P}_{u,x}^b$ to be $X_u = x$, $\mathbb{P}_{u,x}^b$ -a.s., then the level x is attained continuously, that is*

$$\mathbb{P}_{u,x}^b(X_{u-} = X_u = \overline{X}_u = x, \overline{X}_s < x, 0 \leq s < u) = 1.$$

Let us mention that first passage bridges of Lévy processes had already been defined in the particular case of stable processes with no positive jumps, see [8] and [18]. Note that here we have defined the first passage bridge law $\mathbb{P}_{u,x}^b$ as an h -transform of the bivariate process $\{(s, X_s), s \geq 0\}$ killed at time σ . Therefore, the bivariate process $(s, X_s)_{s \geq 0}$ under the probability measure $\mathbb{P}_{u,x}^b$ is a homogeneous strong Markov process, whereas the process $(X_s)_{s \geq 0}$ under $\mathbb{P}_{u,x}^b$ is an inhomogeneous strong Markov process.

Now we can define the law of the Lévy process X conditioned to be absorbed by a curve at its supremum. Recall from Subsection 5.1.1 that $\{(s, f(s)) : s > 0\}$ is the graph of a continuous non increasing function $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$. Recall also the definition of the domain $\mathcal{D}$. Let $m(ds)$ be some measure as in Theorem 5.1.1 and h be the function defined on $\mathcal{D}$ as in (5.3). We call the law

of the Lévy process X conditioned to be absorbed by the curve $\{(s, f(s)) : s > 0\}$ at its supremum the following probability measure

$$\mathbb{P}^f(\cdot) = \frac{1}{h(0, 0)} \int_{(0, \infty)} \mathbb{P}_{s, f(s)}^b(\cdot) v(s, f(s)) m(ds). \quad (5.8)$$

From Proposition 5.1.2, under the probability measure $\mathbb{P}_{s, f(s)}^b$, the process X has life time $\zeta = \inf\{t : X_t = f(t)\}$, hence the same is true under the probability measure $\mathbb{P}^f$.

Recall the ladder process (τ, H) of X from the beginning of this subsection and let $\mathbb{P}^C$ be the law defined in (5.4) relatively to (τ, H) and recall that $S = \inf\{t : H_t \geq f(\tau_t)\}$. Then the next proposition shows that the probability measure $\mathbb{P}^C$ can be obtained from the probability measure $\mathbb{P}^f$ in this particular case.

Proposition 5.1.3. *The law of the process (τ, H) under the probability measure $\mathbb{P}^f$ is the same as under the probability measure $\mathbb{P}^C$.*

Conditioning a Lévy process to be absorbed by a curve cannot be done as formally as for bivariate subordinators, that is directly through the means of an h -transform. An artifice such as the measure (5.8) has to be introduced. However, Proposition 5.1.3 shows that conditioning the Lévy process X to be absorbed by a curve at its supremum in this way imply the same (formal) conditioning for the bivariate subordinator (τ, H) .

We say that a function $y \mapsto k(y)$ is excessive for the Lévy process X killed at time τ_x^+ if for all $y < x$, and for all $s \geq 0$,

$$\mathbb{E}_y \left(k(X_s) \mathbb{I}_{\{s < \tau_x^+\}} \right) \leq k(y),$$

and if moreover $\lim_{s \rightarrow 0} \mathbb{E}_y \left(k(X_s) \mathbb{I}_{\{s < \tau_x^+\}} \right) = k(y)$. We say that an excessive function $y \mapsto k(y)$ is harmonic for the Lévy process X killed at time τ_x^+ if for any open set V such that $\overline{V \cap (-\infty, x)}$ is compact and contained in $(-\infty, x)$ and for all $y < x$,

$$\mathbb{E}_y \left(k(X_T) \mathbb{I}_{\{T < \tau_x^+\}} \right) = k(y),$$

where $T = \inf\{s : X_s \in (-\infty, x) \setminus V\}$. Then let us denote by w the density of the renewal measure of the ladder height process H .

Corollary 5.1.2. *Assume that w is continuous on $(0, \infty)$. Then the function $y \mapsto w(x - y)$ is excessive and harmonic for the process $(X_s)_{s \geq 0}$ killed at time τ_x^+ .*

The latter result was obtained in [66] where w is not supposed to be continuous, see Theorem 1 therein. The author uses a different method based on excursion theory. The proof we provide below is actually much simpler. As for the previous results, it is natural to consider the Doob h -transform obtained from the function $y \mapsto w(x - y)$ and the process $(X_s)_{s \geq 0}$ killed at time τ_x^+ , that is the process X under the family of probability measures,

$$\mathbb{P}_y^*(\Lambda_t, t < \zeta) = \frac{1}{w(x - y)} \mathbb{P}_y(\Lambda_t, t < \tau_x^+), \quad \Lambda_t \in \mathcal{F}_t, y < x.$$

This stochastic process is known as the Lévy process X conditioned to be absorbed (or to die) at x . It was defined in [12] where some of its basic properties are stated. In particular, it stays below the level x and hits this level continuously almost surely. Then the process dies out after hitting x . These properties can be summarized in,

$$\mathbb{P}_y^*(X_t < x, 0 \leq t < \zeta = \inf\{t : X_{t-} = x\} < \infty) = 1.$$

As usual we set $\mathbb{P}^* := \mathbb{P}_0^*$.

The following theorem provides an alternative way to characterize the first passage bridge whose law is obtained here by conditioning the process $(X_s, 0 \leq s \leq u)$ on $g_{\tau_z^+} = u$ and $\bar{X}_{\tau_z^+} = x$, for $z \geq x$. This is to be compared with Theorem 5.1.4, where g_t , for $t > u$ plays the same role as $g_{\tau_z^+}$. This result will be applied in Theorem 5.1.6 below to a pathwise construction of the process X conditioned to be absorbed at x , i.e. $(X, \mathbb{P}^*)$. (We emphasize that each probability measure $\mathbb{P}_y^*$, for $y < x$, depends on x .)

Theorem 5.1.5. *Let z be such that $z \geq x$. Then the law of the process $(X_s, 0 \leq s \leq g_{\tau_z^+})$ given $g_{\tau_z^+} = u$ and $\bar{X}_{\tau_z^+} = x$ does not depend on z . (Note that $\bar{X}_{\tau_z^+} = X_{g_{\tau_z^+}}$, a.s.) A regular version of this conditional distribution is given on each σ -field $\mathcal{F}_s$, $s \geq 0$ as follows,*

$$\mathbb{P}(\Lambda_s, s < \tau_x^+ \mid g_{\tau_z^+} = u, \bar{X}_{\tau_z^+} = x) = \frac{1}{v(u, x)} \mathbb{E} \left(v(u - s, x - X_s) \mathbb{I}_{\Lambda_s} \mathbb{I}_{\{s < \tau_x^+\}} \right), \quad (5.9)$$

for all $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$.

As announced above, we now focus on the case where the Lévy process X is stable. The scaling property allows us to provide a construction of the process conditioned to be absorbed at x , $(X, \mathbb{P}^*)$ from the path of the unconditioned process $(X, \mathbb{P})$.

Theorem 5.1.6. *Assume that X is a stable process with index $\alpha \in (0, 2]$ and set*

$$K_x := \frac{x}{\bar{X}_{\tau_x^+}} = \frac{x}{X_{g_{\tau_x^+}}}.$$

Then under $\mathbb{P}$ the process

$$\left(K_x X_{t(K_x)^{-\alpha}}, t < g_{\tau_x^+} (K_x)^\alpha \right)$$

is independent of $\bar{X}_{\tau_x^+}$ and it has the same law as the process X under $\mathbb{P}^*$. In particular, the lifetime of $(X, \mathbb{P}^*)$ has the same law as the random variable $g_{\tau_x^+} (K_x)^\alpha$ under $\mathbb{P}$.

Such a construction was obtained in [20] in the particular case where $(X, \mathbb{P})$ is a stable subordinator, see Theorem 4 therein. Note that the proof in the latter work is quite different from the one we provide here.

5.2 Proofs

5.2.1 Proof of Theorem 5.1.1

In what follows, we agree that $p_t(y, z) = 0$ and $v(y, z) = 0$ whenever $y < 0$ or $z < 0$.

