



**HAL**  
open science

# Étude et modélisation stochastique du comportement humain face au changement environnemental

Claire Ecotière

► **To cite this version:**

Claire Ecotière. Étude et modélisation stochastique du comportement humain face au changement environnemental. Probabilités [math.PR]. Institut Polytechnique de Paris, 2023. Français. NNT : 2023IPPAX081 . tel-04496144

**HAL Id: tel-04496144**

**<https://theses.hal.science/tel-04496144v1>**

Submitted on 8 Mar 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT  
POLYTECHNIQUE  
DE PARIS

NNT : 2023IPPAX081

Thèse de doctorat



# Étude et modélisation stochastique du comportement humain face au changement environnemental

Thèse de doctorat de l'Institut Polytechnique de Paris  
préparée à l'École polytechnique

École doctorale n°574 (EDMH) École doctorale de mathématiques  
Hadamard (EDMH)

Spécialité de doctorat : Mathématiques appliquées

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 18/10/2023, par

**CLAIRE ECOTIÈRE**

Composition du Jury :

Jean-René Chazottes Directeur de recherche au CNRS, École polytechnique (CPHT, UMR 7644)	Président du jury
Michel Benaïm Professeur, Institut de mathématiques de Neuchâtel (Suisse)	Rapporteur
Jean-Christophe Poggiale Professeur, Aix-Marseille Université (MIO, UMR 7294)	Rapporteur
Sylvain Billiard Professeur, Université de Lille (EEP, UMR 8198)	Examineur
Manon Costa Maître de conférences, Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT, UMR 5219)	Examinatrice
Sylvie Méléard Professeure, École polytechnique (CMAP, UMR 7641)	Directrice de thèse
Régis Ferrière Professeur, Ecole Normale Supérieure (IBENS, UMR 8197)	Co-directeur de thèse



# Remerciements

Si j'ai la chance d'écrire des remerciements, c'est parce que ce manuscrit existe.

Pour cela, je tiens tout d'abord à remercier ma directrice de thèse, Sylvie Méléard. Je te remercie Sylvie, tu as été sur mon dos et je me suis sentie épaulée. Tu m'as permis de rencontrer des personnes formidables et ouvert les portes sur une communauté stimulante et chaleureuse. Tu as fait preuve de patience devant mes textes à trou et mes circonvolutions. Je savais que je n'étais pas seule et ça m'a apporté beaucoup.

Je remercie Régis Ferrière avec lequel j'ai eu des discussions enrichissantes sur le climat et qui m'a permis d'aller en Arizona à Tucson découvrir pour une paire de mois une autre culture.

"Paire de mois" ... Je n'aurais jamais pensé à utiliser une expression pareille avant mon séjour dans la fabuleuse métropole de Lille. Sylvain, tu m'as donné l'opportunité de prendre un bol d'air fr... pluvieux quand j'en avais besoin. Je te remercie aussi pour les discussions que ce soit à propos de sciences ou de films. Tu fais partie des personnes qui me donnent envie de me taire et d'écouter.

Je me remercie chaleureusement les rapporteurs de cette thèse Michel Benaïm et Jean-Christophe Poggiale pour le temps que vous avez pris pour me lire. Lire vos rapports m'a permis de réaliser ce que j'avais réussi à accomplir.

Bon j'hésite ... Je voudrais remercier nominalelement chaque personne qui m'a aidée pendant cette thèse et dire comment mais ça finirait en une longue liste.

Une thèse, c'est aussi des moments de vie. Chaque personne qui lira le pavé qui va suivre peut se retrouver dans une ou plusieurs catégories parce que ce qu'on a pu partager était multiples (si c'est une interaction vide et bien vous devez vraiment aimer lire des remerciements).

Merci pour les discussions scientifiques, les rencontres interdisciplinaires et les logiciels informatiques, je n'aurais pas pu arriver au bout sans les gens qui se cachent derrière ces événements (oui oui mêmes pour les logiciels informatiques, je maintiens). Je remercie ceux qui m'ont nourris de leur rire, de potins, de pleurs ou m'ont juste permis de reprendre mon souffle. J'aime lire et toutes les personnes qui à un moment m'ont prêté un livre qui m'a permis de penser à autre chose. J'aime manger et un grand merci aux personnes qui m'ont fait découvrir les

gateaux avec 1kg de beurre, le pastel de choclo, la carbonnade flamande, les cramiques, les confitures Confiwaz' et le gâteau à la cardamone. Vous n'avez pas aidé mon cholestérol mais mon cœur vous en remercie.

A ceux qui m'ont donnée des envies de procrastination par l'escalade, les series (IT crowd, Friends, ...), une manette de PS4 (Tekken ....)

Un gigantesque merci aux personnes qui m'ont habillée!! Jusqu'à peu de temps je n'avais ni manteau, ni gants, ni pull, à se demander comment je survivais à l'hiver. Vous m'avez permis d'avancer sans grelotter.

Merci aux personnes qui m'accompagnent et m'acceptent comme je suis, même si ça signifie que je ferai exploser des plats dans leur cuisine, que je casserai une porte, que j'irai dans un désert à vélo sans eau ni de la crème solaire ou encore que je partirai sans raison quand iels ont le dos tourné...

Merci à mes mamans qui sont nombreuses. Merci à ma famille et tout particulièrement à mes frères et soeurs. Iels soient académiques, de coeurs ou de sang, leur indéfectible soutien m'a portée bien plus loin que je n'aurais pu l'imaginer en commençant ce voyage.

Et enfinnnn, merci Claire d'il y a 4 ans, tu as décidé de faire cette thèse et je ne serais pas moi sans cette décision.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Modélisation du comportement humain face au changement environnemental</b>	<b>23</b>
1.1	Article principal . . . . .	23
1.2	Annexe de l'article . . . . .	48
1.3	Properties of the stochastic system . . . . .	48
1.4	Convergence to the solution of a system of ordinary differential equations . . . . .	49
1.5	Properties of the dynamical system (1.25) . . . . .	51
1.6	Fluctuations of the stochastic model around its deterministic limit . . . . .	59
1.7	Simulations and algorithm . . . . .	61
<b>2</b>	<b>Du modèle (1.21) vers un système stochastique simplifié</b>	<b>63</b>
2.1	Le modèle biologique . . . . .	63
2.2	Reparamétrisation du système (1.21) . . . . .	65
<b>3</b>	<b>Analyse asymptotique de la mesure invariante d'un système stochastique dégénéré</b>	<b>73</b>
3.1	Introduction . . . . .	74
3.2	Résultats principaux . . . . .	75
3.3	Propriétés des systèmes différentiels . . . . .	78
3.4	Mesure invariante du processus solution de l'EDS (3.1) . . . . .	84
3.5	Support de la mesure invariante quand le coefficient de diffusion tend vers 0 . . . . .	108
3.6	Simulations numériques . . . . .	118
<b>4</b>	<b>Extension des résultats concernant le système (3.1) au système (2.7) et conjecture pour le système (2.5)</b>	<b>121</b>
4.1	Comportement asymptotique du système (2.7) . . . . .	121
4.2	Retour au système stochastique initial (2.5) . . . . .	135
<b>A</b>	<b>Code</b>	<b>142</b>

# Introduction

Cette thèse porte sur l'étude et la modélisation du comportement humain face au changement environnemental.

## Contexte et modélisation

Au XXI<sup>e</sup> siècle, le changement environnemental se présente comme l'un des défis les plus préoccupants et complexes auxquels l'humanité est confrontée [49, 70]. Les effets des changements climatiques, de la dégradation des écosystèmes et de la perte de biodiversité [8, 25] se manifestent de manière croissante dans tous les aspects de notre vie quotidienne, engendrant des conséquences à l'échelle mondiale [80, 85].

Les êtres humains jouent un rôle central dans les problématiques environnementales [79], car ce sont eux qui façonnent et interagissent avec leur environnement [32, 54]. Par l'exploitation des ressources [7, 32, 54, 76], la gestion des villes ou au travers du recyclage [14, 17], les individus ont un impact sur leur environnement à différentes échelles.

Les actions individuelles et collectives, les décisions prises à tous les niveaux de la société, de l'individu aux institutions, ont un impact significatif sur la trajectoire du changement environnemental.

L'importance du changement environnemental réside dans le fait qu'il menace la durabilité des écosystèmes et affecte ainsi les conditions de vie de l'humanité. Les ressources naturelles limitées, la hausse des températures, la montée des océans, les événements climatiques extrêmes et la perte de biodiversité sont autant de signes alarmants qui exigent une action concertée. Cependant, la perception humaine peut être sujette à des biais et des distorsions qui compliquent la prise de décision face au changement environnemental [19]. Les individus sont influencés par des facteurs tels que les croyances, les valeurs, les connaissances limitées et les expériences personnelles [23, 26]. De plus, les problèmes environnementaux complexes sont souvent caractérisés par des incertitudes et des risques difficiles à appréhender. Par exemple, les conséquences à long terme du changement climatique peuvent sembler abstraites et lointaines [87], ce qui rend difficile l'évaluation et la prise en compte de ces enjeux dans les décisions quotidiennes.

Ces problèmes de perception et de prise de décision peuvent conduire à des comportements inadaptés face au changement environnemental [34]. Les individus peuvent sous-estimer les risques et les conséquences potentielles, agir de manière égoïste en privilégiant leurs intérêts à court terme ou être influencés par des biais cognitifs [23, 26]. Par exemple, la "tragédie des biens

communs" [69] est un phénomène où les individus agissent rationnellement dans leur intérêt personnel en surexploitant les ressources communes, entraînant ainsi leur épuisement. De telles situations exigent une meilleure compréhension des processus décisionnels et comportementaux des individus, afin de promouvoir des actions durables et collectives pour la préservation de l'environnement. C'est par ce contexte que cette thèse a été motivée, cherchant à explorer et à modéliser mathématiquement le comportement humain face au changement environnemental. En utilisant des outils et des méthodes de la modélisation stochastique, cette approche interdisciplinaire permettra de mieux comprendre les réactions individuelles et collectives des êtres humains aux perturbations environnementales complexes.

## Résumé des résultats de la thèse

Cette thèse est constituée de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous modélisons le comportement humain face au changement environnemental. Nous considérons un modèle stochastique de dynamique des populations. Ce modèle est un couplage entre les changements individuels entre deux comportements possibles et un environnement dépendant de ces deux comportements. En particulier, les changements de comportement individuel sont dus aux interactions entre individus et à l'évaluation personnelle de la qualité de l'environnement. Le modèle dépend de deux paramètres, la taille de la population et l'échelle de temps considérée. Nous nous intéressons au comportement asymptotique en temps et en taille.

La seconde partie est composée des trois chapitres suivants et a pour objectif l'étude asymptotique du modèle biologique introduit dans le premier chapitre. Le second chapitre consiste à reparamétriser le modèle couplé du chapitre précédent. En procédant à une suite de transformations géométriques, nous introduisons un modèle dépendant de deux paramètres d'échelle ; le temps et un petit paramètre  $\varepsilon$  qui est l'inverse de la taille de population dans le système biologique. Le chapitre 3 nous permet d'introduire les différentes méthodes nécessaires pour l'analyse d'un système simplifié du modèle précédent. Nous nous penchons sur le comportement asymptotique de ce système en temps et en espace. Dans le chapitre 4, nous faisons le lien entre les chapitres précédents. Nous étendons les méthodes développées pour l'étude du système multi-échelle du chapitre 3 au système introduit dans le chapitre 2. Cette extension nous permet d'analyser plus finement le comportement asymptotique du modèle biologique.

## Résultats du chapitre 1

Ce travail fait l'objet d'un article "Human-environment feedback and the consistency of proenvironmental behavior", en collaboration avec J.-B. André, S. Billiard, P. Collet, R. Ferrière et S. Méléard, accepté pour publication dans Plos Computational Biology.

L'une des premières portes d'entrée de ce projet a été de regarder des systèmes de vaccination dans l'article Wang et al. [86]. En effet, ces modèles décrivent les changements de



comportements (vaccination ou non vaccination) face à un environnement dépendant de ces comportements (ampleur de l'épidémie). Cette lecture nous a permis de découvrir différents articles et auteurs dont Bauch [7] et Bury [12]. Ces auteurs introduisent des modèles couplant une dynamique de population et son interaction avec un environnement changeant. Ils étudient un système déterministe, classiquement appelé équations des répliqueurs. Ces équations décrivent la dynamique de deux sous-populations d'individus ayant un comportement différent face à l'environnement. Les individus peuvent changer de comportement suite à une comparaison entre les gains de chaque comportement. Ce choix de modélisation soulève néanmoins plusieurs questions : pourquoi l'environnement n'intervient-il qu'au niveau des gains ? Comment capturer les influences entre individus ? Peut-on avoir co-existence des deux comportements dans le système ?

Pour répondre à ces questions, nous nous sommes intéressés aux mécanismes identifiés des changements de comportement, issus d'études sociologiques. Ainsi, grâce à l'article de Clayton [19], nous avons pu regarder les raisons de l'inaction climatique, en particulier le rôle de l'influence des individus entre eux et la perception de l'environnement.

Notre modèle de comportement humain s'inspire de toutes ces réflexions. Nous nous focalisons sur les trois types d'impact : le gain d'un changement de comportement, la pression sociale entre les individus et l'impact de l'état de l'environnement sur les individus.

Nous considérons une population de taille  $N$  fixée, composée de deux sous-populations d'individus ayant un comportement de type  $A$  ou  $B$ . Ces deux comportements sont caractérisés par leur contribution à la dégradation de l'environnement. Dans notre modèle, le comportement  $A$  est celui qui contribue le moins (entre les deux comportements) à la dégradation de l'environnement, nous l'appelons comportement pro-environnemental.

Un individu peut changer de comportement au cours du temps grâce à deux types de mécanismes : la pression sociale et l'évaluation de l'état environnemental. L'état environnemental est l'état de dégradation d'un environnement perçu. Par environnement perçu, nous souhaitons introduire la subjectivité des individus dans leur appréciation du changement environnemental.

Décrivons maintenant le modèle auquel nous avons abouti. Nous introduisons un système couplé entre l'état de l'environnement perçu et la fréquence des individus pro-environnementaux dans la population au temps  $t$ , notés respectivement  $E_t^N$  et  $X_t^N$ .

Nous supposons que la dynamique de l'environnement perçu  $E_t^N$ , pour une population fixée, est continue en temps et déterministe. Elle est modélisée par l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\dot{E}_t^N = h(X_t^N, E_t^N),$$

où  $h$  représente l'impact environnemental des deux comportements, à travers leur fréquence. La fonction  $h$  est définie par

$$h(x, e) = \ell e(l_A x + l_B(1 - x) - e) \tag{1}$$

pour tout  $(x, e)$  dans  $[0, 1] \times [l_A, l_B]$ . Le paramètre  $\ell$  est la réactivité environnementale, c'est le paramètre d'échelle de l'environnement perçu. Les paramètres  $l_A$  et  $l_B$  sont les contributions à la dégradation de l'environnement perçu des comportements  $A$  et  $B$ . Le comportement  $A$  étant le comportement pro-environnemental, nous avons  $0 < l_A < l_B$ .

La dynamique de la fréquence des individus pro-environnementaux  $(X_t^N)_{t \geq 0}$  est décrite par un processus de Markov de saut pur, dont les taux de transition dépendent de l'environnement. Le processus couplé  $(E_t^N, X_t^N)_{t \geq 0}$  est alors un processus markovien déterministe par morceaux (PDMP). Décrivons les mécanismes de saut dans la population.

Le taux de saut individuel du type  $B$  vers le type  $A$  (resp. de  $A$  vers  $B$ ), dû à l'évaluation du gain et à la pression sociale, est donné par

$$\begin{aligned}\lambda_A^N(X^N) &= \frac{\kappa}{N} (\gamma_A + \delta_A X^N) \\ \lambda_B^N(X^N) &= \frac{\kappa}{N} (\gamma_B + \delta_B (1 - X^N)),\end{aligned}\tag{2}$$

où  $\kappa$  est le taux de rencontre entre individus,  $\gamma_A > 0$  (resp.  $\gamma_B > 0$ ) est le gain du comportement  $A$  (resp.  $B$ ),  $\delta_A > 0$  ( $\delta_B > 0$ ) est la pression sociale du comportement  $A$  (resp.  $B$ ). La deuxième partie de ces taux individuels capture le biais de conformisme.

Le taux de saut individuel de  $B$  vers  $A$  (resp. de  $A$  vers  $B$ ), dû à l'évaluation individuelle de l'environnement, est donné par

$$\begin{aligned}\tau_A(E^N) &= \tau(E^N - l_A) \\ \tau_B(E^N) &= \tau(l_B - E^N),\end{aligned}\tag{3}$$

où  $\tau$  est un paramètre d'échelle. Plus l'écart entre l'état de l'environnement et la contribution à la dégradation de celui-ci ( $l_B$  ou  $l_A$ ) est élevée, plus le taux de transfert est élevé.

En utilisant la représentation trajectorielle de notre système couplé dirigée par une mesure ponctuelle de Poisson, nous obtenons la décomposition en semi-martingale de  $(X^N, E^N)$  pour  $N$  fixé, sous la forme suivante

$$\begin{cases} X_t^N = X_0^N + \int_0^t P^N(X_s^N, E_s^N) ds + M_t^N \\ E_t^N = E_0^N + \int_0^t h(X_s^N, E_s^N) ds, \end{cases}\tag{4}$$

où  $M_t^N$  une martingale de carré intégrable,  $h$  est définie par (1.7) et  $P^N$  est définie par

$$P^N(x, e) = \kappa x(1-x)N[\lambda_A^N(x) - \lambda_B^N(x)] + (1-x)\tau_A(e) - x\tau_B(e).\tag{5}$$

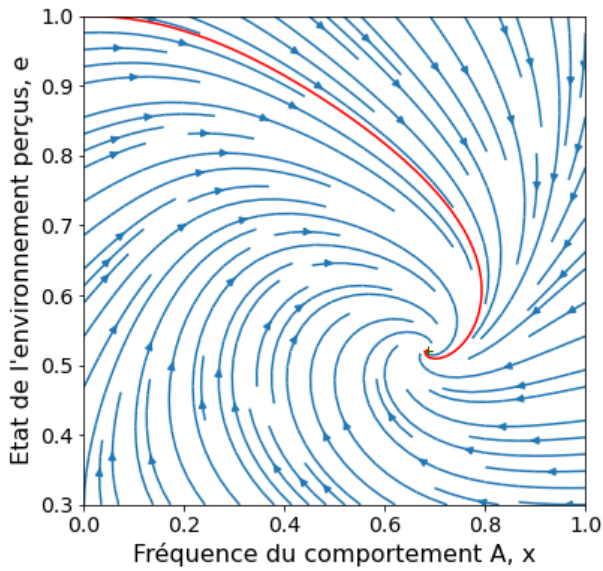
La variation quadratique de la martingale  $M_t^N$  est donnée par

$$\begin{aligned}\langle M^N \rangle_t &= \frac{1}{N} \int_0^t \kappa X_s^N (1 - X_s^N) N (\lambda_A^N(X_s^N) + \lambda_B^N(X_s^N)) ds \\ &\quad + \frac{1}{N} \int_0^t (\tau_A(E_s^N)(1 - X_s^N) + \tau_B(E_s^N)X_s^N) ds.\end{aligned}\tag{6}$$

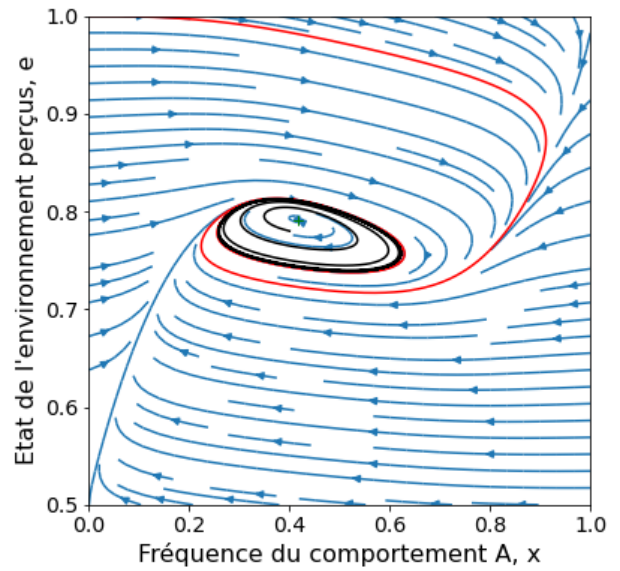
Pour avoir une première idée du comportement asymptotique du système (4), quand  $N$  tend vers l'infini, nous montrons la convergence en probabilité dans tout intervalle de temps fini vers le système déterministe suivant :

$$\begin{aligned}\frac{dx_t}{dt} &= p(x_t, e_t) = \kappa x_t(1 - x_t)[\beta + \delta_A x_t - \delta_B(1 - x_t)] + \tau [e_t - l_A(1 - x_t) - l_B x_t] \\ \frac{de_t}{dt} &= h(x_t, e_t) = \ell e_t(l_A x_t + l_B(1 - x_t) - e_t).\end{aligned}\tag{7}$$

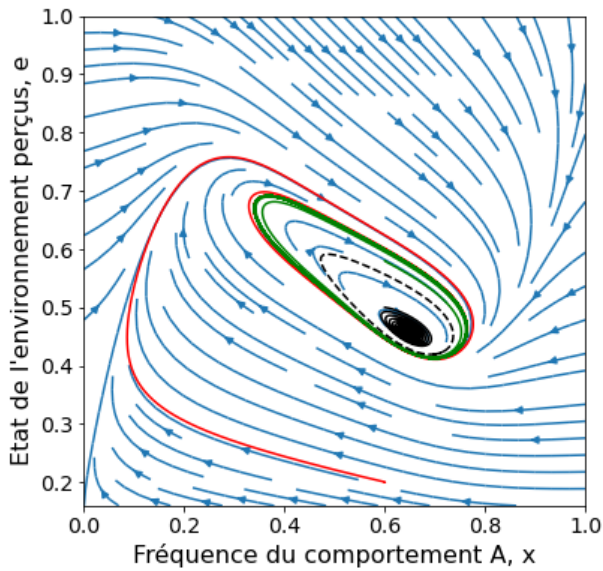
Analysons les points d'équilibre du système déterministe. Remarquons que si  $(x^*, e^*)$  est un point d'équilibre de (7), alors la valeur d'équilibre pour l'état de l'environnement perçu est  $e^* = l_A x^* + l_B(1 - x^*)$ . En particulier, comme  $l_A < l_B$ , plus la fréquence d'individus pro-environnementaux est élevée, plus la dégradation de l'état environnemental  $e^*$  est faible. Nous donnons des hypothèses sous lesquelles le système déterministe admet entre 1 et 3 points d'équilibre. Nous étudions la nature de ces points en fonction des différents paramètres du système. La figure 1 illustre différents comportements asymptotiques du système (7).



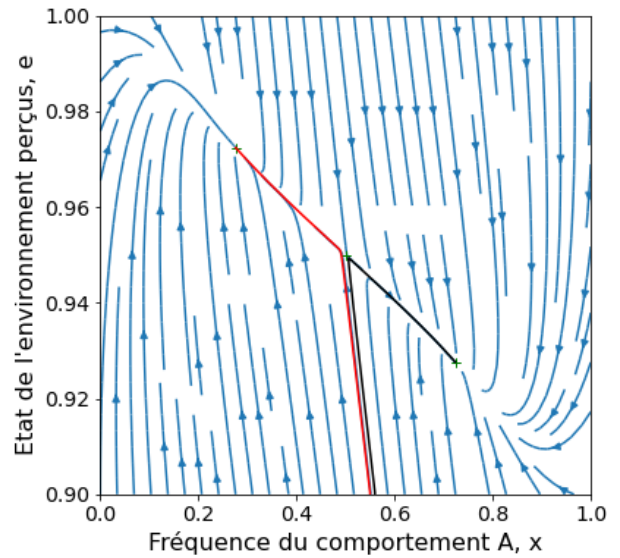
(a) Un équilibre stable



(b) Un équilibre instable



(c) Un équilibre stable et un cycle stable



(d) Deux équilibres stables et un point instable

FIGURE 1 – Portrait de phase des différents équilibres admit par le système (1.15)

Nous analysons également le système en fonction des paramètres  $\kappa$ ,  $\tau$  et  $\ell$ . Ces trois paramètres peuvent être vus comme des paramètres gérant les échelles de temps des différents événements. Dans les figures 2 et 3, le paramètre  $\kappa$  est fixé à 1 et on peut observer l'apparition de cycles dans le système en fonction du choix des paramètres  $\tau$  et  $\ell$ .

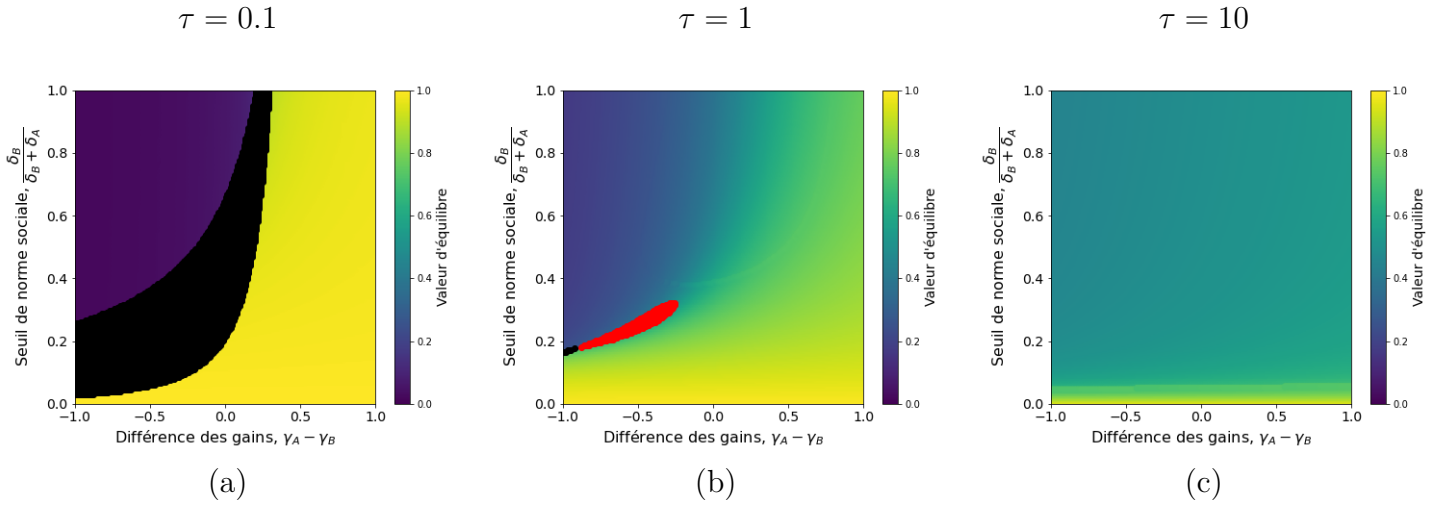


FIGURE 2 – Valeurs et nature des équilibres pour différentes valeurs de  $\tau$ . Les zones rouges sont des jeux de paramètres admettant des cycles et les zones noirs sont des jeux de paramètres pour lesquels le système (7) admet trois points d'équilibre. La valeur de  $\ell$  est fixé à 0.1.

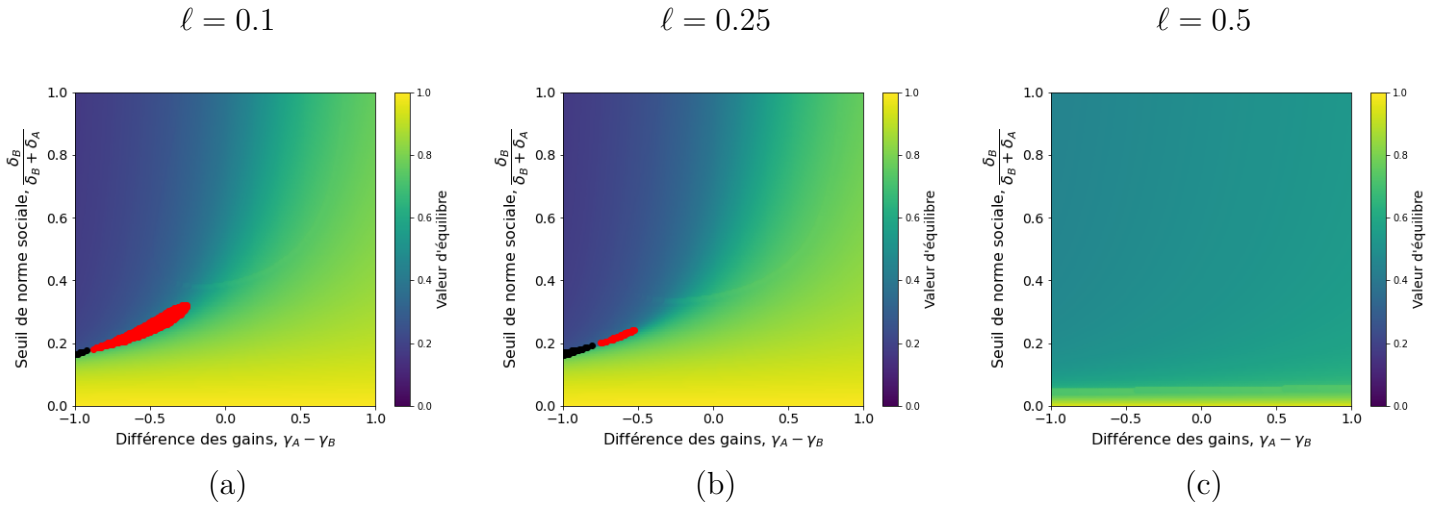


FIGURE 3 – Valeurs et nature des équilibres pour différentes valeurs de  $\ell$ . Les zones rouges sont des jeux de paramètres admettant des cycles et les zones noirs sont des jeux de paramètres pour lesquels le système (7) admet trois points d'équilibre. La valeur de  $\tau$  est fixé à 1.

Lorsque le système (7) admet 3 points d'équilibre, nous nous interrogeons sur le comportement asymptotique du système stochastique (4). En effet, lorsque l'on prend la même condition initiale, une trajectoire semble converger vers l'un des deux points d'équilibre stables du système comme on peut le voir dans la figure 4.

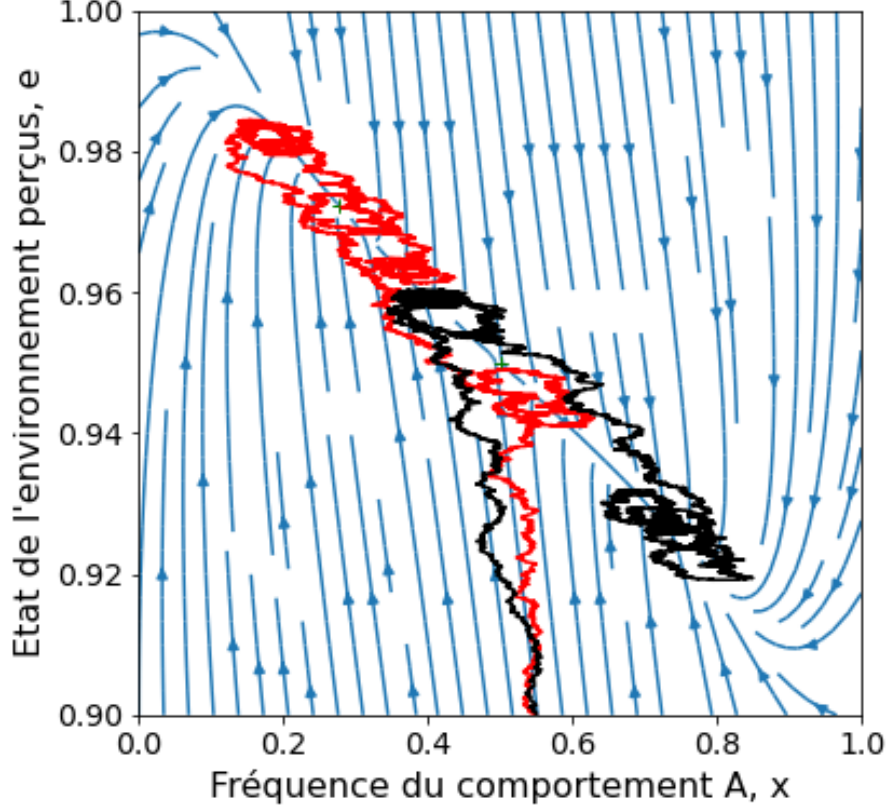


FIGURE 4 – Trajectoire de deux réalisations du processus défini par (4) de condition initiale  $(0.56, 0.9)$ .

En nous inspirant de Billiard et al. [10], nous étudions les fluctuations du système stochastique (4) autour de sa limite déterministe (7).

Le processus stochastique peut se réécrire

$$(X_t^N, E_t^N) = (x_t, e_t) + \frac{1}{\sqrt{N}}(\eta_t^A, \eta_t^E) + o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

Pour tout  $t \in [0, T]$ , le processus  $(\eta_t)_{t \in [0, T]} = (\eta_t^A, \eta_t^E)_{t \in [0, T]}$  satisfait

$$\begin{aligned} \eta_t^A &= \eta_0^A + \int_0^t [(\kappa(1 - 2x_s)(\gamma_A - \gamma_B - \delta_B + (\delta_A + \delta_B)x_s) - \tau(l_B - l_A))\eta_s^A + \tau\eta_s^E] ds \\ &\quad + \int_0^t \sigma(x_s, e_s) dW_s, \\ \eta_t^E &= \eta_0^E + \int_0^t \ell[(l_A - l_B)e_s\eta_s^A + (l_A x_s + l_B(1 - x_s) - 2e_s)\eta_s^E] ds, \end{aligned} \tag{8}$$

où  $W$  est un mouvement brownien et

$$\sigma(x, e) = \sqrt{\kappa x(1 - x)(\lambda_A(x) + \lambda_B(x)) + \tau_A(e)(1 - x) + \tau_B(e)x}. \tag{9}$$

## Vers un système reparamétrisé

Dans ce chapitre, l'objectif est d'obtenir un système simplifié pour en étudier plus rigoureusement le comportement asymptotique en fonction du temps et de la taille de la population.

Les coefficients de dérive et de diffusion étant polynomiaux, nous utilisons le Théorème 3.1 du Chapitre 11 page 460 d'Ethier et Kurtz [29] pour faire une approximation-diffusion du système (4), quand  $N$  tend vers l'infini.

Le processus d'approximation-diffusion du système (4) est donné par le système stochastique suivant, de condition initiale  $(x_0, e_0) \in [0, 1] \times [l_A, l_B]$ , défini pour  $t > 0$  par :

$$\begin{cases} dX_t^N = p(X_t^N, E_t^N)dt + \frac{\sigma(X_t^N, E_t^N)}{\sqrt{2N}}dB_t \\ dE_t^N = h(X_t^N, E_t^N)dt, \end{cases} \quad (10)$$

où  $B$  est un mouvement brownien et  $p$  et  $h$  ont été définis dans (7).

Nous limitons l'étude du système (10) aux jeux de paramètres vérifiant l'hypothèse suivante

**Hypothèse 1.** *On suppose les hypothèses suivantes :*

1.  $2\gamma_A + \delta_A = 2\gamma_B + \delta_B$ ,
2.  $\frac{8(l_B - l_A)}{\delta_B + \delta_A} < \frac{\kappa}{\tau} < \frac{13(l_B - l_A)}{\delta_B + \delta_A}$ ,
3.  $\left(\frac{2\tau l_B^2 - (l_B + l_A)\ell}{2\tau l_B^2}\right)^2 > \frac{\kappa(\delta_A + \delta_B)}{2\tau(l_B - l_A)}$ .

Ces hypothèses sur les paramètres assurent que le système (7) possède trois points d'équilibre distincts dans  $[0, 1]$ .

Sous l'Hypothèse 1 et après plusieurs transformations géométriques, nous montrons que le système stochastique (10) peut se réécrire comme le système simplifié suivant, en posant  $\varepsilon = 1/N$ , (pour  $N$  suffisamment grand et donc  $\varepsilon$  suffisamment petit) :

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = \lambda_1 X^\varepsilon(1 - (X^\varepsilon)^2)dt + \varepsilon\sigma_0 \cos(\theta)dB_t \\ dY_t^\varepsilon = -\lambda_2 Y^\varepsilon + \lambda_3 X^\varepsilon(1 - (X^\varepsilon)^2)dt + \varepsilon\sigma_0 \sin(\theta)dB_t, \end{cases} \quad (11)$$

où  $(B_t)$  est un nouveau mouvement brownien,  $\lambda_1, \lambda_2 > 2\lambda_1, \lambda_3 < 2\lambda_2, \sigma_0$  sont des constantes positives et  $\theta \in ]-\pi, \pi[ \setminus \left\{0, \pm\frac{\pi}{2}, \arctan\left(\frac{2\lambda_3}{2\lambda_1 - \lambda_2}\right)\right\}$ .

Remarquons que :

- ce système possède le même mouvement brownien sur ses deux composantes,
- le coefficient de diffusion est une constante,
- le système déterministe associé

$$\begin{cases} dx_t = \lambda_1 x(1 - x^2)dt \\ dy_t = -\lambda_2 y + \lambda_3 x(1 - x^2)dt, \end{cases} \quad (12)$$

admet trois points d'équilibre ; deux équilibres stables encadrant un équilibre instable.  
 Nous introduisons les points

$$z_1 = (-1, 0), \quad z_2 = (0, 0) \text{ et } z_3 = (1, 0). \quad (13)$$

La figure suivante illustre pour un jeu de paramètre donné le portrait de phase du système (12).

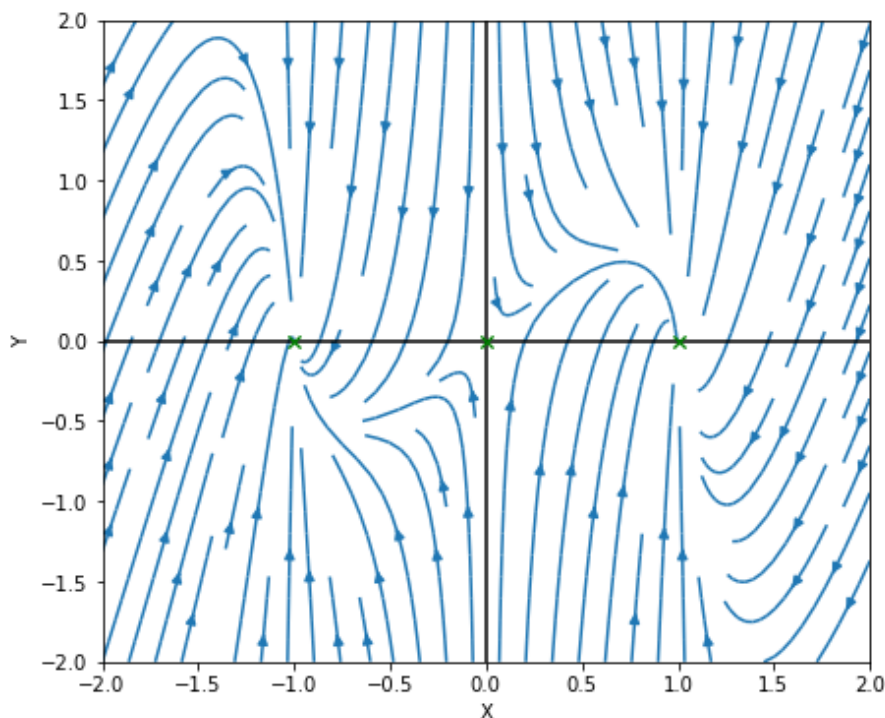


FIGURE 5 – Portrait de phase du système (12) pour les paramètres  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (16, 35, 50)$

Dans le but d'étudier le comportement asymptotique de (11), nous allons tout d'abord étudier le cas où  $\lambda_3 = 0$ . Pour des raisons apparaissant dans le chapitre 4, nous considérerons un coefficient de diffusion un peu plus général.

### Résultats du chapitre 3

Ce travail est issu d'une collaboration avec Sylvie Méléard et Pierre Collet. Dans ce chapitre, nous introduisons les méthodes nécessaires pour analyser le comportement d'un système multi-échelle pour une matrice de diffusion non inversible. Pour la méthode d'analyse du système, nous nous sommes appuyés sur les contributions des auteurs suivant : Benaïm, Champagnat, Oçafrain et Villemonais [9], Hairer [39], Cañizo et Mischler [13], Hofner, Locherbach et Thieullen [47] et Freidlin et Wentzell[31]

On se donne  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{2\}$  et  $\theta \in ]-\pi, \pi[ \setminus \{0, \pm \frac{\pi}{2}\}$ . Considérons le système d'équations différentielles stochastiques suivant, de condition initiale  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  et



défini pour  $t > 0$  par :

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = X_t^\varepsilon(1 - (X_t^\varepsilon)^2)dt + \varepsilon\sigma(X_t^\varepsilon)\cos(\theta) dB_t \\ dY_t^\varepsilon = -\lambda Y_t^\varepsilon dt + \varepsilon\sigma(X_t^\varepsilon)\sin(\theta) dB_t, \end{cases} \quad (14)$$

où  $B$  est un mouvement brownien uni-dimensionnel et le coefficient  $\sigma(x)$  est défini par

$$\sigma(x) = \sigma_0 + \sigma_1 x, \quad (15)$$

où  $\sigma_0 > 0$  et  $\sigma_1 \in ]-\sigma_0, \sigma_0[$ .

Remarquons que les deux équations sont dirigées par le même mouvement brownien, et qu'ainsi, la matrice de diffusion ne peut pas être inversible. Elle peut également s'annuler pour la valeur  $X_t^\varepsilon = -\frac{\sigma_0}{\sigma_1}$ . La droite d'équation  $x = -\frac{\sigma_0}{\sigma_1}$  va jouer un rôle important dans la suite de notre étude.

Nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution du système (14) sur un intervalle de temps fini. Nous nous intéressons ensuite aux différentes limites (en temps et en  $\varepsilon$ ) dans le système (14), résumées par la Figure 6.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}oi \left( X_t^{\varepsilon, (x, y)}, Y_t^{\varepsilon, (x, y)} \right)_{t \leq T} & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} & \left( \delta_{(x_t^{(x, y)}, y_t^{(x, y)})}, t \leq T \right) \\ \downarrow t \rightarrow +\infty & & \downarrow \\ \pi^\varepsilon & \xrightarrow{\hspace{10em}} & \pi \neq \tilde{\pi}^{(x, y)} \end{array}$$

FIGURE 6 – Notations des différentes limites en temps et en  $\varepsilon$

Les limites pour lesquelles on fait tendre le temps vers l'infini en premier sont les plus dures à étudier à cause de la forme du coefficient de diffusion.

En faisant tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$ , nous obtenons la convergence en probabilité du processus  $(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)_{t \leq T}$ , pour tout  $T > 0$ , vers la solution du système déterministe suivant

$$\begin{cases} \frac{dx_t}{dt} = x_t(1 - x_t^2) \\ \frac{dy_t}{dt} = -\lambda y_t. \end{cases} \quad (16)$$

En faisant tendre ensuite le temps vers l'infini, nous obtenons la proposition suivante

**Proposition 2.** *Soit  $(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)$  solution de (14) et de condition initiale  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . En faisant*

tendre  $\varepsilon$  vers 0 puis le temps vers l'infini, nous obtenons la convergence en probabilité

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon) = z_1 \mathbb{1}_{\{x_0 < 0\}} + z_2 \mathbb{1}_{\{x_0 = 0\}} + z_3 \mathbb{1}_{\{x_0 > 0\}}. \quad (17)$$

Introduisons la mesure

$$\tilde{\pi}^{(x_0, y_0)} = \mathbb{1}_{\{x_0 < 0\}} \delta_{z_1} + \mathbb{1}_{\{x_0 = 0\}} \delta_{z_2} + \mathbb{1}_{\{x_0 > 0\}} \delta_{z_3}. \quad (18)$$

Nous étudions maintenant le comportement en temps long du système stochastique à  $\varepsilon$  fixé et regardons ensuite comment il se comporte quand  $\varepsilon$  tend vers 0.

Introduisons la norme  $\|\cdot\|_W$  définie par

$$\|\mu\|_W = \int_{\mathbb{R}^2} W(x, y) |\mu|(dx, dy), \quad (19)$$

où  $W$  est une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\mu$  est une mesure dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Théorème 3.** *Soit  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  fixé. Le processus  $(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$  solution de (14) admet une unique mesure invariante notée  $\pi^\varepsilon$  qui est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue et il existe deux constantes  $C > 0$  et  $\gamma > 0$  telles que*

$$\|P_t((x, y), \cdot) - \pi^\varepsilon(\cdot)\|_W \leq CW(x, y)e^{-\gamma t}, \quad (20)$$

où  $W$  est une fonction de Liapunov définie par  $W(x, y) = 1 + x^2 + y^2$  et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Idée de la preuve :

Soit  $\mathcal{L}^\varepsilon$  le générateur associé au système (14).

Pour prouver ce théorème, il faut vérifier les trois éléments suivants :

- Vérifier la condition de Liapunov ; trouver une fonction de Liapunov  $W$  telle qu'il existe  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  vérifiant  $\mathcal{L}^\varepsilon W < \alpha_1 - \alpha_2 W$ .
- Vérifier la condition de Hörmander (qui sera énoncée précisément dans le Chapitre 3).
- Vérifier que le système est irréductible.

La condition de Liapunov permet de montrer que le processus ne "se disperse" pas à l'infini. Nous montrons que la fonction  $W(x, y) = 1 + x^2 + y^2$  est une fonction de Lyapunov et que les constantes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  associées sont indépendantes de  $\varepsilon$ . Cette remarque sera utile pour la preuve du Théorème 3.2.4.

La condition de Hörmander est vérifiée si on arrive à montrer qu'une certaine famille de champs de vecteurs est de rang 2. Cette famille de champs de vecteurs qui sera détaillée dans le chapitre 3 repose sur l'algèbre de Lie liée au générateur  $\mathcal{L}^\varepsilon$ . Le premier terme est l'espace vectoriel engendré par le terme de diffusion. Or, dans notre cas, le mouvement brownien est le même sur les deux composantes. Nous ne pouvons engendrer au plus qu'un espace de rang 1, et même de rang 0 pour  $x = \frac{-\sigma_0}{\sigma_1}$ . La difficulté réside dans le calcul des ordres successifs de

cette famille de champs de vecteurs et la vérification que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , cette famille est de rang 2.

Pour montrer l'irréductibilité du processus, il faut montrer que la probabilité de transition en un temps fini d'un point d'initialisation vers un ensemble d'arrivée est non nulle.

Comme la fonction  $\sigma(x)$  s'annule en  $x = \frac{-\sigma_0}{\sigma_1}$ , une difficulté de notre étude est qu'il existe des conditions initiales telles que l'on ne peut pas atteindre tout point d'arrivée dans  $\mathbb{R}^2$ .

Par exemple, considérons le cas de la figure 7. Pour tout point d'initialisation pris dans  $]-\infty, \frac{-\sigma_0}{\sigma_1}[ \times \mathbb{R}$ , l'ensemble d'arrivée ne peut pas être inclus dans  $]\frac{-\sigma_0}{\sigma_1}, +\infty[ \times \mathbb{R}$  car tous les points d'équilibre sont à gauche de cet ensemble et que sur la droite  $x = \frac{-\sigma_0}{\sigma_1}$ , le terme de diffusion s'annule et la dynamique suit alors le flot déterministe.

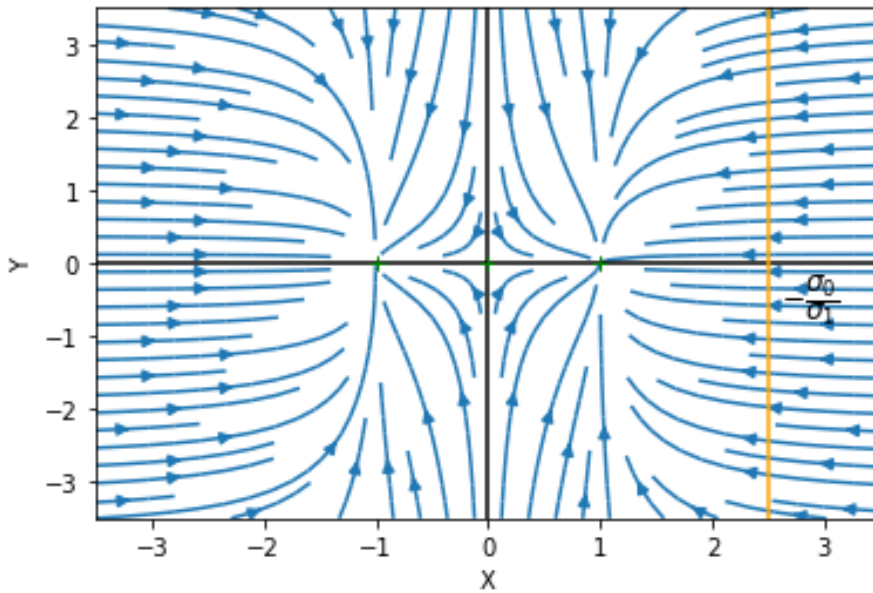


FIGURE 7 – Portrait de phase du système 1.15 pour les paramètres  $(\lambda, \sigma_0, \sigma_1) = (1, 4, -1.6)$ .  
Pour  $x = \frac{-\sigma_0}{\sigma_1} > 0$  (droite jaune de la figure), la fonction (15) s'annule.

En utilisant les résultats de [13], nous pouvons relâcher l'hypothèse d'irréductibilité dans tout l'espace. Nous allons construire un domaine qui pourra être atteint par le système depuis n'importe quelle condition initiale prise dans un domaine compact convenablement choisi. Pour ce faire, nous allons introduire un système contrôlé associé au système stochastique 14 pour lequel nous devons calculer explicitement la fonction de contrôle associée. Nous utiliserons les résultats de Stroock et Varadhan [81] reliant la solution de 14 et le système contrôlé pour conclure.

□

Une fois la convergence vers une mesure invariante  $\pi^\varepsilon$  pour  $\varepsilon$  fixé établie, nous nous intéressons à la limite de  $\pi^\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Nous obtenons ainsi le théorème suivant

**Théorème 4.** *Quand  $\varepsilon$  tend vers 0, la suite  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon < \varepsilon_0}$  est tendue et toutes les valeurs d'adhérence*

ont la forme

$$\sum_{i=1}^3 a_i \delta_{z_i}, \quad (21)$$

où  $\delta_{z_i}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  est la mesure de Dirac en le point  $z_i$  défini par (13) et les coefficients  $a_i \geq 0$  vérifient  $\sum_{i=1}^3 a_i = 1$ .

Idée de la preuve :

Cette preuve se décompose en deux parties :

- montrer la tension de la suite  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon < \varepsilon_0}$
- identifier les valeurs d'adhérence de la suite  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon < \varepsilon_0}$

Pour montrer la tension de la suite, nous cherchons à majorer  $\pi^\varepsilon(\mathbb{R}^2 \setminus B(R))$ , pour  $B(R)$  la boule de rayon  $R$ , par une quantité qui tend vers 0 quand  $R \rightarrow \infty$ . Pour cela, nous utilisons l'unicité de la mesure  $\pi^\varepsilon$  pour un  $\varepsilon$  fixé. Cela nous permet de montrer que la mesure d'occupation du processus  $(X^\varepsilon, Y^\varepsilon)$  sur  $[0, t]$  et renormalisée par  $t$ , converge quand  $t$  tend vers l'infini vers la mesure  $\pi^\varepsilon$ . De plus, le fait que les constantes dans la fonction de Liapunov ne dépendent pas de  $\varepsilon$  permet de majorer  $\pi^\varepsilon(\mathbb{R}^2 \setminus B(R))$  par une quantité indépendante de  $\varepsilon$ . L'identification des valeurs d'adhérence repose sur l'équation dont elles sont solutions.

□

Nous obtenons ainsi que la mesure  $\pi$  est une combinaison linéaire des équilibres du système déterministe. Nous cherchons à caractériser plus finement la limite. Pour cela, nous adaptons l'approche de Freidlin et Wentzell développée dans [31]-Chapitre 6 et obtenons le résultat suivant

**Théorème 5.** *La suite  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon < \varepsilon_0}$  converge, quand  $\varepsilon$  tend vers 0, vers une mesure  $\pi$  définie par*

$$\pi = \begin{cases} \delta_{(1,0)} & \text{si } \sigma_1 < 0, \\ \frac{1}{2}\delta_{(1,0)} + \frac{1}{2}\delta_{(-1,0)} & \text{si } \sigma_1 = 0, \\ \delta_{(-1,0)} & \text{si } \sigma_1 > 0. \end{cases} \quad (22)$$

Idée de la preuve :

La méthode développée dans [31] repose sur la quantification du coût de passage d'un point d'équilibre à un autre. Pour cela, les auteurs introduisent une fonctionnelle d'action qui calcule le coût minimal pour passer d'un équilibre à un autre. Cette méthode possède de nombreux liens avec le système de contrôle introduit pour prouver l'irréductibilité du système. L'une des conditions requises pour introduire la fonctionnelle d'action est d'avoir une matrice de diffusion inversible. Dans notre cas, cette hypothèse n'est pas vérifiée.

En utilisant que la deuxième composante, lorsqu'elle suit le flot déterministe, converge vers l'axe des abscisses, nous remarquons que seule la première composante représente un coût.

Ainsi, nous choisissons de prendre une fonctionnelle d'action qui évalue seulement le coût en la première composante. Moralement, en procédant ainsi, nous faisons comme si notre système était un système en une dimension.

□

Nous illustrons ensuite les résultats obtenus avec des simulations numériques de la mesure d'occupation associée au système (14)

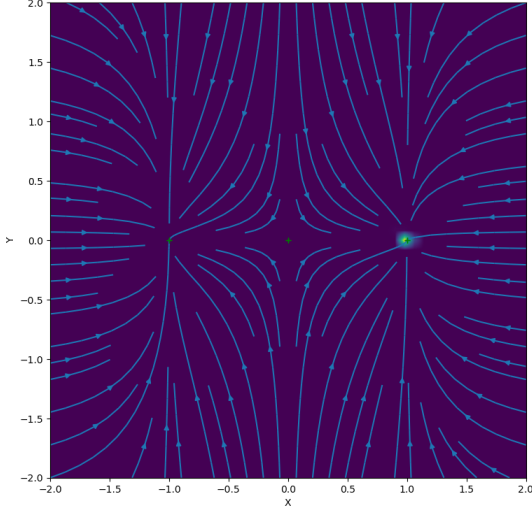


FIGURE 8 – Mesure d'occupation pour  $\sigma_1 > 0$

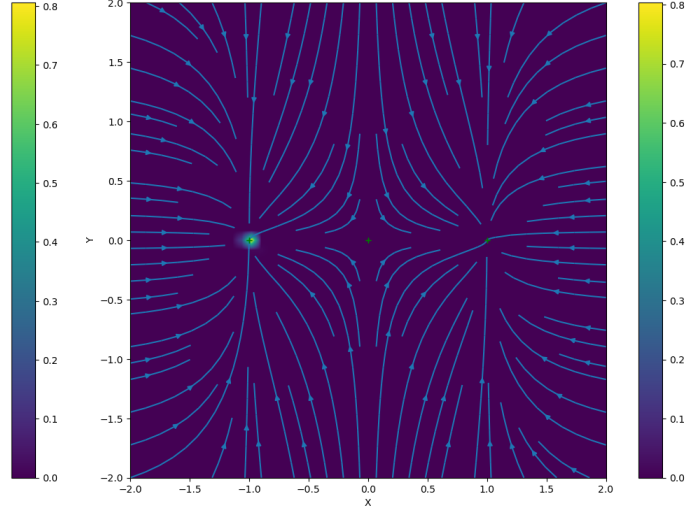


FIGURE 9 – Mesure d'occupation pour  $\sigma_1 < 0$

## Résultats du chapitre 4

Ce chapitre établit le lien entre les résultats obtenus dans le chapitre précédent et le modèle biologique. Il se divise en deux parties distinctes. Dans un premier temps, en adaptant les méthodes du chapitre 2, nous analysons les comportements asymptotiques en temps long et en  $\varepsilon$  petit du système (11). Dans un second temps, nous étudions les paramètres déterminants dans le comportement asymptotique du système (10).

Le coefficient de dérive dans le système (14) est un cas particulier de celui du système (11) pour  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, \lambda, 0)$ .

En étendant les résultats du chapitre 3 au système d'EDS (11), nous obtenons le théorème suivant :

**Théorème 6.** *Soit  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  fixé. Sous l'hypothèse 1, le processus  $(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$  solution de (11) admet une unique mesure invariante notée  $\pi^\varepsilon$  qui est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue et il existe deux constantes  $C > 0$  et  $\gamma > 0$  telles que pour tout  $t > 0$*

$$\|P_t((x, y), \cdot) - \pi^\varepsilon(\cdot)\|_W \leq CW(x, y)e^{-\gamma t}, \quad (23)$$

où la norme  $\|\cdot\|_W$  est rappelée en (19),  $W$  est la fonction de Liapunov définie par  $W(x, y) = 1 + x^2 + y^2$  et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . De plus, la suite  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[}$  converge quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  vers la mesure  $\pi$

définie par

$$\pi = \frac{1}{2}\delta_{z_1} + \frac{1}{2}\delta_{z_3}, \quad (24)$$

où  $z_1$  et  $z_3$  sont définis par (13).

Idée de preuve :

Ce théorème est composé de trois éléments :

- la convergence en loi de  $(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)$  solution de (11) quand  $t \rightarrow \infty$  vers l'unique mesure  $\pi^\varepsilon$  ;
- la convergence de  $\pi^\varepsilon$  vers  $\pi$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  ;
- la caractérisation de la mesure  $\pi$ .

La preuve de la limite lorsque  $t$  tend vers l'infini repose sur la vérification des conditions introduites au chapitre 3. Ces conditions doivent être adaptées, car le coefficient de dérive est différent. En revanche, le coefficient de diffusion étant constant, nous n'aurons pas les mêmes difficultés concernant la vérification de la condition de Hörmander et celle de l'irréductibilité.

La difficulté dans la caractérisation de  $\pi$  réside dans le choix de la fonctionnelle d'action. En effet, dans le chapitre 3, le choix découlait de la structure du coefficient de dérive où les deux composantes étaient décorrélées.

Nous conservons la fonctionnelle d'action introduite dans le chapitre 2, car autour des droites d'équation  $x = -1$ ,  $x = 0$  et  $x = 1$ , le flot de la deuxième composante fait converger le processus autour de l'axe des abscisses.  $\square$

Dans une dernière partie, nous souhaitons revenir à l'étude du système (10), à savoir l'approximation-diffusion du modèle biologique initial, pour laquelle le coefficient de diffusion est  $\sigma(x, e)$  définie en (1.18). Les différentes reparamétrisations et approximations de ce système nous ont mené au système (11) pour lequel le coefficient de diffusion est une constante, menant à une mesure limite symétrique en les deux équilibres stables du système déterministe associé. Or, nous avons montré que dans le cas d'un coefficient de diffusion linéaire en la première composante, le paramètre de la pente est déterminant pour savoir autour duquel des équilibres stables la mesure  $\pi$  se concentre. Le coefficient de diffusion constant du système (11) ne nous permet pas de distinguer les deux équilibres stables du système et il faut donc tenir compte de la fonction  $\sigma(x, e)$ .

Nous conjecturons qu'en regardant quels sont les paramètres pour lesquels  $\sigma(x, e)$  admet des valeurs différentes autour des deux équilibres stables du système, nous pourrions déterminer le comportement asymptotique de (10) et que le point d'équilibre sur lequel se concentre la mesure invariante est celui dont la valeur de  $\sigma(x, e)$  est la plus faible. Cette conjecture est montrée numériquement dans la fin du chapitre 4.

La figure 12 permet d'illustrer cette conjecture pour un jeu de paramètres vérifiant l'hypothèse 1.

