



**HAL**  
open science

# Gaz quantiques, corrélations et métrologie quantique

Youcef Baamara

► **To cite this version:**

Youcef Baamara. Gaz quantiques, corrélations et métrologie quantique. Physique Quantique [quant-ph]. Sorbonne Université, 2023. Français. NNT : 2023SORUS482 . tel-04485777

**HAL Id: tel-04485777**

**<https://theses.hal.science/tel-04485777>**

Submitted on 1 Mar 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

en vue de l'obtention du grade de

**Docteur de Sorbonne Université**

Spécialité : Physique

**Laboratoire Kastler-Brossel**



École Doctorale n°564 : Physique en Île de France

Présentée par : **Youcef BAAMARA**

---

# Gaz quantiques, corrélations et métrologie quantique

---

réalisée sous la direction de : Alice SINATRA  
et co-encadrée par : Manuel GESSNER

**Soutenue le 15 Décembre 2023 devant le jury composé de :**

M. Philippe Grangier	Directeur de recherche	Institut d'Optique, Palaiseau	Président
M. Johannes Schachenmayer	Chargé de recherche	ISIS, Strasbourg	Rapporteur
M. Daniel Barredo	Chargé de recherche	CINN-CSIC, Oviedo, Spain	Rapporteur
M. Bruno Laburthe-Tolra	Directeur de recherche	LPL, Villetaneuse	Examinaeur
M. Jérôme Lodewyck	Chargé de recherche	SYRTE, Observatoire de Paris	Examinaeur
Mme. Alice Sinatra	Professeur	LKB, ENS de Paris	Directrice de thèse
M. Manuel Gessner	Chargé de recherche	IFIC, Valencia, Spain	Co-encadrant



# Remerciements

Tout d’abord, je souhaite exprimer ma profonde gratitude envers Alice Sinatra pour ses conseils exceptionnels, son soutien inconditionnel et sa confiance constante tout au long de cette aventure scientifique. Ses recommandations précieuses, son exigence d’excellence et sa puissance d’inspiration ont constitué les piliers essentiels de la réussite de cette thèse. Nos nombreuses discussions sur la physique m’ont permis de saisir de nombreux concepts et ont élargi mes horizons dans le domaine de la métrologie quantique et des technologies quantiques.

Mes remerciements vont également à Manuel Gessner, dont les contributions considérables ont enrichi mon expérience de recherche. Son expertise, ses critiques pertinentes et son soutien ont largement contribué à la réussite de ce travail. Les discussions sur la physique avec Manuel m’ont permis d’éclaircir plusieurs concepts fondamentaux de la mécanique quantique.

Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude à Tarik Yefsah, qui a joué un rôle essentiel en tant que parrain tout au long de ma thèse. Ses conseils précieux, son soutien moral et ses encouragements ont clairement contribué à la réussite de cette thèse.

Un remerciement chaleureux à Emilia Witkowska et Tanausú Hernández Yanes pour leur accueil chaleureux à l’Institut de Physique de l’Académie Polonaise des Sciences à Varsovie. Leurs enseignements et leur encadrement inestimables sur la diagonalisation numérique exacte de petits systèmes quantiques se sont révélés inestimables pour ma thèse.

Je remercie Irénée Frérot pour toutes nos discussions sur les corrélations non locales de Bell et les programmes semi-définis positifs qui ont été utilisés dans le dernier chapitre de cette thèse.

Un merci également à toute l’équipe microcircuit à atomes du Laboratoire Kastler-Brossel. En particulier, je remercie Jakob Reichel et Jean Hare pour toutes les conversations sur le domaine de la recherche scientifique et du monde académique.

Mes remerciements s’étendent également au personnel administratif de Laboratoire Kastler-Brossel, au service informatique de LKB et au service informatique de l’ENS de Paris pour leur support et leur aide, sans lesquels ce projet aurait été bien plus complexe à réaliser.

Je remercie également les membres du jury, Philippe Grangier, Bruno Laburthe-Tolra, Jérôme Lodewyck, Johannes Schachenmayer et Daniel Barredo, d’avoir accepté d’être rapporteurs de cette thèse et de s’intéresser à notre travail.

Enfin, mes plus sincères remerciements à mes parents, à ma famille, à mes amis et à de nombreuses autres personnes qui m’ont soutenu tout au long de ce parcours académique exigeant. Leur encouragement constant et leur compréhension ont été des sources d’inspiration et de motivation.

Cette thèse n’aurait pas été possible sans la contribution précieuse de chacun d’entre vous. Merci du fond du cœur pour cette expérience enrichissante et pour avoir été une part intégrante de ce chapitre exceptionnel de ma vie académique.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Cadre théorique pour la métrologie quantique</b>	<b>5</b>
Introduction	5
1.1 Estimation d'un paramètre	6
1.1.1 Cadre général	6
1.1.2 Limite Cramér-Rao et information de Fisher	7
1.1.3 Information quantique de Fisher	11
1.1.4 Méthode des moments	15
1.2 Estimation multi-paramètres	17
1.2.1 Cadre général	17
1.2.2 Matrice d'information de Fisher	18
1.2.3 Matrice d'information quantique de Fisher	20
1.2.4 Méthode des moments multi-paramètres	21
Conclusion	23
<b>2 Compression des observables de spin linéaires et non linéaires pour l'estimation d'un paramètre</b>	<b>25</b>
Introduction	26
2.1 Estimation d'un paramètre dans un système de spin collectif	26
2.1.1 Base de Fock, états de phase et spin collectif	26
2.1.2 Limite quantique standard, limite de Heisenberg et méthode des moments	29
2.2 Optimisation du gain métrologique par rapport à l'axe de rotation et par rapport aux observables de mesure	31
2.3 Dynamique one-axis twisting	32
2.4 Compression des observables de spin linéaires et quadratiques	34
2.4.1 Compression de spin linéaire	34
2.4.2 Compression de spin non linéaire	37
2.4.3 Compression de spin quadratique	39
2.5 Technique de Mesure Après Interaction	40
2.6 L'information quantique de Fisher	44
2.7 Deux implémentations possibles de l'hamiltonien one-axis twisting : quelques expériences	45
2.7.1 Condensats de Bose-Einstein	46
2.7.2 Cavité	47
Conclusion	50
<b>Appendices</b>	<b>53</b>
2.A Matrice des commutateurs et matrice covariance pour une mesure quadratique	53
2.B Matrice des commutateurs et matrice covariance pour la technique MAI	54

<b>3</b>	<b>Effet des processus de décohérence</b>	<b>57</b>
	Introduction . . . . .	57
3.1	Description théorique : équation pilote, fonction d'onde Monte Carlo . . . . .	58
3.2	Déphasage collectif diffusif . . . . .	60
3.2.1	Lois d'échelle du gain métrologique associé à la compression des observables linéaires, non linéaires et quadratiques de spin . . . . .	60
3.2.2	Loi d'échelle du gain métrologique atteint par la technique MAI . . . . .	62
3.3	Déphasage collectif balistique . . . . .	63
3.3.1	Lois d'échelle du gain métrologique associé à la compression des observables linéaires, non linéaires et quadratiques de spin . . . . .	64
3.3.2	Loi d'échelle du gain métrologique atteint par la technique MAI . . . . .	65
3.4	Perte de particules . . . . .	67
3.5	Expression unifiée pour les lois d'échelle du gain métrologique . . . . .	69
	Conclusion . . . . .	70
	<b>Appendices</b>	<b>73</b>
3.A	Matrices des commutateurs et matrice covariance en présence de déphasage diffusif . . . . .	73
3.B	Matrices des commutateurs et matrice covariance en présence de déphasage balistique . . . . .	74
3.C	Matrices des commutateurs et matrice covariance en présence de perte à $m$ -corps . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Estimation multi-paramètres et détection comprimée d'un champ</b>	<b>79</b>
	Introduction . . . . .	79
4.1	Gain quantique dans la détection distribuée . . . . .	80
4.1.1	Estimation de la moyenne arithmétique des paramètres . . . . .	81
4.1.2	Estimation d'autres combinaisons linéaires des paramètres . . . . .	81
4.1.3	Gain métrologique quantique . . . . .	83
4.1.4	Coefficients de Hadamard et estimation des paramètres originaux . . . . .	84
4.1.5	Généralisation au cas de $N/M$ atomes par site . . . . .	85
4.2	Estimation d'un champ scalaire . . . . .	86
4.3	Estimation d'un champ vectoriel . . . . .	88
4.4	Détection comprimée d'un champ . . . . .	90
4.5	Matrice de l'information quantique de Fisher et optimalité de la mesure . . . . .	93
4.6	Reformulation dans le cadre de la méthode des moments pour l'estimation multi- paramètres . . . . .	95
4.7	Quelques implémentations possibles . . . . .	97
4.7.1	Mott-comprimé dans un condensat de Bose-Einstein . . . . .	98
4.7.2	Atomes dans un réseau avec couplage à un potentiel externe dépendant du site . . . . .	99
	Conclusion . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Corrélations non-locales de Bell dans un état comprimé de spin spatialement distribué</b>	<b>103</b>
	Introduction . . . . .	103
5.1	Création et stockage d'états comprimés de spin dans un réseau optique . . . . .	104
5.1.1	Génération d'états comprimés de spin par interaction entre atomes . . . . .	104
5.1.2	Stockage d'états comprimés de spin par montée adiabatique du réseau . . . . .	106
5.2	Effet de la température non nulle sur l'état Mott-comprimé de spin . . . . .	107
5.3	Étude de corrélations de Bell à $M$ -sites . . . . .	108
5.3.1	Scénario de Bell . . . . .	109
5.3.2	Corrélations de Bell à température nulle . . . . .	110
5.3.3	Corrélations de Bell à température non nulle . . . . .	112

5.4 Étude de corrélations de Bell à 2-sites en présence de trous et de sites doublement occupés . . . . .	115
5.4.1 Corrélations jusqu'au second ordre . . . . .	116
5.4.2 Corrélations jusqu'au quatrième ordre . . . . .	120
Conclusion . . . . .	122
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>125</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>127</b>





# Introduction

La métrologie est la branche de la science consacrée à l'exploration détaillée, à la fois théorique et expérimentale, de la détermination des incertitudes associées à la mesure de grandeurs physiques. Elle englobe une analyse approfondie des techniques de mesure, des instruments et des processus, dans le but ultime d'assurer une précision maximale compte tenu des ressources utilisées, lors de l'estimation des quantités physiques. En développant des approches robustes et précises pour estimer des quantités physiques, la métrologie joue un rôle essentiel dans l'établissement d'une base solide pour comprendre les phénomènes naturels et les exploiter de manière optimale dans notre progrès technologique. Après de nombreuses années de recherche et de développement expérimental dans ce domaine, certains capteurs optiques et atomiques ont atteint la limite de précision intrinsèque imposée par les principes de la physique quantique [1]. Cette limite classique a longtemps été considérée comme infranchissable jusqu'à la découverte que la lumière quantique corrélée peut être utilisée pour éliminer le bruit intrinsèque quantique dans les mesures interférométriques, permettant ainsi de dépasser cette limite [2]. Cette découverte a marqué le début du domaine de la métrologie quantique, qui a depuis suscité de nombreuses études, propositions et démonstrations expérimentales concernant la génération, la manipulation et la mesure des états quantiques corrélés de la lumière et des ensembles atomiques, visant à améliorer la précision de l'estimation de paramètres inconnus au-delà de la limite classique [3–14].

Dans le contexte des systèmes atomiques, une approche fréquemment utilisée pour la génération d'états corrélés utiles pour la métrologie, repose sur la compression des observables de spin collectif associé à l'ensemble atomique [15–22]. Cette méthode, inspirée de la compression optique du bruit quantique [2, 6, 7], qui a contribué à améliorer la précision des détecteurs d'ondes gravitationnelles [23], permet de générer des états comprimés de spin, ou plus généralement, des corrélations quantiques entre les atomes, à partir d'un ensemble d'atomes initialement non corrélés, en exploitant des interactions inter-atomiques. Le hamiltonien dite "one-axis twisting" [15], non linéaire dans les composantes de spin collectif, constitue un modèle de référence permettant une description unifiée de ces interactions dans divers systèmes physiques. À des temps courts, cette dynamique permet la compression d'une observable linéaire de spin, offrant un gain métrologique quantique fondamentalement limité [15, 24]. À des temps élevés, des fluctuations de spin de plus en plus non gaussiennes sont induites, indiquant la compression d'observables qui sont non linéaires dans les composantes de spin collectif. Mesurer de telles observables non linéaires de spin, dans le cadre d'un protocole d'estimation d'un paramètre inconnu, peut induire un gain métrologique quantique significatif au-delà de la limite imposée par la compression de spin linéaire [25]. Cependant, en pratique, la mesure d'observables non linéaires de spin requiert un grand nombre de mesures. De plus, la non-gaussianité de ces états de spin complique leur caractérisation pratique à l'aide des méthodes standard utilisées pour les états gaussiens, limitant ainsi l'identification de leur potentiel métrologique vis à vis le nombre d'atomes  $N$ .

Dans des scénarios réels, l'implémentation de la dynamique "one-axis twisting" exige un contrôle

rigoureux des interactions entre les atomes. Cette tâche se révèle extrêmement difficile, voire impossible en pratique, en raison de l'effet des processus de décohérence présents dans les systèmes atomiques sur la cohérence de l'évolution unitaire. Par conséquent, dans les expériences réelles, le gain métrologique quantique résulte d'un équilibre entre la dynamique quantique responsable de l'intrication entre atomes et les effets de la décohérence qui modifient les lois d'échelle du gain métrologique dans la limite de grands nombres d'atomes  $N$ .

En plus de la création de corrélations quantiques entre les atomes par des interactions soigneusement contrôlées, plusieurs approches décrites dans la littérature visent à distribuer spatialement ces atomes. Cela peut être réalisé en utilisant diverses techniques, telles que des pinces optiques ou en induisant une transition de Mott dans un condensat de Bose-Einstein au sein d'un réseau optique [26]. Ces corrélations spatialement distribuées peuvent être exploitées pour estimer les valeurs locales d'un champ, qu'il soit scalaire ou vectoriel, avec un gain métrologique significatif. En particulier, en effectuant des renversements de spin locaux et en mesurant des observables de spin collectif, des combinaisons linéaires indépendantes des champs locaux, correspondant aux coefficients de Hadamard du champ spatial, peuvent être estimées avec une incertitude statistique inférieure à la limite classique. En utilisant la transformation de Hadamard inverse, les champs locaux peuvent alors être déduits.

De plus, des atomes intriqués distribués dans des modes spatialement séparés impliquent des corrélations non locales de Bell. En effet, des mesures locales dans une configuration de type Mott-comprimé, avec un atome par site, qui peut être obtenue, par exemple, en augmentant adiabatiquement le potentiel d'un réseau optique dans un condensat de Bose-Einstein à deux composantes en interaction à température nulle, peuvent conduire à la violation d'inégalités de Bell existantes. Cependant, dans une expérience réelle réalisée à température non nulle, il existe une probabilité non nulle de se retrouver avec quelques sites vides ou doublement occupés. Dans ce cas, où nous ne sommes pas sûrs d'avoir un seul atome par site, les inégalités de Bell et les témoins de corrélation non locale habituellement présentés dans la littérature ne peuvent pas être utilisés pour détecter la non-localité. Il est donc nécessaire de généraliser les inégalités de Bell et les témoins non locaux existants.

Dans cette thèse, le premier chapitre introductif (Chapitre 1) aborde les résultats fondamentaux des théories d'estimation quantique pour un et plusieurs paramètres, posant ainsi les bases essentielles pour l'ensemble de ce travail. Dans le chapitre 2, nous commençons par analytiquement identifier le gain quantique métrologique offert par les états surcomprimés de spin générés par la dynamique one-axis twisting pour un nombre arbitraire d'atomes, en fonction du temps de préparation. Nous démontrons également l'efficacité des techniques de mesure après interaction pour mesurer des observables non linéaires dans les composantes de spin collectif et extraire ce gain quantique dans le cadre d'un protocole d'estimation. En extrapolant à un grand nombre d'atomes, nous dérivons les lois d'échelle de ce gain métrologique en fonction du nombre d'atomes pour un système grand. En intégrant de manière systématique les processus de décohérence pertinents pour les expériences de physique atomique, nous déterminons finalement analytiquement le gain quantique optimal en fonction des paramètres de bruit pour un nombre d'atomes arbitraire. Dans le Chapitre 4, nous explorons la possibilité d'un gain quantique significatif avec des états de spin comprimés ou surcomprimés dans un protocole d'estimation multiparamètres. Cela implique un ensemble d'atomes à deux niveaux distribués dans un réseau, notamment dans une configuration Mott-comprimée, ou plus généralement, des spins corrélés dans des modes spatialement séparés. En considérant la capacité de renversement local des spins et des mesures collectives, nous décrivons comment estimer les coefficients de Hadamard d'un signal spatialement étendu. Enfin, des exemples d'applications pratiques, tels que la cartographie de champs scalaires ou vectoriels et la détection comprimée, illustrent la pertinence de cette approche. Le dernier chapitre 5, étudie l'obtention des inégalités de Bell et des témoins des corrélations non locales de Bell dans le cas d'un ensemble

d'atomes dans une Mott-comprimée dans un réseau, avec une probabilité non nulle d'avoir un site vide ou doublement occupé.



# Cadre théorique pour la métrologie quantique

## Introduction

Les mesures précises de grandeurs physiques jouent un rôle essentiel dans le développement de la technologie et de la physique fondamentale. Dans le domaine de la technologie, ces mesures sont à la base du développement d'horloges atomiques ultra-précises [27–29], qui ont des implications considérables pour les systèmes de positionnement global (GPS) et la navigation spatiale [30]. De plus, ces mesures précises contribuent à l'amélioration de dispositifs essentiels tels que les magnétomètres [31], les accéléromètres [32] et les gyroscopes [33]. Dans le domaine de la physique fondamentale, les mesures précises sont utilisées pour tester la constance des constantes fondamentales de la nature [34, 35]. En outre, ces mesures permettent de tester avec précision les principes fondamentaux et les théories de la physique [36, 37], ouvrant ainsi la voie à la découverte potentielle de nouveaux phénomènes physiques [38].

Au cours des dernières années, grâce aux progrès rapides de la physique quantique et de la manipulation atomique, la métrologie quantique a fait des avancées significatives. La mesure précise d'une grandeur physique par des dispositifs quantiques implique souvent un encodage de la grandeur en question, via une transformation interférométrique, sous la forme d'une différence de phase entre deux états, deux niveaux d'énergie par exemple, d'un système quantique [39]. En mécanique quantique, aucune observable n'est associée à une phase. Par conséquent, la valeur de la phase ne peut pas être mesurée directement, mais peut être estimée au moyen d'un estimateur donné, à partir des résultats statistiques de la mesure d'une observable choisie. En général, l'estimation de la phase quantique s'accompagne d'une incertitude qui peut être due à un bruit technique ou fondamental [40]. En raison de la nature probabiliste intrinsèque de la mécanique quantique, la précision de l'estimation de phase est fondamentalement limitée, même lorsque toutes les sources de bruit technique ont été éliminées. L'objectif principal des protocoles d'estimation de phase quantique par interférométrie est de minimiser le bruit quantique. En ce sens, la théorie de l'estimation quantique vise à identifier les limites fondamentales de l'estimation de phase et à trouver des schémas qui permettent d'atteindre ces limites. Plus spécifiquement, en optimisant par rapport à tous les estimateurs potentiels, cette approche nous permet de déduire, pour un état initial donné, une transformation interférométrique spécifique ainsi qu'une observable de mesure donnée, une limite inférieure pour la variance de la phase estimée, connue sous le nom de limite de Cramér-Rao. L'optimisation de cette limite de Cramér-Rao, sur toutes les observables quantiques de mesure, donne la limite de Cramér-Rao quantique, qui détermine l'incertitude optimale de la phase estimée pour un état initial et une transformation interférométrique donnés. Bien qu'il soit essentiel de comprendre ces limites fondamentales pour déterminer les ressources quantiques pouvant améliorer la précision de l'estimation de la phase, elles ne proposent pas de méthodes pratiques pour améliorer

directement cette précision. À cette fin, en adoptant une approche pratique spécifique, comme la méthode des moments par exemple, la théorie de l'estimation quantique de phase permet de calculer l'incertitude associée à cette approche, laquelle constitue une borne supérieure pour la limite de Cramér-Rao et la limite de Cramér-Rao quantique.

Au-delà de la question de l'estimation d'un seul paramètre, de nombreuses applications pratiques, telles que l'imagerie [41, 42], les réseaux de capteurs [43] et la détection de champs spatialement inhomogènes [44], exigent une estimation simultanée et précise de plusieurs paramètres. Cependant, le passage de la théorie de l'estimation quantique d'une seule phase à celle de l'estimation de plusieurs phases n'est pas direct [45].

En regroupant les résultats fondamentaux des théories d'estimation quantique pour un et plusieurs paramètres, ce premier chapitre établit un cadre théorique exhaustif pour les résultats présentés dans cette thèse et peut être utile pour tout travail ultérieur en métrologie quantique. La section 1.1 présente une vue d'ensemble des différents concepts de la théorie de l'estimation à un seul paramètre. Après avoir établi le formalisme général et introduit les concepts de base de l'estimation quantique à un seul paramètre dans 1.1.1, nous présentons et reproduisons la démonstration de la limite de Cramér-Rao dans 1.1.2. Ensuite, dans 1.1.3, nous récapitulons la définition et l'expression générale de l'information quantique de Fisher et dérivons une formule simple dans le cas où le paramètre est encodé via une évolution unitaire et où l'état initial est un état pur. Cette formule explicite nous conduit ensuite vers la limite quantique standard et la limite de Heisenberg. Enfin, nous introduisons la méthode des moments et dérivons l'incertitude du paramètre estimé correspondante. Sur la base de ces fondements, la section 1.2 étend les concepts et les expressions développés au contexte de l'estimation multi-paramètre.

## 1.1 Estimation d'un paramètre

### 1.1.1 Cadre général

La procédure fondamentale d'estimation d'un paramètre inconnu par des techniques d'interférométrie dans un système quantique suit souvent la séquence bien définie illustrée dans la figure 1.1. Le système est initialement préparé dans un état  $\hat{\rho}$ . Ensuite, le paramètre cible est encodé dans cet état préparé  $\hat{\rho}$  sous forme d'une différence phase  $\phi$  et la mesure d'une observable  $\hat{X}$  est effectuée. Cette séquence complète de préparation, d'encodage et de mesure est répétée  $\mu$  fois avec le même état final  $\hat{\rho}_\phi$ , ce qui produit un ensemble de résultats  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_\mu)^T$ . En raison du bruit technique provenant de sources externes et du bruit fondamentale intrinsèque au système quantique, le résultat de la mesure  $x_i$ , correspondant idéalement à l'une des valeurs propres associées à l'observable mesurée  $\hat{X}$ , varie de manière aléatoire d'une répétition à l'autre. Néanmoins, une estimation de  $\phi$  peut être obtenue à partir des résultats de mesure  $\vec{x}$ . Pour ce faire, nous introduisons la notion d'estimateur, appelé  $\phi_{\text{est}}(\vec{x})$ , qui représente une fonction qui associe à chaque ensemble de résultats de mesure  $\vec{x}$  une valeur estimée du paramètre  $\phi$ . L'objectif de ce processus d'estimation est d'identifier le meilleur estimateur  $\phi_{\text{est}}$ , qui minimise l'incertitude  $\Delta\phi_{\text{est}}$  définie par l'équation (1.4) (pour une revue exhaustive, voir les références [46, 47]).

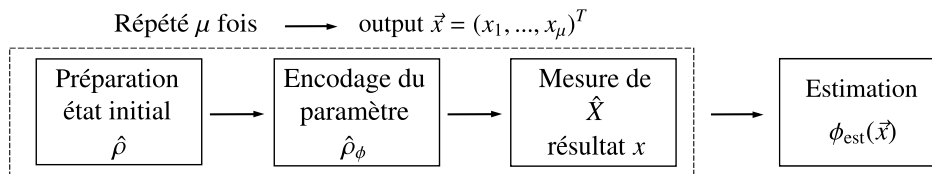


FIGURE 1.1 – Protocole d'estimation d'un paramètre

Nous appelons  $p(x|\phi)$  la probabilité conditionnelle d'obtenir, lors d'une mesure unique de l'ob-

servable  $\hat{X}$ , le résultat  $x$  lorsque la valeur exacte du paramètre encodé est  $\phi$ . Cette probabilité peut être calculée à partir de l'opérateur densité  $\hat{\rho}_\phi$ , qui caractérise l'état du système après l'encodage de la phase  $\phi$ , comme

$$p(x|\phi) = \text{tr} \left[ \hat{P}_x \hat{\rho}_\phi \right], \quad (1.1)$$

où  $\hat{P}_x$  est le projecteur sur l'état propre de l'observable  $\hat{X}$  associé à la valeur propre  $x$ . La probabilité conditionnelle d'obtenir la séquence de résultats  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_\mu)^T$  à partir de  $\mu$  mesures indépendantes de l'observable  $\hat{X}$ , étant donné que la valeur exacte du paramètre est  $\phi$ , est donnée par le produit des probabilités individuelles

$$p(\vec{x}|\phi) = \prod_{i=1}^{\mu} p(x_i|\phi). \quad (1.2)$$

Il convient de noter que dans le cas le plus général, qu'il soit classique ou quantique, les mesures ne sont pas nécessairement indépendantes, et par conséquent, la probabilité  $p(\vec{x}|\phi)$  ne peut pas toujours être exprimée sous forme d'un produit comme illustré dans l'équation précédente. Sauf indication contraire, nous considérerons ce cas général pour la suite. L'estimateur  $\phi_{\text{est}}$ , qui fournit une estimation de la valeur du paramètre  $\phi$  en fonction de l'ensemble des résultats  $\vec{x}$ , est considéré comme une fonction aléatoire en raison de la nature aléatoire des résultats de mesure de l'observable  $\hat{X}$ . Sa valeur moyenne est donnée par

$$\bar{\phi}_{\text{est}} = \sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\phi) \phi_{\text{est}}(\vec{x}), \quad (1.3)$$

et sa variance s'écrit

$$(\Delta\phi_{\text{est}})^2 = \sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\phi) \left[ \phi_{\text{est}}(\vec{x}) - \bar{\phi}_{\text{est}} \right]^2, \quad (1.4)$$

où la somme dans (1.3) et (1.4) s'étend à tous les ensembles de résultats de mesure possibles  $\vec{x}$ . Afin de réaliser l'estimation du paramètre encodé  $\phi$ , il est essentiel de choisir un estimateur non biaisé dont la valeur moyenne correspond à la valeur exacte de  $\phi$

$$\bar{\phi}_{\text{est}} = \phi \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial \bar{\phi}_{\text{est}}}{\partial \phi} = 1. \quad (1.5)$$

En pratique, la variance de l'estimateur non biaisé  $(\Delta\phi_{\text{est}})^2$ , plus précisément son inverse, quantifie la précision de l'estimation du paramètre inconnu  $\phi$  et permet d'évaluer l'efficacité du protocole d'estimation. Dans un tel protocole, la reconstruction complète de la distribution de probabilité  $p(\vec{x}|\phi)$  pour une valeur donnée du paramètre  $\phi$  représente l'information la plus complète que nous pouvons utiliser pour estimer le paramètre  $\phi$ . Comme le montrera le paragraphe suivant, cela implique que la variance  $(\Delta\phi_{\text{est}})^2$  possède une limite inférieure indépendante du choix de l'estimateur  $\phi_{\text{est}}$ , ce qui limite fondamentalement la précision du protocole d'estimation.

### 1.1.2 Limite Cramér-Rao et information de Fisher

Dans le cadre d'un protocole d'estimation d'un paramètre  $\phi$ , deux estimateurs différents conduisent à des précisions d'estimation complètement différentes. Notamment, la précision de l'estimation est élevée lorsque la variance de l'estimateur choisi est faible. Il est donc important de déterminer s'il existe un estimateur non biaisé qui minimise la variance pour un ensemble donné de résultats de mesure  $\vec{x}$  ou de disposer d'une borne inférieure pour la variance du paramètre estimé indépendante



de tout estimateur non biaisé. Pour répondre à cette question, Maurice Fréchet [48], Georges Darmois [49], Calyampudi Radhakrishna Rao [50] et Harald Cramér [51] ont indépendamment obtenu une optimisation de la variance du paramètre  $\phi$  par rapport à tous les estimateurs non biaisés. Cette optimisation a conduit à la dérivation d'une limite inférieure pour la variance du paramètre estimé sous des hypothèses très générales. Cette limite est connue sous le nom de limite de Cramér-Rao (CR) : Dans le cas le plus général, pour une séquence de résultats de mesures  $\vec{x}$  caractérisée par la probabilité conditionnelle  $p(\vec{x}|\phi)$  lorsque la valeur exacte du paramètre encodé est  $\phi$ , la variance d'un estimateur non biaisé quelconque satisfait à l'inégalité de Cramér-Rao suivante

$$(\Delta\phi_{\text{est}})^2 \geq (\Delta\phi_{\text{est}})_{\text{CR}}^2 = \frac{1}{I[\phi]}, \quad (1.6)$$

où

$$I[\phi] = \sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\phi) \left( \frac{d}{d\phi} \ln p(\vec{x}|\phi) \right)^2 \quad (1.7)$$

est l'information de Fisher et où la somme s'étend à tous les ensembles de résultats de mesure possibles  $\vec{x}$ .

Nous allons maintenant reproduire la démonstration de l'inégalité de Cramér-Rao (1.23). Nous partons de l'expression de la valeur moyenne d'un estimateur (1.3) et de la définition d'un estimateur non biaisé (1.5), nous écrivons

$$\bar{\phi}_{\text{est}} - \phi = \sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\phi) [\phi_{\text{est}}(\vec{x}) - \phi] = 0. \quad (1.8)$$

La dérivation des deux derniers membres de cette équation par rapport à  $\phi$  donne

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\phi} \sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\phi) [\phi_{\text{est}}(\vec{x}) - \phi] \\ &= \sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\phi) \frac{d}{d\phi} [\phi_{\text{est}}(\vec{x}) - \phi] + \sum_{\vec{x}} [\phi_{\text{est}}(\vec{x}) - \phi] \frac{dp(\vec{x}|\phi)}{d\phi} \\ &= -1 + \sum_{\vec{x}} [\phi_{\text{est}}(\vec{x}) - \phi] \frac{dp(\vec{x}|\phi)}{d\phi}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Or

$$\frac{dp(\vec{x}|\phi)}{d\phi} = p(\vec{x}|\phi) \frac{d}{d\phi} \ln p(\vec{x}|\phi). \quad (1.10)$$

En substituant (1.10) dans (1.9) et en élevant au carré, nous obtenons

$$\left( \sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\phi) \left\{ [\phi_{\text{est}}(\vec{x}) - \phi] \frac{d}{d\phi} \ln p(\vec{x}|\phi) \right\} \right)^2 = 1. \quad (1.11)$$

Nous utilisons maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz  $\overline{AB}^2 \leq \overline{A^2} \overline{B^2}$  qui est valable pour des fonctions réelles arbitraires  $A$  et  $B$  de  $\vec{x}$ , et qui sature pour  $A = \lambda B$ . En choisissant

$$A = \phi_{\text{est}}(\vec{x}) - \phi \quad \text{et} \quad B = \frac{d}{d\phi} \ln p(\vec{x}|\phi), \quad (1.12)$$

nous trouvons

$$\left\{ \sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\phi) [\phi_{\text{est}}(\vec{x}) - \phi]^2 \right\} \left\{ \sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\phi) \left( \frac{d}{d\phi} \ln p(\vec{x}|\phi) \right)^2 \right\} \geq 1. \quad (1.13)$$

En utilisant l'équation (1.4) et le fait que  $\phi_{\text{est}}$  est un estimateur non biaisé, ce qui signifie que l'équation (1.5) est toujours valable, l'équation (1.13) devient

$$(\Delta\phi_{\text{est}})^2 \geq \frac{1}{\sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\phi) \left( \frac{d}{d\phi} \ln p(\vec{x}|\phi) \right)^2}. \quad (1.14)$$

Cette dernière équation est exactement l'inégalité de Cramér-Rao (1.6) et le dénominateur de son membre de droite est l'information de Fisher ainsi défini dans (1.7).

L'information de Fisher  $I[\phi]$  présente une propriété importante qui sera très utile pour la suite de cette étude, notamment son additivité. Cette propriété concerne le cas où la probabilité  $p(\vec{x}|\phi)$  décrit les résultats d'un ensemble de  $m$  événements indépendants, c'est à dire lorsqu'elle s'écrit sous la forme d'un produit

$$p(\vec{x}|\phi) = \prod_{i=1}^m p_i(x_i|\phi), \quad (1.15)$$

dont l'équation (1.2) correspondant à des mesures indépendantes est un cas particulier. Dans ce cas, l'information de Fisher peut être écrite comme

$$\begin{aligned} I[\phi] &= \sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\phi) \left( \sum_{i=1}^m \frac{d}{d\phi} \ln p_i(x_i|\phi) \right)^2 \\ &= \sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\phi) \sum_{i,j=1}^m \left( \frac{d}{d\phi} \ln p_i(x_i|\phi) \right) \left( \frac{d}{d\phi} \ln p_j(x_j|\phi) \right) \\ &= S_1 + S_2, \end{aligned} \quad (1.16)$$

où

$$S_1 = \sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\phi) \sum_i \left( \frac{d}{d\phi} \ln p_i(x_i|\phi) \right)^2 \quad (1.17)$$

$$S_2 = \sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\phi) \sum_{i,j \neq i} \left( \frac{d}{d\phi} \ln p_i(x_i|\phi) \right) \left( \frac{d}{d\phi} \ln p_j(x_j|\phi) \right) \quad (1.18)$$

Commençons d'abord par calculer  $S_2$

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{i,j \neq i} \sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\phi) \left( \frac{d}{d\phi} \ln p_i(x_i|\phi) \right) \left( \frac{d}{d\phi} \ln p_j(x_j|\phi) \right) \\ &= \sum_{i,j \neq i} \sum_{x_1, \dots, x_m} \prod_l p_l(x_l|\phi) \frac{d}{d\phi} \ln p_i(x_i|\phi) \frac{d}{d\phi} \ln p_j(x_j|\phi) \\ &= \sum_{i,j \neq i} \left( \sum_{x_i} p_i(x_i|\phi) \frac{d}{d\phi} \ln p_i(x_i|\phi) \right) \left( \sum_{x_j} p_j(x_j|\phi) \frac{d}{d\phi} \ln p_j(x_j|\phi) \right) \prod_{l \neq i,j} \sum_{x_l} p_l(x_l|\phi) \\ &= \sum_{i,j \neq i} \left( \sum_{x_i} \frac{dp_i(x_i|\phi)}{d\phi} \right) \left( \sum_{x_j} \frac{dp_j(x_j|\phi)}{d\phi} \right) \\ &= \sum_{i,j \neq i} \left( \frac{d}{d\phi} \sum_{x_i} p_i(x_i|\phi) \right) \left( \frac{d}{d\phi} \sum_{x_j} p_j(x_j|\phi) \right) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (1.19)$$

où nous avons utilisé l'équation (1.2) et le fait que  $\sum_x p(x|\phi) = 1$ . Calculons maintenant  $S_1$

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \sum_{i=1}^m \sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\phi) \left( \frac{d}{d\phi} \ln p_i(x_i|\phi) \right)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{x_1, \dots, x_\mu} \prod_l p_l(x_l|\phi) \left( \frac{d}{d\phi} \ln p_i(x_i|\phi) \right)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^m \left[ \sum_{x_i} p_i(x_i|\phi) \left( \frac{d}{d\phi} \ln p_i(x_i|\phi) \right)^2 \right] \prod_{l \neq i} \sum_{x_l} p_l(x_l|\phi) \\
 &= \sum_{i=1}^m \left[ \sum_{x_i} p_i(x_i|\phi) \left( \frac{d}{d\phi} \ln p_i(x_i|\phi) \right)^2 \right]. \tag{1.20}
 \end{aligned}$$

Pour une distribution de probabilité qui s'écrit sous la forme d'un produit de  $m$  termes (1.15), les équations (1.16), (1.19) et (1.20) nous permettent d'écrire

$$I[\phi] = \sum_{k=1}^m F_k[\phi], \tag{1.21}$$

où,  $F_k[\phi] = \sum_x p_k(x|\phi) \left( \frac{d}{d\phi} \ln p_k(x|\phi) \right)^2$  est l'information de Fisher individuelle. Nous avons donc démontré l'additivité de l'information de Fisher. Dans le cas particulier où  $p_k(x|\phi) = p(x|\phi)$  pour tout  $k$ , comme par exemple dans le cas de mesures indépendantes (1.2), nous avons  $F_k[\phi] = F[\phi]$  pour tous  $k$  et l'équation (1.21) devient

$$I[\phi] = mF[\phi]. \tag{1.22}$$

Revenons maintenant au cas de protocole d'estimation quantique décrit précédemment où le paramètre inconnu  $\phi$  est estimé à partir des résultats de  $\mu$  mesures indépendantes d'une observable  $\hat{X}$  dans le même état final  $\hat{\rho}_\phi$  et la distribution de probabilité  $p(\vec{x}|\phi)$  s'écrit sous la forme (1.2). La probabilité individuelle  $p(x|\phi)$  étant donnée par (1.1). Dans ce cas, l'information de Fisher  $I[\phi]$  est donnée par (1.22), où  $m$  est remplacé par  $\mu$ , et  $F$  devient une fonction de l'état  $\hat{\rho}_\phi$  du système, après l'encodage du paramètre  $\phi$ , et de l'observable mesurée  $\hat{X}$ , c'est à dire  $F[\phi] \equiv F[\hat{\rho}_\phi, \hat{X}]$ . La limite de Cramér-Rao s'écrit alors pour le protocole d'estimation quantique comme

$$(\Delta\phi_{\text{est}})^2 \geq \frac{1}{\mu F[\hat{\rho}_\phi, \hat{X}]}, \tag{1.23}$$

avec

$$F[\hat{\rho}_\phi, \hat{X}] = \sum_x p(x|\phi) \left( \frac{d}{d\phi} \ln p(x|\phi) \right)^2. \tag{1.24}$$

Bien que la limite de Cramér-Rao détermine une limite inférieure pour la variance d'un estimateur non biaisé dans des conditions générales, elle ne garantit pas l'existence d'estimateurs qui atteignent cette limite. En effet, dans le cas d'un petit nombre de mesures indépendantes  $\mu$ , il n'existe pratiquement aucun estimateur non biaisé connu qui puisse atteindre la limite de Cramér-Rao. Néanmoins, dans la limite  $\mu \gg 1$ , l'estimateur du maximum de vraisemblance, qui associe à l'ensemble des résultats de mesure  $\vec{x}$  la valeur de  $\phi$  qui maximise la probabilité  $p(\vec{x}|\phi)$ , devient approximativement non biaisée et sature de manière asymptotique l'inégalité de Cramér-Rao dans le cas général [46]. L'estimateur du maximum de vraisemblance est illustré dans la figure 1.2.

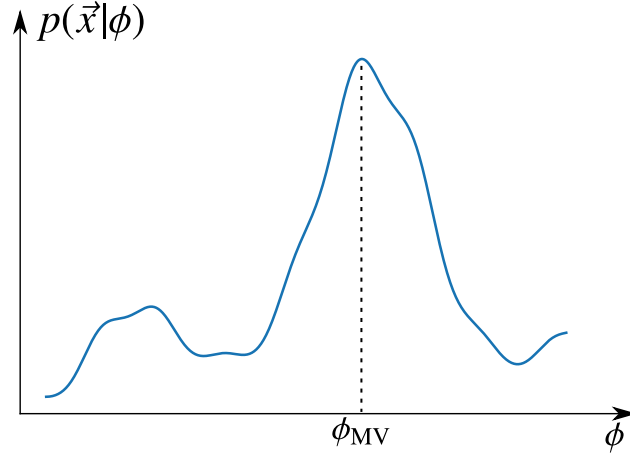


FIGURE 1.2 – Estimateur du maximum de vraisemblance, la valeur estimée du paramètre inconnu  $\phi_{\text{MV}}$  est la valeur pour laquelle la distribution de probabilité  $p(\vec{x}|\phi)$  est maximale pour l'ensemble de résultats de mesure obtenu  $\vec{x}$ .

### 1.1.3 Information quantique de Fisher

La précision de l'estimation d'un paramètre inconnu  $\phi$  dans un protocole d'estimation quantique (illustré dans la figure 1.1) dépend de l'état initial du système  $\hat{\rho}$ , du processus d'encodage de  $\phi$ , de l'observable de mesure  $\hat{X}$ , et de la fonction estimateur  $\phi_{\text{est}}(\vec{x})$  choisie. En optimisant sur tous les estimateurs non biaisés, nous avons montré dans la section précédente que la meilleure précision atteignable est limitée par l'information de Fisher, qui dépend de l'état  $\hat{\rho}_\phi$ , résultant de l'encodage de  $\phi$  dans l'état initial  $\hat{\rho}$ , et de l'observable  $\hat{X}$  mesurée. Plus précisément, l'observable  $\hat{X}$  qui produit des résultats  $\vec{x}$  caractérisés par une distribution de probabilité  $p(\vec{x}|\phi)$  très sensible aux variations du paramètre  $\phi$  conduit à une plus grande précision par rapport à une observable dont la distribution de probabilité est moins sensible aux variations de  $\phi$ . Pour un état  $\hat{\rho}_\phi$  donné, l'information quantique de Fisher  $F_{\text{Q}}[\hat{\rho}_\phi]$  est définie comme le maximum de l'information de Fisher  $F[\hat{\rho}_\phi, \hat{X}]$  sur toutes les observables de mesure  $\hat{X}$  [40, 52]

$$F_{\text{Q}}[\hat{\rho}_\phi] \equiv \max_{\hat{X}} F[\hat{\rho}_\phi, \hat{X}]. \quad (1.25)$$

Selon cette définition, l'information quantique de Fisher fournit une limite supérieure pour l'information de Fisher conduisant ainsi, pour  $\mu$  mesures indépendantes, à la série d'inégalités pour la variance d'un estimateur non biaisé  $\phi_{\text{est}}$

$$(\Delta\phi_{\text{est}})^2 \geq \frac{1}{\mu F[\hat{\rho}_\phi, \hat{X}]} \geq \frac{1}{\mu F_{\text{Q}}[\hat{\rho}_\phi]}. \quad (1.26)$$

De ce fait, l'information quantique de Fisher mesure le potentiel métrologique maximal de l'état  $\hat{\rho}_\phi$ .

Formellement,  $F_{\text{Q}}$  peut s'écrire comme [40]

$$F_{\text{Q}}[\hat{\rho}_\phi] = \text{tr}[\hat{\rho}_\phi \hat{L}_\phi^2], \quad (1.27)$$

où l'observable  $\hat{L}_\phi$ , appelée dérivée logarithmique symétrique, est définie par l'équation

$$\frac{\partial \hat{\rho}_\phi}{\partial \phi} = \frac{\hat{\rho}_\phi \hat{L}_\phi + \hat{L}_\phi \hat{\rho}_\phi}{2}. \quad (1.28)$$

Dans la suite de cette section, nous allons obtenir, à partir de l'équation (1.27), une formule explicite et simple de l'information quantique de Fisher lorsque le paramètre  $\phi$  est encodé sur un état pur  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$  via une évolution unitaire  $\hat{\rho}_\phi = e^{-i\phi\hat{H}}\hat{\rho}e^{i\phi\hat{H}}$  générée par l'observable  $\hat{H}$ . À partir de cette expression et des propriétés de l'information quantique de Fisher, nous allons déduire la limite de Heisenberg (LH), une limite inférieure de l'incertitude de l'estimation d'un paramètre  $\phi$  pour un état quelconque et la limite quantique standard (LQS), une limite inférieure de l'incertitude sur  $\phi$  pour un état séparable. Pour ce faire, nous commençons par exprimer l'opérateur densité  $\hat{\rho}_\phi$  dans sa base propre  $|\lambda_i\rangle$  de l'espace de Hilbert comme

$$\hat{\rho}_\phi = \sum_i p_i |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|, \quad (1.29)$$

avec  $p_i \geq 0$  et  $\sum_i p_i = 1$ . Notez que  $p_i$  et  $|\lambda_i\rangle$  dépendent implicitement du paramètre  $\phi$ . En substituant (1.29) dans l'équation (1.27), nous pouvons exprimer l'information quantique de Fisher comme

$$\begin{aligned} F_Q[\hat{\rho}_\phi] &= \text{tr}[\hat{\rho}_\phi \hat{L}_\phi^2] \\ &= \sum_i p_i \text{tr}[\hat{L}_\phi |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i| \hat{L}_\phi] \\ &= \sum_{i,j,k} p_i \text{tr}[|\lambda_j\rangle\langle\lambda_j| \hat{L}_\phi |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i| \hat{L}_\phi |\lambda_k\rangle\langle\lambda_k|] \\ &= \sum_{i,j,k} p_i \langle\lambda_j| \hat{L}_\phi |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i| \hat{L}_\phi |\lambda_k\rangle \text{tr}[|\lambda_j\rangle\langle\lambda_k|] \\ &= \sum_{i,j,k} p_i \langle\lambda_j| \hat{L}_\phi |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i| \hat{L}_\phi |\lambda_k\rangle \delta_{jk} \\ &= \sum_{i,j} p_i |\langle\lambda_i| \hat{L}_\phi |\lambda_j\rangle|^2. \end{aligned} \quad (1.30)$$

où nous avons introduit la relation de fermeture  $\sum_k |\lambda_k\rangle\langle\lambda_k| = \hat{I}$  deux fois,  $\hat{I}$  étant l'opérateur identité, et nous avons utilisé la relation  $\text{tr}[|\lambda_j\rangle\langle\lambda_k|] = \delta_{jk}$ . Cette équation peut également être exprimée comme

$$F_Q[\hat{\rho}_\phi] = \sum_{i,j} \frac{p_i + p_j}{2} |\langle\lambda_i| \hat{L}_\phi |\lambda_j\rangle|^2. \quad (1.31)$$

Puisque  $|\lambda_i\rangle$  représente la base propre de  $\hat{\rho}_\phi$  avec les valeurs propres  $p_i$ , l'équation (1.28) nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \langle\lambda_i| \frac{\partial \hat{\rho}_\phi}{\partial \phi} |\lambda_j\rangle &= \frac{1}{2} [\langle\lambda_i| \hat{\rho}_\phi \hat{L}_\phi |\lambda_j\rangle + \langle\lambda_i| \hat{L}_\phi \hat{\rho}_\phi |\lambda_j\rangle] \\ &= \frac{p_i + p_j}{2} \langle\lambda_i| \hat{L}_\phi |\lambda_j\rangle. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Nous en déduisons donc

$$\langle\lambda_i| \hat{L}_\phi |\lambda_j\rangle = \frac{2}{p_i + p_j} \langle\lambda_i| \partial_\phi \hat{\rho}_\phi |\lambda_j\rangle,$$

où  $\partial_\phi \equiv \partial/\partial\phi$ . En substituant ceci dans (1.31), nous obtenons

$$F_Q[\hat{\rho}_\phi] = \sum_{i,j} \frac{2}{p_i + p_j} |\langle\lambda_i| \partial_\phi \hat{\rho}_\phi |\lambda_j\rangle|^2, \quad (1.33)$$

où la somme ne comprend que les termes pour lesquels  $p_i + p_j \neq 0$ . Pour simplifier cette dernière équation, nous utilisons

$$\begin{aligned} \langle \lambda_i | \partial_\phi \hat{\rho}_\phi | \lambda_j \rangle &= \sum_k \langle \lambda_i | \partial_\phi (p_k |\lambda_k\rangle \langle \lambda_k|) | \lambda_j \rangle \\ &= (\partial_\phi p_i) \delta_{ij} + (p_i - p_j) \langle \partial_\phi \lambda_i | \lambda_j \rangle, \end{aligned} \quad (1.34)$$

où nous avons utilisé  $\partial_\phi \langle \lambda_i | \lambda_j \rangle = 0$ . En substituant cette équation dans (1.33), nous obtenons

$$F_Q[\hat{\rho}_\phi] = \sum_i \frac{(\partial_\phi p_i)^2}{p_i} + 2 \sum_{i,j} \frac{(p_i - p_j)^2}{p_i + p_j} |\langle \partial_\phi \lambda_i | \lambda_j \rangle|^2. \quad (1.35)$$

Cette dernière équation est importante car elle nous permet de séparer l'information maximale concernant le paramètre  $\phi$  contenue dans les poids  $p_i$  de l'état  $\hat{\rho}_\phi = \sum_i p_i |\lambda_i\rangle \langle \lambda_i|$ , représentée par le premier terme, de l'information encodée dans les états propres  $|\lambda_i\rangle$ , représentée par le second terme. Par conséquent, lorsque le paramètre  $\phi$  est encodé dans l'état initial  $\hat{\rho} = \sum_i p_i^0 |\lambda_i^0\rangle \langle \lambda_i^0|$  via une évolution unitaire  $\hat{\rho}_\phi = e^{-i\phi \hat{H}} \hat{\rho} e^{i\phi \hat{H}}$  générée par l'observable  $\hat{H}$ , le premier terme de l'équation (1.35) disparaît. Dans ce cas, l'information quantique de Fisher devient une fonction de l'état initial  $\hat{\rho}$  et du générateur  $\hat{H}$ , qui peut être exprimée comme

$$F_Q[\hat{\rho}, \hat{H}] = 2 \sum_{i,j} \frac{(p_i - p_j)^2}{p_i + p_j} |\langle \lambda_i^0 | \hat{H} | \lambda_j^0 \rangle|^2, \quad (1.36)$$

avec  $p_i = p_i^0$ . Pour passer de (1.35) à (1.36), nous avons utilisé l'équation de Schrödinger  $-i\partial_\phi |\lambda_k\rangle = \hat{H} |\lambda_k\rangle$ . Considérons de plus que l'état  $\hat{\rho}$  est pur, c'est à dire

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi| + \sum_{k_\perp} p_{k_\perp} |\lambda_{k_\perp}\rangle \langle \lambda_{k_\perp}| \quad \text{avec} \quad p_{k_\perp} = 0 \quad \forall k_\perp, \quad (1.37)$$

où  $\{|\lambda_{k_\perp}\rangle\}$  est la base de l'espace de Hilbert orthogonal à  $|\psi\rangle$ . Dans ce cas l'équation (1.36) devient

$$\begin{aligned} F_Q[|\psi\rangle, \hat{H}] &= 4 \sum_{k_\perp} |\langle \lambda_{k_\perp} | \hat{H} | \psi \rangle|^2 \\ &= 4 \langle \psi | \hat{H} \left( \sum_{k_\perp} |\lambda_{k_\perp}\rangle \langle \lambda_{k_\perp}| \right) \hat{H} | \psi \rangle. \end{aligned} \quad (1.38)$$

En utilisant la relation de fermeture  $\hat{I} = |\psi\rangle \langle \psi| + \sum_{k_\perp} |\lambda_{k_\perp}\rangle \langle \lambda_{k_\perp}|$ , nous obtenons

$$F_Q[|\psi\rangle, \hat{H}] = 4(\Delta \hat{H})^2, \quad (1.39)$$

où  $(\Delta \hat{H})^2$  est la variance du générateur  $\hat{H}$  dans l'état  $|\psi\rangle$ . Pour un état  $|\psi\rangle$  quelconque, la variance d'un opérateur  $\hat{H}$  satisfait toujours l'inégalité

$$(\Delta \hat{H})^2 \leq \frac{1}{4} (H_{\max} - H_{\min})^2, \quad (1.40)$$

où  $H_{\max}$  et  $H_{\min}$  sont respectivement la valeur propre maximale et minimale de l'opérateur  $\hat{H}$ . Pour un générateur  $\hat{H}$  donné, l'information quantique de Fisher (1.39) possède donc une limite supérieure indépendante de l'état  $|\psi\rangle$  du système

$$F_Q[|\psi\rangle, \hat{H}] \leq (H_{\max} - H_{\min})^2. \quad (1.41)$$

L'information quantique de Fisher possède deux propriétés importantes qui nous seront utiles pour ce travail. Comme l'information quantique de Fisher est une information de Fisher maximisée sur toutes les observables de mesure possibles, elle est donc, selon l'équation (1.21), additive. Cela implique que pour un état séparable  $|\psi_{\text{sep}}\rangle = |\psi_1\rangle|\psi_2\rangle\dots|\psi_N\rangle$  décrivant un ensemble de  $N$  sous-systèmes indépendants et pour  $\hat{H} = \sum_k \hat{h}_k$  où  $\hat{h}_k$  est le générateur associé au sous-système  $k$ , nous pouvons écrire

$$F_Q[|\psi_{\text{sep}}\rangle, \hat{H}] = \sum_k F_Q[|\psi_k\rangle, \hat{h}_k]. \quad (1.42)$$

En utilisant (1.40) appliquée aux opérateurs individuels  $\hat{h}_k$ , nous déduisons que pour un état séparable  $|\psi_{\text{sep}}\rangle$  quelconque, l'information quantique de Fisher possède une limite supérieur

$$F_Q[|\psi_{\text{sep}}\rangle, \hat{H}] \leq \sum_k \left( h_{\text{max}}^{(k)} - h_{\text{min}}^{(k)} \right)^2, \quad (1.43)$$

où  $h_{\text{max}}^{(k)}$  et  $h_{\text{min}}^{(k)}$  sont respectivement la valeur propre maximale et minimale de l'opérateur  $\hat{h}_k$ . Une deuxième propriété de l'information quantique de Fisher est sa convexité par rapport à son argument  $\hat{\rho}$ , c'est à dire pour un état  $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|$  [46]

$$F_Q[\hat{\rho}, \hat{H}] \leq \sum_i p_i F_Q[|\lambda_i\rangle, \hat{H}]. \quad (1.44)$$

Cela implique que lorsque le paramètre  $\phi$  est encodé sur un état initial quelconque  $\hat{\rho}$  via une évolution unitaire générée par  $\hat{H}$ , l'information quantique de Fisher satisfait l'inégalité suivante

$$F_Q[\hat{\rho}, \hat{H}] \leq 4(\Delta\hat{H})^2. \quad (1.45)$$

Il est alors impossible d'augmenter la précision de l'estimation en mixant des états quantiques purs. En combinant (1.45) avec (1.40), nous déduisons que pour un état  $\hat{\rho}$  quelconque,

$$F_Q[\hat{\rho}, \hat{H}] \leq (H_{\text{max}} - H_{\text{min}})^2. \quad (1.46)$$

Selon l'équation (1.26), cela nous conduit à la limite de Heisenberg

$$(\Delta\phi_{\text{est}})^2 \geq (\Delta\phi)_{\text{LH}}^2 = \frac{1}{\mu (H_{\text{max}} - H_{\text{min}})^2}, \quad (1.47)$$

une limite inférieure de l'incertitude sur l'estimation d'un paramètre  $\phi$ , encodé via un générateur  $\hat{H}$  et estimé à partir des résultats de  $\mu$  mesures indépendantes. La convexité (1.44) et l'additivité (1.42) de l'information quantique de Fisher nous permettent d'écrire, pour un état mixte séparable  $\hat{\rho}_{\text{sep}} = \sum_i p_i |\psi_{\text{sep}}^{(i)}\rangle\langle\psi_{\text{sep}}^{(i)}|$  et pour un générateur  $\hat{H} = \sum_k \hat{h}_k$

$$F_Q[\hat{\rho}_{\text{sep}}, \hat{H}] \leq \sum_k (h_{\text{max}}^{(k)} - h_{\text{min}}^{(k)})^2. \quad (1.48)$$

Cela nous permet de déduire que l'incertitude sur un paramètre estimé avec un état séparable quelconque est limitée par ce qu'on appelle la limite quantique standard

$$(\Delta\phi_{\text{est}})^2 \geq (\Delta\phi)_{\text{LQS}}^2 = \frac{1}{\mu \sum_k (h_{\text{max}}^{(k)} - h_{\text{min}}^{(k)})^2}. \quad (1.49)$$

Pour un ensemble de  $N$  sous-systèmes identiques, pour lesquels  $h_{\text{max}}^{(k)} = h_{\text{max}}$  et  $h_{\text{min}}^{(k)} = h_{\text{min}}$  pour tout  $k$ , la limite quantique standard s'écrit

$$(\Delta\phi)_{\text{LQS}}^2 = \frac{1}{\mu N (h_{\text{max}} - h_{\text{min}})^2}. \quad (1.50)$$

### 1.1.4 Méthode des moments

Dans les protocoles d'estimation quantique, nous cherchons à estimer un paramètre inconnu  $\phi$  à partir des résultats  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_\mu)^T$  de  $\mu$  mesures indépendantes d'une observable  $\hat{X}$ . La limite de Cramér-Rao est atteinte pour  $\mu \gg 1$  lorsque l'on utilise l'estimateur du maximum de vraisemblance, qui associe à  $\vec{x}$  la valeur de  $\phi$  pour laquelle  $p(\vec{x}|\phi)$  est maximale. Cependant, atteindre cette limite nécessite généralement la connaissance complète de la distribution de probabilité  $p(\vec{x}|\phi)$  à partir de plusieurs mesures. Mais, les limitations pratiques ne permettent souvent d'accéder qu'au premier moment statistique, c'est-à-dire la moyenne, associé à cette distribution de probabilités. Cette section présente la méthode des moments, qui permet d'estimer un paramètre lorsque la connaissance complète de la distribution de probabilité est inaccessible. Dans cette approche, le paramètre  $\phi$  est estimé à partir de la moyenne statistique  $\bar{X}_\mu = \sum_{i=1}^\mu x_i/\mu$  de  $\mu$  mesures indépendantes de l'observable  $\hat{X}$  à l'aide de l'estimateur  $\phi_{\text{est}}(\bar{X}_\mu)$ . Pour ce choix de variable aléatoire pour l'estimation du paramètre  $\phi$ , nous verrons que l'inégalité de Cramér-Rao prend une forme simple qui met en jeu seulement le premier et le second moment de  $p(\vec{x}|\phi)$ . Les résultats de  $\mu$  mesures indépendantes  $\vec{x}$  étant aléatoires, leur moyenne statistique  $\bar{X}_\mu$  est également une variable aléatoire continue caractérisée par la distribution de probabilité  $p(\bar{X}_\mu|\phi)$  pour un  $\phi$  donné. Nous pouvons maintenant utiliser le formalisme général développé dans les sections 1.1.1 et 1.1.2 pour trouver le meilleur estimateur et l'incertitude, sur l'estimation du paramètre, correspondante. En particulier, nous déterminerons l'estimateur qui associe à  $\phi$  la valeur qui maximise la distribution de probabilité  $p(\bar{X}_\mu|\phi)$  et son incertitude en fonction de l'observable mesurée  $\hat{X}$  et de l'état  $\hat{\rho}_\phi$ . Dans ce contexte, la limite de Cramér-Rao (1.23) nous permet d'exprimer, pour tout choix d'estimateur que nous supposons non biaisé  $\phi_{\text{est}}(\bar{X}_\mu)$  pour une moyenne statistique  $\bar{X}_\mu$

$$(\Delta\phi_{\text{est}})^2 \geq \frac{1}{F_{\text{MM}}[\hat{\rho}_\phi, \hat{X}]}, \quad (1.51)$$

avec

$$F_{\text{MM}}[\hat{\rho}_\phi, \hat{X}] = \int d\bar{X}_\mu p(\bar{X}_\mu|\phi) \left( \frac{d}{d\phi} \ln p(\bar{X}_\mu|\phi) \right)^2. \quad (1.52)$$

De plus, dans la limite de grands  $\mu$ , la distribution de probabilité  $p(\bar{X}_\mu|\phi)$  s'approche d'une forme gaussienne selon le théorème de la limite centrale [53]

$$p(\bar{X}_\mu|\phi) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi(\Delta\hat{X})^2}} e^{-\frac{\mu[\bar{X}_\mu - \langle\hat{X}\rangle]^2}{2(\Delta\hat{X})^2}}, \quad (1.53)$$

où,  $\langle\hat{X}\rangle$  et  $(\Delta\hat{X})^2$  sont la moyenne et la variance de l'observable  $\hat{X}$  dans l'état  $\hat{\rho}_\phi$ . En utilisant cette distribution gaussienne, dans la limite  $\mu \rightarrow \infty$ , l'équation (1.52) devient

$$\begin{aligned} F_{\text{MM}}[\hat{\rho}_\phi, \hat{X}] &= \int d\bar{X}_\mu p(\bar{X}_\mu|\phi) \left( \frac{d}{d\phi} \ln p(\bar{X}_\mu|\phi) \right)^2 \\ &= \int d\bar{X}_\mu p(\bar{X}_\mu|\phi) \left( \mu \frac{1}{(\Delta\hat{X})^2} [\bar{X}_\mu - \langle\hat{X}\rangle] \left[ \frac{\partial\langle\hat{X}\rangle}{\partial\phi} + \frac{\bar{X}_\mu - \langle\hat{X}\rangle}{\Delta\hat{X}} \frac{\partial\Delta\hat{X}}{\partial\phi} \right] + \frac{1}{\Delta\hat{X}} \frac{\partial\Delta\hat{X}}{\partial\phi} \right)^2 \\ &= \frac{\mu^2}{(\Delta\hat{X})^4} \int d\bar{X}_\mu p(\bar{X}_\mu|\phi) [\bar{X}_\mu - \langle\hat{X}\rangle]^2 \left[ \frac{\partial\langle\hat{X}\rangle}{\partial\phi} + \frac{\bar{X}_\mu - \langle\hat{X}\rangle}{\Delta\hat{X}} \frac{\partial\Delta\hat{X}}{\partial\phi} \right]^2 \end{aligned} \quad (1.54)$$



Cela nous donne

$$\begin{aligned}
 F_{\text{MM}}[\hat{\rho}_\phi, \hat{X}] &= \frac{\mu^2}{(\Delta\hat{X})^4} \left( \frac{\partial\langle\hat{X}\rangle}{\partial\phi} \right)^2 \int d\bar{X}_\mu p(\bar{X}_\mu|\phi) [\bar{X}_\mu - \langle\hat{X}\rangle]^2 \\
 &+ 2 \frac{\mu^2}{(\Delta\hat{X})^5} \frac{\partial\langle\hat{X}\rangle}{\partial\phi} \frac{\partial\Delta\hat{X}}{\partial\phi} \int d\bar{X}_\mu p(\bar{X}_\mu|\phi) [\bar{X}_\mu - \langle\hat{X}\rangle]^3 \\
 &+ \frac{\mu^2}{(\Delta\hat{X})^6} \left( \frac{\partial\Delta\hat{X}}{\partial\phi} \right)^2 \int d\bar{X}_\mu p(\bar{X}_\mu|\phi) [\bar{X}_\mu - \langle\hat{X}\rangle]^4.
 \end{aligned} \tag{1.55}$$

Comme la distribution de probabilité (1.53) est gaussienne, le troisième moment statistique, représenté par le deuxième terme dans l'équation (1.55), s'annule, et le quatrième moment statistique, représenté par le dernier terme, devient négligeable dans la limite de grand  $\mu$  considérée ici. En conséquence, nous pouvons écrire

$$F_{\text{MM}}[\hat{\rho}_\phi, \hat{X}] = \frac{\mu}{(\Delta\hat{X})^2} \left( \frac{\partial\langle\hat{X}\rangle}{\partial\phi} \right)^2 \quad \text{pour } \mu \gg 1. \tag{1.56}$$

Pour un grand nombre de mesures indépendantes  $\mu$ , la limite de Cramér-Rao (1.51), obtenue en utilisant la formule générale (1.23) lorsque le paramètre inconnu est estimé à partir de la moyenne statistique  $\bar{X}_\mu$ , devient pour un estimateur non biaisé  $\phi_{\text{est}}(\bar{X}_\mu)$  quelconque

$$(\Delta\phi_{\text{est}})^2 \geq \frac{1}{\mu} \frac{(\Delta\hat{X})^2}{(\partial_\phi\langle\hat{X}\rangle)^2}. \tag{1.57}$$

Comme nous l'avons vu précédemment pour le cas général, lorsque  $\mu \gg 1$ , il existe au moins un estimateur approximativement non biaisé  $\phi_{\text{est}}(\bar{X}_\mu)$  qui atteint d'une manière asymptotique l'égalité dans l'inégalité (1.57). Cet estimateur est l'estimateur du maximum de vraisemblance pour la méthode des moments, qui relie la moyenne statistique  $\bar{X}_\mu$  à la valeur de  $\phi$  qui maximise la distribution de probabilité (1.53). En d'autres termes, il associe à  $\bar{X}_\mu$  la valeur de  $\phi$  pour laquelle

$$\frac{\partial}{\partial\phi} \ln p(\bar{X}_\mu|\phi) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \ln p(\bar{X}_\mu|\phi) < 0. \tag{1.58}$$

L'équation de gauche nous donne exactement

$$\frac{1}{\Delta\hat{X}} \frac{\partial\Delta\hat{X}}{\partial\phi} + \mu \frac{1}{(\Delta\hat{X})^2} [\bar{X}_\mu - \langle\hat{X}\rangle] \left( \frac{\partial\langle\hat{X}\rangle}{\partial\phi} + \frac{\bar{X}_\mu - \langle\hat{X}\rangle}{\Delta\hat{X}} \frac{\partial\Delta\hat{X}}{\partial\phi} \right) = 0. \tag{1.59}$$

En prenant la limite  $\mu \rightarrow \infty$ , la dernière équation devient

$$\mu \frac{1}{(\Delta\hat{X})^2} [\bar{X}_\mu - \langle\hat{X}\rangle] \left( \frac{\partial\langle\hat{X}\rangle}{\partial\phi} + \frac{\bar{X}_\mu - \langle\hat{X}\rangle}{\Delta\hat{X}} \frac{\partial\Delta\hat{X}}{\partial\phi} \right) = 0. \tag{1.60}$$

En tenant compte de l'équation de droite dans (1.58), la valeur de  $\phi$  qui maximise la distribution (1.53) est la valeur pour laquelle

$$\bar{X}_\mu = \langle\hat{X}\rangle. \tag{1.61}$$

Cette dernière équation avec l'équation (1.57) montrent que dans un protocole d'estimation basé sur la méthode des moments, c'est à dire dont l'output est la moyenne statistique  $\bar{X}_\mu$  des résultats de  $\mu \gg 1$  mesures indépendantes d'une observable  $\hat{X}$ , le paramètre inconnu  $\phi$  peut être estimé comme

la valeur pour laquelle la moyenne statistique  $\bar{X}_\mu$  est égale à la valeur moyenne de l'observable  $\hat{X}$  dans l'état final  $\hat{\rho}_\phi$  avec une incertitude donnée par

$$(\Delta\phi_{\text{est}})^2 = \frac{1}{\mu} \frac{(\Delta\hat{X})^2}{(\partial_\phi\langle\hat{X}\rangle)^2}. \quad (1.62)$$

En raison de sa simplicité, cette dernière expression à été utilisée dans la littérature pour évaluer l'incertitude sur l'estimation d'un paramètre inconnu pour des états arbitraire et pour la mesure des observables linéaires [10, 54] ensuite elle a été généralisée pour la mesure d'observables non linéaires dans [25]. Pour  $\mu = 1$ , cette incertitude sur la phase se présente sous la forme d'un carré du rapport entre un bruit exprimé par  $\Delta\hat{X}$  et un signal donné par  $\partial_\phi\langle\hat{X}\rangle$  et, comme montré dans la figure 1.3, elle peut également être obtenue par propagation d'erreur.