Let us first prove that h is excessive. Recall that $h(y, z) := \int_{(0, \infty)} v(u - y, f(u) - z) m(du)$, where $m(du)$ is some non-zero Borel measure on $(0, \infty)$ such that $h(y, z) < \infty$ for all $(y, z) \in \mathcal{D}$. Since $\mathbb{E}_{(y, z)}(h(Y_t, Z_t), t < S) \leq \mathbb{E}_{(y, z)}(h(Y_t, Z_t))$, it suffices to prove that $\mathbb{E}_{(y, z)}(h(Y_t, Z_t)) \leq h(y, z)$. Then

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(y, z)}(h(Y_t, Z_t)) &= \int_{[0, \infty)} m(du) \int_{[0, \infty)^2} v(u - y', f(u) - z') p_t(y' - y, z' - z) dy' dz' \\ &= \int_{[0, \infty)} m(du) \int_0^\infty \left(\int_{[0, \infty)^2} p_s(u - y', f(u) - z') p_t(y' - y, z' - z) dy' dz' \right) ds \\ &= \int_{[0, \infty)} m(du) \int_0^\infty p_{s+t}(u - y, f(u) - z) ds \\ &\leq \int_{[0, \infty)} m(du) \int_0^\infty p_s(u - y, f(u) - z) ds = h(y, z), \end{aligned}$$

where the third equality follows from the Chapman-Kolmogorov's identity. Moreover from Lemma 5.1.1, $\mathbb{P}_{(y,z)}(S > 0) = 1$, so that from the continuity of $(y, z) \mapsto p_s(y, z)$ on $(0, \infty)^2$ for each $s > 0$, the right continuity of (Y, Z) at 0 and Fatou's lemma, we have $\mathbb{P}_{(y,z)}$ -a.s.,

$$h(Y_0, Z_0) = \int_{[0,\infty)} m(du) \int_0^\infty \lim_{t \rightarrow 0} p_s(u - Y_t, f(u) - Z_t) ds \leq \liminf_{t \rightarrow 0} h(Y_t, Z_t) \mathbb{1}_{\{t < S\}}.$$

Then applying Fatou's lemma again together with the fact that h is excessive yields,

$$\begin{aligned} h(y, z) = \mathbb{E}_{(y,z)}(h(Y_0, Z_0)) &\leq \mathbb{E}_{(y,z)}(\liminf_{t \rightarrow 0} h(Y_t, Z_t) \mathbb{1}_{\{t < S\}}) \\ &\leq \liminf_{t \rightarrow 0} \mathbb{E}_{(y,z)}(h(Y_t, Z_t) \mathbb{1}_{\{t < S\}}) \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow 0} \mathbb{E}_{(y,z)}(h(Y_t, Z_t) \mathbb{1}_{\{t < S\}}) \leq h(y, z). \end{aligned}$$

Let us now prove that h is harmonic for the killed process when none of the coordinates Y and Z are compound Poisson process or if f is decreasing. Let B be an open set such that $\overline{B} \cap \overline{\mathcal{D}}$ is compact and contained in $\mathcal{D}$ and set $T = \inf\{t : (Y_t, Z_t) \in \mathcal{D} \setminus B\}$. Then recall that the dual process of (Y, Z) with respect to the Lebesgue measure is given by $(\hat{Y}, \hat{Z}) = (-Y, -Z)$. We will denote by $\hat{\mathbb{P}}_{(y,z)}$ the probability measure under which $(\hat{Y}, \hat{Z})$ is issued from (y, z) , i.e. $\hat{\mathbb{P}}_{(y,z)}((\hat{Y}_0, \hat{Z}_0) = (y, z)) = 1$. Note that $\{T < \infty\} = \{T < S\}$, $\mathbb{P}_{(y,z)}$ -a.s. Then applying Theorem (1.16), p.261 of [10], we obtain for all $(y', z') \in \mathcal{D}$, and $y > 0$,

$$\mathbb{E}_{(y',z')}(v(y - Y_T, f(y) - Z_T), T < S) = \hat{\mathbb{E}}_{(y,f(y))}(v(\hat{Y}_{\hat{T}} - y', \hat{Z}_{\hat{T}} - z'), \hat{T} < \infty), \quad (5.10)$$

where $\hat{T} = \inf\{t : (\hat{Y}_t, \hat{Z}_t) \in \mathcal{D} \setminus B\}$. But note that $(y, f(y)) \in \mathcal{D} \setminus B$, so that if none of the coordinates Y and Z is a compound Poisson process or if f is decreasing, then $\hat{T} = 0$, $\hat{\mathbb{P}}_{(y,f(y))}$ -a.s. Therefore $(\hat{Y}_{\hat{T}}, \hat{Z}_{\hat{T}}) = (y, f(y))$, $\hat{\mathbb{P}}_{(y,f(y))}$ -a.s. and (5.10) becomes,

$$\mathbb{E}_{(y',z')}(v(y - Y_T, f(y) - Z_T), T < S) = v(y - y', f(y) - z'),$$

which proves 2.

Then we prove that h is positive on $\mathcal{D}$ when the support of $m(du)$ is dense in $[0, \infty)$. Assume that $h(y, z) = \int_{(0,\infty)} v(u - y, f(u) - z) m(du) = 0$ for some $(y, z) \in \mathcal{D}$. From our assumption on $m(du)$, there is $u > 0$ such that $u > y$ and $f(u) > z$ satisfying $v(u - y, f(u) - z) = 0$. This implies that for $y' = u - y$ and $z' = f(u) - z$ and for λ -almost every $t > 0$, $p_t(y', z') = 0$. Then let $t > 0$ be such that $p_t(y', z') = 0$. From Theorem (3.3) in [69], the density of (Y_t, Z_t) is positive on the interior of its closed support, that is the set $(d_Y t, \infty) \times (d_Z t, \infty)$, where d_Y and d_Z are the drifts of Y and Z . Since t can be chosen arbitrarily small, we can suppose that $(y', z') \in (d_Y t, \infty) \times (d_Z t, \infty)$, which contradicts the fact that $p_t(y', z') = 0$.

5.2.2 Proof of Proposition 5.1.1

Positivity of h follows from the assumption and part 3. of Theorem 5.1.1. Then part 1. is easily derived from Theorem 2.1 in [19]

In order to prove part 2., let $u \geq 0$ and $0 \leq z \leq f(u)$, then

$$\int_{\{y \geq 0: z < f(y)\}} v(u - y, f(u) - z) dy \leq \int_0^\infty v(y, f(u) - z) dy = v^Z(f(u) - z),$$

where v^Z is the density of the renewal measure of Z . From this inequality, we derive that

$$\int_{\{y \geq 0: z < f(y)\}} h(y, z) dy \leq \int_0^\infty v^Z(f(u) - z) m(du),$$

so that by integrating in z ,

$$\int_{\mathcal{D}} h(y, z) dy dz \leq \int_0^\infty \int_0^{f(u)} v^Z(z) dz m(du).$$

and it is easily seen that the right hand side of the above inequality is finite whenever f vanishes at some finite value and $m(du)$ is finite on compact sets or $m(du)$ has finite mass. This shows that h is λ -a.e. finite on $\mathcal{D}$, λ being the Lebesgue measure on this set.

Recall that $(y, z) \mapsto v(y, z)$ is assumed to be bounded and continuous on $\mathcal{D}$ and $m(du)$ is assumed to have a finite mass. Then we derive from the expression of h and the Lebesgue theorem of dominated convergence that h is also bounded and continuous on $\mathcal{D}$.

