



**HAL**  
open science

# Nouveaux outils pour la conception fiable des structures

Habib Karaouni

► **To cite this version:**

Habib Karaouni. Nouveaux outils pour la conception fiable des structures. Sciences de l'ingénieur [physics]. Ecole polytechnique, 2001. Français. NNT : . tel-04497800

**HAL Id: tel-04497800**

**<https://theses.hal.science/tel-04497800v1>**

Submitted on 11 Mar 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THESE**

présentée pour l'obtention du titre de

**DOCTEUR**

**DE**

**L'ECOLE POLYTECHNIQUE**

Spécialité : MECANIQUE

Par

**Habib KARAOUNI**

---

**NOUVEAUX OUTILS POUR LA  
CONCEPTION FIABLE DES STRUCTURES**

---

soutenue le 7 décembre 2001  
devant le jury composé de :

Président :	Hui Duong	BUI
Rapporteurs :	Narayanaswami Claude	RANGANATHAN FAIDY
Examineurs :	Ali Claude Ky Henri-Paul	AZARIAN BATHIAS DANG VAN LIEURADE
Directeur de thèse :	Joseph	ZARKA



## *A mes parents,*

~~Vous avez toujours voulu que je sois ce que je suis, et aujourd'hui,~~  
~~ce travail est le fruit de vos sacrifices.~~

~~Papa, par tes qualités de cœur et d'esprit, tu représentes pour moi~~  
~~la parfaite définition de l'honnête homme.~~

~~Maman, mes mots ne pourraient rien ajouter à cet~~  
~~ange que tu es pour moi.~~

## *A mon épouse,*

~~Toi, qui en as le plus cru et le plus souffert,~~

~~Cette bourse est ta tienne, fais le témoignage de mon infini amour.~~

## *A ma fille,*

~~Hier, tu nous parlais qu'avec tes yeux.~~

~~Aujourd'hui, tu croques dans la vie.~~

~~Merci.~~

~~Merci pour ta façon de courage.~~

~~Je te dédie cette bourse, fais le témoignage de~~  
~~mon immense tendresse.~~

## *A toute ma famille.*

~~Chacun de vous sait la place qu'il tient dans mon cœur.~~

~~Cette bourse vous est dédiée, fais le témoignage de ma profonde affection.~~



## Remerciements

Je remercie Messieurs P. Berest et B. Halphen, Directeurs successifs du LMS, d'avoir accepté de m'accueillir au sein de leur Laboratoire.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance à Monsieur H.D. Bui, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Je ne saurais trop remercier Monsieur N. Ranganathan, Directeur du Laboratoire de Mécanique et Rhéologie de l'EIT et Monsieur C. Faïdy d'EDF-SEPTEN, d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, malgré leur importante charge de travail.

Mes remerciements s'adressent également à Messieurs A. Azarian, C. Bathias, K. Dang-Van, H.P. Lieura de qui ont bien voulu s'intéresser à mon travail et accepter d'être membres de ce jury.

Je pense également à mes collègues de travail, dont "mes 3 drôles de dames", S. Aubert, T. Mac-Lan, I. Serre avec qui j'ai partagé chaleureusement le même bureau pendant plus de 2 ans, et aussi S. Maolino, M. Attilah, F. Roger (et la liste est longue) pour leur gentillesse et leur disponibilité.

Je tiens aussi à remercier le Center of Excellence for Advanced Materials à l'University of California (San Diego) et l'EDF-DER qui ont facilité mes travaux de recherche. Ainsi que Ligeron S.A, CRITT Méca de l'Ile de France et CADLM qui les ont financé.

J'adresse une pensée très amicale à J.J. Pourrier et A. Benchissou.

Je ne peux oublier de citer cet homme, qui a inspiré mon enfance et qui a toujours représenté pour moi "l'exemple à suivre".

Mon cher Arès, trouve ici le témoignage de ma très grande admiration.

Enfin, il me faudrait une autre thèse pour remercier à sa juste valeur mon directeur de thèse Joseph ZARKA.

JZ, acceptez ici, je vous prie, ces quelques modestes lignes :

*L'abord facile qui vous caractérise est un élément de mise en confiance qui assure tout le plaisir à travailler sous votre conduite.*

*L'attention et l'indulgence avec lesquelles vous m'avez guidé, votre sens de l'organisation et votre amour du travail font de vous un maître qui inspire respect et admiration.*

*J'éprouve en finissant ce travail, un grand désir de vous exprimer ma très vive reconnaissance, mon profond dévouement et surtout l'ambition d'aller encore plus loin que vous.*



# Résumé

La fiabilité des structures est une préoccupation majeure pour beaucoup de constructeurs. Plusieurs modes de défaillances peuvent entraîner la ruine partielle ou totale d'une structure. Le mode de ruine par fatigue est très important, en particulier dans les assemblages soudés qui sont repérés par les experts comme les sites privilégiés critiques. Les chargements de service, en général à plusieurs paramètres de chargement et à amplitudes variables, sont tels qu'ils n'entraînent pas la ruine par déformation excessive mais peuvent provoquer le processus de fatigue par leur caractère répété.

Depuis ces quelques cinquantaines dernières années, de nombreuses approches ont été proposées. Dans les analyses à la fatigue :

- i) il est nécessaire de prendre en compte les **incertitudes** sur la géométrie, les propriétés mécaniques, les chargements,
- ii) l'état initial réel est souvent **inconnu**,
- iii) et aussi, il est très **difficile** d'avoir une représentation mathématique fiable du comportement complexe des matériaux et même de contrôler les **erreurs** des simulations numériques ou des essais.

Pour réduire ces difficultés nous avons bâti une **nouvelle approche pour l'analyse à la fatigue et à la fiabilité des structures**. Nous ramenons systématiquement l'analyse globale de la structure à **une analyse locale sur une fenêtre 2D de taille donnée avec un chargement cyclique radial caractéristique et un nombre de cycles**.

Notre approche est fondée sur la Conception Optimisée Intelligente des Matériaux et des Structures de J. Zarka et al. Une éprouvette lisse comme toute autre structure complexe, constituée de plusieurs matériaux et soumise à tout type de chargement, sont analysées de la même façon grâce à une seule DESCRIPTION évoluée intelligente donnée.

Dans le temps limité de la thèse, nous n'avons considéré que les chargements à amplitudes variables à plusieurs paramètres. Les incertitudes sur la géométrie, les matériaux et l'état initial ont été ignorées. Mais il serait facile, dans un deuxième temps, de les prendre en compte via des simulations de type Monte Carlo, grâce à l'intégration des règles de conception à la fatigue que nous avons construites et qui sont immédiates à vérifier même quand plusieurs milliers d'analyses sont requises.

Les analyses simplifiées des structures inélastiques et des règles simplifiées de critère de fatigue et de cumul de dommage sont employées mais les résultats sont couplés avec ceux issus des retours d'expérience sur des structures réelles par les techniques d'apprentissage automatique et d'optimisation génétique.



Pour atteindre notre description intelligente, il nous a fallu :

1/ Etablir une règle d'équivalence entre 2 chargements vis à vis du dommage en fatigue. Celle-ci nous permet ensuite de nous ramener systématiquement à un chargement cyclique radial dans une direction particulière équivalent de centre et d'amplitude donnés et à un nombre de cycles défini.

2/ Trouver la description convenable de l'analyse à la fatigue et à la fiabilité des structures qui assure la fusion de tous les cas.

### ***Quantification d'un chargement vis à vis du dommage***

Comme, nous ne nous intéressons qu'à la fatigue à grand nombre de cycles, cela implique qu'à l'échelle macroscopique, la structure doit atteindre systématiquement un état limite adapté.

Face aux nombreuses difficultés présentes dans les théories existantes (méthode d'extraction et de comptage de cycles, facteur d'endommagement, règles de cumul ...), nous avons choisi une représentation qui a une signification plus physique et qui est très facile à mettre en œuvre à l'échelle locale du matériau comme à l'échelle globale de la structure.

L'idée principale est de trouver, en terme de "dommage" (qui reste toujours inconnu) induit au niveau du matériau puis au niveau de la structure, une description ou "mesure" discriminatoire du chargement réel **complexe d'amplitudes variables**. Cela se fait essentiellement par l'introduction d'une règle d'équivalence entre deux chargements puis par la définition d'un chargement équivalent simple susceptible de représenter le chargement réel.

### ***Nouvelle approche pour l'analyse à la fatigue/fiabilité des structures***

Chaque cas/problème de fatigue comporte des différences au niveau de la géométrie de la structure, de ses nombreux matériaux en présence, de son état initial, et de son chargement et a une description primitive spécifique. Cette représentation impérative, *passive* doit être transformée en une représentation *active* dite intelligente qui est la même pour tous les cas.

Nous effectuons une analyse multi-niveaux de la structure générale :

i) le premier niveau est celui de la structure. Une analyse élastique est en général conduite en considérant les nombreux chargements, une schématisation éventuelle en plaques et poutres ainsi qu'un maillage grossier. Une analyse simplifiée du type Zarka-Casier (ZAC) peut être aussi effectuée.

ii) le deuxième niveau est celui d'une sous-structure 3D que l'on aura relevée comme critique. Un maillage plus fin et une modélisation plus correcte des détails soudés et des discontinuités géométriques présents dans ce domaine peuvent être effectués. Le chargement cyclique radial équivalent est alors défini.

iii) le troisième niveau correspond à celui d'un détail élémentaire 2D qui est une coupe plane du deuxième niveau, avec éventuellement un maillage encore plus fin et une représentation plus fine des efforts.

iv) enfin, nous considérons sur ce détail 2D, une fenêtre 2D **caractéristique** virtuelle mobile. Cette fenêtre joue le rôle d'un filtre (sa taille est telle que les quantités qui sont utiles deviennent relativement peu sensibles aux erreurs associées à la taille et à la distribution des éléments) et doit tenir compte de plus, que le dommage doit concerner un certain volume caractéristique ; *la description du matériau, de certains champs (contrainte, gradient de contrainte, critère de fatigue..), dans cette fenêtre conduit à la description intelligente qui est applicable et unique sur toute structure complexe.*

Notre description de chaque cas comporte 92 descripteurs d'entrée et 2 conclusions (rupture/non rupture puis dans le cas rupture, nombre de cycles/blocs y conduisant). Ces descripteurs d'entrée ne sont pas des quantités locales en un point mais des quantités sur la fenêtre (non-locales).

### ***Génération automatique des règles pour la fatigue***

Nous construisons les règles de conception à la fatigue à partir d'une base de données d'exemples expérimentaux fiables, bien réalisés et bien documentés qui ont des conclusions connues.

Nous avons utilisé dans la thèse une base d'exemples qui provient d'une série d'essais effectués (par l'Université d'Illinois) sur un détail de soudure (détail 20) que nous avons défini comme une structure générale. Nous avons mis en oeuvre plusieurs procédures afin de calculer les descripteurs intelligents de chaque cas.

L'utilisation de générateurs de systèmes experts par apprentissage automatique, comme ceux développés par le LMS-X (SEA) ou par la société Wards systems (NEUROHELL) nous a donné *le réseau de règles à employer pour toute nouvelle analyse à la fatigue.*

**Ces règles pour l'initiation à la fatigue (oui/non) puis le nombre de cycles ou blocs de chargements en cas d'initiation, sont la base de notre approche générale de la fatigue à grand nombre de cycles d'une structure ;**

**Elles constituent l'apport principal de notre travail.**

**Elles doivent faire cependant encore l'objet de validations expérimentales supplémentaires afin d'être retenues dans la conception fiable des structures.**



# Table des matières

<b>RESUME</b> .....	7
<b>TABLE DES MATIERES</b> .....	11
<b>PARTIE 1</b> .....	15
<b>ETAT DE L'ART</b> .....	15
<b>CHAPITRE 1</b> .....	17
<b>RAPPELS SUR LA FATIGUE</b> .....	17
1.1 CARACTERISATION DE L'ENDURANCE DES MATERIAUX .....	17
1.1.1 <i>Courbe de Wöhler</i> .....	17
1.1.2 <i>Aspect probabiliste de la courbe de Wöhler</i> .....	20
1.1.3 <i>Représentation analytique de la courbe de Wöhler</i> .....	22
1.1.4 <i>Discussion sur la limite de fatigue</i> .....	23
1.2 LES PARAMETRES D'INFLUENCE EN FATIGUE.....	24
1.2.1 <i>Paramètres d'ordre métallurgique</i> .....	24
1.2.2 <i>Paramètres d'ordre mécanique et géométrique</i> .....	25
1.2.3 <i>Environnement</i> .....	26
1.2.4 <i>Influence de la contrainte moyenne</i> .....	26
1.3 AMORÇAGE DES FISSURES DE FATIGUE.....	30
1.3.1 <i>Définition de l'amorçage</i> .....	31
1.3.2 <i>Méthodes de prévision de l'amorçage</i> .....	31
1.4 LES CRITERES DE FATIGUE MULTIAXIAUX PERIODIQUES.....	36
1.4.1 <i>Le formalisme général des critères</i> .....	37
1.4.2 <i>Les modèles empiriques</i> .....	37
1.4.3 <i>Les critères d'approche plan critique</i> .....	38
1.4.4 <i>Les critères d'approche globale</i> .....	43
1.5 LES LOIS D'ENDOMMAGEMENT DE FATIGUE .....	44
1.5.1 <i>Différents types de chargements</i> .....	45
1.5.2 <i>Méthodes de comptages</i> .....	52
1.5.3 <i>Lois d'endommagement uniaxiales</i> .....	54
1.5.4 <i>Lois d'endommagements multiaxiales</i> .....	57
1.6 LOGICIELS INDUSTRIELS DISPONIBLES.....	59
1.6.1 <i>Logiciels de simulation par éléments finis</i> .....	60
1.6.2 <i>Logiciels de calcul à la fatigue</i> .....	60
<b>CHAPITRE 2</b> .....	64
<b>RAPPELS SUR L'ANALYSE SIMPLIFIEE DES STRUCTURES INELASTIQUES</b> .....	64
2.1 EVOLUTION GLOBALE DE LA STRUCTURE .....	64
2.1.1 <i>Réponse purement élastique</i> .....	65
2.1.2 <i>Réponse réelle</i> .....	65
2.1.3 <i>Relations de comportement</i> .....	67
2.1.4 <i>Cas particulier de l'écrouissage cinématique</i> .....	69
2.2 ANALYSE LIMITE SIMPLIFIEE .....	73
2.2.1 <i>Solution exacte durant un chargement monotone radial</i> .....	73
2.2.2 <i>Détermination de la charge limite</i> .....	75
2.3 ANALYSES CYCLIQUES SIMPLIFIEES .....	75

2.3.1 Nature de l'état limite .....	75
2.3.2 Règles pratiques pour construire l'état limite .....	77
<b>CHAPITRE 3 .....</b>	<b>83</b>
<b>RAPPELS SUR LA CONCEPTION OPTIMISEE INTELLIGENTE .....</b>	<b>83</b>
3.1 INTRODUCTION .....	83
3.2 APPRENTISSAGE AUTOMATIQUE .....	84
3.3 CONCEPTION OPTIMISEE INTELLIGENTE .....	85
3.4 DESCRIPTION GENERALE DES PROBLEMES MECANIQUES .....	88
3.4.1 Descripteurs matériaux .....	88
3.4.2 Descripteurs champ variable dans le temps .....	89
3.5 PRINCIPES GENERAUX DES SYSTEMES EXPERTS PAR APPRENTISSAGE AUTOMATIQUE .....	90
3.5.1 Analyse de données .....	90
3.5.2 Réseaux neuronaux .....	92
3.6 LOGICIELS INDUSTRIELS UTILISES .....	97
3.6.1 NEUROSHELL .....	97
3.6.2 SEA .....	98
3.6.3 GENEHUNTER .....	98
<b>PARTIE 2 .....</b>	<b>101</b>
<b>APPLICATION DE LA NOUVELLE APPROCHE A LA FATIGUE POLYCYCLIQUE DES STRUCTURES.....</b>	<b>101</b>
<b>CHAPITRE 4 .....</b>	<b>105</b>
<b>QUANTIFICATION D'UN CHARGEMENT VIS A VIS DU DOMMAGE EN FATIGUE .....</b>	<b>105</b>
4.1 INTRODUCTION .....	105
4.2 HYPOTHESES GENERALES .....	106
4.2.1 Hypothèses sur le choix du volume élémentaire de référence (VER) .....	106
4.2.2 Hypothèses sur le chargement .....	109
4.2.3 Hypothèses sur les mécanismes mis en jeux .....	111
4.3 QUANTIFICATION DES CHARGEMENTS A UN PARAMETRE A L'ECHELLE DU MATERIAU .....	113
4.3.1 Définition de la règle d'équivalence .....	113
4.3.2 Construction des chargements cycliques équivalents à l'échelle matériau .....	115
4.3.3 Exemple .....	117
4.4 QUANTIFICATION DES CHARGEMENTS A PLUSIEURS PARAMETRES A L'ECHELLE DU MATERIAU .....	125
4.4.1 Comportement rhéologique à 2 paramètres internes .....	126
4.4.2 Procédure de calcul du chargement cyclique radial équivalent .....	139
4.4.3 Analyse critique .....	140
4.5 IDENTIFICATION GENERALE DES TERMES INTERVENANT DANS LES MECANISMES MICROSCOPIQUES .....	142
4.6 QUANTIFICATION A L'ECHELLE DE LA STRUCTURE .....	142
4.6.1 Chargements à un paramètre .....	142
4.6.2 Chargements à plusieurs paramètres .....	146
<b>CHAPITRE 5 .....</b>	<b>153</b>
<b>DESCRIPTION GENERALE DE L'ANALYSE A LA FATIGUE.....</b>	<b>153</b>
5.1 DESCRIPTION INTELLIGENTE D'UNE ANALYSE A LA FATIGUE .....	153
5.2 DEFINITION DES DESCRIPTEURS INTELLIGENTS .....	155
5.2.1 Descripteurs matériaux .....	156
5.2.2 Descripteurs champ de contrainte .....	156
5.2.3 Descripteurs fatigue .....	158
<b>CHAPITRE 6 .....</b>	<b>163</b>
<b>REGLES DE CONCEPTION A LA FATIGUE .....</b>	<b>163</b>
6.1 DONNEES EXPERIMENTALES DISPONIBLES - REPRESENTATION PRIMITIVE .....	163

6.1.1	<i>Détail N°20</i>	164
6.1.2	<i>Résultats expérimentaux</i>	166
6.2	CONSTRUCTION DES DESCRIPTEURS EVOLUES INTELLIGENTS	168
6.2.1	<i>Géométrie et maillage avec CADSAP</i>	168
6.2.2	<i>Analyse avec NISA de EMRC et CASTEM2000 du CEA</i>	169
6.2.3	<i>Analyse à la fatigue classique</i>	176
6.2.4	<i>Définition des régions</i>	176
6.3	GENERATION DES REGLES PAR APPRENTISSAGE AUTOMATIQUE	179
6.3.1	<i>Prédiction fissure/non-fissure</i>	179
6.3.2	<i>Prédiction Durée de vie</i>	184
	<b>CONCLUSION ET PERSPECTIVES</b>	<b>191</b>
	<b>ANNEXE A</b>	<b>195</b>
	<b>ANALYSE D'UN MODELE A 2 PATINS BIDIMENSIONNELS</b>	<b>195</b>
	EQUATIONS DU PROBLEME	195
	<b>ANNEXE B</b>	<b>203</b>
	<b>IDENTIFICATION DES COEFFICIENTS A ET B</b>	<b>203</b>
	<b>ANNEXE C</b>	<b>205</b>
	<b>CONSTRUCTION DE LA BASE DE DONNEES</b>	<b>205</b>
	<b>ANNEXE D</b>	<b>213</b>
	<b>PRESENTATION DE FATSIMPRO</b>	<b>213</b>
	<b>ANNEXE E</b>	<b>217</b>
	<b>ESTIMATION DE LA DUREE DE VIE EN FATIGUE AVEC LE MODELE IP DE PARK/LAWRENCE</b>	<b>217</b>
	<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>223</b>



# *Partie 1*

## *Etat de l'Art*

“ Les vrais hommes de progrès sont ceux qui ont pour point de départ un respect profond du passé ”.

*Ernest Renan*





# Chapitre 1

## Rappels sur la fatigue

L'expérience montre que la seule connaissance de la manière dont résiste une structure pour une sollicitation appliquée une seule fois ou pour un choc ne suffit pas à dimensionner cette structure lors de chargements répétés. Il s'agit de la fatigue des pièces qui sont soumises à des chargements variables et qui voient leurs caractéristiques matériaux changer au cours du temps, essentiellement à cause de la formation de microfissures ou dommage ; ce dommage peut alors entraîner la rupture lorsqu'il atteint un certain niveau.

Le dimensionnement d'une structure à la fatigue est plus difficile que pour les charges monotones, car les ruptures par fatigue dépendent fortement des contraintes locales (la fatigue étant un phénomène essentiellement surfacique se produisant à un niveau quasi-local).

Nous ne chercherons pas ici à décrire réellement les mécanismes de nucléation et de croissance de fissures. Nous dirons que la fatigue se caractérise par la formation de "microfissures" dans les zones de fortes concentrations de contraintes dues aux effets géométriques (entailles) ou métallurgiques (inclusions). Ces microfissures donnent ensuite naissance progressivement à une fissure macroscopique qui se propage jusqu'à la ruine finale.

### 1.1 Caractérisation de l'endurance des matériaux

#### 1.1.1 Courbe de Wöhler

L'essai de fatigue le plus simple consiste à soumettre chaque éprouvette " lisse ou entaillée " ou pièces soudées à des cycles d'efforts périodiques, d'amplitude maximale et de fréquence constantes, et à noter le nombre de cycles  $N_r$  au bout duquel la rupture se produit. On reporte ce nombre  $N_r$ , en général sur une échelle logarithmique, en fonction de la contrainte maximale des cycles. A chaque éprouvette correspond un point du plan ( $\sigma ; N$ ) et, à partir d'un lot d'éprouvettes soumises à des contraintes maximales différentes, on obtient une courbe nommée courbe de Wöhler ou courbe S-N (Stress-Number of cycles). Cette courbe peut en général être décomposée en trois zones (fig. 1.1) :

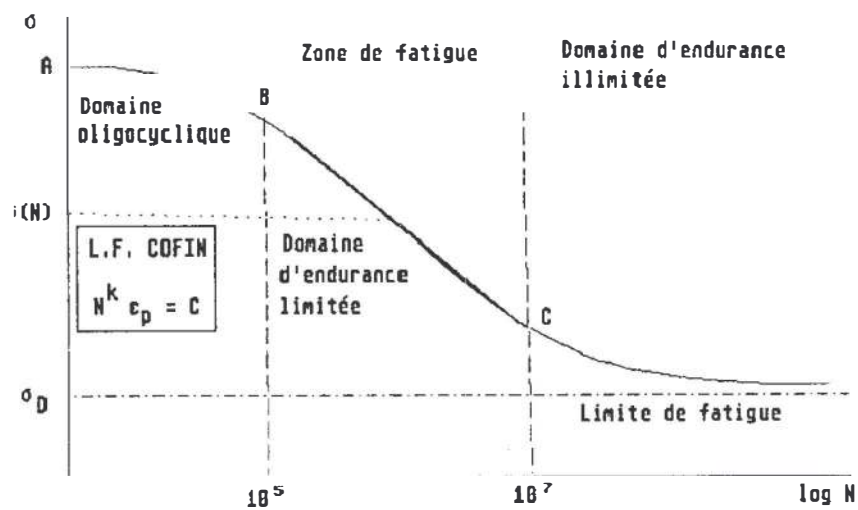


fig. 1.1 : Principales zones de la courbe de Wöhler

❖ la zone AB, dite oligocyclique, qui correspond aux contraintes les plus grandes, supérieures à la limite d'élasticité macroscopique et où le nombre de cycles à la rupture s'étend de 0.5 jusqu'à  $10^4$  ou  $10^5$  (pour les aciers doux). L'éprouvette atteint généralement un état d'accommodation plastique ou un rochet élastoplastique :

- L'accommodation plastique se produit lorsque la réponse de l'éprouvette devient périodique, c'est à dire la déformation plastique devient périodique, un cycle d'hystérésis élastoplastique se produit.
- Le rochet se produit lorsque la réponse de l'éprouvette n'atteint jamais un état périodique, la déformation plastique croît sans cesse, ce qui va provoquer la ruine de la structure en un nombre de cycles relativement très faible.

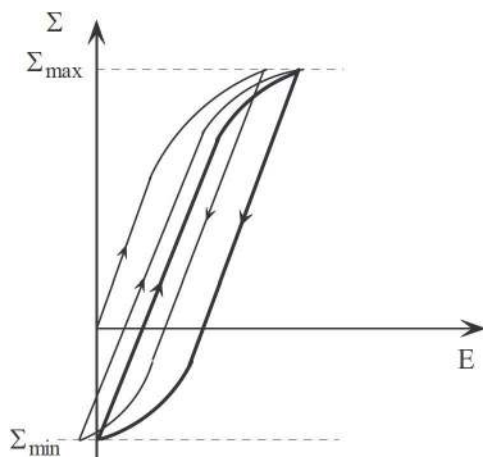


fig. 1.2 - Accommodation

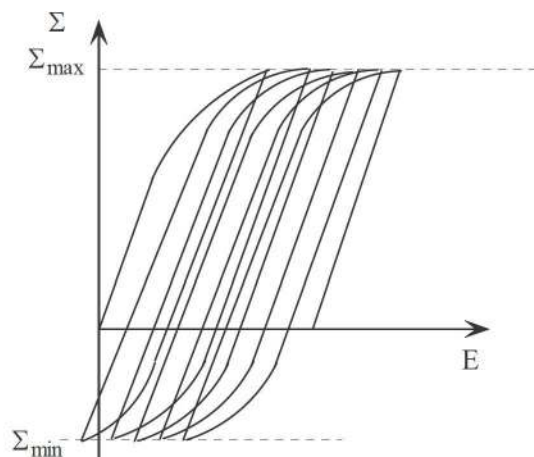


fig. 1.3 - Rochet

Dans cette zone, la rupture survient après un petit nombre d'alternances et est précédée d'une déformation plastique notable. Par suite de l'amplitude de la contrainte maximale, chaque cycle d'effort entraîne une déformation plastique d'ensemble accompagnée le plus souvent soit d'un durcissement notable, soit d'un adoucissement du métal. La déformation plastique  $E^p$  peut être souvent reliée au nombre de cycles à la rupture par une relation simple de la forme (loi de Manson-Coffin) :

$$N^k E^p = C$$

où l'exposant  $k$  est voisin de 5 pour les métaux courants (aciers, alliages légers).

- ❖ **la zone BC, dite zone de fatigue ou d'endurance limitée**, où la rupture est atteinte après un nombre de cycles compris approximativement entre  $10^4$  et  $10^6$  à  $10^7$ . La rupture n'est pas accompagnée d'une déformation plastique d'ensemble, mesurable. La réponse de l'éprouvette atteint dans ce cas un régime adapté élastique. L'adaptation élastique est un état où la réponse de l'éprouvette devient purement élastique, il peut y avoir de la déformation plastique durant les premiers cycles, mais au bout d'un certain nombre de cycles, elle reste constante ; l'état final cependant dépend de l'état initial de la structure.

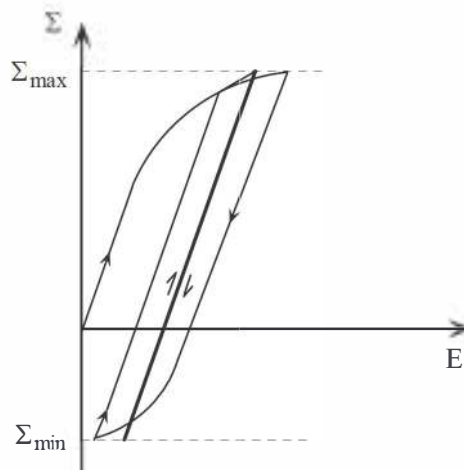


fig. 1.4 - Adaptation

C'est le domaine dans lequel travaillent la plupart des structures qui pour diverses raisons, doivent avoir des masses et des volumes impérativement réduits (cas des structures aéronautiques ou automobiles ou nucléaires). Il existe de très nombreuses relations mathématiques reliant  $\Sigma$  et  $N$  dans ce domaine.

- ❖ **la zone CD, dite zone d'endurance illimitée ou zone de sécurité**, où D est un point pour les métaux ferreux qui est à "l'infini". La courbe de Wöhler présente généralement une variation de pente plus ou moins marquée autour de  $10^6$  à  $10^7$  cycles, suivie d'une zone (CD) où la courbe tend vers une limite asymptotique parallèle à l'axe des  $N$ . En deçà de cette valeur limite de  $\Sigma$ , notée

$\sigma_D$ , il n'y a jamais rupture par fatigue quel que soit le nombre de cycles appliqué.

$\sigma_D$  est nommée *limite de fatigue ou limite d'endurance*. Cette limite peut ne pas exister ou être mal définie pour certains matériaux (aciers à haute résistance, métaux non ferreux). Les grandes durées de vie concernent le domaine de la fatigue polycyclique.

### Remarques :

1- Pour les métaux pour lesquels on n'arrive pas à évaluer la limite de fatigue  $\sigma_D$ , on introduit la notion de limite de fatigue conventionnelle ou limite d'endurance. Il s'agit de la plus grande amplitude de la contrainte  $\Sigma$  pour laquelle on constate 50% de rupture après  $N$  cycles de la sollicitation. On la note  $\sigma_D(N)$ , et selon le cas  $N$  varie entre  $10^5$  à  $10^7$  cycles. Pour les aciers,  $N = 10^7$  et  $\sigma(10^7) \approx \sigma_D$

2- Les courbes de Wöhler et la notion de limite de fatigue et d'endurance sont établies pour un niveau de contrainte moyenne donnée. Il est donc construit plusieurs courbes.

## 1.1.2 Aspect probabiliste de la courbe de Wöhler

L'expérience montre qu'il peut y avoir une dispersion importante dans l'obtention de la courbe de Wöhler d'un matériau, en particulier lors des grandes durées de vie. Pour un niveau de contrainte donné, le rapport entre la valeur maximale et la valeur minimale du nombre de cycles à la rupture peut dépasser 10. La dispersion des résultats est liée à l'hétérogénéité des matériaux, aux défauts superficiels, aux tolérances d'usinage et surtout à des facteurs métallurgiques. Il est défini une courbe associée à chaque niveau de probabilité de ruine ; celle qui est classiquement représentée est à un niveau de 50% de probabilité.

C'est ainsi que, pour un concepteur soucieux de prévoir un certain taux de fiabilité, il apparaît souvent impossible d'utiliser directement les résultats de la courbe de Wöhler car cette courbe moyenne lui indique seulement qu'il a autant de "chances" d'obtenir une rupture qu'une non-rupture de sa pièce ou structure, après un certain nombre de cycles sous une sollicitation donnée. Dans un concept probabiliste, la courbe de Wöhler ne représente plus que la frontière séparant le domaine où la rupture est la moins probable (à gauche de la courbe) du domaine où la rupture est la plus probable (à droite).

Il est nécessaire de construire les courbes d'équiprobabilité, en anglais courbes P.S.N. (Probabilistics, Stresses, Number of cycles) qui associent à chaque sollicitation ou nombre de cycles une probabilité de rupture  $p$ . La courbe de Wöhler étant alors la courbe médiane à 50% (fig. 1.5). Il est couramment admis, et vérifié pratiquement par l'expérience que :

- la distribution de l'effort suit presque toujours une loi normale pour un nombre de cycles donné sur l'étendue des deux domaines d'endurance limitée et illimitée ;
- la distribution du logarithme des nombres de cycles ( $\log N$ ) suit une loi normale pour un effort donné dans le domaine d'endurance limitée (fig. 1.5)

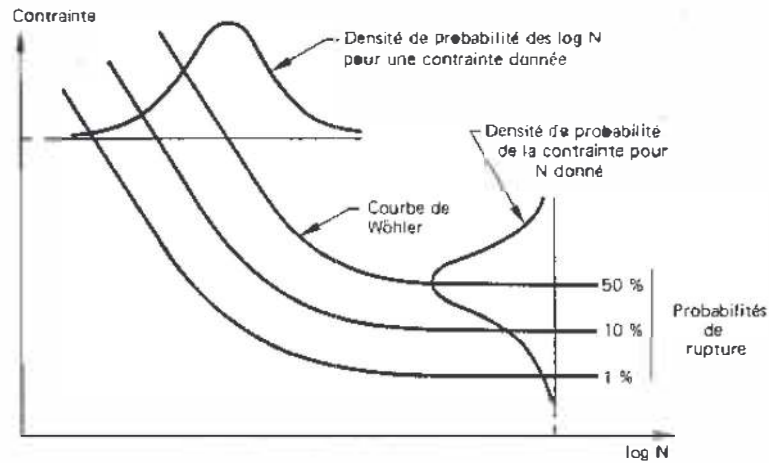


fig. 1.5 : Courbe de Wöhler probabilisée

Ces deux propriétés sont extrêmement précieuses, car connaissant la moyenne  $m$  et l'écart type  $\Sigma$  de la population entièrement expérimentée, il est possible de déterminer le pourcentage de rupture au-delà d'un certain nombre d'écart-types à partir de la moyenne en se référant aux tables de la loi normale centrée réduite. Mais les essais sont réalisés à partir d'un échantillonnage exhaustif dans une population de moyenne  $m$  et d'écart type  $\Sigma$  inconnus. Les résultats sont donc uniquement valables pour un niveau de confiance égal à 0.5 en remplaçant  $m$  par la moyenne  $\bar{x}$  de l'échantillon et  $\Sigma$  par l'écart-type empirique  $s$  de cet échantillon.

Afin d'ajuster des courbes d'équiprobabilité représentatives de la population à partir de cet échantillon, il faut introduire un niveau de confiance supérieur à 0.5, ce qui a pour conséquences immédiates de :

- diminuer la contrainte admissible pour une probabilité de rupture donnée, opération  $\bar{x} - ks$  au lieu de  $m - K\Sigma$ , avec  $k > K$
- déterminer l'intervalle de confiance contenant la vraie valeur de la moyenne  $m$ .

Il faut donc :

- déterminer un nombre  $k$  tel que la probabilité de la variable aléatoire  $\bar{x} - ks$  de ne pas dépasser  $m - K\Sigma$ , soit exactement de  $\gamma$ . Des tables donnant  $k$  en fonction de  $p$ ,  $n$  et  $\gamma$  existent, où  $p$  est la probabilité de non-rupture en %,  $n$  le nombre d'échantillons et  $\gamma$  un niveau de confiance.
- accepter un risque  $1-\gamma$  que l'intervalle de confiance ne contienne pas les vraies valeurs de  $m$  à partir de risques limites  $\beta_1 = 1-\gamma/2$  et  $\beta_2 = 1+\gamma/2$ . Ces limites sont tabulées à partir de la loi de Student-Fischer et permettent de déterminer  $t_p$  en fonction du nombre de degrés de liberté  $\eta = n-1$ . L'intervalle de confiance de la moyenne  $m$  a alors comme limite :

$$\bar{x} + t_{\beta_1} \frac{s}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \bar{x} + t_{\beta_2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

### 1.1.3 Représentation analytique de la courbe de Wöhler

Plusieurs expressions analytiques ont été proposées pour représenter les courbes de Wöhler, dans les domaines d'endurance limitée ou illimitée lorsqu'elles sont connues pour un matériau ou une pièce donnée.

La courbe de Wöhler est en général tracée dans des axes semi-logarithmiques ( $\log N ; \Sigma$ ) dans lesquels elle présente une partie approximativement linéaire (autour d'un point d'inflexion) variable suivant le matériau (BC) suivie d'une asymptote à la droite  $\Sigma = \sigma_D$ .

Parmi toutes les formules qui relient la contrainte alternée appliquée en essai  $\Sigma_a$  au nombre de cycles à rupture  $N_r$  et à la limite de fatigue  $\sigma_D$ , nous ne retiendrons que celles qui représentent le mieux les résultats d'essais de fatigue à savoir :

#### **Formule de Wöhler (1870)**

$$\Sigma_a = a - b \log N_r \quad \text{avec} \quad a > 0; b > 0$$

Cette relation ne décrit pas la totalité de la courbe puisque  $\Sigma$  ne tend pas vers une limite  $\sigma_D$  lorsque  $N \rightarrow \infty$ . Elle ne représente que la partie BC.

#### **Formule de Basquin (1910)**

$$\ln \Sigma_a = a - b \log N_r \quad \text{avec} \quad a > 0; b > 0$$

ou

$$N_r \Sigma_a^\beta = C$$

En posant :  $\beta = 1/b$  et  $\ln C = \alpha/\beta$   
 $b$  est nommé index de la courbe de fatigue.

Dans l'expression  $N_r \Sigma_a^\beta = C$ , la contrainte tend vers zéro quand  $N$  tend vers l'infini. Cette relation n'est donc représentative de la courbe de Wöhler que dans sa partie BC. Par ailleurs, elle représente une droite dans des axes logarithmiques et non dans des axes semi-logarithmiques.

#### **Formule de Stromeyer (1914)**

$$\ln(\Sigma_a - \sigma_D) = a - b \log N_r \quad \text{avec} \quad a > 0; b > 0$$

ou

$$\Sigma_a = \sigma_D + \left( \frac{C}{N_r} \right)^{\frac{1}{b}}$$

Ici  $\Sigma$  tend vers  $\sigma_D$  quand  $N$  tend vers l'infini.

**Formule de Palmgreen (1924)**

$$\Sigma_a = \sigma_D + \left( \frac{C}{A + N_r} \right)^{\frac{1}{b}}$$

Cette relation s'ajuste mieux aux courbes expérimentales que celle de Stromeier.

**Formule de Weibull (1949)**

$$\frac{\Sigma_a - \sigma_D}{\sigma_u - \sigma_D} = \left( \frac{C}{A + N_r} \right)^{\frac{1}{b}}$$

où  $\sigma_u$  est la résistance à la rupture du matériau étudié.

**Formule de Corson (1949)**

$$(\Sigma_a - \sigma_D) A^{\Sigma_a - \sigma_D} = \frac{C}{N_r}$$

**Formule de Bastenaire**

$$(N_r + B)(\Sigma_a - \sigma_D) e^{A(\Sigma_a - \sigma_D)} = C$$

avec  $N_r$  : le nombre de cycles à la rupture (ou initiation)

$A, B, C, \alpha, b$  : des constantes déterminées à partir des données expérimentales.

$\Sigma_a$  : l'amplitude de la contrainte alternée

$\sigma_D$  : la limite de fatigue

## 1.1.4 Discussion sur la limite de fatigue

La courbe SN donne lieu à plusieurs règles de dimensionnement à la fatigue dont la justesse est contredite par les résultats obtenus en fatigue gigacyclique ( $10^9$  cycles). La normalisation internationale présente la courbe SN comme étant hyperbolique pour les aciers et quasi-hyperbolique pour les autres alliages. De cette hypothèse, il est admis que, au-delà de  $10^7$  cycles, la durée de vie en fatigue tend vers l'infini. Il est admis, de plus, que la valeur asymptotique de la contrainte cyclique correspondant à  $10^7$  cycles devient une limite de fatigue, cette dernière étant déterminée par une approche statistique fondée sur une répartition log-normale de la dispersion, seconde hypothèse peu crédible au regard des résultats de fatigue gigacyclique. Faute d'avoir pu exploiter correctement les très grandes durées de vie de l'ordre du milliard de cycles, des spéculations hasardeuses ont été utilisées à partir du calcul d'un écart type, sur une population de résultats trop restreinte.

D'un autre point de vue, on a souvent tenté de trouver une relation entre le seuil de non propagation de fissure ( $\Delta K_s$ ) et la limite de fatigue ( $\sigma_D$ ) de la courbe SN. Cette



relation ne peut exister que si la limite de fatigue, ou la résistance à la fatigue, est correctement déterminée. Dans la relation  $\Delta K_s = \sigma_D \sqrt{\pi a}$ , l'erreur sur  $\Delta K_s$  est assez faible parce que la pente de la courbe de fissuration à ce niveau de vitesse est quasi verticale. En revanche, l'expérience montre qu'entre  $\sigma_D$  à  $10^6$  cycles et  $10^9$  cycles il peut exister une différence supérieure à 30 %.

**“*There is no infinite fatigue life in metallic materials*”** (Bathias, 1999).

Il a été montré que dans certains cas, la différence de la résistance à la fatigue peut décroître de 100 voire même de 200 MPa, entre  $10^6$  et  $10^9$  cycles à la rupture et que le concept de limite infinie de fatigue n'est donc pas correct. Sous ces conditions, une limite de fatigue définie grâce à une analyse statistique entre  $10^6$  et  $10^7$  cycles ne peut pas garantir une durée de vie à la fatigue infinie.

Compte tenu de l'allongement de la durée d'utilisation et de la sécurité des équipements tels que les automobiles, les rails des voies de chemin de fer, les avions, les compresseurs, les turbines, qui sont soumis à des chargements cycliques ou à des vibrations, durant leur service, pouvant atteindre  $10^6$  cycles, il est très important de pouvoir déterminer une limite d'endurance sûre pour  $10^9$  cycles (Bathias, 1999).

## 1.2 Les paramètres d'influence en fatigue

### 1.2.1 Paramètres d'ordre métallurgique

#### ***Taille des grains***

Les structures à grains fins présentent une meilleure tenue en fatigue que les structures à gros grains.

#### ***Orientation du fibrage par rapport à la direction des efforts***

L'orientation générale des grains (fibrage) confère au matériau une anisotropie plus ou moins marquée. Les caractéristiques statiques et la tenue en fatigue seront meilleures dans le sens long du fibrage que dans les autres sens (travers long et travers court).

#### ***Taux d'écroutissage***

L'écroutissage résultant des opérations de formage a pour effet de consolider le matériau (augmentation de la limite d'élasticité), et par suite, améliore la tenue en fatigue.

#### ***Traitement thermique***

Suivant que le traitement thermique provoque un adoucissement ou un durcissement du matériau, la tenue en fatigue sera diminuée ou augmentée. De plus, le traitement thermique peut modifier la taille des grains.

### ***Santé métallurgique de l'alliage***

Les défauts métallurgiques (lacunes, défauts interstitiels, précipités, inclusions) peuvent être à l'origine de l'endommagement par fatigue. Par incompatibilité des déformations, ils provoquent des concentrations de contraintes locales. L'abatement de durée de vie dépendra de leurs quantités, taille, nature, répartition, orientation par rapport aux efforts.

## **1.2.2 Paramètres d'ordre mécanique et géométrique**

### ***Nature du chargement***

Le chargement peut être monotone ou variable (et même aléatoire, spectre). Dans le cas des chargements monotones les paramètres prépondérants sont :

- la forme du signal : un signal de type carré est plus pénalisant que celui de type sinusoïdal ;
- le rapport  $R$  (rapport entre la valeur minimale et la valeur maximale du chargement) : à contrainte maximale constante, si  $R$  augmente, la durée de vie augmente ;
- la contrainte moyenne : à amplitude de chargement constante, si  $\Sigma_m$  augmente, la durée de vie diminue.

La période du signal a en général peu d'influence sur la durée de vie. Cette règle est infirmée quand le phénomène de fatigue est associé à d'autres modes d'endommagement fonction du temps : fatigue/corrosion, fatigue/fluage, ou lorsque la rapidité des sollicitations produit un échauffement.

Dans le cas des chargements variables, les paramètres prépondérants sont :

- la présence de surcharges : la répétition périodique d'une surcharge peut retarder la propagation de fissures ;
- l'ordre d'apparition des cycles.

### ***Accidents de forme (discontinuité dans la géométrie : entailles, trous...)***

Un accident de forme augmente localement le niveau de contrainte. Cette augmentation peut être traduite par un coefficient de contrainte élastique  $K_t$ : rapport entre la contrainte locale maximale et la contrainte nominale. Dans le domaine d'endurance limité (domaine visé par l'industrie aéronautique), si la valeur de  $K_t$  augmente, la durée de vie diminue.

### ***Effet d'échelle***

A niveau de contrainte égale, deux pièces semblables mais de dimensions différentes n'auront pas la même tenue en fatigue : plus les dimensions d'une pièce croissent, plus la résistance à la fatigue diminue. Cette observation s'explique principalement par le volume de matière sollicité : plus celui-ci est grand, plus la probabilité d'avoir des

Le défaut métallurgique est grande. Weibull en a donné une interprétation phénoménologique. Z. Bazant a ensuite apporté une explication quantitative grâce à la mécanique de la rupture.

### **Qualité de l'usinage**

Généralement, l'endommagement par fatigue apparaît en premier lieu à la surface des pièces. La prise en compte des deux aspects suivants améliore la tenue en fatigue :

- l'aspect microgéométrie de la surface : un mauvais usinage provoque en surface des microreliefs susceptibles d'augmenter localement le niveau de contrainte ; l'amorçage des fissures en surface est donc retardé lorsque la rugosité est faible ;
- l'aspect contraintes résiduelles : l'usinage peut introduire des contraintes résiduelles de traction en surface (elles sont équilibrées en profondeur par des contraintes résiduelles de compression) ; ces contraintes se superposant à celles du chargement accélèrent l'endommagement par fatigue.

## **1.2.3 Environnement**

Un milieu agressif (températures élevées, milieux corrosifs...) aggrave le phénomène de fatigue. Il apparaît des phénomènes nouveaux comme le fluage ou la corrosion. Leur action est liée au temps d'exposition.

## **1.2.4 Influence de la contrainte moyenne**

Le tracé des courbes de Wöhler est en général effectué en soumettant des éprouvettes à des efforts sinusoïdaux (traction/compression, torsion...) à moyenne nulle. Lorsque les essais de fatigue sont réalisés à contrainte moyenne  $\Sigma_m$  non nulle et constante, l'expérience montre que la durée de vie de l'éprouvette est modifiée, en particulier quand cette contrainte moyenne est relativement grande par rapport à la contrainte alternée. Une contrainte de traction diminue de façon importante la durée de vie, une contrainte de compression (jusqu'à un certain niveau) l'augmente très faiblement

La limite d'endurance  $\sigma_D$  est aussi modifiée par la superposition d'une contrainte moyenne non nulle. Certains auteurs ont cherché à représenter l'ensemble de ces limites d'endurance sur différents diagrammes qui ont pris le nom de diagrammes d'endurance. Une présentation détaillée des diagrammes les plus utilisés peut être trouvée dans (Brand, 1992). Nous les rappellerons ici très succinctement.

### **1.2.4.1 Diagramme de Haig**

Sur ce diagramme, l'amplitude de contrainte  $\Sigma_a$  est portée en fonction de la contrainte moyenne  $\Sigma_m$  à laquelle a été réalisé l'essai de fatigue (fig. 1.6). Deux points particuliers sont à considérer :

- le point A qui représente la limite d'endurance  $\sigma_D$  en sollicitation purement alternée

- le point B qui représente le comportement limite du matériau pour une contrainte alternée nulle. Ce point correspond donc à la contrainte de rupture du matériau au cours d'un essai statique.

L'ensemble des limites d'endurance observées pour diverses valeurs de la contrainte moyenne se place alors sur la courbe AB ajustée en fonction des résultats d'essais.

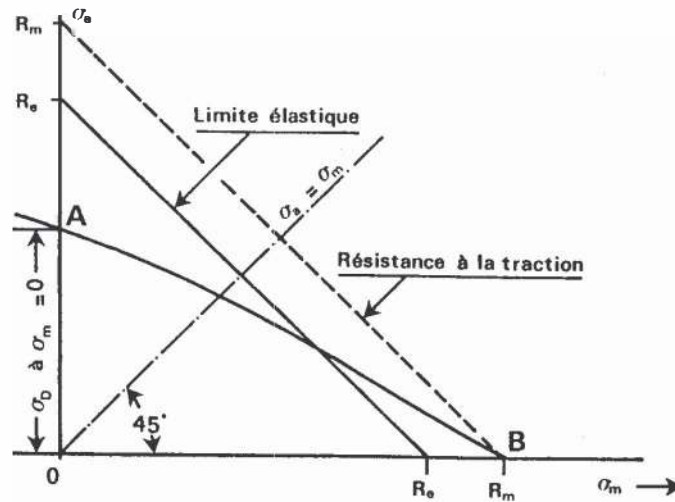


fig. 1.6 - Diagramme de Haig

Différentes représentations de la courbe AB sont possibles (fig. 1.7).

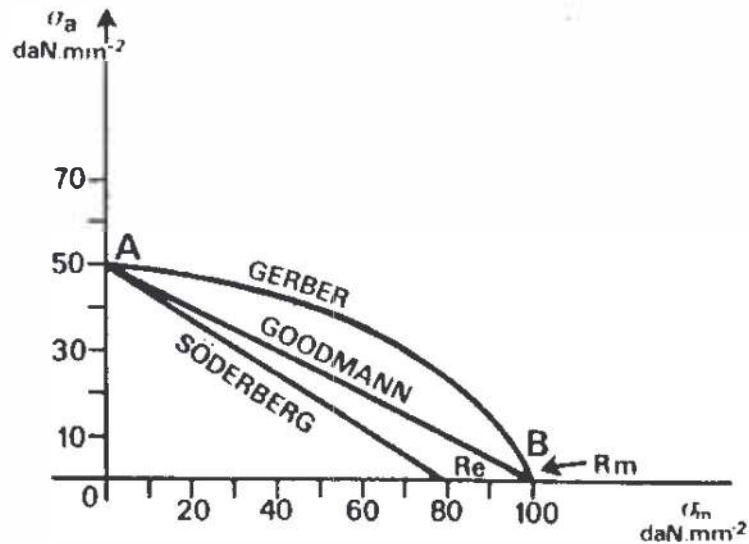


fig. 1.7 - Diagramme de Haig. Représentation de Gerber, Goodman et Söderberg

- La droite de GOODMAN :  $\Sigma_a = \sigma_D \left( 1 - \frac{\Sigma_m}{\sigma_u} \right)$
- La parabole de GERBER :  $\Sigma_a = \sigma_D \left( 1 - \left( \frac{\Sigma_m}{\sigma_u} \right)^2 \right)$
- La droite de SÖDERBERG :  $\Sigma_a = \sigma_D \left( 1 - \frac{\Sigma_m}{\sigma_y} \right)$
- La relation elliptique :  $\Sigma_a = \sigma_D \sqrt{1 - \left( \frac{\Sigma_m}{\sigma_u} \right)^2}$

### 1.2.4.2 Diagramme de GOODMAN-SMITH

Les contraintes maximales  $\Sigma_{max}$  et les contraintes minimales  $\Sigma_{min}$  sont représentées (fig. 1.8) en fonction de la contrainte moyenne  $\Sigma_m$ .

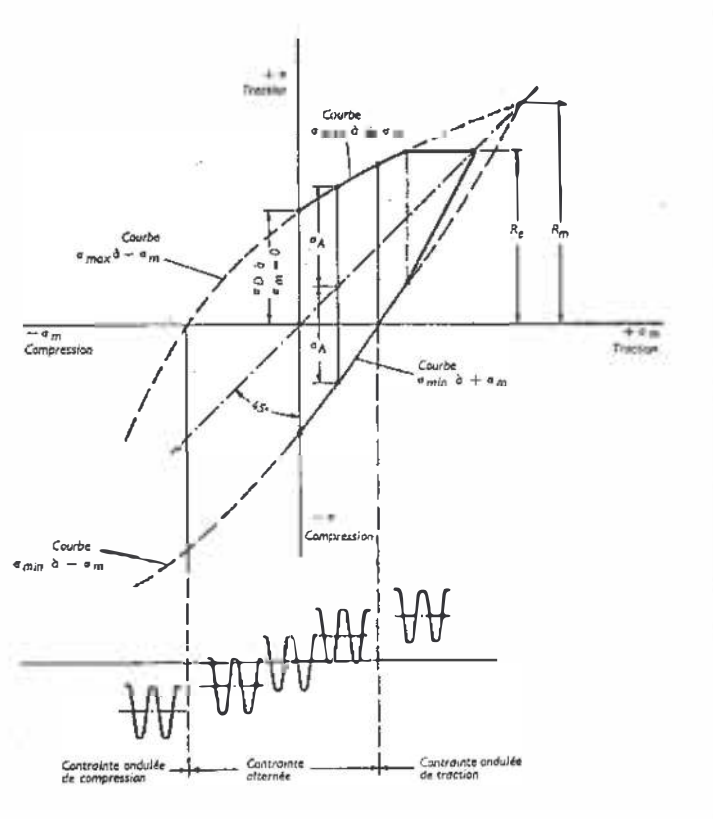


fig. 1.8 - Diagramme de Goodman-Smith

Un diagramme de Goodman modifié est généralement utilisé pour l'étude de la fatigue polycyclique. Ce diagramme représente une courbe fermée pour une durée de vie  $N$ , dans l'espace  $(\Sigma_m; \Sigma_a)$ , et délimite le domaine de rupture du matériau pour un chargement uniaxial, à l'intérieur de ce domaine, la rupture ne se produira pas au bout de  $N$  cycles. Quatre segments délimitent le domaine :

la rupture est prévue de se produire si on a :	limites de la validité des équations :
$\Sigma_{max} - 2\Sigma_m \geq \sigma_y$	$-\sigma_y \leq \Sigma_m \leq (\Sigma_N - \sigma_y)$
$\Sigma_{max} - \Sigma_m \geq \Sigma_N$	$(\Sigma_N - \sigma_y) \leq \Sigma_m \leq 0$
$\Sigma_{max} - (1-r)\Sigma_m \geq \Sigma_N$	$0 \leq \Sigma_m \leq \frac{\sigma_y - \Sigma_N}{1-r}$
$\Sigma_{max} \geq \sigma_y$	$\frac{\sigma_y - \Sigma_N}{1-r} \leq \Sigma_m \leq \sigma_y$

où  $r = \frac{\Sigma_N}{\sigma_u}$

En utilisant le tableau ci-dessus, l'ingénieur peut prévoir si la rupture se produira sous un chargement de contrainte moyenne non nulle pour un certain nombre de cycles, si les données sont connues pour un chargement de contrainte moyenne nulle, ainsi que  $\sigma_u$  et  $\sigma_y$ .

La plupart des structures rencontrées imposent un état multiaxial de contrainte cyclique. Pour cela, on est amené à développer des critères de fatigue multiaxiaux pour prévoir la rupture de la structure, et on introduit pour cela la notion de contrainte équivalente.

### 1.2.4.3 Diagramme de RÖS

La contrainte maximale  $\Sigma_{max}$  est reportée en fonction de la contrainte minimale  $\Sigma_{min}$ . Ce diagramme est principalement employé dans les pays anglo-saxons. (fig. 1.9)

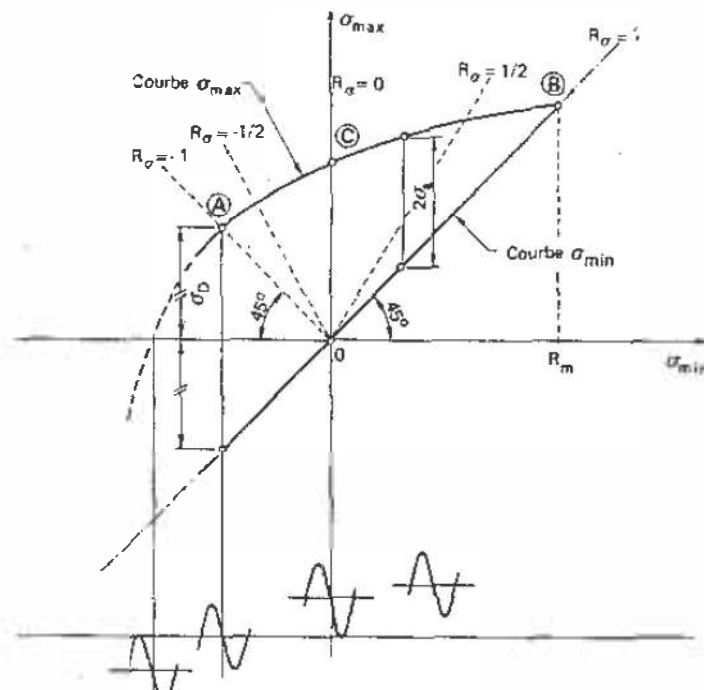


fig. 1.9 - Diagramme de Rös

### 1.2.4.4 Diagramme de MOORE-KOOMERS-JASPER

La contrainte maximale  $\Sigma_{max}$  est représentée en fonction du rapport de contraintes :

$$R = \frac{\Sigma_{min}}{\Sigma_{max}}$$

Ce diagramme est essentiellement employé dans les pays germaniques.

#### Remarque générale :

Il est nécessaire d'utiliser ces diagrammes dans le cas où la courbe de Wöhler dont on dispose n'est pas relative à la contrainte moyenne appliquée de manière à pouvoir se ramener au cas précédent. Ces diagrammes permettent de trouver l'amplitude de la contrainte purement alternée qui causera le dommage identique à un chargement cyclique à contrainte moyenne non nulle.

## 1.3 Amorçage des fissures de fatigue

Pour les structures soumises à des sollicitations variables au cours du temps, la ruine peut survenir au bout d'une durée finie. On définit souvent comme critère de ruine l'apparition d'une fissure d'une taille critique,  $a_{cr}$ . L'intervalle de temps, compris entre le début de la sollicitation et l'instant correspondant à la présence d'une fissure de d'une taille critique,  $a_{cr}$ , couvre en réalité plusieurs phénomènes physiques.

L'observation de la fissuration dans les structures soumises à la fatigue montre que le processus qui conduit à la ruine peut être décomposé en plusieurs stades. Tout d'abord, dans les zones où le matériau est le plus sollicité, des microfissures apparaissent. Puis, elles se développent et coalescent les unes avec les autres jusqu'à ce qu'elles forment une fissure de taille macroscopique. Enfin, cette fissure se propage jusqu'à la ruine de la structure.

Il est d'usage de diviser la durée de vie d'une structure en deux phases : la phase d'amorçage et la phase de propagation.

Cependant, le problème de base consiste à définir le stade où l'amorçage se termine, c'est à dire où la propagation d'une fissure peut être décrite. La période de propagation pourrait être définie, par le stade à partir duquel une fissure unique s'amorce ou le stade où les microfissures commencent à coalescer ? Ou encore celui qui correspond à la création de la " première " microfissure ?

Aujourd'hui encore, la définition de l'amorçage reste un problème ouvert. Pour dimensionner les structures soumises à la fatigue, l'ingénieur a besoin de modèles qui permettent d'estimer le nombre de cycles  $N$  et donc de calculer le nombre de cycles à l'amorçage  $N_a$  et le nombre de cycles à la propagation  $N_p$ . La mise en œuvre de tels modèles n'est pas facile puisque les durées respectives des phases d'amorçage et de propagation dépendent fortement de l'amplitude de la sollicitation, de la présence

éventuelle de défauts initiaux dans le matériau, de l'état initial de la structure et de la définition que l'on a de l'amorçage.

### 1.3.1 Définition de l'amorçage

Les observations réalisées sur des éprouvettes de laboratoire font apparaître plusieurs stades dans le phénomène d'amorçage des fissures : naissance de multiples microfissures, coalescence aboutissant à la formation d'une fissure principale.

Les longueurs relatives de ces différents stades dépendent de l'acuité de l'entaille. Si celle-ci est très aiguë, le dernier stade peut intervenir très tôt dans la durée de vie totale de l'éprouvette.

Sur éprouvettes lisses ou entaillées mécaniquement, l'amorçage est défini par l'apparition d'une fissure principale (dernier stade des observations rapportées ci-dessus) dont la taille dépend de la finesse des moyens de détection utilisés. La plupart du temps, sa profondeur est comprise entre 0.1 mm et 1 mm.

Dans le cas des structures plus complexes, comme les joints soudés types ou les nœuds tubulaires soudés, l'amorçage est généralement défini alors que le stade de propagation est beaucoup plus avancé. Ceci peut constituer un obstacle à une comparaison significative des résultats d'amorçage obtenus sur une structure et sur petites éprouvettes.

### 1.3.2 Méthodes de prévision de l'amorçage

#### *Hypothèses*

Les approches locales reposent sur l'hypothèse selon laquelle les valeurs des contraintes et des déformations locales dans la zone de fissuration contrôlent à elles seules le temps à l'amorçage. Par conséquent, deux structures différentes qui ont les mêmes contraintes locales au point critique ont la même résistance à la fatigue.

Pour estimer le temps à l'amorçage dans les structures, les approches locales proposent de déterminer les contraintes au point d'amorçage et de les comparer aux données expérimentales obtenues sur éprouvettes lisses.

#### 1.3.2.2 Cas du comportement élastique

Dans chacune des approches locales, la méthode consiste à utiliser la variation maximale du tenseur des contraintes locales au point critique  $\max(\Delta\Sigma_i)$  pour estimer le nombre de cycles à l'amorçage.

Dans le cas de géométries simples  $\max \Delta\Sigma_i$  peut se calculer par la formule suivante :

$$\max(\Delta\Sigma_i) = K_i \max(\Delta\Sigma_{N,i}) \quad i = 1,2,3$$

où :



- $\Delta\Sigma_{N,i}$  est la variation du tenseur des contraintes nominales obtenue par un calcul du type Résistance des Matériaux
- $K_t$  est le coefficient de concentration de contrainte élastique (fig. 1.10). Pour des géométries précises, des formules paramétriques sont proposées par différents auteurs (Peterson, 1974).

Cependant, des essais effectués sur éprouvettes entaillées conduisent à une limite d'endurance (calculée à partir de  $K_t$ ) plus faible que celle qui est obtenue sur éprouvettes lisses.

Ce phénomène se traduit par un coefficient de réduction en fatigue ( $K_f$ ).  $K_f$  est défini par le rapport des limites d'endurance obtenues sur éprouvettes lisses et éprouvettes entaillées, soit :

$$K_f = \frac{\sigma_D(\text{lisse})}{\sigma_D(\text{entaillée})}$$

C'est pourquoi,  $K_f$  est souvent substitué à  $K_t$  pour calculer la contrainte locale :

$$\max(\Delta\Sigma_i) = K_f \max(\Delta\Sigma_{N,i}) \quad i = 1,2,3$$

Néanmoins, l'utilisation de  $K_f$  présente plusieurs inconvénients car  $K_f$  varie avec :

- le nombre de cycles à la ruine
- la contrainte moyenne appliquée
- la géométrie de l'éprouvette et de l'entaille
- le matériau utilisé

Dans un contexte de dimensionnement de structure,  $K_f$  est inutilisable car il est imprévisible. Cependant, pour les géométries complexes, on a recourt à la méthode des éléments finis pour calculer  $\max(\Delta\Sigma_i)$ .

Pour les pièces soumises à des chargements cycliques à amplitude constante, la contrainte de dimensionnement  $S$  est donnée par l'expression suivante :

$$S = \frac{\Delta\Sigma}{2} = \frac{\max(\Delta\Sigma_i)}{2}$$

Pour les approches locales qui considèrent que le matériau dans la zone d'amorçage a un comportement élastique, on introduit cette quantité dans la courbe de Wöhler du matériau étudié. Celle-ci est obtenue par des essais sur éprouvettes lisses dans le domaine de la fatigue polycyclique. On obtient ainsi le nombre de cycles à la ruine  $N$ .

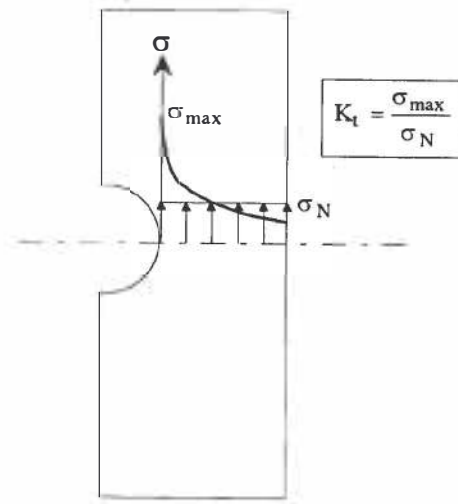


fig. 1.10 – Définition du coefficient de concentration de contrainte  $K_t$  sur une éprouvette entaillée

### 1.3.2.3 Cas du comportement élastoplastique

Si les contraintes locales amènent la région où a lieu l'amorçage en plasticité, le phénomène de l'amorçage est simulé par le comportement d'une éprouvette lisse dans la fatigue oligocyclique, c'est à dire dans le domaine des courtes durées de vie.

On a alors deux façons de procéder pour connaître l'amplitude des contraintes locales dans la zone d'amorçage :

- soit par un calcul éléments finis élastoplastique (calcul long, coûteux et surtout qui nécessite la connaissance de la loi de comportement local)
- soit par des méthodes de calcul élastoplastique simplifié, tels que celles qui utilisent la règle de Neuber et l'équation d'écrouissage cyclique du matériau étudié obtenue à partir d'essais uniaxiaux sur éprouvettes lisses, dont nous présentons ici la méthodologie.