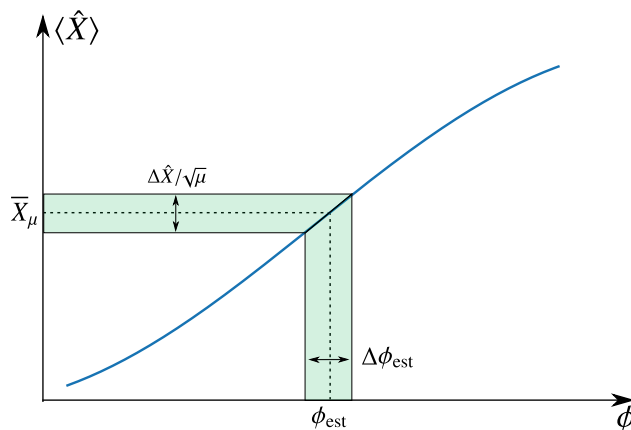


FIGURE 1.3 – Méthode des moments, la valeur estimée du paramètre inconnu  $\phi_{\text{MV}}$  est la valeur pour laquelle la moyenne statistique  $\bar{X}_\mu$  est égale à la valeur moyenne de l'observable  $\hat{X}$ , obtenue théoriquement ou par une calibration expérimentale, calculée dans l'état  $\hat{\rho}_\phi$ .

## 1.2 Estimation multi-paramètres

### 1.2.1 Cadre général

Comme son nom l'indique, le protocole d'estimation quantique multi-paramètres a pour but d'estimer un ensemble de paramètres inconnus à partir des mesures d'un ensemble d'observables dans un système quantique. Dans ce protocole, représenté dans la figure 1.4, le système est initialement préparé dans un état  $\hat{\rho}$ . Un ensemble de  $M$  paramètres  $\vec{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_M)^T$  est ensuite encodé dans  $\hat{\rho}$  et une mesure simultanée d'un ensemble de  $K$  observables, qui commutent entre elles,  $\hat{\vec{X}} = (\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_K)^T$  est effectuée, donnant lieu à des résultats  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_K)^T$ . Dans le cas général, ce scénario peut être répété  $\mu$  fois, mais pour des raisons de simplicité et sans perte de généralité, nous considérons ici une seule répétition  $\mu = 1$ . Comme dans le cas de l'estimation d'un seul paramètre, une estimation des paramètres encodés  $\vec{\phi}$  peut être obtenue à partir des résultats  $\vec{x}$  de la mesure. Pour cela, nous introduisons l'estimateur  $\vec{\phi}_{\text{est}}(\vec{x}) = (\phi_{1,\text{est}}(\vec{x}), \dots, \phi_{M,\text{est}}(\vec{x}))^T$ , une fonction vectorielle qui relie les résultats  $\vec{x}$  aux paramètres  $\vec{\phi}$ . Nous appelons  $p(\vec{x}|\vec{\phi})$  la probabilité conditionnelle d'obtenir les résultats  $\vec{x}$  lors de la mesure des  $K$  observables  $\hat{\vec{X}}$  lorsque les valeurs exactes des  $M$  paramètres encodés sont données par  $\vec{\phi}$ . Pour un système quantique dans l'état  $\hat{\rho}_{\vec{\phi}}$ , cette probabilité conditionnelle s'écrit

$$p(\vec{x}|\vec{\phi}) = \text{tr} \left[ \hat{P}_{\vec{x}} \hat{\rho}_{\vec{\phi}} \right], \quad (1.63)$$

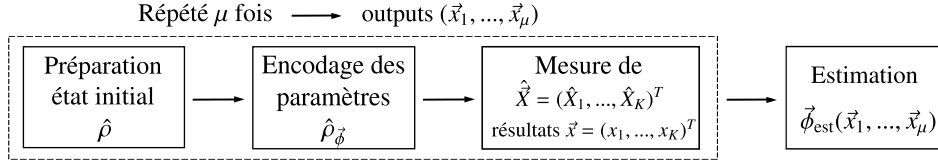


FIGURE 1.4 – Protocole d’estimation multi-paramètres

où  $\hat{P}_{\vec{x}}$  est le projecteur sur l’état propre commun des observables  $\hat{X} = (\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_K)^T$  associé aux valeurs propres  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_K)^T$ . Les estimateurs  $\phi_{k,\text{est}}$  sont alors des variables aléatoires et leurs moyennes s’écrivent comme

$$\bar{\phi}_{k,\text{est}} = \sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\vec{\phi}) \phi_{k,\text{est}}(\vec{x}). \quad (1.64)$$

L’incertitude sur ces estimateurs est caractérisée par la matrice covariance  $\Sigma$  dont les éléments sont donnés par

$$\Sigma_{kl} = \text{Cov}(\phi_{k,\text{est}}, \phi_{l,\text{est}}) = \sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\vec{\phi}) \left[ \phi_{k,\text{est}}(\vec{x}) - \bar{\phi}_{k,\text{est}} \right] \left[ \phi_{l,\text{est}}(\vec{x}) - \bar{\phi}_{l,\text{est}} \right]. \quad (1.65)$$

Pour la suite nous n’allons considérer que des estimateurs  $\vec{\phi}_{\text{est}}$  non biaisés pour lesquels les égalités

$$\bar{\phi}_{k,\text{est}} = \phi_k \quad \text{d’où} \quad \frac{\partial \bar{\phi}_{k,\text{est}}}{\partial \phi_l} = \delta_{kl}. \quad (1.66)$$

sont vérifiées pour tout  $k, l = 1, \dots, M$ . La matrice  $\Sigma$  permet d’évaluer la précision du protocole d’estimation multi-paramètres et, comme nous allons démontrer dans la section suivante, elle est fondamentalement limitée par la matrice d’information de Fisher et par la matrice d’information quantique de Fisher.

### 1.2.2 Matrice d’information de Fisher

Dans le contexte du protocole d’estimation multi-paramètres, tout comme dans le scénario à un seul paramètre, l’incertitude de l’estimateur non biaisé  $\vec{\phi}_{\text{est}}$  d’un ensemble de paramètres  $\vec{\phi}$  à partir des résultats de mesure de l’ensemble d’observables  $\hat{X}$  dans l’état  $\hat{\rho}_{\vec{\phi}}$  est limitée par une limite fondamentale connue sous le nom de la limite de Cramér-Rao multi-paramètres [40, 55]

$$\Sigma \geq \mathcal{F}[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}]^{-1}, \quad (1.67)$$

où

$$(\mathcal{F}[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}])_{kl} = \sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\vec{\phi}) \left( \frac{\partial}{\partial \phi_k} \ln p(\vec{x}|\vec{\phi}) \right) \left( \frac{\partial}{\partial \phi_l} \ln p(\vec{x}|\vec{\phi}) \right) \quad (1.68)$$

représente la matrice d’information de Fisher associée à l’état  $\hat{\rho}_{\vec{\phi}}$  et à l’ensemble d’observables mesurées  $\hat{X}$  avec  $p(\vec{x}|\vec{\phi})$  la distribution de probabilités donnée par (1.63). L’inégalité (1.67) indique que la matrice  $\Sigma - \mathcal{F}[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}]^{-1}$  est semi-définie positive.

Nous allons maintenant écrire une démonstration de l’équation (1.67). En utilisant (1.64) et (1.66) pour un estimateur non biaisé  $\vec{\phi}_{\text{est}}$  quelconque, nous pouvons écrire

$$\bar{\phi}_{k,\text{est}} - \phi_k = \sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\vec{\phi}) [\phi_{k,\text{est}}(\vec{x}) - \phi_k] = 0 \quad \forall k. \quad (1.69)$$

En dérivant les deux derniers membres de cette dernière équation par rapport à  $\phi_l$ , nous obtenons

$$\sum_{\vec{x}} [\phi_{k,\text{est}}(\vec{x}) - \phi_k] \frac{\partial}{\partial \phi_l} p(\vec{x}|\vec{\phi}) = \delta_{kl} \quad \forall k, l. \quad (1.70)$$

Ceci peut être réécrit comme

$$\sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\vec{\phi}) \left\{ [\phi_{k,\text{est}}(\vec{x}) - \phi_k] \frac{\partial}{\partial \phi_l} \ln p(\vec{x}|\vec{\phi}) \right\} = \delta_{kl} \quad \forall k, l. \quad (1.71)$$

Nous introduisons maintenant deux vecteurs réels arbitraires  $\vec{n}$  et  $\vec{m}$  chacun de taille  $M$ . La multiplication des deux membres de (1.71) par  $n_k m_l$  et la sommation sur tout  $l$  et tout  $k$  nous donne

$$\sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\vec{\phi}) \left\{ \sum_k n_k [\phi_{k,\text{est}}(\vec{x}) - \phi_k] \sum_l m_l \frac{\partial}{\partial \phi_l} \ln p(\vec{x}|\vec{\phi}) \right\} = \sum_k n_k m_k. \quad (1.72)$$

En élevant la dernière équation au carré, nous trouvons

$$\left( \sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\vec{\phi}) \left\{ \sum_k n_k [\phi_{k,\text{est}}(\vec{x}) - \phi_k] \sum_l m_l \frac{\partial}{\partial \phi_l} \ln p(\vec{x}|\vec{\phi}) \right\} \right)^2 = \left( \sum_k n_k m_k \right)^2. \quad (1.73)$$

L'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz  $\overline{AB}^2 \leq \overline{A^2} \overline{B^2}$  avec

$$A = \sum_k n_k [\phi_{k,\text{est}}(\vec{x}) - \phi_k] \quad \text{et} \quad B = \sum_l m_l \frac{\partial}{\partial \phi_l} \ln p(\vec{x}|\vec{\phi}), \quad (1.74)$$

nous donne

$$\left\{ \sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\vec{\phi}) \left( \sum_k n_k [\phi_{k,\text{est}}(\vec{x}) - \phi_k] \right)^2 \right\} \left\{ \sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\vec{\phi}) \left( \sum_l m_l \frac{\partial}{\partial \phi_l} \ln p(\vec{x}|\vec{\phi}) \right)^2 \right\} \geq \left( \sum_k n_k m_k \right)^2. \quad (1.75)$$

Cette dernière équation se réécrit comme

$$\left\{ \sum_{k,p} n_k n_p \sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\vec{\phi}) [\phi_{k,\text{est}}(\vec{x}) - \phi_k] [\phi_{p,\text{est}}(\vec{x}) - \phi_p] \right\} \times \left\{ \sum_{l,q} m_l m_q \sum_{\vec{x}} p(\vec{x}|\vec{\phi}) \left( \frac{\partial}{\partial \phi_l} \ln p(\vec{x}|\vec{\phi}) \right) \left( \frac{\partial}{\partial \phi_q} \ln p(\vec{x}|\vec{\phi}) \right) \right\} \geq \left( \sum_k n_k m_k \right)^2. \quad (1.76)$$

En utilisant (1.65) et (1.68) nous pouvons ré-exprimer cette dernière équation comme

$$\left\{ \sum_{k,p} n_k n_p \Sigma_{kp} \right\} \left\{ \sum_{l,q} m_l m_q \mathcal{F}_{lq} \right\} \geq \left( \sum_k n_k m_k \right)^2, \quad (1.77)$$

Sous une forme matricielle, l'équation (1.77) s'écrit comme

$$\left( \vec{n}^T \Sigma \vec{n} \right) \left( \vec{m}^T \mathcal{F} \vec{m} \right) \geq \left( \vec{n}^T \vec{m} \right)^2. \quad (1.78)$$

En choisissant  $\vec{m} = \mathcal{F}^{-1} \vec{n}$  et en substituant dans (1.78), nous obtenons

$$\vec{n}^T \Sigma \vec{n} \geq \vec{n}^T \mathcal{F}^{-1} \vec{n}, \quad (1.79)$$

pour tout vecteur réel  $\vec{n}$ . Cette dernière inégalité est exactement l'inégalité de Cramér-Rao multi-paramètres (1.67).

### 1.2.3 Matrice d'information quantique de Fisher

Le paragraphe précédent montre que dans un protocole d'estimation multi-paramètres basé sur la mesure d'un ensemble de  $K$  observables, la précision est limitée par la matrice d'information de Fisher (1.68). Cependant, cette limite dépend des observables  $\hat{X}$  mesurées. D'une manière équivalente au cas de l'estimation d'un paramètre, nous introduisons la matrice d'information quantique de Fisher qui satisfait l'inégalité [40]

$$\mathcal{F}_Q[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}] \geq \mathcal{F}[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}] \quad (1.80)$$

pour tout ensemble d'observable  $\hat{X}$ . La matrice d'information quantique de Fisher limite alors la précision maximale atteinte dans un protocole d'estimation multi-paramètres avec un état  $\hat{\rho}_{\vec{\phi}}$ . L'incertitude dans un protocole d'estimation multi-paramètres  $\Sigma$  obéit alors à la série d'inégalités suivante

$$\Sigma \geq \mathcal{F}[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}]^{-1} \geq \mathcal{F}_Q[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}]^{-1}. \quad (1.81)$$

Formellement, un élément  $(\mathcal{F}_Q[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}])_{kl}$  peut être exprimé comme [40]

$$(\mathcal{F}_Q[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}])_{kl} = \text{tr}[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}(\hat{L}_k \hat{L}_l + \hat{L}_l \hat{L}_k)/2], \quad (1.82)$$

où l'observable dérivée logarithmique symétrique  $\hat{L}_k$  est, pour un état  $\hat{\rho}_{\vec{\phi}}$  donné, la solution de l'équation

$$\frac{\partial \hat{\rho}_{\vec{\phi}}}{\partial \phi_k} = \frac{\hat{\rho}_{\vec{\phi}} \hat{L}_k + \hat{L}_k \hat{\rho}_{\vec{\phi}}}{2}. \quad (1.83)$$

La décomposition de  $\hat{\rho}_{\vec{\phi}}$  dans sa base propre  $|\lambda_i\rangle$  de l'espace de Hilbert nous permet de réécrire (1.82) sous la forme

$$(\mathcal{F}_Q[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}])_{kl} = \frac{1}{2} \sum_i p_i \left( \text{tr}[\hat{L}_k |\lambda_i\rangle \langle \lambda_i| \hat{L}_l] + \text{tr}[\hat{L}_l |\lambda_i\rangle \langle \lambda_i| \hat{L}_k] \right). \quad (1.84)$$

En simplifiant cette dernière équation, nous obtenant

$$(\mathcal{F}_Q[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}])_{kl} = \sum_{i,j} \frac{p_i + p_j}{4} \left( \langle \lambda_i | \hat{L}_k | \lambda_j \rangle \langle \lambda_j | \hat{L}_l | \lambda_i \rangle + \langle \lambda_i | \hat{L}_l | \lambda_j \rangle \langle \lambda_j | \hat{L}_k | \lambda_i \rangle \right). \quad (1.85)$$

L'équation (1.83) nous permet d'écrire

$$\langle \lambda_i | \hat{L}_k | \lambda_j \rangle = \frac{2}{p_i + p_j} \langle \lambda_i | \partial_k \hat{\rho}_{\vec{\phi}} | \lambda_j \rangle, \quad (1.86)$$

où  $\partial_k = \partial/(\partial \phi_k)$ . La substitution de (1.86) dans (1.85) nous donne

$$(\mathcal{F}_Q[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}])_{kl} = \sum_{i,j} \frac{1}{p_i + p_j} \left( \langle \lambda_i | \partial_k \hat{\rho}_{\vec{\phi}} | \lambda_j \rangle \langle \lambda_j | \partial_l \hat{\rho}_{\vec{\phi}} | \lambda_i \rangle + \langle \lambda_i | \partial_l \hat{\rho}_{\vec{\phi}} | \lambda_j \rangle \langle \lambda_j | \partial_k \hat{\rho}_{\vec{\phi}} | \lambda_i \rangle \right), \quad (1.87)$$

où la somme ne comprend que les termes pour lesquels  $p_i + p_j \neq 0$ . De plus, nous avons

$$\begin{aligned} \langle \lambda_i | \partial_k \hat{\rho}_{\vec{\phi}} | \lambda_j \rangle &= \sum_q \langle \lambda_i | \partial_k (p_q |\lambda_q\rangle \langle \lambda_q|) | \lambda_j \rangle \\ &= (\partial_k p_i) \delta_{ij} + (p_i - p_j) \langle \partial_k \lambda_i | \lambda_j \rangle. \end{aligned} \quad (1.88)$$

En substituant cette dernière équation dans (1.87) nous obtenons

$$(\mathcal{F}_Q[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}])_{kl} = \sum_i \frac{(\partial_k p_i)(\partial_l p_i)}{p_i} + 2 \sum_{i,j} \frac{(p_i - p_j)^2}{p_i + p_j} \langle \partial_k \lambda_i | \lambda_j \rangle \langle \lambda_j | \partial_l \lambda_i \rangle. \quad (1.89)$$

Le premier terme de cette dernière équation concerne les dérivées des valeur propres de  $\hat{\rho}_{\vec{\phi}}$  par rapport aux paramètres, quantifiant ainsi la quantité d'information maximale qui pourrait être encodée dans les poids  $p_i$ . Le second terme quantifie l'information maximale encodée dans les états propres  $|\lambda_i\rangle$  de l'état  $\hat{\rho}_{\vec{\phi}}$ . Dans le cas les  $M$  paramètres  $\vec{\phi}$  sont encodés via l'évolution unitaire  $\hat{U}_{\vec{\phi}} = e^{-i \sum_j \hat{H}_j \phi_j}$  avec les générateurs  $\hat{H} = (\hat{H}_1, \dots, \hat{H}_M)^T$ , le premier terme de (1.89) disparaît et la matrice d'information quantique de Fisher devient une fonction de l'état initial  $\hat{\rho}$  et des générateurs  $\hat{H}$

$$(\mathcal{F}_Q[\hat{\rho}, \hat{H}])_{kl} = 2 \sum_{i,j} \frac{(p_i - p_j)^2}{p_i + p_j} \langle \lambda_i | \hat{H}_k | \lambda_j \rangle \langle \lambda_j | \hat{H}_l | \lambda_i \rangle. \quad (1.90)$$

De plus, pour un état initial pur, c'est à dire  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| + \sum_{q_{\perp}} p_{q_{\perp}} |\lambda_{q_{\perp}}\rangle\langle\lambda_{q_{\perp}}|$  avec  $p_{q_{\perp}} = 0$  pour tout  $q_{\perp}$ , la somme sur  $j$  dans l'équation (1.90) nous donne

$$(\mathcal{F}_Q[|\psi\rangle, \hat{H}])_{kl} = 2 \sum_i \left\{ \frac{(p_i - 1)^2}{p_i + 1} \langle \lambda_i | \hat{H}_k | \psi \rangle \langle \psi | \hat{H}_l | \lambda_i \rangle + p_i \sum_{q_{\perp}} \langle \lambda_i | \hat{H}_k | \lambda_{q_{\perp}} \rangle \langle \lambda_{q_{\perp}} | \hat{H}_l | \lambda_i \rangle \right\}. \quad (1.91)$$

En sommant cette dernière équation sur  $i$ , nous obtenons

$$(\mathcal{F}_Q[|\psi\rangle, \hat{H}])_{kl} = 2 \sum_{q_{\perp}} \left\{ \langle \lambda_{q_{\perp}} | \hat{H}_k | \psi \rangle \langle \psi | \hat{H}_l | \lambda_{q_{\perp}} \rangle + \langle \psi | \hat{H}_k | \lambda_{q_{\perp}} \rangle \langle \lambda_{q_{\perp}} | \hat{H}_l | \psi \rangle \right\}. \quad (1.92)$$

En utilisant la relation de fermeture  $|\psi\rangle\langle\psi| + \sum_{q_{\perp}} |\lambda_{q_{\perp}}\rangle\langle\lambda_{q_{\perp}}| = \hat{I}$  et en simplifiant, nous trouvons

$$(\mathcal{F}_Q[|\psi\rangle, \hat{H}])_{kl} = 4 \text{Cov}(\hat{H}_k, \hat{H}_l). \quad (1.93)$$

#### 1.2.4 Méthode des moments multi-paramètres

Dans cette section, nous allons dériver l'incertitude sur la méthode des moments ainsi présentée dans la référence [56]. Dans un protocole d'estimation basé sur la méthode des moments multi-paramètres, après l'encodage des  $M$  paramètres  $\vec{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_M)^T$ , les  $K$  observables  $\hat{X} = (\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_K)^T$  sont mesurés  $\mu$  fois où chaque observable  $\hat{X}_k$  produit l'ensemble des résultats  $\vec{x}_k = (x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(\mu)})^T$  avec une moyenne statistique  $\bar{X}_k^{(\mu)} = \sum_{i=1}^{\mu} x_k^{(i)} / \mu$ . Les paramètres sont ensuite estimés à partir des moyennes statistiques  $\vec{X}^{(\mu)} = (\bar{X}_1^{(\mu)}, \dots, \bar{X}_K^{(\mu)})^T$ , qui sont des variables aléatoires avec la distribution de probabilités  $p(\vec{X}^{(\mu)} | \vec{\phi})$ , via les estimateurs  $\vec{\phi}_{\text{est}}(\vec{X}^{(\mu)})$ . Selon l'inégalité (1.68), la matrice covariance  $\Sigma$  d'un estimateur non biaisé fonction de  $\vec{X}^{(\mu)}$  quelconque vérifié dans ce cas la limite de Cramér-Rao multi-paramètres suivante

$$\Sigma \geq \mathcal{F}_{\text{MM}}[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}]^{-1}, \quad (1.94)$$

où  $\mathcal{F}_{\text{MM}}[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}]$  est une matrice dont les éléments sont donnés par

$$(\mathcal{F}_{\text{MM}}[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}])_{kl} = \int d\vec{X}^{(\mu)} p(\vec{X}^{(\mu)} | \vec{\phi}) \left( \frac{\partial}{\partial \phi_k} \ln p(\vec{X}^{(\mu)} | \vec{\phi}) \right) \left( \frac{\partial}{\partial \phi_l} \ln p(\vec{X}^{(\mu)} | \vec{\phi}) \right). \quad (1.95)$$

De plus, à la limite  $\mu \gg 1$ , la distribution de probabilités  $p(\vec{X}^{(\mu)} | \vec{\phi})$  s'écrit selon le théorème de la limite centrale comme [53]

$$p(\vec{X}^{(\mu)} | \vec{\phi}) = \sqrt{\frac{\mu}{(2\pi)^M \det \Gamma[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}]}} e^{-\frac{\mu}{2} [\vec{X}^{(\mu)} - \langle \hat{X} \rangle]^T \Gamma[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}]^{-1} [\vec{X}^{(\mu)} - \langle \hat{X} \rangle]}, \quad (1.96)$$

où  $\langle \hat{X} \rangle$  est la moyenne de  $\hat{X}$  dans l'état  $\hat{\rho}_{\vec{\phi}}$  et  $\Gamma[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}]$  est la matrice covariance des observables  $\hat{X}$  dont les éléments sont  $\Gamma[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}]_{kl} = \text{Cov}(\hat{X}_k, \hat{X}_l)$ . En utilisant la distribution (1.96), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_k} \ln p(\vec{X}^{(\mu)} | \vec{\phi}) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\det \Gamma[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}]} \frac{\partial}{\partial \phi_k} \det \Gamma[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}] \\ &\quad + \mu \left( \frac{\partial \langle \hat{X} \rangle}{\partial \phi_k} \right)^T \Gamma[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}]^{-1} [\vec{X}^{(\mu)} - \langle \hat{X} \rangle] \\ &\quad - \frac{\mu}{2} [\vec{X}^{(\mu)} - \langle \hat{X} \rangle]^T \left( \frac{\partial}{\partial \phi_k} \Gamma[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}]^{-1} \right) [\vec{X}^{(\mu)} - \langle \hat{X} \rangle] \end{aligned} \quad (1.97)$$

En substituant cette dernière équation dans (1.95) et en prenant la limite  $\mu \gg 1$  tout en tenant en compte que la distribution (1.96) est gaussienne c'est à dire seuls les deux premiers moments sont non nuls, nous obtenons

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{\text{MM}}[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}])_{kl} &= \mu^2 \left( \frac{\partial \langle \hat{X} \rangle}{\partial \phi_k} \right)^T \Gamma[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}]^{-1} \left\{ \int d\vec{X}^{(\mu)} p(\vec{X}^{(\mu)} | \vec{\phi}) [\vec{X}^{(\mu)} - \langle \hat{X} \rangle] [\vec{X}^{(\mu)} - \langle \hat{X} \rangle]^T \right\} \\ &\quad \times \Gamma[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}]^{-1} \left( \frac{\partial \langle \hat{X} \rangle}{\partial \phi_l} \right) \\ &= \mu \left( \frac{\partial \langle \hat{X} \rangle}{\partial \phi_k} \right)^T \Gamma[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}]^{-1} \left( \frac{\partial \langle \hat{X} \rangle}{\partial \phi_l} \right), \end{aligned} \quad (1.98)$$

ou nous avons utilisé

$$\int d\vec{X}^{(\mu)} p(\vec{X}^{(\mu)} | \vec{\phi}) [\vec{X}^{(\mu)} - \langle \hat{X} \rangle] [\vec{X}^{(\mu)} - \langle \hat{X} \rangle]^T = \Gamma[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}] / \mu. \quad (1.99)$$

L'inégalité de Cramér-Rao, obtenue en utilisant la formule générale (1.67) lorsque les paramètres inconnus  $\vec{\phi}$  sont estimés à partir des moyennes statistiques  $\vec{X}^{(\mu)}$ , pour un estimateur non biaisé  $\vec{\phi}_{\text{est}}(\vec{X}^{(\mu)})$  quelconque est alors donnée, à la limite de grand  $\mu$ , par

$$\Sigma \geq \frac{1}{\mu} M[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}]^{-1}, \quad (1.100)$$

où  $M[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}]$  est la matrice des moments

$$M[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}] = D[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}]^T \Gamma[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}]^{-1} D[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}], \quad (1.101)$$

avec  $D[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}]$  une matrice dont les éléments sont donnés par

$$D[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}]_{kl} = \left( \frac{\partial \langle \hat{X}_k \rangle}{\partial \phi_l} \right). \quad (1.102)$$

L'inégalité (1.100) est asymptotiquement saturée, pour  $\mu \gg 1$ , par l'estimateur non biaisé qui associe à la moyenne statistique  $\vec{X}^{(\mu)}$  la valeur de  $\vec{\phi}$  qui maximise la distribution de probabilité (1.96), c'est à dire  $\vec{\phi}$  pour laquelle

$$\frac{\partial}{\partial \phi_k} \ln p(\vec{X}^{(\mu)} | \vec{\phi}) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_k^2 \ln p(\vec{X}^{(\mu)} | \vec{\phi}) < 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, M. \quad (1.103)$$

En utilisant (1.97) et en prenant la limite  $\mu \gg 1$ , la relation de gauche dans cette dernière équation nous donne

$$\mu \left\{ \left( \frac{\partial \langle \hat{X} \rangle}{\partial \phi_k} \right)^T \Gamma[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}]^{-1} - \frac{1}{2} [\vec{X}^{(\mu)} - \langle \hat{X} \rangle]^T \left( \frac{\partial}{\partial \phi_k} \Gamma[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}]^{-1} \right) \right\} [\vec{X}^{(\mu)} - \langle \hat{X} \rangle] = 0. \quad (1.104)$$

En tenant compte de la relation de droite de l'équation (1.103), nous pouvons montrer que dans un protocole d'estimation multi-paramètres basé sur la méthode des moments avec  $\mu \gg 1$ , les paramètres  $\vec{\phi}$  sont estimés comme les valeurs pour lesquelles

$$\vec{X}^{(\mu)} = \langle \hat{X} \rangle, \quad (1.105)$$

avec une matrice covariance qui sature l'inégalité (1.100), c'est à dire

$$\Sigma = \frac{1}{\mu} M[\hat{\rho}_{\vec{\phi}}, \hat{X}]^{-1}. \quad (1.106)$$

Cette equation représente une généralisation directe de l'incertitude (1.62) aux protocoles d'estimation quantique multi-paramètres.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploré en profondeur les aspects fondamentaux de la théorie de l'estimation quantique d'un et de plusieurs paramètres et des méthodes associées.

Dans la première section, nous avons examiné l'estimation quantique à un paramètre, où l'objectif principal était d'obtenir une estimation précise d'un seul paramètre. Nous avons posé dans un premier temps le cadre général en illustrant le schéma général suivi et en introduisant le concept de l'estimateur non biaisé, sa moyenne et sa variance. Ensuite, nous avons étudié l'information de Fisher, qui établit une limite fondamentale sur la précision de toute estimation quantique à un seul paramètre. Une démonstration de cette limite de Cramér-Rao à été reproduite ici. L'optimisation de cette dernière par rapport à la mesure, nous a conduit à la notion d'information quantique de Fisher. En l'écrivant dans le cas d'un état pur et d'une evolution unitaire et en utilisant son additivité et sa convexité, l'information quantique de Fisher nous a permis de déduire la limite quantique standard et la limite de Heisenberg, deux notions importants en théorie de l'estimation quantique. Finalement, nous avons introduit la méthode des moments, une méthode pratique pour l'estimation quantique qui permet d'estimer le paramètre avec un nombre limité de mesures.

Dans la deuxième section, nous avons étendu notre étude de la section précédente au cas de l'estimation quantique multi-paramètres. Dans ce contexte, après avoir introduit le cadre général et



généralisé le concept d'estimateur au cas multiparamètre, nous avons introduit la matrice d'information de Fisher qui limite la précision de l'estimation. Nous avons ensuite généralisé l'information quantique de Fisher en introduisant la matrice d'information quantique de Fisher. Enfin, nous avons introduit la méthode des moments multi-paramètres, qui nous permet d'estimer plusieurs paramètres avec un nombre limité de mesures, et nous avons calculé l'incertitude correspondante.

Ce chapitre introductif reprend donc les résultats fondamentaux des théories de l'estimation quantique à un et à plusieurs paramètres. Il établit ainsi le cadre théorique dans lequel s'inscrivent nos travaux développées dans la suite de ce manuscrit.

# Compression des observables de spin linéaires et non linéaires pour l'estimation d'un paramètre

## Introduction

La précession de spin, ou, de manière équivalente, les systèmes quantiques préparés dans une superposition de deux états quantiques, sont à la base des capteurs atomiques extrêmement précis. La source fondamentale de bruit dans ces capteurs provient du bruit de projection quantique. Ce bruit est une conséquence de la non-commutativité des trois composantes de spin, qui introduit une incertitude dans la direction de spin que l'on cherche à mesurer. Dans ces systèmes, l'incertitude quantique pour l'estimation d'un paramètre inconnu  $\phi$ , à la limite quantique standard (qui fixe la précision maximale pour les stratégies de mesure classiques) est donnée par  $(\Delta\phi)_{\text{LQS}}^2 = 1/(\mu N)$ , où  $N$  représente le nombre total d'atomes, et  $\mu$  le nombre de mesures indépendantes. Cependant, cette limite peut être dépassée en utilisant des états quantiques intriqués et des observables de mesure appropriés [2, 10, 14, 47, 54]. Théoriquement, ceci permet une réduction de l'incertitude aussi grande que la limite de Heisenberg,  $(\Delta\phi)_{\text{LH}}^2 = 1/(\mu N^2)$ .

Pour générer l'intrication quantique nécessaire à l'amélioration de la précision des mesures [47, 57–61], une approche consiste à effectuer une évolution non linéaire en les composantes de spin. À partir d'un ensemble d'atomes non corrélés, l'évolution non linéaire one-axis twisting (OAT), introduite pour la première fois par Kitagawa et Ueda dans la référence [15], permet la création d'états non classiques où une composante de spin linéaire (L) est comprimée. Bien qu'il ait été démontré expérimentalement que cette méthode est robuste pour améliorer la précision des mesures dans le contexte des interféromètres atomiques [16–22], elle reste, même dans des conditions théoriques idéales, loin de la limite de Heisenberg.

La dynamique one-axis twisting produit des états qui présentent un potentiel métrologique plus élevé que les états comprimés de spin lorsque l'évolution s'étend au-delà du temps de compression linéaire optimal. Le potentiel métrologique de ces états ne peut pas être entièrement caractérisé par la seule mesure des observables linéaires de spin. Il nécessite cependant la mesure d'observables de spin non linéaires, qui peuvent entraîner des améliorations quantiques substantielles au-delà de ce que la compression linéaire de spin peut réaliser [25]. Malheureusement, il n'est pas facile d'effectuer une mesure directe d'une observable de spin non linéaire, car cela nécessite un très grand nombre de mesures, ce qui est difficile à obtenir en pratique. Une approche alternative, qui permet la mesure indirecte d'observables non linéaires de spin, est fournie par les stratégies de mesure après

interaction (MAI), tels que les echos, qui impliquent la combinaison d'évolutions non linéaires avec la mesure d'observables linéaires [4, 62–67].

Dans ce chapitre, nous explorons le potentiel métrologique d'un système composé de  $N$  atomes identiques à deux niveaux ou, de manière équivalente, d'un système de spin collectif évoluant sous le hamiltonien one-axis twisting. Après l'introduction du système de spin collectif et la présentation des résultats fondamentaux de la théorie de l'estimation quantique en termes d'observables de spin, nous rappelons le formalisme introduit dans la référence [25] qui permet d'optimiser le gain quantique pour tout état arbitraire lorsque un ensemble fixé d'observables de spin est accessible à la mesure. Ensuite, en considérant explicitement la dynamique OAT, nous étudions le gain quantique réalisable au cours de cette évolution par la compression d'observables de spin linéaires, d'observables linéaires avec une première correction non linéaire (NL) et d'observables de spin quadratiques (Q). De plus, nous identifions les générateurs de rotation et les observables de mesure optimales correspondantes à chaque cas. En outre, nous démontrons que la technique de mesure après interaction offre un accès pratique à une famille continue d'observables de spin non linéaires, reproduisant ainsi toutes les lois d'échelle pour l'incertitude d'estimation associés aux ensembles linéaires, non linéaires et quadratiques et atteignant l'échelle de Heisenberg,  $(\Delta\phi)^2 \propto 1/\mu N^2$ . En comparant ces résultats à l'information quantique de Fisher, qui quantifie le gain métrologique quantique maximal pouvant être atteint après optimisation sur toutes les mesures possibles, nous établissons que la loi d'échelle de la technique MAI est optimale sur une fenêtre temporelle significative. Pour conclure, nous expliquons comment les collisions atomiques au sein des condensats de Bose-Einstein (CBE) ou les interactions effectives médiées par un champ électromagnétique dans une cavité optique rendent possible la réalisation de l'hamiltonien OAT et nous discutons brièvement deux expériences qui sont documentées dans les références [17, 18].

## 2.1 Estimation d'un paramètre dans un système de spin collectif

### 2.1.1 Base de Fock, états de phase et spin collectif

Nous considérons un ensemble de  $N$  atomes identiques à deux niveaux, dans lequel les deux états atomiques représentent par exemple deux modes d'un condensats de Bose-Einstein ou deux états internes distincts  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$ . En utilisant la base d'un atome individuel  $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ , nous pouvons définir les vecteurs de base pour les  $N$  atomes identiques dans le secteur symétrique de l'espace de Hilbert comme les états de Fock

$$|n_a\rangle_N \equiv |n_a, N - n_a\rangle, \quad (2.1)$$

où  $n_a$  atomes sont dans l'état  $|a\rangle$  et  $N - n_a$  atomes dans l'état  $|b\rangle$  avec  $n_a \in [0, N]$ . Dans le même cadre de la seconde quantification, nous introduisons les opérateurs de création  $\hat{c}_a^\dagger$  et  $\hat{c}_b^\dagger$  et les opérateurs d'annihilation  $\hat{c}_a$  et  $\hat{c}_b$  pour un atome en mode  $a$  et  $b$  respectivement, soumis aux relations de commutation bosoniques

$$[\hat{c}_\epsilon, \hat{c}_{\epsilon'}] = [\hat{c}_\epsilon^\dagger, \hat{c}_{\epsilon'}^\dagger] = 0 \quad \text{et} \quad [\hat{c}_\epsilon, \hat{c}_{\epsilon'}^\dagger] = \delta_{\epsilon\epsilon'}, \quad (2.2)$$

avec  $\epsilon, \epsilon' \in \{a, b\}$ . Par définition, l'application d'opérateur d'annihilation d'un atome dans  $a$  et d'opérateur d'annihilation d'un atome dans  $b$  sur l'état de Fock (2.1) donne respectivement

$$\hat{c}_a |n_a\rangle_N = \sqrt{n_a} |n_a - 1\rangle_{N-1}, \quad \hat{c}_b |n_a\rangle_N = \sqrt{N - n_a} |n_a\rangle_{N-1}. \quad (2.3)$$

De la même manière, l'application de l'opérateur de création d'un atome dans  $a$  et de l'opérateur de création d'un atome dans  $b$  sur l'état de Fock (2.1) donne

$$\hat{c}_a^\dagger |n_a\rangle_N = \sqrt{n_a + 1} |n_a + 1\rangle_{N+1}, \quad \hat{c}_b^\dagger |n_a\rangle_N = \sqrt{N - n_a + 1} |n_a\rangle_{N+1}. \quad (2.4)$$

Notez que tout opérateur symétrique par rapport à l'échange de deux atomes peut être exprimé en termes de ces opérateurs de création et d'annihilation. Par exemple, l'opérateur représentant le nombre d'atomes dans le mode  $\epsilon$  est donné par  $\hat{N}_\epsilon = \hat{c}_\epsilon^\dagger \hat{c}_\epsilon$ . D'autres relations de commutations qui nous seront utiles pour la suite sont

$$\hat{c}_\epsilon f(\hat{N}_\epsilon) = f(\hat{N}_\epsilon + 1) \hat{c}_\epsilon, \quad (2.5)$$

$$\hat{c}_\epsilon^\dagger f(\hat{N}_\epsilon) = f(\hat{N}_\epsilon - 1) \hat{c}_\epsilon^\dagger, \quad (2.6)$$

pour  $\epsilon = a, b$  où  $f$  est une fonction quelconque de l'opérateur nombre de particules  $\hat{N}_\epsilon$  dans le mode  $\epsilon$ . Pour démontrer la relation (2.5) pour  $\epsilon = a$ , nous utilisons l'état de Fock (2.1) et la relation de gauche de l'équation (2.3)

$$\hat{c}_a f(\hat{N}_a) |n_a\rangle_N = f(n_a) \sqrt{n_a} |n_a - 1\rangle_{N-1} = f(\hat{N}_a + 1) \hat{c}_a |n_a\rangle_N. \quad (2.7)$$

De même, nous pouvons démontrer la relation (2.6) pour  $\epsilon = a$  en utilisant l'état de Fock et la relation de droite de l'équation (2.3)

$$\hat{c}_a^\dagger f(\hat{N}_a) |n_a\rangle_N = f(n_a) \sqrt{n_a + 1} |n_a + 1\rangle_{N-1} = f(\hat{N}_a - 1) \hat{c}_a^\dagger |n_a\rangle_N. \quad (2.8)$$

De la même manière, nous pouvons utiliser l'état de Fock et l'équation (2.4) pour démontrer les relations (2.5) et (2.6) pour  $\epsilon = b$ .

La structure de l'espace de Hilbert pour les  $N$  atomes identiques à deux niveaux, caractérisée par les états de base (2.1), nous permet de décrire le système en termes d'observables de spin collectif  $\hat{\vec{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)^T$  où  $\hat{S}_k = \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_k^{(i)}/2$  et  $\sigma_k^{(i)}$  avec  $k = x, y, z$  est la matrice de Pauli pour l'atome  $i$ . Cette représentation en terme de spin collectif nous permet de visualiser le comportement du système dans la sphère de Bloch, et donc de décrire son évolution de manière intuitive. En seconde quantification, les composantes de spin collectif peuvent être exprimées en termes d'opérateurs de création et d'annihilation introduits dans le paragraphe précédent, comme

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2} (\hat{c}_a^\dagger \hat{c}_b + \hat{c}_b^\dagger \hat{c}_a), \quad (2.9)$$

$$\hat{S}_y = \frac{1}{2i} (\hat{c}_a^\dagger \hat{c}_b - \hat{c}_b^\dagger \hat{c}_a), \quad (2.10)$$

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2} (\hat{N}_a - \hat{N}_b), \quad (2.11)$$

où la composante  $\hat{S}_z$  est la moitié de la différence de population entre les modes  $a$  et  $b$ , tandis que les composantes  $\hat{S}_x$  et  $\hat{S}_y$  décrivent la cohérence entre ces modes. En utilisant ces dernières équations et les relations de commutations (2.2), nous pouvons montrer que les composantes de spin collectif satisfont les relations de commutation suivantes

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hat{S}_z, \quad [\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hat{S}_x, \quad [\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hat{S}_y. \quad (2.12)$$

Lorsque les  $N$  atomes sont dans une superposition cohérente des deux états  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  avec des poids égaux et une phase relative bien définie  $\varphi$ , le spin collectif se situe dans le plan équatorial de la sphère de Bloch et forme un angle de  $-\varphi$  par rapport à l'axe  $\vec{e}_x$ . Dans ce cas le système est décrit par l'état de phase [68, 69]

$$|\varphi\rangle_N = \sum_{n_a=0}^N \binom{N}{n_a}^{1/2} \frac{e^{-in_a\varphi}}{2^{N/2}} |n_a\rangle_N. \quad (2.13)$$

Ces états possèdent les propriétés intéressantes qui nous seront utiles pour la suite et que nous démontrerons maintenant. Comme nous allons voir ci-dessous, l'application de l'opérateur unitaire  $e^{-i\alpha(\hat{N}_a - \hat{N}_b)}$  correspond à une translation de phase

$$\begin{aligned}
 e^{i\alpha(\hat{N}_a - \hat{N}_b)}|\varphi\rangle_N &= \sum_{n_a=0}^N \binom{N}{n_a}^{1/2} \frac{e^{-in_a\varphi}}{2^{N/2}} e^{-i\alpha(\hat{N}_a - \hat{N}_b)}|n_a\rangle_N \\
 &= \sum_{n_a=0}^N \binom{N}{n_a}^{1/2} \frac{e^{-in_a\varphi}}{2^{N/2}} e^{-i\alpha(2n_a - N)}|n_a\rangle_N \\
 &= e^{i\alpha N} \sum_{n_a=0}^N \binom{N}{n_a}^{1/2} \frac{e^{-in_a(\varphi + 2\alpha)}}{2^{N/2}} |n_a\rangle_N \\
 &= e^{i\alpha N} |\varphi + 2\alpha\rangle_N.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

L'annihilation d'un atome dans le mode  $a$  appliqué à l'état de phase (2.13) nous donne

$$\hat{c}_a|\varphi\rangle_N = \sum_{n_a=0}^N \binom{N}{n_a}^{1/2} \frac{e^{-in_a\varphi}}{2^{N/2}} \sqrt{n_a} |n_a - 1\rangle_N. \tag{2.15}$$

En posant  $n = n_a - 1$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \hat{c}_a|\varphi\rangle_N &= \sum_{n=0}^{N-1} \binom{N}{n+1}^{1/2} \frac{e^{-i(n+1)\varphi}}{2^{N/2}} \sqrt{n+1} |n\rangle_{N-1} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \binom{N-1}{n}^{1/2} \sqrt{N} \frac{e^{-i(n+1)\varphi}}{2^{N/2}} |n\rangle_{N-1} \\
 &= \sqrt{\frac{N}{2}} e^{-i\varphi} \sum_{n=0}^{N-1} \binom{N-1}{n}^{1/2} \frac{e^{-i(n+1)\varphi}}{2^{(N-1)/2}} |n\rangle_{N-1} \\
 &= \sqrt{\frac{N}{2}} e^{-i\varphi} |\varphi\rangle_{N-1}.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

L'annihilation d'un atome dans le mode  $b$  appliqué à l'état de phase s'écrit comme

$$\begin{aligned}
 \hat{c}_b|\varphi\rangle_N &= \sum_{n_a=0}^{N-1} \binom{N}{n_a}^{1/2} \frac{e^{-in_a\varphi}}{2^{N/2}} \sqrt{N - n_a} |n_a\rangle_{N-1} \\
 &= \sum_{n_a=0}^{N-1} \binom{N-1}{n_a}^{1/2} \sqrt{N} \frac{e^{-in_a\varphi}}{2^{N/2}} |n_a\rangle_{N-1} \\
 &= \sqrt{\frac{N}{2}} |\varphi\rangle_{N-1}.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Nous avons utilisé (2.3) pour écrire (2.15) et (2.17). Notez que les états de phase ne sont pas orthogonaux et ils possèdent la relation d'orthogonalité que nous retrouvons ci-dessous

$${}_N\langle\varphi'|\varphi\rangle_N = \sum_{n_a, n'_a} \binom{N}{n_a}^{1/2} \binom{N}{n'_a}^{1/2} \frac{e^{-i(n_a\varphi - n'_a\varphi')}}{2^N} {}_N\langle n'_a|n_a\rangle_N. \tag{2.18}$$

En utilisant l'orthonormalité des états de Fock, c'est à dire  ${}_N\langle n'_a | n_a \rangle_N = \delta_{n'_a n_a}$ , nous avons

$${}_N\langle \varphi' | \varphi \rangle_N = \frac{1}{2^N} \sum_{n_a=0}^N \binom{N}{n_a} e^{-in_a(\varphi-\varphi')}. \quad (2.19)$$

Nous identifions dans cette dernière équation une identité binomiale et nous obtenons

$${}_N\langle \varphi' | \varphi \rangle_N = \frac{1}{2^N} \left(1 + e^{-i(\varphi-\varphi')}\right)^N. \quad (2.20)$$

### 2.1.2 Limite quantique standard, limite de Heisenberg et méthode des moments

Maintenant, nous exploitons le système de spin collectif pour l'estimation quantique d'un paramètre tel que présenté dans le chapitre 1. Nous commencerons par exprimer l'information quantique de Fisher en terme des observables de spin. Ensuite, nous allons identifier la limite quantique standard et la limite de Heisenberg d'un tel système. Enfin, nous obtenons une expression explicite de l'incertitude associée à la méthode des moments. Dans un protocole d'estimation d'un paramètre avec un système de spin collectif, l'encodage du paramètre inconnu  $\phi$  se fait par une rotation de spin collectif, décrite par une transformation unitaire  $\hat{U}_\phi = e^{-i\phi\hat{S}_{\vec{n}}}$ , autour de l'axe  $\vec{n}$  dans la sphère de Bloch. Un exemple typique de protocole d'estimation de paramètre est illustré par l'horloge atomique, qui vise à déterminer avec une grande précision la différence d'énergie  $\Delta E = E_a - E_b$  entre les deux niveaux atomiques  $a$  et  $b$ . Dans une horloge atomique, l'information sur  $\Delta E$  est contenue dans l'angle de rotation  $\phi = (\Delta E/\hbar)T$  de spin sur la sphère de Bloch après une période d'évolution  $T$ . Lorsque le système est initialement préparé dans un état pur  $|\psi\rangle$ , l'état après l'encodage du paramètre  $\phi$  devient  $|\psi\rangle_\phi = \hat{U}_\phi|\psi\rangle$ , et l'information quantique de Fisher, comme exprimée par l'équation (1.39) dans le chapitre précédent, se réécrit comme

$$F_Q[|\psi\rangle, \hat{S}_{\vec{n}}] = 4(\Delta\hat{S}_{\vec{n}})_{|\psi\rangle}^2, \quad (2.21)$$

où  $(\Delta\hat{S}_{\vec{n}})_{|\psi\rangle}^2$  représente la variance du générateur de rotation  $\hat{S}_{\vec{n}}$  dans l'état  $|\psi\rangle$ . Comme le générateur de rotation s'écrit comme une somme des spin individuels, c'est à dire  $\hat{S}_{\vec{n}} = \sum_i \hat{\sigma}_{\vec{n}}^{(i)}/2$ , l'équation (1.50) du chapitre précédent nous permet d'obtenir la limite quantique standard, une limite inférieure de l'incertitude sur le paramètre estimé avec un état non-corrélé quelconque de spin

$$(\Delta\phi)_{\text{LQS}}^2 = \frac{1}{\mu N}. \quad (2.22)$$

La limite de Heisenberg, qui représente la limite inférieure de l'incertitude sur le paramètre estimé avec un état quelconque de spin collectif, peut également être facilement obtenue. En utilisant (1.47), nous avons

$$(\Delta\phi)_{\text{LH}}^2 = \frac{1}{\mu N^2}. \quad (2.23)$$

Dans la suite, l'estimation du paramètre  $\phi$  sera réalisée en utilisant la méthode des moments, ce qui signifie que  $\phi$  est déterminé en égalisant la moyenne statistique  $\bar{X}_\mu$  de  $\mu$  mesures indépendantes de l'observable  $\hat{X}$  à sa moyenne dans l'état  $|\psi\rangle_\phi$ . Pour rendre les calculs plus simples, nous nous focalisons sur l'estimation de  $\phi$  près de zéro, ce qui ne limite pas la généralité de notre analyse. Dans ce scénario, l'incertitude sur le paramètre estimé, comme décrite par l'équation (1.62) dans le chapitre précédent, s'exprime comme

$$(\Delta\phi_{\text{est}})^2 = \frac{1}{\mu} \frac{(\Delta\hat{X})_{|\psi\rangle_\phi}^2}{|\partial_\phi \langle \hat{X} \rangle_{|\psi\rangle_\phi}|^2} \Bigg|_{\phi=0}. \quad (2.24)$$

Au voisinage de  $\phi = 0$ , l'état après l'encodage du paramètre s'écrit  $|\psi\rangle_\phi \simeq |\psi\rangle - i\phi\hat{S}_{\vec{n}}|\psi\rangle$ . Au premier ordre en  $\phi$ , nous obtenons

$$\langle\hat{X}\rangle_{|\psi\rangle_\phi} = i\phi\langle[\hat{S}_{\vec{n}}, \hat{X}]\rangle_{|\psi\rangle} + O(\phi^2). \quad (2.25)$$

Pour simplifier la notation, nous omettons dorénavant l'indice lorsque la moyenne ou la variance est calculée dans l'état préparé avant l'encodage du paramètre  $\phi$ , c'est-à-dire dans l'état  $|\psi\rangle$ . En utilisant (2.25), l'équation (2.24) se réécrit comme

$$(\Delta\phi_{\text{est}})^2 = \frac{1}{\mu} \frac{(\Delta\hat{X})^2}{|\langle[\hat{S}_{\vec{n}}, \hat{X}]\rangle|^2}. \quad (2.26)$$

Supposons maintenant un système de  $N$  atomes à deux niveaux préparé dans l'état  $|\psi_0\rangle = |\varphi = 0\rangle_N$  où  $|\varphi\rangle_N$  est l'état de phase défini par (2.13). Dans le langage de spin collectif, un tel état décrit un spin polarisé selon  $x$ . En d'autres termes,  $|\psi_0\rangle$  est un état propre de  $\hat{S}_x$ , appelé état cohérent de spin, avec

$$\hat{S}_x|\psi_0\rangle = \frac{N}{2}|\psi_0\rangle. \quad (2.27)$$

Dans cet état  $|\psi_0\rangle = |x\rangle^{\otimes N}$ , les atomes sont dans le même état individuel noté  $|x\rangle$  et donc indépendants. Selon les relations de commutation (2.12), qui sont à l'origine des incertitudes quantiques, l'état  $|\psi_0\rangle$  possède des fluctuations dans les composantes  $\hat{S}_y$  et  $\hat{S}_z$ . En utilisant les relations (2.9), l'expression des états de phase (2.13), les propriétés (2.16)-(2.17) ainsi que la relation d'orthogonalité (2.20), nous pouvons démontrer que

$$(\Delta\hat{S}_{\vec{n}})^2 = \frac{N}{4}, \quad (2.28)$$

avec  $\hat{S}_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \hat{\mathcal{S}}$ , où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire quelconque dans le plan perpendiculaire à la polarisation initiale de spin,  $\vec{e}_x$  dans ce cas<sup>1</sup>. Cette dernière équation montre, comme illustré dans la figure 2.1-(a), que les incertitudes dans l'état cohérent de spin (2.27) sont réparties de manière égale sur n'importe quelle paire de composantes de spin mutuellement orthogonales et perpendiculaires à la direction initiale de spin  $\vec{e}_x$ . Pour  $\hat{X} = \hat{S}_{\vec{m}}$  une composante de spin collectif dans le plan  $yz$  avec  $\vec{m} \perp \vec{n}$ , nous pouvons facilement démontrer que la méthode des moments, pour laquelle l'incertitude sur le paramètre estimé est donnée par (2.26), atteint la limite quantique standard (2.22) avec l'état cohérent de spin (2.27).

Par rapport à la limite quantique standard, nous quantifions le gain métrologique quantique offert dans un protocole d'estimation d'un paramètre basé sur la méthode des moments, avec un état préparé  $|\psi\rangle$ , une rotation de spin collectif autour de l'axe  $\vec{n}$  et une observable de mesure  $\hat{X}$ , par le paramètre

$$\xi^{-2}(|\psi\rangle, \hat{S}_{\vec{n}}, \hat{X}) \equiv \frac{(\Delta\phi)_{\text{LQS}}^2}{(\Delta\phi_{\text{est}})^2} = \frac{|\langle[\hat{S}_{\vec{n}}, \hat{X}]\rangle|^2}{N(\Delta\hat{X})^2}. \quad (2.29)$$

Pour un état cohérent de spin, où les atomes sont non-corrélés, nous n'avons donc pas de gain métrologique et  $\xi^{-2} = 1$ . Cependant, l'intrication quantique entre les atomes qui se traduit dans le contexte de spin collectif par une redistribution de l'incertitude quantique entre des observables de spin non mesurées, tout en réduisant l'incertitude sur les observables mesurées, peut entraîner un gain quantique important, indiqué par  $\xi^{-2} > 1$ . Un exemple particulier est l'état comprimé de spin

---

1. Notez que ceci peut également être montré par le fait que les  $N$  spins 1/2 sont indépendants et que pour chaque spin nous avons  $(\Delta\hat{s}_{\vec{n}})^2 = 1/4$ .

illustré dans la figure 2.1-(b). Dans la suite, après l'optimisation du gain métrologique quantique (2.29) par rapport au générateur de rotation  $\hat{S}_{\vec{n}}$  et par rapport à l'observable de mesure  $\hat{X}$  pour un état arbitraire de spin  $|\psi\rangle$ , nous introduisons la dynamique one-axis twisting qui permet, au moyen d'une évolution non linéaire de spin, de générer l'intrication quantique à partir d'un état cohérent de spin où les atomes sont indépendants.

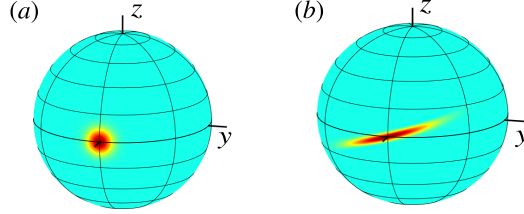


FIGURE 2.1 – Etats de spin collectif représentés sur la sphère de Bloch. (a) : Etat cohérent de spin où les atomes sont non-corrélés. (b) : Etat comprimé de spin, ou les atomes possèdent des corrélations.

## 2.2 Optimisation du gain métrologique par rapport à l'axe de rotation et par rapport aux observables de mesure

Comme montré par l'équation (2.29), pour un état donné de spin, le gain métrologique quantique dépend du générateur de rotation et de l'observable de mesure choisie. Notre objectif dans cette section est d'optimiser le gain métrologique quantique par rapport au générateur  $\hat{S}_{\vec{n}}$  et par rapport à l'observable de mesure  $\hat{X}$  pour un état de spin arbitraire  $|\psi\rangle$ . Pour cela, nous écrivons le générateur de rotation comme  $\hat{S}_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \hat{\vec{S}}$  où  $\hat{\vec{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)^T$  et  $\vec{n}$  est la direction de rotation. Pour l'observable de mesure, nous supposons que nous disposons d'une famille de  $q$  observables accessibles  $\hat{\vec{X}} = (\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_q)^T$  et que nous pouvons mesurer toute combinaison linéaire arbitraire  $\hat{X}_{\vec{m}} = \vec{m} \cdot \hat{\vec{X}} = \sum_{k=1}^q m_k \hat{X}_k$ . Pour une direction de mesure spécifique  $\vec{m}$ , nous pouvons réécrire (2.29) comme

$$\xi^{-2}(|\psi\rangle, \hat{S}_{\vec{n}}, \hat{X}_{\vec{m}}) = \frac{|\vec{n}^T C[|\psi\rangle, \hat{\vec{S}}, \hat{\vec{X}}] \vec{m}|^2}{N(\vec{m}^T \Gamma[|\psi\rangle, \hat{\vec{X}}] \vec{m})} \quad (2.30)$$

où nous avons introduit la matrice anti-symétrique des commutateurs de taille  $3 \times q$

$$C[|\psi\rangle, \hat{\vec{S}}, \hat{\vec{X}}]_{kl} \equiv -i \langle [\hat{S}_k, \hat{X}_l] \rangle \quad (2.31)$$

et la matrice covariance qui est symétrique et que nous supposons non singulière  $\Gamma > 0$ , de taille  $q \times q$

$$\Gamma[|\psi\rangle, \hat{\vec{X}}]_{kl} \equiv \text{Cov}(\hat{X}_k, \hat{X}_l) = \frac{1}{2} \langle \hat{X}_k \hat{X}_l + \hat{X}_l \hat{X}_k \rangle - \langle \hat{X}_k \rangle \langle \hat{X}_l \rangle. \quad (2.32)$$

Nous allons maintenant procéder pour obtenir le gain métrologique optimal de la même manière que dans la référence [25]. Dans un premier temps, nous optimisons (2.30) par rapport à la direction de mesure  $\vec{m}$  en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz  $|\vec{u}^T \vec{v}|^2 \leq (\vec{v}^T \vec{v})(\vec{u}^T \vec{u})$ . En choisissant  $\vec{v} = \Gamma[|\psi\rangle, \hat{\vec{X}}]^{1/2} \vec{m}$  et  $\vec{u} = \Gamma[|\psi\rangle, \hat{\vec{X}}]^{-1/2} C[|\psi\rangle, \hat{\vec{S}}, \hat{\vec{X}}] \vec{n}$  et en remplaçant dans (2.30), nous obtenons

$$\xi^{-2}(|\psi\rangle, \hat{S}_{\vec{n}}, \hat{X}_{\vec{m}}) = \frac{1}{N} \frac{|\vec{u}^T \vec{v}|^2}{\vec{v}^T \vec{v}} \leq \frac{1}{N} \vec{u}^T \vec{u}. \quad (2.33)$$



Pour une direction de rotation  $\vec{n}$  donnée et un ensemble d'observables accessibles  $\hat{X}$  donné, la valeur optimale du gain métrologique par rapport à la direction de mesure  $\vec{m}$  est alors donnée par

$$\xi_{\hat{X}}^{-2}(|\psi\rangle, \hat{S}_{\vec{n}}) = \max_{\vec{m}} \xi^{-2}(|\psi\rangle, \hat{S}_{\vec{n}}, \hat{X}_{\vec{m}}) = \vec{n}^T M[|\psi\rangle, \hat{S}, \hat{X}] \vec{n}, \quad (2.34)$$

où

$$M[|\psi\rangle, \hat{S}, \hat{X}] = C[|\psi\rangle, \hat{S}, \hat{X}]^T \Gamma[|\psi\rangle, \hat{X}]^{-1} C[|\psi\rangle, \hat{S}, \hat{X}], \quad (2.35)$$

est la matrice des moments. Le maximum dans (2.34) est atteint lorsque l'inégalité de Cauchy-Schwarz est saturée, c'est à dire  $\vec{u} = \alpha \vec{v}$ . Cela nous amène à la direction de mesure optimale suivante

$$\vec{m}_{\text{opt}} = \alpha \Gamma[|\psi\rangle, \hat{X}]^{-1} C[|\psi\rangle, \hat{S}, \hat{X}] \vec{n}, \quad (2.36)$$

ou  $\alpha$  est une constante de normalisation. Ensuite, nous pouvons utiliser l'équation (2.34) pour obtenir le maximum du gain métrologique quantique également par rapport à la direction de rotation  $\vec{n}$ . Ceci est donné, pour un état  $|\psi\rangle$  arbitraire de spin, par

$$\xi_{\hat{X}}^{-2}(|\psi\rangle) = \max_{\vec{m}, \vec{n}} \xi^{-2}(|\psi\rangle, \hat{S}_{\vec{n}}, \hat{X}_{\vec{m}}) = \frac{1}{N} \lambda_{\max}(M[|\psi\rangle, \hat{S}, \hat{X}]), \quad (2.37)$$

où  $\lambda_{\max}(M[|\psi\rangle, \hat{S}, \hat{X}])$  est la valeur propre maximale de la matrice des moments  $M[|\psi\rangle, \hat{S}, \hat{X}]$ . La meilleure direction de rotation est  $\vec{n} = \vec{n}_{\max}$ , où  $\vec{n}_{\max}$  est le vecteur propre de la matrice des moments  $M[|\psi\rangle, \hat{S}, \hat{X}]$  correspondant à la valeur propre maximale  $\lambda_{\max}(M[|\psi\rangle, \hat{S}, \hat{X}])$ .

## 2.3 Dynamique one-axis twisting

Comme déjà expliqué précédemment dans la section 2.1, un état cohérent de spin, pour lequel aucune corrélation quantique n'existe entre les atomes, se caractérise par une uniformité dans la répartition de l'incertitude quantique sur n'importe quelle deux composantes mutuellement orthogonales et perpendiculaires à la direction de spin. Cependant, cette uniformité nous empêche à obtenir un gain métrologique quantique  $\xi^{-2} > 1$ , comme indiqué précédemment. Pour dépasser cette limite, il faut créer des corrélations quantiques entre les atomes, ce qui équivaut, dans le point de vue de spin collectif, à déformer l'incertitude sur la sphère de Bloch. Comme expliqué plus haut, un générateur linéaire en les composantes de spin collectif ne fait que tourner le spin sur la sphère de Bloch, et ne permet donc pas la génération de corrélations quantiques. À partir d'un état cohérent de spin, la génération de l'intrication quantique, ou la déformation des incertitudes sur la sphère de Bloch, peut être réalisée par une évolution non linéaire en les composantes de spin collectif. Un modèle de référence pour générer des états intriqués de spin, comme les états comprimés, sur-comprimés, ou chat de Schrödinger, est le modèle one-axis twisting dont le hamiltonien est quadratique en la composante  $\hat{S}_z$  [15, 47]

$$\hat{H}_{\text{OAT}} = \hbar \chi \hat{S}_z^2. \quad (2.38)$$

Comme nous le verrons plus en détail à la fin de ce chapitre, cet hamiltonien peut être naturellement généré par les collisions atomiques dans les condensats de Bose-Einstein [16, 17, 70, 71] ou par des interactions effectives entre atomes via un champ électromagnétique dans une cavité optique [18, 19]. Pour comprendre comment le hamiltonien OAT déforme la distribution d'incertitude sur la sphère de Bloch, nous pouvons le voir comme une rotation  $\hat{H} = \hbar(\chi \hat{S}_z) \hat{S}_z$  dont la fréquence de rotation

dépend de  $\hat{S}_z$ . Cette dépendance en  $\hat{S}_z$  qui n'est pas la même sur toute la sphère de Bloch conduit donc à la déformation de la distribution des incertitudes sur la sphère de Bloch.

Pour examiner plus précisément la dynamique OAT, considérons un système de spin collectif initialement dans l'état cohérent de spin  $|\psi_0\rangle$  donné par (2.27). Ici, le spin collectif est aligné le long de l'axe  $\vec{e}_x$ , avec  $\langle \hat{S}_x \rangle = N/2$ , et les composantes de spin perpendiculaires présentent des distributions d'incertitude gaussiennes telles que  $(\Delta \hat{S}_y)^2 = (\Delta \hat{S}_z)^2 = N/4$ . L'état du système à l'instant  $t$  de la dynamique OAT peut être formellement exprimé comme

$$|\psi_t\rangle = \hat{U}_t |\psi_0\rangle, \quad (2.39)$$

où  $\hat{U}_t = e^{-i\chi t \hat{S}_z^2}$  est l'opérateur unitaire de l'évolution temporelle. Comme illustré dans la figure 2.2, au cours des premiers instants de l'évolution OAT, des états comprimés de spin se forment, ce qui entraîne une modification des distributions d'incertitude sur la sphère de Bloch. Plus précisément, la variance de certaines composantes linéaires de spin collectif diminue, tandis que celle d'autres composantes augmente, tout en préservant la nature gaussienne des incertitudes. Pour des temps plus longs, la distribution d'incertitude englobe progressivement toute la sphère de Bloch, devenant ainsi de plus en plus non-gaussienne, où des observables non linéaires de spin sont comprimées. En outre, pour un nombre pair d'atomes  $N$ , cette dynamique permet de générer, à des instants spécifiques  $\chi t = \pi/n$  où  $2 \leq n \leq \pi\sqrt{N}/2$ , une superposition de  $n$  états cohérents de spin uniformément répartis sur l'équateur de la sphère de Bloch [47]. À  $\chi t = \pi/2$ , elle engendre un état chat de Schrödinger, qui est une superposition macroscopique de deux états cohérents de spin. Enfin, à  $\chi t = \pi$ , nous observons un retour à l'état cohérent de spin initial.