5.2.3 Proof of Theorem 5.1.2

Part 1. is a straightforward consequence of (5.4). In order to prove part 2., let $\varepsilon \in (0, f(0))$ and define the strip,

$$A_\varepsilon = \{(y, z) \in \mathcal{D} : f(y) - \varepsilon < z < f(y)\}.$$

Then from (5.7), $\mathbb{P}_{(y,z)}^C(T_{A_\varepsilon} < \zeta) = 1$ for all $(y, z) \in \mathcal{D}$, where $T_{A_\varepsilon} = \inf\{t : (Y_t, Z_t) \in A_\varepsilon\}$. Now set $T_n := T_{A_{1/n}}$, for $n \in \mathbb{N}$. Then (T_n) is a non decreasing sequence of stopping times such that $T_n < \zeta$, therefore $T := \lim_n T_n \leq \zeta$. Moreover, $Z_{T_n} < f(Y_{T_n})$ and $Z_{T_n} - f(Y_{T_n}) \leq 1/n$, $\mathbb{P}_{(y,z)}^C$ -a.s. Taking the limit as n goes to ∞ yields $f(Y_{T-}) = Z_{T-}$, $\mathbb{P}_{(y,z)}^C$ -a.s. Since the coordinates of (Y, Z) are non decreasing and f is non increasing, this shows that $f(Y_T) \leq f(Y_{T-}) = Z_{T-} \leq Z_T$, $\mathbb{P}_{(y,z)}^C$ -a.s., in particular, $\mathbb{P}_{(y,z)}^C$ -a.s., $(Y_T, Z_T) \notin \mathcal{D}$ so that $T = \zeta$, $\mathbb{P}_{(y,z)}^C$ -a.s. and part 2. is proved.

In order to prove part 3., let us recall from above that (Y_{T_n}, Z_{T_n}) converges $\mathbb{P}_{(y,z)}^C$ -a.s. to $(Y_{\zeta-}, Z_{\zeta-})$. Assume first that $m(dv) = \delta_u(dv)$, for some $u \in (0, \infty)$. Then $h(y, z) = v(u - y, f(u) - z)$, moreover, for all n ,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{v(u, f(u))} \mathbb{E}^Q(v(u - Y_{T_n}, f(u) - Z_{T_n}) \mathbb{1}_{\{T_n < S\}}) \\ &= \mathbb{P}^C(Y_{T_n} \leq u, Z_{T_n} \leq f(u)). \end{aligned}$$

Hence from the convergence we just recalled, $\mathbb{P}^C(Y_{\zeta-} \leq u, Z_{\zeta-} \leq f(u)) = 1$ and since $f(Y_{\zeta-}) = Z_{\zeta-}$, $\mathbb{P}_{(y,z)}^C$ -a.s., it follows that $Y_{\zeta-} = u$, $\mathbb{P}_{(y,z)}^C$ -a.s. Now assume that $m(du)$ is any measure such as in Theorem 5.1.1 and let g be a bounded and continuous function defined on $(0, \infty)$. Then

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^C(g(Y_{T_n})) &= \frac{1}{h(0, 0)} \mathbb{E}^Q(h(Y_{T_n}, Z_{T_n}) g(Y_{T_n}) \mathbb{1}_{\{T_n < S\}}) \\ &= \frac{1}{h(0, 0)} \int_{(0, \infty)} m(du) \mathbb{E}^Q(v(u - Y_{T_n}, f(u) - Z_{T_n}) g(Y_{T_n}) \mathbb{1}_{\{T_n < S\}}) \\ &= \frac{1}{h(0, 0)} \int_{(0, \infty)} m(du) v(u, f(u)) \tilde{\mathbb{E}}^C(g(Y_{T_n}) \mathbb{1}_{\{Y_{T_n} \leq u, Z_{T_n} \leq f(u)\}}), \end{aligned}$$

where $\tilde{\mathbb{E}}^C$ is the Doob h -transform associated to the measure $\delta_u(dv)$. But from the above arguments, $\lim_n \tilde{\mathbb{E}}^C(g(Y_{T_n}) \mathbb{1}_{\{Y_{T_n} \leq u, Z_{T_n} \leq f(u)\}}) = g(u)$ and the result follows from dominated convergence.

5.2.4 Proof of Theorem 5.1.3

We begin the proof of Theorem 5.1.3 with the following proposition which gives the distribution of $(T_f, (Y_{T_f-}, Z_{T_f-}), (Y_{T_f}, Z_{T_f}))$.

Proposition 5.2.1. *For any bivariate subordinator and any non decreasing continuous function $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$,*

$$\mathbb{P}((Y_{S-}, Z_{S-}) \in (dy, dz), (Y_S, Z_S) \in (du, dv), S \in dt) = \pi(du - y, dv - z) p_t(dy, dz) dt,$$

for $t \geq 0$, $0 \leq y \leq u$, $0 \leq z \leq v$, $z \leq f(y)$, $f(u) \leq v$. In particular, if $v(dy, dz)$ is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on $[0, \infty)^2$ and $v(y, z)$ denotes its density, the law of (Y_{S-}, Z_{S-}) is given by

$$\mathbb{P}((Y_{S-}, Z_{S-}) \in (dy, dz)) = \int_{u \geq y, v \geq z, f(u) \leq v} v(y, z) \pi(du - y, dv - z) dy dz, \quad y, z \geq 0, z \leq f(y). \quad (5.11)$$

Proof. Recall that $t \mapsto \Delta(Y, Z)_t = (Y, Z)_t - (Y, Z)_{t-}$ is a Poisson point process whose characteristic measure is the Lévy measure π of (Y, Z) . Then applying the compensation formula, we obtain that for all Borel functions $k : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ and $g_1, g_2 : [0, \infty)^2 \rightarrow [0, \infty)$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(k(S)g_1(Y_{S-}, Z_{S-})g_2(Y_S, Z_S)) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{t \geq 0} k(t)g_1(Y_{t-}, Z_{t-})g_2((Y_t, Z_t) + \Delta(Y, Z)_t) \mathbb{I}_{\{Z_{t-} \leq f(Y_{t-}), f(Y_{t-} + \Delta Y_t) \leq Z_{t-} + \Delta Z_t\}} \right) \\ &= \int_0^\infty dt k(t) \mathbb{E} (g_1(Y_t, Z_t) \mathbb{I}_{\{Z_t \leq f(Y_t)\}} \\ & \quad \int_{s_1, s_2 \geq 0} \pi(ds_1, ds_2) g_2((Y_t + s_1, Z_t + s_2)) \mathbb{I}_{\{f(Y_t + s_1) \leq Z_t + s_2\}}) \\ &= \int_0^\infty dt k(t) \int_{s_1, s_2 \geq 0} \pi(ds_1, ds_2) \int_{z \leq f(y), f(y+s_1) \leq z+s_2} p_t(dy, dz) g_1(y, z) g_2(y + s_1, z + s_2) \\ &= \int_0^\infty dt k(t) \int_{0 \leq y \leq u, 0 \leq z \leq v, z \leq f(y), f(u) \leq v} \pi(du - y, dv - z) p_t(dy, dz) g_1(y, z) g_2(u, v), \end{aligned}$$

which proves our result. $\square$

The next step for the proof of Theorem 5.1.3 is the following approximation of the function h .

Lemma 5.2.1. *Assume that f is affine and let $m(du)$ be the Lebesgue measure on $[y_1, y_2]$, for $0 < y_1 < y_2 < \infty$. Then the function h can be approximated from the following limit,*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}_{(y,z)}(f(Y_{S-}) - Z_{S-} < \varepsilon)}{\mathbb{P}_{(y',z')}(f(Y_{S-}) - Z_{S-} < \varepsilon)} = \frac{h(y, z)}{h(y', z')}, \quad (y, z), (y', z') \in \mathcal{D}.$$

Proof. Let us denote by $\pi(du, dv)$ the Lévy measure of (Y, Z) . Then Proposition 5.2.1 allows us to write

$$\mathbb{P}(f(Y_{S-}) - Z_{S-} < \varepsilon) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{f(y)-\varepsilon}^{f(y)} \int_{u \geq y, v \geq z, f(u) \leq v} v(y, z) \pi(du - y, dv - z) dy dz.$$

From the uniform continuity of $(y, z) \mapsto v(y, z)$ on any compact set, we derive from the above equality that as $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(f(Y_{S-}) - Z_{S-} < \varepsilon) &\sim \int_{y_1}^{y_2} v(y, f(y)) \int_{f(y)-\varepsilon}^{f(y)} \int_{u \geq y, v \geq z, f(u) \leq v} \pi(du - y, dv - z) dy dz \\ &= \int_{y_1}^{y_2} v(y, f(y)) \left(\int_0^\varepsilon \int_{u \geq 0, 0 < f(y) - f(y+u) < z < v + f(y) - f(y+u)} \pi(du, dv) dz \right) dy. \end{aligned}$$