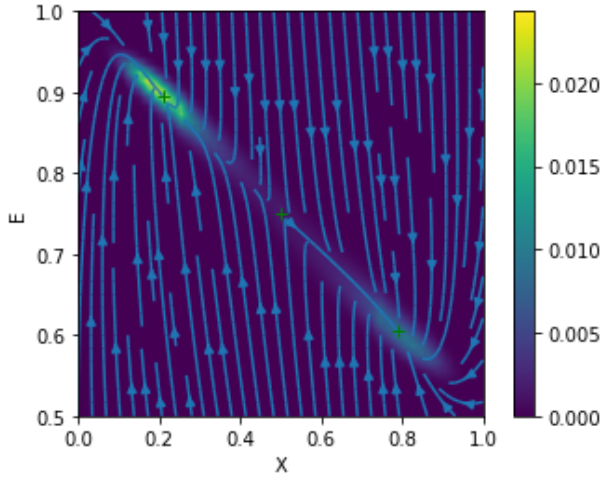


FIGURE 10 –  $\delta_A > \delta_B$  ( $\gamma_B > \gamma_A$ )

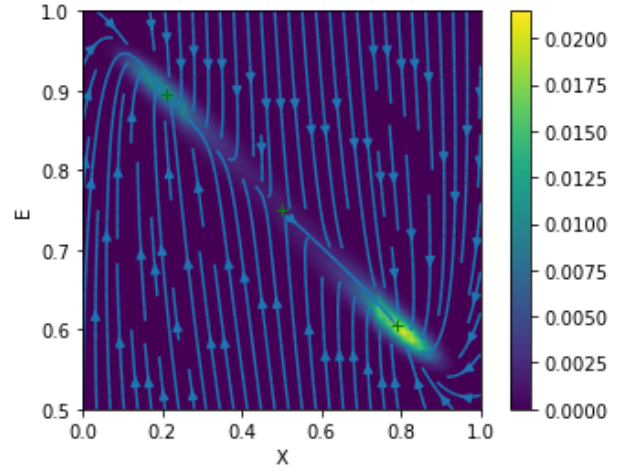


FIGURE 11 –  $\delta_A < \delta_B$  ( $\gamma_A > \gamma_B$ )

FIGURE 12 – Mesure d'occupation d'un processus de condition initiale  $(x_0, e_0) = (\frac{1}{2}, 1)$  pour  $T = 50000$  et  $N = 200$  de paramètres  $\kappa = 1$ ,  $\tau = l_B = 1$ ,  $\ell = 8$  et  $l_A = 0.5$ . Pour réaliser la figure de gauche, les paramètres de l'influence sociale sont  $\gamma_A = 5$ ,  $\gamma_B = 2$ ,  $\delta_A = 0$  et  $\delta_B = 6$ .

Ceux pour la figure de droite sont  $\gamma_A = 2$ ,  $\gamma_B = 5$ ,  $\delta_A = 6$  et  $\delta_B = 0$ .

Pour le jeu de paramètre de la figure 10 (resp. 11), nous avons  $\sigma(0.2, 0.9) > \sigma(0.8, 0.6)$  (resp.  $\sigma(0.2, 0.9) < \sigma(0.8, 0.6)$ ) où  $(0.2, 0.9)$  et  $(0.8, 0.6)$  sont les points d'équilibre stables du système (7). La mesure invariante se concentre principalement autour du point d'équilibre stable  $(x^*, e^*)$  pour lequel la valeur  $\sigma(x^*, e^*)$  est la plus faible.

# Chapitre 1

## Modélisation du comportement humain face au changement environnemental

### 1.1 Article principal



# Abstract

Addressing global environmental crises such as anthropogenic climate change requires the consistent adoption of proenvironmental behavior by a large part of a population. Here, we develop a mathematical model of a simple behavior-environment feedback loop to ask how the individual assessment of the environmental state combines with social interactions to influence the consistent adoption of proenvironmental behavior, and how this feeds back to the perceived environmental state. In this stochastic individual-based model, individuals can switch between two behaviors, 'active' (or actively proenvironmental) and 'baseline', differing in their perceived cost (higher for the active behavior) and environmental impact (lower for the active behavior). We show that the deterministic dynamics and the stochastic fluctuations of the system can be approximated by ordinary differential equations and a Ornstein-Uhlenbeck type process. By definition, the proenvironmental behavior is adopted consistently when, at population stationary state, its frequency is high and random fluctuations in frequency are small. We find that the combination of social and environmental feedbacks can promote the spread of costly proenvironmental behavior when neither, operating in isolation, would. To be adopted consistently, strong social pressure for proenvironmental action is necessary but not sufficient – social interactions must occur on a faster timescale compared to individual assessment, and the difference in environmental impact must be small. This simple model suggests a scenario to achieve large reductions in environmental impact, which involves incrementally more active and potentially more costly behavior being consistently adopted under increasing social pressure for proenvironmentalism.

## Author summary

Reducing global environmental degradation such as climate warming requires the adoption of consistent proenvironmental behaviors. But we, as individuals, tend to act in response to alarming events, and relax when things seem to get better. Can this tendency to behave inconsistently be countered by social interactions and social pressure? We explore this question by developing a simple mathematical model. We find that social interactions, in combination with our own individual perception of population's environmental impact, can indeed promote the consistent adoption of costly environmental behavior, but only when the social pressure for proenvironmentalism is strong enough. Our model suggests a possible path through 'small steps' from 'business as usual' behavior to active behavior with large reduction of the environmental impact. In the small-steps scenario, a gradual buildup of social pressure for proenvironmentalism can lead to a large reduction in perceived environmental impact even if the active behaviors adopted by the population become incrementally more costly. Thus, creating contexts that are conducive to strong social pressure for proenvironmentalism, through communication and public policy, appears both critical and powerful to achieve behavioral change that can make a difference.

# Introduction

Why don't we all act more decisively in the face of global environmental crises such as climate change or biodiversity loss? Achieving climate and biodiversity targets set by international agreements (e.g. Paris accord, Aichi convention) ultimately requires consistent behavioral changes within and across societies. At the level of individuals, limiting climate change or biodiversity loss requires consistent consumer choices with reduced net environmental impact. As citizens, individuals must consistently promote governmental policies that favor proenvironmental actions. Leaders and senior managers, as individuals, should make consistent decisions to influence greenhouse gas emissions and natural resource use by large organizations and industries.

For many individuals, adopting a proenvironmental behavior is not straightforward. Indeed the decision amounts to accepting certain short-term costs and reductions in living standards in order to mitigate against higher but uncertain losses that may be far in the future [33]. Individual behavioral responses to this collective-risk social dilemma [65] are not all-or-nothing, however. Between those who unconditionally accept or unconditionally deny the need for action towards environmental sustainability, the vast majority of people do not engage consistently in either way. Rather, non-ideologically polarized individuals tend to show inconsistent behavior as they change opinion, revise their intention, or switch behavior during their lifetime [1], possibly on very short timescales [16].

Such a behavioral inconsistency can be due to various mechanisms. Individuals who engage in some kind of proenvironmental action may lose motivation to "take the next step". In this case, action limits intention for more, a pattern called *tokenism* [33]. In the same vein, the *rebound effect* occurs when some mitigating effort is diminished or erased by the individual's subsequent actions [34]. For example, after acquiring a more fuel-efficient vehicle (an active mitigating behavior), owners tend to drive them farther, in effect reverting to their baseline environmental impact [60]. Other patterns of inconsistent behavior involve responses to extreme climatic events. Exposure to a climate-related hazard such as wildfires increases support for costly, pro-climate ballot measures in subsequent local elections [43]; but the degree of personal concern about climate change is related to the temperature anomaly only over a few months in the past [26]. Thus, outside of the most politically polarized groups, the influence of environmental anomalies can be strong, but it decays rapidly [41].

Mathematical modeling of human-environment dynamics can help identify pathways toward proenvironmental behavior consistency. Game-theoretic models with environmental feedbacks, or eco-evolutionary games, have been developed to study coupled environmental and behavior dynamics [35, 42, 63, 82, 88]. Specific examples address the use of a natural resource such as farmland [30], water [77] or forest [7]. A key aspect of these behavior-environment models [18, 83, 88] based on 'imitation dynamics' [44] is that individuals' behavioral decisions are only

made in the context of their interaction with others. Yet factors that are not tied to social encounters, such as the individual’s own experience and perception of the environmental state, may play a key role in environmental decisions. This is core to the conceptual framework that Schill et al. (2019) [74] recently put forth, building on behavioral economics and cognitive psychology, for understanding human behavior in the face of sustainability challenges. In this framework, individuals create social and environmental contexts that change dynamically with continuous feedback to their behavior. Following Schill et al. (2019) [74] we hypothesize that the dynamics of environmental behavior are shaped both by social context and the individuals’ private environmental experience.

Here we implement this hypothesis by constructing a simple mathematical stochastic model based on individual-level rules. Each individual has a negative impact on their environment that depends on their behavior – the impact of an active, proenvironmental behavior being less than the impact of the baseline behavior. Individuals can change their behavior in response to both social interactions and their own perception of environmental degradation. The environmental state and the individuals’ behavior are modeled as continuous and discrete variables, respectively, and the different processes affecting the state of the behavior-environment system play out on different time scales. We use the model to investigate the determinants of proenvironmental behavior consistency. We say that a behavior is adopted consistently when its frequency at stationary state is high and the stochastic fluctuations in frequency are small. Our model analysis addresses how the individual assessment of environmental degradation combines with social interactions to determine the consistent adoption of proenvironmental behavior, and how this feeds back to the perceived environmental state. In particular, we ask whether larger costs of, or weak social pressure on, proenvironmental behavior make the consistent adoption of proenvironmental behavior less likely; and whether a slower pace of change in the perceived environmental state can promote consistency.

## Results

### Model overview

We consider a population of  $N$  agents that interact among themselves and perceive the state of the environment (more or less degraded) through a single environmental variable,  $e$ . Individual behavior and their environmental impact are modeled on a short enough timescale so that  $N$  remains constant. The  $e$  variable measures the perceived environmental state on a continuous scale, with larger  $e$  corresponding to an environment perceived as more degraded. The  $e$  variable can be seen as an indicator or summary statistics of the perceived level of environmental degradation, whose variation is driven by the population level of environmental action, intention, or awareness, such as the spread of renewable energy, the adoption of plant-based diets, the reduced consumption of non-essential goods, or the prominence of pro-environmental demonstrations and other public calls for proenvironmental action. At any time  $t$  each indi-

vidual can express one of two behaviors : baseline (denoted by  $B$ ) or active (denoted by  $A$ ). When expressing behavior  $A$ , an agent actively seeks to reduce their negative environmental impact compared to the baseline impact of behavior  $B$ . This is modeled by assuming that an agent in state  $A$  increases the perceived environmental impact of the population by an amount  $l_A$ , which is less than the environmental impact,  $l_B$ , of behavior  $B$  (per capita). We also assume that  $l_A$  is positive meaning that the population influences the environment by its own existence. Agents can switch between behaviors  $A$  and  $B$ .

In the Methods we expound the mathematical derivation of a model for the joint dynamics of the frequency of behavior  $A$  and the perceived environmental degradation. Notations are listed in Table 1.1. We assume that the dynamics of the perceived environmental state follows a deterministic continuous process. We define parameter  $\ell$  as representing the timescale at which individuals' behavior affects the perceived environmental state : the higher  $\ell$ , the faster the perceived environmental state changes due to individuals' behavior. In a population where all agents express behavior  $A$  ( $B$ , respectively), the rate of change of the environment perceived as minimally (maximally) degraded is proportional to  $l_A$  ( $l_B$ ) and the stationary value of the perceived environmental state is  $l_A$  ( $l_B$ ). In a population where both behaviors are expressed, the perceived environmental state varies between  $l_A$  and  $l_B$ .

Any agent may switch at any time between behaviors  $A$  and  $B$  as a result of encounters with other agents (modeling social interactions). We define  $\kappa$  as a scaling parameter controlling the rate of switching behavior via social interactions (modeled as encounters with other agents). The rate at which an agent changes its behavior upon encountering another agent depends on the attractiveness of the alternate behavior, which is determined by the perceived payoff differential between the two behaviors, and the social pressure. We use parameters  $\gamma_i$ ,  $i = A$  or  $B$ , the payoff from adopting behavior  $i$ , and  $\delta_i$ , the social pressure for behavior  $i$ . We denote the payoff difference between behaviors  $A$  and  $B$ , or payoff differential, by  $\beta = \gamma_A - \gamma_B$ . We say that the active behavior  $A$  is *costly* when the payoff differential,  $\beta$ , is negative. The payoff differential may be positive if, for example, the active behavior  $A$  is actually incentivized through public policy.

Any agent may also switch behavior at any time based on their assessment of the environmental state. Agents tend to adopt the alternate behavior when they perceive the environmental impact of their current behavior as relatively large compared to the alternate behavior. We use parameter  $\tau$  to set the timescale of behavioral switch based on individual assessment.

The dynamics of the coupled behavior-environment process are stochastic, driven by the probabilistic events of behavior switch between  $A$  and  $B$ , under the joint effects of encounters among agents and individual assessment, and the deterministic response of the perceived environmental state. The mathematical model we obtain is a Piecewise Deterministic Markov Process where the population state (frequencies of behaviors) probabilistically jumps at each

change in individual behavior while the environmental state deterministically and continuously changes between jumps. Note that the model assumes that the perceived environmental state and social context are the same for all individuals, and individuals do not differ in personality, in the sense that all individuals have the same intrinsic propensity to change their behavior (or not) across time.

## Deterministic approximation of the dynamics and stochastic fluctuations

When the population size  $N$  is very large and under assumptions on the rates stated below, the behavior-environment dynamics can be approximated (in a sense made rigorous in the Methods and S1 Appendix) by the unique solution of the following system of ordinary differential equations for the active behavior frequency,  $x$ , and perceived environmental state,  $e$ ,

$$\begin{aligned}\frac{dx_t}{dt} &= p(x_t, e_t) = \kappa x_t(1 - x_t)(\lambda_A(x_t) - \lambda_B(x_t)) + \tau_A(e_t)(1 - x_t) - \tau_B(e_t)x_t \\ \frac{de_t}{dt} &= h(x_t, e_t) = \ell e_t(l_A x_t + l_B(1 - x_t) - e_t)\end{aligned}\tag{1.1}$$

with initial conditions  $(x_0, e_0)$  in  $[0, 1] \times [l_A, l_B]$ . The first equation governs the frequency  $x$  of the active behavior,  $A$ . In the right hand side of  $p(x, e)$ , the first term measures behavior switching due to encounters (social interactions), with  $B$  switching to  $A$  at rate  $\lambda_A(x)$  and  $A$  switching to  $B$  at rate  $\lambda_B(x)$ , given by

$$\begin{aligned}\lambda_A(x) &= \gamma_A + \delta_A x \\ \lambda_B(x) &= \gamma_B + \delta_B(1 - x)\end{aligned}\tag{1.2}$$

(following from Eq. (1.10), (1.11) and (1.8), see Methods). The second term measures behavior switching due to individual assessment of the environmental state. The corresponding rates of switching from  $B$  to  $A$  and from  $A$  to  $B$  respectively are

$$\begin{aligned}\tau_A(e) &= \tau(e - l_A) \\ \tau_B(e) &= \tau(l_B - e)\end{aligned}\tag{1.3}$$

(following from Eq. (1.13) in the Methods). The second equation in System (1.1) drives the dynamics of the perceived environmental state,  $e$ . An equilibrium point  $(x^*, e^*)$  is a  $(x, e)$  pair that nullifies both functions  $p(x, e)$  and  $h(x, e)$ .

Even though the rates of behavior switching are deterministic functions, the individual switching events occur probabilistically. As a consequence, given that the population size is finite, the actual frequency of the behaviors fluctuates randomly, even asymptotically around the equilibrium values predicted by the deterministic model. In the Methods and S1 Appendix, we show that the variance of the random fluctuations in frequency is equal to the total rate of behavior switching between  $A$  and  $B$ , elicited by social interactions and individual assessment

of the environmental state. This total rate, denoted by  $\Omega$ , is equal to

$$\Omega(x, e) = \kappa x(1-x)(\lambda_A(x) + \lambda_B(x)) + \tau_A(e)(1-x) + \tau_B(e)x \quad (1.4)$$

given the values of the  $A$  frequency,  $x$ , and perceived environmental state,  $e$ . The total rate  $\Omega$  measures the intensity of switching between behaviors across the population. Thus, the higher  $\Omega$ , the larger the probability that some agent switches behavior. We characterize  $A$  as being consistently adopted when the  $A$  equilibrium frequency,  $x^*$ , is high (close to one) and the corresponding total rate of behavior switching,  $\Omega(x^*, e^*)$ , is low (close to zero).

In the following subsections we first describe the deterministic dynamics of the large-population model in the absence of environmental feedback ( $\tau = 0$  in Eq. (1.1)). When the environmental feedback is included, we investigate the effect of all parameters to identify those that control the value and stability of equilibria : payoff differential,  $\beta$ , social norm threshold,  $\nu = \frac{\delta_B}{\delta_A + \delta_B}$ , individual environmental impacts and environmental impact differential,  $l_B - l_A$ , individual sensitivity to the environmental state,  $\tau$ , and reactivity of the environment,  $\ell$ . We then identify conditions for the spread and consistent adoption of the  $A$  behavior. Finally, we qualitatively discuss how incremental variation in the proenvironmental behavior could affect the behavior-environment system dynamics and lead to a robust reduction of the individuals' perceived environmental impact.

## Behavior dynamics without environmental feedback

In the absence of environmental feedback (i.e. no individual assessment,  $\tau = 0$ ), agents may switch behavior only upon encountering other agents, i.e. through social interactions. Equation (1.1) then reduces to the standard imitation dynamics (or replicator) equation

$$\begin{aligned} \frac{dx_t}{dt} &= \kappa x_t(1-x_t)[\beta + \delta_A x_t - \delta_B(1-x_t)] = p_0(x_t), \\ \frac{de_t}{dt} &= h(x_t, e_t) = \ell e_t(l_A x_t + l_B(1-x_t) - e_t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Assuming  $l_A > 0$  and  $e_0$  between  $l_A$  and  $l_B$ , the only possible equilibrium value for the environmental state is  $e^* = l_A x^* + l_B(1-x^*)$ . The model admits three equilibria,  $x_0^* = 0$ ,  $x_1^* = 1$  and  $x^* = \frac{\delta_B - \beta}{\delta_A + \delta_B}$ . If  $x^* < 0$  (resp.  $x^* > 1$ ), then  $x_1^* = 1$  (resp.  $x_0^* = 0$ ) is globally stable. If  $0 < x^* < 1$ , then the system is bistable; convergence to  $x_1^* = 1$  occurs if the initial frequency of the active behavior is higher than  $x^*$  (Fig 1.1). Note that when the payoff differential  $\beta$  is null, the outcome is entirely determined by social pressures and in this case, the frequency threshold  $x^*$  is equal to the social norm threshold,  $\nu = \frac{\delta_B}{\delta_A + \delta_B}$ .

At stable equilibrium ( $x_0^* = 0$  or  $x_1^* = 1$ ) the total rate of behavior switching,  $\Omega$  (Eq. (1.4)), is always equal to zero, which means that the prevailing behavior,  $A$  or  $B$ , is adopted consistently. Thus, if the active behavior  $A$  spreads, it will necessarily be adopted consistently; but the spread

of  $A$  from low frequency requires  $A$  to be perceived as sufficiently rewarding compared to  $B$  (i.e.  $\gamma_A > \gamma_B + \delta_B$ ).

## Effect of environmental feedback on active behavior frequency

As expected, the environmental feedback alone can prevent the active behavior from spreading to high frequency. By taking  $\tau > 0$  and  $\kappa = 0$  in Eq. (1.1), individual behavior is influenced by the perceived environmental state and not by social interactions. In this case, Eq. (1.1) possesses only one stable equilibrium,  $(x^*, e^*) = (\frac{1}{2}, \frac{l_B + l_A}{2})$ . With no social interactions ( $\kappa = 0$ ) the payoffs  $\gamma_A$  and  $\gamma_B$  have no influence on the equilibrium frequency of the active behavior, since the payoffs only play a role in the behavior dynamics when agents can compare them, which requires contact.

By setting both  $\tau > 0$  and  $\kappa > 0$  in Eq. (1.1), the effect of environmental feedback combines with the effect of social interactions. As in the case without environmental feedback (cf. previous subsection), the model predicts up to three internal equilibria (i.e.  $0 < x^* < 1$ , see Methods). The stability analysis shows that the product of individual sensitivity to the environment,  $\tau$ , and environmental impact differential,  $l_B - l_A$ , is a key determinant of the system dynamics. When  $\tau(l_B - l_A)$  is small enough, there is one (globally stable) or three (two stable, one unstable) equilibria, depending on the payoff differential,  $\beta$ , and social norm threshold,  $\nu$  (Fig 1.2A-1.2C). The stable equilibrium is always close to  $x^* = 0$  or  $x^* = 1$  while the two stable equilibria are close to  $x^* = 0$  and  $x^* = 1$ , respectively. When the product  $\tau(l_B - l_A)$  is large enough, there is only one equilibrium. For a given payoff differential,  $\beta$ , and social norm threshold,  $\nu$ , this equilibrium can be stable or unstable (here necessarily a limit cycle) depending on environmental reactivity,  $\ell$  (Fig 1.2D-1.2F). Thus, parameter  $\ell$ , the environmental reactivity, does not affect the number of equilibria but it affects their stability (Fig 1.2D-1.2F).

The environmental feedback thus has two main consequences for the spread of the active behavior  $A$  from low frequency. On the one hand, under the condition that the product  $\tau(l_B - l_A)$  is small enough (Fig 1.2A-1.2C), the increase of  $A$  frequency from very low to an equilibrium close to 1 becomes possible even if  $A$  is costly ( $\beta < 0$ ) or at least low-incentivized (small  $\beta > 0$ ), provided that the environmental feedback be combined with strong social pressure for the active behavior (low  $\nu$  due to large  $\delta_A$ , Fig 1.2A-1.2C to be compared with Fig 1.1). On the other hand, for large values of the product  $\tau(l_B - l_A)$ , the environmental feedback dominates the effect of social conformism for the active behavior. As a consequence, most active behaviors can reach a frequency close to 0.5 irrespective of their cost and the intensity of social pressure (Fig 1.2G-1.2 I). High frequency (close to one) can be reached but only under very strong social pressure, even for active behavior that are strongly beneficial (large  $\beta > 0$ ).

The spread from low to high frequency of a *costly* active behavior ( $\beta < 0$ ) cannot occur in the absence of environmental feedback. The effect of the environmental feedback can be

explained as follows. In a population where the active behavior is rarely expressed ( $x$  close to zero initially), the perceived environmental state is essentially set by the baseline behavior  $B$ . Thus, the environment is perceived as strongly degraded, the environmental feedback promotes the behavioral switch from  $B$  to  $A$ , hence the frequency of  $A$  rises. If the social pressure of individuals expressing behavior  $A$  is strong enough (i.e., if  $\delta_A$  is sufficiently larger than  $\delta_B$ ) the initial pull of the  $A$  frequency by the environmental feedback will be sufficient to drive it above the social norm threshold,  $\nu$ . Once the  $A$  frequency exceeds the  $\nu$  tipping point, social interactions pick up and drive  $A$  toward its equilibrium frequency, close to 1.

Simulations of trajectories in the case of the active behavior rising from low to high frequency allow us to constrain the model unit time (Fig 1.10). Our approach assumes a timeline over which the global environmental state or trend of global environmental degradation (e.g. climate warming) is essentially unaltered by individual behaviors. The timescale over which individuals interact, perceive the environmental state, and change their behavior is set by parameters  $\kappa$ ,  $\tau$ , and  $l$ . With  $\kappa = 1$  (i.e. one social interaction about the environmental concern expected on average per unit time), the characteristic time for the frequency of proenvironmental behavior to rise from near zero to near one is of the order of 1-50 unit time (Fig 1.10). Thus, environment-related social encounters that happen on average once a week or once a month would be consistent with the typical dynamics of the model. With a one-week time unit, the individual assessment of the environment would occur on average every three months with  $\tau = 0.1$ , or roughly every day with  $\tau = 10$ . With a one-month time unit, individual assessment of the environment would occur, on average, roughly every year with  $\tau = 0.1$ , and every three days with  $\tau = 10$ . Over such timescales, convergence to the stationary state occurs well before the actual physical environment or environmental trend (e.g. speed of warming) might change as a consequence of the population consistently adopting proenvironmental behaviors.

## Spread and consistent adoption of a costly active behavior

The consistent adoption of a costly active behavior requires the equilibrium frequency,  $x^*$ , to be close to one and the total switching rate,  $\Omega$  (Eq. (1.4)), to be close to zero. Figs 1.2 and 1.3 illustrate conditions under which this is the case. According to the previous subsection, a general condition for a costly (or low-incentivized) active behavior to spread from low to high frequency ( $x^*$  close to 1) is that the social pressure for  $A$  be strong enough (large  $\delta_A$  hence small  $\nu$ , Fig 1.2). When that is the case, the product  $\tau(l_B - l_A)$  fully determines consistency, since for  $x^*$  close to 1, the total rate of behavior switching is approximated by

$$\Omega(1, l_A) = \tau(l_B - l_A). \quad (1.6)$$

Thus, with a relatively weak sensitivity to the environment (i.e.  $\tau$  low) and a small environmental impact differential (i.e.  $l_A$  close to  $l_B$ ), costly active behaviors can spread from low to high frequency provided the social pressure for active behavior is strong enough (Fig 1.2A-1.2C), and consistent adoption is expected (Fig 1.3A). In contrast, if the individual sensitivity



to the environment is strong (large  $\tau$ ) and/or the environmental impact differential is large (large  $l_B - l_A$ ), behavioral inconsistency is expected, with agents frequently switching between active and baseline behaviors (Fig 1.3B-1.3C), even if the predicted equilibrium frequency of the active behavior is high (see lower (yellow) regions in Fig 1.2D-1.2 I, where the social pressure for  $A$ ,  $\delta_A$ , is high hence the social normal threshold,  $\nu$ , is low).

For intermediate values of  $\tau(l_B - l_A)$ , low environmental reactivity,  $\ell$ , may be an additional cause of behavior inconsistency. In this case, decreasing environmental reactivity can destabilize the unique positive equilibrium and turn it into a limit cycle (Fig 1.2D-F). Individuals will thus switch behavior at a total rate that is itself changing over a slower timescale set by the environmental reactivity. The slow timescale of environmental reactivity creates a time lag between the perceived environmental state and individuals' behavior, generating periodic oscillations in the switching rates.

## Robust environmental impact reduction through incremental behavior change

Starting from an environment perceived as strongly degraded, can an active behavior with much smaller environmental impact than the baseline behavior (i.e. large  $l_B - l_A$ ) drive a robust improvement of the environmental state (from high to low  $e$  at stationary state)? Such an active behavior could rise to high frequency provided the social pressure for proenvironmentalism is very strong (Fig 1.4A), with a concomitant drop in environmental impact (Fig 1.4D). But stochastic fluctuations in this case are large (Fig 1.4G), indicating that the active behavior may not be adopted consistently.

In contrast, environmental impacts and feedback such that  $\tau(l_B - l_A)$  is small allow for the unconditional spread and consistent adoption of low-incentivized or even costly active behavior (i.e.,  $\beta$  close to 0 or even negative) (Figs 1.4B and 1.4H). Even though the effect of such behavioral change on the environmental state is small (Fig 1.4E), this sets the stage for a scenario of incremental behavioral change towards robust environmental impact reduction (Figs 1.4B and 1.4H) whereby increasingly more active behaviors would spread and be adopted consistently, each behavioral change imparting a small reduction of environmental impact. Once behavior  $A$  is established, it becomes the common baseline behavior where individuals may start expressing a new active behavior  $A'$ , with lower environmental impact, and potentially a larger cost. In the latter case, a stronger social pressure (higher  $\delta_A$  hence lower  $\nu$ ) may compensate for the larger cost and ensure that the active behavior  $A'$  spreads and becomes adopted consistently, in lieu of  $A$ . Thus, in a system where social conformism for active behavior can increase (increasing  $\delta_A$  hence decreasing  $\nu$ ) in relation with more effective active behavior (lower  $l_A$ ) and/or the perception of reduced environmental impact (lower  $e^*$ ), a substitution sequence of gradually more active (lower  $l_A$ ) and more costly (more negative  $\beta$ ) behaviors can

take place, driving a potentially substantial decrease in the perceived environmental impact ( $e^*$  decreasing to arbitrarily low levels).

We hypothesize that such an incremental scenario might be triggered even for active behaviors that are initially costly, and with weak social pressure for them (small  $\delta_A$  hence high  $\nu$ ) – as long as their cost is not too large so that bistability remains possible (upper areas of black regions in Fig 1.4B). In this case, random fluctuations in behavior frequency may cause the system to switch from the low-frequency to the high-frequency  $A$  equilibrium (Fig 1.5), where it may reside long enough for some new behavior  $A'$  more active than  $A$  to spread and take over. The study of such dynamics, involving the effect of individual stochasticity on alternate equilibria, is beyond the scope of this model and warrants further mathematical investigation.

## Discussion

We developed a simple mathematical model to study how social and environmental feedbacks jointly influence the consistent adoption of proenvironmental behavior. The treatment of individual assessment of the perceived environment and social interactions as two separate factors of individual decisions differentiate our model from evolutionary games with environmental feedbacks, in which the influence of the environment is mediated by the payoffs of the strategic interactions [35, 42, 63, 82, 88] and even possibly by the game type varying in response to the agents' actions [5, 50]. Here we assume that the payoffs are constant and that the perception of environmental degradation can influence an individual's behavioral choice independently of their interactions with others - a similar assumption is made in models of environmental behavioral choice based on experiential learning [59]. This structure allows us to separate the behavioral effect of individual assessment of the perceived environmental state from the effect of social interactions. Our model thus aligns with the conceptual framework of Schill et al. (2019) [74] for connecting environmental behavior with both social and perceived biophysical contexts.

### The importance of timescales for behavioral consistency

The assumed invariance of the payoff difference (unaffected by variation in the environmental state variable) is rooted in the short timescale involved in the behavior-environment dynamics. Because the environmental state variable captures perceived information, shaped by behavioral intentions or actions, it is plausible that the timescale of environment-behavior change be short relative to the timescale over which the true state of the physical environment changes. Under this timescale separation, the payoff difference remains constant as the perceived environmental information changes, without precluding change in payoffs that could occur over the slower timescale of a changing physical environment.

When the timescale of individual assessment is fast relative to social interactions, the environmental feedback dominates the system dynamics, leading to inconsistent behavior. The relatively fast individual assessment timescale may originate from individuals having more confidence in their own evaluation of costs and benefits than in others' influence. This is known to occur, for instance, when the decision to be made carries a lot of personal weight [6, 66] or when individuals have grown up in a very favorable environment [53]. When individual assessment is slow compared to social interactions, the social feedback dominates. This raises the question, whether, in practice, social influence could be stronger among individuals who engage in proenvironmental behavior than among individuals who do not. One can speculate that this could be the case if the active behavior is individually costly and perceived as a moral duty. In this case, the active individuals behave as cooperators whose efforts (measured in terms of opportunity cost) are influenced the most by the observation of the others' efforts [11, 68].

Overall, the timescale of perceived environmental change has little effect on the behavior-environment dynamics. Thus, whether individuals assume that their actions are environmentally meaningful in the short term (high environmental reactivity,  $\ell$ ) or the long term (low environmental reactivity,  $\ell$ ) generally has no significant effect on behavior consistency. The case of social interactions and individual assessment occurring on similar timescales is special, however. In this case, low environmental reactivity,  $\ell$ , creates a time lag between behavioral and perceived environmental changes, causing behavior-environment cycles when the proenvironmental behavior is costly and levels of conformism are not too different between behaviors. A similar effect of slow environmental reactivity relative to social interactions promoting oscillations was also detected by [76] in their model of forest growth and conservation opinion dynamics. Contrasted environmental impacts of behaviors  $A$  and  $B$  (i.e. large  $l_B - l_A$ ) favor the limit cycle regime over bistability which is reminiscent of previous findings of behavior-environment cycles replacing bistability when the human influence on the environment is strong [52].

## Consistent adoption of incrementally more active behavior

A question of interest is how the consistent adoption of an active behavior depends on the magnitude of environmental impact reduction associated with that behavior. The model shows that for active behaviors causing only a small environmental impact reduction, the bistable regime is favored, which leads to consistent behavior adoption (of  $A$  or  $B$ ). In fact, a small environmental impact reduction by the active behavior has the same effect on the system dynamics as a slow timescale of individual assessment. Once a 'small-step' active behavior is adopted consistently, the perceived level of environmental degradation is only decreased by a small amount; but if more behavioral options were available, the socio-environmental context would be set to promote individuals engaging consistently in 'the next small step'. If the process were repeated, leading to the consistent adoption of active behaviors of gradually smaller environmental impact, we would expect the perceived level of environmental degradation to decrease. Interestingly, this might happen even if the relative cost of active behavior was in-

creasing, provided the social pressure for active behavior increased concomitantly.

Our consideration of gradual behavioral change through a sequence of 'small steps' raises the empirical question of whether the perceived change in environmental state could in turn affect the repertoire of individual behaviors, and in particular motivate behaviors more active than  $A$ . In practice, the existence and direction of such an additional feedback may depend on whether each small step is individually beneficial and thus considered by people as a self-serving decision, or individually costly and considered as a form of cooperation. In the first case, there is no obvious reason for the perceived change in environmental state to affect individual decisions, so it is unlikely that such feedback would exist. In the second case, however, the question relates to the rich empirical literature on the influence of the perceived environmental state on cooperation. The majority of studies in this field, and in particular the highest powered studies, report a positive relationship between the quality of the environment experienced by individuals and their level of investment in cooperation [3, 55, 57, 62, 67, 73, 75, 91]; although some studies report opposite effects [2, 58, 71] or no effect at all [78, 89]. We may thus hypothesize the existence of the additional positive feedback whereby the perception of an improved environmental state would enlarge the behavioral repertoire and motivate more active behaviors. The improvement or, on the contrary, the deterioration of the perceived environment could lead individuals to invest more, or, on the contrary, less in proenvironmental behavior, thus generating the kind of behavioral sequence that we envisioned in this analysis.

## Limits and perspectives

Our work builds on the fundamental distinction between the individual's stable characteristics and the subset of situational characteristics which capture the social and environmental situatedness of behavior [20]. In the model, all parameters, except the rate of environmental reactivity,  $\ell$ , are set as individual characteristics. A key assumption is that all individuals are identical in their stable characteristics. Our framework could be extended to relax this assumption and investigate the consequences of heterogeneity in individual social status or personalities [19, 84]. For example, the same objective cost of the active behavior (e.g. buying or maintaining an electric car) may be perceived very differently depending on the individual's wealth [37, 64]. Likewise, individuals of different social status may vary in their experience of social pressure from individuals expressing the active vs. baseline behavior; this in the model would manifest through inter-individual variation of  $\delta_A$  and  $\delta_B$  [53].

Given the predicted importance of the individual sensitivity to the environment,  $\tau$ , and environmental impact differential,  $l_B - l_A$ , the outcome (consistent adoption of the active behavior) is likely to be influenced by inter-individual heterogeneity in these two parameters. It is known that individuals can differ greatly in their perception and assessment of the state of degradation of their environment, due to differences in social origin, education, or information [36, 37]; and in their potential proenvironmental response to perceived environmental degradation [36]. This

heterogeneity could result in wide variation of both  $\tau$  and  $l_B - l_A$  among individuals, with contrasted personalities such as being little responsive and acting weakly (small  $\tau$  and  $l_B - l_A$ ), or responding fast and strongly (large  $\tau$  and  $l_B - l_A$ ).

In previous models of coupled human behavior and natural environment dynamics, the environment typically is measured by a variable such as the abundance of a renewable resource (e.g. forests [? ], fisheries [61]), or a physical variable such as atmospheric greenhouse gases concentration or temperature [12]. In these models, the environmental dynamics are driven by their own endogenous processes and impacted by human activities (gas emissions, harvesting...). These models ask how human behavioral feedbacks alter the stability properties of the perturbed (polluted, exploited...) ecosystem. An important difference between our approach and previous human-environment system models lies in our definition of the environmental state in terms of perceived degradation or vulnerability, rather than actual physical components (atmospheric  $CO_2$  level, abundance of a natural resource...) of the environment. This information changes under the influence of individuals' intentions or behaviors; the physical environment (or physical environmental trend, as with global climate warming or biodiversity loss) may also change as a consequence, but we assume that the change would occur on a much slower timescale and therefore has no influence on the individual decisions that the model describes. For example, in the case of global climate change, our approach assumes that our world is already locked into warming : even if we stopped emitting greenhouse gases today, it would take several decades before we observe curbing in the rise of global temperature. None-the-less, rapid change in individual behavior may occur, including the spread of pro-climate action or intention, concomitantly with the perception that the level of environmental degradation or vulnerability decreases.

This representation of the environment allowed us to make the assumption that the payoff difference is insensitive to the environmental state variable. Note, however, that a feedback of the environment to the payoff difference can be seen as implicit in our scenario for the consistent adoption of incrementally more active behavior. This could be due to institutional intervention responding - on a slow timescale - to change in the environmental stationary state, as defined here, and altering the payoff difference through incentives (reducing the payoff difference) or by promoting more effective behaviors that would also be more costly (increasing the payoff difference). Another significant difference with most previous human-environment models is that here the environment, being purely informational, does not have its own intrinsic dynamics. A similar assumption was made by Weitz et al. (2016) [88] in a game-theoretic model where the environmental feedback was positive and governed by a tipping point. Future work could address the effect of a positive feedback in our model, to capture positive reinforcement (improved environmental state encourages to do more [37, 46]) and "giving up" (an environment assessed as degraded leads to less effort, rather than more [37, 46]).

## Concluding remarks

In this minimal model of behavior-environment feedback, individuals intend proenvironmental action when they perceive their environment as strongly degraded or vulnerable, and relax their effort as they perceive amelioration of the environmental state. This negative environmental feedback, by itself, opposes the consistent adoption of costly proenvironmental behavior, but opens the possibility for such behavior to rise from very low frequency and reach a tipping point at which social interactions and conformism will pick up and drive its consistent adoption. This suggests a scenario to achieve large reductions in environmental impact, which involves the consistent adoption of incrementally more active and potentially more costly behavior. The theoretical conditions for this to occur (social interactions timescale faster than individual assessment timescale, strong social pressure for proenvironmental action) raise empirical questions regarding why individuals' environmental intentions would rely more on others' influence than on their own assessment of the environmental state, and what factors (individual or collective) can make the social pressure of conformism stronger for proenvironmentalism.

## Methods

In a population of finite size  $N$ , at any time  $t$ , the perceived environmental state and the numbers of individuals who are performing  $A$  or  $B$  are denoted by  $E_t^N$ ,  $N_t^{A,N}$  and  $N_t^{B,N}$ , respectively. Since the population size is constant we have  $N_t^{B,N} = N - N_t^{A,N}$ . Hereafter we derive a stochastic model for the joint dynamics of the frequency of behavior  $A$  in the population,  $X_t^N = \frac{N_t^{A,N}}{N}$ , and the perceived environmental state,  $E_t^N$ . The list of parameters and their default values is given in Table 1.1.

## Environment dynamics

We assume that the dynamics of the perceived environmental state  $E_t^N$  follows a deterministic continuous process. Each individual in the population has the same perception of the environment. The dynamics of  $E_t^N$  is driven by the ordinary differential equation

$$\dot{E}_t^N = h(X_t^N, E_t^N),$$

where  $h$  captures the environmental impact of the two behaviors given their frequency, according to

$$h(x, e) = \ell e(l_A x + l_B(1 - x) - e) \quad (1.7)$$

for any  $(x, e)$  in  $[0, 1] \times [l_A, l_B]$ .

The function  $h$  is chosen such that in a population where all individuals express behavior  $A$  ( $B$ , respectively), the rate of change of the environment perceived as minimally (maximally)

degraded is proportional to  $l_A$  ( $l_B$ ) and the stationary value of the perceived environmental state is  $l_A$  ( $l_B$ ).

## Behavior dynamics

Two factors influence the decision process of modeled agents : frequency of encounters with other modeled agents, and the value of the state variable representing some environmental factor.

### Social interactions

We further assume

$$\begin{aligned} g_A(X^N) &= X^N \\ g_B(X^N) &= 1 - X^N. \end{aligned} \tag{1.8}$$

An agent with behavior  $i$  switches to behavior  $j$  via social interactions at rate

$$\lambda_{i \rightarrow j}^N(X^N) = N^2 \kappa g_i(X^N) g_j(X^N) \lambda_i^N(X^N), \tag{1.9}$$

where  $\lambda_i^N(x)$  is the individual attractiveness of behavior  $i$ ,  $N^2 \kappa g_i(X^N) g_j(X^N)$  is the number of potential encounters. Note that the number of potential encounters is symmetrical,  $g_i(X^N) g_j(X^N) = X^N (1 - X^N)$ . The difference between behavior  $i$ 's and  $j$ 's rate rely on the individual attractiveness of behavior. The individual attractiveness of behavior  $i$  is taken of the form

$$\lambda_i^N(X^N) = \frac{1}{N} (\gamma_i + \delta_i g_i(X^N)). \tag{1.10}$$

As a result, the individual rate of behavioral switch from  $i$  to  $j$  is

$$\lambda_{i \rightarrow j}^N(X^N) = N \kappa X^N (1 - X^N) (\gamma_j + \delta_j g_j(X^N)). \tag{1.11}$$

The term  $\delta_j g_j(X^N)$  reflects that social influence is a coercive mechanism which encourages conformism.

### Individual assessment

Behavior switching based on the assessment of the state of the environment occurs at the individual rate

$$\tau_{i \rightarrow j}^N(X^N, E^N) = N g_i(X^N) \tau_j(E^N), \tag{1.12}$$

where  $g_A(X^N) = X^N$  and  $g_B(X^N) = 1 - X^N$  (as above) and the environmental perception of individual  $i$  is measured by  $\tau_j(E^N)$ , which captures the difference between the environmental state,  $e$ , and the contribution of behavior  $j$  to the degradation of the environmental state.

The simplest form then is

$$\begin{aligned}
\tau_A(E^N) &= \tau(E^N - l_A) \\
\tau_B(E^N) &= \tau(l_B - E^N).
\end{aligned}
\tag{1.13}$$

Thus, the larger the difference between the perceived environmental state,  $E^N$ , and the individual environmental impact of behavior  $i$ ,  $l_i$ , the faster an agent expressing  $j$  behavior switches to  $i$  behavior.

## Dynamics of the behavior-environment stochastic process

The dynamics of the coupled behavior-environment process  $(X_t^N, E_t^N)$  are stochastic, driven by the probabilistic events of agents switching between the baseline ( $B$ ) and active ( $A$ ) behaviors, under the joint effects of encounters and individual assessment, and the deterministic response of the perceived environmental state. Mathematically, the effects of all possible events (agents' behavior switches, change in perceived environment) on the state of the Markovian system  $(X_t^N, E_t^N)_{t \geq 0}$  are captured by the infinitesimal generator  $L^N$  of the stochastic process  $(X_t^N, E_t^N)$ . For  $(x, e) \in \llbracket 0, \frac{1}{N}, \dots, 1 \rrbracket \times \mathbb{R}_*^+$  and a test function  $f \in \mathcal{C}_b^1(\llbracket 0, \frac{1}{N}, \dots, 1 \rrbracket \times \mathbb{R}_*^+, \mathbb{R})$ , we have

$$\begin{aligned}
L^N f(x, e) &= N^2 \kappa x (1-x) \lambda_A^N(x) \left[ f\left(x + \frac{1}{N}, e\right) - f(x, e) \right] \\
&\quad + N^2 \kappa x (1-x) \lambda_B^N(x) \left[ f\left(x - \frac{1}{N}, e\right) - f(x, e) \right] \\
&\quad + N(1-x) \tau_{B \rightarrow A}(x, e) \left[ f\left(x + \frac{1}{N}, e\right) - f(x, e) \right] \\
&\quad + Nx \tau_{A \rightarrow B}(x, e) \left[ f\left(x - \frac{1}{N}, e\right) - f(x, e) \right] \\
&\quad + h(x, e) \frac{\partial f(x, e)}{\partial e}.
\end{aligned}
\tag{1.14}$$

Agents switch behavior at a given time  $t$  for a given state of the system  $(X_t, E_t)$  with a probability given by Eq. (1.14). In this expression, the first and second rows account for individual behavior switches due to encounters (from  $B$  to  $A$  or  $A$  to  $B$ , respectively). For instance, the rate at which a  $B \rightarrow A$  switch occurs because of encounters (first row) is proportional to  $N(1-x)$ , the number of agents adopting behavior  $B$ ;  $\kappa Nx$ , the encounter rate between a single agent adopting  $B$  and agents adopting  $A$ ; and  $\lambda_A(x)$ , the social attractiveness of a single agent adopting  $A$ . The third and fourth rows account for switches because of individual assessment of the perceived environment state. For instance, the rate at which a  $B \rightarrow A$  switch occurs because of the environmental state variable (third row) is proportional to  $N(1-x)$ , the number of agents adopting  $B$ ; and  $\tau_{B \rightarrow A}(x, e)$ , the rate at which an agent in state  $B$  adopts the alternate behavior  $A$  after assessing the impact of its behavior on the perceived state of the environment. Finally, the last row accounts for changes in the perceived environmental state depending on the frequency. By taking  $f(x, e) = x$  and  $f(x, e) = e$ , we obtain the deterministic part in Eq. (1.21) while  $f(x, e) = x^2$  gives the quadratic variation in Eq. (1.23). The process whose law is



characterized by Eq. (1.14) is a Piecewise Deterministic Markov Process where the population state (frequencies of behaviors) probabilistically jumps at each change in agent behavior while the environmental state deterministically and continuously changes between jumps.

## Dynamical system approximation for large populations

In Section 1.4, we explain that, assuming the population size  $N$  very large and under Assumptions ((1.8)-(1.13)), the sequence of stochastic processes  $(X^N, E^N)_{N \in \mathbb{N}^*}$  converges in distribution to the unique solution of the system Eq. (1.1). By plugging Eq. (1.2) and (1.3) into Eq. (1.1), we obtain Eq. (1.15)

$$\begin{aligned} \frac{dx_t}{dt} &= p(x_t, e_t) = \kappa x_t(1 - x_t)[\beta + \delta_A x_t - \delta_B(1 - x_t)] + \tau [e_t - l_A(1 - x_t) - l_B x_t] \\ \frac{de_t}{dt} &= h(x_t, e_t) = \ell e_t(l_A x_t + l_B(1 - x_t) - e_t) \end{aligned} \quad (1.15)$$

with initial conditions  $x_0$  between 0 and 1 and  $e_0$  between  $l_A$  and  $l_B$ . The first equation governs the frequency  $x$  of the active behavior,  $A$ . The second equation drives the dynamics of the perceived environmental state variable,  $e$ .

The model predicts up to three equilibria given by the zeros of

$$p(x, l_A x + l_B(1 - x)) = p_0(x) + \tau(l_B - l_A)(1 - 2x), \quad (1.16)$$

( $p_0$  defined in Eq. (1.5)), that are nonnegative and less than (or equal to) one. By setting both  $\tau > 0$  and  $\kappa > 0$  in Eq. (1.15), the effect of the environmental feedback on its own can be highlighted by comparing Eq. (1.15) at its stable equilibria with the value of Eq. (1.16) at the same state (i.e.  $x^* = 0$  or  $x^* = 1$ ). Since  $p(0, l_B) = \tau(l_B - l_A) > 0$  and  $p(1, l_A) = -p(0, l_B) < 0$ , the environmental feedback moves the equilibria of the system away from 0 and 1 (Fig 1.2). The roots of Eq. (1.16) also show that the number of equilibria is likely influenced by the encounter rate,  $\kappa$ , the payoff differential,  $\beta$ , the social norm threshold,  $\nu = \frac{\delta_B}{\delta_A + \delta_B}$ , and the combination (product) of the individual sensitivity to the environment,  $\tau$ , and the differential environmental impact,  $l_B - l_A$ .

## Quantifying the effect of individual stochasticity

To analyse the fluctuations of the stochastic model around the deterministic limit, we generalize the central limit theorem to the convergence of the stochastic process  $(X_t^N, E_t^N)_{t \in [0, T]}$  to the deterministic solution of Eq. (1.1). We therefore introduce  $(\eta_t^N)_{t \in [0, T]} = (\eta_t^{A, N}, \eta_t^{E, N})_{t \in [0, T]} = (\sqrt{N}(X_t^N - x_t, E_t^N - e_t))_{t \in [0, T]}$ , where  $((x_t, e_t), t \leq T)$  is the deterministic solution of Eq. (1.1) and  $(X^N, E^N)$  is the stochastic process. Assuming that  $\eta_0^N$  converges in law to  $\eta_0$ , when  $N \rightarrow \infty$ , the process  $(\eta_t^N)_{t \in [0, T]}$  converges in law to a Ornstein-Uhlenbeck type process  $(\eta_t)_{t \in [0, T]} = (\eta_t^A, \eta_t^E)_{t \in [0, T]}$  and we have

$$(X_t^N, E_t^N) = (x_t, e_t) + \frac{1}{\sqrt{N}}(\eta_t^A, \eta_t^E) + o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

For all  $t$  in  $[0, T]$ , the process  $(\eta_t)_{t \in [0, T]} = (\eta_t^A, \eta_t^E)_{t \in [0, T]}$  satisfies

$$\begin{aligned} \eta_t^A &= \eta_0^A + \int_0^t [(\kappa(1 - 2x_s)(\gamma_A - \gamma_B - \delta_B + (\delta_A + \delta_B)x_s) - \tau(l_B - l_A))\eta_s^A + \tau\eta_s^E] ds \\ &\quad + \int_0^t \sigma(x_s, e_s) dW_s, \\ \eta_t^E &= \eta_0^E + \int_0^t \ell[(l_A - l_B)e_s\eta_s^A + (l_A x_s + l_B(1 - x_s) - 2e_s)\eta_s^E] ds. \end{aligned} \quad (1.17)$$

where

$$\sigma(x, e) = \sqrt{\kappa x(1 - x)(\lambda_A(x) + \lambda_B(x)) + \tau_A(e)(1 - x) + \tau_B(e)x}, \quad (1.18)$$

and  $W$  is a standard Brownian motion (see Section 1.6 for mathematical detail).

Note that the drift and variance are functions of the solution of the deterministic system (1.1). The stochastic part of the fluctuation process given by Eq. (1.18) is the square root of the total rate  $\Omega$  (see Eq. (1.4)) of behavior switching in the population. According to Eq. (1.17), it only affects the fluctuations in behavior frequency (not in the perceived environmental state).

## Simulations and numerical analysis

For the stochastic process, the dynamics of agent behaviors' frequency (by stochastic jumps) is jointly simulated with the dynamics of the perceived environment (by deterministic changes, continuously in time between the stochastic population jumps). Random times are for any  $N$  drawn according to an exponential distribution of parameters  $\xi^N$ , where

$$\xi^N > N \sup_{(x, e) \in [0, 1] \times [l_A, l_B]} (\kappa(\lambda_A(x) + \lambda_B(x)) + \tau_A(e) + \tau_B(e)). \quad (1.19)$$

At each of these times, we update our variables of interest. There are three possible cases : either no agent changes their behavior in the population, or one agent switches from  $B$  to  $A$ , or one agent switches from  $A$  to  $B$ . The perceived environment is changed using a Euler scheme between two events in the population.

Without loss of generality, parameters  $\kappa$  and  $l_B$  are fixed to 1 (default values for parameters used in numerical analyses are reviewed in Table 1.1). We analyse the properties of the stochastic and deterministic models for values of  $\delta_A$  and  $\gamma_A$  spanning the whole range of possible values while keeping  $\delta_B$  and  $\gamma_B$  constant. Parameters are varied across a discrete grid. We search for fixed points by computing the zeros of the polynomial given by Eq. (1.16). Local stability is tested by computing the Jacobian matrix of the system. We use the Poincaré-Bendixson theorem to check the absence of limit cycle (Th.1.8.1 in [38], see also Section 1.5.2). When the

existence of a stable limit cycle in addition to an attractive fixed point cannot be excluded, we simulate the dynamical system for different initial conditions. Would there be a limit cycle crossing the trajectory of the simulations, the trajectory would be trapped around the limit cycle and not converge to its stable fixed point. Otherwise, all trajectories converge to the equilibrium, thus excluding the existence of a limit cycle.

## Acknowledgements

We thank Sylvie Démurger, Jean-Stéphane Dhersion and the team of the *Mission pour les Initiatives Transverses et Interdisciplinaires* at the French National Center for Scientific Research (CNRS) for the initial impetus and support to develop this research program. We are grateful for the stimulating work environment that the summer school organized by the Chair "Modélisation Mathématique et Biodiversité" has provided.

## Funding

This work was funded by a grant from the program 80PRIME of the French National Center for Scientific Research (CNRS). Funding was also provided by the iGLOBES Mobility Program of Paris Sciences & Lettres University and was partially funded by the Chair "Modélisation Mathématique et Biodiversité" of VEOLIA-Ecole Polytechnique-MNHN-F.X. JBA acknowledges support from the EUR FrontCog grant ANR-17-EURE-0017.

Notation	Parameter description	Default value
$A, B$	Active vs. Baseline behaviors	
$N$	Size of the population	
$N_t^{A,N}, N_t^{B,N}$	Number of individuals expressing behavior $A$ or $B$ at time $t$	
$X_t^N; E_t^N$	Frequency of individuals with behavior $A$ ; perceived environmental state at time $t$ (dimensionless)	
$x_t; e_t$	Deterministic frequency of individuals with behavior $A$ ; deterministic perceived environmental state at time $t$ (dimensionless)	
$\kappa$	Encounter rate (inverse of unit time)	1
$\tau$	Individual sensitivity to the environment (inverse of unit time)	
$\ell$	Environmental reactivity (inverse of unit time)	
$\gamma_A$ (resp. $\gamma_B$ )	Payoff of behavior $A$ (resp. $B$ ) (dimensionless)	$\gamma_B = 1$
$\delta_A$ (resp. $\delta_B$ )	Social pressure of behavior $A$ (resp. $B$ ) (dimensionless)	$\delta_B = 0.5$
$l_A$ (resp. $l_B$ )	Individual environmental impact of behavior $A$ (resp. $B$ ) (dimensionless)	$l_B = 1$
$\beta = \gamma_A - \gamma_B$	Payoff differential (dimensionless)	
$\frac{\delta_B}{\delta_A + \delta_B}$	Social norm threshold (SNT) (dimensionless)	
$l_B - l_A$	Environmental impact differential (dimensionless)	

TABLE 1.1 – **Parameter definitions and default values.**

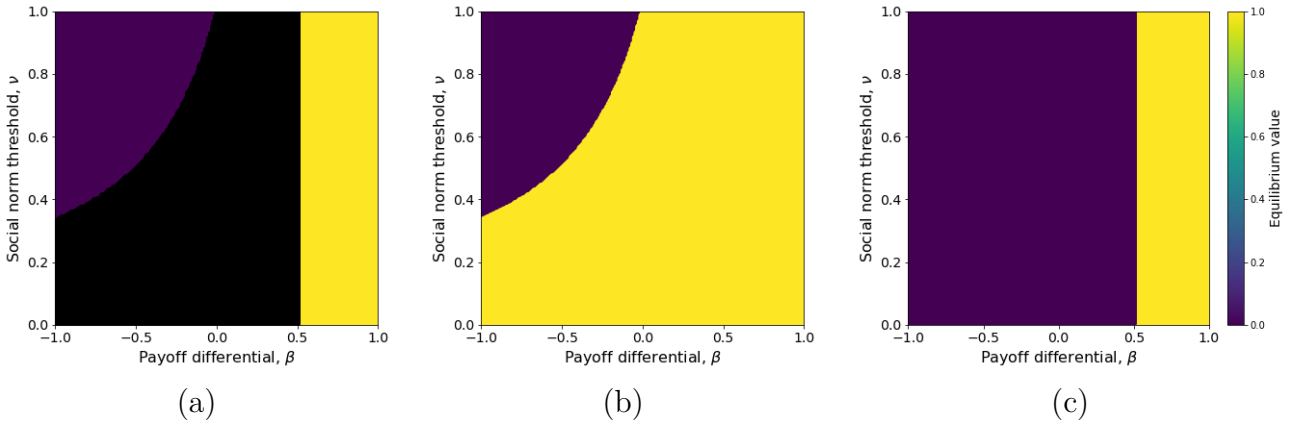


FIGURE 1.1 – Frequency of active behavior at equilibrium in the absence of environmental feedback (Eq. (1.5)), with respect to the payoff differential ( $\beta$ ) and social norm threshold ( $\nu = \frac{\delta_B}{\delta_A + \delta_B}$ ). (a) Bistability occurs in the black filled area (depending on the initial conditions, the equilibrium is either  $x^* = 0$  or  $x^* = 1$ ). (b) The upper equilibrium value ( $x^* = 1$ ) is plotted across the bistability area (reachable for initial frequency  $x_0 > \nu$ ). (c) The lower equilibrium value ( $x^* = 0$ ) is plotted across the bistability area (reachable for initial frequency  $x_0 < \nu$ ). Environmental sensitivity is  $\ell = 0.1$  and other parameters are set to their default values (Table 1.1).

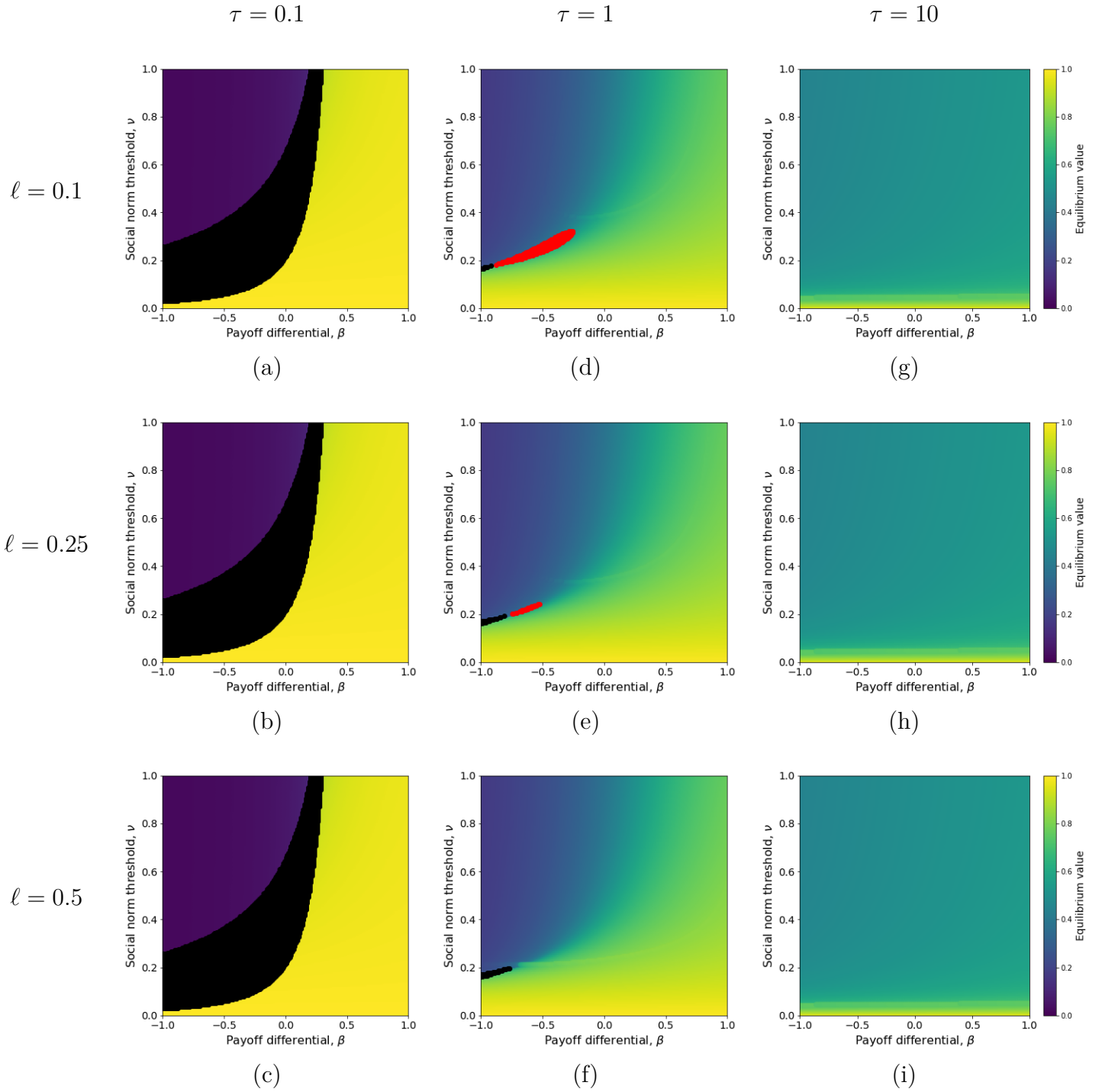
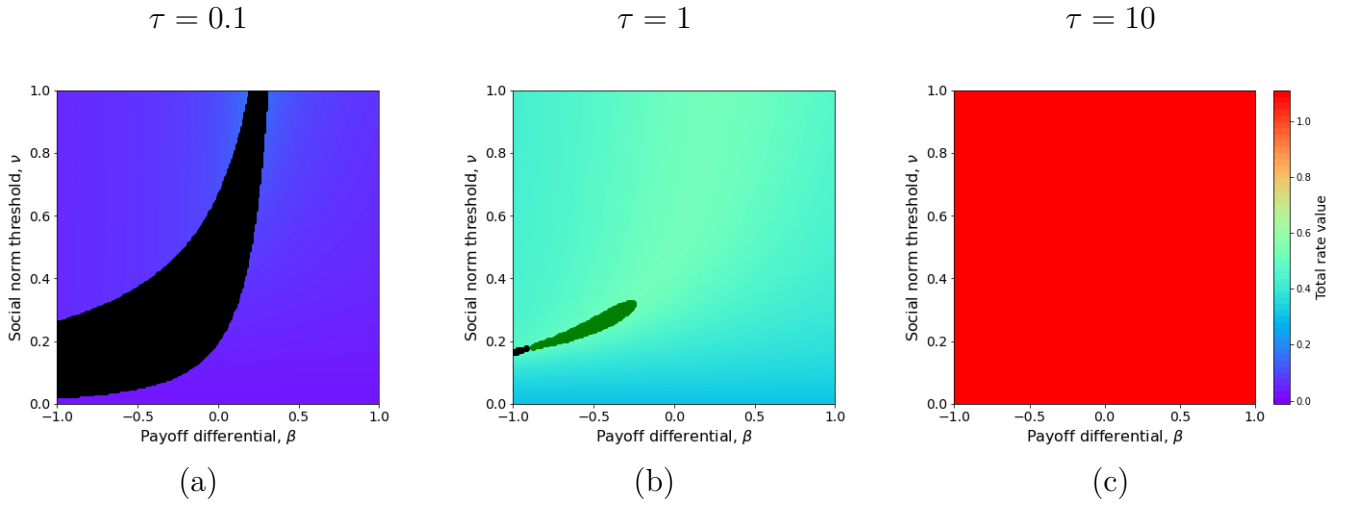


FIGURE 1.2 – Frequency of active behavior at equilibrium in the presence of environmental feedback (Eq. (1.16)), with respect to the payoff differential ( $\beta$ ) and social norm threshold ( $\nu = \frac{\delta_B}{\delta_A + \delta_B}$ ), for low to high individual sensitivity to the environment ( $\tau$ ) (for (a), (d) and (g)  $\ell = 0.1$ ) and environmental reactivity ( $\ell$ ). The place of each panel (a)-(i) gives the values taken for  $\tau$  and  $\ell = 0.25$ . For example, for (e),  $\ell = 0.25$  and  $\tau = 1$ . Bistability occurs in the black filled areas. Stable limit cycles occur in the red filled areas. The environmental impact differential is fixed ( $l_B = 1, l_A = 0.7$ ). Other parameters ( $\kappa, \delta_B$ ) are set to their default values (Table 1.1).