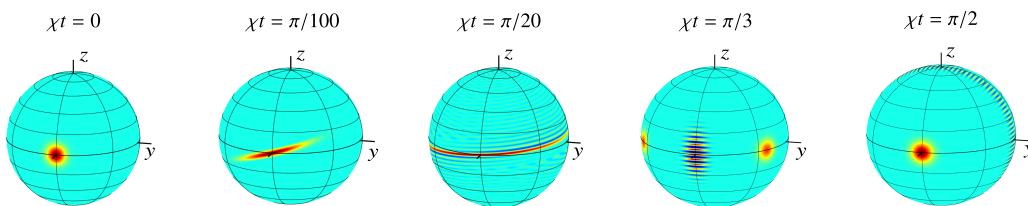


FIGURE 2.2 – L'évolution one-axis twisting pour  $N = 100$ .

Dans le reste de ce chapitre, nous nous concentrerons sur les états comprimés et sur-comprimés de spin, c'est-à-dire ceux générés à  $1/N < \chi t \leq 1/\sqrt{N}$  de la dynamique OAT. Plus précisément, en premier ordre en  $\chi t$ , l'observable  $\hat{S}_y$  évolue selon

$$\hat{S}_y(t) \simeq \hat{S}_y(0) + \frac{1}{i} [\hat{S}_y, \hat{S}_z^2] \chi t = \hat{S}_y(0) + [\hat{S}_x(0) \chi t] \hat{S}_z. \quad (2.40)$$

D'un côté, les corrélations quantiques commencent à se manifester lorsque  $\hat{S}_y$  devient proportionnel à  $\hat{S}_z$ . En prenant en compte que  $\hat{S}_x(0)$  est de l'ordre de  $N$ , la dernière équation montre que ces corrélations quantiques émergent lorsque  $1/N < \chi t$ . D'un autre côté, nous nous intéressons aux états où le rapport  $\hat{S}_y/\langle \hat{S}_x \rangle$  reste approximativement de l'ordre de sa valeur initiale, ce qui signifie que la polarisation de spin collectif le long de l'axe  $\vec{e}_x$  n'est pas totalement perdue. En divisant l'équation (2.40) par  $\langle \hat{S}_x \rangle$  et en prenant en compte que  $\hat{S}_z$  est de l'ordre de  $\sqrt{N}$ , nous en déduisons que  $\chi t \leq 1/\sqrt{N}$ . Dans la suite, nous allons particulièrement identifier analytiquement, dans la section 2.4, le gain métrologique quantique optimal offert par ces états dans un protocole d'estimation d'un paramètre basé sur la méthode des moments. Pour ce faire, nous examinerons différents ensembles d'observables accessibles à la mesure  $\hat{X}$ . Ces ensembles sont respectivement : i) l'ensemble des observables qui sont linéaires en les composantes de spin collectif, ii) l'ensemble précédent, auquel nous ajouterons une unique observable non linéaire de spin et iii) l'ensemble englobant toutes les

observables linéaires et quadratiques de spin. Nous identifions ensuite le comportement et les lois d'échelle à grand- $N$  du gain métrologique quantique associé à ces différents ensembles. De plus, nous démontrons, dans la section 2.5, que la technique de mesure après interaction peut, en pratique, mesurer de manière effective un ensemble continu d'observables non linéaires de spin, reproduisant ainsi toutes les lois d'échelle du gain métrologique quantique identifiées précédemment. Avant de discuter, dans 2.7, des exemples concrets de l'implémentation de la dynamique OAT dans des systèmes physiques, nous comparons dans 2.6 le gain métrologique quantique des états générés par la dynamique OAT avec le potentiel métrologique total, mesuré par l'information quantique de Fisher, de ces mêmes états.

## 2.4 Compression des observables de spin linéaires et quadratiques

Nous explorons maintenant comment la dynamique one-axis twisting permet d'atteindre des gains métrologiques quantiques élevés. Comme évoqué précédemment, à partir d'un état cohérent de spin, l'évolution OAT (2.39) conduit à la compression d'une composante linéaire de spin  $\hat{X}_L = \hat{S}_{\vec{m}}$  à des temps courts. Une évolution au-delà du meilleur temps de compression linéaire permet la génération d'états non-gaussiens où des observables non linéaires de spin sont comprimées. Pour chaque choix spécifique d'un ensemble  $\hat{\mathcal{X}}$  d'observables accessibles, qui peut inclure, en plus de  $\hat{S}_{\vec{m}}$ , des observables non linéaires de spin, nous pouvons utiliser la procédure d'optimisation détaillée dans la section 2.2 pour identifier, à tout instant  $t$  de l'évolution one-axis twisting, la meilleure observable comprimée et le gain métrologique correspondant. Les résultats de cette étude sont détaillés dans les deux articles [72, 73].

### 2.4.1 Compression de spin linéaire

Considérons tout d'abord la compression d'une observable linéaire de spin  $\hat{X}_L = \hat{S}_{\vec{m}} = \vec{m} \cdot \hat{\mathbf{S}}$ , où  $\vec{m} = (m_x, m_y, m_z)^T$  est un vecteur unitaire. Nous supposons que le système est initialement dans un état cohérent de spin décrit par l'équation (2.27), où le spin collectif est aligné dans la direction  $x$ . Nous remarquons dans un premier temps que  $\langle \psi_t | [\hat{S}_x, \hat{S}_i] | \psi_t \rangle = 0$  pour tout  $i = x, y, z$ . Cela nous permet de restreindre la direction de rotation  $\vec{n}$  et la direction de mesure  $\vec{m}$  au plan  $yz$  sans perte de généralité. Cette restriction signifie que la matrice des commutateurs  $C$  et la matrice covariance  $\Gamma$  sont toutes deux de taille  $2 \times 2$ . Afin d'identifier la meilleure observable linéaire comprimée et le gain métrologique correspondant, nous utilisons les résultats de la section 2.2 avec le choix  $\hat{\mathcal{X}} = \hat{\mathcal{X}}_L = (\hat{S}_y, \hat{S}_z)^T$ , ce qui signifie que nous étudions la compression d'une observable linéaire de la forme

$$\hat{X}_L = m_y \hat{S}_y + m_z \hat{S}_z. \quad (2.41)$$

En utilisant les relations de commutation (2.5) et (2.6), les équations (2.9), l'expression de l'état de phase (2.13), les propriétés des états de phase (2.14) et (2.16)-(2.17) et la relation d'orthogonalité (2.20), nous pouvons calculer analytiquement la matrice des commutateurs (2.31) et la matrice covariance (2.32) pour tout nombre d'atomes  $N$  et à chaque instant  $t$  de la dynamique one-axis twisting. Pour illustrer le calcul analytique des éléments de la matrice des commutateurs et de la matrice covariance en fonction de  $N$  et de  $\chi t$ , nous montrons ici, étape par étape, le calcul détaillé de l'élément  $C_{12} = -i \langle [\hat{S}_y, \hat{S}_z] \rangle$  de la matrice des commutateurs. Selon les relations de commutation entre les composantes de spin collectif (2.12) et la définition (2.9), nous avons

$$C_{12} = \langle \psi_t | \hat{S}_x | \psi_t \rangle = \frac{1}{2} \left( \langle \psi_t | \hat{c}_a^\dagger \hat{c}_b | \psi_t \rangle + \langle \psi_t | \hat{c}_b^\dagger \hat{c}_a | \psi_t \rangle \right). \quad (2.42)$$

En utilisant (2.39) et le fait que l'état initial  $|\psi_0\rangle$  est un état de phase (2.13) avec  $\varphi = 0$ , nous avons

$$C_{12} = \frac{1}{2} \left( {}_N\langle \varphi = 0 | e^{i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{c}_a^\dagger \hat{c}_b e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} | \varphi = 0 \rangle_N + {}_N\langle \varphi = 0 | e^{i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{c}_b^\dagger \hat{c}_a e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} | \varphi = 0 \rangle_N \right). \quad (2.43)$$

L'utilisation de la définition (2.11) et les relations de commutation (2.5) et (2.6), nous pouvons écrire

$$\hat{c}_a^\dagger \hat{c}_b e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} = e^{-i\chi t} e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} e^{2i\chi t \hat{S}_z} \hat{c}_a^\dagger \hat{c}_b \quad \text{et} \quad \hat{c}_b^\dagger \hat{c}_a e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} = e^{-i\chi t} e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} e^{-2i\chi t \hat{S}_z} \hat{c}_b^\dagger \hat{c}_a. \quad (2.44)$$

En substituant dans (2.43) et en utilisant la propriété des états de phase (2.14), nous obtenons

$$C_{12} = \frac{1}{2} \left( e^{-i\chi t(N+1)} {}_N\langle \varphi = 2\chi t | \hat{c}_a^\dagger \hat{c}_b | \varphi = 0 \rangle_N + e^{i\chi t(N-1)} {}_N\langle \varphi = -2\chi t | \hat{c}_b^\dagger \hat{c}_a | \varphi = 0 \rangle_N \right). \quad (2.45)$$

Les relations (2.16) et (2.17) nous permet de simplifier cette dernière équation et d'écrire

$$C_{12} = \frac{N}{4} \left( e^{-i\chi t(N-1)} {}_N\langle \varphi = 2\chi t | \varphi = 0 \rangle_N + e^{i\chi t(N-1)} {}_N\langle \varphi = -2\chi t | \varphi = 0 \rangle_N \right). \quad (2.46)$$

Finalement, nous utilisons la relation d'orthogonalité des états de phase (2.20) et nous trouvons

$$C_{12} = \frac{N}{2} \cos^{N-1}(\chi t). \quad (2.47)$$

La définition de la matrice des commutateurs (2.31) nous permet d'écrire  $C_{11} = C_{22} = 0$  et sa forme antisymétrique, nous donne  $C_{21} = -C_{12}$ . De la même manière, nous pouvons analytiquement calculer la moyenne de n'importe quelle observable de spin comme fonction de  $N$  et de  $\chi t$  et donc de calculer les éléments de la matrice covariance (2.32) qui possède une forme symétrique. Nous obtenons

$$\Gamma_{11} = (\Delta \hat{S}_y)^2 = \frac{N(N+1)}{8} - \frac{N(N-1)}{8} \cos^{N-2}(2\chi t), \quad (2.48)$$

$$\Gamma_{12} = \text{Cov}(\hat{S}_y, \hat{S}_z) = \frac{N(N-1)}{4} \sin(\chi t) \cos^{N-2}(\chi t), \quad (2.49)$$

$$\Gamma_{22} = (\Delta \hat{S}_z)^2 = \frac{N}{4}. \quad (2.50)$$

À partir de la matrice  $C[|\psi_t\rangle, \hat{S}, \hat{X}_L]$  et de la matrice  $\Gamma[|\psi_t\rangle, \hat{X}_L]$  nous calculons la matrice des moments (2.35) qui nécessite l'inversion de la matrice covariance  $2 \times 2$ , ce qui est analytiquement possible. La diagonalisation de la matrice des moments nous donne le gain métrologique quantique optimale (2.37), pour  $\hat{X} = \hat{X}_L$ , comme fonction de  $N$  et de  $\chi t$

$$\xi_L^{-2} = \frac{4 \cos^{2N-2}(\chi t)}{4 + (N-1) \left\{ 1 - \cos^{N-2}(2\chi t) - \sqrt{(1 - \cos^{N-2}(2\chi t))^2 + 16 \sin^2(\chi t) \cos^{2N-4}(\chi t)} \right\}}. \quad (2.51)$$

Cette dernière équation est représentée, pour  $N = 10^4$ , par la courbe rouge dans la figure 2.4(a).

En prenant la limite  $N \gg 1$ , le gain métrologique (2.51) s'écrit pour  $\chi t < 1/\sqrt{N}$  comme

$$\left( \xi_L^{-2} \right)_{N \rightarrow \infty} = \frac{N^2(\chi t)^2}{1 + N^4(\chi t)^6/6}. \quad (2.52)$$

Le meilleur gain métrologique, résultant de la compression d'une observable linéaire de spin via la dynamique OAT, et le temps correspondant, pour des grands nombres d'atomes, peuvent être obtenus en maximisant (2.52) par rapport à  $\chi t$

$$\chi t_{L,\text{best}} \simeq 3^{1/6} N^{-2/3} \quad ; \quad \left( \xi_{L,\text{best}}^{-2} \right)_{N \rightarrow \infty} \simeq \frac{2}{3^{2/3}} N^{2/3}. \quad (2.53)$$

Ces derniers résultats confirment les lois d'échelle obtenues dans la référence [24]. En introduisant le temps redéfini  $\tilde{\chi} t = \chi t / (\chi t_{L,\text{best}})$  et en développant le gain métrologique exact (2.51) jusqu'à  $\mathcal{O}(N^0)$ , nous obtenons

$$\frac{\xi_L^{-2}}{\left( \xi_{L,\text{best}}^{-2} \right)_{N \rightarrow \infty}} = \frac{3}{2} \frac{(\tilde{\chi} t)^2}{1 + (\tilde{\chi} t)^6 / 2} \left[ 1 - 3^{1/3} (\tilde{\chi} t)^2 N^{-1/3} + \mathcal{O}(N^{-2/3}) \right]. \quad (2.54)$$

Cette dernière expression est représentée par une ligne continue dans la figure 2.3-(a) en fonction de  $\tilde{\chi} t$  pour  $N = 10^3, 10^4$ , et comparée au gain métrologique exact (2.51). Pour  $\tilde{\chi} t = 1$ , nous obtenons le meilleur gain métrologique, y compris les corrections de taille finie

$$\xi_{L,\text{best}}^{-2} = \left( \xi_{L,\text{best}}^{-2} \right)_{N \rightarrow \infty} \left[ 1 - 3^{1/3} N^{-1/3} + \mathcal{O}(N^{-2/3}) \right]. \quad (2.55)$$

qui est représentée, pour  $N = 10^4$ , par la ligne horizontale rouge en pointillés dans la figure 2.4-(a) et par la courbe rouge continue comme fonction de  $N$  dans la figure 2.5.

De plus, le calcul analytique de la matrice des commutateurs (2.31) et de la matrice covariance (2.32) pour un nombre d'atomes arbitraire  $N$  à chaque instant  $t$  de la dynamique OAT nous permet également de déterminer, en fonction de  $N$  et de  $\chi t$ , le générateur de rotation optimal  $\hat{S}_{\vec{n}_{\text{max}}} = \vec{n}_{\text{max}} \cdot \hat{S}_{\perp}$  où  $\hat{S}_{\perp} = (\hat{S}_y, \hat{S}_z)^T$ . En particulier, la direction optimale de rotation  $\vec{n}_{\text{max}}$  est un vecteur unitaire dans le plan  $yz$ , donnée par le vecteur propre de la matrice des moments associé à sa valeur propre maximale, avec  $\vec{n}_{\text{max}} = (\cos \theta_n^L, \sin \theta_n^L)^T$ . Nous obtenons également la meilleure observable linéaire comprimée de spin  $\hat{S}_{\vec{m}_{\text{opt}}} = \vec{m}_{\text{opt}} \cdot \hat{X}_L$  où  $\vec{m}_{\text{opt}} = (\cos \theta_m^L, \sin \theta_m^L)^T$  est la direction optimale de la mesure donnée par (2.36). Dans la limite de grands  $N$ , nous avons

$$\theta_n^L = 3^{-1/6} N^{-1/3} + \mathcal{O}(N^{-2/3}) \quad ; \quad \theta_m^L = -\frac{\pi}{2} + 3^{-1/6} N^{-1/3} + \mathcal{O}(N^{-2/3}). \quad (2.56)$$

Nous avons donc montré que l'estimation d'un paramètre inconnu  $\phi$  basée sur la méthode des moments en utilisant l'état préparé à  $\chi t_{L,\text{best}}$  de la dynamique OAT avec le générateur de rotation  $\hat{S}_{\vec{n}_{\text{max}}}$  et la mesure de la meilleure observable linéaire comprimée  $\hat{S}_{\vec{m}_{\text{opt}}}$  conduit à l'incertitude sub-SQL sur le paramètre estimé

$$\Delta \phi_{\text{est}} \simeq \frac{3^{1/3}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\mu} N^{5/6}}. \quad (2.57)$$

Bien que cette incertitude atteinte soit inférieure à la limite quantique standard  $\Delta \phi_{\text{LQS}} = 1/\sqrt{\mu N}$ , elle reste fondamentalement limitée et bien supérieure à la limite de Heisenberg  $\Delta \phi_{\text{LH}} = 1/(\sqrt{\mu} N)$ . Cette limitation est due à la restriction de la mesure aux observables linéaires de spin, qui ne capturent plus les caractéristiques fines des états quantiques non-gaussiens générés par la dynamique one-axis twisting au-delà du meilleur temps de compression (2.53) [25]. Comme nous le montrerons dans les deux paragraphes suivants, l'inclusion d'observables non linéaires de spin dans l'ensemble des observables accessibles  $\hat{X}$  permet de dépasser cette limitation et de réduire l'incertitude sur le paramètre estimé en dessous de (2.57).

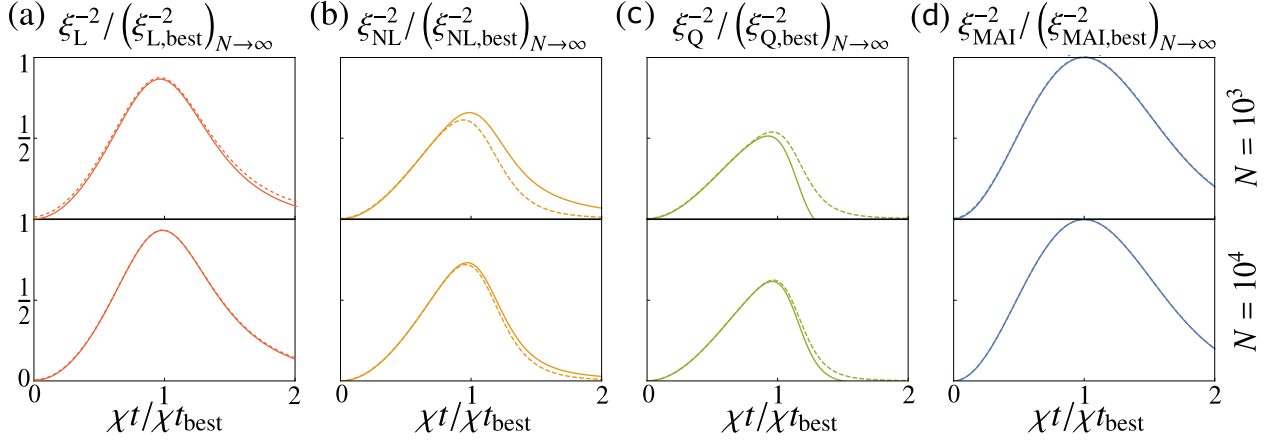


FIGURE 2.3 – Expression analytique du gain métrologique  $\xi^{-2}$  dans la limite des grands  $N$ , y compris les corrections de taille finie (2.54), (2.61), (2.70) et (2.92) (lignes pleines) pour (a) les stratégies de mesure linéaire (L), (b) non linéaire (NL), (c) quadratique (Q) et (d) MAI, comparée au valeur numérique exacte de  $\xi^{-2}$  (lignes pointillées), les deux divisés par le meilleur gain métrologique correspondant calculé à la limite de  $N$  grands. Le nombre d’atomes est  $N = 10^3$  (ligne du haut) et  $N = 10^4$  (ligne du bas).

## 2.4.2 Compression de spin non linéaire

Considérons maintenant des ensembles d’observables accessibles qui contiennent des observables de spin non linéaires. En plus de  $\hat{S}_{\vec{m}}$ , nous considérons ici l’addition d’une seule observable du second ordre  $\frac{1}{2}\{\hat{S}_x, \hat{S}_z\}$ , où  $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$  désigne l’anticommutateur de  $\hat{A}$  et de  $\hat{B}$ . Ceci correspond au choix de l’ensemble non linéaire  $\hat{X} = \hat{X}_{\text{NL}} = (\hat{S}_y, \hat{S}_z, \frac{1}{2}\{\hat{S}_x, \hat{S}_z\})^T$ . Le but de ce paragraphe est donc d’explorer la compression, via la dynamique OAT, d’une observable non linéaire de spin qui s’écrit sous la forme

$$\hat{X}_{\text{NL}} = m_y \hat{S}_y + m_z \hat{S}_z + \frac{m_{xz}}{2} \{\hat{S}_x, \hat{S}_z\}. \quad (2.58)$$

D’une manière similaire au cas linéaire, pour obtenir le gain métrologique quantique optimal associé à l’ensemble  $\hat{X}_{\text{NL}}$  pour un nombre d’atomes arbitraire  $N$  à tout instant  $t$  de la dynamique OAT, nous calculons analytiquement la matrice des commutateurs (2.31), ayant dans ce cas des dimensions  $2 \times 3$ , ainsi que la matrice (2.32) de dimensions  $3 \times 3$  (données dans 3.A). Cela nous permet, en inversant analytiquement la matrice covariance, de calculer la matrice des moments (2.35) et de la diagonaliser pour déduire le gain métrologique optimal  $\xi_{\text{NL}}^{-2}$ . Une représentation de ce gain métrologique exacte en fonction de  $\chi t$ , est illustré, pour  $N = 10^4$ , par la courbe orange dans la figure 2.4(a). À la limite  $N \gg 1$  et à  $\chi t < 1\sqrt{N}$ , ce gain métrologique optimal  $\xi_{\text{NL}}^{-2}$  s’écrit en fonction de  $N$  et de  $\chi t$  comme

$$\left(\xi_{\text{NL}}^{-2}\right)_{N \rightarrow \infty} = \frac{N^2(\chi t)^2}{1 + N^6(\chi t)^{10}/270}. \quad (2.59)$$

En maximisant (2.59) par rapport à  $\chi t$ , nous trouvons les lois d’échelle, à  $N$  grand, du meilleur gain métrologique, associé à la compression d’une observable non linéaire de spin, et du temps correspondant

$$\chi t_{\text{NL,best}} \simeq \left(\frac{5}{2}\right)^{1/10} 3^{3/10} N^{-3/5} \quad ; \quad \left(\xi_{\text{NL,best}}^{-2}\right)_{N \rightarrow \infty} \simeq 2 \left(\frac{2}{5}\right)^{4/5} 3^{3/5} N^{4/5}. \quad (2.60)$$

Afin d'obtenir les premières corrections de taille finie à (2.59), nous faisons usage de temps réajusté  $\tilde{\chi}t = \frac{\chi t}{\chi t_{\text{NL,best}}}$  et nous développons le gain métrologique exact  $\xi_{\text{NL}}^{-2}$  jusqu'à  $\mathcal{O}(N^0)$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{\xi_{\text{NL}}^{-2}}{\left(\xi_{\text{NL,best}}^{-2}\right)_{N \rightarrow \infty}} \\ &= \frac{5(\tilde{\chi}t)^2}{4 + (\tilde{\chi}t)^{10}} \left[ 1 - \left(\frac{135}{2}\right)^{1/5} (\tilde{\chi}t)^2 N^{-1/5} + \frac{5(\tilde{\chi}t)^4}{4 + (\tilde{\chi}t)^{10}} \frac{221(\tilde{\chi}t)^{10} + 672}{40500^{1/5} 28} N^{-2/5} + \mathcal{O}(N^{-3/5}) \right]. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Une représentation de (2.61) en fonction de  $\tilde{\chi}t$  pour  $N = 10^3, 10^4$  comparée au gain métrologique exact est illustrée dans la figure 2.3-(b). Pour  $\tilde{\chi}t = 1$ , nous obtenons le meilleur gain métrologique non linéaire, y compris les corrections de taille finie

$$\xi_{\text{NL,best}}^{-2} = \left(\xi_{\text{NL,best}}^{-2}\right)_{N \rightarrow \infty} \left[ 1 - \left(\frac{5}{2}\right)^{1/5} 3^{3/5} N^{-1/5} + \frac{893}{2^{2/5} 3^{4/5} 5^{3/5} 28} N^{-2/5} + \mathcal{O}(N^{-3/5}) \right] \quad (2.62)$$

représentée, pour  $N = 10^4$ , par la ligne horizontale orange en pointillés dans la figure 2.4-(a) et en fonction de  $N$  par la courbe orange continue dans la figure 2.5.

La direction de rotation optimale dans ce cas  $\vec{n}_{\text{max}} = (\cos \theta_n^{\text{NL}}, \sin \theta_n^{\text{NL}})^T$  est donnée dans la limite de grands  $N$  par

$$\theta_n^{\text{NL}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{1/10} 3^{-3/10} N^{-2/5} + \mathcal{O}(N^{-3/5}), \quad (2.63)$$

et la meilleure observable de spin parmi l'ensemble non linéaire  $\vec{X}_{\text{NL}}$  est  $\hat{X}_{\vec{m}_{\text{opt}}}^{(\text{NL})} = \vec{m}_{\text{opt}} \cdot \hat{\vec{X}}_{\text{NL}}$  où nous écrivons

$$\vec{m}_{\text{opt}} = (\sin \varphi_m^{\text{NL}} \cos \theta_m^{\text{NL}}, \sin \varphi_m^{\text{NL}} \sin \theta_m^{\text{NL}}, \cos \varphi_m^{\text{NL}})^T \quad \text{with} \quad \theta_m^{\text{NL}} \in [0, 2\pi] \quad \text{and} \quad \varphi_m^{\text{NL}} \in [0, \pi] \quad (2.64)$$

et, dans la limite des grands  $N$ , nous trouvons

$$\theta_m^{\text{NL}} = -\frac{\pi}{2} + \frac{3^{7/10}}{29^{10} 5^{1/10}} N^{-2/5} + \mathcal{O}(N^{-3/5}) \quad ; \quad \varphi_m^{\text{NL}} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{N} + \mathcal{O}(N^{-6/5}). \quad (2.65)$$

Notons que, puisque  $\hat{S}_x$  est d'ordre  $N$ , la contribution de l'observable non linéaire  $m_{xz} \{\hat{S}_x, \hat{S}_z\}$  à  $\hat{X}_{\text{NL}}$  (2.58) est comparable à celle de l'observable linéaire, bien que  $m_{xz} = \cos \varphi_m^{\text{NL}}$  soit de l'ordre de  $1/N$ .

Comme prévu, si un paramètre inconnu  $\phi$  est encodé dans le système à  $\chi t_{\text{NL,best}}$  après l'évolution OAT, l'estimation de  $\phi$  basée sur la méthode des moments avec la mesure de l'observable non linéaire  $\hat{X}_{\vec{m}_{\text{opt}}}^{(\text{NL})}$  permet d'atteindre une incertitude

$$\Delta \phi_{\text{est}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{5}{2}\right)^{4/10} 3^{-3/10} \frac{1}{\sqrt{\mu} N^{9/10}}, \quad (2.66)$$

qui est nettement inférieur à l'incertitude associée à la compression d'une observable linéaire de spin (2.57) et qui s'approche de la limite de Heisenberg  $\Delta \phi_{\text{LH}} = 1/(N\sqrt{\mu})$ .

### 2.4.3 Compression de spin quadratique

Nous étudions maintenant la compression d'une combinaison linéaire arbitraire d'observables de spin jusqu'au second ordre. Tout d'abord, nous constatons numériquement que dans la fenêtre temporelle  $0 < \chi t \leq 1/\sqrt{N}$  de l'évolution one-axis twisting, la meilleure observable quadratique comprimée est une combinaison de seulement quatre observables de spin collectif  $\hat{X}_Q = (\hat{S}_y, \hat{S}_z, \frac{1}{2}\{\hat{S}_x, \hat{S}_z\}, \frac{1}{2}\{\hat{S}_x, \hat{S}_y\})^T$ . Pour cette raison, nous nous limitons, dans la suite, aux observables  $\hat{X}_Q$  de la forme

$$\hat{X}_Q = m_y \hat{S}_y + m_z \hat{S}_z + \frac{m_{xz}}{2} \{\hat{S}_x, \hat{S}_z\} + \frac{m_{xy}}{2} \{\hat{S}_x, \hat{S}_y\}. \quad (2.67)$$

En procédant de manière similaire aux cas linéaire et non linéaire, où cette fois nous calculons analytiquement la matrice des commutateurs de taille  $2 \times 4$  et la matrice covariance de taille  $4 \times 4$  qui sont données dans l'appendice 3.A. Le calcul de la matrice des moments (2.35) nécessite donc dans ce cas l'inversion de la matrice covariance de taille  $4 \times 4$ , ce qui est encore possible analytiquement. La diagonalisation de la matrice des moments obtenue nous permet de calculer le gain métrologique quantique optimal  $\xi_Q^{-2}$  associé à l'ensemble d'observables  $\hat{X}_Q$  comme fonction de  $N$  et de  $\chi t$ . Ceci est représenté, pour  $N = 10^4$ , en fonction de  $\chi t$  par la courbe verte dans la figure 2.4-(a). En prenant la limite  $N \gg 1$ , nous obtenons pour  $\chi t < 1/\sqrt{N}$

$$\left(\xi_Q^{-2}\right)_{N \rightarrow \infty} = \frac{N^2(\chi t)^2}{1 + N^8(\chi t)^{14}/875}. \quad (2.68)$$

Pour des grands nombre d'atomes  $N$ , le meilleur gain métrologique, associé à la compression d'une observable quadratique de spin, et le temps correspondant sont obtenus en maximisant (2.68) par rapport à  $\chi t$

$$\chi t_{Q,\text{best}} \simeq \left(\frac{7}{6}\right)^{1/14} 5^{3/14} N^{-4/7} \quad ; \quad \left(\xi_{Q,\text{best}}^{-2}\right)_{N \rightarrow \infty} \simeq \left(\frac{6}{7}\right)^{6/7} 5^{3/7} N^{6/7}. \quad (2.69)$$

En introduisant le temps redimensionné  $\tilde{\chi}t = \frac{\chi t}{\chi t_{Q,\text{best}}}$  et en développant le gain métrologique exact  $\xi_Q^{-2}$  jusqu'à  $\mathcal{O}(N^0)$ , nous obtenons les premières corrections de taille finie à (2.68)

$$\begin{aligned} \frac{\xi_Q^{-2}}{\left(\xi_{Q,\text{best}}^{-2}\right)_{N \rightarrow \infty}} &= \frac{7(\tilde{\chi}t)^2}{6 + (\tilde{\chi}t)^{14}} \left[ 1 - \left(\frac{875}{6}\right)^{1/7} (\tilde{\chi}t)^2 N^{-1/7} + \frac{7(\tilde{\chi}t)^4}{6 + (\tilde{\chi}t)^{14}} \frac{86(\tilde{\chi}t)^{14} + 297}{5^{1/7} 6^{2/7} 7^{5/7} 15} N^{-2/7} \right. \\ &\quad \left. - \frac{7(\tilde{\chi}t)^6}{6 + (\tilde{\chi}t)^{14}} \frac{61(\tilde{\chi}t)^{14} + 147}{3^{10/7} 5^{5/7} 7^{4/7} 2^{3/7}} N^{-3/7} + \mathcal{O}(N^{-4/7}) \right], \end{aligned} \quad (2.70)$$

représentée dans la figure 2.3-(c), et les corrections de taille finie du meilleur gain métrologique quadratique  $\xi_{Q,\text{best}}^{-2}$

$$\begin{aligned} \xi_{Q,\text{best}}^{-2} &= \left(\xi_{Q,\text{best}}^{-2}\right)_{N \rightarrow \infty} \left[ 1 - \left(\frac{7}{6}\right)^{1/7} 5^{3/7} N^{-1/7} + \frac{383}{5^{1/7} 6^{2/7} 7^{5/7} 15} N^{-2/7} \right. \\ &\quad \left. - \frac{104 \times 2^{4/7}}{3^{10/7} 5^{5/7} 7^{4/7}} N^{-3/7} + \mathcal{O}(N^{-4/7}) \right] \end{aligned} \quad (2.71)$$

qui est représentée par la ligne horizontale verte en pointillés sur la figure 2.4-(a) pour  $N = 10^4$ , et par la courbe verte continue comme fonction de  $N$  dans la figure 2.5.



La direction de rotation optimale est  $\vec{n}_{\max} = (\cos \theta_n^Q, \sin \theta_n^Q)^T$ , et la meilleure observable est  $\hat{X}_{\vec{m}_{\text{opt}}}^{(Q)} = \vec{m}_{\text{opt}} \cdot \hat{X}_Q$  où  $\vec{m}_{\text{opt}}$  est dans ce cas un vecteur unitaire quadridimensionnel correspondant à l'ensemble des observables  $(\hat{S}_y, \hat{S}_z, \frac{1}{2}\{\hat{S}_x, \hat{S}_z\}, \frac{1}{2}\{\hat{S}_x, \hat{S}_y\})^T$  qui peut s'écrire comme suit

$$\vec{m}_{\text{opt}} = (\sin \omega_m^Q \sin \varphi_m^Q \cos \theta_m^Q, \sin \omega_m^Q \sin \varphi_m^Q \sin \theta_m^Q, \sin \omega_m^Q \cos \varphi_m^Q, \cos \omega_m^Q)^T. \quad (2.72)$$

Dans la limite  $N \gg 1$ , nous obtenons pour la direction de rotation optimale

$$\theta_n^Q = \left(\frac{6}{7}\right)^{1/14} 5^{-3/14} N^{-3/7} + \mathcal{O}(N^{-4/7}), \quad (2.73)$$

et pour la direction de la mesure optimale

$$\theta_m^Q = -\frac{\pi}{2} + \frac{2^{15/14}}{3 \times 5^{3/14}} \left(\frac{7}{3}\right)^{13/14} N^{-3/7} + \mathcal{O}(N^{-4/7}), \quad (2.74)$$

$$\varphi_m^Q = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3N} + \mathcal{O}(N^{-8/7}), \quad (2.75)$$

$$\omega_m^Q = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{7}\right)^{1/14} \frac{1}{3^{13/14} 5^{3/14}} N^{-10/7} + \mathcal{O}(N^{-11/7}). \quad (2.76)$$

En tenant compte du fait que  $\hat{S}_x$  est de l'ordre de  $N$ , nous constatons que la contribution des deux observables non linéaires  $\{\hat{S}_x, \hat{S}_z\}$  et  $\{\hat{S}_x, \hat{S}_y\}$  à  $\hat{X}_{\vec{m}_{\text{opt}}}^{(Q)}$  est respectivement du même ordre et  $N^{-3/7}$  plus petite que la contribution de l'observable linéaire.

La compression de l'observable quadratique (2.67) permet d'atteindre une incertitude

$$\Delta\phi \simeq \left(\frac{7}{6}\right)^{6/14} 5^{-3/14} \frac{1}{\sqrt{\mu} N^{13/14}}, \quad (2.77)$$

sur le paramètre estimé, via la méthode des moments, qui est encore plus proche de la limite de Heisenberg que l'incertitude (2.66) obtenue par la compression de l'observable non linéaire (2.58).

Finalement, en comparant les gains métrologiques quantiques atteints par la compression des observables linéaires, non linéaires et quadratiques, nous observons une augmentation du gain métrologique. Cela se traduit par une réduction de l'incertitude associée au paramètre estimé  $\Delta\phi_{\text{est}}$ , lorsque le temps de préparation de l'état par l'évolution OAT et la non-linéarité de l'observable de spin mesurée augmentent.

## 2.5 Technique de Mesure Après Interaction

Comme nous l'avons expliqué précédemment, pendant l'évolution one-axis twisting, des observables de spin de plus en plus non linéaires sont comprimées. Cette compression peut être exploitée afin d'obtenir des gains métrologiques significatifs dans le cadre d'un protocole d'estimation quantique. Les observables non linéaires, qui représentent des moments d'ordre supérieur des composantes de spin, peuvent être déduites directement à partir des statistiques des observables linéaires de spin [74–78]. Cependant, en raison de l'augmentation de nombre de mesures nécessaires, il est difficile d'atteindre cet objectif dans les systèmes comportant un grand nombre d'atomes. Dans cette section, nous allons introduire une méthode alternative appelée technique de mesure après interaction. Cette approche permet de mesurer directement une observable non linéaire de spin. En particulier, elle consiste à appliquer, après l'encodage du paramètre inconnu  $\phi$  et avant la mesure d'une observable linéaire de spin  $\hat{S}_{\vec{m}} = \vec{m} \cdot \hat{S}$  avec  $\vec{m} = (m_x, m_y, m_z)^T$  et  $\hat{S} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)^T$ , une

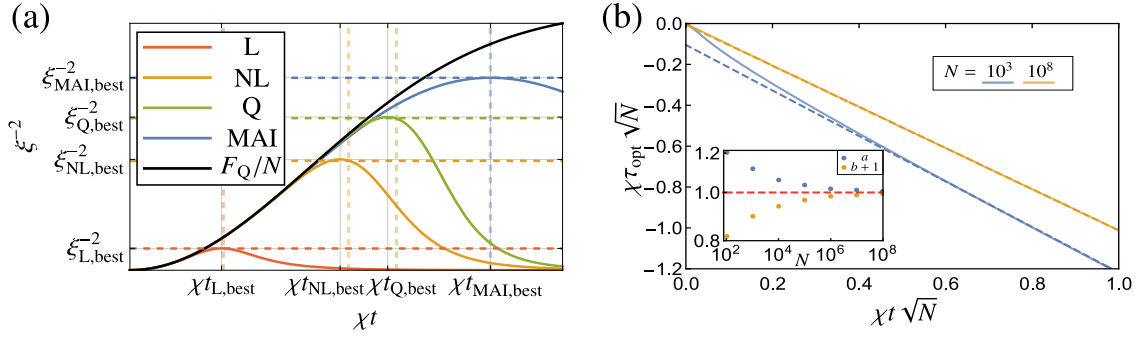


FIGURE 2.4 – (a) Gain métrologique quantique pour les stratégies de mesure linéaire  $\xi_L^{-2}$ , non linéaire  $\xi_{NL}^{-2}$ , quadratique  $\xi_Q^{-2}$  et MAI  $\xi_{MAI}^{-2}$  en fonction du temps, comparé à l’information quantique de Fisher, normalisée par rapport à  $N$ , avec  $N = 10^4$ . Les lignes verticales et horizontales pleines représentent le meilleur gain météorologique (exact) et le meilleur temps correspondants, tandis que les lignes horizontales et verticales en pointillé représentent les lois d’échelle analytiques dans la limite des grands  $N$  avec des corrections de taille finie. (b) Optimisation sur le deuxième temps d’interaction  $\tau$  dans la technique MAI. Le graphique montre le meilleur temps  $\tau_{\text{opt}}$  en fonction du temps de compression  $t$  pour  $N = 10^3$  (bleu) et  $N = 10^8$  (orange). Dans le cadre temporel pertinent  $\chi t \leq 1/\sqrt{N}$ , nous avons  $\tau_{\text{opt}} \simeq -at + b$  où  $a$  et  $b + 1$  sont représentés dans l’encadré en tant que fonctions de  $N$ .

seconde évolution one-axis twisting  $\hat{U}_\tau = e^{-i\chi\tau\hat{S}_z^2}$ . D’un point de vue mathématique, cette approche revient à mesurer directement l’observable non linéaire

$$\hat{X}_{\text{MAI}} = \hat{U}_\tau^\dagger \hat{S}_{\vec{m}} \hat{U}_\tau = \sum_{k=x,y,z} m_k e^{i\chi\tau\hat{S}_z^2} \hat{S}_k e^{-i\chi\tau\hat{S}_z^2}. \quad (2.78)$$

Afin de mieux comprendre la technique MAI, nous développons la dernière équation jusqu’à l’ordre linéaire dans  $\chi\tau$

$$\hat{X}_{\text{MAI}} = \hat{S}_{\vec{m}} - \chi\tau m_x \{\hat{S}_y, \hat{S}_z\} + \chi\tau m_y \{\hat{S}_x, \hat{S}_z\} + \mathcal{O}(\chi\tau)^2. \quad (2.79)$$

Il en résulte qu’une évolution OAT jusqu’à  $\chi\tau = m_{xz}/(2m_y)$  suivie d’une mesure de l’observable linéaire de spin  $\hat{S}_{\vec{m}}$  avec  $m_x = 0$  est équivalente au premier ordre en  $\chi\tau$  à la mesure de l’observable non linéaire de spin (2.58). En conséquence, pour  $\chi\tau$  de plus en plus élevé, la technique MAI offre la possibilité de mesurer des observables de spin qui sont de plus en plus non linéaires.

Motivés par cette correspondance, nous étudions systématiquement le potentiel métrologique offert par l’ensemble continu des observables (2.78), paramétré par  $\chi\tau$  et accessible par la technique MAI. Pour ce faire, nous considérons un protocole d’estimation d’un paramètre basé sur la méthode des moments. Le paramètre étant encodé sur un état  $|\psi_t\rangle = \hat{U}_t|\psi_0\rangle$  généré par la dynamique OAT à partir de l’état cohérent de spin (2.27), via une rotation générée par  $\hat{S}_{\vec{n}}$  et l’estimation étant obtenue à partir des résultats de la mesure de l’observable  $\hat{X}_{\text{MAI}}$  donné par (2.78). Dans ce cas, le gain métrologique quantique, comme défini dans l’équation (2.29), peut être exprimé comme

$$\xi^{-2}(|\psi_t\rangle, \hat{S}_{\vec{n}}, \hat{X}_{\text{MAI}}) = \frac{|\langle [\hat{S}_{\vec{n}}, \hat{U}_\tau^\dagger \hat{S}_{\vec{m}} \hat{U}_\tau] \rangle|^2}{N(\Delta[\hat{U}_\tau^\dagger \hat{S}_{\vec{m}} \hat{U}_\tau])^2}. \quad (2.80)$$

Cette dernière équation s’écrit de manière équivalente

$$\xi^{-2}(|\psi_t\rangle, \hat{S}_{\vec{n}}, \hat{X}_{\text{MAI}}) = \frac{|\vec{n}^T C[|\psi_t\rangle, \hat{S}, \hat{U}_\tau^\dagger \hat{S} \hat{U}_\tau] \vec{m}|^2}{N \vec{m}^T \Gamma[|\psi_t\rangle, \hat{U}_\tau^\dagger \hat{S} \hat{U}_\tau] \vec{m}}. \quad (2.81)$$

Les éléments de la matrice des commutateurs dans ce cas sont donnés par

$$C[|\psi_t\rangle, \hat{S}, \hat{U}_\tau^\dagger \hat{S} \hat{U}_\tau]_{kl} = -i[\hat{S}_k, \hat{U}_\tau^\dagger \hat{S}_l \hat{U}_\tau], \quad (2.82)$$

et les éléments de la matrice covariance, définies par (2.32), s'écrivent comme

$$\Gamma[|\psi_t\rangle, \hat{U}_\tau^\dagger \hat{S} \hat{U}_\tau]_{kl} = \text{Cov}(\hat{U}_\tau^\dagger \hat{S}_k \hat{U}_\tau, \hat{U}_\tau^\dagger \hat{S}_l \hat{U}_\tau). \quad (2.83)$$

Cette dernière coïncide donc avec la matrice covariance, associée à l'ensemble  $\hat{S}$  d'observables linéaires de spin, de l'état généré par la dynamique OAT à un moment ultérieur  $t + \tau$

$$\Gamma[|\psi_t\rangle, \hat{U}_\tau^\dagger \hat{S} \hat{U}_\tau] = \Gamma[|\psi_{t+\tau}\rangle, \hat{S}], \quad (2.84)$$

où nous avons utilisé  $\hat{U}_t \hat{U}_\tau = \hat{U}_{t+\tau}$ . Dans un premier temps, nous constatons que

$$\langle \psi_0 | \hat{U}_t^\dagger [\hat{S}_x, \hat{U}_\tau^\dagger \hat{S}_{\vec{m}} \hat{U}_\tau] \hat{U}_t | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | \hat{U}_t^\dagger [\hat{S}_{\vec{n}}, \hat{U}_\tau^\dagger \hat{S}_x \hat{U}_\tau] \hat{U}_t | \psi_0 \rangle = 0 \quad (2.85)$$

pour toute observable linéaire de spin  $\hat{S}_{\vec{m}}$  et  $\hat{S}_{\vec{n}}$ . Cela nous permet de limiter la direction de rotation  $\vec{n}$  et la direction de mesure  $\vec{m}$  au plan perpendiculaire à la direction initiale de spin  $\vec{e}_x$ . Les matrices des commutateurs  $C$  et covariance  $\Gamma$  sont donc toutes deux de dimensions  $2 \times 2$ . Les expressions analytiques de leurs éléments en fonction de nombre d'atomes  $N$ , de temps d'évolution  $t$  et de temps d'interaction  $\tau$  sont donnés dans l'appendice 3.B. Maintenant, nous pouvons utiliser le résultat général (2.37) pour analytiquement identifier le gain métrologique optimal  $\xi_{\text{MAI}}^{-2}$ , par rapport à la direction de rotation  $\vec{n}$  et par rapport à la direction de mesure  $\vec{m}$ , atteint pour un nombre  $N$  d'atomes, un temps de préparation  $t$  et un temps d'interaction  $\tau$  fixes.

Comme le montre la figure 2.4-(b), l'optimisation numérique par rapport à  $\tau$  révèle que, dans la limite de grands  $N$ , pour un  $\chi t \leq 1/\sqrt{N}$  donné, le temps d'interaction optimal  $\chi \tau_{\text{opt}}$  qui maximise le gain métrologique  $\xi_{\text{MAI}}^{-2}$  est donné par

$$\chi \tau_{\text{opt}} \xrightarrow{N \gg 1} -\chi t. \quad (2.86)$$

Cela correspond à la méthode d'écho, initialement proposée dans la référence [62], dans le but d'amplifier le signal de sortie lors d'un protocole d'estimation quantique. Après la première évolution OAT jusqu'à un certain temps  $t$  où le paramètre est encodé, une deuxième évolution OAT de même durée est effectuée, mais cette fois-ci la constante  $\chi$  dans le hamiltonien non linéaire change de signe, c'est-à-dire  $\chi \rightarrow -\chi$ . Motivés par le résultat (2.86), nous remplaçons  $\chi \tau$  par  $-\chi t$  dans l'expression de l'observable  $\hat{X}_{\text{MAI}}$  donnée par (2.78). Le gain métrologique exact  $\xi_{\text{MAI}}^{-2}$  est représenté, pour  $N = 10^4$ , en fonction de  $\chi t$  par la courbe bleu dans la figure 2.4-(a). En utilisant  $\cos^N(\chi t) \simeq e^{-N(\chi t)^2/2}$  pour  $\chi t \rightarrow 0$ , le gain métrologique  $\xi_{\text{MAI}}^{-2}$  pour la technique MAI est donné pour  $\chi t \leq 1/\sqrt{N}$  dans la limite de grands  $N$  par

$$\left( \xi_{\text{MAI}}^{-2} \right)_{N \rightarrow \infty} = N^2 (\chi t)^2 e^{-N(\chi t)^2}. \quad (2.87)$$

À partir de ce dernier résultat nous pouvons déterminer les lois d'échelle du gain métrologique  $\xi_{\text{MAI}}^{-2}$  pour  $N \gg 1$  à l'échelle du temps

$$\chi t = \sigma N^{-\alpha}, \quad 1 \geq \alpha \geq 1/2. \quad (2.88)$$

En substituant (2.88) dans (2.87) nous obtenons

$$\left( \xi_{\text{MAI}}^{-2} \right)_{N \rightarrow \infty} = \sigma^2 N^{2-2\alpha} e^{-\sigma^2 N^{1-2\alpha}}. \quad (2.89)$$

La limite  $N \rightarrow \infty$  dans (2.89) nous donne les termes dominants et en utilisant le gain métrologique exacte, nous pouvons obtenir les premières corrections de taille finie

$$\left(\xi_{\text{MAI}}^{-2}\right)_{N \rightarrow \infty} = \begin{cases} \sigma^2 N^{2-2\alpha}, & 1 \geq \alpha > 1/2 \\ \sigma^2 e^{-\sigma^2} N \left[ 1 + \left( \frac{1+e^{\sigma^2}}{\sigma^2} + \frac{5\sigma^2}{3} - \frac{\sigma^4}{6} - 2 \right) \frac{1}{N} + \mathcal{O}(N^{-2}) \right], & \alpha = 1/2 \end{cases}, \quad (2.90)$$

où pour  $1 \geq \alpha > 1/2$ , nous n'avons pas inclus la première correction dont la forme dépend de la valeur de  $\alpha$ . D'abord, il est important de noter qu'en premier ordre dans la limite de grands  $N$ , le résultat (2.90) reproduit les lois d'échelle caractéristiques du gain métrologique associé à la compression linéaire, non linéaire et quadratique de spin, discutées précédemment. En effet, lorsque  $\alpha = 2/3$ , nous retrouvons la loi l'échelle  $\xi_{\text{L}}^{-2} \propto N^{2/3}$  pour la compression d'une observable linéaire de spin. Lorsque  $\alpha = 3/5$ , la loi d'échelle  $\xi_{\text{NL}}^{-2} \propto N^{4/5}$  est associée à la compression de l'observable non linéaire (2.58), et enfin pour  $\alpha = 4/7$ , la loi d'échelle  $\xi_{\text{Q}}^{-2} \propto N^{6/7}$  caractérise la compression d'une observable quadratique. Le meilleur gain métrologique du protocole d'écho [62] et le temps correspondant sont obtenus à partir de (2.90) en maximisant par rapport à  $\sigma$  et à  $\alpha$

$$\chi t_{\text{MAI,best}} \simeq \frac{1}{\sqrt{N}} \quad ; \quad \left(\xi_{\text{MAI,best}}^{-2}\right)_{N \rightarrow \infty} \simeq \frac{N}{e}. \quad (2.91)$$

Le meilleur gain métrologique  $\left(\xi_{\text{MAI,best}}^{-2}\right)_{N \rightarrow \infty}$  est représenté par la ligne horizontale bleue en pointillés dans la figure 2.4-(a) pour  $N = 10^4$ , et par la courbe bleue continue comme fonction de  $N$  dans la figure 2.5. Notons que le gain métrologique maximal atteint par la technique MAI est proportionnel au nombre d'atomes  $N$ , il a donc l'échelle de Heisenberg. Comme dans la section précédente, le changement de la variable du temps  $\tilde{\chi}t = \chi t / \chi t_{\text{MAI,best}}$  nous permet d'écrire

$$\frac{\xi_{\text{MAI}}^{-2}}{\xi_{\text{MAI,best}}^{-2}} = (\tilde{\chi}t)^2 e^{1-(\tilde{\chi}t)^2} + \mathcal{O}(N^{-1}). \quad (2.92)$$

Ceci est représenté dans la figure 2.3-(d). Notez que la première correction de taille finie du gain métrologique (2.92) de la méthode MAI, d'ordre  $1/N$ , est très faible par rapport au cas de la compression de spin non linéaire ( $1/N^{1/5}$ ) donnée dans (2.61) et de la compression quadratique ( $1/N^{1/7}$ ) donnée dans (2.70).

En plus du gain métrologique quantique optimal, l'optimisation nous donne la direction de rotation optimale  $\vec{n}_{\text{max}} = \cos \theta_n \vec{e}_y + \sin \theta_n \vec{e}_z$  qui est donnée par le vecteur propre de la matrice des moments  $M$  associée à sa plus grande valeur propre où nous obtenons dans la limite de grands  $N$  aux temps (2.88) de la dynamique one-axis twisting

$$\theta_n = \begin{cases} \arctan\left(\frac{2}{\sigma} N^{\alpha-1}\right), & 1 \geq \alpha > 1/2 \\ \frac{1}{\sigma} e^{\sigma^2/2} \frac{1}{\sqrt{N}} + \mathcal{O}(N^{-3/2}), & \alpha = 1/2 \end{cases}. \quad (2.93)$$

L'observable de mesure optimale est  $\hat{X}_{\vec{m}_{\text{opt}}} = \hat{U}_{-t}^\dagger (\vec{m}_{\text{opt}} \cdot \hat{S}) \hat{U}_{-t}$  où  $\vec{m}_{\text{opt}}$  est calculé à partir de (2.36). À la limit  $N \gg 1$ ,  $\vec{m}_{\text{opt}} = \cos \theta_m \vec{e}_y + \sin \theta_m \vec{e}_z$  avec

$$\theta_m = \begin{cases} \arctan\left(-\frac{1}{\sigma} N^{\alpha-1}\right), & 1 \geq \alpha > 1/2 \\ -\frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{N}} + \mathcal{O}(N^{-1}), & \alpha = 1/2 \end{cases}, \quad (2.94)$$

représente la direction de mesure optimale au moment (2.88) de l'évolution OAT. Notons qu'ici également dans (2.93) et (2.94), la forme des premières corrections pour  $1 \geq \alpha > 1/2$  dépendent de la valeur de  $\alpha$ . Les équations (2.93) et (2.94) montrent qu'à la limite de grands  $N$ , la direction de mesure et de rotation sont toutes deux données, pour  $\alpha = 1/2$ , par  $\vec{e}_y$ .

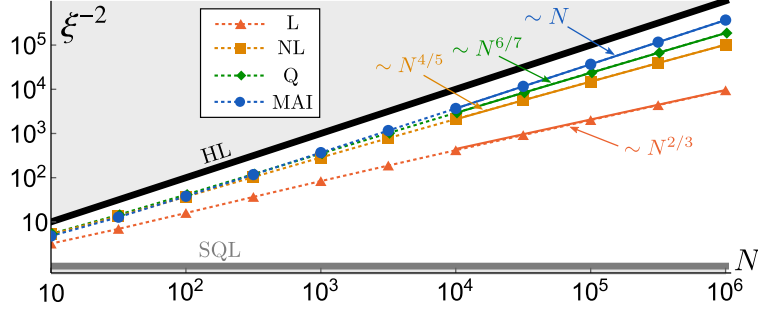


FIGURE 2.5 – Gain métrologique quantique  $\xi^{-2}$  optimisé sur le temps de préparation  $\chi t$  pour les stratégies de mesure linéaire (L), non linéaire (NL), quadratique (Q) et MAI en fonction de  $N$ . La même figure présente également, en traits épais, la limite quantique standard en gris et la limite de Heisenberg en noir. Les courbes en traits pleins représentent les lois d'échelle analytiques dans la limite de grands  $N$ , en tenant compte des corrections de taille finie, avec l'élément dominant précisé dans le graphique. Les courbes en pointillés sont ajoutées pour une meilleure visualisation des données.

## 2.6 L'information quantique de Fisher

Le potentiel métrologique total d'un état quantique donné est exprimé à travers l'information quantique de Fisher  $F_Q$ , comme indiqué dans le chapitre précédent. Selon la série d'inégalités (1.26), l'information quantique de Fisher peut être obtenue par optimisation du gain métrologique quantique sur toutes les observables de mesure possibles  $\max_{\hat{X}} \xi^{-2} = F_Q/N$ . L'objectif de cette section est d'évaluer la qualité de la technique MAI en comparant les lois d'échelles du gain métrologique correspondant (2.90) aux lois d'échelles de  $F_Q/N$  pour les états générés par la dynamique one-axis twisting dans les mêmes échelles de temps d'évolution (2.88). En partant de l'état cohérent de spin (2.27), pour une rotation générée via  $\hat{S}_{\vec{n}}$  avec  $\vec{n}$  un vecteur unitaire dans le plan  $yz$ , l'information quantique de Fisher à un temps  $t$  de l'évolution OAT dépend de la direction de rotation  $\vec{n}$  et elle est donnée par  $F_Q[|\psi_t\rangle, \hat{S}_{\vec{n}}] = 4(\Delta\hat{S}_{\vec{n}})^2$ . Ceci peut être ré-exprimé, en terme de la matrice covariance  $\Gamma[|\psi_t\rangle, \hat{X}_L]$  avec  $\hat{X}_L = (\hat{S}_y, \hat{S}_z)^T$ , comme

$$F_Q[|\psi_t\rangle, \hat{S}_{\vec{n}}] = 4\vec{n}^T \Gamma[|\psi_t\rangle, \hat{X}_L] \vec{n}. \quad (2.95)$$

En maximisant cette dernière équation par rapport à la direction de rotation  $\vec{n}$ , l'information quantique de Fisher maximale associée à l'état  $|\psi_t\rangle$  de la dynamique OAT est donnée par  $F_Q[|\psi_t\rangle] = 4\lambda_{\max}(\Gamma[|\psi_t\rangle, \hat{X}_L])$  où  $\lambda_{\max}(\Gamma[|\psi_t\rangle, \hat{X}_L])$  est la valeur propre maximale de la matrice covariance symétrique  $\Gamma[|\psi_t\rangle, \hat{X}_L]$  dont les éléments sont donnés par les équations (2.48)-(2.50). La diagonalisation de la matrice covariance nous permet d'obtenir l'information quantique de Fisher optimale pour un nombre d'atomes quelconque et pour tout instant  $t$  de la dynamique OAT

$$F_Q/N = 1 + \frac{N-1}{4} \left\{ 1 - \cos^{N-2}(2\chi t) + \sqrt{(1 - \cos^{N-2}(2\chi t))^2 + 16 \sin^2(\chi t) \cos^{2N-4}(\chi t)} \right\}. \quad (2.96)$$

Dans la limite  $N \rightarrow \infty$  et pour  $\chi t \leq 1/\sqrt{N}$ , la dernière équation s'écrit

$$(F_Q/N)_{N \rightarrow \infty} = \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-2N(\chi t)^2} \right) N. \quad (2.97)$$

En utilisant (2.97), nous obtenons la loi d'échelle de l'information quantique de Fisher  $F_Q/N$  à l'échelle de temps  $\chi t = \sigma N^{-\alpha}$  avec  $1 \geq \alpha \geq 1/2$

$$F_Q/N = \begin{cases} \sigma^2 N^{2-2\alpha}, & 1 \geq \alpha > 1/2 \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2\sigma^2})N + \mathcal{O}(N^0), & \alpha = 1/2 \end{cases}. \quad (2.98)$$

En comparant cette loi d'échelle avec celle du gain métrologique quantique obtenu par la technique MAI (2.90), nous constatons que la technique MAI atteint la loi d'échelle optimale du gain métrologique quantique sur l'ensemble de l'intervalle de temps  $1 \geq \alpha > 1/2$ .

Il est important de noter que les gains métrologiques  $\xi_L^{-2}$  (2.52),  $\xi_{NL}^{-2}$  (2.59), et  $\xi_Q^{-2}$  (2.68), que nous avons discutés précédemment, partagent une structure commune et peuvent être unifiés dans une formule pour décrire le gain métrologique dans la limite de grandes valeurs de  $N$  pour différentes stratégies de mesure. Pour des temps  $\chi t < 1/\sqrt{N}$ , cette expression unifiée s'écrit comme

$$\left(\xi^{-2}\right)_{N \rightarrow \infty} = \frac{F_Q/N}{1 + M}, \quad (2.99)$$

où

$$M_L = \frac{N^4(\chi t)^6}{6}; \quad (2.100)$$

$$M_{NL} = \frac{N^6(\chi t)^{10}}{270}; \quad (2.101)$$

$$M_Q = \frac{N^8(\chi t)^{14}}{875}, \quad (2.102)$$

pour une mesure linéaire, non linéaire et quadratique respectivement. Dans le cas de la technique MAI, le gain métrologique dans la limite de grands  $N$  est également décrit par l'équation (2.99) pour  $\chi t \leq 1/\sqrt{N}$ , mais avec

$$M_{MAI} = \frac{\sinh[N(\chi t)^2]}{N(\chi t)^2} - 1. \quad (2.103)$$

Ces expressions pour  $M$  ont pour objectif de quantifier la limitation du gain métrologique due à la restriction de la mesure à des ensembles d'observables particuliers. En d'autres termes, elles décrivent l'information qui ne peut pas être extraite de l'état lorsqu'une stratégie de mesure spécifique est utilisée.

## 2.7 Deux implémentations possibles de l'hamiltonien one-axis twisting : quelques expériences

Dans les sections précédentes, nous avons étudié en détail comment la dynamique one-axis twisting conduit théoriquement à la compression des observables de spin non linéaires, ce qui peut ensuite produire des gains métrologiques considérables dans les protocoles d'estimation quantique. En raison de son utilité métrologique, la dynamique OAT a été réalisé dans diverses platforms physiques, y compris les condensats de Bose-Einstein [16, 17], les cavités optiques [18, 19] et les ions piégés [76, 79]. Une implémentation efficace de cette dynamique exige une ingénierie précise et bien contrôlée des interactions entre les atomes.

Dans cette section, nous examinerons deux méthodes de réalisation de la dynamique OAT. La première consiste à exploiter les collisions entre atomes dans un condensat de Bose-Einstein. La seconde méthode repose sur l'utilisation d'interactions médiées électromagnétiquement entre un ensemble d'atomes dans une cavité optique. Nous discuterons également deux expériences pionnières [17, 18] dans lesquelles la compression d'une observable de spin a été observée, en mettant l'accent sur la possibilité de contrôler le paramètre  $\chi$  du modèle OAT.

### 2.7.1 Condensats de Bose-Einstein

Considérons un condensat de Bose-Einstein à deux composantes,  $\epsilon = a, b$  qui représentent par exemple deux états hyperfins, en interaction via un potentiel de contact. Ce système est décrit en seconde quantification par le hamiltonien

$$\begin{aligned} \hat{H} = \sum_{\epsilon=a,b} \int d\vec{r} \left[ \hat{\psi}_\epsilon^\dagger(\vec{r}) \hat{H}_0 \hat{\psi}_\epsilon(\vec{r}) + \frac{g_{\epsilon\epsilon}}{2} \hat{\psi}_\epsilon^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}_\epsilon^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}_\epsilon(\vec{r}) \hat{\psi}_\epsilon(\vec{r}) \right] \\ + g_{ab} \int d\vec{r} \hat{\psi}_a^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}_b^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}_b(\vec{r}) \hat{\psi}_a(\vec{r}), \end{aligned} \quad (2.104)$$

où  $\hat{\psi}_\epsilon(\vec{r})$  est l'opérateur de champ pour les atomes dans le mode  $\epsilon$ ,  $\hat{H}_0$  est le hamiltonien à une particule comprenant l'énergie cinétique et le potentiel externe de piégeage et  $g_{\epsilon\epsilon'} = 4\pi\hbar^2 a_{\epsilon\epsilon'}/m$  avec  $m$  la masse des atomes et  $a_{\epsilon\epsilon'}$  la longueur de diffusion de l'onde  $s$  qui décrit l'interaction à courte portée entre atomes froids. Nous supposons que tous les atomes de mode  $a$  ( $b$ ) sont, à tout moment, dans un seul mode externe  $\phi_a(\vec{r}, N_a, N_b)$  ( $\phi_b(\vec{r}, N_a, N_b)$ ) à particule unique, en négligeant toute excitation hors de ce mode. Ces modes externes sont les fonctions d'onde de l'état fondamental à particule unique, données comme solutions des équations de Gross-Pitaevskii

$$[\hat{H}_0 + g_{\epsilon\epsilon}(N_\epsilon - 1)|\phi_\epsilon(\vec{r}, N_a, N_b)|^2 + g_{\epsilon\epsilon'} N_{\epsilon'} |\phi_{\epsilon'}(\vec{r}, N_a, N_b)|^2] \phi_\epsilon(\vec{r}, N_a, N_b) = \mu_\epsilon \phi_\epsilon(\vec{r}, N_a, N_b), \quad (2.105)$$

où  $\mu_\epsilon$  est le potentiel chimique. Dans ce cas, l'opérateur champ dans le mode  $\epsilon$  s'écrit

$$\hat{\psi}_\epsilon(\vec{r}) = \hat{c}_\epsilon \phi_\epsilon(\vec{r}, \hat{N}_a, \hat{N}_b), \quad (2.106)$$

avec  $\hat{c}_\epsilon$  l'opérateur d'annihilation d'un atome dans le mode  $\epsilon$ . En substituant (2.106) dans (2.104) et en approximant  $\hat{N}_\epsilon - 1 \simeq \hat{N}_\epsilon$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \hat{H}(\hat{N}_a, \hat{N}_b) = \sum_{\epsilon=a,b} \hat{N}_\epsilon \left[ \int d\vec{r} \phi_\epsilon^*(\vec{r}, \hat{N}_a, \hat{N}_b) \hat{H}_0 \phi_\epsilon(\vec{r}, \hat{N}_a, \hat{N}_b) + \frac{g_{\epsilon\epsilon} \hat{N}_\epsilon}{2} \int d\vec{r} |\phi_\epsilon(\vec{r}, \hat{N}_a, \hat{N}_b)|^4 \right] \\ + g_{ab} \hat{N}_a \hat{N}_b \int d\vec{r} |\phi_a(\vec{r}, \hat{N}_a, \hat{N}_b)|^2 |\phi_b(\vec{r}, \hat{N}_a, \hat{N}_b)|^2. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Nous supposons que pendant l'intervalle de temps pertinent, les distributions du nombre d'atomes  $N_a$  et  $N_b$  restent nettement centrées autour de leurs valeurs moyennes initiales respectives  $\bar{N}_a$  et  $\bar{N}_b$ . Cela nous permet de développer le hamiltonien (2.107) jusqu'au second ordre autour des valeurs moyennes  $\bar{N}_a$  et  $\bar{N}_b$

$$\begin{aligned} \hat{H}(\hat{N}_a, \hat{N}_b) \simeq \hat{H}(\bar{N}_a, \bar{N}_b) + \sum_{\epsilon=a,b} (\hat{N}_\epsilon - \bar{N}_\epsilon) \mu_\epsilon(\bar{N}_a, \bar{N}_b) + \frac{1}{2} (\hat{N}_\epsilon - \bar{N}_\epsilon)^2 \partial_{N_\epsilon} \mu_\epsilon(N_a, N_b)|_{\bar{N}_a, \bar{N}_b} \\ + \frac{1}{2} (\hat{N}_a - \bar{N}_a) (\hat{N}_b - \bar{N}_b) (\partial_{N_b} \mu_a(N_a, N_b) + \partial_{N_a} \mu_b(N_a, N_b))_{\bar{N}_a, \bar{N}_b}. \end{aligned} \quad (2.108)$$

À partir de l'équation (2.105), le potentiel chimique peut être écrit comme

$$\mu_\epsilon(N_a, N_b) = \int d\vec{r} \phi_\epsilon^*(\vec{r}, N_a, N_b) \hat{H}_0 \phi_\epsilon(\vec{r}, N_a, N_b) + \sum_{\epsilon'} g_{\epsilon\epsilon'} N_{\epsilon'} \int d\vec{r} |\phi_{\epsilon'}(\vec{r}, N_a, N_b)|^2 |\phi_\epsilon(\vec{r}, N_a, N_b)|^2. \quad (2.109)$$

En utilisant la définition de la composante  $\hat{S}_z$  de spin donnée par (2.11) et le fait que le nombre total d'atomes est constant  $N_a + N_b = N$ , nous pouvons écrire  $\hat{N}_a = N/2 + \hat{S}_z$  et  $\hat{N}_b = N/2 - \hat{S}_z$ . En remplaçons dans (2.108), nous pouvons écrire le hamiltonien sous la forme quadratique

$$\hat{H} \simeq f_N + \hbar v_N \hat{S}_z + \hbar \chi \hat{S}_z^2. \quad (2.110)$$

La fonction  $f_N$  de nombre total d'atomes dans le hamiltonien (2.110) est une constante de mouvement et elle peut être ignorée. Le deuxième terme représente une précession de spin autour de l'axe  $\vec{e}_z$  avec une fréquence  $v_N$  qui peut être manipulée pour avoir  $v_N = 0$ . Enfin, nous obtenons le hamiltonien one-axis twisting  $\hat{H} = \hbar\chi\hat{S}_z^2$  avec [71]

$$\hbar\chi = \frac{1}{2} (\partial_{N_a}\mu_a(N_a, N_b) + \partial_{N_b}\mu_b(N_a, N_b) - \partial_{N_b}\mu_a(N_a, N_b) - \partial_{N_a}\mu_b(N_a, N_b))_{\bar{N}_a, \bar{N}_b}. \quad (2.111)$$

Dans ce schéma d'implémentation de la dynamique OAT, une méthode de contrôle du paramètre  $\chi$ , donné par l'équation (2.111), consiste à modifier le recouvrement entre les deux fonctions d'ondes  $\phi_a$  et  $\phi_b$  comme nous pouvons le constater par l'équation (2.109). Une autre possibilité pour manipuler le paramètre  $\chi$  est d'utiliser la résonance de Feshbach afin de contrôler la longueur de diffusion inter-espèces  $a_{ab}$  de l'onde  $s$ .