Hence if f is affine, $f(y) = f(0) - ay$, then

$$\mathbb{P}(f(Y_{S-}) - Z_{S-} < \varepsilon) \sim \int_0^\varepsilon \int_{u \geq 0, 0 < au < z < v+au} \pi(du, dv) dz \int_{y_1}^{y_2} v(y, f(y)) dy,$$

and this gives the result. $\square$

We now prove Theorem 5.1.3, that is, for all $(y, z) \in \mathcal{D}$, $t > 0$ and $\Lambda \in \mathcal{F}_t$,

$$\mathbb{P}_{(y,z)}^C(\Lambda, t < \zeta) = \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{P}_{(y,z)}(\Lambda, t < T_{A_\delta} | T_{A_\varepsilon} < S).$$

Let $(y, z) \in \mathcal{D}$, $t > 0$ and $0 < \varepsilon < \delta$ and note that $T_{A_\delta} \leq T_{A_\varepsilon} \leq S$. Since $\{T_{A_\varepsilon} < S\} = \{(Y_{S-}, Z_{S-}) \in A_\varepsilon\}$ and by the Markov property applied to T_{A_δ} , we have, for all $\Lambda \in \mathcal{F}_t$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(y,z)}(\Lambda, t < T_{A_\delta} | T_{A_\varepsilon} < S) &= \mathbb{P}_{(y,z)}(\Lambda, t < T_{A_\delta} | (Y_{S-}, Z_{S-}) \in A_\varepsilon) \\ &= \frac{\mathbb{E}_{(y,z)} \left(\mathbb{I}_\Lambda \mathbb{I}_{\{t < T_{A_\delta}\}} \mathbb{I}_{\{(Y_{S-}, Z_{S-}) \in A_\varepsilon\}} \right)}{\mathbb{P}_{(y,z)}((Y_{S-}, Z_{S-}) \in A_\varepsilon)} \\ &= \mathbb{E}_{(y,z)} \left(\mathbb{I}_\Lambda \mathbb{I}_{\{t < T_{A_\delta}\}} \frac{\mathbb{P}_{(Y_{T_{A_\delta}}, Z_{T_{A_\delta}})}((Y_{S-}, Z_{S-}) \in A_\varepsilon)}{\mathbb{P}_{(y,z)}((Y_{S-}, Z_{S-}) \in A_\varepsilon)} \right) \end{aligned}$$

and by Fatou's lemma and Lemma 5.2.1, we obtain

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}_{(y,z)}(\Lambda, t < T_{A_\delta} | T_{A_\varepsilon} < S) \geq \mathbb{E}_{(y,z)} \left(\mathbb{I}_\Lambda \mathbb{I}_{\{t < T_{A_\delta}\}} \frac{h(Y_{T_{A_\delta}}, Z_{T_{A_\delta}})}{h(y, z)} \right). \quad (5.12)$$

Applying inequality (5.12) to Λ^c , we obtain

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathbb{P}_{(y,z)}(t < T_{A_\delta} | T_{A_\varepsilon} < S) - \mathbb{P}_{(y,z)}(\Lambda, t < T_{A_\delta} | T_{A_\varepsilon} < S)) \\ \geq \mathbb{E}_{(y,z)} \left(\mathbb{I}_{\Lambda^c} \mathbb{I}_{\{t < T_{A_\delta}\}} \frac{h(Y_{T_{A_\delta}}, Z_{T_{A_\delta}})}{h(y, z)} \right). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Then note that $A = (0, \infty)^2 \cap (\mathcal{D} \setminus A_\delta)$ is an opened set included in $\mathcal{D}$ and since h is harmonic, we have $\mathbb{E}_{(y,z)}^\mathbb{Q}(h(Y_{T_{A_\delta}}, Z_{T_{A_\delta}}), T_{A_\delta} < S) = h(y, z)$ so that (if $\mathbb{P}_{(y,z)}(T_{A_\delta} < S) = 1$),

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{(y,z)} \left(\mathbb{I}_{\Lambda^c} \mathbb{I}_{\{t < T_{A_\delta}\}} \frac{h(Y_{T_{A_\delta}}, Z_{T_{A_\delta}})}{h(y, z)} \right) \\ &= \mathbb{E}_{(y,z)} \left(\mathbb{I}_{\{t < T_{A_\delta}\}} \frac{h(Y_{T_{A_\delta}}, Z_{T_{A_\delta}})}{h(y, z)} \right) - \mathbb{E}_{(y,z)} \left(\mathbb{I}_\Lambda \mathbb{I}_{\{t < T_{A_\delta}\}} \frac{h(Y_{T_{A_\delta}}, Z_{T_{A_\delta}})}{h(y, z)} \right) \\ &= \mathbb{P}_{(y,z)}^C(t < T_{A_\delta}) - \mathbb{E}_{(y,z)} \left(\mathbb{I}_\Lambda \mathbb{I}_{\{t < T_{A_\delta}\}} \frac{h(Y_{T_{A_\delta}}, Z_{T_{A_\delta}})}{h(y, z)} \right) \end{aligned}$$

Thus, (5.13) becomes

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{P}_{(y,z)}(\Lambda, t < T_{A_\delta} | T_{A_\varepsilon} < S) \leq \mathbb{E}_{(y,z)} \left(\mathbb{I}_\Lambda \mathbb{I}_{\{t < T_{A_\delta}\}} \frac{h(Y_{T_{A_\delta}}, Z_{T_{A_\delta}})}{h(y, z)} \right),$$

and we have

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{P}_{(y,z)}(\Lambda, t < T_{A_\delta} | T_{A_\varepsilon} < S) = \mathbb{E}_{(y,z)} \left(\mathbb{I}_\Lambda \mathbb{I}_{\{t < T_{A_\delta}\}} \frac{h(Y_{T_{A_\delta}}, Z_{T_{A_\delta}})}{h(y, z)} \right).$$

Using again Markov property at time t and the identity $\mathbb{E}_{(y,z)}^{\mathbb{Q}}(h(Y_{T_{A_\delta}}, Z_{T_{A_\delta}}), T_{A_\delta} < S) = h(y, z)$ in the right member, we finally obtain

$$\mathbb{E}_{(y,z)} \left(\mathbb{I}_\Lambda \mathbb{I}_{\{t < T_{A_\delta}\}} \frac{h(Y_{T_{A_\delta}}, Z_{T_{A_\delta}})}{h(y, z)} \right) = \mathbb{E}_{(y,z)} \left(\mathbb{I}_\Lambda \mathbb{I}_{\{t < T_{A_\delta}\}} \frac{h(Y_t, Z_t)}{h(y, z)} \right),$$

which proves that, for all $(y, z) \in \mathcal{D}$, $t > 0$, $\Lambda \in \mathcal{F}_t$ and $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}_{(y,z)}^C(\Lambda, t < T_{A_\delta}) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{P}_{(y,z)}(\Lambda, t < T_{A_\delta} | T_{A_\varepsilon} < S).$$

Finally, we conclude thanks to the monotone convergence theorem.