**FIGURE 1.3 – Total switching rate at stationary state.** The total switching rate is equal to the variance of the asymptotic fluctuations around the equilibrium  $x^*$  as given by Eq. (1.18) (a) Variance for  $\tau = 0.1$ . (b) Variance for  $\tau = 1$ . (c) Variance for  $\tau = 10$ . The environmental impact differential is fixed ( $l_B = 1, l_A = 0.7$ ), environmental sensitivity is  $\ell = 0.1$  and other parameters are set to their default values (Table 1.1).

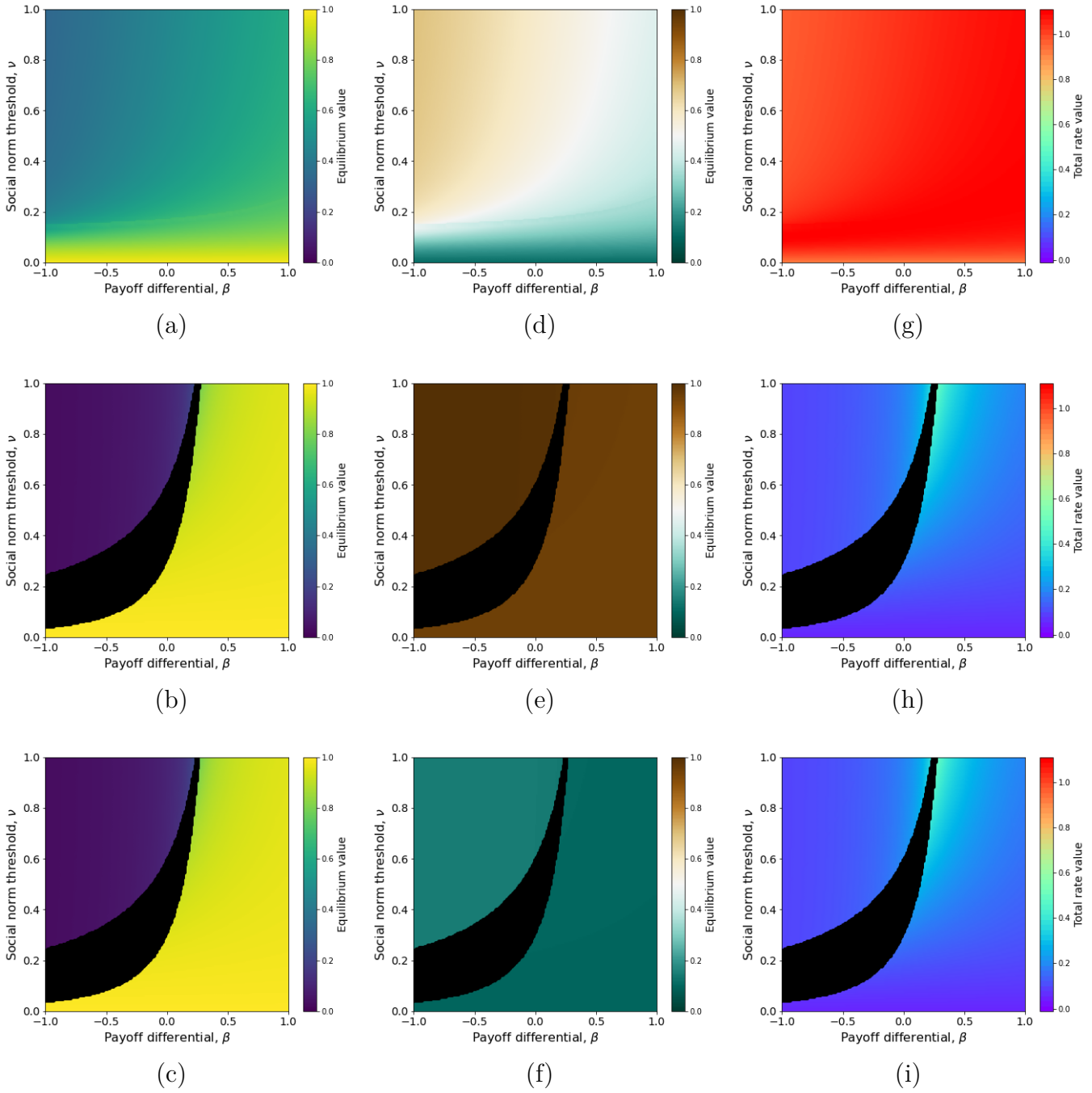


FIGURE 1.4 – Influence of the environmental impact differential,  $l_B - l_A$ , on the frequency of active behavior (a, b, c), perceived environmental state (d, e, f), and total switching rate (g, h, i) at equilibrium. For (a), (d) and (g), the parameters are  $l_B = 1$  and  $l_A = 0.1$ . For (b), (e) and (h),  $l_B = 1$  and  $l_A = 0.95$ . For (c), (f) and (i),  $l_B = 0.15$  and  $l_A = 0.1$ . Individual sensitivity to the environment and environmental reactivity are set to  $\tau = 1$  and  $\ell = 0.1$ . Other parameters are set to their default values (Table 1.1).



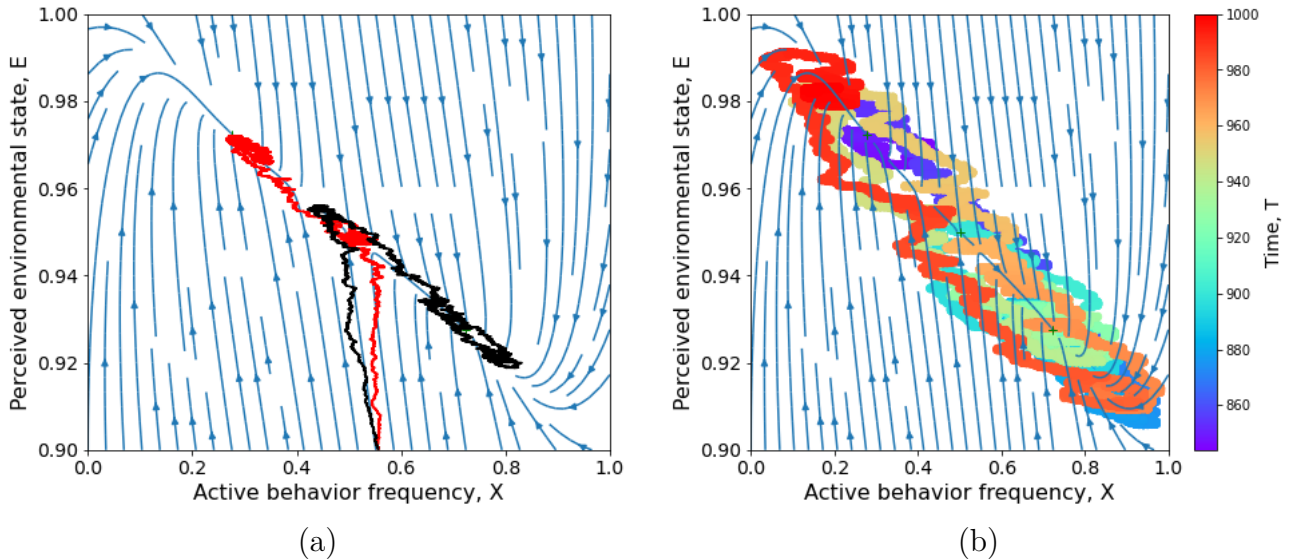


FIGURE 1.5 – **Effect of stochastic fluctuations on behavior-environment dynamics in the bistable case.** (a) Convergence of two trajectories issued from the same initial condition to alternate equilibria. (b) A single trajectory, with color coding for passing time, visits alternate equilibria, from the higher  $x^*$  (blue tones) to the lower  $x^*$  (green) to the higher  $x^*$  (orange) to the lower  $x^*$  (red). The stochastic simulation algorithm is described in the Methods. Environmental sensitivity  $\ell = 0.1$  (as in Fig. 1.2A), payoff difference  $\beta = -0.25$  and social norm threshold  $\nu = 0.3$ . Other parameters are set to their default values (Table 1.1).

## 1.2 Annexe de l'article

In this supplementary material, we expound the mathematical results stated in the main text. We define a piecewise deterministic Markov process (PDMP) coupling environmental and behavioral dynamics. Taking the limit when the population size tends to infinity leads to a deterministic two-dimensional dynamical system. We study the stability of this system and perform the bifurcation analysis. We also study the fluctuations of the PDMP around the deterministic limit. Finally, we provide details about the simulation algorithm of the stochastic population-environment process.

## 1.3 Properties of the stochastic system

In Section 1.1, we introduced a time continuous two-dimensional stochastic process describing the joint dynamics of the stochastic populational level and the macroscopic environment. The individuals are characterized by a parameter  $u \in \{A, B\}$  describing two possible behaviors : active (A) or baseline (B). The process  $((X_t^N, E_t^N), t \geq 0)$  is a PDMP scaled by the fixed population size  $N$ . The perceived environmental state at time  $t$  is quantified by  $E_t^N$  which takes values in the compact interval  $[l_A, l_B]$ ,  $l_A < l_B$ . The deterministic dynamics of the environmental

state are shaped by the function  $h$  defined in Eq. (1.1) as

$$h(x, e) = \ell e(l_A x + l_B(1 - x) - e) \quad (1.20)$$

$(x, e)$  being the joint population-environment state. The frequency dynamics of the active individual behavior are given by the pure jump process  $(X_t^N, t \geq 0)$  whose transitions are driven by two possible switches due either to the social or to the environmental influence. An individual with behavior  $u \in \{A, B\}$  can switch to  $v \neq u \in \{A, B\}$  at rate  $\kappa N \lambda_v^N(x)$  in response to the social influence and  $\tau_v(e)$  (defined in Eq. (1.3) respectively by  $\tau_A(e) = \tau(e - l_A)$  and  $\tau_B(e) = \tau(l_B - e)$ ) in response to the environmental influence.

Using the classical pathwise representation of the PDMP driven by a Poisson point measure, we easily obtain the semi-martingale decomposition of  $(X^N, E^N)$  for fixed  $N$ , as

$$\begin{cases} X_t^N = X_0^N + \int_0^t P^N(X_s^N, E_s^N) ds + M_t^N \\ E_t^N = E_0^N + \int_0^t h(X_s^N, E_s^N) ds, \end{cases} \quad (1.21)$$

where  $P^N$  is given by

$$P^N(x, e) = \kappa x(1 - x)N[\lambda_A^N(x) - \lambda_B^N(x)] + (1 - x)\tau_A(e) - x\tau_B(e) \quad (1.22)$$

and  $M_t^N$  is a square-integrable martingale whose quadratic variation is

$$\begin{aligned} \langle M^N \rangle_t &= \frac{1}{N} \int_0^t \kappa X_s^N (1 - X_s^N) N[\lambda_A^N(X_s^N) + \lambda_B^N(X_s^N)] ds \\ &\quad + \frac{1}{N} \int_0^t \tau_A(E_s^N)(1 - X_s^N) + \tau_B(E_s^N)X_s^N ds. \end{aligned} \quad (1.23)$$

## 1.4 Convergence to the solution of a system of ordinary differential equations

The next theorem describes the limiting behavior of the process  $(X_t^N, E_t^N)_{t \geq 0}$  when  $N$  goes to infinity.

We assume that there exist positive constants  $\gamma_A$ ,  $\gamma_B$ ,  $\delta_A$  and  $\delta_B$  such that for all  $x \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} N\lambda_A^N(x) &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \lambda_A(x) = \gamma_A + \delta_A x, \\ N\lambda_B^N(x) &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \lambda_B(x) = \gamma_B + \delta_B(1 - x). \end{aligned} \quad (1.24)$$

**Théorème 1.4.1.** *When  $N \rightarrow +\infty$ , under Assumption (1.24) and if  $(X_0^N, E_0^N) \rightarrow (x_0, e_0) \in [0, 1] \times [l_A, l_B]$ , then for all  $T > 0$ , the process  $((X_t^N, E_t^N), t \in [0, T])$  converges in probability in  $\mathbb{D}([0, T], [0, 1] \times [l_A, l_B])$  to the unique solution  $((x_t, e_t), t \in [0, T])$  of the following system of ordinary differential equations (ODEs)*

$$\begin{aligned}\frac{dx_t}{dt} &= \kappa x_t(1-x_t)[\gamma_A - \gamma_B + ((\delta_A + \delta_B)x_t - \delta_B)] + \tau(e_t - l_A - (l_B - l_A)x_t), \\ \frac{de_t}{dt} &= \ell e_t(l_A x_t + l_B(1-x_t) - e_t),\end{aligned}\tag{1.25}$$

with initial conditions  $(x_0, e_0)$ .

*Démonstration.* The proof is based on a tightness-uniqueness scheme, as in [4, section 3.1], see also [29].

The processes  $((X_t^N, E_t^N), t \in [0, T])$  evolve in a compact set so they obviously satisfy for any  $T > 0$ ,

$$\sup_N \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \|(X_t^N, E_t^N)\|^3 \right) < +\infty.\tag{1.26}$$

The tightness of their laws can be deduced from (1.21) and from this uniform moment estimate. The relative compactness of this family of laws in the set of probability measures  $\mathbb{D}([0, T], [0, 1] \times [l_A, l_B])$  follows, as well as the existence of a limiting value  $Q$ . To identify the latter, we define for  $z \in \mathbb{D}([0, T], [0, 1] \times [l_A, l_B])$  and for any  $t > 0$  the function

$$\Psi_t(z) = z_t - z_0 - \int_0^t H(z_s) ds,$$

where  $H = (P, h)$  and  $P$  is the limit of  $P^N$  under Assumption (1.24), given for all  $(x, e) \in [0, 1] \times [l_A, l_B]$  by

$$P(x, e) = \kappa x(1-x)[\gamma_A - \gamma_B + ((\delta_A + \delta_B)x - \delta_B)] + \tau(e - l_A - (l_B - l_A)x).$$

The assumptions yield  $|\Psi_t(z)| \leq C \sup_{t \leq T} (1 + (z_t))$ . Then by Eq. (1.26), the function  $\Psi_t$  is uniformly integrable and

$$\mathbb{E}_Q(|\Psi_t(z)|) = \lim_N \mathbb{E}(|\Psi_t(Z^N)|) = \lim_N \mathbb{E}(|\Psi_t^N(Z^N)|) = \lim_N \mathbb{E}(|M_t^N|),$$

where  $\psi^N$  is defined as  $\psi$  with  $P^N$  instead of  $P$ . Using  $\lim_N \mathbb{E}(|M_t^N|) \leq \lim_N \left( \mathbb{E}(|M_t^N|^2) \right)^{\frac{1}{2}}$  and Eq. (1.23), we obtain that  $\lim_N |M_t^N| = 0$  a.s. Then under  $Q$ , the limiting process is solution of  $z_t - z_0 - \int_0^t H(z_s) ds = 0$ , i.e. is solution of (1.25). The uniqueness follows from the Cauchy-Lipschitz Theorem. We finally conclude that the processes  $((X_t^N, E_t^N), t \in [0, T])$  converge uniformly in law (and then in probability) for any time  $t \in [0, T]$  to the unique solution of the dynamical system (1.25). □

## 1.5 Properties of the dynamical system (1.25)

We are interested in the long-term behavior of the dynamical system (1.25). Without loss of generality, we simplify the dynamical system by introducing a new parameterization.

### 1.5.1 Parameterization of the model

We choose the following parameterization. We introduce new perceived environment and time variables  $v$  and  $\tilde{\tau}$  by setting  $v = \frac{e - l_A}{l_B - l_A}$  and  $\tilde{\tau} = \tau(l_B - l_A)t$  and we rescale  $r = \frac{\ell l_B}{\tau(l_B - l_A)}$ . We also define  $a = \frac{\kappa(\gamma_A - \gamma_B - \delta_B)}{\tau(l_B - l_A)}$ ,  $b = \frac{\kappa(\delta_A + \delta_B)}{\tau(l_B - l_A)}$  and  $c = \frac{(l_B - l_A)}{l_B}$ . In the new parameterization, system (1.25) becomes

$$\begin{aligned}\frac{dx_{\tilde{\tau}}}{d\tilde{\tau}} &= -f(x_{\tilde{\tau}}) + v_{\tilde{\tau}}, \\ \frac{dv_{\tilde{\tau}}}{d\tilde{\tau}} &= r(cv_{\tilde{\tau}} + (1 - c))(1 - x_{\tilde{\tau}} - v_{\tilde{\tau}}),\end{aligned}\tag{1.27}$$

with  $\forall \tilde{\tau} \geq 0$ ,  $(x_{\tilde{\tau}}, v_{\tilde{\tau}}) \in [0, 1]^2$  and

$$f(x) = x((x - 1)(a + bx) + 1).\tag{1.28}$$

Since we assumed that  $\kappa$ ,  $\tau$ ,  $\ell$ ,  $\gamma_A$ ,  $\gamma_B$ ,  $\delta_A$ ,  $\delta_B$  and  $l_B > l_A > 0$  are positive, it follows that  $c \in ]0, 1]$  and  $b$  and  $r$  are positive.

*Démonstration.* Using the parametrisation, we have :

$$\frac{dv_{\tilde{\tau}}}{de_{\tilde{\tau}}} = \frac{1}{l_B - l_A} \text{ and } \frac{dt}{d\tilde{\tau}} = \frac{1}{\tau(l_B - l_A)}.$$

Thus, we have for the first equation

$$\begin{aligned}\frac{dx_{\tilde{\tau}}}{d\tilde{\tau}} &= \frac{dx_{\tilde{\tau}}}{dt} \frac{dt}{d\tilde{\tau}} \\ &= \frac{\kappa x_{\tilde{\tau}}(1 - x_{\tilde{\tau}})[\gamma_A - \gamma_B + ((\delta_A + \delta_B)x_{\tilde{\tau}} - \delta_B)] + \tau(e_{\tilde{\tau}} - l_A - (l_B - l_A)x_{\tilde{\tau}})}{\tau(l_B - l_A)} \\ &= x_{\tilde{\tau}}(1 - x_{\tilde{\tau}}) \left[ \frac{\kappa(\gamma_A - \gamma_B - \delta_B)}{\tau(l_B - l_A)} + \frac{\kappa(\delta_A + \delta_B)}{\tau(l_B - l_A)} x_{\tilde{\tau}} \right] + \frac{e_{\tilde{\tau}} - l_A}{l_B - l_A} - x_{\tilde{\tau}} \\ &= -x_{\tilde{\tau}}((x_{\tilde{\tau}} - 1)(a + bx_{\tilde{\tau}}) + 1) + v_{\tilde{\tau}}.\end{aligned}$$

For the second equation, we have :

$$\begin{aligned}
\frac{dv_{\tilde{\tau}}}{d\tilde{\tau}} &= \frac{dv_{\tilde{\tau}}}{de_{\tilde{\tau}}} \frac{de_{\tilde{\tau}}}{dt} \frac{dt}{d\tilde{\tau}} \\
&= \frac{1}{l_B - l_A} \ell e_{\tilde{\tau}} (l_A x_{\tilde{\tau}} + l_B (1 - x_{\tilde{\tau}}) - e_{\tilde{\tau}}) \frac{1}{\tau (l_B - l_A)} \\
&= \frac{\ell}{\tau} \left( \frac{e_{\tilde{\tau}} - l_A + l_A}{l_B - l_A} \right) (l_A x_{\tilde{\tau}} + l_B (1 - x_{\tilde{\tau}}) - e_{\tilde{\tau}} + l_A - l_A) \frac{1}{l_B - l_A} \\
&= \frac{\ell}{\tau} \left( v_{\tilde{\tau}} + \frac{l_A}{l_B - l_A} \right) (l_A (x_{\tilde{\tau}} - 1) + l_B (1 - x_{\tilde{\tau}}) - e_{\tilde{\tau}} + l_A) \frac{1}{l_B - l_A} \\
&= \frac{\ell l_B}{\tau (l_B - l_A)} \left( v_{\tilde{\tau}} + \frac{l_B}{l_B - l_A} - 1 \right) (1 - x_{\tilde{\tau}} - v_{\tilde{\tau}}) \\
&= r (c v_{\tilde{\tau}} + 1 - c) (1 - x_{\tilde{\tau}} - v_{\tilde{\tau}}).
\end{aligned}$$

□

Let us now study the fixed points and the possible bifurcations of System (1.27).

### 1.5.2 Stability analysis

We recall that an equilibrium  $(x^*, v^*)$  of System (1.27) is a point that satisfies  $\frac{dx_{\tilde{\tau}}}{d\tilde{\tau}}(x^*, v^*) = \frac{dv_{\tilde{\tau}}}{d\tilde{\tau}}(x^*, v^*) = 0$ . Thus, the equilibria lie at the intersection of the cubic  $v = f(x)$  and the line  $v = 1 - x$ . To study this intersection, we introduce the auxiliary function  $g$  given by

$$g(x) = f(x) + x - 1, \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (1.29)$$

**Proposition 1.5.1.** *System (1.27) has 1, 2 or 3 stationary points.*

*Démonstration.* The equilibria of System (1.27) belong to the intersection between the cubic  $v = f(x)$  and the line  $v = 1 - x$  in the unit square. We are then looking at the zeros of the function  $g$  on  $[0, 1]$ . The function  $g$  is a polynomial of degree 3 and admits at most 3 roots. The system has at least one equilibrium on  $[0, 1]$  because  $g(0) = -1$  and  $g(1) = 1$ . □

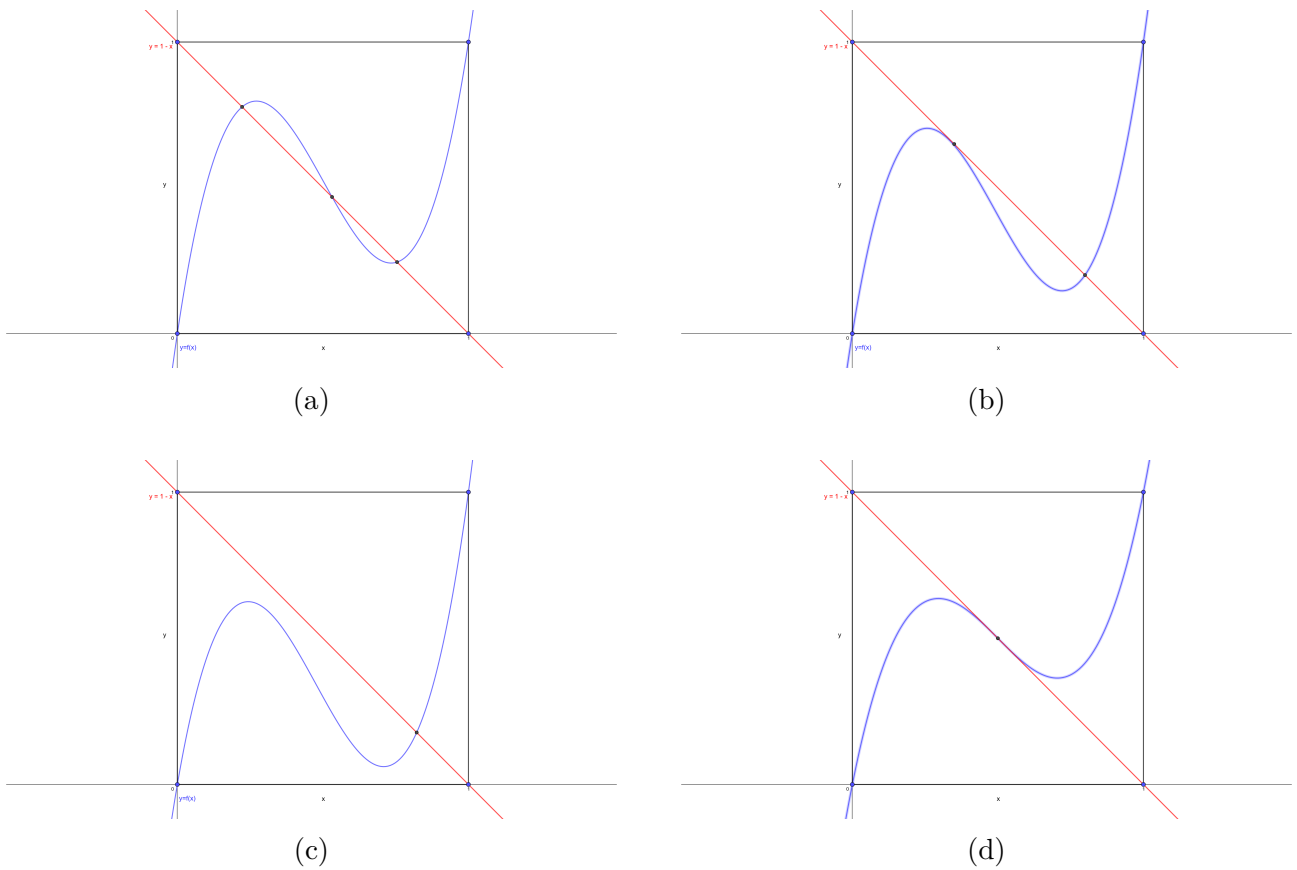


FIGURE 1.6 – Number of equilibria of System (1.27) according to the intersection between the line  $v = 1 - x$  and the cubic  $v = f(x)$  in the unit square.

Note that when the system has three equilibria on  $[0,1]$  (as in Figure 1.6a), the latter are simple roots of the function  $g$ . When the system has two equilibria on  $[0,1]$  (as in Figure 1.6b), one of them is of multiplicity two. Finally, if the system has only one equilibrium, it can be of single or triple multiplicity (as seen in Figures 1.6c and 1.6d, respectively).

As can be seen in Figures 1.9a and 1.9b, the local stability of an equilibrium shapes the limiting behavior of the system around that point. The nature of the equilibrium depends on the signs of the two eigenvalues of the Jacobian matrix evaluated at that point. These signs are captured by the signs of the Jacobian matrix's trace and determinant. The trace is the sum of the eigenvalues, while the determinant is their product. Figure 1.7 summarises the different types of possible equilibria's local stability as a function of the signs of the trace and of the determinant.

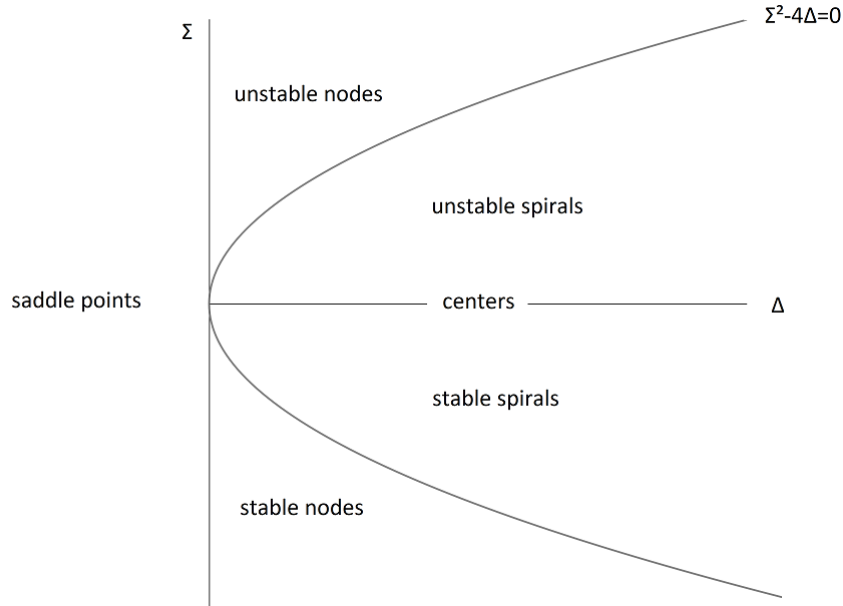


FIGURE 1.7 – Local stability of an equilibrium according to the sign of the trace  $\Sigma$  and the determinant  $\Delta$  of the Jacobian matrix.

The Jacobian matrix of System (1.27) is given by

$$J(x, v) = \begin{pmatrix} -f'(x) & 1 \\ -r(cv + 1 - c) & -r[(cv - c + 1) + c(v + x - 1)] \end{pmatrix},$$

where  $f'(x) = 3bx^2 + 2(a - b)x + (1 - a)$ . For  $(x^*, v^*)$  a stationary point, we have

$$J(x^*, v^*) = \begin{pmatrix} -f'(x^*) & 1 \\ crx^* - r & crx^* - r \end{pmatrix}.$$

If both eigenvalues of  $J(x^*, v^*)$  are positive then the equilibrium point  $(x^*, v^*)$  is repulsive. If they both are negative then  $(x^*, v^*)$  is attractive and if they have opposite signs; then  $(x^*, v^*)$  is a saddle point (since  $\Delta < 0$ , as seen in Figure 1.7). Let us thus study the signs of the eigenvalues using trace and determinant. We have

$$\begin{aligned} \text{tr}(J(x^*, v^*)) &= -r(1 - cx^*) - f'(x^*), \\ \det(J(x^*, v^*)) &= r(1 - cx^*)(f'(x^*) + 1). \end{aligned} \tag{1.30}$$

The signs of the trace and determinant depend on the position of  $f'(x)$  relatively to  $r(cx^* - 1)$  and  $-1$  as indicated in the next proposition. The proof is left to the reader.

**Proposition 1.5.2.** *Let  $(x^*, v^*)$  be an equilibrium point of System (1.27).*

- *If  $f'(x^*) < -r(1 - cx^*)$  and  $f'(x^*) > -1$ , then  $(x^*, v^*)$  is locally stable.*
- *If  $f'(x^*) > -r(1 - cx^*)$  and  $f'(x^*) > -1$ , then  $(x^*, v^*)$  is locally unstable.*
- *If  $f'(x^*) < -1$ , then  $(x^*, v^*)$  is a saddle point.*

From Proposition 1.5.2 in the case of three equilibria, we can infer the local stability of each equilibrium.

**Proposition 1.5.3.** *If System (1.27) has three distinct stationary points  $x_1^* < x_2^* < x_3^*$ , then  $x_2^*$  is a saddle point.*

*Démonstration.* The assumption allows us to express (1.29) as

$$f(x) + x - 1 = (x - x_1^*)(x - x_2^*)(x - x_3^*).$$

Thus,  $\det(J(x_2^*, v_2^*)) = r(1 - cx_2^*)(f'(x_2^*) + 1) = r(1 - cx_2^*)(x_2^* - x_1^*)(x_2^* - x_3^*) < 0$ , which implies that the two eigenvalues have opposite signs and  $x_2^*$  is a saddle point.  $\square$

The stability information obtained from the eigenvalues gives us the local behavior around the stationary points. Nevertheless, when the equilibrium is locally stable, this does not exclude the existence of a stable limit cycle in the domain  $[0, 1]^2$  (see Figure 1.9c). To exclude the existence of such a cycle, we can either use the Poincaré-Bendixson Theorem [38, Theorem. 1.8.1 p.44] or find a Dulac function [38, Theorem. 1.8.2 p.44]. Unfortunately finding a Dulac function seems out of reach because of the great asymmetry of the system. We have obtained a partial answer in the following specific case.

**Proposition 1.5.4.** *If  $-f'(x) - r((cv - c + 1) + c(v + x - 1)) > 0$  for all  $(x, v) \in [0, 1]^2$ , then there is no stable limit cycle in the domain  $[0, 1]^2$ .*

*Démonstration.* The assumption of Proposition 1.5.4 implies that on  $[0, 1]^2$ , the function  $|\text{tr}(J(x, v))|$  is different from 0 and keeps the same sign. Using the Bendixson-Dulac Theorem, we can conclude that there is no stable limit cycle in the domain.  $\square$

Note that one can find parameters  $a, b, c$  or  $r$  that do not satisfy the assumption of Proposition 1.5.4. In Figure 1c, we exhibit a set of parameters leading to a stable fixed point and a stable limit cycle. These behaviors can be generated through bifurcations, see below.

### 1.5.3 Bifurcation analysis

Based on [38] and [56], we study the nature of the bifurcations in System (1.27). To this aim, we consider System (1.27) as function of one parameter  $\mu$  which can be either  $a, b, c$  or  $r$ . Thus we rewrite the system as

$$\dot{Z} = G(Z, \mu), \text{ where } Z = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \text{ and } G : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (1.31)$$

Note that a bifurcation point  $(Z^*, \mu^*)$  of System (1.31) is a set of points for which the flow is structurally unstable. We study two types of bifurcations : saddle-node and Hopf bifurcations. A saddle-node bifurcation is the emergence (or disappearance) of two equilibria, one stable and one unstable when the parameter  $\mu$  varies (as in Figure 1.8a), whereas a Hopf bifurcation changes the local flow around the stationary point (as in Figure 1.8b).





(a) Saddle-node bifurcation

(b) Hopf bifurcation

FIGURE 1.8 – Plain lines are stable stationary points, dashed lines are unstable ones and  $(Z^*, \mu^*)$  is a bifurcation point.

From (1.29) and (1.28), it is obvious that only  $a$  and  $b$  can affect the value and the number of stationary points in System (1.25). Therefore only  $\mu = a$  or  $\mu = b$  can generate a saddle-node bifurcation. The next proposition gives a simple condition ensuring that these bifurcations are generic.

**Proposition 1.5.5.** *Assume that  $(a, b) \neq (-4, 8)$ . Then, the saddle-node bifurcations of System (1.31) are generically non-degenerate for  $\mu = a$  or  $b$ .*

*Démonstration.* To characterize the non-degenerate saddle-node bifurcations, we will apply Theorem 3.4.1 from [38, p.148]. When  $\mu = \mu^*$ , one must check that there exists a stationary point for which

1.  $\frac{\partial G}{\partial Z}(Z^*, \mu^*)$  has a simple zero eigenvalue associated to the left eigenvector  $w$  and its other eigenvalue has a real part ;
2.  $w \cdot \frac{\partial G}{\partial \mu}(Z^*, \mu^*) \neq 0$  ;
3.  $w \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial Z^2}(Z^*, \mu^*)(v, v) \neq 0$ .

The above conditions are satisfied if the stationary point is not a triple multiplicity root of  $g$ . We find by identification that this is only the case when  $(a, b) = (-4, 8)$ .

□

From (1.30), we note that  $c$  and  $r$  can affect the value of the Jacobian matrix's eigenvalues and thus generate a Hopf bifurcation. Therefore we study the existence of such bifurcations for  $\mu = r$  or  $\mu = c$  and their non-degeneracy using Theorem 3.4.2 [38, p.151].

**Proposition 1.5.6.** *Let  $(Z^*, \mu^*)$  be the stationary point of System (1.31) with  $Z^* = (x^*, v^*)$ . Assume that  $f'(x^*) < -1$  and that there exists  $r$ , respectively  $c$ , such that  $r(cx^* - 1) = f(x^*)$ . Then system (1.31) admits a Hopf bifurcation for parameter  $\mu = r$  respectively  $\mu = c$ , and the bifurcation is generically non-degenerate.*

*Démonstration.* Under the assumption of Proposition 1.5.6,  $\det(\frac{\partial G}{\partial Z}(Z^*, \mu^*))$  is non positive and one can find  $\mu = r^*$  or  $c^*$  such that  $\text{tr}(\frac{\partial G}{\partial Z}(Z^*, \mu^*)) = 0$ . So, the Jacobian matrix's eigenvalues are pure imaginary and System (1.31) has a Hopf bifurcation around  $(Z^*, \mu^*)$ .

We have  $\frac{\partial}{\partial r} \text{tr}(\frac{\partial G}{\partial Z}(Z^*, r^*)) = cx^* - 1 \neq 0$  and  $\frac{\partial}{\partial c} \text{tr}(\frac{\partial G}{\partial Z}(Z^*, c^*)) = rx^* \neq 0$ . Therefore we can apply Theorem 3.4.2 [38, p.151] for  $r$  and  $c$ .

□

#### 1.5.4 Long-term behaviour of the dynamical system (1.25)

Figure 1.9 shows the diversities of stationary states that the dynamic system (1.25) can admit. Figures 1.9a, 1.9b and 1.9c show the possible behaviors when Eq. (1.29) vanishes only once, i.e. when the dynamical system admits a unique equilibrium point. Depending on the nature of the equilibrium point, the system can behave quite differently. If this equilibrium point is unstable, then the system admits a stable limit cycle. Figures 1.9a and 1.9c show that even if the equilibrium point is stable, this stability is local and we can have the presence of a stable limit cycle .

Figure 1.9c shows different trajectories and where they converge depending on initial conditions. The black trajectory converges towards the stable equilibrium point while the red and blue trajectories reach the stable limit cycle. The dashed line curve describes the unstable cycle that separates the equilibrium point from the stable cycle.

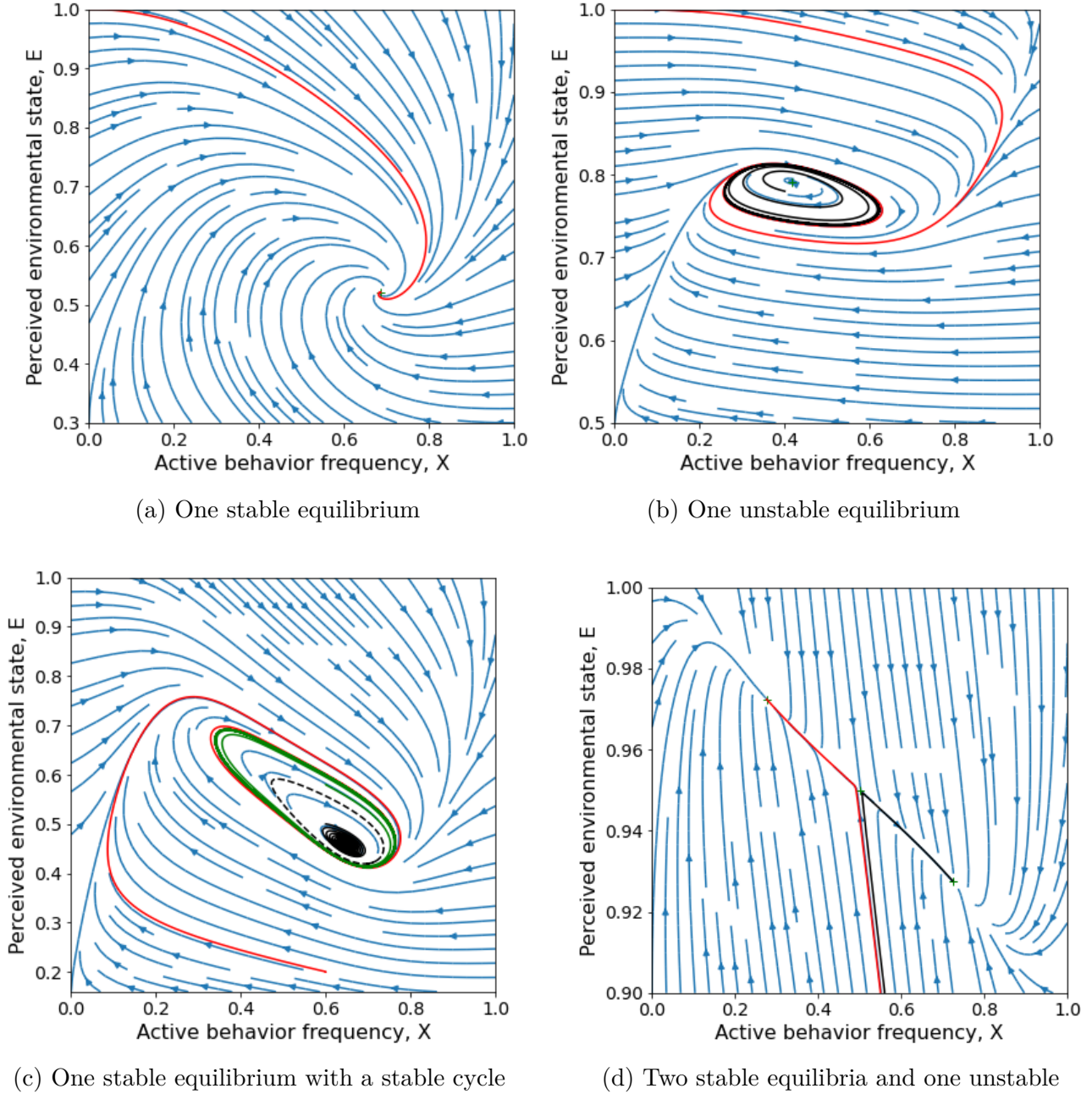


FIGURE 1.9 – Phase portrait of the different behaviors admitted by the dynamic system (1.25)

Figure 1.9d shows a situation with two stable and one unstable fixed points, where the steady state depends on the basin of attraction in which the system initially starts.

Overall, three main limit behaviours can be observed : (i) the system admits a stable equilibrium, (ii) the equilibrium is unstable and admits a stable cycle ; (iii) two stable equilibria, hence the system is bistable.

### 1.5.5 Convergence speed of the dynamical system (1.25)

Figure 1.10 shows the convergence speed of the dynamical system in cases where the active behavior frequency rises from near zero to near one. The rate of encounters among individuals is set to one per unit time. Different trajectories are shown for different values of  $\tau$ ,  $\ell$  and

$\beta$ . For example, assuming that the unit time is one week, the deterministic system converges toward its equilibrium in less than a year for all different scaling ratios between  $\tau$  and  $\ell$  that are considered here. Taking one month as unit time, convergence is realized in less than 4 years.

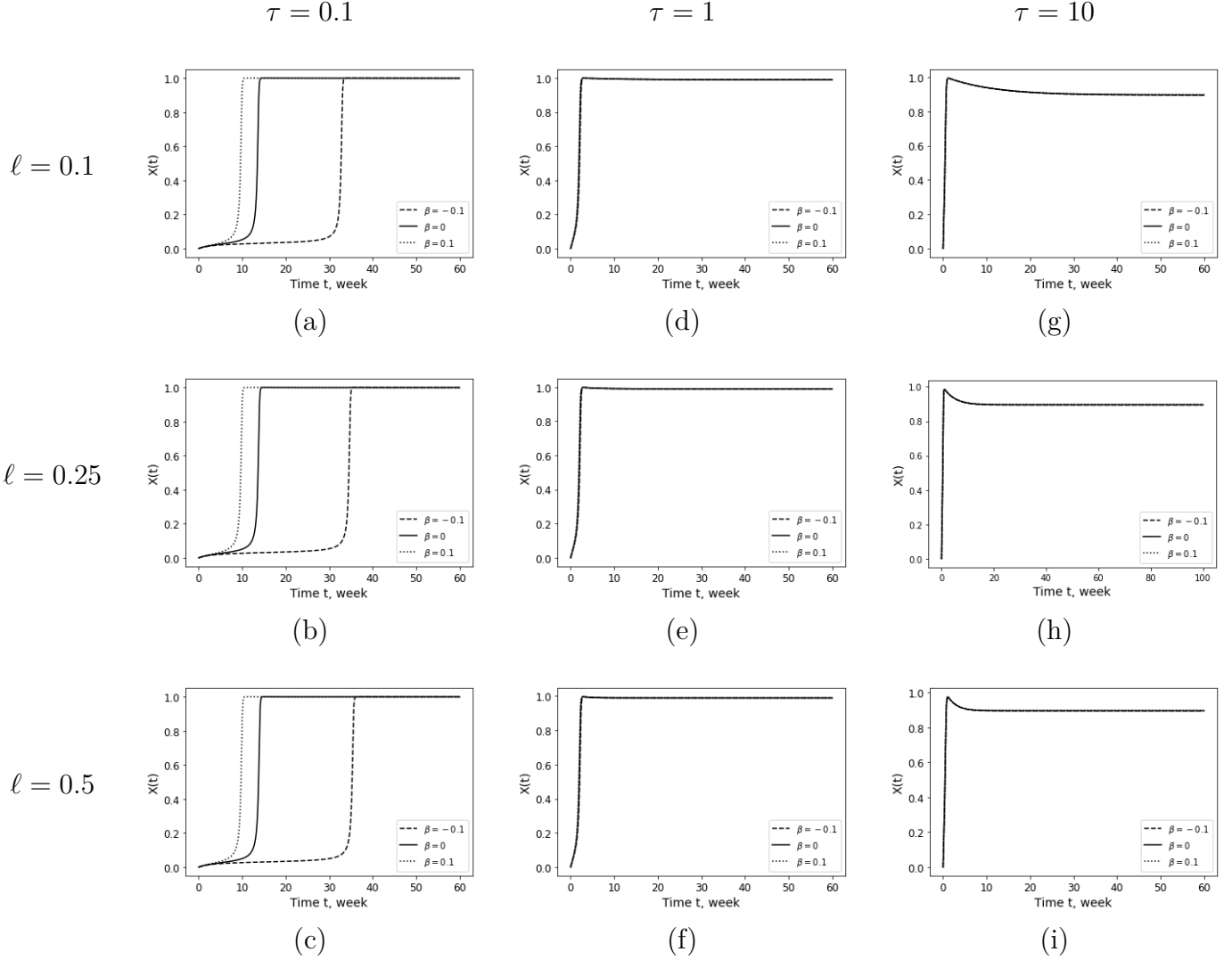


FIGURE 1.10 – Deterministic simulations of the active behavior frequency in the presence of environmental feedback (Eq. (5)) for low to high individual sentivity to the environment ( $\tau$ ), environmental reactivity ( $\ell$ ), and payoff differential ( $\beta$ ). The environmental impact differential is fixed ( $l_B = 1, l_A = 0.7$ ). Other parameters ( $\kappa, \delta_B$ ) are set to their default values (Table 1.1).

## 1.6 Fluctuations of the stochastic model around its deterministic limit

We study the fluctuations of the stochastic process  $(X_t^N, E_t^N)$  around the deterministic function  $(x_t, e_t)$  which are defined by the process  $\eta_t^N = \sqrt{N} (X_t^N - x_t, E_t^N - e_t)$ .

We rewrite the process  $(\eta_t^N)_{t \leq 0}$  as

$$\eta_t^N = \eta_0^N + \int_0^t J^N(X_s^N, E_s^N, x_s, e_s) \eta_s^N + R^N(X_s^N, E_s^N, x_s, e_s) ds + \tilde{M}_t^N, \quad (1.32)$$

where  $J^N(X^N, E^N, x, e)$  is the following matrix

$$J^N(X^N, E^N, x, e) = \begin{pmatrix} J_{11}^N(X^N, E^N, x, e) & J_{12}^N(X^N, E^N, x, e) \\ J_{21}^N(X^N, E^N, x, e) & J_{22}^N(X^N, E^N, x, e) \end{pmatrix}$$

with

$$\begin{aligned} J_{11}^N(X^N, E^N, x, e) &= \kappa((1 - (X^N + x))N\lambda_{AB}^N(X^N) + (x - x^2)(\delta_A + \delta_B)) + \tau(l_A - l_B), \\ J_{12}^N(X^N, E^N, x, e) &= \tau, \\ J_{21}^N(X^N, E^N, x, e) &= -\ell e(l_B - l_A), \\ J_{22}^N(X^N, E^N, x, e) &= \ell(l_A X^N + l_B(1 - X^N) - (E^N + e)) \end{aligned}$$

and  $\lambda_{AB}^N(x) = \lambda_A^N(x) - \lambda_B^N(x)$ ,  $\lambda_{AB}(x) = \lambda_A(x) - \lambda_B(x)$ .

Moreover,  $R^N(X^N, E^N, x, e) = \begin{pmatrix} \sqrt{N}(x - x^2)(N\lambda_{AB}^N(X^N) - \lambda_{AB}(X^N)) \\ 0 \end{pmatrix}$  and  $\tilde{M}^N$  is a square-integrable martingale with quadratic variation given by

$$\langle \tilde{M}^N \rangle_t = \int_0^t \begin{pmatrix} \kappa X_s^N(1 - X_s^N)N[\lambda_A^N(X_s^N) + \lambda_B^N(X_s^N)] + \tau(E_s^N - l_A)(1 - X_s^N) + (l_B - E_s^N)X_s^N \\ 0 \end{pmatrix} ds.$$

Note that the quadratic variation of  $\tilde{M}^N$  is of order 1 and will not vanish when  $N$  tends to infinity.

We introduce the following assumption : for all  $x \in [0, 1]$ ,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sqrt{N}(N\lambda_{AB}^N(x) - \lambda_{AB}(x)) = 0. \quad (1.33)$$

The next theorem describes the limiting behavior of the process  $\eta^N$  when  $N$  tends to infinity.

**Théorème 1.6.1.** *When  $N \rightarrow \infty$ , under Assumption (1.33) and if  $(\eta_0^N)_{N \in \mathbb{N}^*}$  converges in law toward  $\eta_0$ , then for all  $T > 0$ , the sequence  $((\eta_t^N)_{N \in \mathbb{N}}, t \in [0, T])$  converges in law in  $\mathbb{D}([0, T], [0, 1] \times [l_A, l_B])$  to the unique solution of :*

$$\eta_t = \eta_0 + \int_0^t J(x_s, e_s)\eta_s ds + \int_0^t D_s dW_s, \quad (1.34)$$

where  $(W_t, t \geq 0)$  is a Brownian motion,  $J(x, e)$  the matrix given by

$$J(x, e) = \begin{pmatrix} J_{11}(x, e) & J_{12}(x, e) \\ J_{21}(x, e) & J_{22}(x, e) \end{pmatrix}$$

with

$$J_{11}(x, e) = \kappa((1 - 2x)(\gamma_A - \gamma_B - \delta_B + (\delta_A + \delta_B)x) + (x - x^2)(\delta_A + \delta_B)) + \tau(l_A - l_B),$$

$$J_{12}(x, e) = \tau,$$

$$J_{21}(x, e) = -\ell(l_B - l_A)e,$$

$$J_{22}(x, e) = \ell(l_A x + l_B(1 - x) - 2e)$$

$$\text{and } D_s = \begin{pmatrix} \sqrt{\kappa x_s(1 - x_s)(\gamma_A + \gamma_B + \delta_A x_s + \delta_B(1 - x_s)) + \tau((1 - x_s)(e_s - l_A) + x_s(l_B - e_s))} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

The proof is similar to the one developed in the supplementary materials of [10]-Section 4.

## 1.7 Simulations and algorithm

We use the following algorithm to simulate the PDMP and overcome the problem with the coupled dynamics of the jumping and continuous parts of the process. This algorithm is similar to an acceptance-rejection algorithm. We take the highest jump rate to simulate the time at which the process jumps and we update the current system's state depending on the outcomes. When the jumping time occurs, three events are possible : either an individual switch from behavior A to behavior B, or vice versa, or no switch happens in the population.

---

**Algorithm 1** Simulation of the stochastic process  $(X_t^N, E_t^N)$  in  $[0, T_{max}]$ 

---

**Initialize the system's state :**

Time :  $t \leftarrow t_0$

System's initial state :

Mitigator frequency :  $x \leftarrow x_0$

Perceived environment :  $e \leftarrow e_0$

Jump rate :  $\xi > \sup_{x,e} (N(N\kappa(\lambda_A^N(x) + \lambda_B^N(x)) + \tau_A(e) + \tau_B(e)))$

**while**  $t \leq T_{max}$  **do**

Draw two pseudorandom numbers,  $r_1$  and  $r_2$  in  $[0, 1]$

Time before next jump :  $t_1 \leftarrow -\frac{\log(r_1)}{\xi}$

Gain probability of an individual in active behavior :  $p_+ \leftarrow \frac{N(1-x)(N\kappa x \lambda_A^N(x) + \tau_A(e))}{\xi}$

Loss probability of an individual in active behavior :  $p_- \leftarrow \frac{Nx(N\kappa(1-x)\lambda_B^N(x) + \tau_B(e))}{\xi}$

Save and update :

$t \leftarrow t + t_1$

$e \leftarrow e + t_1 \times h(x, e)$

*Three possible outcomes in the population : an individual with baseline behavior becomes active, an individual with active behavior switches to baseline, or no jump*

**if**  $r_2 \leq p_+$  **then**

*An individual in baseline behavior becomes active :  $x \leftarrow x + \frac{1}{N}$*

**else if**  $p_+ < r_2 \leq p_+ + p_-$  **then**

*An individual in active behavior switches to baseline :  $x \leftarrow x - \frac{1}{N}$*

**else**  $\{r_2 > p_+ + p_-\}$

*No jump from one behavior to the other :  $x \leftarrow x$*

**end if**

**end while**

---

# Chapitre 2

## Du modèle (1.21) vers un système stochastique simplifié

### Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'introduire un système simplifié du système (1.21). Pour cela, nous faisons une approximation diffusion du système (1.21). Nous reparamétrisons ensuite le système (2.5) pour obtenir le système simplifié (2.7).

### 2.1 Le modèle biologique

Rappelons le modèle introduit dans la première partie de la thèse, ainsi que les paramètres biologiques. Le générateur infinitésimal est défini pour  $(x, e) \in \llbracket 0, \frac{1}{N}, \dots, 1 \rrbracket \times \mathbb{R}_*^+$  et une fonction test  $f \in \mathcal{C}_b^1(\llbracket 0, \frac{1}{N}, \dots, 1 \rrbracket \times \mathbb{R}_*^+, \mathbb{R})$  par

$$\begin{aligned} L^N f(x, e) = & N \left( \kappa x (1-x) N \lambda_A^N(x) + \tau (1-x) (e - l_A) \right) \left[ f \left( x + \frac{1}{N}, e \right) - f(x, e) \right] \\ & + N \left( \kappa x (1-x) N \lambda_B^N(x) + \tau x (l_B - e) \right) \left[ f \left( x - \frac{1}{N}, e \right) - f(x, e) \right] \\ & + h(x, e) \frac{\partial f}{\partial e}(x, e), \end{aligned} \quad (2.1)$$

où  $h(x, e) = \ell e (l_A x + l_B (1-x) - e)$  et les fonctions de transfert  $\lambda_A^N$  et  $\lambda_B^N$  vérifient l'hypothèse suivante.

#### Hypothèse 2.1.1.

$$\begin{aligned} N \lambda_A^N(x) &= \gamma_A + \delta_A x, \\ N \lambda_B^N(x) &= \gamma_B + \delta_B (1-x), \end{aligned} \quad (2.2)$$

où  $\gamma_A, \gamma_B, \delta_A$  et  $\delta_B$  sont des constantes positives.

Les autres paramètres du système sont positifs et leur sens est rappelé dans le tableau suivant :



Notation	Description du paramètre	Ensemble de définition
$\kappa$	Taux de rencontre	$\mathbb{R}^+$
$\tau$	Sensibilité individuelle à l'environnement	$\mathbb{R}^+$
$\ell$	Réactivité de l'environnement	$\mathbb{R}^+$
$\gamma_A$ (resp. $\gamma_B$ )	Gain du comportement $A$ (resp. $B$ )	$\mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}^+$ )
$\delta_A$ (resp. $\delta_B$ )	Pression sociale du comportement $A$ (resp. $B$ )	$\mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}^+$ )
$l_A$ (resp. $l_B$ )	Impact individuel sur l'environnement du comportement $A$ (resp. $B$ )	$[0, l_B]$ (resp. $\mathbb{R}_*^+$ )

TABLE 2.1 – Interprétation et ensemble de définition des paramètres.

Nous procédons à une approximation-diffusion du générateur (2.1) comme faite dans [29, Théorème 3.1 du Chapitre 11 page 460] qui consiste à prendre en compte les deux premiers termes du développement limité quand  $N \rightarrow +\infty$  dans (2.1). Nous obtenons ainsi le générateur infinitésimal suivant pour  $(x, e) \in [0, 1] \times [l_A, l_B]$  et toute fonction  $f \in \mathcal{C}_b^2([0, 1] \times [l_A, l_B], \mathbb{R})$  :

$$\mathcal{L}^N f(x, e) = P(x, e) \frac{\partial f}{\partial x}(x, e) + h(x, e) \frac{\partial f}{\partial e}(x, e) + \frac{1}{2N} \sigma^2(x, e) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, e), \quad (2.3)$$

où la fonction  $P$  est définie par

$$P(x, e) = \kappa x(1-x)[\gamma_A - \gamma_B + ((\delta_A + \delta_B)x - \delta_B)] + \tau((1-x)(e - l_A) - x(l_B - e))$$

et la fonction  $\sigma^2$  est définie par

$$\begin{aligned} \sigma^2(x, e) &= \kappa x(1-x)[\gamma_A + \gamma_B + \delta_B + ((\delta_A - \delta_B)x)] \\ &\quad + \tau(e - l_A + (l_B - l_A - 2e)x). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Considérons le système stochastique suivant, de condition initiale  $(x_0, e_0) \in [0, 1] \times [l_A, l_B]$ , défini par  $t > 0$

$$\begin{cases} dX_t^N = P(X_t^N, E_t^N)dt + \frac{\sigma(X_t^N, E_t^N)}{\sqrt{2N}}dB_t \\ dE_t^N = h(X_t^N, E_t^N)dt, \end{cases} \quad (2.5)$$

où  $B$  est un mouvement brownien.

Remarque : Nous noterons systématiquement par  $B$  les mouvements browniens dirigeant tous les systèmes stochastiques rencontrés dans cette partie.

**Proposition 2.1.2.** *Soit  $T > 0$ . Le système (2.5) admet une unique solution forte  $((X_t^N, E_t^N), t \in [0, T])$  dans  $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^2)$ .*

*Démonstration.* Soit la suite de boules  $\mathfrak{B}_N = \{(x, e) \in \mathbb{R}^2, |x|^2 + |e|^2 \leq N\}$ .

D'après le théorème 3.1 page 179 de [51], si les coefficients de dérive et de diffusion de (2.5)

vérifient pour tout  $N > 0$  qu'il existe  $K_N$  tel que pour tout  $(x, e), (\tilde{x}, \tilde{e}) \in \mathfrak{B}_N$

$$\|\sigma(x, e) - \sigma(\tilde{x}, \tilde{e})\|^2 + \|P(x, e) - P(\tilde{x}, \tilde{e})\|^2 + \|h(x, e) - h(\tilde{x}, \tilde{e})\|^2 \leq K_N \|(x, e) - (\tilde{x}, \tilde{e})\|^2 \quad (2.6)$$

alors (2.5) admet une unique solution forte.

Nous majorons les différents termes de la somme dans l'inégalité (2.6)

$$\|\sigma(x, e) - \sigma(\tilde{x}, \tilde{e})\|^2 = \sigma_1^2 \|(x, e) - (\tilde{x}, \tilde{e})\|^2,$$

$$\begin{aligned} \|P(x, e) - P(\tilde{x}, \tilde{e})\|^2 &\leq \|P(x, e) - P(\tilde{x}, e)\|^2 + \|P(\tilde{x}, e) - P(\tilde{x}, \tilde{e})\|^2 \\ &\leq \|P(x, e) - P(\tilde{x}, e)\|^2 + \tau^2 |e - \tilde{e}|^2 \\ &\leq \kappa^2 (N^4 (\delta_A + \delta_B)^2 + (\gamma_A + (\delta_A + \delta_B)N)^2 (1 + 2N)^2) |x - \tilde{x}|^2 \\ &\quad + \tau^2 |e - \tilde{e}|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|h(x, e) - h(\tilde{x}, \tilde{e})\|^2 &\leq \|h(x, e) - h(\tilde{x}, e)\|^2 + \|h(\tilde{x}, e) - h(\tilde{x}, \tilde{e})\|^2 \\ &\leq \ell^2 N^2 (l_B - l_A)^2 |x - \tilde{x}|^2 + \ell^2 N^2 (l_B + l_A + 2)^2 |e - \tilde{e}|^2 \\ &\leq \ell^2 N^2 (l_B + l_A + 2)^2 \|(x, e) - (\tilde{x}, \tilde{e})\|^2. \end{aligned}$$

En posant  $K_N = \sigma_1^2 + \ell^2 N^2 (l_B + l_A + 2)^2 + \max(\kappa^2 (N^4 (\delta_A + \delta_B)^2 + (\gamma_A + (\delta_A + \delta_B)N)^2 (1 + 2N)^2), \tau^2)$ , nous pouvons appliquer le théorème 3.1 page 179 de [51]. Le système stochastique (2.5) admet une unique solution forte.  $\square$

## 2.2 Reparamétrisation du système (1.21)

Dans cette section, nous reparamétrisons le système (2.5) afin d'obtenir un système plus simple. Nous nous plaçons sous les hypothèses suivantes.