#### *Méthodologie de la règle de Neuber*

D'une part, l'application de la règle de Neuber se fait à l'aide de l'équation suivante :

$$\Delta\Sigma \cdot \Delta E = K_t^2 \Delta\Sigma_N \cdot \Delta E_N$$

Si le chargement nominal est élastique, on a :

$$\Delta E_N = \frac{\Delta\Sigma}{Y_G}$$

où  $Y_G$  est le module d'élasticité du matériau

$\Delta\Sigma_N$  et  $\Delta E_N$  sont respectivement les variations des contraintes et des déformations.

On peut donc écrire que :

$$\Delta\Sigma \cdot \Delta E = K_t^2 \frac{\Delta\Sigma_N^2}{Y_G}$$

D'autre part, la courbe d'écroissage cyclique, qui est issue d'essais sur éprouvettes comme le décrit la fig. 1.11, s'écrit sous la forme :

$$\frac{\Delta E}{2} = \frac{\Delta E^e}{2} + \frac{\Delta E^p}{2} \Leftrightarrow \frac{\Delta E}{2} = \frac{\Delta\Sigma}{2Y_G} + \left( \frac{\Delta\Sigma}{2K'} \right)^{1/n'}$$

où

$\frac{1}{2} \Delta\Sigma = \frac{1}{2} \max(\Delta\Sigma_i)$  : amplitude de la contrainte

$\frac{1}{2} \Delta E = \frac{1}{2} \max(\Delta E_i)$  : amplitude de la déformation totale

$\frac{1}{2} \Delta E^e, \frac{1}{2} \Delta E^p$  : respectivement parties élastique et plastique de l'amplitude de déformation totale

$Y_G$  : module d'Young

$n'$  : coefficient d'écroissage cyclique

$K'$  : coefficient de résistance à la déformation cyclique

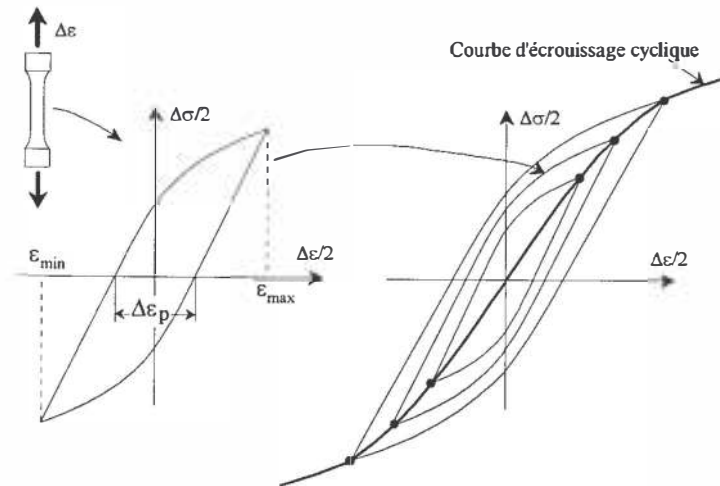


fig. 1.11 - Construction de la courbe d'écroissage cyclique

La combinaison des deux équations précédentes donne l'état de contrainte locale  $(\Delta\Sigma; \Delta E)$ . Enfin, la connaissance de l'équation de Manson-Coffin (ci-dessous) et de  $\Delta E$  permet de trouver le nombre de cycles à l'amorçage  $N_a$  (fig. 1.12) :

$$\frac{\Delta E}{2} = \frac{\Delta E^e}{2} + \frac{\Delta E^p}{2} = \frac{\sigma'_f}{Y_G} (2N_a)^b + \varepsilon' (2N_a)^c$$

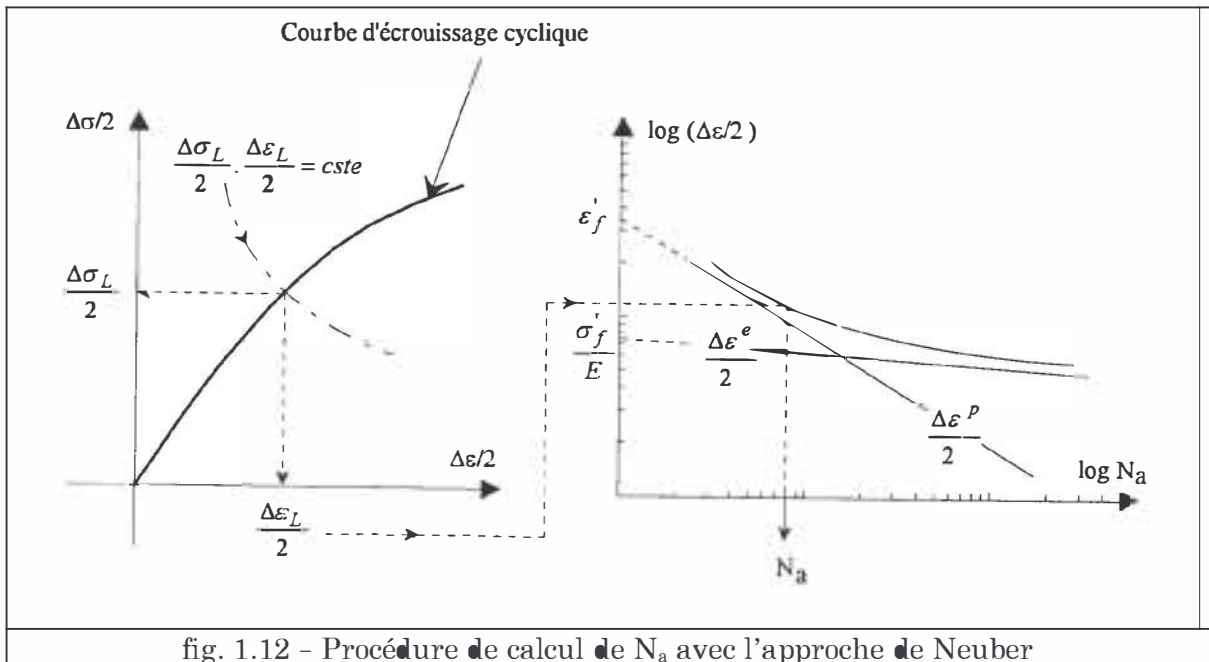
où

$\sigma'_f$  : coefficient de résistance à la fatigue

$\varepsilon'_f$  : coefficient de ductilité en fatigue

$N_a$  : nombre de cycles à l'amorçage

$Y_G, b, c$  : respectivement module d'Young, exposant de Basquin et exposant de ductilité en fatigue



Ainsi, connaissant les caractéristiques du matériau (coefficient d'écroissage cyclique et courbe de Manson-Coffin),  $K_t$  et le chargement nominal, on peut prévoir le nombre de cycles à l'amorçage. Dans le cas des géométries complexes, c'est-à-dire quand l'utilisation de  $K_t$  et d'un chargement nominal n'a aucun sens, on a recourt à la méthode des éléments finis.

Les travaux de Baus, Lieurade et al. et ceux de Iida pour les nœuds tubulaires adoptent la méthodologie de l'approche locale en élastoplasticité simplifiée.

Les critères d'amorçage des approches locales se fondent sur les données obtenues à partir d'essais uniaxiaux sur éprouvettes lisses correspondant à un matériau donné. Or, la zone critique où se produit l'amorçage des fissures dans les structures soudées est située dans la zone affectée thermiquement par le soudage où les caractéristiques du matériau sont difficiles d'accès et où, de plus, l'état de contrainte réel est multiaxial.

### 1.3.2.4 Approches structurales

Les approches structurales supposent que l'amorçage d'une fissure dans une structure soudée est essentiellement contrôlé par un état de contrainte engendré par les effets de structure. Deux types sont possibles :

- ❖ celles qui calculent les contraintes et/ou déformations à partir d'un calcul de structure où la géométrie du cordon de soudure n'est pas prise en compte (calcul de type Résistance des Matériaux ou par éléments finis). Ce type d'approche est utilisé pour le dimensionnement des grandes structures métalliques où deux méthodes doivent être distinguées :

- celle qui est utilisée pour le dimensionnement des ponts en génie civil : la structure est assimilée à un treillis de poutres et la contrainte de dimensionnement  $S$  est calculée à partir de la contrainte nominale  $\sigma_N$ . La courbe de Wöhler associée à un type de jonction soudée (appelé aussi détail constructif ou détail structural) et un chargement est ensuite utilisée. Cette méthode n'est pas appropriée pour les structures complexes car la contrainte nominale est indéfinissable. De plus, il faut une courbe de Wöhler par type de jonction soudée.
  - celle qui est utilisée pour le dimensionnement des structures marines en acier (structures offshore) et qui constitue un pas en avant par rapport à la précédente en caractérisant la jonction soudée, appelée nœud tubulaire, par une contrainte de dimensionnement plus ou moins bien définie. Elle est à l'origine du concept de la contrainte au "point chaud" qui permet de définir une courbe S-N unique pour tous les types de nœuds tubulaires soumis aux différents chargements de service.
- ❖ celles qui déterminent les contraintes et /ou déformations au point d'amorçage de fissure à l'aide d'un calcul numérique dans lequel on modélise le cordon de soudure ; les travaux de J.J. Janosch (1993), C.M. Sonsino (1995), J.L. Fayard (1996) en font partie.

Deux grandes catégories d'approches pour la prévision de l'amorçage des fissures de fatigue dans les structures soudées ont été présentées.

Les approches locales exhibent d'emblée un certain nombre de difficultés dans l'optique du dimensionnement des structures. Elles nécessitent la connaissance des courbes d'érouissage cyclique et de Manson-Coffin du matériau à l'endroit où se produit la fissuration. En outre, certaines méthodes utilisent un coefficient de concentration de contrainte  $K_t$  qui dépend de la géométrie de la structure et du chargement appliqué et qui doit être réévalué dès que la situation change.

Les méthodes basées sur une approche structurale utilisent des grandeurs mécaniques facilement accessibles par l'ingénieur, c'est-à-dire les contraintes et les déformations dans la structure. Ces approches ne cherchent pas à analyser la propagation des fissures de fatigue. Elles supposent qu'elles peuvent décrire le phénomène de fissuration dans les structures soudées à l'aide des contraintes et/ou des déformations macroscopiques obtenues par un calcul de structure au point d'amorçage.

Nous récupérerons les théories et savoirs-faire issus de ces types d'approche pour mettre en place une nouvelle méthodologie pour la conception fiable des structures.

## 1.4 Les critères de fatigue multiaxiaux périodiques

Depuis plusieurs dizaines d'années, des investigations sur le comportement en fatigue des matériaux sont effectuées. Au départ, il avait été effectué des sollicitations uniaxiales d'amplitude constante qui ont donné lieu aux premières courbes S-N ; puis les études se sont orientées soit vers l'aspect amplitude variable des sollicitations uniaxiales, soit vers le comportement en fatigue sous sollicitations multiaxiales. A cette

occasion sont apparus les essais multiaxiaux ainsi que les premiers critères de fatigue, établis alors pour explorer l'endurance illimitée des matériaux soumis à différents types de chargement.

### 1.4.1 Le formalisme général des critères

Le rôle d'un critère de fatigue multiaxial est de situer tout cycle multiaxial de contraintes par rapport à la limite d'endurance du matériau. La notion généralement retenue de limite d'endurance concerne le niveau de contrainte qui conduit à l'amorçage d'une fissure dite "longue", observable à l'échelle macroscopique, après un nombre donné de cycles généralement grand (souvent  $10^7$  cycles) et appelé seuil de l'endurance illimitée.

Un critère se présente généralement sous la forme d'une fonction de fatigue  $\mathcal{F}$  de certaines composantes du cycle des contraintes dont il évalue la sévérité, des limites d'endurance du matériau (comme par exemple  $\sigma_{-1}$ ,  $\sigma_0$ ,  $\tau_{-1}$  en traction alternée symétrique, en traction répétée et en torsion alternée symétrique respectivement), voire de certaines de ses caractéristiques statiques (résistance maximale en traction  $\sigma_u$ ). Lorsque le cycle, défini par son tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\Sigma}}(t)$  au cours d'une période, atteint la limite d'endurance du matériau, le critère s'écrit :

$$\mathcal{F} = (\underline{\underline{\Sigma}}(t), \sigma_{-1}, \sigma_0, \tau_{-1}, \dots) = 1$$

L'interprétation de la valeur effective de la fonction de fatigue  $\mathcal{F}$  permet de statuer sur le fait que le cycle multiaxial considéré excède au sens du critère la limite d'endurance du matériau ( $\mathcal{F} \geq 1$ ) ou reste en deçà de celle-ci ( $\mathcal{F} < 1$ ) dans le cas contraire.

Les critères de fatigue sont généralement répertoriés en trois grandes catégories selon leurs approches : modèles empiriques, modèles basés sur une approche de plans critiques, modèles basés sur une approche globale. Il faut remarquer toutefois que cette classification ne peut être rigoureuse, certains critères pouvant relever de plusieurs catégories selon les différentes variables intervenant dans leur formalisme.

### 1.4.2 Les modèles empiriques

Premiers critères multiaxiaux proposés, ces modèles sont construits à partir des composantes alternées et moyennes du tenseur des contraintes et sont destinées à rendre compte de sollicitations particulières de flexion-torsion ou de traction-torsion.

Les auteurs des principales modélisations empiriques sont :

- Hohenemser et Prager
- Gough et Pollard
- Nisihara-Kawamoto
- Lee

La particularité de leur formalisme ne leur permet pas en général d'être étendus à des sollicitations de nature différente de celle pour lesquelles ils ont été élaborés.

### 1.4.3 Les critères d'approche plan critique

Ces critères, plus récents, sont basés sur le principe suivant : le comportement en fatigue du matériau en un point de la structure est imposé par le plan matériel le plus sollicité passant par ce point. Différentes composantes des contraintes normales et tangentielles agissant sur un plan sont en général utilisées pour traduire le caractère plus ou moins sévère du cycle des contraintes sur ce plan.

Ce concept a été mis sur ce pied pour traduire certaines observations métallurgiques montrant que des bandes de glissement persistantes apparaissent à la suite de sollicitations appliquées de façon cyclique, marquant le site privilégié de l'amorçage des fissures.

La formulation des critères de fatigue d'approche plan critique est établie en général en 3 étapes :

- La définition d'un indicateur d'endommagement  $\mathcal{F}_h$ , spécifique au critère, et relatif au plan matériel de vecteur normal unitaire  $h$
- La définition du plan critique, selon les auteurs, comme étant celui où  $\mathcal{E}_h$  est maximum ou en fonction d'une autre considération.
- La détermination de la fonction de fatigue  $\mathcal{F}$  du critère, égale à l'indicateur d'endommagement  $\mathcal{F}_h$  du critère sur le plan critique. Très souvent, elle est obtenue après examen systématique d'un grand nombre de plans physiques d'orientations différentes.

Les principaux auteurs de critères de fatigue d'approche plan critique sont Stulen et Cummings, Findley, Yokobori, Mc Diarmid, Dang Van (1973), Mataka, Munday et Mitchell, Galtier (1993), Deperrois (1991), Robert et Papadopoulos (1987).

#### 1.4.3.1 Le critère de Dang Van

Lors d'un chargement cyclique, une réponse adaptée à l'échelle du grain est une condition nécessaire pour que ne s'amorce aucune fissure au bout d'un nombre infini de cycles. L'idée de base est donc d'écrire que la contrainte microscopique dans un grain au cours du cycle limite doit satisfaire le critère de plasticité. La démarche de Dang Van va donc se résumer de la manière suivante :

- A partir du cycle de chargement extérieur, on détermine le cycle de contraintes macroscopiques  $\underline{\underline{\Sigma}}^{el}$  qui par définition est élastique en fatigue polycyclique. Puis on en déduit le cycle adapté des contraintes microscopiques que l'on note  $\underline{\underline{\sigma}}^f$ .
- Ce cycle adapté des contraintes microscopiques  $\underline{\underline{\sigma}}^f$  doit satisfaire à tout instant le critère de plasticité du grain. Grâce aux relations de passage micro-macro effectuées avec les hypothèses de macro-homogénéité de Hill et de Mandel (I. Papadopoulos, 1987) on réécrit le critère de plasticité microscopique en ne faisant intervenir que les grandeurs macroscopiques.



**Formulation**

Dang-Van postula en 1973 un critère de fatigue de la forme :

$$\forall \bar{n}, \forall t, \quad \tau^\ell(\bar{n}, t) + \alpha p^\ell(t) \leq b \quad \text{avec } \alpha > 0$$

où  $\tau^\ell(\bar{n}, t)$  et  $p^\ell(t)$  sont respectivement la cission instantanée et la pression hydrostatique instantanée associées à la contrainte microscopique adaptée  $\underline{\underline{\sigma}}^\ell$ .

Quand on se limite strictement à l'application du critère de Dang-Van, le problème est d'évaluer  $\tau^\ell(\bar{n}, t)$  et  $p^\ell(t)$  à partir de la contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}$  obtenue par un calcul de structure.

**Expression de  $p^\ell(t)$** 

Dang-Van a montré (sous certaines hypothèses) que la pression hydrostatique microscopique  $p(t)$  est égale à la pression hydrostatique macroscopique  $P(t)$ :

$$p(t) = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}(t)) = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\Sigma}}(t))$$

A l'état stabilisé, cette relation est encore vérifiée :  $p^\ell(t) = P^\ell(t)$

**Expression de  $\tau^\ell(\bar{n}, t)$  (1973)**

Le calcul de  $\tau^\ell(\bar{n}, t)$  est moins évident. C'est là que se trouve la différence entre les deux versions du critère de Dang Van. Dans le critère original de 1973, il détermine  $\tau^\ell(\bar{n}, t)$  par une méthode que nous ne rappellerons pas ici, et dont l'implémentation numérique s'est avérée fastidieuse. Dans la version du critère de Dang-Van de 1987 que nous verrons plus en détail, le calcul de  $\tau^\ell(\bar{n}, t)$  se fait d'une façon qui se prête très bien aux méthodes numériques.

**Expression de  $\tau^\ell(\bar{n}, t)$  (1987)**

Plaçons-nous tout de suite dans le cas d'un chargement quelconque. Les directions principales  $\underline{\underline{\Sigma}}(t)$  n'étant plus fixes, les systèmes de glissement ne sont plus évidents. Considérons un plan critique  $P_n$  de normale  $\bar{n}$ . Le critère de plasticité du grain est choisi de la forme :

$$\|\tau(\bar{n})\| - \tau_y \leq 0$$

$\tau(\bar{n})$  représente la cission microscopique s'exerçant dans le plan  $P_n$  et  $\|\tau(\bar{n})\|$  désigne sa norme, et  $\tau_y$  la cission microscopique critique (limite d'élasticité en cisaillement du grain).



Dans ce plan, le critère de plasticité (sur le trajet micro) est désigné par un cercle de centre  $O$  et de rayon  $\tau_y$ . Par les transformations micro-macro, on réécrit le critère de plasticité sur le trajet macro  $\Psi$ .

Dang-Van suppose alors qu'à l'état stabilisé, le critère de plasticité est représenté dans le plan  $P_n$  par un cercle centré à l'origine  $O$  et de rayon  $\tau_y^*$  égal au rayon du plus petit cercle de centre  $M$  circonscrit au trajet macro  $\Psi$ . De cette manière, la quantité  $\tau_y$  est minimisée et le champ de contraintes résiduelles microscopiques à l'état stabilisé  $r^\ell$  est trouvé.

L'expression de  $\tau^\ell(\bar{n}, t)$  à l'état adapté a été établie en supposant connu le plan critique  $P_n$  de normale  $\bar{n}$ . En pratique, il est nécessaire de balayer l'ensemble des normales afin de déterminer la plus critique. Ceci impose au critère une double maximisation par rapport à  $\bar{n}$  et à  $t$  :

$$\text{Max}_{\bar{n}} \left[ \text{Max}_t \left[ \tau^\ell(\bar{n}, t) + a p^\ell(t) \right] \right] \leq b \quad \text{avec } a > 0$$

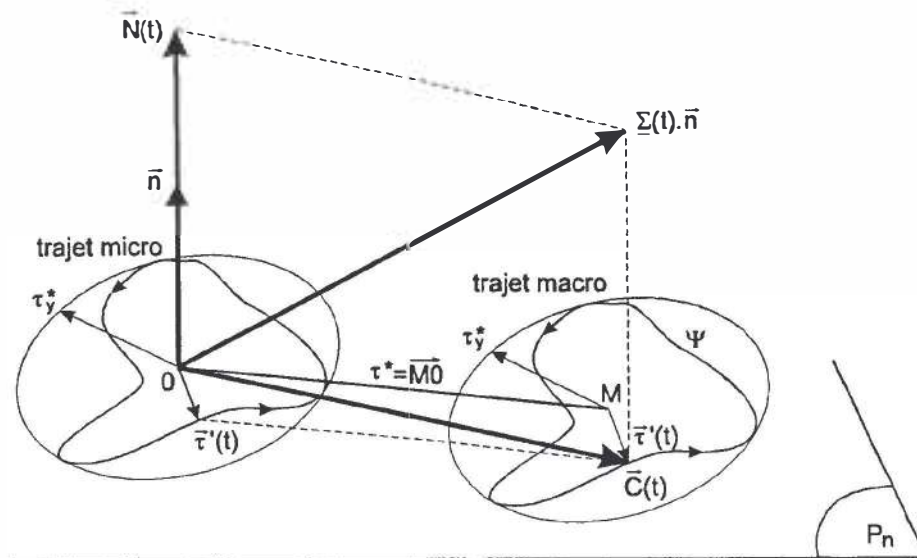


fig. 1.13 - Trajet de chargement sur une facette de normale  $\bar{n}$

Dang-Van s'est affranchi de la recherche du plan critique en calculant la cission maximale à un instant donné par :

$$\text{Max}_{\bar{n}} \left[ \tau^\ell(\bar{n}, t) \right] = \frac{\sigma_1^\ell(t) - \sigma_3^\ell(t)}{2} = \tau^\ell(t)$$

où  $\sigma_1^\ell(t)$  et  $\sigma_3^\ell(t)$  sont respectivement la plus grande et la plus petite des valeurs propres du déviateur des contraintes microscopiques dans le cycle adapté.

Comme la pression hydrostatique en un point, à un instant donné est indépendante de la normale  $\bar{n}$ , le critère se réécrit :

$$\text{Max}_t [\tau^\ell(t) + aP^\ell(t)] \leq b \quad \text{avec } a > 0$$

ou bien

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}^{\text{DV}} = \text{Max}_t \left[ \frac{\tau^\ell(t) + aP^\ell(t)}{b} \right] \\ \mathcal{F}^{\text{DV}} < 1 \rightarrow \text{Pas d'initiation} \\ \mathcal{F}^{\text{DV}} \geq 1 \rightarrow \text{Initiation} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ \tau^\ell(t) = \frac{\sigma_1^\ell(t) - \sigma_3^\ell(t)}{2} \\ p^\ell(t) = P^\ell(t) = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\Sigma}}^\ell(t)) \end{array} \right.$$

Lorsque les contraintes appliquées n'entraînent pas de déformations plastiques macroscopiques notables, le domaine d'endurance peut être limité approximativement par une droite dans le plan  $(p, \tau^\ell)$ . Si le trajet de chargement reste sous la droite du critère alors aucune fissure ne s'amorcera (fig. 1.14).

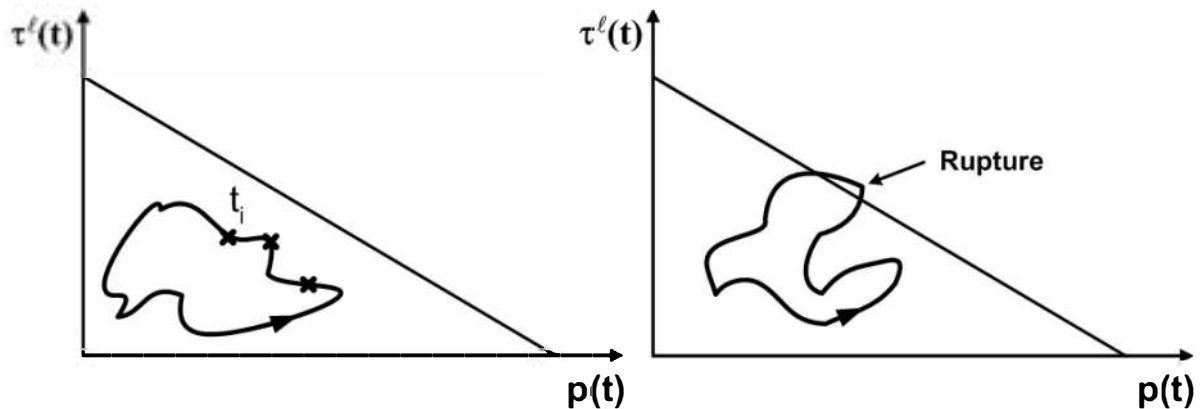


fig. 1.14 - Domaine de rupture dans le plan  $(p, \tau^\ell)$

La détermination des deux constantes  $a$  et  $b$  caractérisant la droite seuil se fait à l'aide de la connaissance d'au moins deux limites d'endurance issues, par exemple d'essais en torsion alternée et flexion alternée. Si  $t$  et  $f$  sont ces limites, alors :

$$a = \frac{t - \frac{f}{2}}{\frac{f}{3}} \quad \text{et} \quad b = t$$

La limitation d'utilisation du critère, issue de la condition  $a > 0$  (qui traduit l'effet bénéfique d'une compression), implique le respect de l'inégalité suivante :

$$\frac{t}{f} \geq \frac{1}{2} a$$

Ce critère a été appliqué avec succès dans de nombreux cas industriels. Les hypothèses sur lesquelles repose sa formulation (état stabilisé adapté) restreignent son

application au cas de l'endurance illimitée. Il est utilisable pour tout type de chargement.

Toutefois, ce critère ne permet pas de différencier le cas de trajets de chargements, pour lesquels la quantité  $\text{Max}_t [\tau^\ell(t) + aP^\ell(t)]$  est identique. Par exemple pour les deux trajets de chargement  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  représentés sur la fig. 1.15, l'expérience montre que le second trajet est beaucoup plus endommageant que le premier, alors que les valeurs de  $\tau_y^*$  sont les mêmes.

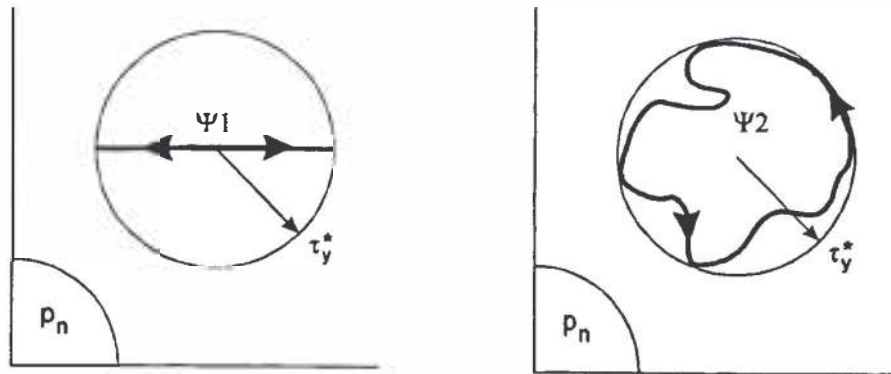


fig. 1.15 - Trajets de chargement radial et complexe

**Remarque :**

Le passage au domaine de l'endurance limitée nécessite la connaissance des coefficients  $a(N)$  et  $b(N)$  associés à un nombre fini de cycles, par exemple  $N = 10^5$ . A l'aide de ces derniers, on trace une nouvelle droite représentative de la durée de vie  $N$ . En répétant l'opération pour différentes valeurs de  $N$ , le plan  $(p, \tau^\ell)$  se recouvre d'une famille de droites seuil (fig. 1.16) d'équation :

$$\tau_i^\ell - a(N_i)P_i = b(N_i)$$

On peut procéder à une interpolation linéaire si le point représentatif du chargement se situe entre deux droites du réseau. Si le chargement est à amplitude variable, on peut cumuler le dommage par la règle de cumul linéaire de Miner par exemple.

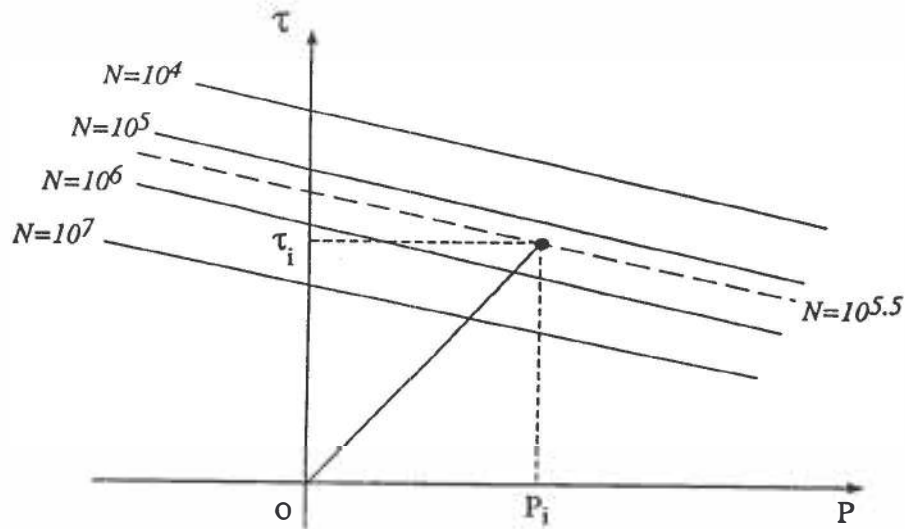


fig. 1.16 - Extension du critère de Dang-Van dans le cas de l'endurance limitée

### 1.4.4 Les critères d'approche globale

Cette catégorie de critère peut elle-même être scindée en trois groupes distincts :

- Les critères utilisant des invariants ( $I_1, J_2$ ) du tenseur des contraintes ou de son déviateur. Les principaux auteurs de critères d'approche globale de ce type sont Sines, Crossland, Marin, Deitman et Issler, Kakuno et Kawada.
- Les critères dont la fonction de fatigue est obtenue à l'aide d'une moyenne quadratique d'un indicateur d'endommagement  $\mathcal{F}_h$  sur l'ensemble des plans possibles passant par le point matériel où l'analyse en fatigue est réalisée. Le caractère global de l'approche provient de la contribution de tous les plans à la fonction de fatigue du critère. Grubisic et Simbürger, Fogue et Papadopoulos sont les principaux auteurs de ce type de formulation.
- Les critères basés sur une approche énergétique, où la fonction de fatigue combine les énergies de changement de volume et de changement de forme développées par les contraintes au cours du cycle. Froustey et Palin-Luc ont proposés des critères relevant de cette catégorie.

#### 1.4.4.1 Critère de Papadopoulos (1987)

Papadopoulos reprend les mêmes hypothèses que celles de Dang-Van mais considère que le grain subit un écrouissage cinématique et isotrope en utilisant le critère de plasticité de Von-Mises.

A l'aide des relations de passage micro/macro, il réécrit ce critère en faisant intervenir le déviateur des contraintes macroscopiques et le tenseur des contraintes résiduelles microscopiques. Puis comme Dang-Van, Papadopoulos associe l'endurance illimitée à l'état adapté du grain. La condition nécessaire d'adaptation s'énonce comme suit :

S'il existe un instant  $t_0$ , ainsi qu'un tenseur  $\underline{\hat{z}}$  fixe et une valeur  $\hat{k}$  de la limite d'élasticité en cisaillement du grain, indépendante du temps, tels que :

$$\forall t > 0, \frac{1}{2}(\underline{S}(t) - \underline{\hat{z}}) : (\underline{S}(t) - \underline{\hat{z}}) \leq \hat{k}^2$$

alors le cristal s'adapte pourvu que  $\underline{\hat{z}}$  soit suffisamment petit et que  $\hat{k}$  soit suffisamment proche de la valeur initiale  $k_0$  (correspondant à l'état vierge).

La détermination de  $\underline{\hat{z}}$  et  $\hat{k}$  peut se faire par une analyse élastoplastique incrémentale, mais Papadopoulos propose une méthode simple d'évaluation (fondée sur les travaux de Mandel, Halphen et Zarka sur la définition de la fluctuation d'un chargement) qui consiste à rechercher la plus petite hypersphère circonscrite au trajet du déviateur des contraintes macroscopiques  $\underline{S}(t)$  définie par son centre  $\underline{\hat{z}}$  et son rayon  $\sqrt{2}\hat{k}$ .

Papadopoulos énonce alors son critère :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}^P = \frac{\hat{k} + a \text{Max}_t(P(t))}{b} \\ \mathcal{F}^P < 1 \rightarrow \text{Pas d'initiation} \\ \mathcal{F}^P \geq 1 \rightarrow \text{Initiation} \end{array} \right.$$

$a$  et  $b$  sont des constantes qui dépendent du matériau ; elles sont calculées à partir des limites d'endurance en torsion et flexion alternées.

### Remarque

Dans le cas d'un trajet radial, on a  $\hat{k} = \frac{1}{2}\sqrt{J_2}$ , on retrouve le critère de Crossland.

## 1.5 Les lois d'endommagement de fatigue

La théorie de l'endommagement, a pour objet de décrire l'évolution des phénomènes entre l'état vierge (matériau dépourvu de fissures ou de cavités à l'échelle microscopique) et l'amorçage de la fissure macroscopique. Le stade final de l'endommagement correspond à la rupture de l'élément, c'est à dire à l'existence d'une fissure macroscopique de la taille de cet élément (de 0.1 à 1 mm pour les métaux). Au-delà, c'est le domaine de la fissuration.

Seul l'endommagement de fatigue, c'est à dire l'endommagement dû à la répétition des sollicitations, est abordé dans ce travail de thèse.

Les modifications des caractéristiques mécaniques d'un élément peuvent être interprétées en terme de variable d'endommagement. Les paramètres de dommage

sont nombreux et leur choix est souvent lié au domaine dans lequel s'effectue l'étude en fatigue. On peut citer :

- La mesure de la plasticité dans le cas de la fatigue à faible nombre de cycles (fatigue oligocyclique), qui correspond à un nombre de cycles à rupture ( $N_r$ ) inférieur à 50000. Les déformations plastiques interviennent alors de manière prépondérante.
- La variation de la limite d'endurance pour les grands nombres de cycles ( $N_r > 50000$ ). Les déformations sont alors quasi élastiques. Lorsque  $N_r > 10^7$ , on considère que la durée de vie est illimitée, c'est à dire que les sollicitations sont inférieures à la limite d'endurance.

Les paramètres de dommage les plus fréquemment rencontrés dans la bibliographie sont :

- La fraction de vie (utilisée par exemple dans la loi linéaire d'endommagement de Miner).
- La section effective (Rabotnov - Lemaitre - Chaboche).
- La déformation plastique cumulée (Papadopoulos, Morel).
- L'énergie de déformation (Ellyin).

Le cas le plus général de sollicitations pouvant être imposées à un système mécanique est un chargement multiaxial aléatoire. Les sollicitations uniaxiales aléatoires forment un cas particulier de ce cas général. Les lois d'endommagement peuvent être classées suivant deux catégories :

- La première regroupe les lois d'endommagement ne pouvant être utilisées que dans le cas de, sollicitations uniaxiales. Elles sont appelées lois d'endommagement uniaxiales.
- La seconde englobe l'ensemble des lois d'endommagement applicables dans le cas de sollicitations multiaxiales. Elles sont appelées lois d'endommagement multiaxiales.

### 1.5.1 Différents types de chargements

Nous distinguons deux grandes classes de chargements : les chargements radiaux (ou à un paramètre) et les chargements non radiaux (ou à plusieurs paramètres). Toutes deux induisent en général un état de contrainte multiaxial au niveau de la structure.

Ces chargements sont dans le cas général à amplitude variable ou aléatoire. Ils ne sont pas toujours composés de pics uniques entre deux passages par zéro. Bien souvent au contraire, plusieurs extrema apparaissent, ce qui rend difficile la détermination du nombre de cycles.

Des méthodes de comptage de cycles permettent de constituer un histogramme des pics du signal, puis un collectif de charge (nombre d'évènements dénombrés en abscisses dont l'amplitude est portée en ordonnée). Ces méthodes sont adaptées dans le cas des chargements radiaux où la définition d'un cycle " multiaxial " est plus facile.

Dans le cas des problèmes faisant intervenir des chargements aléatoires non radiaux, les experts font intervenir des variables de comptage. En effet, si pour chaque composante du tenseur des contraintes, on a un spectre d'amplitude de contrainte variable, on ne sait pas d'emblée à quelle composante des contraintes on va appliquer la méthode de comptage, car l'extraction de cycles pour un spectre (supposons celui de la composante  $\sigma_{11}$ ) peut ne pas correspondre à l'extraction de cycles pour un autre spectre (par exemple celui de la composante  $\sigma_{12}$ ), d'où l'intérêt de la notion de variable de comptage mais qui reste bien souvent insuffisante.

### 1.5.1.1 Chargements radiaux (ou à 1 paramètre)

Lorsque la structure est soumise à un chargement à un paramètre  $\lambda$ , sa réponse élastique tout au long du trajet peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{el} = \underline{\underline{\Sigma}}_0^{el} + \lambda(t) \Delta \underline{\underline{\Sigma}}^{el}$$

où  $\underline{\underline{\Sigma}}^{el}$  est le tenseur élastique des contraintes macroscopiques,

$\lambda(t)$  est une fonction quelconque du temps, et qui prend la valeur zéro à l'instant zéro,

$\Delta \underline{\underline{\Sigma}}^{el}$  est la direction du chargement,

$\underline{\underline{\Sigma}}_0^{el}$  est l'état de contrainte macroscopique initiale de la structure.

Plusieurs cas peuvent se présenter :

- Si  $\lambda(t)$  est une fonction monotone alors **le chargement est radial monotone**
- Si  $\lambda(t)$  est une fonction périodique de type sinusoïdal alors **le chargement est radial cyclique**
- Si  $\lambda(t)$  est une fonction aléatoire alors **le chargement est radial aléatoire**

$\lambda(t)$  dépend du temps et prend la valeur zéro à l'instant zéro.

Lors d'un chargement cyclique radial, même si l'état de contraintes est multiaxial, le trajet de chargement dans l'espace des contraintes est une droite : toutes les composantes sont proportionnelles (en phase ou en opposition de phase). Tous les cycles extraits sont les mêmes pour toutes les composantes.

Lorsque le chargement est radial aléatoire, il est généralement représenté de façon déterministe ou probabiliste.

#### **Représentation déterministe**

- **Cyclique par Bloc** : blocs de chargements à amplitude constante. Chaque bloc est défini par la valeur maximale et moyenne du cycle, et du nombre de cycles le composant. Ce type de chargement est aussi appelé dans la nomenclature anglo-saxonne PVN (Pic-Valley-Number)



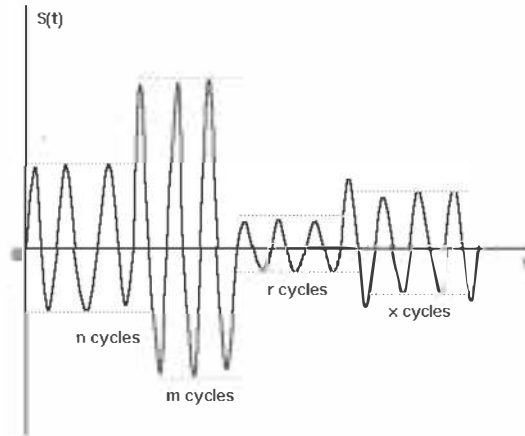


fig. 1.17- Chargement Cyclique par Bloc (CB)

• **courbe cumulative** : le collectif de charges est transformé en un cumulatif (ou collectif cumulé ou spectre), donnant le nombre d'évènements (en abscisses) inférieurs à une valeur de contrainte donnée (en ordonnée), courbe donnant le nombre de pics inférieurs à un seuil donné en fonction de la valeur de ce seuil. Le cumulatif est donc une représentation de la distribution statistique des amplitudes caractéristiques du signal en fonction du temps.

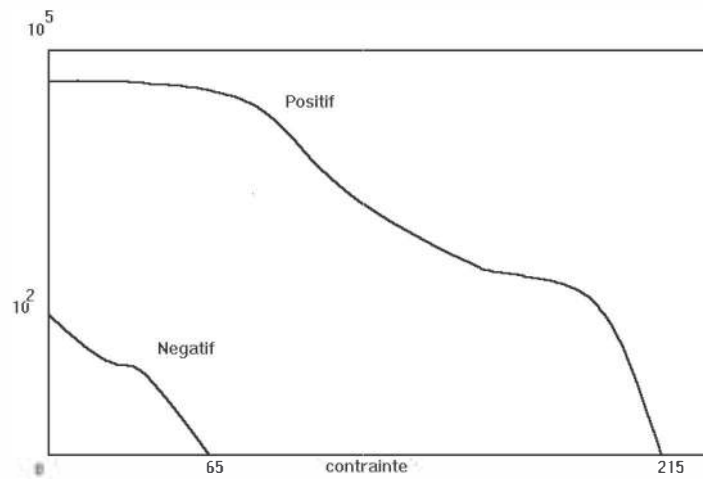


fig. 1.18 - Courbe cumulative

• **séquence d'amplitude variable** : seuls les pics du chargement brut sont conservés. Une méthode de comptage est nécessaire pour extraire les cycles susceptibles de créer un dommage.



fig. 1.19 - Chargement séquentiel



### **Représentation probabiliste**

Afin de représenter le chargement de façon probabiliste ou statistique, nous avons besoin de faire quelques hypothèses. L'excitation ou le signal en fonction du temps doit être stationnaire, c'est à dire que ses caractéristiques statistiques ne varient pas dans le temps. Ainsi, si le signal est représenté par la variable  $x(t)$ , alors quelque soit la statistique  $f(x)$  de  $x(t)$  considérée, elle doit être indépendante du temps :

$$f(x(t)) = f(x(t + \tau)) \quad \forall \tau$$

Nous avons également besoin que l'excitation soit ergodique. Ceci veut dire que si nous prenons plusieurs échantillons du signal, la moyenne dans le temps sur chaque échantillon est la même. Ces restrictions permettent d'avoir une excitation statistiquement constante.

La théorie des processus stochastiques est un outil mathématique, qui convient pour l'étude des chargements aléatoires. Elle permet d'obtenir la réponse de la structure sous forme de PSD, qui est une mesure de l'intensité du chargement dans le domaine fréquentielle et dépend de l'amplitude. La courbe de PSD en fonction de la fréquence ainsi obtenue, est ensuite utilisée pour simuler un échantillon représentatif de l'histoire du chargement. Deux sortes de signaux sont essentiellement générés : à bande large ou à bande étroite. Ensuite, on pourra appliquer la méthode de rainflow pour l'extraction des cycles.

Pour une telle procédure, une hypothèse simplificatrice est de simuler une histoire de chargement Gaussien. Dans la plupart des situations en dynamique, le mode de chargement et la réponse de la structure est supposé normal, c'est à dire, Gaussien.

### **Simulation d'un signal Gaussien**

Une technique pour simuler un signal Gaussien dépendant du temps est basée sur l'équation suivante (De Coulon, 1996) :

$$X(t) = \sum_{i=1}^h (2\Delta\omega W_x(\omega_i))^{\frac{1}{2}} \sin(\omega_i t + \Phi_i)$$

où  $W_x(\omega_i)$  est l'ordonnée de la courbe PSD à la fréquence  $\omega_i$  et l'angle de déphasage  $\Phi_i$  est une variable aléatoire uniformément distribuée dans l'intervalle  $[0 ; 2\pi]$ .

### **Simulation d'un signal Non-Gaussien**

Cependant des experts ont montré que la réponse peut être fortement non-normale en fonction des paramètres structuraux, et ont quantifié la non-normalité du signal grâce au kurtosis ( $\kappa_x$ ) :

$$\kappa_x = \frac{E[X - \mu_x]^4}{\sigma_x^4}$$

où  $E[.]$  est l'espérance mathématique,  $\mu_x$  la moyenne du signal  $X(t)$ , et  $\sigma_x$  la variance de  $X(t)$ .

Les différentes valeurs que prend  $\kappa_x$  sont :

- $\kappa_x = 1$ , processus binomial symétrique ;
- $\kappa_x > 3$ , processus appelé leptokurtic, avec un poids de probabilité plus important au niveau de sa moyenne et aux queues, que le processus Gaussien ayant le même écart-type.
- $\kappa_x < 3$ , processus appelé platykurtic, avec moins de poids de probabilité au niveau de sa moyenne et aux queues, que le processus Gaussien ayant le même écart-type.

Un signal non-Gaussien peut être généré par une transformation non linéaire sur un signal Gaussien :

$$Z(t) = G(X(t))$$

où  $X(t)$  est la variable normale et  $Z(t)$  est la variable non-normale, toutes deux de valeur moyenne nulle, et  $G(.)$  est la transformation non-linéaire.

$G(.)$  est une fonction croissante monotone et impaire afin de préserver le même nombre de zero-upcrossing et "peak occurrence" que pour le signal normal. Ainsi  $X$  et  $Z$  ont la même courbe de PSD en fonction de la fréquence. Un exemple de transformation  $G$  est la suivante :

$$Z = G(X) = \frac{X + \beta(\text{sgn}(X))|X|^n}{X}$$

où  $\text{sgn}(X)$  vaut 1 si  $x > 0$ , 0 pour  $x = 0$ , et -1 pour  $x < 0$ .

Les paramètres  $\beta$  et  $n$  représentent le degré de non-normalité du signal. Si  $\beta$  et  $n$  sont positifs alors  $G$  est croissante monotone. Notons que  $\sigma_Z = \sigma_X$  et  $C$  est uniquement une constante pour normaliser,  $C$  est donné ci-dessous :

$$C = \sqrt{1 + \frac{2^{1/2} (n+1) n \Gamma(n/2) \sigma_X^{(n-1)}}{\sqrt{\pi}} \beta + \frac{2^n \Gamma(n + \frac{1}{2}) \sigma_X^{2(n-1)}}{\sqrt{\pi}} \beta^2}$$

le kurtosis du signal non-normal est donné par :

$$\kappa_z = E[Z^4] \sigma_z^4.$$

Une autre hypothèse simplificatrice réside dans le fait que la simulation d'un signal Gaussien dépendant du temps est faite avec un nombre fini de fréquence propre de la structure, alors que la courbe de PSD elle-même, est formée d'une infinité de fréquence propre de la structure. Donc, l'ingénieur doit faire une étude préliminaire, afin de connaître l'importance des fréquences propres élevées, qui contribuent à la fatigue de la structure.

Les méthodes qui ont été développées par les experts pour simuler un signal Gaussien dépendant du temps ou un signal non-gaussien dépendant du temps peuvent être parfois sans intérêt, puisqu'en fatigue, seuls les extrema du signal sont importants pour déterminer leur contribution à l'endommagement de la structure. Pour cela, les experts ont développé d'autres méthodes. La plus simple est la méthode

d'approximation de Rayleigh qui utilise l'écart-type  $\sigma_x$  du signal, le taux de "zero-crossing"  $\nu_0$ , un facteur d'irrégularité  $\alpha_2$ , qui est obtenu directement à partir de la PSD, et un paramètre de corrélation d'extrema successifs du chargement noté  $\rho_1$ .

### **Méthodes de simulation d'extrema d'un signal normal**

La méthode d'approximation de Rayleigh, est surtout utile pour des "normal narrowband process" (à bande étroite normale), qui sont caractérisés par :

$$\rho_1 \simeq -1 \text{ et } \alpha_2 = 1$$

Si le signal devient moins "narrowband"  $\alpha_2$  s'éloigne de 1, les extrema atteignent la distribution de S.O. Rice, et  $\rho_1$  croît de -1.

Pour un processus normal, la densité de probabilité des extrema d'un signal est la distribution de S.O. Rice (Kree-Soize, 1985)

Si le signal est très "narrowband" ( $\alpha_2 \simeq 1$ ), les variables  $Z_i$  ont pour densité de probabilité la distribution de Rayleigh (Kree-Soize, 1985)

Pour générer les extrema d'un chargement (soit Rayleigh, soit S.O. Rice), les experts ont développé la technique de simulation auto-régressive.

### **1.5.1.2 Chargements à plusieurs paramètres**

Lorsque la structure est soumise à un chargement à plusieurs paramètres  $\lambda_i$ , sa réponse élastique tout au long du trajet peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{el} = \underline{\underline{\Sigma}}_0^{el} + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \underline{\underline{\Delta\Sigma}}_i^{el}$$

où  $\underline{\underline{\Sigma}}^{el}$  est le tenseur des contraintes élastiques macroscopiques,

$\lambda_i(t)$  sont des fonctions dépendant du temps mais non liées entre elles, et qui prennent la valeur zéro à l'instant zéro,

$\underline{\underline{\Delta\Sigma}}_i^{el}$  sont des directions formant une base dans le plan contenant le trajet de chargement

$\underline{\underline{\Sigma}}_0^{el}$  est l'état initial de la structure.

Un trajet radial dans l'espace des paramètres de chargement  $\lambda_i$  (donc avec des  $\lambda_i$  liés entre eux) donne une réponse radiale dans l'espace des contraintes.

Pour cette classe de chargement, l'extraction d'un cycle "multiaxial" avec les méthodes traditionnelles est impossible. Les experts ont donc fait intervenir des variables de comptage. Cette variable de comptage appelée également septième composante doit représenter au mieux l'évolution de la séquence multiaxiale, et ainsi permettre une extraction judicieuse des cycles. Nous en citons deux ci-dessous :

1/ Une possibilité est de prendre la racine carrée de la contrainte de cisaillement intégrée tout autour des plans tangents à une sphère de rayon 1. Cette racine carrée est proportionnelle à la contrainte octaédrale qui est la variable de comptage :

$$\tau_{oct} = \frac{1}{S} \iint_S \|\tau_h\|^2 ds = \frac{1}{3} \sqrt{(\Sigma_1 - \Sigma_2)^2 + (\Sigma_3 - \Sigma_2)^2 + (\Sigma_3 - \Sigma_1)^2}$$

Mais, l'expression de cette contrainte octaédrale dérive d'un carrée, par conséquent dans le cas d'un cycle alterné en torsion,  $\sigma_{12}$  est respectivement positif et négatif, alors que la contrainte octaédrale est toujours positive.

2/ L'idée est de trouver une variable qui puisse tenir compte du changement de signe. Pour cela, considérons dans l'espace des contraintes, le point  $P(\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t))$  à l'instant  $t$  où  $\sigma_1(t)$ ,  $\sigma_2(t)$ , et  $\sigma_3(t)$  sont les contraintes principales. Soit  $P'$  la projection de  $P$  sur le plan déviatorique ( $\pi$ ). On obtient :

$$\|\overline{OP'}\| = \sqrt{3} \|\vec{\tau}_{oct}\|$$

afin d'obtenir une valeur algébrique, la variable de comptage sera  $V(t)$  tel que :

$$V(t) = \frac{\|\overline{OP'}\|}{\sqrt{3}} \vec{\Delta}(\Psi)$$

où  $\vec{\Delta}(\Psi)$  est un vecteur unitaire de la ligne  $\Psi$  (voir figure ci-dessous).

Il est essentiel de comprendre, qu'une bonne identification de cycles de contrainte exige une variable de comptage adéquate. Le point de départ est de calculer les contraintes principales. Certains algorithmes donnent les contraintes principales dans l'ordre croissant ou décroissant de leur valeur. Mais la contrainte principale qui a la plus grande valeur au début d'un cycle peut ne plus être la plus grande en fin de cycle. Par conséquent, on a besoin de réordonner les contraintes principales entre deux instants afin de conserver l'ordre. Sinon, le point  $P$  décrira un mauvais chemin dans l'espace des contraintes et dans l'espace des déviateurs des contraintes.

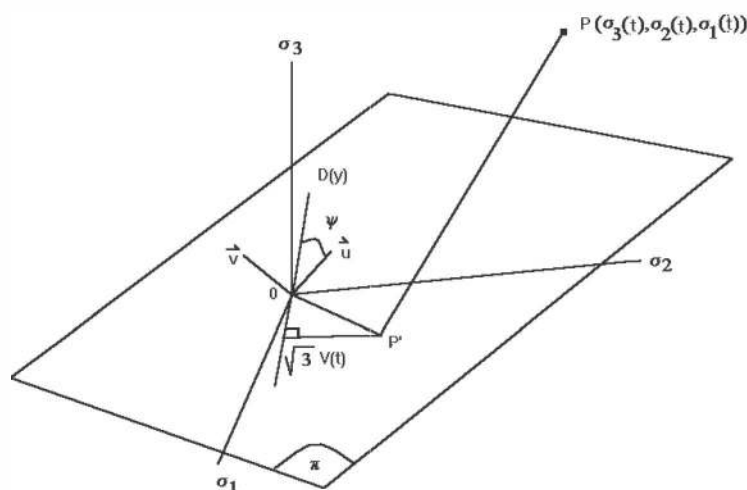


fig. 1.20 - Variable de comptage

## 1.5.2 Méthodes de comptages

Quelques méthodes de comptage ont été mises au point par les experts. Elles conduisent toutes à des résultats différents et donc, pour certaines, à des erreurs dans le calcul de la durée de vie. Parmi les plus connues, nous pouvons citer (C. Lalanne, 1999):

- 1/ Comptage des pics (*Peak count method*)
- 2/ Comptage des pics avec élimination des petites variations (*Level-restricted peak count method*)
- 3/ Comptages des extrema entre deux passages par la valeur moyenne (*Mean-crossing peak count method*)
- 4/ Comptage des domaines par paire (*Range-pair count method*)
- 5/ Méthode de franchissement de seuils (*Level crossing count method*)
- 6/ Méthode PVP (*Peak Valley Pair*)
- 7/ Méthode du Rainflow

Dans toutes ces méthodes, il est nécessaire de savoir éliminer les petites variations. Cette correction, destinée à l'origine à supprimer le bruit, a pour objectif la transformation des signaux de longue durée en des signaux plus faciles à utiliser.

Le choix d'une méthode dépend de la façon dont sont définis les cycles de contrainte. Chaque méthode procède, à partir d'une définition de la notion de cycle qui lui est propre, à l'évaluation du nombre de cycles et de leur étendue  $S$ , pour une durée  $t$  de la trajectoire étudiée.

Lorsqu'il y a pratiquement autant de passages par la valeur moyenne que d'extrema, les méthodes 3 à 5 sont les mieux adaptées au comptage. Dans le cas contraire (lorsqu'il y a beaucoup d'extrema locaux), il est préférable d'utiliser la méthode rainflow.

Il est à noter que les méthodes de comptage de cycles ne peuvent être appliquées qu'à des signaux radiaux.

Celle qui retient notre attention est la méthode de rainflow, qui est de loin, la plus utilisée dans l'industrie.

### ***La méthode Rainflow***

Cette méthode de la "goutte d'eau" doit son nom à la présentation de l'algorithme qui la décrit qu'en avait fait son inventeur japonais le professeur Endo, fondée sur l'analogie d'une goutte d'eau "roulant sur les toits multiples d'une pagode, chassée par le vent et se mêlant aux filets d'eau".

L'étendue est tout d'abord découpée en classes d'intervalle de largeur constante. Les extrema locaux composant le signal sont ensuite ramenés à la valeur représentative de la classe dont ils appartiennent (sa valeur moyenne en général). La procédure de Rainflow est ensuite appliquée sur le signal quantifié.

### **Procédure générale**

- Un chemin démarre à chaque extremum local de la fonction des contraintes enregistrées.

- Lorsqu'un chemin ayant démarré à un minimum local passe au niveau d'un maximum local, tel que le prochain minimum local soit plus petit que le minimum situé à l'origine du chemin, le chemin est stoppé au niveau du maximum local.
- Pour un chemin qui a démarré à un maximum local, ce chemin est stoppé par un maximum local plus grand que celui qui est situé à l'origine du chemin.
- Si un chemin coupe un chemin précédemment déterminé, il est stoppé.
- Un nouveau chemin n'est jamais démarré tant que le précédent n'est pas stoppé.

Un exemple de programme Fortran est proposé par (M. Olagnon, 1996) et a été intégré dans un programme que nous avons développé, FatSimPro.

La méthode Rainflow repose sur l'obtention de boucles d'hystérésis fermées dans le plan  $(E, \Sigma)$  (voir fig. 1.22). Cette procédure d'identification des cycles est indépendante du type de comportement de la structure. Pour le comportement élastique, l'aire de la boucle d'hystérésis a alors simplement la particularité d'être nulle (fig. 1.22).

La méthode de Rainflow conduit alors à la création d'un tableau à double entrée (classe de départ, classe d'arrivée) appelé matrice de transition. Chaque élément  $(i, j)$  de ce tableau donne le nombre de cycles dont les valeurs minimale et maximale correspondent respectivement aux classes  $i, j$ .

L'utilisation d'un algorithme de tirage aléatoire des cycles contenus dans la matrice de transition, obtenue par la méthode Rainflow, permet de construire un chargement aléatoire programmé.

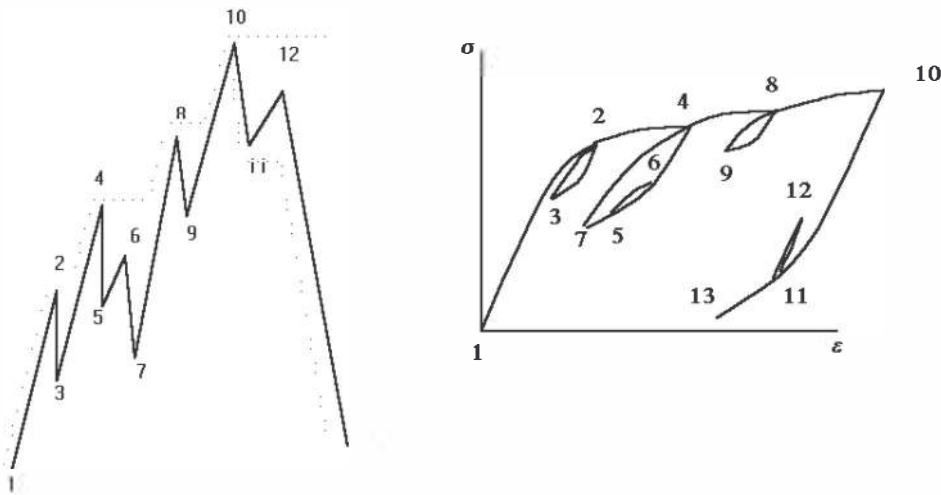


fig. 1.21 - Boucles d'hystérésis issues de la méthode rainflow



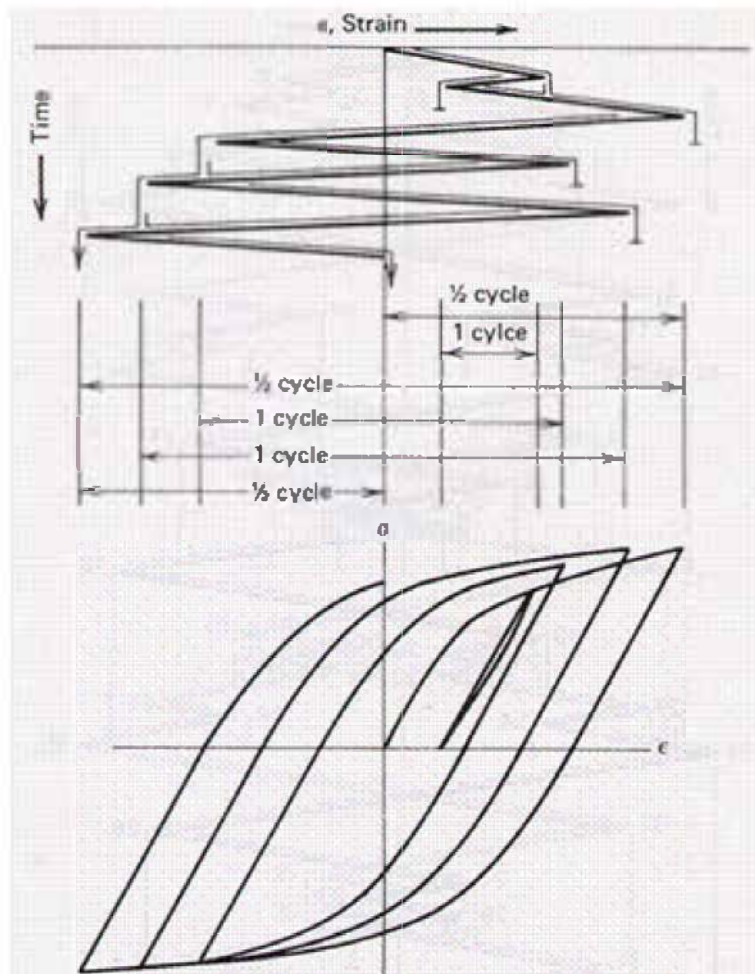


fig. 1.22 : Méthode Rainflow

*Il est important de souligner que la majorité des méthodes d'identification de cycles et de comptage sont basés sur des aspects purement mathématiques et sont indépendantes du comportement réel du matériau et de la structure. Même si elles semblent fournir des résultats satisfaisants dans beaucoup de problèmes industriels, elles restent infondées et dépourvues de signification physique pertinente.*

Nous proposons dans le chapitre 4 une toute autre méthode qui a l'avantage d'avoir une signification plus physique et qui est très facile à mettre en œuvre dans le cas radial comme dans le cas non radial.

## 1.5.3 Lois d'endommagement uniaxiales

### 1.5.3.1 Loi de Palmgreen-Miner

Cette loi est sans aucun doute la plus connue et la plus utilisée en bureau d'étude, du fait de sa simplicité. Elle suppose que le dommage se cumule de manière linéaire. Le paramètre de dommage retenu dans cette formulation est la fraction de vie définie par :

$$D_i = \frac{N_i}{N_{r_i}}$$

où  $N_i$  est le nombre de cycles effectués avec un chargement donné pour lequel le nombre de cycles à rupture serait  $N_{r_i}$ . La condition de rupture s'écrit :

$$\sum_i D_i = 1 \Leftrightarrow \sum_i \frac{N_i}{N_{r_i}} = 1$$

Cette loi rend bien compte du fait que les niveaux de contraintes inférieurs à la limite d'endurance sont supposés non endommageants.

Le dommage induit par un cycle de sollicitation est donc fonction de la durée de vie  $N_{r_i}$  du matériau pour le cycle en question. Une évaluation de cette quantité peut être obtenue à partir de la connaissance de la courbe de Wöhler relative aux conditions de chargement.

Cette courbe représente la contrainte dynamique  $\Sigma_n$  (contrainte maximale, contrainte minimale ou encore amplitude de contrainte), en fonction du nombre de cycles  $N$  à rupture (reporté sur une échelle logarithmique), pour une contrainte moyenne  $\Sigma_m$  fixée

### 1.5.3.2 Loi de Lemaitre-Chaboche

Cette loi repose sur les notions de fraction de vie  $\frac{N_i}{N_{r_i}}$  et de contrainte effective  $\tilde{\Sigma}$  introduite par Rabotnov.

Par définition

$$D_n = \frac{S_D}{S}$$

$S$  : aire d'une section d'un élément de volume endommagé de normale  $\vec{n}$ .

$S_D$  : aire totale des traces des défauts (microcavités, microfissures).

$D_n$  permet de mesurer mécaniquement l'endommagement local relatif à la direction  $\vec{n}$ .

La contrainte effective représente la contrainte rapportée à la section qui réside effectivement aux efforts. Dans le cas d'un endommagement isotrope (c'est-à-dire :  $D = D_n$  pour tout  $\vec{n}$ ), elle est définie par :

$$\tilde{\Sigma} = \frac{\Sigma}{1 - D}$$



L'expérience montre que les courbes d'évolution du dommage en fonction du paramètre d'endommagement  $\frac{N_i}{N_{r_i}}$ , peuvent dépendre du niveau de sollicitation imposée. Il n'y a donc pas de cumul linéaire du dommage. La fig. 1.23 permet d'illustrer ces propos. Elle est relative à un essai de fatigue à deux niveaux de contrainte.