5.2.5 Proof of Theorem 5.1.4

We have to check that for all $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Lambda_s, s < g_t) &= \\ &= \int_{x \in [0, \infty)} \int_{u \in [s, t]} \mathbb{P}(\Lambda_s, s < \tau_x^+ | g_t = u, X_{g_t} = x) \mathbb{P}(g_t \in du, X_{g_t} \in dx) = \\ &= \int_{x \in [0, \infty)} \int_{u \in [s, t]} \frac{1}{v(u, x)} \mathbb{E} \left(v(u - s, x - X_s) \mathbb{I}_{\{\Lambda_s, s < \tau_x^+\}} \right) \mathbb{P}(g_t \in du, X_{g_t} \in dx). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Recall that under the current assumptions (that is 0 is regular for $(0, \infty)$ for X and the renewal measure of (τ, H) has density v) the joint law of (g_t, X_{g_t}) , according to Theorem 6 of [14], is given by

$$\mathbb{P}(g_t \in du, X_{g_t} \in dx) = v(u, x) n(t - u < \zeta) du dx + d_{\tau^*} \delta_{\{t\}}(du) v(t, x) dx, \quad (5.15)$$

where d_{τ^*} is the drift coefficient of the ladder time process of $-X$ and n is the characteristic measure of the excursions away from 0 of the reflected process $\bar{X} - X$. Then on the one hand, from (5.15),

$$\begin{aligned} & \int_{x \in [0, \infty)} \int_{u \in [s, t]} \frac{1}{v(u, x)} \mathbb{E} \left(v(u - s, x - X_s) \mathbb{I}_{\{\Lambda_s, s < \tau_x^+\}} \right) \mathbb{P}(g_t \in du, X_{g_t} \in dx) \\ &= \int_{x=0}^{\infty} \int_{u=s}^t \mathbb{E} \left(v(u - s, x - X_s) \mathbb{I}_{\{\Lambda_s, \bar{X}_s < x\}} \right) n(t - u < \zeta) du dx + \\ & \quad d_{\tau^*} \int_{x=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(v(t - s, x - X_s) \mathbb{I}_{\{\Lambda_s, \bar{X}_s < x\}} \right) dx \\ &= \mathbb{E} \left(\mathbb{I}_{\Lambda_s} \int_{x=\bar{X}_s}^{\infty} \left(\int_{u=0}^{t-s} v(u, x - X_s) n(t - s - u < \zeta) du + d_{\tau^*} v(t - s, x - X_s) \right) dx \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

On the other hand, we derive from (5.15) that

$$\mathbb{P}(y < \bar{X}_{t-s}) = \int_{z=y}^{\infty} \left(\int_{u=0}^{t-s} v(u, z) n(t - s - u < \zeta) du + d_{\tau^*} v(t - s, z) \right) dz,$$

so that

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Lambda_s, s < g_t) &= \mathbb{P}(\Lambda_s, \bar{X}_s < \bar{X}_{t-s} \circ \theta_s) = \mathbb{E} \left(\mathbb{I}_{\Lambda_s} \mathbb{P}_{X_s}(y < \bar{X}_{t-s})|_{y=\bar{X}_s} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\mathbb{I}_{\Lambda_s} \int_{x=\bar{X}_s}^{\infty} \left(\int_{u=0}^{t-s} v(u, x - X_s) n(t - s - u < \zeta) du + d_{\tau^*} v(t - s, x - X_s) \right) dx \right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Then comparing (5.16) and (5.17) gives (5.14).

5.2.6 Proof of Corollary 5.1.1

Recall that $\sigma = \tau_x^+ \wedge u$. Then it follows directly from Theorem 5.1.4 that for all $0 < s < u < t$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(v(u-s, x - X_s) \mathbb{1}_{\{s < \sigma\}} \right) &= \mathbb{E} \left(v(u-s, x - X_s) \mathbb{1}_{\{s < \tau_x^+\}} \right) \\ &= \mathbb{P}(s < \tau_x^+ \mid g_t = u, X_{g_t} = x) v(u, x). \end{aligned} \quad (5.18)$$

In order to prove that the function $(s, y) \mapsto v(u-s, x-y)$ is invariant for the process $\{(s, X_s), s \geq 0\}$ killed at time σ , first recall that since 0 is regular for $(0, \infty)$ for the Lévy process X under $\mathbb{P}$, X hits continuously at time g_t its past supremum before t , that is $X_{g_t} = X_{g_t-}$, almost surely. In particular,

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P} \left(s < g_t = \tau_{X_{g_t}}^+ \mid s < g_t \right) \\ &= \int_{u \in (s, t]} \int_{x \in [0, \infty)} \mathbb{P}(s < \tau_x^+ \mid g_t = u, X_{g_t} = x) \mathbb{P}(g_t \in du, X_{g_t} \in dx). \end{aligned}$$

Therefore, $\mathbb{P}(s < \tau_x^+ \mid g_t = u, X_{g_t} = x) = 1$, for $\mathbb{P}(g_t \in du, X_{g_t} \in dx)$ -a.e. u and x , on $(s, t) \times [0, \infty)$. From (5.15), $\mathbb{P}(g_t \in du, X_{g_t} \in dx)$ is absolutely continuous on $(0, t) \times (0, \infty)$ and from (5.18) and the continuity of v on $(0, \infty)^2$, $(u, x) \mapsto \mathbb{P}(s < \tau_x^+ \mid g_t = u, X_{g_t} = x)$ is continuous on $(0, t) \times (0, \infty)$, so that $\mathbb{P}(s < \tau_x^+ \mid g_t = u, X_{g_t} = x) = 1$, for all $(u, x) \in (s, t) \times (0, \infty)$. Then the result follows from (5.18).

5.2.7 Proof of Proposition 5.1.2

Let ε such that $0 < \varepsilon < u \wedge x$ and define $R_\varepsilon = [u - \varepsilon, u] \times [x - \varepsilon, x]$ and $T_\varepsilon = \inf\{s : (s, X_s) \in R_\varepsilon\}$. Then from the harmonicity of the function $(s, y) \mapsto v(u-s, x-y)$ stated in Corollary 5.1.1, $\mathbb{E} \left(v(u - T_\varepsilon, x - X_{T_\varepsilon}) \mathbb{1}_{\{T_\varepsilon < \tau_x^+ \wedge u\}} \right) = v(u, x)$, so that $\mathbb{P}_{u,x}^b(T_\varepsilon < u) = 1$, for all ε as above. It proves that $\mathbb{P}_{u,x}^b(X_{u-} = X_u) = 1$. Moreover, $\mathbb{P}_{u,x}^b(\bar{X}_s < x) = 1$ comes from the fact that $\{\bar{X}_s < x\} = \{s < \tau_x^+\}$ and the invariance of the function $(s, y) \mapsto v(u-s, x-y)$ for the process $\{(s, X_s), s \geq 0\}$ killed at time σ .

5.2.8 Proof of Proposition 5.1.3

Let $(\mathcal{G}_t)$ be the natural filtration generated by the process (τ, H) . We have to prove that for all $t \geq 0$ and $\Lambda_t \in \mathcal{G}_t$,

$$\mathbb{E}^f(\Lambda_t, \tau_t < \zeta) = \frac{1}{h(0, 0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(h(\tau_t, H_t) \mathbb{1}_{\Lambda_t}, t < \zeta), \quad (5.19)$$

where $\mathbb{P}^{\mathbb{Q}}$ has been defined in the beginning of Subsection 5.1.1. On the one hand, by definition of h ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(h(\tau_t, H_t) \mathbb{1}_{\Lambda_t}, t < \zeta) &= \int_{(0, \infty)} \mathbb{E}(v(u - \tau_t, f(u) - H_t) \mathbb{1}_{\Lambda_t}, t < S) m(du) \\ &= \int_{(0, \infty)} \mathbb{E}(v(u - \tau_t, f(u) - H_t) \mathbb{1}_{\Lambda_t}, H_t < f(\tau_t)) m(du) \\ &= \int_{(0, \infty)} \mathbb{E}(v(u - \tau_t, f(u) - H_t) \mathbb{1}_{\Lambda_t}, H_t < f(\tau_t), \tau_t < \tau_{f(u)}^+ \wedge u) m(du), \end{aligned} \quad (5.20)$$

where the last equality comes from the fact that $\{H_t < f(u)\} = \{\tau_t < \tau_{f(u)}^+\}$. On the other hand,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^f(\Lambda_t, \tau_t < \zeta) &= \frac{1}{h(0, 0)} \int_{(0, \infty)} \mathbb{P}_{u, f(u)}^b(\Lambda_t, \tau_t < u) v(u, f(u)) m(du) \\ &= \frac{1}{h(0, 0)} \int_{(0, \infty)} \mathbb{P}_{u, f(u)}^b(\Lambda_t, H_t < f(\tau_t), \tau_t < u) v(u, f(u)) m(du) \\ &= \frac{1}{h(0, 0)} \int_{(0, \infty)} \mathbb{E}(v(u - \tau_t, f(u) - H_t) \mathbb{1}_{\Lambda_t}, H_t < f(\tau_t), \tau_t < \tau_{f(u)}^+ \wedge u) m(du). \end{aligned} \quad (5.21)$$

where the second equality comes from the fact that $\mathbb{P}_{u, f(u)}^b(\bar{X}_{\tau_t} = H_t < f(\tau_t), \tau_t < u) = 1$, since the first passage bridge hit its overall supremum at time u . Equalities (5.20) and (5.21) imply (5.19) and our result is proved.