**Hypothèse 2.2.1.** 1.  $2\gamma_A + \delta_A = 2\gamma_B + \delta_B$ ,

$$2. \frac{8(l_B - l_A)}{\delta_B + \delta_A} < \frac{\kappa}{\tau} < \frac{13(l_B - l_A)}{\delta_B + \delta_A},$$

$$3. \left( \frac{2\tau l_B^2 - (l_B + l_A)\ell}{2\tau l_B^2} \right)^2 > \frac{\kappa(\delta_A + \delta_B)}{2\tau(l_B - l_A)}.$$

**Proposition 2.2.2.** *Sous les hypothèses 2.2.1, il existe  $N_0 > 0$  tel que pour tout  $N \geq N_0$ , le système (2.5) peut s'écrire après reparamétrisations et changement de temps sous la forme*

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = \lambda_1 X^\varepsilon (1 - (X^\varepsilon)^2) dt + \varepsilon \sigma_0 \cos(\theta) dB_t \\ dY_t^\varepsilon = -\lambda_2 Y^\varepsilon + \lambda_3 X^\varepsilon (1 - (X^\varepsilon)^2) dt + \varepsilon \sigma_0 \sin(\theta) dB_t. \end{cases} \quad (2.7)$$

Les hypothèses 2.2.1 impliquent que les constantes  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \sigma_0$  et  $\theta$  vérifient

1.  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \sigma_0$  sont des constantes positives,
2.  $\lambda_2 > 2\lambda_1$ ,
3.  $\lambda_3 < 2\lambda_2$ ,

$$4. \theta \in ]-\pi, \pi[ \setminus \left\{ 0, \pm \frac{\pi}{2}, \arctan \left( \frac{2\lambda_3}{2\lambda_1 - \lambda_2} \right) \right\}.$$

Soulignons que le mouvement brownien  $B$  dans le système (2.7) est le même sur les deux coordonnées.

*Démonstration.* Nous décomposons le problème avec différentes reparamétrisations afin d'obtenir le système (2.7).

— Nous utilisons la reparamétrisation de la partie déterministe déjà introduite dans la section 1.2 afin de passer de 9 à 4 paramètres.

Nous introduisons une nouvelle variable d'espace  $Y_1(t)$  en posant  $Y_1(t) = \frac{E_t^N - l_A}{l_B - l_A}$ .

— Nous changeons l'échelle de temps  $X_2(t) = X^N \left( \frac{t}{\tau(l_B - l_A)} \right)$  et  $Y_2(t) = Y_1 \left( \frac{t}{\tau(l_B - l_A)} \right)$ .

En posant  $a = \frac{\kappa(\gamma_A - \gamma_B - \delta_B)}{\tau(l_B - l_A)}$ ,  $b = \frac{\kappa(\delta_A + \delta_B)}{\tau(l_B - l_A)}$ ,  $c = \frac{(l_B - l_A)}{l_B}$  et  $r = \frac{\ell}{l_B \tau}$ , le système (2.5) devient dans la nouvelle paramétrisation

$$\begin{cases} dX_2(t) &= P_2(X_2(t), Y_2(t))dt + \frac{\sigma_1(X_2(t), Y_2(t))}{\sqrt{2N}}dB_t \\ dY_2(t) &= Q_2(X_2(t), Y_2(t))dt, \end{cases} \quad (2.8)$$

avec

$$\begin{aligned} P_2(X_2, Y_2) &= -f(X_2) + Y_2, \\ Q_2(X_2, Y_2) &= r(cY_2 + (1 - c))(1 - X_2 - Y_2), \\ \sigma_2(X_2, Y_2) &= \frac{\sigma(X_2, (l_B - l_A)Y_2 + l_A)}{\sqrt{\tau(l_B - l_A)}} \end{aligned}$$

et

$$f(X_2) = X_2((X_2 - 1)(a + bX_2) + 1),$$

où  $(B_t)$  est un mouvement brownien,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b > 0$ ,  $r > 0$  et  $c \in ]0, 1[$ .

Le système déterministe associé à (2.8) admet un point d'équilibre triple en  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  pour  $(a, b) = (-4, 8)$ .

Dans le chapitre 1 section 1.2 figure 3b), nous avons introduit les bifurcations fourches. Si nous trouvons un paramètre dépendant de  $a$  et  $b$ ,  $\mu(a, b)$  tel que  $\mu(-4, 8) = 0$  et que le nombre de point d'équilibre du système déterministe associé à (2.8) est 1 ou 3 selon le signe de  $\mu$  alors le système admette une bifurcation fourche de paramètre  $\mu$  au point  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

L'objectif des paramétrisations suivantes est de centrer le système en  $(0, 0)$  et de trouver un paramètre dépendant de  $a$  et  $b$  tel que le système admette une bifurcation fourche en  $(0, 0)$ .

Pour cela, posons  $X_3(t) = X_2(t) - \frac{1}{2}$  et  $Y_3(t) = Y_2(t) - \frac{1}{2}$  pour recentrer le système sur l'ensemble  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$ . Sous l'Hypothèse 2.2.1 1) et 2), nous avons  $a = \frac{-b}{2}$  et  $b \in ]8, 13[$ .

Introduisons le paramètre  $\mu = \frac{1}{4} - \frac{2}{b}$ . Sous l'hypothèse 2), nous avons  $\mu \in ]0, \frac{5}{52}[$ .

Nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} dX_3(t) = P_3(X_3(t), Y_3(t))dt + \frac{\sigma_3(X_3(t), Y_3(t))}{\sqrt{2N}}dB_t \\ dY_3(t) = Q_3(X_3(t), Y_3(t))dt, \end{cases} \quad (2.9)$$

où la condition initiale appartient à  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ , avec

$$P_3(X_3, Y_3) = P_2\left(X_3 + \frac{1}{2}, Y_3 + \frac{1}{2}\right) = (bX_3(\mu - X_3^2) + (X_3 + Y_3)),$$

$$Q_3(X_3, Y_3) = Q_2\left(X_3 + \frac{1}{2}, Y_3 + \frac{1}{2}\right) = -r\left(c\left(Y_3 + \frac{1}{2}\right) + 1 - c\right)(X_3 + Y_3)$$

et

$$\sigma_3^2(X_3, Y_3) = \sigma_1\left(X_3 + \frac{1}{2}, Y_3 + \frac{1}{2}\right).$$

— Changeons de repère du système afin d'avoir un coefficient de diffusion sur les deux composantes.

Soit  $D_\mu(X_3(t), Y_3(t)) = \begin{pmatrix} P_3(X_3(t), Y_3(t)) \\ Q_3(X_3(t), Y_3(t)) \end{pmatrix}$  et évaluons la différentielle en  $(\mu, x_3, y_3) = (0, 0, 0)$  près de la bifurcation fourche. Nous obtenons ainsi

$$D_\mu^2(X_3, Y_3) = \begin{pmatrix} b\mu - 3bX_3^2 + 1 & 1 \\ -r\left(c\left(Y_3 + \frac{1}{2}\right) + 1 - c\right) & -r\left[\left(c\left(Y_3 + \frac{1}{2}\right) + 1 - c\right) + c(X_3 + Y_3)\right] \end{pmatrix},$$

$$D_{\mu=0}^2(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r\left(\frac{c}{2} - 1\right) & r\left(\frac{c}{2} - 1\right) \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de  $D_{\mu=0}^2(0, 0)$  sont  $\left\{0, 1 + r\left(\frac{c}{2} - 1\right)\right\}$  et les vecteurs propres associés sont  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  pour la valeur propre 0 et  $\begin{pmatrix} 1 \\ r\left(\frac{c}{2} - 1\right) \end{pmatrix}$  pour l'autre valeur propre.

Sous l'Hypothèse 2.2.1 3), la valeur propre  $1 + r\left(\frac{c}{2} - 1\right)$  est strictement négative. Les deux valeurs propres étant différentes, nous projetons le système sur la base décrite par les vecteurs propres associés de  $D_{\mu=0}^2(0, 0)$ .

Nous reparamétrisons le système (2.9) dans le repère des vecteurs propres. Ainsi, les matrices de passage,  $S$  vers la nouvelle base et  $S^{-1}$  depuis la nouvelle base, sont définies par

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & r\left(\frac{c}{2} - 1\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S^{-1} = \frac{1}{r\left(1 - \frac{c}{2}\right) - 1} \begin{pmatrix} r\left(\frac{c}{2} - 1\right) & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \end{pmatrix} &= S \begin{pmatrix} X_4 \\ Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_4 - X_4 \\ X_4 + r \left( \frac{c}{2} - 1 \right) Y_4 \end{pmatrix} \\ \text{et} & \\ \begin{pmatrix} X_4 \\ Y_4 \end{pmatrix} &= S^{-1} \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{r \left( 1 - \frac{c}{2} \right) - 1} \begin{pmatrix} r \left( \frac{c}{2} - 1 \right) X_3 - Y_3 \\ -X_3 - Y_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} dX_4(t) = \frac{P_4(X_4(t), Y_4(t))}{r \left( 1 - \frac{c}{2} \right) - 1} dt - \frac{r \left( 1 - \frac{c}{2} \right)}{r \left( 1 - \frac{c}{2} \right) - 1} \frac{\sigma_4(X_4(t), Y_4(t))}{\sqrt{2N}} dB_t \\ dY_4(t) = \frac{Q_4(X_4(t), Y_4(t))}{r \left( 1 - \frac{c}{2} \right) - 1} dt - \frac{\sigma_4(X_4(t), Y_4(t))}{\left( r \left( 1 - \frac{c}{2} \right) - 1 \right) \sqrt{2N}} dB_t, \end{cases} \quad (2.12)$$

avec le même mouvement brownien  $(B_t)$  sur les deux coordonnées et une condition initiale prise dans l'ensemble

$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^2 \right\}$ . Les fonctions  $P_4(X_4, Y_4)$ ,  $Q_4(X_4, Y_4)$  et  $\sigma_4(X_4, Y_4)$  sont définies par :

$$\begin{aligned} P_4(X_4, Y_4) &= \left[ r \left( \frac{c}{2} - 1 \right) P_3 - Q_3 \right] \left( Y_4 - X_4, X_4 + Y_4 r \left( \frac{c}{2} - 1 \right) \right), \\ Q_4(X_4, Y_4) &= [-P_3 - Q_3] \left( Y_4 - X_4, X_4 + Y_4 r \left( \frac{c}{2} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

et

$$\sigma_4(X_4, Y_4) = \sigma_3 \left( Y_4 - X_4, X_4 + Y_4 r \left( \frac{c}{2} - 1 \right) \right).$$

— Changeons l'échelle de temps pour simplifier les notations.

Afin de simplifier les expressions, nous posons  $X_5(t) = X_4(2(r(2-c)-2)t)$  et  $Y_5(t) = Y_4(2(r(2-c)-2)t)$ .

Nous obtenons donc

$$\begin{cases} dX_5(t) = 4P_4(X_5(t), Y_5(t))dt - \frac{r(2-c)}{\sqrt{r(2-c)-2}} \frac{\sigma_4(X_5(t), Y_5(t))}{\sqrt{N}} dB_t \\ dY_5(t) = 4Q_4(X_5(t), Y_5(t))dt - \frac{2}{\sqrt{r(2-c)-2}} \frac{\sigma_4(X_5(t), Y_5(t))}{\sqrt{N}} dB_t. \end{cases} \quad (2.13)$$

— Changeons d'échelle entre les deux variables.

Nous posons  $Z(\mu, X_5(t), Y_5(t)) = \begin{pmatrix} P_4 \\ Q_4 \end{pmatrix} (X_5(t), Y_5(t))$ . Le vecteur  $Z(\mu, X_5(t), Y_5(t))$  est linéaire en  $\mu$

$$Z(\mu, X_5(t), Y_5(t)) = Z_0(X_5(t), Y_5(t)) + \mu Z_1(X_5(t), Y_5(t)), \quad (2.14)$$

$$\text{où } Z_1(X_5, Y_5) = \begin{pmatrix} -2b(2-c)r(Y_5 - X_5) \\ -4b(Y_5 - X_5) \end{pmatrix}.$$

Posons  $\mu = \eta^2$ ,  $X_5(t) = \eta X_6(t)$  et  $Y_5(t) = \eta^3 Y_6(t)$ . Nous obtenons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_6(t) = \frac{P_4(\eta X_6(t), \eta^3 Y_6(t))}{\eta} dt \\ \quad - \frac{r(2-c)}{\eta \sqrt{r(2-c)-2}} \frac{\sigma_4(\eta X_6(t), \eta^3 Y_6(t))}{\sqrt{N}} dB_t \\ \\ dY_6(t) = \frac{Q_4(\eta X_6(t), \eta^3 Y_6(t))}{\eta^3} dt \\ \quad - \frac{2}{\eta^3 \sqrt{r(2-c)-2}} \frac{\sigma_4(\eta X_6(t), \eta^3 Y_6(t))}{\sqrt{N}} dB_t, \end{array} \right. \quad (2.15)$$

où la condition initiale est prise dans l'ensemble  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid S \begin{pmatrix} \eta^{-1}x \\ \eta^{-3}y \end{pmatrix} \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^2 \right\}$ .

— Changeons l'échelle de temps.

Nous posons  $X_7(t) = X_6(\eta^{-2}t)$  et  $Y_7(t) = Y_6(\eta^{-2}t)$ . Nous obtenons le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_7(t) = \frac{P_4(\eta X_7(t), \eta^3 Y_7(t))}{\eta^3} dt \\ \quad - \frac{r(2-c)}{\eta^2 \sqrt{r(2-c)-2}} \frac{\sigma_4(\eta X_7(t), \eta^3 Y_7(t))}{\sqrt{N}} dB_t \\ \\ dY_7(t) = \frac{Q_4(\eta X_7(t), \eta^3 Y_7(t))}{\eta^5} dt \\ \quad - \frac{2}{\eta^4 \sqrt{r(2-c)-2}} \frac{\sigma_4(\eta X_7(t), \eta^3 Y_7(t))}{\sqrt{N}} dB_t. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Nous récrivons le système (2.16) de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_7(t) = P_5(\eta, X_7(t), Y_7(t))dt - \frac{r(2-c)}{\sqrt{r(2-c)-2}} \frac{\sigma_5(\eta, X_7(t), Y_7(t))}{\sqrt{N}\eta^4} dB_t \\ \\ \eta^2 dY_7(t) = Q_5(\eta, X_7(t), Y_7(t))dt - \frac{2}{\sqrt{r(2-c)-2}} \frac{\sigma_5(\eta, X_7(t), Y_7(t))}{\sqrt{N}\eta^4} dB_t, \end{array} \right. \quad (2.17)$$

où

$$P_5(\eta, X_7, Y_7) = \frac{1}{\eta^3} P_4(\eta X_7, \eta^3 Y_7),$$

$$Q_5(\eta, X_7, Y_7) = \frac{1}{\eta^3} Q_4(\eta X_7, \eta^3 Y_7)$$

et

$$\sigma_5(\eta, X_7, Y_7) = \sigma_4(\eta X_7, \eta^3 Y_7).$$

En posant  $\xi(\eta, X_7, Y_7) = \begin{pmatrix} P_5 \\ Q_5 \end{pmatrix}(\eta, X_7, Y_7)$ , nous obtenons

$$\xi(\eta, X_7, Y_7) = \xi_0(X_7, Y_7) + o(\eta) \quad (2.18)$$

$$\text{où } \xi_0(X_7, Y_7) = \begin{pmatrix} b(2-c)rX_7(1-X_7^2) \\ -(2+(c-2)r)^2Y_7 + 4bX_7(1-X_7^2) \end{pmatrix}.$$

De même nous avons

$$\sigma_5^2(\eta, X_7, Y_7) = \tilde{\sigma}_0^2 + o(\eta), \quad (2.19)$$

$$\text{où } \tilde{\sigma}_0 = \frac{6\tau(l_B - l_A) + \kappa(\gamma_B + \gamma_A)}{\tau(l_B - l_A)} > 0.$$

En posant  $\varepsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{N_0}\eta^4} = \frac{4\tau(l_B - l_A)}{\sqrt{N_0}(\kappa(\delta_B + \delta_A) - 8\tau(l_B - l_A))}$  et en prenant l'approximation à l'ordre 1 des coefficients de dérive et de diffusion, nous obtenons, pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ , le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_8(t) = b(2-c)rX_8(t)(1-X_8^2(t))dt - \varepsilon \frac{r(2-c)}{\sqrt{r(2-c)-2}} \sqrt{\tilde{\sigma}_0} dB_t \\ dY_8(t) = \left[ -\frac{(2+(c-2)r)^2}{\eta^2} Y_8(t) + \frac{4b}{\eta^2} X_8(t)(1-X_8^2(t)) \right] dt \\ \quad - \varepsilon \frac{2}{\eta^2 \sqrt{r(2-c)-2}} \sqrt{\tilde{\sigma}_0} dB_t, \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Nous factorisons par  $\sqrt{\frac{r^2(2-c)^2\eta^4 + 4}{\eta^4(r(2-c)-2)}}$  dans le coefficient de diffusion et ainsi les fonctions cosinus et sinus présentes dans le système (2.7) apparaissent.

Nous obtenons finalement

$$\begin{cases} dX_8 = b(2-c)rX_8(1-X_8^2)dt + \varepsilon \cos(\theta)\sigma_0 dB_t \\ dY_8 = \left[ -\frac{(2+(c-2)r)^2}{\eta^2}Y_8 + \frac{4b}{\eta^2}X_7(1-X_7^2) \right] dt + \varepsilon \sin(\theta)\sigma_0 dB_t, \end{cases} \quad (2.21)$$

où  $\theta = \arctan\left(\frac{2}{\eta^2 r(2-c)}\right)$  et  $\sigma_0 = \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_0 r^2(2-c)^2 \eta^4 + 4}{\eta^4(r(2-c)-2)}}$ .

En posant  $\lambda_1 = b(2-c)r$ ,  $\lambda_2 = \frac{(2+(c-2)r)^2}{\eta^2}$  et  $\lambda_3 = \frac{4b}{\eta^2}$ , nous obtenons bien que  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  et  $\sigma_0$  sont positives. Nous avons ainsi  $\lambda_2 = \frac{b(2+(c-2)r)^2}{b-8}$  et  $\lambda_3 = \frac{16b^2}{b-8}$ .

Analysons les ordres de grandeurs des paramètres du système et vérifions que  $2\lambda_2 > \lambda_3$ ,  $\lambda_2 > 2\lambda_1$  et  $\tan(\theta) \neq \frac{2\lambda_3}{2\lambda_1 - \lambda_2}$ .

En utilisant l'hypothèse 2.2.1 3), nous avons

$$\begin{aligned} & \left( \frac{2\tau l_B^2 - (l_B + l_A)\ell}{2\tau l_B^2} \right)^2 > \frac{\kappa(\delta_A + \delta_B)}{2\tau(l_B - l_A)} \\ \iff & \left( 1 - \frac{(l_B + l_A)\ell}{2\tau l_B^2} \right)^2 > \frac{b}{2} \\ \iff & \left( 1 - \frac{(l_B + l_A)r}{2l_B} \right)^2 > \frac{b}{2} \\ \iff & \left( 1 - \left(1 - \frac{c}{2}\right)r \right)^2 > \frac{b}{2} \\ \iff & (2 + (c-2)r)^2 > 2b \\ \iff & \lambda_2 > \frac{\lambda_3}{2}. \end{aligned}$$

En utilisant que  $2\lambda_2 > \lambda_3$ , nous avons  $r > 2 + \sqrt{2b} > 6$ .

Pour calculer  $\lambda_2 - 2\lambda_1$ , posons  $f_5(b, r, c) = \frac{4b(2+(c-2)r)^2}{b-8} - 2b(2-c)r$ . En étudiant les dérivées partielles de  $f_5$ , nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_5}{\partial b} &= -8 \frac{(2 - (2-c)r)^2}{(b-8)^2} - 2(2-c)r < 0, \\ \frac{\partial f_5}{\partial r} &= \frac{2b(2-c)}{b-8} (8 - b - 4(2 - (2-c)r)), \\ \frac{\partial f_5}{\partial c} &= \frac{2br}{b-8} (b - 8 + (2 + (c-2)r)) < 0 \text{ pour } c \in [0, 1]. \end{aligned}$$

En utilisant que  $r > 6$ , nous avons  $\frac{\partial f_5}{\partial r} > 0$  pour tout  $(b, r, c) \in ]8, 13[ \times ]6, +\infty[ \times [0, 1]$ . Ainsi, le minimum de  $f_5$  sur  $]8, 13[ \times ]6, +\infty[ \times [0, 1]$  est  $f(13, 6, 1) = \frac{52}{5}$ . Nous en déduisons



que  $\lambda_2 - 2\lambda_1 = f_5(b, r, c) > 0$ .

Calculons directement la différence  $(2\lambda_1 - \lambda_2) \tan(\theta) - 2\lambda_3$ . Nous avons

$$\begin{aligned} (2\lambda_1 - \lambda_2) \tan(\theta) - 2\lambda_3 &= \frac{2(2\lambda_1 - \lambda_2)}{\eta^2 r(2-c)} - \frac{8b}{\eta^2}, \\ &= \frac{2}{\eta^2} \left( \frac{1}{r(2-c)} \left( \frac{2b(2-c)r\eta^2}{\eta^2} - \frac{(2+(c-2)r)^2}{\eta^2} \right) - 4b \right), \\ &= \frac{-2}{\eta^2} \left( \frac{(2+(c-2)r)^2}{r(2-c)\eta^2} + 2b \right). \end{aligned}$$

Or,  $b$  et  $(2+(c-2)r)^2$  sont positifs. Ainsi,  $\tan(\theta) \neq \frac{2\lambda_3}{2\lambda_1 - \lambda_2}$ .

Nous obtenons bien le système (2.7).

□

Dans le chapitre suivant, nous allons étudier un système plus simple que (2.7), car nous prendrons  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, \lambda, 0)$ , mais, en revanche, nous nous permettons un coefficient de diffusion  $\sigma$  affine en  $x$ .

# Chapitre 3

## Analyse asymptotique de la mesure invariante d'un système stochastique dégénéré

**Résumé** Ce chapitre est constitué d'un travail sur l'étude d'un système différentiel stochastique à deux composantes dont le coefficient de diffusion est dégénéré.

Considérons le système d'EDS suivant, de condition initiale  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  et pour  $t > 0$

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = X_t^\varepsilon(1 - (X_t^\varepsilon)^2)dt + \varepsilon\sigma(X_t^\varepsilon)\cos(\theta)dB_t \\ dY_t^\varepsilon = -\lambda Y_t^\varepsilon dt + \varepsilon\sigma(X_t^\varepsilon)\sin(\theta)dB_t, \end{cases}$$

où  $B$  est un mouvement brownien uni-dimensionnel. Les deux coordonnées de ce système différentiel stochastique sont dirigées par le même mouvement brownien avec des coefficients de diffusion paramétrés par un coefficient  $\varepsilon > 0$ . Le système est composé d'un équilibre instable encadré de deux équilibres stables. Nous montrons que les limites en temps long et  $\varepsilon$  petit sont non commutatives pour ce système.

En particulier, pour obtenir ce résultat, nous étudions ce système en faisant varier l'ordre dans lequel sont prises les limites en temps long et quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Nous montrons la convergence lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  vers un système déterministe et étudions son comportement en temps long. Par ailleurs, pour un  $\varepsilon$  fixé, nous montrons l'existence et l'unicité d'une mesure de probabilité invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Nous nous intéressons à la limite de cette suite de mesures invariantes quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  ainsi qu'à sa caractérisation. En observant que l'un des points d'accumulation du système déterministe est un point col, nous montrons que le support de la mesure limite, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , se concentre hors d'un compact contenant ce point col. Nous obtenons de plus une caractérisation unique et explicite de cette mesure limite. En effet, selon la valeur des coefficients de diffusion, cette mesure invariante se concentre autour de l'équilibre stable pour lequel la valeur du coefficient de diffusion est la plus faible. En fin de chapitre, nous présentons des simulations numériques des trajectoires ainsi que des mesures d'occupation afin d'illustrer les résultats obtenus sur la mesure invariante quand  $\varepsilon$  tend vers 0.

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un système d'équations différentielles stochastiques (EDS) à deux composantes dont le coefficient de dérive admet trois points d'équilibre : deux points stables encadrant un point col. Dans un système déterministe, pour converger vers un point d'équilibre, l'initialisation doit être prise dans le bassin de celui-ci. Or, pour un point col, le bassin d'attraction est une courbe.

Ce genre de questionnement, et plus généralement l'étude des mesures invariantes, apparaît dans des domaines variés allant des puits de potentiels en physique [39, 40] aux réseaux de neurones ([45, 47]).

L'enjeu de ce chapitre est de montrer l'existence ainsi que de caractériser les limites en temps long et quand  $\varepsilon$  tend vers 0 des solutions d'un système d'EDS dégénéré. Une conjecture de ce résultat a été apportée à partir de simulations numériques dans [15] et une preuve a été apportée récemment dans un cadre non dégénéré par [90], mais nous étendons le résultat dans notre cadre dégénéré.

Pour des systèmes d'EDS non dégénérées, nous renvoyons vers le livre de [31] qui détaille les étapes pour montrer que la mesure invariante du système d'EDS se concentre hors des points d'équilibre instable du système déterministe perturbé tels que les nœuds cols et les sources. Cette méthode repose sur la théorie du contrôle (cf. [81]) et le calcul de l'énergie nécessaire pour passer d'un compact contenant un point d'équilibre à un autre. L'énergie traduite par la fonctionnelle d'action fait intervenir l'inverse de la matrice de diffusion du système d'EDS. Dans notre cas dégénéré, il n'est pas possible d'appliquer ces théorèmes. Nous allons donc chercher à étendre ces résultats à notre cas d'étude. Pour cela, nous utiliserons la forme particulière de notre système qui possède une seule vraie composante sur ses deux dimensions.

Nous montrons la convergence du système d'EDS quand  $\varepsilon$  tend vers 0 vers un système déterministe et étudions son comportement en temps long. Les points d'équilibre de ce système sont un point col entouré de deux points stables. Pour un  $\varepsilon$  fixé, nous montrons également l'existence et l'unicité d'une probabilité invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. De plus, nous nous intéressons à la limite de cette suite de mesures invariantes quand  $\varepsilon$  tend vers 0. Nous montrons que cette mesure invariante lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 est une combinaison linéaire des points d'équilibre stables du système déterministe. En particulier, la mesure invariante se concentre en un seul des points stables sous des conditions précises sur les paramètres du coefficient de diffusion. En fin de chapitre, nous présentons des simulations numériques des trajectoires ainsi que des mesures d'occupation, afin d'illustrer les résultats obtenus. Dans la section suivante, nous exposons le plan détaillé des résultats présents dans cette première partie de thèse ainsi que les différents systèmes et notations nécessaires dans la suite.

## 3.2 Résultats principaux

Dans cette section, nous détaillons les résultats les plus importants de ce chapitre ainsi que le système d'EDS sur lequel nous obtenons ces résultats. Soit  $\varepsilon_0$  fixé pour tout ce chapitre.

Soient  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{2\}$  et  $\theta \in ]-\pi, \pi[ \setminus \{0, \pm \frac{\pi}{2}\}$ . Considérons le système d'EDS suivant, de condition initiale  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  et pour  $t > 0$

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = X_t^\varepsilon(1 - (X_t^\varepsilon)^2)dt + \varepsilon\sigma(X_t^\varepsilon)\cos(\theta)dB_t \\ dY_t^\varepsilon = -\lambda Y_t^\varepsilon dt + \varepsilon\sigma(X_t^\varepsilon)\sin(\theta)dB_t, \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $B$  est un mouvement brownien uni-dimensionnel et le coefficient  $\sigma(x)$  est défini par

$$\sigma(x) = \sigma_0 + \sigma_1 x, \quad (3.2)$$

où  $\sigma_0 \neq 0$  et  $\sigma_1 \in \mathbb{R}$ . Supposons sans restriction que  $\sigma_0 > 0$ .

Pour  $\theta \in \{0, \pm \frac{\pi}{2}\}$ , le coefficient de diffusion n'est présent que sur l'une des deux composantes. Nous avons donc exclu ces valeurs de  $\theta$ . Intuitivement, si  $\theta \in \{0, \pm \frac{\pi}{2}\}$ , alors le processus ne peut pas se déplacer dans tout l'espace. Or, les preuves dans la suite de ce chapitre montreront que c'est essentiel. Quant à la condition sur  $\lambda$ , la raison va apparaître plus loin dans la preuve du lemme 3.4.7.

Le système (3.1) est dégénéré, car le mouvement brownien est le même sur les deux composantes. Ainsi, la difficulté principale pour l'étude de ce système est due à la non-inversibilité de la matrice de diffusion associée au système (3.1). En particulier, la forme de la matrice de diffusion joue un rôle crucial pour prouver l'existence d'une mesure invariante [31, page 166, théorème 4.1]. Dans la section 3.3, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution du système (3.1) sur un intervalle de temps fini. En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, nous obtenons le système déterministe défini par le terme de dérive de l'EDS (3.1). L'étude en temps long de ce système déterministe nous permet d'obtenir la proposition suivante.

Nous introduisons les points

$$z_1 = (-1, 0), \quad z_2 = (0, 0) \text{ et } z_3 = (1, 0). \quad (3.3)$$

**Proposition 3.2.1.** *Soit  $(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)$  solution de (3.1) et de condition initiale  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0 puis le temps vers l'infini, nous obtenons*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon) = z_1 \mathbb{1}_{\{x_0 < 0\}} + z_2 \mathbb{1}_{\{x_0 = 0\}} + z_3 \mathbb{1}_{\{x_0 > 0\}}. \quad (3.4)$$

Dans la suite, nous introduisons la mesure associée à la limite

$$\tilde{\pi}^{(x_0, y_0)} = \mathbb{1}_{\{x_0 < 0\}} \delta_{z_1} + \mathbb{1}_{\{x_0 = 0\}} \delta_{z_2} + \mathbb{1}_{\{x_0 > 0\}} \delta_{z_3}. \quad (3.5)$$

Ce résultat est prouvé dans la section 3.3.

Nous étudions maintenant le comportement en temps long du système stochastique à  $\varepsilon$  fixé et regardons ensuite comment il se comporte quand  $\varepsilon$  tend vers 0. Pour cela, nous introduisons l'hypothèse suivante

**Hypothèse 3.2.2.** *Pour  $\sigma_0 > 0$ , supposons  $\sigma_1 \in ]-\sigma_0, \sigma_0[$ .*

En combinant cette avec (3.2),  $\sigma(x)$  ne s'annule pas entre les droites  $x = -1$  et  $x = 1$ .

Avant d'énoncer le théorème, introduisons la norme  $\|\cdot\|_W$  défini par

$$\|\mu\|_W = \int_{\mathbb{R}^2} W(x, y) |\mu(x, y)|, \quad (3.6)$$

où  $\mu$  est une mesure dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Théorème 3.2.3.** *Soit  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  fixé. Sous l'hypothèse 3.2.2, le processus  $(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$  solution de (3.1) admet une unique mesure invariante notée  $\pi^\varepsilon$  qui est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue et il existe une constante  $C > 0$  et  $\gamma > 0$  tel que*

$$\|P_t((x, y), \cdot) - \pi^\varepsilon(\cdot)\|_W \leq CW(x, y)e^{-\gamma t}, \quad (3.7)$$

où  $W$  est une fonction de Liapunov définie par  $W(x, y) = 1 + x^2 + y^2$  et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Pour cette preuve, nous utilisons l'existence d'une densité pour la probabilité de transition et le théorème 5.2 de [13] qui repose sur deux éléments : l'existence d'une fonction de Liapunov et la condition de Harris. Pour prouver que la condition de Harris est vérifiée, nous allons utiliser des éléments de la théorie du contrôle et une approche développée dans [47].

Pour prouver l'existence d'une densité, nous allons nous assurer que le critère de Hörmander est vérifié. La preuve ainsi que la définition de ces différentes conditions est développée dans la section 3.4.1.

Nous donnons maintenant les deux résultats principaux de cette première partie de thèse qui consistent en l'étude quand  $\varepsilon$  tend 0, de la suite  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[}$ .

**Théorème 3.2.4.** *Quand  $\varepsilon$  tend vers 0, la suite  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon < \varepsilon_0}$  est tendue et toutes les valeurs d'adhérence ont la forme*

$$\sum_{i=1}^3 a_i \delta_{z_i}, \quad (3.8)$$

où  $\delta_{z_i}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  est la mesure de Dirac en le point  $z_i$  défini par (3.3) et les coefficients  $a_i \geq 0$  vérifient  $\sum_{i=1}^3 a_i = 1$ .

La difficulté de la preuve de ce théorème vient du fait que le support n'est pas un compact. Pour pallier cette difficulté, nous utilisons une fonction de Liapunov indépendante de  $\varepsilon < \varepsilon_0$ . Le critère de tension est obtenu grâce au lien entre la mesure d'occupation et la mesure invariante

à  $\varepsilon$  fixé et à une approche développée dans [31, chapitre 6 page 142]. La preuve du théorème 3.2.4 est donnée en section 3.4.2.

Une question naturelle est de se demander si la suite des  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon < \varepsilon_0}$  converge vers  $\tilde{\pi}^{(x_0, y_0)}$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0 ou bien quel est le lien entre les valeurs d'adhérence de  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]}$  et  $\tilde{\pi}^{(x_0, y_0)}$  définie en (3.5).

Le théorème suivant répond à cette question.

**Théorème 3.2.5.** *La suite  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon < \varepsilon_0}$  converge, quand  $\varepsilon$  tend vers 0, vers une mesure  $\pi$  définie par*

$$\pi = \begin{cases} \delta_{(1,0)} & \text{si } \sigma_1 < 0, \\ \frac{1}{2}\delta_{(1,0)} + \frac{1}{2}\delta_{(-1,0)} & \text{si } \sigma_1 = 0, \\ \delta_{(-1,0)} & \text{si } \sigma_1 > 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

La preuve de ce théorème repose principalement sur l'adaptation de [31] Chapitre 6 page 142. Les auteurs étudient des systèmes pour lesquels la matrice de diffusion est inversible. Or, dans notre cas, la matrice de diffusion n'est pas inversible. Nous avons donc dû adapter la preuve à notre cadre. C'est l'objet de la section 3.5.

Remarque : Nous concluons pour toute cette étude que les objets limites obtenus suivant que l'on fasse tendre le temps vers l'infini ou  $\varepsilon$  vers 0 dans le système (3.1) sont différents. Ce résultat est similaire au résultat obtenu dans [31, théorème 4.1 page 166].

La mesure  $\pi$  se concentre hors du point col  $(0, 0)$  du système alors que la mesure  $\tilde{\pi}^{(x_0, y_0)}$  se concentre sur le point col lorsque la condition initiale est prise pour  $x = 0$ .

Notre travail peut être résumé grâce à la Figure 3.1.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}oi \left( X_t^{\varepsilon, (x, y)}, Y_t^{\varepsilon, (x, y)} \right)_{t \leq T} & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} & \left( \delta_{(x_t^{(x, y)}, y_t^{(x, y)})}, t \leq T \right) \\ \downarrow t \rightarrow +\infty & & \downarrow \\ \pi^\varepsilon & \longrightarrow & \pi \neq \tilde{\pi}^{(x, y)} \end{array}$$

FIGURE 3.1 – Notations des différentes limites en temps et en  $\varepsilon$

### 3.3 Propriétés des systèmes différentiels

Dans cette section, nous étudions le système différentiel stochastique (3.1) ainsi que le système déterministe (3.15).

#### 3.3.1 Existence et unicité du système différentiel stochastique

Soit le générateur infinitésimal associé au système (3.1) défini pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $f \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\varepsilon f(x, y) = & x(1-x^2) \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda y \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{(\varepsilon \sigma(x))^2}{2} \left( \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \\ & + \left( (\varepsilon \sigma(x))^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

La proposition suivante établit une propriété importante du système (3.1).

**Proposition 3.3.1.** *Le générateur infinitésimal de (3.1) vérifie la condition de Liapunov pour  $W(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ . De plus, il existe des constantes positives indépendantes de  $\varepsilon$   $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  telles que*

$$\mathcal{L}^\varepsilon W \leq \alpha_1 - \alpha_2 W, \quad (3.11)$$

où  $\mathcal{L}^\varepsilon$  est défini par (3.10).

*Démonstration.* Nous allons donc prouver qu'il existe des constantes positives  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  pour lesquelles (3.11) est vérifiée. Nous avons

$$\mathcal{L}^\varepsilon W(x, y) = 2x^2(1-x^2) - 2\lambda y^2 + (\varepsilon \sigma(x))^2.$$

Notons  $\beta_\varepsilon := \varepsilon^2(\sigma_0^2 + \sigma_1^2)$ . Pour  $c_{1,\varepsilon} = 1 + \beta_\varepsilon + \frac{(2+\beta_\varepsilon)^2}{8}$  et  $c_{2,\varepsilon} = \sqrt{8 + (2 + \beta_\varepsilon)^2} - (2 + \beta_\varepsilon)$ , nous avons

$$2x^2(1-x^2) + \varepsilon^2(\sigma_0 + \sigma_1 x)^2 \leq c_{1,\varepsilon} - c_{2,\varepsilon} x^2.$$

En utilisant que  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , nous avons donc  $\beta_\varepsilon < \beta_{\varepsilon_0} := \varepsilon_0^2(\sigma_0^2 + \sigma_1^2)$ ,  $c_{1,\varepsilon} < c_{1,\varepsilon_0}$  et  $c_{2,\varepsilon} > c_{2,\varepsilon_0}$ . Ainsi, nous avons bien

$$\mathcal{L}^\varepsilon W \leq \alpha_1 - \alpha_2 W,$$

où  $\alpha_2 = \min(c_{2,\varepsilon_0}, 2\lambda)$  et  $\alpha_1 = c_{1,\varepsilon_0} + \alpha_2$ . □

Nous pouvons maintenant, étudier l'existence d'une solution au système (3.1). Pour cela, introduisons  $(\tau_n^\varepsilon)_n$  la suite des temps d'arrêt pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$\tau_n^\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : \|(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)\| \geq n\}. \quad (3.12)$$

**Lemme 3.3.2.** *Soit  $T > 0$ . Si  $\mathbb{E}(|(X_0^\varepsilon, Y_0^\varepsilon)|^2) < \infty$ , alors il existe une unique solution  $((X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon), t \in [0, T])$  dans  $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^2)$  à l'EDS (3.1).*

*Démonstration.* Le terme de dérive pour la première composante est localement, mais pas globalement lipschitzien. Le terme de dérive pour la deuxième composante et le terme de diffusion, quant à eux, sont lipschitziens. D'après le théorème 2.3 de [51], pour toute condition initiale à support compact, nous avons l'existence d'une solution de (3.1) jusqu'à explosion de la solution. Cherchons donc à montrer que  $\mathbb{E} \left( \sup_{t \leq T} \| (X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon) \|^2 \right) < \infty$  et donc que le temps d'explosion est presque sûrement infini.

En prenant la suite de temps d'arrêt définie par l'équation (3.3.2), la formule d'Itô appliquée à (3.1) pour  $W(x, y) = 1 + x^2 + y^2$  donne

$$\begin{aligned} W(X_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon, Y_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon) &= W(X_0^\varepsilon, Y_0^\varepsilon) + \int_0^{t \wedge \tau_n^\varepsilon} \mathcal{L}^\varepsilon W(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon) ds \\ &\quad + \int_0^{t \wedge \tau_n^\varepsilon} 2\varepsilon \sigma(X_s^\varepsilon) (X_s^\varepsilon \cos(\theta) + Y_s^\varepsilon \sin(\theta)) dB_s. \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 3.3.1, nous avons

$$\begin{aligned} W(X_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon, Y_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon) &\leq W(X_0^\varepsilon, Y_0^\varepsilon) + \int_0^{t \wedge \tau_n^\varepsilon} \alpha_1 - \alpha_2 W(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon) ds \\ &\quad + \int_0^{t \wedge \tau_n^\varepsilon} 2\varepsilon \sigma(X_s^\varepsilon) (X_s^\varepsilon \cos(\theta) + Y_s^\varepsilon \sin(\theta)) dB_s, \\ &\leq W(X_0^\varepsilon, Y_0^\varepsilon) + \alpha_1 (t \wedge \tau_n^\varepsilon) \\ &\quad + \int_0^{t \wedge \tau_n^\varepsilon} 2\varepsilon |\sigma(X_s^\varepsilon)| (|X_s^\varepsilon \cos(\theta)| + |Y_s^\varepsilon \sin(\theta)|) dB_s, \end{aligned}$$

En utilisant que

$$\|(X^\varepsilon, Y^\varepsilon)\|^2 \leq W(X^\varepsilon, Y^\varepsilon) - 1,$$

récrivons cette équation comme étant

$$\begin{aligned} \|(X_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon, Y_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon)\|^2 &\leq |X_0^\varepsilon|^2 + |Y_0^\varepsilon|^2 + \alpha_1 (t \wedge \tau_n^\varepsilon) \\ &\quad + \int_0^{t \wedge \tau_n^\varepsilon} 2\varepsilon |\sigma(X_s^\varepsilon)| (|X_s^\varepsilon \cos(\theta)| + |Y_s^\varepsilon \sin(\theta)|) dB_s. \end{aligned}$$

En prenant le supremum, nous avons

$$\begin{aligned} \sup_{t \leq T} \|(X_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon, Y_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon)\|^2 &\leq |X_0^\varepsilon|^2 + |Y_0^\varepsilon|^2 + \alpha_1 (T \wedge \tau_n^\varepsilon) \\ &\quad + \int_0^{T \wedge \tau_n^\varepsilon} \sup_{s \leq T} (2\varepsilon |\sigma(X_s^\varepsilon)| (|X_s^\varepsilon \cos(\theta)| + |Y_s^\varepsilon \sin(\theta)|)) dB_s. \end{aligned}$$

En prenant l'espérance, nous obtenons

$$\mathbb{E} \left( \sup_{t \leq T} \|(X_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon, Y_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon)\|^2 \right) \leq |X_0^\varepsilon|^2 + |Y_0^\varepsilon|^2 + \alpha_1 (T \wedge \tau_n^\varepsilon). \quad (3.13)$$



Montrons que la suite  $(\tau_n^\varepsilon)_n$  tend vers l'infini presque sûrement. Supposons qu'il existe  $\tilde{\tau}^\varepsilon$  tel que  $\mathbb{P}(\sup_n \tau_n^\varepsilon < \tilde{\tau}^\varepsilon) > 0$ . D'après l'inégalité de Markov, nous avons

$$\mathbb{E} \left( \sup_{t \leq \tilde{\tau}^\varepsilon \wedge \tau_n^\varepsilon} \|(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)\|^2 \right) \geq n^2 \mathbb{P}(\sup_n \tau_n^\varepsilon < \tilde{\tau}^\varepsilon).$$

Or, lorsque  $n$  tend vers l'infini, nous avons une contradiction avec (3.13). Ainsi, la suite  $(\tau_n^\varepsilon)_n$  tend vers l'infini presque sûrement. Nous obtenons donc que  $\mathbb{E} \left( \sup_{t \leq T} \|(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)\|^2 \right) \leq +\infty$ .

Ainsi, il existe au moins une solution à l'EDS (3.1) dans l'espace  $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^2)$ . Il reste à démontrer l'unicité de cette solution.

Dans l'espace des processus tel que la norme  $\mathbb{L}^2$  est finie, soient  $(X^\varepsilon, Y^\varepsilon, B)$  et  $(\tilde{X}^\varepsilon, \tilde{Y}^\varepsilon, \tilde{B})$  deux solutions de (3.1) définies sur le même espace de probabilité et de même condition initiale tels que  $(X_0^\varepsilon, Y_0^\varepsilon) = (\tilde{X}_0^\varepsilon, \tilde{Y}_0^\varepsilon) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  et  $B = \tilde{B}$ .

Soient les temps d'arrêt  $\tau_n^{\varepsilon,1} = \inf\{t : \|(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)\| \geq n\}$ ,  $\tau_n^{\varepsilon,2} = \inf\{t : \|(\tilde{X}_t^\varepsilon, \tilde{Y}_t^\varepsilon)\| \geq n\}$  et  $\tau_n^\varepsilon = \min\{\tau_n^{\varepsilon,1}, \tau_n^{\varepsilon,2}\}$ .

Nous obtenons

$$\begin{aligned} |X_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon - \tilde{X}_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon| &= \left| \int_0^{t \wedge \tau_n^\varepsilon} X_s^\varepsilon (1 - (X_s^\varepsilon)^2) - \tilde{X}_s^\varepsilon (1 - (\tilde{X}_s^\varepsilon)^2) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{t \wedge \tau_n^\varepsilon} \varepsilon \cos(\theta) (\sigma(X_s^\varepsilon) - \sigma(\tilde{X}_s^\varepsilon)) dB_s \right|, \\ |Y_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon - \tilde{Y}_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon| &= \left| \int_0^{t \wedge \tau_n^\varepsilon} \lambda (Y_s^\varepsilon - \tilde{Y}_s^\varepsilon) ds + \int_0^{t \wedge \tau_n^\varepsilon} \varepsilon \sin(\theta) (\sigma(X_s^\varepsilon) - \sigma(\tilde{X}_s^\varepsilon)) dB_s \right| \end{aligned}$$

et si  $t \in [0, T]$ , alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \left\| (X_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon, Y_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon) - (\tilde{X}_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon, \tilde{Y}_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon) \right\|^2 \right) &= \mathbb{E} \left( \left| (X_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon - \tilde{X}_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon) \right|^2 \right) \\ &\quad + \mathbb{E} \left( \left| (Y_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon - \tilde{Y}_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon) \right|^2 \right). \end{aligned} \tag{3.14}$$

En utilisant les majorations

$$\begin{aligned} |x(1-x^2) - \tilde{x}(1-\tilde{x}^2)|^2 &\leq |x(x+\tilde{x}) + \tilde{x}^2 - 1|^2 |x - \tilde{x}|^2, \\ |\sigma(x) - \sigma(\tilde{x})|^2 &= \sigma_1^2 |x - \tilde{x}|^2, \end{aligned}$$

nous obtenons donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left( \left| (X_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon - \tilde{X}_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon) \right|^2 \right) &\leq 2\mathbb{E} \left( \left| \int_0^{t \wedge \tau_n^\varepsilon} X_s^\varepsilon (1 - (X_s^\varepsilon)^2) - \tilde{X}_s^\varepsilon (1 - (\tilde{X}_s^\varepsilon)^2) ds \right|^2 \right) \\
&\quad + 2\mathbb{E} \left( \left| \int_0^{t \wedge \tau_n^\varepsilon} \varepsilon \cos(\theta) (\sigma(X_s^\varepsilon) - \sigma(\tilde{X}_s^\varepsilon)) dB_s \right|^2 \right), \\
&\leq 2T\mathbb{E} \left( \int_0^{t \wedge \tau_n^\varepsilon} |X_s^\varepsilon (1 - (X_s^\varepsilon)^2) - \tilde{X}_s^\varepsilon (1 - (\tilde{X}_s^\varepsilon)^2)|^2 ds \right) \\
&\quad + 2\mathbb{E} \left( \int_0^{t \wedge \tau_n^\varepsilon} \varepsilon^2 \cos^2(\theta) |\sigma(X_s^\varepsilon) - \sigma(\tilde{X}_s^\varepsilon)|^2 ds \right), \\
&\leq 2T\mathbb{E} \left( \int_0^{t \wedge \tau_n^\varepsilon} |X_s^\varepsilon (X_s^\varepsilon + \tilde{X}_s^\varepsilon) + (\tilde{X}_s^\varepsilon)^2 - 1|^2 |X_s^\varepsilon - \tilde{X}_s^\varepsilon|^2 ds \right) \\
&\quad + 2\mathbb{E} \left( \int_0^t \varepsilon^2 \cos^2(\theta) \sigma_1^2 |X_s^\varepsilon - \tilde{X}_s^\varepsilon|^2 ds \right), \\
&\leq 2T(3n^2 - 1)^2 \mathbb{E} \left( \int_0^{t \wedge \tau_n^\varepsilon} |X_s^\varepsilon - \tilde{X}_s^\varepsilon|^2 ds \right) \\
&\quad + 2\varepsilon^2 \cos^2(\theta) \sigma_1^2 \mathbb{E} \left( \int_0^t |X_s^\varepsilon - \tilde{X}_s^\varepsilon|^2 ds \right), \\
&\leq C_1^{n,T} \int_0^t \mathbb{E} \left( \left| (X_{s \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon - \tilde{X}_{s \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon) \right|^2 \right) ds,
\end{aligned}$$

où  $C_1^{n,T} = 2(\varepsilon^2 \cos^2(\theta) \sigma_1^2 + T(3n^2 - 1)^2)$  et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left( \left| (Y_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon - \tilde{Y}_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon) \right|^2 \right) &\leq 2\mathbb{E} \left( \left| \int_0^{t \wedge \tau_n^\varepsilon} \lambda (Y_s^\varepsilon - \tilde{Y}_s^\varepsilon) ds \right|^2 \right) \\
&\quad + 2\mathbb{E} \left( \left| \int_0^{t \wedge \tau_n^\varepsilon} \varepsilon \sin(\theta) (\sigma(X_s^\varepsilon) - \sigma(\tilde{X}_s^\varepsilon)) dB_s \right|^2 \right), \\
&\leq 2\lambda^2 T \mathbb{E} \left( \int_0^t |Y_{s \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon - \tilde{Y}_{s \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon|^2 ds \right) \\
&\quad + 2\mathbb{E} \left( \int_0^t \varepsilon^2 \sin^2(\theta) |\sigma(X_{s \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon) - \sigma(\tilde{X}_{s \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon)|^2 ds \right), \\
&\leq C_2^{n,T} \int_0^t \mathbb{E} \left( \left\| (X_{s \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon, Y_{s \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon) - (\tilde{X}_{s \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon, \tilde{Y}_{s \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon) \right\|^2 \right) ds,
\end{aligned}$$

où  $C_2^{n,T} = \max(2\lambda^2 T, 2\varepsilon^2 \sin^2(\theta) \sigma_1^2)$ .

En reprenant (3.14), nous avons donc

$$\mathbb{E} \left( \left\| (X_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon, Y_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon) - (\tilde{X}_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon, \tilde{Y}_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon) \right\|^2 \right) \leq C_3^{n,T} \int_0^{t \wedge \tau_n^\varepsilon} \mathbb{E} \left( \left\| (X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon) - (\tilde{X}_s^\varepsilon, \tilde{Y}_s^\varepsilon) \right\|^2 \right) ds,$$

où  $C_3^{n,T} = \max(2\lambda^2 T, 2(\varepsilon^2 \sigma_1^2 + T(3n^2 - 1)^2))$ .

En appliquant le lemme de Gronwall, la norme  $\mathbb{L}^2$  étant finie, concluons que

$$\mathbb{E} \left( \left\| \left( X_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon, Y_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon \right) - \left( \tilde{X}_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon, \tilde{Y}_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon \right) \right\|^2 \right) = 0$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . Nous obtenons donc

$$\left( X_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon, Y_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon \right) = \left( \tilde{X}_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon, \tilde{Y}_{t \wedge \tau_n^\varepsilon}^\varepsilon \right) \text{ p.s pour tout } t \in [0, T].$$

Les processus  $(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)$  et  $(\tilde{X}_t^\varepsilon, \tilde{Y}_t^\varepsilon)$  sont continus en temps, ce qui implique que  $\tau_n^{\varepsilon,1} = \tau_n^{\varepsilon,2}$  presque sûrement et nous permet de conclure la preuve de l'unicité trajectorielle. □

### 3.3.2 Le système déterministe associé

Les coefficients du drift et de diffusion sont localement lipschitziens. Ainsi, le théorème dans [29]2.1 chapitre 11 page 456 permet d'obtenir la convergence des solutions de (3.1) vers le système suivant quand  $\varepsilon$  tend vers 0

$$\begin{cases} dx_t = x_t(1 - x_t^2)dt, \\ dy_t = -\lambda y_t dt. \end{cases} \quad (3.15)$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{2\}$ .

**Proposition 3.3.3.** *Les points définis par (3.3) sont les points d'équilibre du système (3.15). Les points  $z_1$  et  $z_3$  sont stables et  $z_2$  est un point col.*

*Démonstration.* Rappelons que les points stationnaires de (3.15) sont des points  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tels que

$$dx_t|_{(x,y)} = dy_t|_{(x,y)} = 0.$$

Les points  $z_1, z_2$  et  $z_3$  sont bien des points d'équilibre. La matrice jacobienne associée au système (3.15) est définie par

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - 2x^2 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne est une matrice diagonale donc en regardant le signe de  $1 - 2x^2$ , nous avons une information sur le signe des valeurs propres et la stabilité. Nous obtenons ainsi que  $z_1$  et  $z_3$  sont stables et  $z_2$  est un point col, car les valeurs propres de la matrice jacobienne évaluées en  $z_1$  et  $z_3$  sont de même signe alors qu'évaluées en  $z_2$ , les valeurs propres sont de signes contraires. □

La Figure 3.2 fait apparaître les différents équilibres du système et la nature de leur stabilité. Remarquons que  $z_2$  est attractif dans une direction et répulsif dans l'autre alors que les points  $z_1$  et  $z_3$  sont attractifs dans toutes les directions.

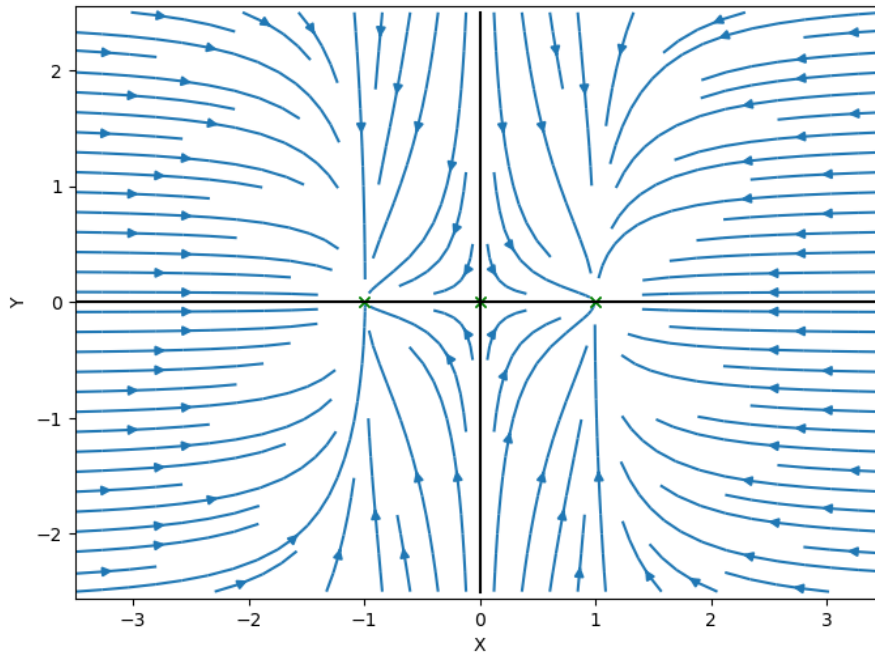


FIGURE 3.2 – Champs de vecteur du système (3.15) pour  $\lambda = 1$ . Les points d'équilibre stables  $z_1 = (-1, 0)$ ,  $z_3 = (1, 0)$  et instable  $z_2 = (0, 0)$  du système sont représentés par les croix.

Dans la proposition suivante, nous calculons la solution explicite de ce système d'équations différentielles ordinaires.

**Proposition 3.3.4.** *La fonction  $(x_t, y_t)$  solution de (3.15) et de condition initiale  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  a pour forme*

$$x_t = x_0 \frac{e^t}{\sqrt{1 - x_0^2 + x_0^2 e^{2t}}}, \quad (3.16)$$

$$y_t = y_0 e^{-\lambda t}.$$

*Elle converge lorsque le temps tend vers l'infini vers*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x_t, y_t) = \begin{cases} z_1 & \text{si } x_0 < 0, \\ z_2 & \text{si } x_0 = 0, \\ z_3 & \text{si } x_0 > 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

*Démonstration.* La résolution pour  $y_t$  est immédiate. Le flot s'annule pour  $x_0 \in \{-1, 0, 1\}$ , nous obtenons donc  $x_t = x_0$  pour tout  $t > 0$  si  $x_0 \in \{-1, 0, 1\}$ .

Remarquons que  $x_0 \frac{e^t}{\sqrt{1 - x_0^2 + x_0^2 e^{2t}}} = x_0$  pour  $x_0 \in \{-1, 0, 1\}$ . Pour  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ , nous avons

$$\dot{x}_t = x_t(1 - x_t^2)$$

En utilisant la décomposition en éléments simples de  $\frac{1}{x(1-x^2)}$  et en intégrant entre 0 et  $t$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{x_t^2}{1-x_t^2} \frac{1-x_0^2}{x_0^2}\right) &= 2t \\ \Leftrightarrow x_t^2 &= \frac{x_0^2 e^{2t}}{1-x_0^2+x_0^2 e^{2t}} \\ \Leftrightarrow x_t &= \frac{x_0 e^t}{\sqrt{1-x_0^2+x_0^2 e^{2t}}}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $(x_t, y_t)$  tend vers l'un des points stationnaires du système quand  $t$  tend vers l'infini, car pour  $x_0 \neq 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x_0}{|x_0| \sqrt{1 + \frac{1-x_0^2}{x_0^2 e^{2t}}}} = \text{sign}(x_0)$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_t = 0$ . □

En particulier, le système (3.15) n'admet pas de cycle, car pour toutes les conditions initiales, les solutions du système convergent vers l'un des points stationnaires.

En combinant ce résultat avec la proposition 3.3.4, nous prouvons bien la proposition 3.2.1.

## 3.4 Mesure invariante du processus solution de l'EDS (3.1)

Dans cette section, nous prouvons les théorèmes 3.2.3 et 3.2.4.

### 3.4.1 Preuve du théorème 3.2.3

Dans cette section, nous prouvons le théorème 3.2.3 pour un  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  fixé. Pour cela, nous utilisons le générateur infinitésimal du système (3.1) défini par (3.10) et introduisons le semi-groupe du processus défini pour  $t \geq 0$  et  $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  par

$$P_t^\varepsilon f(x, y) = \mathbb{E}_{(x,y)} [f(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)], \quad (3.18)$$

de condition initiale  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Soient l'ensemble des mesures finies  $\mathcal{M}$ , l'ensemble des mesures de probabilité  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{N}$  l'ensemble des mesures de moyenne nulle sur  $\mathbb{R}^2$ . Le dual du semi-groupe  $(P_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$ , appelé semi-groupe stochastique et noté  $(S_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$ , est défini pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}$  et pour tout  $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  par

$$S_t^\varepsilon \mu(E) = \int_{\mathbb{R}^2} P_t^\varepsilon((x, y), E) \mu(dx, dy). \quad (3.19)$$

Pour prouver le théorème 3.2.3, nous utilisons le théorème 5.2 de [13] qui prouve l'existence et l'unicité d'une mesure invariante sous les conditions suivantes :

1. pour tout  $t \geq 0$ , l'opérateur stochastique  $S_t^\varepsilon$  satisfait une condition de Liapunov (équation (5.6) dans [13]),
2. il existe  $T > 0$  tel que l'opérateur stochastique  $S_T^\varepsilon$  vérifie une condition de couplage local (3 dans [13])

et nous montrons que la probabilité de transition associée à (3.1) admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Dans le lemme suivant, nous montrons que  $P_t^\varepsilon$  admet pour tout  $t > 0$  une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

**Lemme 3.4.1.** *Sous l'hypothèse 3.2.2, pour  $t > 0$ , la probabilité de transition  $P_t^\varepsilon((x, y), (d\tilde{x}, d\tilde{y}))$  admet une densité  $p_t^\varepsilon((x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}))$  par rapport à la mesure de Lebesgue.*

*Démonstration.* Le Corollaire 7.2 dans [72] permet de montrer que, si le générateur infinitésimal de (3.1) vérifie la condition de Hörmander, alors le semi-groupe associé au processus est fortement Fellérien et si le processus admet une mesure invariante, alors elle est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Soit les champs de vecteurs  $F_0 = x(1 - x^2)\partial_x - \lambda y\partial_y$  et  $F_1 = \varepsilon\sigma(x)(\cos(\theta)\partial_x + \sin(\theta)\partial_y)$ . Le générateur infinitésimal (3.10) s'écrit donc comme étant :

$$\mathcal{L}^\varepsilon = F_0 + \frac{\varepsilon^2}{2}F_1^2, \quad (3.20)$$

où  $F_1^2 = \sigma^2(x)(\cos^2(\theta)\partial_{xx} + \sin^2(\theta)\partial_{yy} + 2\cos(\theta)\sin(\theta)\partial_{xy})$ .