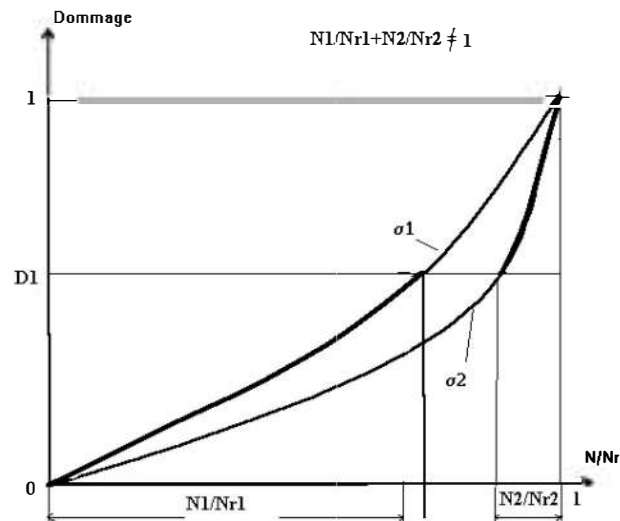


fig. 1.23 - Cumul non linéaire

On constate à la vue de cette courbe que le cumul du dommage n'est pas linéaire ; en effet on a :

$$\sum_i \frac{N_i}{N_{r_i}} = \frac{N_1}{N_{r_1}} + \frac{N_2}{N_{r_2}} \neq 1$$

Une façon simple de rendre compte de cette remarque dans la formulation de l'évolution du dommage consiste à rendre non séparables les variables de chargement et la variable de dommage. Les auteurs ont proposé l'expression suivante :

$$dD = \left[ 1 - (1 - D)^{\beta+1} \right]^\alpha \left[ \frac{\Sigma_a}{M_0 (1 - b \Sigma_m) (1 - D)} \right]^\beta dN$$

où

$D$  est le dommage représentant l'état actuel du matériau

$dD$  est l'accroissement de dommage dû à  $dN$

$\Sigma_a$  est l'amplitude de contrainte du cycle

$\Sigma_m$  est la contrainte moyenne du cycle

$\beta, M_0$  et  $b$  sont des constantes liées au matériau

$\alpha$  est un paramètre dépendant des caractéristiques de chargement ainsi que du matériau.

L'évolution du dommage est donc non seulement fonction de l'état de contrainte appliquée, mais aussi de l'état de dommage de la structure étudiée. **Ceci permet de rendre compte de l'historique de chargement.**

La loi d'endommagement de LEMAITRE-CHABOCHE permet de rendre compte du comportement d'un matériau d'une manière plus correcte que la loi de MINER mais est beaucoup moins pratique pour les bureaux d'études car elle est plus difficile à mettre en œuvre.

## 1.5.4 Lois d'endommagements multiaxiales

Deux approches sont possibles:

- La première consiste à coupler une loi d'endommagement uniaxiale et un critère de fatigue multiaxiale.
- La seconde, comme pour les lois d'endommagement uniaxiales, repose sur le choix d'un ou plusieurs paramètres de dommage dont il faut suivre l'évolution au cours du chargement.

### 1.5.4.1 Par couplage

De nombreux travaux dans ce domaine ont été menés par l'équipe de chercheurs de l'INSA de Lyon (J.L. Robert, 1992). Ces auteurs ont proposés une méthode implicite de calcul de la durée de vie dans le cas d'une structure soumise à un chargement multiaxial d'amplitude variable. Cette méthode est basée sur le couplage d'une loi d'endommagement uniaxiale (loi de MINER ou de LEMAITRE-CHABOCHE) et d'un critère de fatigue multiaxiale (critère de ROBERT-BAHUAUD ou de FOGUE-BAHUAUD).

Son principe est le suivant :

Pour chaque cycle successif de sollicitation, le critère de fatigue multiaxiale permet de calculer la contrainte et la durée de vie correspondante, grâce aux caractéristiques du matériau. La fonction d'endommagement  $I_E$  dépend en effet de limites d'endurance à  $N$  cycles du matériau ainsi que du chargement  $\Sigma$ . La durée de vie  $N_r$  est solution du critère :

$$I_E(N, \Sigma) = 1$$

$$\begin{cases} N < N_r \rightarrow I_E < 1 \\ N > N_r \rightarrow I_E > 1 \end{cases} \quad \text{car on suppose avoir } \frac{\partial I_E}{\partial N} > 0$$

Le dommage induit par le cycle de sollicitation considéré est ensuite déterminé à partir de la loi d'endommagement uniaxiale. Cette procédure est ensuite réitérée pour le cycle de chargement suivant, et cela jusqu'à ce qu'il y ait amorçage d'une fissure, c'est à dire jusqu'à ce que le dommage  $D$  atteigne la valeur 1.

### 1.5.4.2 Par choix d'une variable

Parmi les lois utilisant ce concept, on peut citer les approches adoptées par Papadopoulos ou encore Ellyin

### Loi de Papadopoulos

Alors que la loi d'endommagement de Lemaitre-Chaboche s'attache à décrire la phase de formation d'une fissure macroscopique par coalescence de microfissures, la loi de Papadopoulos (1987) s'intéresse quant à elle à la détermination du nombre de cycles de chargement conduisant à la nucléation d'une microfissure de fatigue, c'est à dire à la rupture du cristal.

L'auteur attribue en fait cette rupture à l'accumulation de la microdéformation plastique (le seuil de non nucléation d'une microfissure de fatigue correspondant à la limite d'endurance du matériau relative aux conditions de chargement)

Un cristal sollicité se rompt dès l'instant où sa limite d'élasticité en cisaillement  $k$ , qui est fonction de l'état d'endommagement donc de la valeur initiale  $k_0$  jusqu'à  $k(N_R)$  vaut zéro.

Le paramètre de dommage retenu est la microdéformation plastique cumulée  $\epsilon^p$ . La loi d'évolution de cette variable d'endommagement est donnée par :

$$\dot{D} = \sqrt{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p} = \dot{\epsilon}^p$$

on a :

$$D(N) = \epsilon^p(N)$$

où  $D(N)$  désigne la valeur de  $D$  après  $N$  cycles de sollicitation.

La valeur du dommage atteinte à la nucléation d'une fissure est donc égale à la déformation plastique cumulée à la rupture du cristal  $\epsilon_r^p$ . Cette variable d'endommagement peut être normalisée en choisissant :

$$D_n(N) = \frac{\epsilon^p(N)}{\epsilon_r^p}$$

Malheureusement,  $\epsilon_r^p$  dépend du chargement imposé et n'est donc pas une constante du matériau. Son utilisation peut donc conduire, dans le cas d'un chargement constitué par une succession de cycles de sollicitation différents, à des sauts de discontinuité pour  $D_n(N)$ . Toutefois, PAPADOPOULOS montre que dans le cas de chargements similaires, la quantité  $\epsilon_r^p$  reste inchangée. La variable d'endommagement normalisée peut alors être utilisée.

### Loi d'ELLYIN

Selon ELLYIN, la durée de vie d'une structure peut être décomposée en une phase d'initiation de fissure et une phase de propagation. Le paramètre de dommage retenu est la densité d'énergie de déformation par cycle notée  $\Delta W^p$ .

Durant la phase de propagation, l'auteur suppose que le matériau possède une limite d'endurance réduite à laquelle correspond une valeur  $\Delta W_L$  pour un nombre de cycles de chargement  $N_L$ .

Dans l'espace  $(\ln(\Delta W^T); \ln(N))$ , les courbes d'iso-endommagement (fig. 1.24) sont supposées linéaires et passent toutes par le point  $(\ln(\Delta W_L^T); \ln(N_L))$

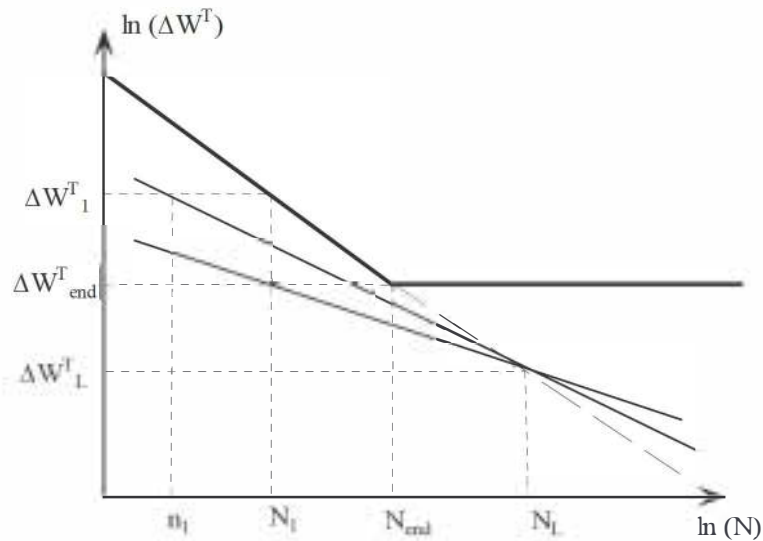


fig. 1.24 - Courbes de dommage selon Ellyin

Dans le cas d'un chargement constitué de  $N_1$  cycles et auquel est associé la valeur  $\Delta W_1^T$ , on a :

$$\frac{\Delta W_1^T}{\Delta W_L^T} = \left( \frac{N_1}{N_L} \right)^{\left[ \ln \left( \frac{\Delta W_1^T}{\Delta W_L^T} \right) / \ln \left( \frac{N_1}{N_L} \right) \right]}$$

On peut alors déduire le nombre de cycles de chargements correspondant au niveau  $\Delta W_2$ , qui conduit à la rupture de la structure :

$$N_2 = N_L \left( \frac{N_1}{N_L} \right)^{\left[ \ln \left( \frac{\Delta W_2^T}{\Delta W_L^T} \right) / \ln \left( \frac{\Delta W_1^T}{\Delta W_L^T} \right) \right]}$$

## 1.6 Logiciels industriels disponibles

Cette section est consacrée à la présentation des principaux logiciels qui nous ont permis de réaliser les simulations numériques, identifications et optimisations. Nous distinguons les codes d'éléments finis d'un côté et quelques programmes auxiliaires de l'autre.

## 1.6.1 Logiciels de simulation par éléments finis

### 1.6.1.1 CADSAP

**CADSAP**, version française d'ALGOR, permet de faire l'analyse complète des structures élastiques soumises à des chargements mécaniques, thermomécaniques en statiques et dynamiques, avec des modules de génération automatique de maillage 2D et 3D parmi les plus puissants du marché et une très grande communication avec les autres systèmes de CAO et de simulation.

De plus il possède de nombreux autres modules de calculs tels que les composites, l'électrostatique, les fluides et la piézo-électricité ainsi que de calculs de systèmes de tuyauteries.

### 1.6.1.2 NISA

**NISA**, développé par la compagnie américaine EMRC, résout tous les problèmes de simulations numériques: analyses cinématiques de mécaniques, analyses statiques, dynamiques linéaires et non linéaires, analyses de fluides compressibles et incompressibles, analyses de cartes électroniques, analyses électromagnétiques et analyses en fatigue. Il comprend en outre des modules de composites, des mailleurs automatiques, génie civil, structures métalliques et béton, machines tournantes.

### 1.6.1.3 CASTEM 2000

**CASTEM 2000**, est un code éléments finis développé par le Département de Mécanique et Technologie (DEMT) du Commissariat de l'Energie Atomique (CEA).

Le contrôle du programme s'effectue à l'aide de commandes en macro langage appelé GIBIANE dont l'interpréteur constitue l'interface entre l'utilisateur et le programme. Ce langage permet de manipuler des objets de différents types, tels que maillages, champs, tableaux, listes, etc. Un calcul complet consiste en une suite d'opérations sur ces objets de base, que l'on crée, au fur et à mesure que le calcul progresse.

Le GIBIANE a permis l'implantation de la méthode simplifiée des structures inélastiques des structures (procédure ZAC). L'écriture de plusieurs procédures dans ce langage a été nécessaire.

## 1.6.2 Logiciels de calcul à la fatigue

### 1.6.2.1 ENDURE

**Endure** est développé par la société EMRC comme logiciel de post-traitement destiné à évaluer la durée de vie en fatigue des pièces métalliques ou des structures métalliques. L'amorçage, la propagation de fissures ou la rupture peuvent être traités. Plusieurs approches pour prédire l'amorçage de fissure sont disponibles :

**La méthode de la contrainte locale (stress-life method)**

Cette méthode s'applique dans le domaine élastique, pour des matériaux fragiles ou de grands cycles de vie en fatigue (et où les déformations plastiques sont petites).

$$\Sigma_a = (\sigma'_f - \Sigma_m) N^b \quad (\text{avec correction de Morrow})$$

$$\Sigma_{max} \Sigma_a = (\sigma'_f)^2 N^{2b} \quad (\text{avec correction de Smith Topper Watson})$$

où  $\Sigma_a$  est l'amplitude de la contrainte,  $\Sigma_m$  est la contrainte moyenne  
 $\sigma'_f$  est le coefficient de contrainte de fatigue,  $b$  l'exposant de contrainte de fatigue,  
 $N$  est le nombre de cycles à initiation/rupture.

**Prévision dans le cas multiaxial**

L'approche adoptée dans ENDURE est celle du plan critique, qui suggère que l'amplitude maximale de déformation en cisaillement (dans le plan de l'amplitude maximale de déformation en cisaillement) et la contrainte maximale normale à ce plan, sont les paramètres qui gouvernent la durée de vie en fatigue.

$$\gamma_{max} \left( 1 + n \frac{\Sigma_{n,max}}{\sigma_y} \right) = (1 + \nu_e) \frac{\sigma'_f}{Y_G} N^b + \frac{n}{2} (1 + \nu_e) \frac{(\sigma'_f)^2}{Y_G} \sigma_y N^{2b} + (1 + \nu_p) \sigma'_f N^c + \frac{n}{2} (1 + \nu_p) \frac{\sigma'_f}{\sigma_y} \sigma_y N^{b+c}$$

où  $\gamma_{max}$  : amplitude maximale de déformation en cisaillement dans le plan de cisaillement maximal.

$\Sigma_{n,max}$  : la contrainte maximale normale au plan de cisaillement maximal.

$\nu_p$  : le coefficient de poisson plastique

$n$  : le coefficient de corrélation pour des données en chargement uniaxial et en torsion pure.

**Règle de cumul**

Endure utilise la règle de cumul linéaire de Miner.

**1.6.2.2 SOLSTICE**

Solstice est un logiciel de post-traitement destiné à évaluer la durée de vie en fatigue des structures. Il a été développé au Laboratoire de Mécanique des Solides à l'Ecole Polytechnique par H. Maitouram et K. Dang-Van. Les critères de fatigue multiaxiaux les plus utilisés dans l'industrie y sont intégrés (DANG-VAN, PAPADOPOULOS, CROSSLAND, SINES, DEPERROIS et VON MISES).

## *Points essentiels à retenir*

Dans ce chapitre, nous avons passé en revue les techniques les plus employées dans l'analyse déterministe à la fatigue des structures. Parmi les nombreux facteurs d'influence présents dans l'endommagement par fatigue, nous nous sommes particulièrement intéressés à l'influence de la nature du chargement, qui est à la source de nombreuses théories, investigations et controverses.

Deux grandes classes de chargements peuvent être différenciées : les chargements radiaux (ou à un paramètre) et les chargements non radiaux (ou à plusieurs paramètres) : toutes deux induisent en général un état de contraintes multiaxial au niveau de la structure.

Le cas de chargement le plus simple est celui des sollicitations radiales à amplitude constante qui a donné lieu aux premières courbes S-N reliant l'amplitude de la contrainte alternée au nombre de cycles à l'initiation ou à la rupture. Puis, les études se sont orientées soit vers l'aspect amplitude variable des sollicitations radiales, soit vers le comportement en fatigue sous sollicitations multiaxiales.

Lorsque le chargement est radial à amplitude variable, des techniques de comptage de cycles (le plus souvent Rainflow) sont utilisées pour extraire les cycles susceptibles de participer au dommage puis grâce à une règle de cumul établie à partir d'un facteur d'endommagement, il est possible ensuite de statuer sur la tenue en fatigue de la structure. Ces méthodes sont basées sur des aspects purement mathématiques et sont indépendantes du comportement réel du matériau et de la structure.

Lorsque le chargement est non-radial, à amplitude variable ou non, des critères de fatigue multiaxiaux sont généralement utilisés pour explorer le domaine l'endurance illimitée. Dans ce domaine, aucune phase d'extraction de cycles et de cumul de dommage n'est nécessaire. Un indicateur de fatigue indique si une fissure est susceptible de s'amorcer au bout d'un nombre infini de cycles.

Certains de ces critères peuvent être étendus au domaine de l'endurance limitée. Mais la tâche bute devant quelques verrous bloquants : les coefficients de fatigue deviennent dépendants du nombre de cycles, exigeant donc des essais expérimentaux supplémentaires pour caractériser complètement le critère, et, quand la sollicitation est à amplitude variable, les techniques de reconnaissance de cycles multiaxiaux restent très difficiles à établir.

Lorsque le chargement est aléatoire, il arrive aussi qu'il ne soit pas donné sous sa forme temporelle mais à partir de sa PSD ou de la distribution statistique de ses pics ou de ses extrema. Quand le chargement est supposé radial et gaussien, des méthodes fondées, le plus souvent, sur une règle de Miner probabilisée existent et semblent donner des résultats intéressants. Mais souvent ces cas de chargements ne sont pas représentatifs d'un chargement réel de service ; certains experts proposent alors de corriger ce manque, en intégrant un degré de non-normalité. Mais cette correction alourdit fortement le traitement et les réels apports ne sont pas toujours probants.

Ces approches traditionnelles présentent un maillon faible supplémentaire en raison de leur caractère LOCAL. Elles s'appuient sur les valeurs locales du champ de

contraintes (ou de déformations). Celui-ci étant obtenu par le biais de simulations numériques en élasticité ou en élastoplasticité où il est très difficile de contrôler les erreurs liées au maillage.

Afin de faire sauter ces verrous bloquants, nous proposons dans le chapitre 4 une nouvelle méthode pour caractériser un chargement complexe à amplitudes variables qui a l'avantage d'avoir une signification plus physique et qui est très facile à mettre en œuvre. Dans le chapitre 4, nous proposons aussi une méthode pour réduire les erreurs dues aux simulations numériques et leurs applications aux critères classiques locaux ainsi que pour prendre en compte que le dommage doit concerner un volume caractéristique et non un point.



# Chapitre 2

## Rappels sur l'analyse simplifiée des structures inélastiques

Nous avons vu que le champ de contraintes régnant dans la structure à l'état stabilisé est un facteur essentiel dans le comportement à la fatigue. Une analyse élastoplastique est nécessaire pour l'obtenir.

La détermination de la réponse élastoplastique d'une structure nécessite une résolution de type numérique. Ce qui implique souvent l'utilisation d'algorithmes coûteux en temps de calculs, et qui posent de plus des difficultés de convergence.

Dans cette partie, nous donnons une brève présentation de l'approche de l'analyse simplifiée des structures et des matériaux introduite à partir de 1976 et finalisée en 1990 par J.ZARKA et son équipe. Son intérêt réside dans sa simplicité de mise en œuvre ainsi que dans la réduction importante des temps de calcul par rapport aux méthodes "traditionnelles". Elle permet d'estimer le comportement inélastique d'une structure à partir de l'utilisation d'un outil de calcul élastique linéaire quasi-statique classique : l'évaluation de la solution est obtenue sans avoir recours à une méthode de calcul de type incrémentale, mais simplement à partir de quelques calculs élastiques et quelques données intuitives et naturelles.

### 2.1 Evolution globale de la structure

La structure est représentée par un domaine de volume  $V$  avec une surface  $\partial V$ . Elle est soumise aux conditions aux limites suivantes :

- sur une partie  $\partial_{U_j} V$  de  $\partial V$  : des déplacements  $\underline{U}_j^d(t)$
- sur une autre partie  $\partial_{F_i} V$  de  $\partial V$  des forces surfaciques  $\underline{F}_i^d(t)$
- dans le volume  $V$  : des forces massiques  $\underline{X}^d(t)$
- dans le volume  $V$  : des déformations initiales  $\underline{E}^I(t)$

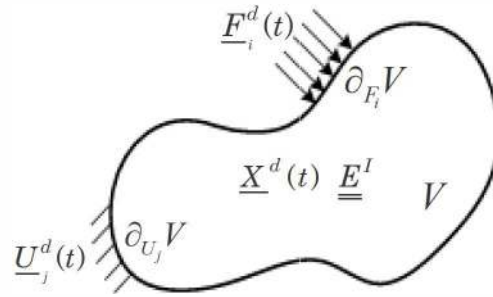


fig. 2.1 : Structure et conditions limites

La donnée de  $\underline{U}_j^d(\tau)$ ,  $\underline{F}_i^d(\tau)$ ,  $\underline{X}^d(\tau)$ ,  $\underline{E}^I(\tau)$  pour tout  $\tau \in [0 ; t]$  caractérise le trajet de chargement sur la structure.

### 2.1.1 Réponse purement élastique

La structure est supposée tout d'abord constituée d'un matériau élastique linéaire. Nous obtenons :

- les champs de déplacement élastique  $\underline{U}^{el}(t)$  sont Cinématiquement Admissible (C.A.) avec  $\underline{U}_j^d(t)$  sur  $\partial_{U_j} V$
- les déformations élastiques  $\underline{E}^{el}(t)$
- les contraintes élastiques  $\underline{\Sigma}^{el}(t)$  sont Statiquement Admissible (S.A.) avec  $\underline{X}^d(t)$  dans  $V$  et  $\underline{F}_i^d(t)$  dans  $\partial_{F_i} V$

On obtient la solution purement élastique  $\underline{\Sigma}^{el}(t)$ , en utilisant l'opérateur **ELAS** :

$$\mathbf{ELAS}\left(V, \partial_{F_i} V, \partial_{U_j} V, \left\{\underline{X}^d(t), \underline{F}_i^d(t), \underline{U}_j^d(t), \underline{E}^I(t)\right\}, \underline{\underline{M}}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{U}^{el}(t) \rightarrow \underline{E}^{el}(t) \rightarrow \underline{\Sigma}^{el}(t)$$

avec  $\underline{\Sigma}^{el}(t) = \underline{\underline{L}} : (\underline{E}^{el}(t) - \underline{E}^I(t))$

où  $\underline{\underline{M}}$  est la matrice de complaisance élastique ( $\underline{\underline{M}}^{-1} = \underline{\underline{L}}$ )

### 2.1.2 Réponse réelle

Dans la structure réelle, nous avons les champs de déplacements réels  $\underline{U}(t)$  et des déformations réelles  $\underline{E}(t)$  qui sont C.A. avec  $\underline{U}_j^d(t)$  sur  $\partial_{U_j} V$

$$\underline{\underline{E}}(t) = \frac{1}{2}(\nabla \underline{U} + {}^t\nabla \underline{U})$$

et le champ des contraintes réelles  $\underline{\underline{\Sigma}}(t)$  est Statiquement Admissible avec  $\underline{\underline{X}}^d(t)$  dans  $\underline{\underline{X}}^d(t)$  dans  $V$  et  $\underline{\underline{F}}_i^d(t)$  dans  $\partial_{F_i} V$  :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(t) = \underline{\underline{L}} : (\underline{\underline{E}}^e(t) - \underline{\underline{E}}^I(t) - \underline{\underline{E}}^p(t))$$

Ces champs peuvent être décomposés en une partie élastique et une partie inélastique :

$$\begin{aligned} \underline{U}(t) &= \underline{U}^{el}(t) + \underline{U}^{ine}(t) \\ \underline{\underline{E}}(t) &= \underline{\underline{E}}^{el}(t) + \underline{\underline{E}}^{ine}(t) \\ \underline{\underline{\Sigma}}(t) &= \underline{\underline{\Sigma}}^{el}(t) + \underline{\underline{R}}(t) \end{aligned}$$

où  $\underline{U}^{ine}(t)$ ,  $\underline{\underline{E}}^{ine}(t)$  et  $\underline{\underline{R}}(t)$  désignent respectivement les champs de déplacements inélastiques, de déformations inélastiques et de contraintes résiduelles.

• Les champs  $\underline{U}(t)$  et  $\underline{U}^{el}(t)$  étant C.A. avec  $\underline{U}_j^d(t)$  sur  $\partial_{U_j} V$ , le champ  $\underline{U}^{ine}(t)$  est donc quant à lui C.A. avec  $\underline{0}$  sur  $\partial_{U_j} V$ . Il va de même pour le champ  $\underline{\underline{E}}^{ine}(t)$  défini par :

$$\underline{\underline{E}}^{ine}(t) = \frac{1}{2}(\nabla \underline{U}^{ine} + {}^t\nabla \underline{U}^{ine})$$

comme on a :

$$\underline{\underline{E}}^e(t) = \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\Sigma}}(t)$$

$$\underline{\underline{E}}(t) = \underline{\underline{E}}^e(t) + \underline{\underline{E}}^I(t) + \underline{\underline{E}}^p(t)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E}}(t) = \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\Sigma}}^{el}(t) + \underline{\underline{E}}^I(t) + \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{R}}(t) + \underline{\underline{E}}^p(t)$$

et que :

$$\underline{\underline{E}}^{el}(t) = \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\Sigma}}^{el}(t) + \underline{\underline{E}}^I(t)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E}}^{ine}(t) = \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{R}}(t) + \underline{\underline{E}}^p(t)$$

Cette relation implique d'avoir à résoudre un problème linéaire qui peut s'exprimer sous la forme :

$$\underline{\underline{R}}(t) = \underline{Z}_0 \underline{\underline{E}}^p(t)$$

où  $Z_0$  représente un opérateur linéaire ayant la propriété d'être symétrique, positif et généralement singulier (la connaissance de  $\underline{E}^p(t)$  permet de déterminer  $\underline{R}(t)$  alors que l'inverse n'est pas vrai).

- Les champs  $\underline{\Sigma}(t)$  et  $\underline{\Sigma}^{el}(t)$  étant S.A.  $\underline{X}^d(t)$  dans  $V$  et  $\underline{F}_i^d(t)$  dans  $\partial_{F_i}V$ , le champ  $\underline{R}(t)$  est donc quant à lui C.A. avec  $\underline{0}$  dans  $V$  et  $\underline{0}$  dans  $\partial_{F_i}V$ .

La partie inélastique de la réponse de la structure ( $\underline{U}^{ine}(t)$ ,  $\underline{E}^{ine}(t)$ ,  $\underline{R}(t)$ ) est donc auto-équilibrée.

Par similitude avec la détermination de la réponse élastique de la structure, la réponse inélastique peut être obtenue en utilisant l'opérateur **ELAS** avec les arguments :

$$\mathbf{ELAS}\left(V, \partial_{F_i}V, \partial_{U_j}V, \{\underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, \underline{E}^p(t)\}, \underline{M}\right) \Rightarrow \underline{U}^{ine}(t) \rightarrow \underline{E}^{ine}(t) \rightarrow \underline{R}(t)$$

avec :

$$\underline{R}(t) = \underline{L} : \left( \underline{E}^{ine}(t) - \underline{E}^p(t) \right)$$

### 2.1.3 Relations de comportement

A une échelle locale microscopique, il existe des mécanismes inélastiques qui ne subissent aucune modification ou endommagement durant les déformations et qui sont liés entre eux par une matrice élastique (c'est une schématisation d'un agrégat). Ces mécanismes sont de type parfaitement plastique ( $\alpha$ ), de type parfaitement visqueux sans seuil ( $\beta$ ) et de type viscoplastique parfaite avec seuil ( $\gamma$ ).

Ici, seuls les mécanismes non-visqueux sont conservés. Le tenseur paramètre interne  $\underline{x}$  s'écrit simplement :

$$\underline{x} = \underline{\alpha}$$

où  $\underline{\alpha}$  désigne le tenseur de paramètres internes liés aux déformations inélastiques locales instantanées.

Le tenseur des contraintes locales  $\underline{\sigma}_\alpha$  au niveau de chaque mécanisme inélastique peuvent s'écrire sous la forme :

$$\underline{\sigma}_\alpha = \underline{A}_\alpha \underline{\Sigma} - \underline{y}_\alpha$$

où  $\underline{\Sigma}(t)$  est le tenseur contrainte globale,

$\underline{A}_\alpha$  le tenseur de localisation élastique et

et  $\underline{y}_\alpha$  le tenseur de paramètres internes transformés.

Les paramètres internes transformés (analogues à des contraintes résiduelles) sont liés aux paramètres internes par :

$$\underline{\underline{y}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{x}}$$

avec  $\underline{\underline{B}}$  un tenseur symétrique dont la matrice est non-négative:

Deux cas sont possibles :

- Matrice de  $\underline{\underline{B}}$  est strictement positive : on démontre que la relation entre  $\underline{\underline{y}}$  et  $\underline{\underline{x}}$  est biunivoque ce qui entraîne que la contrainte appliquée peut aller à l'infini et le comportement cyclique en contraintes ne peut conduire qu'à un état adapté ou accommodé.
- Matrice de  $\underline{\underline{B}}$  est singulière : les  $\underline{\underline{y}}$  appartiennent à un sous espace de compatibilité, la contrainte appliquée ne peut en général aller à l'infini et reste bornée (ruine) et le comportement cyclique en contraintes peut conduire à un état adapté, accommodé ou avec rochet.
- les équations d'évolution de chacun des mécanismes locaux inélastiques
- $\underline{\underline{\dot{\alpha}}} \in \partial \Psi_{e_0}(\underline{\underline{\sigma}})$  instantanées irréversibles avec seuil
- la vitesse de déformation inélastique globale s'exprime sous la forme :

$$\underline{\underline{\dot{E}}}^p = {}^t \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\dot{\alpha}}}$$

- la vitesse de déformation élastique globale est toujours donnée par

$$\underline{\underline{\dot{E}}}^e = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\dot{\Sigma}}}$$

Ainsi les caractéristiques de l'écroutissage qui est observé expérimentalement, sont les résultats du couplage entre les mécanismes inélastiques.

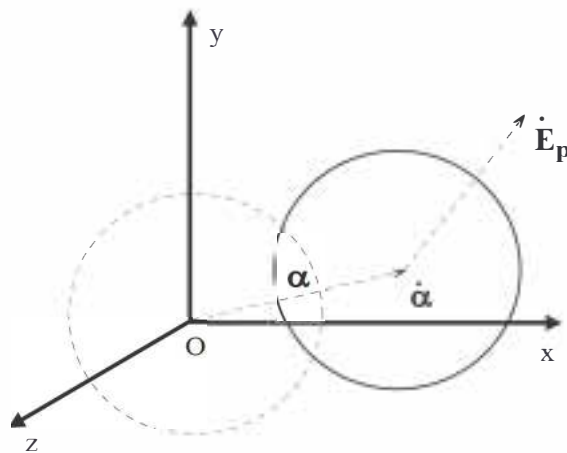


fig. 2.2 - Champs de vitesses

## 2.1.4 Cas particulier de l'écoulement cinématique

### 2.1.4.1 Formulation classique

Soit un matériau à écoulement cinématique associé au critère de plasticité de Von Mises :

$$f(\underline{\underline{S}}, \underline{\underline{y}}) = f(\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{y}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{y}}) : (\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{y}}) - \sigma_0^2$$

$\sigma_0$  est la limite élastique en cisaillement et  $\underline{\underline{S}}$  représente le tenseur déviateur des contraintes.

Les paramètres transformés internes  $\underline{\underline{y}}$  sont liés aux déformations plastiques actuelles par :

$$\underline{\underline{y}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{E}}^p \Leftrightarrow \underline{\underline{E}}^p = \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{y}}$$

où  $\underline{\underline{C}}$  est le tenseur d'écrouissage qui est constant, symétrique et dont la matrice est définie positive ( analogue de la "matrice"  $\underline{\underline{B}}$ ).

#### *Vitesses des déformations plastiques en fonction des vitesses des contraintes*

La loi d'écoulement normal associée s'exprime classiquement de la manière suivante :

$$\underline{\underline{\dot{E}}}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{S}}} \quad \text{avec } \lambda \geq 0 \text{ si } \left\{ f(\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{y}}) = 0 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{S}}} : \underline{\underline{\dot{S}}} \geq 0 \right\} \quad \text{avec } \lambda = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{S}}} : \underline{\underline{\dot{S}}}}$$

$$\underline{\underline{\dot{E}}}^p = 0 \quad \text{avec } \lambda = 0 \text{ si } \left\{ f(\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{y}}) < 0 \right\} \text{ ou } \left\{ f(\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{y}}) = 0 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{S}}} : \underline{\underline{\dot{S}}} < 0 \right\}$$

Cela se met sous la forme symbolique (notation de Moreau) :

$$\underline{\underline{\dot{E}}}^p \in \partial \Psi_{\mathcal{C}(\underline{\underline{y}})}(\underline{\underline{S}}(t))$$

qui représente le cône des normales extérieures au convexe  $\mathcal{C}(\underline{\underline{y}}) = \mathcal{C}_0 + \underline{\underline{y}}$  au point  $\underline{\underline{S}}(t)$

#### *Vitesses des contraintes en fonction des vitesses des déformations*

Les lois de comportement s'inversent sous la forme :

$$\underline{\underline{\dot{\Sigma}}} = \underline{\underline{L}} : (\underline{\underline{\dot{E}}} - \underline{\underline{\dot{E}}^p}) = \underline{\underline{L}} : \left( \underline{\underline{\dot{E}}} - \lambda \frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} \right) = \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{\dot{E}}^e}$$

$$\lambda = \frac{1}{\frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} : \underline{\underline{L}} : \frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} : \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{E}}}$$

où  $\langle x \rangle$  désigne la partie positive de  $x$ .

De façon explicite en charge élastique :

$$\underline{\underline{\dot{\Sigma}}} = \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{\dot{E}}^e} \quad \text{si } f(\underline{\underline{\Sigma}}, \underline{\underline{y}}) < 0$$

ou en décharge élastique :

$$f(\underline{\underline{\Sigma}}, \underline{\underline{y}}) = 0 \quad \text{mais} \quad \frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} : \underline{\underline{L}} : \frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}}$$

### Comportement dans l'espace des paramètres transformés internes

Les lois de comportement se mettent sous la forme symbolique :

$$\underline{\underline{\dot{E}}^p} \in -\partial \Psi_{\mathcal{C}(\underline{\underline{\Sigma}})}(\underline{\underline{y}}(t))$$

qui représente le cône des normales intérieures au convexe  $\mathcal{C}(\underline{\underline{\Sigma}}) = \mathcal{C}_0 + \underline{\underline{S}}$  au point  $\underline{\underline{y}}(t)$

#### 2.1.4.2 Nouvelle formulation

En posant  $\underline{\underline{\Sigma}}(t) = \underline{\underline{\Sigma}}^{el}(t) + \underline{\underline{R}}(t)$  où  $\underline{\underline{\Sigma}}^{el}(t)$  est le champ de contrainte dans la structure supposée élastique et  $\underline{\underline{R}}(t)$  est le champ de contraintes résiduelles, le critère s'écrit aussi :

$$f(\underline{\underline{\Sigma}}^{el} + \underline{\underline{R}} - \underline{\underline{C}} \underline{\underline{E}}^{ep})$$

soit encore :

$$f(\underline{\underline{S}}^{el} - \underline{\underline{Y}})$$

avec  $\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{E}}^p - dev \underline{\underline{R}}$  qui est le champ des paramètres transformés structuraux pour la structure.

Pour obtenir tous ces champs, nous utilisons le seul opérateur :

$$\mathbf{ELAS}\left(V, \partial_{F_i} V, \partial_{U_j} V, \left\{\underline{X}^d(t), \underline{F}_i^d(t), \underline{U}_j^d(t), \underline{E}^I(t)\right\}, \underline{\underline{M}}\right)$$

qui donne  $\underline{U}^{el}(t) \rightarrow \underline{E}^{el}(t) \rightarrow \underline{\Sigma}^{el}(t)$

Mais le même opérateur avec les arguments :

$$\mathbf{ELAS}\left(V, \partial_{F_i} V, \partial_{U_j} V, \left\{\underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, \underline{E}^p(t)\right\}, \underline{\underline{M}}\right)$$

donne  $\underline{U}^{ine}(t) \rightarrow \underline{E}^{ine}(t) \rightarrow \underline{R}(t)$  d'où l'on déduit  $\underline{Y}(t)$

Comme à chaque instant, la solution élastique  $\underline{\Sigma}^{el}(t)$  est connue, indépendamment de l'histoire antérieure, la position du champ  $\underline{Y}(t)$  est située dans un domaine connu et cela localement sans prendre en compte tous les autres points de la structure.

Le problème est de revenir sur les variables classiques lorsque le champ  $\underline{Y}(t)$  est supposé connu. Là encore, l'opérateur :

$$\mathbf{ELAS}\left(V, \partial_{F_i} V, \partial_{U_j} V, \left\{\underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, \underline{C}^{-1} \underline{Y}(t)\right\}, \underline{\hat{M}}\right)$$

donne  $\underline{R}(t)$  d'où l'on déduit ensuite  $\underline{E}^p(t)$ .

$\underline{\hat{M}}$  est la matrice inverse de la matrice des coefficients élastiques modifiée  $\underline{\hat{L}}$

$$\underline{\hat{M}} = \underline{\underline{M}} + \underline{C}^{-1} dev$$

Cette matrice modifiée dans le cas de l'élasticité isotrope, se met sous la forme plus détaillée élémentaire puisque :

$$\underline{\underline{M}} = \frac{1+\nu}{Y_G} \underline{1} - \frac{\nu}{Y_G} \underline{1} tr$$

$$dev = \underline{1} - \frac{1}{3} \underline{1} tr$$

et si :

$$\underline{\underline{C}}^{-1} = \frac{1}{C} \underline{1}$$



$$\begin{aligned} \underline{\hat{M}} &= \frac{1+\nu}{Y_G} \underline{1} - \frac{\nu}{Y_G} \underline{1tr} + \frac{1}{C} \left( \underline{1} - \frac{1}{3} \underline{1tr} \right) \\ \Rightarrow \underline{\hat{M}} &= \left( \frac{1+\nu}{Y_G} + \frac{1}{C} \right) \underline{1} - \left( \frac{\nu}{Y_G} + \frac{1}{3C} \right) \underline{1tr} \end{aligned}$$

Cela implique qu'il faut juste calculer :

$$\begin{aligned} \hat{\nu} &= \frac{\nu}{Y_G} + \frac{1}{3C} \\ \frac{1+\hat{\nu}}{\hat{Y}_G} &= \frac{1+\nu}{Y_G} + \frac{1}{C} \end{aligned}$$

pour obtenir le module d'Young et le coefficient de Poisson modifiés pour la nouvelle matrice. On montre ainsi qu'il existe une *relation biunivoque* entre le champ des paramètres internes  $\underline{E}^p(t)$  et le champ des paramètres transformés structuraux  $\underline{Y}(t)$ .

### Détermination des champs inélastiques dans le cas des données mixtes

C'est le cas où dans une partie de la structure, le champ  $\underline{Y}(t)$  est connu dans le volume  $V_y$ , et dans la partie complémentaire c'est le champ des déformations plastiques  $\underline{E}^p(t)$  qui est connu dans  $V_x$ . Nous pouvons considérer deux types différents de matériaux élastiques. Les champs inélastiques sont alors obtenus par :

$$\begin{aligned} \underline{E}^{ine}(t) &= \underline{M} \underline{R}(t) + \underline{E}^p(t) \quad \text{dans } V_x \\ \underline{E}^{ine}(t) &= \underline{\hat{M}} \underline{R}(t) + \frac{1}{C} \underline{Y}(t) \quad \text{dans } V_y \end{aligned}$$

Il faut donc encore utiliser l'opérateur **ELAS** mais avec des arguments mixtes plus complexes :

$$\text{ELAS} \left( V, \partial_{F_i} V, \partial_{U_j} V, \left\{ \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, \underline{E}^p(t) \text{ dans } V_x \text{ et } \frac{1}{C} \underline{Y}(t) \text{ dans } V_y \right\}, \underline{M} \text{ dans } V_x \text{ et } \underline{\hat{M}} \text{ dans } V_y \right)$$

pour revenir aux autres champs inconnus ( $\Rightarrow \underline{U}^{ine}(t) \rightarrow \underline{E}^{ine}(t) \rightarrow \underline{R}(t)$ )

### Comportement dans l'espace des paramètres transformés structuraux

Le critère de plasticité peut être réécrit avec le cas d'écroissage cinématique en introduisant les paramètres transformés structuraux  $\underline{Y}(t)$  :

$$\begin{aligned} f(\underline{S} - \underline{y}) &= f(\underline{S}^{el} + \text{dev} \underline{R} - \underline{Y}) \leq 0 \\ \underline{Y} &= \underline{y} - \text{dev} \underline{R} = C \underline{E}^p - \text{dev} \underline{R} \end{aligned}$$

où  $\underline{\underline{S}}^{el}(t)$  désigne le champ déviateur des contraintes élastiques calculé dans la structure supposée élastique.

Dans l'espace  $\underline{Y}(t)$ , la vitesse de déformation plastique appartient au cône des normales intérieures au convexe  $\mathcal{C}(\underline{\underline{S}}^{el})$  au point  $\underline{Y}(t)$  telle que :

$$\underline{\underline{\dot{E}}}^p \in -\partial\Psi_{\mathcal{C}(\underline{\underline{S}}^{el})}(\underline{Y}(t))$$

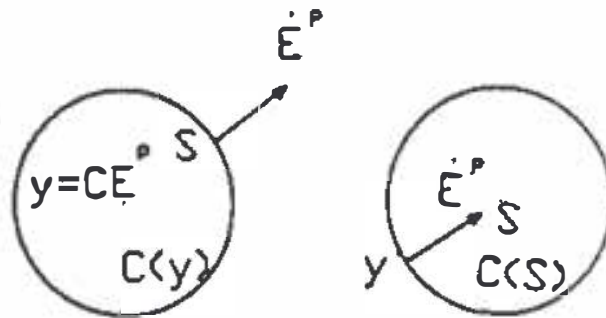


fig. 2.3 - Vitesses dans l'espace du déviateur des contraintes  $\underline{\underline{S}}(t)$  et des paramètres transformés structuraux  $\underline{Y}(t)$

## 2.2 Analyse limite simplifiée

L'analyse limite concerne normalement les structures constituées de matériaux parfaitement plastiques donc sans écrouissage. Il peut être considéré, associé aux matériaux réels, un matériau fictif à écrouissage cinématique à un module d'écrouissage qui tend vers 0. Il a été montré que la surface limite dans l'espace des paramètres de chargement est une surface convexe qui est peut être construite en suivant un trajet radial dans des directions successives.

### 2.2.1 Solution exacte durant un chargement monotone radial

Lors d'un chargement radial monotone, la réponse élastique se met sous la forme :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{el}(t) = \underline{\underline{\Sigma}}_0^{el} + \lambda(t) \Delta \underline{\underline{\Sigma}}^{el}$$

où  $\underline{\underline{\Sigma}}_0^{el}$  et  $\Delta \underline{\underline{\Sigma}}^{el}$  sont des champs fixes de contraintes.

### 2.2.1.1 Hypothèses pour les champs de vitesses asymptotiques

Puisque le chargement tend vers  $\infty$  dans la direction  $\underline{\underline{\Delta\Sigma^{el}}}$ , une solution stationnaire va être atteinte quand :

$$\underline{\underline{\dot{Y}}} = \underline{\underline{\dot{S}^{el}}} = \text{dev} \underline{\underline{\dot{\Sigma}^{el}}} = \text{dev} \underline{\underline{\Delta\Sigma^{el}}}$$

(la dérivée par rapport au temps n'a pas de sens physique,  $\lambda$  est pris comme paramètre temps).

Nous pouvons retourner aux champs des vitesses des déformations plastiques  $\underline{\underline{\dot{E}^p}}$  grâce à l'opérateur :

$$\text{ELAS} \left( V, \partial_{F_i} V, \partial_{U_j} V, \left\{ \underline{\underline{0}}, \underline{\underline{0}}, \underline{\underline{0}}, \frac{1}{C} \underline{\underline{\dot{S}^{el}}}(t) \right\}, \underline{\underline{\hat{M}}} \right)$$

### 2.2.1.2 Détermination explicite de l'état stationnaire

Nous considérons chaque point dans la structure :

1) Si  $\underline{\underline{\dot{E}^p}}$  est différent  $\underline{\underline{0}}$ , le point est en charge plastique,

Alors il faut vérifier les relations d'écoulement plastique :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\dot{E}^p}} = \lambda (\underline{\underline{S^{el}}} - \underline{\underline{Y}}) \\ \frac{1}{2} (\underline{\underline{S^{el}}} - \underline{\underline{Y}}) : (\underline{\underline{S^{el}}} - \underline{\underline{Y}}) = \sigma_0^2 \end{cases}$$

qui s'inversent sous la forme:

$$\lambda = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{\dot{E}^p}} : \underline{\underline{\dot{E}^p}}}}{\sigma_0} \geq 0$$

et donne donc la position :

$$\underline{\underline{Y}}^{ult} = \underline{\underline{S^{el}}} - \frac{1}{\lambda} \underline{\underline{\dot{E}^p}}$$

2) Si  $\underline{\underline{\dot{E}^p}} \equiv \underline{\underline{0}}$ , le point reste élastique:

Alors les paramètres transformés structuraux sont indéterminés

## 2.2.2 Détermination de la charge limite

### 2.2.2.1 Limite supérieure

En traçant le paramètre de chargement  $Q$ , ici  $\lambda$ , en fonction du paramètre cinématique associé inélastique  $q^{ine}$ , il peut être montré qu'une relation linéaire est obtenue

$$q^{ine} = \frac{A\lambda - B}{C} \quad \text{i.e. une ligne droite de pente } C^{-1}$$

où  $C$  est le module d'écroûissage d'un matériau à écroûissage cinématique fictif. Ces droites passent toutes par  $Q^{ult}$  sur  $q^{ine} = 0$  qui est pris comme étant la charge limite dans cette direction de chargement.

#### Remarques :

- Le point  $Q^{ult}$  sur  $q^{ine} = 0$  est indépendant de  $C$ .
- Ce point est la borne supérieure de la charge limite du matériau parfaitement plastique  $C = 0$

### 2.2.2.2 Autres bornes

Des autres bornes plus évoluées peuvent être obtenues.

## 2.3 Analyses cycliques simplifiées

Les forces  $\underline{F}_i^d(t)$ ,  $\underline{X}^d(t)$ , les déplacements  $\underline{U}_j^d(t)$  et les déformations initiales  $\underline{E}^I(t)$  imposées sont périodiques du temps avec la période  $T$  :

$$\begin{aligned}\underline{F}_i^d(t) &= \underline{F}_i^d(t + T) \\ \underline{X}^d(t) &= \underline{X}^d(t + T) \\ \underline{U}_j^d(t) &= \underline{U}_j^d(t + T) \\ \underline{E}^I(t) &= \underline{E}^I(t + T)\end{aligned}$$

La réponse complète de la structure ne nous intéresse pas. Nous ne voulons connaître que l'état asymptotique obtenu après un certain nombre de cycles. Comme les matériaux sont considérés parfaitement plastiques à l'échelle locale, la solution en contraintes sera périodique. Il y'aura donc toujours adaptation ou accommodation pour les matériaux à écroûissage cinématique.

### 2.3.1 Nature de l'état limite

Le champ de contraintes purement élastique  $\underline{\Sigma}^{el}(t)$  a déjà été calculé pour une période  $[0; T]$ . Il est ensuite possible d'exprimer facilement, dans l'espace des paramètres transformés structuraux (mais pris en chaque point de la structure), la condition de

Meulan-Koiter lorsque le matériau est à écoulement cinématique associé au critère de Mises. Ceci est fait en introduisant la fluctuation des contraintes élastiques  $F^{el}(\underline{x})$  de J. MANDEL et al. (1977) :

$$F^{el}(\underline{x}) = \min_{\underline{Y}^*} \left\{ \max_t \left( \sqrt{\frac{1}{2} (\underline{S}^{el}(\underline{x}, t) - \underline{Y}^*(\underline{x}, t)) : (\underline{S}^{el}(\underline{x}, t) - \underline{Y}^*(\underline{x}, t))} \right) \right\} \text{ sur } V \text{ pour } t \in [0; T]$$

Il faut donc construire la plus petite sphère qui contient l'histoire  $\underline{S}^{el}(\underline{x}, t)$  en chaque point  $\underline{x}$ . Le rayon de cette sphère est  $F^{el}(\underline{x})$ .

Deux situations sont possibles :

- Si la condition  $F^{el}(\underline{x}) \leq \sigma_0$  est vérifiée pour tous les points  $\underline{x}$  alors il y aura adaptation : l'intersection  $(C_I)$  des sphères  $\mathcal{C}(\underline{S}^{el}(t))$  en chaque point  $\underline{x}$  n'est pas vide.
- Si la condition  $F^{el}(\underline{x}) \geq \sigma_0$  est vérifiée pour au moins un point  $\underline{x}$  alors il y aura accommodation : l'intersection  $(C_I)$  des sphères  $\mathcal{C}(\underline{S}^{el}(t))$  en ce point  $\underline{x}$  est vide.

Le calcul de cette fluctuation s'effectue localement en chaque point de la structure

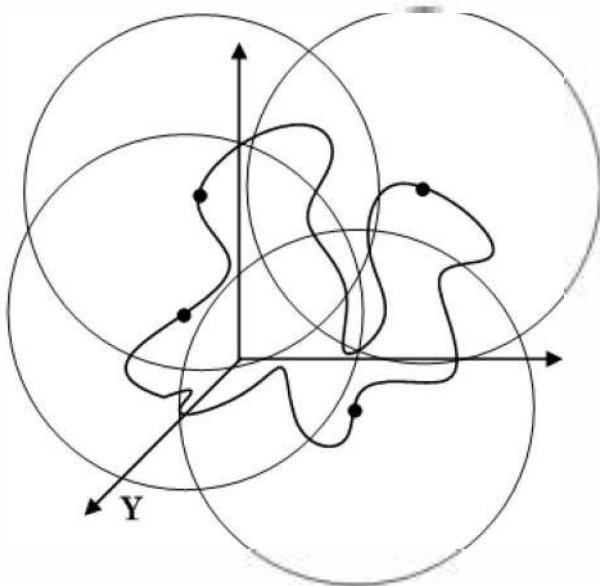


fig. 2.4 - Adaptation

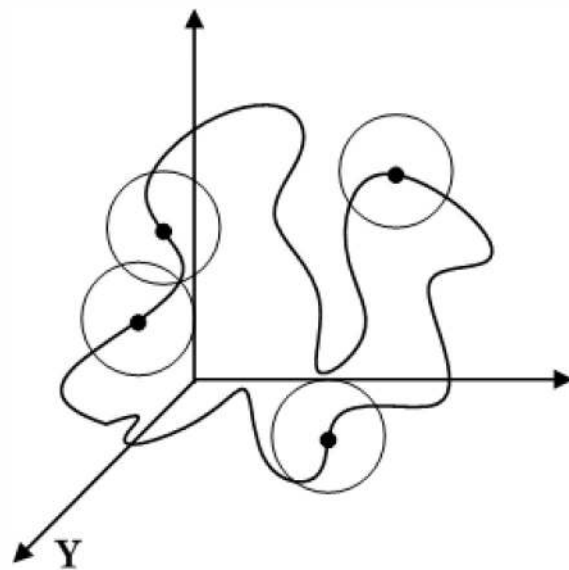


fig. 2.5 - Accommodation

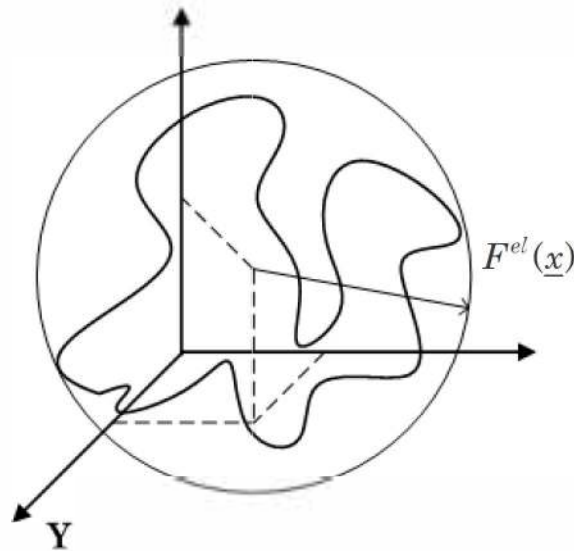


fig. 2.6 - Fluctuation élastique

## 2.3.2 Règles pratiques pour construire l'état limite

### 2.3.2.1 Procédure générale

- i) on calcule  $\underline{\underline{\Sigma}}^{el}(t)$  pour  $t \in [0; T]$
- ii) les paramètres transformés structuraux  $\underline{\underline{Y}}_I$  sont déterminés localement selon l'état limite atteint
- iii) par l'opérateur élastique **ELAS** avec les matrices modifiées  $\underline{\underline{\hat{M}}}$  et les déformations initiales  $C^{-1}\underline{\underline{Y}}_I$ , les déplacements inélastiques  $\underline{\underline{U}}^{ine}$  les déformations inélastiques  $\underline{\underline{E}}^{ine}$  et les contraintes résiduelles  $\underline{\underline{R}}$  sont calculés
- iv) enfin les déformations plastiques  $\underline{\underline{E}}^p$  sont calculées par :

$$\underline{\underline{E}}^p = C^{-1}(\underline{\underline{Y}} + \text{dev} \underline{\underline{R}})$$

### 2.3.2.2 Adaptation

#### Procédure ZAC

Une procédure très simple a été proposée :

- o) l'état limite dépend en général de la position de l'état initial de la structure c.a.d. de  $\underline{\underline{Y}}_0$  ou  $\underline{\underline{E}}_0^p$
- i) associé à cet état initial, tout d'abord on calcule le premier ou demi-premier cycle de façon incrémentale classique ou par la méthode simplifiée (on vérifie aussi si l'état limite n'a pas été atteint directement)

- ii) puisque la solution finale se trouve dans  $C_I$ , les paramètres transformés structuraux  $\underline{Y}_I$  après le premier cycle (ou demi-cycle) sont projetés sur cette intersection. Cette projection s'effectue localement en chaque point de la structure.
- iii) associée à cet état  $\underline{Y}_I$ , on revient aux champs classiques avec l'opérateur **ELAS** c.a.d. on calcule  $\underline{E}_I^p$  en tout point de la structure.

**Procédure Itérative**

La structure est divisée en 2 zones ; une première zone  $V_y$  où les paramètres transformés structuraux sont connus et une autre zone  $V_x$  où les déformations plastiques sont supposés connus. Nous utilisons l'opérateur **ELAS** mais avec des arguments mixtes plus complexes pour obtenir les autres champs :

$$\text{ELAS} \left( V, \partial_{F_i} V, \partial_{U_j} V, \left\{ \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, \underline{E}^p(t) \text{ dans } V_x \text{ et } \frac{1}{C} \underline{Y}(t) \text{ dans } V_y \right\}, \underline{M} \text{ dans } V_x \text{ et } \hat{\underline{M}} \text{ dans } V_y \right)$$

Les itérations suivantes sont lancées :

- i) on part de l'état initial  $\underline{Y}_0$
- ii) en chaque point de la structure,
  - si  $\underline{Y}_0$  appartient à l'intersection  $CI$  et la matrice  $\underline{M}$
  - si  $\underline{Y}_0$  n'appartient pas à l'intersection, on prend sa projection sur ce convexe, et la matrice modifiée  $\hat{\underline{M}}$  par l'opérateur ELAS mixte on calcule les nouveaux champs. On reprend en ii) jusqu'à convergence.

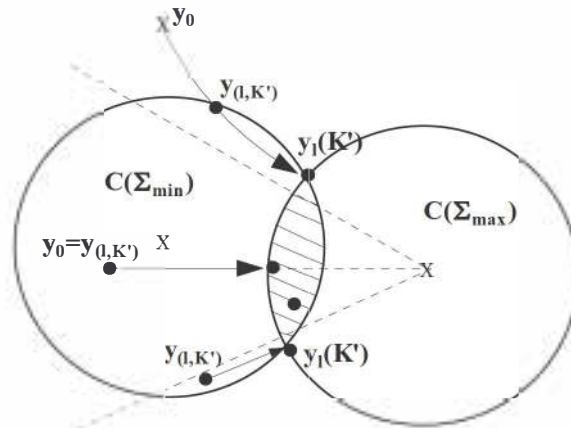


fig. 2.7 - Projection locale sur  $C_I$  dans le Y-espace

**2.3.2.3 Accommodation lors d'un chargement cyclique radial**

Le facteur  $\lambda(t)$  variant entre 0 et 1, puis entre 1 et 0, le champ des contraintes élastiques est alors donné en chaque point par :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{el}(t) = (1 - \lambda(t)) \underline{\underline{\Sigma}}_{\min}^{el} + \lambda(t) \underline{\underline{\Sigma}}_{\max}^{el}$$

ou bien par :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{el}(t) = \underline{\underline{\Sigma}}_m^{el} + \frac{1}{2}(2\lambda(t) - 1)\Delta\underline{\underline{\Sigma}}^{el}$$

où  $\underline{\underline{\Sigma}}_m^{el}$  est la valeur moyenne de  $\underline{\underline{\Sigma}}^{el}(t)$  et  $\Delta\underline{\underline{\Sigma}}^{el}$  est la double amplitude du chargement :

$$\underline{\underline{\Sigma}}_m^{el} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\Sigma}}_{max}^{el} + \underline{\underline{\Sigma}}_{min}^{el}) \text{ et } \Delta\underline{\underline{\Sigma}}^{el} = \underline{\underline{\Sigma}}_{max}^{el} - \underline{\underline{\Sigma}}_{min}^{el}$$

### ***Bornes sur l'amplitude entre les états limites***

#### **Borne inférieure**

Comme à chaque sommet la solution doit se trouver dans  $\mathcal{C}(\underline{\underline{S}}_{min}^{el})$  puis dans  $\mathcal{C}(\underline{\underline{S}}_{max}^{el})$ , une borne inférieure immédiate est obtenue pour l'amplitude  $\Delta\underline{\underline{Y}}_{min}$  :

$$\Delta\underline{\underline{Y}}_{min} = \left( 1 - \frac{\sqrt{2} \sigma_0}{\|\Delta\underline{\underline{S}}^{el}\|} \right) \Delta\underline{\underline{S}}^{el}$$

où  $\sigma_0$  est le rayon de la sphère et  $\|\Delta\underline{\underline{S}}^{el}\| = \sqrt{\frac{1}{2}(\Delta\underline{\underline{S}}^{el} : \Delta\underline{\underline{S}}^{el})}$ .

Cette borne est vérifiée surtout lorsque la norme  $\|\Delta\underline{\underline{S}}^{el}\|$  est petite.

#### **Borne supérieure**

Elle est surtout valable lorsque  $\|\Delta\underline{\underline{S}}^{el}\|$  est très grande. Il suffit de prendre en effet les deux états ultimes qui ont été déterminés explicitement dans la direction  $\Delta\underline{\underline{S}}^{el}$  et la direction opposée et on obtient  $\Delta\underline{\underline{Y}}_{max}$

On revient ensuite à  $\Delta\underline{\underline{E}}^p$  par l'opérateur ELAS.

### ***Procédure élémentaire pour le champ moyen***

On prend en chaque point :

- $\underline{\underline{Y}}_{Im} = \underline{\underline{S}}_m^{el}$  si l'intersection  $C_I = \emptyset$
- $\underline{\underline{Y}}_{Im} = \underline{\underline{Y}}_0$  ou sa projection si l'intersection  $C_I \neq \emptyset$

Des procédures itératives plus évoluées ont été aussi proposées. Le cas des chargements cycliques non-radiaux a été aussi traité.

Nous ne les reprenons pas ici.



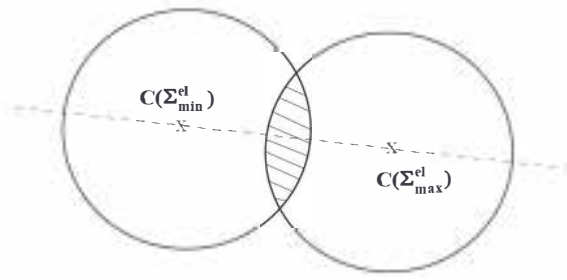


fig. 2.8 - Domaine d'adaptation

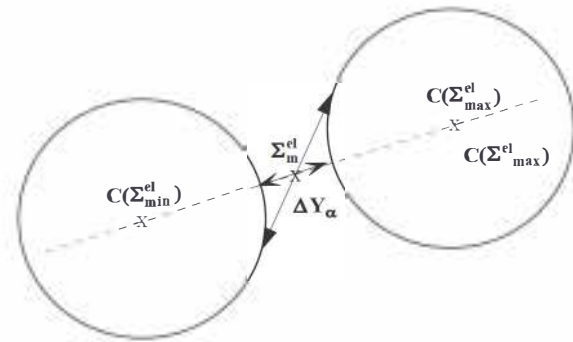


fig. 2.9 - Valeur moyenne de  $Y_l$  et bornes de  $\Delta Y_l$  lors de l'accommodation

## Points essentiels à retenir

L'état limite stationnaire obtenu après quelques cycles joue un rôle primordial sur la durée de vie globale de la structure. Ce qui implique des calculs élastoplastiques. Les méthodes traditionnelles incrémentales sont très coûteuses en temps de calcul et exigent parfois un traitement spécial pour assurer la convergence de l'algorithme. Des méthodes simplifiées directes ont été proposées (type Ladeveze, Nguyen QS-Dang Van).

Nous utilisons une autre méthode, beaucoup plus rapide et plus facile à mettre en œuvre : l'analyse simplifiée des structures et des matériaux. Elle a été introduite par J.Zarka et son équipe au LMS-X.

Cette méthode permet l'évaluation de l'état limite atteint par une structure lors d'un chargement cyclique quasi-statique. Elle est applicable pour des structures constituées de matériaux très généraux. Il faut que l'élément de volume (relation de comportement) puisse être défini à partir d'un assemblage de sous-éléments élastiques linéaires, plastiques, visqueux ou viscoplastiques parfaits.

Seule la classe des matériaux à écrouissage cinématique linéaire est retenue. Dans ce cas, les seuls états limites possibles lors d'un chargement cyclique sont alors l'adaptation ou l'accommodation.

Le point original de cette méthode repose sur la construction de ces états limites avec l'utilisation seule d'un outil élastique classique et de quelques données intuitives et naturelles. Le problème élastoplastique initial est découpé en 2 sous-problèmes : l'un traitant de la réponse purement élastique et l'autre de la réponse inélastique de la structure. Ces 2 sous-problèmes sont résolus séparément en utilisant le même opérateur élastique **ELAS**.

En effet grâce un changement de variable judicieux, le sous-problème inélastique est ramené à la résolution d'un problème élastique (dans l'espace des paramètres transformés structuraux  $\underline{Y}$ ) en considérant une matrice de complaisance élastique

modifiée ( $\hat{M}$ ) :  $\hat{M} = M + C^{-1} dev$

La procédure générale se schématise de la manière suivante :

- 1- Le problème élastique donne  $\underline{\Sigma}^{el}(t)$  grâce à :

$$\text{ELAS} \left( V, \partial_{F_i} V, \partial_{U_j} V, \left\{ \underline{X}^d(t), \underline{F}^d(t), \underline{U}_j^d(t), \underline{E}^I(t) \right\}, \underline{M} \right)$$

- 2- Le problème inélastique, en supposant le champ de paramètres transformés  $\underline{Y}$  connu, et grâce à l'opérateur :

$$\text{ELAS} \left( V, \partial_{F_i} V, \partial_{U_j} V, \left\{ \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, C^{-1} \underline{Y}(t) \right\}, \hat{M} \right)$$

donne  $\underline{U}^{ine}(t) \rightarrow \underline{E}^{ine}(t) \rightarrow \underline{R}(t)$

La principale difficulté est de trouver ce champ de paramètres transformés structuraux  $\underline{Y}$  à l'état stabilisé. Des règles de construction pratiques ont été proposées pour l'état adapté et accommodé. Pour ce dernier, des bornes sur la solution sont données.



# Chapitre 3

## Rappels sur la Conception Optimisée InTelligente

### 3.1 Introduction

Les entreprises disposent souvent de nombreuses informations stockées dans différentes bases de données sur des structures qu'elles ont construites ou simplement conçues. Ces bases de données sont souvent incompatibles entre elles. Elles constituent le savoir faire et elles peuvent perdre très rapidement leur transparence et leur usage (les informations sont probablement là, mais personne ne sait où elles sont ni comment les interpréter). Leur traitement par les outils classiques d'analyse statistique des données (analyse discriminante, analyse de corrélation non-linéaire, nuées dynamiques) ne peut être réalisé. De plus, les progrès des machines comme sur les connaissances fondamentales des procédés, des événements, des incidents sont aussi souvent cachés aux utilisateurs de ces données qui n'y ont accès que grâce à une interface ou un règlement sans en connaître les significations ou les raisons (l'expert a quitté la société depuis quelques années).

Comme nous l'avons souligné dans le rappel sur l'analyse à la fatigue des structures, de nombreux points ne sont pas clairs et compris par les meilleurs experts de ce domaine malgré toutes les recherches qui ont été lancées : "on sait que l'on ne sait pas tout!". Cette situation est en fait générale à de nombreux autres problèmes dans des industries très diverses.