5.2.9 Proof of Corollary 5.1.2

Corollary 5.1.1 implies $\mathbb{E}(v(u - s, x - X_s) \mathbb{1}_{\{s < \tau_x^+ \wedge u\}}) = v(u, x)$ for all $s < u$. By integrating this identity in u and with a change of variables, we obtain,

$$\begin{aligned} \int_s^\infty \mathbb{E}(v(u - s, x - X_s) \mathbb{1}_{\{s < \tau_x^+ \wedge u\}}) du &= \mathbb{E}(w(x - X_s) \mathbb{1}_{\{s < \tau_x^+\}}) \\ &= \int_s^\infty v(u, x) du \leq w(x). \end{aligned}$$

Then $\lim_{s \rightarrow 0} \mathbb{E}(w(x - X_s) \mathbb{1}_{\{s < \tau_x^+\}}) = w(x)$ follows from the right continuity of X , the continuity of w and dominated convergence.

Now let V be an open set such that $\overline{V \cap (-\infty, x)}$ is compact and contained in $(-\infty, x)$ and set $T = \inf\{s : X_s \in (-\infty, x) \setminus V\}$. Then on the one hand, from Corollary 5.1.1, for all $u > 0$, $\mathbb{E}(v(u - T, x - X_T) \mathbb{1}_{\{T < \tau_x^+ \wedge u\}}) = v(u, x)$, so that

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbb{E}(v(u - T, x - X_T) \mathbb{1}_{\{T < \tau_x^+ \wedge u\}}) du &= w(x) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_T^\infty v(u - T, x - X_T) \mathbb{1}_{\{T < \tau_x^+ \wedge u\}} du\right) = \mathbb{E}(w(x - X_T) \mathbb{1}_{\{T < \tau_x^+\}}), \end{aligned}$$

as required.

5.2.10 Proof of Theorem 5.1.5

We have to check that for all $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Lambda_s, s < g_{\tau_z^+}^-) &= \\ \int_{x \in [0, z]} \int_{u \geq 0} \mathbb{P}(\Lambda_s, s < \tau_x^+ | g_{\tau_z^+}^- = u, \bar{X}_{\tau_z^+}^- = x) \mathbb{P}(g_{\tau_z^+}^- \in du, \bar{X}_{\tau_z^+}^- \in dx) &= \\ \int_{x \in [0, z]} \int_{u \geq 0} \frac{1}{v(u, x)} \mathbb{E}(v(u - s, x - X_s) \mathbb{1}_{\{\Lambda_s, s < \tau_x^+\}}) \mathbb{P}(g_{\tau_z^+}^- \in du, \bar{X}_{\tau_z^+}^- \in dx). \end{aligned} \quad (5.22)$$

According (11) and Proposition 7 in [26], the joint distribution of $(g_{\tau_z^+}^-, \bar{X}_{\tau_z^+}^-)$ is given by

$$p(g_{\tau_z^+}^- \in du, \bar{X}_{\tau_z^+}^- \in dx) = \bar{\pi}(z - x) v(u, x) du dx + v(u, z) \delta_z(dx), \quad u \geq 0, z > 0, x \in [0, z], \quad (5.23)$$

so that on the one hand,

$$\begin{aligned}
& \int_{x \in [0, z]} \int_{u \geq 0} \frac{1}{v(u, x)} \mathbb{E} \left(v(u - s, x - X_s) \mathbb{I}_{\{\Lambda_s, s < \tau_x^+\}} \right) \mathbb{P}(g_{\tau_z^+ -} \in du, \bar{X}_{\tau_z^+ -} \in dx) \\
&= \int_{u \geq 0} \left(\int_{x \in [0, z]} \mathbb{E} \left(v(u - s, x - X_s) \mathbb{I}_{\{\Lambda_s, s < \tau_x^+\}} \right) \bar{\pi}(z - x) dx \right. \\
&\quad \left. + \mathbb{E} \left(v(u - s, z - X_s) \mathbb{I}_{\{\Lambda_s, s < \tau_z^+\}} \right) \right) du = \\
&= \mathbb{E} \left(\mathbb{I}_{\Lambda_s} \left(\int_{x=\bar{X}_s}^z w(x - X_s) \mathbb{I}_{\{s < \tau_x^+\}} \bar{\pi}(z - x) dx + \mathbb{E} \left(w(z - X_s) \mathbb{I}_{\{s < \tau_z^+\}} \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

On the other hand, applying (5.23) again,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\Lambda_s, s < g_{\tau_z^+ -}) = \mathbb{P} \left(\Lambda_s, \bar{X}_s \leq \bar{X}_{g_{\tau_z^+ -}} \right) = \mathbb{E} \left(\mathbb{I}_{\Lambda_s} \mathbb{P}_{X_s} \left(y \leq \bar{X}_{g_{\tau_z^+ -}} \right)_{y=\bar{X}_s} \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\mathbb{I}_{\Lambda_s} \left(\int_{x=\bar{X}_s}^z w(x - X_s) \mathbb{I}_{\{s < \tau_x^+\}} \bar{\pi}(z - x) dx + \mathbb{E} \left(w(z - X_s) \mathbb{I}_{\{s < \tau_z^+\}} \right) \right) \right),
\end{aligned}$$

which gives the result.

5.2.11 Proof of Theorem 5.1.6

In this proof, we will set $\mathbb{P}^{*,x} = \mathbb{P}^*$ in order to keep track of the terminal state of the process $(X, \mathbb{P}^*)$. We denote by S_k the scaling operator with dilation rate $k > 0$ and index α , that is for a path $(X_s, 0 \leq s \leq u)$ with length u ,

$$S_k((X_s, 0 \leq s \leq u)) = (kX_{sk^{-\alpha}}, 0 \leq s \leq uk^\alpha).$$

Then first note that from the scaling property of $(X, \mathbb{P})$,

$$(S_k(X), \mathbb{P}_{u,x}^b) = (X, \mathbb{P}_{uk^\alpha, kx}^b) \quad \text{and} \quad (S_k(X), \mathbb{P}^{*,x}) = (X, \mathbb{P}^{*,kx}). \quad (5.24)$$

Now recall that $K_x = x/\bar{X}_{\tau_x^+ -}$ and set

$$Y := \left(K_x X_{t(K_x)^{-\alpha}}, t < g_{\tau_x^+ -} (K_x)^\alpha \right).$$

Then from Theorem 5.1.5, for all $u > 0$ and $k > 1$,

$$(Y, \mathbb{P}(\cdot | g_{\tau_x^+ -} = u, K_x = k)) = (S_k(X), \mathbb{P}_{u,x/k}^b). \quad (5.25)$$

Since 0 is regular for $(0, \infty)$ for the process X , we derive from (5.23) that

$$\mathbb{P}(g_{\tau_x^+ -} \in du | \bar{X}_{\tau_x^+ -} = x/k) = \frac{v(u, x/k)}{w(x/k)} du.$$

Using this identity and integrating (5.9) with respect to u show that

$$\int_0^\infty \mathbb{P}_{u,x/k}^b(\cdot) \mathbb{P}(g_{\tau_x^+ -} \in du | \bar{X}_{\tau_x^+ -} = x/k) = \mathbb{P}^{*,x/k}(\cdot). \quad (5.26)$$

This allows us to write that for any bounded and measurable functional H on the space of càdlàg trajectories,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(H(Y) | \bar{X}_{\tau_x^+ -} = x/k) &= \int_0^\infty \mathbb{E}(H(Y) | g_{\tau_x^+ -} = u, \bar{X}_{\tau_x^+ -} = x/k) \mathbb{P}(g_{\tau_x^+ -} \in du | \bar{X}_{\tau_x^+ -} = x/k) \\
&= \int_0^\infty \mathbb{E}_{u,x/k}^b(H(S_k(X))) \mathbb{P}(g_{\tau_x^+ -} \in du | \bar{X}_{\tau_x^+ -} = x/k) \\
&= \mathbb{E}^{*,x/k}(H(S_k(X))) = \mathbb{E}^{*,x}(H),
\end{aligned}$$

where the second equality follows from (5.25), the penultimate equality follows from (5.26) and the last one follows from (5.24). The value of k being arbitrary, this shows that the process Y is independent of $\overline{X}_{\tau_x^+ -}$ under $\mathbb{P}$ and that under this probability measure, it has the same law as X under $\mathbb{P}^{*,x}$.