### Expérience de compression de spin dans CBE : Riedel et *al.*

Dans ce paragraphe, nous discutons brièvement l'expérience d'implémentation de la dynamique OAT menée par Riedel et *al.* où la compression d'une observable de spin linéaire a été observée dans un condensat de Bose-Einstein à deux composantes [17]. Dans cette expérience particulière, les degrés de liberté de spin étaient représentés par les deux états hyperfins internes  $|a\rangle \equiv |F = 1, m_F = -1\rangle$  et  $|b\rangle \equiv |F = 2, m_F = 1\rangle$  des atomes  $^{87}\text{Rb}$ . Cette expérience a été réalisée dans une puce à atomes. Un aspect remarquable de cette expérience est l'utilisation d'un potentiel micro-onde dépendant de l'état pour contrôler les interactions entre les atomes, et donc pour varier  $\chi$  dans le hamiltonien OAT, via le recouvrement des fonctions d'onde associées aux deux modes. Ceci est dû à la dépendance du potentiel chimique  $\mu_\epsilon$  vis-à-vis du recouvrement des fonctions d'ondes  $\phi_a$  et  $\phi_b$  comme nous pouvons le voir dans (2.109). Pour les états choisis, les trois longueurs de diffusion en onde  $s$  sont telles que  $\chi \approx 0$  lorsque les deux fonctions d'onde se chevauchent complètement. Le schéma de l'expérience est le suivant : Une impulsion laser  $\pi/2$  est initialement utilisée pour préparer les atomes dans une superposition de  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$ . Le potentiel micro-onde est ensuite appliqué pour diminuer le recouvrement de  $\phi_a$  et  $\phi_b$  et d'augmenter  $\chi$  qui possède une valeur initiale approximativement nulle. Les interactions sont ensuite arrêtés à un instant  $t$  de la dynamique, qui peut être choisi égale au temps de compression linéaire optimal de la dynamique OAT, en diminuant de nouveau  $\chi$ . Les résultats de cette expérience sont représentés dans la figure 2.6. La mesure de l'observable  $\hat{S}_\theta = \cos\theta\hat{S}_y + \sin\theta\hat{S}_z$ , via la rotation de l'état autour de l'axe  $\vec{e}_x$  de l'angle  $\theta$  et la mesure de la différence de population  $S_z = (N_a - N_b)/2$  par imagerie d'absorption, montre bien (voir figure 2.6-(a)) une réduction de l'incertitude  $(\Delta\hat{S}_\theta)^2$  en dessous de l'incertitude associée à l'état cohérent de spin pour une valeur donnée de  $\theta$ . Une tomographie complète de l'état montre la génération d'un état comprimé de spin comme nous pouvons le voir dans la figure 2.6-(b). La mesure du gain métrologique a donnée  $\xi^2 = -2.5 \pm 0.6$  dB indiquant l'utilité de l'état généré dans un protocole d'estimation quantique.

#### 2.7.2 Cavité

Nous considérons ici un système comprenant  $N$  atomes identiques à trois niveaux. La différence d'énergie entre les états fondamentaux  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  de ces atomes, qui constituent le système de spin qui nous intéresse, est  $\hbar\omega_{\text{at}}$ . Nous supposons que ces atomes sont couplés à un mode de cavité optique qui possède une fréquence de résonance  $\omega_c$  qui est largement désaccordée, avec un désaccord  $\pm\Delta = \pm\omega_{\text{at}}/2$  par rapport à l'état excité  $|e\rangle$ . Le schéma de ce système est illustré dans la figure 2.7. Le hamiltonien de ce système total (l'ensemble de  $N$  atomes et la cavité optique) s'écrit

$$\hat{H} = \hat{H}_c + \hat{H}_{\text{at}} + \hat{H}_{\text{ac}}, \quad (2.112)$$



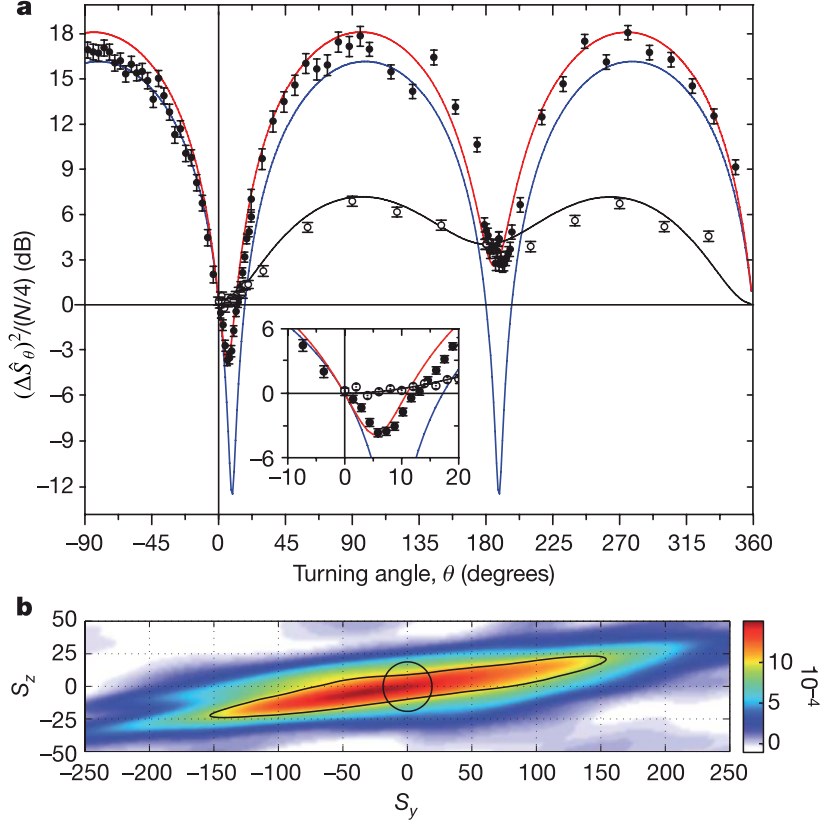


FIGURE 2.6 – Résultats de l'expérience de compression de spin dans CBE. (a) : variance de l'observable de spin  $\hat{S}_\theta$  en fonction de  $\theta$  pour l'état comprimé de spin (cercles pleins) et pour l'état cohérent de spin (cercles ouverts). Les lignes continues représentent les résultats d'une simulation numérique pour l'état comprimé de spin, avec bruit technique et perte de particules (rouge) et avec perte de particules mais sans bruit technique (bleu), et pour l'état cohérent de spin avec bruit technique et perte de particules. (b) : tomographie complète de l'état généré. Cette figure est extraite de la référence [17] et adaptée aux notations de ce travail.

où  $\hat{H}_c$  décrit la cavité optique avec  $\hat{c}$  et  $\hat{c}^\dagger$  respectivement l'opérateur d'annihilation et de création d'un photon dans la cavité

$$\hat{H}_c = \hbar\omega_c \hat{c}^\dagger \hat{c}. \quad (2.113)$$

Le hamiltonien  $\hat{H}_{\text{at}}$  décrit le système de  $N$  atomes et il s'écrit en première quantification comme

$$\hat{H}_{\text{at}} = \hbar \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\omega_{\text{at}}}{2} (|b\rangle_i \langle b| - |a\rangle_i \langle a|) + \omega_c |e\rangle_i \langle e| \right]. \quad (2.114)$$

Les interactions entre les atomes et la cavité optique sont décrites par le hamiltonien

$$\hat{H}_{\text{ac}} = \hbar g \sum_{i=1}^N \left( \hat{c} (|e\rangle_i \langle b| + |e\rangle_i \langle a|) + (|b\rangle_i \langle e| + |a\rangle_i \langle e|) \hat{c}^\dagger \right), \quad (2.115)$$

où,  $g$  est la constante de couplage entre les atomes et le mode de la cavité. Pour une très faible population de la cavité  $\langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle \ll (\Delta/g)^2$ , l'état excité peut être adiabatiquement éliminé [19]. Cela conduit à un hamiltonien effectif qui décrit le spin (les deux états fondamentaux) en interaction

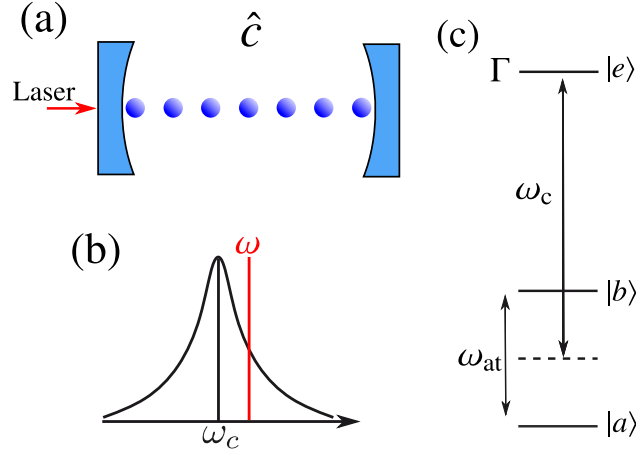


FIGURE 2.7 – Schéma pour implementation de la dynamique one-axis twisting via l'interaction atomes-cavité. (a) Un ensemble d'atomes dans une cavité optique de fréquence de résonance  $\omega_c$  pilotée par un laser de fréquence  $\omega$ . (b) Profil de raie de la cavité illustrant le désaccord par rapport au laser. (c) Les niveaux d'énergie des atomes montrant le désaccord avec la cavité.

avec la cavité

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hbar\omega_c \hat{c}^\dagger \hat{c} + \hbar\omega_{\text{at}} \hat{S}_z + \hbar\Omega \hat{c}^\dagger \hat{c} \hat{S}_z, \quad (2.116)$$

où  $\hat{S}_z = \sum_{i=1}^N (|b\rangle_i \langle b| - |a\rangle_i \langle a|) / 2$  est la composante  $z$  de spin collectif et  $\Omega = 2g^2/|\Delta|$ . Du point de vue des atomes, les interactions avec le mode de cavité conduisent à un décalage de fréquence proportionnel au nombre de photons dans la cavité où la dynamique des atomes peut être décrite avec le hamiltonien

$$\hat{H}_{\text{atomes}} = \hbar(\omega_{\text{at}} + \Omega \hat{c}^\dagger \hat{c}) \hat{S}_z. \quad (2.117)$$

Du point de vue de la cavité, les interactions avec les atomes induisent un désaccord, qui dépend de  $\hat{S}_z$ , de la fréquence de résonance de la cavité, qui devient  $\omega_c + \Omega \hat{S}_z$ . Par conséquent, le pilotage de la cavité par un laser de fréquence  $\omega = \omega_c + \delta_c$  conduit à un nombre de photons dans la cavité  $\hat{c}^\dagger \hat{c} \propto \hat{S}_z$  dans certaines conditions spécifiques (voir la figure 2.7-(b)). En remplaçant dans (2.117), nous obtenons un terme en  $\hat{S}_z^2$  qui donne le hamiltonien one-axis twisting. Une caractéristique importante de ce schéma de génération de la dynamique OAT est que le signe de  $\chi$  est donné par le signe du désaccord  $\delta_c$ . En changeant le signe de  $\delta_c$ , nous pouvons renverser la dynamique OAT et donc réaliser la technique MAI [62].

### Compression de spin dans une cavité optique : Leroux et *al.*

Dans ce paragraphe, nous examinons l'expérience menée par Leroux et *al.* dans laquelle ils ont utilisé des interactions médiées par une cavité optique pour implanter la dynamique OAT et observer un gain métrologique quantique significatif [18]. Cette expérience repose sur le schéma de génération de la dynamique one-axis twisting expliqué dans 2.7.2. Un ensemble de  $N = 5 \times 10^4$  atomes de  $^{87}\text{Rb}$  a été confinée à l'intérieur d'une cavité optique. Les états fondamentaux utilisés dans cette expérience sont  $|a\rangle \equiv |F = 1, m_F = 0\rangle$  et  $|b\rangle \equiv |F = 2, m_F = 0\rangle$ . Au cours de cette expérience, des états comprimés de spin ont été générés, où la variance d'une observable linéaire de spin a été réduite, tandis que la variance d'une autre observable linéaire a augmenté, comme illustré dans la figure 2.8. Cela a conduit à un gain métrologique significatif qui atteint une valeur maximale de  $\xi^{-2} = 5.6 \pm 0.6$  dB.

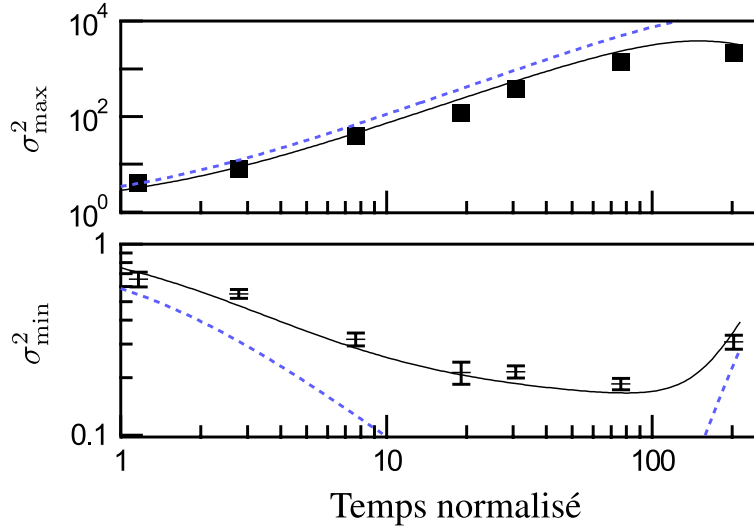


FIGURE 2.8 – Résultats de l'expérience de génération de dynamique OAT via une cavité optique. (bas) :  $\sigma_{\min}^2$  variance normalisée de la meilleur observable linéaire comprimée de spin. (haut) :  $\sigma_{\max}^2$  variance normalisée de l'observable linéaire anti-comprimée en fonction du temps de la dynamique OAT. Les courbes bleues en pointillés sont des prédictions théoriques pour un système idéal sans aucun bruit, tandis que les lignes noires sont des prédictions incluant des imperfections techniques. Cette figure est extraite de la référence [18] et adaptée aux notations de ce travail.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons commencé par une présentation détaillée de la théorie de l'estimation quantique d'un paramètre dans le contexte d'un système composé de  $N$  atomes identiques à deux niveaux, ou, de manière équivalente, d'un système de spin collectif. Nous avons également rappelé la méthode permettant d'optimiser analytiquement le gain métrologique quantique pour un état donné de spin et pour un ensemble donné d'observables de mesure accessibles. Ceci a fourni des méthodes explicites pour effectuer des calculs analytiques spécifiques à un système de spin collectif, faisant ainsi de ce chapitre un outil pédagogique pour de telles types de calculs.

En utilisant ces outils, nous avons dérivé de manière analytique le gain métrologique quantique maximal, ainsi que la loi d'échelle correspondante, dans la limite des grands nombres d'atomes  $N$ , offert par la compression d'observables de spin linéaire et non linéaires au cours d'une évolution one-axis twisting pour toute une classe d'états comprimés et sur-comprimés de spin correspondant à l'échelle de temps  $1/N < \chi t \leq 1/\sqrt{N}$ . En fonction de la stratégie de mesure choisie, nous avons également identifié les directions de rotation optimales, les observables de mesure optimales et les meilleurs temps de préparation.

Pour la mesure effective d'une observable de spin non linéaire, nous avons examiné la technique de mesure après interaction, qui consiste à introduire une deuxième évolution non linéaire avant la mesure directe d'une observable de spin linéaire. Cette approche a donné lieu à une loi d'échelle générale pour le gain métrologique, établissant une continuité entre les différentes stratégies de mesure basées sur des observables de spin linéaires et de second ordre.

Enfin, nous avons expliqué comment implémenter le hamiltonien one-axis twisting par deux manières distinctes. Tout d'abord, nous avons examiné un cas d'implémentation où cet hamiltonien est généré par les collisions entre les atomes dans un condensat de Bose-Einstein. Dans ce contexte, nous avons brièvement discuté la réalisation expérimentale de ce schéma menée par Riedel et *al.* Ensuite, nous avons présenté un autre exemple de génération de la dynamique OAT par des interactions entre les atomes et le mode d'une cavité optique. La réalisation expérimentale de ce

schéma qui à été menée par Leroux et *al.* est brièvement discuté.

Dans les deux expériences d'implémentation de la dynamique OAT discutées à la fin de ce chapitre, les résultats obtenus diffèrent des prédictions du modèle idéal de la dynamique one-axis twisting examiné dans ce chapitre. En ce qui concerne les condensats de Bose-Einstein, ce désaccord peut être expliquée par la présence de processus de perte de particules ainsi que d'autres sources de bruit technique. Dans le contexte de la cavité optique, les pertes de photons au sein de la cavité et le bruit photonique (photon shot noise) sont à l'origine de cette différence par rapport au scénario idéal. Dans les implémentations expérimentales de l'hamiltonien OAT, la décohérence joue donc un rôle essentiel et modifie considérablement le gain métrologique réalisable ainsi que la loi d'échelle correspondante. Afin de prendre en compte l'effet de la décohérence, le chapitre suivant se consacrera en détail sur l'étude de quelques modèles de décohérence permettant de prédire le gain métrologique réalisable dans des scénarios réalistes d'implémentation de l'hamiltonien one-axis twisting.



# Apendices

## 2.A Matrice des commutateurs et matrice covariance pour une mesure quadratique

Nous donnons ici les éléments non nuls de la matrice des commutateurs  $C$  de taille  $2 \times 4$  définie comme (2.31) et obtenue après avoir restreint la direction de rotation  $\vec{n}$  au plan  $yz$ , ainsi que les éléments de la matrice covariance symétrique  $\Gamma$  de taille  $4 \times 4$  donnée par (2.32) pour la famille d'observables accessibles  $\hat{X}_Q = (\hat{S}_y, \hat{S}_z, \frac{1}{2}\{\hat{S}_x, \hat{S}_z\}, \frac{1}{2}\{\hat{S}_x, \hat{S}_y\})^T$  qui correspond à la mesure de l'observable quadratique (2.67). Les résultats pour la famille  $\hat{X}_{NL}$ , qui correspond à la mesure de l'observable non linéaire (2.58), sont obtenus en se concentrant uniquement sur la sous-matrice

$2 \times 3$  de  $C$  et la sous-matrice  $3 \times 3$  de  $\Gamma$ .

$$\begin{aligned}
C_{12} &= \frac{N}{2} \cos^{N-1}(\chi t), \\
C_{13} &= \frac{N(N-1)}{8} (\cos^{N-2}(2\chi t) + 1), \\
C_{23} &= \frac{N(N-1)}{4} \sin(\chi t) \cos^{N-2}(\chi t), \\
C_{14} &= -\frac{N(N-1)}{4} \sin(\chi t) \cos^{N-2}(\chi t), \\
C_{24} &= -\frac{N(N-1)}{4} \cos^{N-2}(\chi t), \\
\Gamma_{11} &= \frac{N(N+1)}{8} - \frac{N(N-1)}{8} \cos^{N-2}(2\chi t), \\
\Gamma_{12} &= \frac{N(N-1)}{4} \sin(\chi t) \cos^{N-2}(\chi t), \\
\Gamma_{13} &= \frac{N(N-1)(N-2)}{16} \sin(2\chi t) \cos^{N-3}(2\chi t), \\
\Gamma_{14} &= \frac{N(N-1)}{8} \cos^{N-1}(\chi t) - \frac{N(N-1)(N-2)}{32} (\cos^{N-3}(3\chi t) - \cos^{N-3}(\chi t)), \\
\Gamma_{22} &= \frac{N}{4}, \\
\Gamma_{23} &= \frac{N(N-1)}{8} \cos^{N-1}(\chi t) - \frac{N(N-1)(N-2)}{8} \sin^2(2\chi t) \cos^{N-3}(\chi t), \\
\Gamma_{24} &= \frac{N(N-1)(N-2)}{16} \sin(2\chi t) \cos^{N-3}(2\chi t), \\
\Gamma_{33} &= \frac{N(N-1)(N-2)}{32} (\cos^{N-2}(2\chi t) + 1) - \frac{N(N-1)}{32} (\cos^{N-2}(2\chi t) - 3) \\
&\quad - \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{32} \sin^2(2\chi t) \cos^{N-4}(2\chi t), \\
\Gamma_{34} &= \frac{N(N-1)(N-2)}{16} \sin(\chi t) \cos^{N-2}(\chi t) - \frac{N(N-1)}{16} \sin(\chi t) \cos^{N-2}(\chi t) \\
&\quad + \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{64} (\sin(\chi t) \cos^{N-4}(\chi t) + \sin(3\chi t) \cos^{N-4}(3\chi t)), \\
\Gamma_{44} &= -\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{128} \cos^{N-4}(4\chi t) - \frac{1}{64} N(N-1) + \frac{1}{128} (N-1)(N+3)N^2.
\end{aligned}$$

## 2.B Matrice des commutateurs et matrice covariance pour la technique MAI

Nous présentons ici les éléments de la matrice des commutateurs  $C$ , de taille  $2 \times 2$ , non nuls et ceux de la matrice covariance symétrique  $\Gamma$  de taille  $2 \times 2$  pour la technique de mesure après

interaction correspondant à la famille d'observables  $\hat{X}_{\text{MAI}} = (\hat{U}_\tau^\dagger \hat{S}_y \hat{U}_\tau, \hat{U}_\tau^\dagger \hat{S}_z \hat{U}_\tau)^T$ .

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{N(N-1)}{4} \sin(\chi\tau) \left[ \cos^{N-2}(\chi(\tau+2t)) + \cos^{N-2}(\chi\tau) \right], \\
 C_{12} &= \frac{N}{2} \cos^{N-1}(\chi t), \\
 C_{21} &= -\frac{N}{2} \cos^{N-1}(\chi(t+\tau)), \\
 \Gamma_{11} &= \frac{N(N+1)}{8} - \frac{N(N-1)}{8} \cos^{N-2}(2\chi(t+\tau)), \\
 \Gamma_{12} &= \frac{N(N-1)}{4} \cos^{N-2}(2\chi(t+\tau)) \sin(\chi(t+\tau)), \\
 \Gamma_{22} &= \frac{N}{4}.
 \end{aligned}$$





# Effet des processus de décohérence

## Introduction

Dans les expériences réelles, où les systèmes physiques ne sont pas parfaitement isolés de leur environnement et peuvent avoir d'autres degrés de liberté couplés aux degrés de liberté de spin, les processus de décohérence entrent en jeu de manière à affecter l'évolution de la dynamique one-axis twisting, ce qui limite en fin de compte l'amélioration métrologique quantique. D'une part, comme expliqué dans le chapitre précédent, une possibilité d'implémenter la dynamique OAT est d'exploiter les interactions entre la lumière et un ensemble d'atomes confinés dans une cavité optique. Dans les scénarios pratiques, cette approche s'accompagne souvent de la perte de photons dans la cavité, qui apparaît comme la source dominante de décohérence dans ce système [18]. Ce processus de bruit se manifeste sous la forme d'un déphasage collectif, qui est de nature diffusif [80, 81]. D'autre part, lorsque l'on considère les réalisations de la dynamique OAT basées sur les collisions entre atomes dans les condensats de Bose-Einstein, comme détaillé dans le chapitre précédent, les limitations fondamentales proviennent des pertes de particules et des effets de la température finie [24, 82]. L'effet de ces mécanismes de décohérence sur la compression de spin peut être capturé de façon efficace en utilisant un modèle de déphasage collectif, conduisant à un comportement balistique dans les fluctuations de spin [24]. En outre, dans le contexte des implémentations impliquant des ions piégés, le déphasage collectif balistique se produit en raison des fluctuations aléatoires du champ magnétique [79, 83, 84].

Dans ce chapitre, nous commençons par revoir certains concepts fondamentaux de la théorie générale des systèmes quantiques ouverts et nous introduisons le formalisme des fonctions d'onde Monte-Carlo (FOMC). Nous nous concentrons ensuite sur l'effet des fluctuations balistiques et diffusives sur les observables collectives de spin, en explorant comment elles limitent les gains métrologiques quantiques et en calculant explicitement les nouvelles lois d'échelle correspondantes à la limite de grands nombre d'atomes. Enfin, en utilisant un modèle microscopique détaillé, nous montrons que, tout comme pour les observables linéaires [24], les pertes de particules affectant la compression des observables non linéaires et quadratiques de spin peuvent être décrites à l'aide du modèle de déphasage balistique.

### 3.1 Description théorique : équation pilote, fonction d'onde Monte Carlo

L'évolution d'un état pur  $|\psi(t)\rangle$  décrivant un système quantique isolé caractérisé par le hamiltonien  $\hat{H}$  est régie par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (3.1)$$

Cependant, dans les situations réelles, les systèmes quantiques sont souvent décrits par un état mélange statistique. Un tel état est essentiellement une combinaison statistique d'états purs différents  $|\psi_j\rangle$ , chacun ayant une probabilité  $p_j$  associée, représenté par l'opérateur densité  $\hat{\rho}$  défini comme

$$\hat{\rho} = \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|. \quad (3.2)$$

Maintenant, dérivons l'équation qui régit l'évolution temporelle de cet opérateur densité  $\hat{\rho}$  pour un système isolé à partir de l'équation de Schrödinger. Nous commençons par prendre la dérivée de  $\hat{\rho}$  par rapport au temps

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = \sum_j p_j \frac{\partial}{\partial t} (|\psi_j\rangle \langle \psi_j|). \quad (3.3)$$

Notez que dans un système isolé, chaque état  $|\psi\rangle$  évolue selon (3.1) et les probabilités  $p_j$  restent égales à leurs valeurs initiales. Cette dernière équation peut être réécrite comme

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = \sum_j p_j \left[ \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_j\rangle \right) \langle \psi_j| + |\psi_j\rangle \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_j| \right) \right]. \quad (3.4)$$

En substituant l'équation de Schrödinger (3.1) et sa conjuguée dans l'équation ci-dessus, nous obtenons

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}]. \quad (3.5)$$

Cette équation est appelée équation de von Neumann ou équation de Liouville-von Neumann, elle caractérise l'évolution de l'opérateur densité d'un système quantique isolé sous l'effet de son hamiltonien  $\hat{H}$ .

Lorsqu'un système quantique interagit avec son environnement, il devient un système ouvert. Dans ce contexte, le système combiné total, comprenant le système ouvert d'intérêt et son environnement, est considéré comme isolé, et l'évolution de son opérateur densité est décrite par l'équation de von Neumann (3.5)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_{\text{tot}} = [\hat{H}_{\text{tot}}, \hat{\rho}_{\text{tot}}]. \quad (3.6)$$

Le hamiltonien total

$$\hat{H}_{\text{tot}} = \hat{H} + \hat{H}_{\text{env}} + \hat{H}_{\text{int}} \quad (3.7)$$

comprend le hamiltonien du système ouvert  $\hat{H}$ , le hamiltonien de l'environnement  $\hat{H}_{\text{env}}$ , et le hamiltonien décrivant leur interaction  $\hat{H}_{\text{int}}$ . L'opérateur densité du système ouvert  $\hat{\rho}$  peut être obtenu à tout instant  $t$  à partir de la matrice densité  $\hat{\rho}_{\text{tot}}$  du système total combiné en effectuant une trace partielle sur les degrés de liberté de l'environnement  $\hat{\rho} = \text{tr}_{\text{env}} \hat{\rho}_{\text{tot}}$ . Par conséquent,

l'évolution temporelle de l'opérateur densité du système ouvert est régie, dans le cas général, par l'équation pilote [85]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = \text{tr}_{\text{env}}[\hat{H}_{\text{tot}}, \hat{\rho}_{\text{tot}}]. \quad (3.8)$$

Cependant, dans de nombreuses situations, les interactions entre le système ouvert et son environnement sont faibles. Dans ces situations, l'évolution du système ouvert, caractérisé par le hamiltonien  $\hat{H}$ , peut être bien capturée par l'équation pilote de Lindblad [85]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}] + \sum_n \left[ \hat{C}_n \hat{\rho} \hat{C}_n^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{\rho}, \hat{C}_n^\dagger \hat{C}_n \} \right]. \quad (3.9)$$

Dans cette dernière équation, les opérateurs sauts sont notés  $\hat{C}_n = \sqrt{\gamma_n} \hat{L}_n$ , où  $\hat{L}_n$  représente les opérateurs de Lindblad responsables du couplage de système avec l'environnement, et  $\gamma_n$  correspond aux taux associés. L'équation pilote de Lindblad est une généralisation de l'équation de von Neumann (3.5) aux systèmes ouverts faiblement couplés à leur environnement. Elle nous permet de prendre en compte l'effet des processus de décohérence qui résultent de l'interaction du système avec son environnement. En résolvant cette équation, il est possible de calculer la valeur moyenne de n'importe quel opérateur  $\hat{A}$  à n'importe quel instant  $t$  de l'évolution du système par

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \text{tr}[\hat{A} \hat{\rho}(t)]. \quad (3.10)$$

L'évolution temporelle d'un système ouvert régie par l'équation pilote de Lindblad (3.9) peut être décrite de manière complètement équivalente en termes de formalisme de fonction d'onde Monte-Carlo (FOMC) proposé dans la référence [86]. Le formalisme de la fonction d'onde Monte Carlo est particulièrement utile dans le contexte des systèmes quantiques complexes et de haute dimension. Dans de telles situations, où l'espace de Hilbert a une dimension considérable ( $d \gg 1$ ), les méthodes numériques directes pour résoudre l'équation pilote de Lindblad (3.9) deviennent pratiquement inapplicables. En effet, la représentation matricielle de l'opérateur densité  $\hat{\rho}$  nécessite la connaissance de  $d^2$  éléments, ce qui peut rapidement devenir impossible. Cependant, l'approche FOMC évite efficacement ce problème en se concentrant sur les trajectoires de la fonction d'onde, pour lesquelles seule la connaissance de  $d$  éléments est nécessaire. Dans cette approche, le système ouvert est décrit par une fonction d'onde  $|\psi(t)\rangle$  dont l'évolution est générée par le hamiltonien effectif non-hermitien

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H} - \frac{i\hbar}{2} \sum_n \hat{C}_n^\dagger \hat{C}_n, \quad (3.11)$$

dans des intervalles de temps de durée  $\tau_j$  séparés par des sauts quantiques aléatoires, décrits par les opérateurs de saut  $\hat{C}_n$  aux instants  $t_j$ . Supposons une réalisation particulière Monte-Carlo, que nous noterons  $l$ , où un nombre spécifique de sauts quantiques (par exemple,  $k$ ) a eu lieu. Chaque saut est caractérisé par un opérateur de saut  $\hat{C}_{n_i}$  qui agit à un instant  $t_i$  avec  $i = 1, \dots, k$ . Dans cette réalisation particulière, l'état du système à un moment donné  $t$  est calculé, en partant de l'état initial  $|\psi(0)\rangle$  et en prenant en compte tous les sauts ainsi que l'évolution sous l'hamiltonien effectif, comme

$$|\psi^{(l)}(t)\rangle = \mathcal{N} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{\text{eff}}(t-t_k)} \hat{C}_{n_k} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{\text{eff}}(t_k-t_{k-1})} \dots \hat{C}_{n_1} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{\text{eff}} t_1} |\psi(0)\rangle, \quad (3.12)$$

avec  $\mathcal{N}$  une constante de normalisation. La valeur moyenne de tout opérateur  $\hat{A}$ , donnée en termes d'opérateur densité par (3.10), peut être calculée dans le formalisme de la fonction d'onde Monte-Carlo en calculant la moyenne

$$\langle \hat{A} \rangle_l(t) = \langle \psi^{(l)}(t) | \hat{A} | \psi^{(l)}(t) \rangle, \quad (3.13)$$

pour une seule réalisation Monte-Carlo, puis en moyennant sur l'ensemble des réalisations Monte-Carlo  $l$  possibles.

## 3.2 Déphasage collectif diffusif

Dans cette section, nous allons étudier l'effet de déphasage collectif diffusif sur la dynamique OAT et le gain métrologique résultant. Ces fluctuations de phase peuvent être bien décrites par l'équation pilote de Lindblad [85, 87]

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho} = [\hat{H}_{\text{OAT}}, \hat{\rho}] + \gamma_C\mathcal{L}[\hat{\rho}], \quad (3.14)$$

où  $\hat{\rho}$  est l'opérateur densité du système,  $\gamma_C$  est le taux de déphasage collectif,  $\hat{H}_{\text{OAT}} = \hbar\chi\hat{S}_z^2$  est le hamiltonien OAT sans bruit. L'opérateur saut de Lindblad est choisi ici pour être l'observable  $\hat{L} = \hat{S}_z$ , ce qui nous donne selon l'équation (3.9)

$$\mathcal{L}[\hat{\rho}] = \hat{S}_z\hat{\rho}\hat{S}_z - \frac{1}{2}\{\hat{\rho}, \hat{S}_z^2\}. \quad (3.15)$$

En partant de l'état cohérent de spin  $\hat{\rho}_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$  avec  $|\psi_0\rangle$  donné par l'équation (2.27) du chapitre précédent où le spin collectif est le long de  $x$ , la matrice densité du système à un instant ultérieur  $t$  peut être formellement exprimée comme

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}_t e^{\varepsilon\chi t\mathcal{L}}[\hat{\rho}_0]\hat{U}_t^\dagger, \quad (3.16)$$

avec  $\varepsilon = \gamma_C/\chi$  et  $\hat{U}_t = e^{-i\hat{H}_{\text{OAT}}t/\hbar}$ . En utilisant le fait que  $[\hat{H}_{\text{OAT}}, \hat{L}] = 0$ , nous pouvons réécrire la dernière équation comme

$$\hat{\rho}(t) = e^{\varepsilon\chi t\mathcal{L}}[\hat{U}_t\hat{\rho}_0\hat{U}_t^\dagger]. \quad (3.17)$$

La valeur moyenne d'un opérateur  $\hat{A}$  quelconque à un instant  $t$ , définie par (3.10), s'écrit donc

$$\langle\hat{A}\rangle(t) = \text{tr}[\hat{A}e^{\varepsilon\chi t\mathcal{L}}[\hat{U}_t\hat{\rho}_0\hat{U}_t^\dagger]]. \quad (3.18)$$

Introduisant l'adjoint  $\mathcal{L}^\dagger$  défini par

$$\text{tr}[\hat{A}\mathcal{L}[\hat{B}]] = \text{tr}[\mathcal{L}^\dagger[\hat{A}]\hat{B}] \quad (3.19)$$

et en utilisant la définition (3.15), nous pouvons montrer que  $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$ . Dans ce cas, la valeur moyenne (3.18) se réécrit comme

$$\langle\hat{A}\rangle(t) = \text{tr}[e^{\varepsilon\chi t\mathcal{L}}[\hat{A}]\hat{U}_t\hat{\rho}_0\hat{U}_t^\dagger]. \quad (3.20)$$

À partir de cette expression, il devient évident que la valeur moyenne de tout opérateur  $\hat{A}$  à l'instant  $t$  peut être déduite de la moyenne sans bruit de l'opérateur transformé  $e^{\varepsilon\chi t\mathcal{L}}[\hat{A}]$ . C'est à dire

$$\langle\hat{A}\rangle(t) = \langle\psi_t|e^{\varepsilon\chi t\mathcal{L}}[\hat{A}]|\psi_t\rangle, \quad (3.21)$$

avec  $|\psi_t\rangle = \hat{U}_t|\psi_0\rangle$ . En pratique, l'opérateur  $e^{\varepsilon\chi t\mathcal{L}}[\hat{A}]$  est défini comme la solution de l'équation différentielle d'opérateur  $\partial\hat{A}/\partial t = \gamma_C\mathcal{L}[\hat{A}]$ .

### 3.2.1 Lois d'échelle du gain métrologique associé à la compression des observables linéaires, non linéaires et quadratiques de spin

L'objectif de ce paragraphe est d'examiner l'effet du déphasage diffusif sur la compression des observables de spin linéaires, non linéaires et quadratiques et les gains métrologiques correspondants. Pour ce faire, nous utilisons l'équation (3.21) pour effectuer un calcul analytique afin d'obtenir la

matrice des commutateurs  $C$  et la matrice covariance  $\Gamma$  dont les éléments sont exprimés dans ce cas comme

$$C_{kl} = -i\langle\psi_t|e^{\varepsilon\chi t\mathcal{L}C} [\hat{S}_k, \hat{X}_l] |\psi_t\rangle, \quad (3.22)$$

$$\Gamma_{kl} = \frac{1}{2}\langle\psi_t|e^{\varepsilon\chi t\mathcal{L}C} [\hat{X}_k, \hat{X}_l] |\psi_t\rangle - \langle\psi_t|e^{\varepsilon\chi t\mathcal{L}C} [\hat{X}_k] |\psi_t\rangle\langle\psi_t|e^{\varepsilon\chi t\mathcal{L}C} [\hat{X}_l] |\psi_t\rangle, \quad (3.23)$$

à n'importe quel instant  $t$  pour un nombre  $N$  quelconque d'atomes. En calculant la matrice des moments  $M$  correspondante (voir équation (2.35)), nous pouvons ensuite déterminer les limites imposées par le déphasage diffusif sur les gains métrologiques optimaux. Maintenant, examinons comment la compression d'une observable linéaire est affectée et quel est le gain métrologique qui en résulte. Pour ce faire, nous allons commencer par effectuer le calcul explicite de la transformation  $e^{\varepsilon\chi t\mathcal{L}}$  appliquée aux observables de spin. En utilisant l'équation (3.15), nous pouvons directement écrire  $e^{\varepsilon\chi t\mathcal{L}}[\hat{S}_z^n] = \hat{S}_z^n$  pour tout entier  $n$ . De plus, en utilisant les relations de commutation des observables de spin données dans le chapitre précédent par (2.12), nous pouvons montrer que  $\mathcal{L}[\hat{S}_x] = -(\gamma_C/2)\hat{S}_x$ . Cela nous donne

$$e^{\varepsilon\chi t\mathcal{L}}[\hat{S}_x] = e^{-\frac{\varepsilon}{2}\chi t}\hat{S}_x. \quad (3.24)$$

De la même manière nous obtenons

$$e^{\varepsilon\chi t\mathcal{L}}[\{\hat{S}_y, \hat{S}_z\}] = e^{-\frac{\varepsilon}{2}\chi t}\{\hat{S}_y, \hat{S}_z\}, \quad (3.25)$$

$$e^{\varepsilon\chi t\mathcal{L}}[(\hat{S}_x \pm i\hat{S}_y)] = e^{-2\varepsilon\chi t}(\hat{S}_x \pm i\hat{S}_y). \quad (3.26)$$

En utilisant ces dernières équations, ainsi que l'expression (3.21) et les éléments sans bruit (2.47)-(2.50), nous pouvons calculer les matrices des commutateurs  $C$  et covariance  $\Gamma$  associées au cas linéaire pour  $\varepsilon \neq 0$ . Ces calculs sont détaillés dans l'appendice 3.A de ce chapitre. Cela nous donne ensuite le gain métrologique atteint par la compression d'une observable linéaire de spin en présence de déphasage diffusif en fonction de  $N$ , de  $\chi t$  et de  $\varepsilon$

$$\xi_{L,\text{dif}}^{-2} = 4e^{-\varepsilon\chi t} \cos^{2N-2}(\chi t) \left( 4 + (N-1) \left\{ 1 - e^{-2\varepsilon\chi t} \cos^{N-2}(2\chi t) - \sqrt{(1 - e^{-2\varepsilon\chi t} \cos^{N-2}(2\chi t))^2 + 16e^{-\varepsilon\chi t} \sin^2(\chi t) \cos^{2N-4}(\chi t)} \right\} \right)^{-1}. \quad (3.27)$$

En prenant la limite  $N \rightarrow \infty$  dans (3.27), nous obtenons pour  $\chi t < 1/\sqrt{N}$

$$\left( \xi_{L,\text{dif}}^{-2} \right)_{N \rightarrow \infty} = \frac{N^2(\chi t)^2}{1 + M_L + \varepsilon N \chi t}, \quad (3.28)$$

où  $M_L$  est donnée par (2.100). De même, nous calculons analytiquement la matrice des commutateurs et la matrice covariance pour les ensembles d'observables non linéaires  $\hat{X}_{NL}$  et quadratiques  $\hat{X}_Q$  de spin, tels que définis dans le chapitre précédent (voir l'appendice 3.A de ce chapitre) et nous déduisons le gain métrologique optimal correspondant en présence de déphasage diffusif. En prenant la limite  $N \rightarrow \infty$  et  $\chi t < 1/\sqrt{N}$ , nous avons

$$\left( \xi_{\text{dif}}^{-2} \right)_{N \rightarrow \infty} = \frac{N^2(\chi t)^2}{1 + M + \varepsilon N \chi t}, \quad (3.29)$$

avec l'expression appropriée de  $M$ , qui est donnée par (2.101) pour une observable non linéaire de spin et par (2.102) pour une observable quadratique. Notez que le gain métrologique pour le cas linéaire (3.28) possède la même forme que (3.29). Pour maximiser le gain quantique par rapport

à  $\chi t$  dans la limite des grands  $N$  à  $\varepsilon$  fixe, où  $\varepsilon \gg 1/(N\chi t_{\text{best}})$ , nous pouvons approximer (3.29) comme

$$\left(\xi_{\text{dif}}^{-2}\right)_{N \rightarrow \infty} \simeq \frac{N^2(\chi t)^2}{M + \varepsilon N \chi t}. \quad (3.30)$$

Nous trouvons ensuite le meilleur temps pour la compression linéaire, non linéaire et quadratique en présence du déphasage diffusif

$$\chi t_{\text{best,L(dif)}} \simeq \left(\frac{3\varepsilon}{2}\right)^{1/5} N^{-3/5}; \quad (3.31)$$

$$\chi t_{\text{best,NL(dif)}} \simeq \left(\frac{5\varepsilon}{4}\right)^{1/9} 3^{1/3} N^{-5/9}; \quad (3.32)$$

$$\chi t_{\text{best,Q(dif)}} \simeq \left(\frac{7}{3}\right)^{1/13} \frac{5^{3/13} \varepsilon^{1/13}}{2^{2/13}} N^{-7/13}, \quad (3.33)$$

et le meilleur gain métrologique correspondant

$$\xi_{\text{best,L(dif)}}^{-2} \simeq \frac{2 \times 3^{1/5}}{5} \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{4/5} N^{2/5}; \quad (3.34)$$

$$\xi_{\text{best,NL(dif)}}^{-2} \simeq \frac{4 \cdot 2^{7/9} 5^{1/9}}{3 \cdot 3^{5/3} \varepsilon^{8/9}} N^{4/9}; \quad (3.35)$$

$$\xi_{\text{best,Q(dif)}}^{-2} \simeq \frac{2 \cdot 2^{11/13} 3^{12/13} 5^{3/13} 7^{1/13}}{13 \cdot \varepsilon^{12/13}} N^{6/13}. \quad (3.36)$$

Dans le cas des mesures linéaires, les équations (3.31) et (3.34) confirment les lois d'échelle optimales  $\chi t_{\text{best}} \propto N^{-3/5}$  pour le meilleur temps de compression et  $\xi_{\text{best}}^{-2} \propto N^{2/5}$  pour le gain métrologique correspondant qui ont été observées précédemment dans des scénarios impliquant un déphasage diffusif causé par des pertes de cavité pendant la compression de spin induite par la cavité [18,19,81].

### 3.2.2 Loi d'échelle du gain métrologique atteint par la technique MAI

Nous avons montré précédemment que la méthode MAI permet de reproduire toutes les lois d'échelle pour la compression de spin linéaire, non linéaire et quadratique dans le cas sans bruit. Pour montrer que cette observation peut être étendue à des scénarios réalistes en présence de décohérence, nous identifions, dans ce paragraphe, les limitations du gain métrologique MAI en présence d'un déphasage diffusif. Pour ce faire, nous commençons par exprimer les éléments de la matrice des commutateurs et de la matrice covariance comme

$$C_{kl} = -i \langle \psi_t | e^{\varepsilon \chi t \mathcal{L}_C} \left[ [\hat{S}_k, \hat{U}_\tau^\dagger e^{\varepsilon \chi \tau \mathcal{L}_C} [\hat{S}_l] \hat{U}_\tau] \right] | \psi_t \rangle, \quad (3.37)$$

$$\Gamma_{kl} = \frac{1}{2} \langle \psi_t | e^{\varepsilon \chi t \mathcal{L}_C} \left[ \hat{U}_\tau^\dagger e^{\varepsilon \chi \tau \mathcal{L}_C} \{ \hat{S}_k, \hat{S}_l \} \hat{U}_\tau \right] | \psi_t \rangle - \Pi_{j=k,l} \langle \psi_t | e^{\varepsilon \chi t \mathcal{L}_C} \left[ \hat{U}_\tau^\dagger e^{\varepsilon \chi \tau \mathcal{L}_C} [\hat{S}_j] \hat{U}_\tau \right] | \psi_t \rangle \quad (3.38)$$

Les expressions analytiques de ces éléments sont données dans l'appendice 3.A de ce chapitre. Pour le temps d'interaction de la seconde évolution one-axis twisting  $\tau$ , nous choisissons le cas optimal en l'absence de bruit, c'est-à-dire  $\tau = -t$ . En absence de décohérence, la variance de l'observable  $\hat{S}_y$  à la fin de la seconde évolution OAT est donnée par  $(\Delta \hat{S}_y)^2 = N/4$ . En présence de déphasage diffusif, cette variance augmente avec le temps comme

$$(\Delta \hat{S}_y)_{\text{dif}}^2 = \frac{N(N+1)}{8} - \frac{N(N-1)}{8} e^{-4\varepsilon \chi t}. \quad (3.39)$$

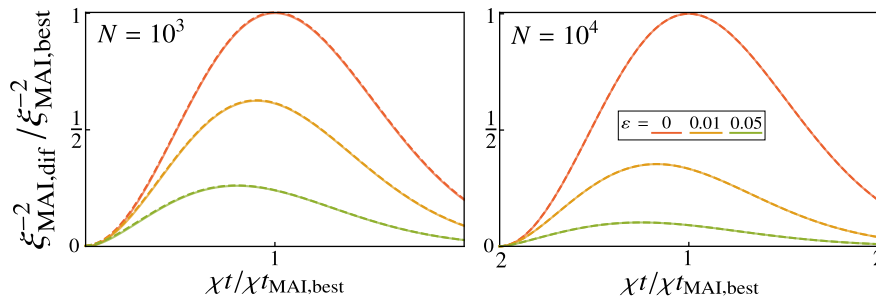


FIGURE 3.2.1 – Gain métrologique en fonction du temps en utilisant la stratégie de mesure après interaction en présence de déphasage diffusif (3.14) pour  $\varepsilon = \gamma_C/\chi = 0, 0.01, 0.05$ . Les lignes pleines représentent les prédictions analytiques (3.41) pour  $\xi_{\text{MAI,dif}}^{-2}$  dans la limite des grands  $N$ , et les lignes pointillées le gain métrologique exact.

Pour de petits  $\chi t$ , cette variance présente un comportement diffusif, c'est-à-dire linéaire en  $\chi t$

$$(\Delta \hat{S}_y)_{\text{dif}}^2 = \frac{N}{4} \left[ 1 + 2\varepsilon N \chi t + \mathcal{O}(\chi t)^2 \right]. \quad (3.40)$$

Cela conduit à une limitation du gain quantique obtenu par la technique MAI, et en effet, nous trouvons que dans la limite des grands  $N$  pour  $\chi t \leq 1/\sqrt{N}$

$$\left( \xi_{\text{MAI,dif}}^{-2} \right)_{N \rightarrow \infty} = \frac{N^2 (\chi t)^2 e^{-N(\chi t)^2}}{1 + 2\varepsilon N \chi t}. \quad (3.41)$$

Cette dernière équation est comparée au gain métrologique exact dans la figure 3.2.1 pour différentes valeurs de  $\varepsilon$  et de  $N$ . Comme dans le cas sans bruit, nous pouvons utiliser l'équation (3.41) pour obtenir des lois d'échelle du gain métrologique  $\xi_{\text{MAI,dif}}^{-2}$  aux instants  $\chi t = \sigma N^{-\alpha}$  dans la limite d'un grand nombre d'atomes  $N$  et en présence d'un déphasage diffusif

$$\xi_{\text{MAI,dif}}^{-2} \simeq \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon} N^{1-\alpha}, & 1 \geq \alpha > 1/2 \\ \frac{\sigma e^{-\sigma^2}}{2\varepsilon} N^{1/2}, & \alpha = 1/2 \end{cases}, \quad (3.42)$$

En raison du déphasage diffusif, la loi d'échelle du gain métrologique de la méthode MAI passe de  $\xi_{\text{MAI}}^{-2} \propto N^{2-2\alpha}$  à  $\xi_{\text{MAI}}^{-2} \propto N^{1-\alpha}$  pour un  $\alpha$  donné. Comme prévu, même en présence d'un déphasage diffusif, les lois d'échelle de la méthode MAI reproduisent les lois d'échelle caractéristiques du gain métrologique associé à la compression linéaire, non linéaire et quadratique (3.34)-(3.36) pour les états préparés aux instants (3.31)-(3.33). Pour l'intervalle  $1/2 \leq \alpha \leq 1$ , une optimisation de (3.42), considérant à la fois  $\alpha$  et  $\sigma$  comme variables, nous permet d'identifier le meilleur gain métrologique et le temps correspondant pour  $N \gg 1$

$$\chi t_{\text{best,MAI(dif)}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} N^{-1/2} \quad ; \quad \xi_{\text{best,MAI(dif)}}^{-2} \simeq \frac{N^{1/2}}{\sqrt{8\varepsilon^2 e}}. \quad (3.43)$$

Notez que des résultats précédemment obtenus par des simulations numériques dans la référence [67], sont en accord avec nos résultats analytiques.

### 3.3 Déphasage collectif balistique

Dans cette section, nous examinons l'effet de ce déphasage collectif balistique sur l'évolution one-axis twisting et sur le gain métrologique quantique qui en découle. Cet effet est un processus de



déphasage aléatoire indépendant du temps que nous pouvons décrire à l'aide d'un modèle simple impliquant le hamiltonien

$$\hat{H}_{\text{bal}} = \hbar\chi(\hat{S}_z^2 + D\hat{S}_z), \quad (3.44)$$

où  $\hbar\chi D$  représente un changement d'énergie affectant les systèmes quantiques à deux niveaux. La valeur de la constante  $D$  varie aléatoirement d'une répétition de l'expérience à l'autre. Nous considérons que  $D$  suit une distribution gaussienne  $p(D)$ , caractérisée par une moyenne nulle et une variance qui peut être extensive

$$p(D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle D^2 \rangle}} e^{-\frac{D^2}{2\langle D^2 \rangle}} \quad \text{où} \quad \langle D^2 \rangle = \epsilon N^\gamma \quad \text{avec} \quad 0 \leq \gamma \leq 1. \quad (3.45)$$

Le paramètre  $\epsilon$  est une constante que nous considérons petite et qui caractérise l'amplitude du déphasage. En partant de l'état cohérent de spin  $|\psi_0\rangle$  donné par l'équation (2.27) du chapitre précédent où le spin collectif est suivant  $x$ , l'état du système à un moment ultérieur  $t$  devient  $|\psi_t\rangle = e^{-i\hat{H}_{\text{bal}}t/\hbar}|\psi_0\rangle$ . Dans ce cas, la moyenne  $\langle \hat{A} \rangle$  de toute observable  $\hat{A}$  à l'instant  $t$  peut être calculée en faisant la moyenne sur l'état quantique  $|\psi_t\rangle$  et sur la variable aléatoire  $D$

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(D) \langle \psi_t | \hat{A} | \psi_t \rangle dD. \quad (3.46)$$

### 3.3.1 Lois d'échelle du gain métrologique associé à la compression des observables linéaires, non linéaires et quadratiques de spin

Nous nous concentrons d'abord sur l'effet du déphasage collectif balistique sur la compression des observables de spin linéaires, non linéaires et quadratiques et sur le gain métrologique quantique résultant. Dans ce contexte, les éléments de la matrice des commutateurs  $C$  et de la matrice covariance  $\Gamma$  peuvent être exprimés comme

$$C_{kl} = -i \int_{-\infty}^{+\infty} dD p(D) \langle \psi_t | [\hat{S}_k, \hat{X}_l] | \psi_t \rangle, \quad (3.47)$$

$$\Gamma_{kl} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dD p(D) \langle \psi_t | \{ \hat{X}_k, \hat{X}_l \} | \psi_t \rangle - \prod_{j=k,l} \int_{-\infty}^{+\infty} dD p(D) \langle \psi_t | \hat{X}_j | \psi_t \rangle. \quad (3.48)$$

En résolvant de manière exacte le modèle de déphasage balistique (3.44) et en utilisant (3.46), il est possible d'obtenir analytiquement, en fonction de  $N$ , de  $\chi t$  et de la variance  $\langle D^2 \rangle$ , les éléments de la matrice des commutateurs (3.47) ainsi que les éléments de la matrice de covariance (3.48). Ces résultats détaillés se trouvent dans l'appendice 3.B du présent chapitre. En suivant une stratégie analogue à celle utilisée dans le cas sans bruit et dans le cas de déphasage diffusif, la diagonalisation de la matrice des moments  $M$  (2.35) nous donne, selon l'équation (2.37), le gain métrologique optimal pour tout  $N$  et à tout instant  $t$  en présence de déphasage balistique pour un ensemble d'observables linéaires, non linéaires ou quadratiques de spin. Dans le cas de la compression d'une observable linéaire, nous obtenons

$$\xi_{\text{L,bal}}^{-2} = 4e^{-(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \cos^{2N-2}(\chi t) \left( 4 + (N-1) \left\{ 1 - e^{-2(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \cos^{N-2}(2\chi t) \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{(1 - e^{-2(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \cos^{N-2}(2\chi t))^2 + 16e^{-(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \sin^2(\chi t) \cos^{2N-4}(\chi t)} \right\} \right)^{-1}. \quad (3.49)$$

De manière similaire, nous calculons analytiquement le gain métrologique optimal associé à la compression des observables de spin non linéaires et quadratiques en présence d'un déphasage

balistique. En prenant la limite de grands  $N$ , le gain métrologique de la compression linéaire, non linéaire et quadratique de spin est donné, pour  $\chi t < 1/\sqrt{N}$ , par

$$\left(\xi_{\text{bal}}^{-2}\right)_{N \rightarrow \infty} = \frac{N^2(\chi t)^2}{1 + M + \epsilon N^{1+\gamma}(\chi t)^2}, \quad (3.50)$$

avec l'expression appropriée de  $M$  pour chaque choix de mesure (2.100)-(2.102). La loi d'échelle du gain métrologique optimal dans la limite du grands nombre d'atomes  $N$  dépend désormais de la compétition entre le termes du dénominateur dans (3.50). En général, nous remarquons que dès que le terme dépendant du bruit, c'est à dire  $\epsilon N^{1+\gamma}(\chi t)^2$ , devient non négligeable par rapport à  $1 + M$ , il déterminera la loi d'échelle du gain quantique maximal. Ainsi, dans la limite de grands  $N$ , l'effet du déphasage collectif balistique est de fixer une borne supérieure, donnée par  $\xi_{\text{lim}}^{-2} = N^{1-\gamma}/\epsilon$ , pour la loi d'échelle du gain métrologique, indépendamment de la stratégie de mesure choisie. En raison de la forme de l'équation (3.50), la maximisation par rapport à  $\chi t$  n'est pas affectée par le déphasage balistique. Le meilleur temps  $\chi t_{\text{best}}$  reste alors inchangé et il est donné par le meilleur temps en absence de tout bruit. Le gain métrologique maximal devient

$$\xi_{\text{best,L(bal)}}^{-2} \simeq \frac{2 \times 3^{-2/3} N^{2/3}}{1 + 2\epsilon \times 3^{-2/3} N^{\gamma-1/3}}; \quad (3.51)$$

$$\xi_{\text{best,NL(bal)}}^{-2} \simeq \frac{2 \left(\frac{2}{5}\right)^{4/5} 3^{3/5} N^{4/5}}{1 + 2\epsilon \left(\frac{2}{5}\right)^{4/5} 3^{3/5} N^{\gamma-1/5}}; \quad (3.52)$$

$$\xi_{\text{best,Q(bal)}}^{-2} \simeq \frac{\left(\frac{6}{7}\right)^{6/7} 5^{3/7} N^{6/7}}{1 + \epsilon \left(\frac{6}{7}\right)^{6/7} 5^{3/7} N^{\gamma-1/7}}. \quad (3.53)$$

L'équation (3.51) révèle que, pour la mesure d'une observable linéaire de spin, la présence d'un déphasage balistique collectif avec  $\gamma \leq 1/3$  ne modifie pas le gain métrologique optimal sans bruit. En effet, pour  $\gamma \leq 1/3$  le dénominateur de (3.51) devient de l'ordre de l'unité conduisant ainsi à un gain métrologique  $\xi_{\text{best,L(bal)}}^{-2} \propto N^{2/3}$  comme dans l'absence de bruit (2.53). De même, pour les mesures non linéaires, le gain optimal (3.52) reste inchangé si  $\gamma \leq 1/5$ , et pour les mesures quadratiques, le gain (3.53) reste inchangé si  $\gamma \leq 1/7$ .

### 3.3.2 Loi d'échelle du gain métrologique atteint par la technique MAI

Dans ce paragraphe nous étudions l'effet du déphasage balistique sur la technique MAI et nous identifions les limitations sur le gain métrologique qui en découle. La matrice des commutateurs  $C$  et la matrice covariance  $\Gamma$  pour la technique MAI s'écrivent dans ce cas sous la forme

$$C_{kl} = -i \int dDp(D) \langle \psi_t | [\hat{S}_k, e^{i\hat{H}_{\text{bal}}\tau/\hbar} \hat{S}_l e^{-i\hat{H}_{\text{bal}}\tau/\hbar}] | \psi_t \rangle \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{kl} &= \frac{1}{2} \int dDp(D) \langle \psi_t | e^{i\hat{H}_{\text{bal}}\tau/\hbar} \{\hat{S}_k, \hat{S}_l\} e^{-i\hat{H}_{\text{bal}}\tau/\hbar} | \psi_t \rangle \\ &\quad - \Pi_{j=l,k} \int dDp(D) \langle \psi_t | e^{i\hat{H}_{\text{bal}}\tau/\hbar} \hat{S}_j e^{-i\hat{H}_{\text{bal}}\tau/\hbar} | \psi_t \rangle. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Ces éléments sont analytiquement donnés dans l'appendice 3.B. En utilisant ces expressions analytiques, nous pouvons calculer la matrice des moments  $M$  (2.35). En diagonalisant cette matrice, nous pouvons analytiquement obtenir le gain métrologique optimal de la technique MAI, à un instant  $t$  donné pour tout choix de temps d'interaction  $\tau$ , en présence de déphasage collectif balistique. En prenant  $\chi\tau = -\chi t$  comme précédemment et  $D\tau = Dt$ , nous pouvons montrer que l'effet de ce

processus de décohérence est d'augmenter la variance  $(\Delta\hat{S}_y)^2$  à la fin de la seconde évolution OAT où elle devient

$$(\Delta\hat{S}_y)_{\text{bal}}^2 = \frac{N(N+1)}{8} - \frac{N(N-1)}{8} e^{-8(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle}. \quad (3.56)$$

Pour de petites valeurs de  $\epsilon$ , de grands  $N$ , et lorsque  $\chi t \leq 1/\sqrt{N}$ , cela entraîne une augmentation balistique, c'est-à-dire une augmentation proportionnelle à  $(\chi t)^2$ , de la forme

$$(\Delta\hat{S}_y)_{\text{bal}}^2 = \frac{N}{4} \left[ 1 + 4\epsilon N^{1+\gamma} (\chi t)^2 + \mathcal{O}(\chi t)^4 \right]. \quad (3.57)$$

Cela se traduit par une diminution du gain métrologique  $\xi_{\text{MAI}}^{-2}$ , obtenu en l'absence de bruit (2.87), d'un facteur  $(1 + 4\epsilon N^{1+\gamma} (\chi t)^2)^{-1}$ . Dans ce cas, nous obtenons

$$\left( \xi_{\text{MAI, bal}}^{-2} \right)_{N \rightarrow \infty} = \frac{N^2 (\chi t)^2 e^{-N(\chi t)^2}}{1 + 4\epsilon N^{1+\gamma} (\chi t)^2}. \quad (3.58)$$

Cette expression est comparée au gain métrologique exact dans la figure 3.3.1-(a) pour différentes valeurs de  $\gamma$  et de  $N$ . Nous pouvons maintenant utiliser l'équation (3.58) pour déduire les lois d'échelle du gain métrologique  $\xi_{\text{MAI, bal}}^{-2}$  pour de grandes valeurs de  $N$  et des échelles de temps  $\chi t = \sigma N^{-\alpha}$  en présence de déphasage balistique

$$\xi_{\text{MAI, bal}}^{-2} \simeq \begin{cases} \frac{\sigma^2 N^{2-2\alpha}}{1 + 4\epsilon \sigma^2 N^{1+\gamma-2\alpha}}, & 1 \geq \alpha > 1/2 \\ \frac{\sigma^2 e^{-\sigma^2 N}}{1 + 4\epsilon \sigma^2 N^\gamma}, & \alpha = 1/2 \end{cases}. \quad (3.59)$$

Encore une fois, la loi d'échelle en  $N$  dépend de la compétition entre le temps d'évolution et le bruit, caractérisée par  $\alpha$  et  $\gamma$  respectivement. Ceci est illustré dans la figure 3.3.1-(b). En particulier, nous observons l'existence d'une valeur critique de  $\alpha$

$$\alpha_c = \frac{1 + \gamma}{2}. \quad (3.60)$$

Pour les temps inférieurs à cette valeur critique,  $\alpha > \alpha_c$ , nous obtenons

$$\xi_{\text{MAI, bal}}^{-2} \simeq \sigma^2 N^{2-2\alpha}, \quad (3.61)$$

c'est-à-dire que la loi d'échelle (2.90) de l'évolution idéale en l'absence de tout bruit est préservée. Pour des temps plus longs,  $\alpha < \alpha_c$ , cependant, le gain quantique est limité par le processus de déphasage balistique et il devient indépendant de  $\alpha$

$$\xi_{\text{MAI, bal}}^{-2} \simeq \frac{1}{4\epsilon} N^{1-\gamma}. \quad (3.62)$$

La maximisation de  $\xi_{\text{MAI, bal}}^{-2}$  par rapport à  $\sigma$  et  $\alpha$  nous permet de déterminer, pour un  $\gamma$  donné, la loi d'échelle du meilleur gain métrologique et le temps correspondant à la limite  $N \rightarrow \infty$ . Pour  $\gamma = 0$ , nous obtenons

$$\chi t_{\text{best, MAI(bal)}} \simeq (1 - 2\epsilon) N^{-1/2} \quad ; \quad \xi_{\text{best, MAI(bal)}}^{-2} \simeq \frac{\epsilon}{e} N, \quad (3.63)$$

tandis que pour  $\gamma \neq 0$ , la loi d'échelle à long terme (3.62) représente le meilleur gain métrologique. Cette loi d'échelle est atteinte exactement au point critique  $\alpha_c$ , ainsi que dans tous les temps plus longs puisque le gain métrologique (3.62) est indépendant de  $\alpha$ . La valeur critique (3.60) identifie

alors le temps de préparation optimal  $\alpha = \alpha_c$  en fonction du bruit présent dans le système, via  $\gamma$ , dans la limite de grand  $N$ . De plus, les résultats (3.61) et (3.62) prévoient un changement discontinu de la loi d'échelle en fonction du temps de préparation. Ce comportement critique est masqué par les effets de taille finie dans les systèmes atomiques réalistes, mais un début de discontinuité, comme nous pouvons le voir dans la figure 3.3.1-(c), est perceptible avec l'augmentation de  $N$ . En utilisant le gain métrologique exact, nous pouvons calculer les premières corrections de taille finie à (3.59), nous obtenons

$$\xi_{\text{MAI,bal}}^{-2} \simeq \frac{\sigma^2 N^{2-2\alpha}}{1 + 4\epsilon\sigma^2 N^{1+\gamma-2\alpha}} \left[ 1 - \sigma^2 N^{1-2\alpha} + \frac{\sigma^4}{4} N^{2-4\alpha} \right]. \quad (3.64)$$

Une maximisation sur  $\alpha$  et  $\sigma$  de cette dernière équation montre que le gain quantique  $\xi_{\text{MAI,bal}}^{-2}$  atteint sa valeur maximale (3.62), pour un  $\gamma$  donné, à

$$\chi t = \left( \frac{1}{4\epsilon} \right)^{1/4} N^{-1/2-\gamma/4}. \quad (3.65)$$

En général, pour un gain quantique souhaité, donné en fonction de  $\alpha$  comme  $N^{2-2\alpha}$ , la valeur critique (3.60) peut être interprétée comme une définition du niveau maximal tolérable de déphasage balistique  $\gamma = 2\alpha - 1$ . Notez que ces contraintes deviennent plus exigeantes pour les gains quantiques plus élevés. Comme nous l'avons déjà observé dans le paragraphe précédent, pour la compression de spin linéaire où le meilleur temps correspond à  $\alpha = 2/3$ , le niveau de bruit tolérable est  $\gamma = 1/3$ . Pour la compression de l'observable non linéaire de spin où  $\alpha = 3/5$ , le bruit tolérable correspondant est  $\gamma = 1/5$  et il est donné par  $\gamma = 1/7$  pour la compression de l'observable quadratique où  $\alpha = 4/7$ . Comme nous allons montrer dans la section suivante avec un modèle microscopique, dans le cas extrême où  $\gamma = 1$ , il est impossible de générer un gain métrologique quantique qui augmente avec  $N$ . Nous démontrons ainsi, comme dans le cas sans bruit et dans le cas du déphasage diffusif, que la technique MAI reproduit toutes les lois d'échelle du gain métrologique des différentes stratégies de compression, même en présence de déphasage balistique.