Il y a quelques dizaines d'années, on avait pensé combler ce manque de compréhension grâce à l'Intelligence Artificielle et en particulier les générateurs de systèmes experts : une interface (fournie par le cognaticien) récupère le savoir des experts et génère le système expert qui est ensuite mis à la disposition des utilisateurs pour les aider à traiter les nouveaux cas et leur expliquer les raisons des choix et des réponses (moteur d'inférences). Cette voie s'est avérée être une impasse car en réalité, les experts, même s'ils donnaient une réponse, ne disposaient pas de toutes les règles pour résoudre le problème et ne comprenaient pas ce qu'ils faisaient.

Plus récemment, d'autres outils ont été bâtis comme par exemple le Data Mining (semblable à un virus qui se propage dans les bases de données complexes et qui "découvre" les tendances, les corrélations entre ces données!). D'autres outils, plus

rattachés à l'Intelligence Artificielle en techniques d'apprentissage automatique comme la logique symbolique, la logique floue, la logique possibiliste, les réseaux neuronaux ont aussi apporté de grands progrès actuellement.

Dans de nombreux aspects physiques (modélisation du comportement des matériaux, changements de phase, endommagement, fatigue, frottement, usure,...) mais aussi dans de nombreux aspects numériques (validité de la solution obtenue associée à une discrétisation spatiale-temporelle ou encore dans des aspects expérimentaux (représentativité des essais, mesures), le concepteur se trouve devant des verrous bloquants.

Cela a été le point de départ d'une nouvelle approche proposée par J. Zarka et ses collaborateurs dans les années 1986 : la Conception Optimisée InTelligente des Systèmes.

La partie la plus délicate et la plus importante dans cette l'approche concerne la bonne description des exemples comme nous le montrerons dans la suite de ce travail. Elle exige en effet beaucoup de temps et la participation des meilleurs experts du problème considéré.

## 3.2 Apprentissage automatique

Une voie importante de l'intelligence artificielle concerne l'apprentissage automatique.

Un logiciel SEA (diffusé dans l'industrie depuis quelques années) a ainsi été développé au Laboratoire de Mécanique des Solides par Sebag, Terrien, Schoenauer et Navidi mais il existe bien d'autres techniques fondées sur les réseaux neuronaux (logiciel NEUROHELL de Wards Systems), la logique floue ...

Tous ces outils sont capables de donner le réseau de règles avec la fiabilité la plus grande à partir d'une base d'exemples définie sous la responsabilité des experts. De tels systèmes SEA opèrent en trois étapes : la première consiste en la génération de règles à partir de la base d'exemples tandis que la deuxième exploite les règles générées sur des nouveaux cas inconnus ; enfin une troisième étape exploite les règles générées dans l'optimisation ou la résolution du problème inverse.

Ces systèmes disposent pour cela en général de six fonctions principales :

i) PREPARE effectue la préparation des données initiales et la récupération d'un fichier de données de type EXCEL. PREPARE considère comme descripteurs d'entrée, les nombres entiers et réels, les booléens, les alphanumériques, mais aussi les fichiers base de données (matériaux, process...), les fichiers courbes (traction, fatigue...), les fichiers signaux provenant de divers types de capteurs ou les fichiers images. Il doit aussi tenir compte que l'apprentissage automatique peut porter sur plusieurs conclusions. Il décompose principalement pour chacune des conclusions, le fichier base de données initiale en une base d'apprentissage et une base de test.

ii) APPREND extrait une base de règles à partir de la base d'apprentissage ; la base d'apprentissage peut contenir des exemples dont la description est incomplète ; elle peut également contenir des règles, qui représentent les

connaissances initiales disponibles et indiscutables des experts. Il y'a en général de nombreux paramètres empiriques à ajuster afin d'obtenir le meilleur apprentissage.

iii) ENCLAIR permet de visualiser les règles obtenues et les descripteurs retenus.

iv) TESTE permet d'évaluer la qualité des règles apprises sur les exemples mis par PREPARE dans la base de test ; on compare le diagnostic original et celui donné par la base de règles.

v) CONCLUT correspond au mode diagnostic classique d'un système expert. Il effectue le diagnostic d'un cas inconnu en utilisant la base de règles.

vi) OPTIMISE permet de résoudre le problème inverse, c'est à dire, quand des conditions sur les diverses conclusions et sur certains descripteurs sont imposées. Il propose une ou des solutions et éventuellement quand une fonction objectif est donnée, construit une solution optimale.

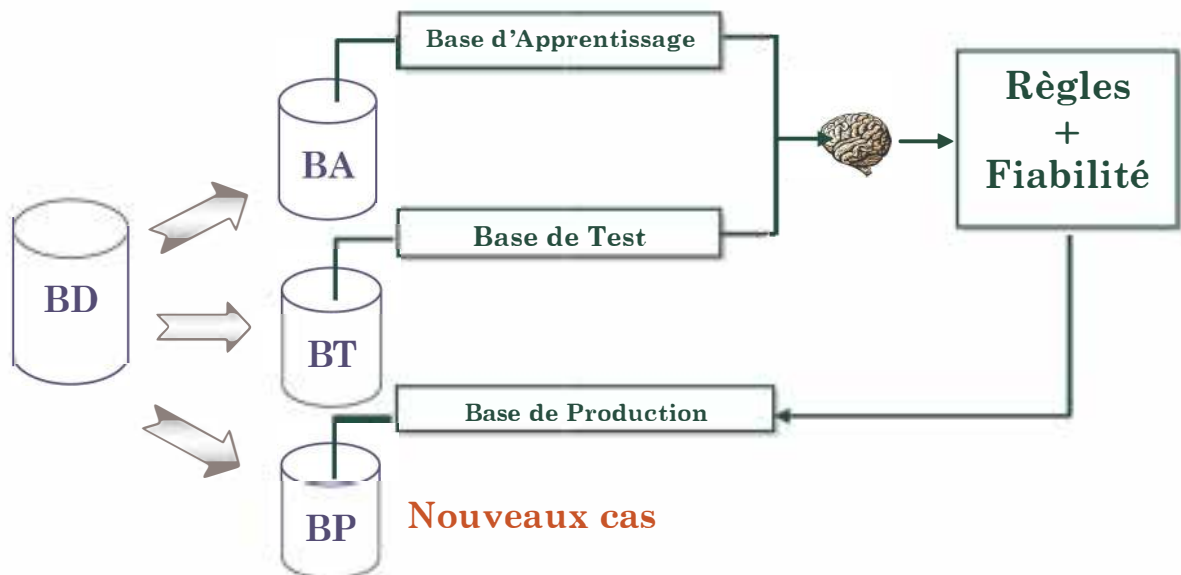


fig. 3.1 - Principes de l'apprentissage automatique

### 3.3 Conception Optimisée Intelligente

Il s'agit d'essayer de compenser nos nombreuses incertitudes actuelles sur le dimensionnement des structures, sur les modélisations des matériaux dans les domaines non-linéaires avec plasticité, fluage, fatigue, endommagement, rupture, sur les analyses numériques des structures, sur les états initiaux des structures, sur les chargements réels sur la structure.

Cependant, si dans ces domaines, il n'y a pas de solution précise, complète car les experts ne comprennent pas tout, de nombreux progrès ont été réalisés. Un couplage particulier de leurs connaissances et le traitement des retours d'expériences peut être effectué grâce aux techniques d'apprentissage automatique.

Le choix d'une bonne description est primordial pour toute tentative d'apprentissage automatique. De la qualité de ces descripteurs et des exemples disponibles dépend la qualité des règles construites et surtout de leur fiabilité et donc de leur généralisation.

La description d'un problème quelconque doit être vue à deux niveaux :

i) on retient d'abord les caractéristiques globales du problème : les DESCRIPTEURS PRIMITIFS,  $x$  où “chaque cas peut avoir un nombre différent et des natures différentes de descripteurs” ;

ii) on cherche ensuite à représenter ces caractéristiques par des DESCRIPTEURS EVOLUES,  $XX$ , où toute la connaissance des experts est exprimée mais où surtout, “tous les cas sont décrits par le même nombre et avec le même type de descripteurs” (il est essentiel de faire la fusion des données provenant des divers exemples). Chaque problème doit être pris séparément et être analysé par les meilleurs experts qui imposent la structure de la description intelligente spécifique à un problème. Il ne s'agit donc pas de Data Mining. Les descripteurs intelligents  $XX$  ne sont pas indépendants entre eux en général. La constitution de la base d'exemples dans sa description intelligente représente plus de 99 % du travail à réaliser pour résoudre un problème particulier.

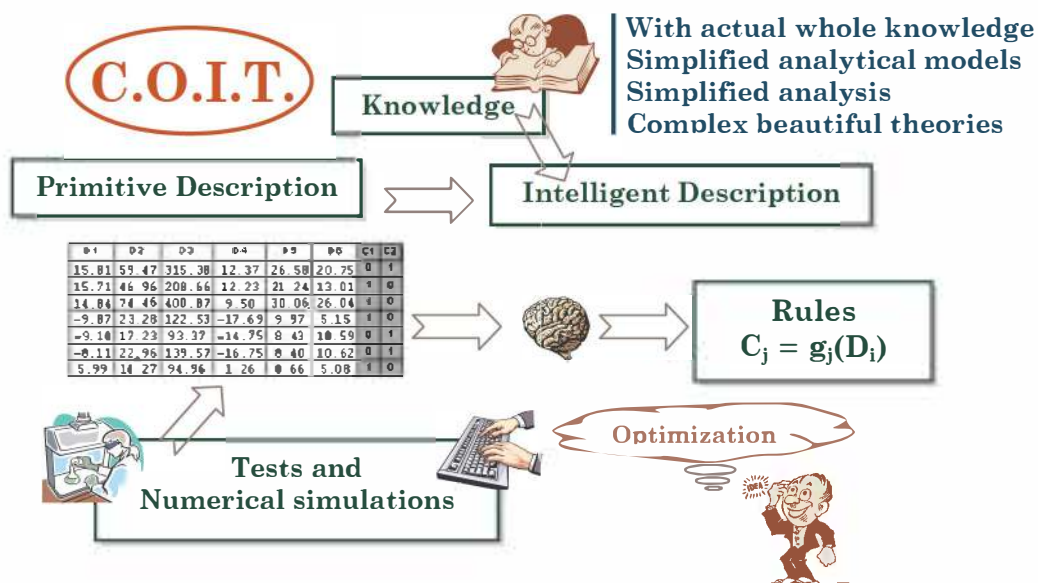


fig. 3.2 – Principes de la C.O.I.T.

Après l'apprentissage automatique sur la base d'exemples avec n'importe quel outil, il est possible de donner la solution instantanément à n'importe quel nouveau problème sans avoir à faire de nouvelles expériences ou nouvelles simulations

Il est alors aussi possible de réaliser deux types de stratégie d'optimisation (comme les temps de résolution de chaque cas sont très courts) :

i) les descripteurs évolués sont considérés comme indépendants, cela permet de découvrir éventuellement une solution qui n'a pas jamais été vue mais pour laquelle, une difficile étape doit être franchie, il faut comprendre comment réaliser réellement cette solution (semblable à l'optimisation de forme topologique),

ii) ces descripteurs proviennent de calculs ou d'essais d'un nombre de variables de conception, qui elles sont indépendantes et qui assurent que la réalisation de la solution est alors immédiate (semblable à l'optimisation structurale ou paramétrée).

J.M. Hablot (1990), dans sa thèse, a indiqué les propriétés que doivent vérifier les descripteurs d'un objet :

Un système de descripteurs doit d'abord être fixe : tous les objets sont décrits dans le même système de descripteurs. Rien ne peut être appris si chaque exemple possède son propre système de description. Cette description permet de faire la fusion des cas.

Un tel système est suffisant si on vérifie :

$$\text{Conclusion (E1)} \neq \text{Conclusion (E2)} \Rightarrow \text{Description (E1)} \neq \text{Description (E2)}$$

pour tout couple d'exemple (E1) et (E2) non contradictoires

Deux exemples sont contradictoires si leurs descriptions sont identiques et leurs conclusions incompatibles. Cela se produit dans deux cas de figure :

- l'un au moins des deux exemples est erroné ; la base est dite bruitée
- des descripteurs discriminants sont manquants, la description ne peut donc différencier ces exemples ; la base est dite inconsistante.

Les méthodes d'apprentissage doivent être suffisamment robustes pour supporter le bruit est l'inconsistance de la base d'exemples.

La description d'un objet n'est généralement ni injective ni surjective. Cela implique :

- qu'à partir de la description intelligente, on ne peut généralement pas retrouver l'objet
- que deux exemples différents peuvent être décrits de façon identique.

Le coût de la description d'un exemple doit être raisonnable. De plus, les descripteurs ne doivent pas être trop nombreux. Il faut trouver un compromis raisonnable entre la suffisance des descripteurs, le coût de leur obtention et le coût de leur traitement.

Les descripteurs doivent être indépendants de tout ce qui n'est pas significatif. En calcul des structures, les caractéristiques non significatives sont notamment les unités de calcul, les systèmes d'axe de coordonnées...

Deux méthodes permettent la description d'un paramètre dimensionné :

- un système d'unité est imposé et le paramètre est exprimé dans ce système, pour tous les exemples de la base.



- Le paramètre est rendu adimensionnel en le divisant par une quantité "de référence"

Cette approche peut renvoyer certaines informations aux experts et les aider à mieux comprendre leur problème. Mais surtout, il faut noter que cette approche conduit à une solution pratique du problème et avec en plus un accès instantané à une possible solution optimale associée à chaque nouveau cahier de charges, et cela sans avoir à faire de nouveaux essais ou nouvelles études.

Nous allons montrer dans la suite de notre travail, son application particulière à la prévision de la durée de vie d'une structure de forme générale et soumise à un chargement complexe général.

## 3.4 Description générale des problèmes mécaniques

Dans ce court rappel, nous ne donnons que la liste des descripteurs intelligents qui ont été proposés sans décrire les outils mécaniques qui ont été mis au point pour arriver à transformer les descriptions globales primitives des problèmes en des descriptions évoluées, intelligentes, physiquement correctes et susceptibles de s'adapter aux méthodes actuelles d'apprentissage automatique et d'optimisation en particulier par J.M. Hablot (1990) dans sa thèse.

### 3.4.1 Descripteurs matériaux

La plupart des termes classiques en référence avec les coefficients élastiques, les propriétés plastique, de rupture et de fatigue sont obtenus sur l'éprouvette lisse.

Il est facile de réaliser les caractérisations suivantes :

- D'abord, les courbes cycliques à  $\sim \pm 1\%$  de déformation sont obtenues (ce choix est le meilleur puisque la première courbe de traction est une fonction de l'état initial du matériau, mais cela implique que le matériau est cycliquement stable) éventuellement à différentes températures. Généralement, ces courbes sont représentées par :

$$E = E^e + E^p \Leftrightarrow E = \frac{\Sigma}{Y_G} + \left( \frac{\Sigma}{K'} \right)^{1/n'}, \text{ où } K' \text{ et } n' \text{ sont des constantes.}$$

- Puis, les courbes de Wöhler sont construites à partir de chargements uniaxiaux, associés à différentes contraintes moyennes radiales et probabilités de rupture :

$$\Sigma_{max} = \Sigma_a + \Sigma_m, \text{ est la contrainte maximum,}$$

$\Sigma_a$  est la contrainte purement alternée, et  $\Sigma_m$  est la contrainte moyenne

Comme proposé par les experts, ces courbes sont représentées par exemple par une équation de type stress-life (contrainte/nombre de cycles à la rupture ou à l'initiation) :

$$\Sigma_{\bullet} = \sigma'_f (2N_{\bullet})^b - \sigma_D(N), \quad \sigma_D(N) \text{ étant la limite d'endurance à } N \text{ cycles}$$

ou de façon plus pratique, comme dans la représentation de Morrow, par une équation de type strain-life (déformation/nombre de cycles à la rupture ou à l'initiation) :

$$\frac{\Delta E}{2} = \frac{\Delta E^e}{2} + \frac{\Delta E^p}{2} = \frac{\sigma'_f}{Y_G} (2N_{\bullet})^b + \varepsilon' (2N_{\bullet})^c$$

Nous retenons seulement ces 11 coefficients dont 7 qui sont classiques en fatigue :

Module d'Young	$Y_G$
Coefficient de Poisson	$\nu$
Limite élastique en traction macroscopique	$\sigma_v$
Module d'écrouissage en traction macroscopique	$H$
Coefficient d'écrouissage cyclique	$n'$
Coefficient de résistance à la déformation cyclique	$K'$
Contrainte ultime	
Limite élastique cyclique	$\sigma'_v$
Coefficient de résistance à la fatigue	$\sigma'_f$
Exposant de Basquin	$b$
Exposant de ductilité en fatigue	$c$

### 3.4.2 Descripteurs champ variable dans le temps

A chaque instant, n'importe quel champ  $M(\underline{x})$  variant entre  $M_{min}$  et  $M_{max}$  peut être discrétisé par :

- i) l'intervalle  $[M_{min} ; M_{max}]$  qui est divisé en  $n$  segments disjoints  $[M_i ; M_{i+1}]$
  - ii) la proportion relative de surface ( $S_i/S_0$ ) dans la région  $\Omega$  pour qui le scalaire  $M$  appartient au  $i^{\text{ème}}$  intervalle  $[M_i ; M_{i+1}]$
- où  $S_0$  est la surface totale de la région actuelle  $\Omega$ .

Il est parfois nécessaire de décrire l'évolution temporelle des champs. Hablot (1990) a introduit les champs suivants :

- $\phi_1(\underline{x}) = \text{Sup}_t \left[ \frac{M(\underline{x}, t)}{\text{Sup}_{\Omega} M(\underline{x}, t)} \right]$  qui est l'enveloppe au cours du temps, des équivalents

**relatifs** (compris entre 0 et 1). Ces équivalents repèrent à chaque instant les endroits les plus chargés, indépendamment de l'amplitude du chargement au temps étudié. Les tranches pourront être à altitude constante  $\frac{1}{4} ; \frac{1}{2} ; \frac{3}{4} ; 1$ .

Un chargement radial aura tendance à conserver les endroits les plus chargés. Inversement, un chargement complexe pourra à la limite conduire à un champ  $\phi_1(\underline{x})$  équivalent à 1 sur tout le domaine. Dans ce cas, en tout point, à au moins un instant de l'évolution du chargement, le champ  $M(\underline{x})$  obtenu a été maximal sur  $\Omega$ .

- $\phi_2(\underline{x}) = \text{Sup}_t [M(\underline{x}, t)]$  qui est l'enveloppe au cours du temps des équivalents **absolus**, ce qui revient au plus fort chargement. Les altitudes des tranches ont une signification physique et sont choisies correspondant à des valeurs du champ égales à  $M_0, 2M_0, 3M_0, 5M_0, 10M_0, 25M_0$ , où  $M_0$  est une valeur caractéristique du champ  $M(\underline{x})$ .

- $\phi_3(\underline{x}) = r_r \text{Sup}_t \left[ \left\| \text{grad} \left( \frac{M(\underline{x})}{\text{Sup}_\rho M(\underline{x})} \right) \right\| \right]$  qui est l'enveloppe des normes des gradients

rendus adimensionnels des équivalents **relatifs** (ceux calculés pour  $\phi_1(\underline{x})$ ). Il ne s'agit ni du gradient du sup, ni du sup sur le gradient ramené à 1. Ce champ exprime au cours du temps à quels endroits de la structure se trouvent les gradients maximaux, quelle que soit à ce moment l'importance de la valeur du champ absolue.

- $\phi_4(\underline{x}) = r_r \text{Sup}_t [\text{grad}(M(\underline{x}))]$  qui est l'enveloppe des normes des gradients absolus, qui expriment les plus forts gradients atteints au cours du chargement. Il ne faut pas confondre cette quantité avec le gradient du sup, qui n'a aucun sens.

Ici  $r_r$  est une dimension caractéristique. Plusieurs autres quantités ont aussi été définies.

## 3.5 Principes généraux des systèmes experts par apprentissage automatique

### 3.5.1 Analyse de données

C'est une vieille technique qui a été développée pour expliquer, prendre des décisions et pour extrapoler de nouveaux cas. Récemment, avec le Data Mining, elle est redevenue à la mode.

Ces outils sont dédiés aux bases de données dans lesquelles chaque exemple est décrit par un nombre limité de paramètres ou descripteurs et quand un grand nombre d'exemples est disponible.

Ils ont été étendus récemment au cas à plusieurs paramètres ou descripteurs (avec du flou et/ou un manque sur les données) sont nécessaires pour décrire un exemple et seulement quelques exemples sont disponibles.

#### 3.5.1.1 Analyse linéaire discriminante : classement

Supposons qu'il y ait  $g$  classes et  $N$  exemples chacun étant défini par  $m$  variables. L'idée principale est de trouver une représentation spéciale des données, donc un changement de variables tel que les exemples de chaque classe sont concentrés autour de leur centre d'inertie et loin de celles des classes voisines.

Une solution est obtenue en utilisant la matrice de covariance. Représentons les variables dans une base par  $X_{jr}$ .

$I$  étant l'index de l'exemple  $Y_I$  ( $I = 1 ; N$ )  
 $j$  étant l'index du composant ( $j = 1 ; m$ )  
 et  $\alpha$  l'index de la classe ( $\alpha = 1 ; g$ )

Chaque classe n'a pas nécessairement le même nombre d'exemples.

La matrice de covariance totale  $\underline{T}$  est définie par :

$$T_{jk} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_{jI} - \bar{X}_j) (X_{kI} - \bar{X}_k)$$

où  $\bar{X}_j$  est la valeur moyenne de la  $j$  ième variable sur tous les  $N$  exemples. Elle vaut :

$$\bar{X}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ji}$$

L'inverse de cette matrice symétrique permet de définir une norme entre les exemples (distance de Mahalanobis).

Les valeurs propres et les vecteurs propres de  $\underline{T}$  donnent un sous-espace discriminant.

- les termes diagonaux  $T_{jj}$  sont les covariances totales des  $j$ -ièmes variables, et
- les termes extra-diagonaux  $T_{jk}$  représentent les inter-corrélations entre les  $j$ -ième et les  $k$ -ièmes variables.

La matrice d'inter-corrélation  $\underline{B}$  est définie par :

$$B_{jk} = \frac{1}{g} \sum_{p=1}^g n_p \sum_{i=1}^{n_p} (X_{ji}^p - \bar{X}_j^p) (X_{ki}^p - \bar{X}_k^p)$$

où  $\bar{X}_j^p = \frac{1}{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} X_{ji}$  ( $j \in$  classe  $p$  et  $p \in 1 \dots g$ ) est la valeur moyenne de la  $j$ -ième variable de la classe  $p$  qui contient  $n_p$  termes.

Cette matrice mesure la distance entre les classes représentées par leur centre de gravité. Pour la variable  $j$ , le facteur discriminant est défini par :

$$d = \frac{B_{jj}}{T_{jj}} \quad (0 < d < 1)$$

La matrice interne  $\underline{W}$  est définie par :

$$\underline{T} \equiv \underline{B} + \underline{W}$$

Elle donne une mesure de la dispersion dans chaque classe.

### 3.5.1.2 Régression linéaire

Cette méthode est utilisée pour exprimer une conclusion numérique  $C_i$  comme une fonction linéaire des variables  $X_{ij}$ .

$$C = b_0 + \sum_{j=1}^m b_j X_j$$

Les  $b_j$  sont appelés les coefficients de régression.

Ces coefficients sont déterminés par une méthode des moindres carrés afin de minimiser la somme des carrés des erreurs sur chaque exemple. Dans le cas d'une base de  $N$  exemples, chacun défini par une variable :

Observation	C	X
1	$C_1$	$X_{11}$
.	.	.
.	.	.
$N$	$C_N$	$X_{1N}$

On a :

$$C = b_0 + b_1 X_1$$

avec l'erreur :

$$err = \sum_{j=1}^N (C_j - b_0 - b_1 X_{1j})^2$$

On trouve alors les coefficients  $b_0$  et  $b_1$  :

$$b_1 = \frac{\sum (C_j - \bar{C})(X_{1j} - \bar{X}_1)}{\sum (X_{1j} - \bar{X}_1)^2}$$

$$b_0 = \bar{C} - b_1 \bar{X}_1$$

avec  $\bar{C} = \frac{1}{N} \sum C_j$  et  $\bar{X}_1 = \frac{1}{N} \sum X_{1j}$

Ces méthodes de classement et de régression ont été étendues aux cas non linéaires. M. Terrien au LMS les a introduits dans les programmes SEA version numérique.

### 3.5.2 Réseaux neuronaux

Parmi les métaphores biologiques employées de nos jours pour la résolution de problèmes, les réseaux neuronaux artificiels constituent certainement l'approche la plus utilisée. Ils consistent en des modèles plus ou moins inspirés du fonctionnement cérébral de l'être humain. Ils utilisent une base de connaissances (similairement à nos

expériences antérieures) afin de construire un système de neurones qui permettrait de prendre de nouvelles décisions, faire des classifications et prévisions face à de nouvelles situations/problèmes.

Les réseaux neuronaux cherchent des cas/exemples dans la base d'apprentissage, apprennent dessus et développent l'aptitude de classifier correctement de nouveaux cas ou de réaliser des prévisions et prédictions. Ils se prêtent très bien aux problèmes où la base de connaissances n'est pas obligatoirement précise.

Il existe deux grands types de réseaux neuronaux : supervisés et non-supervisés

### ***Réseaux supervisés (classement ou régression non-linéaire)***

Ces réseaux permettent de construire des modèles capables de classifier des cas, de faire des prédictions et prévisions en se référant à d'autres cas préalablement "appris". Dans un réseau supervisé, on montre au réseau comment faire la classification ou les prédictions en lui indiquant un grand nombre de classification/prédictions correctes. Les réseaux backpropagation, GRNN et PNN sont supervisés.

### ***Réseaux non-supervisés (classification)***

Ces réseaux peuvent classifier un ensemble d'exemples de la base d'apprentissage en un nombre spécifié par l'utilisateur de catégories sans savoir par avance comment les organiser. Cette tâche est réalisée en adoptant la technique du clustering (groupement). Les exemples sont regroupés en fonction de leur "proximité" dans un espace à N dimensions où N désigne le nombre de descripteurs d'entrées. Les réseaux Kohonen font partie de cette famille.

### **Remarque**

Aucun de ces types de réseaux ne garantit de donner toujours la solution "correcte", surtout quand la base de connaissance est incomplète ou conflictuelle. Les résultats doivent être évalués en termes de pourcentage de bonnes réponses.

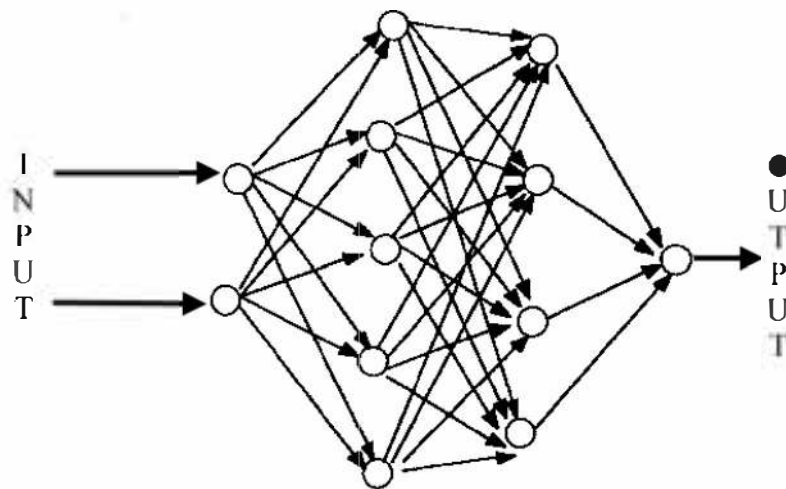


fig. 3.3 - Architecture d'un réseau neuronal à 3 couches

Suivant la méthode adoptée pour la minimisation de la fonction d'erreur, on obtient différentes règles d'apprentissage, dont la plus célèbre est certainement l'algorithme de rétropropagation (backpropagation) de l'erreur qui repose sur une minimisation par descente de gradient d'un critère d'erreur de type moindres-carrés ; il est néanmoins concevable d'utiliser d'autres méthodes de correction des paramètres, par exemple celle du recuit simulé. .

La topologie du réseau est fixée en général. Ce qui peut être un inconvénient puisqu'une autre architecture du réseau pourrait éventuellement donner un résultat meilleur et la seule façon de le savoir c'est de l'essayer à son tour.

Les réseaux sont plus efficaces s'ils disposent de plus de neurones et de couches cachées, mais le temps de recherche des coefficients augmente avec le carré du nombre de connexions.

### 3.5.2.1 Apprentissage

Le réseau "apprend" en ajustant les interconnexions des poids entre les couches. Les réponses produites par le réseau sont périodiquement comparées avec les réponses correctes, et à chaque instant les poids sont ajustés dans la direction des réponses correctes. Eventuellement, si le problème peut être appris, un jeu de poids stable va évoluer en s'adaptant à toutes les bonnes réponses des prédictions.

Considérons le cas simple suivant :

Nous avons  $n_i$  neurones qui correspondent au nombre de descripteurs de chaque exemple de la première couche (éventuellement avec un neurone biais) ; nous avons quelques  $n_j$  neurones cachés dans la couche cachée et  $n_l$  neurones dans la dernière troisième couche qui correspondent au nombre de conclusions.

Sur la première couche l'entrée est égale à la sortie de chaque neurone. L'entrée de chaque neurone dans la seconde couche est égale à

$$I_j = \sum_i w_{ji} O_i$$

qui donnera à la sortie  $O_j$  (en général une fonction sigmoïdale non linéaire )

$$O_j = \frac{1}{1 + \exp(-I_j)}$$

Puis, dans la dernière couche nous aurons

$$I_l = \sum_i w_{lj} O_i$$

Avec la sortie  $O_l = \frac{1}{1 + \exp(-I_l)}$

L'erreur sur chaque exemple est définie par:

$$E_p = 0.5 \sum (t_{pl} - O_{pl})^2 \quad \text{où } t_{pl} \text{ est la valeur réelle.}$$

Le réseau est défini quand les poids  $w_{ji}$  et  $w_{lj}$  sont déterminés et tel que l'erreur est minimale pour chaque exemple.

Nous avons ensuite à chercher le minimum d'une fonction scalaire de ces poids. Une méthode du gradient peut être utilisée.

$$\frac{\partial E_p}{\partial w_{lj}} = \frac{\partial E_p}{\partial O_{pl}} \frac{\partial O_{pl}}{\partial w_{lj}} = - (t_{pl} - O_{pl}) \frac{\partial O_{pl}}{\partial w_{lj}}$$

$$\frac{\partial O_{pl}}{\partial w_{lj}} = \frac{\partial O_{pl}}{\partial I_l} \frac{\partial I_l}{\partial w_{lj}}$$

Puis, en posant  $\delta_l = (t_l - O_l) O_l (1 - O_l)$  nous définissons les nouveaux poids par

$$w_{lj}^{k+1} = w_{lj}^k + \eta \delta_l O_l + \alpha (w_{lj}^k - w_{lj}^{k-1})$$

où  $\eta$  est le coefficient d'apprentissage et  $\alpha$ , le facteur moment.

Il a été montré que l'erreur pouvait être prise comme :

$$\delta_h = (t_h - O_h) O_h \sum_{l=0}^{l=n_l} w_{lh} \delta_l$$

et les nouveaux poids sont calculés de la même manière :

$$w_{lj}^{k+1} = w_{lj}^k + \eta \delta_l O_l + \alpha (w_{lj}^k - w_{lj}^{k-1})$$

Quand tous les exemples ont été traités, une "période" est alors effectuée. Le point le plus difficile est de savoir quand arrêter l'apprentissage. Généralement, la meilleure solution consiste à optimiser le réseau en appliquant le réseau courant à une base d'exemples indépendante dite de test. Cette façon de procéder est un moyen d'estimer la capacité du réseau à pouvoir se généraliser et à donner de bons résultats sur de nouvelles données.

Des réseaux plus sophistiqués peuvent être construits. Par exemple, dans le programme Neuroshell de Ward Systems, plusieurs types de réseaux sont disponibles.

### 3.5.2.2 Architecture du réseau Probabilistic Neural Networks (PNN)

Les réseaux PNN sont capables d'apprendre sur une base d'exemples bruitée en séparant les données en un nombre spécifique de classes de sortie. Ils font partie des réseaux à 3 couches. La couche d'entrée reçoit les exemples servant à l'apprentissage et la couche de sortie dispose d'un neurone pour chaque classe possible. Il doit y avoir autant de neurones dans la couche cachée que d'exemples d'apprentissages.



Le réseau produit des activations dans la couche de sortie correspondant à la fonction de densité de probabilité à estimer pour cette classe. La sortie la plus grande représente la classe la plus probable.

Le nombre de neurones dans la couche d'entrée est égal au nombre de descripteurs d'entrées du problème et le nombre de neurones dans la couche de sortie correspond au nombre de classes.

Comme les réseaux PNN doivent classer les exemples, deux ou plusieurs descripteurs de sorties (classes) sont nécessaires. Toutes les valeurs des classes de sortie doivent être égales à 0 ou à 1.

Les réseaux PNN travaillent en comparant les exemples par rapport à la distance les séparant. NeuroShell 2 offre deux types de calculs de cette distance :

- La “*Vanilla Euclidean distance metric*”, recommandée pour la plupart des réseaux, parce qu'elle donne les meilleurs résultats
- La “*City Block distance metric*”, plus rapide à calculer mais qui est moins précise en général. Elle correspond à la somme des valeurs absolues des différences entre l'exemple et le vecteur poids de chaque neurone .

Lorsqu'une base de test est utilisée, la technique du calibrage (“*Calibration*”) permet de trouver le meilleur facteur de lissage global associé au problème. La réussite d'un réseau PNN dépend de ce facteur, qui dépend lui-même de la qualité des exemples de la base de test.

Plusieurs techniques de recherche du facteur de lissage global sont possibles. La recherche par algorithme génétique a été retenue : les facteurs de lissage locaux associés à chaque descripteur d'entrée sont d'abord calculés puis le facteur de lissage global est déduit. Ce facteur local est en quelques sortes un ajustement utilisé pour modifier le facteur de lissage global afin de fournir une nouvelle valeur pour chaque entrée.

Cette technique génère des réseaux qui s'adaptent à la base de test mais le temps d'apprentissage est plus long. Si la base de test n'est pas suffisamment représentative, les réponses prédites sur de nouveaux exemples seront probablement mauvaises.

### 3.5.2.3 Architecture du réseau GMDH

La technique appelée Group Method of Data Handling (GMDH) a été inventée par le Russe A.G. Ivakhnenko puis améliorée par beaucoup d'autres chercheurs, comme A.R. Barron. Elle est aussi connue sous le nom de réseaux polynomiales (“*polynomial nets*”).

Les réseaux GMDH opèrent en construisant successivement des couches. Ces couches sont reliées entre elles par des connexions complexes représentant les termes élémentaires du polynôme qui sont créés à partir de régressions linéaires et non-linéaires.

Dans chaque couche, un polynôme de degré 3 à 3 variables est construit dans le cas général:

$$P(X_1, X_2, X_3) = C_1 + \sum C_m X_i + \sum C_m X_i X_j + \sum C_m X_i X_j X_k$$

où  $C_1, C_2, C_3, \dots$  sont les coefficients du polynôme, et  $X_1, X_2$  et  $X_3$  sont les variables d'entrées.

Dans la première couche, les neurones sont les variables d'entrées du problème et les neurones de la seconde couche sont des polynômes comme ceux ci-dessus. Les couches ultérieures sont construites soit à partir des variables d'entrées, soit à partir des polynômes de la couche précédente ou soit à partir des deux. Ce sont essentiellement des polynômes de polynômes qui sont calculés. Seuls les meilleurs sont retenus par l'algorithme. Ils sont appelés survivants. Ce processus continue jusqu'à obtenir le meilleur réseau (selon un critère de sélection prédéfini).

Le résultat du réseau est représenté par un polynôme complexe. Les variables d'entrées les plus significatives sont indiquées par le système. L'avantage d'un tel réseau repose sur la construction de modèles très complexes en évitant le sur-apprentissage (overtraining).

Plusieurs paramètres permettent de contrôler l'architecture et la convergence du réseau :

- Nombre maximal de variables d'entrées à considérer dans chaque polynôme ( $\leq 3$ )
- Type de produits croisés ( $X_1X_2$  ou  $X_1X_2X_3$ )
- Degré maximal du polynôme ( $\leq 3$ )
- Type de critère de sélection : PSE (Prediction Squared Error), Régulation, ...

Le critère de sélection détermine quels candidats de survivants vont réellement survivre, pour pouvoir les passer à la prochaine couche. C'est le paramètre de contrôle le plus important des réseaux GRNN. De plus, une fonction objectif détermine à tout moment l'acceptabilité du modèle. Le point le plus difficile reste l'arrêt de l'apprentissage sans sur-apprentissage.

Le critère de sélection par Régulation a été utilisé lors de nos apprentissages. Il est applicable lorsqu'une base de test est définie et correspond à la moyenne du carré des erreurs du modèle sur cette base. Il est similaire au Calibrage dans les réseaux PNN dans le sens que le réseau utilise la meilleure architecture construite, sur la base de test.

## 3.6 Logiciels industriels utilisés

### 3.6.1 NEUROSHELL

**NeuroShell 2** est un logiciel qui mime l'aptitude du cerveau humain à classer des données, à faire des prédictions ou à établir des décisions en se référant à l'expérience passée.

**NeuroShell 2** permet de bâtir des problèmes sophistiqués, résoudre des applications sans avoir recours à la programmation. En indiquant au réseau ce qu'il faut prédire ou classer, **NeuroShell 2** est capable d'"apprendre" sur une base d'exemples avec

conclusions connues puis de réaliser ses propres classifications, prédictions ou décisions quand de nouvelles données sont présentées.

Comme le cerveau, les réseaux neuraux ne garantissent pas toujours une réponse “correcte”, surtout si certaines données sont manquantes ou bruitées. Les résultats doivent être évalués en terme de pourcentage de bonnes réponses.

C'est un générateur de systèmes experts par apprentissage automatique

### 3.6.2 SEA

SEA (générateur de Systèmes Experts par Apprentissage) a été élaboré au Laboratoire des Mécaniques des Solides à l'Ecole Polytechnique. Ce logiciel a vu sa conception débuter en 1986 et est devenu opérationnel en 1988.

Le but initial recherché par ses concepteurs était de réaliser des systèmes experts en mécanique alors que les problèmes à traiter restaient encore mal connus. Il a été utilisé pour de multiples applications scientifiques et techniques dans des domaines très divers (prédiction d'erreurs lors de calculs en élastoplasticité, contrôle de fabrication, surveillance de machines, détection de pannes, diagnostics médicaux ...).

### 3.6.3 GENEHUNTER

**GeneHunter** est un logiciel d'optimisation par Algorithme Génétique de la firme Ward Systems. Il est fourni sous forme de dll Windows ou de macro complémentaire à intégrer dans Excel. L'appel de ces dll dans un programme Visual-Basic, C ou Delphi permet une utilisation personnalisée et générale du logiciel. Nous avons utilisé ce concept dans le programme FatSimPro que nous avons développé pour les calculs des fluctuations.

#### *Bref rappel sur les Algorithmes Génétiques*

Les algorithmes génétiques ont leur utilisation dans les problèmes d'optimisation où la fonction coût n'est pas dérivable et/ou quand certaines des variables de conception sont discrètes ou ne peuvent prendre que des valeurs particulières.

Ces algorithmes impliquent toujours un grand nombre d'itérations. Toutefois, ils sont aidés par le fait qu'une population d'individus d'une certaine espèce s'adaptent, après plusieurs générations, à son environnement. En d'autres termes, les membres de cette population tendront à disparaître s'ils ne peuvent pas s'ajuster, mais vivront pour se reproduire s'ils s'ajustent relativement bien ; les bons parents donneront les meilleurs enfants ; et quelques caractères génétiques de ces parents se retrouveront dans les chromosomes des enfants (évolution de Darwin).

Le principe des algorithmes génétiques est expliqué simplement de la façon suivante :

D'abord, chaque point ou individu  $x$  est codé, i.e., représenté par une chaîne ou une liste de chromosomes (ce schéma de codage est un art et dépend du problème). Chaque chromosome comporte une séquence bien définie de gènes. Ce codage doit permettre la représentation continue ou discrète des variables comme un objet dans une liste ou un objet exclusif dans une liste.

Un chromosome *continu*, est représenté selon la précision souhaitée par 8, 16 ou 32 gènes, et qui sont implémentés dans un ordinateur comme des octets binaires. Les valeurs distinctes d'un gène sont 0 et 1, et sont appelés allèles. Les chromosomes *discrets* sont employés dans les problèmes combinatoires.

Ainsi, chaque point possède une représentation interne dans l'algorithme, mais correspond finalement à un point dans le monde réel (décodage).

Généralement, les itérations sont basées sur :

- la création d'une population d'individus représentés par leurs individus
- via une fonction "fitness", l'évaluation de la performance de chaque individu
- la génération d'une nouvelle population grâce aux opérations de :
  - *sélection*, proportionnelle à leur performance
  - *croisement et mutation* sur les individus
- la substitution par une nouvelle population et boucle jusqu'à atteindre un certain critère.

Chacune des ces boucles est appelée *génération*.

Au départ, la population est générée de façon aléatoire ; puis quelques opérateurs génétiques améliorent la nouvelle population :

- **croisement**: 2 chromosomes ou parents, sont coupés à la même position (choisis de façon aléatoire) pour échanger ensuite leur partie pour générer 2 nouveaux chromosomes ou enfants.
- **mutation**: une petite perturbation est introduite de façon aléatoire dans le chromosome
- **reproduction**: de nouveaux individus sont créés après le croisement et la mutation
- **sélection**: il est nécessaire de favoriser les individus avec la meilleure performance

## *Points essentiels à retenir*

Dans de nombreux problèmes industriels réels comme en conception des structures, il n'y a pas de solution précise et les experts ne comprennent pas tout, même si de nombreux progrès ont été faits.

L'approche de la Conception Optimisée InTelligente peut permettre aux experts eux mêmes de mieux comprendre leur problème. Mais surtout conduit à une solution pratique du problème et avec en plus un accès instantané à une solution optimale pour chaque nouveau cahier de charges.

Le choix d'une bonne description est primordial pour toute tentative d'apprentissage automatique. De la qualité de ces descripteurs et des exemples disponibles dépend la qualité des règles construites. Ainsi, une partie des descripteurs peuvent être inutile ou non pertinents ou alors manquante pour certains exemples de la base.

La première étape de cette nouvelle approche repose sur la construction d'une base de données d'exemples avec conclusions connues. Cette base de données est créée d'une part à partir de la récupération du savoir et d'autres parts à partir d'expériences et de simulations numériques.

La description de chaque exemple est d'abord faite par des descripteurs primitifs qui (généralement extraits des données expérimentales disponibles).

Ensuite en suivant les experts qui ont indiqué toutes les variables et descripteurs qui sont essentiels au problème, il faut transformer la description primitive en une description évoluée avec l'introduction des descripteurs intelligents et quasi-physiques (utilisation des connaissances et théories existantes). Ces descripteurs peuvent être en plus grand nombre mais surtout, ils servent à décrire tous les exemples avec le même format (même type et même nombre de descripteurs) et donc de faire la fusion des données disponibles.

Cette description assure la fusion des cas : il n'y a aucune différence entre la description d'une éprouvette lisse, entaillée et une structure complexe réelle. Ces descripteurs d'entrées peuvent être des nombres, des booléens, des chaînes de caractères, des noms de fichiers qui donnent accès à des bases de données, des courbes, des images. Les conclusions peuvent être des classes (bon/mauvais ...) ou des nombres (durée de vie, coût...)

La seconde étape repose sur la génération des règles à partir de la base d'exemples en utilisant un logiciel d'apprentissage automatique. Un niveau de confiance est associé à l'ensemble des règles obtenues.

Dans la troisième étape, si ce niveau est considéré comme suffisant, il est possible de les appliquer à des nouveaux cas.

Dans la quatrième étape, si cela est nécessaire, il est possible de traiter le problème de l'optimisation ou problème inverse, en donnant des bornes (cahier de charges) sur les conclusions et les descripteurs de conception ainsi qu'une fonction objectif (prix, durée de vie...)

Une telle démarche va être appliquée à présent au problème de la fiabilité/fatigue des structures.

## *Partie 2*

# *Application de la Nouvelle Approche à la Fatigue Polycyclique des Structures*

“ Le facteur d'endommagement ?  
C'est comme Dieu !  
Tout le monde en parle mais personne ne l'a  
encore jamais vu ”

*J. Zarka*



## Position du problème

La fiabilité des structures est une préoccupation majeure pour beaucoup de concepteurs. Plusieurs modes de défaillances peuvent entraîner la ruine partielle ou totale d'une structure. Le mode de ruine par fatigue est très important, en particulier dans les assemblages soudés qui sont repérés par les experts comme les sites privilégiés critiques. Les chargements de service, en général à plusieurs paramètres de chargement et aléatoires, sont tels qu'ils n'entraînent pas la ruine par déformation excessive mais peuvent provoquer le processus de fatigue par leur caractère répété.

Dans une analyse fiabiliste à la fatigue :

- i) il est nécessaire de prendre en compte les **incertitudes** sur la géométrie, les propriétés mécaniques, les chargements,
- ii) l'état initial réel est souvent **inconnu**,
- iii) et aussi, il est très difficile d'avoir une représentation mathématique fiable du comportement complexe des matériaux et même de contrôler les **erreurs** des simulations numériques ou des essais.

Dans le temps limité de la thèse, nous n'avons pu considérer que les chargements déterministes à amplitudes variables à plusieurs paramètres. Les incertitudes sur la géométrie, les matériaux, les chargements et l'état initial n'ont pas été prises en compte. Mais il serait facile, dans un deuxième temps, de les considérer via des simulations de type Monte-Carlo, grâce à l'intégration des règles de conception à la fatigue que nous avons construites et qui sont immédiates à vérifier même quand plusieurs milliers d'analyses sont requises.

L'analyse simplifiée des structures inélastiques et des règles de fatigue, de dommage et de cumul sont employées mais les résultats sont couplés avec ceux issus des retours d'expérience sur des structures réelles par les techniques d'apprentissage automatique et d'optimisation génétique.

Nous avons bâti une **nouvelle approche pour l'analyse à la fatigue et à la fiabilité des structures**. Nous avons pu ramener de façon systématique globale de la structure à **une analyse locale sur une fenêtre 2D de taille donnée avec un chargement cyclique radial caractéristique**.

Notre avons fondé notre approche sur la Conception Optimisée InTelligente des Matériaux et des Structures. Une éprouvette lisse comme toute autre structure complexe, constituée de plusieurs matériaux et soumise à tout type de chargement, sont analysées de la même façon grâce à une seule DESCRIPTION évoluée intelligente donnée.

Pour atteindre notre description intelligente, il nous a fallu :

- 1- Etablir une règle d'équivalence entre 2 chargements vis à vis du dommage. Celle-ci nous permet ensuite de nous ramener systématiquement à un chargement cyclique radial équivalent d'amplitude donnée et à un nombre de cycles défini.
- 2- Trouver la description convenable de l'analyse à la fatigue et à la fiabilité des structures qui assure la fusion de tous les cas





# Chapitre 4

## Quantification d'un chargement vis à vis du dommage en fatigue

### 4.1 Introduction

Les structures réelles sont généralement soumises à des chargements de service qui sont de nature aléatoire et multiaxiale. La prise en compte de tels chargements est primordiale pour toute tentative correcte de la prévision de la durée de vie en fatigue de la structure. Des méthodes expérimentales ou par simulations numériques ont été proposées. Elles supposent souvent une représentation du chargement plus simple qui surtout permet de faire les essais comme les simulations de façon accélérée.

Dans une analyse à la fatigue classique, l'histoire du champ de contraintes régnant dans la structure est d'abord calculée par des simulations numériques en élasticité linéaire ou en élastoplasticité. Puis une phase de reconnaissance et d'extraction des cycles de contraintes intervenant dans le dommage par fatigue est réalisée par l'intermédiaire de méthodes de comptage habituelles (le plus souvent, la méthode dite rainflow). Enfin l'utilisation d'une règle de cumul de dommage permet de statuer sur la tenue en fatigue de la structure après l'application d'un nombre donné de cycles ou de blocs de chargements.

Une telle démarche bute devant quelques verrous bloquants. En effet, durant un chargement multiaxial, on ne sait pas en général définir un cycle et encore moins trouver un chargement équivalent "accéléré" vis à vis du dommage.

De plus, la plupart des méthodes de comptage sont fondées sur des aspects purement mathématiques ; elles ignorent le comportement réel des matériaux en présence et ne prennent pas en compte les aspects géométriques de la structure elle-même.

Enfin, le facteur (ou tenseur) d'endommagement reste encore l'objet de plusieurs recherches. *Tout le monde parle d'un tel facteur (ou tenseur) mais personne ne l'a encore jamais "vu"* ni caractérisé physiquement : est-ce le taux de microfissuration, la déformation plastique... ? Il est impossible de le mesurer durant le trajet complet du chargement, même si, avant la rupture, quelques petits changements sur les propriétés

élastiques ont été détectés expérimentalement. Seules les valeurs 0 : état initial et 1 : état final, sont en principe connues.

Notre objectif n'est pas d'aller à l'encontre des nombreuses théories existantes mais de décrire une nouvelle approche possible qui (de notre point de vue, évidemment) a une signification plus physique et qui est très facile à mettre en œuvre à l'échelle locale du matériau comme à l'échelle globale de la structure. Cependant, dans notre étude, nous n'avons considéré que le stade de l'initiation à la fatigue avec des propriétés sensiblement isothermes. Pour prendre en compte la propagation des fissures ou/et les modifications des propriétés avec les variations de température, d'autres descripteurs devront être introduits.

Notre idée principale est de trouver, en terme de "dommage" induit au niveau du matériau puis au niveau de la structure une description ou "mesure" discriminatoire du chargement réel complexe variable. Cela va être fait essentiellement par l'introduction d'une règle d'équivalence entre deux chargements puis par la définition d'un chargement équivalent simple susceptible de représenter le chargement réel.

Dans cette partie, afin de permettre la compréhension de notre approche, le cas des chargements variables à un paramètre est d'abord abordé. Quelques exemples d'illustration sur des données réelles de fatigue sont fournis. La généralisation de la méthode aux cas des chargements à plusieurs paramètres (à amplitudes variables ou non) est ensuite présentée.

## 4.2 Hypothèses générales

### 4.2.1 Hypothèses sur le choix du volume élémentaire de référence (VER)

L'état mécanique d'un milieu continu est décrit à l'aide de grandeurs macroscopiques (contraintes et déformations) définies en tout point  $\underline{x}$  du corps. Plus précisément, cela revient à définir autour du point  $\underline{x}$  un volume élémentaire représentatif  $V(\underline{x})$  supposé homogène et isotrope, dans lequel les tenseurs des contraintes  $\underline{\Sigma}(\underline{x})$  et des déformations  $\underline{E}(\underline{x})$  sont constants. Le volume de  $V(\underline{x})$  est de l'ordre de celui d'une maille de la discrétisation de la structure en élément finis ou de la taille d'une jauge de contrainte. C'est ce que l'on appelle l'échelle macroscopique.

En réalité, dans le cas des métaux, le V.E.R.  $V(\underline{x})$  contient de nombreux cristaux d'orientation, de formes et d'états internes différents. Cela amène à se poser la question du bon choix de la taille du VER, qui est à la fois, l'infiniment grand à l'échelle des cristaux et l'infiniment petit à l'échelle de l'ingénieur.

Plusieurs échelles physiques sont susceptibles d'être utilisées dans un métal pour l'élément de volume autour du point  $\underline{x}$  (figure 36). Ces échelles s'étalent de celle du polycristal (encore appelé échelle mésoscopique) qui est de l'ordre d'une centaine de microns à l'échelle du monocristal parfait (ou échelle microscopique) avec une taille avoisinant quelques dizaines de microns.

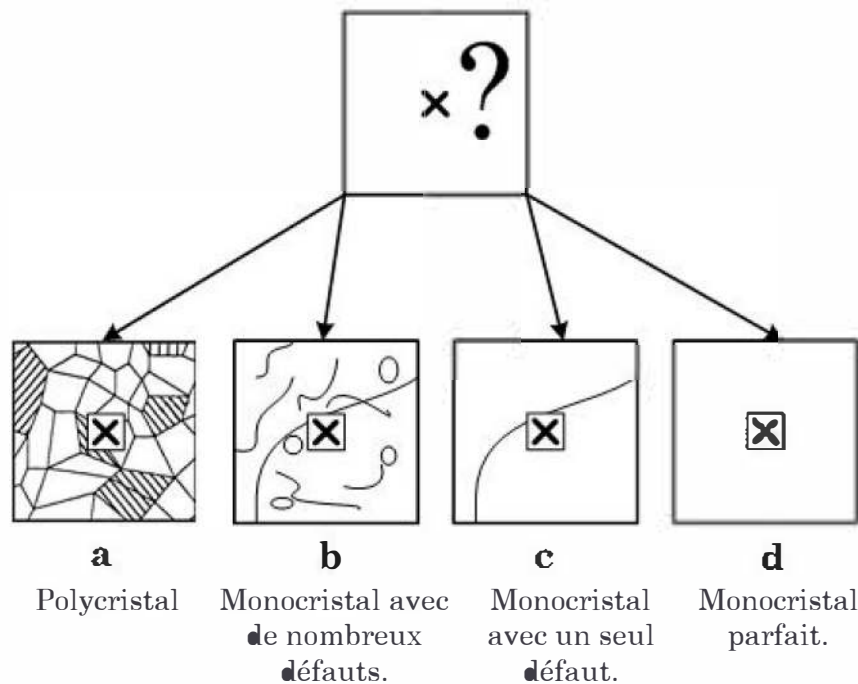


fig. 4.1 : Différentes échelles physiques possibles pour l'élément de volume

A chacune de ces échelles (a, b, c, d) vont être attachées des relations de comportement différentes. Il est facile de voir, qu'en choisissant des échelles de plus en plus petite, (ce sont à chaque fois différentes échelles microscopiques) qu'il sera de plus en plus facile d'exprimer ces relations de comportement. Mais, il sera, par contre, de plus en plus difficile de revenir à l'échelle macroscopique du polycristal (fig. 36) qui est celle qui concerne pratiquement l'ingénieur. Il faut donc trouver une échelle microscopique optimale. Cette échelle semble être celle du monocrystal avec de nombreux défauts. De nombreuses théories ont été proposées pour décrire le comportement du monocrystal métallique sous chargement complexe (comme celle de J. Zarka (1968) par exemple).

Mais, une fois ce comportement parfaitement déterminé, il faut ensuite interpréter celui du polycristal !

Dans le polycristal, comme les déformations plastiques dans chaque cristal ne sont pas en général compatibles entre elles, un champ de contraintes internes se développe ; cela signifie qu'il y'a des interactions entre les cristaux. Nous pouvons par exemple assimiler chaque cristal dans le VER à une tige du système des 6 barres articulées (fig. 4.2) et dire qu'il y'aura en fonction des caractéristiques physiques des joints de grains, images des rotules A, B, C et D, des interactions différentes entre les cristaux.

Quand les déformations sont encore très petites, on a observé expérimentalement qu'il y'a continuité du champ de déplacement à la traversée des joints de grains. Dans ce cas, seules les propriétés des cristaux interviennent et des calculs approchés mais raisonnables peuvent être directement effectués.

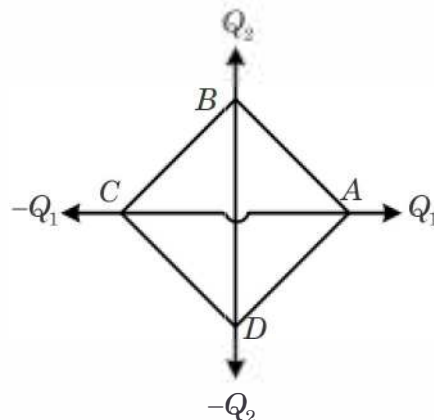


fig. 4.2- Modèle des 6 barres articulées

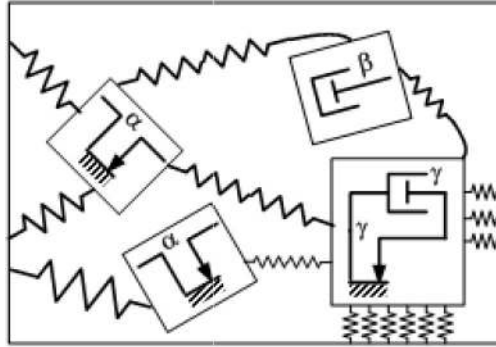
Dans la suite, nous retenons comme VER un élément de volume polycristallin qui contient de nombreux cristaux pour assurer une bonne représentativité du comportement global du matériau utilisé.

Nous supposons aussi que les modèles proposés pour l'étude de l'écroutissement lors des expériences statiques peuvent également s'appliquer pour l'étude de la fatigue, notamment pour prévoir les contraintes locales dans les grains.

En effet, les phénomènes de glissement observés dans les grains des échantillons soumis à la fatigue, ne sont pas fondamentalement différents de ceux observés sur des échantillons soumis à des expériences d'écroutissement. Dans ces dernières toutefois, on voit en général une déformation d'ensemble des grains plus importante car le niveau de contraintes appliquées est plus élevé. Les principales observations au microscope et l'inspection aux rayons X ont permis de faire ressortir la formation de bandes de glissements localisées dans les grains les plus défavorablement orientés lors de l'application des premières charges au-dessus de la limite d'endurance. Une grande partie des autres grains ne subit pas de changement. Ces bandes de glissements s'épaississent au cours des cycles ultérieurs et au bout d'un nombre de cycles suffisamment grand, des fissures apparaissent dans les grains ; en se rejoignant elles entraîneront la formation d'une macrofissure catastrophique.

Nous ne cherchons pas à décrire tous les phénomènes physiques dans le VER, mais d'utiliser un cadre assez convenable qui fournirait le comportement global vis à vis de la fatigue à l'aide de quantités "intelligentes" de l'échelle locale.

Nous préférons à l'approche méso/macro (Mandel/Hill, 1963, 1968), l'approche locale structurelle ou plus précisément l'approche systématique de J. Zarka ; L'élément de volume représentatif du matériau est formé par des sous-éléments semblables aux patins (type  $\alpha$ ), aux amortisseurs (type  $\beta$ ) et aux groupements patin-amortisseur (type  $\gamma$ ) qui sont couplés entre eux par des sous-éléments semblables aux ressorts linéaires. Cette approche reste physiquement raisonnable car elle retient bien les interactions fondamentales entre les mécanismes inélastiques locaux et les agrégats qui impliquent des comportements globaux particuliers et entièrement différents des comportements locaux.

fig. 4.3 - Assemblage général de sous-éléments (type  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ )

## 4.2.2 Hypothèses sur le chargement

Les actions extérieures auxquelles sont assujetties les pièces mécaniques sont très souvent de nature à amplitudes variables et souvent aléatoires et modélisées par des processus stochastiques  $X(t)$ .

Il existe fondamentalement deux façons de traiter un problème de vibrations aléatoires (le comportement est supposé linéaire) :

- soit par une analyse temporelle. Dans ce cas, la relation entre l'entrée et la sortie s'exprime par une intégrale de convolution, caractéristique d'un système linéaire. Par conséquent, le calcul de la réponse de la structure dans le domaine temporel revient à intégrer par pas de temps cette intégrale de convolution, ce qui rend l'analyse très coûteuse.
- soit par une analyse fréquentielle. Dans ce cas, l'opération de convolution correspond à une simple multiplication. Par conséquent, la réponse de la structure à une excitation aléatoire est calculée plus rapidement dans le domaine spectral. Les excitations, comme les réponses, sont alors caractérisées, non pas par des séquences temporelles, mais par des densités spectrales de puissance.

Dans ce travail, ces approches ne sont pas retenues. Nous nous limitons à une analyse déterministe et temporelle de la tenue en fatigue de la structure. Nous allons nous intéresser seulement à des trajectoires du processus  $X(t)$ . Ces dernières peuvent être générées plus ou moins facilement à partir des propriétés statistiques et/ou spectrales de  $X(t)$ .

Nous faisons aussi l'hypothèse que les processus  $X(t)$  sont stationnaires à puissance finie et ergodiques. Un processus est stationnaire si sa structure de probabilité n'est pas affectée par un changement de l'origine des temps. La propriété d'ergodicité permet de remplacer des moyennes d'ensembles par des moyennes temporelles estimées à partir d'une trajectoire  $x(t)$  (ou réalisation) unique du processus (hypothèse très pratique dans le cas de données insuffisantes).

### Remarques :

Le processus  $X(t)$  est souvent non stationnaire. C'est le cas par exemple des effets à long terme de la houle sur les structures marines, ou des effets de la turbulence

atmosphérique sur certaines structures souples. Pour ces phénomènes, il est possible de considérer (Kree et Soize, 1983) deux échelles de temps : une échelle dite à "court terme" (par exemple 10 minutes à 1 heure pour la turbulence atmosphérique ; 3 à 6 heures pour la houle), et une échelle à long terme (plusieurs années). Le modèle probabiliste à "court terme" est alors décrit pour des conditions de stationnarité locale, les paramètres à "court terme" étant fixés. Ces paramètres conditionnent tout le modèle probabiliste à "court terme", et le modèle probabiliste à "long terme" est obtenu par une description probabiliste à "long terme" des paramètres à "court terme" (on fait appel aux densités de probabilité conditionnelles).

### Définitions et nomenclatures des types de chargement

Dans la suite, nous distinguons quatre types de chargements :

1. les chargements complètement cycliques (CC),
2. les chargements cycliques par bloc (CB),
3. les chargements à amplitude variable à bande étroite (AV<sub>E</sub>),
4. les chargements à amplitude variable à bande large (AV<sub>L</sub>),

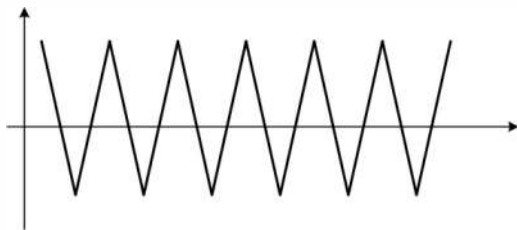


fig. 4.4 - Chargement complètement cyclique (CC)

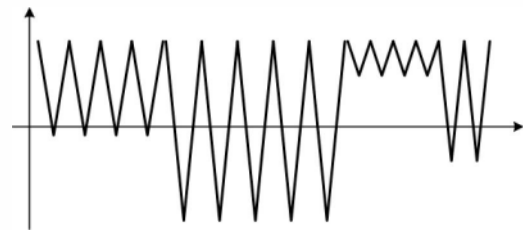


fig. 4.5 - Chargement cyclique par bloc (CB)

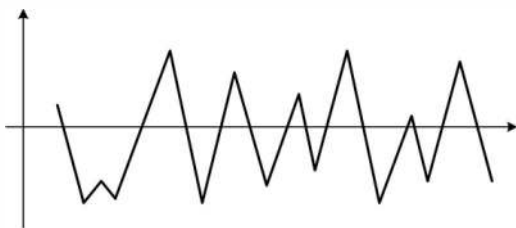


fig. 4.6 - Chargement à amplitude variable à bande étroite (AV<sub>E</sub>)

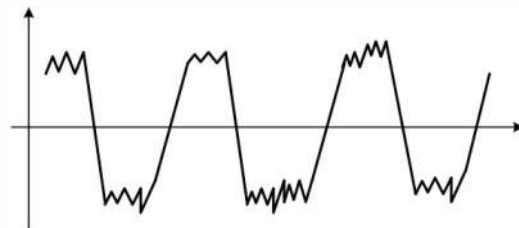


fig. 4.7 - Chargement à amplitude variable à bande large (AV<sub>L</sub>)

Il est possible de discriminer les deux types de chargements à amplitudes variables (AV<sub>E</sub> et AV<sub>L</sub>) en introduisant le paramètre  $\omega$  de largeur de bande :

$$\omega = \sqrt{1 - \frac{U_0(x, I)}{\text{Max}_{\leq \omega}(x, I)}}$$

où  $U_0(x, I)$  est le nombre de franchissement en croissant du niveau zéro par la fonction  $x(t)$  contenus dans l'intervalle de temps  $I$ ,

et  $\text{Max}_{\leq \omega}(x, I)$  est le nombre total de maxima locaux l'intervalle  $I$ .

On voit que  $\omega \in [0;1]$ . Si  $\omega \rightarrow 0$  alors  $U_0(x, I) \rightarrow \text{Max}_{\leq \infty}(x, I)$ , ce qui signifie que sur l'intervalle de temps  $I$ , le nombre de maxima locaux de  $X(t)$  est sensiblement égal au nombre de franchissement en croissant du niveau zéro par  $x(t)$ . Le graphe de  $x(t)$  est alors du type montré sur la fig. 4.6.