Bibliographie

- [1] Publications of Paul Levy. *The Annals of Probability*, vol. 1, no. 1, 1973, 9-18.
- [2] APPLEBAUM, D. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge University Press, 2009.
- [3] BANG, D., CÁZAREZ, J. G. AND MIJATOVIĆ, A. When is the convex hull of a Lévy path smooth? *arXiv :2205.14416*, 2022.
- [4] BERTOIN, J. An extenction of Pitman's theorem for spectrally positive Lévy processes. *Ann. Probab.*, 20, 1464-1483, 1992.
- [5] BERTOIN, J. *Lévy processes*. Cambridge University Press, 1996.
- [6] BERTOIN, J. Lévy processes that can creep downwards never increase. *Annales de l'I.H.P. Probabilités et statistiques*, Tome 31, no. 2, 379-391, 1995.
- [7] BERTOIN, J. Paul Lévy et l'arithmétique des lois de probabilités. *ESAIM : Probability and Statistics*, 17, 790-794, 2013.
- [8] BERTOIN, J., CHAUMONT, L. AND PITMAN J. Path transformations of first passage bridges. *Elect. Comm. in Probab*, 8, 155-166, 2003.
- [9] BILLINGSLEY, P. *Convergence of probability measures. Second edition*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.
- [10] BLUMENTHAL, R.M. AND GETTOOR, R.K. *Markov Processes and Potential Theory*. Academic, New York, 1968.
- [11] BRETAGNOLLE, J. Résultats de Kesten sur les processus à accroissements indépendants. *Séminaire de probabilités de Strasbourg*, Tome 5, 21-36, 1971.
- [12] CHAUMONT, L. Conditionings and path decompositions for Lévy processes. *Stochastic Process. Appl.*, 64(1), 39-54, 1996.
- [13] CHAUMONT, L. On the law of the supremum of Lévy processes. *Ann. Probab.*, Vol. 41, No. 3A, 1191-1217, 2013.
- [14] CHAUMONT, L. *An introduction to self-similar processes*. Work in progress, <https://math.univ-angers.fr/~chaumont/rpdfs/autosim.pdf>.
- [15] CHAUMONT, L. AND DONEY, R.A. On Lévy processes conditioned to stay positive. *Electron. J. Probab.* 10, no. 28, 948-961, 2005.
- [16] CHAUMONT, L. AND MAŁECKI, J. On the asymptotic behavior of the density of the supremum of Lévy processes. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, Vol. 52, No. 3, 1178-1195, 2016.
- [17] CHAUMONT, L., PANTI, H. AND RIVERO, V. The Lamperti representation of real-valued self-similar Markov processes. *Bernoulli*, 19, 2494-2523, 2013.

- [18] CHAUMONT, L. AND PARDO, J.C. On the genealogy of conditioned stable Lévy forests. *Alea* 6, 261-279, 2009.
- [19] CHAUMONT, L. AND PELLAS T. Creeping of Lévy processes through curves. *Electron. J. Probab.* 28, no. 53, 1-25, 2023.
- [20] CHAUMONT, L. AND URIBE BRAVO, G. Markovian Bridges : Weak continuity and pathwise constructions. *Ann. Probab.*, Vol. 39, No. 2, 609-647, 2011.
- [21] CHI, Z. On exact sampling of the first passage event of a Lévy process with infinite Lévy measure and bounded variation. *Stochastic Process. Appl.*, 126, no. 4, 1124-1144, 2016.
- [22] CHUNG, K. L. Sur une équation de convolution. *C. R. Acad. Sci. Paris* 260, 4665-4667 et 6794-6796, 1965.
- [23] CHUNG, K. L. AND WALSH *Markov Processes, Brownian Motion, and Time Symmetry*. Springer, 2005.
- [24] DONEY, R.A. *Fluctuation theory for Lévy processes*. Lectures from the 35th Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 6-23, 2005. Lecture Notes in Math., 1897. Springer, Berlin, 2007.
- [25] DONEY, R.A. Tanaka's construction for random walks and Lévy processes. *Séminaire de Probabilités XXXVIII*, 1-4, Lecture Notes in Math., 1857, Springer, Berlin, 2005.
- [26] DONEY, R.A. AND KYPRIANOU, A. E. Overshoots and undershoots of Lévy processes. *Ann. Appl. Probab.* 16(1), 91-106, 2006.
- [27] DOOB, J. L. Conditional brownian motion and the boundary limits of harmonic functions. *Bulletin de la S.M.F.*, 85, 431-458, 1957.
- [28] DÖRING, L. AND WEISSMAN, P. Stable processes conditioned to hit an interval continuously from outside. *Bernoulli* 26 (2) 980 - 1015, 2020.
- [29] FELLER, W. *An introduction to probability theory and its application*. Vol. II, Second edition. Wiley, New York, 1971.
- [30] FITZSIMMONS, P., PITMAN, J. AND YOR, M. Markovian bridges : Construction, Palm interpretation, and splicing. *Seminar on Stochastic Processes, 1992*, 101-134, 1993.
- [31] GRIFFIN, P.S. AND MALLER, R.A. The time at which a Lévy process creeps. *Electronic Journal of Probability*, Vol 16, 2011.
- [32] GRZYWNY, T. First exit time from a bounded interval for Lévy processes. arXiv : 1911.05022, 2019.
- [33] HAWKES, J. Potential theory of Lévy processes. *Proc. London Math. Soc.*, 38, 335-352, 1979.
- [34] IKEDA, N., AND WATANABE, S. On some relations between the harmonic measure and the Lévy measure for a certain class of Markov processes. *J. Math. Kyoto Univ.*, 2-1, 79-95, 1962.
- [35] JAKUBOWSKI, T. On Harnack inequality for α -stable Ornstein-Uhlenbeck processes. *Math. Z.*, 258(3) : 609-628, 2008.
- [36] KALLENBERG, O. Splitting at backward times in regenerative sets. *Ann. Probab.* 9, 781-799, 1981.