### 3.4 Perte de particules

Jusqu'à présent, nous avons examiné les processus de décohérence dans lesquels un déphasage collectif perturbe l'évolution cohérente induite par le hamiltonien OAT. Dans cette section, nous examinerons, avec un modèle microscopique, les restrictions imposées par les pertes de particules sur la compression linéaire, non linéaire et quadratique de spin via la dynamique one-axis twisting. Pour cela, nous allons considérer un système composé de  $N$  atomes identiques dans deux modes notés  $\epsilon = a, b$  dont l'état est décrit par l'opérateur densité  $\hat{\rho}$ . En plus de la dynamique OAT décrite par le hamiltonien  $\hat{H}_{\text{OAT}} = \hbar\chi\hat{S}_z^2$ , les pertes à  $m$  corps dans ce système peuvent être décrites par l'équation pilote [88],

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{\text{OAT}}, \hat{\rho}] + \sum_{l=a,b} \gamma_l^{(m)} \left( [\hat{c}_l]^m \hat{\rho} [\hat{c}_l^\dagger]^m - \frac{1}{2} \{ \hat{\rho}, [\hat{c}_l]^m [\hat{c}_l^\dagger]^m \} \right), \quad (3.66)$$

où  $\gamma_l^{(m)}$  représente le taux de perte de  $m$  corps dans le mode  $l$ . Il est à rappeler que  $\hat{c}_l$  et  $\hat{c}_l^\dagger$  sont respectivement les opérateurs d'annihilation et de création d'un atome dans le mode  $l$ . Comme nous l'avons introduit précédemment dans ce chapitre pour le cas général, cette évolution peut également être formulée de manière équivalente en utilisant le formalisme de la fonction d'onde Monte-Carlo. Le hamiltonien effectif de cette méthode FOMC, défini par (3.11), peut être écrit dans ce cas comme

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H}_{\text{OAT}} - \frac{i\hbar}{2} \sum_{l=a,b} \hat{J}_l^{(m)\dagger} \hat{J}_l^{(m)} \quad \text{avec} \quad \hat{J}_l^{(m)} = \sqrt{\gamma_l^{(m)}} [\hat{c}_l]^m. \quad (3.67)$$

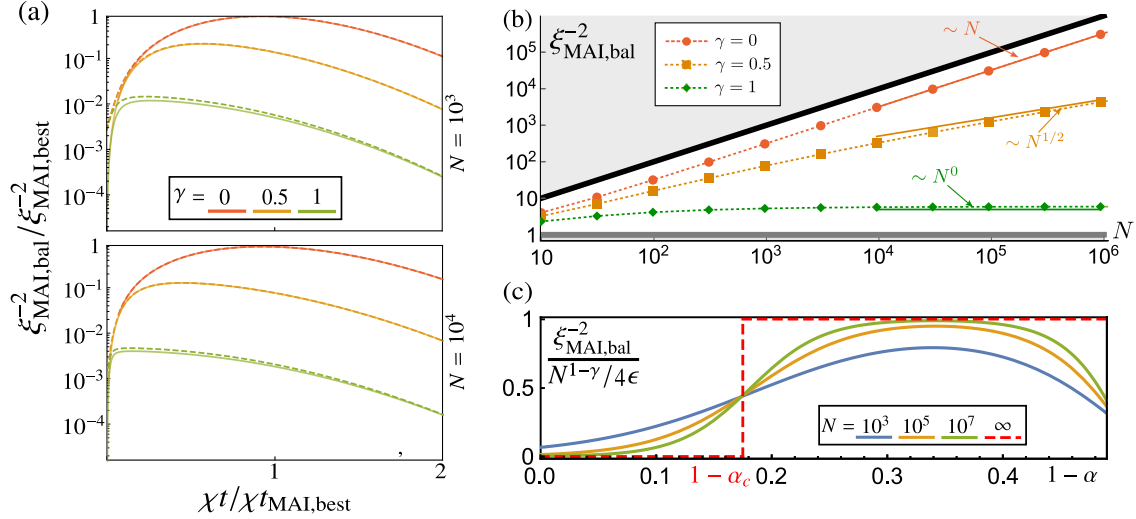


FIGURE 3.3.1 – Gain métrologique quantique pour la technique MAI en présence de déphasage collectif balistique. (a) Gain métrologique avec  $\gamma = 0, 0.5, 1$  et  $\epsilon = 0.05$  pour  $N = 10^3$  (haut) et  $N = 10^4$  (bas). Les lignes pleines sont les formules analytiques (3.58) pour  $\xi_{\text{MAI,bal}}^{-2}$  dans la limite des grands  $N$  et les lignes pointillées sont les résultats exacts. (b) Modification des lois d'échelle pour différentes valeurs de  $\gamma = 0, 0.5, 1$  et pour  $\epsilon = 0.05$ . (c) Apparition graduelle de la discontinuité des lois d'échelle pour  $\xi_{\text{MAI,bal}}^{-2}$  avec  $\gamma = 0, 65$  et  $\epsilon = 0, 05$  pour des valeurs croissantes de  $N$ .

En supposant que la fraction de particules perdues est faible, nous pouvons approximer le hamiltonien effectif (3.67) par [88]

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H}_{\text{OAT}} - \frac{i\hbar}{2}\lambda, \quad (3.68)$$

où  $\lambda = \sum_{l=a,b} \lambda_l$  avec  $\lambda_l = \gamma_l^{(m)} \langle \hat{c}_l^{\dagger m} \hat{c}_l^m \rangle$ , où la valeur moyenne  $\langle \hat{c}_l^{\dagger m} \hat{c}_l^m \rangle$  dans  $\lambda_l$  est calculée dans l'état initial du système. Pour simplifier, nous considérons dans la suite de cette section un cas symétrique où  $\gamma_a^{(m)} = \gamma_b^{(m)} = \gamma^{(m)}$ . Nous partons de l'état cohérent de spin  $|\psi_0\rangle$ , qui représente un état de phase  $|\varphi\rangle_N$ , donné par l'équation (2.13) du chapitre précédent, avec  $\varphi = 0$ . Comme mentionné précédemment, dans une réalisation Monte-Carlo particulière avec  $k$  sauts quantiques, chacun résultant en la perte de  $m$  atomes dans le mode  $l_i = a, b$  aux temps  $t_i$  avec  $i = 1, \dots, k$ , l'état du système au temps  $t$  est donné par

$$|\psi(t)\rangle = \mathcal{N} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{\text{eff}}(t-t_k)} \hat{J}_{l_k} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{\text{eff}}(t_k-t_{k-1})} \dots \hat{J}_{l_1} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{\text{eff}} t_1} |\varphi = 0\rangle_N, \quad (3.69)$$

où  $\mathcal{N}$  est une constante de normalisation. En utilisant les relation de commutation (2.5) et (2.6) et les propriétés des états de phase (2.14) et (2.16)-(2.17) introduites dans le chapitre précédent, nous pouvons montrer que, dans l'approximation de faible fraction perdue (3.68), l'état du système précédent pour une réalisation Monte-Carlo particulière peut être approximé, à une constante de normalisation près, comme un état de phase décalée avec moins de particules, évoluant avec le hamiltonien OAT, c'est-à-dire

$$|\psi(t)\rangle = F(t) e^{-i\hat{H}_{\text{OAT}}t/\hbar} |D\rangle_{N-mk} \quad ; \quad D = m \sum_{i=1}^k \chi t_i \left( \delta_{b,c_i} - \frac{1}{2} \right). \quad (3.70)$$

Le déphasage  $D$  dans cette dernière équation est une variable aléatoire qui varie d'une réalisation Monte-Carlo à l'autre. La moyenne de tout opérateur  $\hat{A}$  peut être calculée en moyennant d'abord sur l'état  $|\psi(t)\rangle$

$$\langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle = {}_{N-mk} \langle D | e^{ixt\hat{S}_z^2} \hat{A} e^{-ixt\hat{S}_z^2} | D \rangle_{N-mk} \quad (3.71)$$

ensuite, nous faisons la moyenne de  $\langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle$  sur toutes les réalisations Monte-Carlo, c'est-à-dire une moyenne sur les variables aléatoires  $k$ ,  $t_i$  et  $\delta_{b,c_i}$  [88]. Cela nous permet d'effectuer le calcul analytique de la matrice des commutateurs  $C$  et de la matrice covariance  $\Gamma$ , qui sont fournis dans l'appendice 3.C. Par conséquent, nous pouvons déterminer, à tout instant  $t$  et pour un nombre d'atomes  $N$  quelconque, le gain métrologique quantique associé à la compression des observables de spin linéaires, non linéaires et quadratiques en présence de pertes à  $m$  particules.

Dans ce travail, nous nous concentrons principalement sur le scénario des pertes à un corps ( $m = 1$ ) caractérisées par le taux de perte  $\gamma^{(1)}$ . Pour obtenir le gain métrologique optimal pour la compression de spin linéaire dans la limite de grands  $N$ , nous utilisons la loi d'échelle du temps optimal pour la compression linéaire en absence de bruit (2.53) et introduisons une variable auxiliaire sans dimension  $r = N^{-1/3}$ . Nous redimensionnons ensuite le temps comme  $\chi t = \theta r^2$ . En effectuant un développement du gain métrologique linéaire  $\xi_L^{-2}$  au voisinage de  $r = 0$  tout en maintenant  $\gamma^{(1)}/\chi$  constant, nous obtenons

$$\left( \xi_{L, \text{Loss}}^{-2} \right)_{N \rightarrow \infty} = \frac{N^2(\chi t)^2}{1 + N^4(\chi t)^6/6 + (\gamma^{(1)}t/3)N^2(\chi t)^2}. \quad (3.72)$$

De même, en utilisant la loi d'échelle pour le meilleur temps de compression de spin non linéaire (2.60), nous introduisons le paramètre sans dimension  $r = N^{-1/5}$  et nous redéfinissons l'échelle du temps comme  $\chi t = \theta r^3$ . Cela nous permet d'obtenir

$$\left( \xi_{NL, \text{Loss}}^{-2} \right)_{N \rightarrow \infty} = \frac{N^2(\chi t)^2}{1 + N^6(\chi t)^{10}/270 + (\gamma^{(1)}t/3)N^2(\chi t)^2}. \quad (3.73)$$

Pour la compression de spin quadratique, en suivant la même procédure, nous introduisons le paramètre sans dimension  $r = N^{-1/7}$  et nous redimensionnons le temps comme  $\chi t = \theta r^4$ . Cela conduit à

$$\left( \xi_{Q, \text{Loss}}^{-2} \right)_{N \rightarrow \infty} = \frac{N^2(\chi t)^2}{1 + N^8(\chi t)^{14}/875 + (\gamma^{(1)}t/3)N^2(\chi t)^2}. \quad (3.74)$$

En comparant les équations (3.72)-(3.74) à l'équation (3.50), nous pouvons déduire que l'effet des pertes à un corps est équivalent à l'effet de déphasage balistique discuté au paragraphe 3.3, avec  $\gamma = 1$  et  $\epsilon = \gamma^{(1)}t/3$ . Étant donné que  $\gamma^{(1)}$  est défini comme le taux de perte à un atome,  $\gamma^{(1)}t$  représente alors le nombre d'atomes perdus à l'instant  $t$ . Par conséquent, pour les trois stratégies de mesure, le gain métrologique quantique dans la limite des grands  $N$ , évalué à une fraction perdue constante à  $t_{\text{best}}$ , est limité par la proportion d'atomes perdus

$$\xi_{\text{lim}}^{-2} = \frac{3}{\gamma^{(1)}t}. \quad (3.75)$$

Ce résultat a été obtenu dans [24] pour la compression d'une observable linéaire de spin. L'équation (3.75) montre alors que ce résultat peut être généralisé pour inclure la compression d'observables de spin non linéaires et quadratiques. Nous pouvons donc déduire, comme le montre la figure 3.4.1, que pour un nombre d'atomes donné  $N$ , les mesures non linéaires permettent d'améliorer le gain métrologique par rapport aux mesures linéaires, à condition que  $3/(\gamma^{(1)}t_{L, \text{best}}) > \xi_{L, \text{best}}^{-2}$ . Cette condition est réalisable tant que le taux de perte à un corps  $\gamma^{(1)}$  reste raisonnablement faible (figure 3.4.1-(b)).

### 3.5 Expression unifiée pour les lois d'échelle du gain métrologique

Les résultats de ce chapitre peuvent être résumés dans une expression simple et unifiée pour le gain métrologique quantique dans la limite de grands  $N$ . Cette expression est valable pour toute

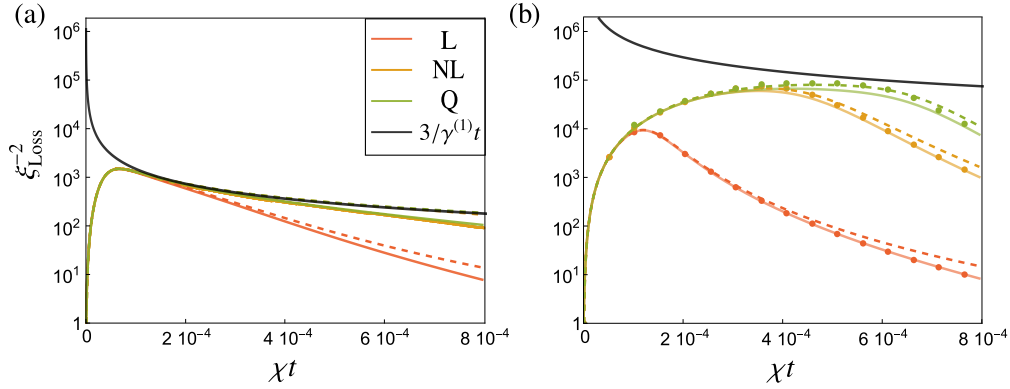


FIGURE 3.4.1 – Gains métrologiques quantiques linéaires, non linéaires et quadratiques pour  $N = 10^6$  en fonction du temps en présence de pertes à un corps avec (a)  $\gamma^{(1)}/\chi = 20$  et (b)  $\gamma^{(1)}/\chi = 0.05$ , en comparaison avec la limite (3.75). Les lignes continues représentent les gains quantiques calculés analytiquement sous la condition de faible fraction perdue (3.68). Les gains métrologiques dans la limite de grands  $N$ , tels que donnés par (3.72), (3.73), et (3.74), sont représentés par des lignes pointillées. En (b), les points représentent les résultats de simulation numérique de Monte-Carlo avec 600 réalisations.

la gamme de temps satisfaisant  $\chi t < 1/\sqrt{N}$

$$\left(\xi^{-2}\right)_{N \rightarrow \infty} = \frac{F_Q/N}{1 + M + B}. \quad (3.76)$$

En effet, cette expression décrit précisément comment le gain quantique peut être limité par des mesures sous-optimales via le terme  $M$  et par la présence de bruit via le terme  $B$ . Comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, le schéma de mesure choisi détermine les valeurs de  $M_L = N^4(\chi t)^6/6$ ,  $M_{NL} = N^6(\chi t)^8/270$ , et  $M_Q = N^8(\chi t)^{14}/875$ . Dans le cas de la technique MAI, nous obtenons  $M_{MAI} = 0$  pour  $\chi t < 1/\sqrt{N}$ . Dans le contexte des mesures linéaires, non linéaires et quadratiques, l'effet des processus de décohérence est quantifié par

$$B_{\text{dif}} = \varepsilon N \chi t, \quad (3.77)$$

lorsqu'il s'agit de déphasage diffusif, et par

$$B_{\text{bal}} = \varepsilon N^{1+\gamma} (\chi t)^2 \quad (3.78)$$

dans les cas impliquant le déphasage balistique, ce qui inclut également les pertes de particules. Cependant, en raison de ses deux évolutions non linéaires de durée  $\chi t$ , la technique MAI donne lieu à  $B_{MAI,\text{dif}} = 2\varepsilon N \chi t$  et  $B_{MAI,\text{bal}} = 4\varepsilon N^{1+\gamma} (\chi t)^2$  pour le déphasage diffusif et pour le déphasage balistique respectivement. L'équation (3.76) fournit une méthode directe pour prédire les lois d'échelle du gain métrologique dans la limite de grands nombres d'atomes  $N$  et les temps optimaux correspondants dans tous les scénarios discutés dans ce chapitre et dans le chapitre précédent, où nous avons supposé qu'il n'y avait pas de bruit (c'est à dire  $B = 0$ ).

## Conclusion

Ce chapitre a débuté par un rappel des concepts fondamentaux pour décrire des systèmes quantiques ouverts. Par la suite, nous avons exploré les limitations imposées par deux modèles distincts de décohérence, chacun d'entre eux décrivant les processus de décohérence prédominants

dans différentes implémentations physiques de la dynamique one-axis twisting. Dans le cas du déphasage collectif balistique, nous avons montré, dans la limite d'un grand nombre d'atomes, l'existence d'un changement brusque dans le gain métrologique quantique à un temps de préparation critique (le gain devient une fonction discontinue du temps dans la limite  $N \rightarrow \infty$ ), lequel dépend du niveau de bruit. Ce temps de préparation critique détermine la durée maximale pendant laquelle un avantage quantique peut être maintenu malgré la décohérence, en tenant compte du niveau de bruit. En d'autres termes, il indique la quantité de bruit tolérable pour préserver un avantage quantique avec des états de spin de plus en plus sensibles. En revanche, dans le cas du déphasage diffusif, la loi d'échelle du gain est systématiquement la racine carrée du gain attendu en l'absence de bruit, quelle que soit la durée de préparation. Enfin, dans les scénarios impliquant des pertes de particules, nous avons montré que la meilleure compression de spin linéaire, non linéaire et quadratique atteignable est limitée par la fraction de particules perdues au moment de la compression optimale.

Ce chapitre étend l'étude du gain métrologique quantique maximal atteint via la compression d'observables de spin non linéaires, tel que discuté dans le chapitre précédent, à des scénarios plus réalistes dans lesquels les processus de décohérence affectent l'évolution one-axis twisting. Avec le premier chapitre, ce chapitre peut servir de guide pour la conception expérimentale de stratégies réalisables permettant d'obtenir des améliorations quantiques élevées dans les protocoles d'estimation quantique avec un nombre relativement important d'atomes.





# Apendices

## 3.A Matrices des commutateurs et matrice covariance en présence de déphasage diffusif

Voici les expressions analytiques des éléments de la matrice des commutateurs et de la matrice covariance pertinentes pour le choix de l'ensemble des observable quadratique de spin  $\hat{X}_Q = (\hat{S}_y, \hat{S}_z, \frac{1}{2}\{\hat{S}_x, \hat{S}_z\}, \frac{1}{2}\{\hat{S}_x, \hat{S}_y\})^T$ , en tenant compte du déphasage diffusif collectif pendant la préparation de l'état et la mesure dans le contexte de la MAI

$$\begin{aligned}
C_{12} &= \frac{N}{2} e^{-\frac{\varepsilon}{2}\chi t} \cos^{N-1}(\chi t) \quad ; \quad C_{13} = \frac{N(N-1)}{8} \left( e^{-2\varepsilon\chi t} \cos^{N-2}(2\chi t) + 1 \right) \\
C_{14} &= -\frac{N(N-1)}{4} e^{-\frac{\varepsilon}{2}\chi t} \sin(\chi t) \cos^{N-2}(\chi t), \\
C_{23} &= \frac{N(N-1)}{4} e^{-\frac{\varepsilon}{2}\chi t} \sin(\chi t) \cos^{N-2}(\chi t) \quad ; \quad C_{24} = -\frac{N(N-1)}{4} e^{-\frac{\varepsilon}{2}\chi t} \cos^{N-2}(\chi t) \\
\Gamma_{11} &= \frac{N(N+1)}{8} - \frac{N(N-1)}{8} e^{-2\varepsilon\chi t} \cos^{N-2}(2\chi t) \quad ; \quad \Gamma_{12} = \frac{N(N-1)}{4} e^{-\frac{\varepsilon}{2}\chi t} \sin(\chi t) \cos^{N-2}(\chi t), \\
\Gamma_{13} &= \frac{N(N-1)(N-2)}{16} e^{-2\varepsilon\chi t} \sin(2\chi t) \cos^{N-3}(2\chi t), \\
\Gamma_{14} &= \frac{N(N-1)}{8} e^{-\frac{\varepsilon}{2}\chi t} \cos^{N-1}(\chi t) - \frac{N(N-1)(N-2)}{32} \left( e^{-\frac{9\varepsilon}{2}\chi t} \cos^{N-3}(3\chi t) - e^{-\frac{\varepsilon}{2}\chi t} \cos^{N-3}(\chi t) \right), \\
\Gamma_{22} &= \frac{N}{4} \quad ; \quad \Gamma_{23} = \frac{N(N-1)}{8} e^{-\frac{\varepsilon}{2}\chi t} \cos^{N-1}(\chi t) - \frac{N(N-1)(N-2)}{8} e^{-\frac{\varepsilon}{2}\chi t} \sin^2(2\chi t) \cos^{N-3}(\chi t), \\
\Gamma_{24} &= \frac{N(N-1)(N-2)}{16} e^{-2\varepsilon\chi t} \sin(2\chi t) \cos^{N-3}(2\chi t), \\
\Gamma_{33} &= \frac{N(N-1)(N-2)}{32} (e^{-2\varepsilon\chi t} \cos^{N-2}(2\chi t) + 1) - \frac{N(N-1)}{32} (e^{-2\varepsilon\chi t} \cos^{N-2}(2\chi t) - 3) \\
&\quad - \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{32} e^{-2\varepsilon\chi t} \sin^2(2\chi t) \cos^{N-4}(2\chi t), \\
\Gamma_{34} &= \frac{N(N-1)(N-2)}{16} e^{-\frac{\varepsilon}{2}\chi t} \sin(\chi t) \cos^{N-2}(\chi t) - \frac{N(N-1)}{16} e^{-\frac{\varepsilon}{2}\chi t} \sin(\chi t) \cos^{N-2}(\chi t) \\
&\quad + \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{64} \left( e^{-\frac{\varepsilon}{2}\chi t} \sin(\chi t) \cos^{N-4}(\chi t) + \sin(3\chi t) e^{-\frac{9\varepsilon}{2}\chi t} \cos^{N-4}(3\chi t) \right), \\
\Gamma_{44} &= -\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{128} e^{-8\varepsilon\chi t} \cos^{N-4}(4\chi t) - \frac{1}{64} N(N-1) + \frac{1}{128} (N-1)(N+3)N^2.
\end{aligned}$$

Comme dans le cas sans bruit, les résultats pour la famille  $\hat{X}_{NL} = (\hat{S}_y, \hat{S}_z, \frac{1}{2}\{\hat{S}_x, \hat{S}_z\})^T$ , qui correspond à la mesure de l'observable non linéaire (2.58), sont obtenus en se concentrant uniquement sur

la sous-matrice  $2 \times 3$  de  $C$  et la sous-matrice  $3 \times 3$  de  $\Gamma$ . Pour l'ensemble des observables linéaires de spin  $\hat{X}_L = (\hat{S}_y, \hat{S}_z)^T$ , nous nous limitons aux deux premières lignes et colonnes des matrices  $C$  et  $\Gamma$ .

Pour la méthode MAI, nous obtenons

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{N(N-1)}{4} e^{-\varepsilon[2|\chi t| + \frac{1}{2}|\chi \tau|]} \sin(\chi \tau) \cos^{N-2}(\chi(\tau + 2t)) + \frac{N(N-1)}{4} e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\chi \tau|} \sin(\chi \tau) \cos^{N-2}(\chi \tau), \\ C_{12} &= \frac{N}{2} e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\chi t|} \cos^{N-1}(\chi t) \quad ; \quad C_{21} = -\frac{N}{2} e^{-\frac{\varepsilon}{2}(|\chi t| + |\chi \tau|)} \cos^{N-1}(\chi(t + \tau)), \\ \Gamma_{11} &= \frac{N(N+1)}{8} - \frac{N(N-1)}{8} e^{-2\varepsilon(|\chi t| + |\chi \tau|)} \cos^{N-2}(2\chi(t + \tau)), \\ \Gamma_{12} &= \frac{N(N-1)}{4} e^{-\frac{\varepsilon}{2}(|\chi t| + |\chi \tau|)} \cos^{N-2}(\chi(t + \tau)) \sin(\chi(t + \tau)) \quad ; \quad \Gamma_{22} = \frac{N}{4}. \end{aligned}$$

### 3.B Matrices des commutateurs et matrice covariance en présence de déphasage balistique

expressions analytiques des éléments de la matrice des commutateurs et de la matrice covariance pertinentes pour la mesure d'une observable de spin quadratique, en tenant compte du déphasage balistique collectif pendant la préparation de l'état et la mesure dans le contexte de la MAI

$$\begin{aligned} C_{12} &= \frac{N}{2} e^{-\frac{1}{2}(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \cos^{N-1}(\chi t) \quad ; \quad C_{13} = \frac{N(N-1)}{8} \left( e^{-2(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \cos^{N-2}(2\chi t) + 1 \right), \\ C_{14} &= -\frac{N(N-1)}{4} e^{-\frac{1}{2}(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \sin(\chi t) \cos^{N-2}(\chi t), \\ C_{23} &= \frac{N(N-1)}{4} e^{-\frac{1}{2}(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \sin(\chi t) \cos^{N-2}(\chi t) \quad ; \quad C_{24} = -\frac{N(N-1)}{4} e^{-\frac{1}{2}(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \cos^{N-2}(\chi t), \\ \Gamma_{11} &= \frac{N(N+1)}{8} - \frac{N(N-1)}{8} e^{-2(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \cos^{N-2}(2\chi t) \quad ; \quad \Gamma_{12} = \frac{N(N-1)}{4} e^{-\frac{1}{2}(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \sin(\chi t) \cos^{N-2}(\chi t), \\ \Gamma_{13} &= \frac{N(N-1)(N-2)}{16} e^{-2(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \sin(2\chi t) \cos^{N-3}(2\chi t), \\ \Gamma_{14} &= \frac{N(N-1)}{8} e^{-\frac{1}{2}(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \cos^{N-1}(\chi t) \\ &\quad - \frac{N(N-1)(N-2)}{32} \left( e^{-\frac{9}{2}(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \cos^{N-3}(3\chi t) - e^{-\frac{1}{2}(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \cos^{N-3}(\chi t) \right) \\ \Gamma_{22} &= \frac{N}{4} \quad ; \quad \Gamma_{23} = \frac{N(N-1)}{8} e^{-\frac{1}{2}(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \cos^{N-1}(\chi t) - \frac{N(N-1)(N-2)}{8} e^{-\frac{1}{2}(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \sin^2(2\chi t) \cos^{N-3}(\chi t), \\ \Gamma_{24} &= \frac{N(N-1)(N-2)}{16} e^{-2(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \sin(2\chi t) \cos^{N-3}(2\chi t), \\ \Gamma_{33} &= \frac{N(N-1)(N-2)}{32} \left( e^{-2(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \cos^{N-2}(2\chi t) + 1 \right) - \frac{N(N-1)}{32} \left( e^{-2(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \cos^{N-2}(2\chi t) - 3 \right) \\ &\quad - \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{32} e^{-2(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \sin^2(2\chi t) \cos^{N-4}(2\chi t), \\ \Gamma_{34} &= \frac{N(N-1)(N-2)}{16} e^{-\frac{1}{2}(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \sin(\chi t) \cos^{N-2}(\chi t) - \frac{N(N-1)}{16} e^{-\frac{1}{2}(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \sin(\chi t) \cos^{N-2}(\chi t) \\ &\quad + \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{64} \left( e^{-\frac{1}{2}(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \sin(\chi t) \cos^{N-4}(\chi t) + \sin(3\chi t) e^{-\frac{9}{2}(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \cos^{N-4}(3\chi t) \right), \\ \Gamma_{44} &= -\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{128} e^{-8(\chi t)^2 \langle D^2 \rangle} \cos^{N-4}(4\chi t) - \frac{1}{64} N(N-1) + \frac{1}{128} (N-1)(N+3)N^2. \end{aligned}$$

Dans le cas de la méthode MAI, nous avons

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{N(N-1)}{4} e^{-\frac{1}{2}\chi^2(2t+\tau)^2\langle D^2 \rangle} \sin(\chi\tau) \cos^{N-2}(\chi(\tau+2t)) + \frac{N(N-1)}{4} e^{-\frac{1}{2}(\chi\tau)^2\langle D^2 \rangle} \sin(\chi\tau) \cos^{N-2}(\chi\tau), \\
 C_{12} &= \frac{N}{2} e^{-\frac{1}{2}(\chi t)^2\langle D^2 \rangle} \cos^{N-1}(\chi t) \quad , \quad C_{21} = \frac{N}{2} e^{-\frac{1}{2}\chi^2(t+\tau)^2\langle D^2 \rangle} \cos^{N-1}(\chi(t+\tau)). \\
 \Gamma_{11} &= \frac{N(N+1)}{8} - \frac{N(N-1)}{8} e^{-2\chi^2(t+\tau)^2\langle D^2 \rangle} \cos^{N-2}(2\chi(t+\tau)), \\
 \Gamma_{12} &= \frac{N(N-1)}{4} e^{-\frac{1}{2}\chi^2(t+\tau)^2\langle D^2 \rangle} \cos^{N-2}(2\chi(t+\tau)) \sin(\chi(t+\tau)) \quad , \quad \Gamma_{22} = \frac{N}{4}.
 \end{aligned}$$

### 3.C Matrices des commutateurs et matrice covariance en présence de perte à $m$ -corps

Nous présentons ici les éléments de la matrice des commutateurs  $C$  et de la matrice covariance symétrique  $\Gamma$  pour la compression d'une observable quadratique en présence de pertes à  $m$  corps avec un taux de perte  $\gamma^{(m)}$  et le nombre total moyen d'événements de pertes de  $m$  corps par unité de temps  $\lambda$

$$\begin{aligned}
 C_{12} &= \frac{N - m\lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)}}{2} \cos^{N-1}(\chi t) e^{-\lambda t \left(1 - \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)}\right)} \\
 C_{13} &= \frac{1}{8} F(0) + \frac{1}{8} F(2\chi t) \cos^{N-2}(2\chi t) e^{-\lambda t \left(1 - \frac{\text{sinc}(2m\chi t)}{\cos^m(2\chi t)}\right)}, \\
 C_{14} &= -\frac{1}{4} F(\chi t) \sin(\chi t) \cos^{N-2}(\chi t) e^{-\lambda t \left(1 - \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)}\right)}, \\
 C_{23} &= \frac{1}{4} F(\chi t) \sin(\chi t) \cos^{N-2}(\chi t) e^{-\lambda t \left(1 - \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)}\right)} \quad ; \quad C_{24} = -\frac{1}{4} F(\chi t) \cos^{N-2}(\chi t) e^{-\lambda t \left(1 - \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)}\right)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11} &= \frac{N - m\lambda t}{4} + \frac{1}{8}F(0) - \frac{1}{8}F(2\chi t) \cos^{N-2}(2\chi t) e^{-\lambda t \left(1 - \frac{\text{sinc}(2m\chi t)}{\cos^m(2\chi t)}\right)}, \\
 \Gamma_{12} &= \frac{1}{4}F(\chi t) \sin(\chi t) \cos^{N-2}(\chi t) e^{-\lambda t \left(1 - \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)}\right)}, \\
 \Gamma_{13} &= \frac{1}{16}G(2\chi t) \sin(2\chi t) \cos^{N-3}(2\chi t) e^{-\lambda t \left(1 - \frac{\text{sinc}(2m\chi t)}{\cos^m(2\chi t)}\right)}, \\
 \Gamma_{14} &= \frac{1}{8}F(\chi t) \cos^{N-1}(\chi t) e^{-\lambda t \left(1 - \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)}\right)} + \frac{1}{32}G(\chi t) \cos^{N-3}(\chi t) e^{-\lambda t \left(1 - \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)}\right)} \\
 &\quad - \frac{1}{32}G(3\chi t) \cos^{N-3}(3\chi t) e^{-\lambda t \left(1 - \frac{\text{sinc}(3m\chi t)}{\cos^m(3\chi t)}\right)}, \\
 \Gamma_{22} &= \frac{N - m\lambda t}{4}, \\
 \Gamma_{23} &= \frac{1}{8}F(\chi t) \cos^{N-1}(\chi t) e^{-\lambda t \left(1 - \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)}\right)} - \frac{1}{8}G(\chi t) \sin^2(2\chi t) \cos^{N-3}(\chi t) e^{-\lambda t \left(1 - \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)}\right)}, \\
 \Gamma_{24} &= \frac{1}{16}G(2\chi t) \sin(2\chi t) \cos^{N-3}(2\chi t) e^{-\lambda t \left(1 - \frac{\text{sinc}(2m\chi t)}{\cos^m(2\chi t)}\right)}, \\
 \Gamma_{33} &= \frac{3}{32}F(0) - \frac{1}{8}F(2\chi t) \cos^{N-2}(2\chi t) e^{-\lambda t \left(1 - \frac{\text{sinc}(2m\chi t)}{\cos^m(2\chi t)}\right)} + \frac{1}{32}G(0) + \frac{1}{32}G(2\chi t) \cos^{N-2}(2\chi t) e^{-\lambda t \left(1 - \frac{\text{sinc}(2m\chi t)}{\cos^m(2\chi t)}\right)} \\
 &\quad - \frac{1}{32}I(2\chi t) \sin^2(2\chi t) \cos^{N-4}(2\chi t) e^{-\lambda t \left(1 - \frac{\text{sinc}(2m\chi t)}{\cos^m(2\chi t)}\right)}, \\
 \Gamma_{34} &= -\frac{1}{16}(F(\chi t) \sin(\chi t) \cos^{N-2}(\chi t) e^{-\lambda t \left(1 - \frac{\text{sinc}(2m\chi t)}{\cos^m(2\chi t)}\right)} + F(0)) + \frac{1}{16}G(\chi t) \sin(\chi t) \cos^{N-2}(\chi t) e^{-\lambda t \left(1 - \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)}\right)} \\
 &\quad + \frac{1}{64}I(\chi t) \sin(\chi t) \cos^{N-4}(\chi t) e^{-\lambda t \left(1 - \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)}\right)} + \frac{1}{64}I(3\chi t) \sin(3\chi t) \cos^{N-4}(3\chi t) e^{-\lambda t \left(1 - \frac{\text{sinc}(3m\chi t)}{\cos^m(3\chi t)}\right)}, \\
 \Gamma_{44} &= -\frac{1}{64}F(0) - \frac{1}{128}I(4\chi t) \cos^{N-4}(4\chi t) e^{-\lambda t \left(1 - \frac{\text{sinc}(4m\chi t)}{\cos^m(4\chi t)}\right)} + \frac{1}{128}J(0).
 \end{aligned}$$

Les fonctions  $F$ ,  $G$ ,  $I$  et  $J$  sont données par

$$\begin{aligned}
 F(\chi t) &= N(N-1) - m(2N-1)\lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} + m^2\lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} \left( \lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} + 1 \right) \\
 G(\chi t) &= N(N-1)(N-2) - m(N(N-1) + (2N-1)(N-2))\lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} \\
 &\quad + 3m^2(N-1)\lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} \left( 1 + \lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} \right) \\
 &\quad - m^3\lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} \left( 1 + 3\lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} + \left( \lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} \right)^2 \right) \\
 I(\chi t) &= N(N-1)(N-2)(N-3) - m(((N-2)(2N-1) + N(N-1))(N-3) + N(N-1)(N-2)) \\
 &\quad \times \lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} + m^2(N(N-1) + (2N-1)(N-2) - 3(N-1)(N-3))\lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} \left( 1 + \lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} \right) \\
 &\quad - 2m^3(2N-3)\lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} \left( 1 + 3\lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} + \left( \lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} \right)^2 \right) \\
 &\quad + m^4\lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} \left( 1 + 7\lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} + 6 \left( \lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} \right)^2 + \left( \lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} \right)^3 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J(\chi t) = & N^2(N-1)(N+3) - 2m(N^2(N+1) + N(N-1)(N+3))\lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} \\
 & + m^2(6N^2 + 2N + 1)\lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} \left( \lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} + 1 \right) \\
 & - 2m^3(2N + 1)\lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} \left( 1 + 3\lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} + \left( \lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} \right)^2 \right) \\
 & + m^4\lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} \left( 1 + 6\lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} + 6 \left( \lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} \right)^2 + 9 \left( \lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} \right)^3 + 3 \left( \lambda t \frac{\text{sinc}(m\chi t)}{\cos^m(\chi t)} \right)^4 \right)
 \end{aligned}$$



# Estimation multi-paramètres et détection comprimée d'un champ

## Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons examiné comment un ensemble de  $N$  atomes identiques à deux niveaux, ou des systèmes de spin collectif équivalents, peuvent servir de capteurs atomiques d'une précision supérieure à celle donnée par le bruit quantique standard en créant des corrélations quantiques entre les atomes. De plus, une disposition spatiale régulière des atomes individuels intriqués peut être exploitée pour effectuer des mesures locales de champs étendus, par exemple des champs magnétiques présentant une variation spatiale, avec un gain quantique. Cet arrangement spatial des atomes peut être obtenu de diverses manières, notamment en utilisant des pinces optiques, en induisant une transition de Mott dans un condensat de Bose-Einstein au sein d'un réseau optique [26], en utilisant des ions piégés qui forment un cristal unidimensionnel ou tridimensionnel, ou en exploitant les centres NV du diamant.

Ce chapitre se concentre sur l'exploitation de l'avantage quantique dans un système de  $N$  atomes à deux niveaux, disposés de manière régulière dans un réseau optique à une, deux ou trois dimensions, afin de réaliser une estimation multi-paramètres. Pour ce faire, il est essentiel de préparer le système dans un état caractérisé par des corrélations quantiques entre les atomes, en plus de leur arrangement spatial régulier. Afin d'obtenir un état comprimé de spin, où les atomes sont distribués dans un réseau avec un atome par site, deux approches sont envisagées. La première consiste en une élévation adiabatique d'un réseau dans un condensat de Bose-Einstein à deux composantes [89, 90], tandis que la seconde repose sur l'intrication d'atomes fermioniques situés sur les sites d'un réseau optique, grâce à des processus d'effet tunnel virtuel et à l'utilisation d'un laser externe pour imprimer une phase dépendante de la position des atomes [91–93]. Des configurations similaires, mais avec plusieurs spins sur chaque site, peuvent être obtenues en divisant un condensat de Bose-Einstein préparé dans un état comprimé de spin en modes individuellement accessibles [94, 95]. Une autre approche consiste à utiliser des atomes répartis spatialement dans une cavité, où les interactions médiées par la cavité [96] ou les mesures quantiques non destructives [97] sont exploitées pour intriquer les modes. Il est important de noter que cette dernière méthode a récemment démontré expérimentalement un avantage quantique dans la détection distribuée en exploitant jusqu'à quatre modes spatiaux [97].

Pour tirer parti des corrélations entre les atomes, au lieu de mesurer directement le champ local avec un spin à chaque site du réseau, nous examinons l'estimation des combinaisons linéaires indépendantes des champs locaux à partir des résultats de mesures des observables de spin collectif. Ces combinaisons correspondent aux coefficients de Hadamard du signal spatial discrétisé sur le réseau.



Les champs locaux sont ensuite déduits en effectuant une transformation inverse de Hadamard. Cette approche permet d'obtenir un gain quantique, c'est-à-dire une réduction de l'incertitude statistique sur le champ mesuré en dessous de la limite quantique standard, grâce aux corrélations quantiques entre les atomes.

La structure de ce chapitre est la suivante : dans la première section (Section 4.1), nous développons le protocole d'estimation multi-paramètres et nous dérivons le gain quantique correspondant. Ensuite, dans la section 4.2, nous examinons un exemple d'application de cette stratégie, à savoir la reconstruction d'un champ scalaire. Dans la section 4.3, nous introduisons une généralisation du protocole d'estimation quantique pour le cas d'un champ vectoriel. En combinant cette méthode d'estimation multi-paramètres avec la détection comprimée, nous étudions, dans la section 4.4, la reconstruction d'un champ avec un nombre réduit de mesures. Dans la section 4.5, nous évaluons l'optimalité du protocole en utilisant la matrice d'information quantique de Fisher, et dans la section suivante (Section 4.6), nous reformulons le protocole dans le contexte de la théorie de l'estimation quantique multi-paramètres introduite dans le chapitre 1. Enfin, nous discutons brièvement de deux systèmes physiques qui permettent de mettre en œuvre le schéma d'estimation multi-paramètres étudié dans ce chapitre. Notez que les résultats originaux de ce chapitre sont détaillés dans l'article [98].

## 4.1 Gain quantique dans la détection distribuée

Nous considérons un système constitué d'un ensemble de  $N$  atomes à deux niveaux, qui peuvent également être considérés comme  $N$  spins  $1/2$ , répartis dans  $N$  modes spatialement séparés. Nous partons de l'hypothèse que nous pouvons manipuler les spins localement, comme nous pourrions le faire pour des atomes dans un réseau optique à l'aide d'un microscope [99], et effectuer des mesures collectives sur l'ensemble des atomes. Nous supposons que les corrélations quantiques entre les atomes, que nous souhaitons exploiter pour l'estimation multi-paramètres, sont obtenues grâce à l'hamiltonien one-axis twisting

$$\hat{H}_{\text{OAT}} = \hbar\chi \left( \sum_{k=1}^N \hat{s}_{k,z} \right)^2, \quad (4.1)$$

où  $\hat{s}_k = \hat{\sigma}_k/2$ ,  $\hat{\sigma}_k$  est le vecteur des matrices de Pauli pour l'atome dans le site  $k$  du réseau, en faisant évoluer pour un temps  $t$  l'état cohérent de spin initial où tous les spins polarisés le long de la direction  $x$

$$|\psi_0\rangle = |x\rangle^{\otimes N}. \quad (4.2)$$

Notre objectif principal est d'estimer l'ensemble de  $N$  paramètres inconnus  $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)^T$ . Pour illustrer, ces paramètres pourraient représenter une distribution spatiale non uniforme d'un champ magnétique. Le processus d'estimation commence par l'encodage de ces paramètres dans l'état préparé  $|\psi_t\rangle = e^{-i\hat{H}_{\text{OAT}}t/\hbar}|\psi_0\rangle$  du système de  $N$  spins, où chaque paramètre affecte un mode spatial donné par une rotation locale de spin. Nous considérons que l'encodage des paramètres se fait via la transformation unitaire

$$\hat{U}_{\vec{\theta}} = e^{-i\hat{H}_{\vec{n}}\vec{\theta}}, \quad (4.3)$$

générée par les observables  $\hat{H}_{\vec{n}} = (\hat{s}_{1,\vec{n}}, \dots, \hat{s}_{N,\vec{n}})^T$  avec  $\hat{s}_{k,\vec{n}} \equiv \vec{n} \cdot \hat{s}_k$ , où  $\vec{n} = (0, n_y, n_z)^T$  est un vecteur unitaire que nous considérons, sans perte de généralité, dans le plan perpendiculaire à la direction initiale du spin  $x$ .

### 4.1.1 Estimation de la moyenne arithmétique des paramètres

Considérons maintenant une observable  $\hat{S}_{\vec{m}}$  qui est linéaire en les composantes de spin collectif  $\hat{S}_{\vec{m}} = \sum_{j=1}^N \hat{s}_{j,\vec{m}}$  telle que  $\{\vec{m}, \vec{n}, \vec{e}_x\}$  forment une base orthonormée. Lorsque nous considérons de petites valeurs de tous les  $\theta_k$  autour de  $\theta_k = 0$  au premier ordre, la moyenne de l'observable  $\hat{S}_{\vec{m}}$  dans l'état  $\hat{U}_{\vec{\theta}}|\psi_t\rangle$  peut être exprimée comme

$$\langle \hat{U}_{\vec{\theta}}^\dagger \hat{S}_{\vec{m}} \hat{U}_{\vec{\theta}} \rangle \approx -i \langle [\hat{S}_{\vec{m}}, \hat{H}_{\vec{n}} \cdot \vec{\theta}] \rangle = -i \sum_{l,k} \theta_k \langle [\hat{s}_{l,\vec{m}}, \hat{s}_{k,\vec{n}}] \rangle \delta_{lk} = \sum_k \theta_k \langle \hat{s}_{k,x} \rangle, \quad (4.4)$$

où  $\langle \dots \rangle$  désigne la moyenne sur l'état  $|\psi_t\rangle$ . Notez que l'état  $|\psi_t\rangle$  produit par la dynamique one-axis twisting est symétrique par rapport à l'échange de deux particules. Cette symétrie nous conduit à l'égalité  $\langle \hat{s}_{k,x} \rangle = \langle \hat{s}_{1,x} \rangle$  pour tout  $k$ . En prenant en compte cette symétrie et en introduisant la combinaison linéaire des paramètres  $\Theta \equiv \sum_k \theta_k / N$ , l'équation (4.4) peut être écrite comme

$$\langle \hat{U}_{\vec{\theta}}^\dagger \hat{S}_{\vec{m}} \hat{U}_{\vec{\theta}} \rangle \approx \langle \hat{S}_x \rangle \Theta, \quad (4.5)$$

où  $\hat{S}_x = \sum_{k=1}^N \hat{s}_{k,x}$  est la composante  $x$  de spin collectif. Cela montre qu'une observable linéaire en les composantes de spin collectif n'est sensible, au premier ordre en tous les  $\theta_k$  au voisinage de  $\theta_k = 0$ , qu'à la moyenne arithmétique  $\Theta$  des paramètres  $\vec{\theta}$ . En appliquant la méthode des moments à un paramètre que nous avons introduit dans le chapitre 1, nous pouvons estimer  $\Theta$ . Pour ce faire, nous comparons la moyenne statistique de  $\mu$  mesures indépendantes de l'observable linéaire de spin collectif  $\bar{S}_{\vec{m}}^\mu$ , avec sa valeur moyenne  $\langle \hat{S}_{\vec{m}} \rangle$  obtenue théoriquement ou expérimentalement à partir d'un étalonnage en fonction de  $\Theta$ . Comme expliqué précédemment, lorsque  $\mu \gg 1$ , la méthode des moments à un paramètre nous offre la possibilité d'estimer la moyenne des paramètres  $\Theta$  avec une incertitude donnée par  $(\Delta \Theta_{\text{est}})^2 = (\Delta \hat{S}_{\vec{m}})^2 / (\mu |\partial_{\Theta} \langle \hat{U}_{\vec{\theta}}^\dagger \hat{S}_{\vec{m}} \hat{U}_{\vec{\theta}} \rangle|^2)$ . En utilisant le résultat (4.5), nous obtenons

$$(\Delta \Theta_{\text{est}})^2 = \frac{1}{\mu} \frac{(\Delta \hat{S}_{\vec{m}})^2}{|\langle \hat{S}_x \rangle|^2}. \quad (4.6)$$

### 4.1.2 Estimation d'autres combinaisons linéaires des paramètres

Étant donné que l'objectif est d'estimer tous les paramètres  $\theta_k$  (où  $k = 1, \dots, N$ ), il est alors indispensable de mesurer un ensemble de  $N$  combinaisons linéairement indépendantes de ces paramètres. Maintenant, explorons comment, en plus de mesurer la moyenne arithmétique des paramètres  $\sum_k \theta_k / N$  comme expliqué précédemment, nous pouvons également mesurer d'autres combinaisons linéaires de ces paramètres  $\theta_k$ . Une observation clé concernant le système considéré est que la réalisation d'une rotation locale de spin d'un angle  $\pi$  autour de l'axe  $x$ , suivie de l'encodage d'un paramètre  $\theta$  à l'aide du générateur  $\hat{s}_{\vec{n}}$  où  $\vec{n}$  se trouve dans le plan  $yz$ , puis d'une autre rotation d'un angle  $-\pi$  autour de l'axe  $x$  équivaut à changer le signe du paramètre encodé  $\theta$ , c'est à dire

$$e^{i\pi \hat{s}_x} e^{-i\theta \hat{s}_{\vec{n}}} e^{-i\pi \hat{s}_x} = e^{i\theta \hat{s}_{\vec{n}}}. \quad (4.7)$$

En effet, nous avons

$$e^{i\pi \hat{s}_x} e^{-i\theta \hat{s}_{\vec{n}}} e^{-i\pi \hat{s}_x} = \left( \sum_j \frac{(i\pi)^j}{j!} \hat{s}_x^j \right) \left( \sum_k \frac{(-i\theta)^k}{k!} \hat{s}_{\vec{n}}^k \right) \left( \sum_l \frac{(-i\pi)^l}{l!} \hat{s}_x^l \right). \quad (4.8)$$

En utilisant le fait que  $(2\hat{s}_{\vec{n}})^2 = \hat{\sigma}_{\vec{n}}^2 = \mathbb{1}$ , où  $\mathbb{1}$  est l'opérateur identité, nous pouvons démontrer

$$\begin{aligned}
 \sum_k \frac{(-i\theta)^k}{k!} \hat{s}_{\vec{n}}^k &= \sum_p \frac{(-i\theta)^{2p}}{(2p)!} \hat{s}_{\vec{n}}^{2p} + \sum_p \frac{(-i\theta)^{2p+1}}{(2p+1)!} \hat{s}_{\vec{n}}^{2p+1} \\
 &= \sum_p (-1)^p \frac{(\theta/2)^{2p}}{(2p)!} (2\hat{s}_{\vec{n}})^{2p} \\
 &\quad - 2i\hat{s}_{\vec{n}} \sum_p (-1)^p \frac{(\theta/2)^{2p+1}}{(2p+1)!} (2\hat{s}_{\vec{n}})^{2p} \\
 &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbb{1} - 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{s}_{\vec{n}}.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

En substituant cette dernière équation dans (4.8) et en simplifiant, nous obtenons

$$e^{i\pi\hat{s}_x} e^{-i\theta\hat{s}_{\vec{n}}} e^{-i\pi\hat{s}_x} = \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbb{1} - 8i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{s}_x \hat{s}_{\vec{n}} \hat{s}_x \right). \tag{4.10}$$

Or, nous avons  $8\hat{s}_x \hat{s}_{\vec{n}} \hat{s}_x = \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_{\vec{n}} \hat{\sigma}_x$  et

$$\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_{\vec{n}} \hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_{\vec{n}} + \hat{\sigma}_x [\hat{\sigma}_{\vec{n}}, \hat{\sigma}_x] = \hat{\sigma}_{\vec{n}} + [\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_{\vec{n}}] \hat{\sigma}_x. \tag{4.11}$$

Nous en déduisons donc

$$\begin{aligned}
 8\hat{s}_x \hat{s}_{\vec{n}} \hat{s}_x &= \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_{\vec{n}} \hat{\sigma}_x \\
 &= \hat{\sigma}_{\vec{n}} + \frac{1}{2} [\hat{\sigma}_x, [\hat{\sigma}_{\vec{n}}, \hat{\sigma}_x]] \\
 &= \hat{\sigma}_{\vec{n}} + \frac{1}{2} [\hat{\sigma}_x, [(n_y \hat{\sigma}_y + n_z \hat{\sigma}_z), \hat{\sigma}_x]] \\
 &= \hat{\sigma}_{\vec{n}} + \frac{1}{2} [\hat{\sigma}_x, n_y [\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_x] + n_z [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x]] \\
 &= \hat{\sigma}_{\vec{n}} - i (n_y [\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_z] - n_z [\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y]) \\
 &= \hat{\sigma}_{\vec{n}} - 2 (n_y \hat{\sigma}_y + n_z \hat{\sigma}_z) \\
 &= -\hat{\sigma}_{\vec{n}} \\
 &= -2\hat{s}_{\vec{n}}.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

En remplaçant cette dernière dans (4.10) et en utilisant l'équation (4.9), nous obtenons

$$e^{i\pi\hat{s}_x} e^{-i\theta\hat{s}_{\vec{n}}} e^{-i\pi\hat{s}_x} = \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{I} + 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{s}_{\vec{n}} \right) = e^{i\theta\hat{s}_{\vec{n}}}. \tag{4.13}$$

Compte tenu de cette observation, nous allons maintenant nous intéresser à l'estimation de  $N$  paramètres  $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)^T$  encodés via l'évolution unitaire (4.3). Mais, cette fois nous appliquerons  $\hat{V} = e^{-i \sum_k \alpha_k \hat{s}_{k,x}}$  et  $\hat{V}^\dagger$  avant et après l'encodage des paramètres respectivement, où  $\alpha_k = (1 - \epsilon_k)\pi/2$  et  $\epsilon_k = \pm 1$ . En utilisant (4.7), ceci peut être représenté par l'évolution unitaire

$$\hat{U}' = \hat{V}^\dagger e^{-i \sum_k \theta_k \hat{s}_{k,\vec{n}}} \hat{V} = \prod_k e^{i\frac{\pi}{2}(1-\epsilon_k)\hat{s}_{k,x}} e^{-i\theta_k \hat{s}_{k,\vec{n}}} e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\epsilon_k)\hat{s}_{k,x}} = \prod_k e^{-i\epsilon_k \theta_k \hat{s}_{k,\vec{n}}} = e^{-i \sum_k \theta'_k \hat{s}_{k,\vec{n}}} \tag{4.14}$$

avec  $\theta'_k = \epsilon_k \theta_k$ . L'évolution unitaire (4.14) décrit alors l'encodage des paramètres  $\vec{\theta}' = (\epsilon_1 \theta_1, \dots, \epsilon_N \theta_N)$  via la transformation unitaire (4.3), c'est à dire

$$\hat{U}' = \hat{V}^\dagger \hat{U}_{\vec{\theta}'} \hat{V} = \hat{U}_{\vec{\theta}'}. \tag{4.15}$$

En considérant l'estimation des  $N$  paramètres  $\vec{\theta}'$  via la transformation unitaire (4.15) et en utilisant un raisonnement similaire à celui utilisé pour obtenir (4.5), nous pouvons montrer qu'au premier ordre, à proximité de  $\theta'_k = 0$ , la moyenne de  $\hat{S}_{\vec{m}}$  dans l'état  $\hat{U}_{\vec{\theta}'}|\psi_t\rangle$  varie comme

$$\langle \hat{U}_{\vec{\theta}'}^\dagger \hat{S}_{\vec{m}} \hat{U}_{\vec{\theta}'} \rangle \approx \langle \hat{S}_x \rangle \sum_k \frac{\epsilon_k \theta_k}{N}. \quad (4.16)$$

Cette dernière équation constitue une généralisation de l'équation (4.5). Elle montre que, grâce à l'utilisation des renversements de spin locaux et à l'estimation d'un seul paramètre à l'aide de la méthode des moments, la mesure d'une observable linéaire de spin collectif permet l'estimation d'une combinaison linéaire des paramètres de la forme

$$\Theta = \sum_k \frac{\epsilon_k \theta_k}{N}, \quad (4.17)$$

où  $\epsilon_k = \pm 1$  avec la même incertitude (4.6). Il est essentiel de noter que la mesure de la même observable de spin collectif  $\hat{S}_{\vec{m}}$  nous permet d'estimer différentes combinaisons linéaires des paramètres en modifiant les  $\epsilon_k$ . Par conséquent, la même courbe expérimentale d'étalonnage peut être utilisée pour l'estimation de toutes les combinaisons des paramètres.

### 4.1.3 Gain métrologique quantique

Comme nous l'avons expliqué en détail au chapitre 2, lorsqu'il s'agit d'un système dans l'état cohérent de spin (4.2), l'incertitude associée à l'estimation de la combinaison des paramètres  $\Theta$  est limitée par la limite quantique standard, donnée par  $(\Delta\Theta)_{\text{LQS}}^2 = 1/(\mu N)$ . Cependant, dans l'état  $|\psi_t\rangle$ , généré au temps  $t$  de la dynamique OAT, cette incertitude peut atteindre une valeur inférieure  $(\Delta\Theta_{\text{est}})^2 = \xi^2/(\mu N)$  où  $\xi^{-2}$  quantifie le gain métrologique quantique associé. Lorsque nous mesurons une composante linéaire  $\hat{S}_{\vec{m}}$  de spin collectif, l'amélioration quantique est limitée par  $\xi_{\text{L}}^{-2} \leq \xi_{\text{L,best}}^{-2}$ , où  $\xi_{\text{L,best}}^{-2}$  est donné dans la limite de grand nombre d'atomes par l'équation (2.53) du chapitre 2. Cette amélioration quantique linéaire optimale est obtenue en utilisant la direction de mesure optimale  $\vec{m} = \vec{m}_{\text{L,opt}}$  et en utilisant l'état de spin comprimé préparé à l'instant optimal  $t = t_{\text{L,best}}$  de la dynamique one-axis twisting, comme spécifié dans l'équation (2.53) du chapitre 2. Nous avons vu précédemment que cette limitation sur le gain métrologique est due à la restriction de la mesure aux observables linéaires de spin, qui ne capturent plus les caractéristiques fines des états quantiques non-gaussiens générés par la dynamique one-axis twisting au-delà de  $t_{\text{L,best}}$ . Dans le cas de l'estimation d'un seul paramètre, une approche possible pour surpasser cette limite est d'utiliser la technique de mesure après interaction. Voyons maintenant si c'est également le cas dans le contexte de protocole d'estimation multi-paramètres considéré dans ce chapitre. Pour ce faire, nous supposons l'ajout d'une deuxième évolution OAT, notée  $\hat{U}_\tau = e^{-i\hat{H}_{\text{OAT}}\tau/\hbar}$ , avec  $\tau = -t$ , après l'encodage des paramètres  $\vec{\theta}'$  et avant la mesure de l'observable linéaire  $\hat{S}_{\vec{m}}$  où  $\vec{m}$  se trouve dans le plan  $yz$ . En pratique, ceci est équivalent à la mesure de l'observable non-linéaire de spin collectif  $\hat{X}_{\text{MAI}} = e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{S}_{\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}$ . Au premier ordre en tous les  $\theta'_k$  au voisinage de  $\theta'_k = 0$ , la moyenne de l'observable  $\hat{X}_{\text{MAI}}$  dans l'état  $\hat{U}_{\vec{\theta}'}|\psi_t\rangle$  peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} \langle \hat{U}_{\vec{\theta}'}^\dagger \hat{X}_{\text{MAI}} \hat{U}_{\vec{\theta}'} \rangle &\approx \left\langle \left( \hat{I} + i\hat{H}_{\vec{n}} \cdot \vec{\theta}' \right) e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{S}_{\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2} \left( \hat{I} - i\hat{H}_{\vec{n}} \cdot \vec{\theta}' \right) \right\rangle \\ &= -i \sum_{l,k} \epsilon_k \theta_k \langle [e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{s}_{l,\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}, \hat{s}_{k,\vec{n}}] \rangle \\ &= -i \sum_{l,k} \epsilon_k \theta_k \left[ \langle [e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{s}_{l,\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}, \hat{s}_{k,\vec{n}}] \rangle \delta_{l,k} + \langle [e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{s}_{l,\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}, \hat{s}_{k,\vec{n}}] \rangle (1 - \delta_{l,k}) \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

Etant donné que l'état généré par la dynamique one-axis twisting est symétrique par rapport à l'échange de deux particules, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \langle \hat{U}_{\vec{\theta}}^\dagger \hat{X}_{\text{MAI}} \hat{U}_{\vec{\theta}} \rangle &\approx -i \left[ \langle [e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{s}_{1,\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}, \hat{s}_{1,\vec{n}}] \rangle + (N-1) \langle [e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{s}_{1,\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}, \hat{s}_{2,\vec{n}}] \rangle \right] \sum_k \epsilon_k \theta_k, \\ &= -i \langle [e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{S}_{\vec{m}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}, \hat{S}_{\vec{n}}] \rangle \sum_k \frac{\epsilon_k \theta_k}{N}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

De manière similaire à ce que nous avons observé pour l'observable linéaire de spin collectif  $\hat{S}_{\vec{m}}$ , cette dernière équation montre que l'observable non-linéaire de spin  $\hat{X}_{\text{MAI}}$  est également sensible, au premier ordre en tous les  $\theta'_k$  dans la proximité de  $\theta'_k = 0$ , uniquement à la combinaison linéaire des paramètres  $\Theta = \sum_k \epsilon_k \theta_k / N$ . Nous pouvons donc utiliser la méthode des moments pour estimer cette combinaison avec une incertitude donnée par  $(\Delta \Theta_{\text{est}})^2 = (\Delta \hat{X}_{\text{MAI}})^2 / (\mu |\partial_{\Theta} \langle \hat{U}_{\vec{\theta}}^\dagger \hat{X}_{\text{MAI}} \hat{U}_{\vec{\theta}} \rangle |^2)$ . En utilisant la définition de l'observable  $\hat{X}_{\text{MAI}}$  et l'équation (4.19), nous obtenons

$$(\Delta \Theta_{\text{est}})^2 = \frac{1}{\mu} \frac{N/4}{|\langle [e^{i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{S}_{\vec{m}} e^{-i\chi t \hat{S}_z^2}, \hat{S}_{\vec{n}}] \rangle|^2}. \quad (4.20)$$

Ceci est exactement l'incertitude atteinte par la technique MAI dans le cas de l'estimation d'un seul paramètre. Comme indiqué précédemment, pour un temps  $\chi t_{\text{L,best}} < \chi t \leq 1/\sqrt{N}$  de la dynamique OAT, le gain quantique associé à (4.20), avec un choix optimal de  $\vec{n}$  et de  $\vec{m}$ , est plus important que le meilleur gain métrologique associé à la mesure d'une observable linéaire de spin collectif, c'est à dire  $\xi_{\text{MAI}}^{-2} > \xi_{\text{L,best}}^{-2}$ . En effet, le gain quantique associé à la technique MAI atteint une valeur maximale de  $\xi_{\text{MAI,best}}^{-2} = N/e$  à un instant optimal  $\chi t_{\text{MAI,best}} = 1/\sqrt{N}$  de la dynamique OAT dans la limite de grands  $N$ .

#### 4.1.4 Coefficients de Hadamard et estimation des paramètres originaux

Jusqu'à présent, nous avons présenté une approche qui permet d'estimer toute combinaison linéaire d'un ensemble de paramètres  $\theta_k$ , de la forme  $\sum_k \epsilon_k \theta_k / N$ , où  $\epsilon_k = \pm 1$ , avec un avantage quantique significatif. Cependant, lorsqu'il s'agit d'estimer  $N$  paramètres, il suffit d'estimer seulement  $N$  combinaisons linéaires de ces paramètres. Dans ce qui suit, nous allons montrer quelles combinaisons spécifiques, parmi toutes celles de la forme  $\sum_k \epsilon_k \theta_k / N$  avec  $\epsilon_k = \pm 1$ , doivent être mesurées ou quels choix pour  $\epsilon_k$  doivent être faits afin de reconstruire le signal  $\vec{\theta}$ . Un important théorème mathématique affirme qu'un signal  $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)^T$  de taille  $N$  où  $N = 2^m$ ,  $m$  étant un entier, peut être décomposé en utilisant la base des fonctions orthogonales de Walsh. Ces fonctions ont des valeurs de seulement  $\pm 1$  et peuvent être exprimées en termes d'une matrice carrée de taille  $N$  connue sous le nom de la matrice de Hadamard  $\mathcal{H}_m$

$$\theta_k = \sum_j [\mathcal{H}_m]_{kj} \tilde{\theta}_j. \quad (4.21)$$

Les  $\tilde{\theta}_j$  (pour  $j = 1, \dots, N$ ) dans cette dernière équation sont les coefficients de Hadamard associés au signal  $\vec{\theta}$ , et la matrice  $\mathcal{H}_m$ , qui satisfait la propriété  $[[\mathcal{H}_m]_{kj}] = 1/\sqrt{N}$ , est définie par récurrence avec  $\mathcal{H}_0 = 1$  et, pour  $m > 0$

$$\mathcal{H}_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{m-1} & \mathcal{H}_{m-1} \\ \mathcal{H}_{m-1} & -\mathcal{H}_{m-1} \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

En utilisant l'équation (4.21), nous pouvons exprimer le  $j^{\text{ème}}$  coefficient de Hadamard  $\tilde{\theta}_j$  en termes de  $\theta_k$  comme suit

$$\tilde{\theta}_j = \sum_k [\mathcal{H}_m^{-1}]_{jk} \theta_k, \quad (4.23)$$

où  $\mathcal{H}_m^{-1} = \mathcal{H}_m$ . En comparant ce coefficient de Hadamard avec la combinaison linéaire des paramètres (4.17), nous constatons que pour un choix approprié des  $\epsilon_k = \pm 1$ , nous avons

$$\sqrt{N}\Theta = \tilde{\theta}. \quad (4.24)$$

En d'autres termes, il apparaît que les coefficients de Hadamard du signal encodé  $\vec{\theta}$  ont la même forme que les combinaisons linéaires des paramètres qui peuvent être estimées par la stratégie que nous avons introduit précédemment. Ainsi, parmi toutes les combinaisons linéaires des paramètres de la forme  $\sum_k \epsilon_k \theta_k / N$  avec  $\epsilon_k = \pm 1$ , nous devons estimer les coefficients de Hadamard associés au signal  $\vec{\theta}$ . Une fois ces coefficients mesurés indépendamment et avec la même incertitude, (que ce soit celle correspondante à (4.6) lorsque l'estimation est basée sur la mesure d'une observable linéaire de spin collectif, ou celle correspondante à (4.20) lorsque la technique MAI est utilisée), nous pouvons déduire le signal original en utilisant la transformation de Hadamard (4.21). Par définition du gain métrologique  $\xi^{-2}$  introduite dans le chapitre 2, l'incertitude sur l'estimation des combinaisons linéaires  $\Theta$  est le même, quel que soit le choix des  $\epsilon_k$ , et elle est donnée par  $(\Delta\Theta_{\text{est}})^2 = \xi^2 / (\mu N)$ . Selon la relation (4.24), nous déduisons que l'incertitude sur chacun des coefficients de Hadamard estimés est  $(\Delta\theta_{j,\text{est}})^2 = \xi^2 / \mu$ . En utilisant la transformation de Hadamard (4.21), nous pouvons déduire que l'incertitude sur l'estimation des paramètres originaux  $\theta_k$  est identique pour tous les  $k = 1, \dots, N$  et qu'elle est donnée par

$$(\Delta\theta_{k,\text{est}})^2 = \frac{\xi^2}{\mu} \quad \forall k. \quad (4.25)$$

Tout d'abord, il est important de noter que, lorsque les  $N$  atomes sont utilisés pour estimer le même paramètre inconnu  $\theta_k = \theta$  pour tout  $k$ , nous obtenons un gain statistique qui s'ajoute au gain quantique où l'incertitude sur le paramètre estimé sera donnée par  $(\Delta\theta)^2 = \xi^2 / (\mu N)$ . En revanche, si ces  $N$  atomes sont utilisés pour estimer  $N$  paramètres inconnus différents, aucun gain statistique n'est réalisable. Ceci se caractérise par l'absence du facteur statistique  $1/N$  dans l'incertitude (4.25). Néanmoins, les corrélations quantiques entre les atomes produites par la dynamique one-axis twisting nous permettent de faire apparaître une dépendance à la taille du système  $N$  dans les incertitudes  $(\Delta\theta_k)^2$  par l'intermédiaire du paramètre  $\xi$ . La dépendance de ce paramètre  $\xi$  en la taille de système  $N$  et en le temps  $\chi t$  de la dynamique OAT en absence et en présence de décohérence, avec une mesure linéaire ou par la technique MAI, est étudiée en détail dans les deux chapitres précédents. Dans les sections suivantes, nous fournissons d'abord un exemple illustrant l'application de la méthode d'estimation multi-paramètres présentée ici, en nous concentrant sur la cartographie d'un champ scalaire à une dimension. Ensuite, nous généralisons la stratégie expliquée dans cette section au cas de l'estimation d'un champ vectoriel en étudiant un exemple concret. De plus, nous explorons le concept de détection comprimée en réduisant le nombre de mesures collectives.