Par contre, si  $\omega \rightarrow 1$ , alors  $\text{Max}_{\leq \infty}(x, I) \gg U_0(x, I)$ , ce qui signifie que sur l'intervalle de temps  $I$ , le nombre de maxima locaux de  $x(t)$  est très supérieur au nombre de franchissement en croissant du niveau zéro par  $x(t)$ . Le graphe de  $x(t)$  est alors du type montré sur la fig. 4.7.

Si  $x(t)$  est une trajectoire d'un processus stochastique  $X(t)$ , alors il faut interpréter ce que nous venons de définir en moyenne. Ainsi le paramètre  $\omega$  est défini par :

$$\omega = \sqrt{1 - \frac{E(U_0(I))}{E(\text{Max}_{\leq \infty}(I))}}$$

Le paramètre  $\omega$  est appelé largeur de bande du processus  $X(t)$ . Si  $\omega \rightarrow 0$ , le processus est dit à bande étroite et ses trajectoires sont du type montré à la fig. 4.6. et si  $\omega \rightarrow 1$ , le processus est dit à bande large (fig. 4.7).

### 4.2.3 Hypothèses sur les mécanismes mis en jeu

A l'échelle de l'élément de volume représentatif, nous considérons deux comportements complètement indépendants :

#### Echelle macroscopique

Nous ne nous intéressons qu'à la fatigue à grand nombre de cycles. Ceci implique qu'à l'échelle macroscopique, après un certain "temps", la structure doit atteindre systématiquement un état limite adapté, donc sans variation du champ de déformation plastique *macroscopique globale*.

Nous avons vu au chapitre 2 une analyse élastoplastique par les méthodes soit incrémentales, très coûteuses, soit directes (type Ladeveze, Nguyen/Dang-Van) ou encore simplifiées (type Zarka/Casier) très rapides, permet l'évaluation du champ de contraintes résiduelles à l'état stabilisé en considérant le comportement macroscopique du matériau (essentiellement, la limite d'élasticité et le module d'écrouissage macroscopique du matériau).

L'état de contraintes macroscopique stabilisé est noté  $\underline{\Sigma}$ . Le trajet de chargement en contraintes est dans le cas général multiaxial non-radial.

Nous supposons que le matériau obéit à une loi élastoplastique à écrouissage quelconque comme cela est décrit dans le cadre de la représentation de Zarka. Le tenseur de déformation macroscopique  $\underline{E}$  s'écrit :

$$\underline{E} = \underline{E}^e + \underline{E}^p$$



où  $\underline{E}^e$  et  $\underline{E}^p$  sont les déformations élastiques et plastiques macroscopiques.

### Echelle microscopique

En se plaçant à une échelle microscopique, c'est à dire celle d'un volume élémentaire représentatif (V), nous devons représenter le fait expérimental que lorsque la limite d'endurance (macroscopique) est dépassée, certains mécanismes d'endommagements microscopiques locaux sont activés et vont contribuer au dommage dans ce volume.

Nous supposons qu'il y a dans ce volume un assemblage de micromécanismes dont nous ne voulons pas connaître la vraie signification physique (uniquement ici pour simplifier, sans influence de la vitesse de chargement...). Par analogie, nous continuerons de parler de "limite élastique" et de "déformation plastique" pour caractériser l'état interne local d'endommagement du volume V.

Les déformations induites dans ce comportement microscopique ne sont pas visibles. Nous désignons par  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  les "contraintes" et "déformations plastiques" locales.

Au niveau des mécanismes microscopiques (que nous ne cherchons pas à identifier de façon réelle, mais que nous prendrons en nombre de plus en plus en grand afin d'assurer une bonne représentation des essais), nous écrivons, en suivant directement le formalisme de Zarka :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sigma}}_{\alpha} &= \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\Sigma}} - \underline{\underline{y}}_{\alpha} \\ \underline{\underline{y}}_{\alpha} &= \underline{\underline{B}} \alpha \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^p &= {}^t \underline{\underline{A}} \alpha\end{aligned}$$

où le tenseur de localisation  $\underline{\underline{A}}$  permet d'associer à la contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}}$  la contrainte microscopique localisation élastique  $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{\Sigma}}$ ,

$\underline{\underline{\sigma}}_{\alpha}$  est la contrainte microscopique dans un mécanisme  $\alpha$  (de type patin),

et  $\underline{\underline{y}}_{\alpha}$  est le paramètre interne transformé (opposé en signe à la contrainte résiduelle).

#### **Remarque :**

Cette déformation plastique locale  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  n'a rien avoir avec la déformation plastique globale  $\underline{E}^p$ .

#### **Hypothèses générales**

Nous supposons de plus qu'à cette échelle, il y aura nécessairement accommodation locale (et même éventuellement rochet) lorsque la limite d'endurance (macroscopique) est dépassée.

Les propriétés mécaniques élastoplastiques et en fatigue du matériau sont prises indépendantes de la température (seule la limite élastique fonction de la température peut être prise en compte dans cette approche).

Comme I. Papadopoulos (1987), Illyin (1988) et F. Morel (1992), l'énergie dissipée microscopique locale  $W_D$  ou la déformation plastique microscopique locale cumulée  $\varepsilon_{pc}$  sont pour nous une représentation de l'état d'endommagement actuel du matériau (une fois encore, ces 2 facteurs n'étant pas observables ni mesurables à l'échelle globale)

$$\varepsilon_{pc} = \int_0^t \|\dot{\underline{\varepsilon}}_p(u)\| du$$

$$W_D(t) = \int_0^t \underline{\Sigma}(u) : \dot{\underline{\varepsilon}}_p(u) du$$

Nous supposons qu'à l'initiation de la fissuration, l'un de ces 2 facteurs retenus atteint une valeur critique caractéristique du matériau.

## 4.3 Quantification des chargements à un paramètre à l'échelle du matériau

Grâce à nos hypothèses, nous allons définir une règle d'équivalence entre deux chargements vis-à-vis du dommage en fatigue

### 4.3.1 Définition de la règle d'équivalence

A l'échelle locale du matériau, dans l'espace des contraintes, nous définissons pour tout chargement unidimensionnel son centre  $C_f$  et sa fluctuation  $F_\sigma$ .

$$C_f = \frac{1}{2} (\Sigma_{max} + \Sigma_{min})$$

$$F_\sigma = \frac{1}{2} (\Sigma_{max} - \Sigma_{min})$$

Nous choisissons comme *mesure* d'un chargement, la déformation plastique cumulée  $\varepsilon_{pc}$  induite (ou encore l'énergie plastique dissipée  $W_D$ ) en considérant un comportement *local*.

Il est intuitif que, même si la déformation plastique cumulée  $\varepsilon_{pc}$  (ou  $W_D$ ) n'est pas le facteur d'endommagement lui-même (que nous ne connaissons pas), ils vont tous les deux dans le même sens en ce qui concerne la fatigue.

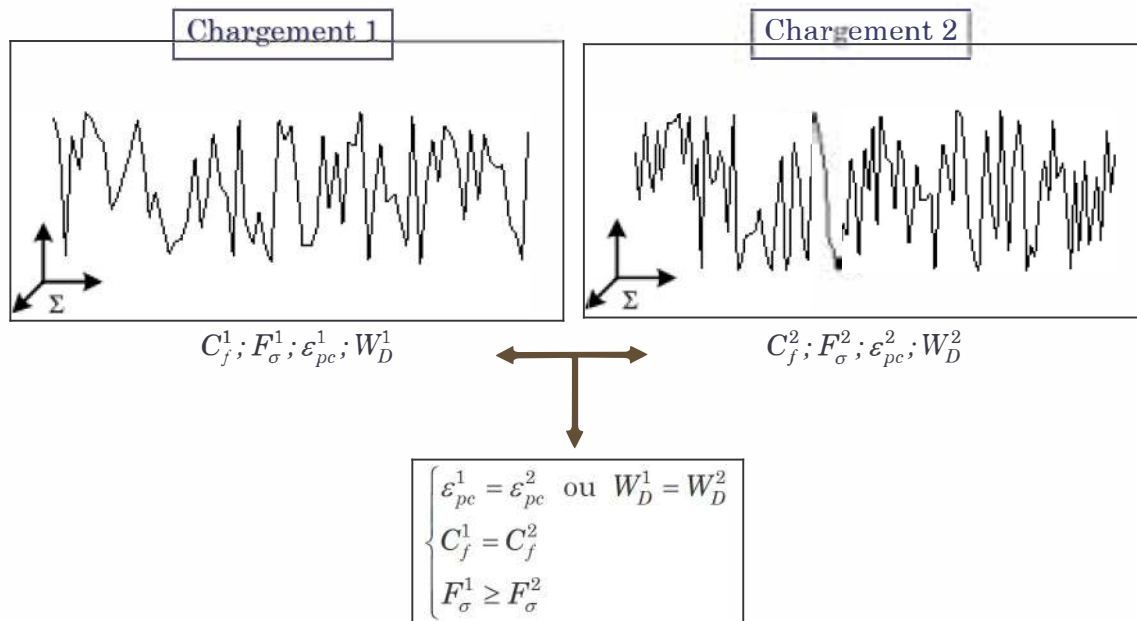
Puis, avec cette mesure, nous dirons que deux chargements sont équivalents vis à vis du dommage par fatigue :

- i) s'ils produisent la même déformation plastique cumulée locale  $\varepsilon_{pc}$ ,

et afin de conserver les mêmes mécanismes d'endommagement

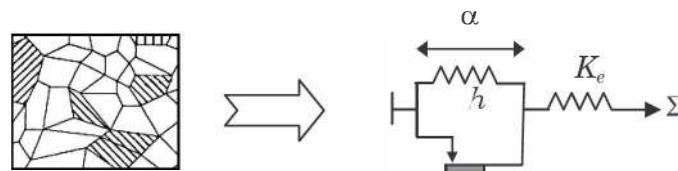
- ii) s'ils ont le même centre  $C_f$

- iii) et si le chargement équivalent a une fluctuation sensiblement supérieure ou égale à  $F^\sigma$  (mais inférieure à deux fois la limite élastique macroscopique afin d'assurer l'adaptation globale de la structure)



**Exemple**

Imposons qu'à l'échelle microscopique, le VER est modélisé par un système à un degré de liberté, représentant le matériau à écrouissage cinématique linéaire (comme cela a été introduit depuis longtemps lors des analyses sismiques sur un système élastique à un seul degré de liberté)



En nous référant aux notations de J. Zarka dans son approche sur la modélisation inélastique des matériaux, les équations qui découlent de ce modèle à un degré de liberté sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \Sigma - y_\alpha \\ y_\alpha &= h\alpha \\ \varepsilon_p &= \alpha \\ \varepsilon_{pc}(t) &= \int_0^t |\dot{\varepsilon}_p(u)| du \\ W_D(t) &= \int_0^t \Sigma \dot{\varepsilon}_p(u) du \end{aligned}$$

$K_e$  est le module élastique,

$h$  est le module d'écroutissage,  
 $S$  est le seuil du patin (qui est pris égal soit à la limite d'endurance/limite de fatigue),  
 $\sigma_*$  est la contrainte locale au niveau du patin,  
 $\Sigma$  est la contrainte appliquée,  
 $\alpha$  est le paramètre interne du modèle (ici le déplacement du patin),  
 $\gamma_*$  est le paramètre transformé interne (en fait, il est égal à l'opposé de la contrainte résiduelle au niveau du patin),  
 $\varepsilon_p(t)$  est la déformation plastique instantanée,  
 $\varepsilon_{pc}(t)$  est la déformation plastique cumulée à l'instant  $t$ ,  
 $W_D(t)$  est l'énergie plastique dissipée.

**Remarque :**

Il convient de bien définir la limite de fatigue surtout quand la durée de vie de la structure concerne le domaine gigacyclique ( $10^9$  cycles), comme il a été rappelé au chapitre 1 (Bathias, 1999).

### 4.3.2 Construction des chargements cycliques équivalents à l'échelle matériau

Supposons que nous ayons une représentation temporelle d'un certain chargement à amplitude variable, nous calculons d'abord son centre  $C_f$  :

$$C_f = \frac{1}{2} (\Sigma_{max} + \Sigma_{min})$$

et sa fluctuation  $F_\sigma$  :

$$F_\sigma = \frac{1}{2} (\Sigma_{max} - \Sigma_{min})$$

Nous l'injectons ensuite dans le modèle à un degré de liberté pour en déduire la déformation plastique cumulée induite (mesure du chargement physiquement représentative du " *dommage* ").

Pour cette déformation plastique cumulée, nous pouvons construire une famille de chargements cycliques équivalents avec une amplitude (ou un delta de contrainte  $\Delta\Sigma^{eq}$ ) constante et un nombre de cycles  $N$  à partir de la déformation plastique cumulée initiale  $\varepsilon_{pc_0}$ . Nous obtenons une courbe  $(\Delta\Sigma^{eq}; N)$  similaire à la courbe de Wöhler. **L'idée importante de notre approche est d'utiliser ce qui est disponible et ce qui a été validé expérimentalement ; ce qui est le cas de la courbe de Wöhler. De plus, ces essais à amplitude constante autour d'une valeur moyenne constante sont plus simples à réaliser comme à simuler.**

Comme nous avons supposé l'accommodation à l'échelle microscopique du matériau (autrement, il n'y aurait pas d'endommagement par fatigue), nous avons donc, pour un individu de la famille des chargements cycliques équivalents:

$$\Delta\Sigma^{eq} > 2S \text{ où } \Delta\Sigma^e = \Sigma^{eq,max} - \Sigma^{eq,min}$$

Pour cette étendue de contrainte  $\Delta\Sigma^{eq}$ , nous avons après stabilisation de la déformation plastique (influencée dans certains cas par les premiers cycles de charge) une variation constante de la déformation plastique  $\Delta\varepsilon_p$  par demi-cycle.

La déformation plastique cumulée au bout de N cycles de chargement s'écrit :

$$\varepsilon_{pc} = \varepsilon_{pc_0} + 2N|\Delta\varepsilon_p|$$

Dans cette équation,  $\varepsilon_{pc_0}$  est la déformation plastique initiale. Elle peut être décomposée en deux parties  $\varepsilon_{pc_{01}}$  et  $\varepsilon_{pc_{02}}$  tel que :

$$\varepsilon_{pc_0} = \varepsilon_{pc_{01}} + \varepsilon_{pc_{02}}$$

et où

- $\varepsilon_{pc_{01}}$  peut être vue comme la déformation plastique initiale issue d'un champ de contraintes résiduelles initial (par exemple un matériau déjà "endommagé")
- $\varepsilon_{pc_{02}}$  peut être vue comme la contribution des premiers cycles non stabilisés du chargement équivalent

En notant respectivement  $\varepsilon_{pc}^{va}$  et  $\varepsilon_{pc}^{eq}$  les déformations plastiques cumulées des chargements réels variables et cycliques équivalents, nous savons par hypothèse que ces deux chargements doivent induire la même déformation plastique cumulée :

$$\varepsilon_{pc}^{va} = \varepsilon_{pc}^{eq}$$

En combinant les relations ci-dessus, nous pouvons écrire, en tenant compte de la condition d'accommodation :

$$\Delta\Sigma = 2S + h \times \Delta\varepsilon_p$$

et que la famille des chargements cycliques équivalents dans l'espace  $(\Delta\Sigma^{eq}; N)$  est définie par :

$$\Delta\Sigma^{eq} = 2S + h \frac{\varepsilon_{pc}^{va} - \varepsilon_{pc_0}^{eq}}{2N}$$

Dans cette relation, N représente le nombre de cycles qu'il faudrait appliquer avec le delta de contrainte  $\Delta\Sigma^{eq}$  pour avoir la même déformation plastique cumulée que le chargement réel variable.

Cependant, comme il a été précisé plus haut, il est nécessaire de prendre, pour ce chargement à amplitude constante, une valeur moyenne égale à  $C_f$  et une amplitude  $\Delta\Sigma^{eq}$  sensiblement supérieure ou égale à  $2F_c$  afin de s'assurer des mêmes phénomènes physiques mis en jeux.

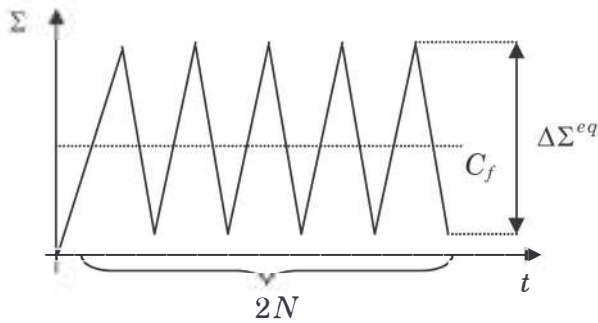


fig. 4.8 - Chargement cyclique équivalent

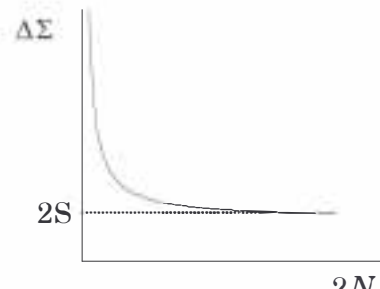


fig. 4.9 - Famille de chargements cycliques équivalents

### 4.3.3 Exemple

Des essais de fatigue sur un acier 304L à température ambiante sous des chargements à amplitude variable ont été menés au LMS-Ecole polytechnique par V. Doquet. Les essais sont réalisés sur une éprouvette lisse cylindrique rectifiée sur laquelle un nombre de blocs  $N_{br}$  du chargement variable est appliqué jusqu'à la rupture.

Il s'agit de :

- 1- déterminer le chargement cyclique équivalent au bloc de chargement réel variable
- 2- retrouver la durée de vie mesurée expérimentalement (en nombre de blocs appliqués)

#### 4.3.3.1 Position du problème



fig. 4.10 - Epreuve lisse en traction

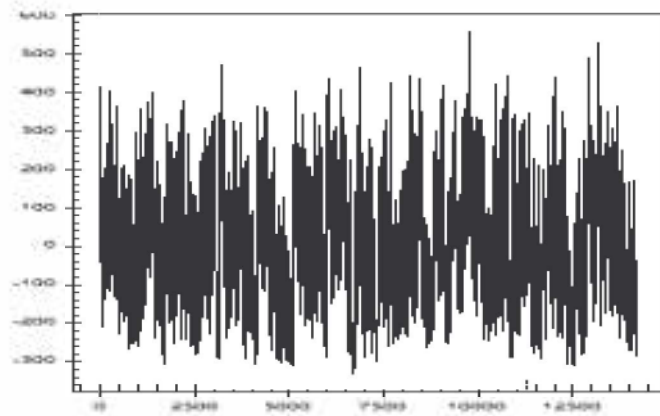


fig. 4.11 - Chargement réel fourni par EDF

Le chargement en contraintes est une séquence de chargement qui a été fournie par EDF. Plusieurs amplifications sur ce bloc de chargement ont été utilisées avec des facteurs allant de 3.3 à 4 (avec quelques fois une inversion du signe pour obtenir des valeurs moyennes en traction ou en compression selon les cas). Ces amplifications sont

nécessaires pour garder des durées d'essai convenable mais aussi pour balayer plus ou moins les zones d'endurance limitée et illimitée.

Le bloc de chargement fourni par EDF contient environ 14200 “cycles”, ce qui est beaucoup trop pour la durée de l'expérience. Le nombre de cycles est alors réduit en procédant à une élimination des petits “cycles” mesurés par rapport un seuil qui est souvent pris égal à la limite d'endurance du matériau.

Dans la suite, nous emploierons le terme “*brut*” pour indiquer qu'il s'agit du bloc de chargement sans élimination des petits cycles (c'est celui que nous allons utiliser dans l'application de notre procédure). Un résumé des résultats d'essais est présenté dans le tableau ci-dessous :

Nombre de cycles initiaux du bloc	14200	14200	14200
Facteur multiplicatif de l'amplitude	-4	+3.6	-3.3
Seuil d'extraction (via Rainflow)	$\Delta\Sigma = 360\text{MPa}$	$\Delta\Sigma = 324\text{MPa}$	$\Delta\Sigma = 298\text{MPa}$
Nombre de cycles après extraction	76	76	76
Contrainte moyenne sur le chargement	> 0	< 0	> 0
Nombre de blocs à la fatigue ( $N_{b,r}$ )	$817 < N_{b,r} < 1294^*$	7840	6653

\* : incertitude due à une erreur de mesure

Tableau 1 – Résultats expérimentaux pour les trois niveaux d'amplification.

### 4.3.3.2 Données expérimentales

Le matériau utilisé est un acier inox A304L. Les propriétés mécaniques sont données dans le tableau ci-dessous. La courbe de Wöhler moyenne (i.e. à 50% de survie) est celle proposée pour les éprouvettes lisses en acier inoxydables types 304 et 316 :

$$\Sigma_a(\text{MPa}) = 52492N^{-0.505} + 214.8$$

Elle peut se réécrire sous la forme :

$$\Sigma_a(\text{MPa}) = 2125N^{-0.15}$$

$\Sigma_a$  est l'amplitude du chargement purement alterné ou la demi variation du chargement ( $\frac{1}{2}\Delta\Sigma$ ).

Pour un chargement avec une contrainte moyenne non nulle, il faut se référer à des diagrammes de type Goodman par exemple, pour se ramener à un chargement équivalent à contrainte moyenne nulle en terme de dommage ou bien à des relations du type comme celle proposée par Morrow.

La droite de GOODMAN	La parabole de GERBER	Morrow
$\Sigma_a = \Sigma'_a \left(1 - \frac{\Sigma_m}{\sigma_u}\right)$	$\Sigma_a = \Sigma'_a \left(1 - \left(\frac{\Sigma_m}{\sigma_u}\right)^2\right)$	$\Sigma_a = (\sigma_D - \Sigma_m) N^b$

Tableau 2: Expressions pour la prise en compte d'une contrainte moyenne non nulle

où  $\Sigma_a$  est la demi variation du chargement à moyenne non nulle et  $\Sigma'_a$  est l'amplitude du chargement purement alterné équivalent.

Les propriétés mécaniques de l'éprouvette sont rappelées dans le tableau ci-dessous :

Module d'Young E (MPa)	179000
Limite élastique $\sigma_y$ (MPa)	500
Module d'écroissage H (MPa)	465
Contrainte ultime $\sigma_u$ (MPa)	650
Limite d'endurance à $10^{-8}$ cycles $\sigma_D$ (MPa)	180

Tableau 3 - Propriétés mécaniques de l'éprouvette.

### 4.3.3.3 Interprétation

Dans une éprouvette lisse, le comportement du matériau et de la structure sont équivalents. Il n'y a pas d'effet de structure. Nous pouvons d'emblée dire que le comportement de l'éprouvette peut être donné par notre modèle à un degré de liberté. De plus comme le chargement est fourni en contraintes, le calcul de la déformation plastique cumulée est immédiat.

### 4.3.3.4 Procédure

Nous adoptons la procédure suivante pour calculer la durée de vie de l'éprouvette (en nombre de blocs) avec l'application du chargement cyclique équivalent :

- 1 - Calcul du centre, de la fluctuation et de la déformation plastique cumulée pour un bloc du chargement réel
- 2 - Evaluation de la famille des chargements cycliques équivalents associés ( $\Delta\Sigma^{eq} ; N^{eq}$ )
- 3 - Choix d'un chargement équivalent particulier ( $C_f^{eq} ; \Delta\Sigma^{eq} ; N^{eq}$ )
- 4 - Si  $C_f^{eq} \neq 0$ , une correction avec une règle de type Goodman, Gerber ou Morrow est opérée  $\Rightarrow (0 ; \Delta\Sigma^{eq'} ; N^{eq})$
- 5 - En s'appuyant sur l'expression analytique de la courbe de Wöhler ( $\Delta\Sigma ; N$ ), on détermine le nombre de cycles à amplitude constante ( $N_f$ ) associé à  $\Delta\Sigma^{eq'}$
- 6 - Déduction du nombre de blocs à l'initiation/rupture  $N_{br} = N_f / N^{eq}$



### 4.3.3.5 Résultats

#### **Premier cas de charge (facteur multiplicatif égal à - 4)**

Le chargement brut en contraintes est d'abord multiplié par 4 puis par -1 pour obtenir une contrainte moyenne globalement positive. De plus, nous le prenons égal à zéro à l'instant zéro d'après les hypothèses :

$$\Sigma(t = 0) = 0$$

Les statistiques de ce bloc de chargement sont représentées dans le tableau suivant :

Nbpt	Min	Max	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis
14197	-331	551	-1.3	171	0.361	2.34

Tableau 4 - Statistiques du bloc de chargement brut

#### **Calcul du chargement équivalent**

Nous commençons d'abord par calculer le centre  $C_f^{va}$  et la fluctuation  $F_{var}^{\sigma}$  de ce bloc de chargement :

$$C_f^{va} = \frac{1}{2} (\Sigma_{max} + \Sigma_{min}) = \frac{1}{2} (551 - 331) = 110 \text{ MPa}$$

$$F_{\sigma}^{va} = \frac{1}{2} (\Sigma_{max} - \Sigma_{min}) = \frac{1}{2} (551 + 331) = 441 \text{ MPa}$$

Puis la déformation plastique cumulée  $\varepsilon_{pc}^{va}$  est évaluée par l'intermédiaire du modèle à 1 ddl. Les paramètres du modèle utilisés sont tablés ci-dessous :

$K_e$ (MPa)	$S$ (MPa)	$h$ (MPa)	Etat initial : $Y_0$
179000	180	465	0

Tableau 5 - Paramètres matériaux du modèle à 1ddl

$S$  est pris égal à la limite d'endurance du matériau (à  $10^{-8}$  cycles).

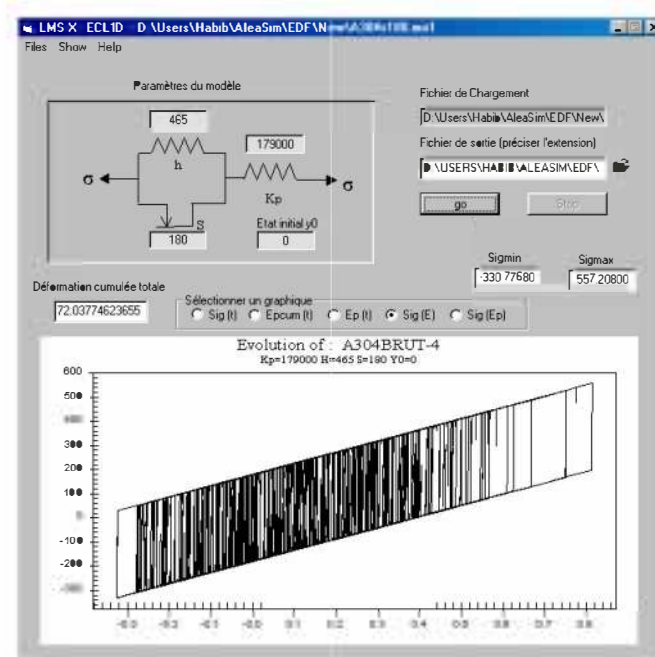


fig. 4.12 - Déformation plastique cumulée du bloc de chargement réel

Enfin la famille des chargements équivalents est construite. En prenant, pour un chargement équivalent particulier :

- $\varepsilon_{pc_0}^{eq} = 0$ , état initial vierge
- $\Delta \Sigma^{eq} = 2 \times F_{\sigma}^{va}$ , un delta de contrainte égal à deux fois la fluctuation du chargement variable
- $C_f^{eq} = C_f^{va}$ , c'est à dire le même centre que le chargement variable

Nous déduisons le nombre de cycles conduisant à la même déformation plastique cumulée que le bloc de chargement variable puis la forme du chargement équivalent.

$$N^{eq} = h \frac{\varepsilon_{pc}^{va} - \varepsilon_{pc_0}^{eq}}{2(\Delta \Sigma^{eq} - 2S)} = 465 \frac{72 - 0}{2(2 \times 441 - 2 \times 180)} \approx 32 \text{ cycles}$$

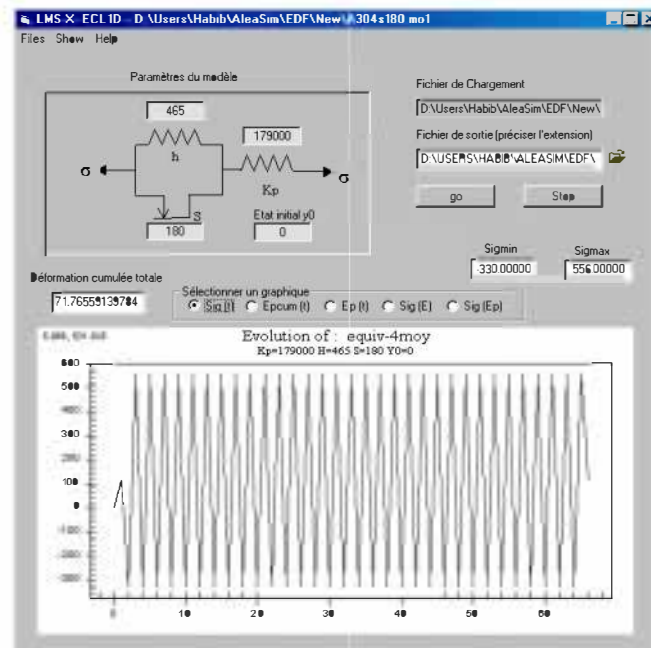


fig. 4.13 -Chargement cyclique équivalent conduisant à la même déformation plastique cumulée que le chargement réel

Nous avons trouvé à l'échelle du matériau, le chargement périodique équivalent au chargement variable vis à vis du dommage conduisant à la même déformation plastique cumulée (représentant ici une norme du chargement).

### Prédiction de la durée de vie

Le but de cette partie est de retrouver le nombre de blocs conduisant à la rupture mesurée expérimentalement. Nous dirons que P blocs du chargement variable sont équivalents à k cycles d'un chargement périodique s'ils induisent la même déformation plastique cumulée :

$$\varepsilon_{pc}^{va}(P) = \varepsilon_{pc}^{eq}(k) \Leftrightarrow P \text{ blocs} \Leftrightarrow k \text{ cycles}$$

En dissociant les parties de la déformation plastique cumulée dues aux premiers cycles de charges et aux cycles stabilisés, nous pouvons réécrire que:

$$\varepsilon_{pc}^{va}(P) = \varepsilon_{pc}^{va}(1) + (P-1)\Delta\varepsilon_{pc}^{va}$$

et

$$\varepsilon_{pc}^{eq}(k) = \varepsilon_{pc}^{eq}(1) + (k-1)\Delta\varepsilon_{pc}^{eq}$$

où  $\varepsilon_{pc}^{eq}(1)$  et  $\varepsilon_{pc}^{va}(1)$  sont les contributions de la déformation plastique cumulée induite par les premiers cycles de charges respectivement du chargement équivalent et du chargement variable.

$\Delta\varepsilon_{pc}^{eq}$  et  $\Delta\varepsilon_{pc}^{va}$  sont les variations de déformation plastique cumulée induite respectivement par le chargement équivalent à **chaque cycle stabilisé** et par le chargement variable à **chaque bloc "stabilisé"**.

Nous déduisons, à partir de ces relations, le nombre de blocs du chargement variable qu'il faudrait appliquer pour donner le même "dommage" que k cycles du chargement périodique équivalent.

$$P = \frac{\varepsilon_{pc}^{eq}(k) - \varepsilon_{pc}^{va}(1)}{\Delta \varepsilon_{pc}^{va}} + 1$$

La règle de construction consiste donc à choisir d'abord un chargement équivalent ( $C_f^{eq}; \Delta \Sigma^{eq}; N^{eq}$ ) puis à se rattacher à la courbe de Wöhler du matériau qui nous indiquera le nombre k de cycles à la rupture (ou à l'initiation). Si la contrainte moyenne du chargement n'est pas nulle, il faut se référer avant à des diagrammes de type Goodman ou Gerber par exemple, pour se ramener à un chargement équivalent à contrainte moyenne nulle en terme de dommage ou bien à des relations du type comme celle proposée par Morrow (Tableau 2).

Dans notre cas, nous avons  $C_f^{eq} = 110$  MPa, contrainte moyenne non nulle.

Par Goodman,  $\Delta \Sigma^{eq}$  devient  $\Delta \Sigma^{eq'}$  et est égal à :

$$\Delta \Sigma^{eq'} = \Delta \Sigma^{eq} \left( 1 - \frac{C_f^{eq}}{\sigma_u} \right) = 441 \left( 1 - \frac{110}{650} \right) = 530 \text{ MPa}$$

puis le nombre de cycles donné par la courbe de Wöhler vaut :

$$k = 24932 \text{ cycles}$$

Le nombre de blocs du chargement variable (P) à appliquer pour atteindre l'initiation/rupture est donc de :

$$P = 24932 / 32 = 779 \text{ blocs}$$

Le résultat est conservatif par rapport à l'expérience qui a donné un nombre de blocs  $N_{br}$  de:

$$817 < N_{br} < 1294$$

### **Deuxième cas de charge (facteur multiplicatif égal à +3.6)**

1 – Calcul du centre, de la fluctuation et de la déformation plastique cumulée pour le bloc de chargement \* 3.6 :

$$( C_f^{ve} = -102 \text{ MPa} ; F_{\sigma}^{ve} = 399 \text{ MPa} ; \varepsilon_{pc}^{va} = 48.2 )$$

2 – Evaluation de la famille des chargements cycliques équivalents associés ( $\Delta \Sigma^{eq}; N^{eq}$ ):

$$\Delta \Sigma^{eq} = 360 + 465 \frac{(48.2 - 0)}{2N^{eq}}$$

3 – Choix d'un chargement équivalent particulier ( $C_f^{eq}; \Delta \Sigma^{eq}; N^{eq}$ ):

$$\Rightarrow C_f^{eq} = C_f^{va} \text{ et } F_\sigma^{eq} = F_\sigma^{va}$$

$$\text{soit } ( C_f^{eq} = -102 \text{ MPa} ; \frac{1}{2} \Delta \Sigma^{eq} = F_\sigma^{eq} = 399 \text{ MPa} ; N^{eq} = 25.6 \text{ cycles} )$$

4 - Comme  $C_f^{eq} \neq 0$ , une correction avec une règle de type Goodman est opérée :

$$\Rightarrow (0 ; \Delta \Sigma^{eq'} ; N^{eq})$$

$$\text{soit } ( C_f^{eq} = 0 ; \frac{1}{2} \Delta \Sigma^{eq'} = 345 \text{ MPa} ; N^{eq} = 25.6 \text{ cycles} )$$

5 - En se rattachant à la courbe de Wöhler ( $\Sigma ; N$ ), on détermine pour cet acier le nombre de cycles à amplitude constante ( $k$ ) associé à  $\Delta \Sigma^{eq'}$  :

$$\begin{aligned} \Sigma_s(\text{MPa}) &= 52492N^{-0.505} + 214.8 \\ \Rightarrow N_f = k &= 144598 \text{ cycles} \end{aligned}$$

6 - Déduction du nombre de blocs à l'initiation/rupture  $P = k/N^{eq}$

$$P = 144598/25.66 = 5631 \text{ blocs}$$

### Troisième cas de charge (facteur multiplicatif égal à -3.3)

1 - Calcul du centre, de la fluctuation et de la déformation plastique cumulée pour le bloc de chargement \* -3.3 :

$$( C_f^{va} = 93 \text{ MPa} ; F_\sigma^{va} = 366 \text{ MPa} ; \varepsilon_{pc}^{va} = 33.0 )$$

2 - Evaluation de la famille des chargements cycliques équivalents associés ( $\Delta \Sigma^{eq} ; N^{eq}$ ) :

$$\Delta \Sigma^{eq} = 360 + 465 \frac{(33.0 - 0)}{2N^{eq}}$$

3 - Choix d'un chargement équivalent particulier ( $C_f^{eq} ; \Delta \Sigma^{eq} ; N^{eq}$ ) :

$$\Rightarrow C_f^{eq} = C_f^{va} \text{ et } F_\sigma^{eq} = F_\sigma^{va}$$

$$\text{soit } ( C_f^{eq} = 93 \text{ MPa} ; \frac{1}{2} \Delta \Sigma^{eq} = F_\sigma^{eq} = 366 \text{ MPa} ; N^{eq} = 20.75 \text{ cycles} )$$

4 - Comme  $C_f^{eq} \neq 0$ , une correction avec une règle de type Goodman est opérée :

$$\Rightarrow (0 ; \Delta \Sigma^{eq'} ; N^{eq})$$

$$\text{soit } ( C_f^{eq} = 0 ; \frac{1}{2} \Delta \Sigma^{eq'} = 426 \text{ MPa} ; N^{eq} = 20.75 \text{ cycles} )$$

5 – En se rattachant à la courbe de Wöhler ( $\Sigma ; N$ ), on détermine pour cet acier le nombre de cycles à amplitude constante ( $k$ ) associé à  $\Delta\Sigma^{eq}$  :

$$\Sigma_e(\text{MPa}) = 52492N^{-0.505} + 214.8$$

$$\Rightarrow N_f = k = 55411 \text{ cycles}$$

6 – Dédution du nombre de blocs à l'initiation/rupture  $P = k/N^{eq}$

$$P = 55411 / 20.75 = 2670 \text{ blocs}$$

### Interprétation

Nous avons répertorié dans le tableau (Tableau 6) le nombre de blocs à la rupture obtenus avec notre représentation actuelle. Ceux-ci sont confrontés avec les résultats expérimentaux et ceux calculés par EDF avec la méthode du rainflow.

D'une manière globale, nous pouvons dire que notre prédiction reste conservative par rapport aux valeurs expérimentales et est plus robuste que la méthode du rainflow.

A	$C_f^{eq}$	$\Delta\Sigma^{eq}$	Mesure	Rainflow	Calcul
-4	110	440	817 < N < 1290	1026	777
-3.3	-102	399	6653	7733	2653
3.6	-93	366	7840	3500	5631

Tableau 6 - Nombre de blocs à la rupture : mesurés, calculés avec Rainflow, et avec notre représentation actuelle

Le modèle utilisé dans notre représentation du chargement équivalent ne prend pas en compte l'influence de la contrainte moyenne et est très peu sensible à l'ordre d'apparition des cycles. De plus l'anisotropie microscopique du matériau ne peut pas être décrite avec ce type de modèle 1D simplifié : la direction du chargement n'a pas d'influence. Nous verrons dans la partie suivante, que d'autres modèles plus évolués mais dont la mise en œuvre est cependant plus difficile permettent de mettre en évidence de nombreux mécanismes essentiels vis à vis de la fatigue.

Par exemple le modèle à 2 paramètres internes (voir partie 4.4.1) permet de mieux représenter l'ordre d'apparition des cycles et le modèle à 4 paramètres internes (voir Annexe 1) est capable de caractériser de manière plus intrinsèque les mécanismes liés à la fatigue.

## 4.4 Quantification des chargements à plusieurs paramètres à l'échelle du matériau

Le même concept va être utilisé pour définir un chargement cyclique radial équivalent dans le cas d'un chargement complexe : il produira la même déformation plastique cumulée, il aura le même centre et sa fluctuation sera sensiblement supérieure ou égale à la fluctuation réelle.

A l'échelle locale du matériau, dans l'espace des contraintes, comme cela avait été proposé par J. Mandel, B. Halphen et J. Zarka (1977), repris par I. Papadopoulos (1987) et comme indiqué sur la fig. 4.14, nous définissons, pour le chargement réel, son centre  $C_f$  et sa fluctuation  $F_\sigma$ . Il s'agit de trouver la plus petite boule contenant le trajet de chargement dans l'espace des contraintes.

Afin de voir de façon plus claire ce qui se passe, nous allons utiliser le modèle rhéologique à 2 paramètres internes (Zarka-Casier, 1979) et distinguer ses divers comportements.

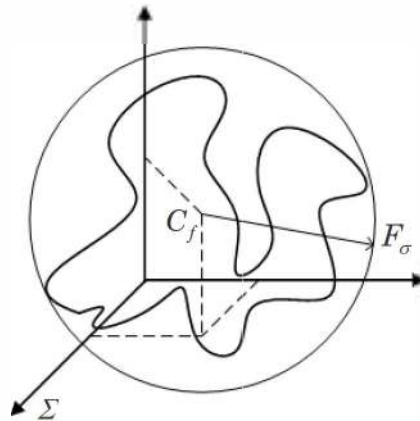


fig. 4.14 - Centre et fluctuation d'un chargement multi-paramètres à l'échelle du matériau

## 4.4.1 Comportement rhéologique à 2 paramètres internes

### 4.4.1.1 Equations

Nous supposons qu'à l'échelle microscopique, il est possible de représenter le comportement du matériau par un mécanisme à deux degrés de liberté. Afin d'avoir une idée physique d'un tel mécanisme, il suffit d'imaginer un patin se déplaçant sur un plan. Ce mécanisme est constitué d'un patin de seuil  $S$  plongé dans une matrice élastique. Une représentation particulière est donnée par la fig. 4.15.

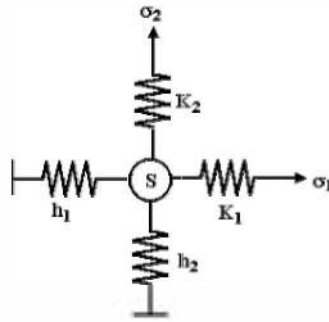


fig. 4.15 - Un exemple de mécanisme à 2 d.d.l.

Le comportement le plus général s'écrit, en se référant aux notations de J. Zarka, par :

**i) contraintes locales**

Notons  $\underline{\Sigma}$  le vecteur contrainte appliqué au mécanisme et  $\underline{\alpha}$  le vecteur constitué des paramètres internes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  :

$$\underline{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1$  et  $\alpha_2$  étant respectivement les déplacements locaux du patin dans les directions 1 et 2.

Nous cherchons à exprimer les contraintes ( $\sigma_{\alpha_1}$  ;  $\sigma_{\alpha_2}$ ) au niveau du patin en fonction de la contrainte globale  $\underline{\Sigma}$  et des paramètres internes transformés  $y_{\alpha_1}$  et  $y_{\alpha_2}$  (représentant l'opposé des contraintes résiduelles dans l'assemblage).

Formellement ces contraintes s'écrivent de la manière suivante:

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha_1} = A_{11}\Sigma_1 + A_{12}\Sigma_2 - y_{\alpha_1} \\ \sigma_{\alpha_2} = A_{21}\Sigma_1 + A_{22}\Sigma_2 - y_{\alpha_2} \end{cases}$$

ou bien en notation matricielle par :

$$\underline{\sigma}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha_1} \\ \sigma_{\alpha_2} \end{pmatrix} = \underline{A} \underline{\Sigma} - \underline{y}_{\alpha}$$

$\underline{A}$  est une matrice  $2 \times 2$  qui contient les facteurs de localisation élastique.

**ii) paramètres internes transformés**



Les paramètres internes transformés  $(y_{\alpha_1}; y_{\alpha_2})$  sont liés aux paramètres internes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  par une relation linéaire de la forme :

$$\underline{y}_\alpha = \begin{pmatrix} y_{\alpha_1} \\ y_{\alpha_2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{B}} \underline{\alpha}$$

$\underline{\underline{B}}$  est une matrice constante symétrique définie positive. Deux cas peuvent en général se présenter :

- a)  $\underline{\underline{B}}$  est régulière, alors il existe une application biunivoque entre  $\underline{\alpha}$  et  $\underline{y}_\alpha$ . La connaissance de  $\underline{y}_\alpha$  suffit pour déterminer l'état interne du matériau.
- b)  $\underline{\underline{B}}$  est singulière de rang 1. Cela implique que  $\underline{y}_\alpha$  doit appartenir au sous-espace linéaire de compatibilité ici la droite de compatibilité ( $\mathcal{L}$ ). Il faut suivre en même temps  $\underline{y}_\alpha$  et  $\underline{\alpha}$ .

Cependant, nous ne considérons que le cas où la matrice  $\underline{\underline{B}}$  est toujours régulière.

### iii) lois d'évolution

Une loi d'évolution du mécanisme inélastique  $\alpha$  peut être définie. Le vecteur contrainte local  $\underline{\sigma}_\alpha$  exercé au niveau du patin doit être plastiquement admissible.

#### Critère de plasticité

Nous supposons que le critère bidimensionnel peut être pris sous la forme

$$\mathcal{C}_0 : (\sigma_{\alpha_1})^2 + (\sigma_{\alpha_2})^2 \leq S^2$$

$\mathcal{C}_0$  est un domaine convexe fixe (cercle), centré à l'origine dans l'espace  $(\sigma_{\alpha_1}; \sigma_{\alpha_2})$  et de rayon  $S$ .

Dans l'espace des paramètres transformés  $(y_{\alpha_1}; y_{\alpha_2})$ , le domaine de plasticité devient :

$$\mathcal{C}_{y_\alpha}(\underline{\Sigma}) \text{ centré en } \begin{pmatrix} A_{11}\Sigma_1 + A_{12}\Sigma_2 \\ A_{21}\Sigma_1 + A_{22}\Sigma_2 \end{pmatrix} \text{ et de rayon } S.$$

#### Règle d'écoulement

La loi d'évolution s'écrit alors :

$$\underline{\dot{\alpha}} \in -\partial\Psi_{\mathcal{C}_0}(\underline{\sigma}_\alpha)$$

C'est à dire que  $\underline{\dot{\alpha}}$  est dirigé suivant la **normale extérieure** au domaine convexe  $\mathcal{C}_0$  en  $\underline{\sigma}_\alpha$ , ou encore que  $\underline{\dot{\alpha}}$  appartient au sous-différentiel au convexe  $\mathcal{C}_0$  en  $\underline{\sigma}_\alpha$ .

Dans l'espace des paramètres transformés, la loi d'évolution se réécrit :

$$\underline{\dot{\alpha}} \in -\partial\Psi_{\mathcal{C}_{y_\alpha}}(\underline{\Sigma}) \text{ et } \underline{\dot{y}}_\alpha \in -\underline{B}\partial\Psi_{\mathcal{C}_\Sigma}(\underline{y}_\alpha)$$

C'est à dire que  $\underline{\dot{\alpha}}$  est dirigé suivant la **normale intérieure** au domaine convexe  $\mathcal{C}_{y_\alpha}(\underline{\Sigma})$  en  $\underline{y}_\alpha$  (fig. 4.16)

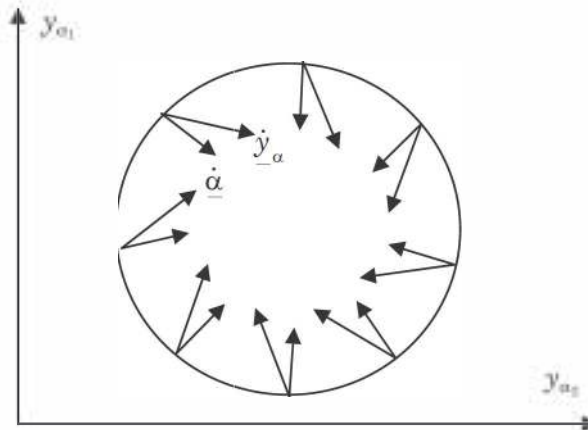


fig. 4.16 - Vitesses des paramètres internes et des paramètres transformés

#### iv) déformations

On suppose que la déformation totale globale  $\underline{\varepsilon}$  est partagée sous une forme élastique qui est liée à la distribution des ressorts dans l'assemblage et sous une forme inélastique due à la présence de mécanismes inélastiques

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^p$$

$\underline{\varepsilon}^e$  et  $\underline{\varepsilon}^p$  sont respectivement les déformations élastiques et inélastiques locales et peuvent s'écrire d'une manière générale selon les expressions :

$$\underline{\varepsilon}^p = {}^t \underline{A} \underline{\alpha}$$

$$\underline{\varepsilon}^e = \underline{M} \underline{\Sigma}$$

où  $\underline{M}$  est le tenseur des complaisances élastiques.

#### 4.4.1.2 Chargements particuliers à 2 paramètres

Un logiciel (FatSimPro) a été développé. Il intègre tous les modèles précédents (1D et 2D) ainsi qu'une compilation d'outils de traitement de signaux (Rainflow, FFT, Zero crossing, Up/Down crossing ...) susceptible d'être utilisés dans une analyse à la fatigue classique.

L'algorithme utilisé pour l'intégration du modèle bidimensionnel est présenté en annexe 1.

Deux types de chargements sont différenciés : les chargement radiaux et les chargements non radiaux. Nous nous plaçons dans l'espace des paramètres transformés  $(y_{\alpha_1}; y_{\alpha_2})$ . A chaque instant, le convexe d'élasticité dans cet espace est représenté par un cercle de rayon  $S$  (critère de Mises) et est centré en :

$$\underline{C}(t) = \begin{pmatrix} A_{11}\Sigma_1 + A_{12}\Sigma_2 \\ A_{21}\Sigma_1 + A_{22}\Sigma_2 \end{pmatrix}$$

L'état initial est introduit par la donnée du point  $\underline{y}_{\alpha}^0$ . A tout instant du chargement  $(\Sigma_1(t); \Sigma_2(t))$ , le critère de plasticité doit être vérifié (le point  $\underline{y}_{\alpha}(t)$  doit rester dans le convexe de centre  $\underline{C}(t)$ ).

Un schéma implicite est utilisé dans l'algorithme :

- on se place en  $\underline{C}(t + \Delta t)$  et on regarde si  $\underline{y}_{\alpha}(t)$  est plastiquement admissible (c'est à dire s'il reste dans le convexe)
- Si OUI, on passe à l'instant suivant
- Si NON, il faut ramener le point sur la frontière du convexe (rafle). Il doit de plus vérifier la loi d'écoulement :  $\dot{\underline{y}}_{\alpha}(t) \in \underline{B} \partial \Psi_{\epsilon_s}(\underline{y}_{\alpha}(t))$

La principale difficulté est de proposer une direction de rafle, qui n'est pas connue par avance dans un schéma implicite. Plusieurs solutions sont possibles, chacune ayant ses points forts et faibles (rapidité de convergence/divergence du schéma). Notre choix s'est dirigé vers la technique de rafle par projection radiale. Quelques paramètres de réglages de la convergence ont été ajoutés.

Ainsi, à chaque instant, nous pouvons connaître l'état du système  $\alpha$  à travers les paramètres transformés  $\underline{y}_{\alpha}$  et la matrice  $\underline{B}$ . Le retour à la variable naturelle du problème, à savoir la déformation plastique  $\underline{\epsilon}^p$  se fait instantanément à l'aide de la matrice de localisation élastique  $\underline{A}$ .

### **Chargements radiaux cycliques**

Le chargement est radial si sa trajectoire est une droite dans l'espace  $(y_{\alpha_1}; y_{\alpha_2})$  (représenté en pointillé sur les figures ci-dessous). L'évolution des paramètres internes transformés  $\underline{y}_{\alpha}$  est la trajectoire en ligne continue.

### **Adaptation**

De façon pratique, l'adaptation aura lieu si l'intersection dans l'espace  $(y_{\alpha_1}; y_{\alpha_2})$  de tous les convexes d'élasticité au cours du trajet de chargement (en ne considérant que les pics) est non vide.

Toutes les figures fig. 4.17, fig. 4.18, fig. 4.19 et fig. 4.20 sont construites en considérant le même chargement mais en changeant l'état initial et la matrice  $\underline{B}$  :

- les couples (fig. 4.17 et fig. 4.19) et (fig. 4.18 et fig. 4.20) diffèrent uniquement par leur matrice  $\underline{B}$
- les couples (fig. 4.17 et fig. 4.18) et (fig. 4.19 et fig. 4.20) diffèrent uniquement par leur état initial.

Dans le cas de l'adaptation, l'influence de l'état initial est importante. Sur les figures fig. 4.17 et fig. 4.18, deux états stabilisés différents sont atteints, en conservant les mêmes matrices  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$  (donc le même matériau) mais en choisissant des états initiaux distincts. Cet état stabilisé peut être atteint au bout du premier cycle (fig. 4.17) ou au bout d'un nombre infini de cycles (fig. 4.18).

Sur les fig. 4.17 et fig. 4.19 et fig. 4.18 et fig. 4.19, la trajectoire conduisant à l'état stabilisé est modifiée par l'introduction d'une nouvelle matrice  $\underline{B}$ . L'état stabilisé obtenu est en général différent (pour le même état initial) .

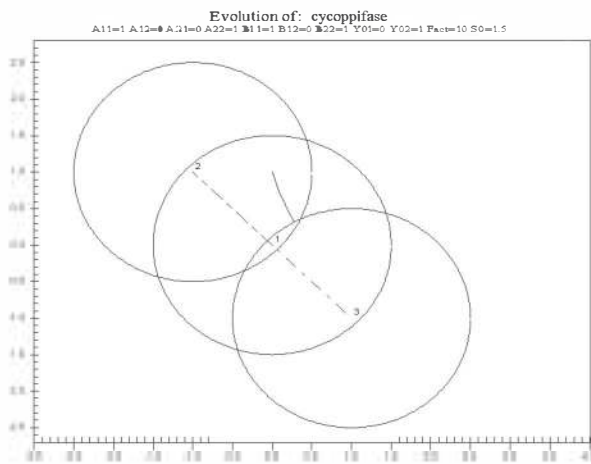


fig. 4.17 - Adaptation après un seul cycle

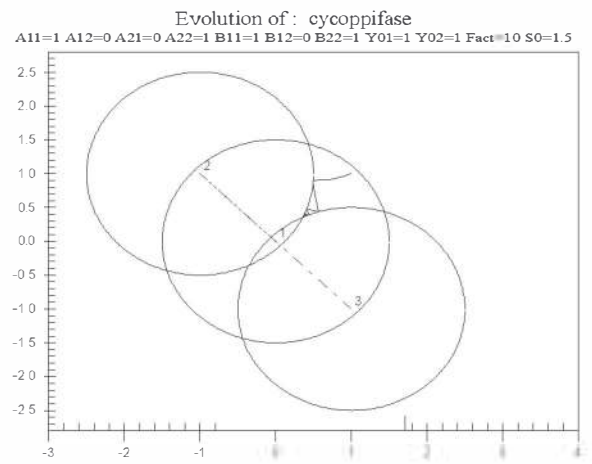


fig. 4.18 - Adaptation après un grand nombre de cycles

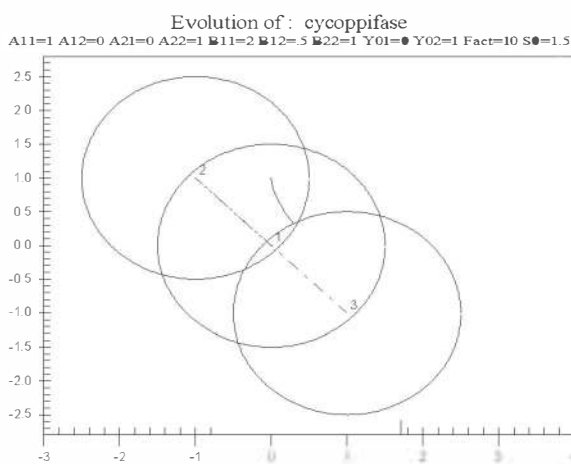


fig. 4.19 - Adaptation après un seul cycle

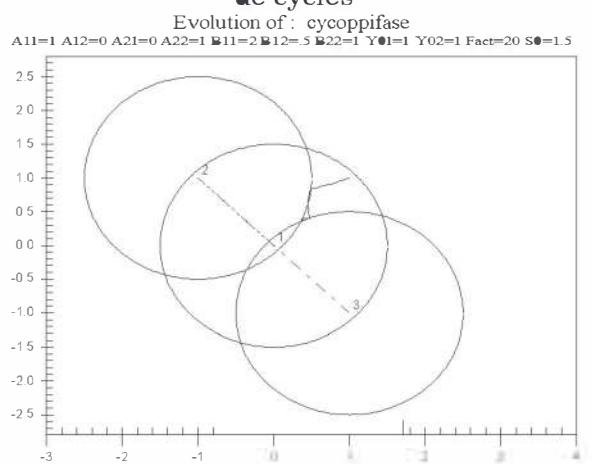


fig. 4.20 - Adaptation après un grand nombre de cycles

**Accommodation**

De façon pratique, l'accommodation aura lieu si l'intersection dans l'espace  $(y_{\alpha_1}; y_{\alpha_2})$  de tous les convexes d'élasticité au cours du trajet de chargement (en ne considérant que les pics) est vide.

Dans le cas de l'accommodation, pour ce système, l'état initial n'a pas d'influence sur l'état stabilisé. Seuls le nombre de cycles et la trajectoire l'y conduisant changent (fig. 4.21 et fig. 4.22 ou fig. 4.23 et fig. 4.24).

Les coefficients de la matrice **B** modifient la forme et la taille du cycle limite (fig. 4.21, fig. 4.23, fig. 4.27 et fig. 4.27).

Le rôle des coefficients de la matrice **A** est présenté sur la fig. 4.28. Les centres des convexes d'élasticité sont déplacés, la taille et l'orientation du cycle limite sont donc modifiés.

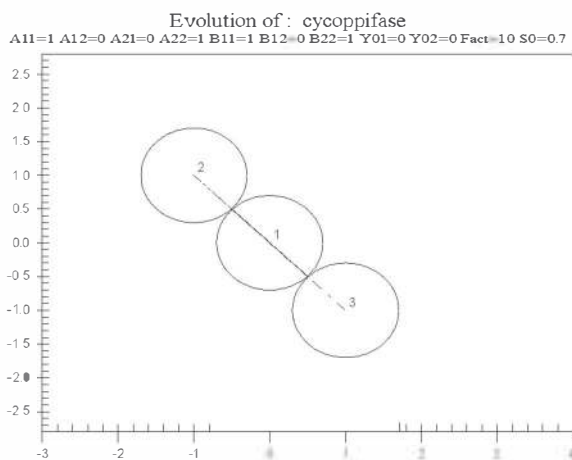


fig. 4.21 - Accommodation sans boucle d'hystérésis

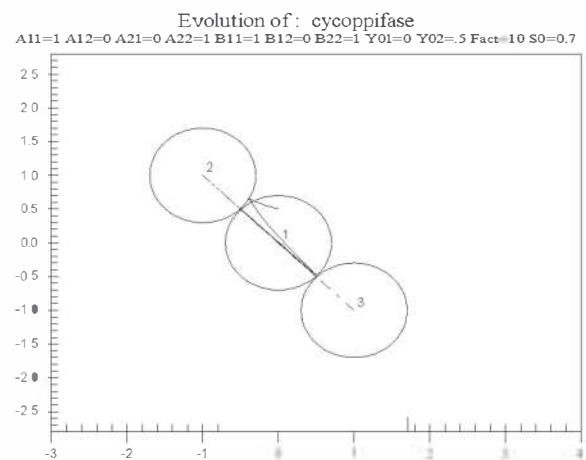


fig. 4.22 - Accommodation sans boucle d'hystérésis - Etat initial sans influence sur l'état stabilisé

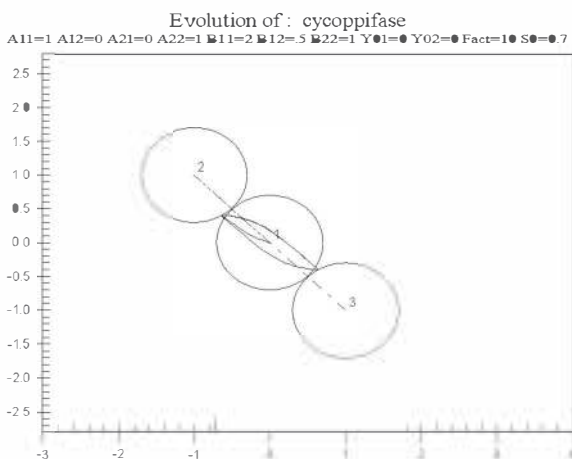


fig. 4.23 - Accommodation avec boucle d'hystérésis

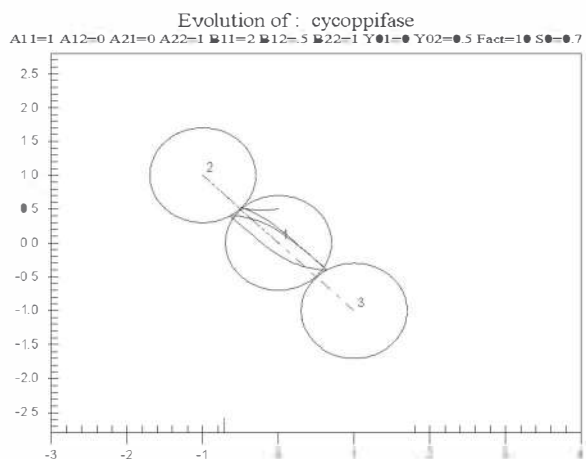


fig. 4.24 - Accommodation avec boucle d'hystérésis - Etat initial sans influence sur l'état stabilisé

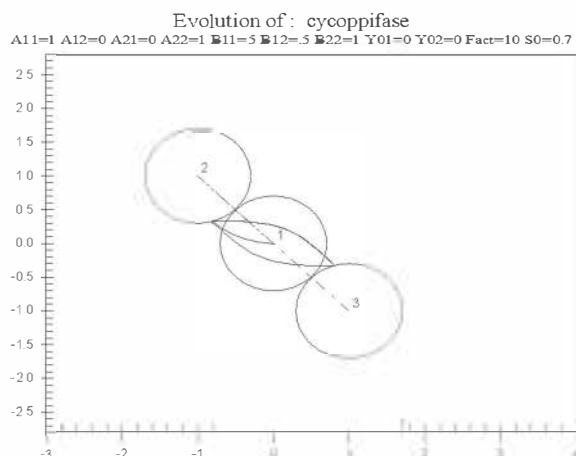


fig. 4.25 - Accommodation – Influence de la matrice  $B$  sur la forme de la boucle d'hystérésis

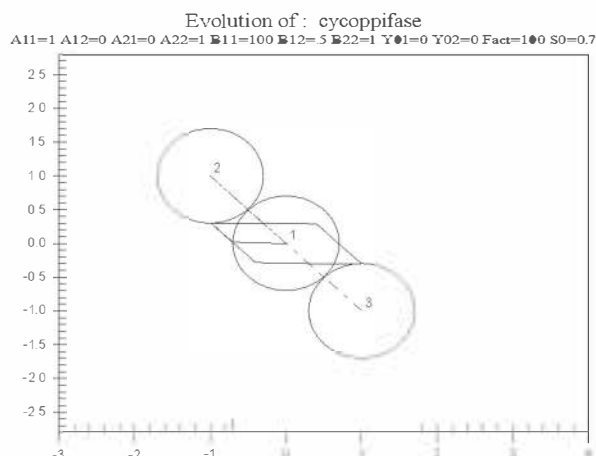


fig. 4.26 - Accommodation – Influence de la matrice  $B$  sur la forme de la boucle d'hystérésis

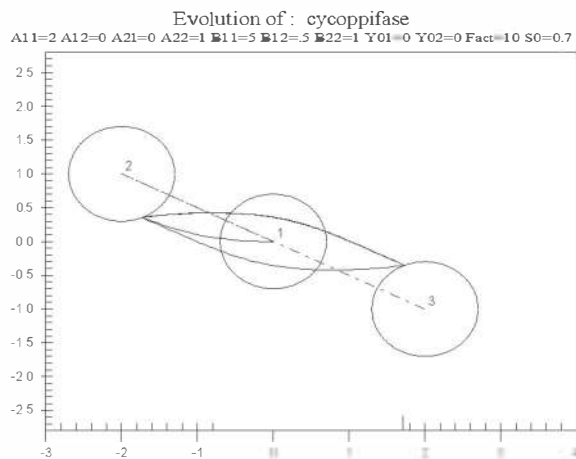


fig. 4.27 - Accommodation – Influence de la matrice  $A$  sur la taille de la boucle d'hystérésis

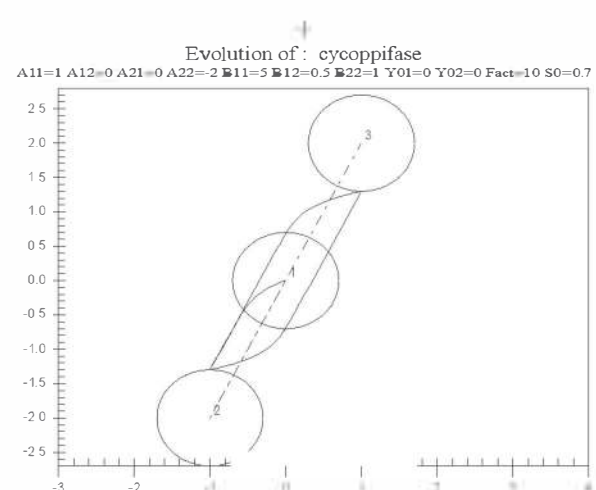


fig. 4.28 - Accommodation – Influence de la matrice  $A$  sur l'orientation de la boucle d'hystérésis

Le modèle bidimensionnel à écrouissage cinématique permet de simuler le rochet élastoplastique en choisissant une matrice  $B$  presque singulière. Le nombre de cycles pour atteindre l'état stabilisé est très grand et la déformation plastique durant de nombreux de cycles (avant la stabilisation) n'est pas périodique et ne cesse de croître.