- [37] KESTEN, H. Hitting probabilities of single points for processes with stationary independent increments. *Memoirs of the American Mathematical Society*, No. 93 American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.
- [38] KHINTCHINE, A. A new derivation of a formula of Paul Lévy, *Bull. Moscow Gov. Univ.* 1, No. 1, 1-5, 1937.
- [39] KWAŚNICKI, M., KYPRIANOU, A.E., PALAU, S., SAIZMAA, T. Oscillatory Attraction and Repulsion from a Subset of the Unit Sphere or Hyperplane for Isotropic Stable Lévy Processes. In : Chaumont, L., Kyprianou, A.E. (eds) *A Lifetime of Excursions Through Random Walks and Lévy Processes*. Progress in Probability, vol 78. Birkhäuser, 2021.
- [40] KYPRIANOU, A. E. *Fluctuations of Lévy processes with applications*. Springer, 2014.
- [41] KYPRIANOU, A. E. Stable Lévy processes, self-similarity and the unit ball. *Alea* 15(1), 617-690, 2018.
- [42] KYPRIANOU, A. E., PARDO, J. C. AND WATSON, A. Hitting distributions of alpha-stable processes via path censoring and self-similarity. *Ann. Probab.*, 42, 398-430, 2014.
- [43] KYPRIANOU, A. E., RIVERO, V. AND SATITKANITKUL, W. Conditioned real self-similar Markov processes. arXiv :1510.01781, 2015.
- [44] KUNITA, H., WATANABE, T. Markov processes and Martin boundaries part I. *Illinois J. Math.*, 9(3), 485-526, 1965.
- [45] LÉVY, P. Sur les séries semi-convergentes. *Nouvelles annales de mathématiques 4e série* Tome 5, p. 506-511, 1905.
- [46] LÉVY, P. *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Gauthier-Villars, 1922.
- [47] LÉVY, P. *Calcul des probabilités*. Gauthier-Villars, 1925.
- [48] LÉVY, P. Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes. *Ann. scuola Norm. Sup. Pisa* 3 (3-4), 337-366, 1934.
- [49] LÉVY, P. *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Gauthier-Villars, 1948.
- [50] LÉVY, P. *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Gauthier-Villars, 1954.
- [51] LÉVY, P. *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien*. A. Blanchard, 1970.
- [52] LOEVE, L. Paul Lévy, 1886-1971. *The Annals of Probability*, Vol. 1, No. 1, 1-18, 1973.
- [53] MEYER, P.-A. Processus à accroissements indépendants et positifs. *Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 3, 175-189 , 1969.
- [54] MILLAR, P. W. Exit properties of stochastic processes with stationary independent increments. *Trans. Amer. Math. Soc.* 178, 459-479, 1973.
- [55] MIJATOVIĆ, A. AND PISTORIUS, M. On the drawdown of completely asymmetric Lévy processes. *Stochastic Processes and their Applications*. Volume 122, Issue 11, 2012.
- [56] NEVEU, J. Une généralisation des processus à accroissements positifs indépendants. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 25, 36-61, 1961.
- [57] NEVEU, J. Note sur les travaux de Paul Lévy en probabilités. *La Jaune et la Rouge* Paris, 1973.

- [58] NOLAN, J. P. *Univariate Stable Distributions : Models for Heavy Tailed Data*. Springer, 2020.
- [59] ORNSTEIN, L. AND UHLENBECK G. On the theory of the Brownian motion. *Phys. Rev.* 36, 823-841, 1930.
- [60] PITMAN, J. W. One-dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel process. *Advances in Applied Probability* 7(3) :511–526, 1975.
- [61] PORT, S.C. AND STONE, C.J. *Infinitely divisible processes and their potential theory I, II. Annales de l'Institut Fourier*, 21, 157-275, 1971.
- [62] PROFETA, C AND SIMON, T. On the harmonic measure of stable processes. *Séminaire de Probabilités XLVIII*, volume 2168 of Springer International Publishing, pages 325-345, 2016.
- [63] ROGERS, L. C. G. A new identity for real Lévy processes. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 20, no. 1, 21-34, 1984.
- [64] ROGOZIN, B. A. The local behaviour of processes with independent increments. *Theory Probab. Appl.* 13, 507-512, 1968.
- [65] SATO, K. *Lévy processes and infinitely divisible distribution*. Cambridge University Press, 1999.
- [66] SIVERSTEIN, M. L. Classification of coharmonic and coinvariant fonctions for a Lévy processes. *Ann. Probab.*, 8(3) :539-575, 1980.
- [67] SAVOV, M. AND WINKEL, M. Right inverse of Lévy processes : the excursion measure in the general case. *Electron. comm. Probab.* 15, 572-584, 2010.
- [68] SCHWARTZ, L. *Un mathématicien aux prises avec le siècle*. Odile Jacob, 1997
- [69] SHARPE, M.J. (1995) Supports of convolution semigroups and densities. *Probability measures on groups and related structures*, XI (Oberwolfach, 1994), 364–369, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995.
- [70] TAYLOR, S. J. Paul Lévy. *Bull. London Math. Soc.* 7, 300-320, 1975.
- [71] ULLMO, J. Paul Lévy. *La Jaune et la Rouge* Paris, 1973.
- [72] URIBE, G. Bridges of Lévy processes conditioned to stay positive. *Bernoulli* (1) 190-206, 2014.
- [73] VIGON, V. Votre Lévy rampe-t-il ? *J. London Math. Soc.* (2) 65, 243-256, 2002.
- [74] WATSON, A. R. Stable processes. *PhD Thesis*, University of Bath, 2013.
- [75] WEIßMANN, H. P. Lévy processes conditionned to avoid and hit intervals. *PhD Thesis* Mannheim, 2018.
- [76] WIENER, N. Differential-Space. *Journal of Mathematical Physics* 2, 131-174, 1923.
- [77] ZOLOTAREV, V. M. *One-dimensional stable distributions*. AMS, Providence, 1986.

Titre : Reptation et conditionnement de processus de Lévy

Mots clés : Processus de Lévy, théorie des fluctuations, reptation, processus d'Ornstein-Uhlenbeck, conditionnement.

Résumé : Dans une première partie, nous étudions la reptation de processus de Lévy à travers une courbe. Un processus de Lévy rampe à travers une courbe si, lors de son premier passage au-dessus de celle-ci, le processus atteint la courbe avec une probabilité non nulle. Étant donné une fonction continue et décroissante f telle que $f(0) > 0$, nous obtenons dans un premier temps une expression de la probabilité de reptation d'un subordonateur bivarié (Y, Z) issu de $(0, 0)$ à travers le graphe de f en fonction de sa mesure de renouvellement et de son drift (d_Y, d_Z) . Nous appliquons ensuite ce résultat au processus d'échelle ascendant d'un processus de Lévy X et donnons une expression de la probabilité de reptation du processus X à travers le graphe de f en un temps en lequel celui-ci atteint son maximum passé. Dans ces deux cas, nous interprétons géométriquement la probabilité de reptation et dégageons ainsi une nouvelle notion, celle de reptation directionnelle. Nous obtenons ensuite des résultats

relatifs à la reptation de processus de Lévy conditionnés à rester positif et de processus d'Ornstein-Uhlenbeck stables. En conclusion, nous formulons des conjectures concernant quelques questions qui, à notre connaissance, demeurent ouvertes.

Dans une seconde partie, nous conditionnons un subordonateur bivarié (Y, Z) , via une h -transformation de Doob, à être absorbé par le graphe de f , i.e. à atteindre continûment ce graphe et mourir. Nous construisons ensuite une mesure sous laquelle un processus de Lévy est conditionné à être absorbé par le graphe en un temps en lequel le processus atteint son maximum. Cette mesure est obtenue à l'aide d'un pont de premier passage du processus de Lévy initial. Enfin, dans le cas particulier d'un processus de stable, nous obtenons une construction trajectorielle du processus conditionné à être absorbé par un niveau fixe.

Title: Creeping and conditioning of Lévy processes

Keywords: Lévy fields, fluctuation theory, creeping, Ornstein-Uhlenbeck processes, conditioning.

Abstract: A Lévy process is said to creep through a curve if, at its first passage time across this curve, the process reaches it with positive probability. We first study this property for bivariate subordinators. Given the graph $\{(u, f(u)) : u \geq 0\}$ of any continuous, non increasing function f such that $f(0) > 0$, we give an expression of the probability that a bivariate subordinator (Y, Z) issued from $(0, 0)$ creeps through this graph in terms of its renewal function and the drifts of the components Y and Z . We apply this result to the creeping probability of any real Lévy process through the graph of any continuous, non increasing function at a time where the process also reaches its past supremum. This probability involves the density of the renewal function of the bivariate upward ladder process as well as its drift coefficients. We also investigate the case of Lévy processes conditioned to stay positive

creeping at their last passage time below the graph of a function. Then we provide some examples and we give an application to the probability of creeping through fixed levels by stable Ornstein-Uhlenbeck processes. We also raise a couple of open questions and formulate few conjectures.

In a second time, given a bivariate subordinator (Y, Z) , we obtain by a Doob h -transformation, a bivariate subordinator conditioned to hit continuously the graph $\{(u, f(u)) : u \geq 0\}$ and die. Then, we construct a measure under which a Lévy process is conditioned to hit this graph at a time the process reaches its past supremum, using for this a first passage bridge. In the special case of stable Lévy processes, we obtain a pathwise construction of the process conditioned to hit continuously a fixed level from the paths of the unconditioned process.