Soit  $\mathcal{A}_k$ ,  $k \geq 0$ , la famille de champs de vecteurs définie par  $\mathcal{A}_0 = \{F_1\}$  et  $\mathcal{A}_{k+1} = \mathcal{A}_k \cup \{[F_i, G], G \in \mathcal{A}_k, i = 0, 1\}$  où  $[U, V]$  est le crochet de Lie des champs de vecteurs  $U$  et  $V$ . Nous notons  $\mathcal{A}_k(x, y)$  l'espace vectoriel engendré par les champs de vecteurs de  $\mathcal{A}_k$  pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Le critère de Hörmander défini dans [48, théorème 1.1] est vérifié s'il existe  $k > 0$  tel que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , l'espace vectoriel des  $\mathcal{A}_k(x, y)$  engendre  $\mathbb{R}^2$ .

Pour  $k = 0$ ,  $\mathcal{A}_0 = \{F_1\}$  peut engendrer au plus  $\mathbb{R}$ . Le champ de vecteurs  $F_1$  ne s'annule pas pour  $\sigma_1 = 0$  et il s'annule en  $x = -\frac{\sigma_0}{\sigma_1}$  si  $\sigma_1 \neq 0$ . Pour  $k = 1$ ,  $\mathcal{A}_1 = \{F_1, [F_0, F_1]\}$  engendre  $\mathbb{R}^2$  si pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $F_1(x, y) \neq 0$ ,  $[F_0, F_1](x, y) \neq 0$  et les champs de vecteurs  $F_1$  et  $[F_0, F_1]$  ne sont pas colinéaires.

Nous calculons  $[F_0, F_1]$  et nous obtenons

$$[F_0, F_1] = F_0(F_1) - F_1(F_0).$$

Détaillons le calcul de  $F_0(F_1)$  et  $F_1(F_0)$  :

$$\begin{aligned}
F_0(F_1) &= x(1-x^2)\partial_x(F_1) - \lambda y\partial_y(F_1) \\
&= x(1-x^2)\varepsilon\sigma_1(\cos(\theta)\partial_x + \sin(\theta)\partial_y)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
F_1(F_0) &= \varepsilon\sigma(x)(\cos(\theta)\partial_x(F_0) + \sin(\theta)\partial_y(F_0)) \\
&= \varepsilon\sigma(x)((1-3x^2)\cos(\theta)\partial_x - \lambda\sin(\theta)\partial_y).
\end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons

$$[F_0, F_1] = \varepsilon\cos(\theta)(\sigma(x)(3x^2-1) + \sigma_1x(1-x^2))\partial_x + \varepsilon\sin(\theta)(\sigma(x)\lambda + \sigma_1x(1-x^2))\partial_y.$$

Les champs de vecteurs  $F_1$  et  $[F_0, F_1]$  peuvent être colinéaires, cherchons donc les valeurs de  $x$  telles que le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} \varepsilon\cos(\theta)(\sigma(x)(3x^2-1) + \sigma_1x(1-x^2)) & \sigma(x)\cos(\theta) \\ \varepsilon\sin(\theta)(\sigma(x)\lambda + \sigma_1x(1-x^2)) & \sigma(x)\sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

est nulle.

Nous obtenons ainsi  $\varepsilon\cos(\theta)\sin(\theta)\sigma^2(x)(3x^2-1-\lambda) = 0$ .

Les champs de vecteurs  $F_1$  et  $[F_0, F_1]$  sont colinéaires pour  $x$  tel que  $\sigma^2(x)(3x^2-1-\lambda) = 0$ . Nous obtenons (3.21) pour  $x \in \left\{ \pm\sqrt{\frac{\lambda+1}{3}} \right\}$  si  $\sigma_1 = 0$  et  $x \in \left\{ \pm\sqrt{\frac{\lambda+1}{3}}, -\frac{\sigma_0}{\sigma_1} \right\}$  sinon. Le champ de vecteurs  $F_1$  s'annule pour  $x = -\frac{\sigma_0}{\sigma_1}$  si  $\sigma_1 \neq 0$ . Ainsi, introduisons l'ensemble

$$R_k = \left\{ (x, \sigma_0, \sigma_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+ \times ]-\sigma_0, \sigma_0[ : \text{span}(\mathcal{A}_i(x, y)) \neq \mathbb{R}^2 \text{ pour tout } i = 0, \dots, k \right\}.$$

Aussi, nous réécrivons  $R_k$  comme étant :

$$R_k = \left\{ (x, \sigma_0, \sigma_1) \in R_{k-1} : \text{span}(\mathcal{A}_k(x, y)) \neq \mathbb{R}^2 \right\},$$

où  $R_0 = \{(x, \sigma_0, \sigma_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+ \times ]-\sigma_0, \sigma_0[ : \text{span}(\mathcal{A}_0(x, y)) \neq \mathbb{R}^2\}$ . Cherchons donc  $k_1$  tel que  $R_{k_1}$  soit vide.

En reprenant les cas  $k = 0$  et  $k = 1$ , nous avons  $R_0 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+ \times ]-\sigma_0, \sigma_0[$  et

$$R_1 = \left\{ \pm\sqrt{\frac{\lambda+1}{3}}, -\frac{\sigma_0}{\sigma_1} \right\} \times \mathbb{R}_*^+ \times ]-\sigma_0, \sigma_0[ \setminus \{0\} \cup \left\{ \pm\sqrt{\frac{\lambda+1}{3}} \right\} \times \mathbb{R}_*^+ \times \{0\}.$$

Remarquons que  $R_1 \subset R_0$ . En calculant successivement  $\mathcal{A}_k$  pour  $k = 2$  et  $k = 3$ , nous trouvons les conditions sur les paramètres  $\lambda$ ,  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$  telles que  $\mathcal{A}_k$  n'engendre pas  $\mathbb{R}^2$ . Nous calculons ainsi  $R_2$  et  $R_3$ . Nous obtenons ainsi (cf. le code Maxima en annexe A), que, pour  $k \geq 3$ ,  $\mathcal{A}_k(x, y)$  n'engendre pas  $\mathbb{R}^2$  pour les paramètres  $(x, \sigma_0, \sigma_1) \in \{(-1, \sigma_0, \sigma_0), (1, \sigma_0, -\sigma_0)\}$ .

Or, sous l'hypothèse 3.2.2, nous avons  $\sigma_1 \notin \{-\sigma_0, \sigma_0\}$ . Ainsi  $R_k$  est vide pour  $k = 3$  et donc que le critère de Hörmander est vérifié.

Le semi-groupe de transition  $P_t^\varepsilon$  admet donc une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

□

Introduisons la norme en variation totale d'une mesure  $\mu \in \mathcal{M}$  est définie par  $\|\mu\| := \int_{\mathbb{R}^2} |\mu|$ , où  $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$ .

Pour une fonction  $W : \mathbb{R}^2 \rightarrow [1; +\infty)$ , nous notons  $\mathcal{M}_W$  (resp.  $\mathcal{N}_W$ ), l'ensemble des mesures finies  $\mu \in \mathcal{M}$  (resp.  $\mathcal{N}$ ) tel que

$$\|\mu\|_W := \int_{\mathbb{R}^2} W|\mu| < \infty.$$

Nous allons décomposer la preuve du théorème 3.2.3 en plusieurs parties. Rappelons les différentes conditions introduites dans [13] puis nous prouverons ces conditions dans des lemmes ci-dessous.

**Hypothèse 3.4.2** (Condition de Liapunov). *Le semi-groupe stochastique  $(S_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$  satisfait la condition de Liapunov avec une fonction de Liapunov  $W$  à valeurs dans  $[1, +\infty)$  si, pour tout  $t \geq 0$  et pour tout  $\mu \in \mathcal{M}_W$ , il existe deux constantes positives indépendantes de  $\varepsilon$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , telles que*

$$\|S_t^\varepsilon \mu\|_W \leq e^{-\alpha_2 t} \|\mu\|_W + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} (1 - e^{-\alpha_2 t}) \|\mu\|. \quad (3.22)$$

**Hypothèse 3.4.3** (Condition de Harris). *Soit  $t > 0$ , l'opérateur stochastique  $S_t^\varepsilon$  satisfait la condition de Harris sur un ensemble  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$  s'il existe  $0 < \alpha < 1$  et  $\eta$  une mesure de probabilité tels que*

$$\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), S_t^\varepsilon \mu(E) \geq \alpha \eta(E) \int_{\mathcal{C}} \mu, \text{ pour toute mesure } 0 \leq \mu \in \mathcal{M}. \quad (3.23)$$

**Hypothèse 3.4.4** (Condition de couplage local). *L'opérateur stochastique  $S_t^\varepsilon$  satisfait la condition de couplage local avec une fonction de Liapunov  $W$  pour  $t > 0$  s'il existe  $0 < \gamma_H < 1$  et  $A \geq 0$  tels que*

$$\text{pour toute mesure } \mu \in \mathcal{N}_W, \text{ tel que } \|\mu\|_W \leq A \|\mu\|, \text{ nous avons } \|S_t^\varepsilon \mu\| \leq \gamma_H \|\mu\|. \quad (3.24)$$

Le but de ce second lemme est de montrer que l'hypothèse 3.4.2 est vérifiée pour l'opérateur  $(S_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$  et  $W(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ .

**Lemme 3.4.5.** *Le semi-groupe  $(S_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$  satisfait la condition de Liapunov pour  $W(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ .*



*Démonstration.* D'après le lemme 5.3 de [13], s'il existe des constantes positives indépendantes de  $\varepsilon$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , telles que

$$\mathcal{L}^\varepsilon W \leq \alpha_1 - \alpha_2 W,$$

alors (3.22) est vérifiée. En combinant le lemme 5.3 de [13] et la proposition 3.3.1, concluons la preuve de ce lemme. □

Dans les lemmes suivants, nous prouvons qu'il existe un  $T > 0$  tel que l'opérateur stochastique  $S_T^\varepsilon$  vérifie la condition de couplage local (3.4.4).

Pour cela, nous introduisons l'ensemble  $D_\lambda$  défini de la manière suivante :

$$D_\lambda := [-d_1, d_1] \times [-d_2, d_2],$$

où  $d_1 = \frac{1 + \alpha}{2}$ ,  $d_2 = |\tan(\theta)| \frac{\alpha - 1}{2}$  et  $\alpha$  défini par

$$\alpha = \min \left( \frac{-\sigma_0}{\sigma_1}, \max \left( g_\lambda \left( -\sqrt{\frac{\lambda + 1}{3}} \right), \left| g_\lambda \left( \frac{\sigma_1(1 + \sqrt{1 + 4\lambda}) - 2\sigma_0}{4\sigma_1} \right) \right| \right) \right) \quad (3.25)$$

avec

$$g_\lambda(x) = \frac{x(x^2 - (\lambda + 1))}{\lambda}. \quad (3.26)$$

Les détails de la construction de l'ensemble  $D_\lambda$  sont apportés dans la preuve du lemme ci-dessous.

**Lemme 3.4.6.** *Pour tout  $t > T_{C_R}$ , où  $T_{C_R} \geq 0$ , l'opérateur  $S_t^\varepsilon$  satisfait la condition de couplage local pour la fonction  $W(x, y) = 1 + x^2 + y^2$  et  $A > 0$ .*

La preuve de ce lemme n'est pas immédiate et repose sur des résultats du théorème du support de [81] et le lemme 3.1 de [13]. D'après le lemme 3.1 de [13], la condition de Harris 3.4.3 implique celle de couplage 3.4.4. Pour prouver la condition de Harris, nous allons minorer la probabilité d'atteindre n'importe quel point d'un ensemble en partant d'une condition initiale prise dans un compact en un temps fini en utilisant le théorème du support de [81].

Pour cela, nous allons introduire le système de contrôle associé au processus  $(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)$  solution de (3.1) défini par :

$$\begin{cases} dx_t^\varphi = x_t^\varphi(1 - (x_t^\varphi)^2)dt + \varepsilon\sigma(x_t^\varphi)\cos(\theta)\varphi(t)dt \\ dy_t^\varphi = -\lambda y_t^\varphi dt + \varepsilon\sigma(x_t^\varphi)\sin(\theta)\varphi(t)dt, \end{cases} \quad (3.27)$$

où la fonction de contrôle  $\varphi$  est une fonction continue par morceaux définie sur  $\mathbb{R}_+$ .

Pour  $R \geq 1$ , nous introduisons l'ensemble  $C_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, W(x, y) \leq R\}$  et prouvons le lemme suivant.

**Lemme 3.4.7.** *Il existe un temps  $T_{\mathcal{C}_R} > 0$  tel que pour tout  $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}_R$  et  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in D_\lambda$ , il existe une fonction de contrôle  $\varphi$  pour laquelle nous avons  $(x_0^\varphi, y_0^\varphi) = (x_0, y_0)$  et  $(x_{T_{\mathcal{C}_R}}^\varphi, y_{T_{\mathcal{C}_R}}^\varphi) = (\tilde{x}, \tilde{y})$  où  $(x_t^\varphi, y_t^\varphi)_{t \geq 0}$  est solution de (3.27) pour la fonction de contrôle  $\varphi$ .*

*Démonstration.* Nous allons décomposer la preuve en trois parties :

- construire une fonction de contrôle et trouver le temps maximal pour aller de  $z_1$  vers n'importe quel point  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in D_\lambda$ ,
- construire une fonction de contrôle et trouver le temps maximal pour aller de toute condition initiale  $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}_R$  vers le voisinage du point  $z_1 = (-1, 0)$ ,
- construire une fonction de contrôle permettant de passer d'un voisinage de  $z_1$  à  $z_1$  en un temps fini.

De plus, nous montrons que le temps nécessaire pour aller de  $(x_0, y_0)$  à  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  est indépendant des conditions initiale et finale. En particulier, nous montrerons respectivement dans l'étape 1 (respectivement l'étape 2) que le temps ne dépend pas de la condition finale (respectivement la condition initiale).

Avant cela, nous allons préciser les paramètres considérés ainsi que les fonctions de contrôle que nous utiliserons.

Distinguons quatre cas différents selon que  $\theta \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[ \cup ]-\frac{\pi}{2}, 0[$  ou  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \cup ]-\pi, -\frac{\pi}{2}[$  et selon si  $\sigma_1 \in ]-\sigma_0, 0]$  ou  $\sigma_1 \in ]0, \sigma_0[$ .

Pour  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \cup ]-\pi, -\frac{\pi}{2}[$ ,  $\cos(\theta)$  et  $\sin(\theta)$  sont de même signe, et de signe contraire pour  $\theta \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[ \cup ]-\frac{\pi}{2}, 0[$ .

Nous nous intéressons à la preuve dans un seul de ces cas, le raisonnement est similaire dans les autres cas. Nous prenons donc  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et  $\sigma_1 \in ]-\sigma_0, 0]$ .

Considérons les fonctions de contrôle constantes suivantes qui sont bien définies sous l'hypothèse 3.2.2 :

- La fonction  $\varphi_0(t) = 0$  qui permet de suivre le flot du système déterministe.
- La fonction  $\varphi_k(t) = k$  (resp.  $\varphi_{-k}(t) = -k$ ) où  $k > 0$  est pris suffisamment grand pour que la dynamique soit menée par le vecteur  $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$  (resp.  $-\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ ).
- La fonction  $\varphi_*(t) = \frac{-x_*(1-x_*^2)}{\varepsilon \cos(\theta)\sigma(x_*)}$  permet d'annuler la dérivée de la première composante au point  $(x_t, y_t) = (x_*, y_*)$ , où  $x_* \neq \frac{-\sigma_0}{\sigma_1}$  et  $y_* \in \mathbb{R}$ .

Soit  $(x_t^{\varphi_*}, y_t^{\varphi_*})$  solution de (3.27) pour la fonction de contrôle  $\varphi_*$  et de condition initiale  $(x_*, y_*) \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-\sigma_0}{\sigma_1} \right\} \times \mathbb{R}$ . Le système (3.27) pour la fonction de contrôle  $\varphi_*$  se réécrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} dx_t^{\varphi_*} = 0 \\ dy_t^{\varphi_*} = -\lambda y_t^{\varphi_*} dt - \tan(\theta)x_*(1-x_*^2)dt. \end{cases} \quad (3.28)$$

En particulier, le point d'équilibre du système (3.28) est de la forme  $(x_*, \frac{\tan(\theta)x_*(x_*^2-1)}{\lambda})$ .

**Étape 1 : Construction de la fonction de contrôle pour atteindre tout point de  $D_\lambda$  depuis  $(-1,0)$ .**

Nous introduisons les droites  $(\mathcal{D}_{(-1,0)})$ ,  $(\mathcal{D}_{(-d_1,d_2)})$  et  $(\mathcal{D}_{(d_1,-d_2)})$  ayant pour équations

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{(-1,0)}) : & \quad y = \tan(\theta) (x + 1) \\ (\mathcal{D}_{(-d_1,d_2)}) : & \quad y = \tan(\theta) (x + d_1) + d_2 \\ (\mathcal{D}_{(d_1,-d_2)}) : & \quad y = \tan(\theta) (x - d_1) - d_2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Les droites  $(\mathcal{D}_{(-d_1,d_2)})$  et  $(\mathcal{D}_{(d_1,-d_2)})$  passent par les coins du domaine  $D_\lambda$ ;  $(-d_1, d_2)$  et  $(d_1, -d_2)$ .

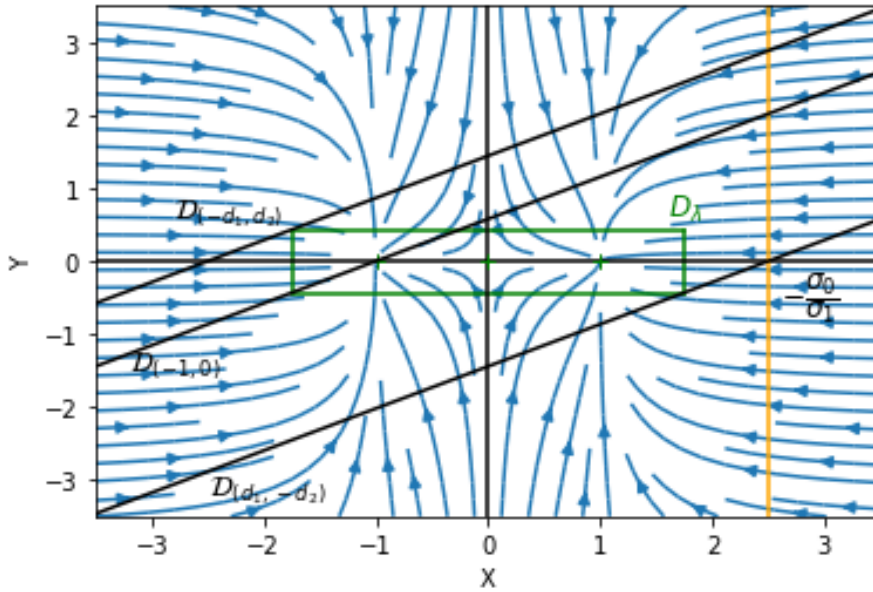


FIGURE 3.3 – Champs de vecteur pour  $(\lambda, \sigma_0, \sigma_1) = (1, 4, -1.6)$

L'intuition pour cette partie est de construire un contrôle en temps fini qui permet d'atteindre un point de la droite  $(\mathcal{D}_{(d_1,-d_2)})$  et un autre qui permet d'atteindre  $(\mathcal{D}_{(-d_1,d_2)})$ . On décompose donc cette partie en deux étapes : l'atteinte de tout point de  $D_\lambda$  en dessous de  $(\mathcal{D}_{(-1,0)})$  et celle des points au-dessus de  $(\mathcal{D}_{(-1,0)})$ .

**Étape 1a : Tout point de  $D_\lambda$  en dessous de la droite  $(\mathcal{D}_{(-1,0)})$  est atteignable depuis  $(-1,0)$ .**

Soit  $D_\lambda^-$  l'ensemble des points de  $D_\lambda$  en dessous de la droite  $(\mathcal{D}_{(-1,0)})$ . Si nous trouvons  $x_* \in \mathbb{R}$  tel que le point d'équilibre de (3.28),  $(x_*, -\frac{\tan(\theta)x_*(1-(x_*)^2)}{\lambda})$ , est en dessous de la droite  $(\mathcal{D}_{(d_1,-d_2)})$  alors nous pourrions construire un contrôle pour atteindre tout point de  $D_\lambda^-$ .

La condition énoncée ci-dessus est équivalente à l'inégalité suivante, soit  $x_* \in \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{aligned} & -\frac{\tan(\theta)x_*(1-(x_*)^2)}{\lambda} < \tan(\theta)(x_* - d_1) - d_2 \\ \iff & \tan(\theta)x_*(x_*^2 - 1) < \lambda \tan(\theta)(x_* - d_1) - \lambda d_2 \quad (3.30) \\ \iff & \tan(\theta)x_*^3 - \tan(\theta)(1 + \lambda)x_* + \lambda(\tan(\theta)d_1 + d_2) < 0. \end{aligned}$$

Pour  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , la fonction  $\tan(\theta)$  est positive. Il existe donc  $x_* < 0$  tel que le polynôme défini par  $\tan(\theta)x^3 - \tan(\theta)(1 + \lambda)x - \lambda(\tan(\theta)d_1 + d_2)$  est négatif.

Soient  $(x_a, y_a) \in D_\lambda^-$  et  $x_* \in ]-\infty, -\frac{\sigma_0}{\sigma_1}[$  vérifiant  $\frac{\tan(\theta)x_*(x_*^2-1)}{\lambda} < \tan(\theta)(x_* - x_a) + y_a$ .

Nous définissons  $\left(x_t^{\varphi_{(x_a, y_a)}^-}, y_t^{\varphi_{(x_a, y_a)}^-}\right)$  solution de (3.27) avec une condition initiale  $(-1, 0)$  et pour la fonction de contrôle  $\varphi_{(x_a, y_a)}^-$  définie par

$$\varphi_{(x_a, y_a)}^-(t) = \begin{cases} \varphi_{-k}(t) & \text{pour } t \leq t_1, \\ \varphi_*(t) & \text{pour } t \in ]t_1, t_2], \\ \varphi_k(t) & \text{pour } t > t_2, \end{cases} \quad (3.31)$$

où  $t_1 = \inf \{t : x_t < x_*\}$  et  $t_2 = \inf \{t : y_t^{\varphi_*} < \tan(\theta)(x_* - x_a) + y_a\}$  et  $(x_t^{\varphi_*}, y_t^{\varphi_*})_{t \geq 0}$  est solution de (3.28) de condition initiale  $(x_*, \tan(\theta)(x_* + 1))$ .

Montrons maintenant que cette fonction de contrôle permet d'atteindre tout point en dessous de la droite  $(\mathcal{D}_{(-1,0)})$  en un temps fini. La difficulté réside dans la définition de  $x_*$ .

La fonction de contrôle  $\varphi_*$  annule la première composante et permet au le processus  $(x_t^{\varphi_*}, y_t^{\varphi_*})$  solution de (3.28) de se déplacer verticalement dans l'espace. Si  $dy_t^{\varphi_*} < 0$ , le processus peut atteindre des points situés en dessous de la droite  $(\mathcal{D}_{(-1,0)})$ . Si nous trouvons  $x_* \in ]-\infty, -\frac{\sigma_0}{\sigma_1}[$  tel que le point d'équilibre de (3.28)  $\left(x_*, -\frac{\tan(\theta)x_*(1-x_*^2)}{\lambda}\right)$  est en dessous de la droite  $(\mathcal{D}_{(d_1, -d_2)})$  alors le temps  $t_2$  est fini.

La condition énoncée ci-dessus est équivalente à l'inégalité (3.30).

Pour  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , la fonction  $\tan(\theta)$  est positive. Il existe donc  $x_* < 0$  tel que le polynôme défini par  $\tan(\theta)x^3 - \tan(\theta)(1 + \lambda)x + \lambda(\tan(\theta)d_1 + d_2)$  est négatif. Le temps  $t_2$  est fini.

La fonction de contrôle  $\varphi_{-k}$  permet d'accéder au point  $(x_*, \tan(\theta)(x_* + 1))$  en temps fini où  $x_*$  vérifie  $\tan(\theta)x_*^3 - \tan(\theta)(1 + \lambda)x_* - \lambda(\tan(\theta)d_1 + d_2) < 0$ . La fonction de contrôle  $\varphi_k$  permet d'accéder au point  $(x_a, y_a)$  à partir du point  $\left(x_{t_2}^{\varphi_{(x_a, y_a)}^-}, y_{t_2}^{\varphi_{(x_a, y_a)}^-}\right) = (x_*, \tan(\theta)(x_* - x_a) + y_a)$  en temps fini.

Nous obtenons bien qu'il existe un contrôle tel que l'ensemble des points de  $D_\lambda^-$  est accessible depuis  $(-1, 0)$  en un temps fini  $T_{1a}^{(x_a, y_a)}$  où  $(x_a, y_a) \in D_\lambda^-$ . Soit  $T_{1a} = \sup \left\{ (x_a, y_a) \in D_\lambda^-, \inf \left\{ t : \left( x_t^{\varphi_{(x_a, y_a)}^-}, y_t^{\varphi_{(x_a, y_a)}^-} \right) = (x_a, y_a) \right\} \right\}$ . À partir de ce temps

$T_{1a}$ , il est possible de construire une fonction de contrôle indépendante de la condition finale telle que l'on puisse atteindre depuis  $(-1, 0)$  tout point de  $D_\lambda^-$ . En effet, en ajoutant une étape dite d'attente pendant un temps de  $T_{1a} - T_{1a}^{(x_a, y_a)}$ , il est possible d'avoir une fonction de contrôle telle que le temps d'atteinte pour tout point de  $D_\lambda^-$  est  $T_{1a}$ .

Un exemple de trajectoire est donné dans Figure 3.4 pour deux conditions finales dans  $D_\lambda^-$ .

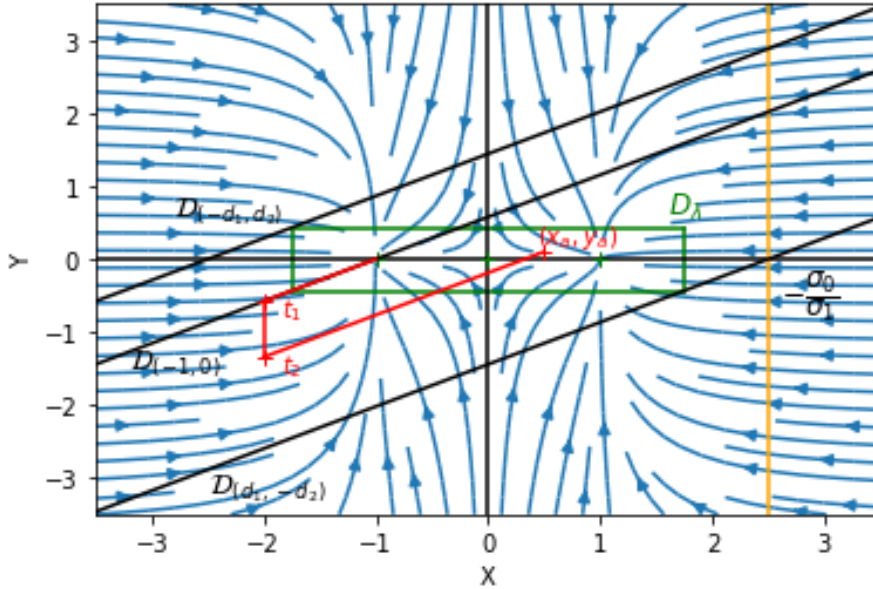


FIGURE 3.4 – Trajectoires de solutions de (3.27) pour les paramètres  $(\lambda, \sigma_0, \sigma_1) = (1, 4, -1.8)$ , de condition initiale  $(-1, 0)$  et de condition finale  $(0.5, 0.1) \in D_\lambda^-$  pour la fonction de contrôle  $\varphi_{(x_a, y_a)}^-$ . Les droites  $\mathcal{D}_{(-d_1, d_2)}$ ,  $\mathcal{D}_{(-1, 0)}$  et  $\mathcal{D}_{(d_1, -d_2)}$  sont définies par (3.29).

**Étape 1b : Tout point de  $D_\lambda$  au-dessus de la droite  $(\mathcal{D}_{(-1, 0)})$  est atteignable depuis  $(-1, 0)$ .**

Soit  $D_\lambda^+$  l'ensemble des points de  $D_\lambda$  au-dessus de la droite  $(\mathcal{D}_{(-1, 0)})$ . À cette étape, nous allons aussi expliquer la définition de l'ensemble  $D_\lambda$  ainsi que les difficultés pour atteindre les points au-dessus de  $(\mathcal{D}_{(-1, 0)})$ .

Tout d'abord, nous considérons un cas simple lorsque  $\sigma_1 = 0$ . Nous procédons de façon analogue à celle faite dans l'étape 1a. Si nous trouvons  $x_* \in \mathbb{R}$  tel que le point d'équilibre de (3.28),  $(x_*, -\frac{\tan(\theta)x_*(1-(x_*)^2)}{\lambda})$ , est au-dessus de la droite  $(\mathcal{D}_{(-d_1, d_2)})$  alors nous pourrions construire un contrôle pour atteindre tout point de  $D_\lambda^+$ .

La condition énoncée ci-dessus est équivalente à l'inégalité suivante, soit  $x_* \in \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{aligned} -\frac{\tan(\theta)x_*(1-(x_*)^2)}{\lambda} &> \tan(\theta)(x_* + d_1) + d_2 \\ \tan(\theta)x_*(x_*^2 - 1) &> \lambda \tan(\theta)(x_* + d_1) + \lambda d_2 \\ \tan(\theta)x_*^3 - \tan(\theta)(1 + \lambda)x_* - \lambda(\tan(\theta)d_1 + d_2) &> 0. \end{aligned}$$

Pour  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , la fonction  $\tan(\theta)$  est positive. Il existe donc  $x_* > 0$  tel que le polynôme

défini par  $\tan(\theta)x^3 - \tan(\theta)(1 + \lambda)x - \lambda(\tan(\theta)d_1 + d_2)$  est positif.

Soient  $(x_b, y_b) \in D_\lambda^+$  et  $x_* \in \mathbb{R}$  vérifiant  $\frac{\tan(\theta)x_*(x_*^2-1)}{\lambda} < \tan(\theta)(x_* - x_b) + y_b$ . Soit  $\left(x_t^{\varphi^{+,0}(x_b, y_b)}, y_t^{\varphi^{+,0}(x_b, y_b)}\right)$  solution de (3.27) avec une condition initiale  $(-1, 0)$  et pour la fonction de contrôle  $\varphi_{(x_b, y_b)}^{+,0}$  définie par

$$\varphi_{(x_b, y_b)}^{+,0}(t) = \begin{cases} \varphi_k(t) & \text{pour } t \leq t_1, \\ \varphi_*(t) & \text{pour } t \in ]t_1, t_2], \\ \varphi_{-k}(t) & \text{pour } t > t_2, \end{cases} \quad (3.32)$$

où  $t_1 = \inf \{t : x_t > x_*\}$  et  $t_2 = \inf \{t : y_t^{\varphi_*} > \tan(\theta)(x_* - x_b) + y_b\}$  où  $(x_t^{\varphi_*}, y_t^{\varphi_*})_{t \geq 0}$  est solution de (3.28) et de condition initiale  $(x_*, \tan(\theta)(x_* + 1))$ .

Pour  $\sigma_1 = 0$  et pour tout point  $(x_b, y_b) \in D_\lambda^+$ , nous avons construit une fonction de contrôle afin d'atteindre  $(x_b, y_b) \in D_\lambda^+$  en un temps fini  $T_{1b}^{0, (x_b, y_b)}$ .

Soit  $T_{1b}^0 = \sup \left\{ (x_b, y_b) \in D_\lambda^+, \inf \left\{ t : \left( x_t^{\varphi_{(x_b, y_b)}^{+,0}}, y_t^{\varphi_{(x_b, y_b)}^{+,0}} \right) = (x_b, y_b) \right\} \right\}$ . De manière similaire à l'étape 1a, en ajoutant un temps d'attente  $T_{1b}^0 - T_{1b}^{0, (x_b, y_b)}$ , il est possible de construire une fonction de contrôle indépendante de la condition finale telle que l'on puisse atteindre depuis  $(-1, 0)$  tout point de  $D_\lambda^+$ .

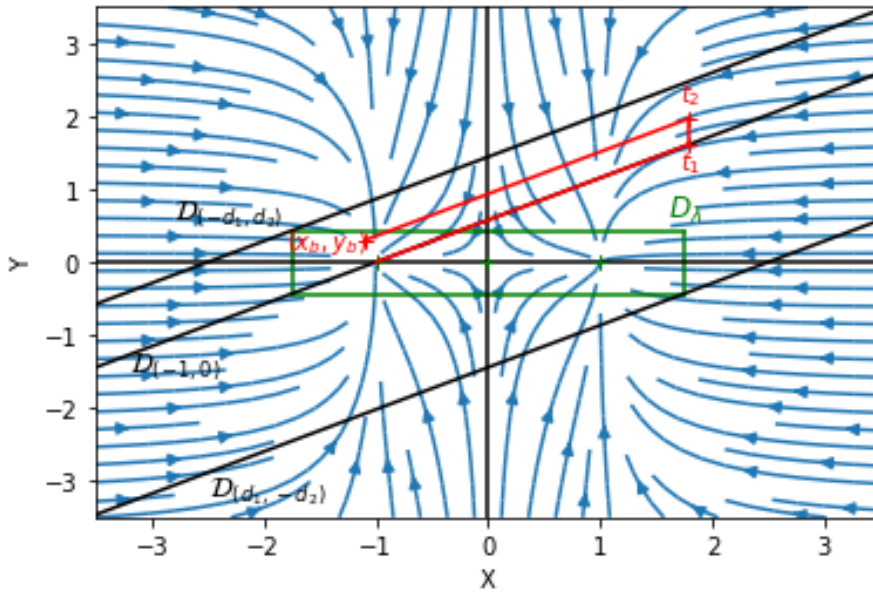


FIGURE 3.5 – Trajectoires de solutions de (3.27) pour les paramètres  $(\lambda, \sigma_0, \sigma_1) = (1, 4, 0)$ , de condition initiale  $(-1, 0)$  et de condition finale  $(-1.2, 0.2) \in D_\lambda^+$  pour la fonction de contrôle  $\varphi_{(x_b, y_b)}^{+,0}$ .

Lorsque  $\sigma_1 < 0$ , il existe des valeurs de  $\lambda$  pour lesquels  $x_* > \frac{-\sigma_0}{\sigma_1}$ . La droite  $x = -\frac{\sigma_0}{\sigma_1}$  contraint le système à rester dans l'intervalle  $\left] -\frac{\sigma_0}{\sigma_1}, +\infty \right[ \times \mathbb{R}$ . Il est nécessaire de définir le domaine  $D_\lambda$  en fonction de cette contrainte. Les contraintes à respecter pour construire  $D_\lambda$  sont les suivantes : les points (3.3) appartiennent à cet ensemble et aucun des points de la

droite  $x = -\frac{\sigma_0}{\sigma_1}$  n'est dedans.

Nous cherchons  $d_1 \in ]1, -\frac{\sigma_0}{\sigma_1}[$  et  $d_2 > 0$  tel que  $D_\lambda$  est défini par  $D_\lambda = [-d_1, d_1] \times [-d_2, d_2]$ . Soit  $(\mathcal{D}_{(-d_1, d_2)})$  la droite passant par  $(-d_1, d_2)$ . Introduisons  $\bar{\alpha} \in ]1, -\frac{\sigma_0}{\sigma_1}[$  et réécrivons  $d_1$  et  $d_2$  en fonction de  $\bar{\alpha}$ . Posons  $d_1 = \frac{1 + \bar{\alpha}}{2}$  et  $d_2 = \frac{\tan(\theta)(\bar{\alpha} - 1)}{2}$ .

Intuitivement, nous souhaitons utiliser le flot lorsque l'on est proche de la droite  $x = -\frac{\sigma_0}{\sigma_1}$  et la symétrie dans le système. Lorsque le processus  $(x_t^{\varphi_k}, y_t^{\varphi_k})$  solution de (3.27) pour la fonction de contrôle  $\varphi_k$  est proche de la droite  $x = -\frac{\sigma_0}{\sigma_1}$ , le processus  $(x_t^{\varphi_k}, y_t^{\varphi_k})$  suit le flot déterministe. Dans les figures suivantes, observons le comportement du processus  $(x_t^{\varphi_k}, y_t^{\varphi_k})_{t \geq 0}$  pour différentes valeurs de  $\lambda$ .

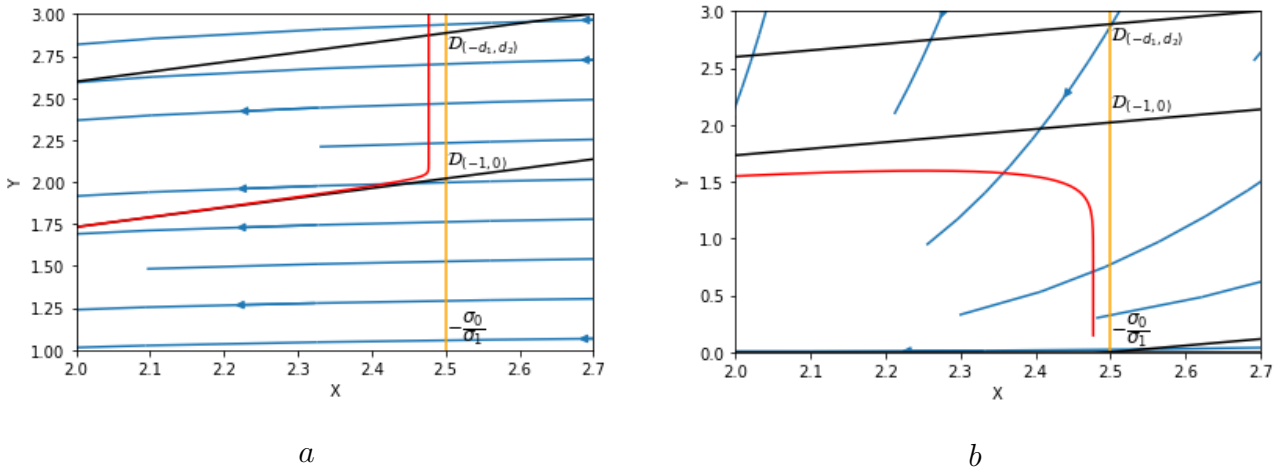


FIGURE 3.6 – Trajectoires de solutions de (3.27) de condition initiale  $(-1, 0)$  pour les paramètres suivant : figure a)  $(\lambda, \sigma_0, \sigma_1) = (0.7, 4, -1.6)$  et pour la figure b),  $(\lambda, \sigma_0, \sigma_1) = (50, 4, -1.6)$ .

Soit  $v_F = \begin{pmatrix} x(1-x^2) \\ -\lambda \tan(\theta)(x + \alpha_*) \end{pmatrix}$  le vecteur associé au flot évalué au point  $(x, y)$ . Si le vecteur  $v_F$  évalué en  $(-\frac{\sigma_0}{\sigma_1}, \tan(\theta)(1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_1}))$  n'est pas colinéaire avec le vecteur directeur de la droite  $(\mathcal{D}_{(-1,0)})$  alors soit le processus est au-dessus ou en dessous de la droite  $(\mathcal{D}_{(-1,0)})$  puisque le processus n'est soumis qu'au flot. Cette observation peut sembler triviale, mais la preuve repose sur cela. Si le processus  $(x_t^{\varphi_k}, y_t^{\varphi_k})$  est au-dessus de la droite  $(\mathcal{D}_{(-1,0)})$ , alors nous avons trouvé une méthode pour accéder à des points au-dessus. Il reste à montrer que l'on peut atteindre tous les points de  $D_\lambda$  au-dessus de la droite  $(\mathcal{D}_{(-1,0)})$ . Si le processus  $(x_t^{\varphi_k}, y_t^{\varphi_k})$  est en dessous de la droite  $(\mathcal{D}_{(-1,0)})$  par symétrie du champ de vecteur, il est possible de regarder le problème proche de la droite  $x = \frac{\sigma_0}{\sigma_1}$ .

Tout d'abord, voyons pour quelle droite de pente  $\tan(\theta)$ , les vecteurs  $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$  et  $v_F$  sont colinéaires. Soit la droite définie par  $y = \tan(\theta)(x + \bar{x})$  telle que  $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$  et  $v_F$  sont colinéaires

alors  $\bar{x}$  vérifie

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -\cos(\theta)\lambda y - \sin(\theta)x(1-x^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{\tan(\theta)}{\lambda}x(x^2-1) \\ \Leftrightarrow \tan(\theta)(x+\bar{x}) &= \frac{\tan(\theta)}{\lambda}x(x^2-1) \\ \Leftrightarrow \bar{x} &= \frac{x(x^2-(1+\lambda))}{\lambda}. \end{aligned}$$

Introduisons la fonction  $g_\lambda(x) = \frac{x(x^2-(\lambda+1))}{\lambda}$  pour simplifier la rédaction. Nous cherchons  $\bar{\alpha} < -\frac{\sigma_0}{\sigma_1}$  tel que  $g_\lambda(x) > 1$ .

Pour cela, posons  $f_\lambda(x) = \lambda(g_\lambda(x) - 1) = x(x^2 - (\lambda + 1)) - \lambda$  et étudions pour quelles valeurs de  $x \in ]-\infty, -\frac{\sigma_0}{\sigma_1}[$  et  $\lambda$ , on a  $f_\lambda(x) > 0$ . Une racine évidente du polynôme  $f_\lambda$  est  $x = -1$ . Nous factorisons  $f_\lambda$  sous la forme suivante

$$f_\lambda(x) = (x+1)(x-x_+)(x-x_-),$$

où  $x_+ = \frac{1 + \sqrt{1+4\lambda}}{2}$  et  $x_- = \frac{1 - \sqrt{1+4\lambda}}{2}$ .

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{2\}$ , nous avons  $x_- < 0$ .

Pour tout  $\lambda < 2$ , on a le tableau de signe suivant

$x$	$-\infty$		$-1$		$x_-$		$x_+$		$+\infty$
$f_\lambda(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

et pour tout  $\lambda > 2$ , on a

$x$	$-\infty$		$x_-$		$-1$		$x_+$		$+\infty$
$f_\lambda(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Pour  $\lambda < \frac{\sigma_0(\sigma_0+\sigma_1)}{\sigma_1^2}$ ,  $x_+ < -\frac{\sigma_0}{\sigma_1}$  et  $g_\lambda\left(\frac{\sigma_1 x_+ - \sigma_0}{2\sigma_1}\right) > 1$ . Lorsque  $\lambda > \frac{\sigma_0(\sigma_0+\sigma_1)}{\sigma_1^2}$ ,  $x_+ > -\frac{\sigma_0}{\sigma_1}$  et  $g_\lambda\left(\frac{\sigma_1 x_+ - \sigma_0}{2\sigma_1}\right) < 1$ .

Il n'est pas nécessaire de choisir le plus grand domaine  $D_\lambda$ . Ainsi, nous posons  $\bar{\alpha} = \min\left(\frac{-\sigma_0}{\sigma_1}, \max\left(g_\lambda\left(-\sqrt{\frac{\lambda+1}{3}}\right), \left|g_\lambda\left(\frac{\sigma_1(1+\sqrt{1+4\lambda})-2\sigma_0}{4\sigma_1}\right)\right|\right)\right)$ . La fonction  $g_\lambda$  est impaire donc  $g_\lambda(x) = -g_\lambda(-x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Maintenant que le domaine  $D_\lambda$  est défini, construisons les différents contrôles pour atteindre les points de  $D_\lambda^+$  suivant la valeur de  $\lambda$ .

Pour  $\lambda < \frac{\sigma_0(\sigma_0+\sigma_1)}{\sigma_1^2}$ , soit la condition finale  $(x_b, y_b) \in D_\lambda^+$ . Soit  $\left(x_t^{\varphi_{(x_b, y_b)}^{+,1}}, y_t^{\varphi_{(x_b, y_b)}^{+,1}}\right)$  solution



de (3.27) avec une condition initiale  $(-1, 0)$  et pour la fonction de contrôle  $\varphi_{(x_b, y_b)}^{+,1}$  définie par

$$\varphi_{(x_b, y_b)}^{+,1}(t) = \begin{cases} \varphi_k(t) \text{ pour } t \leq t_1, \\ \varphi_{-k}(t) \text{ pour } t > t_1, \end{cases} \quad (3.33)$$

où  $t_1 = \inf \left\{ t : y_t^{\varphi_k} > \tan(\theta) \left( -\frac{\sigma_0}{\sigma_1} - x_b \right) + y_b \right\}$  où  $(x_t^{\varphi_k}, y_t^{\varphi_k})_{t \geq 0}$  est solution de (3.27) pour une fonction de contrôle  $\varphi_k$ .

Pour  $\lambda < \frac{\sigma_0(\sigma_0 + \sigma_1)}{\sigma_1^2}$  et pour tout point  $(x_b, y_b) \in D_\lambda^+$ , nous avons construit une fonction de contrôle afin d'atteindre  $(x_b, y_b) \in D_\lambda^+$  en un temps fini  $T_{1b}^{1, (x_b, y_b)}$ .

Soit  $T_{1b}^1 = \sup \left\{ (x_b, y_b) \in D_\lambda^+, \inf \left\{ t : \left( x_t^{\varphi_{(x_b, y_b)}^{+,1}}, y_t^{\varphi_{(x_b, y_b)}^{+,1}} \right) = (x_b, y_b) \right\} \right\}$ . De manière similaire à l'étape 1a, en ajoutant un temps d'attente  $T_{1b}^1 - T_{1b}^{1, (x_b, y_b)}$ , il est possible de construire une fonction de contrôle indépendante de la condition finale telle que l'on puisse atteindre depuis  $(-1, 0)$  tout point de  $D_\lambda^+$ .

La figure 3.7 illustre le comportement d'un processus solution de (3.27) pour une fonction de contrôle  $\varphi_{(x_b, y_b)}^{+,1}$ .

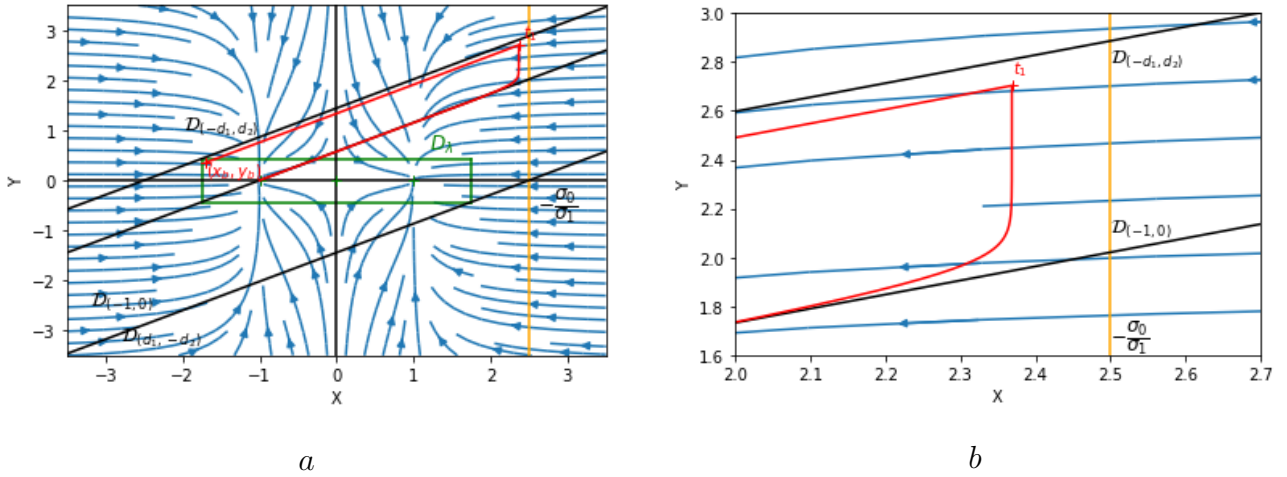


FIGURE 3.7 – Trajectoires de solutions de (3.27) pour les paramètres  $(\lambda, \sigma_0, \sigma_1) = (1, 4, -1.6)$ , de condition initiale  $(-1, 0)$  et de condition finale  $(-1.2, 0.1)$  pour la trajectoire en pointillé,  $(-d_1, d_2)$  pour le trait plein et de contrôle  $\varphi_{D_{(-d_1, d_2)}}$ . La figure b est un zoom de la figure a en  $[2, 2.35] \times [1.6, 3]$ .

Pour  $\lambda > \frac{\sigma_0(\sigma_0 + \sigma_1)}{\sigma_1^2}$ , l'approche est différente. En effet, nous souhaitons utiliser le flot déterministe lorsque l'on atteint  $x = \frac{\sigma_0}{\sigma_1}$ .

Soient  $(x_b, y_b) \in D_\lambda^+$  et  $\left( x_t^{\varphi_{(x_b, y_b)}^{+,2}}, y_t^{\varphi_{(x_b, y_b)}^{+,2}} \right)$  solution de (3.27) avec une condition finale  $(x_b, y_b)$  et pour la fonction de contrôle  $\varphi_{(x_b, y_b)}^{+,2}$  définie par

$$\varphi_{(x_b, y_b)}^{+,2}(t) = \begin{cases} \varphi_k(t) \text{ pour } t \leq t_3 \text{ et } t \in ]0, k \times t_1] \text{ où } k \in \mathbb{N}^*, \\ \varphi_0(t) \text{ pour } t \leq t_3 \text{ et } t \in k \times ]t_1, t_2] \text{ où } k \in \mathbb{N}^*, \\ \varphi_{-k}(t) \text{ pour } t > t_3, \end{cases} \quad (3.34)$$

où  $t_1 = \inf \left\{ t : x_t < \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \right\}$ ,  $t_2 = \inf \left\{ t : x_t > \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{2\sigma_1} \right\}$  et  $t_3 = \inf \left\{ t : y_t > \tan(\theta) \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_1} - x_b \right) + y_b \right\}$ .  
 Pour  $\lambda < \frac{\sigma_0(\sigma_0 + \sigma_1)}{\sigma_1^2}$  et pour tout point  $(x_b, y_b) \in D_\lambda^+$ , nous avons construit une fonction de contrôle afin d'atteindre  $(x_b, y_b) \in D_\lambda^+$  en un temps fini  $T_{1b}^{1,(x_b,y_b)}$ .

Soit  $T_{1b}^2 = \sup \left\{ (x_b, y_b) \in D_\lambda^+, \inf \left\{ t : \left( x_t^{\varphi_{(x_b,y_b)}^{+,2}}, y_t^{\varphi_{(x_b,y_b)}^{+,2}} \right) = (x_b, y_b) \right\} \right\}$ . De manière similaire à l'étape 1a, en ajoutant un temps d'attente  $T_{1b}^2 - T_{1b}^{2,(x_b,y_b)}$ , il est possible de construire une fonction de contrôle indépendante de la condition finale telle que l'on puisse atteindre depuis  $(-1, 0)$  tout point de  $D_\lambda^+$ .

La figure 3.7 illustre le comportement d'un processus solution de (3.27) pour une fonction de contrôle  $\varphi_{(x_b,y_b)}^{+,2}$

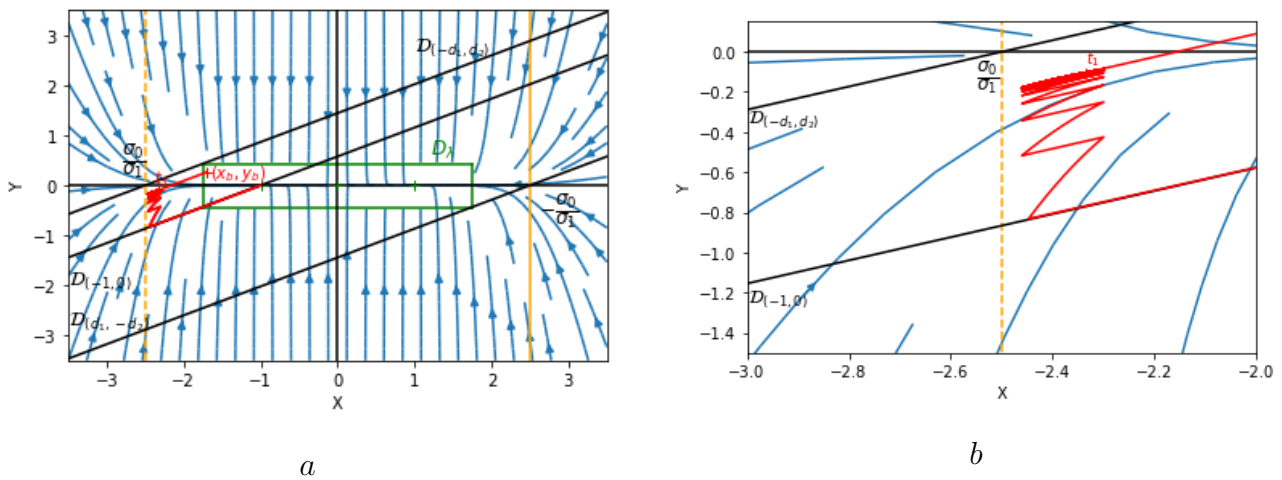


FIGURE 3.8 – Trajectoires de solutions de (3.27) pour les paramètres  $(\lambda, \sigma_0, \sigma_1) = (50, 4, -1.6)$ , de condition initiale  $(-1, 0)$  et de condition finale  $(-1.25, 0.1)$  pour la trajectoire en pointillé,  $(-d_1, d_2)$  pour le trait plein et de contrôle  $\varphi_{D_{(-d_1, d_2)}}$ . La figure  $b$  est un zoom de la figure  $a$  en  $[-3, -2] \times [-1.5, 0.15]$ .

Soit  $T_{1b} = \sup \{i \in \{0, 1, 2\}, T_{1b}^i\}$ .

## Étape 2 : Construction du contrôle pour atteindre un voisinage de $(-1, 0)$

Soit  $\delta > 0$  fixé, nous cherchons à trouver une fonction de contrôle qui permette d'atteindre le point  $(-1, -\delta)$ , un point dans le voisinage de  $(-1, 0)$ , en partant de toute condition initiale prise dans  $\mathcal{C}_R$ .

Tout d'abord, nous distinguons deux ensembles. Soient l'ensemble  $\mathcal{C}_R^+ = \{(x, y) \in \mathcal{C}_R, x > 0\}$  et  $\mathcal{C}_R^- = \{(x, y) \in \mathcal{C}_R, x \leq 0\}$ .

Soit  $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}_R$  et  $(x_t^{\varphi_{(-1, -\delta)}}, y_t^{\varphi_{(-1, -\delta)}})$  la solution de (3.27) avec pour condition initiale

$(x_0, y_0)$  et pour contrôle, la fonction définie par

$$\varphi_{(-1,-\delta)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \leq t_{\mathcal{C}}, \\ \varphi_{-k}(t) & \text{pour } t_{\mathcal{C}} < t \leq t_{\mathcal{C},1}, \\ 0 & \text{pour } t > t_{\mathcal{C},1}, \end{cases} \quad (3.35)$$

où  $t_{\mathcal{C}} = \sup \left\{ (x_0, y_0) \in \mathcal{C}_R^+, \inf \left\{ t : \left\| \begin{pmatrix} x_t^{\varphi_{(-1,-\delta)}} \\ y_t^{\varphi_{(-1,-\delta)}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| < \delta_1 \right\} \right\}$ ,  $\delta_1 > 0$  et  $t_{\mathcal{C},1} = \inf \left\{ t : x_t^{\varphi_{(-1,-\delta)}} < -1 \right\}$ .

Maintenant que nous avons défini cette fonction de contrôle, montrons que :

- cette fonction permet d'atteindre un voisinage de  $(-1, 0)$  depuis toute condition initiale dans  $\mathcal{C}_R$ ,
- il existe un temps fini  $T_2$  ne dépendant pas des conditions initiales prises dans  $\mathcal{C}_R$  tel que le processus solution de (3.27) pour la fonction de contrôle  $\varphi_{(-1,-\delta)}$  atteint un voisinage de  $(-1, 0)$ .

D'après la proposition 3.3.4, lorsque  $\begin{pmatrix} x_t^{\varphi_{(-1,-\delta)}} \\ y_t^{\varphi_{(-1,-\delta)}} \end{pmatrix}$  suit le flot déterministe, sa formulation est explicite. En particulier,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} x_t^{\varphi_{(-1,-\delta)}} \\ y_t^{\varphi_{(-1,-\delta)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  pour  $\begin{pmatrix} x_0^{\varphi_{(-1,-\delta)}} \\ y_0^{\varphi_{(-1,-\delta)}} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_R^+$ . Ainsi,  $t_{\mathcal{C}}$  existe et est fini. Grâce à la fonction de contrôle  $\varphi_{-k}$ , la trajectoire de  $\begin{pmatrix} x_t^{\varphi_{(-1,-\delta)}} \\ y_t^{\varphi_{(-1,-\delta)}} \end{pmatrix}$  est dirigée par  $-\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ . Il existe donc un temps  $t_{\mathcal{C},1}$  tel que  $x_{t_{\mathcal{C},1}}^{\varphi_{(-1,-\delta)}} < -1$ . D'après la proposition 3.3.4,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} x_{t+t_{\mathcal{C},1}}^{\varphi_{(-1,-\delta)}} \\ y_{t+t_{\mathcal{C},1}}^{\varphi_{(-1,-\delta)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  pour  $x_{t_{\mathcal{C},1}}^{\varphi_{(-1,-\delta)}} < -1$ . Le contrôle  $\varphi_{(-1,-\delta)}$  permet pour tout point de  $\mathcal{C}_R$  d'atteindre le voisinage  $\delta$  du point  $(-1, 0)$  en un temps fini  $T_2$ .

Un exemple de trajectoire est donné dans Figure 3.9 avec la condition initiale  $(1.2, 1.2)$ .

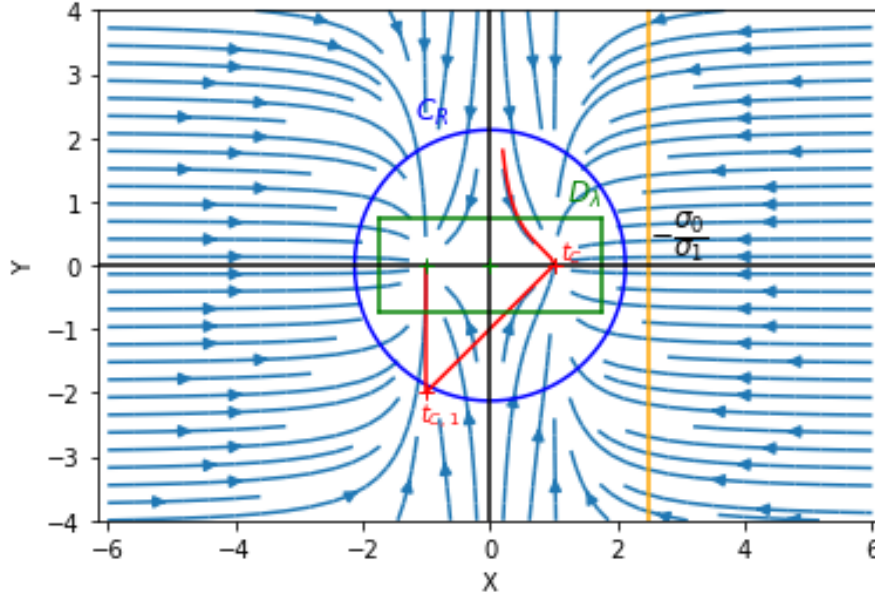


FIGURE 3.9 – Trajectoire d’une solution de (3.27) de condition initiale  $(.2, 1.2)$ ,  $(\lambda, \sigma_0, \sigma_1) = (1, 4, -1.8)$  et de contrôle  $\varphi_{(-1, -\delta)}$ . Le domaine  $\mathcal{C}_R$  est le cercle,  $D_\lambda$  est le rectangle, les points d’équilibre définis par (3.3) sont des croix et la droite d’équation  $x = \frac{-\sigma_0}{\sigma_1}$  est la droite pour laquelle le coefficient de diffusion est nul.

Explicitons la forme du temps  $T_2$ , afin de montrer que ce temps ne dépend pas de la condition initiale choisie dans  $\mathcal{C}_R$ . Lors de l’étape 2 du contrôle  $\varphi_{(-1, -\delta)}$ , pour certaines valeurs de  $\theta$ , le processus n’appartient plus à  $\mathcal{C}_R$  au temps  $t_{\mathcal{C},1}$ . Néanmoins, le fait que le processus puisse s’échapper de  $\mathcal{C}_R$  n’est pas un problème. En effet, d’après la proposition 3.3.4, le processus déterministe converge vers  $(-1, 0)$  pour tout  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ .

Soit  $t_{\mathcal{C},2} = \inf \left\{ t : \left( x_{t+t_{\mathcal{C},1}}^{\varphi_{(-1, -\delta)}}, y_{t+t_{\mathcal{C},1}}^{\varphi_{(-1, -\delta)}} \right) \in \mathcal{C}_R^- \right\}$  le temps d’atteinte de  $\mathcal{C}_R^-$  après la deuxième étape de la fonction de contrôle  $\varphi_{(-1, -\delta)}$ .

Par symétrie sur le flot, le temps d’atteinte d’un des points fixes stables en suivant le flot est au plus  $t_{\mathcal{C}}$ .

Ainsi, le temps nécessaire pour atteindre un voisinage  $(-1, 0)$  en partant d’une condition initiale dans  $\mathcal{C}_R$  est au maximum un temps  $T_2 = t_{\mathcal{C},1} + t_{\mathcal{C},2} + t_{\mathcal{C}}$ .

### **Étape 3 : Atteindre le point $(-1, 0)$ en partant d’un voisinage de $(-1, 0)$ .**

Dans l’étape précédente, nous avons supposé que l’on partait du point  $(-1, 0)$ . L’objectif est de montrer que l’on atteint exactement  $(-1, 0)$  en partant de son voisinage.

L’objectif est d’appliquer le théorème des fonctions implicites [24, page 275 du théorème 10.2.1]. En effet, sous certaines hypothèses, ce théorème permet de construire une fonction de contrôle dépendant des conditions initiales permettant d’atteindre le point  $(0, 0)$ .

Nous reparamétrisons le système (3.27) en posant  $x = -1 + u$  et  $y = v$  pour l’étudier en  $(0, 0)$  plutôt qu’autour de  $(-1, 0)$ .

Nous obtenons ainsi

$$\begin{cases} \dot{u}_t = -2u_t + \varepsilon \cos(\theta)\sigma(-1)\varphi(t) + R_1(u_t, v_t, \varphi(t)) \\ \dot{v}_t = -\lambda v_t + \varepsilon \sin(\theta)\sigma(-1)\varphi(t) + R_2(u_t, v_t, \varphi(t)), \end{cases} \quad (3.36)$$

où  $R_1(u, v, \varphi) = 3u^2 - u^3 + \varepsilon \cos(\theta)\sigma_1 u \varphi$  et  $R_2(u, v, \varphi) = \varepsilon \sin(\theta)\sigma_1 u \varphi$ .

Soient la fonction de contrôle définie par  $\varphi_{c_1, c_2} = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2$ , où  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^2)$  et  $U_0$  un voisinage du point  $(0, 0)$ .

On se donne le temps  $T_3 > 0$ . En utilisant la variation de la constante sur le système (3.36) avec la fonction de contrôle  $\varphi_{c_1, c_2}$ , nous obtenons le système suivant pour toute condition initiale  $(u_0, v_0) \in U_0$

$$\Phi((u_0, v_0), (c_1, c_2)) = \begin{cases} e^{-2T_3} u_0 + \int_0^{T_3} \varepsilon \cos(\theta)\sigma(-1)\varphi_{c_1, c_2}(s)e^{-2(T_3-s)} ds \\ \quad + \bar{R}_1(u, v, \varphi_{c_1, c_2}, T_3) \\ e^{-\lambda T_3} v_0 + \int_0^{T_3} \varepsilon \sin(\theta)\sigma(-1)\varphi_{c_1, c_2}(s)e^{-\lambda(T_3-s)} ds \\ \quad + \bar{R}_2(u, v, \varphi_{c_1, c_2}, T_3), \end{cases} \quad (3.37)$$

où  $\bar{R}_1(u, v, \varphi, T_3) = \int_0^{T_3} R_1(u_s, v_s, \varphi(s))e^{-2(T-s)} ds$  et  $\bar{R}_2(u, v, \varphi, T_3) = \int_0^{T_3} R_2(u_s, v_s, \varphi(s))e^{-\lambda(T-s)} ds$ .

Pour appliquer le théorème des fonctions implicites, il faut s'assurer qu'il existe  $(u_0, v_0) \in U_0$  et  $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$  telles que  $\Phi((u_0, v_0), (c_1, c_2)) = 0$  et que la dérivée partielle  $D_2\Phi((u_0, v_0), (c_1, c_2))$  soit un homéomorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ . Si ces conditions sont vérifiées alors pour toute condition initiale  $(\bar{u}_0, \bar{v}_0) \in U_0$ , il existe une fonction  $\eta$  de  $U_0$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que  $\eta((\bar{u}_0, \bar{v}_0)) = (c_1, c_2)$  et  $\Phi((\bar{u}_0, \bar{v}_0), \eta(\bar{u}_0, \bar{v}_0)) = 0$ . La fonction  $\eta$  sera une application qui à toute condition initiale dans  $U_0$  associe une fonction de contrôle permettant d'atteindre le point  $(0, 0)$  pour le système (3.36) en un temps  $T_3$  fini.

Pour  $(u_0, v_0, c_1, c_2) = (0, 0, 0, 0)$ , nous avons bien  $\Phi((u_0, v_0), (c_1, c_2)) = 0$ . La première pour appliquer le théorème est vérifiée. Pour vérifier que la dérivée partielle  $D_2\Phi((u_0, v_0), (c_1, c_2))$  est un homéomorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ , nous calculons  $D_2\Phi$  puis son déterminant. Nous obtenons ainsi

$$D_2\Phi((u_0, v_0), (c_1, c_2)) = \varepsilon^2(\sigma_0 - \sigma_1)^2 \begin{pmatrix} \cos(\theta)A_{11} & \cos(\theta)A_{21} \\ \sin(\theta)A_{12} & \sin(\theta)A_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

où  $A_{11} = \int_0^{T_3} \varphi_1(s)e^{-2(T_3-s)} ds$ ,  $A_{21} = \int_0^{T_3} \varphi_2(s)e^{-2(T_3-s)} ds$ ,  $A_{12} = \int_0^{T_3} \varphi_1(s)e^{-\lambda(T_3-s)} ds$   
et  $A_{22} = \int_0^{T_3} \varphi_2(s)e^{-\lambda(T_3-s)} ds$ .

Le déterminant de  $D_2\Phi((u_0, v_0), (c_1, c_2))$  est

$$\det(D_2\Phi((u_0, v_0), (c_1, c_2))) = \varepsilon^2 \cos(\theta) \sin(\theta) (\sigma_0 - \sigma_1)^2 (A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}).$$

Pour montrer que  $D_2\Phi((u_0, v_0), (c_1, c_2))$  est un homéomorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ , il faut trouver des fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  telles que l'on puisse calculer explicitement  $A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}$  et montrer que cette valeur est différente de 0.

Supposons que  $\varphi_1(t) = 1$  et  $\varphi_2(t) = t$  et montrons que pour ces fonctions, le déterminant est non nul. Nous obtenons alors  $A_{11} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2T_3})$ ,  $A_{21} = \frac{1}{4}(2T_3 - 1 + e^{-2T_3})$ ,  $A_{12} = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda T_3})$ ,  $A_{22} = \frac{1}{\lambda^2}(\lambda T_3 - 1 + e^{-\lambda T_3})$ . Pour  $T_3 > 0$  et  $\lambda > 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} 4\lambda^2 (A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}) &= 2(1 - e^{-2T_3})(\lambda T_3 - 1 + e^{-\lambda T_3}) - \lambda(1 - e^{-\lambda T_3})(2T_3 - 1 + e^{-2T_3}), \\ &= 2\lambda(1 - e^{-2T_3})(1 - e^{-\lambda T_3}) \left( \frac{\lambda T_3 - 1 + e^{-\lambda T_3}}{\lambda(1 - e^{-\lambda T_3})} - \frac{2T_3 - 1 + e^{-2T_3}}{2(1 - e^{-2T_3})} \right), \\ &= 2\lambda(1 - e^{-2T_3})(1 - e^{-\lambda T_3})(h_{T_3}(\lambda) - h_{T_3}(2)), \end{aligned}$$

où  $h_{T_3}(x) = \frac{xT_3 - 1 + e^{-xT_3}}{x(1 - e^{-xT_3})}$ .

Si le signe de la dérivée de la fonction  $h_{T_3}(x)$  reste le même pour tout  $x \in \mathbb{R}_*^+$  alors  $\lambda \neq 2$  implique que le déterminant est non nul. La dérivée  $h'_{T_3}$  vaut

$$\begin{aligned} h'_{T_3}(x) &= \frac{T_3(1 - e^{-xT_3})x(1 - e^{-xT_3}) - (xT_3e^{-xT_3} + (1 - e^{-xT_3}))(xT_3 - 1 + e^{-xT_3})}{x^2(1 - e^{-xT_3})^2} \\ &= \frac{(1 - e^{-xT_3})^2 - x^2T_3^2e^{-xT_3}}{x^2(1 - e^{-xT_3})^2} = \frac{e^{-xT_3}(e^{xT_3} + e^{-xT_3} - 2 - x^2T_3^2)}{x^2(1 - e^{-xT_3})^2} \\ &= \frac{e^{-xT_3}(2 \cosh(xT_3) - 2 - x^2T_3^2)}{x^2(1 - e^{-xT_3})^2}. \end{aligned}$$

En décomposant en série le cosinus hyperbolique, nous pouvons réécrire le numérateur comme suit

$$\begin{aligned} e^{-xT_3}(2 \cosh(xT_3) - 2 - x^2T_3^2) &= e^{-xT_3} \left( 2 \left( \frac{(xT_3)^0}{0!} + \frac{(xT_3)^2}{2!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xT_3)^{2n}}{(2n)!} \right) - 2 - x^2T_3^2 \right) \\ &= e^{-xT_3} \left( 2 + x^2T_3^2 - 2 - x^2T_3^2 + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(xT_3)^{2n}}{(2n)!} \right) \\ &= 2e^{-xT_3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(xT_3)^{2n}}{(2n)!}, \end{aligned}$$

qui est strictement positif pour tout  $x \in \mathbb{R}_*^+$  et  $T_3 > 0$ . Ainsi, la fonction  $h_{T_3}$  est strictement croissante pour tout  $T_3 > 0$ . Cela implique que  $h_{T_3}(x) \neq h_{T_3}(y)$  si  $x \neq y$  et en particulier que le déterminant est nul si  $\lambda = 2$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\sigma_0 \neq \sigma_1$  ou  $\cos(\theta) = 0$  ou  $\sin(\theta) = 0$ . Or sous les hypothèses du système,  $\lambda \neq \{0, 2\}$ ,  $\cos(\theta) \neq 0$  ou  $\sin(\theta) \neq 0$  et  $\sigma_0 \neq \sigma_1$  donc le déterminant est non nul pour  $\varphi_1(t) = 1$  et  $\varphi_2(t) = t$ . La deuxième condition du théorème est vérifiée;  $D_2\Phi((u_0, v_0), (c_1, c_2))$  est un homéomorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

En utilisant le théorème des fonctions implicites, nous obtenons qu'il existe une application continue unique  $\eta$  de  $U_0$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que  $\eta(0,0) = (0,0)$ ,  $(z, \eta(z)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  et  $\Phi(z, \eta(z)) = (0,0)$  pour tout  $z \in U_0$ .

Nous obtenons ainsi qu'il est possible d'atteindre exactement le point  $(0,0)$  dans le système (3.36) depuis toute condition initiale prise dans son voisinage en un temps fini  $T_3$ . En reparamétrisant le système (3.36), nous avons montré qu'il est possible d'atteindre le point  $(-1,0)$  en temps fini depuis tout point dans son voisinage.

Soit  $T_{\mathcal{C}_R}$  le temps défini par  $T_{\mathcal{C}_R} = \max(T_{1a}, T_{1b}) + T_2 + T_3$ . Il est possible de construire une fonction de contrôle  $\varphi$  telle que depuis toute condition initiale dans  $\mathcal{C}_R$ , le processus  $(x_t^\varphi, y_t^\varphi)_{t < T_{\mathcal{C}_R}}$  atteint tout point de  $D_\lambda$  en un temps  $T_{\mathcal{C}_R}$  fini. Cela nous permet de conclure notre preuve.  $\square$

Nous pouvons maintenant prouver le lemme 3.4.6.

*Démonstration.* D'après le lemme 3.1 de [13], la condition de Harris sur l'ensemble  $\mathcal{C}_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : W(x,y) \leq R\}$  où  $R \geq 1$  et  $\alpha \in (0,1)$  implique la condition de couplage local pour tout  $A \in \left(0, \frac{R}{2}\right)$  et  $\gamma_H = 1 - \alpha \left(1 - \frac{2A}{R}\right) \in (0,1)$ . Ainsi, nous cherchons  $T_{\mathcal{C}}$ ,  $R$ ,  $\alpha$  et  $\eta$  telles que la condition de Harris pour  $S_{T_{\mathcal{C}}}^\varepsilon$  soit vérifiée sur l'ensemble  $\mathcal{C}_R$  et telles que  $A > 0$ .

Soient  $\eta_\lambda$  la mesure uniforme sur  $D_\lambda$  telle que  $\int_{D_\lambda} \eta_\lambda(dx, dy) = 1$ .

Pour tout ensemble borélien  $E$  tel que  $E \cap D_\lambda = \emptyset$  et  $R > 0$ ,  $\eta_\lambda(E) = 0$ . Nous avons directement pour tout  $t > 0$  que

$$S_t^\varepsilon \mu(E) \geq \alpha \eta_\lambda(E) \int_{\mathcal{C}_R} \mu = 0.$$

La condition de couplage locale avec  $A > 0$  est donc satisfaite.

Pour tout ensemble borélien  $E$  tel que  $E \cap D_\lambda \neq \emptyset$  et  $t \geq 0$ , nous avons

$$S_t^\varepsilon \mu(E) \geq \int_{\mathcal{C}} P_t^\varepsilon((x,y), E) \mu(dx, dy). \quad (3.39)$$

D'après le lemme 3.4.1, le semi-groupe  $S_t^\varepsilon$  admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Nous réécrivons (3.39) sous la forme suivante

$$S_t^\varepsilon \mu(E) \geq \int_{\mathcal{C}_R} \int_E p_t^\varepsilon((x,y), (\tilde{x}, \tilde{y})) d\tilde{x} d\tilde{y} \mu(dx, dy).$$

L'objectif est de minorer  $p_t^\varepsilon((x,y), (\tilde{x}, \tilde{y}))$  sur  $\mathcal{C}_R \times E$ .

Le théorème 5.1 page 353 de [81] permet de faire le lien entre le système (3.1) et (3.27). Notons  $\mathcal{S}_{(x_0, y_0)}^{[0, t]}$ , le support de la diffusion de  $(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)_{s \in [0, t]}$  solution de (3.1). Le support  $\mathcal{S}_{(x_0, y_0)}^{[0, t]}$  est le plus petit sous-ensemble fermé de  $\{f \in \mathcal{C}([0, t], \mathbb{R}^2), f(0) = (x_0, y_0) \in \mathcal{C}_R\}$  tel que  $\mathbb{P}\left((X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)_{s \in [0, t]} \in \mathcal{S}_{(x_0, y_0)}^{[0, t]}\right) = 1$ . Soit  $\overline{\mathcal{C}_{(x_0, y_0)}^{[0, t]}(\mathcal{U})}$  l'ensemble des solutions de (3.27) sur l'intervalle de temps  $[0, t]$  pour une fonction de contrôle prise dans l'ensemble  $\mathcal{U}$  des fonctions constantes par morceaux et de condition initiale  $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}_R$ .

D'après le théorème 5.1 page 353 de [81], on a

$$\mathcal{S}_{(x, y)}^{[0, t]} = \overline{\mathcal{C}_{(x, y)}^{[0, t]}(\mathcal{U})}. \quad (3.40)$$

D'après le lemme 3.4.7, il existe une fonction de contrôle  $\varphi$  telle que le processus  $(x_t^\varphi, y_t^\varphi)$  peut atteindre tout point de  $E \subset D_\lambda$  en partant de conditions initiales dans  $\mathcal{C}_R$  en un temps  $T_{\mathcal{C}_R}$

Ainsi, par le lemme 3.4.7 et le théorème 5.1 page 353 de [81], pour tout  $t > T_{\mathcal{C}_R}$ ,  $(x, y) \in \mathcal{C}_R$ ,  $E \subset D_\lambda$ , nous avons

$$P_t^\varepsilon((x, y), E) = \int_E p_t^\varepsilon((x, y), (\tilde{x}, \tilde{y})) d\tilde{x} d\tilde{y} > 0.$$

Il existe donc  $(x_E, y_E) \in E$  tel que  $p_t^\varepsilon((x, y), (x_E, y_E)) > 0$ .

Nous allons montrer que  $p_t^\varepsilon$  est semi-continue inférieurement ce qui permettra de minorer  $P_t^\varepsilon$  en utilisant le théorème 4 de [47]. En effet, ce théorème permet de montrer que  $p_t^\varepsilon$  est semi-continue inférieurement sous les hypothèses suivantes :

1. Il existe une suite croissante de compacts  $K_n \subset K_{n+1}$  de la forme  $K_n = [a_n, b_n]^2$  telle que pour tout  $(x_0, y_0) \in \cup_n K_n$ , l'unique solution forte  $(X_t, Y_t)_{t \geq 0}$  de (3.1) en partant de  $(x_0, y_0)$  au temps 0 satisfait que les temps d'arrêt  $T_n := \inf\{t \geq 0 : (X_t, Y_t) \notin K_n\}$  tendent vers l'infini presque sûrement quand  $n$  tend vers l'infini.
2. Les coefficients de dérive et de diffusion de (3.1) appartiennent à  $\mathcal{C}_b^\infty(K_n, \mathbb{R})$  pour tout  $n$ .
3. Il existe un intervalle ouvert  $U \subset \mathbb{R}$  tel que l'EDS

$$dX_t = X_t^\varepsilon(1 - (X_t^\varepsilon)^2)dt + \varepsilon \cos(\theta)\sigma(X_t^\varepsilon)dW_t$$

a une solution forte unique prenant des valeurs dans  $U$ , pour tout  $X_0^\varepsilon \in U$ .

Montrons que ces propriétés sont vérifiées. Définissons la suite d'ensemble  $K_n = [-n, n]^2$ . La suite de temps d'arrêt  $T_n$  est similaire à  $\tau_n$  défini par (3.12). Or, nous avons montré dans la preuve de 3.3.2 que la suite des  $\tau_n$  tend vers l'infini presque sûrement quand  $n$  tend vers l'infini. L'hypothèse 1 est vérifiée. Les coefficients de dérive et de diffusion sont polynomiaux



ce qui permet de vérifier l'Hypothèse 2.

Quand  $\sigma_1 \neq 0$ , pour  $x = -\frac{\sigma_0}{\sigma_1}$ , nous avons  $\sigma(x) = 0$ . Soit l'intervalle  $U = \mathbb{R} \setminus \left(-\infty, -\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right]$ . Si  $\sigma_1 > 0$ , en considérant la première composante du système (3.1) et une condition initiale prise dans  $U$ , nous montrons que l'Hypothèse 3 est bien vérifiée. On procède de la même manière si  $\sigma_1 < 0$  avec  $U = \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{\sigma_0}{\sigma_1}, \infty\right)$ .

Nous obtenons la minoration suivante

$$P_t^\varepsilon((x, y), E) \geq \alpha\eta(V(x_E, y_E)) > 0, \quad (3.41)$$

où le voisinage  $V(x_E, y_E) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y) - (x_E, y_E)\| < \delta\}$  pour  $\delta > 0$ .

Nous obtenons ainsi

$$S_t^\varepsilon \mu(E) \geq \alpha\eta(E) \int_{\mathcal{C}_R} \mu(dx, dy).$$

La condition de Harris est donc vérifiée sur l'ensemble  $\mathcal{C}_R$ .

□

En utilisant les lemmes 3.4.5 et 3.4.6, nous pouvons appliquer le théorème 5.2 p.26 de [13]. Nous obtenons ainsi l'existence et l'unicité d'une mesure invariante  $\pi^\varepsilon$  pour le système (3.1). Le lemme 3.4.1 permet d'obtenir l'existence d'une densité par rapport à la mesure de Lebesgue et ainsi, prouvons le théorème 3.2.3.

### 3.4.2 Preuve du théorème 3.2.4

La preuve du théorème 3.2.4 est séparée en deux parties :

1. la preuve de la tension de la suite  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[}$ ,
  2. identification des valeurs d'adhérence de  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[}$ .
- 1) Tension de la suite  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[}$

Notons  $\mathfrak{B}(R)$  la boule ouverte de rayon  $R$ . Nous allons montrer que  $\forall \delta > 0, \exists R > 0$  tel que  $\forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$

$$\pi^\varepsilon(\mathbb{R}^2 \setminus \mathfrak{B}(R)) \leq \delta. \quad (3.42)$$

Pour montrer cela, nous introduisons la mesure d'occupation  $r^\varepsilon$  définie par

$$\begin{aligned} r^\varepsilon(t, (x_0, y_0), \mathbb{R}^2 \setminus \mathfrak{B}(R)) &= \frac{1}{t} \int_0^t P_s^\varepsilon \left( \mathbb{1}_{\{\mathbb{R}^2 \setminus \mathfrak{B}(R)\}}(x_0, y_0) \right) ds, \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}_{(x_0, y_0)} \left( \mathbb{1}_{\{\mathbb{R}^2 \setminus \mathfrak{B}(R)\}}(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon) \right) ds, \end{aligned} \quad (3.43)$$

où  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .

Nous allons montrer que  $\forall \delta > 0, \exists R > 0$  tel que  $\forall t > 0, \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$

$$r^\varepsilon(t, (x_0, y_0), \mathbb{R}^2 \setminus \mathfrak{B}(R)) \leq \delta. \quad (3.44)$$

En effet, cette condition assure en particulier que  $\{r^\varepsilon(t, (x_0, y_0), \cdot)\}_{t \geq 0, \varepsilon < \varepsilon_0}$  est tendue. L'unicité de la mesure invariante obtenue par le théorème 3.2.3 entraîne que  $\{r^\varepsilon(t, (x_0, y_0), \cdot)\}_{t \geq 0, \varepsilon < \varepsilon_0}$  converge, quand  $t$  tend vers l'infini, vers  $\pi^\varepsilon$  et que la condition (3.42) est vérifiée.

En utilisant les coefficients de la proposition 3.4.5, nous avons pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\varepsilon W(x, y) &\leq \sup_{\|(x,y)\| > R} \mathcal{L}^\varepsilon W(x, y) \\ &\leq \alpha_1 - \alpha_2 \inf_{\|(x,y)\| > R} W(x, y), \end{aligned} \quad (3.45)$$

où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des constantes strictement positives indépendantes de  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ . Or, la fonction  $W$  est défini par  $W(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ . On peut majorer l'inégalité (3.45) par

$$\mathcal{L}^\varepsilon W(x, y) \leq \alpha_1 - \alpha_2(1 + R^2) \mathbb{1}_{\{\|(x,y)\| > R\}}, \quad (3.46)$$

En appliquant la formule de Dynkin au processus  $(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)$  solution de (3.1) avec le temps d'arrêt  $\tau_n$  défini par (3.12), nous avons pour un temps  $t > 0$  fixé et condition initiale  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\mathbb{E}_{(x_0, y_0)} W(X_{t \wedge \tau_n}^\varepsilon, Y_{t \wedge \tau_n}^\varepsilon) = W(x_0, y_0) + \mathbb{E}_{(x_0, y_0)} \left( \int_0^{t \wedge \tau_n} \mathcal{L}^\varepsilon W(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon) ds \right), \quad (3.47)$$

pour  $n \in \mathbb{N}$ .

En combinant les équations (3.47) et (3.46), nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(x_0, y_0)} W(X_{t \wedge \tau_n}^\varepsilon, Y_{t \wedge \tau_n}^\varepsilon) &\leq W(x_0, y_0) + \alpha_1 (t \wedge \tau_n) \\ &\quad - \alpha_2(1 + R^2) \mathbb{E}_{(x_0, y_0)} \left( \int_0^{t \wedge \tau_n} \mathbb{1}_{\{\|(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)\| > R\}} ds \right), \\ \Leftrightarrow \alpha_2(1 + R^2) \mathbb{E}_{(x_0, y_0)} \left( \int_0^{t \wedge \tau_n} \mathbb{1}_{\{\|(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)\| > R\}} ds \right) &\leq W(x_0, y_0) - \mathbb{E}_{(x_0, y_0)} W(X_{t \wedge \tau_n}^\varepsilon, Y_{t \wedge \tau_n}^\varepsilon) \\ &\quad + \alpha_1 (t \wedge \tau_n). \end{aligned}$$

Or,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $W(x, y) \geq 0$ . Nous en déduisons

$$\alpha_2(1 + R^2) \mathbb{E}_{(x_0, y_0)} \left( \int_0^{t \wedge \tau_n} \mathbb{1}_{\{\|(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)\| > R\}} ds \right) \leq W(x_0, y_0) + \alpha_1 (t \wedge \tau_n). \quad (3.48)$$

Dans la preuve du lemme 3.3.2, nous avons montré que le temps d'arrêt  $\tau_n$  défini par (3.12) tend presque sûrement vers l'infini quand  $n$  tend vers l'infini.

De plus, nous avons  $\forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{(x_0, y_0)} \left( \int_0^{t \wedge \tau_n} \mathbb{1}_{\{\|(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)\| > R\}} ds \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{t \wedge \tau_n} \mathbb{E}_{(x_0, y_0)} \left( \mathbb{1}_{\{\|(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)\| > R\}} \right) ds \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (t \wedge \tau_n) r^\varepsilon (t \wedge \tau_n, (x_0, y_0), \mathbb{R}^2 \setminus \mathfrak{B}(R)) \\ &= t r^\varepsilon (t, (x_0, y_0), \mathbb{R}^2 \setminus \mathfrak{B}(R)). \end{aligned}$$

Ainsi, en faisant tendre  $n$  vers l'infini dans (3.48), nous obtenons

$$t r^\varepsilon (t, (x_0, y_0), \mathbb{R}^2 \setminus \mathfrak{B}(R)) \leq \frac{t \alpha_1 + W(x_0, y_0)}{\alpha_2 (1 + R^2)}, \quad (3.49)$$

pour tous  $t \geq 1$  et  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .

D'après le théorème 3.2.3, en reprenant (3.49), nous obtenons en prenant  $t \rightarrow \infty$

$$\pi^\varepsilon (\mathbb{R}^2 \setminus \mathfrak{B}(R)) \leq \frac{\alpha_1 + W(x_0, y_0)}{\alpha_2 (1 + R^2)}.$$

Nous pouvons donc en conclure que la famille des  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[}$  est tendue.

## 2) Identification des valeurs d'adhérence de $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[}$

Introduisons l'opérateur  $\mathcal{L}$  défini pour tout  $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  par

$$\mathcal{L}f(x, y) = x(1 - x^2) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \lambda y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y). \quad (3.50)$$

Montrons que toute valeur d'adhérence  $\pi$  vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{L}f(x, y) \pi(dx, dy) = 0, \quad \forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2). \quad (3.51)$$

La mesure  $\pi$  est une valeur d'adhérence donc il existe une sous suite  $(\varepsilon_k)_k \geq 0$  qui tend vers 0 quand  $k$  tend vers l'infini telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\pi^{\varepsilon_k} - \pi) = 0$ .

Soit  $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Décomposons  $\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{L}f(x, y) \pi(dx, dy)$  comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{L}f(x, y) \pi(dx, dy) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{L}f(x, y) (\pi(dx, dy) - \pi^{\varepsilon_k}(dx, dy)) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{L}^{\varepsilon_k} f(x, y) \pi^{\varepsilon_k}(dx, dy) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{L} - \mathcal{L}^{\varepsilon_k}) f(x, y) \pi^{\varepsilon_k}(dx, dy). \end{aligned} \quad (3.52)$$

La suite de mesures  $(\pi^{\varepsilon_k})_{\varepsilon_k < \varepsilon_0}$  converge étroitement vers  $\pi$ . Le premier terme de droite dans (3.52) tend vers 0 quand  $\varepsilon_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$  et le second terme est égal à 0, car  $\pi^{\varepsilon_k}$  est une mesure invariante.

En majorant le troisième terme, nous obtenons pour toute fonction test  $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{L}^{\varepsilon_k} f(x, y) - \mathcal{L}f(x, y)) \pi^{\varepsilon_k}(dx, dy) &\leq \frac{\varepsilon_k^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \sigma(x) \left( \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right) \pi^{\varepsilon_k}(dx, dy) \\ &\leq \frac{\varepsilon_k^2}{2} \sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} \left( \left| \sigma(x) \left( \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right) \right| \right) \times \\ &\quad \left| \int_{\mathbb{R}^2} \pi^{\varepsilon_k}(dx, dy) \right| \\ &\leq C_f \varepsilon_k^2, \end{aligned}$$

où  $C_f = \frac{1}{2} \sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} \left( \left| \sigma(x) \left( \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right) \right| \right) < +\infty$ .

Nous obtenons que le troisième terme de droite de (3.52) tend vers 0 quand  $\varepsilon_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Cherchons maintenant à caractériser le support de la mesure  $\pi$ . Le processus déterministe décrit par (3.15) est associé à l'opérateur  $\mathcal{L}$ . Nous avons ainsi pour tout  $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$f(x_t, y_t) = f(x_0, y_0) + \int_0^t \mathcal{L}f(x_s, y_s) ds,$$

où  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  est la condition initiale.

En intégrant par rapport à  $\pi(x_0, y_0)$ , nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x_t, y_t) \pi(dx_0, dy_0) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_0, y_0) \pi(dx_0, dy_0) + \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^t \mathcal{L}f(x_s, y_s) ds \pi(dx_0, dy_0).$$

Notons

$$h_t^1(x_0, y_0) = x_0 \frac{e^t}{\sqrt{1 - x_0^2 + x_0^2 e^{2t}}}$$

et  $h_t^2(x_0, y_0) = y_0 e^{-\lambda t}$ . D'après la proposition 3.3.4, nous avons  $(x_t, y_t) = (h_t^1(x_0, y_0), h_t^2(x_0, y_0))$ . Pour tout  $t > 0$ , les fonctions  $h_t^1(x_0, y_0)$  et  $h_t^2(x_0, y_0)$  sont continues et dérivables sur  $\mathbb{R}^2$ . Nous avons donc pour tout  $t > 0$ ,  $f \circ h_t^1 \in \mathcal{C}_b^1$  et  $f \circ h_t^2 \in \mathcal{C}_b^1$ . Cela implique donc par (3.51) que  $\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{L}f \circ (h_t^1, h_t^2)(x_0, y_0) \pi(dx_0, dy_0) = 0$ .

En prenant la limite quand  $t \rightarrow +\infty$  et en utilisant la proposition 3.3.4, il en résulte

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \left( z_1 \mathbb{1}_{(x_0 < 0)} + z_2 \mathbb{1}_{(x_0 = 0)} + z_3 \mathbb{1}_{(x_0 > 0)} \right) \pi(dx_0, dy_0) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_0, y_0) \pi(dx_0, dy_0). \quad (3.53)$$

Pour  $z \in \mathbb{R}^2$ , soit la fonction  $f_z \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  définie par

$$f_z(x, y) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1 - \|z - (x, y)\|^2}\right) & , \text{ si } \|z - (x, y)\| < 1, \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

Soient  $z_1, z_2$  et  $z_3$  les points définis par (3.3). En prenant la fonction  $f_{z_1}$  dans (3.53), nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}^2} (f_{z_1}(z_1) - f_{z_1}(x_0, y_0)) \pi(dx_0, dy_0) = 0.$$

Or, pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{z_1\}$ , nous avons  $f_{z_1}(z_1) > f_{z_1}(x, y)$ . Il en résulte que pour tout  $(x, y) \in ]-\infty, 0[ \times \mathbb{R}$ , seul le point  $z_1$  est dans le support de  $\pi$ . En procédant de manière similaire avec les fonctions  $f_{z_2}$  et  $f_{z_3}$ , nous obtenons que le support de  $\pi$  est l'ensemble des points d'équilibre du système déterministe  $\{z_1, z_2, z_3\}$ . Ainsi, nous concluons la preuve du théorème 3.2.4.

Remarque : Les valeurs d'adhérence de la suite  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon < \varepsilon_0}$  sont une combinaison des équilibres du système déterministe.

### 3.5 Support de la mesure invariante quand le coefficient de diffusion tend vers 0

Dans cette section, nous étudions les éléments nécessaires à la preuve du théorème 3.2.5. Tout d'abord, précisons que l'intuition du théorème 3.2.5 en utilisant l'approche de [22]. Cette méthode est compatible avec des EDS dont la matrice de diffusion est non inversible. Néanmoins, cette méthode introduit encadrement avec des limites inférieurs et supérieurs qui sont plus compliqués à manipuler que l'approche développée dans [31].

Nous étendons à notre système d'EDS la méthode développée dans [31] Chapitre 6. Cette méthode basée sur l'étude du contrôle nécessite que la matrice de diffusion associée au système d'EDS soit inversible. Notre système ne vérifie pas cette propriété, nous avons donc dû modifier la quantité pour laquelle l'inverse était nécessaire. Nous avons ensuite reproduit le raisonnement pour montrer que  $\pi^\varepsilon$  se concentre hors d'un compact autour du point col, quand  $\varepsilon$  tend vers 0 pour tout  $\sigma_1$  vérifiant l'Hypothèse 3.2.2.

Les théorèmes 4.1 et 4.2 pages 166-167 de [31] permettent de montrer que, pour  $\varepsilon$  fixé, la mesure invariante se concentre sur les équilibres stables du système et sous une certaine condition, que la mesure invariante  $\pi^\varepsilon$  converge faiblement vers une unique mesure  $\pi_0$  qui se concentre sur l'un des points d'équilibre stables. Ces théorèmes reposent sur l'étude des coûts de passage d'un compact contenant un point d'équilibre du système à un autre.

Avant toute chose, nous introduisons les différentes notations et notions nécessaires pour prouver le théorème 3.2.5. Puis, nous séparons la preuve en deux cas :  $\sigma_1 = 0$  et  $\sigma_1 \in ]-\sigma_0, \sigma_0[ \setminus \{0\}$ . Enfin, une fois ces résultats obtenus pour un  $\varepsilon$  petit, nous allons prouver le théorème 3.2.5 en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0.

### 3.5.1 Introduction des notations

Nous adaptons les notations introduites dans [31] Chapitre 6 à notre cas d'étude.

Introduisons, pour tout  $\delta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ , les trois intervalles compacts disjoints  $K_1^\delta$ ,  $K_2^\delta$  et  $K_3^\delta$  définis par

$$K_i^\delta = \{x \in \mathbb{R}, |x - x_i|^2 \leq \delta^2\}, \quad (3.54)$$

où  $x_i = i - 2$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  est la première composante des points définis par (3.3). Dans la suite et pour simplifier les notations, nous fixons  $\delta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$  tel que pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $K_i^\delta \in D_\lambda$  et nous notons  $K_i$  au lieu de  $K_i^\delta$ .

Remarque : On définit des bandes  $K_i$  contrairement aux boules définies dans [31], car la première composante est la composante principale du système (3.1) et le coefficient de dérive de la deuxième composante pousse cette dernière à être proche de 0.

En utilisant le théorème 3.4.7, nous savons qu'il existe des fonctions de contrôle constantes par morceaux telles que l'on atteint un compact  $K_i$  en partant de  $K_j$ , où  $i \neq j$  et  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Or, nous souhaitons déterminer la fonction de contrôle optimale pour passer d'un compact à un autre en un temps  $T$ . Introduisons la fonctionnelle d'action associée à (3.27)  $S_{0T}^\sigma : \mathcal{C}_{0T}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  et  $\theta \in ]-\pi, \pi[ \setminus \left\{0, \pm \frac{\pi}{2}\right\}$  par

$$S_{0T}^\sigma((x_t^\varphi)_{t \geq 0}) := \frac{1}{(\varepsilon \cos(\theta))^2} \int_0^T L^\sigma(s, x_s^\varphi, \dot{x}_s^\varphi) ds, \quad (3.55)$$

où le lagrangien  $L^\sigma(t, x_t^\varphi, \dot{x}_t^\varphi)$  est défini par

$$L^\sigma(t, x_t^\varphi, \dot{x}_t^\varphi) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\dot{x}_t^\varphi - x_t^\varphi(1 - (x_t^\varphi)^2)}{\sigma(x_t^\varphi)} \right]^2.$$

La trajectoire  $(x_t^\varphi)_{t \in [0, T]}$  est solution de la première composante du système de contrôle (3.27) pour la fonction de contrôle  $\varphi \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$ .

Remarque : Contrairement au cas décrit dans [31], la matrice de diffusion de (3.1) n'est pas inversible. Nous choisissons donc de définir la fonctionnelle d'action en nous concentrant sur la composante en  $x$  du système. En effet, nous souhaitons nous déplacer d'un point d'équilibre à un autre, ces points sont alignés sur l'axe des abscisses ainsi nous restreignons le coût des trajectoires au déplacement sur l'axe des abscisses. Cela nous permet de réduire notre problème en deux dimensions à un problème en une dimension.

La fonction de coût pour le passage d'un compact  $K_i$  à un compact  $K_j$  est définie par

$$V_{ij}^\sigma := \inf \{S_{0T}^\sigma((x_t^\varphi)_{t \geq 0}), (x_0^\varphi, 0) \in K_i, (x_T^\varphi, 0) \in K_j\}.$$

Nous définissons également la matrice de coût  $P^\sigma$  par

$$P^\sigma := \left( V_{ij}^\sigma \right)_{i, j \in \{1, 2, 3\}}.$$

Pour l'étude du passage d'un compact  $K_i$  à un compact  $K_j$ , on doit définir la notion de stabilité pour les compacts.

**Définition 3.5.1.** *Un compact  $K_i$  est stable si pour tout  $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ ,  $V_{ij}^\sigma > 0$  et instable s'il existe  $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ ,  $V_{ij}^\sigma = 0$ .*

Avant de détailler les coûts de passage globaux, on doit introduire les graphes  $G\{i\}$ . Un graphe de  $m \rightarrow n$ , où  $m \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ ,  $n \in \{1, 2, 3\}$  et  $n \neq m$ , est appelé un graphe  $G\{i\}$  s'il vérifie les conditions suivantes :

1. chaque point  $m \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$  est le point initial d'exactlyement une flèche,
2. le graphe n'admet pas de cycle.

Par exemple, les graphes allant de  $\{2, 3\}$  à  $\{1, 2, 3\}$  qui sont aussi des  $G\{i\}$  graphes sont :

$$g_1 = \{2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 1\}, \quad g_2 = \{2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2\} \quad \text{et} \quad g_3 = \{2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1\}$$

pour les autres graphes allant de  $\{2, 3\}$  à  $\{1, 2, 3\}$ , tel que  $\{2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1\}$ , l'une des deux conditions n'est pas vérifiées.

Le coût de passage global vers le compact  $K_i$  sur l'ensemble des graphes qui permettent d'accéder à  $K_i$  depuis un autre compact est la quantité  $W^\sigma(K_i)$  définie par

$$W^\sigma(K_i) := \min_{g \in G\{i\}} \sum_{(m \rightarrow n) \in g} V_{mn}^\sigma. \quad (3.56)$$

Grâce à la modification de la fonctionnelle d'action, il est possible d'utiliser dans [31] Théorèmes 4.1 et 4.2 page 166-167. Ces théorèmes ainsi que le calcul des quantités  $W^\sigma(K_i)$  et  $\min_{i \in \{1, 2, 3\}} W^\sigma(K_i)$ , permettront de prouver le théorème 3.2.5.

### 3.5.2 Coefficient de diffusion constant

Le cas  $\sigma_1 = 0$  consiste à prendre  $\sigma(x) = \sigma_0$  dans le système d'EDS (3.1). Nous allons maintenant calculer les différentes quantités introduites dans la section précédente. La proposition suivante permet de calculer les extrema de  $S_{0T}^{\sigma_0}((x_t^\varphi)_{t \geq 0})$ .

**Proposition 3.5.2.** *Les extrema de  $S_{0T}^{\sigma_0}((x_t^\varphi)_{t \geq 0})$  sont atteints pour  $(x_t^\varphi)_{t \geq 0}$  solution de*

$$\dot{x}_t^\varphi = \pm x_t^\varphi (1 - (x_t^\varphi)^2).$$

*Démonstration.* D'après le Corollaire 3.38 page 114 de [21], si  $(x_t^\varphi)_{t \geq 0}$  satisfait l'équation d'Euler-Lagrange, alors  $(x_t^\varphi)_{t \geq 0}$  est un extremum de la fonctionnelle  $S_{0T}^{\sigma_0}$ .

Ainsi, nous cherchons  $(x_t^\varphi)_{t \geq 0}$  solution de

$$\frac{\partial L^{\sigma_0}}{\partial x_t^\varphi} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L^{\sigma_0}}{\partial \dot{x}_t^\varphi} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left( \dot{x}_s^\varphi - x_s^\varphi(1 - (x_s^\varphi)^2) \right) (3(x_s^\varphi)^2 - 1) - \frac{d}{dt} \left( \dot{x}_s^\varphi - x_s^\varphi(1 - (x_s^\varphi)^2) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left( \dot{x}_s^\varphi - x_s^\varphi(1 - (x_s^\varphi)^2) \right) (3(x_s^\varphi)^2 - 1) - \left( \ddot{x}_s^\varphi - \dot{x}_s^\varphi(1 - 3(x_s^\varphi)^2) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}_s^\varphi - x_s^\varphi(1 - (x_s^\varphi)^2)(1 - 3(x_s^\varphi)^2) = 0.$$

En multipliant par  $\dot{x}_s^\varphi$  et en intégrant par rapport au temps, nous avons

$$\int_0^t \ddot{x}_s^\varphi \dot{x}_s^\varphi ds = \int_0^t \dot{x}_s^\varphi x_s^\varphi (1 - (x_s^\varphi)^2)(1 - 3(x_s^\varphi)^2) ds$$

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{1}{2} (\dot{x}_s^\varphi)^2 \right]_0^t = \left[ \frac{1}{2} \left( (x_s^\varphi)^6 - 2(x_s^\varphi)^4 + (x_s^\varphi)^2 \right) \right]_0^t$$

$$\Leftrightarrow (\dot{x}_t^\varphi)^2 = (x_t^\varphi)^6 - 2(x_t^\varphi)^4 + (x_t^\varphi)^2 + (\dot{x}_0^\varphi)^2 - (x_0^\varphi)^6 + 2(x_0^\varphi)^4 - (x_0^\varphi)^2$$

$$\Leftrightarrow (\dot{x}_t^\varphi)^2 = (x_t^\varphi)^2 \left( 1 - (x_t^\varphi)^2 \right)^2 + (\dot{x}_0^\varphi)^2 - (x_0^\varphi)^2 \left( 1 - (x_0^\varphi)^2 \right)^2.$$

Nous obtenons bien que les extrema sont atteints pour  $(x_t^\varphi)_{t \geq 0}$  solution de

$$\dot{x}_t^\varphi = \pm x_t^\varphi \left( 1 - (x_t^\varphi)^2 \right), \text{ pour tout } t \geq 0.$$

□

Remarque : Lorsque la fonction de contrôle  $\varphi_t^+$  est telle que  $\dot{x}_t^{\varphi^+} = x_t^{\varphi^+} \left( 1 - (x_t^{\varphi^+})^2 \right)$ , alors  $(x_t^{\varphi^+})_{t \geq 0}$  suit le flot du champ de vecteurs du système déterministe. En revanche quand la fonction  $\varphi_t^-$  est telle que  $(x_t^{\varphi^-})_{t \geq 0}$  est solution de  $\dot{x}_t^{\varphi^-} = -x_t^{\varphi^-} \left( 1 - (x_t^{\varphi^-})^2 \right)$ , alors  $(x_t^{\varphi^-})_{t \geq 0}$  remonte le flot.

D'après la proposition 3.3.4, lorsque  $\varphi_t$  est égale à 0 pour tout  $t \geq 0$ , les trajectoires  $(x_t, y_t)_{t \geq 0}$  sont connues explicitement. Lorsque la trajectoire de  $(x_t^\varphi)_{t \geq 0}$  remonte le flot, les trajectoires peuvent aussi être calculées explicitement.

**Proposition 3.5.3.** *Quand la fonction  $\varphi_t^-$  est telle que  $(x_t^{\varphi^-})_{t \geq 0}$  est solution de  $\dot{x}_t^{\varphi^-} = -x_t^{\varphi^-} \left( 1 - (x_t^{\varphi^-})^2 \right)$ ,*



alors les trajectoires de  $(x_t^{\varphi^-}, y_t^{\varphi^-})_{t \geq 0}$  solution de (3.27) sont données explicitement par

$$\begin{cases} \varphi^-(t) = \frac{-\text{sign}(x_0)2e^{(2t+c_1)}}{\varepsilon\sigma_0 \cos(\theta) (e^{(2t+c_1)} + 1)^{\frac{3}{2}}} \\ x^{\varphi^-}(t) = \text{sign}(x_0) \frac{1}{\sqrt{e^{(2t+c_1)} + 1}} \\ y^{\varphi^-}(t) = c_2 e^{-\lambda t} - \text{sign}(x_0) \frac{2 \tan(\theta) {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{\lambda}{2} + 1, \frac{\lambda}{2} + 2; -e^{(2t+c_1)}\right) e^{(2t+c_1)}}{(\lambda + 2)}, \end{cases} \quad (3.57)$$

où  $c_1$  une constante telle que  $(x_0, y_0) \in K_j$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$  et  ${}_2F_1$  la fonction hypergéométrique définie par

$${}_2F_1(b_1, b_2, b_3, z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b_1)_k (b_2)_k}{(b_3)_k} \frac{z^k}{k!},$$

où  $(\cdot)_k$  est le symbole de Pochhammer défini par  $(b)_n = b(b+1) \cdots (b+n-1)$ .

*Démonstration.* Pour alléger les notations, remplaçons  $\varphi^-$  par  $\varphi$ .

Si  $\dot{x}_t^{\varphi} = -x_t^{\varphi}(1 - (x_t^{\varphi})^2)$ , alors  $(x_t^{\varphi}, y_t^{\varphi})_{t \geq 0}$  est solution de (3.27) avec la fonction de contrôle définie par

$$\varphi(t) = \frac{-2x_t^{\varphi}(1 - (x_t^{\varphi})^2)}{\varepsilon\sigma_0 \cos(\theta)}, \quad (3.58)$$

Par calcul direct, nous avons que

$$\dot{x}_t^{\varphi} = -x_t^{\varphi}(1 - (x_t^{\varphi})^2) = \text{sign}(x_0^{\varphi}) \frac{e^{(2t+c_2)}}{(e^{(2t+c_2)} + 1)^{\frac{3}{2}}},$$

pour  $x_t^{\varphi} = \text{sign}(x_0^{\varphi}) \frac{1}{\sqrt{e^{(2t+c_2)} + 1}}$ .

En utilisant l'expression de  $\varphi_t$ , nous cherchons  $y_t^{\varphi}$  qui vérifie la deuxième équation dans (3.27), c'est-à-dire

$$\dot{y}^{\varphi}(t) = -\lambda y^{\varphi}(t) - \text{sign}(x_0^{\varphi}) \frac{2 \tan(\theta) e^{(2t+c_2)}}{(e^{(2t+c_2)} + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Considérons  $x_0^{\varphi} \in K_3$  (le calcul est similaire pour  $x_0^{\varphi} \in K_1$ ). Après le changement de variable  $u = e^{(2t+c_2)}$ , le problème revient alors à chercher  $w(u)$  telle que

$$\dot{w}(u) = -\frac{\lambda}{2u} w(u) - \frac{\tan(\theta)}{(u+1)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.59)$$

Soit  $w_1(u)$  définie par

$$w_1(u) := k_1 \exp\left(\frac{\lambda c_2}{2}\right) u^{-\frac{\lambda}{2}} - \frac{2u \tan(\theta) {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{\lambda}{2} + 1, \frac{\lambda}{2} + 2; -u\right)}{\lambda + 2}.$$

En utilisant que  $\frac{d}{du} {}_2F_1(a, b, b+1, u) = \frac{b((1-u)^{-a} - {}_2F_1(a, b, b+1, u))}{u}$ , nous avons

$$\begin{aligned}
\dot{w}_1(u) &= \frac{-\lambda}{2} k_1 \exp\left(\frac{\lambda c_2}{2}\right) u^{-\frac{\lambda}{2}-1} - \frac{2 \tan(\theta)}{\lambda+2} {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{\lambda}{2}+1, \frac{\lambda}{2}+2; -u\right) \\
&\quad + \frac{2 \tan(\theta)}{\lambda+2} u \frac{d}{du} {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{\lambda}{2}+1, \frac{\lambda}{2}+2; -u\right) \\
&= \frac{-\lambda}{2u} k_1 \exp\left(\frac{\lambda c_2}{2}\right) u^{-\frac{\lambda}{2}} - \frac{2 \tan(\theta)}{\lambda+2} {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{\lambda}{2}+1, \frac{\lambda}{2}+2; -u\right) \\
&\quad - \tan(\theta) \left( \frac{1}{(1+u)^{\frac{3}{2}}} - {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{\lambda}{2}+1, \frac{\lambda}{2}+2; -u\right) \right) \\
&= \frac{-\lambda}{2u} k_1 \exp\left(\frac{\lambda c_2}{2}\right) u^{-\frac{\lambda}{2}} + \frac{\lambda \tan(\theta)}{\lambda+2} {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{\lambda}{2}+1, \frac{\lambda}{2}+2; -u\right) - \frac{\tan(\theta)}{(1+u)^{\frac{3}{2}}} \\
\dot{w}_1(u) &= -\frac{\lambda}{2u} w_1(u) - \frac{\tan(\theta)}{(u+1)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Nous avons ainsi que  $w_1(u)$  est solution de (3.59) et en posant  $y^\varphi(t) := w_1(e^{(2t+c_2)})$ , nous obtenons la forme de  $y^\varphi(t)$  attendue. □

La proposition 3.5.3 permet de calculer  $S_{0T}^{\sigma_0}$  explicitement. Nous obtenons ainsi le corollaire suivant

**Corollaire 3.5.4.** *La fonctionnelle d'action  $S_{0T}^{\sigma_0}$  vaut*

$$S_{0T}^{\sigma_0}((x_t^\varphi)_{t \geq 0}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x^\varphi \text{ est solution de} \\ & \dot{x}_t^\varphi = x_t^\varphi (1 - (x_t^\varphi)^2), \\ \frac{1}{(\varepsilon \sigma_0 \cos(\theta))^2} \left[ \frac{e^{2(2T+c_1)}}{(e^{2T+c_1} + 1)^2} - \frac{e^{2c_1}}{(e^{c_1} + 1)^2} \right] & \text{si } x^\varphi \text{ est solution de} \\ & \dot{x}_t^\varphi = -x_t^\varphi (1 - (x_t^\varphi)^2), \end{cases}$$

où  $c_1 = \ln\left(\frac{1}{(x_0^\varphi)^2} - 1\right)$ .

*Démonstration.* Si  $(x_t^\varphi)_{t \geq 0}$  est solution de  $\dot{x}_t^\varphi = x_t^\varphi (1 - (x_t^\varphi)^2)$ , alors nous obtenons

$$\begin{aligned}
S_{0T}^{\sigma_0}((x_t^\varphi)_{t \geq 0}) &= \frac{1}{2(\varepsilon \sigma \cos(\theta))^2} \int_0^T [\dot{x}_s^\varphi - x_s^\varphi (1 - (x_s^\varphi)^2)]^2 ds \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Si  $(x_t^\varphi)_{t \geq 0}$  est solution de  $\dot{x}_t^\varphi = -x_t^\varphi (1 - (x_t^\varphi)^2)$ , alors nous avons

$$S_{0T}^{\sigma_0}((x_t^\varphi)_{t \geq 0}) = \frac{1}{2(\varepsilon \sigma \cos(\theta))^2} \int_0^T [-2x_s^\varphi (1 - (x_s^\varphi)^2)]^2 ds.$$

Pour  $x_t^\varphi = \pm \frac{1}{\sqrt{e^{(2t+c_1)} + 1}}$ , où  $c_1$  et le signe de  $x^\varphi$  dépendent de la condition initiale. Nous avons donc

$$\begin{aligned} S_{0T}^{\sigma_0}((x_t^\varphi)_{t \geq 0}) &= \frac{1}{2(\varepsilon\sigma \cos(\theta))^2} \int_0^T \frac{e^{2(2s+c_1)}}{(e^{(2s+c_1)} + 1)^3} ds \\ &= \frac{1}{2(\varepsilon\sigma \cos(\theta))^2} \left[ \frac{e^{2(2s+c_1)}}{(e^{(2s+c_1)} + 1)^2} \right]_0^T. \end{aligned}$$

□

À partir de la forme explicite des extrema de  $S_{0T}^{\sigma_0}$ , il est possible de calculer le coût passage d'un compact à un autre, comme nous allons le faire dans la proposition suivante.

**Proposition 3.5.5.** *La fonction de coût du passage d'un compact à un autre s'exprime de la façon suivante :*

$$\begin{aligned} V_{2i}^{\sigma_0} = V_{ii}^{\sigma_0} &= 0 && \text{pour } i \in \{1, 2, 3\}, \\ V_{j2}^{\sigma_0} &= \frac{1}{2(\varepsilon\sigma_0 \cos(\theta))^2} \left[ \frac{e^{2(2T+c_2)}}{(e^{(2T+c_2)} + 1)^2} - \frac{e^{2c_2}}{(e^{c_2} + 1)^2} \right] && \text{pour } j \in \{1, 3\}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* La proposition 3.3.4 nous permet de connaître les bassins d'attraction des équilibres du système déterministe. Ainsi, nous accédons par le flot aux compacts  $K_i$ ,  $i \in \{1, 3\}$  à partir du compact  $K_2$  et à chaque compact  $K_i$ ,  $i \in \{1, 3\}$  depuis lui-même. Pour accéder au compact  $K_2$  à partir du compact  $K_1$  ou du compact  $K_3$ , la trajectoire doit remonter le flot. En utilisant le Corollaire 3.5.4, nous obtenons

$$V_{ij}^{\sigma_0} = \begin{cases} 0 & \text{si le compact } K_j \text{ est accessible} \\ & \text{par le flot depuis } K_i, \\ \frac{1}{2(\varepsilon\sigma_0 \cos(\theta))^2} \left[ \frac{e^{2(2T+c_2)}}{(e^{(2T+c_2)} + 1)^2} - \frac{e^{2c_2}}{(e^{c_2} + 1)^2} \right] & \text{sinon.} \end{cases}$$

□

En utilisant que pour passer du compact  $K_1$  à  $K_3$ , il faut passer par  $K_2$ , nous obtenons que la matrice de coût associée à (3.1) pour  $\sigma(x) = \sigma_0$  est définie par

$$P = \begin{pmatrix} 0 & V_{12}^{\sigma_0} & V_{12}^{\sigma_0} \\ 0 & 0 & 0 \\ V_{12}^{\sigma_0} & V_{12}^{\sigma_0} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.60)$$

où  $V_{12}^{\sigma_0} = V_{32}^{\sigma_0} = V_{31}^{\sigma_0} = V_{13}^{\sigma_0}$  sont donnés explicitement dans la proposition 3.5.5.

**Corollaire 3.5.6.** *Les compacts  $K_1$  et  $K_3$  sont stables et le compact  $K_2$  est instable.*

*Démonstration.* En utilisant la proposition 3.5.5 et la définition 3.5.1, nous avons  $V_{21}^{\sigma_0} = 0$  et  $V_{12}^{\sigma_0}$ ,  $V_{13}^{\sigma_0}$ ,  $V_{32}^{\sigma_0}$  et  $V_{31}^{\sigma_0}$  sont strictement supérieurs à 0, ce qui nous permet de conclure la preuve.

□

En utilisant la proposition et 3.5.5, nous calculons les quantités  $W^{\sigma_0}(K_i)$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  où  $W^{\sigma_0}(K_i)$  a été défini en (3.56).

**Proposition 3.5.7.** *Les valeurs de  $W^{\sigma_0}(K_i)$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  sont*

$$W^{\sigma_0}(K_1) = V_{12}^{\sigma_0}, \quad W^{\sigma_0}(K_2) = 2V_{12}^{\sigma_0} \quad \text{et} \quad W^{\sigma_0}(K_3) = V_{12}^{\sigma_0}.$$

*Démonstration.* Soient  $g_1 = \{2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 1\}$ ,  $g_2 = \{2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2\}$  et  $g_3 = \{2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1\}$  les différents graphes inclus dans  $G\{1\}$ . À l'aide de la matrice de coût (3.60), nous calculons

$\sum_{(m \rightarrow n) \in g_j} V_{mn}^{\sigma_0}$ . Nous trouvons ainsi

$$\sum_{(m \rightarrow n) \in g_1} V_{mn}^{\sigma_0} = 0 + V_{31}^{\sigma_0},$$

$$\sum_{(m \rightarrow n) \in g_2} V_{mn}^{\sigma_0} = 0 + V_{32}^{\sigma_0},$$

$$\sum_{(m \rightarrow n) \in g_3} V_{mn}^{\sigma_0} = 0 + V_{12}^{\sigma_0}.$$

Nous obtenons donc bien  $W^{\sigma_0}(K_1) = V_{12}^{\sigma_0}$ . Raisonnons de manière similaire pour les deux autres compacts  $K_2$  et  $K_3$ .

□

Remarque : La quantité  $\min_{j \in \{1, 2, 3\}} W^{\sigma_0}(K_j) = V_{12}^{\sigma_0}$  n'est pas atteinte par le compact instable  $K_2$ . En revanche, elle est atteinte par les deux compacts stables  $K_1$  et  $K_3$ .

Nous avons maintenant calculé toutes les quantités nécessaires pour appliquer [31]Théorème 4.1 page 166, nous obtenons le théorème suivant.

**Théorème 3.5.8.** *La suite  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon < \varepsilon_0}$  converge quand  $\varepsilon$  tend vers 0 vers une mesure  $\pi$  définie par*

$$\pi = \frac{1}{2}\delta_{(-1,0)} + \frac{1}{2}\delta_{(1,0)}.$$

*Démonstration.* En utilisant le théorème 4.1 page 166 de [31] pour une fonctionnelle d'action définie par (3.55), il est possible d'encadrer la valeur de la mesure invariante sur les compacts  $K_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Nous obtenons qu'il existe  $\gamma > 0$  tel que  $\pi^\varepsilon(K_i)$  appartient à l'intervalle

$$\left[ \exp\left(-\varepsilon^{-2}\left(W^{\sigma_0}(K_i) - \min_j W^{\sigma_0}(K_j) + \gamma\right)\right), \exp\left(-\varepsilon^{-2}\left(W^{\sigma_0}(K_i) - \min_j W^{\sigma_0}(K_j) - \gamma\right)\right) \right].$$

Quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la mesure invariante se concentre sur les seuls compacts  $K_i$  pour lesquels  $W^{\sigma_0}(K_i) = \min_{j \in \{1, 2, 3\}} W^{\sigma_0}(K_j)$ .

La quantité  $\min_j W^{\sigma_0}(K_j)$  n'est pas atteinte par le compact instable  $K_2$ . Si  $W^{\sigma_0}(K_i) \neq \min_j W^{\sigma_0}(K_j)$ , alors

$$\exp\left(-\varepsilon^{-2}\left(W^{\sigma_0}(K_i) - \min_j W^{\sigma_0}(K_j) \pm \gamma\right)\right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

La mesure invariante se concentre dans les compacts  $K_1$  et  $K_3$  pour lesquels  $W^{\sigma_0}(K_1) = W^{\sigma_0}(K_3) = \min_j W^{\sigma_0}(K_j) = V_{12}^{\sigma_0}$  et non dans le compact instable  $K_2$ .

Le système (3.1) est symétrique par rapport à l'axe  $x = 0$  ainsi nous avons  $\pi^\varepsilon(\mathbb{1}_{\{x < 0\}}) = \pi^\varepsilon(\mathbb{1}_{\{x > 0\}}) = \frac{1}{2}$  et  $\pi^\varepsilon(K_1) = \pi^\varepsilon(K_3)$ . En utilisant le théorème 3.2.4, les valeurs d'adhérence des  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon < \varepsilon_0}$  sont une combinaison linéaire des équilibres du système (3.15). Ainsi, nous obtenons que la mesure limite  $\pi$  de  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon < \varepsilon_0}$  est bien de la forme

$$\pi = \frac{1}{2}\delta_{(-1,0)} + \frac{1}{2}\delta_{(1,0)}.$$

□

### 3.5.3 Coefficient de diffusion linéaire

Considérons maintenant que  $\sigma_1 \neq 0$  et vérifie l'Hypothèse 3.2.2. Comme dans la section précédente, nous calculons les quantités  $W^\sigma(K_i)$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Contrairement à la section précédente, nous ne pouvons pas calculer explicitement les fonctions de coût. Nous allons donc les encadrer dans la proposition suivante.