### Construction exacte des cycles stabilisés

Dans le cas des chargements cycliques, J.Zarka et J.Casier (1977) ont proposé des règles pratiques de construction des cycles stabilisés. Elles s'appuient uniquement sur la connaissance de l'état ultime et de la taille du cycle, à extraire s'il lui est inférieur, ou à construire s'il lui est supérieur.

### Détermination de la charge ultime

Quand le chargement devient "très grand", il est possible de supposer qu'une solution stationnaire est atteinte si :

$$\dot{y}_\alpha \approx \underline{A} \dot{\underline{\Sigma}}$$

La construction de la charge ultime  $\underline{\Sigma}_u$  s'obtient à partir du chargement monotone conduisant à la condition  $\dot{y}_\alpha = \underline{A} \dot{\underline{\Sigma}}$  à l'instant  $t_u$ .

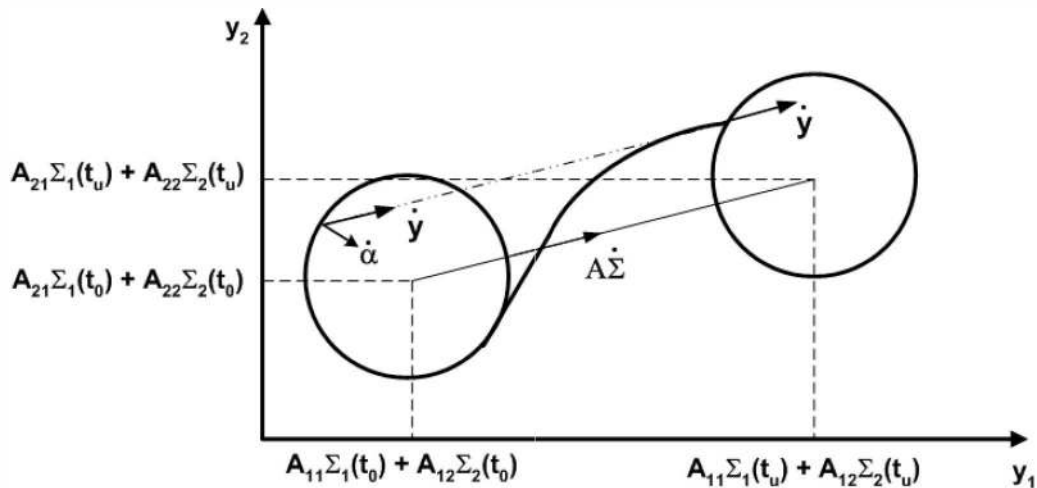


fig. 4.29 - Construction de la charge ultime

Pour les niveaux de chargements inférieurs à la charge ultime, le comportement du matériau est en général fortement non linéaire (fig. 4.29). Dans le cas contraire, c'est une droite de direction  $\underline{A} \dot{\underline{\Sigma}}$

Lorsque le chargement ultime est atteint, une décharge entraînerait la fermeture totale de la boucle d'hystérésis. L'état stabilisé est donc obtenu en un seul cycle.

**Construction exacte des cycles stabilisés inférieur au cycle ultime**

Lorsque le cycle ultime est construit, J.Zarka et J.Casier (1977) ont montré que tous les cycles stabilisés inférieurs à celui-ci pouvaient être extraits de manière analytique. La fig. 4.30 résume la procédure d'extraction.

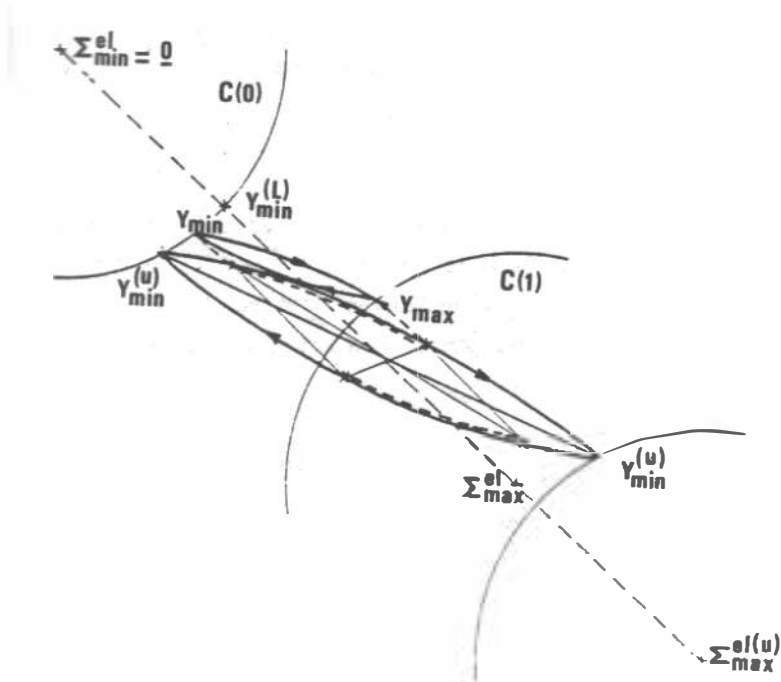


fig. 4.30 - Extraction des cycles stabilisés inférieurs au cycle ultime

**Construction exacte des cycles stabilisés supérieurs au cycle ultime**

Au delà du chargement ultime, la trajectoire dans l'espace des paramètres transformés devient une droite de direction  $A\dot{\Sigma}$ . La construction est donc triviale.

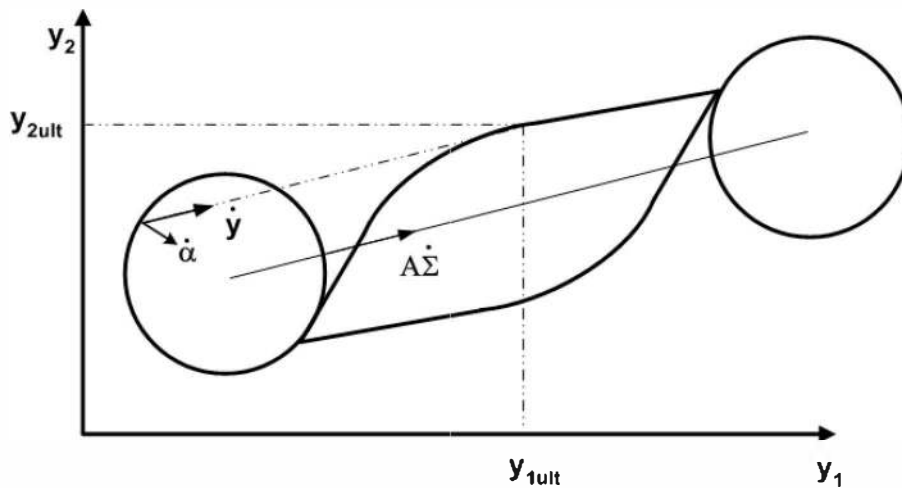


fig. 4.31 - Construction des cycles stabilisés au delà de la charge ultime

**Chargements non radiaux cycliques et quelconques**

Quand le trajet de chargement dans l'espace des paramètres transformés  $(y_{\alpha_1}; y_{\alpha_2})$  (représenté en pointillé sur les figures) n'est plus une droite alors le chargement est dit non radial. Si la trajectoire décrit une courbe fermée alors le chargement est cyclique.



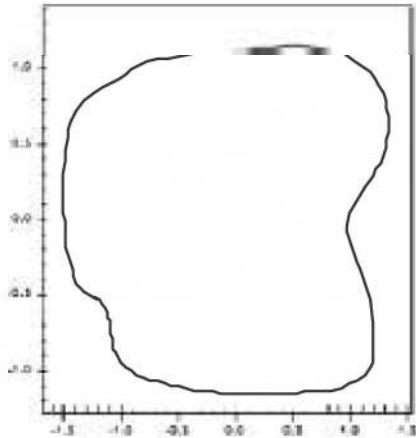


fig. 4.32 - Chargement non radial cyclique

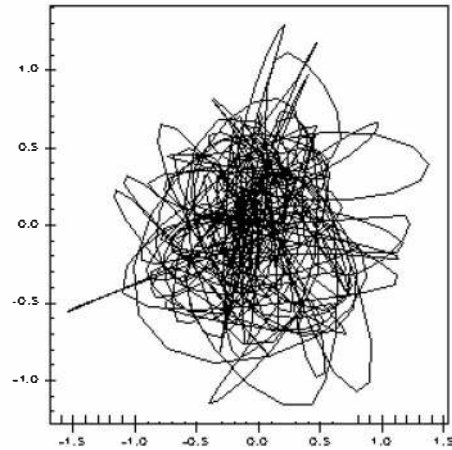


fig. 4.33 - Chargement non radial à amplitude variable

Comme pour les chargements radiaux, le cycle limite dépend fortement du matériau (matrices  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$ ) et du chargement (fig. 4.34 à fig. 4.37). Nous pouvons aussi remarquer que le sens de parcours du chargement joue un rôle important (fig. 4.38 et fig. 4.39).

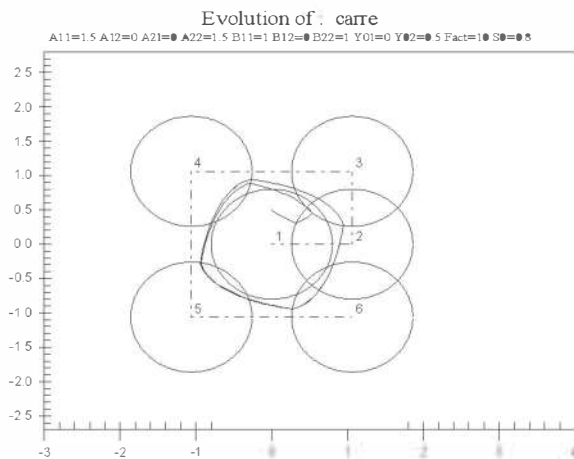


fig. 4.34 -

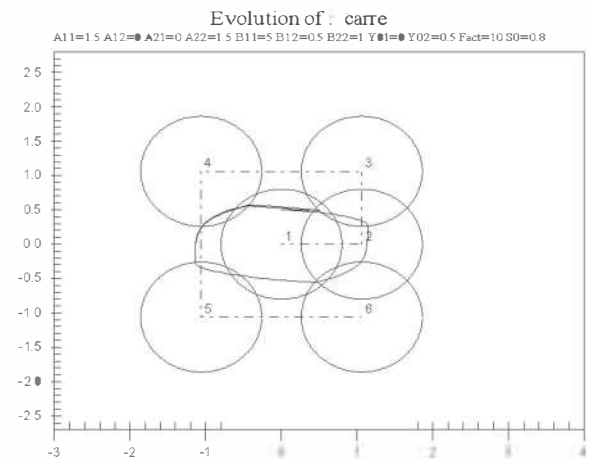


fig. 4.35 -

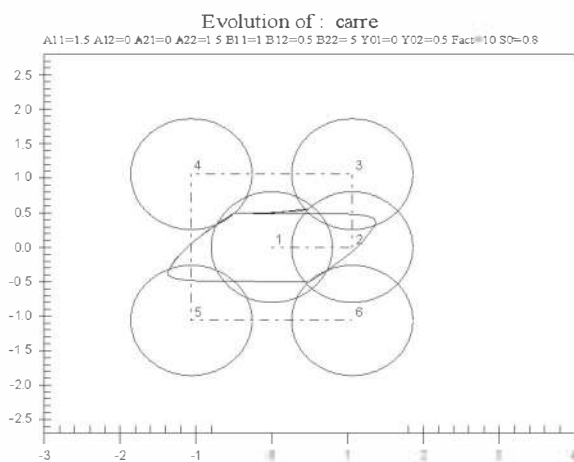


fig. 4.36 -

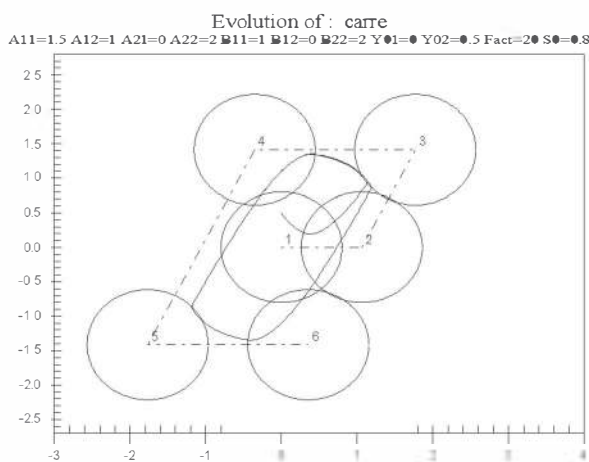


fig. 4.37 -

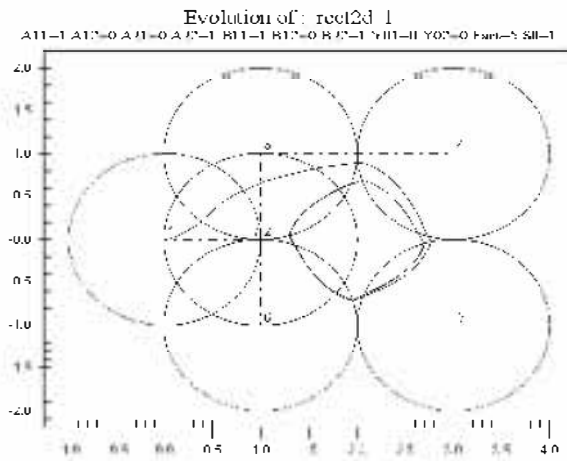


fig. 4.38 -

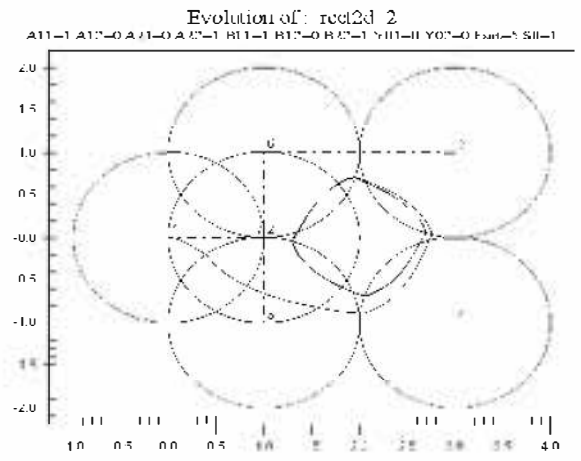


fig. 4.39 -

**Synthèse**

Après avoir essayé plusieurs types de trajets de chargement (cercle, rectangle, diagonal, triangle, aléatoire...) ayant tous le même centre et la même fluctuation et sur plusieurs matériaux différents, nous sommes arrivés, comme le montre la figure ci-dessous, au constat suivant :

*“Tout chargement bidimensionnel est borné par son chargement frontière défini par sa fluctuation ”*

Un tel chargement assure que les déformations plastiques restent bornées par le chargement circulaire ayant le même centre et la même fluctuation que le chargement réel (fig. 4.40). Nous espérons ainsi conserver sensiblement les mêmes mécanismes d'endommagements qui sont bien entendu inconnus.

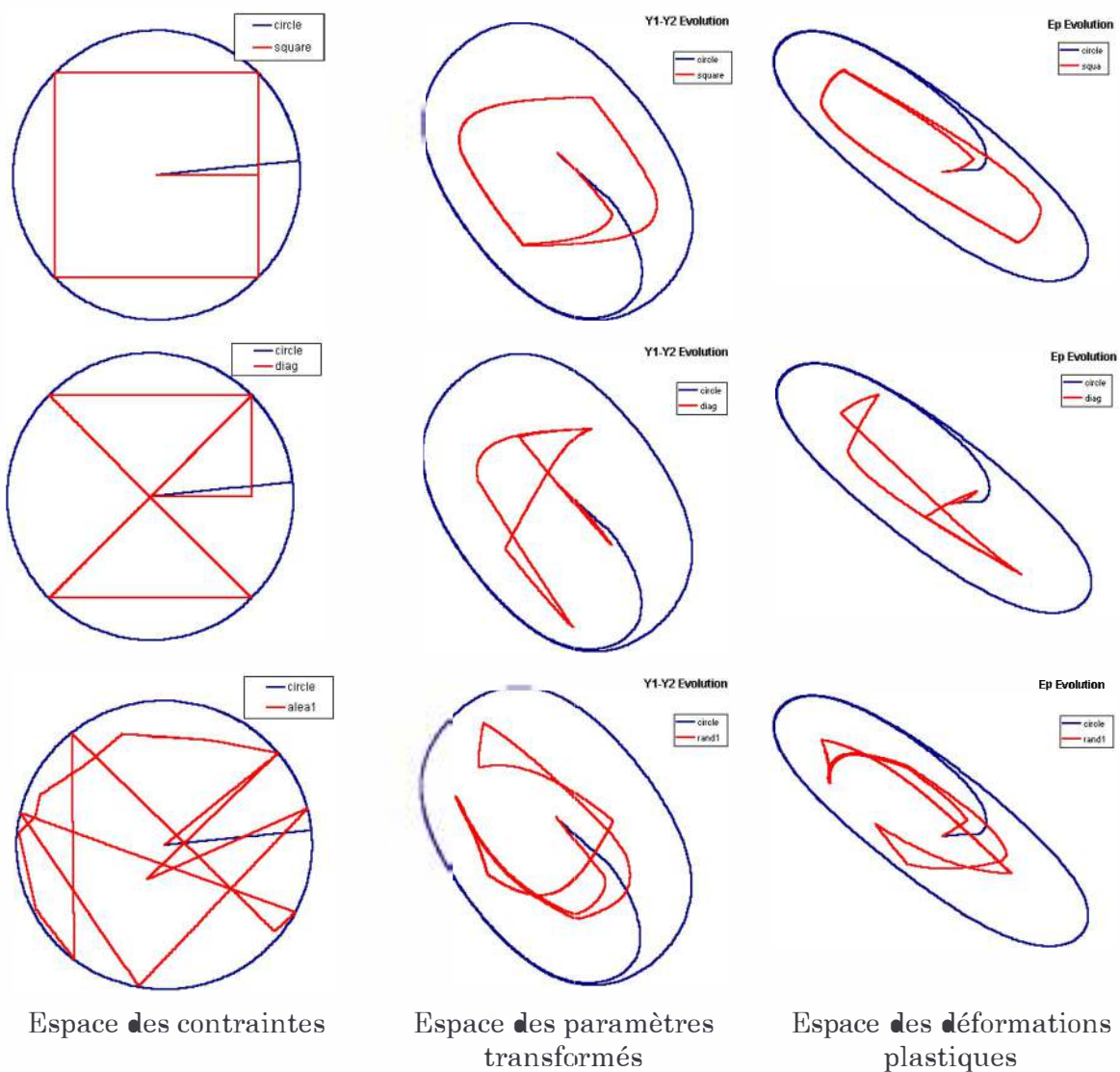


fig. 4.40 - Tout chargement 2D est borné par son chargement frontière

## 4.4.2 Procédure de calcul du chargement cyclique radial équivalent

Pour définir le chargement radial cyclique équivalent, la première étape consiste à calculer le centre  $C_f^{va}$  et la fluctuation du chargement réel  $F_\sigma^{va}$ , ceci afin de conserver les mêmes ordres de grandeur de la déformation plastique.

La seconde étape consiste à calculer la déformation plastique cumulée du chargement réel qui est toujours la mesure retenue, en utilisant la loi de comportement locale du matériau.

Enfin, dans la troisième étape, nous définissons dans une direction donnée (**donc un chargement cyclique radial**) le chargement cyclique équivalent de même fluctuation conduisant à la même déformation plastique cumulée que le chargement réel.

Le chargement radial cyclique équivalent devra donc satisfaire les trois conditions suivantes :

- même centre  $C_f^{eq} = C_f^{va}$
- sensiblement la même fluctuation  
 $F_\sigma^{eq} = \beta F_\sigma^{va}$  où  $\beta \geq 1$   
 et tel que  $F_\sigma^{eq} \leq 2\sigma_y$  (pour garantir l'adaptation globale)
- même déformation plastique cumulée  $\varepsilon_{pc}^{eq} = \varepsilon_{pc}^{va}$

$\sigma_y$  étant la limite élastique globale.

Le chargement uniaxial repéré dans une direction  $\theta$  sera noté  $(C_f^{eq}; F_\sigma^{eq}; N)_\theta$  et vérifie les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (C_f^{eq}; F_\sigma^{eq}; N)_\theta = (C_f^{va}; \beta F_\sigma^{va}; N)_\theta \\ 1 \leq \beta \leq \frac{2\sigma_y}{F_\sigma^{va}} \\ N \text{ tel que } \varepsilon_{pc}^{eq} = \varepsilon_{pc}^{va} \\ \theta: \text{direction du chargement local} \end{array} \right.$$

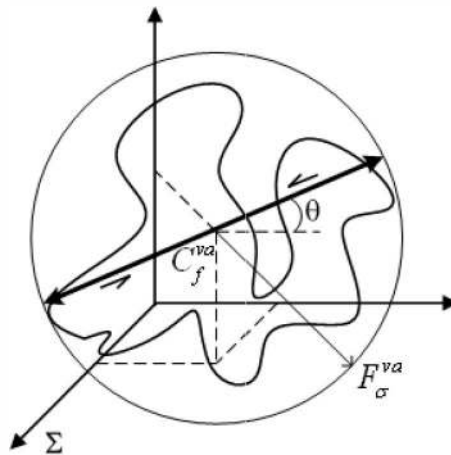


fig. 4.41 - Fluctuation dans l'espace des contraintes - Chargement radial dans la direction  $\theta$

### 4.4.3 Analyse critique

#### 4.4.3.1 Influence des cycles non stabilisés

Il est souvent très pratique d'ignorer ou de sous estimer les premiers cycles qui mènent à la stabilisation. Cette hypothèse doit être utilisée avec précaution, comme par exemple, quand la matrice  $\underline{B}$  du modèle à 2 paramètres internes est presque singulière. Dans ce cas en effet, le nombre de cycles avant stabilisation tend vers l'infini et il n'y a pas de règles universelles pour indiquer à partir de quand il est possible de supposer l'accommodation. L'erreur sur la déformation plastique cumulée peut être suffisamment importante pour fausser gravement l'estimation du dommage et donc du chargement équivalent.

#### 4.4.3.2 Influence de l'état initial

Pour un même niveau de contrainte, la déformation plastique cumulée change selon l'état initial.

#### 4.4.3.3 Ordre d'apparition des cycles

Un des points importants dans le calcul du dommage par fatigue est la prise en compte de l'ordre d'apparition des cycles. Plusieurs scénarii de cyclages sont illustrés dans R.CAZAUD (1969). Il est bien connu par exemple que le scénario grand cycle/petit cycle est plus endommageant que le scénario petit cycle/grand cycle. Il est donc nécessaire de vérifier ces comportements dans nos modèles simplifiés "d'endommagement".

#### *Chargements à amplitudes variables ( $AV_L$ et $AV_E$ )*

Dans le cas de chargements  $AV_L$  et  $AV_E$  la notion de cycle n'existant pas, il n'est donc pas possible de parler cycles stabilisés. Les remarques précédentes sur l'influence de l'état initial nous amènent à dire que chaque nouveau niveau de contraintes remet

les mécanismes locaux dans un état initial différent, entraînant un incrément de déformation plastique qui dépend de cet état initial. L'ordre selon lequel les pics de contraintes apparaissent ont donc leur importance puisqu'il y'a autant de changement d'état initiaux que de pics.

Le modèle à 2 paramètres internes permet de représenter ce comportement (ce que le modèle 1D ne permet pas).

#### ***Chargements cycliques par blocs (CB)***

De la même façon que pour les chargements AV, le passage d'un bloc à un autre se traduit par un changement d'état initial. Dans ce cas, par contre, le nombre de changement d'états initiaux est généralement petit par rapport au nombre de pics de contraintes. Sauf si le nombre de cycles avant stabilisation est grand, nous pouvons considérer que nos deux modèles 1D et à 2 paramètres internes ne sont pas aptes à représenter l'ordre d'apparition des cycles. Conclusions fausses pour le 2-D.

#### **4.4.3.4 Influence de la contrainte moyenne**

Ni le modèle 1D, ni le modèle à 2 paramètres internes ne permettent de prendre en compte l'influence de la contrainte moyenne. Dans ce cas, les recours à des diagrammes de type Goodman est nécessaire.

Il faut absolument une matrice B singulière pour obtenir cette influence. Des modèles plus sophistiqués, comme celui à 4 paramètres internes singulier doivent être introduits, mais ils sont plus difficiles à mettre en œuvre.

#### **4.4.3.5 Influence de la direction du chargement**

Nous avons établi une procédure de calcul du chargement équivalent dans le cas des chargements non radiaux. Le chargement équivalent construit est radial cyclique et dépend de l'angle  $\theta$  qui représente la direction du chargement cela est lié à l'anisotropie locale du matériau. Le nombre de cycles du chargement équivalent qui est défini par rapport à l'égalité entre les déformations plastiques cumulées est différent d'une direction à une autre.

## 4.5 Identification générale des termes intervenant dans les mécanismes microscopiques

De manière intuitive, il nous faut retrouver à l'échelle globale le critère de limite d'endurance multiaxial au moins du type Dang-Van : deux trajets de chargement en traction alternée et torsion alternée sont nécessaires. Cette condition se traduit par un comportement local adapté à l'échelle microscopique lorsque la limite d'endurance de Dang-Van est satisfaite.

Des relations sur les facteurs intervenant dans A et les "seuils limites élastiques locales" des mécanismes sont déduites.

Quand la limite d'endurance est dépassée, l'énergie dissipée microscopique locale  $w_p$  ou la déformation plastique microscopique cumulée locale  $e_c$ , qui sont pour nous une mesure de l'état d'endommagement actuel du matériau facteurs, atteignent une valeur critique caractéristique qui est liée à chaque matériau lors de l'initiation de la fissuration.

Il faut donc, si le matériau est soumis à des essais de fatigue en traction compression (globale) et si nous avons obtenu la courbe de Wöhler du matériau ainsi que l'influence de la contrainte moyenne, que lorsqu'à présent, nous imposons cette contrainte uniaxiale globale durant un nombre de cycles extrait de la courbe de Wöhler expérimentale, les termes  $w_p$  ou  $e_c$  restent toujours constants et égaux à une même valeur quelle soit l'amplitude de la contrainte. Un programme a été écrit pour faire cette identification au mieux en prenant des mécanismes locaux de plus en plus complexes.

## 4.6 Quantification à l'échelle de la structure

### 4.6.1 Chargements à un paramètre

#### 4.6.1.1 Définition du chargement

Lorsque la structure est soumise à un chargement à un paramètre, sa réponse élastique tout au long du trajet peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{el} = \underline{\underline{\Sigma}}_0^{el} + \lambda(t) \Delta \underline{\underline{\Sigma}}^{el}$$

où  $\underline{\underline{\Sigma}}^{el}$  est le tenseur élastique des contraintes macroscopiques,

$\lambda(t)$  est une fonction quelconque du temps, et qui prend la valeur zéro à l'instant zéro,

$\Delta \underline{\underline{\Sigma}}^{el}$  est la direction du chargement,

$\underline{\underline{\Sigma}}_0^{el}$  est l'état de contrainte macroscopique initial de la structure.



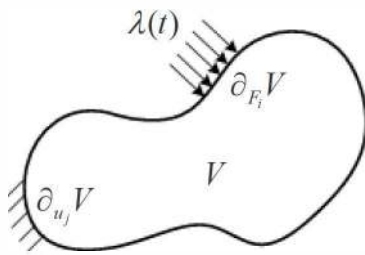


fig. 4.42 - Structure soumise à un chargement à 1 paramètre

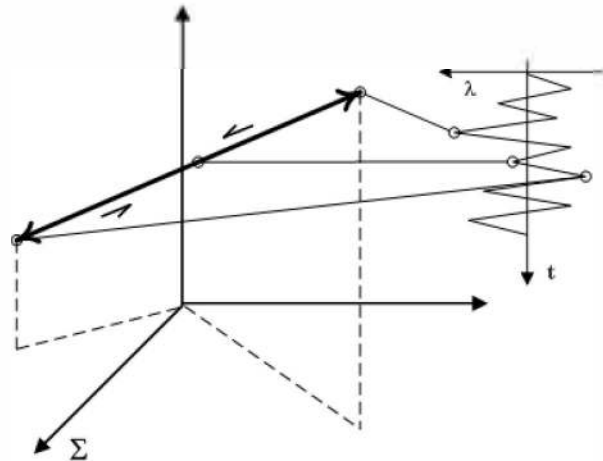


fig. 4.43- Trajet de chargement à 1 paramètre ou radial dans l'espace des contraintes

### Calcul du champ de contraintes

Nous avons supposé l'adaptation globale de la structure. Une analyse élastoplastique permet de trouver le champ de contraintes résiduelles  $\underline{R}^{\ell}$  et le champ de déformation plastique  $\underline{E}^{pl}$  à l'état stabilisé. Le champ de contraintes s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(t) = \underline{\underline{R}}^{\ell} + \underline{\underline{\Sigma}}_0^{el} + \lambda(t - t_s) \Delta \underline{\underline{\Sigma}}^{el} \quad \text{pour } t \geq t_s$$

où,  $t_s$  représente le temps d'adaptation.

Lors des chargements cycliques radiaux, Zarka et Casier (1980) ont constaté expérimentalement numériquement que, pour une structure à écrouissage cinématique, l'état adapté est atteint soit après le premier cycle soit au bout d'une infinité de cycles selon l'état initial. Dans le cas d'un nombre de cycles infini, il peut être considéré que l'adaptation est pratiquement atteinte quand :

$$\frac{\|\underline{\underline{E}}^{pl} - \underline{\underline{E}}^{pN}\|}{\|\underline{\underline{E}}^{pl}\|} \leq r$$

où  $\underline{\underline{E}}^{pN}$  est la déformation plastique au N-ième cycle et où  $r$  peut être pris à  $10^{-4}$  par exemple.

Ce critère conduit à une définition d'un nombre fini de cycles  $N_s$  nécessaire pour l'adaptation :

$$N \geq N_s \approx \frac{-\ln(r)}{2 \ln \left( 1 + \frac{\beta H}{Y_G} \right)} \quad \text{avec très souvent } \beta \approx 2$$



où  $H$  et  $Y_G$  sont respectivement le module d'érouissage en traction et le module d'élasticité macroscopiques.

A ce  $N_s$  correspond un instant  $t_s$  du chargement.

**Procédure**

L'analyse élastoplastique donne le champ de contraintes résiduelles  $\underline{R}^{\ell}$  et le champ de déformation plastique  $\underline{E}^{pN}$ . L'analyse élastique de la structure (en considérant le comportement macroscopique) donne le champ de contrainte élastique  $\underline{\Sigma}^{el}(t)$ . Le champ de contraintes total  $\underline{\Sigma}(t)$  est ensuite déduit.

Deux points (au moins deux et a priori dans les zones critiques) sont sélectionnés, pour lesquels nous calculons la déformation plastique cumulée LOCALE avec la loi de comportement microscopique du matériau. A ce niveau, la limite d'élasticité GLOBALE du matériau est remplacée par la limite d'endurance à  $N$  cycles ( $N$  étant choisi selon le problème à traiter) :

$$\varepsilon_{pc}(t) = \int_{t_s}^t \|\dot{\underline{\varepsilon}}(t)\|_{=p} du$$

Comme il n'a qu'un seul paramètre  $\lambda$  (variable), le trajet dans l'espace des paramètres de chargement est radial. Le centre et la fluctuation sont notés respectivement  $C_{f_{\lambda}}^{var}$  et  $F_{\lambda}^{var}$  et valent :

$$C_{f_{\lambda}}^{var} = \frac{\lambda_{min} + \lambda_{max}}{2}$$

$$F_{\lambda}^{var} = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{2}$$

La réponse élastique en chaque point de la structure, dans l'espace des contraintes, est donc aussi radiale, de centre  $C_{f_{\sigma}}^{var}$  et de fluctuation  $F_{\sigma}^{var}$  :

$$C_{f_{\sigma}}^{var} = \underline{R}^{\ell} + \underline{\Sigma}_{=0}^{el} + \frac{\lambda_{min} \Delta \underline{\Sigma}^{el} + \lambda_{max} \Delta \underline{\Sigma}^{el}}{2}$$

$$F_{\sigma}^{var} = \frac{\|\lambda_{max} \Delta \underline{\Sigma}^{el} - \lambda_{min} \Delta \underline{\Sigma}^{el}\|}{2}$$

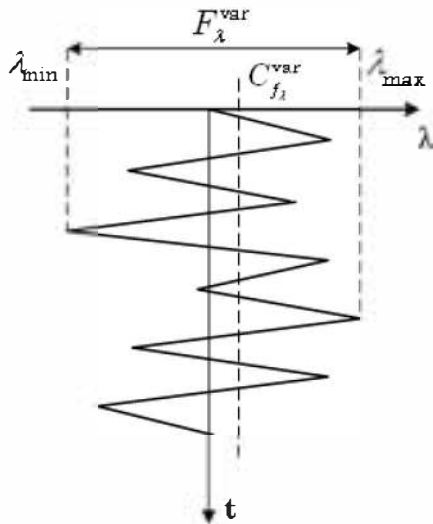


fig. 4.44 - Espace du paramètre de chargement  $\lambda$

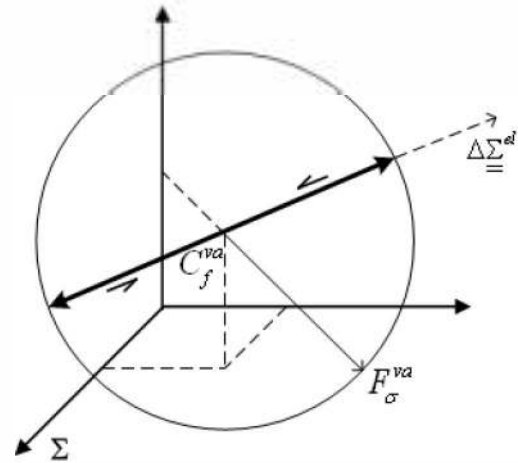


fig. 4.45 - Espace des contraintes  $\Sigma$

Nous calculons ensuite pour les 2 points les coefficients de concentration de contrainte  $K_i$  tel que :

$$K_i = \left\| \underline{\Delta \Sigma^{el}} \right\|_i \quad i = 1, 2$$

Il faut maintenant rechercher, le chargement équivalent cyclique radial à l'échelle du matériau en utilisant la loi de comportement locale du matériau:

$$\left\{ \begin{array}{l} (C_f^{eq}; F_\sigma^{eq}; N)_i = (C_f^{va}; \beta F_\sigma^{va}; N)_i \\ \left( 1 \leq \beta \leq \frac{2\sigma_y}{F_\sigma^{va}} \right)_i \\ N \text{ tel que } (\varepsilon_{pc}^{eq} = \varepsilon_{pc}^{va})_i \end{array} \right. \quad i = 1, 2$$

La direction du chargement équivalent à l'échelle du matériau est donnée au point considéré par  $\underline{\Delta \Sigma^{el}}$ .

Pour différentes valeurs de  $\beta$ , nous obtenons pour chaque point une famille de chargements équivalents (similaire à la courbe de Wöhler).

$$(\underline{\Delta \Sigma^{eq}}; N)_i \rightarrow \left( \frac{\Delta \lambda^{eq}}{K}; N \right)_i \quad i = 1, 2$$

$$\text{où } (\underline{\Delta \Sigma^{eq}}; N)_i = (F_\sigma^{eq}; N)_i \quad i = 1, 2$$

L'intersection des 2 courbes dans le plan  $(\Delta \lambda; N)$  donne la représentation globale du chargement au niveau de la structure :  $(\Delta \lambda^{eq}; N^{eq})$

Le chargement équivalent cyclique radial à l'échelle de la structure est finalement:

$$(C_{\lambda}^{eq}; F_{\lambda}^{eq}; N^{eq}) = (C_{\lambda}^{va}; \Delta\lambda^{eq}; N^{eq})$$

$$\text{où } (\Delta\lambda^{eq}; N^{eq}) = (\Delta\lambda; N)_1 \cap (\Delta\lambda; N)_2$$

Il est clair que, pour ce chargement équivalent en général, IL N'Y A QU'UNE SEULE amplitude et qu'UN nombre de cycles. Alors, si les simulations numériques sont très faciles, en particulier avec la méthode simplifiée ZAC (Zarka-Casier), il n'est pas évident que le temps d'expérience pourra être réduit systématiquement.

Aussi, la représentation ne peut être pas réalisée mathématiquement (comme il est classiquement fait avec la méthode rainflow et d'autres) et est complètement associée aux matériaux et à la géométrie de la structure.

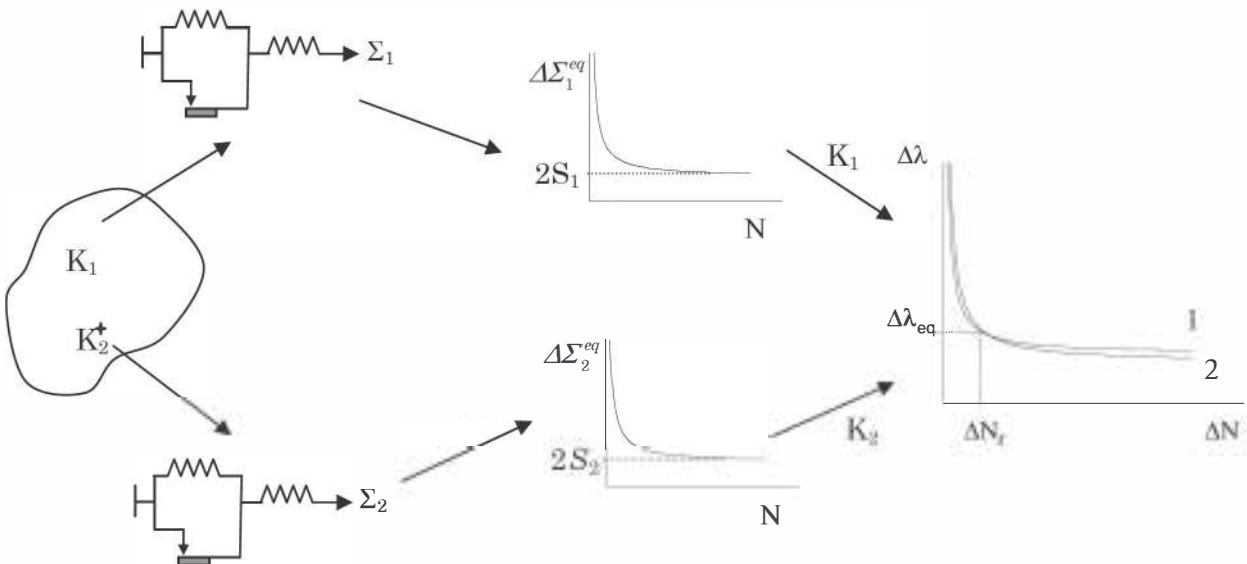


fig. 4.46 - Procédure de calcul du chargement équivalent à l'échelle de la structure dans le cas du chargement à 1 paramètre

## 4.6.2 Chargements à plusieurs paramètres

### 4.6.2.1 Définition du chargement

Lorsque la structure est soumise à un chargement à plusieurs paramètres  $\lambda_i$ , sa réponse élastique tout au long du trajet peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{el}(t) = \underline{\underline{\Sigma}}_{\bullet}^{el} + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \Delta\underline{\underline{\Sigma}}_i^{el}$$

où  $\underline{\underline{\Sigma}}^{el}$  est le tenseur des contraintes élastiques macroscopiques,

$\lambda_i(t)$  sont des fonctions dépendant du temps mais non liées entre elles, et qui prennent la valeur zéro à l'instant zéro,

$\underline{\Delta\Sigma}_i^{el}$  sont des directions formant une base dans le plan contenant le trajet de chargement

$\underline{\Sigma}_0^{el}$  est l'état initial de la structure.

A l'échelle de la structure, les paramètres de chargement  $\lambda_i$  décrivent une courbe. Celle-ci est contenue dans une hypersphère de centre  $C_{f_\lambda}^{var}$  et de rayon  $F_\lambda^{var}$  définie par sa fluctuation. A l'échelle du matériau, la réponse élastique se traduit en tout point de la structure par un trajet de chargement dans l'espace des contraintes décrivant une courbe contenue dans une hypersphère de centre  $C_{f_\sigma}^{var}$  et de rayon  $F_\sigma^{var}$ .

Si nous choisissons un trajet cyclique radial dans l'espace des paramètres de chargements  $\lambda_i$ , nous pouvons l'écrire sous la forme :

$$\lambda_i(t) = A_{i0} + U(t)A_i$$

où  $U(t)$  est le nouveau paramètre de chargement variant dans l'intervalle  $[-F_\lambda^{var}; F_\lambda^{var}]$

$A_i$  définissant un vecteur unitaire dans la direction  $\gamma$

et  $A_{i0}$  est égale au centre du chargement variable  $C_{f_\lambda}^{var}$ .

La réponse élastique induite est radiale dans la direction  $\underline{\Delta\Sigma}_\gamma^{el}$  et s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}\underline{\Sigma}_\gamma^{el}(t) &= \underline{\Sigma}_0^{el} + \sum_{i=1}^n (A_{i0} + U(t)A_i) \underline{\Delta\Sigma}_i^{el} \\ \underline{\Sigma}_\gamma^{el}(t) &= \underline{\Sigma}_0^{el} + \sum_{i=1}^n A_{i0} \underline{\Delta\Sigma}_i^{el} + \sum_{i=1}^n U(t)A_i \underline{\Delta\Sigma}_i^{el} \\ \underline{\Sigma}_\gamma^{el}(t) &= \underline{\Sigma}_{\gamma0}^{el} + U(t) \underline{\Delta\Sigma}_\gamma^{el}\end{aligned}$$

où,

$$\underline{\Sigma}_{0\gamma}^{el} = \underline{\Sigma}_0^{el} + \sum_{i=1}^n A_{i0} \underline{\Delta\Sigma}_i^{el}$$

est égale au centre du chargement variable dans l'espace des contraintes  $C_{f_\lambda}^{var}$ ,

et,

$$\underline{\Delta\Sigma}_\gamma^{el} = \sum_{i=1}^n A_i \underline{\Delta\Sigma}_i^{el}$$

définit la direction du chargement radiale dans l'espace des contraintes,

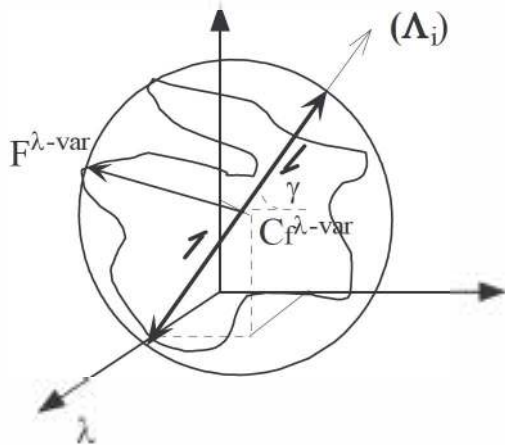


fig. 4.47 - Espace des paramètres de chargement

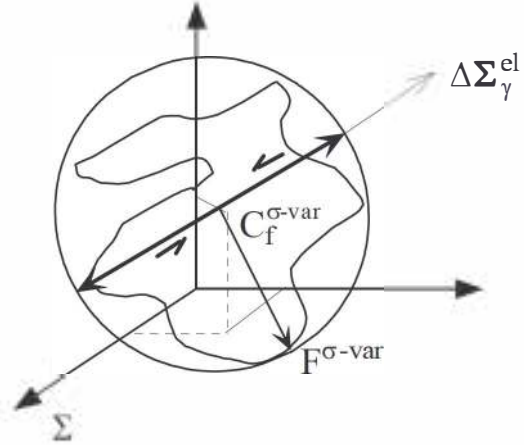


fig. 4.48 - Espace des contraintes

### 4.6.2.2 Procédure

1/ Comme pour le cas du chargement à un paramètre, une analyse élastoplastique permet de trouver le champ de contraintes résiduelles  $\underline{R}^{\ell}$  et le champ de déformation plastique  $\underline{E}^{pl}$  à l'état adapté stabilisé.

$$\underline{\Sigma}(t) = \underline{R}^{\ell} + \underline{\Sigma}^{\bullet} + \lambda(t - t_s) \Delta \underline{\Sigma}^{el} \quad \text{pour } t \geq t_s$$

Le champ de contraintes s'écrit alors :

$$\underline{\Sigma}(t) = \underline{R}^{\ell} + \underline{\Sigma}^{\bullet} + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t - t_s) \Delta \underline{\Sigma}_i^{el} \quad \text{pour } t \geq t_s$$

où,  $t_s$  représente le temps d'adaptation.

2/ Pour tout chargement dans l'espace des paramètres de chargement, nous définissons son centre  $C_{\lambda}^{var}$  et sa fluctuation  $F_{\lambda}^{var}$ . Ce centre peut être pris comme la nouvelle origine.

Deux points (au moins deux et a priori dans les zones critiques) sont sélectionnés, pour lesquels nous calculons la déformation plastique cumulée locale (ou l'énergie dissipée locale) avec la loi de comportement microscopique du matériau. A ce niveau, la limite d'élasticité GLOBALE du matériau est remplacée par la limite d'endurance à N cycles (N étant choisi selon le problème à traiter).

3/ Puis, comme pour le cas à un paramètre de chargement, il est possible de définir dans une direction particulière définie par l'angle  $\gamma$ , UN chargement cyclique radial équivalent à l'échelle de la structure :

$$\left( C_{\lambda}^{eq}; \Delta U_{\lambda}^{eq}; N_{\lambda}^{eq} \right)_{\gamma} \quad \text{telque } C_{\lambda}^{req} = C_{\lambda}^{va}$$

Ceci peut être effectué pour plusieurs directions pour éventuellement permettre de définir le chargement cyclique équivalent le plus rapide.

## *Points essentiels à retenir*

Quel que soit le type de chargement (radial variable, non-radial cyclique ou non-radial variable), nous avons proposé dans ce chapitre une règle d'équivalence entre 2 chargements vis à vis du dommage.

Face aux nombreuses difficultés présentes dans les théories existantes (méthode d'extraction et de comptage de cycles, facteur d'endommagement, règles de cumul...), nous avons décrit notre nouvelle approche possible qui a une signification plus physique et qui est très facile à mettre en œuvre à l'échelle locale du matériau comme à l'échelle globale de la structure.

L'idée principale est de trouver, en terme de "dommage" une description ou "mesure" discriminatoire du chargement réel complexe variable. Cela se fait essentiellement par l'introduction d'une règle d'équivalence entre deux chargements puis par la définition d'un chargement équivalent cyclique radial simple susceptible de représenter le chargement réel.

### **Hypothèses**

A l'échelle de l'élément de volume représentatif, nous considérons deux comportements complètement indépendants :

#### **Echelle macroscopique**

Nous ne nous intéressons qu'à la fatigue à grand nombre de cycles. Ceci implique qu'à l'échelle macroscopique, après un certain "temps", la structure doit atteindre systématiquement un état limite adapté, donc sans variation du champ de déformation plastique *macroscopique globale*.

Une analyse élastoplastique par les méthodes soit incrémentales, très coûteuses, soit directes (type Ladeveze, Nguyen/Dang-Van) ou encore simplifiées (type Zarka/Casier) très rapides, permet l'évaluation du champ de contraintes résiduelles à l'état stabilisé en considérant le comportement macroscopique du matériau (essentiellement, la limite d'élasticité et le module d'écrouissage macroscopique du matériau).

Nous supposons que le matériau obéit à une loi élastoplastique à écrouissage quelconque comme cela est décrit dans le cadre de la représentation de Zarka.

#### **Echelle microscopique**

En se plaçant à une échelle microscopique, c'est à dire celle d'un volume élémentaire représentatif (V), nous devons représenter le fait expérimental que lorsque la limite d'endurance (macroscopique) est dépassée, certains mécanismes d'endommagements microscopiques locaux sont activés et vont contribuer au dommage dans ce volume.

Nous supposons qu'il y a dans ce volume un assemblage de micromécanismes dont nous ne voulons pas connaître la vraie signification physique et que nous ne cherchons pas à identifier de façon réelle, mais que nous prendrons en nombre de plus en plus en grand afin d'assurer une bonne représentation des essais

Nous supposons de plus qu'à cette échelle, il y aura nécessairement accommodation locale et même éventuellement rochet lorsque la limite d'endurance (macroscopique) est dépassée.

Les propriétés mécaniques et en fatigue du matériau sont prises indépendantes de la température (seule la limite élastique fonction de la température peut être prise en compte dans cette approche).

L'énergie dissipée microscopique locale  $W_D$  ou la déformation plastique microscopique locale cumulée  $\varepsilon_{pc}$  sont pour nous une représentation de l'état d'endommagement actuel du matériau (une fois encore, ces 2 facteurs n'étant pas observables ni mesurables à l'échelle globale)

Nous supposons qu'à l'initiation de la fissuration, l'un de ces 2 facteurs atteint une valeur critique caractéristique du matériau.

### Quantification du chargement au niveau du matériau

#### Chargement à 1 paramètre

A l'échelle locale du matériau, dans l'espace des contraintes, nous définissons pour tout chargement unidimensionnel son centre  $C_f$  et sa fluctuation  $F_\sigma$  :

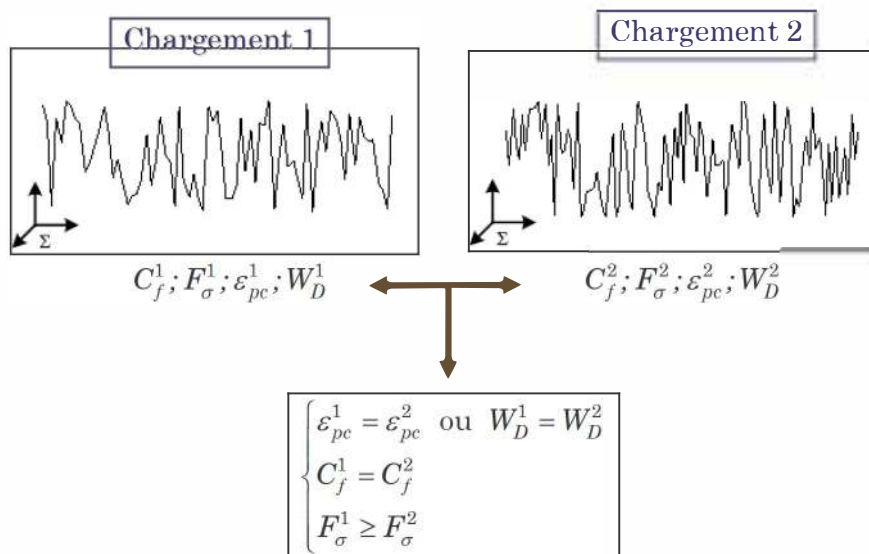
$$C_f = \frac{1}{2} (\Sigma_{max} + \Sigma_{min})$$

$$F_\sigma = \frac{1}{2} (\Sigma_{max} - \Sigma_{min})$$

Nous choisissons comme *mesure* d'un chargement, la déformation plastique cumulée  $\varepsilon_{pc}$  induite (ou encore l'énergie plastique dissipée  $W_D$ ) en considérant un comportement *local* simple.

Nous dirons que deux chargements sont équivalents vis à vis du dommage par fatigue :

- i) s'ils produisent la même déformation plastique cumulée LOCALE  $\varepsilon_{pc}$  (ou  $W_D$ ), et afin de conserver les mêmes mécanismes d'endommagement
- ii) s'ils ont le même centre  $C_f$
- iii) et si le chargement équivalent a une fluctuation sensiblement supérieure ou égale à  $F^\sigma$  (mais inférieure à deux fois la limite élastique macroscopique afin d'assurer l'adaptation globale de la structure)



**Chargement à plusieurs paramètres**

Dans le cas du chargement à N paramètres, la même procédure va être utilisée. Dans l'espace des paramètres de chargement, le chargement frontière devient maintenant une hypersphère définie par son centre  $C_f^{va}$  et son rayon  $F_\sigma^{va}$

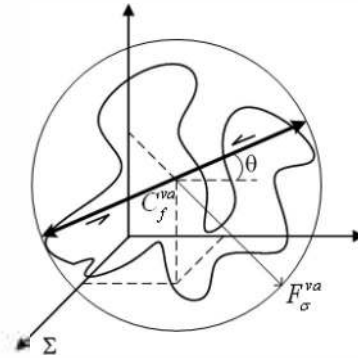
Le chargement radial cyclique équivalent devra donc satisfaire les trois conditions suivantes :

- même centre  $C_f^{eq} = C_f^{va}$
- sensiblement la même fluctuation  
 $F_\sigma^{eq} = \beta F_\sigma^{va}$  où  $\beta \geq 1$   
 et tel que  $F_\sigma^{eq} \leq 2\sigma_y$  (pour garantir l'adaptation globale)
- même déformation plastique cumulée  $\varepsilon_{pc}^{eq} = \varepsilon_{pc}^{va}$

$\sigma_y$  étant la limite élastique globale.

Le chargement uniaxial repéré dans une direction  $\theta$  sera noté  $(C_f^{eq}; F_\sigma^{eq}; N)_\theta$  et vérifie les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (C_f^{eq}; F_\sigma^{eq}; N)_\theta = (C_f^{va}; \beta F_\sigma^{va}; N)_\theta \\ 1 \leq \beta \leq \frac{2\sigma_y}{F_\sigma^{va}} \\ N \text{ tel que } \varepsilon_{pc}^{eq} = \varepsilon_{pc}^{va} \\ \theta: \text{direction du chargement local} \end{array} \right.$$







# Chapitre 5

## Description générale de l'analyse à la fatigue

Afin de suivre notre approche "intelligente", nous avons besoin de décrire chaque cas/problème initialement défini par sa représentation primitive (qui ne permet pas d'utiliser les résultats, obtenus à partir d'un cas, à un autre nouveau cas/problème) par une description intelligente. Il va falloir ensuite obtenir les règles à retenir sur ces nouveaux descripteurs à partir de certaines données expérimentales.

### 5.1 Description intelligente d'une analyse à la fatigue

Chaque cas/problème de fatigue peut comporter des différences au niveau de la géométrie de la structure, de ses nombreux matériaux en présence, de son état initial, et de son bloc de chargement (qui est le plus souvent multiaxial aléatoire). Cette représentation primitive dite passive doit être transformée en une représentation active/intelligente capable d'être appliquée à tout nouveau cas.

Dans notre problème, pour chaque cas, les descripteurs de sortie ou conclusions sont :

- i) fissure ou non fissure et,
- ii) si il y a fissure, quel est le nombre de blocs du chargement à appliquer ?

Nous proposons de suivre une analyse multi-niveaux, pour représenter de façon "intelligente" le comportement d'une structure générale. Par exemple, dans le cas d'une structure navale :

- 1) le premier niveau est celui de la structure. Une analyse élastique est conduite en considérant les nombreux chargements et un maillage grossier de la coque. Il n'est pas nécessaire dans cette étape de modéliser finement les cordons de soudures, les formes des détails soudés, les congés... Des simplifications de formes et un maillage plus fin au niveau des discontinuités géométriques suffisent.

2) le deuxième niveau est celui d'une sous-structure 3D que l'on aura relevée comme critique. Un maillage plus fin et une modélisation plus correcte des détails soudés et des discontinuités géométriques présents dans ce domaine peuvent être effectués. Des analyses élastiques ou élastoplastiques (par les méthodes directes/incrémentales ou par la méthode simplifiée) en considérant l'état initial de la structure et le chargement réel peuvent être conduites. A ce niveau, le chargement cyclique radial équivalent est caractérisé.

3) le troisième niveau correspond à celui d'un détail élémentaire 2D (obtenu après une coupe de la sous-structure par un plan) avec un éventuel maillage encore plus fin. Les formes des différentes zones peuvent correspondre dans le cas de structures soudées au matériau de base, au métal d'apport et à la zone affectée thermiquement. Les formes des cordons de soudure peuvent être décrites de façon plus précise. A ce niveau, les analyses doivent être faites avec un maillage convenable et peuvent utiliser la technique du "submodelling", qui consiste à affiner la représentation du chargement et à récupérer les résultats du champ de déplacement sur le bord du maillage grossier pour les appliquer au nouveau maillage raffiné.

4) enfin, nous considérons sur ce détail 2D, une fenêtre 2D virtuelle mobile. Cette fenêtre joue le rôle d'un filtre. Sa taille est telle que les quantités qui sont utiles deviennent relativement peu sensibles aux erreurs associées à la taille et à la distribution des éléments, et que de plus, le dommage doit concerner un certain volume caractéristique ; *la description du matériau, de certains champs (contrainte, gradient de contrainte, critère de fatigue...), dans cette fenêtre conduit à la description intelligente qui est applicable et unique sur toute structure complexe.*

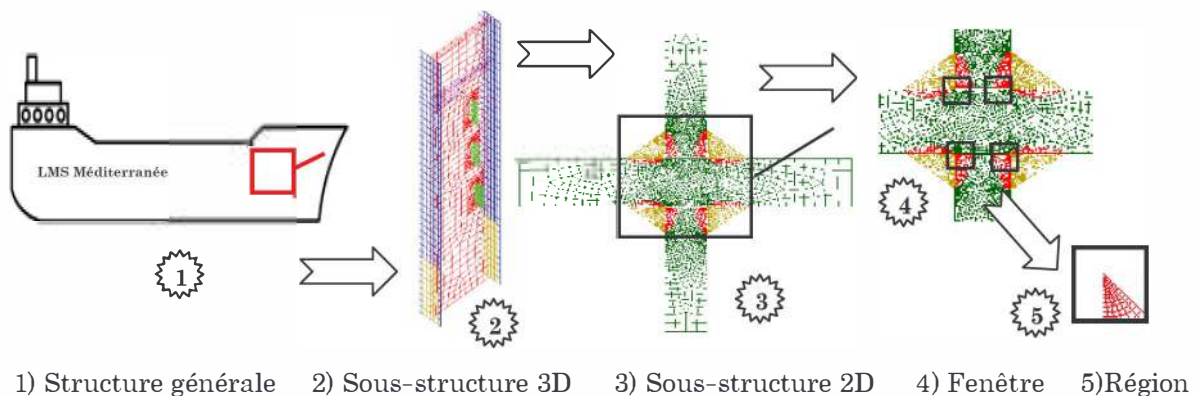


fig. 5.1 - Analyse multi-niveaux

Ces quantités champs que nous devons décrire sont les champs déduits du champ de contraintes et du gradient de ce champ de contraintes. Parmi elles, nous citons par exemple:

- les valeurs Maximum, Minimum et Moyenne du premier invariant  $I_1$  et du deuxième invariant  $J_2$ , le critère de Dang-Van... ;
- à l'intérieur de la fenêtre, les volumes où le critère de fatigue est violé par un facteur de 50%, 80% ou 100%.

Cette analyse multi-niveaux est applicable à la fois à l'éprouvette lisse, à l'éprouvette entaillée et surtout à toute structure complexe en général.

En effet, nous souhaitons utiliser les règles que nous aurons générées à partir de cas/problèmes connus à toute nouvelle structure faite de matériaux différents et soumise à des chargements quelconques.

## 5.2 Définition des descripteurs intelligents

Nous nous intéressons au comportement particulier d'une région  $\Omega$ , c'est à dire associée à un matériau à l'intérieur d'une fenêtre 2D de taille donnée. Dans cette partie, il s'agit de proposer une représentation "intelligente" de cette région.

Nous allons suivre les experts qui nous ont indiqué toutes les théories et caractéristiques à retenir dans l'analyse à la fatigue et les simulations numériques. Nous devons éviter une caractérisation en un point des différents champs caractéristiques compte tenu de la non maîtrise des erreurs liées au maillage et que de plus le dommage doit concerner un volume caractéristique. Nous devons donc décrire d'une manière "intelligente" dans chaque région  $\Omega$ :

i) les caractéristiques matériaux pendant des chargements cycliques, les courbes cycliques à différentes vitesses de déformations, les courbes de Wöhler et éventuellement les propriétés de rupture

ii) le champ de contraintes et son évolution

iii) quelques autres facteurs comme ceux indiqués par les experts en fatigue/rupture ou déduits à partir d'outils spécialisés comme ENDURE de EMRC ou SOLSTICE du LMS-X

Avec une telle description les conclusions sont :

- i) Fissure ou Non fissure
- ii) si Fissure, quelle est la durée de vie en fatigue ?

Il existe quelques méthodes classiques pour représenter les propriétés des matériaux avec quelques paramètres discrets ou descripteurs. La partie la plus difficile reste la représentation de l'évolution des champs de contraintes qui sont ici les contraintes initiales dues au soudage (mais inconnues dans cette étude), les

contraintes parasites inconnues initiales dues aux mors, et l'effort de traction appliqué qui est de nature aléatoire.

## 5.2.1 Descripteurs matériaux

Nous retenons seulement ces 11 coefficients dont 7 qui sont classiques en fatigue :

Module d'Young	$Y_G$
Coefficient de Poisson	$\nu$
Limite élastique en traction macroscopique	$\sigma_y$
Module d'écroutissage en traction macroscopique	$H$
Coefficient d'écroutissage cyclique	$n'$
Coefficient de résistance à la déformation cyclique	$K'$
Contrainte ultime	$\sigma_u$
Limite élastique cyclique	$\sigma'_y$
Coefficient de résistance à la fatigue	$\sigma_f'$
Exposant de Basquin	$b$
Exposant de ductilité en fatigue	$c$

## 5.2.2 Descripteurs champ de contrainte

### 5.2.2.1 Caractéristiques à décrire

Nous supposons que le champ de contraintes à un instant donné est représenté en tout point par 3 champs scalaires (le problème concernant la prédiction de la durée de vie en fatigue) :

- i) son premier invariant  $I_1$  :

$$I_1 = \text{tr}(\underline{\underline{\Sigma}})$$

- ii) le deuxième invariant de sa partie déviatorique  $J_2$  :

$$J_2 = \frac{1}{2} \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{S}}$$

où  $\underline{\underline{S}} = \text{dev}(\underline{\underline{\Sigma}}) = \underline{\underline{\Sigma}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\Sigma}}) \underline{\underline{1}}$

- iii) et la norme du gradient de  $J_2$  :

$$\|\text{grad } J_2\| = \sqrt{\left(\frac{\partial J_2(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial J_2(x,y)}{\partial y}\right)^2}$$

Ce choix est justifié par l'analyse des critères de fatigue (chapitre 1). Il présente de plus l'avantage de conduire à des temps de calculs que nous qualifierons de raisonnables dans le sens où il ne nécessite pas la recherche de plan critique.

### 5.2.2.2 Description intelligente de l'évolution temporelle des champs caractéristiques

Il est nécessaire de décrire l'évolution temporelle des champs associés au champ de contrainte. Le chargement à amplitude variable ayant été représenté par le chargement radial cyclique équivalent à l'échelle de la structure grâce à notre règle d'équivalence, nous représentons l'évolution du champ de contrainte aux 3 positions :

- i) à la contrainte moyenne du chargement appliqué ( $MOY_t$ )
- ii) au maximum du chargement appliqué ( $MAX_t$ )
- iii) au minimum du chargement appliqué ( $MIN_t$ )

### 5.2.2.3 Description intelligente des champs caractéristiques

Notre objectif reste la description d'un cas général d'analyse à la fatigue à l'intérieur d'une région  $\Omega$  définie pour un matériau donné dans une fenêtre 2D de taille donnée. L'introduction de ce fenêtrage a été expliquée plus haut.

La solution locale du champ de contrainte dépend assez fortement du maillage. Nous supposons qu'un maillage convenable dans les zones à risque est réalisé. Une bonne représentation des caractéristiques associées au champ de contrainte doit permettre de prendre en compte ou de réduire les erreurs liées au maillage. Ici, une représentation simpliste est utilisée pour caractériser à chaque instant, un champ scalaire  $M$  pouvant être entaché d'erreurs (J. M. Hablot, 1990) : ce que nous pensons convenable mais pour lequel nous ne savons pas cependant le niveau d'erreur.

Si  $M$  désigne l'un des 3 champs scalaires  $I_1$ ,  $J_2$  ou  $\|\text{grad } J_2\|$ , sa description à chaque instant ( $MOY_t$ ,  $MAX_t$ ,  $MIN_t$ ) dans la région  $\Omega$  est d'abord faite par l'introduction de 3 quantités :

- i) la valeur moyenne de  $M$  dans  $\Omega$  :  $(M_{moy})_{\Omega}$
- ii) le maximum de  $M$  dans  $\Omega$  :  $(M_{max})_{\Omega}$
- iii) le minimum de  $M$  dans  $\Omega$  :  $(M_{min})_{\Omega}$

Nous utilisons ensuite d'autres descripteurs pour caractériser le champ scalaire  $M$  variant entre  $M_{min}$  et  $M_{max}$ . Il s'agit de descripteurs surfaciques qui vont donner des indications sur la répartition du champ  $M$  dans la région  $\Omega$ .