#### 4.1.5 Généralisation au cas de $N/M$ atomes par site

Jusqu'à présent, et aussi dans les exemples qui suivent, nous considérons le protocole d'estimation multi-paramètres dans le cas d'un réseau avec un atome par site. Dans ce paragraphe, nous généralisons les résultats précédents au cas d'un réseau avec  $N/M$  atomes par site, où  $N$  est le nombre total d'atomes et  $M$  le nombre de sites du réseau. Dans le cas général, le hamiltonien one-axis twisting, qui génère les corrélations quantiques entre les atomes, s'écrit  $\hat{H}_{\text{OAT}} = \hbar\chi \left( \sum_{k=1}^M \hat{S}_{k,z} \right)^2$  où,  $\hat{S}_{k,z} = \sum_{j=1}^{N/M} \hat{s}_{k,z}$  est la composante  $z$  du spin collectif dans le mode  $k$ . Un ensemble de  $M$  paramètres inconnus sont encodés via la transformation unitaire (4.3), avec les générateurs  $\hat{H}_{\vec{n}} = (\hat{S}_{1,\vec{n}}, \dots, \hat{S}_{M,\vec{n}})^T$ . Au premier ordre, autour de  $\theta_k = 0$ , en posant  $\Theta = \sum_k \theta_k / M$ , l'équation (4.5) reste valable pour n'importe quelle valeur de  $M$ . Par conséquent, en utilisant la méthode des

moments à un paramètre, où le paramètre inconnu est estimé à partir de la moyenne statistique de  $\mu$  mesures indépendantes d'une observable de spin collectif, nous pouvons estimer la combinaison linéaire des paramètres  $\Theta$  avec l'incertitude (4.6).

Voyons maintenant l'effet de renversement des spins locaux avant et après l'encodage des paramètres. La réalisation d'une rotation locale de spin d'un angle  $\pi$  autour de l'axe  $x$  dans un mode  $k$  quelconque, suivie de l'encodage du paramètre  $\theta_k$  à l'aide du générateur  $\hat{S}_{k,\vec{n}}$ , puis d'une autre rotation d'un angle  $-\pi$  autour de l'axe  $x$  s'écrit

$$\begin{aligned} e^{i\pi\hat{S}_{k,x}} e^{-i\theta_k\hat{S}_{k,\vec{n}}} e^{-i\pi\hat{S}_{k,x}} &= e^{i\pi\sum_{j=1}^{N/M}\hat{s}_{j,x}^{(k)}} e^{-i\theta_k\sum_{j=1}^{N/M}\hat{s}_{j,\vec{n}}^{(k)}} e^{-i\pi\sum_{j=1}^{N/M}\hat{s}_{j,x}^{(k)}} \\ &= \prod_{j=1}^{N/M} e^{i\pi\hat{s}_{j,x}^{(k)}} \prod_{j=1}^{N/M} e^{-i\theta_k\hat{s}_{j,\vec{n}}^{(k)}} \prod_{j=1}^{N/M} e^{-i\pi\hat{s}_{j,x}^{(k)}} \\ &= \prod_{j=1}^{N/M} \left( e^{i\pi\hat{s}_{j,x}^{(k)}} e^{-i\theta_k\hat{s}_{j,\vec{n}}^{(k)}} e^{-i\pi\hat{s}_{j,x}^{(k)}} \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

En utilisant le résultat (4.7), nous obtenons

$$e^{i\pi\hat{S}_{k,x}} e^{-i\theta_k\hat{S}_{k,\vec{n}}} e^{-i\pi\hat{S}_{k,x}} = \prod_{j=1}^{N/M} e^{i\theta_k\hat{s}_{j,\vec{n}}^{(k)}} = e^{i\theta_k\sum_{j=1}^{N/M}\hat{s}_{j,\vec{n}}^{(k)}} = e^{i\theta_k\hat{S}_{k,\vec{n}}}. \quad (4.27)$$

Par conséquent, dans le cas général avec  $N/M$  atomes par site du réseau, l'application d'une rotation d'un spin local  $k$  d'un angle  $\pi$  autour de l'axe  $x$  avant l'encodage des paramètres et d'une autre rotation d'angle  $-\pi$  autour du même axe  $x$  après l'encodage des paramètres correspond également au changement de signe du paramètre  $\theta_k$ . Ceci nous permet donc d'estimer toute combinaison linéaire des paramètres de la forme  $\Theta = \sum_{k=1}^M \epsilon_k \theta_k / M$ , où  $\epsilon_k = \pm 1$ , avec la même incertitude (4.6).

Prenons maintenant la transformation de Hadamard du signal  $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_M)^T$  dont la taille est  $M = 2^m$ . Dans ce cas, un coefficient de Hadamard  $\tilde{\theta}$  est relié à la combinaison linéaire  $\Theta$ , que nous pouvons directement estimer avec la stratégie étudiée ici, par

$$\sqrt{M}\Theta = \tilde{\theta}. \quad (4.28)$$

L'incertitude sur l'estimation du coefficient de Hadamard est alors donnée par  $(\Delta\tilde{\theta}_{\text{est}})^2 = M(\Delta\Theta_{\text{est}})^2$ . Pour un état préparé via la dynamique OAT à partir de l'état cohérent de spin (4.2), le gain quantique associé est  $\xi^{-2}$  et l'incertitude sur la combinaison linéaire  $\Theta$  est  $(\Delta\Theta_{\text{est}})^2 = \xi^2/(\mu N)$ . L'incertitude sur l'estimation des paramètres originaux  $\theta_k$  est donc donnée par

$$(\Delta\theta_{k,\text{est}})^2 = (\Delta\tilde{\theta}_{k,\text{est}})^2 = \frac{\xi^2}{\mu(N/M)} \quad \forall k. \quad (4.29)$$

Dans le cas particulier  $M = N$ , nous retrouvons le cas d'un atome par site (4.25). Lorsque  $N/M > 1$ , l'incertitude sur les paramètres estimés est améliorée par un facteur statistique de  $1/(N/M)$ . Cela est dû au fait que chaque paramètre  $\theta_k$  est encodé sur un ensemble de  $N/M$  atomes.

## 4.2 Estimation d'un champ scalaire

Dans cette section, nous illustrons l'application de la stratégie d'estimation détaillée dans la section précédente à l'estimation d'un champ scalaire  $\theta(x)$  qui varie le long d'une direction de l'espace. Ce champ scalaire peut représenter, dans la pratique, un champ magnétique  $\vec{B} = B(x)\vec{e}_z$ , avec une direction fixée, et une dépendance spatiale à une dimension. Pour étudier l'estimation de

ce signal  $\theta(x)$ , nous effectuons une simulation numérique en utilisant  $N = 8$  atomes à deux niveaux. Dans cette simulation, nous considérons un champ de forme sinusoïdale

$$\theta(x) = \theta_0 \sin x, \quad (4.30)$$

que nous discrétisons sur  $N$  sites  $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)^T$  avec  $\theta_k \equiv \theta(x_k)$ , chaque site ayant comme capteur un seul atome à deux niveaux. Selon le protocole expliqué précédemment, pour estimer le coefficient de Hadamard  $\tilde{\theta}_j$ , après l'évolution temporelle du système pour un temps  $t$  avec le hamiltonien one-axis twisting à partir de l'état cohérent de spin (4.2), le renversement des spins locaux, l'encodage des paramètres et le deuxième renversement des spins locaux sont appliqués via la transformation unitaire

$$\hat{U}' = e^{i \sum_k \alpha_k \hat{s}_{k,x}} e^{-i \sum_k \theta_k \hat{s}_{k,\vec{n}}} e^{-i \sum_k \alpha_k \hat{s}_{k,x}} \quad \text{avec} \quad \alpha_k = (1 - \epsilon_k) \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \epsilon_k = \sqrt{N} [\mathcal{H}_3^{-1}]_{jk}. \quad (4.31)$$

Selon la définition de la matrice de Hadamard (4.22),  $\mathcal{H}_3$  est donnée par

$$\mathcal{H}_3 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

La direction  $\vec{n}$  des générateurs  $\hat{H}_{\vec{n}} = (\hat{s}_{1,\vec{n}}, \dots, \hat{s}_{N,\vec{n}})^T$  est la même dans tous les sites et est choisie de manière optimale en fonction de la stratégie de mesure choisie. Dans l'état généré  $\hat{U}'|\psi_t\rangle$ , nous effectuons la mesure de l'observable collectif optimale  $\hat{X}$ , qui peut être  $\hat{S}_{\vec{n}}$  ou  $\hat{X}_{\text{MAI}}$  selon le protocole de mesure utilisé. Notez que pour chaque  $\tilde{\theta}_j$ , cette procédure, préparation de l'état  $|\psi_t\rangle$ , l'application de la transformation  $\hat{U}'$  et la mesure de l'observable optimale, est répété  $\mu$  fois. Les résultats de mesures  $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$  sont les valeurs propres de l'observable mesurée. Dans cette simulation numérique, ces résultats de mesures peuvent être obtenues en échantillonnant la distribution de probabilité

$$P_i = |\langle \lambda_i | \hat{U}' | \psi_t \rangle|^2, \quad (4.33)$$

où  $|\lambda_i\rangle$  est l'état propre de l'observable mesurée  $\hat{X}$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$ . Comme mentionné précédemment, nous utilisons la méthode des moments pour estimer les coefficients de Hadamard. À partir des  $\mu$  résultats de mesure, nous calculons donc la moyenne statistique  $\bar{X}_\mu = \sum_i \lambda_i / \mu$ . En utilisant la courbe d'étalonnage, représenté dans la figure 4.2.1-(b), qui donne la moyenne théorique de l'observable de mesure  $\hat{X}$  en fonction de  $\Theta$  donné par (4.16) dans le cas de la mesure d'une observable linéaire de spin collectif ou (4.19) lorsque nous utilisons la méthode MAI, le coefficient de Hadamard  $\tilde{\theta}_j = \sqrt{N} \Theta$  est estimé en utilisant la valeur de  $\Theta$  estimée comme valeur pour laquelle  $\langle \hat{X} \rangle = \bar{X}_\mu$ . Dans la simulation numérique, la variance statistique  $(\Delta \tilde{\theta}_j)_\mu^2$  du coefficient de Hadamard, déduite à partir de  $\mu$  mesures indépendantes, est calculer numériquement en répétant plusieurs fois la procédure de l'estimation de  $\tilde{\theta}_j$ . C'est ainsi que nous mesurons tous les coefficients de Hadamard et, en utilisant la transformation (4.21) et la matrice de Hadamard (4.32), nous déduisons les paramètres originaux  $\vec{\theta}$  et donc nous mesurons le champ scalaire  $\theta(x)$ . Le champ scalaire (4.30) et son estimation avec l'état cohérent de spin initial (4.2), l'état comprimé de spin généré à l'instant  $t_{L,\text{best}}$  de la dynamique OAT et l'état généré à  $t = t_{\text{MAI},\text{best}}$ , où la mesure est effectuée avec la technique MAI, sont représentés dans la figure 4.2.1-(a).



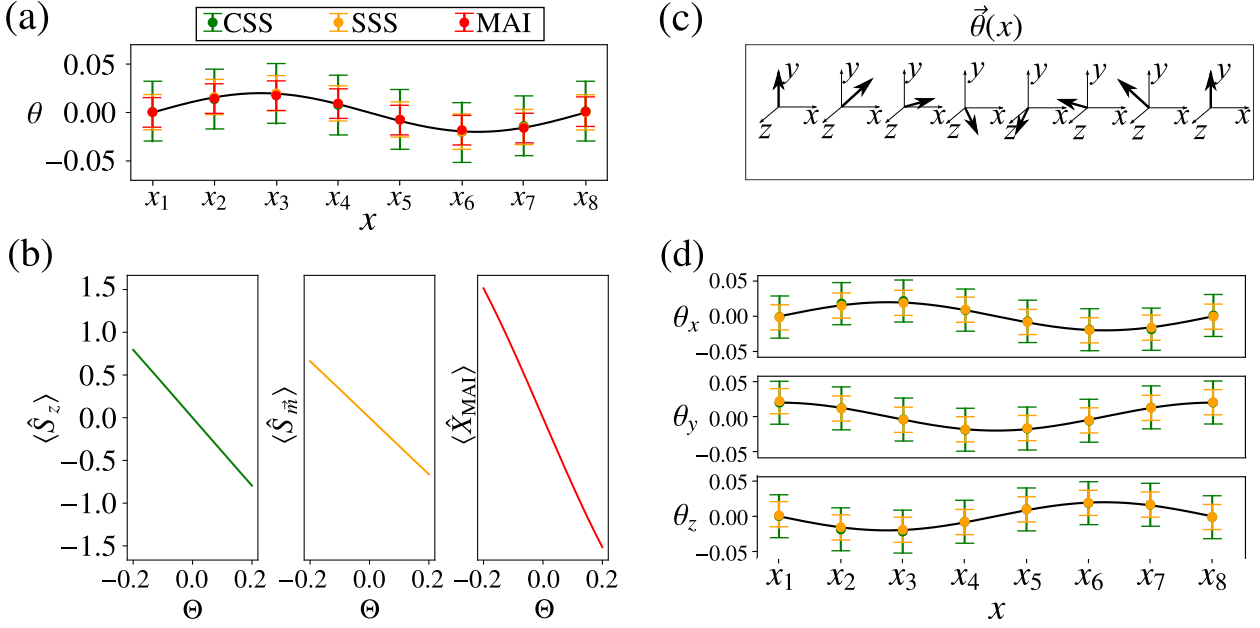


FIGURE 4.2.1 – Simulation numérique de l'estimation d'un champ à une dimension avec  $N = 8$  atomes : (a) champ scalaire. Le champ (4.30) avec  $\theta_0 = 0.02$  est représenté par la ligne pleine, et sa reconstruction avec  $\mu = 10^3$  mesures, pour chacun des huit coefficients de Hadamard, est représentée par les symboles. L'estimation est effectuée avec l'état cohérent de spin initial (vert), l'état comprimé de spin généré à l'instant  $t_{L,best}$  de la dynamique one-axis twisting (orange) et l'état généré au moment  $t_{MAI,best}$  de la dynamique OAT où la mesure est effectuée avec la technique MAI (rouge). Les écarts-types correspondants (lignes verticales) sont obtenus ici en répétant 500 fois la procédure d'estimation pour chaque  $\tilde{\theta}_j$  et sont en bon accord avec la valeur théorique (4.25). (b) courbes d'étalonnage utilisées avec l'état cohérent de spin (à gauche), l'état comprimé de spin généré à  $t_{L,best}$  (au milieu) et l'état généré à  $t_{MAI,best}$  (à droite). (c) et (d) champ vectoriel. Les composantes (4.37) avec  $\theta_0 = 0.02$  sont représentées par les lignes pleines, et leur reconstruction avec l'état cohérent de spin (vert) et l'état comprimé de spin généré à  $t_{L,best}$  (orange) pour  $\mu = 10^3$  est représentée par les symboles. Les lignes verticales représentent les écarts-types correspondants obtenus en répétant 500 fois la procédure d'estimation de chaque  $\tilde{\theta}_j$ .

### 4.3 Estimation d'un champ vectoriel

Jusqu'à présent, nous avons examiné la manière d'estimer un champ scalaire dont la direction dans l'espace est fixe. Maintenant, concentrons-nous sur le cas d'un champ vectoriel dont les  $3N$  paramètres inconnus sont  $\vec{\theta}_x, \vec{\theta}_y, \vec{\theta}_z$ , avec  $\vec{\theta}_\alpha = (\theta_{\alpha,1}, \dots, \theta_{\alpha,N})^T$  pour  $\alpha = x, y, z$ . Dans ce cas, les paramètres sont encodés sur les  $N$  atomes via l'évolution unitaire

$$\hat{U} = e^{-i(\hat{H}_x \cdot \vec{\theta}_x + \hat{H}_y \cdot \vec{\theta}_y + \hat{H}_z \cdot \vec{\theta}_z)}, \quad (4.34)$$

où  $\hat{H}_\alpha = (\hat{s}_{1,\alpha}, \dots, \hat{s}_{N,\alpha})^T$  sont les générateurs locaux de rotation autour de l'axe  $\alpha = x, y, z$ . L'équation (4.34) généralise l'équation (4.3) pour l'encodage de trois paramètres par mode. Il est important de noter que dans un mode donné, la transformation (4.34) entraîne l'encodage de trois paramètres générés par des observables de spin locales qui ne commutent pas entre elles. Dans le contexte de l'estimation multi-paramètres, mesurer de tels paramètres est généralement connu pour être difficile en raison de l'incompatibilité des mesures optimales correspondantes [100–104]. Néanmoins, ceci peut être réalisé avec des états particuliers où la valeur moyenne de tous les commutateurs des générateurs est nulle [100, 102, 104]. Une possibilité d'éviter ces complications

est d'estimer les trois composantes du champ séparément, l'une après l'autre. Le point essentiel est que dans le cas de la mesure d'une observable linéaire de spin collective, l'estimation de l'une des composantes du champ n'est pas affectée par la présence des deux autres composantes orthogonales. En effet, Au voisinage de  $\vec{\theta}_x = \vec{0}$ ,  $\vec{\theta}_y = \vec{0}$  et  $\vec{\theta}_z = \vec{0}$ , la moyenne d'une composante linéaire de spin collectif  $\hat{S}_{\vec{r}}$ , avec  $\vec{r} = \vec{e}_y$  ou  $\vec{r} = \vec{e}_z$ , dans l'état  $\hat{U}|\psi_t\rangle$  s'écrit comme

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{U}^\dagger \hat{S}_{\vec{r}} \hat{U} \rangle &\approx -i \langle [\hat{S}_{\vec{r}}, \vec{\theta}_x \cdot \hat{H}_x + \vec{\theta}_y \cdot \hat{H}_y + \vec{\theta}_z \cdot \hat{H}_z] \rangle \\
 &= -i \left( \sum_{k,j} \theta_{k,x} \langle [\hat{s}_{j,\vec{r}}, \hat{s}_{k,x}] \rangle + \sum_{k,j} \theta_{k,y} \langle [\hat{s}_{j,\vec{r}}, \hat{s}_{k,y}] \rangle + \sum_{k,j} \theta_{k,z} \langle [\hat{s}_{j,\vec{r}}, \hat{s}_{k,z}] \rangle \right) \\
 &= -i \left( \sum_{k,j} \theta_{k,y} \langle [\hat{s}_{j,\vec{r}}, \hat{s}_{k,y}] \rangle + \sum_{k,j} \theta_{k,z} \langle [\hat{s}_{j,\vec{r}}, \hat{s}_{k,z}] \rangle \right) \\
 &= \begin{cases} \langle \hat{S}_x \rangle (\sum_k \theta_{k,y}/N) & \text{si } \vec{r} = \vec{e}_z \\ \langle \hat{S}_x \rangle (\sum_k \theta_{k,z}/N) & \text{si } \vec{r} = \vec{e}_y \end{cases}. \tag{4.35}
 \end{aligned}$$

Comme la moyenne de l'observable du spin collectif  $\hat{S}_{\vec{r}}$  ne dépend que d'une composante du champ vectoriel,  $\vec{\theta}_y$  ou  $\vec{\theta}_z$  selon le choix de  $\vec{r}$ , les deux composantes peuvent donc être estimées séparément, l'une après l'autre. En faisant une rotation de l'état  $|\psi_t\rangle$  afin de polariser tous les spins le long de la direction  $y$  en utilisant la rotation  $|\psi'_t\rangle = e^{-i(\pi/2)\hat{S}_z}|\psi_t\rangle$ , la moyenne de  $\hat{S}_z$  sous l'évolution (4.34), au voisinage de  $\vec{\theta}_x = \vec{0}$ ,  $\vec{\theta}_y = \vec{0}$  et  $\vec{\theta}_z = \vec{0}$ , est donnée par

$$\begin{aligned}
 \langle \psi'_t | \hat{U}^\dagger \hat{S}_z \hat{U} | \psi'_t \rangle &\approx -i \sum_{k,j} \theta_{k,x} \langle \psi'_t | [\hat{s}_{j,z}, \hat{s}_{k,x}] | \psi'_t \rangle \\
 &= \langle \psi'_t | \hat{S}_y | \psi'_t \rangle \left( \sum_k \theta_{k,x}/N \right) \\
 &= \langle \hat{S}_x \rangle \left( \sum_k \theta_{k,x}/N \right). \tag{4.36}
 \end{aligned}$$

La mesure de la composante  $\hat{S}_z$  dans ce cas nous permet d'estimer la composante  $\vec{\theta}_x$  du champ. Afin d'illustrer l'application de cette méthode d'estimation d'un champ vectoriel distribué dans l'espace, nous effectuons une simulation numérique en utilisant  $N = 8$  atomes à deux niveaux. Pour cela, nous considérons un champ vectoriel avec les composantes

$$\theta_\alpha(x) = \theta_0 \sin(x + \varphi_\alpha) \quad \text{pour} \quad \alpha = x, y, z \quad \text{et} \quad \varphi_x = 0, \quad \varphi_y = \pi/2, \quad \varphi_z = \pi, \tag{4.37}$$

discrétisé sur  $N$  sites comme montré dans la figure 4.2.1-(c). Comme expliqué précédemment, chaque composante de ce champ est estimée séparément. Pour estimer la composante  $\theta_\alpha$ , nous commençons par préparer les atomes dans l'état initial approprié. Ensuite, le champ vectoriel est encodé en utilisant la transformation unitaire (4.34), et l'observable linéaire de spin collectif appropriée est mesurée en obtenant l'une de ses valeurs propres  $\lambda$ . Dans la simulation numérique, ces résultats de mesure peuvent être reproduits en échantillonnant la distribution de probabilité (4.33). Les composantes (4.37) et leurs estimations, avec l'état cohérent de spin et l'état comprimé de spin généré à  $t_{L,\text{best}}$  de la dynamique OAT, sont représentées dans la figure 4.2.1-(d).

Contrairement au cas de la mesure d'une observable linéaire de spin collectif, dans le cas de la technique MAI, la présence d'autres composantes affect l'estimation d'une composante de champ. Cela est dû à la non-linéarité de l'observable mesurée par la technique MAI. Pour mieux comprendre, nous supposons que l'observable  $\hat{X}_{\text{MAI}} = e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{S}_{\vec{r}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}$  est mesurée après l'encodage des

paramètres. Au voisinage de  $\vec{\theta}_x = \vec{0}$ ,  $\vec{\theta}_y = \vec{0}$  et  $\vec{\theta}_z = \vec{0}$ , la moyenne de cette observable est

$$\begin{aligned} \langle \hat{U}^\dagger \hat{X}_{\text{MAI}} \hat{U} \rangle &\approx -i \langle [\hat{X}_{\text{MAI}}, \vec{\theta}_x \cdot \hat{H}_x + \vec{\theta}_y \cdot \hat{H}_y + \vec{\theta}_z \cdot \hat{H}_z] \rangle \\ &= -i \left( \sum_{k,j} \theta_{k,x} \langle [e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{s}_{j,\vec{r}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}, \hat{s}_{k,x}] \rangle + \sum_{k,j} \theta_{k,y} \langle [e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{s}_{j,\vec{r}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}, \hat{s}_{k,y}] \rangle \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k,j} \theta_{k,z} \langle [e^{-i\chi t \hat{S}_z^2} \hat{s}_{j,\vec{r}} e^{i\chi t \hat{S}_z^2}, \hat{s}_{k,z}] \rangle \right). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Ainsi, dans le cas général, l'observable  $\hat{X}_{\text{MAI}}$  est simultanément influencée par les trois composantes du champ vectoriel encodé.

#### 4.4 Détection comprimée d'un champ

Dans la section 4.1, nous avons présenté une stratégie qui nous permet de mesurer un signal scalaire  $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)^T$  par l'estimation directe des  $N$  coefficients de Hadamard correspondants. L'estimation de chaque coefficient nécessite  $\mu$  mesures indépendantes. En particulier, nous avons introduit la notion de transformation de Hadamard en utilisant une définition par récurrence basée sur la matrice de Hadamard (4.22). Cette définition correspond à ce qu'on appelle la transformation de Hadamard de type "Hadamard ordonné" [105]. Il est important de noter que, dans ce type de transformation de Hadamard, les lignes de la matrice de Hadamard ne sont pas arrangées dans un ordre naturel, ce qui signifie qu'elles ne suivent pas une progression des basses aux hautes fréquences (nombre de changements de signes). Ceci peut être explicitement illustré dans (4.32) qui correspond au cas de  $N = 8$ . Cependant, il est possible de réarranger les lignes de cette matrice de Hadamard pour créer un autre type de matrice de Hadamard, connue sous le nom de transformation de Hadamard de type "Walsh ordonnée". Dans ce type de transformation de Hadamard, le nombre de changements de signes augmente de manière progressive d'une ligne de la matrice de Hadamard à l'autre. En d'autres termes, l'ordre des lignes suit une progression des fréquences, passant des basses aux hautes fréquences. Dans le cas de  $N = 8$ , la matrice de Hadamard de type "Walsh ordonnée" s'écrit

$$\mathcal{H}_3^{(W)} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

Par analogie avec la transformation de Fourier, après la transformation de Hadamard d'un signal donné, une grande partie de l'information réside dans la région des basses fréquences. Ainsi, éliminer les coefficients de Hadamard à haute fréquence ne devrait pas avoir un impact significatif sur la caractéristique à grand échelle du signal. En utilisant la transformation de Hadamard de type "Walsh ordonnée", nous pouvons réduire le nombre de coefficients de Hadamard à estimer sans affecter considérablement le signal original. Cette approche, connue sous le nom de "détection comprimée", permet, dans la stratégie d'estimation multi-paramètres étudié dans ce chapitre, de réduire le nombre total de mesures indépendantes nécessaires. En effet, en estimant seulement les premiers  $L_{\mathcal{H}} < N$  coefficients de Hadamard, représentés par une matrice de Hadamard de type



FIGURE 4.4.1 – Exemple de compression d'image avec gain quantique : Un signal  $2D$  (l'image de Barbara) d'une taille  $N = 512 \times 512$  (gauche) est reconstruit (droite) avec  $\mu = 10$  mesures indépendantes pour chacun des premiers  $L_{\mathcal{H}} \leq N$  coefficients de Hadamard, les derniers  $N - L_{\mathcal{H}}$  coefficients étant considérés comme nuls. Les coefficients non nuls sont estimés avec l'état cohérent de spin (CSS) (en haut), l'état comprimé de spin (SSS) obtenu par la dynamique OAT (2.38) en l'absence de décohérence à l'instant  $t_{L,\text{best}}$  (au milieu) et en présence de décohérence par un déphasage diffusif (4.41) avec  $\gamma = 5\chi$  (en bas), pour  $L_{\mathcal{H}} = N = 512 \times 512$ ,  $L_{\mathcal{H}} = 128 \times 128$ ,  $64 \times 64$ ,  $32 \times 32$ ,  $16 \times 16$  de gauche à droite respectivement.

"Walsh ordonnée", d'un signal de taille  $N$ , le nombre total de mesures indépendantes à effectuer passe de  $\mu N$  à  $\mu L_{\mathcal{H}}$ . Dans cette section, nous étudions, sur un exemple concret, l'effet de la détection comprimée d'une image.

Considérons le signal  $2D$  (l'image de Barbara) de taille  $N = 512 \times 512$ , où le paramètre  $\theta_k$  dans ce cas représente le niveau d'obscurité dans le pixel  $k$  de l'image, représenté dans la figure 4.4.1 à gauche. Dans la partie droite de la figure, le signal est reconstruit avec différents états du système de  $N$  atomes et pour différentes valeurs de  $L_{\mathcal{H}}$ . Dans cet exemple, pour reproduire les résultats expérimentaux de l'estimation des coefficients de Hadamard, nous générons chacun des coefficients non nuls pour  $j = 1, \dots, L_{\mathcal{H}}$  en échantillonnant la distribution de probabilité

$$P(x) = \mathcal{N} e^{-\frac{(x - \tilde{\theta}_j)^2}{2(\Delta\tilde{\theta}_j)^2}}, \quad (4.40)$$

où  $\mathcal{N}$  est une constante de normalisation,  $\tilde{\theta}_j$  est le  $j$ ème coefficient de Hadamard de l'image originale et  $\Delta\tilde{\theta}_j = \xi^2/\mu$  est l'incertitude correspondante pour son estimation avec un état quantique donné, du système de  $N$  atomes, caractérisé par le gain métrologique  $\xi^{-2}$ . La première ligne dans la figure 4.4.1 correspond à l'état cohérent de spin (4.2) pour lequel aucun gain métrologique n'est produit, c'est à dire  $\xi = 1$ . Dans la deuxième ligne, l'estimation des coefficients de Hadamard est effectuée en utilisant l'état comprimé de spin généré à l'instant  $t_{L,\text{best}}$  de la dynamique one-axis twisting.

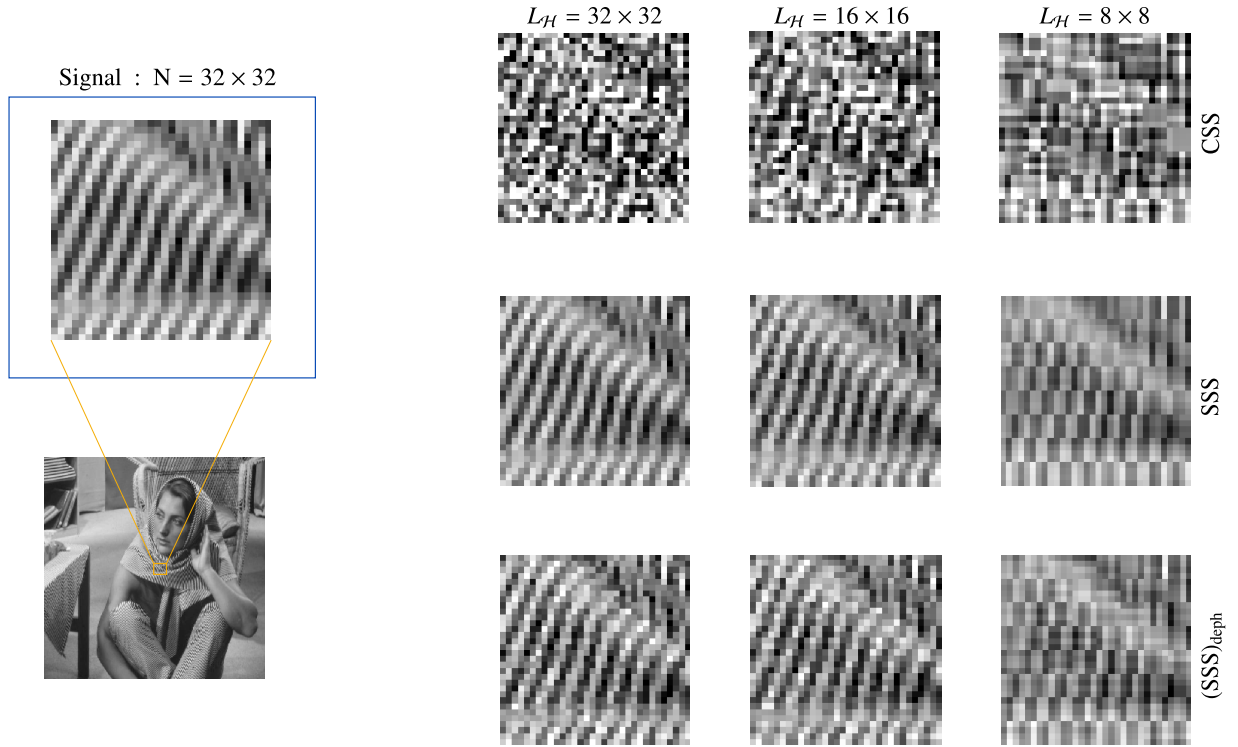


FIGURE 4.4.2 – Exemple de compression d'image (petite taille) avec un gain métrologique quantique : Un signal 2D (partie de l'image Barbara) de taille  $N = 32 \times 32$  (gauche) est reconstruit (droite) avec  $\mu = 10$  mesures indépendantes pour chacun des premiers  $L_{\mathcal{H}} \leq N$  coefficients de Hadamard, les derniers  $N - L_{\mathcal{H}}$  coefficients étant considérés comme nuls. Les coefficients non nuls sont estimés avec l'état cohérent de spin (CSS) (en haut), l'état comprimé de spin (SSS) généré à l'instant  $t_{L, \text{best}}$  de la dynamique OAT en l'absence de décohérence (au milieu) et en présence de déphasage diffusif (4.41) avec  $\gamma = \chi$  (en bas), pour  $L_{\mathcal{H}} = N = 32 \times 32, L_{\mathcal{H}} = 16 \times 16, 8 \times 8$  de gauche à droite respectivement.

Dans ce cas, l'incertitude sur les coefficients de Hadamard est calculée à partir de la valeur exacte de  $\xi$  correspondante à l'état comprimé de spin utilisé, pour le nombre d'atome considéré, donnée dans le chapitre 2. Pour la dernière ligne, l'incertitude  $\Delta \tilde{\theta}_j$  est calculé en utilisant le gain quantique correspondant à l'état comprimé de spin généré par l'évolution OAT, à l'instant optimal associé à la compression d'une observable linéaire de spin en présence de déphasage diffusif, introduit dans le chapitre précédent, avec un taux adimensionné  $\gamma/\chi = 5$ . Nous rappelons que l'évolution temporelle de l'opérateur densité qui décrit l'état du système avec le hamiltonien one-axis twisting  $\hat{H}_{\text{OAT}}$  (4.1) en présence de déphasage diffusif est engendré par l'équation pilote (3.14)

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_{\text{OAT}}, \hat{\rho}] + \gamma \left( \hat{S}_z \hat{\rho} \hat{S}_z - \frac{1}{2} \{ \hat{S}_z^2, \hat{\rho} \} \right). \quad (4.41)$$

En comparant les images obtenues par l'état comprimé de spin avec celles obtenues en utilisant l'état cohérent de spin non corrélé, nous constatons que le gain métrologique dû aux corrélations quantiques, généré par la dynamique OAT, est significatif même avec l'estimation d'un nombre relativement faible de coefficients de Hadamard  $L_{\mathcal{H}} = 32 \times 32$  (c'est-à-dire  $L_{\mathcal{H}} \approx 3.9 \times 10^{-3} N$ ), et en présence de décohérence. Afin de mieux illustrer l'effet de la détection comprimée dans les systèmes avec un nombre d'atomes plus faible, nous montrons dans la figure 4.4.2, les résultats de l'estimation et de la détection comprimée d'un petit signal, une image de taille  $N = 32 \times 32$ . Dans ce cas

également, les résultats montrent un gain métrologique significatif dû aux corrélations quantiques générées par la dynamique one-axis twisting. Dans la suite, nous allons étudier l'optimalité de la stratégie d'estimation multi-paramètres explorée dans ce chapitre. Cela sera fait en comparant le gain quantique obtenu dans cette stratégie avec le gain quantique maximal donné par la plus grande valeur propre de la matrice d'information quantique de Fisher. Ensuite, nous allons reformuler la stratégie, présentée ici, dans le cadre de la méthode des moments pour l'estimation multi-paramètres expliquée en détail au chapitre 1.

## 4.5 Matrice de l'information quantique de Fisher et optimalité de la mesure

Dans cette section, nous étudions l'optimalité de la stratégie d'estimation multi-paramètres que nous avons explorée dans ce chapitre en l'absence et en présence de décohérence. Pour ce faire, nous faisons usage de la matrice d'information quantique de Fisher, notée  $\mathcal{F}_Q$  qui est introduite dans le chapitre 1 et qui donne, dans un protocole d'estimation multi-paramètres, la limite de précision de l'estimation de tous les paramètres. D'une part, dans le cadre du formalisme d'estimation multi-paramètres que nous avons développé dans le chapitre 1, les  $N$  paramètres  $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)^T$ , encodés sur un état de spin  $|\psi\rangle$  via les générateurs  $\hat{H} = (\hat{H}_1, \dots, \hat{H}_N)^T$  sont estimés à partir des résultats de  $\mu$  mesures indépendantes de  $N$  observables. L'incertitude multi-paramètres est quantifiée par la matrice covariance  $\Sigma$  dont les éléments sont  $\Sigma_{kl} = \text{Cov}(\theta_k, \theta_l)$ . Il est important de rappeler qu'en pratique, les éléments de cette matrice,  $\Sigma_{kl}$ , sont définis de telle sorte que pour un vecteur unitaire arbitraire  $\vec{n}$ , la quantité  $\vec{n}^T \Sigma \vec{n}$  correspond à la variance de la combinaison linéaire des paramètres  $\vec{n} \cdot \vec{\theta}$ , c'est-à-dire  $\vec{n}^T \Sigma \vec{n} = (\Delta(\vec{n} \cdot \vec{\theta}))^2$ . Comme nous avons montré précédemment, la matrice covariance  $\Sigma$  satisfait l'inégalité de Cramér-Rao multi-paramètres suivante

$$\Sigma \geq \frac{\mathcal{F}_Q^{-1}}{\mu}, \quad (4.42)$$

avec  $\mu$  le nombre de mesures indépendantes. Selon cette dernière equation, le calcul de la matrice d'information quantique de Fisher  $\mathcal{F}_Q$  nous permet alors d'évaluer la qualité de la stratégie d'estimation multi-paramètres présentée plus haut. En particulier, la plus grande valeur propre de cette matrice  $\mathcal{F}_Q$  représente le gain métrologique optimal atteint dans le cadre de l'estimation multi-paramètres, et le vecteur propre associé donne la combinaison linéaire optimale des paramètres à estimer, c'est à dire celle qui est estimée avec un gain maximal. Comme déjà démontré précédemment par l'équation (1.93) du chapitre 1, dans le cas d'un état pur, tel que l'état préparé par la dynamique one-axis twisting (4.1) en l'absence de tout bruit, la matrice d'information quantique de Fisher est donnée par

$$[\mathcal{F}_Q]_{kl} = 4\text{Cov}(\hat{H}_k, \hat{H}_l). \quad (4.43)$$

D'autre part, dans le cadre de la stratégie d'estimation multi-paramètres étudiée ici, les  $N$  paramètres  $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)^T$  sont encodés sur un état généré à l'instant  $t$  de la dynamique one-axis twisting  $|\psi_t\rangle$  via l'évolution unitaire (4.3), avec  $\hat{H}_k = \hat{s}_{k, \vec{n}}$  où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire dans le plan  $yz$ . En utilisant l'équation (4.43) et compte tenu de la symétrie de l'état OAT par rapport à l'échange de deux atomes, les éléments de la matrice d'information quantique de Fisher  $\mathcal{F}_Q$  peuvent être exprimés, au premier ordre, pour tous les  $\theta_k$  proches de  $\theta_k = 0$ , en fonction de  $\vec{n}$  comme

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}_Q]_{kk} &= 4(\Delta \hat{s}_{k, \vec{n}})^2 = 1 \quad \forall k \\ [\mathcal{F}_Q]_{kl} &= 4\text{Cov}(\hat{s}_{1, \vec{n}}, \hat{s}_{2, \vec{n}}) = \frac{4(\Delta \hat{S}_{\vec{n}})^2}{N(N-1)} - \frac{1}{N-1} \quad \forall k, l \neq k. \end{aligned}$$

En calculant le spectre de la matrice d'information quantique de Fisher, nous obtenons deux valeurs propres différentes :  $\lambda_{\max}$  avec une multiplicité  $g = 1$ , où le vecteur propre correspondant est  $\vec{\lambda}_{\max} = (1, \dots, 1)^T / \sqrt{N}$ , et  $\lambda_{\min}$  avec une multiplicité  $g = N - 1$

$$\lambda_{\max} = 1 + 4(N - 1)\text{Cov}(\hat{s}_{1,\vec{n}}, \hat{s}_{2,\vec{n}}) = \frac{4}{N}(\Delta\hat{S}_{\vec{n}})^2 \quad (4.44)$$

$$\lambda_{\min} = 1 - 4\text{Cov}(\hat{s}_{1,\vec{n}}, \hat{s}_{2,\vec{n}}) = \frac{1}{N - 1}(N - \lambda_{\max}). \quad (4.45)$$

En choisissant la direction de rotation  $\vec{n}$  de manière à maximiser  $\lambda_{\max}$ , qui représente la direction de rotation optimal qui maximise le gain métrologique pour la mesure linéaire dans le cas de l'estimation d'un seul paramètre avec les états OAT, nous observons que  $\lambda_{\max} \geq 1$  et  $\lambda_{\min} \leq 1$ . Cela signifie qu'un état généré par la dynamique one-axis twisting ne peut que réduire la variance de la combinaison linéaire des paramètres  $\vec{\theta} = \vec{\lambda}_{\max} \cdot \vec{\theta}$ , avec une incertitude  $\xi_F^2 / \mu \leq (\Delta\vec{\theta})^2 \leq 1/\mu$ , où  $\xi_F^2 = 1/\lambda_{\max}$ . Ce qui implique qu'avec le même état OAT, aucun gain métrologique ne peut être obtenu pour les combinaisons linéaires des paramètres autres que  $\vec{\theta}$ . Nous avons montré que l'application de la transformation unitaire (4.15), c'est à dire l'ajout des renversement des spin locaux avant et après l'encodage des paramètres, nous permet d'estimer des combinaisons autres que  $\vec{\theta}$  avec un gain métrologique optimal. Cela revient également, dans le cadre du formalisme d'estimation multi-paramètres, à appliquer au vecteur des générateurs  $\hat{H}$  la transformation unitaire  $J = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)$  avec  $\epsilon_k = \pm 1$ . En effet, si nous considérons l'estimation de  $N$  paramètres  $\vec{\theta}$  généré par les générateurs  $\hat{H}' = J\hat{H} = (\epsilon_1\hat{H}_1, \dots, \epsilon_N\hat{H}_N)^T$ , l'encodage des paramètre se fait dans ce cas via la transformation unitaire

$$\hat{U}_J = e^{-i(J\hat{H}) \cdot \vec{\theta}}. \quad (4.46)$$

Or, nous avons

$$\begin{aligned} (J\hat{H}) \cdot \vec{\theta} &= \sum_i (J\hat{H})_i \theta_i \\ &= \sum_i \left( \sum_k J_{ik} \hat{H}_k \right) \theta_i \\ &= \sum_k \hat{H}_k \left( \sum_i J_{ik} \theta_i \right) \\ &= \hat{H} \cdot (J^T \vec{\theta}). \end{aligned} \quad (4.47)$$

En utilisant le fait que  $J^T = J$  et en substituant (4.47) dans l'équation (4.46), nous démontrons que  $\hat{U}_J$  est équivalent à l'évolution unitaire (4.15), c'est à dire  $\hat{U}_J = \hat{U}_{\vec{\theta}} = e^{-i\hat{H} \cdot (J\vec{\theta})}$ . Comme  $\text{Cov}((J\hat{H})_k, (J\hat{H})_l) = \sum_{ij} J_{ki} J_{lj} \text{Cov}(\hat{H}_i, \hat{H}_j)$ , la matrice d'information quantique de Fisher associée aux générateurs  $\hat{H}' = J\hat{H}$  devient

$$\mathcal{F}'_Q = J\mathcal{F}_Q J^T. \quad (4.48)$$

Étant donné que  $JJ^T = J^T J = Id$ , le spectre de  $\mathcal{F}'_Q$  est invariant sous la transformation (4.48) et le vecteur propre  $\vec{\lambda}'_{\max}$  de  $\mathcal{F}'_Q$  associé à la valeur propre  $\lambda_{\max}$  est donné par

$$\vec{\lambda}'_{\max} = J\vec{\lambda}_{\max}. \quad (4.49)$$

En appliquant la transformation  $J$  aux générateurs de rotations locales, avec des valeurs spécifiques pour les  $\epsilon_k$  (ce qui équivaut à effectuer des renversements de spins locaux avant et après l'encodage

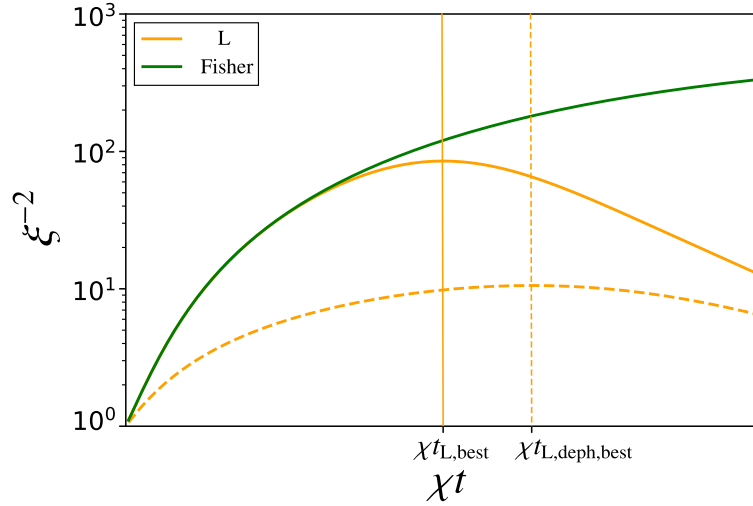


FIGURE 4.5.1 – Gain métrologique  $\xi_L^{-2}$  pour l'estimation de chaque combinaison linéaire des paramètres associée à une mesure linéaire, en l'absence (orange plein) et en présence de la décohérence décrite par l'équation (4.41) avec  $\gamma = \chi$  (orange pointillé) en fonction du temps par rapport au gain optimal  $\xi_F^{-2}$  associé à la valeur propre maximale de la matrice d'information de Fisher quantique (vert continu) pour  $N = 10^3$ . Les lignes verticales représentent les temps d'écrasement optimaux.

des paramètres  $\vec{\theta}$ ), nous pouvons choisir une combinaison linéaire optimale des paramètres  $\tilde{\theta} = (J\vec{\lambda}_{\max}) \cdot \vec{\theta}$ . De cette manière, nous pouvons estimer indépendamment  $N$  combinaisons linéaires  $\tilde{\theta}$  avec un gain quantique significatif. Par conséquent, pour chaque ensemble des  $\epsilon_k$ , la stratégie d'estimation multi-paramètres que nous explorons ici, en utilisant la mesure d'une seule observable de spin collectif, nous permet d'estimer directement la combinaison linéaire des paramètres qui maximise l'information quantique de Fisher. Pour évaluer l'efficacité de la stratégie décrite dans ce chapitre, nous comparons dans la figure 4.5.1 le gain optimal  $\xi_F^{-2}$ , associé à l'information quantique de Fisher optimisée sur  $\vec{n}$ , avec les gains quantiques associés aux états générés par la dynamique OAT (pour une mesure linéaire) en l'absence de décohérence, ainsi qu'en présence d'un déphasage diffusif décrit par l'équation pilote (4.41).

## 4.6 Reformulation dans le cadre de la méthode des moments pour l'estimation multi-paramètres

Dans cette section, le but est de reformuler le problème étudié dans ce chapitre dans le cadre de la méthode des moments pour l'estimation multi-paramètres développée dans le chapitre 1. Pour cela, nous considérons  $N$  paramètres  $\vec{\theta}' = (\epsilon_1\theta_1, \dots, \epsilon_N\theta_N)^T$ , avec  $\epsilon_j = \pm 1$ , encodés par les générateurs  $\hat{H}_{\vec{n}} = (\hat{s}_{1,\vec{n}}, \dots, \hat{s}_{N,\vec{n}})^T$  sur l'état  $|\psi_t\rangle$  préparé par la dynamique OAT pour le temps  $t$  à partir de l'état cohérent de spin (4.2) par l'évolution unitaire  $\hat{U}_{\vec{\theta}'}$  (4.3). Un changement de base des paramètres  $\vec{\vartheta} = P\vec{\theta}'$ , avec  $PP^T = P^T P = \mathbb{1}$ , permet de réécrire la transformation unitaire  $\hat{U}_{\vec{\theta}'}$  comme

$$\hat{U}_{\vec{\vartheta}} = e^{-i\hat{G}_{\vec{n}} \cdot \vec{\vartheta}} \quad \text{avec} \quad \hat{G}_{\vec{n}} = P\hat{H}_{\vec{n}}. \quad (4.50)$$

La transformation unitaire  $\hat{U}_{\vec{\vartheta}}$  représente l'encodage des  $N$  paramètres  $\vec{\vartheta}$  générés par les observables  $\hat{G}_{\vec{n}}$ . Comme détaillé dans le chapitre 1, dans le cadre de la méthode des moments à paramètres multiples, les paramètres sont estimés à partir des moyennes statistiques  $\vec{X}(\mu) = (\bar{X}_1^{(\mu)}, \dots, \bar{X}_N^{(\mu)})^T$ ,



résultats de  $\mu$  mesures indépendantes de  $N$  observables  $\hat{X} = (\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_N)^T$  comme les valeurs pour lesquelles

$$\langle \hat{U}_{\vec{\vartheta}}^\dagger \hat{X}_k \hat{U}_{\vec{\vartheta}} \rangle = \bar{X}_k^{(\mu)}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (4.51)$$

Selon le résultat (1.106) du chapitre 1, pour  $\mu \gg 1$ , l'incertitude sur les paramètres  $\vec{\vartheta}$  est donnée par la matrice covariance

$$\begin{aligned} \Sigma &= (\mu M[|\psi_t\rangle, \hat{G}_{\vec{n}}, \hat{X}])^{-1} \\ &= (\mu C[|\psi_t\rangle, \hat{G}_{\vec{n}}, \hat{X}]^T \Gamma[|\psi_t\rangle, \hat{X}]^{-1} C[|\psi_t\rangle, \hat{G}_{\vec{n}}, \hat{X}])^{-1}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

où  $C[|\psi_t\rangle, \hat{G}_{\vec{n}}, \hat{X}]_{kl} = -i\langle [\hat{X}_k, \hat{G}_{l, \vec{n}}] \rangle$  est la matrice des commutateurs et  $\Gamma[|\psi_t\rangle, \hat{X}] = \text{Cov}(\hat{X}_k, \hat{X}_l)$  est la matrice covariance. En choisissant les observables  $\hat{X} = \hat{X}_{\vec{m}} = \sqrt{N} P \hat{H}_{\vec{m}}$ , avec  $\vec{m}$  tel que  $\{\vec{m}, \vec{n}, \vec{e}_x\}$  forment une base orthonormée, la matrice des commutateurs est donnée par

$$C[|\psi_t\rangle, \hat{G}_{\vec{n}}, \hat{X}_{\vec{m}}] = \sqrt{N} P C[|\psi_t\rangle, \hat{H}_{\vec{n}}, \hat{H}_{\vec{m}}] P^T \quad (4.53)$$

où nous avons utilisé  $-i\langle [\hat{X}_{k, \vec{m}}, \hat{G}_{l, \vec{n}}] \rangle = -i\sqrt{N} \sum_{rs} P_{kr} P_{ls} \langle [\hat{H}_{r, \vec{m}}, \hat{H}_{s, \vec{n}}] \rangle$ . De plus, en utilisant la symétrie de l'état  $|\psi_t\rangle$ , nous obtenons

$$C[|\psi_t\rangle, \hat{H}_{\vec{n}}, \hat{H}_{\vec{m}}]_{kl} = -i\langle [\hat{s}_{k, \vec{m}}, \hat{s}_{l, \vec{n}}] \rangle = \langle \hat{s}_{1, x} \rangle \delta_{kl}. \quad (4.54)$$

En substituant cette dernière équation dans (4.53) et en utilisant l'orthogonalité de la matrice  $P$ , nous trouvons

$$C[|\psi_t\rangle, \hat{G}_{\vec{n}}, \hat{X}_{\vec{m}}] = \sqrt{N} \langle \hat{s}_{1, x} \rangle \mathbb{1}. \quad (4.55)$$

En substituant l'équation (4.55) dans (4.52), pour le choix des observables  $\hat{X} = \hat{X}_{\vec{m}}$ , la matrice  $\Sigma$  s'écrit

$$\Sigma = \frac{1}{\mu N |\langle \hat{s}_{1, x} \rangle|^2} \Gamma[|\psi_t\rangle, \hat{X}_{\vec{m}}]. \quad (4.56)$$

La matrice des commutateurs étant diagonale, le système d'équations (4.51) est donc découplé. Le paramètre  $\vartheta_k$  peut alors être estimé, indépendamment des autres paramètres, à partir des résultats de  $\mu$  mesures indépendantes de l'observable  $\hat{X}_{k, \vec{m}}$ . Dans ce cas, l'incertitude sur l'estimation du paramètre est donnée par

$$(\Delta \vartheta_k)^2 = \Sigma_{kk} = \frac{1}{\mu} \frac{(\Delta \hat{X}_{k, \vec{m}})^2}{N |\langle \hat{s}_{1, x} \rangle|^2}. \quad (4.57)$$

Pour un  $k$  donné (par exemple  $k = 1$ ), nous choisissons  $P$  de sorte que  $\hat{X}_{k, \vec{m}} = \sqrt{N} \sum_l P_{kl} \hat{s}_{l, \vec{m}} = \sum_l \hat{s}_{l, \vec{m}} = \hat{S}_{\vec{m}}$ , c'est-à-dire  $P_{kl} = 1/\sqrt{N}$  pour tout  $l$ . Avec ce choix de  $P$  et conformément à l'équation (4.57), la combinaison des paramètres  $\vartheta_k = \sum_l \epsilon_l \theta_l / \sqrt{N}$  est estimée, indépendamment des autres paramètres  $\vartheta_l$  avec  $l \neq k$ , avec une incertitude

$$(\Delta \vartheta_k)^2 = \frac{1}{\mu} \frac{(\Delta \hat{S}_{\vec{m}})^2}{N |\langle \hat{s}_{1, x} \rangle|^2} = \frac{\xi_L^2}{\mu}. \quad (4.58)$$

Cette dernière équation est équivalente à l'équation (4.25) dans le cas de la mesure d'une observable linéaire de spin collectif et  $\vartheta_k$  est un des coefficients de Hadamard du signal original  $\vec{\theta}$ . Considérons

maintenant le cas d'une mesure avec la technique MAI, où l'évolution OAT  $\hat{U}_\tau = e^{-i\chi\tau\hat{S}_z^2}$  avec  $\tau = -t$  est appliquée au système avant la mesure des  $N$  observables  $\hat{X}_{\vec{m}}$ , ce qui équivaut à mesurer l'ensemble des  $N$  observables non-linéaires

$$\hat{X}_{\text{MAI}} = e^{-i\chi t\hat{S}_z^2} \hat{X}_{\vec{m}} e^{i\chi t\hat{S}_z^2} = \sqrt{N} P (e^{-i\chi t\hat{S}_z^2} \hat{s}_{1,\vec{m}} e^{i\chi t\hat{S}_z^2}, \dots, e^{-i\chi t\hat{S}_z^2} \hat{s}_{N,\vec{m}} e^{i\chi t\hat{S}_z^2})^T. \quad (4.59)$$

Dans ce cas, la matrice des commutateurs s'écrit comme

$$C[|\psi_t\rangle, \hat{G}_{\vec{n}}, \hat{X}_{\text{MAI}}] = \sqrt{N} P C[|\psi_t\rangle, \hat{H}_{\vec{n}}, e^{-i\chi t\hat{S}_z^2} \hat{H}_{\vec{m}} e^{i\chi t\hat{S}_z^2}] P^T \quad (4.60)$$

avec

$$\begin{aligned} C[|\psi_t\rangle, \hat{H}_{\vec{n}}, e^{-i\chi t\hat{S}_z^2} \hat{H}_{\vec{m}} e^{i\chi t\hat{S}_z^2}]_{kl} &= -i \langle [e^{-i\chi t\hat{S}_z^2} \hat{s}_{k,\vec{m}} e^{i\chi t\hat{S}_z^2}, \hat{s}_{l,\vec{n}}] \rangle \\ &= -i \langle [e^{-i\chi t\hat{S}_z^2} \hat{s}_{1,\vec{m}} e^{i\chi t\hat{S}_z^2}, \hat{s}_{1,\vec{n}}] \rangle \delta_{kl} \\ &\quad - i \langle [e^{-i\chi t\hat{S}_z^2} \hat{s}_{1,\vec{m}} e^{i\chi t\hat{S}_z^2}, \hat{s}_{2,\vec{n}}] \rangle (1 - \delta_{kl}). \end{aligned} \quad (4.61)$$

En cherchant la matrice  $P$  qui diagonalise la matrice des commutateurs  $C[|\psi_t\rangle, \hat{G}_{\vec{n}}, \hat{X}_{\text{MAI}}]$ , on s'aperçoit que pour le  $k$  correspondant à la valeur propre maximale

$$C[|\psi_t\rangle, \hat{G}_{\vec{n}}, \hat{X}_{\text{MAI}}]_{kk}^{\max} = -i \frac{\langle [e^{-i\chi t\hat{S}_z^2} \hat{S}_{\vec{m}} e^{i\chi t\hat{S}_z^2}, \hat{S}_{\vec{n}}] \rangle}{\sqrt{N}}, \quad (4.62)$$

nous obtenons  $P_{kl} = 1/\sqrt{N}$  pour tous  $l$ . La mesure de l'observable

$$(\hat{X}_{\text{MAI}})_k = \sqrt{N} \sum_l P_{kl} e^{-i\chi t\hat{S}_z^2} \hat{s}_{l,\vec{m}} e^{i\chi t\hat{S}_z^2} = e^{-i\chi t\hat{S}_z^2} \hat{S}_{\vec{m}} e^{i\chi t\hat{S}_z^2}, \quad (4.63)$$

permet donc d'estimer la combinaison des paramètres  $\vartheta_k = \sum_l P_{kl} \epsilon_l \theta_l = \sum_l \epsilon_l \theta_l / \sqrt{N}$  avec une incertitude

$$(\Delta\vartheta_k)^2 = \frac{1}{\mu} \frac{(\Delta\hat{X}_{\text{MAI}})^2}{|\langle [e^{-i\chi t\hat{S}_z^2} \hat{S}_{\vec{m}} e^{i\chi t\hat{S}_z^2}, \hat{S}_{\vec{n}}] \rangle|^2} = \frac{1}{\mu} \frac{N/4}{|\langle [e^{-i\chi t\hat{S}_z^2} \hat{S}_{\vec{m}} e^{i\chi t\hat{S}_z^2}, \hat{S}_{\vec{n}}] \rangle|^2} = \frac{\xi_{\text{MAI}}^2}{\mu}. \quad (4.64)$$

Notez que cette dernière équation est exactement l'incertitude donnée par (4.25) dans le cas d'une mesure avec la technique MAI.

## 4.7 Quelques implémentations possibles

Auparavant, dans ce chapitre, nous avons examiné une méthode qui offre un gain quantique significatif lors de l'estimation de  $N$  paramètres. Dans cette approche, nous avons considéré un système de  $N$  atomes identiques à deux niveaux, répartis dans un réseau avec un atome par site du réseau. De plus, pour avoir un gain métrologique quantique, il est essentiel de générer des corrélations quantiques entre ces  $N$  atomes. Cette configuration dite Mott-comprimé, où l'on a un ensemble de  $N$  atomes dans un état comprimé de spin avec un atome par site, peut être obtenue entre autre de deux manières. La première méthode consiste à réaliser une élévation adiabatique d'un réseau dans un condensat de Bose-Einstein à deux composantes. L'autre méthode pour obtenir la configuration Mott-comprimé implique l'intrication d'atomes fermioniques situés sur les sites du réseau grâce à des processus d'effet tunnel virtuel, avec l'ajout d'un laser externe qui imprime une phase dépendante du site. Dans cette section, nous aborderons brièvement ces deux schémas. Le premier schéma sera basé sur l'approche proposée dans la référence [90], tandis que le deuxième schéma s'appuiera sur la proposition décrite dans la référence [93].