**Proposition 3.5.9.** *Sous l'Hypothèse 3.2.2, la matrice de coût associée à (3.1) est définie par*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & V_{12}^\sigma & V_{12}^\sigma \\ 0 & 0 & 0 \\ V_{32}^\sigma & V_{32}^\sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.61)$$

où

$$\begin{aligned} V_{12}^\sigma &> V_{32}^\sigma > 0 & \text{si } \sigma_1 > 0, \\ V_{32}^\sigma &> V_{12}^\sigma > 0 & \text{si } \sigma_1 < 0. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Soit  $\delta \in \left]0, \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_1}\right[$ , supposons  $\sigma_1 > 0$  et  $x \in ]-(1 + \delta), 0[$ . Nous détaillons l'encadrement du coût de passage de  $K_1$  vers  $K_2$ . Sous l'Hypothèse 3.2.2, nous avons les encadrements suivants

$$\begin{aligned} \sigma_0 - (1 + \delta)\sigma_1 &< \sigma(x) < \sigma_0 \\ \Leftrightarrow (\sigma_0 - (1 + \delta)\sigma_1)^{-2} &> \sigma(x)^{-2} > \sigma_0^{-2} \\ \Leftrightarrow \frac{\sigma_0^2}{(\sigma_0 - (1 + \delta)\sigma_1)^2} A &> V_{12}^\sigma > A, \end{aligned}$$

où  $A = \frac{1}{2(\varepsilon\sigma_0 \cos(\theta))^2} \left[ \frac{e^{2(2T+c_1)}}{(e^{2T+c_1} + 1)^2} - \frac{e^{2c_1}}{(e^{c_1} + 1)^2} \right]$  et  $c_1$  une constante positive.

Nous faisons de même pour l'encadrement du coût de passage de  $K_3$  vers  $K_2$  et nous obtenons

$$\frac{\sigma_0^2}{(\sigma_0 + (1 + \delta)\sigma_1)^2} A < V_{32}^\sigma < A.$$

Nous en déduisons que  $V_{12}^\sigma > V_{32}^\sigma > 0$ . Nous effectuons le même raisonnement pour  $\sigma_1 < 0$  et nous obtenons que  $V_{32}^\sigma > V_{12}^\sigma > 0$ .

□

Cela nous permet de calculer  $W^\sigma(K_i)$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

**Proposition 3.5.10.** *Les valeurs de  $W^\sigma(K_i)$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  sont*

$$W^\sigma(K_1) = V_{32}^\sigma, \quad W^\sigma(K_2) = V_{12}^\sigma + V_{32}^\sigma \quad \text{et} \quad W^\sigma(K_3) = V_{12}^\sigma.$$

*Démonstration.* Soient  $g_1 = \{2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 1\}$ ,  $g_2 = \{2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2\}$  et  $g_3 = \{2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1\}$ , les différents graphes connectant le compact  $K_1$  aux compacts  $K_2$  et  $K_3$ . À l'aide de la matrice de coût définie par (3.61), nous calculons  $\sum_{(m \rightarrow n) \in g_j} V_{mn}^\sigma$ . Nous trouvons ainsi

$$\sum_{(m \rightarrow n) \in g_1} V_{mn}^\sigma = 0 + V_{32}^\sigma,$$

$$\sum_{(m \rightarrow n) \in g_2} V_{mn}^\sigma = 0 + V_{32}^\sigma,$$

$$\sum_{(m \rightarrow n) \in g_3} V_{mn}^\sigma = 0 + V_{32}^\sigma.$$

Nous obtenons donc  $W^\sigma(K_1) = V_{32}^\sigma$ . Un raisonnement similaire peut être développé pour les deux autres compacts  $K_2$  et  $K_3$ .

□

Remarque : La quantité  $\min_j W^\sigma(K_j)$  dépend du signe de  $\sigma_1$ . D'après la proposition 3.5.9, nous avons  $V_{12}^\sigma > V_{32}^\sigma > 0$  si  $\sigma_1 > 0$  et  $V_{32}^\sigma > V_{12}^\sigma > 0$  si  $\sigma_1 < 0$ . Ainsi, pour  $\sigma_1 > 0$ , seul le compact  $K_1$  atteint le minimum et pour  $\sigma_1 < 0$ , c'est le compact  $K_3$ . Le minimum est atteint pour les compacts dont la valeur du coefficient de diffusion est la plus faible.

**Théorème 3.5.11.** *La suite  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon < \varepsilon_0}$  converge vers une mesure  $\pi$  définie par*

$$\pi = \begin{cases} \delta_{(1,0)} & \text{si } \sigma_1 < 0, \\ \delta_{(-1,0)} & \text{si } \sigma_1 > 0. \end{cases} \quad (3.62)$$

*Démonstration.* En utilisant le théorème de [31, théorème 4.2 page 167] pour une fonctionnelle d'action définie par (3.55) et la proposition 3.5.10, nous obtenons la convergence faible quand  $\varepsilon$  tend vers 0 de  $\pi^\varepsilon$  vers une mesure  $\pi$ . Cette mesure se concentre dans le compact  $K_1$  si  $\sigma_1 < 0$  et dans  $K_3$  si  $\sigma_1 > 0$ .

De plus, en utilisant le théorème 3.2.4, on sait que les valeurs d'adhérence des  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon < \varepsilon_0}$  sont une combinaison linéaire des équilibres du système (3.15). Ainsi, nous obtenons que la mesure limite  $\pi$  de  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon < \varepsilon_0}$  est bien (3.62).

□

En combinant les théorèmes 3.5.8 et 3.5.11, nous prouvons le théorème 3.2.5.

## 3.6 Simulations numériques

Dans cette section, nous illustrons les résultats obtenus dans les sections précédentes. Pour cela, nous allons regarder pour différentes valeurs de  $\sigma_1$  l'évolution de la trajectoire du processus  $(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$  solution de (3.1) ainsi que la mesure d'occupation de ce processus définie par (3.43).

Nous montrons que pour de petites valeurs de  $\varepsilon$ , nous retrouvons les résultats du théorème 3.2.5. Pour cela, nous fixons tous les paramètres excepté  $\sigma_1$  et considérons  $\varepsilon$  fixé et suffisamment petit. Nous prenons une condition initiale en  $(1, 1)$  et obtenons les mesures d'occupation (voir les Figures 3.11, 3.13 et 3.15) pour une trajectoire donnée (voir les Figures 3.10, 3.12 et 3.14) selon le signe de  $\sigma_1$ .

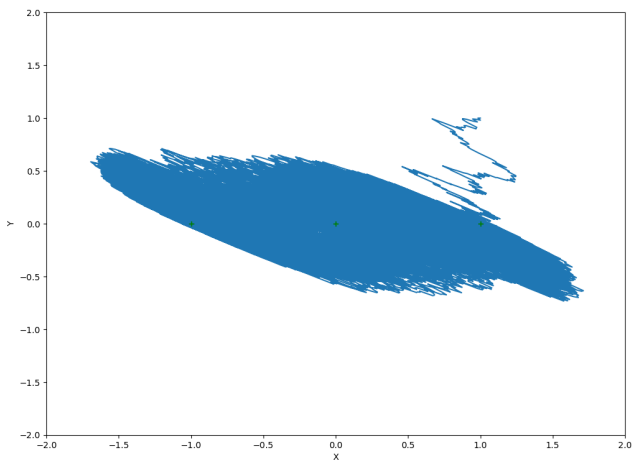


FIGURE 3.10 – Exemple de trajectoire pour  $\sigma_1 = 0$

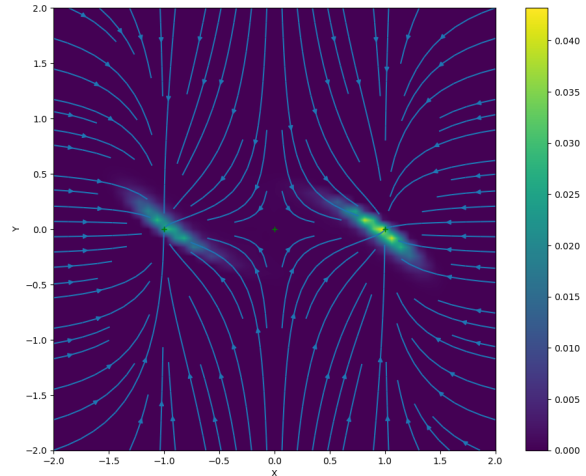


FIGURE 3.11 – Mesure d'occupation pour  $\sigma_1 = 0$

Lorsque  $\sigma_1 = 0$ , la fonction  $\sigma(x)$  est constante et la trajectoire décrite dans la Figure 3.10 montre que le processus passe d'un équilibre stable à l'autre. Remarquons dans la Figure 3.11 que la mesure d'occupation se concentre sur les deux équilibres stables du système, mais sans pouvoir expliciter les poids sur les équilibres stables. Nous retrouvons que la mesure invariante se concentre hors du point col.

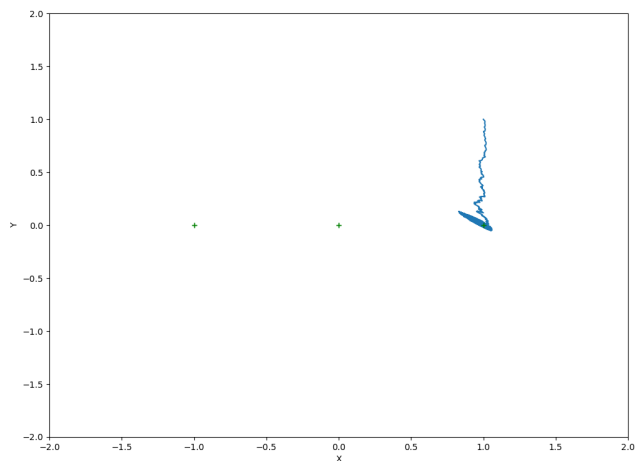


FIGURE 3.12 – Exemple de trajectoire pour  $\sigma_1 < 0$

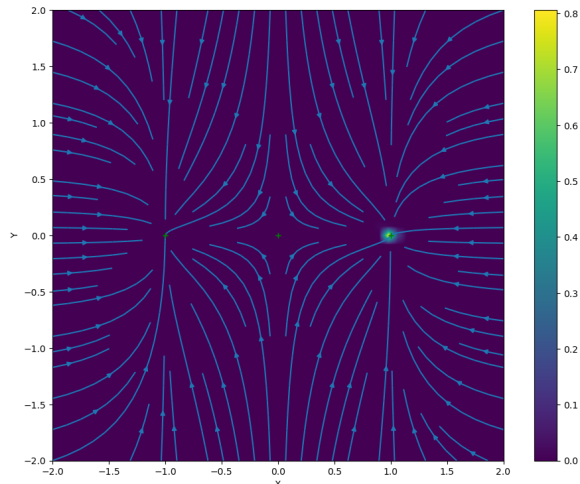


FIGURE 3.13 – Mesure d'occupation pour  $\sigma_1 < 0$

Pour  $\sigma_1 < 0$ , la valeur du coefficient de diffusion est plus élevée pour les  $x$  négatifs que pour les  $x$  positifs. Dans la Figure 3.13, la mesure d'occupation se concentre dans un voisinage du point d'équilibre  $(1, 0)$ , soit l'équilibre stable ayant la valeur de coefficient de diffusion la plus faible.

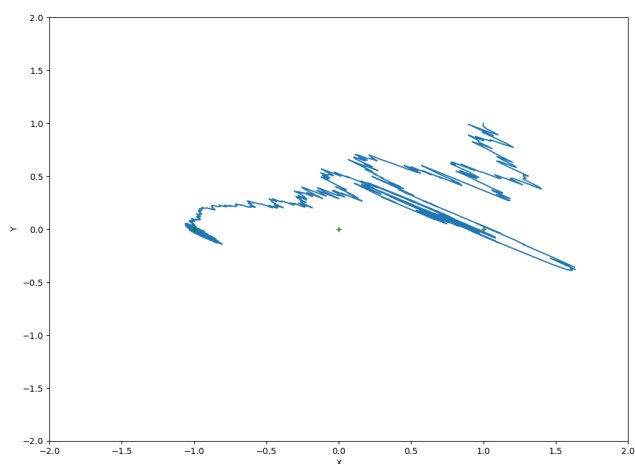


FIGURE 3.14 – Exemple de trajectoire pour  $\sigma_1 > 0$

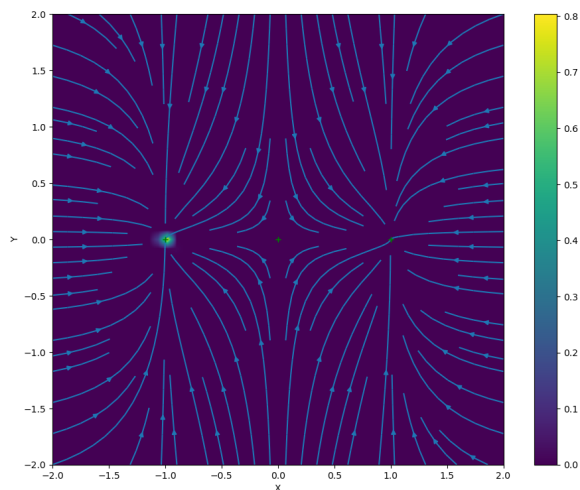


FIGURE 3.15 – Mesure d'occupation pour  $\sigma_1 > 0$

Pour  $\sigma_1 > 0$ , dans la Figure 3.15 et bien que la condition initiale soit prise en  $(1, 1)$ , la mesure invariante se concentre dans un voisinage du point d'équilibre  $(-1, 0)$ . Dans la Figure 3.14, la trajectoire du processus passe par l'équilibre stable en  $(1, 0)$  avant d'aller autour de l'équilibre  $(-1, 0)$  et d'y rester. Le temps passé par le processus en  $(1, 0)$  est négligeable par



rapport à celui passé en  $(-1, 0)$ . En effet, en Figure 3.15, on remarque que la mesure invariante ne se concentre pas l'équilibre  $(1, 0)$ .

Remarque : Dans ces simulations, nous avons pris  $\varepsilon = 5$ . Ce choix est motivé par le fait que si on prend  $\varepsilon$  faible, le temps pour voir le passage d'un équilibre à l'autre est élevé. Remarquons que la mesure invariante  $\pi^\varepsilon$  est assez concentrée sur les équilibres stables du système bien que la valeur de  $\varepsilon$  soit élevée.

Ces observations confirment ce que nous avons montré dans les sections précédentes : la mesure invariante  $\pi^\varepsilon$ , quand  $\varepsilon$  tend vers 0, se concentre autour du point d'équilibre stable pour lequel la valeur du coefficient de diffusion est la moins élevée si  $\sigma_1 \neq 0$  et sur les deux équilibres stables si  $\sigma_1 = 0$ .

# Chapitre 4

## Extension des résultats concernant le système (3.1) au système (2.7) et conjecture pour le système (2.5)

### Introduction

L'objectif dans ce chapitre est de faire le lien entre les deux chapitres précédents. À cause des différences entre le système reparamétrisé (2.7) et le système étudié (3.1), nous étendons les résultats des théorèmes 3.2.3 et 3.2.5 au système stochastique approché (2.7). Nous revenons ensuite au système (2.5) et nous conjecturons que les paramètres de pression sociale et de coût des comportements jouent un rôle déterminant dans le comportement en temps long du système (2.5). Nous illustrons numériquement cette conjecture faite sur les paramètres du système (2.5).

### 4.1 Comportement asymptotique du système (2.7)

Le système (2.7) est un système dégénéré puisque sa matrice de diffusion n'est pas inversible. Ce système, tout comme le système (3.1), est dirigé par le même mouvement brownien sur ses deux composantes. Néanmoins, la matrice du terme de dérive du système (2.7), contrairement à celui du système (3.1), n'est pas une matrice diagonale. À cause de cette différence dans le terme de dérive, nous ne pouvons pas appliquer directement les théorèmes 3.2.3 et 3.2.5 au système (2.7). Nous allons dans cette partie étendre les résultats précédents au système (2.7). Notons que le coefficient de diffusion est alors constant. Rappelons que les points d'équilibre du système déterministe associé à (2.7), comme pour le système (3.1) sont

$$z_1 = (-1, 0), \quad z_2 = (0, 0) \text{ et } z_3 = (1, 0). \quad (4.1)$$

Dans cette section, nous obtenons le théorème suivant :

**Théorème 4.1.1.** *Soit  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  fixé. Sous l'Hypothèse 2.2.1, le processus  $(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$  solution de (2.7) admet une unique mesure invariante notée  $\pi^\varepsilon$  qui est à densité par rapport à la mesure*

de Lebesgue et il existe des constantes  $C > 0$  et  $\gamma > 0$  telles que pour tout  $t > 0$

$$\|P_t((x, y), \cdot) - \pi^\varepsilon(\cdot)\|_W \leq CW(x, y)e^{-\gamma t}, \quad (4.2)$$

où la norme  $\|\cdot\|_W$  est rappelée en (3.6),  $W$  est la fonction de Liapunov définie par  $W(x, y) = 1 + x^2 + y^2$  et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

De plus, la suite  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[}$  converge quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  vers une mesure  $\pi$  définie par

$$\pi = \frac{1}{2}\delta_{z_1} + \frac{1}{2}\delta_{z_3}, \quad (4.3)$$

où  $z_1$  et  $z_3$  sont définis par (4.1).

Pour prouver le théorème 4.1.1, nous adaptions l'approche du chapitre précédent. Pour cela, nous allons reprendre les trois étapes principales de la preuve du théorème 3.2.3 en montrant que :

- le générateur associé au système (2.7) admet la fonction de Liapunov  $W$ ,
- il existe un domaine contenant les points (4.1) tel que tous les points du domaine sont accessibles en un temps fini depuis toute condition initiale prise dans un sous ensemble de  $\mathbb{R}^2$ ,
- la probabilité de transition du processus  $(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$  solution de (2.7) admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Introduisons  $\mathcal{L}^\varepsilon$  le générateur infinitésimal associé à (2.7) défini pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et toute fonction  $f \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\varepsilon f(x, y) &= \lambda_1 x(1 - x^2) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (\lambda_3 x(1 - x^2) - \lambda_2 y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ &+ \frac{\varepsilon^2 \sigma^2}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x y}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \right]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

**Lemme 4.1.2.** *Le générateur infinitésimal  $\mathcal{L}^\varepsilon$  défini par (4.4) vérifie la condition de Liapunov pour  $W(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ , c'est-à-dire, qu'il existe des constantes positives  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  indépendantes de  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  telles que*

$$\mathcal{L}^\varepsilon W \leq \alpha_1 - \alpha_2 W. \quad (4.5)$$

*Démonstration.* Nous allons prouver qu'il existe des constantes positives  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  pour lesquelles (4.5) est vérifiée. Nous avons

$$\mathcal{L}^\varepsilon W(x, y) = 2\lambda_1 x^2(1 - x^2) - 2\lambda_2 y^2 + 2\lambda_3 yx(1 - x^2) + (\varepsilon\sigma)^2.$$

En utilisant  $2xy \leq x^2 + y^2$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\varepsilon W(x, y) &\leq (\varepsilon\sigma)^2 + 2\lambda_1 x^2(1 - x^2) - 2\lambda_2 y^2 + \lambda_3(x^2 + y^2)(1 - x^2) \\ &\leq (\varepsilon\sigma)^2 + (2\lambda_1 + \lambda_3)x^2(1 - x^2) - y^2(2\lambda_2 - \lambda_3(1 - x^2)).\end{aligned}$$

En utilisant qu'il existe des constantes positives  $c_1$  et  $c_2$  telles que  $x^2(1 - x^2) \leq c_1 - c_2 x^2$ , nous pouvons majorer le second terme  $(2\lambda_1 + \lambda_3)x^2(1 - x^2)$  par  $c_3 - c_4 x^2$  où  $c_3 = (2\lambda_1 + \lambda_3)c_1$  et  $c_4 = (2\lambda_1 + \lambda_3)c_2$ .

Lorsque  $x^2 > 1$ , le coefficient devant  $y^2$  est négatif. De plus,  $2\lambda_2 - \lambda_3 > 0$ , et le coefficient devant  $y^2$  est également négatif lorsque  $x^2 < 1$ .

Nous majorons le troisième terme  $-y^2(2\lambda_2 - \lambda_3(1 - x^2))$  par  $-c_5 y^2$  où  $c_5 = 2\lambda_2 - \lambda_3 > 0$ .

Ainsi, nous avons

$$\mathcal{L}^\varepsilon W \leq \alpha_1 - \alpha_2 W,$$

où  $\alpha_1 = (\varepsilon_0\sigma)^2 + c_3 + c_4 + c_5$  et  $\alpha_2 = \min(c_4, c_5)$ .

□

Introduisons le domaine  $D$  défini de la manière suivante :

$$D := [-2, 2]^2.$$

Les points d'équilibre  $z_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  définis par (4.1) appartiennent bien à  $D$ .

Remarque : Le domaine doit être un compact contenant les points d'équilibre du système. Tous les ensembles choisis de la forme  $[-a, a]^2$  avec  $a > 1$  sont admissibles.

Introduisons maintenant le système de contrôle associé au processus  $(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)$  solution du système (2.7) défini par :

$$\begin{cases} dx_t^\varphi = \lambda_1 x_t^\varphi(1 - (x_t^\varphi)^2)dt + \varepsilon\sigma \cos(\theta)\varphi(t)dt \\ dy_t^\varphi = -\lambda_2 y_t^\varphi + \lambda_3 x_t^\varphi(1 - (x_t^\varphi)^2)dt + \varepsilon\sigma \sin(\theta)\varphi(t)dt, \end{cases} \quad (4.6)$$

où la fonction de contrôle  $\varphi$  est une fonction continue par morceaux définie sur  $\mathbb{R}_+$ .

Introduisons pour  $R \geq 1$  l'ensemble  $\mathcal{C}_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, W(x, y) \leq R\}$ . Nous pouvons prouver le lemme suivant.

**Lemme 4.1.3.** *Il existe un temps  $T_{\mathcal{C}_R} > 0$  tel que pour tout  $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}_R$  et  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in D$ , il existe une fonction de contrôle  $\varphi$  telle que  $(x_0^\varphi, y_0^\varphi) = (x_0, y_0)$  et  $(x_{T_{\mathcal{C}_R}}^\varphi, y_{T_{\mathcal{C}_R}}^\varphi) = (\tilde{x}, \tilde{y})$  où  $(x_t^\varphi, y_t^\varphi)_{t \geq 0}$  est solution de (4.6).*

*Démonstration.* Nous allons décomposer la preuve en trois parties :

- construire une fonction de contrôle et trouver le temps maximal pour aller d'un point  $z \in D$  vers n'importe quel point  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in D$ ,
- construire une fonction de contrôle et trouver le temps maximal pour aller de toute condition initiale  $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}_R$  vers le voisinage d'un point  $z$  de  $D$ ,

— construire une fonction de contrôle permettant de passer d'un voisinage de  $z$  à  $z$  en un temps fini.

Pour des raisons de simplicité, nous choisissons  $z = z_1$ .

De manière similaire à la preuve du lemme 3.4.7, introduisons les fonctions de contrôles constantes suivantes :

— La fonction  $\varphi_0(t) = 0$  permet de suivre le flot du système déterministe.

— La fonction  $\varphi_k(t) = k$  (resp.  $\varphi_{-k}(t) = -k$ ) où  $k > 0$  est pris suffisamment grand pour que la dynamique soit menée par le vecteur  $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$  (resp.  $-\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ ).

— La fonction  $\phi_*(t) = \frac{-\lambda_1 x_*(1-x_*^2)}{\varepsilon \cos(\theta)\sigma}$  permet d'annuler la dérivée de la première composante au point  $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ .

La preuve est similaire à celle faite pour le lemme 3.4.7. Nous allons construire des contrôles montrant qu'il est possible depuis toute initialisation prise dans  $\mathcal{C}_R$  d'atteindre tout point de  $D$ .

Soit  $(x_t^{\varphi_*}, y_t^{\varphi_*})$  solution de (4.6) pour la fonction de contrôle  $\varphi_*$  et de condition initiale  $(x_*, y_*) \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-\sigma_0}{\sigma_1} \right\} \times \mathbb{R}$ . Le système (4.6) pour la fonction de contrôle  $\varphi_*$  se réécrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} dx_t^{\varphi_*} = 0 \\ dy_t^{\varphi_*} = -\lambda_2 y_t^{\varphi_*} dt + (\lambda_3 - \lambda_1 \tan(\theta)) x_* (1 - x_*^2) dt. \end{cases} \quad (4.7)$$

En particulier, le point d'équilibre du système (4.7) est de la forme  $\left( x_*, -\frac{(\lambda_3 - \lambda_1 \tan(\theta)) x_* (x_*^2 - 1)}{\lambda} \right)$ .

**Étape 1 : Construction du contrôle permettant d'atteindre tout point de  $D$  depuis  $(-1, 0)$ .** Introduisons les droites  $(\mathcal{D}_{(-1,0)})$ ,  $(\mathcal{D}_{(-2,2)})$  et  $(\mathcal{D}_{(2,-2)})$  ayant pour équations

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{(-1,0)}) : & y = \tan(\theta) (x + 1) \\ (\mathcal{D}_{(-2,2)}) : & y = \tan(\theta) (x + 2) + 2 \\ (\mathcal{D}_{(2,-2)}) : & y = \tan(\theta) (x - 2) - 2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Les droites  $(\mathcal{D}_{(-2,2)})$  et  $(\mathcal{D}_{(2,-2)})$  passent par les coins du domaine  $D$ ;  $(-2, 2)$  et  $(2, -2)$ .

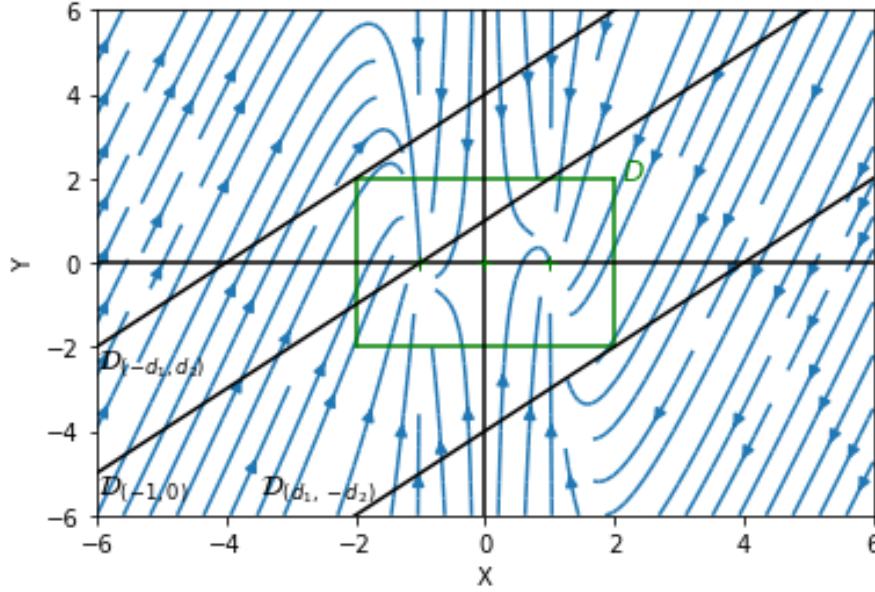


FIGURE 4.1 – Champs de vecteurs pour les paramètres  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta) = \left(16, 35, 50, \frac{\pi}{4}\right)$ .

Nous pouvons décomposer cette étape en deux sous étapes : Construire une fonction de contrôle qui permet d’atteindre

- les points situés en dessous de la droite  $\mathcal{D}_{(-1,0)}$ ,
- ceux au-dessus de la droite  $\mathcal{D}_{(-1,0)}$ .

La construction de la fonction de contrôle étant similaire pour atteindre les points au-dessus et en dessous de la droite  $\mathcal{D}_{(-1,0)}$ , nous ne détaillerons que la construction de la fonction permettant d’atteindre les points situés en dessous de la droite  $\mathcal{D}_{(-1,0)}$ .

De plus, le raisonnement pour construire la fonction de contrôle permettant d’atteindre les points situés en dessous de la droite  $\mathcal{D}_{(-1,0)}$  a été fait dans la preuve du lemme 3.4.7 étape 1a. La seule différence provient du coefficient de dérive dans les systèmes (3.1) et (2.7). Les points d’équilibre des systèmes (3.28) et (4.7) sont différents. Nous allons donc adapter la condition (3.30) au système (2.7).

Soit  $D^-$  l’ensemble des points de  $D$  en dessous de la droite  $(\mathcal{D}_{(-1,0)})$ . Cherchons  $x_* \in \mathbb{R}$  tel que le point d’équilibre de (4.7),  $\left(x_*, -\frac{\tan(\theta)x_*(1-(x_*)^2)}{\lambda_2}\right)$ , est en dessous de la droite  $(\mathcal{D}_{(2,-2)})$  alors nous pourrons construire un contrôle pour atteindre tout point de  $D^-$ .

La condition énoncée ci-dessus est équivalente à l’inégalité suivante, soit  $x_* \in \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{aligned} & -\frac{(\lambda_3 - \tan(\theta)\lambda_1)x_*((x_*)^2 - 1)}{\lambda_2} < \tan(\theta)(x_* - 2) - 2 \\ \iff & (\tan(\theta)\lambda_1 - \lambda_3)x_*(x_*^2 - 1) < \lambda_2 \tan(\theta)(x_* - 2) - 2\lambda_2 \\ \iff & f(x_*) < 0, \end{aligned} \tag{4.9}$$

où  $f(x) = (\tan(\theta)\lambda_1 - \lambda_3)x^3 - (\tan(\theta)(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_3)x + 2\lambda_2(\tan(\theta) + 1)$ .

Si  $\tan(\theta)\lambda_1 - \lambda_3 \neq 0$ , alors il existe  $x_* \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x_*) < 0$  et dans le cas où  $\tan(\theta)\lambda_1 - \lambda_3 =$

0, alors pour  $x^* < \frac{-2(\tan(\theta) + 1)}{\tan(\theta)}$ , on a  $f(x_*) < 0$ .

Nous pouvons définir la fonction de contrôle suivante puisqu'il existe  $x \in \mathbb{R}$  tel que la condition (4.9) est vérifiée. Soient  $(x_a, y_a) \in D^-$  et  $x_* \in \mathbb{R}$  vérifiant (4.9). Soit  $\left(x_t^{\varphi_{(x_a, y_a)}^-}, y_t^{\varphi_{(x_a, y_a)}^-}\right)$  solution de (4.6) avec une condition initiale  $(-1, 0)$  et pour la fonction de contrôle  $\varphi_{(x_a, y_a)}^-$  définie par

$$\varphi_{(x_a, y_a)}^-(t) = \begin{cases} \varphi_{-k}(t) & \text{pour } t \leq t_1, \\ \varphi_*(t) & \text{pour } t \in ]t_1, t_2], \\ \varphi_k(t) & \text{pour } t > t_2, \end{cases} \quad (4.10)$$

où  $t_1 = \inf \{t : x_t < x_*\}$  et  $t_2 = \inf \{t : y_t^{\varphi_*} < \tan(\theta)(x_* - x_a) + y_a\}$  où  $(x_t^{\varphi_*}, y_t^{\varphi_*})_{t \geq 0}$  est solution de (4.7) et de condition initiale  $(x_*, \tan(\theta)(x_* + 1))$ .

Soit  $T_{1a} = \sup \left\{ (x_a, y_a) \in D^-, \inf \left\{ t : \left( x_t^{\varphi_{(x_a, y_a)}^-}, y_t^{\varphi_{(x_a, y_a)}^-} \right) = (x_a, y_a) \right\} \right\}$ . À partir de ce temps  $T_{1a}$ , il est possible de construire une fonction de contrôle indépendante de la condition finale telle que l'on puisse atteindre depuis  $(-1, 0)$  tout point de  $D^-$ . En effet, en ajoutant une étape dite d'attente pendant un temps de  $T_{1a} - T_{1a}^{(x_a, y_a)}$ , il est possible d'avoir une fonction de contrôle telle que le temps d'atteinte pour tout point de  $D^-$  est  $T_{1a}$ .

Un exemple de trajectoire est donné dans Figure 4.2 pour une condition finale dans  $D^-$ .

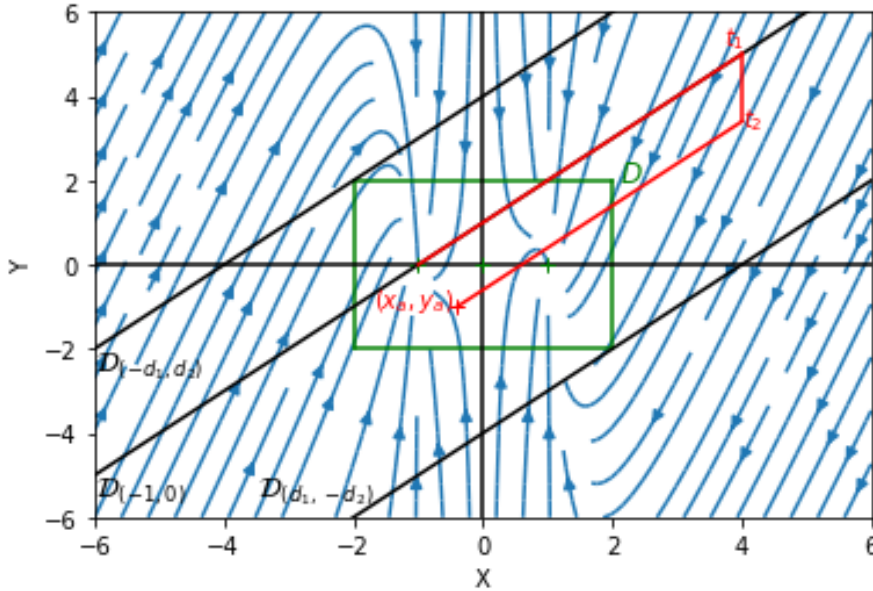


FIGURE 4.2 – Trajectoires de solutions de (4.6) pour les paramètres  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta) = \left(16, 35, 50, \frac{\pi}{4}\right)$ , de condition initiale  $(-1, 0)$  et de condition finale  $(-0.4, -1) \in D^-$  pour la fonction de contrôle  $\varphi_{(x_a, y_a)}^-$ . Les droites  $\mathcal{D}_{(-2,2)}$ ,  $\mathcal{D}_{(-1,0)}$  et  $\mathcal{D}_{(2,-2)}$  sont définies par (4.8).

Nous procédons de manière similaire pour les points au-dessus de  $\mathcal{D}_{(-1,0)}$ . Soit  $T_{1b} = \sup \left\{ (x_b, y_b) \in D^+, \inf \left\{ t : \left( x_t^{\varphi_{(x_b, y_b)}^+}, y_t^{\varphi_{(x_b, y_b)}^+} \right) = (x_b, y_b) \right\} \right\}$  un temps indépendant de la

condition finale permettant de construire une fonction de contrôle telle que l'on puisse atteindre depuis  $(-1, 0)$  tout point de  $D^+$ . En ajoutant une étape dite d'attente pendant un temps de  $T_{1b} - T_{1b}^{(x_b, y_b)}$ , il est possible d'avoir une fonction de contrôle telle que le temps d'atteinte pour tout point de  $D^+$  est  $T_{1b}$ .

### Étape 2 : Atteindre le point $(-1, 0)$ en partant d'un voisinage de $(-1, 0)$ .

En nous inspirant de l'étape 2 dans la preuve du lemme 3.4.7, nous construisons une fonction de contrôle pour atteindre un voisinage de  $z_1 = (-1, 0)$  depuis toute condition initiale prise dans  $\mathcal{C}_R$ .

Tout d'abord, nous distinguons deux ensembles. Soient l'ensemble  $\mathcal{C}_R^+ = \{(x, y) \in \mathcal{C}_R, x > 0\}$  et  $\mathcal{C}_R^- = \{(x, y) \in \mathcal{C}_R, x \leq 0\}$ .

Soit  $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}_R$  et  $(x_t^{\varphi(-1, -\delta)}, y_t^{\varphi(-1, -\delta)})$  la solution de (4.6) avec pour condition initiale  $(x_0, y_0)$  et pour contrôle, la fonction définie par

$$\varphi_{(-1, -\delta)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \leq t_c, \\ \varphi_{-k}(t) & \text{pour } t_c < t \leq t_{c,1}, \\ 0 & \text{pour } t > t_{c,1}, \end{cases} \quad (4.11)$$

où  $t_c = \sup \{(x_0, y_0) \in \mathcal{C}_R^+, \inf \{t : \|(x_t^{\varphi(-1, -\delta)}, y_t^{\varphi(-1, -\delta)}) - (1, 0)\| < \delta_1\}\}, \delta_1 > 0$  et  $t_{c,1} = \inf \{t : x_t^{\varphi(-1, -\delta)} < -1\}$ . Par symétrie sur le flot, le temps d'atteinte d'un des points fixes stables en suivant le flot est au plus  $t_c$ .

Soit  $t_{c,2} = \inf \{t : (x_{t+t_{c,1}}^{\varphi(-1, -\delta)}, y_{t+t_{c,1}}^{\varphi(-1, -\delta)}) \in \mathcal{C}_R^-\}$  le temps d'atteinte de  $\mathcal{C}_R^-$  après la deuxième étape de la fonction de contrôle  $\varphi_{(-1, -\delta)}$ . Le temps nécessaire pour atteindre un voisinage  $(-1, 0)$  en partant d'une condition initiale dans  $\mathcal{C}_R$  est au maximum un temps  $T_2^{\mathcal{C}_R} = t_{c,1} + t_{c,2} + t_c$ .

### Étape 3 : Atteindre le point $(-1, 0)$ en partant d'un voisinage de $(-1, 0)$ .

Dans un premier temps, nous reparamétrisons le système (4.6) en posant  $x(t) = -1 + u(t)$  et  $y(t) = v(t)$  pour étudier le système en  $(0, 0)$ .

Nous obtenons ainsi

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = -2\lambda_1 u(t) + \varepsilon \cos(\theta) \sigma \varphi(t) + R_1(u(t)) \\ \dot{v}(t) = -\lambda_2 v(t) - 2\lambda_3 u(t) + \varepsilon \sin(\theta) \sigma \varphi(t) + R_2(u(t)), \end{cases} \quad (4.12)$$

où  $R_1(u) = \lambda_1 u^2(3 - u)$  et  $R_2(u) = \lambda_3 u^2(3 - u)$ .

L'objectif est d'appliquer le théorème des fonctions implicites [24, page 275 du théorème 10.2.1]. Pour cela, nous posons  $\varphi_{c_1, c_2} = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2$ , où  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^2)$  et  $U_0$  un voisinage du



point  $(0, 0)$ .

En utilisant la méthode de la constante sur la première composante du système (4.12), nous obtenons

$$u_t = u_0 e^{-2\lambda_1 t} + \int_0^t \varepsilon \cos(\theta) \sigma \varphi_{c_1, c_2}(s) e^{-2\lambda_1(t-s)} ds + \bar{R}_1(u, t) \quad (4.13)$$

$$\text{où } \bar{R}_1(u, t) = \int_0^t R_1(u_s) e^{-2\lambda_1(t-s)} ds.$$

En utilisant la méthode de la constante sur la deuxième composante du système (4.12), nous avons

$$v_t = v_0 e^{-\lambda_2 t} + \int_0^t (-2\lambda_3 u_s + \varepsilon \sin(\theta) \sigma \varphi_{c_1, c_2}(s)) e^{-\lambda_2(t-s)} ds + \bar{R}_2(u, t), \quad (4.14)$$

$$\text{où } \bar{R}_2(u, t) = \int_0^t R_2(u_s) e^{-\lambda_2(t-s)} ds.$$

Soit  $T > 0$ . En utilisant la variation de la constante sur le système (3.36) avec la fonction de contrôle  $\varphi_{c_1, c_2}$ , nous obtenons le système suivant pour toute condition initiale  $(u_0, v_0) \in U_0$

$$\Phi^T((u_0, v_0), (c_1, c_2)) = \begin{cases} e^{-2\lambda_1 T} u_0 + \int_0^T \varepsilon \cos(\theta) \sigma \varphi_{c_1, c_2}(s) e^{-2\lambda_1(T-s)} ds \\ + \bar{R}_1(u, T) \\ e^{-\lambda_2 T} v_0 + \int_0^T \varepsilon \sin(\theta) \sigma \varphi_{c_1, c_2}(s) e^{-\lambda_2(T-s)} ds \\ - \int_0^T 2\lambda_3 \bar{u}_s e^{-\lambda_2(T-s)} ds + \bar{R}_3(u, T), \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\text{où } \bar{u}_t = e^{-2\lambda_1 t} u_0 + \int_0^t \varepsilon \cos(\theta) \sigma \varphi_{c_1, c_2}(s) e^{-2\lambda_1(t-s)} ds \text{ et } \bar{R}_3(u, T) = \int_0^T -2\lambda_3 \bar{R}_1(u, s) ds + \bar{R}_2(u, T).$$

Pour appliquer le théorème des fonctions implicites, il faut s'assurer qu'il existe  $(u_0, v_0) \in U_0$  et  $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$  telles que  $\Phi^T((u_0, v_0), (c_1, c_2)) = 0$  et qu'il existe  $T > 0$  telle que la dérivée partielle  $D_2 \Phi^T((u_0, v_0), (c_1, c_2))$  soit un homéomorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ . Si ces conditions sont vérifiées alors pour toute condition initiale  $(\bar{u}_0, \bar{v}_0) \in U_0$ , il existe une fonction  $\eta$  de  $U_0$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que  $\eta((\bar{u}_0, \bar{v}_0)) = (c_1, c_2)$  et  $\Phi^T((\bar{u}_0, \bar{v}_0), \eta(\bar{u}_0, \bar{v}_0)) = 0$ . La fonction  $\eta$  sera une application qui à toute condition initiale dans  $U_0$  associe une fonction de contrôle permettant d'atteindre le point  $(0, 0)$  pour le système (3.36) en un temps  $T$  fini.

Pour  $(c_1, c_2) = (0, 0, 0, 0)$ ,  $\varphi_{0,0} = 0$ . Nous avons bien  $\Phi^T((0, 0), (0, 0)) = 0$ .

Pour vérifier que la dérivée partielle  $D_2 \Phi^T((u_0, v_0), (c_1, c_2))$  est un homéomorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , nous calculons  $D_2 \Phi^T$  puis son déterminant. Nous obtenons ainsi

$$D_2 \Phi^T((u_0, v_0), (c_1, c_2)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_T}{\partial c_1} & \frac{\partial u_T}{\partial c_2} \\ \frac{\partial v_T}{\partial c_1} & \frac{\partial v_T}{\partial c_2} \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \text{où } \frac{\partial u_T}{\partial c_1} &= \int_0^T \varepsilon \cos(\theta) \sigma \varphi_1(s) e^{-2\lambda_1(T-s)} ds, \quad \frac{\partial u_T}{\partial c_2} = \int_0^T \varepsilon \cos(\theta) \sigma \varphi_2(s) e^{-2\lambda_1(T-s)} ds, \\ \frac{\partial v_T}{\partial c_1} &= \int_0^T \left( -2\lambda_3 \frac{\partial u_s}{\partial c_1} + \varepsilon \sin(\theta) \sigma \varphi_1(s) \right) e^{-\lambda_2(T-s)} ds \text{ et} \\ \frac{\partial v_T}{\partial c_2} &= \int_0^T \left( -2\lambda_3 \frac{\partial u_s}{\partial c_2} + \varepsilon \sin(\theta) \sigma \varphi_2(s) \right) e^{-\lambda_2(T-s)} ds. \end{aligned}$$

Nous obtenons le déterminant suivant

$$\begin{aligned} \det \left( D_2 \Phi^T((u_0, v_0), (c_1, c_2)) \right) &= \frac{\partial u_T}{\partial c_1} \frac{\partial v_T}{\partial c_2} - \frac{\partial u_T}{\partial c_2} \frac{\partial v_T}{\partial c_1}, \\ &= \varepsilon \sigma \cos(\theta) \left( A_1(T) \frac{\partial v_T}{\partial c_2} - A_2(T) \frac{\partial v_T}{\partial c_1} \right), \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\text{où } A_1(T) = \int_0^T \varphi_1(s) e^{-2\lambda_1(T-s)} ds \text{ et } A_2(T) = \int_0^T \varphi_2(s) e^{-2\lambda_1(T-s)} ds.$$

Pour montrer que  $D_2 \Phi^T((u_0, v_0), (c_1, c_2))$  est un homéomorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ , il faut trouver des fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  telles que l'on puisse calculer explicitement  $A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}$  et montrer que cette valeur est différente de 0.

Supposons que  $\varphi_1(t) = 1$  et  $\varphi_2(t) = t$  et montrons que pour ces fonctions, le déterminant est non nul. Nous avons alors  $A_1(T) = \frac{2\lambda_1}{4\lambda_1^2} (1 - e^{-2\lambda_1 T})$  et  $A_2(T) = \frac{1}{4\lambda_1^2} (2\lambda_1 T - 1 + e^{-2\lambda_1 T})$ .

En sachant que  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $2\lambda_1 - \lambda_2$  sont différents de 0, calculons maintenant  $\frac{\partial v_T}{\partial c_1}$  et  $\frac{\partial v_T}{\partial c_2}$ .

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_T}{\partial c_1} &= \int_0^T \left( -2\lambda_3 \frac{\partial u_s}{\partial c_1} + \varepsilon \sin(\theta) \sigma \varphi_1(s) \right) e^{-\lambda_2(T-s)} ds \\ &= \frac{1}{4\lambda_1^2} \int_0^T \left( -2\varepsilon \sigma \cos(\theta) \lambda_3 2\lambda_1 (1 - e^{-2\lambda_1 s}) + 4\varepsilon \sigma \sin(\theta) \lambda_1^2 \right) e^{-\lambda_2(T-s)} ds \\ &= \frac{\varepsilon \sigma e^{-\lambda_2 T}}{4\lambda_1^2} \int_0^T a_2 e^{\lambda_2 s} - 2a_1 \lambda_1 e^{-(2\lambda_1 - \lambda_2)s} ds \\ &= \frac{\varepsilon \sigma}{4\lambda_1^2} \left( \frac{a_2}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 T}) + \frac{2a_1 \lambda_1}{2\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_2 T} - e^{-2\lambda_1 T}) \right) \\ &= \frac{\varepsilon \sigma}{(2\lambda_1 \lambda_2)^2 (2\lambda_1 - \lambda_2)} \left( (a_2 \lambda_2 (2\lambda_1 - \lambda_2) + 2a_1 \lambda_1 \lambda_2^2) (1 - e^{-\lambda_2 T}) - 2a_1 \lambda_1 \lambda_2^2 (1 - e^{-2\lambda_1 T}) \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_T}{\partial c_2} &= \int_0^T \left( -2\lambda_3 \frac{\partial u_s}{\partial c_2} + \varepsilon \sin(\theta) \sigma \varphi_2(s) \right) e^{-\lambda_2(T-s)} ds \\
&= \frac{1}{4\lambda_1^2} \int_0^T \left( -2\varepsilon \sigma \cos(\theta) \lambda_3 \left( 2\lambda_1 s - 1 + e^{-2\lambda_1 s} \right) + 4\varepsilon \sigma \sin(\theta) \lambda_1^2 s \right) e^{-\lambda_2(T-s)} ds \\
&= \frac{\varepsilon \sigma}{4\lambda_1^2} e^{-\lambda_2 T} \int_0^T a_1 e^{\lambda_2 s} + a_2 s e^{\lambda_2 s} - a_1 e^{-(2\lambda_1 - \lambda_2)s} ds \\
&= \frac{\varepsilon \sigma}{4\lambda_1^2} e^{-\lambda_2 T} \left( \frac{a_1}{\lambda_2} \left( e^{\lambda_2 T} - 1 \right) + \frac{a_1}{2\lambda_1 - \lambda_2} \left( e^{-(2\lambda_1 - \lambda_2)T} - 1 \right) + \int_0^T a_2 s e^{\lambda_2 s} ds \right) \\
&= \frac{\varepsilon \sigma}{4\lambda_1^2} e^{-\lambda_2 T} \left( \frac{a_1}{\lambda_2} \left( e^{\lambda_2 T} - 1 \right) + \frac{a_1}{2\lambda_1 - \lambda_2} \left( e^{-(2\lambda_1 - \lambda_2)T} - 1 \right) + \frac{a_2 T e^{\lambda_2 T}}{\lambda_2} - \frac{a_2}{\lambda_2^2} \left( e^{\lambda_2 T} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{\varepsilon \sigma}{4\lambda_1^2} \left( \frac{a_1}{\lambda_2} \left( 1 - e^{-\lambda_2 T} \right) + \frac{a_1}{2\lambda_1 - \lambda_2} \left( e^{-2\lambda_1 T} - e^{-\lambda_2 T} \right) + \frac{a_2 T}{\lambda_2} - \frac{a_2}{\lambda_2^2} \left( 1 - e^{-\lambda_2 T} \right) \right) \\
&= \frac{\varepsilon \sigma}{(2\lambda_1 \lambda_2)^2 (2\lambda_1 - \lambda_2)} \left( (2\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 \lambda_2 - a_2) + a_1 \lambda_2^2 \right) \left( 1 - e^{-\lambda_2 T} \right) \\
&\quad + \frac{\varepsilon \sigma}{(2\lambda_1 \lambda_2)^2 (2\lambda_1 - \lambda_2)} \left( a_2 \lambda_2 (2\lambda_1 - \lambda_2) T - a_1 \lambda_2^2 \left( 1 - e^{-2\lambda_1 T} \right) \right),
\end{aligned}$$

où  $a_1 = 2 \cos(\theta) \lambda_3$  et  $a_2 = 4\lambda_1^2 \sin(\theta) - 2a_1 \lambda_1$ .

Nous obtenons ainsi le déterminant suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_T}{\partial c_1} \frac{\partial v_T}{\partial c_2} - \frac{\partial u_T}{\partial c_2} \frac{\partial v_T}{\partial c_1} &= a_3 2\lambda_1 \left( 1 - e^{-2\lambda_1 T} \right) \left( a_4 \left( 1 - e^{-2\lambda_1 T} \right) + a_5 \left( 1 - e^{-\lambda_2 T} \right) + a_6 T \right) \\
&\quad - a_3 \left( 2\lambda_1 T - 1 + e^{-2\lambda_1 T} \right) \left( a_7 \left( 1 - e^{-2\lambda_1 T} \right) + a_8 \left( 1 - e^{-\lambda_2 T} \right) \right), \\
&= a_3 T \left( (2\lambda_1 a_6 - 2\lambda_1 a_7) \left( 1 - e^{-2\lambda_1 T} \right) - 2\lambda_1 a_8 \left( 1 - e^{-\lambda_2 T} \right) \right) \\
&\quad + a_3 \left( 1 - e^{-2\lambda_1 T} \right) \left( (2\lambda_1 a_4 + a_7) \left( 1 - e^{-2\lambda_1 T} \right) + (2\lambda_1 a_5 + a_8) \left( 1 - e^{-\lambda_2 T} \right) \right), \\
&= 2\lambda_1 a_8 a_3 T \left( e^{-\lambda_2 T} - e^{-2\lambda_1 T} \right) \\
&\quad + a_3 \left( 1 - e^{-2\lambda_1 T} \right) \left( 4\lambda_1 a_4 \left( 1 - e^{-2\lambda_1 T} \right) + (2\lambda_1 a_5 + a_8) \left( 1 - e^{-\lambda_2 T} \right) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{où } a_3 &= \frac{(\varepsilon \sigma)^2}{(2\lambda_1)^2 (2\lambda_1 \lambda_2)^2 (2\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad a_4 = -a_1 \lambda_2^2, \quad a_5 = (2\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 \lambda_1 - a_2) - a_4, \\
a_6 &= a_2 \lambda_2 (2\lambda_1 - \lambda_2), \quad a_7 = 2\lambda_1 a_4 \text{ et } a_8 = a_6 - a_7.
\end{aligned}$$

Nous allons donc étudier le comportement du déterminant en fonction de différentes valeurs de  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ .

Étudions le comportement du déterminant quand  $T$  est proche de 0 en faisant un développement limité de  $e^{-2\lambda_1 T}$  et  $e^{-\lambda_2 T}$  à l'ordre 1. Lorsque  $T$  est proche de 0, le déterminant s'écrit

$$\frac{\partial u_T}{\partial c_1} \frac{\partial v_T}{\partial c_2} - \frac{\partial u_T}{\partial c_2} \frac{\partial v_T}{\partial c_1} = a_3 \lambda_2 a_1 T^2 (\lambda_1 - \lambda_2) (2\lambda_1 - \lambda_2).$$

Les paramètres vérifient  $\lambda_2 > 2\lambda_1 > 0$ , ainsi pour  $T$  suffisamment petit, le déterminant est non

nul. Nous pouvons donc utiliser le théorème des fonctions implicites.

Nous obtenons alors qu'il existe un voisinage ouvert  $U_0$  de  $(0, 0)$  dans  $\mathbb{R}$  tel que pour tout voisinage ouvert  $U \subset U_0$  il existe une application continue unique  $\eta$  de  $U$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que  $\eta(0, 0) = (0, 0)$ ,  $(z, \eta(z)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  et  $\Phi^T(z, \eta(z)) = (0, 0)$  pour tout  $z \in U$ .

Nous obtenons ainsi qu'il est possible d'atteindre exactement le point  $(0, 0)$  dans le système (4.12) depuis toute condition initiale prise dans son voisinage en un temps fini  $T$ . En reparamétrisant le système (4.12), nous avons montré que nous pouvons atteindre le point  $(-1, 0)$  en temps fini dans le système (4.6) depuis tout point dans son voisinage.

Soit  $T_{\mathcal{C}_R}$  le temps défini par  $T_{\mathcal{C}_R} = \sup\{T_{1a}, T_{1b}\} + T_2^{\mathcal{C}_R} + T$ . Il est possible de construire une fonction de contrôle  $\varphi$  telle que depuis toute condition initiale dans  $\mathcal{C}_R$ , le processus  $(x_t^\varphi, y_t^\varphi)_{t \in [0, T_{\mathcal{C}_R}]}$  atteint tout point de  $D$  en un temps  $T_{\mathcal{C}_R}$  fini. Cela nous permet de conclure notre preuve. □

Montrons maintenant que la probabilité de transition du processus  $(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$  admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

**Lemme 4.1.4.** *Sous l'Hypothèse 2.2.1, pour  $t > 0$ , la probabilité de transition  $P_t^\varepsilon((x, y), (d\tilde{x}, d\tilde{y}))$  admet une densité  $p_t^\varepsilon((x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}))$  par rapport à la mesure de Lebesgue.*

*Démonstration.* D'après le Corollaire 7.2 de [72], la probabilité de transition de  $P_t^\varepsilon((x, y), (d\tilde{x}, d\tilde{y}))$  admet une densité  $p_t^\varepsilon((x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}))$  par rapport à la mesure de Lebesgue, si le critère de Hörmander est vérifié.

Introduisons les champs de vecteurs  $F_0 = \lambda_1 x(1 - x^2)\partial_x + (\lambda_2 x(1 - x^2) - \lambda_3 y)\partial_y$  et  $F_1 = \varepsilon \sigma_0 (\cos(\theta)\partial_x + \sin(\theta)\partial_y)$ . Le générateur infinitésimal (3.10) s'écrit :

$$\mathcal{L}^\varepsilon = F_0 + \frac{\varepsilon^2}{2} F_1^2, \quad (4.18)$$

où  $F_1^2 = \sigma_0^2 (\cos^2(\theta)\partial_{xx} + \sin^2(\theta)\partial_{yy} + 2 \cos(\theta) \sin(\theta)\partial_{xy})$ .

Soit  $\mathcal{A}_k$ ,  $k \geq 0$ , la famille de champs de vecteurs définie par  $\mathcal{A}_0 = \{F_1\}$  et  $\mathcal{A}_{k+1} = \mathcal{A}_k \cup \{[F_i, G], G \in \mathcal{A}_k, i = 0, 1\}$  où  $[U, V]$  est le crochet de Lie des champs de vecteurs  $U$  et  $V$ . Pour  $i \geq 0$ , soit  $A_i(x, y) = \text{vect} \{g(x, y), g \in \mathcal{A}_i\}$ . Montrons qu'il existe  $i \geq 0$  tel que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $A_i(x, y) = \mathbb{R}^2$ .

Pour  $k = 0$ ,  $\mathcal{A}_0 = \{F_1\}$ , il existe  $x$  tel que  $A_0(x, y) = \mathbb{R}$ . Pour  $k = 1$ ,  $\mathcal{A}_1 = \{F_1, [F_0, F_1]\}$ . Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $A_1(x, y) = \mathbb{R}^2$  si  $F_1(x, y) \neq 0$ ,  $[F_0, F_1](x, y) \neq 0$  et les champs de vecteurs  $F_1(x, y)$  et  $[F_0, F_1](x, y)$  ne sont pas colinéaires.

Nous calculons  $[F_0, F_1](x, y)$  et nous obtenons

$$\begin{aligned} [F_0, F_1](x, y) &= F_0(F_1(x, y)) - F_1(F_0(x, y)) \\ &= \varepsilon \cos(\theta) \lambda_1 \sigma_0 (3x^2 - 1) \partial_x + \varepsilon \sigma_0 (\cos(\theta) \lambda_3 (3x^2 - 1) + \sin(\theta) \lambda_2) \partial_y. \end{aligned}$$

Les  $A_i(x, y)$  ne dépendent que de  $x$ , nous les notons donc  $A_i(x)$ .

Nous cherchons donc les valeurs de  $x$  telles que le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \cos(\theta) \lambda_1 \sigma_0 (3x^2 - 1) & \varepsilon \sigma_0 \cos(\theta) \\ \varepsilon \sigma_0 (\cos(\theta) \lambda_3 (3x^2 - 1) + \sin(\theta) \lambda_2) & \varepsilon \sigma_0 \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

est nul.

Nous obtenons ainsi  $(\varepsilon \sigma_0 \cos(\theta))^2 (3\lambda_3 x^2 - 3 \tan(\theta) \lambda_1 x^2 - \lambda_3 + \tan(\theta) \lambda_2 + \tan(\theta) \lambda_1) = 0$ .

Sous les Hypothèses 2.2.1, nous avons  $\theta \neq \left\{ 0, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \pi, \arctan \left( \frac{2\lambda_3}{2\lambda_1 - \lambda_2} \right) \right\}$ . Ainsi,  $\cos(\theta) \neq 0$  et  $\tan(\theta)$  est bien définie.

Les champs de vecteurs  $F_1(x)$  et  $[F_0, F_1](x)$  sont colinéaires pour  $x$  si

$$(3\lambda_3 x^2 - 3 \tan(\theta) \lambda_1 x^2 - \lambda_3 + \tan(\theta) \lambda_2 + \tan(\theta) \lambda_1) = 0.$$

Ainsi, si  $\lambda_3 - \tan(\theta) \lambda_1 = 0$ , il n'existe pas de  $x \in \mathbb{R}$  tel que le déterminant de la matrice soit nul. En revanche, si  $\lambda_3 - \tan(\theta) \lambda_1 \neq 0$ , alors pour  $x \in \left\{ \pm \sqrt{\frac{\lambda_3 - \tan(\theta) (\lambda_2 + \lambda_1)}{3(\lambda_3 - \tan(\theta) \lambda_1)}} \right\}$ , le déterminant de la matrice (4.19) est nul.

Une autre façon d'aborder le problème est de regarder l'ensemble  $R_i$  défini par

$$R_i = \left\{ \begin{array}{l} (x, \theta, \sigma_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R} \times ]-\pi, \pi[ \setminus \left\{ 0, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \pi, \arctan \left( \frac{2\lambda_3}{2\lambda_1 - \lambda_2} \right) \right\} \times (\mathbb{R}_*^+)^4 : \\ \text{vect}(\mathcal{A}_i(x, y)) \neq \mathbb{R}^2 \text{ pour tout } i = 0, \dots, k \end{array} \right\}.$$

Cet ensemble contient l'ensemble des jeux de paramètres et de points pour lesquels l'espace vectoriel  $A_i$  n'engendre pas  $\mathbb{R}^2$ . Nous pouvons aussi réécrire  $R_k$  comme étant :

$$R_k = \left\{ (x, \theta, \sigma_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in R_{k-1} : \text{vect}(\mathcal{A}_k(x, y)) \neq \mathbb{R}^2 \right\},$$

où  $R_0 = \mathbb{R} \times ]-\pi, \pi[ \setminus \left\{ 0, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \pi, \arctan \left( \frac{2\lambda_3}{2\lambda_1 - \lambda_2} \right) \right\} \times (\mathbb{R}_*^+)^4$ . Nous cherchons donc  $i \geq 0$  tel que  $R_i$  soit vide.