Ils sont notés  $M_{lay1}$ ,  $M_{lay2}, \dots, M_{layn}$  et sont définis de la manière suivante :

- i) On divise l'intervalle  $[M_{min} ; M_{max}]$  en  $n$  segments

ii) Puis on calcule la proportion relative de surface dans la région pour qui le scalaire  $M$  appartient à l'intervalle  $n$ , ( $M_{layn} = S_n / S_0$ ), où  $S_0$  est la surface de la région actuelle.

Dans cette étude, nous avons choisi cinq intervalles ( $n = 5$ ). Ces quantités peuvent être considérées comme des statistiques élémentaires du champ  $M$  dans la région  $\Omega$ .

Au total, 72 descripteurs sont donc introduits pour représenter l'évolution du champ de contrainte à l'intérieur de la région  $\Omega$ , dont:

- 27 descripteurs pour les valeurs min, max, moy.

$MOY_t(I1_{moy})_\Omega$	$MOY_t(I1_{max})_\Omega$	$MOY_t(I1_{min})_\Omega$
$MOY_t(J2_{moy})_\Omega$	$MOY_t(J2_{max})_\Omega$	$MOY_t(J2_{min})_\Omega$
$MOY_t(\ grad J_2\ _{moy})_\Omega$	$MOY_t(\ grad J_2\ _{max})_\Omega$	$MOY_t(\ grad J_2\ _{min})_\Omega$
$MAX_t(J2_{moy})_\Omega$	$MAX_t(J2_{max})_\Omega$	$MAX_t(J2_{min})_\Omega$
$MAX_t(I1_{moy})_\Omega$	$MAX_t(I1_{max})_\Omega$	$MAX_t(I1_{min})_\Omega$
$MAX_t(\ grad J_2\ _{moy})_\Omega$	$MAX_t(\ grad J_2\ _{max})_\Omega$	$MAX_t(\ grad J_2\ _{min})_\Omega$
$MIN_t(I1_{moy})_\Omega$	$MIN_t(I1_{max})_\Omega$	$MIN_t(I1_{min})_\Omega$
$MIN_t(J2_{moy})_\Omega$	$MIN_t(J2_{max})_\Omega$	$MIN_t(J2_{min})_\Omega$
$MIN_t(\ grad J_2\ _{moy})_\Omega$	$MIN_t(\ grad J_2\ _{max})_\Omega$	$MIN_t(\ grad J_2\ _{min})_\Omega$

- 45 descripteurs surfaciques

$MOY_t(I1_{lay1})_\Omega$	$MOY_t(I1_{lay2})_\Omega$	$MOY_t(I1_{lay3})_\Omega$	$MOY_t(I1_{lay4})_\Omega$	$MOY_t(I1_{lay5})_\Omega$
$MOY_t(J2_{lay1})_\Omega$	$MOY_t(J2_{lay2})_\Omega$	$MOY_t(J2_{lay3})_\Omega$	$MOY_t(J2_{lay4})_\Omega$	$MOY_t(J2_{lay5})_\Omega$
$MOY_t(\ grad J_2\ _{lay1})_\Omega$	$MOY_t(\ grad J_2\ _{lay2})_\Omega$	$MOY_t(\ grad J_2\ _{lay3})_\Omega$	$MOY_t(\ grad J_2\ _{lay4})_\Omega$	$MOY_t(\ grad J_2\ _{lay5})_\Omega$
$MAX_t(I1_{lay1})_\Omega$	$MAX_t(I1_{lay2})_\Omega$	$MAX_t(I1_{lay3})_\Omega$	$MAX_t(I1_{lay4})_\Omega$	$MAX_t(I1_{lay5})_\Omega$
$MAX_t(J2_{lay1})_\Omega$	$MAX_t(J2_{lay2})_\Omega$	$MAX_t(J2_{lay3})_\Omega$	$MAX_t(J2_{lay4})_\Omega$	$MAX_t(J2_{lay5})_\Omega$
$MAX_t(\ grad J_2\ _{lay1})_\Omega$	$MAX_t(\ grad J_2\ _{lay2})_\Omega$	$MAX_t(\ grad J_2\ _{lay3})_\Omega$	$MAX_t(\ grad J_2\ _{lay4})_\Omega$	$MAX_t(\ grad J_2\ _{lay5})_\Omega$
$MIN_t(I1_{lay1})_\Omega$	$MIN_t(I1_{lay2})_\Omega$	$MIN_t(I1_{lay3})_\Omega$	$MIN_t(I1_{lay4})_\Omega$	$MIN_t(I1_{lay5})_\Omega$
$MIN_t(J2_{lay1})_\Omega$	$MIN_t(J2_{lay2})_\Omega$	$MIN_t(J2_{lay3})_\Omega$	$MIN_t(J2_{lay4})_\Omega$	$MIN_t(J2_{lay5})_\Omega$
$MIN_t(\ grad J_2\ _{lay1})_\Omega$	$MIN_t(\ grad J_2\ _{lay2})_\Omega$	$MIN_t(\ grad J_2\ _{lay3})_\Omega$	$MIN_t(\ grad J_2\ _{lay4})_\Omega$	$MIN_t(\ grad J_2\ _{lay5})_\Omega$

## 5.2.3 Descripteurs fatigue

### 5.2.3.1 Caractéristiques à décrire

L'utilisation d'un critère de fatigue permet de statuer en principe sur la tenue en fatigue d'une région particulière  $\Omega$ . Le critère se présente généralement sous la forme d'une fonction de fatigue  $\mathcal{F}$  de certaines composantes du cycle des contraintes dont il évalue la sévérité, des limites d'endurance du matériau, et voire de certaines de ses propriétés statiques. La caractéristique retenue pour représenter la tenue en fatigue est donc cette fonction de fatigue  $\mathcal{E}$ .

Les approches plus classiques du type stress-life et strain-life ont aussi été utilisées pour évaluer le nombre de cycles à l'initiation dans la région. Cette durée de vie sera retenue comme autre caractéristique à décrire.

Il est important aussi de faire figurer la norme du bloc chargement (soit la déformation plastique cumulée soit l'énergie dissipée). Elle comporte une information supplémentaire pour la prédiction du nombre de blocs à l'initiation.

Nous retenons les 3 caractéristiques fatigue à décrire :

- la fonction de fatigue  $\mathcal{F}^{DV}$  (uniquement calculée pour le critère de DangVan)
- le nombre de cycles à l'initiation ( $N^{S-N}$ , pour l'approche stress-life)



- et la norme du bloc chargement ( $\epsilon_{pc}$  ou  $W_d$ )

### 5.2.3.2 Description intelligente des caractéristiques fatigue

Toujours pour assurer la fusion des cas, le même type de discrétisation que celle adoptée pour le champ de contrainte est utilisée. Les 3 caractéristiques ( $\mathcal{F}^{DV}$ ,  $N^{S-N}$  et  $\epsilon_{pc}$  ou  $W_D$ ) sont donc représentées par leur valeur moyenne, maximale et minimale dans la région  $\Omega$ .

9 nouveaux descripteurs sont ainsi introduits :

- 3 descripteurs pour la fonction de fatigue  $\mathcal{F}^{DV}$  :

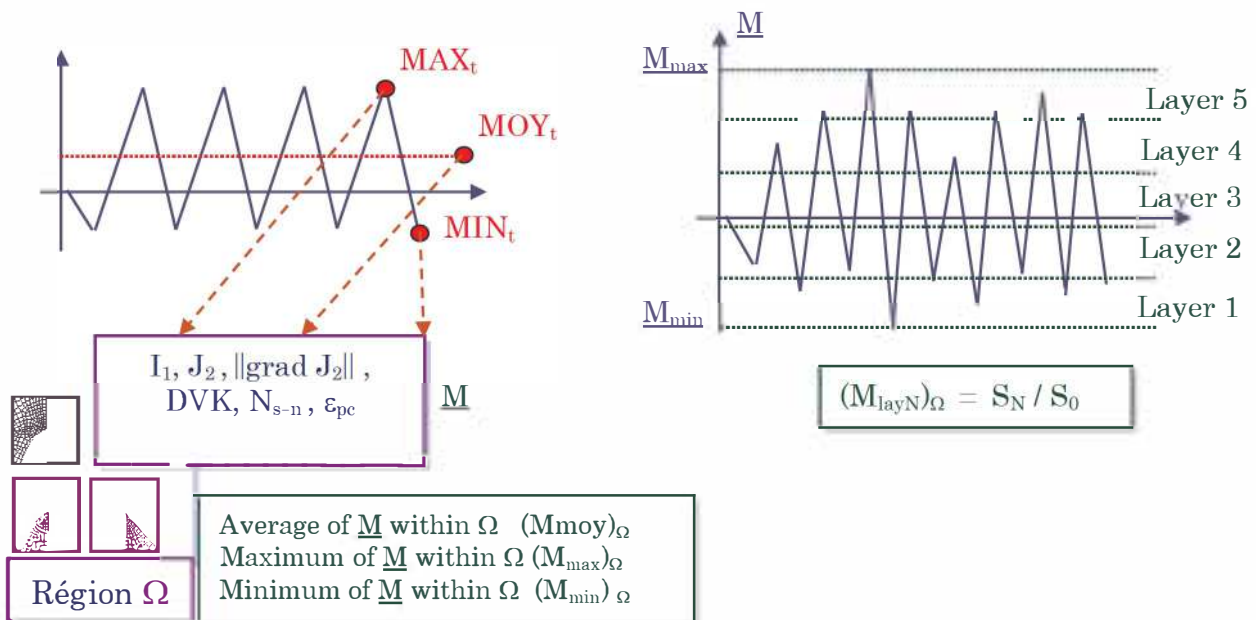
$$\left(\mathcal{F}_{moy}^{DV}\right)_{\Omega}, \left(\mathcal{F}_{min}^{DV}\right)_{\Omega}, \left(\mathcal{F}_{max}^{DV}\right)_{\Omega}$$

- 3 descripteurs pour la durée de vie donnée par l'approche stress-life :

$$\left(N_{moy}^{S-N}\right)_{\Omega}, \left(N_{min}^{S-N}\right)_{\Omega}, \left(N_{max}^{S-N}\right)_{\Omega}$$

- 3 descripteurs pour la norme du bloc de chargement :

$$\left(\epsilon_{pc_{moy}}\right)_{\Omega}, \left(\epsilon_{pc_{min}}\right)_{\Omega}, \left(\epsilon_{pc_{max}}\right)_{\Omega}$$





## *Points essentiels à retenir*

Chaque cas/problème de fatigue est associée à une géométrie particulière de la structure, aux nombreux matériaux en présence, à un état initial, et à un bloc de chargement (qui est le plus souvent multiaxial aléatoire). Cette représentation primitive passive doit être transformée en une représentation active intelligente de même forme pour être appliquée à tous nouveaux cas.

Cela se fait en effectuant d'abord, une analyse multi-niveaux :

- i) le premier niveau est celui de la structure. Une analyse élastique est conduite en considérant les nombreux chargements, une schématisation éventuelle en plaques et poutres ainsi qu'un maillage grossier.
- ii) le deuxième niveau est celui d'une sous-structure 3D que l'on aura relevée comme critique. Un maillage plus fin et une modélisation plus correcte des détails soudés et des discontinuités géométriques présents dans ce domaine peuvent être effectués. Le chargement cyclique radial équivalent est alors défini.
- iii) le troisième niveau correspond à celui d'un détail élémentaire 2D qui est une coupe plane du deuxième niveau, avec éventuellement un maillage encore plus fin et une représentation des efforts plus précise.
- iv) enfin, nous considérons sur ce détail 2D, une fenêtre 2D virtuelle mobile. Cette fenêtre joue le rôle d'un filtre. Sa taille est telle que les quantités qui sont utiles deviennent relativement peu sensibles aux erreurs associées à la taille et à la distribution des éléments, et que de plus, le dommage doit concerner un certain volume caractéristique ; *la description du matériau, de certains champs (contrainte, gradient de contrainte, critère de fatigue..), dans cette fenêtre conduit à la description intelligente qui est applicable et unique sur toute structure complexe.*

Dans chaque région (dans la fenêtre mobile et un matériau donné), il est ensuite nécessaire de décrire d'une manière "intelligente":

- i) les caractéristiques du matériau
- ii) le champ de contraintes et son évolution dans la région.
- iii) quelques autres facteurs comme ceux indiqués par les experts en fatigue/rupture ou déduits à partir d'outils spécialisés comme ENDURE de EMRC ou SOLSTICE du LMS-X

Au total, **92 descripteurs intelligents** ont été introduits.

Nous avons atteint notre objectif qui était de trouver une représentation susceptible de faire la fusion de tous les cas/problèmes.

**L'analyse globale de la structure est réduite à une analyse sur une fenêtre 2D avec un chargement cyclique radial caractéristique obtenu grâce à notre règle d'équivalence. Il faut à présent donner les règles qui lient ces descripteurs pour séparer les cas où il y a ou pas initiation, puis dans les cas positifs dire qu'elle est la durée de vie. Cela est l'objet du chapitre suivant.**

# Descripteurs intelligents retenus

## Descripteurs champs de contraintes (72)

$MOY_t(I1_{moy})_\Omega$	$MOY_t(I1_{max})_\Omega$	$MOY_t(I1_{min})_\Omega$	$MOY_t(I1_{lay1})_\Omega$	$MOY_t(I1_{lay2})_\Omega$	$MOY_t(I1_{lay3})_\Omega$	$MOY_t(I1_{lay4})_\Omega$	$MOY_t(I1_{lay5})_\Omega$
$MOY_t(J2_{moy})_\Omega$	$MOY_t(J2_{max})_\Omega$	$MOY_t(J2_{min})_\Omega$	$MOY_t(J2_{lay1})_\Omega$	$MOY_t(J2_{lay2})_\Omega$	$MOY_t(J2_{lay3})_\Omega$	$MOY_t(J2_{lay4})_\Omega$	$MOY_t(J2_{lay5})_\Omega$
$MOY_t(\ \text{grad } J_2\ _{moy})_\Omega$	$MOY_t(\ \text{grad } J_2\ _{max})_\Omega$	$MOY_t(\ \text{grad } J_2\ _{min})_\Omega$	$MOY_t(\ \text{grad } J_2\ _{lay1})_\Omega$	$MOY_t(\ \text{grad } J_2\ _{lay2})_\Omega$	$MOY_t(\ \text{grad } J_2\ _{lay3})_\Omega$	$MOY_t(\ \text{grad } J_2\ _{lay4})_\Omega$	$MOY_t(\ \text{grad } J_2\ _{lay5})_\Omega$
$MAX_t(J2_{moy})_\Omega$	$MAX_t(J2_{max})_\Omega$	$MAX_t(J2_{min})_\Omega$	$MAX_t(I1_{lay1})_\Omega$	$MAX_t(I1_{lay2})_\Omega$	$MAX_t(I1_{lay3})_\Omega$	$MAX_t(I1_{lay4})_\Omega$	$MAX_t(I1_{lay5})_\Omega$
$MAX_t(I1_{moy})_\Omega$	$MAX_t(I1_{max})_\Omega$	$MAX_t(I1_{min})_\Omega$	$MAX_t(J2_{lay1})_\Omega$	$MAX_t(J2_{lay2})_\Omega$	$MAX_t(J2_{lay3})_\Omega$	$MAX_t(J2_{lay4})_\Omega$	$MAX_t(J2_{lay5})_\Omega$
$MAX_t(\ \text{grad } J_2\ _{moy})_\Omega$	$MAX_t(\ \text{grad } J_2\ _{max})_\Omega$	$MAX_t(\ \text{grad } J_2\ _{min})_\Omega$	$MAX_t(\ \text{grad } J_2\ _{lay1})_\Omega$	$MAX_t(\ \text{grad } J_2\ _{lay2})_\Omega$	$MAX_t(\ \text{grad } J_2\ _{lay3})_\Omega$	$MAX_t(\ \text{grad } J_2\ _{lay4})_\Omega$	$MAX_t(\ \text{grad } J_2\ _{lay5})_\Omega$
$MIN_t(I1_{moy})_\Omega$	$MIN_t(I1_{max})_\Omega$	$MIN_t(I1_{min})_\Omega$	$MIN_t(I1_{lay1})_\Omega$	$MIN_t(I1_{lay2})_\Omega$	$MIN_t(I1_{lay3})_\Omega$	$MIN_t(I1_{lay4})_\Omega$	$MIN_t(I1_{lay5})_\Omega$
$MIN_t(J2_{moy})_\Omega$	$MIN_t(J2_{max})_\Omega$	$MIN_t(J2_{min})_\Omega$	$MIN_t(J2_{lay1})_\Omega$	$MIN_t(J2_{lay2})_\Omega$	$MIN_t(J2_{lay3})_\Omega$	$MIN_t(J2_{lay4})_\Omega$	$MIN_t(J2_{lay5})_\Omega$
$MIN_t(\ \text{grad } J_2\ _{moy})_\Omega$	$MIN_t(\ \text{grad } J_2\ _{max})_\Omega$	$MIN_t(\ \text{grad } J_2\ _{min})_\Omega$	$MIN_t(\ \text{grad } J_2\ _{lay1})_\Omega$	$MIN_t(\ \text{grad } J_2\ _{lay2})_\Omega$	$MIN_t(\ \text{grad } J_2\ _{lay3})_\Omega$	$MIN_t(\ \text{grad } J_2\ _{lay4})_\Omega$	$MIN_t(\ \text{grad } J_2\ _{lay5})_\Omega$

## Descripteurs fatigue (9)

$$\left(\mathcal{F}_{moy}^{DV}\right)_\Omega, \left(\mathcal{F}_{min}^{DV}\right)_\Omega, \left(\mathcal{F}_{max}^{DV}\right)_\Omega$$

$$\left(N_{moy}^{S-N}\right)_\Omega, \left(N_{min}^{S-N}\right)_\Omega, \left(N_{max}^{S-N}\right)_\Omega$$

$$\left(\varepsilon_{pc_{moy}}\right)_\Omega, \left(\varepsilon_{pc_{min}}\right)_\Omega, \left(\varepsilon_{pc_{max}}\right)_\Omega$$

## Descripteurs matériaux (11)

Module d'Young

Coefficient de Poisson

Limite élastique en traction macroscopique

Module d'érouissage en traction macroscopique

Coefficient d'érouissage cyclique

Coefficient de résistance à la déformation cyclique

Contrainte ultime

Limite élastique cyclique

Coefficient de résistance à la fatigue

Exposant de Basquin

Exposant de ductilité en fatigue

$Y_G$

$\nu$

$\sigma_y$

$H$

$n'$

$K'$

$\sigma_u$

$\sigma'_y$

$\sigma'_f$

$b$

$c$



# Chapitre 6

## Règles de conception à la fatigue

Dans le chapitre précédent, nous avons vu qu'afin de disposer d'une description intelligente de chaque cas, il nous a fallu introduire deux notions :

1- la première correspond à la description "intelligente" du chargement complexe : l'utilisation des règles d'équivalence entre 2 chargements vis à vis du dommage nous donne une caractérisation du chargement radial cyclique équivalent ;

2- la seconde correspond à la description "intelligente" de l'analyse générale à la fatigue : l'analyse globale de la structure se réduit à une analyse locale dans une fenêtre 2D et un matériau donné.

Dans cette partie, nous allons construire les règles de conception à la fatigue à partir d'une base de données d'exemples avec conclusions connues et grâce à l'utilisation de générateurs de systèmes experts par apprentissage automatique, comme ceux développés par le LMS-X (SEA) ou par la société Wards Systems (NEUROHELL).

La première étape impose la construction d'une base de données d'exemples ; cette base de données est créée à partir de la récupération du savoir des experts qui ont indiqué toutes les variables ou descripteurs essentiels au problème et à partir de résultats d'expériences et de simulations numériques. (Cette partie de notre travail a été faite en collaboration avec Mr Jun Huan du CEAM à l'UCSD).

### 6.1 Données expérimentales disponibles – Représentation primitive

Toutes les données expérimentales utilisées dans cette étude proviennent des essais réalisés à l'université d'Illinois (PARK et LAWRENCE, 1988). Ces essais s'inscrivent dans le cadre d'une étude sur le comportement d'assemblages soudés pour les coques de navires. Cette étude a pour objectif de comparer différentes méthodes de prédiction de la durée de vie, les effets de la contrainte moyenne et de la taille des assemblages vis à vis du comportement à la fatigue.

Plusieurs structures, en fait plusieurs détails soudés caractéristiques ont été étudiés. Ils ont été sélectionnés parmi les plus classiques en fonction de leur importance.

En particulier, une étude bien documentée sur le détail N°20 a été menée. Son choix est lié à sa géométrie relativement simple, son utilisation fréquente dans la construction navale, et à sa haute sensibilité à la fissuration. Nous l'avons aussi retenue pour la construction de notre base de données.

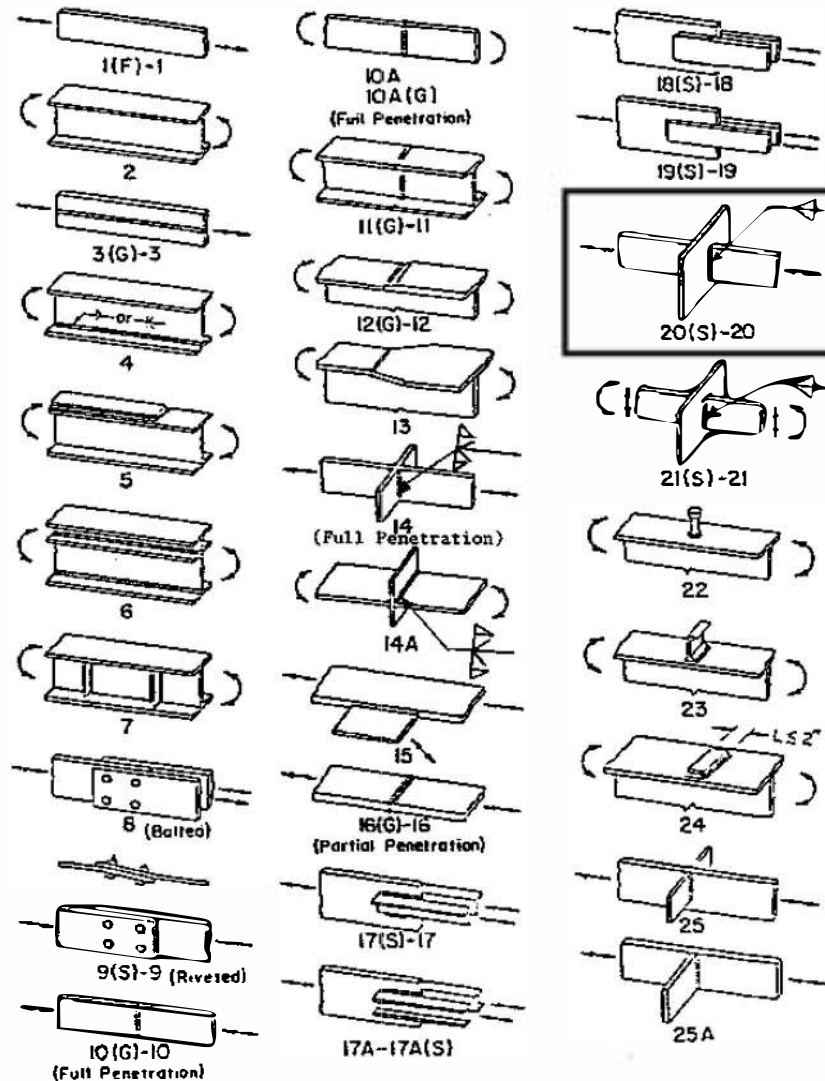


fig. 6.1 - Différents types de détails soudés

### 6.1.1 Détail N°20

Le détail 20 est constitué d'une plaque centrale sur laquelle sont soudées deux autres plaques par des cordons périphériques de soudage. Trois types d'éprouvettes d'épaisseur différente sont utilisés : 6.35mm, 12.7mm et 25.4mm pour les 2 plaques et 7.9mm, 15.9mm et 31.8mm pour les plaques centrales.

Cinq familles d'éprouvettes, repérées par une lettre indicatrice (C, H, Q, M ou T) sont à distinguer. Les dimensions spécifiques dépendent de la qualité de soudure.

Chaque éprouvette est unique. Nous distinguons aussi les zones du métal d'apport, du métal de base et la zone affectée thermiquement, qui diffèrent par leurs propriétés mécaniques.

Ces éprouvettes ont été soudées à l'arc : la majorité a subi un traitement avec la méthode SMAW (familles C, H, Q, T) et quelques unes avec la méthode GMAW (famille M).

Le métal de base est un acier ASTM A-36 pour les tous les détails sauf pour ceux de la famille M qui est un acier ASTM A-441.

Une des particularités de ces éprouvettes est que les jonctions des parties soudées ne sont pas parfaites. Il en découle un manque de pénétration nommé IJP (Incomplete Joint Penetration) qui devient une source potentielle d'initiation de fissure. 8 points chauds sont comptabilisés pour chaque éprouvette (**Erreur! Source du renvoi introuvable.**):

- 4 pieds de cordon de soudure (Toe1, Toe2, Toe3, Toe4)
- 4 positions des manques de pénétration (IJP1, IJP2, IJP3, IJP4)

Au total, 35 éprouvettes ont été testées :

Nom de la famille	C	H	M	Q	T
Nombre d'éprouvettes	5	13	6	8	3

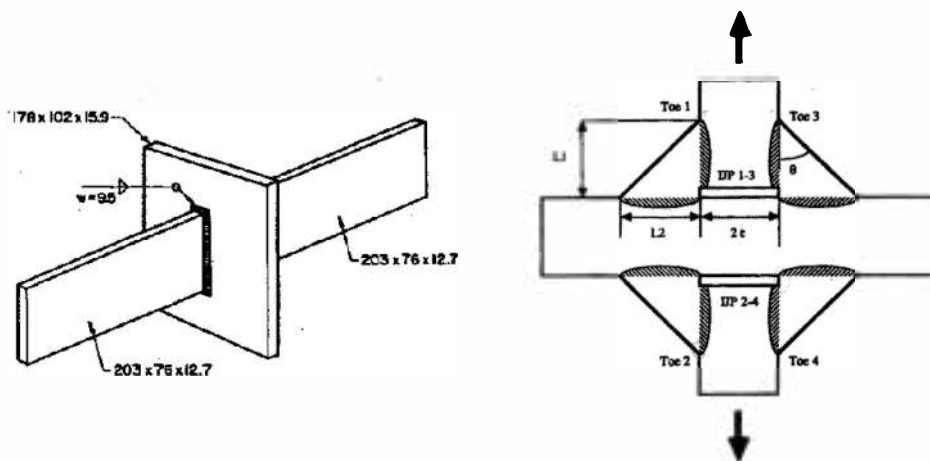


fig. 6.2 : Géométrie du détail 20

### 6.1.1.1 Le chargement de base initial

Le détail est retenu par des mors hydrauliques. Le montage expérimental induit des précontraintes parasites importantes dues au serrage de ces mors et au non-alignement de l'éprouvette qui influent sur la durée de vie de l'éprouvette. Des jauges de déformation placées sur les sites sensibles (près des soudures) ont permis de mesurer ces contraintes parasites initiales. Il n'a pas été possible cependant de trouver les informations sur les contraintes résiduelles induites lors de la soudure qui peuvent être aussi très importantes.

### 6.1.1.2 Les sollicitations

Le chargement appliqué lors des essais est un effort de traction /compression à amplitude variable. Il représente un bloc de chargement de service pour les structures navales (période de mer normale avec quelques épisodes d'orages/tempêtes). Toutefois, le chargement brut a été traité en éliminant les cycles peu endommageants afin de permettre des essais dans des durées d'expérience acceptables.

Le bloc est répété jusqu'à fissuration de l'éprouvette ou jusqu'à atteindre un chargement représentant une durée de vie de 125 ans de service (environ 1500 blocs).



fig. 6.3 : Bloc de chargement appliqué lors des essais

### 6.1.2 Résultats expérimentaux

Deux scénarii majeurs de fissuration ont été observés. Ils dépendent de la combinaison entre les zones de concentration de contraintes géométriques et les contraintes de flexion cyclique induites lors de la mise en place des éprouvettes.

Le premier scénario concerne les faibles contraintes de serrage et de flexion cyclique. Le chargement est considéré relativement symétrique. Les IJP sont dans ce cas les principaux sites de fatigue. Les fissures s'initient à partir des 2 cotés des IJP puis se propagent à travers les soudures (SSC-346).

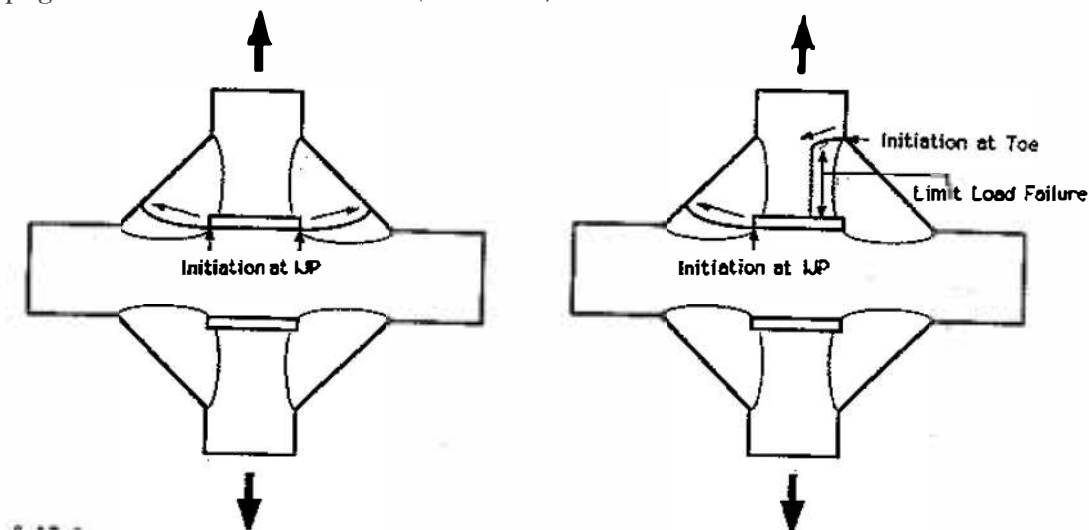


fig. 6.4 – Sites potentiels de fissuration

Le deuxième scénario concerne les fortes contraintes de flexion cyclique qui vont rendre le chargement appliqué asymétrique. Les fissures s'initient à la fois à partir des pieds



de cordon de soudure avec la plus grande contrainte du chargement appliqué, et des IJP qui leurs sont directement opposés. Ces sites vont interagir entre eux accélérant ainsi leurs propagations. Quand les fissures atteignent une certaine longueur, la structure s'affaiblit légèrement. La fissure au pied va changer de direction, puis va se propager vers le centre de la plaque. Finalement, si le chargement persiste, elle tendra vers les IJP entraînant la ruine de l'éprouvette en 2 morceaux (SSC-346).

Les résultats expérimentaux sont disposés sous forme de tableaux où sont indiqués le nombre de blocs à la rupture ainsi que la localisation des points de rupture (F) ou d'initiation d'une fissure qui n'a pas entraîné la rupture (I).

Spec. No.	Site	Applied Mean Stress (ksi)	Induced Grip Stress (ksi)	Bending Factor (x)	Geometry <sup>+</sup>			Failure Sites*	Fatigue Life (Blocks)
					L1	L2	c		
H-1	IJP 1-3	0.00	2.06	0.02	.304	.404	.250	F	926
	TOE 1	0.00	2.06	0.02	.304	.404	.250		
	TOE 3	0.00	-1.60	0.06	.369	.436	.250		
	IJP 2-4	0.00	0.67	0.14	.400	.408	.238		
	TOE 2	0.00	0.67	0.14	.400	.408	.238		
	TOE 4	0.00	-0.30	-0.13	.412	.445	.238		
H-2	IJP 1-3	0.00	3.70	0.14	.330	.370	.250	F	769
	TOE 1	0.00	3.70	0.14	.330	.370	.250		
	TOE 3	0.00	-5.4	0.02	.348	.375	.250		
	IJP 2-4	0.00	5.6	-0.25	.453	.411	.241		
	TOE 2	0.00	5.6	-0.25	.453	.411	.241		
	TOE 4	0.00	-5.4	-0.34	.357	.409	.241		
H-3	IJP 1-3	0.00	6.2	0.19	.365	.398	.245	F	1291
	TOE 1	0.00	-5.7	-0.10	.455	.439	.245		
	TOE 3	0.00	6.2	0.19	.365	.398	.245		
	IJP 2-4	0.00	-4.5	-0.03	.461	.425	.250		
	TOE 2	0.00	-4.5	-0.03	.461	.425	.250		
	TOE 4	0.00	5.4	-0.01	.355	.450	.250		
H-4	IJP 1-3	0.00	6.3	-0.03	.350	.434	.246	F	1414
	TOE 1	0.00	6.3	-0.03	.350	.434	.246		
	TOE 3	0.00	-0.2	-0.30	.342	.450	.246		
	IJP 2-4	0.00	-1.9	0.01	.375	.368	.234		
	TOE 2	0.00	2.1	0.06	.391	.393	.234		
	TOE 4	0.00	-1.9	0.01	.375	.393	.234		
H-5	IJP 1-3	0.00	-18.7	0.0	.367	.453	.250	I	416
	TOE 1	0.00	-18.7	0.0	.367	.453	.250		
	TOE 3	0.00	17.7	0.16	.378	.472	.250		
	IJP 2-4	0.00	-14.9	0.0	.350	.433	.250		
	TOE 2	0.00	-14.9	0.0	.350	.433	.250		
	TOE 4	0.00	14.8	0.13	.369	.492	.250		

fig. 6.5 - Résultats expérimentaux



## 6.2 Construction des descripteurs évolués intelligents

### 6.2.1 Géométrie et maillage avec CADSAF

#### 6.2.1.1 Géométrie de l'éprouvette

Chaque éprouvette est caractérisée par les dimensions et les formes des parties qui décrivent le métal de base, le métal d'apport et la zone affectée thermiquement. Dans CADSAF, il est possible d'automatiser des tâches (par exemple, créer une spline, créer un point, sélectionner un ensemble de points ...) à l'aide de fichiers "script" (un peu comme ce qui est fait avec les macros d'Excel par exemple). Nous utilisons donc cet outil pour générer de façon systématique tous les 35 détails. L'utilisation de couches est recommandée pour faciliter la conception des contours des 15 différentes parties. Il faut ensuite créer des groupes (contours fermés) en reliant différentes entités élémentaires (splines, droites, points..) qui sont préalablement référencées avec des numéros de couches. Comme seules 3 parties doivent être différenciées, nous rassemblons dans un même groupe (encore avec l'aide d'un script) toutes les parties correspondant respectivement au matériau de base (groupe 1), à la zone affectée thermiquement (groupe 2) et au métal d'apport (groupe 3)

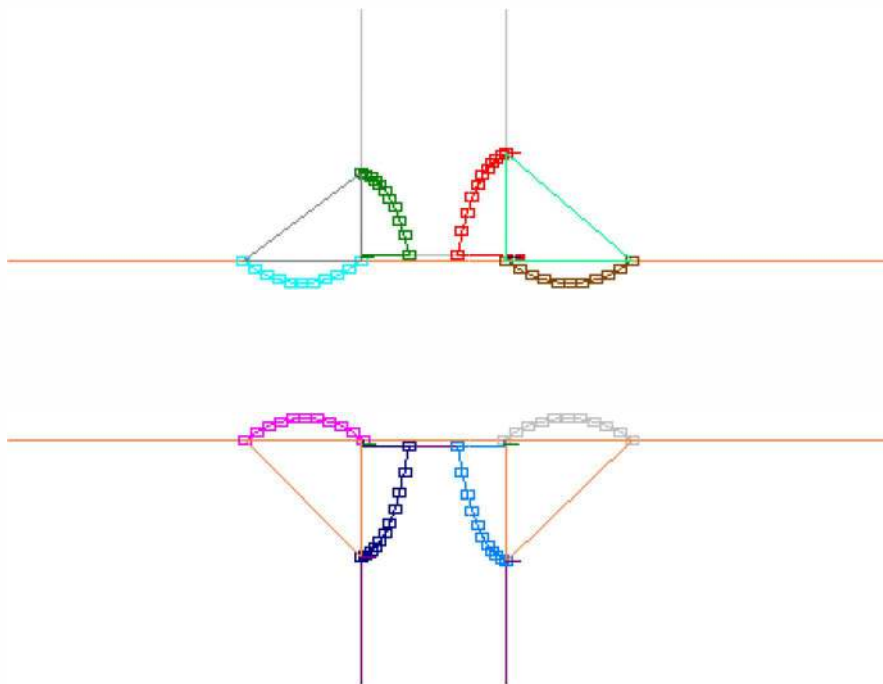


fig. 6.6 – Dessin du détail 20 avec CADSAF

### 6.2.1.2 Maillage de l'éprouvette

Grâce au générateur automatique de maillage 2D, Supergen d'Algor, il est possible de mailler soit indépendamment un groupe soit tous les groupes en même temps. La concordance des 2 maillages en vis à vis est assurée et le choix du/des types d'éléments (quadrilatères ou triangles) est respecté au mieux.

Supergen se sert de paramètres définis par l'utilisateur pour adapter son maillage (angle maximal dans un élément, rapport maximal entre 2 cotés d'un élément et facteur de raffinement). Un maillage grossier dans les zones de discontinuités ne serait pas acceptable. Il est donc important d'introduire des points de raffinement (avec une densité donnée) aux niveaux des points chauds (Toe1-4, IJP1-3, et, IJP2-4). Ce qui est possible avec l'option "Refine points" de CADSAF.

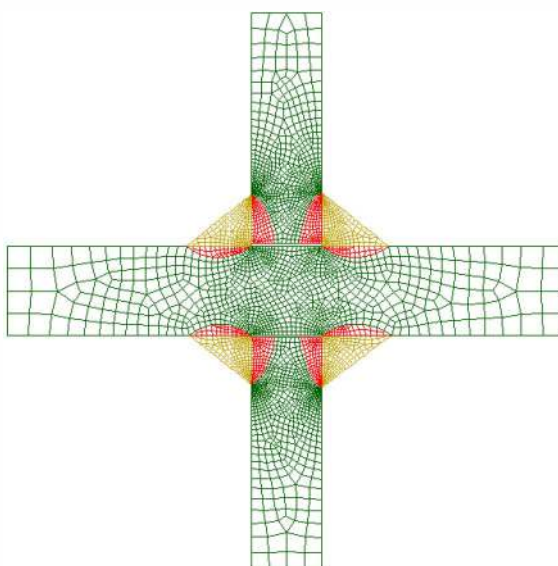


fig. 6.7 - Maillage du détail 20 avec CADSAF

### 6.2.2 Analyse avec NISA de EMRC et CASTEM2000 du CEA

Le maillage obtenu avec CADSAF doit être utilisable avec les logiciels d'éléments finis que nous disposons pour réaliser l'analyse mécanique. Deux interfaces de passage vers les formats NISA et CASTEM2000 ont été développées. Les maillages ont pu être restitués tels quels avec toutes les informations sur les différentes parties en présence et aussi les conditions aux limites.

#### 6.2.2.1 Propriétés mécaniques

Les propriétés élastoplastiques des 3 zones sont identiques, à l'exception des détails de la famille M qui ont subi un traitement de soudage spécial (GMAW au lieu de SMAW) avec un matériau de base différent. Pour ces alliages, il a été noté que seules les propriétés à la fatigue changent ; les propriétés élastoplastiques restent constantes.

**Détail M**

	$Y_G$	$\nu$	$H$	$\sigma_v$	$\sigma_u$	$\sigma'_y$	$b$	$c$	$n'$	$k'$	$\sigma'_f$
Base	207000	0.3	690	427	571.04	426.56	-0.1056	-0.4933	0.214	1219	985
Apport	207000	0.3	690	427	842.8	513.25	-0.0839	-0.6	0.14	1303.76	1186.8
ZAT	207000	0.3	690	427	860	523.57	-0.0834	-0.6	0.139	1329.9	1204

**Détail H et C3, C4**

	$Y_G$	$\nu$	$H$	$\sigma_v$	$\sigma_u$	$\sigma'_y$	$b$	$c$	$n'$	$k'$	$\sigma'_f$
Base	207000	0.3	1100	280	488	310	-0.1056	-0.4933	0.214	1219	985
Apport	207000	0.3	1100	280	781.86	475.04	-0.0858	-0.6	0.143	1207.27	1119.02
ZAT	207000	0.3	1100	280	849.43	516.42	-0.084	-0.6	0.14	1312.07	1183.83

**Détail T et C1, C2**

	$Y_G$	$\nu$	$H$	$\sigma_v$	$\sigma_u$	$\sigma'_y$	$b$	$c$	$n'$	$k'$	$\sigma'_f$
Base	207000	0.3	1100	280	441	285	-0.1056	-0.4933	0.214	1219	985
Apport	207000	0.3	1100	280	650.16	395.6	-0.0908	-0.6	0.151	1003.79	992.09
ZAT	207000	0.3	1100	280	806.06	467.15	-0.862	-0.6	0.144	1186.8	1112.5

**Détail Q et C5, C6**

	$Y_G$	$\nu$	$H$	$\sigma_v$	$\sigma_u$	$\sigma'_y$	$b$	$c$	$n'$	$k'$	$\sigma'_f$
Base	207000	0.3	1100	280	450	332	-0.1056	-0.4933	0.214	1219	985
Apport	207000	0.3	1100	280	777.44	472.66	-0.859	-0.6	0.143	1200.56	1113.87
ZAT	207000	0.3	1100	280	782.94	476.1	-0.857	-0.6	0.143	1209.5	1119.38

- ( $Y_G$ ) : Module d'Young (MPa),
- ( $\nu$ ) : Coefficients de Poisson,
- ( $\sigma_v$ ) : Limite élastique (MPa),
- ( $H$ ) : Module d'écrouissage (MPa),
- ( $\sigma_u$ ) : Contrainte ultime (MPa),
- ( $\sigma'_y$ ) : Limite élastique cyclique (MPa),
- ( $b$ ) : Exposant de fatigue,
- ( $c$ ) : Exposant de ductilité à la fatigue,
- ( $n'$ ) : Exposant d'écrouissage cyclique,
- ( $k'$ ) : Coefficient résistance cyclique,
- ( $\sigma'_f$ ) : Limite de fatigue (MPa)

**6.2.2.2 Conditions aux limites et précontraintes**

Le serrage et le non-alignement des mors induisent des contraintes parasites initiales non négligeables. Nous devons les considérer pour une meilleure prise en compte du comportement à la fatigue de l'éprouvette. Nous savons, par exemple, qu'une contrainte moyenne positive, aura tendance à diminuer de manière significative la durée de vie globale de l'éprouvette tandis qu'une contrainte moyenne négative à l'augmenter.

Pour intégrer ces contraintes dans notre modèle, nous définissons deux chargements initiaux :

i) l'un en traction /compression, par l'introduction d'une pression imposée ( $a$ ), pour simuler le serrage des mors

ii) l'autre en flexion plane, par l'introduction d'un déplacement imposé ( $b$ ), pour simuler le non-alignement des mors

Les conditions aux limites sont telles que :

- i) sur une des extrémités des 2 plaques soudées, le déplacement est égal à zéro
- ii) tandis que sur l'autre, une pression normale ( $a$ ) et un déplacement latéral ( $b$ ) sont imposés

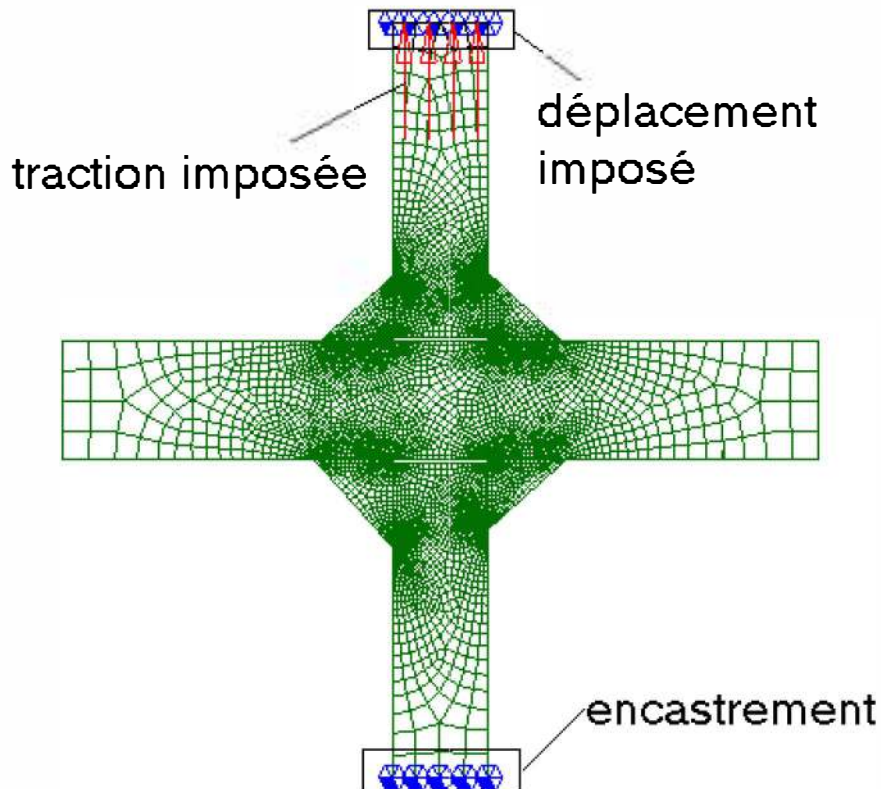


fig. 6.8 - Conditions aux limites du détail 20

Les déformations liées aux contraintes parasites initiales relevées expérimentalement sont fournies au niveau des 8 pieds des cordons de soudure ; l'idée est de pouvoir identifier un jeu de coefficients  $a$  et  $b$  du chargement initial induisant en ces points les mêmes déformations mesurées. Cette opération est effectuée grâce à la résolution d'un problème inverse.

Soient  $(\underline{\underline{\Sigma}}^u)_{tr}$  et  $(\underline{\underline{\Sigma}}^u)_{fl}$  les champs de contraintes élastiques issus respectivement des valeurs unitaires de la pression imposée ( $a = 1$ ) et du déplacement imposé ( $b = 1$ ). Les contraintes aux 8 points chauds  $(\underline{\underline{\Sigma}}^n)_i$  se réécrivent en appliquant le principe de superposition élastique:

$$\left(\underline{\underline{\Sigma}}^{ex}\right)_i = a\left(\underline{\underline{\Sigma}}^{tr}\right) + b\left(\underline{\underline{\Sigma}}^{fl}\right) \quad i = 1, \dots, 8$$

où seuls  $a$  et  $b$  sont inconnus.

Ensuite, en utilisant un outil d'optimisation, nous recherchons le meilleur jeu de coefficient  $a$  et  $b$  qui minimisent une fonction erreur. Les algorithmes génétiques se prêtent très bien à ce type d'optimisation (cf annexe 1).

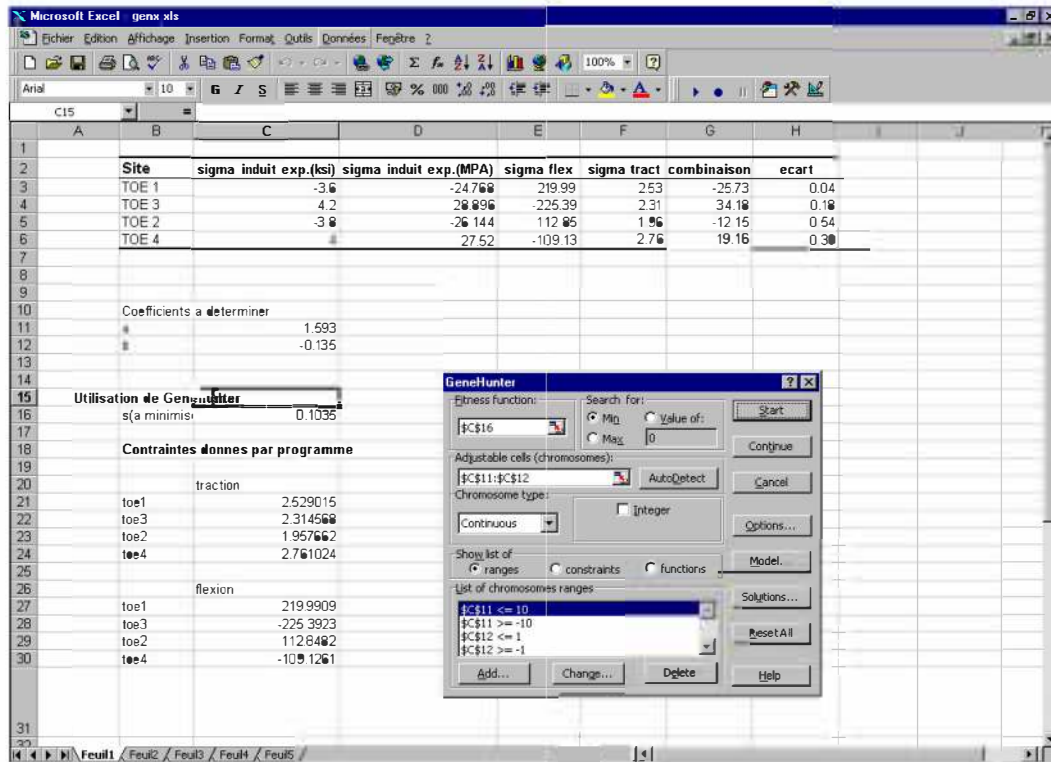


fig. 6.9 – Conditions aux limites du détail 20

## Remarques

- 1- L'application du principe de superposition est possible car nous avons supposé que les contraintes initiales induites restent dans le domaine élastique.
- 2- Nous connaissons avec précision la taille, le point et la direction de pose des jauges de mesure. Pour évaluer les déformations issues du calcul numérique, nous mesurons la déformation de la jauge en nous rattachant approximativement par exemple aux deux nœuds extrêmes définissant celle-ci.

### 6.2.2.3 Chargements

#### Chargements appliqués

L'éprouvette subit un effort de traction/compression sur une des extrémités des deux plaques soudées. Deux trajets de chargements sont considérés pour représenter le chargement expérimental réel :

- Trajet de chargement réel simplifié (chargement 1)
- Chargement équivalent uniaxial cyclique (chargement 2)

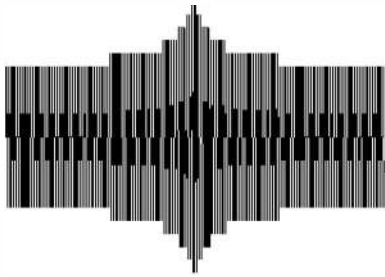


fig. 6.10 - Chargement 1

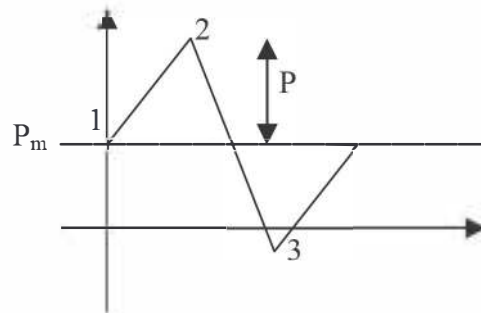


fig. 6.11 - Chargement 2

### Calculs des chargements équivalents

Pour chaque détail, nous avons calculé le chargement équivalent à l'échelle de la structure en suivant la procédure qui est détaillée dans le chapitre 4. Les deux points servant au passage micro/macro ont été choisis de préférence dans des zones où les propriétés en fatigue des matériaux sont différentes. Le modèle local sous-jacent à la règle d'équivalence est celui du modèle 1D à un patin.

Min	Max	$\epsilon_{pc1}$	H1	S1 (10 <sup>8</sup> )	b1	S'y1	10 <sup>8</sup>	k1 = sVM LC1
-418.625	483.514	2789.2009	857.24	140.81	-0.1056	985	10 <sup>8</sup>	6.235
ECHELLE LOCALE				ECHELLE GLOBALE				
Centre	Fluct	$\Delta\sigma_{Eq}/2$	N	$\Delta\sigma_{eq1}$	$\Delta P1$	4N	2N	P1
32.44	451.07	451.07	3853.27	418.06	88.93	17524.64	8762.3	44.467
Min	Max	$\epsilon_{pc2}$	H2	S2 (10 <sup>8</sup> )	b2	S'y2	10 <sup>8</sup>	k2 = sVM LC1
-387.31	412.1863	118.751	2285.5	230.22	-0.0858	1118.247	10 <sup>8</sup>	5.525
ECHELLE LOCALE				ECHELLE GLOBALE				
Centre	Fluct	$\Delta\sigma_{Eq}/2$	N	$\Delta\sigma_{eq2}$	$\Delta P2$	4N	2N	P2
12.4376	399.7487	399.75	800.457	468.178	88.93	17524.64	8762.3	44.467

Tableau 7 : Feuille de calcul donnant le chargement équivalent à l'échelle de la structure pour chaque détail soudé

### 6.2.2.4 Lois de comportement et types d'analyse

Ensuite, avec NISA et CASTEM 2000, deux types d'analyses ont été menées avec le chargement 2:

- Une analyse purement élastique
- Une analyse élastoplastique avec la méthode simplifiée ZACPLUS



Dans le cas de l'analyse élastoplastique, la loi de comportement global du matériau est supposée suivre une loi à écrouissage cinématique linéaire. En présence d'écrouissage cinématique et pour un chargement périodique, il est connu qu'il n'y a pas ruine par déformation excessive de la structure, et qu'après un certain temps, en général il y aura adaptation élastique ou accommodation de la structure.

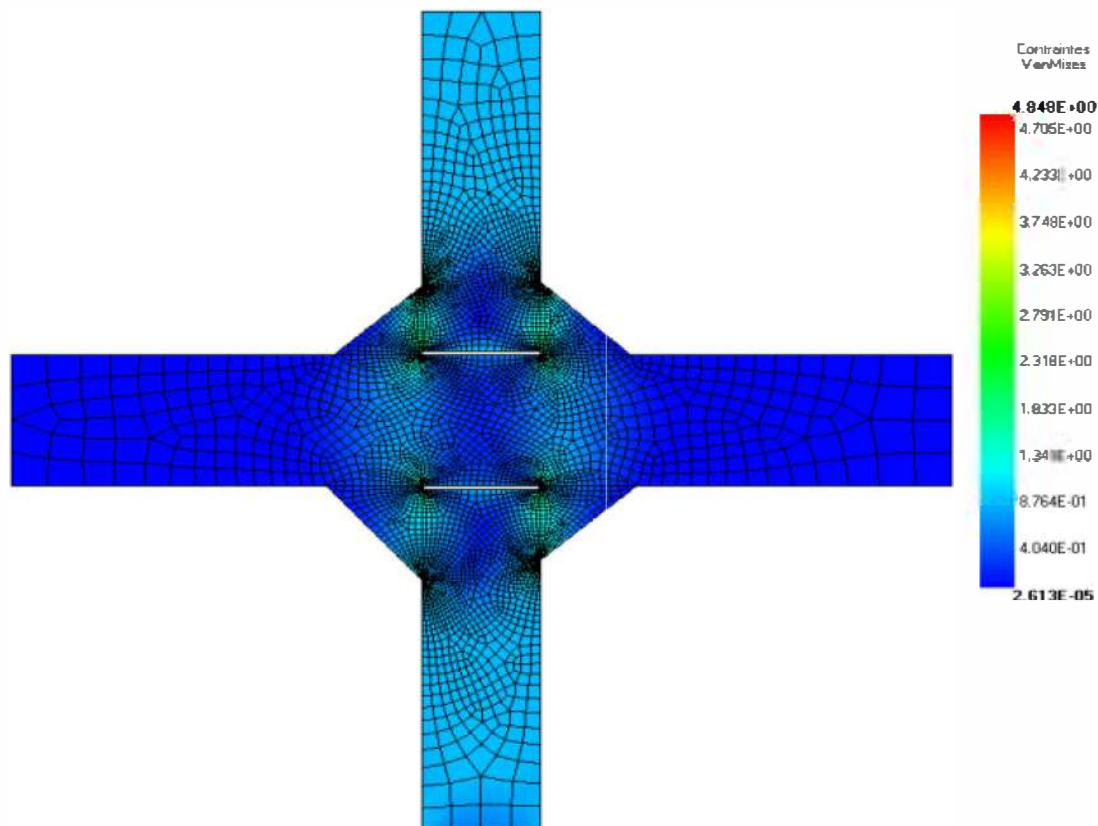
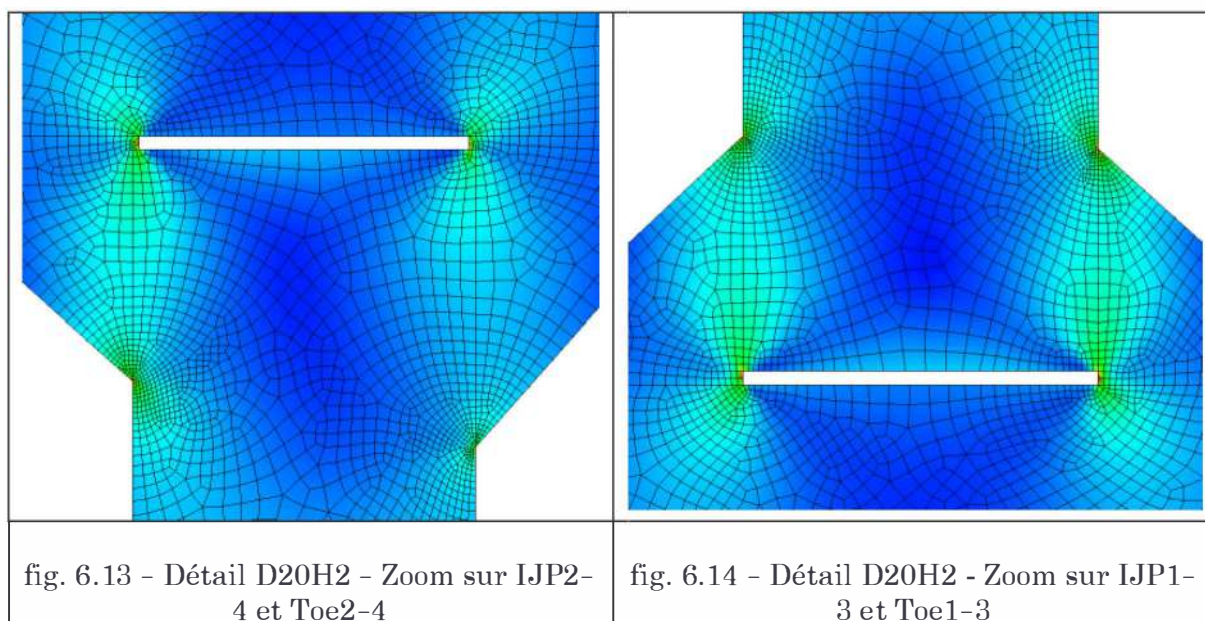


fig. 6.12 - Détail D20H2 - Contraintes de Mises pour le cas de charge unitaire de traction



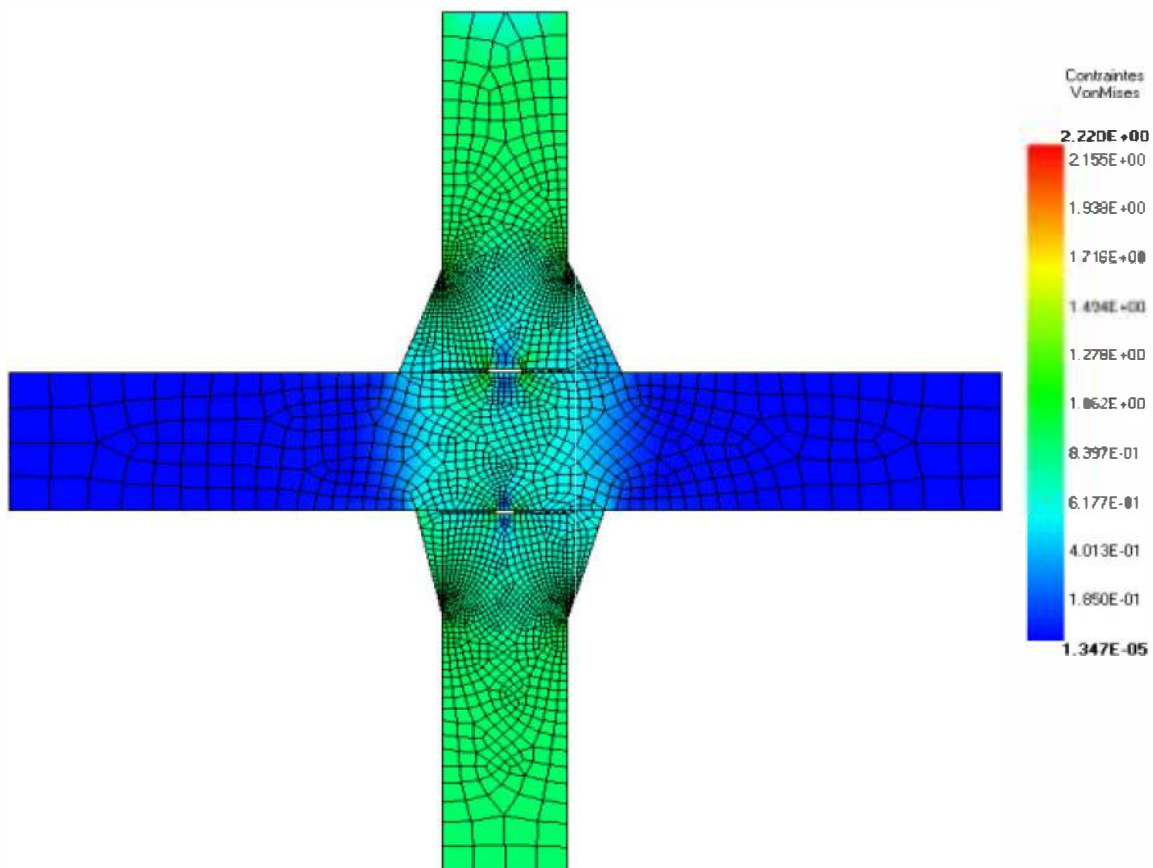


fig. 6.15 - Détail D20M1 (détail modifié) - Contraintes de Mises pour le cas de charge unitaire de traction

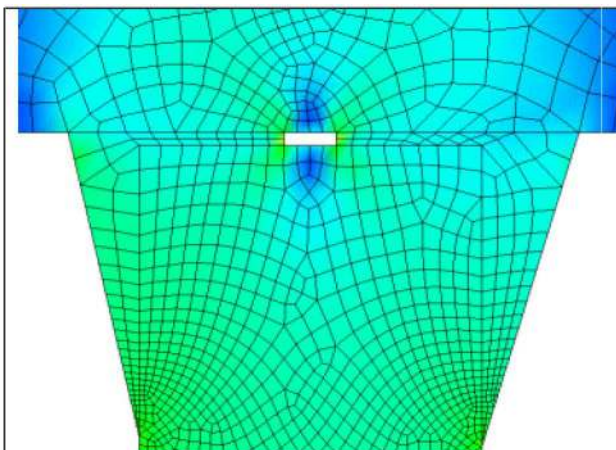


fig. 6.16 - Détail D20HM1 - Zoom sur IJP2-4 et Toe2-4

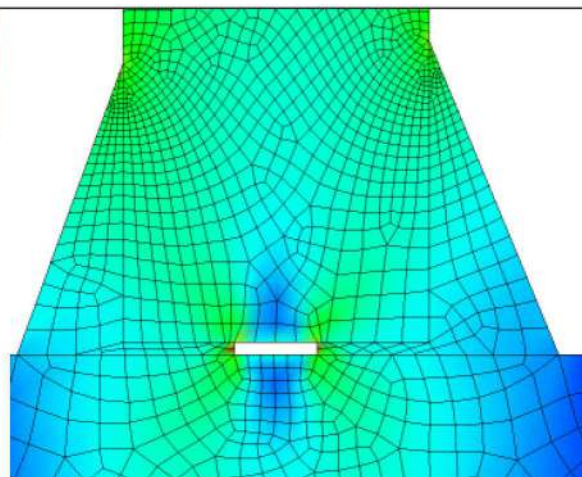


fig. 6.17 - Détail D20M1 - Zoom sur IJP1-3 et Toe1-3



### 6.2.3 Analyse à la fatigue classique

A partir du champ de contraintes calculé tout au long du trajet de chargement, des outils spécialisés comme ENDURE de EMRC et SOLSTICE du LMS nous permettent d'évaluer classiquement numériquement la tenue à la fatigue de l'éprouvette.