### 4.7.1 Mott-comprimé dans un condensat de Bose-Einstein

Dans cette approche, nous considérons un système composé de  $N$  atomes bosoniques piégés dans un réseau optique unidimensionnel à  $M = N$  sites. Initialement, ces atomes se trouvent dans une phase superfluide, qui constitue un condensat de Bose-Einstein. Comme mentionné précédemment, si chaque atome est préparé dans une superposition de deux modes internes  $\epsilon = a, b$ , les collisions entre ces atomes dans le condensat de Bose-Einstein engendrent des corrélations quantiques entre eux. Par la suite, nous procédons à une élévation du réseau optique. Cette opération permet au système d'atteindre la phase de Mott, dans laquelle chaque site du réseau contient un atome unique. C'est au cours de cette phase que les corrélations quantiques générées sont stockées. Un tel système est décrit en seconde quantification par le hamiltonien

$$\hat{H} = \sum_{\epsilon=a,b} \int dx \left[ \hat{\psi}_{\epsilon}^{\dagger}(x) \hat{H}_0 \hat{\psi}_{\epsilon}(x) + \frac{g_{\epsilon\epsilon}}{2} \hat{\psi}_{\epsilon}^{\dagger}(x) \hat{\psi}_{\epsilon}^{\dagger}(x) \hat{\psi}_{\epsilon}(x) \hat{\psi}_{\epsilon}(x) \right] + g_{ab} \int dx \hat{\psi}_a^{\dagger}(x) \hat{\psi}_b^{\dagger}(x) \hat{\psi}_b(x) \hat{\psi}_a(x), \quad (4.65)$$

où  $g_{\epsilon\epsilon'} \propto a_{\epsilon\epsilon'}$  est la constante de couplage qui quantifie les interactions entre les atomes des modes  $\epsilon$  et  $\epsilon'$ . Le hamiltonien à une particule  $\hat{H}_0$  est donné par

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x). \quad (4.66)$$

où  $m$  est la masse d'un atome et le potentiel du réseau s'écrit  $V(x) = V_0 \sin^2(kx)$  avec  $k = 2\pi/\lambda$  est le nombre d'onde du réseau. En l'absence d'interactions entre les atomes, les énergies propres de ce système se regroupent en bandes d'énergies de Bloch. Dans la bande d'énergie la plus basse, lorsque le réseau est suffisamment élevé, le hamiltonien (5.1.1) peut être réécrit dans la base des fonctions de Wannier  $w(x - x_i)$  localisées autour des sites du réseau, où  $x_i$  représente la position du  $i$ ème site, sous la forme d'un hamiltonien de Bose-Hubbard

$$\hat{H}_{\text{BH}} = -J \sum_{i,j=i\pm 1} (\hat{a}_i^{\dagger} \hat{a}_j + \hat{b}_i^{\dagger} \hat{b}_j) + \sum_{\epsilon=a,b} \frac{U_{\epsilon\epsilon}}{2} \sum_i \hat{n}_i^{(\epsilon)} (\hat{n}_i^{(\epsilon)} - 1) + U_{ab} \sum_i \hat{n}_i^{(a)} \hat{n}_i^{(b)}, \quad (4.67)$$

où  $J$  et  $U_{\epsilon\epsilon'}$  sont respectivement le paramètre de tunneling et le paramètre d'interaction,  $\hat{a}_i$  ( $\hat{b}_i$ ) est l'opérateur d'annihilation d'un atome dans le site  $i$  et dans le mode interne  $a$  ( $b$ ) et  $\hat{n}_i^{(\epsilon)}$  est l'opérateur nombre d'atomes dans le site  $i$  dans le mode  $\epsilon$ . L'élévation adiabatique du réseau est prise en compte en considérant la rampe linéaire en temps  $\tau$  du potentiel du réseau  $V_0$ , d'un potentiel initial  $V_{\text{ini}}$  au potentiel final  $V_{\text{fin}}$  atteint à l'instant  $t = \tau$ ,

$$V_0(t) = V_{\text{ini}} + (V_{\text{fin}} - V_{\text{ini}}) \frac{t}{\tau}. \quad (4.68)$$

Dans le hamiltonien Bose-Hubbard, ceci introduit une dépendance en temps  $t$  des paramètres  $J$  et  $U_{\epsilon\epsilon'}$ . Pour une valeur donnée de  $\tau$ , la figure 4.7.1 montre que la dynamique décrite par le hamiltonien Bose-Hubbard (4.67), en tenant compte de la rampe de potentiel du réseau (4.68), génère un état intriqué de spin, avec une configuration Mott des atomes, c'est-à-dire un atome par site du réseau. En effet, la figure 4.7.1-(a) met en évidence la diminution de la fraction condensée d'atomes au cours de la rampe du réseau. Cette diminution indique une transition de phase, où le système évolue d'une phase superfluide, dans laquelle les atomes forment un condensat de Bose-Einstein, vers la phase de Mott, où un atome occupe chaque site du réseau. La figure 4.7.1-(b) montre la variation du paramètre de compression de spin, dont l'inverse quantifie le gain métrologique associé à une mesure linéaire de spin, au cours de la rampe de réseau. La courbe pleine noire

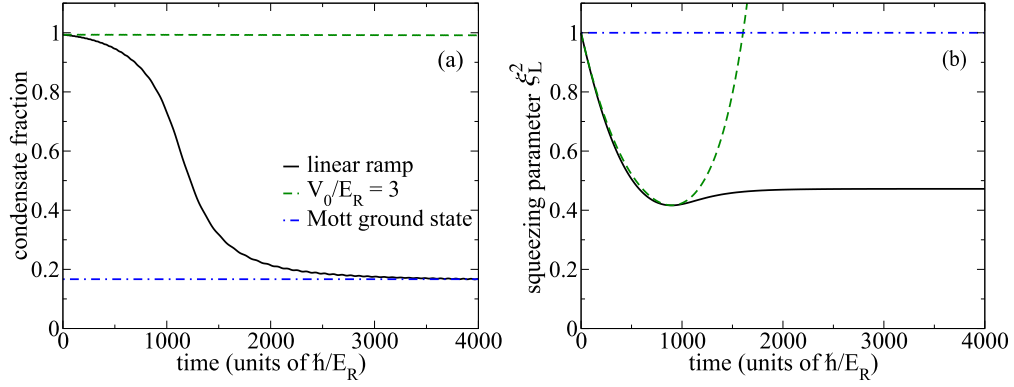


FIGURE 4.7.1 – Génération d'état intriqué dans une configuration de Mott via une élévation adiabatique d'un réseau optique. (a) Variation de la fraction condensée des atomes au cours du temps (en unité de  $\hbar/E_R$ , où  $E_R$  représente l'énergie de recul) pour  $N = 6$ , au cours de la rampe avec  $\tau = 4255$  (en unité de  $\hbar/E_R$ ) illustré par la courbe pleine noire. Ceci est comparé avec le cas sans rampe ( $V_0/E_R = 3$ , courbe pointillée verte) et le cas où le système est dans l'état fondamental de  $\hat{H}_{BH}$  avec la configuration Mott (courbe pointillée bleue). (b) Variation du paramètre de compression de spin  $\xi_L^2$  en temps, la courbe pleine noire représente le cas de la rampe, la courbe pointillée verte représente le cas sans la rampe avec  $V_0/E_R = 3$  et la courbe pointillée bleue illustre le cas où le système est dès  $t = 0$  dans la phase de Mott. Cette figure est extraite de la référence [90] et adaptée aux notations de ce travail.

montre que, pour une valeur fixe de  $\tau$ , le gain métrologique, et donc les corrélations quantiques générées à un instant donné  $t$ , qui dépend de la valeur de  $\tau$  choisie, restent figées et sont stockées dans le système. Par conséquent, en choisissant la valeur de  $\tau$  appropriée, cette dynamique permet la création d'un état comprimé ou sur-comprimé de spin dans une configuration Mott. Avec la possibilité de réaliser des renversements des spins locaux et d'effectuer des mesures du spin collectif, le système ainsi préparé peut être utilisé pour estimer un ensemble de  $N$  paramètres inconnus en utilisant la stratégie détaillée dans ce chapitre. Dans ce contexte, la mise en œuvre d'une mesure où une observable linéaire du spin collectif est mesurée est direct. Toutefois, la réalisation de la technique MAI, qui permet d'obtenir un gain quantique plus élevé en exploitant les états sur-comprimés de spin, nécessite une inversion temporelle de la dynamique. L'implémentation d'une telle inversion temporelle de la dynamique dans un condensat de Bose-Einstein est possible via la résonance de Feshbach. Cependant, une telle inversion affecte la dynamique du degré de liberté spatial du condensat au-delà d'une simple dynamique one-axis twisting. Notamment le condensat peut devenir instable vis-à-vis d'une démixtion de ses deux composantes [106].

#### 4.7.2 Atomes dans un réseau avec couplage à un potentiel externe dépendant du site

Dans ce paragraphe, nous considérons un ensemble de  $N$  atomes fermioniques à deux niveaux internes, notés  $|\downarrow\rangle$  et  $|\uparrow\rangle$ . Ces atomes sont piégés dans un réseau unidimensionnel à  $M = N$  sites. En raison du principe d'exclusion de Pauli, contrairement aux atomes bosoniques, les atomes fermioniques identiques n'interagissent pas par des collisions d'ondes  $s$ . Par conséquent, la préparation de chaque atome fermionique dans une superposition des deux états internes ne permet pas de générer des corrélations quantiques entre les atomes. Pour créer des états comprimés, sur-comprimés ou plus intriqués de spin dans ce système, une approche consiste à introduire un couplage laser entre les deux états atomiques internes, dont la phase dépend de la position des atomes dans le réseau. Supposons que les atomes occupent la bande de Bloch la plus basse. Dans ce cas, le système

peut être décrit par le hamiltonien Fermi-Hubbard, auquel s'ajoute le hamiltonien de couplage laser

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{N'} \hat{H}_k^{\text{tunnel}} + \sum_{k=1}^N \hat{H}_k^{\text{int}} + \sum_{k=1}^N \hat{H}_k^{\text{L}}, \quad (4.69)$$

où  $N' = N$  pour les systèmes avec des conditions aux limites périodiques, et  $N' = N - 1$  pour ceux avec des conditions aux limites ouvertes. Le hamiltonien  $\hat{H}_j^{\text{tunnel}}$  décrit le processus de tunneling entre le site  $j$  et le site  $j + 1$  et est donné par

$$\hat{H}_k^{\text{tunnel}} = -J \sum_{s=\downarrow, \uparrow} (\hat{a}_{k,s}^\dagger \hat{a}_{k+1,s} + h.c.), \quad (4.70)$$

où,  $\hat{a}_{k,s}$  est l'opérateur d'annihilation d'un atome dans le site  $j$  et dans l'état interne  $s = \downarrow, \uparrow$ . Le hamiltonien  $\hat{H}_k^{\text{int}}$ , décrivant les interactions locales dans le site  $j$ , s'écrit

$$\hat{H}_k^{\text{int}} = U \hat{n}_{k,\downarrow} \hat{n}_{k,\uparrow}. \quad (4.71)$$

Le hamiltonien  $\hat{H}_k^{\text{L}}$  décrit le couplage entre les deux états internes  $|\downarrow\rangle$  et  $|\uparrow\rangle$  dans le site  $j$  avec une phase qui dépend de la position  $j$  de l'atome dans le réseau et est donné par

$$\hat{H}_k^{\text{L}} = \frac{\hbar\Omega}{2} \left( e^{i\phi k} \hat{a}_{k,\uparrow}^\dagger \hat{a}_{k,\downarrow} + e^{-i\phi k} \hat{a}_{k,\downarrow}^\dagger \hat{a}_{k,\uparrow} \right). \quad (4.72)$$

Lorsque les interactions sont suffisamment fortes, c'est-à-dire pour  $U/J \gg 1$ , la double occupation d'un site donné du réseau est fortement supprimée, et le système peut être approximativement considéré comme étant dans la phase de Mott, où un atome occupe chaque site. Dans ce contexte, si nous supposons que  $U \gg \hbar\Omega$ , le système peut être approximativement décrit par le hamiltonien d'échange de spin corrigé par le hamiltonien de couplage laser

$$\hat{H}_{\text{spin}} = \sum_{k=1}^{N'} \hat{H}_k^{\text{SE}} + \sum_{k=1}^N \hat{H}_k^{\uparrow\downarrow}, \quad (4.73)$$

avec

$$\hat{H}_k^{\text{SE}} = J_{\text{SE}} \left( \hat{s}_{k,x} \hat{s}_{k+1,x} + \hat{s}_{k,y} \hat{s}_{k+1,y} + \hat{s}_{k,z} \hat{s}_{k+1,z} - \frac{1}{4} \right) \quad (4.74)$$

et

$$\hat{H}_k^{\uparrow\downarrow} = J_{\uparrow\downarrow} \left( e^{i\phi k} \hat{s}_{k,+} + e^{-i\phi k} \hat{s}_{k,-} \right), \quad (4.75)$$

où,  $J_{\text{SE}} = 4J^2/U$  et  $J_{\uparrow\downarrow} = \hbar\Omega/2$ . Les opérateurs de spin sont définis par  $\hat{s}_{k,\pm} = \hat{s}_{k,x} \pm i\hat{s}_{k,y}$ ,  $\hat{s}_{k,+} = \hat{a}_{k,\uparrow}^\dagger \hat{a}_{k,\downarrow}$  et  $\hat{s}_{k,z} = (\hat{n}_{k,\uparrow} - \hat{n}_{k,\downarrow})/2$ . En l'absence de laser de couplage  $\Omega = 0$ , un état cohérent  $|\theta, \phi\rangle = e^{-i\phi \sum_{k=1}^N \hat{s}_{k,z}} e^{-i\theta \sum_{k=1}^N \hat{s}_{k,y}} \otimes_{k=1}^N |\uparrow\rangle_k$  de spin quelconque est un état propre de l'hamiltonien (4.73) avec la même énergie propre. Ceci explique pourquoi, lorsqu'un état cohérent de spin est préparé initialement, la dynamique ne génère pas de corrélations quantiques entre les atomes. En revanche, lorsque  $\Omega \neq 0$ , le hamiltonien laser introduit un couplage entre les états propres de l'hamiltonien d'échange de spin, dits états de Dicke,  $|N/2, m\rangle$ , avec  $m \in [-N/2, N/2]$ , ayant une énergie  $E = 0$  pour tout  $m$  et l'état propre de l'hamiltonien d'échange de spin, appelé état d'onde de spin,  $|q, m\rangle$ , avec  $q = \phi$  et  $m \in [-N/2+1, N/2-1]$ , ayant l'énergie  $E_\phi = J_{\text{SE}}(1 - \cos \phi)$ . Ce couplage permet l'évolution de l'état cohérent initial de spin et ainsi la génération de corrélations quantiques entre les atomes. Dans le cas d'un faible couplage laser,  $J_{\uparrow\downarrow} \ll E_\phi$ , le hamiltonien de couplage laser

peut être traité comme une perturbation et, pour  $\phi = 2\pi n/N$  avec  $n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N/2 - 1)$ , le système peut être décrit par le hamiltonien effectif

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hbar\chi \left( \sum_{k=1}^N \hat{s}_{k,z} \right)^2 \quad \text{avec} \quad \hbar\chi = \frac{1}{2(1 - \cos \phi)} \frac{1}{N-1} \frac{J_{\uparrow\downarrow}^2}{J_{\text{SE}}}. \quad (4.76)$$

Cet hamiltonien effectif est exactement le hamiltonien one-axis twisting étudié en détail en absence de bruit dans le chapitre 2 et en présence de décohérence dans le chapitre 3. Le système étudié ici permet donc de générer des états comprimés et sur-comprimés de spin dans une configuration de Mott. En supposant qu'il est possible de réaliser des renversement des spin locaux et d'effectuer des mesures collectives de spin, ce système permet d'implémenter la stratégie étudiée dans ce chapitre et d'estimer, avec un gain quantique significatif, un ensemble de paramètres inconnus.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploré une méthode d'estimation multi-paramètres basée sur l'utilisation d'atomes à deux niveaux piégés dans un réseau optique. Ces atomes partagent des corrélations quantiques internes générées par le hamiltonien one-axis twisting. Un tel système peut être obtenu de différentes manières, par exemple en élevant adiabatiquement un réseau optique dans un condensat de Bose-Einstein à deux composantes en interaction, créant ainsi un état Mott comprimé de spin, ou avec des atomes fermioniques en configuration de Mott dans un réseau, en présence d'un laser externe qui imprime aux atomes une phase dépendant de la position.

Dans cette approche, les atomes sont utilisés pour mesurer l'ensemble des valeurs d'un champ à différents emplacements du réseau. L'idée centrale de cette méthode réside dans le fait que, pour exploiter les corrélations entre les atomes, nous effectuons des mesures collectives, notamment les coefficients de Hadamard du signal, à partir desquels nous pouvons déduire les paramètres locaux en utilisant une transformation inverse de Hadamard.

Il est important de noter que, bien que nous ayons examiné le cas d'un atome par site, cette méthode peut être facilement généralisée pour inclure  $N$  atomes non-interagissants répartis sur  $M$  sites, avec une répartition de  $N/M$  atomes par site. De telles configurations peuvent être mises en place en divisant un condensat de Bose-Einstein préalablement comprimé en spin, ou en utilisant des atomes froids dans une cavité. Dans ce dernier cas, les interactions médiées par la cavité ou les mesures quantiques non destructives et non locales sont employées pour intriquer les atomes dans différents modes.

Comparé à d'autres propositions de systèmes de métrologie quantique multi-paramètres, le protocole étudié dans ce chapitre présente un avantage significatif. Pour un état donné, une seule mesure collective est nécessaire pour obtenir une combinaison linéaire spécifique des paramètres avec un avantage quantique. Pour estimer une autre combinaison linéaire des paramètres avec un gain quantique, un autre état doit être préparé. Cela permet d'effectuer une acquisition comprimée en mesurant un nombre de combinaisons inférieur à la taille du signal.

Dans le prochain chapitre, nous étudions les corrélations quantiques entre les atomes générées par l'élévation adiabatique d'un réseau optique dans un condensat de Bose-Einstein à deux composantes, en nous concentrant sur l'aspect non-locale (possibilité de violation des inégalités de Bell)



# Corrélations non-locales de Bell dans un état comprimé de spin spatialement distribué

## Introduction

Les corrélations quantiques non locales sont une caractéristique essentielle des systèmes quantiques, et leur détection est cruciale pour la compréhension de la physique quantique et pour le domaine de l'information quantique. Une façon de détecter ces corrélations est d'utiliser des inégalités de Bell, dont la violation indique la non-localité [107].

La compression de spin dans un ensemble atomique génère des corrélations de Bell lorsque les atomes intriqués sont répartis dans des emplacements distincts [108–110]. À température nulle, une augmentation adiabatique du potentiel d'un réseau optique dans un condensat de Bose-Einstein à deux composantes en interaction conduit à une configuration Mott-comprimée. Dans cette configuration, les atomes sont intriqués et répartis spatialement avec un atome par site du réseau [89, 90]. La mesure d'une composante du spin dans un site donné donne un parmi seulement deux résultats possibles. Dans un scénario de Bell, la collecte des résultats des mesures locales sur tous les sites permet de détecter les corrélations non locales à  $M$  sites en utilisant une inégalité de Bell.

Cependant, dans une expérience réelle à température non nulle, il existe une probabilité non nulle d'avoir des sites vides ou doublement occupés [90]. Dans ce cas, la mesure d'une composante du spin dans un site donné peut donner un nombre  $d > 2$  de résultats possibles. Pour détecter les corrélations non locales dans cette situation, nous devons généraliser les inégalités de Bell et les témoins de corrélations non locales utilisés à température nulle.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la première section 5.1, nous étudions la création et le stockage de corrélations quantiques dans la phase de Mott d'un réseau optique en utilisant une rampe linéaire pour conduire un condensat de Bose-Einstein à deux composantes vers une transition superfluide-Mott à température nulle. Dans la section 5.2, nous examinons l'effet de la température non nulle sur les corrélations quantiques générées et la répartition spatiale des atomes dans la phase de Mott. Nous utilisons ensuite, dans la section 5.3, une inégalité de Bell à  $M$  sites pour étudier les corrélations non locales dans la phase de Mott à température nulle, puis, en modifiant légèrement l'expérience de Bell, nous généralisons l'inégalité de Bell à  $M$  sites obtenue dans le cas de température nulle au cas de la température non nulle. Enfin, dans la dernière section 5.4, nous examinons les corrélations non locales à deux sites dans un modèle simple où les atomes sont intriqués via la dynamique one-axis twisting et répartis dans l'espace sur  $N$  sites avec une probabilité non nulle d'avoir un site vide ou doublement occupé.



## 5.1 Création et stockage d'états comprimés de spin dans un réseau optique

Dans cette section, nous reprenons le système introduit précédemment dans le paragraphe 4.7.1. L'objectif est de montrer comment, à partir d'un état cohérent de spin dans une phase superfluide et en élevant adiabatiquement le potentiel du réseau, ce système permet de générer et de stocker des états de spin comprimés, surcomprimés, ainsi que des états plus intriqués de spin.

### 5.1.1 Génération d'états comprimés de spin par interaction entre atomes

Nous considérons un gaz ultra-froid composé de  $N$  atomes bosoniques de masse  $m$  avec deux modes internes, notés  $\epsilon = a$  et  $\epsilon = b$ , en interaction répulsive, les interactions entre atomes froids étant caractérisées par les longueurs de diffusion (en onde  $s$ )  $a_{\epsilon\epsilon'}$ , et piégé dans un réseau optique unidimensionnel. Une telle configuration peut, par exemple, être obtenue en piégeant les atomes dans un réseau optique tridimensionnel, permettant l'effet tunnel exclusivement le long de la direction  $x$  avec un potentiel  $V(x) = V_0 \sin^2(kx)$ , tandis que la fonction d'onde dans chacune des autres directions perpendiculaires reste fortement localisée avec une longueur caractéristique  $L_\perp$ . Le réseau optique dans la direction  $x$  est alors caractérisé par sa hauteur  $V_0$  et sa période spatiale  $d = \pi/k$ . La dynamique de ce système est décrite par le hamiltonien effectif à une dimension

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{cin}} + \hat{H}_{\text{int}}, \quad (5.1)$$

où le terme cinétique  $\hat{H}_{\text{cin}}$ , qui décrit l'effet tunnel dans le réseau, est donné par

$$\hat{H}_{\text{cin}} = \sum_{\epsilon=a,b} \int dx \hat{\psi}_\epsilon^\dagger(x) \hat{H}_0 \hat{\psi}_\epsilon(x), \quad (5.2)$$

où le hamiltonien à une particule  $\hat{H}_0$  s'écrit

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x). \quad (5.3)$$

Le hamiltonien  $\hat{H}_{\text{int}}$  décrit les interactions entre les atomes et est donné par

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{g_{\epsilon\epsilon'}}{2} \sum_{\epsilon=a,b} \int dx \hat{\psi}_\epsilon^\dagger(x) \hat{\psi}_\epsilon^\dagger(x) \hat{\psi}_\epsilon(x) \hat{\psi}_\epsilon(x) + g_{ab} \int dx \hat{\psi}_a^\dagger(x) \hat{\psi}_b^\dagger(x) \hat{\psi}_b(x) \hat{\psi}_a(x), \quad (5.4)$$

où la constante d'interaction effective  $g_{\epsilon\epsilon'}$  est reliée à la constante de couplage à 3 dimensions  $g_{\epsilon\epsilon'}^{3D} = 4\pi\hbar^2 a_{\epsilon\epsilon'}/m$  par la relation  $g_{\epsilon\epsilon'} = g_{\epsilon\epsilon'}^{3D}/(2\pi L_\perp^2)$ . En l'absence d'interactions entre les atomes, le système est décrit par le hamiltonien à une particule (5.3), dont les fonctions propres sont les fonctions de Bloch  $\psi_{n,q}(x)$ , avec des niveaux d'énergie propres  $E_{n,q}$  caractérisés par des différentes bandes d'énergie  $n$  et les quasi-impulsion  $q$ . En considérant des conditions aux limites périodiques, la quasi-impulsion  $q$  est quantifiée  $q = 2kj/N$ , avec  $j \in \{-N/2 + 1, -N/2 + 2, \dots, N/2\}$ . Nous introduisons maintenant la base des fonctions d'onde de Wannier  $w_{n,j}(x) \equiv w_n(x - x_j)$  localisées autour des sites de réseau, où  $x_j$  est la position du  $j$ ème site. La fonction d'onde de Wannier pour la bande  $n$  est exprimée dans la base de Bloch comme

$$w_{n,j}(x) = \left(\frac{d}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\pi/d}^{\pi/d} \psi_{n,q}(x) e^{-ix_j q} dq. \quad (5.5)$$

Les opérateurs champ  $\hat{\psi}_\epsilon(x)$  sont décrits dans la représentation de Wannier comme

$$\hat{\psi}_a(x) = \sum_{n,j} w_{n,j}(x) \hat{a}_{n,j} \quad \text{et} \quad \hat{\psi}_b(x) = \sum_{n,j} w_{n,j}(x) \hat{b}_{n,j}, \quad (5.6)$$

où  $\hat{a}_{n,j}$  et  $\hat{b}_{n,j}$  représentent les opérateurs d'annihilation d'un atome dans la bande  $n$  et le site  $j$  pour les modes internes  $a$  et  $b$ , respectivement. En substituant cette dernière équation dans (5.2), le terme cinétique  $\hat{H}_{\text{cin}}$  de l'hamiltonien peut être exprimé dans la représentation de Wannier comme

$$\hat{H}_{\text{cin}} = \sum_{n,j,n',j'} \int dx w_{n,j}^*(x) \hat{H}_0 w_{n',j'}(x) \left( \hat{a}_{n,j}^\dagger \hat{a}_{n',j'} + \hat{b}_{n,j}^\dagger \hat{b}_{n',j'} \right) \quad (5.7)$$

Par la suite, nous supposons que les énergies dans le système sont principalement situées dans la bande d'énergie la plus basse, c'est-à-dire  $n = 1$ . En utilisant (5.5), nous avons

$$\hat{H}_{\text{cin}} = \sum_{j,j'} J(j' - j) \left( \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j'} + \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_{j'} \right), \quad (5.8)$$

où  $\hat{a}_j \equiv \hat{a}_{n=1,j}$  et  $\hat{b}_j \equiv \hat{b}_{n=1,j}$ . Le paramètre de l'effet tunnel  $J(j' - j)$  est donné par

$$J(j' - j) = \frac{d}{2\pi} \int_{-\pi/d}^{\pi/d} dq E_{n=1,q} e^{-i(j'-j)dq}. \quad (5.9)$$

De manière similaire, en utilisant le développement (5.6) dans le hamiltonien d'interaction (5.4), nous obtenons

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{int}} = & \frac{1}{2} \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4} \left( U_{j_1,j_2,j_3,j_4}^{aa} \hat{a}_{j_1}^\dagger \hat{a}_{j_2}^\dagger \hat{a}_{j_3} \hat{a}_{j_4} + U_{j_1,j_2,j_3,j_4}^{bb} \hat{b}_{j_1}^\dagger \hat{b}_{j_2}^\dagger \hat{b}_{j_3} \hat{b}_{j_4} \right) \\ & + \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4} U_{j_1,j_2,j_3,j_4}^{ab} \hat{a}_{j_1}^\dagger \hat{b}_{j_2}^\dagger \hat{a}_{j_3} \hat{b}_{j_4}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

où le paramètre d'interaction est donné par

$$U_{j_1,j_2,j_3,j_4}^{\epsilon\epsilon'} = g_{\epsilon\epsilon'} \int dx w_{n=1,j_1}(x) w_{n=1,j_2}(x) w_{n=1,j_3}(x) w_{n=1,j_4}(x). \quad (5.11)$$

Dans ce chapitre, nous considérons le cas pratique où  $V_0/E_r \gg 1$ , avec  $E_r = \hbar^2 k^2 / (2m)$  l'énergie de recul. Dans cette limite,  $J(j)$  est négligeable pour  $j > 1$  et  $U_{j_1,j_2,j_3,j_4}^{\epsilon\epsilon'}$  est négligeable pour  $(j_1, j_2, j_3, j_4) \neq (0, 0, 0, 0)$ . En se limitant aux termes non négligeables, le hamiltonien (5.1) peut être exprimé comme le hamiltonien de Bose-Hubbard

$$\hat{H}_{\text{BH}} = -J \sum_{i,j=i\pm 1} (\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j) + \sum_{\epsilon=a,b} \frac{U_{\epsilon\epsilon}}{2} \sum_i \hat{n}_i^{(\epsilon)} (\hat{n}_i^{(\epsilon)} - 1) + U_{ab} \sum_i \hat{n}_i^{(a)} \hat{n}_i^{(b)}, \quad (5.12)$$

avec  $J = J(1)$  et  $U_{\epsilon\epsilon'} = U_{0,0,0,0}^{\epsilon\epsilon'}$ . De plus, dans la limite  $V_0/E_r \gg 1$ , la fonction de Wannier  $w_{n=1,j=1}(x)$  s'écrit approximativement comme  $w_{n=1,j=0}(x) \approx \left(\frac{k^2}{\pi}\right)^{1/4} \left(\frac{V_0}{E_r}\right)^{1/8} e^{-k^2 \left(\frac{V_0}{E_r}\right)^{1/2} x^2/2}$ . Dans ce cas, le paramètre de couplage par effet tunnel  $J$  et le paramètre d'interaction  $U_{\epsilon\epsilon'}$  deviennent approximativement [90]

$$\frac{J}{E_r} \approx \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{V_0}{E_r}\right)^{3/4} e^{-2\left(\frac{V_0}{E_r}\right)^{1/2}}, \quad (5.13)$$

$$\frac{U_{\epsilon\epsilon'}}{E_r} \approx \left(\frac{32}{\pi}\right)^{1/2} \frac{a_{\epsilon\epsilon'} d}{L_\perp^2} \left(\frac{V_0}{E_r}\right)^{1/4}. \quad (5.14)$$

Dans la suite de ce chapitre, nous allons étudier la dynamique décrite par le hamiltonien de Bose-Hubbard (5.12) avec les expressions de  $J$  et de  $U_{\epsilon\epsilon'}$  données par (5.13) et (5.14), respectivement.

Pour étudier la dynamique de spin (degrés de liberté internes) des atomes, nous définissons les composantes de spin collectif local dans le site  $j$  du réseau par

$$\hat{s}_{j,x} = \frac{1}{2}(\hat{a}_j^\dagger \hat{b}_j + \hat{b}_j^\dagger \hat{a}_j), \quad (5.15)$$

$$\hat{s}_{j,y} = \frac{1}{2i}(\hat{a}_j^\dagger \hat{b}_j - \hat{b}_j^\dagger \hat{a}_j), \quad (5.16)$$

$$\hat{s}_{j,z} = \frac{1}{2}(\hat{n}_j^{(a)} - \hat{n}_j^{(b)}). \quad (5.17)$$

Le spin collectif  $\hat{S}_\alpha = \sum_{j=1}^M \hat{s}_{j,\alpha}$  est défini comme la somme des composants de spin  $\hat{s}_{j,\alpha}$  pour  $\alpha = x, y, z$  où  $M$  est le nombre total des sites du réseau optique. Nous considérons que le système est initialement dans l'état fondamental  $|\psi_0^{(a)}\rangle$  de l'hamiltonien Bose-Hubbard (5.12) où tous les atomes sont dans le mode interne  $a$ . L'application de la rotation  $\hat{U}_{\pi/2} = e^{-i\pi/2\hat{S}_y}$  autour de l'axe  $y$  nous permet de créer l'état coherent de spin  $|\psi_0\rangle$ , où chaque atome est dans une superposition d'états internes  $|x\rangle = (|a\rangle + |b\rangle)/\sqrt{2}$ . Lorsque la hauteur du réseau  $V_0$  est choisie de sorte que le système soit dans une phase superfluide, les interactions entre les atomes intriquent les atomes et permettent la génération d'états comprimés, surcomprimés et plus intriqués de spin. En particulier, l'état du système à l'instant  $t$  de la dynamique est solution de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}_{\text{BH}} |\psi(t)\rangle. \quad (5.18)$$

En effectuant une simulation numérique avec  $N = M = 6$ , nous pouvons calculer le paramètre de compression de spin  $\xi_L^2$ , qui est l'inverse du gain métrologique, au cours de l'évolution temporelle. Dans la figure 5.1.1-(a), la courbe bleue illustre la diminution du paramètre de compression pour les temps courts, indiquant ainsi la création de corrélations quantiques entre les atomes. Si le système reste dans la phase superfluide, la dynamique de compression de spin continue. Dans le paragraphe suivant, nous montrons comment l'application d'une rampe linéaire sur la hauteur du réseau optique  $V_0$  conduit le système vers une transition de Mott. Ceci permet d'une part, d'arrêter la dynamique de la compression de spin dans un temps  $t$  qui dépend de la durée de la rampe et, d'autre part, de stocker les corrélations quantiques générées dans la phase de Mott. En ce qui concerne les simulations numériques, nos paramètres par défaut, à moins d'indication contraire, sont les suivants :  $a_{aa} = a_{bb} = 100.4a_B$ ,  $a_{ab} = 0.95a_{aa}$ , où  $a_B = 0.52\text{\AA}$  est le rayon de Bohr. La période spatiale du réseau est de  $d = 431\text{nm}$ , et la longueur caractéristique est de  $L_\perp = d/\sqrt{2\pi}$  comme dans [90].

### 5.1.2 Stockage d'états comprimés de spin par montée adiabatique du réseau

Une approche pour stocker les corrélations quantiques générées par les interactions entre les atomes est de conduire le système vers la phase de Mott, où chaque site du réseau contient un atome unique. Dans une telle phase de Mott, les atomes sont isolés dans les sites du réseau, met fin à leurs interactions et, par conséquent, à la génération de corrélations quantiques. Pour cela, nous faisons linéairement varier la hauteur du réseau  $V_0$ , depuis une valeur initiale  $V_{\text{ini}}$  où le système se trouve dans la phase superfluide, jusqu'à une valeur finale  $V_{\text{fin}}$  où le système atteint la phase de Mott, pendant un temps  $\tau$

$$V_0(t) = V_{\text{ini}} + (V_{\text{fin}} - V_{\text{ini}}) \frac{t}{\tau}. \quad (5.19)$$

Dans ce cas, le paramètre de couplage à effet tunnel et le paramètre d'interaction deviennent des fonctions temporelles  $J(t)$  et  $U_{ee'}(t)$ , respectivement. et l'état du système à tout instant  $t$  de la dynamique s'écrit

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}_t |\psi_0\rangle, \quad (5.20)$$

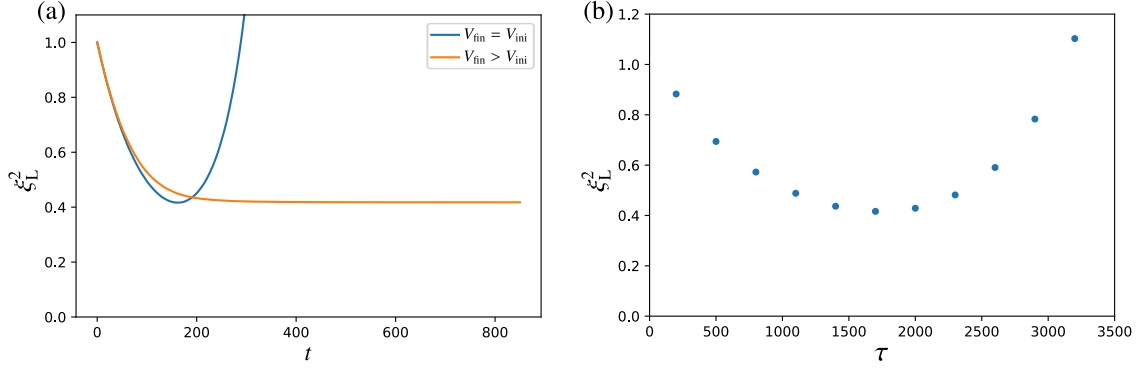


FIGURE 5.1.1 – Paramètre de compression de spin  $\xi_L^2$  pour  $N = M = 6$ . (a) En fonction du temps de la dynamique, sans la rampe, dans la phase superfluide avec  $V_{\text{ini}} = V_{\text{fin}} = 3E_r$  (bleu) et au cours de la transition de Mott réalisée par la rampe (5.19) avec  $V_{\text{ini}} = 3E_r$  et  $V_{\text{fin}} = 40E_r$  (orange). (b)  $\xi_L^2$ , associé à l'état stocké à la fin de la dynamique, en fonction de la durée de la rampe  $\tau$ .

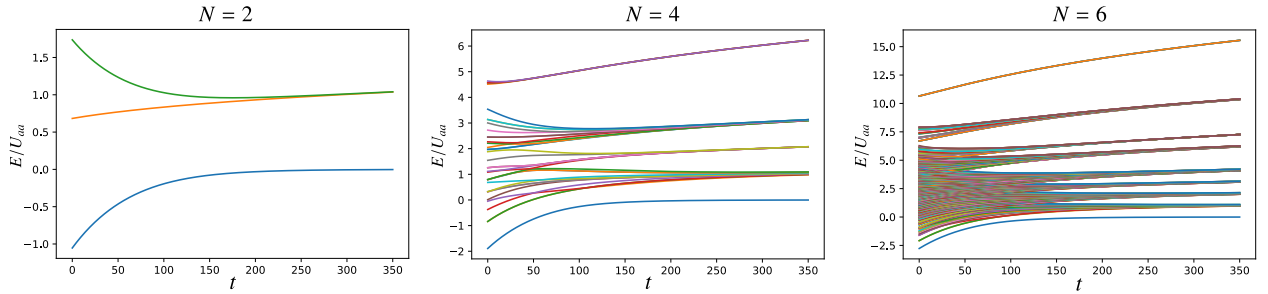


FIGURE 5.2.1 – Variation du spectre de l'hamiltonien Bose-Hubbard à une composante eu cours de la transition de Mott causée par la rampe (5.19) avec  $V_{\text{ini}} = 3E_r$  et  $V_{\text{fin}} = 40E_r$  pour différents nombre d'atomes  $N = 2, 4, 6$ .

avec  $\hat{U}_t = e^{-i \int_0^t \hat{H}_{\text{BH}}(t') dt' / \hbar}$  l'opérateur de l'évolution unitaire. La durée de la rampe  $\tau$  peut être ajustée de manière à permettre le stockage des corrélations quantiques associées à un état spécifique dans la phase de Mott, lorsque le système traverse la transition de Mott. La courbe orange dans la figure 5.1.1-(a), illustre un exemple de stockage d'un état comprimé de spin dans la phase de Mott. En particulier, pour une valeur donnée de  $\tau$ , le paramètre de compression de spin  $\xi_L^2$  cesse d'évoluer au voisinage de son minimum. En faisant varier la durée de la rampe  $\tau$ , nous pouvons stocker d'autres états intriqués de spin dans la phase de Mott. La figure 5.1.1-(b) représente le paramètre de compression de spin  $\xi_L^2$  de l'état stocké dans la phase de Mott en fonction de  $\tau$  pour  $N = M = 6$ .

## 5.2 Effet de la température non nulle sur l'état Mott-comprimé de spin

Dans cette section nous allons étudier l'effet de la température non nulle sur l'état stocké dans la phase de Mott. Pour ce faire, nous considérons que le système se trouve initialement dans un état mélange statistique décrit par l'opérateur densité

$$\hat{\rho}_T = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-E_n^{(0)}/k_B T} |\psi_n^{(a)}\rangle \langle \psi_n^{(a)}|, \quad (5.21)$$

où  $k_B$  représente la constante de Boltzmann,  $E_n^{(0)}$  les énergies propres de l'hamiltonien initial (en phase superfluide), restreint au cas où tous les atomes sont dans le mode interne  $a$ ,  $|\psi_n^{(a)}\rangle$  désigne les états propres correspondants et  $Z = \sum_n e^{-E_n^{(0)}/k_B T}$  est la fonction de partition. L'état cohérent de spin est préparé en appliquant la rotation  $\hat{U}_{\pi/2}$  sur l'état (5.21). Par conséquent, nous considérons qu'à l'instant  $t = 0$  de la dynamique, l'état du système est donné par l'opérateur densité

$$\hat{\rho}_T(t=0) = \hat{U}_{\pi/2} \hat{\rho}_T \hat{U}_{\pi/2}^\dagger, \quad (5.22)$$

La dynamique du système est déterminé par l'équation de von Neumann

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_T(t) = [\hat{H}_{\text{BH}}, \hat{\rho}_T(t)]. \quad (5.23)$$

L'état du système à un instant  $t$  de la dynamique est décrit formellement par la matrice densité

$$\hat{\rho}_T(t) = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-E_n^{(0)}/k_B T} [\hat{U}_t \hat{U}_{\pi/2} |\psi_n^{(a)}\rangle \langle \psi_n^{(a)}| \hat{U}_{\pi/2}^\dagger \hat{U}_t^\dagger]. \quad (5.24)$$

Dans la section précédente, nous avons montré qu'en commençant dans l'état fondamental  $|\psi_0^{(a)}\rangle$ , le système se retrouve à la fin de la dynamique dans la phase de Mott avec un atome par site. À une température non nulle  $T \neq 0$ , des excitations thermiques vers les états excités  $|\psi_n^{(a)}\rangle$  avec  $n > 0$  sont présentes. Ces excitations thermiques entraînent, au sein de la phase de Mott, une probabilité non nulle de double occupation des sites du réseau optique. En représentant, dans la figure 5.2.1, la variation du spectre de l'hamiltonien Bose-Hubbard (5.12) lorsque tous les atomes sont dans le mode interne  $a$ , nous constatons que dans la phase de Mott, les premières excitations correspondent à l'apparence des doubles occupations d'un site où la différence d'énergie est  $\Delta E \approx U_{aa}$ . Pour mieux comprendre l'effet sur la compression de spin, nous présentons dans la figure 5.2.2, le paramètre de compression de spin  $\xi_L^2$  en fonction de temps pour différentes températures. D'une part, la température non nulle augmente la valeur minimale du paramètre  $\xi_L^2$ . D'autre part, en raison de la double occupation d'un site, les interactions atomiques continuent d'exister dans la phase de Mott de telle sorte que la dynamique de compression est imparfaitement arrêtée, ceci conduit à l'oscillation du paramètre de compression  $\xi_L^2$  dans la phase de Mott comme nous pouvons le voir dans la figure 5.2.2 qui représente les résultats d'une simulation numérique avec  $N = M = 6$ .

### 5.3 Étude de corrélations de Bell à $M$ -sites

Jusqu'à présent, nous avons montré que l'élévation d'un réseau dans un condensat de Bose-Einstein à deux composantes permet de stocker des états intriqués dans la phase de Mott du réseau optique. Lorsque la température est nulle, cela se traduit par une configuration d'un atome par site, tandis qu'à température non nulle, il existe une probabilité non nulle de double occupation d'un site. La possibilité d'effectuer des mesures locales dans chaque site de ce système, grâce au microscope à gaz quantique par exemple, nous permet d'explorer les corrélations qui existent entre les différents sites, à température nulle ou non nulle. En particulier, en effectuant des mesures locales sur les différents sites du réseau, nous pouvons détecter l'existence de corrélations non locales de nature non classique. De telles corrélations peuvent être détectées en utilisant ce que l'on appelle les inégalités de Bell. Dans cette section, nous examinerons les corrélations de Bell générées dans le système que nous avons étudié jusqu'à présent. Pour ce faire, nous commencerons par rappeler le scénario général de Bell ainsi que la définition de la non-localité selon Bell dans un contexte général. Ensuite, nous appliquerons cette approche au système étudié dans ce chapitre, d'abord à température nulle, puis à température non nulle. En particulier, nous formulerons une inégalité de Bell pour les corrélations à  $N$ -sites et étudierons sa violation au cours de la dynamique.

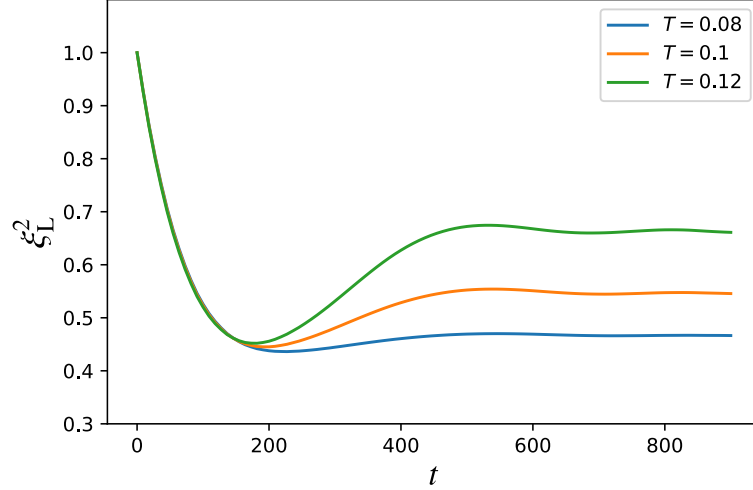


FIGURE 5.2.2 – Variation du paramètre de compression de spin au cours du temps de la dynamique à des différentes températures,  $k_B T / E_r = 0.08$  (bleu),  $k_B T / E_r = 0.1$  (orange),  $k_B T / E_r = 0.12$  (vert), avec  $V_{\text{ini}} = 3E_r$  et  $V_{\text{fin}} = 40E_r$  pour  $N = 6$ .

### 5.3.1 Scénario de Bell

Dans le cadre le plus général du scénario de Bell [111], nous considérons un ensemble de  $M$  sous-systèmes spatialement séparés  $i = 1, \dots, M$  qui partagent collectivement un état quantique à  $M$ -parties décrit par l'opérateur densité  $\hat{\rho}$ . Ceci peut être un état Mott-comprimé étudié dans les sections précédentes. Dans chacun de ces sous-systèmes,  $k$  observables,  $\hat{s}_{i,a}$  avec  $a = 0, \dots, k-1$ , peuvent être mesurées. Nous supposons que chaque observable  $\hat{s}_a$  possède un nombre fini,  $d$ , de résultats de mesure possibles, notés  $r_1, \dots, r_d$ . Dans le cadre d'une expérience de Bell, ou scénario de Bell, nous suivons une séquence bien définie, illustrée dans la figure 5.3.1. Tout d'abord, nous choisissons librement, parmi les  $k$  observables disponibles, celle que nous allons mesurer, notée  $a_i$  pour chaque sous-système  $i$ . L'ensemble des observables ainsi choisies est noté  $\vec{a} = \{a_i\}_{i=1}^M$ . Ensuite, nous procédons à la mesure de ces observables choisies, dans chacun des sous-systèmes, et collectons les résultats  $\vec{r} = \{r^{(i)}\}_{i=1}^M$ . Cette séquence est répétée plusieurs fois, en modifiant à chaque itération l'ensemble  $\vec{a}$ . Les données obtenues peuvent être, en principe, utilisées pour obtenir une estimation de la distribution de probabilité à  $M$ -parties  $P_M(\vec{r}|\vec{a})$  pour avoir l'ensemble des résultats  $\vec{r}$  lors de la mesure des observables  $\vec{a}$ . Une telle distribution de probabilité est donnée théoriquement, en termes de l'opérateur densité  $\hat{\rho}$  décrivant l'état du système, par

$$P_M(\vec{r}|\vec{a}) = \text{tr} \left[ \hat{\rho} \bigotimes_{i=1}^M \hat{\Pi}_{a_i, r^{(i)}} \right] \quad (5.25)$$

où,  $\hat{\Pi}_{a_i, r^{(i)}}$  est le projecteur sur le sous-espace propre de l'observable  $\hat{s}_{a_i}$  associé à la valeur propre  $r^{(i)}$ . Dans le cas général, des corrélations statistiques vont être obtenues entre les  $M$  sous-systèmes. Dans une théorie locale (L) comme définie par Bell [111], les corrélations entre les sous-systèmes peuvent être expliquées par une relation de dépendance qui a été établie dans le passé, lors de la génération de l'état  $\hat{\rho}$ . Une telle relation de dépendance peut être entièrement décrite par certaine variable  $\lambda$ , que nous supposons aléatoire avec une distribution de probabilité  $q(\lambda)$ , qui affecte simultanément et indépendamment tous les  $M$  sous-systèmes. En tenant compte de cette variable  $\lambda$ , toute distribution de probabilités peut être écrite sous la forme

$$P_L(\vec{r}|\vec{a}) = \int d\lambda q(\lambda) \prod_{i=1}^M P^{(i)}(r_i|a_i, \lambda). \quad (5.26)$$

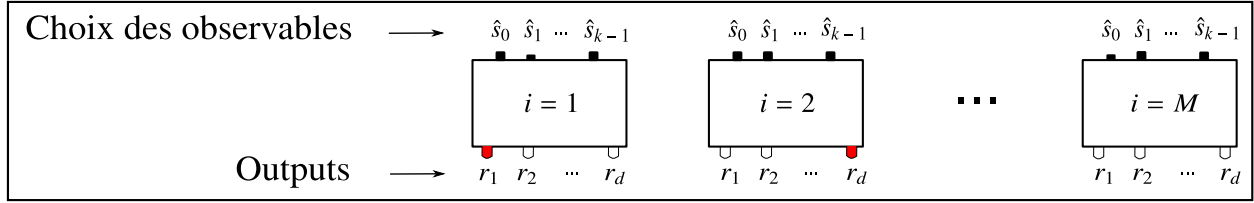


FIGURE 5.3.1 – Scénario de Bell pour l’exploration des corrélations non locales : un ensemble de  $M$  sous-systèmes partageant un même état quantique. Dans chaque séquence donnée, chaque sous-système mesure une observable parmi les  $k$  observables accessibles, ce qui donne un résultat  $r$  parmi  $d$  résultats possibles. Cette séquence est répétée plusieurs fois avec la mesure des observables différentes. Les résultats sont ensuite collectés et utilisés pour détecter la non-localité.

Dans l’expérience de Bell décrite précédemment, la possibilité de décomposer la distribution de probabilité (5.25) sous la forme (5.26) constitue la condition de localité des corrélations entre les  $M$  sous-systèmes étudiés. Par conséquent si, inversement, la distribution de probabilité (5.25) ne peut pas être écrite sous la forme (5.26), cela révèle que les corrélations présentes dans le système sont non-locales. Cette décomposition correspond à la condition de localité la plus générale, telle que définie par Bell. En pratique, comme nous le verrons ultérieurement, cette condition est souvent formulée sous forme d’une inégalité de Bell.

### 5.3.2 Corrélations de Bell à température nulle

#### Corrélateur de Bell à $M$ -sites

Passons maintenant à l’étude des corrélations de Bell dans le système précédemment discuté, en considérant l’état Mott-comprimé à température nulle, donné par (5.20) à l’instant  $t = \tau$ . Comme expliqué précédemment, cette état décrit un ensemble de  $M = N$  spins  $1/2$  corrélés et répartis sur un réseau, avec un spin  $1/2$  par site. En conséquence, dans un site donné, toute mesure d’une composante de spin,  $\hat{s}_\alpha$  avec  $\alpha = x, y, z$ , donne lieu à deux résultats possibles ( $d = 2$ ) :  $r = \pm 1/2$ . Dans le cadre de notre expérience de Bell, nous nous concentrons sur le cas où, dans chaque site  $j$ , nous mesurons l’opérateur de spin, définie comme [112]

$$\hat{s}_{j,+} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{s}_{j,y} + i\hat{s}_{j,z}). \quad (5.27)$$

Nous appelons  $P_M(\vec{r}|\hat{\vec{s}}_+)$  la probabilité d’obtenir l’ensemble de résultats  $\vec{r} = \{r^{(j)}\}_{j=1}^M$ , avec  $r^{(j)} \in \{-1/2, +1/2\}$ , lors de la mesure de l’observable (5.27) dans chaque site du réseau, c’est à dire  $\hat{\vec{s}}_+ = (\hat{s}_{1,+}, \dots, \hat{s}_{M,+})^T$ . À partir des observables (5.27), nous construisons l’observable suivante

$$\hat{c} = \prod_{j=1}^M \hat{s}_{j,+}. \quad (5.28)$$

La valeur moyenne de (5.28) s’écrit donc

$$\langle \hat{c} \rangle = \sum_{\vec{r}} \left( \prod_{j=1}^M r^{(j)} \right) P_M(\vec{r}|\hat{\vec{s}}_+), \quad (5.29)$$

avec  $P_M(\vec{r}|\hat{\vec{s}}_+) = \langle \otimes_{j=1}^M \hat{\Pi}_{\hat{s}_{j,+}, r^{(j)}} \rangle$ , où  $\langle \dots \rangle$  représente la moyenne sur l’état du système. Dans un modèle local, la probabilité  $P_M(\vec{r}|\hat{\vec{s}}_+)$  permet une décomposition de la forme (5.26), c’est à dire

$P_M(\vec{r}|\hat{s}_+) = \int d\lambda q(\lambda) \prod_{j=1}^M P^{(j)}(r^{(j)}|\hat{s}_{j,+}, \lambda)$ . Dans ce cas, la valeur moyenne de l'observable (5.29) s'écrit

$$\langle \hat{c} \rangle = \int d\lambda q(\lambda) \prod_{j=1}^M \left[ \sum_{r^{(j)}} r^{(j)} P^{(j)}(r^{(j)}|\hat{s}_{j,+}, \lambda) \right]. \quad (5.30)$$

De plus, si nous considérons un modèle réaliste où le résultat de mesure  $r^{(j)}$  est entièrement déterminé par la variable  $\lambda$  dans chaque site  $j$ , c'est à dire  $P^{(j)}(r^{(j)}|\hat{s}_{j,+}, \lambda) = \delta_{r^{(j)}r^{(j)}(\lambda)}$ , la valeur moyenne du corrélateur (5.29) peut être exprimée comme

$$\langle \hat{c} \rangle = \int d\lambda q(\lambda) \prod_{j=1}^M r^{(j)}(\lambda). \quad (5.31)$$

En posant  $f(\lambda) = 1$  et  $g(\lambda) = \prod_{j=1}^M r^{(j)}(\lambda)$  et en tenant compte du fait que  $|r^{(j)}(\lambda)|^2 = 1/4$  pour tout  $j$ , l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions  $f(\lambda)$  et  $g(\lambda)$

$$\overline{f(\lambda)g(\lambda)^2} \leq \overline{f^2(\lambda)} \overline{g^2(\lambda)}, \quad (5.32)$$

où,  $\overline{f(\lambda)} = \int d\lambda q(\lambda) f(\lambda)$ , nous permet d'obtenir l'inégalité de Bell pour le corrélateur de Bell à  $M$ -sites  $\mathcal{E}_M$

$$\mathcal{E}_M \equiv |\langle \hat{c} \rangle|^2 \leq \int d\lambda q(\lambda) \prod_{j=1}^M |r^{(j)}(\lambda)|^2 = 4^{-M}. \quad (5.33)$$

La violation de cette inégalité de Bell, c'est à dire le fait que  $\mathcal{E}_M > 4^{-M}$ , indique que les corrélations présentes dans le système ne peuvent pas être reproduites dans le cadre d'un modèle local réaliste au sens de Bell.

### Corrélateur de Bell à $M$ -sites vs corrélateur collectif

À partir de l'inégalité (5.33), nous pouvons déduire une inégalité exprimée en termes d'un corrélateur collectif. Pour ce faire, nous introduisons l'observable de spin collectif suivant

$$\hat{S}_+^M = \left( \sum_{j=1}^M \hat{s}_{j,+} \right)^M = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_M \in [1, M]} \hat{s}_{j_1,+} \hat{s}_{j_2,+} \dots \hat{s}_{j_M,+}. \quad (5.34)$$

À température nulle, les spins locaux correspondent à des spins 1/2 qui satisfont la relation suivante

$$\hat{s}_{j,+}^2 = \frac{1}{2} \left[ \hat{s}_{j,y}^2 - \hat{s}_{j,z}^2 + i \{ \hat{s}_{j,y}, \hat{s}_{j,z} \} \right] = 0, \quad (5.35)$$

où nous avons utilisé les relations suivantes

$$\hat{s}_\alpha^2 = \frac{1}{4} \mathbb{1} \quad \text{et} \quad \{ \hat{s}_\alpha, \hat{s}_\beta \} = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \mathbb{1}, \quad (5.36)$$

où  $\mathbb{1}$  représente l'opérateur identité, pour  $\alpha, \beta = x, y, z$ . En utilisant (5.35) dans (5.34), nous obtenons

$$\hat{S}_+^M = \hat{\mathcal{S}}^{(M)} \hat{c}, \quad (5.37)$$



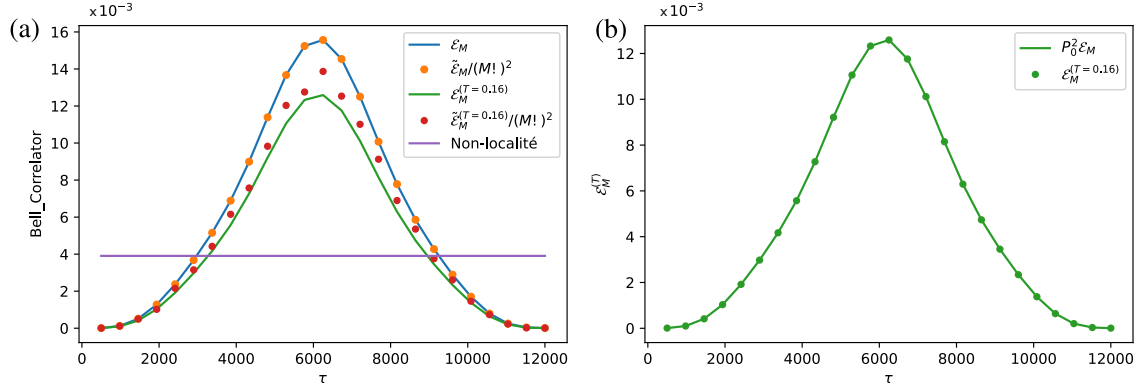


FIGURE 5.3.2 – Corrélateur de Bell à  $M$ -sites  $\mathcal{E}_M$  et corrélateur collectif  $\tilde{\mathcal{E}}_M$ , à température nulle et non nulle, en fonction de la durée de la rampe  $\tau$  pour  $N = M = 4$ . **(a)** Corrélateur de Bell à  $M$ -sites  $\mathcal{E}_M$  à température nulle (bleu continue) et corrélateur collectif  $\tilde{\mathcal{E}}_M$  à température nulle (orange pointillée). À température non nulle, le corrélateur de Bell à  $M$ -sites  $\mathcal{E}_M^{(T)}$  est représenté en vert continue et le corrélateur collectif  $\tilde{\mathcal{E}}_M^{(T)}$  est représenté en rouge pointillé. La ligne horizontale représente la borne de la non-localité. **(b)** Corrélateur local à température non nulle comparé au corrélateur local à température nulle multiplié par la probabilité  $P_0$  d’avoir exactement un atome par site.

où,  $\hat{\mathcal{S}}^{(M)}$  est l’opérateur de symétrisation sur toutes les  $M!$  permutations possibles. En tenant compte de la symétrie de l’état préparé, nous pouvons montrer que

$$\tilde{\mathcal{E}}_M \equiv |\langle \hat{\mathcal{S}}_+^M \rangle|^2 = (M!)^2 \mathcal{E}_M. \quad (5.38)$$

Pour des corrélations qui sont compatibles avec un modèle local réaliste, le corrélateur collectif  $\tilde{\mathcal{E}}_M$  vérifie l’inégalité suivante

$$\tilde{\mathcal{E}}_M \leq (M!)^2 4^{-M}. \quad (5.39)$$

Par conséquent, à température nulle et en raison de la configuration d’un atome par site, il est possible d’explorer les corrélations entre les différents sites en effectuant des mesures de spin collectif, voir par exemple [108, 109, 112]. L’inégalité (5.39) sert donc de marqueur pour les corrélations de Bell, signalant la présence de corrélations non-locales lorsque le corrélateur collectif mesuré viole cette inégalité, c’est-à-dire lorsque  $\tilde{\mathcal{E}}_M > (M!)^2 4^{-M}$ . le corrélateur de Bell à  $M$ -sites et le corrélateur collectif, calculés pour l’état stocké dans la phase de Mott à température nulle, sont représentés dans la figure 5.3.2-(a) en fonction de la durée  $\tau$  de la rampe. Nous observons une violation de l’inégalité de Bell, ce qui indique la présence de corrélations entre les différents sites du réseau incompatibles avec un modèle local réaliste. Dans le prochain paragraphe, nous examinerons l’effet des excitations thermiques sur le corrélateur de Bell à  $M$ -sites  $\mathcal{E}_M$  et nous trouverons une inégalité de Bell permettant de détecter les corrélations non-locales entre les sites du réseau à température non nulle.

### 5.3.3 Corrélations de Bell à température non nulle

#### Corrélateur de Bell à $M$ -sites

Dans la section précédente, nous avons expliqué comment les excitations thermiques influent sur la répartition spatiale des atomes, introduisant des doubles occupations et des trous dans la phase de Mott. Cependant, pour obtenir l’inégalité de Bell (5.33), nous avons d’abord supposé que toute

mesure de spin dans ces sites donnait l'un des deux résultats possibles,  $\pm 1/2$ . Cela correspond à une configuration spatiale où chaque site du réseau est occupé par un seul atome. Dans cette section, nous allons légèrement modifier le scénario de Bell pour montrer que l'inégalité de Bell (5.33) peut également être utilisée pour détecter les corrélations de Bell non-locales, même à température non nulle, c'est-à-dire en présence de doubles occupations et de trous. Pour cela, nous supposons que la température est faible de sorte que la répartition spatiale des atomes soit limitée au cas où il n'y a aucun, un ou deux atomes dans chaque site du réseau. Il est important de noter que la condition de localité, c'est-à-dire la décomposition de la densité de probabilités sous la forme (5.26), ne dépend pas des valeurs spécifiques des résultats de mesures  $\vec{r}$ , mais seulement des probabilités associées à ces valeurs. Ce fait nous permet de supposer que chaque mesure de spin local peut donner l'un des trois résultats possibles  $r \in \{-1/2, 0, +1/2\}$ . En d'autres termes, nous attribuons la valeur 0 à toute mesure qui diffère de  $\pm 1/2$ . Dans ce cas, nous avons  $|r^{(j)}(\lambda)|^2 \in \{0, 1/4\}$ , ce qui nous permet d'obtenir, en terme du corrélateur local  $\mathcal{E}_M^{(T)}$ , où  $\mathcal{E}_M^{(T=0)} = \mathcal{E}_M$  est défini par (5.33), l'inégalité de Bell

$$\mathcal{E}_M^{(T)} = |\langle \hat{c} \rangle|^2 \leq \int d\lambda q(\lambda) \prod_{j=1}^M |r^{(j)}(\lambda)|^2 \leq 4^{-M}, \quad (5.40)$$

où  $\hat{c}$  est donné par (5.28). Ainsi, l'inégalité de Bell (5.40), qui a été utilisée pour détecter les corrélations non locales à température nulle, peut également être utilisée pour détecter les corrélations de Bell non locales à température non nulle. Dans la figure 5.3.2-(a), nous montrons, à température nulle et non nulle, la détection, dans les états générés dans la phase de Mott, des corrélations qui viole l'inégalité de Bell (5.40) et qui ne sont pas compatibles avec un modèle local réaliste.

Voyons maintenant comment  $\mathcal{E}_M$  dépend de la température et du temps de la dynamique dans le système introduit à la section 5.1. À température non nulle, l'état du système est décrit par l'opérateur densité (5.24), et nous pouvons exprimer  $\langle \hat{c} \rangle_T$  comme

$$\langle \hat{c} \rangle_T = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-E_n^{(0)}/k_B T} \text{tr} \left[ \hat{U}_t \hat{U}_{\pi/2} |\psi_n^{(a)}\rangle \langle \psi_n^{(a)}| \hat{U}_{\pi/2}^\dagger \hat{U}_t^\dagger \hat{c} \right]. \quad (5.41)$$

Étant donné que les états excités  $|\psi_n^{(a)}\rangle$ , avec  $n > 0$ , correspondent à des états où au moins un site est vide, l'attribution de la valeur 0 à tout résultat de mesure différent de  $\pm 1/2$  n'affecte pas le corrélateur de Bell à  $M$ -sites. De plus, l'équation (5.41) peut être écrite comme

$$\langle \hat{c} \rangle_T = P_0 \langle \psi(t) | \hat{c} | \psi(t) \rangle, \quad (5.42)$$

où  $P_0 = \frac{1}{Z} e^{-E_0^{(0)}/k_B T}$  représente la probabilité d'être dans l'état fondamental  $|\psi_0^{(a)}\rangle$  avant l'application de l'impulsion  $\pi/2$ , c'est-à-dire la probabilité d'avoir exactement un atome par site du réseau. Quant à  $|\psi(t)\rangle$ , il représente l'état du système à l'instant  $t$  à température nulle. le corrélateur de Bell à  $M$ -sites  $\mathcal{E}_M^{(T)}$  est donc donné par

$$\mathcal{E}_M^{(T)} \equiv |\langle \hat{c} \rangle_T|^2 = P_0^2 \mathcal{E}_M. \quad (5.43)$$

Cette relation est vérifiée numériquement pour  $N = M = 4$ , comme le montre la figure 5.3.2-(b). De plus, comme nous allons montrer ci-dessous, dans des conditions spécifiques, la probabilité  $P_0$  peut avoir une expression analytique qui permet de calculer le corrélateur de Bell pour un nombre  $N$  plus grand que accessible numériquement.

Dans la phase superfluide avec de faibles interactions, où tous les atomes occupent le mode interne  $a$ , le système peut être approximativement décrit par le modèle de Bogoliubov. Dans ce

modèle, les excitation de basse énergie sont approximativement décrites par un ensemble d'oscillateurs harmoniques indépendants. Le hamiltonien associé est formulé comme

$$\hat{H}_{\text{Bog}} = E_0 + \sum_{\substack{j=-N/2+1, \\ j \neq 0}}^{N/2} \hbar\omega_j \hat{d}_j^\dagger \hat{d}_j, \quad (5.44)$$

où,  $E_0$  est l'énergie de l'état fondamental du système,  $\hat{d}_j$  est l'opérateur d'annihilation d'une quasi-particule de Bogoliubov associée à la quasi-impulsion  $q = 2kj/N$  et  $\hbar\omega_j$  est donné, en termes du paramètre de l'effet tunnel  $J$  et du paramètre d'interaction  $U$ , par

$$\hbar\omega_j = 4J \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{N}j\right) \left( \sin^2\left(\frac{\pi}{N}j\right) + \frac{U}{2J} \frac{N}{M} \right)}. \quad (5.45)$$

À température non nulle  $T$ , la probabilité  $P_0$  d'être dans l'état fondamental est déterminée par la probabilité d'avoir 0 excitation dans tous les oscillateurs harmoniques, c'est à dire

$$P_0 = \prod_j p_j(n_j = 0). \quad (5.46)$$

Or, pour un oscillateur harmonique  $j$ , la probabilité d'avoir  $n$  excitations, à température  $T$ , est donnée par

$$p_j(n_j = n) = \frac{e^{-n\hbar\omega_j/k_B T}}{Z_j} \quad \text{avec} \quad Z_j = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\hbar\omega_j/k_B T} = \frac{1}{1 - e^{-\hbar\omega_j/k_B T}}. \quad (5.47)$$

Par conséquent, la probabilité  $P_0$  d'être dans l'état fondamental peut être exprimée comme

$$P_0 = \prod_{\substack{j=-N/2+1, \\ j \neq 0}}^{N/2} \left( 1 - e^{-\hbar\omega_j/k_B T} \right). \quad (5.48)$$

Cette dernière expression est comparée, dans la figure 5.3.3, à la probabilité  $P_0$  exacte, calculée numériquement, pour différents nombre d'atomes  $N$ .

### Corrélateur de Bell à $M$ -sites vs corrélateur collectif

En raison de la présence de doubles occupations dans le système, l'égalité (5.35) n'est plus applicable dans le cas des températures supérieures à zéro ( $T > 0$ ). Par conséquent, cela nous conduit à conclure que la relation (5.38), qui relie le corrélateur de Bell à  $M$ -sites au corrélateur collectif, n'est également pas valable pour  $T > 0$ , c'est à dire

$$\tilde{\mathcal{E}}_M^{(T)} \neq (M!)^2 \mathcal{E}_M^{(T)}, \quad \text{pour} \quad T > 0. \quad (5.49)$$

En représentant  $\mathcal{E}_M^{(T)}$  et  $\tilde{\mathcal{E}}_M^{(T)}/(M!)^2$ , la figure 5.3.2-(a) illustre cette différence. À température non nulle, le corrélateur collectif ne permet donc pas la detection de la non localité présente entre les sites du réseau.

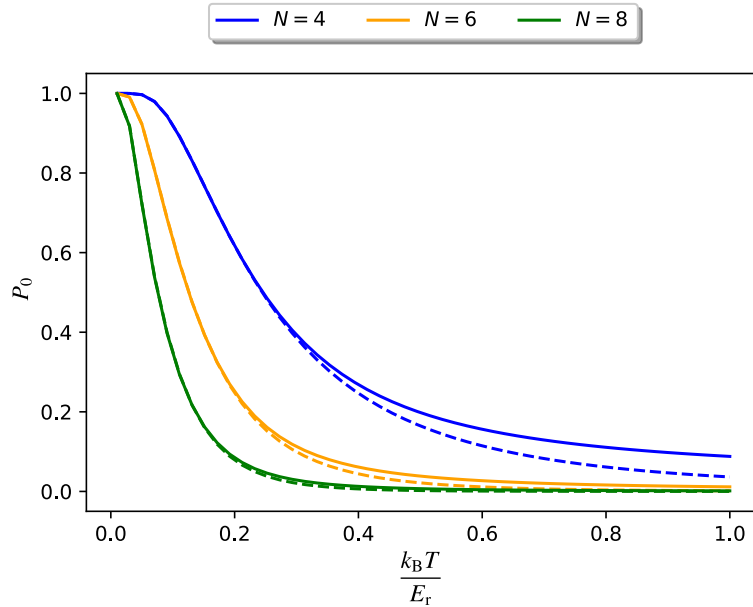


FIGURE 5.3.3 – La probabilité  $P_0$  d’occuper l’état fondamental, c’est-à-dire d’avoir précisément un atome par site, telle que calculée à l’aide du modèle de Bogoliubov (5.48) dans le cas de faibles interactions avec  $a_{aa} = 0.5a_B$  où  $a_B$  es le rayon de Bohr, pour différents nombre d’atomes  $N = 4, 6, 8$  (courbes pointillés), est comparée en courbes pleines à sa valeur exacte obtenue par la diagonalisation du hamiltonien Bose-Hubbard (5.12), dans la phase superfluide, en considérant que tous les atomes sont dans le mode interne  $a$ .