En reprenant le cas  $k = 1$ , nous avons  $R_1$  est non vide sauf pour  $\lambda_3 = \tan(\theta) \lambda_1$ . Remarquons que  $R_1 \subset R_0$ . En calculant successivement  $R_i$  pour  $i = 2$  et  $i = 3$ , nous obtenons (cf. le code Maxima en annexe A), que, pour  $k \geq 3$ ,  $\mathcal{A}_k(x, y)$  n'engendre pas  $\mathbb{R}^2$  pour les paramètres  $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$ .

Or, nous avons  $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ . Nous avons donc bien prouvé que  $R_k$  est vide pour  $k = 3$ . Ainsi, pour  $i \geq 3$  et pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $A_i(x, y) = \mathbb{R}^2$ . Le critère de Hörmander est bien vérifié.

Le semi-groupe de transition  $P_t^\varepsilon$  admet bien une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

□

Nous pouvons maintenant prouver le théorème 4.1.1.

*Démonstration.* Nous décomposons la preuve de ce théorème en plusieurs parties :

- Montrer que le système (2.7) admet une unique mesure invariante  $\pi^\varepsilon$  à densité par rapport à la mesure de Lebesgue.
- Montrer la tension des  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[}$ .
- Identification et caractérisation de la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0.

Nous étendons les preuves des théorèmes 3.2.3, 3.2.4 et 3.2.5 au système (2.7) pour prouver les différentes étapes de la preuve. Nous détaillerons les différences entre ces preuves.

En adaptant la preuve du théorème 3.2.3 avec les lemmes 4.1.2, 4.1.3 et 4.1.4, nous prouvons l'existence d'une unique mesure invariante  $\pi^\varepsilon$  qui est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

La preuve de la tension des  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[}$  repose principalement sur deux éléments :

- vérifier que le critère de Liapunov est vérifié
- vérifier que le moment d'ordre deux du processus associé à (2.7) est fini.

D'après le lemme 4.1.2, le critère de Liapunov est vérifié.

Les coefficients de dérive et de diffusion sont localement lipschitziennes. Ainsi d'après [51] Théorème 3.1 page 178, le système (2.7) admet une unique solution forte dans  $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^2)$

En adaptant la preuve du théorème 3.2.4, nous obtenons la tension des  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[}$  et le fait que toutes les valeurs d'adhérence ont la forme

$$\sum_{i=1}^3 a_i \delta_{z_i}, \quad (4.20)$$

où  $\delta_{z_i}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  est la mesure de Dirac en le point  $z_i$  définie par (4.1) et les coefficients  $a_i \geq 0$  vérifient  $\sum_{i=1}^3 a_i = 1$ .

Pour la dernière partie de la preuve, nous étendons la méthode développée dans la section 3.5.2.

Étant donné une fonction de contrôle  $\varphi$ , considérons la fonctionnelle d'action définie pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  et  $\theta \in ]-\pi, \pi[ \setminus \left\{0, \pm \frac{\pi}{2}, \arctan \left\{ \frac{2\lambda_3}{2\lambda_1 - \lambda_2} \right\} \right\}$  par

$$S_{0T}^\sigma((x_t^\varphi)_{t \geq 0}) := \frac{1}{(\varepsilon \cos(\theta))^2} \int_0^T L^\sigma(s, x_s^\varphi, \dot{x}_s^\varphi) ds, \quad (4.21)$$

où le lagrangien  $L^\sigma(t, x_t^\varphi, \dot{x}_t^\varphi)$  est défini par

$$L^\sigma(t, x_t^\varphi, \dot{x}_t^\varphi) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\dot{x}_t^\varphi - \lambda_1 x_t^\varphi (1 - (x_t^\varphi)^2)}{\sigma} \right]^2$$

et  $(x_t^\varphi)_{t \geq 0}$  est la première composante d'une solution de (4.6).

En utilisant des calculs similaires à ceux fait dans la preuve de la proposition 3.5.2, nous trou-

vons que les extrema sont atteints pour les fonctions de contrôle  $\varphi^+(t) = -2\lambda_1 x_t^{\varphi^+} (1 - (x_t^{\varphi^+})^2)$  et  $\varphi^-(t) = 0$ . La fonction de contrôle  $\varphi^+$  permet de remonter le flot tandis que la fonction  $\varphi^-$  permet de suivre le flot. Il est possible de calculer explicitement les trajectoires des processus  $(x_t^{\varphi^+}, y_t^{\varphi^+})$  et  $(x_t^{\varphi^-}, y_t^{\varphi^-})$  en utilisant les calculs fait dans la preuve de 3.5.3.

Quand la fonction  $\varphi^-$  est telle que  $(x_t^{\varphi^-})_{t \geq 0}$  est solution de  $\dot{x}_t^{\varphi^-} = -\lambda_1 x_t^{\varphi^-} (1 - (x_t^{\varphi^-})^2)$ , alors les trajectoires de  $(x_t^{\varphi^-}, y_t^{\varphi^-})_{t \geq 0}$  solution de (3.27) sont données explicitement par

$$\begin{cases} \varphi^-(t) = \frac{-\text{sign}(x_0) 2e^{(2\lambda_1 t + c_1)}}{\varepsilon \sigma_0 \cos(\theta) (e^{(2\lambda_1 t + c_1)} + 1)^{\frac{3}{2}}} \\ x_t^{\varphi^-} = \text{sign}(x_0) \frac{1}{\sqrt{e^{(2\lambda_1 t + c_1)} + 1}} \end{cases} \quad (4.22)$$

où  $c_1$  une constante telle que  $(x_0, y_0) \in K_j, j \in \{1, 2, 3\}$ .

Nous en déduisons par calcul direct que la fonctionnelle d'action  $S_{0T}^{\sigma_0}$  vaut

$$S_{0T}^{\sigma_0}((x_t^{\varphi})_{t \geq 0}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x^{\varphi} \text{ est solution de} \\ & \dot{x}_t^{\varphi} = \lambda_1 x_t^{\varphi} (1 - (x_t^{\varphi})^2), \\ \frac{1}{(\varepsilon \sigma_0 \cos(\theta))^2} \left[ \frac{e^{2(2\lambda_1 T + c_1)}}{(e^{(2\lambda_1 T + c_1)} + 1)^2} - \frac{e^{2c_1}}{(e^{c_1} + 1)^2} \right] & \text{si } x^{\varphi} \text{ est solution de} \\ & \dot{x}_t^{\varphi} = -\lambda_1 x_t^{\varphi} (1 - (x_t^{\varphi})^2), \end{cases}$$

où  $c_1 = \ln \left( \frac{1}{(x_0^{\varphi})^2} - 1 \right)$ .

Nous pouvons donc calculer explicitement les coûts de passage d'un compact à un autre. Ainsi, nous obtenons

$$V_{ij}^{\sigma_0} = \begin{cases} 0 & \text{si le compact } K_j \text{ est accessible} \\ & \text{par le flot depuis } K_i, \\ \frac{1}{2(\varepsilon \sigma_0 \cos(\theta))^2} \left[ \frac{e^{2(2\lambda_1 T + c_2)}}{(e^{(2\lambda_1 T + c_2)} + 1)^2} - \frac{e^{2c_2}}{(e^{c_2} + 1)^2} \right] & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les valeurs de  $W^{\sigma_0}(K_i)$  défini dans la section 3.5.2 pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  sont

$$W^{\sigma_0}(K_1) = V_{12}^{\sigma_0}, \quad W^{\sigma_0}(K_2) = 2V_{12}^{\sigma_0} \text{ et } W^{\sigma_0}(K_3) = V_{12}^{\sigma_0}.$$

En utilisant que  $W^{\sigma_0}(K_1) = W^{\sigma_0}(K_3) = \min_j W^{\sigma_0}(K_j) = V_{12}^{\sigma_0}$  et le théorème 4.1 page 166 [31], nous obtenons que la suite  $(\pi^\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[}$  converge vers une unique mesure  $\pi$  définie par

$$\pi = a_1 \delta_{(1,0)} + (1 - a_1) \delta_{(-1,0)},$$

où  $a_1 \in [0, 1]$ .

Or, la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées pour la première composante du système (2.7), nous en déduisons que  $\pi = \frac{1}{2} \delta_{(1,0)} + \frac{1}{2} \delta_{(-1,0)}$ .

## 4.2 Retour au système stochastique initial (2.5)

Suite aux différentes paramétrisations du système (2.5), le coefficient de diffusion  $\sigma(x, e)$  défini par (2.4) est approché par une constante dans le système (2.7). Or, dans le chapitre précédent, nous avons montré que suivant la valeur du coefficient autour des équilibres stables du système déterministe associé à (3.1), la caractérisation de la mesure limite se concentre autour de l'équilibre dont le coefficient de diffusion évalué à l'équilibre est le plus faible.

Dans cette section, nous cherchons à établir une conjecture décrivant la mesure invariante. Pour cela, dans un premier temps, nous allons chercher les jeux de paramètres vérifiant l'hypothèse 2.2.1 pour lesquels le système déterministe associé à (2.5) admet trois points d'équilibre distincts. Puis, nous nous intéresserons aux valeurs du coefficient de diffusion évalué aux points d'équilibre stables. À partir de ces valeurs, nous formulerons que la mesure invariante se concentre autour de l'équilibre stable dont le coefficient de diffusion est le moins élevé. Nous vérifierons cette conjecture par des simulations numériques.

**Proposition 4.2.1.** *Si un jeu de paramètre vérifie l'Hypothèse (2.2.1) et si le système déterministe associé à (2.5) admet trois points d'équilibre distincts  $(x_i^*, e_i^*)$  dans l'intervalle  $[0, 1]$ , alors les points d'équilibre  $(x_i^*, e_i^*)$  vérifient  $e_i^* = l_A x_i^* + l_B(1 - x_i^*)$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  et  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \left(\frac{1}{2} - \rho_1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \rho_1\right)$  où  $\rho_1 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ .*

*Démonstration.* Si le système déterministe associé (2.5) admet trois points d'équilibre  $(x_i^*, e_i^*)$ , alors ces points d'équilibre vérifient  $e_i^* = l_A x_i^* + l_B(1 - x_i^*)$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  et  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (x_2^* - \rho_1, x_2^*, x_2^* + \rho_1 + \rho_2)$  où  $x_2^* \in ]0, 1[$ ,  $\rho_1 \in ]0, 1 - x_2^*[$  et  $\rho_2 \in ]-\rho_1, 1 - x_2^* - \rho_1[$ .

Dans un premier temps, nous allons chercher s'il existe des jeux de paramètres vérifiant l'Hypothèse (2.2.1). Les  $(x_i^*, e_i^*)$  sont des points d'équilibre, nous avons donc  $h(x_i^*, e_i^*) = 0$ ,  $P(x_i^*, e_i^*) = 0$ . De plus, nous pouvons réécrire  $P(x, l_A x + l_B(1 - x))$  comme étant

$$\begin{aligned} P(x, l_A x + l_B(1 - x)) &= \kappa (\delta_A + \delta_B) (x - x_1^*) (x - x_2^*) (x - x_3^*) \\ &= \kappa (\delta_A + \delta_B) (x - x_2^* + \rho_1) (x - x_2^*) (x - x_2^* - \rho_1 - \rho_2). \end{aligned}$$

Ainsi, en procédant par identification, nous trouvons les contraintes sur  $x_2^*$ ,  $\rho_1$  et  $\rho_2$  pour que les points équilibres appartiennent à  $[0, 1]^2$ .

Par identification du coefficient de  $x^2$ , nous obtenons

$$\kappa (-3(\delta_A + \delta_B) x_2^* - (\delta_A + \delta_B) \rho_2) = \kappa (\gamma_B - \gamma_A + 2\delta_B + \delta_A).$$

Pour  $\kappa = 0$ , le système n'admet qu'un équilibre. En utilisant l'Hypothèse (2.2.1) 1), nous



obtenons

$$x_2^* = \frac{1}{2} - \frac{2\rho_2}{3}.$$

Par identification du coefficient constant et celui de  $x$ , nous trouvons que

$$\rho_2 \in \left\{ -3\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2}{b}}, 0, 3\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2}{b}} \right\}.$$

Supposons que  $\rho_2 \neq 0$  donc  $\rho_2 \in \left\{ \pm 3\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2}{b}} \right\}$  et  $\rho_1 \in \left\{ -\frac{\rho_2}{2} \pm \sqrt{\frac{\rho_2^2}{12} + \frac{1}{4} - \frac{2}{b}} \right\}$ .

Le couple  $(\rho_1, \rho_2)$  appartient à

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( -\frac{\rho_2}{2} - \sqrt{\frac{\rho_2^2}{12} + \frac{1}{4} - \frac{2}{b}}, -3\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2}{b}} \right), \left( -\frac{\rho_2}{2} + \sqrt{\frac{\rho_2^2}{12} + \frac{1}{4} - \frac{2}{b}}, -3\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2}{b}} \right), \\ \left( -\frac{\rho_2}{2} - \sqrt{\frac{\rho_2^2}{12} + \frac{1}{4} - \frac{2}{b}}, 3\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2}{b}} \right), \left( -\frac{\rho_2}{2} + \sqrt{\frac{\rho_2^2}{12} + \frac{1}{4} - \frac{2}{b}}, 3\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2}{b}} \right) \end{array} \right\}.$$

Nous allons donc faire une distinction de cas pour montrer que selon les choix de  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , les  $x_i^*$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , ne sont pas dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Nous ne détaillerons que l'un des cas, mais le raisonnement reste similaire dans les trois autres cas. Prenons  $\rho_1 = -\frac{\rho_2}{2} - \sqrt{\frac{\rho_2^2}{12} + \frac{1}{4} - \frac{2}{b}}$  et

$$\rho_2 = -3\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2}{b}}.$$

En utilisant que  $x_2^* \in ]0, 1[$ , nous obtenons  $\rho_2 \in \left] -\frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right[$  ce qui implique par calcul direct que  $b < \frac{32}{3}$ . De plus, en utilisant que  $x_2^* < x_3^*$ , cela implique  $\rho_1 > -\rho_2$ .

$$\begin{aligned} \rho_2 &> -\rho_1 \\ \iff \rho_2 &> \frac{\rho_2}{2} + \sqrt{\frac{\rho_2^2}{12} + \frac{1}{4} - \frac{2}{b}} \\ \iff \rho_2 &> 2\sqrt{\frac{\rho_2^2}{12} + \frac{1}{4} - \frac{2}{b}}. \end{aligned}$$

Or,  $\rho_2 < 0$ . Nous avons donc une contradiction. En procédant de la même manière dans les trois autres cas, nous montrons qu'il n'existe pas de jeux de paramètres vérifiant l'Hypothèse (2.2.1) et tels que  $\rho_2 \neq 0$ .

Pour  $\rho_2 = 0$ , nous avons  $x_2^* = \frac{1}{2}$  et  $\rho_1 = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2}{b}}$ . Si le jeu de paramètres vérifie l'Hypothèse (2.2.1), alors  $(x_2^*, \rho_1, \rho_2) = \left( \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2}{b}}, 0 \right)$ . De plus, d'après l'Hypothèse (2.2.1) 2), nous avons  $\rho_1 \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[$ .

□

Nous nous intéressons aux équilibres stables situés à même distance de l'équilibre instable du système. Nous obtenons ainsi la proposition suivante.

**Proposition 4.2.2.** *Sous les Hypothèses 2.2.1 et si le système (2.5) admet trois points d'équilibre  $(x_1^*, e_1^*)$ ,  $(x_2^*, e_2^*)$  et  $(x_3^*, e_3^*)$  dans  $[0, 1] \times [l_A, l_B]$ , alors nous avons*

$$\begin{cases} \sigma(x_3^*, e_3^*) > \sigma(x_1^*, e_1^*) \text{ pour } \delta_A > \delta_B \text{ ou de manière équivalente } \gamma_A < \gamma_B, \\ \sigma(x_3^*, e_3^*) \leq \sigma(x_1^*, e_1^*) \text{ pour } \delta_A \leq \delta_B \text{ ou de manière équivalente } \gamma_A \geq \gamma_B, \end{cases}$$

où  $\sigma(x, e)$  est définie par la racine de (2.4).

*Démonstration.* Tout d'abord, nous avons  $x_3^*(1 - x_3^*) = x_1^*(1 - x_1^*)$  et  $x_3^* = x_1^* + 2\rho$ . Par calcul direct, nous avons

$$\begin{aligned} \sigma^2(x_3^*, e_3^*) &= \kappa x_3^*(1 - x_3^*)[\gamma_A + \gamma_B + \delta_B + (\delta_A - \delta_B)x_3^*] \\ &\quad + \tau(e_3^* - l_A + (l_B - l_A - 2e_3^*)x_3^*), \\ &= \kappa x_1^*(1 - x_1^*)[\gamma_A + \gamma_B + \delta_B + (\delta_A - \delta_B)(x_1^* + 2\rho)] \\ &\quad + \tau((l_B - l_A)((1 - x_3^*)^2 + (x_3^*)^2)), \\ &= \kappa x_1^*(1 - x_1^*)[\gamma_A + \gamma_B + \delta_B + (\delta_A - \delta_B)x_1^*] \\ &\quad + \tau((l_B - l_A)((x_1^*)^2 + (1 - x_1^*)^2)) + 2\kappa x_1^*(1 - x_1^*)(\delta_A - \delta_B)\rho, \\ \sigma^2(x_3^*, e_3^*) &= \sigma^2(x_1^*, e_1^*) + 2\kappa x_1^*(1 - x_1^*)(\delta_A - \delta_B)\rho. \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi que  $\sigma(x_3^*, e_3^*) > \sigma(x_1^*, e_1^*)$  pour  $\delta_A > \delta_B$  et  $\sigma(x_3^*, e_3^*) \leq \sigma(x_1^*, e_1^*)$  pour  $\delta_A \leq \delta_B$ .

Si  $\delta_A > \delta_B$  alors d'après l'Hypothèse 2.2.1, nous avons  $\gamma_A < \gamma_B$ . □

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que l'équilibre stable autour duquel se concentrait la mesure invariante est celui dont la valeur du coefficient de diffusion est la moins élevée. Ainsi, en conjecturant un résultat similaire à partir de la proposition précédente, quand  $\delta_A > \delta_B$  ou  $\gamma_B > \gamma_A$  (resp.  $\delta_B > \delta_A$  ou  $\gamma_A > \gamma_B$ ) et sous les Hypothèses 2.2.1, nous devrions voir la mesure invariante se concentrer autour du point stable  $(x_1, e_1)$  (resp.  $(x_3, e_3)$ ).

Nous vérifions numériquement cette conjecture en simulant un processus pour des jeux de paramètres vérifiant les Hypothèses 2.2.1 et en approchant la mesure invariante par la mesure d'occupation de ce processus.

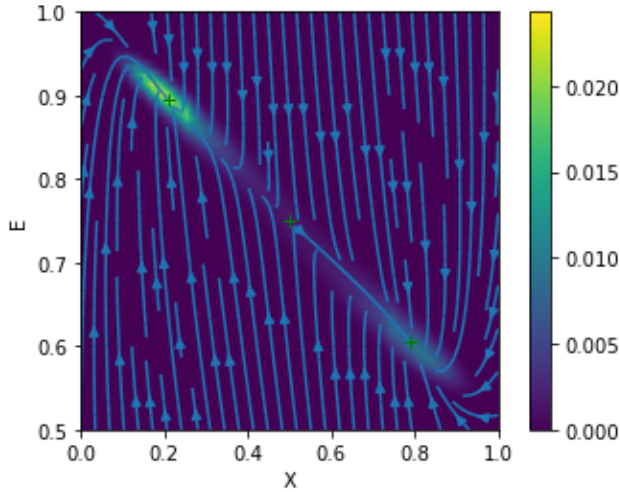


FIGURE 4.3 –  $\delta_A > \delta_B$  ( $\gamma_B > \gamma_A$ )

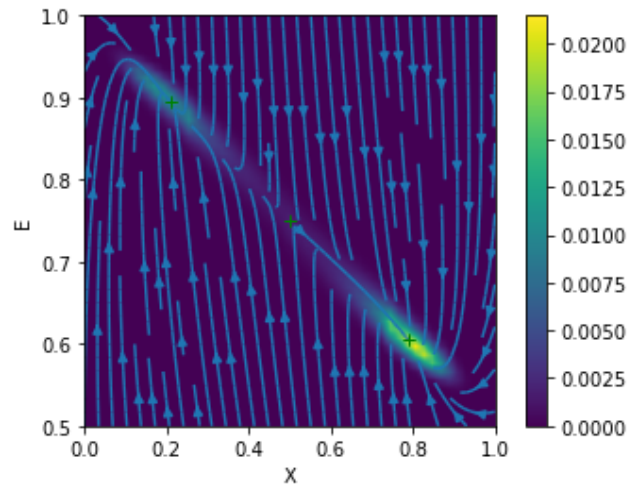


FIGURE 4.4 –  $\delta_A < \delta_B$  ( $\gamma_A > \gamma_B$ )

FIGURE 4.5 – Mesure d’occupation d’un processus de condition initiale  $(x_0, e_0) = (\frac{1}{2}, 1)$  pour  $T = 50000$  et  $N = 200$  de paramètres  $\kappa = 1$ ,  $\tau = l_B = 1$ ,  $\ell = 8$  et  $l_A = 0.5$ . Pour réaliser la figure de gauche, les paramètres de l’influence sociale sont  $\gamma_A = 5$ ,  $\gamma_B = 2$ ,  $\delta_A = 0$  et  $\delta_B = 6$ . Les paramètres pour la figure de droite sont  $\gamma_A = 2$ ,  $\gamma_B = 5$ ,  $\delta_A = 6$  et  $\delta_B = 0$ .

La Figure 4.5 illustre bien notre interprétation de la proposition 4.2.2. La mesure d’occupation dans la figure de gauche 4.3 se concentre plus autour de l’équilibre stable ayant la fréquence la moins élevée,  $(0.21, 0.895)$  tandis que la mesure d’occupation dans la figure de droite 4.4 se concentre plus autour de l’équilibre stable ayant la fréquence la plus élevée,  $(0.79, 0.605)$ .

Ainsi, lorsque l’incitation financière pour des comportements  $A$  est plus élevée que celle des comportements  $B$ , modélisées par  $\gamma_A > \gamma_B$ , alors, quand  $N$  tend vers l’infini, la mesure invariante associée au processus  $(X^N, E^N)$  défini par (2.5) se concentre autour de l’équilibre pour lequel la fréquence de  $A$  est la plus élevée. Autrement dit, sur une échelle de temps suffisamment longue, avoir une norme sociale plus élevée pour les comportements  $A$  ( $\delta_A > \delta_B$ ) favorise l’équilibre pour lequel la fréquence de  $A$  est la plus faible.

## Perspectives

Nous avons dans ce chapitre analysé le comportement asymptotique du système (2.5) sous l’hypothèse 2.2.1. En effet, nous avons montré que la mesure invariante associée au système (2.5) est une combinaison linéaire des équilibres stables. En particulier, nous avons caractérisé la mesure invariante en fonction du signe de  $\gamma_A - \gamma_B$ , ce qui est équivalent à regarder le signe de  $\delta_B - \delta_A$  sous l’Hypothèse 2.2.1.

L’analyse du système déterministe 1.1.1 faite dans la section 1.2 détaille les différents équilibres en temps long admis par le système déterministe associé à (2.5) tels que trois points d’équilibre distincts, des cycles stables ou encore un cycle stable autour d’un point stable. Lorsque le jeu de paramètres est tel que le système déterministe admet trois points d’équilibre distincts, nous pouvons caractériser la limite si les deux équilibres stables sont à même distance

du point instable  $\left(\frac{1}{2}, \frac{l_B + l_A}{2}\right)$ . Lorsque le jeu de paramètres est tel que le système déterministe admet trois points d'équilibre distincts pour lesquels les points d'équilibre stable ne sont pas à même distance du point instable, nous pouvons conjecturer que la mesure invariante lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 ne se concentre pas autour de l'équilibre instable et est une combinaison linéaire des équilibres stables. Une caractérisation plus fine n'est possible qu'en déterminant un système plus simple avec une autre paramétrisation et en étudiant des coûts de passage d'un équilibre stable à un autre. Dans les cas de la présence d'un cycle limite stable, nous conjecturons que la mesure invariante limite, si elle existe, se concentre sur le cycle stable et hors de l'équilibre instable. Dans le cas d'un cycle stable et d'un équilibre stable dans le système, nous conjecturons que la mesure invariante doit être une combinaison linéaire du cycle et du point stable, mais qu'il faut étudier les coûts de passage du cycle vers le point et inversement, pour caractériser plus finement la mesure invariante.

Nous avons vérifié ces conjectures au travers de simulations numériques. Nous calculons la mesure d'occupation d'un processus en temps long pour approcher la mesure invariante.

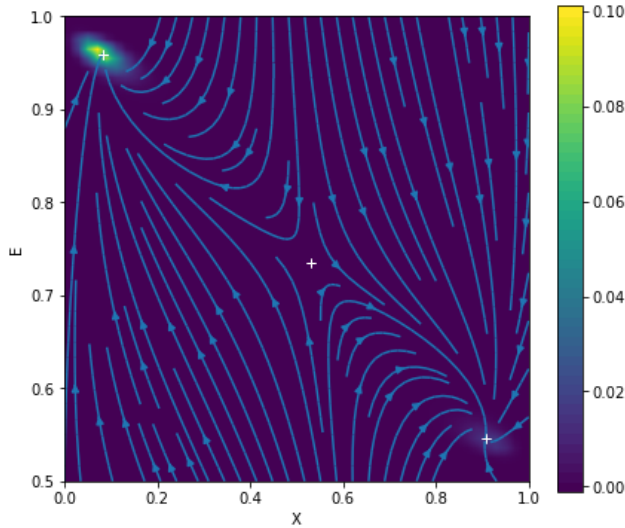


FIGURE 4.6 – Trois points d'équilibre pour  $(x_1, x_2, x_3) = (0.08, 0.53, 0.91)$ . Mesure d'occupation d'un processus de condition initiale  $(x_0, e_0) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  pour  $T = 50000$  et  $N = 200$  de paramètres  $\kappa = l_B = 1$ ,  $\tau = 0.2$ ,  $\ell = 0.9$ ,  $l_A = 0.5$ ,  $\gamma_A = 1$ ,  $\gamma_B = 1.1$ ,  $\delta_A = 1.3$  et  $\delta_B = 1.2$ .

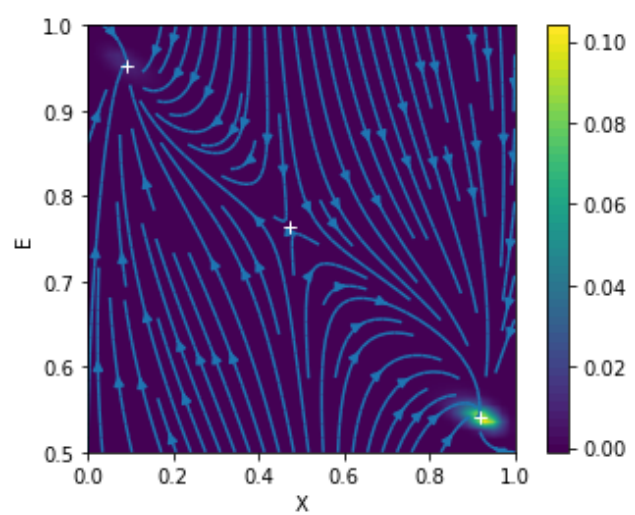


FIGURE 4.7 – Trois points d'équilibre pour  $(x_1, x_2, x_3) = (0.09, 0.47, 0.92)$ . Mesure d'occupation d'un processus de condition initiale  $(x_0, e_0) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  pour  $T = 50000$  et  $N = 200$  de paramètres  $\kappa = l_B = 1$ ,  $\tau = 0.2$ ,  $\ell = 0.9$ ,  $l_A = 0.5$ ,  $\gamma_A = 1.1$ ,  $\gamma_B = 1$ ,  $\delta_A = 1.2$  et  $\delta_B = 1.3$ .

Dans les figures 4.6 et 4.7, le point d'équilibre le plus éloigné de l'équilibre instable est aussi celui dont la valeur de la fonction  $\sigma^2$  évaluée en ce point et définie par (2.4) est la moins élevée. Ainsi, la mesure d'occupation se concentre plus autour de cet équilibre stable.

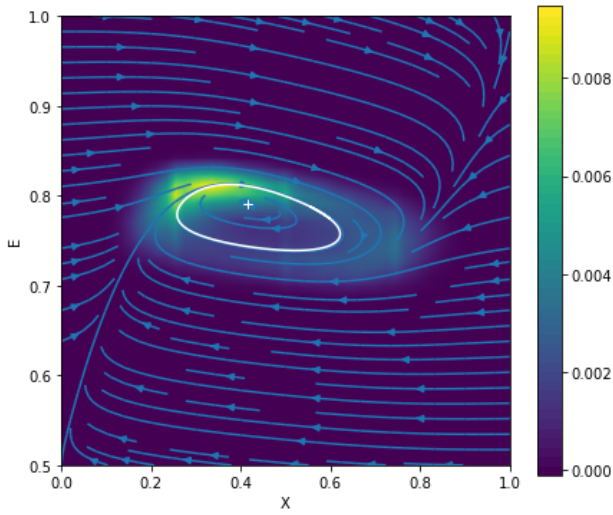


FIGURE 4.8 – Cycle stable et un point d'équilibre instable. Mesure d'occupation d'un processus de condition initiale  $(x_0, e_0) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  pour  $T = 50000$  et  $N = 200$  de paramètres  $\kappa = 1$ ,  $\tau = l_B = 1$ ,  $\ell = 0.1$ ,  $l_A = 0.5$ ,  $\gamma_A = 0$ ,  $\gamma_B = 1$ ,  $\delta_A = 2.28$  et  $\delta_B = 0.5$ .

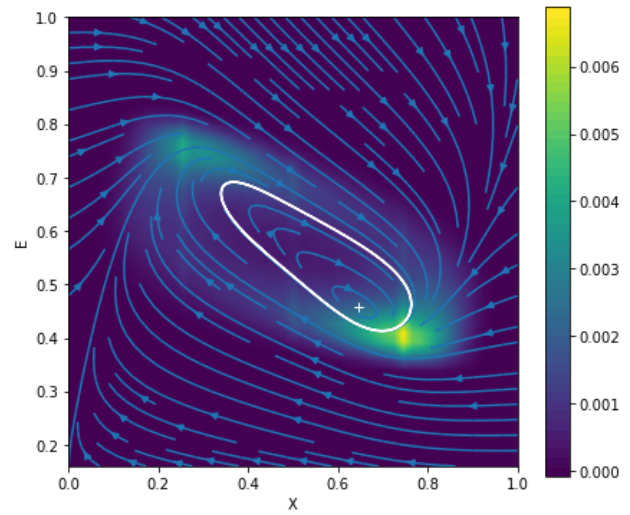


FIGURE 4.9 – Cycle et un point d'équilibre stable. Mesure d'occupation d'un processus de condition initiale  $(x_0, e_0) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  pour  $T = 50000$  et  $N = 200$  de paramètres  $\kappa = 1$ ,  $\tau = l_B = 1$ ,  $\ell = 0.93$ ,  $l_A = 0.16$ ,  $\gamma_A = 2.7$ ,  $\gamma_B = 5$ ,  $\delta_A = 5.77$  et  $\delta_B = 1$ .

Dans chacun des cas détaillés ci-dessus, la mesure d'occupation ne se concentre pas sur les équilibres instables du système. Lorsque le système admet deux points stables (voir Figures 4.6 et 4.7) ou un cycle et un point stable (voir Figure 4.9), la mesure invariante se concentre autour d'un de ces équilibres stables.

Enfin, la vérification numérique de notre conjecture est gourmande en temps et pour des valeurs de  $N$  plus élevées, il est nécessaire d'attendre plus de temps encore. Ainsi, pour les simulations, nous nous sommes limités à  $N = 200$  et  $T = 50000$ . Une piste d'amélioration serait d'optimiser la méthode pour approcher plus finement la mesure invariante du système.

# Conclusion

Dans cette thèse, nous avons proposé l'étude d'une modélisation stochastique du comportement humain face au changement environnemental. L'une des hypothèses de ce modèle est qu'il existe un type d'individus. Cela nous a permis d'introduire un seul environnement perçu ainsi que les mêmes mécanismes de changement de comportement pour tous. Or, il existe différents types d'individus tels que les individus intransigeants ou encore avec une influence plus élevée que les autres. Une extension du modèle consisterait à ajouter de nouveaux types et à étudier les interactions entre différents types d'individus face au changement environnemental. Une autre hypothèse importante du modèle est le choix de l'environnement. Nous pourrions faire une modélisation plus fine de l'environnement afin d'inclure des événements extrêmes ou tout autre effet ne dépendant pas des individus.

Dans l'article [17], une étude des comportements humains face au recyclage est faite dans un parking. Les individus dans cette étude sont confrontés à différents états de propreté du parking et leur comportement est étudié. Une piste de réflexion serait de calibrer les paramètres sociaux sur des données issues d'étude de terrain.

Dans la deuxième partie de la thèse, nous avons étudié le comportement asymptotique de deux systèmes stochastiques (2.7) et (3.1). Cette étude du système (3.1) nous a permis d'identifier les difficultés liées à un terme de diffusion affine (3.2). Une piste pour la suite serait d'étendre à d'autres types de coefficient de diffusion l'étude des comportements asymptotiques en temps long et  $\varepsilon$  petit pour un système dont le coefficient de dérive est similaire à celui du système (2.7).

# Annexe A

## Code

**Algorithme A.0.1** (Vérification de la condition de Hörmander : Code Maxima).

```
/* a=eps cos theta et d= eps sin theta */
/*Def du champ de vecteur*/
F0:matrix([x*(1-x**2)], [-lam*y]);
F1:matrix([a*(b+c*x)], [ d*(b+c*x)]);
/* k=0 */

A0:F1;
R0:solve(A0[1],x);
subst(x=R0,A0[2]);

/* k=1*/
F0:matrix([x*(1-x**2)], [-lam*y]);
F1:matrix([a*(b+c*x)], [ d*(b+c*x)]);
DF0:matrix([diff(F0,x), diff(F0,y)]);
DF1:matrix([diff(F1,x), diff(F1,y)]);

/*Crochet de Lie*/
A:F0.DF1-F1.DF0;
A1:A[1][1]+A[2][2];

factor(A1);

/* Verification span (r2) */

factor(determinant(matrix([F1[1], A1[1]], [F1[2], A1[2]])));
/*contrainte colinearite*/
sol_col1:solve( factor(determinant(matrix([F1[1], A1[1]], [F1[2], A1[2]]))), x);
/*contrainte algebre lie nulle*/
sol_A1x:solve(A1[1],x)[3];
sol_A1lam:solve(factor(subst(sol_A1x,A1[2])), lam);

/*R1: 4 valeurs de x a verifier dans la suite*/

/*k=2 */
```

```

F0:matrix([x*(1-x**2)], [-lam*y]);
F1:matrix([a*(b+c*x)], [ d*(b+c*x)]);
DF0:matrix([diff(F0,x), diff(F0,y)]);
DF1:matrix([diff(F1,x), diff(F1,y)]);
DA1:matrix([diff(A1,x), diff(A1,y)]);

/*Crochet de Lie*/
A20:F0.DA1-A1.DF0;
CA20:A20[1][1]+A20[2][2];
CA20:factor(CA20);

A21:F1.DA1-A1.DF1;
CA21:A21[1][1]+A21[2][2];
CA21:factor(CA21);

/* Verification span (r2) */

/*contrainte colinearite*/
det1:factor(determinant(matrix([F1[1], CA20[1]], [F1[2], CA20[2]])));
det2:factor(determinant(matrix([F1[1], CA21[1]], [F1[2], CA21[2]])));
det3:factor(determinant(matrix([A1[1], CA20[1]], [A1[2], CA20[2]])));
det4:factor(determinant(matrix([A1[1], CA21[1]], [A1[2], CA21[2]])));
det5:factor(determinant(matrix([CA21[1], CA20[1]], [CA21[2], CA20[2]])));

x1:subst(sol_col1[1], det1);
c1:solve(x1,c);
factor(expand(subst([sol_col1[1], c1[1]], det2)));
factor(expand(subst([sol_col1[1], c1[1]], det3)));
factor(expand(subst([sol_col1[1], c1[1]], det4)));
factor(expand(subst([sol_col1[1], c1[1]], det5)));

x2:subst(sol_col1[2], det1);
c2:solve(x2,c);
factor(expand(subst([sol_col1[2], c2[1]], det2)));
factor(expand(subst([sol_col1[2], c2[1]], det3)));
factor(expand(subst([sol_col1[2], c2[1]], det4)));
factor(expand(subst([sol_col1[2], c2[1]], det5)));

x3:subst(sol_col1[3], det3);
c3:solve(x3,c);
factor(expand(subst([sol_col1[3], c3[1]], det2)));
factor(expand(subst([sol_col1[3], c3[1]], det1)));
factor(expand(subst([sol_col1[3], c3[1]], det4)));
factor(expand(subst([sol_col1[3], c3[1]], det5)));

x4:sol_A1x;
lam4:sol_A1lam;
c4:solve(factor(expand(subst([sol_A1x, lam4[1]], det1))), c);
/*le 4e x peut etre exclu car il n'existe pas de c tel qu'on ait 0 */

```



```

/*R2: 3 valeurs de x avec des contraintes sur les c*/

/*k=3*/

DF0:matrix([diff(F0,x),diff(F0,y)]);
DF1:matrix([diff(F1,x),diff(F1,y)]);
DA1:matrix([diff(A1,x),diff(A1,y)]);
DCA20:matrix([diff(CA20,x),diff(CA20,y)]);
DCA21:matrix([diff(CA21,x),diff(CA21,y)]);

/*Crochet de Lie*/
A30:F0.DCA20-CA20.DF0;
CA300:A30[1][1]+A30[2][2];
CA300:factor(CA300);

A30:F0.DCA21-CA21.DF0;
CA301:A30[1][1]+A30[2][2];
CA301:factor(CA301);

A30:F1.DCA20-CA20.DF1;
CA310:A30[1][1]+A30[2][2];
CA310:factor(CA310);

A30:F1.DCA21-CA21.DF1;
CA311:A30[1][1]+A30[2][2];
CA311:factor(CA311);

/* Verification span (r2) */

H1:CA310;
H2:CA311;
x_et:sol_col1[3];
c1;
c_et:c3[3];
det1:factor(determinant(matrix([H1[1],H2[1]],[H1[2],H2[2]])));
factor(expand(subst([x_et,c_et],det1)));
b_et:solve(factor(expand(subst([x_et,c_et],det1))),b);
subst(b_et,c_et);

/*x1,x2: conditions c=d=0 implique pas de bruit: impossible!*/
/*R2: 1 valeurs de x avec des contraintes sur les c et d*/

/*k=4*/

DF0:matrix([diff(F0,x),diff(F0,y)]);

```

```

DF1:matrix([diff(F1,x),diff(F1,y)]);
DA1:matrix([diff(A1,x),diff(A1,y)]);
DCA20:matrix([diff(CA20,x),diff(CA20,y)]);
DCA21:matrix([diff(CA21,x),diff(CA21,y)]);
DCA300:matrix([diff(CA300,x),diff(CA300,y)]);
DCA301:matrix([diff(CA301,x),diff(CA301,y)]);
DCA310:matrix([diff(CA310,x),diff(CA310,y)]);
DCA311:matrix([diff(CA311,x),diff(CA311,y)]);

/*Crochet de Lie*/
A30:F0.DCA300-CA300.DF0;
CA4000:A30[1][1]+A30[2][2];
CA4000:factor(CA4000);
A30:F0.DCA301-CA301.DF0;
CA4001:A30[1][1]+A30[2][2];
CA4001:factor(CA4001);
A30:F0.DCA310-CA310.DF0;
CA4010:A30[1][1]+A30[2][2];
CA4010:factor(CA4010);
A30:F0.DCA311-CA311.DF0;
CA4011:A30[1][1]+A30[2][2];
CA4011:factor(CA4011);

A30:F1.DCA300-CA300.DF1;
CA4100:A30[1][1]+A30[2][2];
CA4100:factor(CA4100);
A30:F1.DCA301-CA301.DF1;
CA4101:A30[1][1]+A30[2][2];
CA4101:factor(CA4101);
A30:F1.DCA310-CA310.DF1;
CA4110:A30[1][1]+A30[2][2];
CA4110:factor(CA4110);
A30:F1.DCA311-CA311.DF1;
CA4111:A30[1][1]+A30[2][2];
CA4111:factor(CA4111);

/* Verification span (r2) */

H1:CA4000;
H2:F1;
x_et:sol_col1[3];
c1;
c_et:c3[3];
det1:factor(determinant(matrix([H1[1],H2[1]], [H1[2],H2[2]])));

factor(expand(subst([x_et,c_et],det1)));
b_et:solve(factor(expand(subst([x_et,c_et],det1))),b);
subst(b_et,c_et);

```

# Bibliographie

- [1] A. Alvergne and R. Stevens. Cultural change beyond adoption dynamics : Evolutionary approaches to the discontinuation of contraception. *Evolutionary Human Sciences*, 3 :e13, 2021.
- [2] D. Amir, M. R. Jordan, and D. G. Rand. An uncertainty management perspective on long-run impacts of adversity : The influence of childhood socioeconomic status on risk, time, and social preferences. *Journal of Experimental Social Psychology*, 79 :217–226, 2018.
- [3] J. Andreoni, N. Nikiforakis, and J. Stoop. Are the rich more selfish than the poor, or do they just have more money ? a natural field experiment. Technical report, National Bureau of Economic Research, 2017.
- [4] V. Bansaye and S. Méléard. *Stochastic models for structured populations*, volume 16. Springer, 2015.
- [5] W. Barfuss, J. F. Donges, V. V. Vasconcelos, J. Kurths, and S. A. Levin. Caring for the future can turn tragedy into comedy for long-term collective action under risk of collapse. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 117(23) :12915–12922, 2020.
- [6] R. S. Baron, J. A. Vandello, and B. Brunzman. The forgotten variable in conformity research : Impact of task importance on social influence. *Journal of personality and social psychology*, 71(5) :915, 1996.
- [7] C. T. Bauch, R. P. Sigdel, J. Pharaon, and M. Anand. Early warning signals of regime shifts in coupled human–environment systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113 :14560 – 14567, 2016.
- [8] C. Bellard, C. Bertelsmeier, P. Leadley, W. Thuiller, and F. Courchamp. Impacts of climate change on the future of biodiversity. *Ecology letters*, 15(4) :365–377, 2012.
- [9] M. Benaim, N. Champagnat, W. Oçafrain, and D. Villemonais. Degenerate processes killed at the boundary of a domain. *arXiv preprint arXiv :2103.08534*, 2021.
- [10] S. Billiard, P. Collet, R. Ferrière, S. Méléard, and V. Tran. The effect of competition and horizontal trait inheritance on invasion, fixation, and polymorphism. *Journal of Theoretical Biology*, 411 :48–58, 2016.

- [11] M. Boon-Falleur, A. Grandin, N. Baumard, and C. Chevallier. Leveraging social cognition to promote effective climate change mitigation. *Nature Climate Change*, 12(4) :332–338, 2022.
- [12] T. M. Bury, C. T. Bauch, and M. Anand. Charting pathways to climate change mitigation in a coupled socio-climate model. *PLoS computational biology*, 15(6) :e1007000, 2019.
- [13] J. A. Cañizo and S. Mischler. Harris-type results on geometric and subgeometric convergence to equilibrium for stochastic semigroups. *Journal of Functional Analysis*, 284(7) :109830, 2023.
- [14] A. H. Chaudhary, M. J. Polonsky, and N. McClaren. Littering behaviour : A systematic review. *International Journal of Consumer Studies*, 45(4) :478–510, 2021.
- [15] L. Chen, Z. Dong, and J. Jiang. A criterion on a repeller being a null set of any limit measure for stochastic differential equations. *Science China Mathematics*, 64(2) :221–238, 2021.
- [16] R. B. Cialdini. *Influence : The psychology of persuasion*, volume 55. Collins New York, 2007.
- [17] R. B. Cialdini, R. R. Reno, and C. A. Kallgren. A focus theory of normative conduct : Recycling the concept of norms to reduce littering in public places. *Journal of personality and social psychology*, 58(6) :1015, 1990.
- [18] C. W. Clark. Mathematical bioeconomics. In *Mathematical Problems in Biology : Victoria Conference*, pages 29–45. Springer, 1974.
- [19] S. Clayton, P. Devine-Wright, P. C. Stern, L. Whitmarsh, A. Carrico, L. Steg, J. Swim, and M. Bonnes. Psychological research and global climate change. *Nature climate change*, 5(7) :640–646, 2015.
- [20] S. M. Constantino and E. U. Weber. Decision-making under the deep uncertainty of climate change : The psychological and political agency of narratives. *Current Opinion in Psychology*, 42 :151–159, 2021.
- [21] B. Dacorogna. *Direct methods in the calculus of variations*, volume 78. Springer Science & Business Media, 2007.
- [22] A. Dembo and O. Zeitouni. Large deviations techniques and applications (1998). *Applications of Mathematics*, 38, 2011.
- [23] S. Dessai, W. N. Adger, M. Hulme, J. Turnpenny, J. Köhler, and R. Warren. Defining and experiencing dangerous climate change. *Climatic change*, 64(1) :11–25, 2004.
- [24] J. Dieudonné. *Eléments d’analyse*. vol. 1. 1970.

- [25] S. C. Doney, M. Ruckelshaus, J. Emmett Duffy, J. P. Barry, F. Chan, C. A. English, H. M. Galindo, J. M. Grebmeier, A. B. Hollowed, N. Knowlton, et al. Climate change impacts on marine ecosystems. *Annual review of marine science*, 4 :11–37, 2012.
- [26] S. D. Donner and J. McDaniels. The influence of national temperature fluctuations on opinions about climate change in the us since 1990. *Climatic change*, 118(3) :537–550, 2013.
- [27] C. Ecotièrè, S. Billiard, J.-B. André, P. Collet, R. Ferrière, and S. Méléard. Human-environment feedback and the consistency of proenvironmental behavior. *to be published in Plos Computational biology*, 2022.
- [28] C. Ecotièrè, S. Billiard, J.-B. André, P. Collet, R. Ferrière, and S. Méléard. Supplementary material for human-environment feedback and the consistency of proenvironmental behavior. *to be published in Plos Computational biology*, 2022.
- [29] S. N. Ethier and T. G. Kurtz. *Markov processes : characterization and convergence*, volume 282. John Wiley & Sons, 1986.
- [30] J. Figueiredo and H. M. Pereira. Regime shifts in a socio-ecological model of farmland abandonment. *Landscape ecology*, 26(5) :737–749, 2011.
- [31] M. I. Freidlin and A. D. Wentzell. Random perturbations. In *Random perturbations of dynamical systems*, pages 15–43. Springer, 1998.
- [32] T. A. Gardner, J. Barlow, Chazdon, R. M. Ewers, C. A. Harvey, C. A. Peres, and N. S. Sodhi. Prospects for tropical forest biodiversity in a human-modified world. *Ecology letters*, 12(6) :561–582, 2009.
- [33] R. Gifford. The dragons of inaction : psychological barriers that limit climate change mitigation and adaptation. *American psychologist*, 66(4) :290, 2011.
- [34] R. Gifford, K. Lacroix, and A. Chen. Understanding responses to climate change : Psychological barriers to mitigation and a new theory of behavioral choice. In *Psychology and climate change*, pages 161–183. Elsevier, 2018.
- [35] C. S. Gokhale and C. Hauert. Eco-evolutionary dynamics of social dilemmas. *Theoretical Population Biology*, 111 :28–42, 2016.
- [36] A. Grandin, M. Boon-Falleur, and C. Chevallier. The belief-action gap in environmental psychology : How wide ? how irrational ? 2021.
- [37] A. Grandin, L. Guillou, R. A. Sater, M. Foucault, and C.0 Chevallier. Socioeconomic status, time preferences and pro-environmentalism. *Journal of Environmental Psychology*, 79 :101720, 2022.

- [38] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, volume 42. Springer Science & Business Media, 2013.
- [39] M. Hairer. How hot can a heat bath get? *Communications in Mathematical Physics*, 292(1) :131–177, 2009.
- [40] M. Hairer and J. C. Mattingly. Slow energy dissipation in anharmonic oscillator chains. *Communications on Pure and Applied Mathematics : A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, 62(8) :999–1032, 2009.
- [41] L. C. Hamilton and M. D. Stampone. Blowin’ in the wind : Short-term weather and belief in anthropogenic climate change. *Weather, Climate, and Society*, 5(2) :112–119, 2013.
- [42] C. Hauert, C. Saade, and A. McAvoy. Asymmetric evolutionary games with environmental feedback. *Journal of theoretical biology*, 462 :347–360, 2019.
- [43] C. Hazlett and M. Mildenberger. Wildfire exposure increases pro-environment voting within democratic but not republican areas. *American Political Science Review*, 114(4) :1359–1365, 2020.
- [44] J. Hofbauer, K. Sigmund, et al. *Evolutionary games and population dynamics*. Cambridge university press, 1998.
- [45] S. Holbach. Positive harris recurrence for degenerate diffusions with internal variables and randomly perturbed time-periodic input. *Stochastic Processes and their Applications*, 130(11) :6965–7003, 2020.
- [46] M. Homayounfar, R. Munepeerakul, and J. Anderies. Resilience-performance trade-offs in managing social-ecological systems. *Ecology and Society*, 27(1), 2022.
- [47] R. Höpfner, E. Löcherbach, and M. Thieullen. Strongly degenerate time inhomogeneous sdes : Densities and support properties. application to hodgkin–huxley type systems. *Bernoulli*, 2017.
- [48] L. Hörmander. Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Mathematica*, 119(none) :147 – 171, 1967.
- [49] J. T. Houghton, G. J. Jenkins, and J. J. Ephraums. Climate change : the ipcc scientific assessment. *American Scientist ;(United States)*, 80(6), 1990.
- [50] F. Huang, M. Cao, and L. Wang. Learning enables adaptation in cooperation for multi-player stochastic games. *Journal of the Royal Society Interface*, 17(172) :20200639, 2020.
- [51] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. Kodansha scientific books. North-Holland, 1989.

- [52] C. Innes, M. Anand, and C. T. Bauch. The impact of human-environment interactions on the stability of forest-grassland mosaic ecosystems. *Scientific reports*, 3(1) :1–10, 2013.
- [53] P. O. Jacquet, L. Safra, V. Wyart, N. Baumard, and C. Chevallier. The ecological roots of human susceptibility to social influence : A pre-registered study investigating the impact of early-life adversity. *Royal Society open science*, 6(1) :180454, 2019.
- [54] S. Jennings, M. Kaiser, and J. D. Reynolds. *Marine fisheries ecology*. John Wiley & Sons, 2009.
- [55] M. Korndörfer, B. Egloff, and S. C. Schumke. A large scale test of the effect of social class on prosocial behavior. *PloS one*, 10(7) :e0133193, 2015.
- [56] Y. A. Kuznetsov. *Elements of applied bifurcation theory*, volume 112. Springer Science & Business Media, 2013.
- [57] N. Lettinga, P. Jacquet, J.-B. André, N. Baumard, and C. Chevallier. Environmental adversity is associated with lower investment in collective actions. *PloS one*, 15(7) :e0236715, 2020.
- [58] D. Lim and D. DeSteno. Suffering and compassion : The links among adverse life experiences, empathy, compassion, and prosocial behavior. *Emotion*, 16(2) :175, 2016.
- [59] E. Lindkvist and J. Norberg. Modeling experiential learning : The challenges posed by threshold dynamics for sustainable renewable resource management. *Ecological Economics*, 104 :107–118, 2014.
- [60] J. Linn. The rebound effect for passenger vehicles. *The Energy Journal*, 37(2), 2016.
- [61] J.-D. Mathias, J. M. Anderies, J. Baggio, J. Hodbod, S. Huet, M. A Janssen, M. Milkoreit, and M. Schoon. Exploring non-linear transition pathways in social-ecological systems. *Scientific reports*, 10(1) :1–12, 2020.
- [62] M. E. McCullough, E. J. Pedersen, J. M. Schroder, B. A. Tabak, and C. S. Carver. Harsh childhood environmental characteristics predict exploitation and retaliation in humans. *Proceedings of the Royal Society B : Biological Sciences*, 280(1750) :20122104, 2013.
- [63] J. M. McNamara. Towards a richer evolutionary game theory. *Journal of the Royal Society Interface*, 10(88) :20130544, 2013.
- [64] H. Mell, N. Baumard, and J.-B. André. Time is money. waiting costs explain why selection favors steeper time discounting in deprived environments. *Evolution and Human Behavior*, 42(4) :379–387, 2021.
- [65] M. Milinski, R. D. Sommerfeld, H.-J. Krambeck, F. A Reed, and J. Marotzke. The collective-risk social dilemma and the prevention of simulated dangerous climate change. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 105(7) :2291–2294, 2008.

- [66] O. Morin. Is cooperation a maladaptive by-product of social learning? the docility hypothesis reconsidered. *Biological Theory*, 9(3) :286–295, 2014.
- [67] D. Nettle, A. Colléony, and M. Cockerill. Variation in cooperative behaviour within a single city. *PloS one*, 6(10) :e26922, 2011.
- [68] K. Nyborg. No man is an island : social coordination and the environment. *Environmental and Resource Economics*, 76(1) :177–193, 2020.
- [69] E. Ostrom. Tragedy of the commons. *The new palgrave dictionary of economics*, 2 :1–4, 2008.
- [70] R. K. Pachauri and A. Reisinger. Climate change 2007 : Synthesis report. contribution of working groups i, ii and iii to the fourth assessment report of the intergovernmental panel on climate change. *Climate Change 2007. Working Groups I, II and III to the Fourth Assessment*, 2007.
- [71] P. K. Piff, M. W. Kraus, S. Côté, B. H. Cheng, and D. Keltner. Having less, giving more : the influence of social class on prosocial behavior. *Journal of personality and social psychology*, 99(5) :771, 2010.
- [72] L. Rey-Bellet. Ergodic properties of markov processes. In *Open quantum systems II*, pages 1–39. Springer, 2006.
- [73] L. Safra, T. Tecu, S. Lambert, M. Sheskin, N. Baumard, and C. Chevallier. Neighborhood deprivation negatively impacts children’s prosocial behavior. *Frontiers in psychology*, 7 :1760, 2016.
- [74] C. Schill, J. M. Anderies, T. Lindahl, C. Folke, S. Polasky, J. C. Cárdenas, A.-S. Crépin, M. A. Janssen, J. Norberg, and M. Schlüter. A more dynamic understanding of human behaviour for the anthropocene. *Nature Sustainability*, 2(12) :1075–1082, 2019.
- [75] S. C. Schumke, M. Korndörfer, and B. Egloff. No evidence that economic inequality moderates the effect of income on generosity. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 116(20) :9790–9795, 2019.
- [76] R. P. Sigdel, M. Anand, and C. T. Bauch. Competition between injunctive social norms and conservation priorities gives rise to complex dynamics in a model of forest growth and opinion dynamics. *Journal of theoretical biology*, 432 :132–140, 2017.
- [77] M. Sivapalan and G. Blöschl. Time scale interactions and the coevolution of humans and water. *Water Resources Research*, 51(9) :6988–7022, 2015.
- [78] A. Stamos, F. Lange, S.-C. Huang, and S. Dewitte. Having less, giving more? two preregistered replications of the relationship between social class and prosocial behavior. *Journal of Research in Personality*, 84 :103902, 2020.



- [79] D. Stern and R. Kaufmann. Anthropogenic and natural causes of climate change. *Climatic change*, 122 :257–269, 2014.
- [80] N. Stern. Stern review : The economics of climate change. 2006.
- [81] D. Stroock and S. Varadhan. On the support of diffusion processes with applications to. In *Proceedings of the Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, volume 1, page 333. University of California Press, 1972.
- [82] A. R. Tilman, J. B. Plotkin, and E. Akçay. Evolutionary games with environmental feedbacks. *Nature communications*, 11(1) :915, 2020.
- [83] D. Toupo, S. Strogatz, J. Cohen, and D. Rand. Evolutionary game dynamics of controlled and automatic decision-making. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 25(7) :073120, 2015.
- [84] R. H. Turner. Personality in society : Social psychology’s contribution to sociology. *Social Psychology Quarterly*, pages 1–10, 1988.
- [85] J. Urry. Climate change and society. In *Why the social sciences matter*, pages 45–59. Springer, 2015.
- [86] Z. Wang, M. A. Andrews, Z.-X. Wu, L. Wang, and C. T. Bauch. Coupled disease–behavior dynamics on complex networks : A review. *Physics of Life Reviews*, 15 :1–29, 2015.
- [87] E. Weber and P. Stern. Public understanding of climate change in the united states. *American Psychologist*, 66(4) :315, 2011.
- [88] J. Weitz, C. Eksin, K. Paarporn, S. P. Brown, and W. Ratcliff. An oscillating tragedy of the commons in replicator dynamics with game–environment feedback. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113(47) :E7518–E7525, 2016.
- [89] J. Wu, D. Balliet, J. M. Tybur, S. Arai, P. Van Lange, and T. Yamagishi. Life history strategy and human cooperation in economic games. *Evolution and Human Behavior*, 38(4) :496–505, 2017.
- [90] T. Xu, L. Chen, and J. Jiang. On limit measures and their supports for stochastic ordinary differential equations. *Journal of Differential Equations*, 365 :72–99, 2023.
- [91] E. Zwirner and N. Raihani. Neighbourhood wealth, not urbanicity, predicts prosociality towards strangers. *Proceedings of the Royal Society B*, 287(1936) :20201359, 2020.



**Titre** : Étude et modélisation stochastique du comportement humain face au changement environnemental

**Mots clés** : Modèle stochastique, comportement humain, échelle limite, mesure invariante

**Résumé** : Par leur comportement, les individus peuvent contribuer à la dégradation de leur environnement. Dans le cadre du changement climatique, une meilleure compréhension de l'évolution des comportements humains est nécessaire.

Dans le premier chapitre, nous développons un modèle stochastique individuel couplant des changements de comportement dans une population de taille fixe avec une dynamique environnementale dépendant des comportements dans la population. Les individus peuvent passer d'un comportement à un autre par le biais de deux types de transfert différents: les interactions sociales ou l'évaluation individuelle de la dégradation environnementale. Le comportement *actif* contribue moins à la dégradation de l'environnement, mais est plus coûteux à adopter que le comportement *de base*. Nous étudions la dynamique déterministe associée au système et les différents types d'équilibre admissible en temps longs. Cette étude met en avant l'existence de jeux de paramètres pour lesquels le système admet trois points d'équilibre, dont deux stables, dans le système: un des équilibre admet une majorité d'individus *actifs* et l'autre équilibre stable favorise une majorité d'indi-

vidus *basiques*. Il est nécessaire de comprendre le comportement en temps long du système stochastique lorsque le système déterministe qui lui est associé admet trois points d'équilibre.

Le second chapitre porte sur la reparamétrisation du système biologique introduit dans le premier chapitre. Le troisième chapitre cherche à répondre à cette question pour un système plus simple ayant un équilibre instable encadré de deux équilibres stables. Nous étudions asymptotiquement de ce système différentiel stochastique à deux composantes dont le coefficient de diffusion est dégénéré. Nous étendons les résultats de Freidlin et Wentzell et nous montrons sous quelles conditions cette mesure se concentre autour d'un seul des équilibres stables du système.

Dans le dernier chapitre, nous entendons les résultats du troisième chapitre au système simplifié introduit dans le second chapitre. Cette étude des limites asymptotiques nous permet de caractériser le comportement du système lorsqu'il admet trois points d'équilibre. Nous vérifierons les conjectures faites sur les paramètres grâce à des simulations numériques de la mesure d'occupation.

**Title** : Study and stochastic modeling of human behavior in the context of environmental change

**Keywords** : Stochastic model, human behavior, scaling limit , invariant measure

**Abstract** : Individuals can contribute to the degradation of their environment through their behavior. A better understanding of how human behavior changes is needed in the context of climate change.

In the first chapter, we develop a stochastic individual-centered model that couples behavioral changes in a population of fixed size with environmental dynamics dependent on the behaviors of the population. Individuals can switch from one behavior to another through two different types of transfer: social interactions or individual assessment of environmental degradation. Active behavior contributes less to environmental degradation but is more costly to adopt than basic behavior. We study the deterministic dynamics associated with the system and the different types of equilibrium in the long term. This study highlights the existence of parameter sets for which the system admits three equilibrium points, two of which are stable: one equilibrium consists of a majority of active individuals, and the other stable equilibrium favors a majority of basic individuals. It is essential to understand the long-term

behavior of the stochastic system when the associated deterministic system admits three equilibrium points.

In the second chapter, we reparameterize the biological system introduced in the first chapter. The third chapter seeks to answer this question for a simpler system with one unstable equilibrium surrounded by two stable equilibria. We study the asymptotics of this two-component stochastic differential system with a degenerate diffusion coefficient. We extend the results of Freidlin and Wentzell and show under which conditions this measure concentrates around just one of the system's stable equilibria.

The last chapter, we apply the results of the second chapter to this new system. This study of asymptotic limits enables us to characterize the behavior of the system when it admits three equilibrium points. We will verify the conjectures made about the parameters using numerical simulations of the occupation measure.