## 5.4 Étude de corrélations de Bell à 2-sites en présence de trous et de sites doublement occupés

Jusqu’à présent, nous avons exploré les corrélations de Bell à  $M$ -sites, que ce soit à température nulle ou à température non nulle. Cependant, une telle étude nécessite une reconstruction complète de la distribution de probabilité  $P(\vec{\tau}|\vec{a})$ . Malheureusement, cette exigence implique la réalisation d’un nombre exponentiellement élevé de mesures, ce qui rend l’étude des corrélations de Bell à  $M$ -parties difficile à réaliser en pratique. Dans cette section, nous allons nous concentrer sur l’étude des corrélations de Bell à 2-sites. Pour ce faire, nous considérons un modèle simple qui décrit un ensemble de  $N$  atomes intriqués, par la dynamique one-axis twisting, et répartis dans l’espace sur  $M$  sites, avec une probabilité non nulle d’obtenir des sites vides ou doublement occupés. L’état d’un tel système peut être décrit par une matrice densité de la forme

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_{\text{ext}} \otimes \hat{\rho}_{\text{SS}}, \quad (5.50)$$

où  $\hat{\rho}_{\text{SS}}$ , décrivant les degrés de liberté internes des atomes, est la matrice densité qui pourrait décrire soit un état idéalement comprimé en spin, soit un état comprimé de spin imparfait en raison de la présence de décohérence. En l’absence de décohérence, nous avons  $\hat{\rho}_{\text{SS}} = |\psi_t\rangle\langle\psi_t|$  avec,

$$|\psi_t\rangle = e^{-i\hat{H}_{\text{OAT}}t/\hbar}|\psi_0\rangle, \quad (5.51)$$

où  $\hat{S}_z$  est la composante  $z$  du spin collectif et  $|\psi_0\rangle = |x\rangle^{\otimes N}$ , l’état de spin préparé par la dynamique one-axis twisting  $\hat{H}_{\text{OAT}} = \hbar\chi S_z^2$ . La matrice densité  $\hat{\rho}_{\text{ext}}$ , décrit les degrés de liberté externes. Dans le modèle que nous considérons ici, nous supposons une matrice densité des degrés de liberté externes, factorisée sur les différents sites, de la forme

$$\hat{\rho}_{\text{extern}} = \otimes_{j=1}^M \hat{\rho}_j, \quad (5.52)$$

avec

$$\hat{\rho}_j = p|1\rangle_{jj}\langle 1| + (1-p)(\mathbb{1}_1 - |1\rangle_{jj}\langle 1|), \quad (5.53)$$

où  $|1\rangle_j$  est l'état de Fock avec un atome au site  $j$  et  $\mathbb{1}_j$  est l'opérateur d'identité sur la base de Fock dans le site  $j$ , et le paramètre  $p$  représente la probabilité d'avoir un seul atome dans un site donné, qui est la même pour tous les sites. En pratique, nous limitons l'espace de Hilbert aux cas où il y a zéro, un ou deux atomes dans chaque site du réseau. Il convient de noter que l'équation (5.52) néglige les corrélations entre les populations des différents sites du réseau. Pour étudier les corrélations quantiques entre les différents sites du réseau, nous considérons de nouveau le scénario de Bell illustré dans la figure 5.3.1. Dans ce cas, nous considérons que dans chaque site  $j$ , deux observables de spin peuvent être mesurées (c'est-à-dire  $k = 2$ )

$$\hat{s}_{j,0} = \hat{s}_{j,\vec{n}} \cos(\theta) + \hat{s}_{j,\vec{m}} \sin(\theta), \quad \text{et} \quad \hat{s}_{j,1} = \hat{s}_{j,\vec{n}} \cos(\theta) - \hat{s}_{j,\vec{m}} \sin(\theta), \quad (5.54)$$

où le vecteur unitaire  $\vec{n}$  est dans la direction du spin et  $\vec{m}$  est perpendiculaire à la direction du spin. Comme dans le cas de la température non nulle abordé précédemment, nous supposons que chaque mesure peut donner l'un des trois résultats possibles  $r \in \{-1/2, 0, +1/2\}$ . Le résultat 0 est attribué à toute mesure qui diffère de  $\pm 1/2$ , ce qui se produit lorsque le site est vide ou doublement occupé. À partir des données générées dans ce scénario de Bell, nous construisons dans tous les sites, les densités de probabilités à un site,  $P_1(r|\hat{s}_{i,a_i})$ , qui donnent la probabilité d'obtenir le résultat  $r$  lors de la mesure de l'observable  $\hat{s}_{i,a_i}$  dans le site  $i$ , avec  $a_i \in \{0, 1\}$ . De plus, nous construisons toutes les densités de probabilités à deux sites,  $P_2(r, t|\hat{s}_{i,a_i}, \hat{s}_{j,a_j})$ , qui donnent la probabilité d'obtenir la paire de résultats  $(r, t)$  lors de la mesure des observables  $\hat{s}_{i,a_i}$  dans le site  $i$  et  $\hat{s}_{j,a_j}$  dans le site  $j$ , pour tout  $i, j \neq i$ . Compte tenu du caractère symétrique de l'état (5.50), nous symétrisons les distributions de probabilité  $P_1$  et  $P_2$  en effectuant une moyenne sur toutes les permutations des sous-systèmes, ce qui nous conduit à

$$\bar{P}_1(r|\hat{s}_a) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_1(r^{(i)}|\hat{s}_{i,a_i}), \quad (5.55)$$

$$\bar{P}_2(r, t|\hat{s}_a, \hat{s}_b) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j \neq i} P_2(r^{(i)}, t^{(j)}|\hat{s}_{i,a_i}, \hat{s}_{j,b_j}). \quad (5.56)$$

Ces distributions de probabilité contiennent donc toute l'information sur les corrélations à deux sites présentes dans l'état (5.50).

### 5.4.1 Corrélations jusqu'au second ordre

#### Témoin de non localité à partir des corrélations d'ordre 1 sur site

Afin d'étudier les corrélations à 2-sites, au lieu de travailler avec les densités de probabilité (5.55) et (5.56), nous analysons d'abord les fonctions de corrélation symétrisées  $M_a = \sum_{i=1}^M \langle \hat{s}_{i,a_i} \rangle / M$  et  $C_{ab} = \sum_{i,j \neq i} \langle \hat{s}_{i,a_i} \hat{s}_{j,b_j} \rangle / (M(M-1))$ , qui contiennent des informations partielles sur les moyennes à un site et les corrélations à deux sites. Dans le cas de la mesure de deux observables, c'est à dire  $k = 2$ , ces fonctions de corrélations sont représentés, respectivement, par un vecteur  $\vec{M} = (M_0, M_1)^T$  et une matrice  $C = \{C_{ab}|a, b \in \{0, 1\}\}$ . Comme expliqué dans la référence [110], l'inégalité de Bell

$$L^{(1)}(A, h) = \text{tr}(A\tilde{C}) + \vec{h} \cdot \vec{M} + E_{\max} \geq 0, \quad (5.57)$$

où  $\tilde{C}_{ab} = (M-1)C_{ab} - MM_aM_b$  et  $E_{\max} = \max_{\vec{r}} [\vec{r}^T A \vec{r} - \vec{h} \cdot \vec{r}]$ , avec  $\vec{r} = (r_0, r_1)^T$  telle que  $r_0, r_1 \in \{+1/2, 0, -1/2\}$ , est vérifiée par toutes les données  $(C_{ab}, M_a)$  qui sont compatibles avec

un modèle local au sens de Bell, pour toute matrice semi-définie positive  $A$  de taille  $2 \times 2$  et tout vecteur  $\vec{h}$  de taille  $2 \times 1$ . Dans ce cadre, la detection de corrélations non locales via les données  $M_a$  et  $C_{ab}$  revient à obtenir une matrice semi-définie positive  $A$  et un vecteur  $\vec{h}$  qui conduisent à une violation de l'inégalité de Bell (5.57). Maintenant, nous calculons les corrélations  $\vec{M}$  et  $C$  dans l'état du système (5.50), pour le choix des observables de mesure (5.54) avec  $M = N$ . Étant donné que le spin est dirigé selon  $x$ , nous prenons  $\vec{n} = \vec{e}_x$  et  $\vec{m} = \vec{m}_{\text{opt}}$ , où  $\vec{m}_{\text{opt}}$  indique la direction de compression maximale d'une observable linéaire de spin mentionnée dans le chapitre 2. Les fonctions de corrélations  $M_a$  et  $\tilde{C}_{ab}$  sont données, en terme d'observables de spin, par

$$M_a = \frac{\langle \hat{S}_a \rangle}{M}, \quad \forall a \in \{0, 1\} \quad (5.58)$$

$$\tilde{C}_{ab} = \frac{1}{M} \left[ \langle \hat{S}_a \hat{S}_b \rangle - \sum_{i=1}^M \langle \hat{s}_{i,a_i} \hat{s}_{i,b_i} \rangle - \langle \hat{S}_a \rangle \langle \hat{S}_b \rangle \right], \quad \forall a, b \in \{0, 1\}.$$

Le calcul de ces fonctions dans l'état  $\hat{\rho}$  nous donne

$$M_a = p \frac{\langle \hat{S}_{\vec{n}} \rangle}{N} \cos(\theta), \quad \forall a \in \{0, 1\} \quad (5.59)$$

$$\tilde{C}_{ab} = p^2 \frac{(\Delta \hat{S}_{\vec{n}})^2}{N} \cos^2(\theta) - (-1)^{\delta_{ab}} p^2 \frac{(\Delta \hat{S}_{\vec{m}})^2}{N} \sin^2(\theta) - \frac{p^2}{4} \cos[2\theta(1 - \delta_{ab})], \quad \forall a, b \in \{0, 1\}. \quad (5.60)$$

où  $\langle \hat{S}_{\vec{n}} \rangle$  et  $(\Delta \hat{S}_{\vec{n}})^2$  sont la moyenne et la variance de l'observable de spin  $\hat{S}_{\vec{n}}$  calculés dans l'état comprimé de spin qui peut être idéal (5.51) où imparfait. Afin d'identifier la matrice optimale  $A$  et le vecteur  $\vec{h}$  qui permet de construire l'inégalité de Bell, nous incluons, dans l'algorithme de la référence [110], les données  $\vec{M}$  et  $C$  calculés dans l'état comprimé de spin idéal (5.51). En substituant la matrice optimale  $A$  et le vecteur  $\vec{h}$  ainsi obtenus dans l'inégalité (5.57), nous obtenons l'inégalité de Bell

$$\tilde{C}_{00} + \tilde{C}_{11} - \tilde{C}_{01} - \tilde{C}_{10} - M_0 - M_1 \geq -N. \quad (5.61)$$

Noter que cette inégalité a été établie pour la première fois dans [110] pour les états comprimés de spin avec seulement deux résultats de mesure possibles. Ici, nous trouvons que cette même inégalité peut également s'appliquer à des systèmes où les mesures locales donnent plus de deux résultats possibles, où nous attribuons la valeur 0 à tout résultat différent de  $\pm 1/2$ . En remplaçant (5.59) et (5.60) dans (5.61), nous obtenons le témoin des corrélations non locales pour un état de la forme (5.50), exprimé en termes d'observables de spin collectif et de la probabilité  $p$

$$L_{\theta}^{(1)} = p^2 \sin^2(\theta) \left( \frac{4(\Delta \hat{S}_{\vec{m}})^2}{N} - 1 \right) - 2p \frac{\langle \hat{S}_{\vec{n}} \rangle}{N} \cos(\theta) + 1 \geq 0. \quad (5.62)$$

En minimisant cette dernière équation par rapport à  $\theta$

$$\cos \theta_{\text{opt}} = \frac{1}{p} \frac{\langle \hat{S}_{\vec{n}} \rangle}{N - 4(\Delta \hat{S}_{\vec{m}})^2}, \quad (5.63)$$

nous obtenons

$$L^{(1)} = 1 - \frac{\langle \hat{S}_{\vec{n}} \rangle^2}{N [N - 4(\Delta \hat{S}_{\vec{m}})^2]} - p^2 \left[ 1 - \frac{4(\Delta \hat{S}_{\vec{m}})^2}{N} \right]. \quad (5.64)$$

Dans l'esprit des articles [108, 109], nous remarquons que la quantité (5.64) peut être obtenue avec des mesures collectives donnant  $\langle \hat{S}_{\vec{n}} \rangle$  et  $\Delta \hat{S}_{\vec{n}}$  plus la connaissance de  $p$ . La figure 5.4.1-(a) représente

$L^{(1)}$  en fonction de  $\chi t$ , avec  $\vec{n} = \vec{e}_x$  et  $\vec{m} = \vec{m}_{\text{opt}}$ , pour un  $N$  donné et pour différentes valeurs de  $p$  lorsque le système est dans l'état (5.50)-(5.52). Pour chaque instant  $t$ , nous pouvons en déduire une valeur critique  $p_c^{(1)}$  en dessous de laquelle il n'est pas possible de détecter des corrélations non locales. Pour l'état (5.50) en utilisant (5.64), nous obtenons<sup>1</sup>

$$p_c^{(1)} = \frac{\sqrt{N [N - 4(\Delta \hat{S}_{\vec{m}})^2] - \langle \hat{S}_{\vec{n}} \rangle^2}}{N - 4(\Delta \hat{S}_{\vec{m}})^2}. \quad (5.65)$$

La figure 5.4.1-(b) représente  $L_{\text{best}}^{(1)}$ , qui correspond à la valeur minimale de  $L^{(1)}$  dans l'équation (5.64) au cours du temps, en fonction de  $N$  pour différentes valeurs de  $p$ . La figure indique que lorsque  $N$  devient grand,  $L_{\text{best}}^{(1)}$  s'approche d'une constante dépendante de  $p$  dont la valeur  $3/4 - p^2$ , représentée en pointillée dans la figure 5.4.1-(b), peut être déduite de (5.64). Les figures 5.4.1-(c) et 5.4.1-(d) montrent la variation de  $p_c^{(1)}$  dans l'équation (5.65) pour différents  $N$  au cours de la dynamique de l'OAT, et sa valeur minimale dans le temps  $p_{c\_best}^{(1)}$  en fonction de  $N$ , respectivement. Comme le montre (5.65), dans la limite des grands  $N$ , la probabilité critique  $p_{c\_best}^{(1)}$  s'approche de la constante  $\sqrt{3}/2$ , comme nous pouvons le voir, en pointillée, dans la figure 5.4.1-(d).

### Témoin de non localité amélioré par l'introduction de corrélations d'ordre 2 sur site

Comme indiqué précédemment, les données  $(M_a, C_{ab})$  ne constituent qu'une information partielle sur les corrélations dans le système. Cela conduit à une détection partielle des corrélations non locales. Pour améliorer la détection des corrélations non locales, il faut disposer de plus d'informations. Comme suggéré dans [110], cela peut être fait en introduisant la fonction  $M_a^{(2)} = \sum_{i=1}^N \langle [\hat{s}_{i,a}]^2 \rangle / N$  et le vecteur  $\vec{h}^{(2)}$  de taille  $2 \times 1$ . Nous construisons ainsi l'inégalité de Bell

$$L^{(2)}(A, h, h^{(2)}) = \text{tr}(A\tilde{C}) + \vec{h} \cdot \vec{M} + \vec{h}^{(2)} \cdot \vec{M}^{(2)} + E_{\text{max}} \geq 0, \quad (5.66)$$

avec, cette fois,  $E_{\text{max}} = \max_{\vec{r}} [\vec{r}^T A \vec{r} - \vec{h} \cdot \vec{r} - \vec{h}^{(2)} \cdot \vec{r}^{(2)}]$  où  $\vec{r}^{(2)} = (r_0^2, r_1^2)^T$ . Le calcul de  $M_a^{(2)}$  dans l'état (5.50) pour le même choix des observables de mesure (5.54), nous obtenons

$$M_a^{(2)} = \frac{p}{4}, \quad \forall a \in \{0, 1\}. \quad (5.67)$$

L'utilisation, dans l'algorithme de [110], des données  $M_a$ ,  $M_a^{(2)}$  et  $\tilde{C}_{ab}$ , données par (5.59), (5.60) et (5.67) respectivement où, les corrélations entre les atomes qui donne  $\langle \hat{S}_{\vec{n}} \rangle$  et la variance  $(\Delta \hat{S}_{\vec{m}})^2$  sont calculées dans l'état idéal (5.51) obtenu par la dynamique one-axis twisting, conduit à une l'inégalité de Bell

$$\tilde{C}_{00} + \tilde{C}_{11} - \tilde{C}_{01} - \tilde{C}_{10} - M_0 - M_1 + M_0^{(2)} + M_1^{(2)} \geq -\frac{N}{2}. \quad (5.68)$$

Pour un système dont l'état est caractérisé par (5.50), cette inégalité de Bell fournit un nouveau témoin de corrélation non local en termes d'observables de spin collectif et de probabilité  $p$

$$L_{\theta}^{(2)} = L_{\theta}^{(1)} + \frac{p-1}{2} \geq 0, \quad (5.69)$$

1. Notez que dans ce cas la valeur moyenne  $\langle \hat{S}_{\vec{n}} \rangle$  et la variance  $(\Delta \hat{S}_{\vec{m}})^2$  sont celles de l'état (5.51) et sont indépendant de  $p$ .

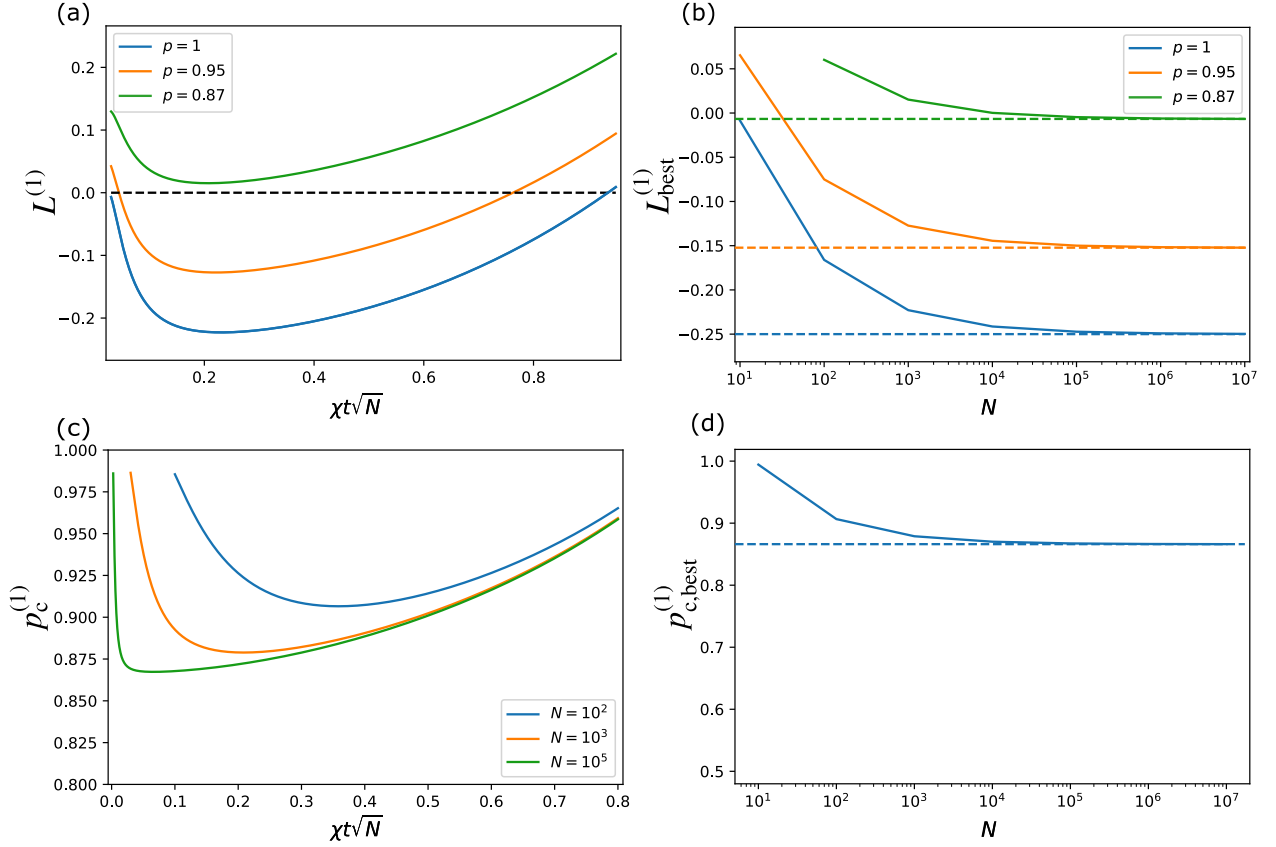


FIGURE 5.4.1 – Détection de la non localité présente dans les états comprimés de Mott à température non nulle : (a) Variation de témoin de non localité (5.64) au cours de la dynamique one-axis twisting avec  $N = 10^3$  pour différentes valeurs de  $p$ . (b) Valeur minimale en temps du témoin  $L^{(1)}$  en fonction de  $N$ . Les lignes horizontales pointillées représente la limite à grand nombre d’atome  $N$  pour les différentes valeurs de la probabilité  $p$ . (c) Variation de la probabilité critique  $p_c^{(1)}$ , donnée par l’équation (5.65), au cours de la dynamique one-axis twisting pour différents nombres d’atomes  $N$ . (d) Valeur minimale en temps de probabilités critique  $p_c^{(1)}$  en fonction de nombre d’atomes  $N$ . La ligne horizontale pointillée représente la limite à grand nombre d’atome  $N$ .

où  $L_\theta^{(1)}$  est donné par (5.62). En optimisant (5.69) par rapport à  $\theta$ , nous trouvons le même  $\theta_{\text{opt}}$  que dans (5.63) et la valeur optimale de  $L^{(2)}$  est

$$L^{(2)} = L^{(1)} + \frac{p-1}{2}, \quad (5.70)$$

où  $L^{(1)}$  est donné par (5.64). Comme prévu, l’introduction de  $M_a^{(2)}$  améliore la détection des corrélations non locales. En effet, lorsque  $p = 1$ , l’équation (5.70) implique que  $L^{(2)} = L^{(1)}$ , tandis que, si  $p < 1$ , on a  $L^{(2)} < L^{(1)}$ . Cela indique que les données  $(M_a, C_{ab})$  ne fournissent pas d’informations complètes sur les corrélations à 2-sites du système et que l’introduction de  $M_a^{(2)}$  améliore la détection des corrélations non locales. Ceci est illustré sur la figure 5.4.2-(a-d) avec les lignes en pointillés. La probabilité critique, en dessous de laquelle la détection des corrélations non locales



devient impossible, diminue et nous avons

$$p_c^{(2)} = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 4 \left[ 1 - \frac{4(\Delta\hat{S}_{\bar{m}})^2}{N} \right] \left[ \frac{1}{2} - \frac{\langle \hat{S}_{\bar{n}} \rangle^2}{N(N-4(\Delta\hat{S}_{\bar{m}})^2)} \right]}}{2 \left[ 1 - \frac{4(\Delta\hat{S}_{\bar{m}})^2}{N} \right]}. \quad (5.71)$$

Dans la limite de grands  $N$  et après optimisation sur le temps, la probabilité critique minimale  $p_{c,\text{best}}^{(2)}$  tend vers la constante  $(1 + \sqrt{5})/4$  comme nous pouvons le constater dans la figure 5.4.2-(d).

### 5.4.2 Corrélations jusqu'au quatrième ordre

Comme indiqué précédemment, les distributions de probabilité  $\bar{P}_1$  et  $\bar{P}_2$ , données respectivement par (5.55) et (5.56), capturent entièrement les corrélations à 2-sites dans le système dans un état symétrique. En général, ces distributions peuvent être reconstruites à l'aide des fonctions de corrélations [110]

$$M_a^{(\alpha)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle [\hat{s}_{i,a_i}]^\alpha \rangle, \quad (5.72)$$

$$C_{ab}^{(\alpha\beta)} = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} \langle [\hat{s}_{i,a_i}]^\alpha [\hat{s}_{j,b_j}]^\beta \rangle, \quad (5.73)$$

où  $\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, d-1\}$ , et  $d$  est le nombre de résultats possibles pour la mesure de  $\hat{s}_{j,a_j}$  à chaque site du réseau  $j$ . En effet, ceci peut facilement être démontré dans notre cas, c'est à dire  $d = 3$  résultats possibles  $r \in \{-1/2, 0, +1/2\}$ . Dans ce cas, les projecteurs  $\hat{\Pi}_{\hat{s}_{k,a_k}, r^{(k)}}$  sur les espaces propres de l'observable de spin  $\hat{s}_{k,a_k}$  associée aux résultats  $r^{(k)}$  présentent les propriétés suivantes

$$\begin{cases} \mathbb{1} &= \hat{\Pi}_{\hat{s}_{k,a_k}, +1/2} + \hat{\Pi}_{\hat{s}_{k,a_k}, -1/2} + \hat{\Pi}_{\hat{s}_{k,a_k}, 0} \\ \hat{s}_{k,a_k} &= +\frac{1}{2}\hat{\Pi}_{\hat{s}_{k,a_k}, +1/2} - \frac{1}{2}\hat{\Pi}_{\hat{s}_{k,a_k}, -1/2} \\ \hat{s}_{k,a_k}^2 &= \frac{1}{4}\hat{\Pi}_{\hat{s}_{k,a_k}, +1/2} + \frac{1}{4}\hat{\Pi}_{\hat{s}_{k,a_k}, -1/2} \end{cases}. \quad (5.74)$$

En utilisant ce système d'équations, nous pouvons exprimer les projecteurs  $\hat{\Pi}_{\hat{s}_{k,a_k}, r^{(k)}}$  en termes d'observables de spin

$$\begin{cases} \hat{\Pi}_{\hat{s}_{k,a_k}, +1/2} &= 2\hat{s}_{k,a_k}^2 + \hat{s}_{k,a_k} \\ \hat{\Pi}_{\hat{s}_{k,a_k}, -1/2} &= 2\hat{s}_{k,a_k}^2 - \hat{s}_{k,a_k} \\ \hat{\Pi}_{\hat{s}_{k,a_k}, 0} &= \mathbb{1} - 4\hat{s}_{k,a_k}^2 \end{cases}. \quad (5.75)$$

En utilisant (5.75), nous pouvons construire, respectivement, les distributions de probabilité (5.55) et (5.56) en termes de fonctions de corrélations (5.72) et (5.73). Cette démonstration peut être facilement généralisée pour n'importe quel  $d$ .

Dans la suite, nous utiliserons l'algorithme de [110] pour étudier la détection de corrélations non locales à partir des données (5.72) et (5.73). À cette fin, une inégalité de Bell peut être exprimée, pour toute matrice  $A$  semi-définie positive de taille  $4 \times 4$  et tout vecteur  $\vec{h}$  de taille  $4 \times 1$ , comme

$$L = \text{tr}(A\tilde{C}) + \vec{h} \cdot \vec{M} + E_{\text{max}} \geq 0, \quad (5.76)$$

où  $\tilde{C}_{ab}^{(\alpha\beta)} = (N-1)C_{ab}^{(\alpha\beta)} - NM_a^{(\alpha)}M_b^{(\beta)}$ . Dans ce cas, nous avons  $E_{\text{max}} = \max_{\vec{X}_r} [\vec{X}_r^T A \vec{X}_r - \vec{h} \cdot \vec{X}_r]$  avec  $\vec{X}_r = (r_0, r_1, r_0^2, r_1^2)^T$ . Cette inégalité de Bell est satisfaite par toutes les données  $(M_a^{(\alpha)}, C_{ab}^{(\alpha\beta)})$

qui sont compatibles avec un modèle à variables locales au sens de Bell, et donc sa violation, pour une matrice semi-définie positive donnée  $A$  et un vecteur donné  $\vec{h}$ , indique la présence de corrélations non locales. Pour un système de spin décrit par la matrice densité (5.50) avec le choix des mesures (5.54), nous avons

$$M_a^{(1)} = M_a, \quad (5.77)$$

$$\tilde{C}_{ab}^{(11)} = \tilde{C}_{ab}, \quad (5.78)$$

$$\tilde{C}_{ab}^{(12)} = \tilde{C}_{ab}^{(21)} = -\frac{p^2}{4} \frac{\langle \hat{S}_{\vec{n}} \rangle}{N} \cos(\theta), \quad (5.79)$$

$$\tilde{C}_{ab}^{(22)} = -\frac{p^2}{16}, \quad (5.80)$$

où  $M_a$  et  $\tilde{C}_{ab}$  sont donnés par (5.59) et (5.60) respectivement. Nous appliquons l'algorithme en utilisant les données (5.67) et (5.77)-(5.80) calculées dans l'état comprimé de spin idéal (5.51), avec  $\vec{n} = \vec{e}_x$  et  $\vec{m} = \vec{m}_{\text{opt}}$ , où  $\vec{m}_{\text{opt}}$  désigne la direction de la compression maximale du spin, nous obtenons l'inégalité de Bell

$$\begin{aligned} & \tilde{C}_{00}^{(11)} + \tilde{C}_{11}^{(11)} - \tilde{C}_{01}^{(11)} - \tilde{C}_{10}^{(11)} - M_0 - M_1 - 4 \left( \tilde{C}_{00}^{(12)} + \tilde{C}_{11}^{(12)} - \tilde{C}_{01}^{(12)} - \tilde{C}_{10}^{(12)} \right) \\ & + 4 \left( \tilde{C}_{00}^{(22)} + \tilde{C}_{11}^{(22)} - \tilde{C}_{01}^{(22)} - \tilde{C}_{10}^{(22)} \right) + 2M_0^{(2)} + 2M_1^{(2)} \geq 0. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Cela conduit au témoin de corrélations non locales

$$L = L^{(1)} + p - 1, \quad (5.82)$$

où  $L^{(1)}$  est donné par (5.64). Comme l'inégalité (5.82) est dérivée en utilisant toutes les informations sur les moyennes à 1-site et les corrélations à 2-sites dans le système, elle nous permet d'améliorer la détection des corrélations non locales. La probabilité critique  $p_c$ , en dessous de laquelle aucune corrélation non locale ne peut être détectée, est maintenant donnée par

$$p_c = \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \left[ 1 - \frac{4(\Delta \hat{S}_{\vec{m}})^2}{N} \right] \left[ \frac{\langle \hat{S}_{\vec{n}} \rangle^2}{N(N - 4(\Delta \hat{S}_{\vec{m}})^2)} \right]}}{2 \left[ 1 - \frac{4(\Delta \hat{S}_{\vec{m}})^2}{N} \right]}. \quad (5.83)$$

Dans la figure 5.4.2-(d), la valeur minimale  $p_{c\_best}$ , en fonction du temps, de  $p_c$  est représentée en fonction du nombre d'atomes  $N$ . Nous remarquons que dans la grande limite de  $N$ , la probabilité critique  $p_c$  tend vers  $1/2$ . L'amélioration de la détection des corrélations non locales est visible sur le graphique en remarquant que  $p_{c\_best}^{(1)} \geq p_{c\_best}^{(2)} \geq p_{c\_best}$ . Enfin, il convient de noter que les inégalités de Bell (5.68) et (5.81) sont plus avantageuses que l'inégalité de Bell (5.61) uniquement lorsque la mesure de l'observable locale du spin  $\hat{s}_{k,a}$  produit plus de deux résultats. En effet, si la mesure ne produit que deux résultats  $r \in \{-1/2, +1/2\}$  nous avons

$$M_0^{(2)} = M_1^{(2)} = \frac{N}{4}, \quad (5.84)$$

$$\tilde{C}_{00}^{(12)} + \tilde{C}_{11}^{(12)} - \tilde{C}_{01}^{(12)} - \tilde{C}_{10}^{(12)} = 0, \quad (5.85)$$

$$\tilde{C}_{00}^{(22)} + \tilde{C}_{11}^{(22)} - \tilde{C}_{01}^{(22)} - \tilde{C}_{10}^{(22)} = 0, \quad (5.86)$$

et en substituant ces équations dans (5.68) et (5.81), nous retrouvons l'inégalité de Bell (5.61) pour les deux.

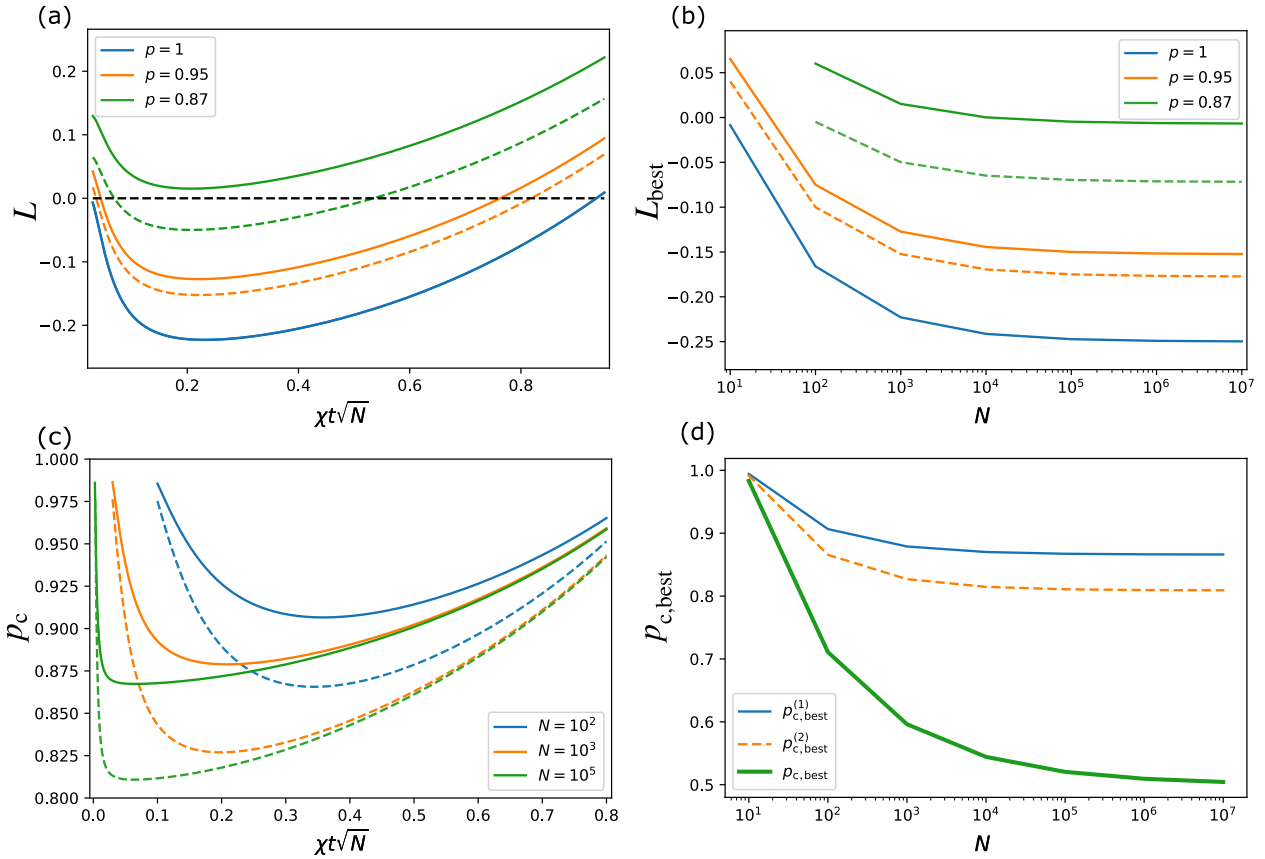


FIGURE 5.4.2 – Détection des corrélations non-locales présentes dans les états comprimés de Mott à température non nulle : (a) Variation des corrélations non-locales observées pendant la dynamique OAT avec  $N = 10^3$  pour différentes valeurs de  $p$ , lignes pleines : équation  $L^{(1)}$  (5.64), lignes pointillées : équation  $L^{(2)}$  (5.70). (b) Valeur minimale en temps de  $L$  en fonction de  $N$ , équation de  $L^{(1)}$  (5.64) en traits pleins et équation de  $L^{(2)}$  (5.70) en traits pointillés. (c) Variation de la probabilité critique  $p_c$  au cours de la dynamique de l'OAT pour différents nombres d'atomes  $N$  : équation  $p_c^{(1)}$  (5.65) : lignes pleines, équation  $p_c^{(2)}$  (5.71) : lignes en pointillés. (d) Valeur minimale en temps des probabilités critiques  $p_c$  en fonction de  $N$ .

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié en détail la dynamique, proposée dans la référence [90], qui permet la génération et le stockage des corrélations quantiques dans la phase de Mott d'un réseau optique, en élevant un potentiel réseau dans un condensat de Bose-Einstein. Cette configuration ainsi produite nous a permis d'étudier les corrélations quantiques générées entre les différents sites du réseau. En utilisant une inégalité de Bell à  $M$ -sites, où  $M$  est le nombre de sites dans le réseau, nous avons pu étudier la non-localité générée lors de cette dynamique dans la phase de Mott à température nulle. En réalisant des simulations numériques de ce système pour un nombre  $N$  petit d'atomes, nous avons observé que l'effet de température non nulle est d'induire des trous et des doubles occupations dans la phase de Mott. En modifiant légèrement le scénario de Bell utilisé dans le cas de température nulle, nous avons montré que la même inégalité de Bell peut être utilisée pour détecter la non localité générée dans le système à température non nulle. De plus, nous avons obtenu, en utilisant le modèle de Bogoliubov, une expression analytique de la probabilité  $P_0$  qui peut être utilisée pour calculer le corrélateur de Bell à  $M$ -sites pour un nombre d'atome élevé. Finalement, nous avons utilisé ce scénario de Bell pour étudier les corrélations non

locales de Bell à 2-sites dans un modèle plus simple et plus général. En particulier, pour un état comprimé de spin généré par la dynamique one-axis twisting spatialement distribué dans un réseau avec une probabilité non nulle  $1 - p$  d'avoir un site vide ou doublement occupé, nous avons calculé la probabilité critique  $p_c$ , en dessous de laquelle il n'est pas possible de détecter des corrélations non locales, pour différentes inégalité de Bell à 2-sites construites à partir des fonctions de corrélations d'ordre, sur site, croissant.



# Conclusions et perspectives

Les résultats obtenus au cours de cette thèse contribuent de manière constructive au développement du domaine de la métrologie quantique, en particulier en exploitant des états de spin possédant des fluctuations non gaussiennes. Les principales contributions comprennent la proposition de protocoles d'estimation quantiques basés sur ces états surcomprimés de spin, avec une détermination analytique des lois d'échelle du gain quantique correspondant en absence et en présence de divers types de décohérence. Afin d'extraire le potentiel métrologique de tels états, la technique de mesure après interaction MAI qui donne access aux observables non linéaires de spin à été proposée et identifiée comme optimale pour une classe d'états de spin non gaussiens générés par la dynamique one-axis twisting.

En utilisant des atomes distribués dans des modes spatiaux séparés, tout en maintenant leurs corrélations, un protocole d'estimation multiparamètres, impliquant des renversement de spin locaux et des mesures de spin collectif, à été proposé. En offrant un gain métrologique quantique significatif, cette approche prometteuse ouvre des perspectives concrètes pour la mesure de champs étendus dans l'espace, notamment lorsque couplée à des techniques de compression d'image.

Finalement, dans un état Mott-comprimé de spin, où les atomes sont intriqués et distribués dans un réseau, nous avons généralisé les inégalités de Bell et les témoins de la non-localité existants aux cas où chaque site du réseau possède une probabilité non nulle d'être vide ou doublement occupé.

En raison de la pertinence des concepts élaborés dans différents systèmes de physique atomique, tels que les condensats de Bose-Einstein, les atomes froids dans les réseaux optiques, les atomes dans les cavités et les ions piégés, l'impact potentiel de cette thèse peut être considéré comme étendu.

En termes de perspectives, une collaboration avec un groupe expérimental intéressé par l'implémentation d'un protocole d'estimation multiparamètres, inspiré de nos résultats, est actuellement en cours. Cette interaction directe entre la théorie et l'expérimentation ouvre la voie à des applications concrètes et à une validation expérimentale de nos développements théoriques.

L'importance de la métrologie quantique dans le domaine des technologies quantiques ne peut être surestimée. En tant que l'une des technologies quantiques les plus proches des applications, la métrologie quantique joue un rôle crucial, avec des capteurs quantiques existants et certains ayant déjà atteint le bruit quantique standard. Ces avancées ne sont pas seulement des réalisations théoriques, mais elles ont également un impact direct sur la mise en œuvre pratique de technologies quantiques. Ainsi, cette thèse ouvre la voie à de futures recherches et développements dans le domaine en constante évolution de la métrologie quantique.



# Bibliographie

- [1] G. Santarelli, Ph. Laurent, P. Lemonde, A. Clairon, A. G. Mann, S. Chang, A. N. Luiten, C. Salomon, Quantum Projection Noise in an Atomic Fountain : A High Stability Cesium Frequency Standard, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4619 (1999).
- [2] C. M. Caves, Quantum-mechanical noise in an interferometer, *Phys. Rev. D* **23**, 1693 (1981).
- [3] R. S. Bondurant, J. H. Shapiro, Squeezed states in phase-sensing interferometers, *Phys. Rev. D* **30**, 2548 (1984).
- [4] B. Yurke, S. L. McCall, and J. R. Klauder, SU(2) and SU(1,1) interferometers, *Phys. Rev. A* **33**, 4033 (1986).
- [5] H. P. Yuen, Generation, Detection, and Application of High-Intensity Photon-Number-Eigenstate Fields, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2176 (1986).
- [6] M. Xiao, L. A. Wu, H. J. Kimble, Precision Measurement Beyond the Shot-Noise Limit, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 278 (1987).
- [7] P. Grangier, R. E. Slusher, B. Yurke, A. LaPorta, Squeezed-Light-Enhanced Polarization Interferometer, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2153 (1987).
- [8] M. Hillery, L. Mlodinow, Interferometers and minimum-uncertainty states, *Phys. Rev. A* **48**, 1548 (1993).
- [9] G. S. Agarwal, R. R. Puri, Atomic states with spectroscopic squeezing, *Phys. Rev. A* **49**, 4968 (1994).
- [10] J. J. Bollinger, Wayne M. Itano, D. J. Wineland, D. J. Heinzen, Optimal frequency measurements with maximally correlated states, *Phys. Rev. A* **54**, R4649(R) (1996).
- [11] J. A. Dunningham, K. Burnett, S. M. Barnett, Interferometry below the Standard Quantum Limit with Bose-Einstein Condensates, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 150401 (2002).
- [12] L. Pezzé, A. Smerzi, Phase sensitivity of a Mach-Zehnder interferometer, *Phys. Rev. A* **73**, 011801(R) (2006).
- [13] H. Cable, G. A. Durkin, Parameter Estimation with Entangled Photons Produced by Parametric Down-Conversion, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 013603 (2010).
- [14] V. Giovannetti, S. Lloyd, L. Maccone, Advances in quantum metrology, *Nat. Photonics* **5**, 222 (2011).
- [15] M. Kitagawa, M. Ueda, Squeezed spin states, *Phys. Rev. A* **47**, 5138 (1993).
- [16] C. Gross, T. Zibold, E. Nicklas, J. Estève, M. K. Oberthaler, Nonlinear atom interferometer surpasses classical precision limit, *Nature* **464**, 1165 (2010).
- [17] M. F. Riedel, P. Böhi, Y. Li, T. W. Hänsch, A. Sinatra, P. Treutlein, Atom chip based generation of entanglement for quantum metrology, *Nature* **464**, 1170–1173, (2010).



- [18] I. D. Leroux, M. H. Schleier-Smith, V. Vuletic, Implementation of cavity squeezing of a collective atomic spin, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 073602, (2010).
- [19] M. H. Schleier-Smith, I. D. Leroux, and V. Vuletic, Squeezing the collective spin of a dilute atomic ensemble by cavity feedback, *Phys. Rev. A* **81**, 021804 (2010).
- [20] R. J. Sewell, M. Koschorreck, M. Napolitano, B. Dubost, N. Behbood, and M. W. Mitchell, Magnetic Sensitivity Beyond the Projection Noise Limit by Spin Squeezing, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 253605 (2012).
- [21] O. Hosten, N. J. Engelsen, R. Krishnakumar, and M. A. Kasevich, Measurement noise 100 times lower than the quantum-projection limit using entangled atoms, *Nature (London)* **529**, 505 (2016).
- [22] K. C. Cox, G. P. Greve, J. M. Weiner, and J. K. Thompson, Deterministic Squeezed States with Collective Measurements and Feedback, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 093602 (2016).
- [23] M. Tse et al., Quantum-Enhanced Advanced LIGO Detectors in the Era of Gravitational-Wave Astronomy, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 231107 (2019); F. Acernese et al., Increasing the Astrophysical Reach of the Advanced Virgo Detector via the Application of Squeezed Vacuum States of Light, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 231108 (2019)
- [24] A. Sinatra, J. C. Dornstetter, Y. Castin, Spin squeezing in Bose–Einstein condensates : Limits imposed by decoherence and non-zero temperature, *Front. Phys.*, **7**(1), 86–97, (2012).
- [25] M. Gessner, A. Smerzi, L. Pezzè, Metrological Nonlinear Squeezing Parameter, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 090503 (2019).
- [26] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W Hänsch, I. Bloch, Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms, *Nature* **415**, 39–44 (2002).
- [27] S. A. Diddams, J. C. Bergquist, S. R. Jefferts, C. W. Oates, Standards of Time and Frequency at the Outset of the 21st Century, *Science*, **306**, 1318-1324 (2004).
- [28] R. Wynands, S. Weyers, Atomic fountain clocks, *Metrologia*, **42**, S64, (2005).
- [29] A. D. Ludlow, M. M. Boyd, J. Ye, E. Peik, P. O. Schmidt, Optical atomic clocks, *Rev. Mod. Phys.* **87**, 637 (2015).
- [30] N. F. Ramsey, Application of Atomic Clocks. In : Figger, H., Zimmermann, C., Meschede, D. (eds) *Laser Physics at the Limits*, Springer, Berlin, Heidelberg (2002).
- [31] D. Budker, M. Romalis, Optical magnetometry, *Nature Phys* **3**, 227–234 (2007).
- [32] A. Peters, K. Y. Chung, S. Chu, Measurement of gravitational acceleration by dropping atoms, *Nature volume* **400**, pages849–852 (1999).
- [33] T. L. Gustavson, P. Bouyer, M. A. Kasevich, Precision Rotation Measurements with an Atom Interferometer Gyroscope, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2046 (1997).
- [34] J. B. Fixler, G. T. Foster, J. M. McGuirk, M. A. Kasevich, Atom Interferometer Measurement of the Newtonian Constant of Gravity, *Science*, **315**, 74-77 (2007).
- [35] R. Bouchendira, P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, F. Nez, F. Biraben, New Determination of the Fine Structure Constant and Test of the Quantum Electrodynamics, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 080801 (2011).
- [36] J. P. Turneaure, C. M. Will, B. F. Farrell, E. M. Mattison, Robert F. C. Vessot, Test of the principle of equivalence by a null gravitational red-shift experiment, *Phys. Rev. D* **27**, 1705 (1983).
- [37] T. Damour, J. H. Taylor, Strong-field tests of relativistic gravity and binary pulsars, *Phys. Rev. D* **45**, 1840 (1992).

- [38] M. S. Safronova, D. Budker, D. DeMille, D. F. Jackson Kimball, A. Derevianko, C. W. Clark, Search for new physics with atoms and molecules, *Rev. Mod. Phys.* **90**, 025008 (2018).
- [39] A. D. Cronin, J. Schmiedmayer, D. E. Pritchard, Optics and interferometry with atoms and molecules, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 1051 (2009).
- [40] C. M. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory*, Academic Press, New York. (1976).
- [41] N. Spagnolo, L. Aparo, C. Vitelli, A. Crespi, R. Ramponi, R. Osellame, P. Mataloni, F. Sciarrino, Quantum interferometry with three-dimensional geometry, *Sci. Rep.* **2**, 862 (2012).
- [42] M. Genovese, Real applications of quantum imaging, *J. Opt.* **18** 073002 (2016).
- [43] P. Kómár, E. M. Kessler, M. Bishof, L. Jiang, A. S. Sørensen, J. Ye, M. D. Lukin, A quantum network of clocks, *Nature Phys* **10**, 582–587 (2014).
- [44] M. Fadel, B. Yadin, Y. Mao, T. Byrnes, M. Gessner, Multiparameter quantum metrology and mode entanglement with spatially split nonclassical spin ensembles, *New J. Phys.* **25**, 073006 (2023)
- [45] M. Szczykulska, T. Baumgratz, A. Datta, Multi-parameter quantum metrology, *Advances in Physics: X*, **1:4**, 621-639 (2016)
- [46] L. Pezzè, A. Smerzi. Quantum theory of phase estimation, [arXiv:1411.5164](https://arxiv.org/abs/1411.5164) (2014).
- [47] L. Pezzè, A. Smerzi, M. K. Oberthaler, R. Schmied, P. Treutlein, Quantum metrology with nonclassical states of atomic ensembles, *Rev. Mod. Phys.* **90**, 035005.
- [48] M. Fréchet, Sur l'extension de certaines évaluations statistiques au cas de petits échantillons, *Rev. Inst. Int. Statist.* **11** (3/4), 182–205 (1943).
- [49] G. Darmais, Sur les limites de la dispersion de certaines estimations, *Rev. Int. Inst. Statist.* **13** (1/4), 9–15 (1945).
- [50] C. R. Rao, Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters, *Bull. Calcutta Math. Soc.* **37**, 81–91 (1945).
- [51] H. Cramér, *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton, NJ : Princeton Univ. Press. (1946).
- [52] S. L. Braunstein, C. M. Caves, Statistical Distance and the Geometry of Quantum States, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3439 (1994).
- [53] E. L. Lehmann, G. Casella, *Theory of Point Estimation*, Springer, New York, (1998).
- [54] D. J. Wineland, J. J. Bollinger, W. M. Itano, F. L. Moore, D. J. Heinzen, Spin squeezing and reduced quantum noise in spectroscopy, *Phys. Rev. A* **46**, R6797 (1992).
- [55] H. L. Van Trees, K. L. Bell, *Bayesian Bounds for Parameter Estimation and Nonlinear Filtering/Tracking*, IEEE Press, 445 Hoes Lane Piscataway, NJ 08854. (2007).
- [56] M. Gessner, A. Smerzi, L. Pezzè, Multiparameter squeezing for optimal quantum enhancements in sensor networks, *Nat Commun* **11**, 3817 (2020).
- [57] L. Pezzè, A. Smerzi, Entanglement, Nonlinear Dynamics, and the Heisenberg Limit, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 100401 (2009).
- [58] P. Hyllus, W. Laskowski, R. Krischek, C. Schwemmer, W. Wieczorek, H. Weinfurter, L. Pezzè, A. Smerzi, Fisher information and multiparticle entanglement, *Phys. Rev. A* **85**, 022321 (2012).
- [59] G. Tóth, Multipartite entanglement and high-precision metrology, *Phys. Rev. A* **85**, 022322 (2012).
- [60] G. Tóth, I. Apellaniz, Quantum metrology from a quantum information science perspective, *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** 424006 (2014).

- [61] Z. Ren, W. Li, A. Smerzi, and M. Gessner, Metrological Detection of Multipartite Entanglement from Young Diagrams, *Phys. Rev. Lett.* **126**, 080502 (2021).
- [62] E. Davis, G. Bentsen, and M. Schleier-Smith, Approaching the Heisenberg Limit Without Single-Particle Detection, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 053601 (2016).
- [63] F. Fröwis, P. Sekatski, and W. Dür, Detecting Large Quantum Fisher Information with Finite Measurement Precision, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 090801 (2016).
- [64] T. Macrì, A. Smerzi, and L. Pezzè, Loschmidt echo for quantum metrology, *Phys. Rev. A* **94**, 010102(R) (2016)
- [65] O. Hosten, R. Krishnakumar, N. J. Engelsen, and M. A. Kasevich, Quantum phase magnification, *Science* **352**, 1552 (2016)
- [66] S. P. Nolan, S. S. Szigeti, and S. A. Haine, Optimal and Robust Quantum Metrology Using Interaction-Based Readouts, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 193601 (2017).
- [67] M. Schulte, V. J. Martínez-Lahuerta, M. S. Scharnagl, K. Hammerer, Ramsey interferometry with generalized one-axis twisting echoes, *Quantum* **4**, 268 (2020)
- [68] L. Mandel, E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge. (1995).
- [69] F. T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore, H. Thomas, Atomic Coherent States in Quantum Optics, *Phys. Rev. A* **6**, 2211 (1972)
- [70] A. Sørensen, L. M. Duan, J. I. Cirac, P. Zoller, Many-particle entanglement with Bose–Einstein condensates, *Nature* **409**, 63-66, (2001).
- [71] Y. Li, P. Treutlein, J. Reichel, A. Sinatra, Spin squeezing in a bimodal condensate : spatial dynamics and particle losses, *Eur. Phys. J. B* **68**, 365-381, (2009).
- [72] Y. Baamara, A. Sinatra, M. Gessner, Scaling Laws for the Sensitivity Enhancement of Non-Gaussian Spin States, *Phys. Rev. Lett.* **127**, 160501 (2021).
- [73] Y. Baamara, A. Sinatra, M. Gessner, Squeezing of nonlinear spin observables by one axis twisting in the presence of decoherence : An analytical study, *Comptes Rendus. Physique*, **Tome 23**, 1-26 (2022).
- [74] B. Lücke, M. Scherer, J. Kruse, L. Pezzè, F. Deuretzbacher, P. Hyllus, O. Topic, J. Peise, W. Ertmer, J. Arlt, L. Santos, A. Smerzi, C. Klempt, Twin Matter Waves for Interferometry Beyond the Classical Limit, *Science*, **334**, 773-776 (2011).
- [75] H. Strobel, W. Muessel, D. Linnemann, T. Zibold, D. B. Hume, L. Pezzè, A. Smerzi, M. K. Oberthaler, Fisher information and entanglement of non-Gaussian spin states, *Science* **345**, 6195, 424-427, (2014).
- [76] J. G. Bohnet, B. C. Sawyer, J. W. Britton, M. L. Wall, A. M. Rey, M. Foss-Feig, J. J. Bollinger, Quantum spin dynamics and entanglement generation with hundreds of trapped ions, *Science* **352**, 6291, 1297-1301, (2016).
- [77] A. Evrard, V. Makhlov, T. Chalopin, L. A. Sidorenkov, J. Dalibard, R. Lopes, S. Nascimbene, Enhanced Magnetic Sensitivity with Non-Gaussian Quantum Fluctuations, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 173601 (2019).
- [78] K. Xu, Y.-R. Zhang, Z.-H. Sun, H. Li, P. Song, Z. Xiang, K. Huang, H. Li, Y.-H. Shi, C.-T. Chen, X. Song, D. Zheng, F. Nori, H. Wang, H. Fan, Metrological characterization of non-gaussian entangled states of superconducting qubits, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.128.150501>
- [79] T. Monz, P. Schindler, J. T. Barreiro, M. Chwalla, D. Nigg, W. A. Coish, M. Harlander, W. Hänsel, M. Hennrich, and R. Blatt, 14-Qubit Entanglement : Creation and Coherence *Phys. Rev. Lett.* **106**, 130506 (2011).

- 
- [80] I. D. Leroux, M. H. Schleier-Smith, H. Zhang, V. Vuletic, Unitary cavity spin squeezing by quantum erasure, *Phys. Rev. A* **85**, 013803 (2012).
- [81] K. Pawłowski, J. Estève, J. Reichel, and A. Sinatra, Limits of atomic entanglement by cavity feedback : From weak to strong coupling, *Europhys. Lett.* **113**, 34005 (2016).
- [82] Y. Li, Y. Castin, and A. Sinatra, Optimum Spin Squeezing in Bose-Einstein Condensates with Particle Losses, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 210401 (2008).
- [83] B. P. Lanyon, P. Jurcevic, C. Hempel, M. Gessner, V. Vedral, R. Blatt, and C. F. Roos, Experimental Generation of Quantum Discord via Noisy Processes, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 100504 (2013).
- [84] E. G. Carnio, A. Buchleitner, and M. Gessner, Robust Asymptotic Entanglement Under Multipartite Collective Dephasing, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 010404 (2015).
- [85] H. P. Breuer, F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford University Press (2007).
- [86] K. Mølmer, Y. Castin, J. Dalibard, Monte Carlo wave-function method in quantum optics, *J. Opt. Soc. Am. B* **10**, 524-538 (1993).
- [87] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Atom—Photon Interactions. Basic Process and Applications*, John Wiley & Sons, (1998).
- [88] A. Sinatra, Y. Castin, Phase dynamics of Bose–Einstein condensates : Losses versus revivals, *Eur. Phys. J. D* **4**, 247-260, (1998)
- [89] Dariusz Kajtoch, Emilia Witkowska, Alice Sinatra, Spin-squeezed atomic crystal, *Europhys. Lett.* **123**, 20012 (2018).
- [90] M. Płodzien, M. Koscielski, E. Witkowska, A. Sinatra, Producing and storing spin-squeezed states and Greenberger-Horne-Zeilinger states in a one-dimensional optical lattice, *Phys. Rev. A* **102**, 013328 (2020).
- [91] P. He, M. A. Perlin, S. R. Muleady, R. J. Lewis-Swan, R. B. Hutson, J. Ye, and A. M. Rey, Engineering spin squeezing in a 3D optical lattice with interacting spin-orbit-coupled fermions, *Phys. Rev. Res.* **1**, 033075 (2019).
- [92] M. Mamaev, I. Kimchi, R. M. Nandkishore, A. M. Rey, Tunable-spin-model generation with spin-orbit-coupled fermions in optical lattices, *Phys. Rev. Research* **3**, 013178 (2021).
- [93] T. Hernández Yanes, M. Płodzień, M. Mackoīt Sinkevičienė, G. Žlabys, G. Juzeliūnas, E. Witkowska, One- and Two-Axis Squeezing via Laser Coupling in an Atomic Fermi-Hubbard Model, *Phys. Rev. Lett.* **129**, 090403 (2022).
- [94] M. Fadel, T. Zibold, B. Décamps, P. Treutlein, Spatial entanglement patterns and Einstein-Podolsky-Rosen steering in Bose-Einstein condensates, *Science* **360**, 6387 (2018).
- [95] P. Colciaghi, Y. Li, P. Treutlein, T. Zibold, Einstein-Podolsky-Rosen Experiment with Two Bose-Einstein Condensates, *Phys. Rev. X* **13**, 021031 (2023).
- [96] A. Periwal, E. S. Cooper, P. Kunkel, J. F. Wienand, E. J. Davis, M. Schleier-Smith, Programmable interactions and emergent geometry in an array of atom clouds, *Nature* **600**, 630–635 (2021).
- [97] B. K. Malia, Y. Wu, J. Martínez-Rincón, M. A. Kasevich, Distributed quantum sensing with a mode-entangled network of spin-squeezed atomic states, *Nature* **612**, pages661–665 (2022).
- [98] Y. Baamara, M. Gessner, A. Sinatra, Quantum-enhanced multiparameter estimation and compressed sensing of a field, *SciPost Phys.* **14**, 050 (2023).
- [99] C. Weitenberg, M. Endres, J. Sherson, M. Cheneau, P. Schauß, T. Fukuhara, I. Bloch, S. Kuhr, Single-spin addressing in an atomic Mott insulator, *Nature* **471**, 319–324 (2011).

- [100] K. Matsumoto, A new approach to the Cramér-Rao-type bound of the pure-state model, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** 3111 (2002).
- [101] S. Ragy, M. Jarzyna, and R. Demkowicz-Dobrzański, Compatibility in multiparameter quantum metrology, *Phys. Rev. A* **94**, 052108 (2016).
- [102] L. Pezzè, M. A. Ciampini, N. Spagnolo, P. C. Humphreys, A. Datta, I. A. Walmsley, M. Barbieri, F. Sciarrino, A. Smerzi, Optimal Measurements for Simultaneous Quantum Estimation of Multiple Phases, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 130504 (2017).
- [103] F. Albarelli, M. Barbieri, M. G. Genoni, I. Gianani, A perspective on multiparameter quantum metrology : From theoretical tools to applications in quantum imaging, *Phys. Lett. A* **384**, 126311 (2020).
- [104] A. Z. Goldberg, L. L. Sánchez-Soto, H. Ferretti, Intrinsic Sensitivity Limits for Multiparameter Quantum Metrology, *Phys. Rev. Lett.* **127**, 110501 (2021).
- [105] N. Ahmed, K. R. Rao, *Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing*, Springer (1975).
- [106] A. Widera, S. Trotzky, P. Cheinet, S. Fölling, F. Gerbier, I. Bloch, Quantum Spin Dynamics of Mode-Squeezed Luttinger Liquids in Two-Component Atomic Gases, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 140401 (2008)
- [107] J. S. Bell, On the Einstein Podolsky Rosen paradox, *Physics Physique Fizika* **1**, 3 (1964).
- [108] J. Tura, R. Augusiak, A. B. Sainz, T. Vértesi, M. Lewenstein, A. Acín, Detecting nonlocality in many-body quantum states, *Science* **344**, 1256–1258 (2014).
- [109] R. Schmied, J. D. Bancal, B. Allard, M. Fadel, V. Scarani, P. Treutlein, N. Sangouard, Bell correlations in a Bose-Einstein condensate, *Science* **352**, 441-444 (2016).
- [110] G. Müller-Rigat, A. Aloy, M. Lewenstein, I. Frérot, Inferring nonlinear many-body Bell inequalities from average two-body correlations : systematic approach for arbitrary spin- $j$  ensembles, *PRX Quantum* **2**, 030329 (2021).
- [111] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani, and S. Wehner, Bell nonlocality, *Rev. Mod. Phys.* **86**, 419 (2014).
- [112] J. Chwedenczuk, Many-body Bell inequalities for bosonic qubits, *SciPost Phys. Core* **5**, 025 (2022).



## Résumé

Dans la première partie de cette thèse, nous explorons le potentiel des états de spin non gaussiens d'un ensemble d'atomes utilisés comme senseurs, dans les applications d'estimation d'un paramètre, typiquement une phase, et de cartographie d'un champ. Ces états peuvent en particulier diminuer le bruit statistique des mesures au delà de la limite quantique standard donnée par le bruit de projection quantique des atomes.

Par des études analytiques et numériques, nous identifions le gain quantique offert par les états de spin surcomprimés générés par la dynamique dite "one-axis twisting" en fonction du temps, en tenant compte systématiquement de différents processus de décohérence, et les lois d'échelle qui donnent ce gain en fonction du nombre d'atomes.

Malgré un avantage quantique métrologique dépassant celui des états comprimés de spin gaussiens, l'utilisation de ces états dans les protocoles d'estimation de paramètres nécessite la mesure d'observables qui sont des fonctions non linéaires des trois composantes du spin collectif. Nous résolvons ce problème, en montrant pour toute une classe d'états surcomprimés de spin, l'optimalité des techniques de "mesure après interaction" (déjà reconnues pour amplifier les signaux de sortie dans les protocoles d'estimation quantiques) pour la mesure d'observables de spin collectif non linéaires.

Enfin, en examinant un système composé d'atomes distribués dans des modes spatialement séparés et individuellement accessibles, nous établissons qu'un gain quantique significatif, correspondant aux états comprimés et surcomprimés de spin, peut être obtenu dans les protocoles d'estimation multi-paramètres par la mesure des coefficients de Hadamard d'un signal 1D ou 2D. En combinant cela avec des techniques de compression d'image, nous montrons de plus que cette approche peut être intéressante pour les grands systèmes, en réduisant considérablement le nombre de mesures requises.

Dans la deuxième partie de cette thèse, toujours pour des atomes avec des corrélations quantiques de spin, distribués dans des modes spatialement séparés et individuellement accessibles, en particulier pour des atomes dans un réseau optique avec un atome par site, nous étendons les inégalités de Bell et les témoins de corrélation non locale tels que présentés précédemment dans la littérature aux scénarios qui incluent une probabilité non nulle de rencontrer des sites vides ou doublement occupés. Ceci nous permet d'étudier l'effet d'une température non nulle dans un schéma de compression de spin jointe à une transition de Mott, où les corrélations non locales de spin d'un condensat de Bose-Einstein créées par les interactions entre atomes, sont finalement figées dans une configuration avec un atome par site.

## Abstract

In the first part of this thesis, we explore the potential of non-Gaussian spin states of a set of atoms used as sensors, in applications for estimating a parameter, typically a phase, and mapping a field. In particular, these states can reduce the statistical noise of measurements beyond the standard quantum limit given by the quantum projection noise of the atoms.

Through analytical and numerical studies, we identify the quantum gain offered by the oversqueezed spin states generated by the so-called "one-axis twisting" dynamics as a function of time, systematically taking into account different decoherence processes, and the scaling laws that give this gain as a function of the number of atoms.

Although a metrological quantum advantage exceeding that of Gaussian spin squeezed states, the use of these states in parameter estimation protocols requires the measurement of observables that are nonlinear functions of the three collective spin components. We solve this problem, demonstrating for a whole class of oversqueezed spin states the optimality of "measurement after interaction" techniques (already recognized for amplifying output signals in quantum estimation protocols) for the measurement of nonlinear collective spin observables.

Finally, by examining a system composed of atoms distributed in spatially separated and individually accessible modes, we establish that a significant quantum gain, corresponding to spin-compressed and oversqueezed states, can be obtained in multiparameter estimation protocols by measuring the Hadamard coefficients of a 1D or 2D signal. Combining this with image compression techniques, we further demonstrate that this approach can be of interest for large systems, considerably reducing the required number of measurements.

In the second part of this thesis, again for atoms with quantum spin correlations, distributed in spatially separated and individually accessible modes, in particular for atoms in an optical lattice with one atom per site, we extend Bell's inequalities and non-local correlation witnesses as previously presented in the literature to scenarios that include a non-zero probability of encountering empty or doubly occupied sites. This allows us to study the effect of a non-zero temperature in a spin squeezing scheme coupled with a Mott transition, where the nonlocal spin correlations of a Bose-Einstein condensate created by the interactions between atoms, are finally frozen in a configuration with one atom per site.