Notre objectif n'est pas de comparer les différents critères entre eux ou d'en faire la critique. Nous avons retenu le critère de Dang-Van pour sa facilité de mise en œuvre et sa bonne fiabilité ; mais nous en pondérons la valeur. Il s'applique en chaque nœud du maillage où le trajet de chargement dans le diagramme  $\tau$ - $p$  est tracé et la valeur du critère  $\mathcal{F}^{DV}$  est calculée :

$$\mathcal{F}^{DV} = \underset{t}{\text{Max}} \left( \frac{\tau_{\text{max}}(t) + \alpha p(t) - \beta}{\beta - \alpha p(t)} \right)$$

Les points critiques se trouvent soit en  $\mathcal{F}^{DV} > 0$  soit en  $\text{Max}(\mathcal{F}^{DV})$  si aucun point ne viole le critère.

Dans ENDURE, nous avons choisi d'utiliser une approche plus classique du type stress-life qui prédit la durée de vie en fatigue d'une pièce soumise à un chargement cyclique. La formulation de ce critère s'écrit sous la forme :

$$\Sigma_a = (\sigma'_f - \Sigma_m) (2N_f)^b$$

où  $\Sigma_a$  est l'amplitude de la contrainte,  $\sigma'_f$  est le coefficient de contrainte de fatigue,  $b$  est l'exposant de contrainte de fatigue,  $2N_f$  est le nombre de cycles à initiation/rupture.

### 6.2.4 Définition des régions

Toute la démarche repose sur le comportement particulier à l'intérieur d'une région  $\Omega$  définie pour un matériau donné dans une fenêtre 2D donnée.

La fiabilité des règles apprises dépend de la distribution statistique des exemples/cas qui sont construits. Trop de régions dans la base de données qui fissurent ne donnera pas une bonne prédiction d'une région qui ne fissure pas. Et inversement, pas assez de régions qui fissurent ne donnera pas une bonne prédiction d'une région qui fissure.

Dans les données expérimentales recueillies, le nombre de sites avec fissuration est faible. Nous les retiendrons donc tous. Ils sont au nombre de 8 par détail : IIJ1, IJP2, IJP3, IJP4, Toe1, Toe2, Toe3, Toe4.

Quatre autres sites sont ensuite choisis de façon aléatoire dans les zones " sûres " c'est à dire dans lesquelles, l'initiation ne peut pas se produire.

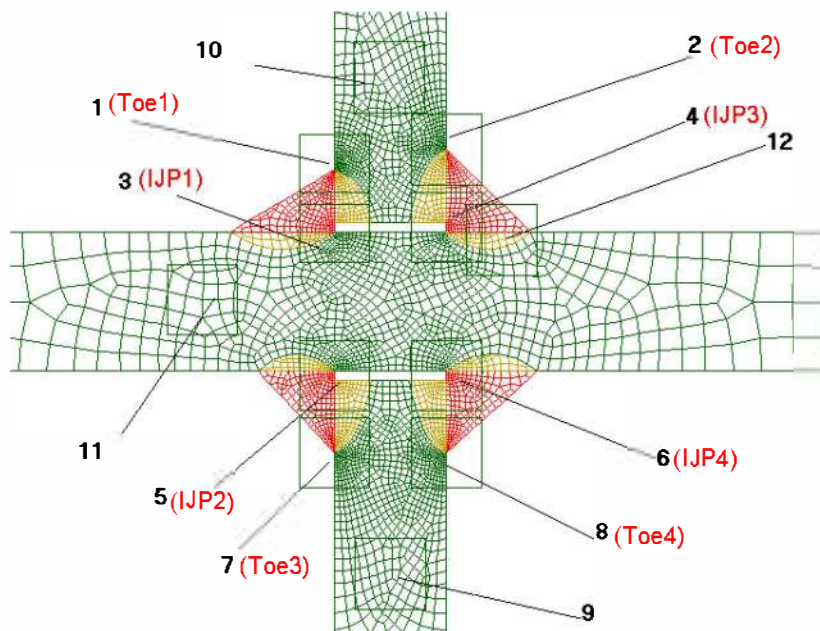


fig. 6.18 - Position des fenêtres 2D

Jusqu'ici nous nous sommes rattachés au comportement particulier dans une fenêtre 2D sans en préciser la taille. Nous rappelons que l'introduction de ce concept de fenêtrage est motivée par le fait que les simulations numériques induisent des erreurs liées au maillage qu'il est très difficile de contrôler (surtout dans les cas de fortes singularités géométriques) et que de plus le dommage doit concerner un certain volume caractéristique. Il est intuitif qu'une fenêtre de trop "grande" taille ferait perdre le caractère pseudo-local de notre approche (les zones lointaines risquent d'atténuer abusivement les concentrations de contraintes au voisinage des points chauds) et une fenêtre de trop "petite" taille nous ramènerait à une étude locale classique. Il faut identifier une taille de la fenêtre optimale qui doit pouvoir aussi caractériser de façon plus physique le dommage : on ne s'intéresse pas aux comportements en un point mais à ce qui se passe GLOBALEMENT dans cette fenêtre.

Pour rechercher la taille optimale de la fenêtre, nous avons sélectionné différentes tailles tout en conservant le même maillage des éprouvettes (1mm, 2mm, 4mm, 8mm, 10mm, 16mm). Six bases de données ont pu être constituées et sur lesquelles nous avons effectué des apprentissages pour générer les règles de conception. Nous avons retenu celle pour laquelle, les règles sont obtenues avec la meilleure fiabilité.

Nos maillages ont été faits selon le meilleur état de l'art ; nous avons cependant vérifié qu'en prenant des maillages plus fins dans les fenêtres, les conclusions prédites par les règles générées, avec en principe de nouvelles valeurs numériques des descripteurs, conduisaient aux mêmes prédictions.

Un exemple de base de données est présenté sur la fig. 6.19. Les descripteurs (d'entrée ou de sortie) sont disposés par colonne. Chaque ligne représente un cas/exemple.

exemple	Nbcyc	C1	C2	k	Desc. Matériaux				MOY <sub>t</sub> (I <sub>1max</sub> )	MOY <sub>t</sub> (J <sub>2max</sub> )	MOY <sub>t</sub> (  grad J <sub>2</sub>    <sub>max</sub> )	MOY <sub>t</sub> (I <sub>1max</sub> )
					MOY <sub>t</sub> (I <sub>1max</sub> )	MOY <sub>t</sub> (J <sub>2max</sub> )	MOY <sub>t</sub> (  grad J <sub>2</sub>    <sub>max</sub> )	MOY <sub>t</sub> (I <sub>1max</sub> )				
d20h12_Ela8_R1_M1	276000	0	1	1219	1.4618	1.877	8.5778	-1.6824				
d20h4_Ela8_R6_M2	2121000	0	1	1207.27	-1.169	4571.8	26427	-191.08				
d20q4_Ela8_R3_M2	622500	0	1	1312.07	-31.826	717.9	2220.5	-124.11				
d20h8_Ela8_R5_M2	310500	0	1	1219	0.2283	121.11	938	-26.26				
d20q3_Ela8_R5_M2	1180500	0	1	1207.27	-13.839	163.58	370.92	-35.638				
d20c3_Ela8_R5_M2	378000	0	1	1312.07	8.2041	966.15	3698.5	-79.118				
d20h5_Ela8_R8_M1	624000	0	1	1219	8.1779	198.49	813.41	-32.525				
d20q1_Ela8_R1_M1	459000	0	1	1207.27	1.4618	1.877	8.5778	-1.6824				
d20q7_Ela8_R7_M1	400500	0	1	1312.07	-1.169	4571.8	26427	-191.08				
d20h9_Ela8_R2_M1	1017000	0	1	1219	-31.826	717.9	2220.5	-124.11				
d20c2_Ela8_R8_M1	0	1	0	1207.27	0.2283	121.11	938	-26.26				
d20h12_Ela8_R1_M1	0	1	0	1312.07	-13.839	163.58	370.92	-35.638				

fig. 6.19 – Exemple de base de données

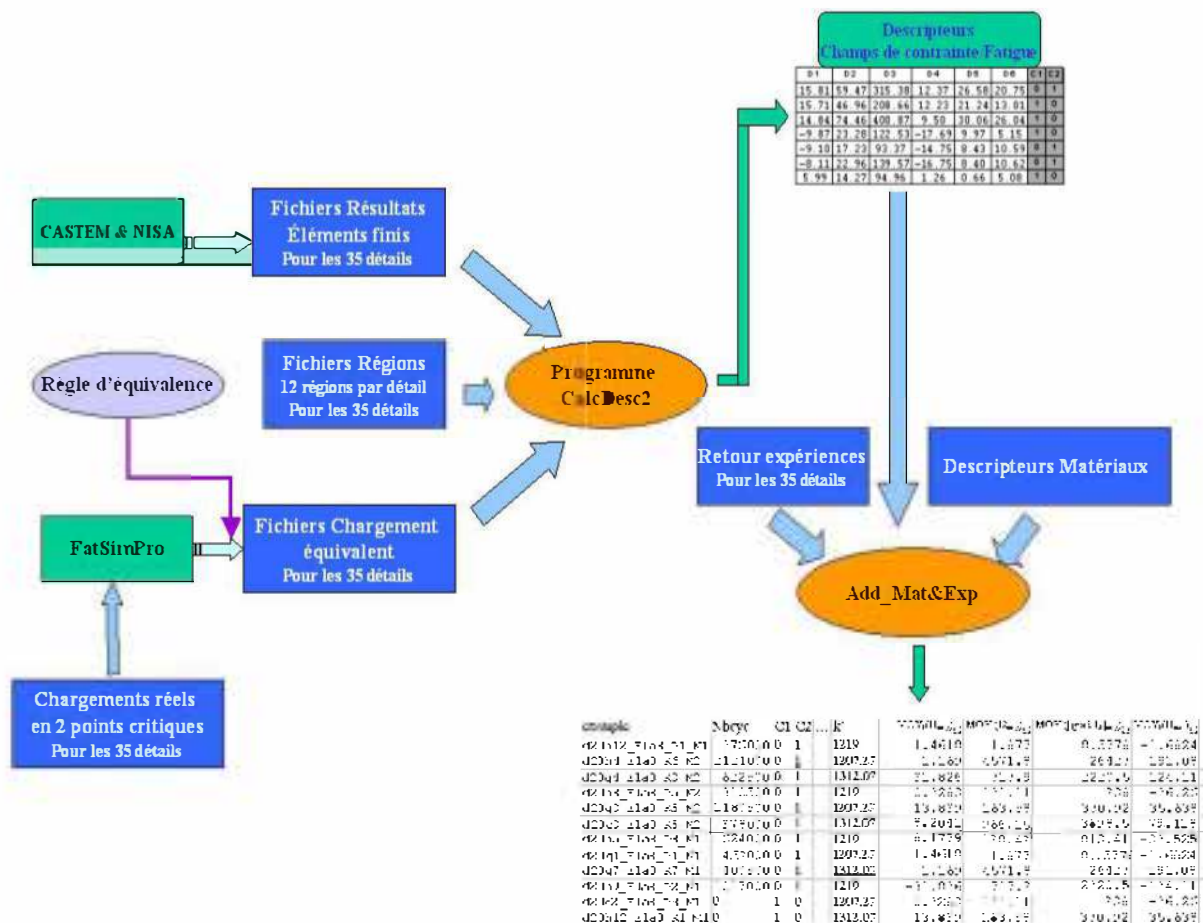


fig. 6.20 – Organigramme de construction de la base de données

## 6.3 Génération des règles par apprentissage automatique

La technique d'apprentissage automatique a été utilisée. Nous pouvons choisir tout type de générateur de système expert par apprentissage comme nous l'avons vu au chapitre 3.

Nous avons utilisé ici les réseaux neuronaux avec le logiciel NEUROHELL de Ward Systems pour réaliser les divers apprentissages.

Un programme spécial (CalcDesc) a été développé pour générer les descripteurs de tous les exemples de la base de données.

Cette base d'exemples est ensuite décomposée de façon aléatoire en deux parties :

- une base d'apprentissage, sur laquelle les règles sont construites
- une base de test, sur laquelle les règles sont validées.

Une base de production peut aussi être préparée. Elle est composée en principe d'exemples pour lesquels nous souhaitons connaître les conclusions prédites par les règles. Elle peut être aussi composée d'exemples pour lesquels les conclusions sont connues, qui n'ont pas servi durant l'apprentissage mais qui peuvent servir à vérifier la fiabilité indiquée par le système.

Dans notre problème, nous avons construit 2 systèmes experts (règles) pour la prévision de la tenue à la fatigue d'une région 2D :

1- le premier sert pour prédire les cas Fissure/Non Fissure de cette région ; l'architecture du réseau choisie est le réseau PNN (Probabilistic Neural Network) à 3 couches avec une minimisation de la fonction "erreur" par algorithme génétique (genetic adaptive) (voir chapitre 3)

2- le deuxième pour évaluer sur les exemples Fissures, le nombre de cycles (ou de blocs) à l'initiation ; l'architecture du réseau choisie est le réseau GMDH (Group Method of Data Handling ou polynomial net) à N couches, N étant défini dynamiquement par un composant génétique (voir chapitre 3).

### 6.3.1 Prédiction fissure/non-fissure

#### 6.3.1.1 Génération des règles

Nous avons réalisé les apprentissages séparément par taille de fenêtre (.1 mm, .2 mm, .4 mm, .8 mm, 1. mm et 1.6 mm).

Chaque base de données contient approximativement un nombre d'exemples compris entre 800 et 1200 selon la taille de la fenêtre. Le nombre de descripteurs d'entrées est de 95 ; et il y a une conclusion (Fissure ou Non Fissure). Le réseau PNN impose une représentation binaire de la conclusion en 2 classes  $C_1$  et  $C_2$ .

$C_1$	$C_2$	Fissure
1	0	non
0	1	oui

Le nombre de sites de fissures relevés expérimentalement sur toutes les éprouvettes est d'environ de 50.

Lorsqu'une fissure appartient à une fenêtre, nous relevons à quelle région elle appartient, c'est à dire à quel matériau dans la fenêtre, en nous référant à la description primitive présentée dans le chapitre précédent.

La fiabilité des règles générées dépend de la qualité des exemples de la base. Il n'y a pas d'autre solution que d'essayer sur différentes bases et de retenir le réseau de règles qui conduit à la fiabilité la plus grande. Nous avons pour cela établi une procédure d'extraction aléatoire des bases d'exemples. La principale difficulté est de pouvoir conserver un minimum d'exemples avec fissure. Si nous choisissons de faire l'extraction aléatoire sur tous les exemples, cette propriété n'est pas respectée. L'idée est donc de séparer les exemples avec fissure ( $C_2 = 1$ ) de ceux avec la conclusion non fissure ( $C_2 = 0$ ) et de faire les tirages aléatoires sur ces 2 parties de façon indépendante.

Nous avons généré ainsi plusieurs bases d'exemples contenant chacune environ 240 exemples dont :

- 40 avec la conclusion fissure = 1
- 200 avec la conclusion fissure = 0

### 6.3.1.2 Fiabilité des règles

Les résultats des apprentissages se présentent sous quatre formes :

- \* Forme1: la prédiction est en accord avec les résultats expérimentaux. La fiabilité des règles de dimensionnement est donc vérifiée
- \* Forme2 : la prédiction n'est pas possible
- \* Forme3 : la prédiction est fausse mais le système est conservatif (il prédit une fissure alors que l'expérience a montré le contraire)
- \* Forme4 : la prédiction est fausse et le système n'est pas conservatif (il n'a pas pu détecter la fissure)

La partie la plus difficile est de juger de la fiabilité des règles en prenant en compte ces 4 formes de résultats :

- Trop de forme2 implique que le système n'a pas réussi à apprendre ;

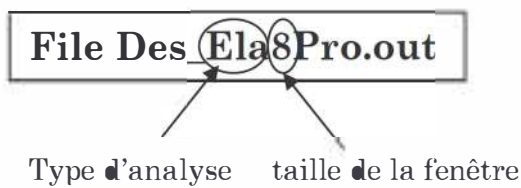


- Trop de forme3 implique que soit le système a trop bien appris sur le faible nombre d'exemples justes (on essayera de ne pas trop y croire !); soit il a très mal appris et il ne peut pas être prédictif

Dans notre cas, nous avons essayé d'avoir :

- le maximum de résultats de forme1 dans les régions critiques et les régions éloignées des points chauds,
- des résultats de forme2 plutôt que des résultats non conservatifs
- le minimum de résultats non conservatifs et de forme2

Les résultats de l'apprentissage sont présentés sous la forme suivante :



Random	4000
Patterns processed:	849
Patterns classified correctly :	709
Patterns classified incorrectly :	126
Smoothing factor :	0.9844

Categories:	C1	C2	
Actual winners:	785	50	→ Nombre initial de cas à 1
Classified winners:	661	174	→ Nombre de cas classés à 1
Actual losers:	50	785	→ Nombre initial de cas à 0
Classified losers :	174	661	→ Nombre de cas classés à 0
True positives:	660	49	→ Cas à 1 classés à 1
False positives:	1	125	→ Cas à 1 classés à 0
True negatives:	49	660	→ Cas à 0 classés à 0
False negatives:	125	1	→ Cas à 0 classés à 1
True positive proportion:	0.8408	0.9800	→ pourcentage
False positive proportion:	0.0200	0.1592	→ pourcentage

Les deux classes sont symbolisées par C1 (Non Fissure) et C2 (Fissure). La fiabilité des règles est souvent exprimée par la matrice de confusion  $\Phi$ :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \rightarrow 1 & 0 \rightarrow 1 & 1 \rightarrow ? \\ 1 \rightarrow 0 & 0 \rightarrow 0 & 0 \rightarrow ? \end{bmatrix}$$

Les termes diagonaux  $\Phi_{ii}$  ( $i = 1, 2$ ) doivent être maximaux (proche de 1) pour avoir la fiabilité la plus grande. Aussi, pour avoir un système conservatif,  $\Phi_{12}$  doit être minimale (peu de cas avec fissure qui sont prédits sans fissure). Une classe

supplémentaire  $C_3$  est parfois intégrée dans la matrice de confusion. Elle indique que le système ne peut pas prédire.

La matrice  $\Phi$  vaut ici :

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.84 & 0.16 & 0 \\ 0.02 & 0.98 & 0 \end{bmatrix}$$

Après comparaison des résultats obtenus avec différentes méthodes de calcul (élastique, élastoplastique avec la méthode simplifiée) et différentes tailles de fenêtre, nous avons retenu les règles correspondant au cas élastique avec une taille de fenêtre égale à .8 mm (cf Table1)

L'analyse de ces règles montre que 98% des cas fissurés ont été retrouvés fissurés. 16% de cas supplémentaires avec risque de fissuration ont aussi été prédits par le système. Nous avons pu vérifier qu'en fait 98% de ces derniers sont situés dans les zones critiques (IJP1à4, Toe1à4) : l'expérimentateur n'a pas attendu suffisamment longtemps pour laisser initier d'autres fissures, ou n'a pas pris le soin de relever tous les sites fissurés. Pour les autres 2%, nous avons juste recherché qu'ils ne concernaient pas les régions "sûres".

Dans les techniques par "apprentissage automatique", chaque descripteur est associé à un paramètre de poids. Il est donc possible de repérer les descripteurs les plus significatifs et d'écarter les moins importants. Ceci peut nous aider à mieux comprendre le problème afin d'alléger ou de revoir la description de notre problème. Dans les réseaux PNN, c'est le "smoothing factor" ou facteur de lissage qui informe sur le poids des descripteurs. Il prend des valeurs comprises entre 0 et 3, du moins significatif au plus significatif.

Ces règles doivent être suffisamment stables avec le maillage. Nous avons repris quelques détails et diminué la taille des mailles dans les zones critiques. Le rapport dans une région critique entre le nouveau nombre de mailles et le nombre de mailles initial varie entre 3 et 10. Nous avons vérifié, bien que les valeurs des descripteurs soient différentes, que la prédiction Fissure/NonFissure ne change sur l'ensemble des cas testés que de 1% environ.

File Des_Ela1Pro.out	C1	C2	File nDesc_cyc10pro. out	C1	C2
True positive proportion	0.8381	0.9348	True positive proportion	0.8402	0.92
False positive proportion	0.0652	0.1619	False positive proportion	0.08	0.1598
File Des_Ela2Pro. out	C1	C2	File Desc_zac1pro. out	C1	C2
True positive proportion	0.8404	0.9796	True positive proportion	0.873	0.913
False positive proportion	0.0204	0.1596	False positive proportion	0.087	0.127
File Des_Ela4Pro out	C1	C2	File Desc_zac2pro. out	C1	C2
True positive proportion	0.8003	0.98	True positive proportion	0.8333	0.9388
False positive proportion	0.02	0.1997	False positive proportion	0.0612	0.1667
<b>File Des_Ela8Pro. out</b>	<b>C1</b>	<b>C2</b>	File Desc_zac4pro. out	C1	C2
<b>True positive</b>	<b>0.8408</b>	<b>0.98</b>	True positive proportion	0.8312	0.98
<b>False positive</b>	<b>0.02</b>	<b>0.1592</b>	False positive proportion	0.02	0.1688
File Des_Ela10Pro. out	C1	C2	File Desc_zac8pro. out	C1	C2
True positive proportion	0.7392	0.94	True positive proportion	0.8177	0.92
False positive proportion	0.06	0.2608	False positive proportion	0.08	0.1823
File Desc_cyc1pro. out	C1	C2	File Desc_zac10pro. out	C1	C2
True positive proportion	0.877	0.9111	True positive proportion	0.8333	0.9388
False positive proportion	0.0889	0.123	False positive proportion	0.0612	0.1667
File Desc_cyc2pro. out	C1	C2	File nDes_Ran1pro. out	C1	C2
True positive proportion	0.871	0.9388	True positive proportion	0.928	0.9333
False positive proportion	0.0612	0.129	False positive proportion	0.0667	0.072
File Desc_cyc4pro. out	C1	C2	File nDes_Ran2pro. out	C1	C2
True positive proportion	0.8771	0.94	True positive proportion	0.8737	0.8776
False positive proportion	0.06	0.1229	False positive proportion	0.1224	0.1263
File Desc_Cyc8pro. out	C1	C2	File nDes_Ran4pro. out	C1	C2
True positive proportion	0.8035	0.98	True positive proportion	0.8886	0.84
False positive proportion	0.02	0.1965	False positive proportion	0.16	0.1114
File nDes_Ran10pro. out	C1	C2	File nDes_Ran8pro. out	C1	C2
True positive proportion	0.738	0.9167	True positive proportion	0.8359	0.96
False positive proportion	0.0833	0.262	False positive proportion	0.04	0.1641

Tableau 8 - Comparaison entre les fiabilités des différents apprentissages



### 6.3.2 Prédiction Durée de vie

Dans un premier temps, comme nous ne disposons pas de beaucoup d'exemples dans notre base de données, nous avons choisi d'évaluer la durée de vie d'une région 2D en classes. Chaque classe doit comporter un nombre suffisant d'exemples pour permettre un apprentissage fiable.

A partir des règles précédentes, nous avons récupéré tous les exemples qui sont prédits avec fissuration. Le nombre de blocs à l'initiation pour ces exemples est connu expérimentalement. Une discrétisation en 5 classes a été effectuée :

Classe C1 → nombre de blocs compris dans [0 , 268]  
 Classe C2 → nombre de blocs compris dans [269 , 337]  
 Classe C3 → nombre de blocs compris dans [338 , 738]  
 Classe C4 → nombre de blocs compris dans [739 , 1414]  
 Classe C5 → nombre de blocs compris dans [1415 , 200000]

Nombre de cycles = 1500 \* Nombre de blocs

### Résultats

Nous présentons ci-dessous les résultats d'apprentissage effectués sur les 5 classes dans le cas du calcul élastique avec une taille de fenêtre de .8mm.

#### *File Des\_Ela8pro.out*

```

Random : 500
PATTERNS PROCESSED : 166
Patterns classified correctly :110
Patterns classified incorrectly : 35
Smoothing factor : 0.4137647

Categories:          C1      C2      C3      C4      C5
Actual winners:      12      6      10     9      108
Classified winners:  18      5      6      15     101
Actual losers:       133     139    135    136     37
Classified losers:   127     140    139    130     44
True positives:      7        2      3      9      89
False positives:     11      3      3      6      12
True negatives:      122     136    132    130     25
False negatives:     5        4      7      0      19
True positive proportion: 0.5833 0.3333 0.3000 1.0000 0.8241
False positive proportion: 0.0827 0.0216 0.0222 0.0441 0.3243

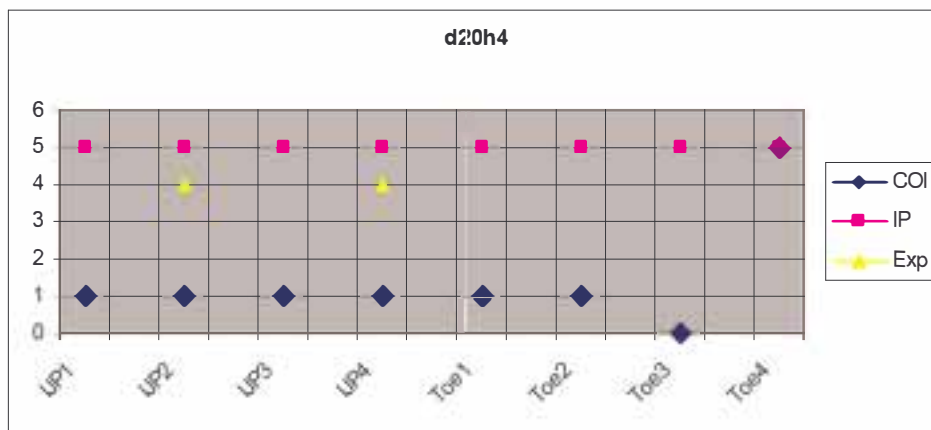
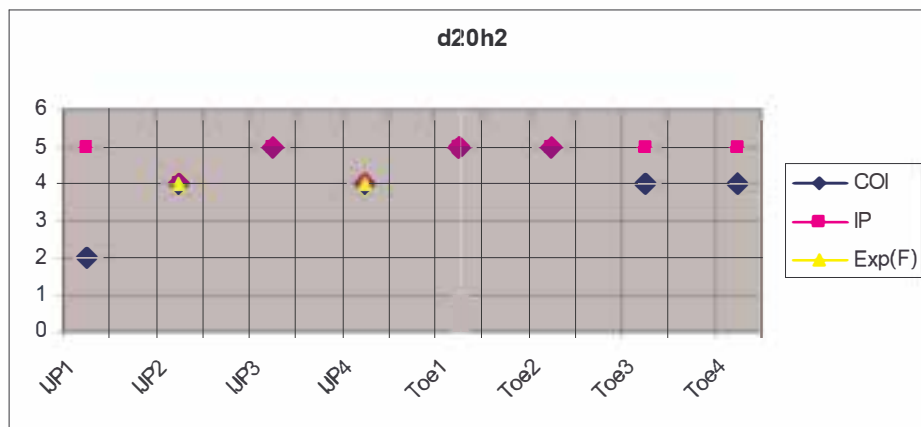
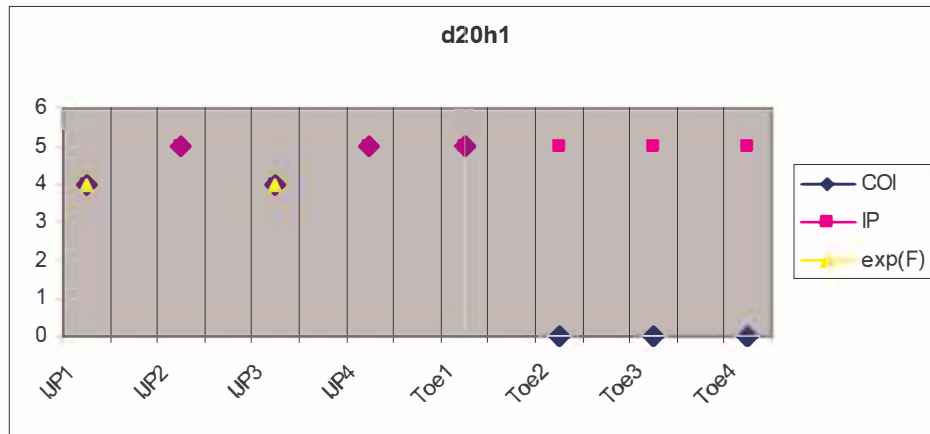
```

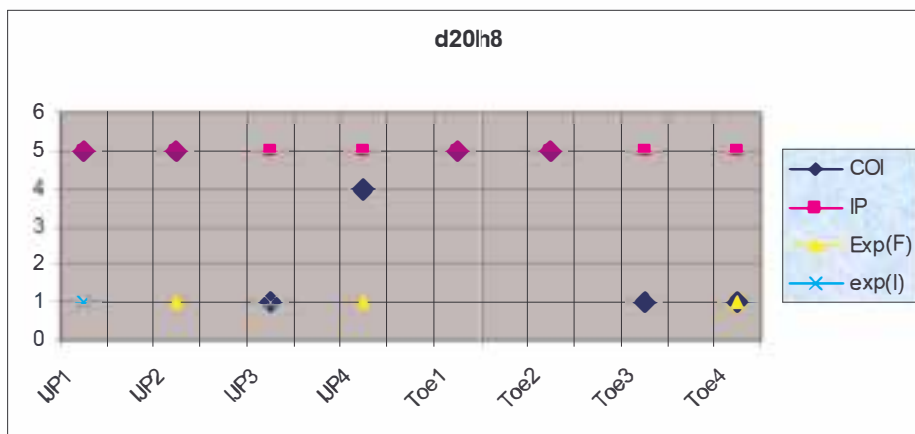
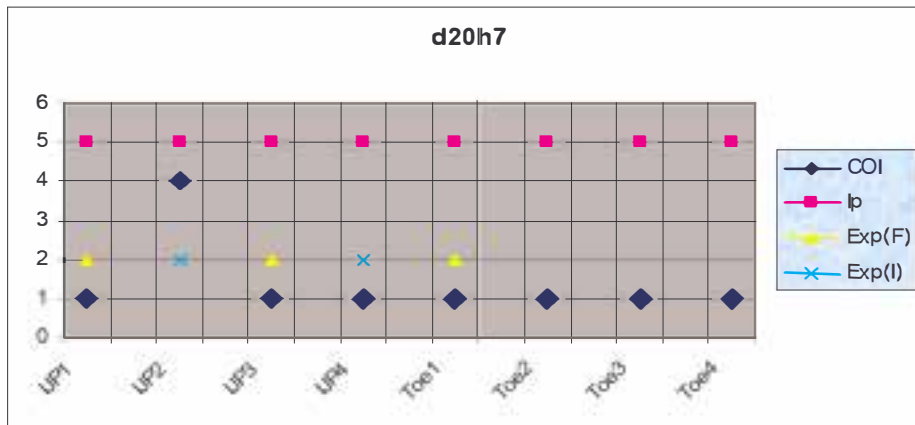
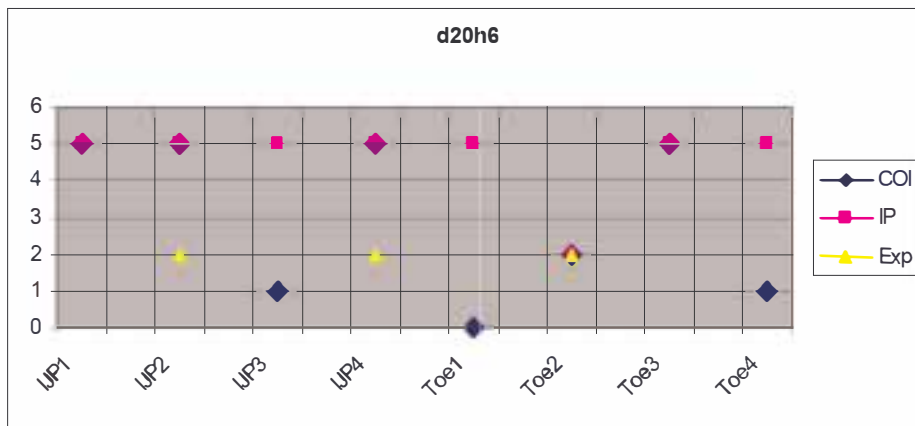
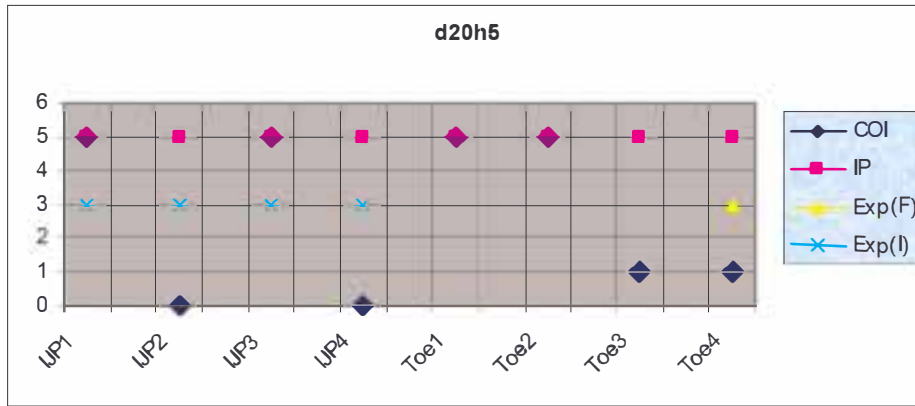
Le réseau de règles obtenu a une structure complexe qui ne nécessite pas d'être présenté. Nous préférons tester sa capacité de prédiction en le confrontant aux résultats obtenus lors des essais expérimentaux et par le modèle IP de Park/Lawrence (cf Annexe E)

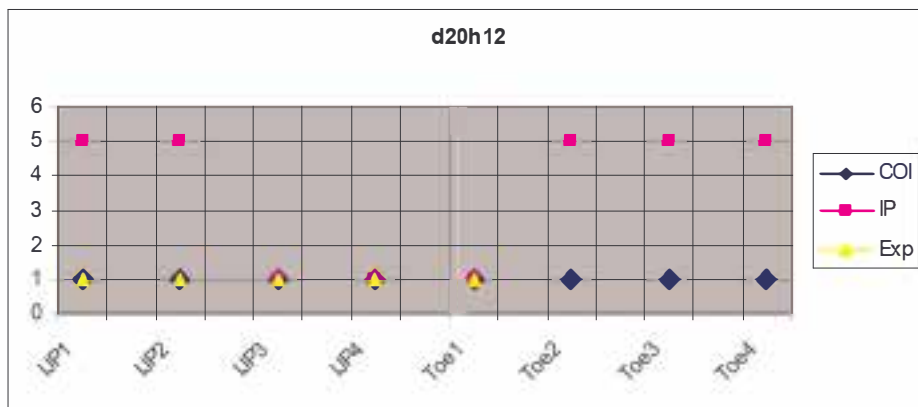
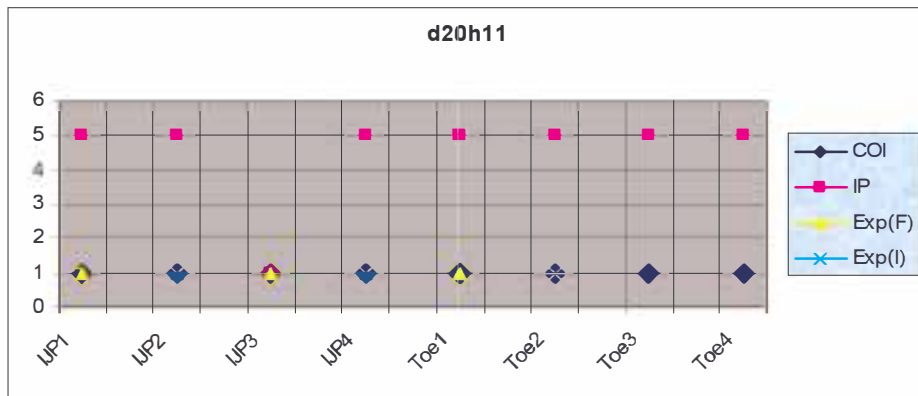
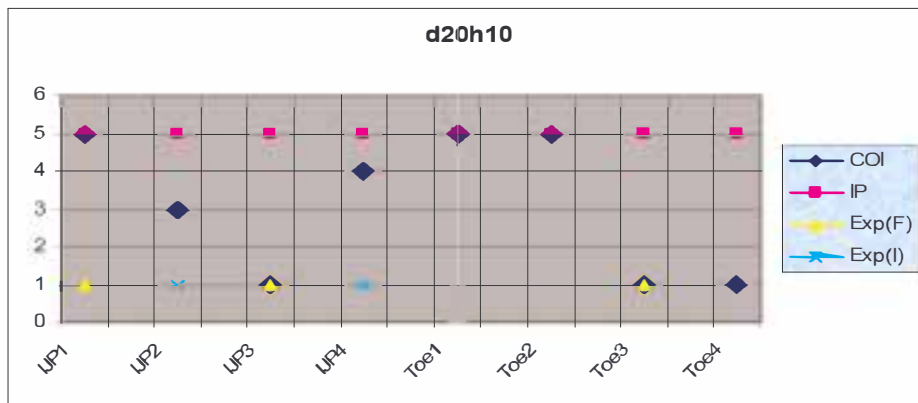
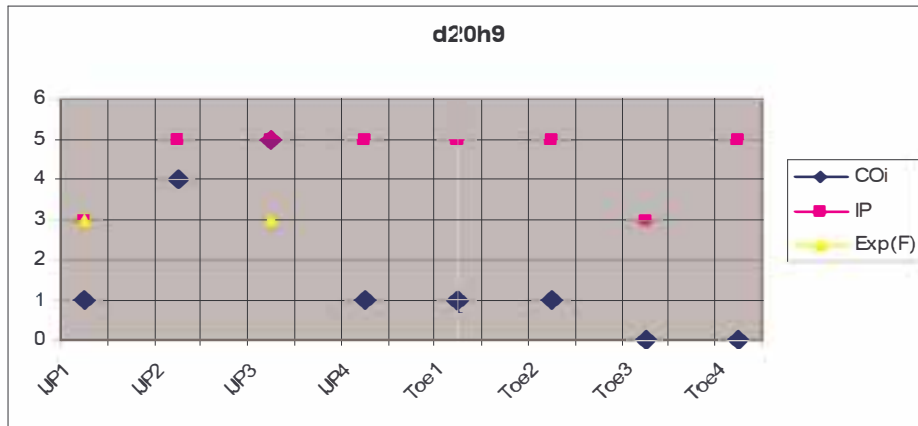
Sur les figures ci-après, nous avons représenté pour la famille d'éprouvettes H aux 8 points chauds les valeurs données par :

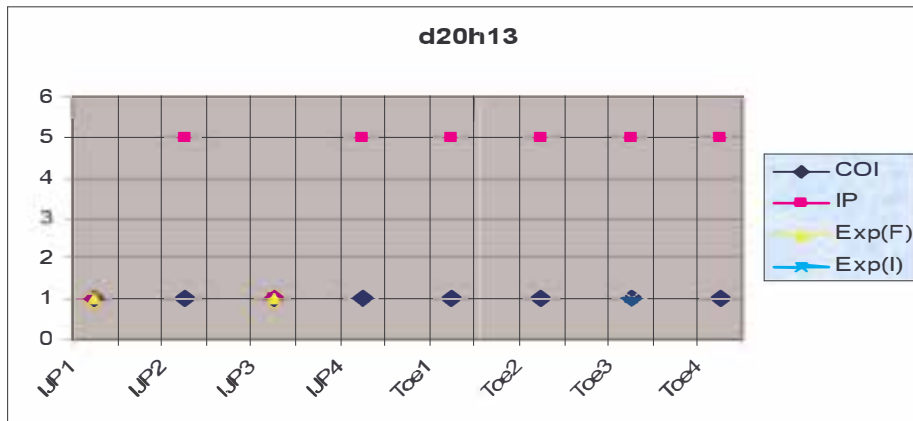
- les essais expérimentaux (jaune quand il y'a eu rupture et bleu clair quand il y'a eu juste initiation d'une fissure)
- la méthode IP (rose)
- notre méthode COI (bleu)

Lorsque le réseau des règles ne sait pas prédire, nous le faisons savoir en donnant la valeur 0 à la classe.









Bien que notre système ne sache pas toujours prédire la classe expérimentale, nous avons globalement des prévisions qui restent plus conservatives que celles du modèle IP.

Ce premier travail nous conforte dans l'idée qu'il y'a avec cette approche de la COI une voix importante de développement qu'il faut poursuivre. De nouvelles données expérimentales ainsi qu'une amélioration de la description intelligente du problème conduiront sans aucun doute à une réponse fiable et robuste de la prédiction de la durée de vie des structures.

## *Points essentiels à retenir*

Dans cette partie, nous avons construit les règles de conception à la fatigue à partir d'une base de données d'exemples avec conclusions connues et grâce à l'utilisation de générateurs de systèmes experts par apprentissage automatique.

Les exemples de la base de données sont issus d'une analyse dans une fenêtre 2D de taille optimale donnée avec un chargement cyclique radial. Le réseau de règles générées donne une prédiction sur :

- i) l'état de fissuration de la région 2D (Fissure/Non-Fissure)
- ii) et, le nombre de blocs du chargement à appliquer si il y a fissure.

La description de chaque exemple a été faite par des descripteurs primitifs qui proviennent d'une série d'essais effectués et bien documentés (Université d' Illinois) sur un détail soudé (détail 20) que nous avons défini comme une structure générale. Les informations sur le mode opératoire, les lieux d'initiation/rupture, la durée de vie ainsi que les contraintes parasites dues aux mors de serrage et le non alignement de l'éprouvette, sont relativement précises. Il n'a pas été possible cependant de trouver les informations sur les contraintes résiduelles induites lors de la soudure qui peuvent être très importantes.

Ensuite il a fallu passer de la description primitive en une description évoluée avec l'introduction des descripteurs intelligents. Ces descripteurs sont issus de quantités relatives au matériau, au champ de contraintes lors d'un chargement cyclique radial, et de quantités relatives à une analyse à la fatigue. Des simulations numériques ont été réalisées. Plusieurs procédures ont été mises en œuvre afin de calculer automatiquement les descripteurs intelligents.

Une taille optimale de la fenêtre a été recherchée en essayant plusieurs tailles et types d'analyses (élastique, élastoplastique incrémentale ou simplifiée). Elle a été évaluée à .8 mm lors d'une analyse élastique simple.

**Le réseau de règles générées peut maintenant être employé pour toute nouvelle analyse à la fatigue. Toutefois, l'acquisition d'autres données expérimentales (sur de nouveaux détails et des structures réelles) demeure indispensable pour valider complètement notre approche.**



# Conclusion et perspectives

Une nouvelle approche pour l'analyse à la fatigue et à la fiabilité des structures a été bâtie. Elle est fondée sur la Conception Optimisée Intelligente des Matériaux et des Structures (C.O.I.T.) de J. Zarka.

Nous avons montré que nous pouvons ramener l'analyse globale de la structure soumise à un chargement à plusieurs paramètres aléatoires, à une analyse locale sur une fenêtre 2D de taille donnée avec un chargement cyclique radial caractéristique et un nombre de cycles.

Pour cela, il nous a fallu :

## I. Quantifier le chargement aléatoire vis à vis du dommage

Nous avons introduit une règle d'équivalence entre deux chargements puis défini un chargement cyclique équivalent simple susceptible de représenter le chargement réel.

## II. Donner une nouvelle description pour l'analyse à la fatigue/fiabilité des structures

Chaque cas/problème de fatigue correspond à une géométrie particulière de la structure, à ses nombreux matériaux en présence, son état initial, et son chargement ; elle a donc une description primitive spécifique. Cette représentation *passive* est transformée en une représentation *active* dite intelligente qui est la même pour tous les cas grâce à une analyse multi-niveaux de la structure générale :

1. le premier niveau est celui de la structure. Une analyse élastique ou élastoplastique est conduite en considérant les nombreux chargements, une schématisation éventuelle en plaques et poutres ainsi qu'un maillage grossier.
2. le deuxième niveau est celui d'une sous-structure 3D que l'on aura relevée comme critique. Un maillage plus fin et une modélisation plus correcte des détails soudés et des discontinuités géométriques présents dans ce domaine peuvent être effectués.
3. le troisième niveau correspond à celui d'un détail élémentaire 2D qui est une coupe plane du deuxième niveau, avec éventuellement un maillage encore plus fin.
4. puis nous considérons sur ce détail 2D, une fenêtre 2D virtuelle mobile. Cette fenêtre joue le rôle d'un filtre (sa taille est telle que les quantités qui sont utiles deviennent relativement peu sensibles aux erreurs associées à la taille et à la distribution des éléments) et doit tenir compte de plus, que le dommage doit concerner un certain volume caractéristique. Elle est déterminée une fois pour toute. Le chargement cyclique radial équivalent peut être calculer ici grâce à notre règle d'équivalence
5. enfin, le dernier niveau est celui d'une région qui est définie pour un matériau et une fenêtre donnée : la description du matériau, de certains champs (contrainte, gradient de contrainte, critère de fatigue..) dans cette région



**conduit à la description intelligente qui est applicable et unique sur toute structure complexe.**

Dans chaque région, nous avons introduit 92 descripteurs intelligents d'entrées et nous avons cherché à prédire :

- i) si il y'a fissure ou non,
- ii) et si il y a fissure, quel est le nombre de blocs du chargement à appliquer ?

### **III. Prédire les nouvelles règles de dimensionnement à la fatigue**

#### Données expérimentales disponibles

Nous avons récupéré une série d'essais en fatigue effectués et bien documentés par l'université de l'Illinois. Ces essais concernent une famille de 35 détails soudés (détail 20) que nous avons décrit comme des structures générales. Pour chaque éprouvette soudée, nous avons la géométrie exacte (y compris les zones de soudure), les propriétés mécaniques et en fatigue des matériaux constitutifs, le chargement appliqué ainsi que le lieu et le nombre de cycles à la rupture.

#### Construction de la base de données

Pour construire la base de données, il a fallu d'abord réaliser des simulations numériques élastiques et élastoplastiques simplifiées (ZAC) sur ces 35 détails soudés. Il a fallu ensuite calculer dans chaque région et pour différentes tailles de fenêtre (.1, .2, .4, .8, 1.) les 95 descripteurs intelligents. Enfin, il a fallu compiler toutes ces informations dans une base de données Excel (environ 900 exemples par analyse et par taille de région sont obtenus) en associant à chaque exemple sa solution expérimentale. Toute cette partie a été entièrement automatisée (CAO, maillage, simulations, calculs des descripteurs, fusion des résultats numériques et expérimentaux)

#### Génération des règles de dimensionnement

A partir de la base de données et grâce aux logiciels (générateur de système expert), SEA du LMS-X et NeuroShell de Ward System, nous avons obtenu le réseau de règles à employer pour toute nouvelle analyse à la fatigue ainsi que les descripteurs pertinents.

Le réseau des règles optimal est obtenu pour une analyse élastique et une taille de région de .8mm. Il se présente soit sous la forme d'un polynôme fonction des descripteurs intelligents (dans le cas de SEA), soit sous la forme d'une fonction informatique "bestiale" c'est à dire avec, sans vraiment de caractéristiques mathématiques évidentes (dans le cas des réseaux neuronaux).

### **IV. Appliquer les règles à de nouveaux cas/structures**

# Perspectives

## A court terme

Les règles de dimensionnement générées grâce à notre description intelligente sont susceptibles de s'appliquer à toute nouvelle structure. Toutefois, l'acquisition d'autres données expérimentales (sur de nouveaux matériaux, de nouveaux détails et des structures réelles) s'avère indispensable pour valider plus complètement l'approche.

La qualification de la règle d'équivalence est aussi une étape importante. Elle doit permettre de considérer :

- les chargements uniaxiaux à amplitudes variables,
- les chargements biaxiaux radiaux à amplitudes variables,
- l'effet de la contrainte moyenne,
- les chargements multiaxiaux complexes.

## A moyen terme

### *Extension vers l'analyse fiabiliste*

La démarche fiabiliste est fondée sur des approches globales déterministes et/ou probabilistes. Ces approches supposent le plus souvent des scénarii globaux de défaillance.

La ruine réelle est généralement liée à des phénomènes plus locaux. C'est le cas pour les structures métalliques où la ruine par fatigue apparaît comme la cause de ruine la plus importante en termes de risques (probabilité de ruine associée à des conséquences économiques, de sûreté et environnementales).

Pour arriver à conserver le caractère local du mode de défaillance en fatigue, nous utiliserons notre nouvelle description pour l'analyse à la fatigue qui garantit plus de souplesse et qui a l'avantage de traiter en termes de fatigue tous les types de chargements de la même manière et aussi de réduire les erreurs induites lors des simulations numériques en considérant un volume caractéristique de dommage au lieu des solutions locales.

Le réseau des règles généré précédemment s'applique dans des conditions déterministes. L'accès à la solution d'un nouveau cas est quasi instantané, puisque seuls les temps impartis au calcul des descripteurs intelligents, c'est à dire aux paramètres d'entrées de la fonction et à son exécution sont escomptables. Des simulations de Monte-Carlo sont donc envisageables pour prendre en compte :

- 1- Les aléas sur les chargements,
- 2- Les incertitudes sur les propriétés mécaniques des matériaux constitutifs,
- 3- Les imprécisions sur la géométrie d'un composant particulier,

- 4- La non-connaissance de l'état initial du composant après sa fabrication et son insertion dans la structure.

Par la suite, une probabilité de défaillance de la structure pourra être déduite.

### ***Intégration dans un progiciel***

Notre approche a l'avantage de s'intégrer facilement dans un logiciel de support. La société CADLM devra probablement entreprendre les développements dans son outil d'analyse à la fatigue FatPro.

FatPro dispose déjà de fonctionnalités conviviales pour réaliser le passage Global/Local de la procédure multi-échelle (isolement d'une partie de la pièce, plan de coupe et positionnement de la région mobile).

Les développements devront porter sur :

- l'intégration des nouvelles règles de dimensionnement (quasi-locales),
- et le calcul du chargement équivalent (par rapport à un modèle d'endommagement local choisi dans une bibliothèque) en se fondant sur la règle d'équivalence (à qualifier).

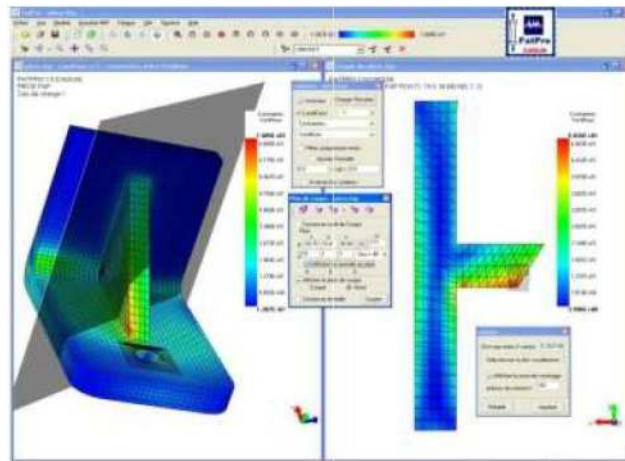


fig. 6.21 - Interface principale de FatPro – Mise en évidence des fonctionnalités de la procédure multi-échelle

# Annexe A

## Analyse d'un modèle à 2 patins bidimensionnels

Dans le cadre proposé par J. Zarka, nous présentons ici le modèle de deux patins dimensionnels couplés par des ressorts. Chaque patin est caractérisé par un domaine d'élasticité ( $f(\sigma) \leq 0$ ) et présente un comportement local parfaitement plastique.

### Equations du problème

Nous considérons le cas d'un chargement en contraintes planes à directions principales fixes :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(la généralisation aux contraintes quelconques se fait aisément)

### Expression des contraintes locales

Les contraintes locales sur chaque patin s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha_1} = A_{11}\Sigma_1 + A_{12}\Sigma_2 - y_{\alpha_1} \\ \sigma_{\alpha_2} = A_{21}\Sigma_1 + A_{22}\Sigma_2 - y_{\alpha_2} \end{cases} \quad \text{pour le 1}^{\text{er}} \text{ patin}$$
$$\begin{cases} \sigma_{\alpha_3} = A_{31}\Sigma_1 + A_{32}\Sigma_2 - y_{\alpha_3} \\ \sigma_{\alpha_4} = A_{41}\Sigma_1 + A_{42}\Sigma_2 - y_{\alpha_4} \end{cases} \quad \text{pour le 2}^{\text{ième}} \text{ patin}$$

qui se réécrit formellement :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{\alpha} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\Sigma}} - \underline{y}_{\alpha}$$

$$\text{avec } \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \\ A_{41} & A_{42} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\sigma}}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \sigma_{\alpha_1} \\ \sigma_{\alpha_2} \\ \sigma_{\alpha_3} \\ \sigma_{\alpha_4} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{y}}_{\alpha} = \begin{bmatrix} y_{\alpha_1} \\ y_{\alpha_2} \\ y_{\alpha_3} \\ y_{\alpha_4} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{A}}$  est une matrice  $4 \times 2$  qui contient les facteurs de localisation élastique.

## Expression des paramètres transformés ( $y_{\alpha_i}$ )

La relation linéaire entre les paramètres  $y_{\alpha_i}$  que nous venons de définir et les paramètres caractérisant localement les déformations plastiques de chaque patin  $\alpha_i$  s'écrit:

$$\underline{\underline{y}}_{\alpha} = \underline{\underline{B}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\alpha}}$$

où nous prenons par hypothèse la forme suivante pour la matrice  $\underline{\underline{B}}$  :

$$\underline{\underline{y}}_{\alpha} = \begin{pmatrix} y_{\alpha_1} \\ y_{\alpha_2} \\ y_{\alpha_3} \\ y_{\alpha_4} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & hB_{11} & kB_{12} \\ B_{12} & B_{22} & hB_{12} & kB_{12} \\ hB_{11} & hB_{12} & h^2B_{11} & kB_{12} \\ kB_{12} & kB_{22} & hkB_{12} & k^2B_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\alpha}}$$

avec les conditions  $B_{11}B_{22} - B_{12}^2 > 0$  et  $hk \neq 0$

La matrice  $\underline{\underline{B}}$  est alors de rang 2. Le sous-espace de compatibilité  $\mathcal{L}$  est défini par les relations :

$$\mathcal{L}: \begin{cases} y_{\alpha_3} = hy_{\alpha_1} \\ y_{\alpha_4} = ky_{\alpha_2} \end{cases}$$

## Domaine d'élasticité

Nous supposons que les domaines d'élasticité s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha_1}^2 + \sigma_{\alpha_2}^2 \leq s_1^2 & \text{pour le 1}^{\text{er}} \text{ patin} \\ \left( \frac{\sigma_{\alpha_3}}{h} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{\alpha_4}}{k} \right)^2 \leq s_2^2 & \text{pour le 2}^{\text{e}} \text{ patin} \end{cases}$$

Compte-tenu des relations de compatibilité entre les  $y_{\alpha_i}$ , les deux critères peuvent s'exprimer en fonction de  $(y_{\alpha_1}; y_{\alpha_2})$  et le domaine d'élasticité global du système est alors caractérisé par l'intersection des deux cercles  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  dans le plan  $(y_{\alpha_1}; y_{\alpha_2})$ :

$$\mathcal{D} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$$

où  $\mathcal{C}_1$  est le cercle de centre  $(A_{1j}\Sigma_j; A_{2j}\Sigma_j)$  et de rayon  $s_1$

et  $\mathcal{C}_2$  est le cercle de centre  $\left(\frac{A_{3j}\Sigma_j}{h}; \frac{A_{4j}\Sigma_j}{k}\right)$  et de rayon  $s_2$

## Déformation plastique globale du système

Les composantes de la déformation plastique suivant les deux directions principales du tenseur contrainte sont données par les relations :

$$\begin{cases} \varepsilon_1^p = \alpha_1 A_{11} + \alpha_2 A_{21} + \alpha_3 A_{31} + \alpha_4 A_{41} \\ \varepsilon_2^p = \alpha_1 A_{12} + \alpha_2 A_{22} + \alpha_3 A_{32} + \alpha_4 A_{42} \end{cases}$$

## Equations d'évolution

Le comportement local des patins est parfaitement plastique.

En appliquant la règle de normalité aux vitesses de déformation plastique locales, nous écrivons dans le plan  $(y_{\alpha_1}; y_{\alpha_2})$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{pmatrix} \in -\partial\Psi_{\mathcal{C}_1(\Sigma)}(y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2})$$

$$\begin{pmatrix} h\dot{\alpha}_3 \\ k\dot{\alpha}_4 \end{pmatrix} \in -\partial\Psi_{\mathcal{C}_2(\Sigma)}(y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2})$$

On en déduit :

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{pmatrix} \in -\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} & B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \partial\Psi_{\mathcal{C}_1(\Sigma)}(y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}) \\ \partial\Psi_{\mathcal{C}_2(\Sigma)}(y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}) \end{pmatrix}$$

Les paramètres internes transformés  $(y_{\alpha_1}; y_{\alpha_2})$  sont liés aux paramètres internes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  par une relation linéaire de la forme :

$$\underline{y}_\alpha = \begin{pmatrix} y_{\alpha_1} \\ y_{\alpha_2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{B}} \underline{\alpha}$$

## Evolution du domaine d'élasticité

Lorsqu'on se place dans l'espace des contraintes principales  $(\Sigma_1; \Sigma_2)$  le domaine d'élasticité est défini par l'intersection de deux ellipses. Lorsque cette intersection devient vide, la charge limite est atteinte. Ce modèle est donc semblable à un modèle à 2 surfaces, mais ici, si la surface des charges limites est bien fixe, le domaine d'élasticité se déplace à l'intérieur du domaine selon des règles simples.

L'équation de la surface de ruine s'écrit :

$$\left[ \left( A_{11} - \frac{A_{31}}{h} \right) \Sigma_1 + \left( A_{12} - \frac{A_{32}}{h} \right) \Sigma_2 \right]^2 + \left[ \left( A_{21} - \frac{A_{41}}{k} \right) \Sigma_1 + \left( A_{22} - \frac{A_{42}}{k} \right) \Sigma_2 \right]^2 \leq (s_1 + s_2)^2$$

## Implémentation numérique

C'est une généralisation du cas d'un patin bidimensionnel. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution existe est que l'intersection des deux cercles soit non vide.

Dans l'espace  $(y_{\alpha_1}; y_{\alpha_2})$  dire qu'un état de charge est plastiquement admissible se ramène au cas où le point  $M(y_{\alpha_1}; y_{\alpha_2})$  appartient à l'intersection des 2 patins.

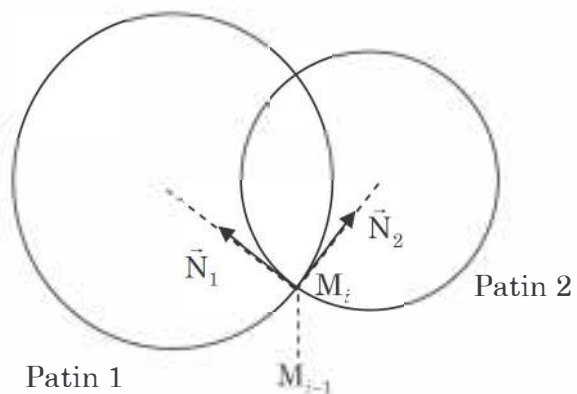
On peut considérer que le point a été raflé par le patin 1, on calculera alors la nouvelle position de  $M$  par les mêmes équations que celles qui ont été explicitées pour un patin bidimensionnel. On vérifiera ensuite si  $M$  est P.A., c'est à dire appartient à l'intersection. Si ce n'est pas le cas :

- On peut essayer le second patin et on refait le même calcul. Si ce n'est pas le cas non plus, alors :
- $M$  a été raflé par les 2 patins simultanément. L'algorithme est alors modifié et devient comme suit :

$$\begin{pmatrix} \Delta\alpha_1 \\ \Delta\alpha_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}_{\vec{N}_1 = \text{normale à } \mathcal{C}_1}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta\alpha_3 \\ \Delta\alpha_4 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} n_3 \\ n_4 \end{pmatrix}_{\vec{N}_2 = \text{normale à } \mathcal{C}_2}$$

avec  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 > 0$



D'autre part :

$$\begin{pmatrix} \Delta y_{\alpha_1} \\ \Delta y_{\alpha_2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} & B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 n_1 \\ n_2 \\ \lambda_2 n_3 \\ n_4 \end{pmatrix}$$

$M_{i-1}$  et  $M_i$  étant connu  $\Rightarrow \Delta y_{\alpha_1}$  et  $\Delta y_{\alpha_2}$ , d'où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ainsi que  $(\Delta \alpha_i)_{i=1,\dots,4}$ .

Connaissant alors  $(\Delta \alpha_i)_{i=1,\dots,4}$  on déduit  $(\alpha_i = \alpha_i + \Delta \alpha_i)_{i=1,\dots,4}$  et finalement les déformations plastiques :  $\varepsilon_1^p$  et  $\varepsilon_2^p$

Cet artifice de calcul nous a servi à contourner la complexité de la singularité de la matrice  $B$ .

## Exemples

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0.75 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{B}_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad H = 1 ; K = 1 ; S_1 = 1 ; S_2 = 1.5 ; Y_{01} = 0 ; Y_{02} = 0$$

Trois cas de chargements sont considérés (même variation d'amplitude et valeur moyenne différente) :

- Chargement 1

$$\underline{\Sigma}_{min} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \underline{\Sigma}_{max} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Chargement 2

$$\underline{\Sigma}_{min} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \underline{\Sigma}_{max} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Chargement 3

$$\underline{\Sigma}_{min} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \underline{\Sigma}_{max} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$



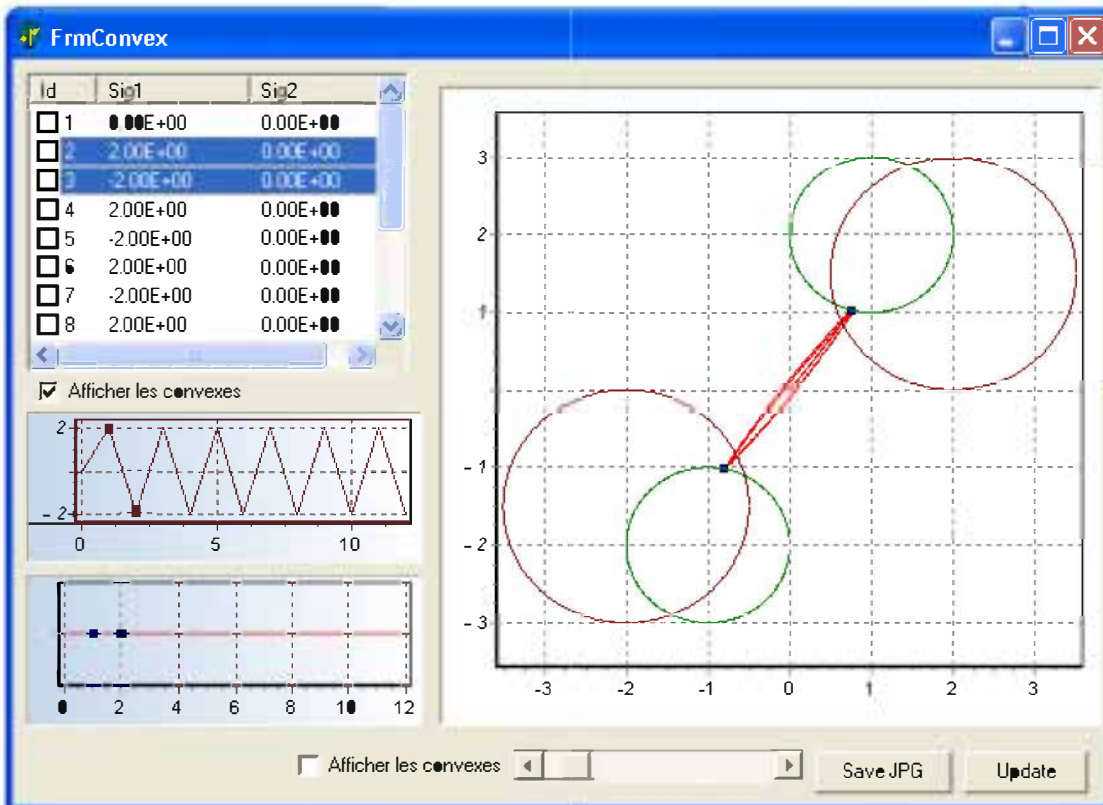


fig. A.1 - Réponse dans l'espace des paramètres transformés Y pour le chargement 1

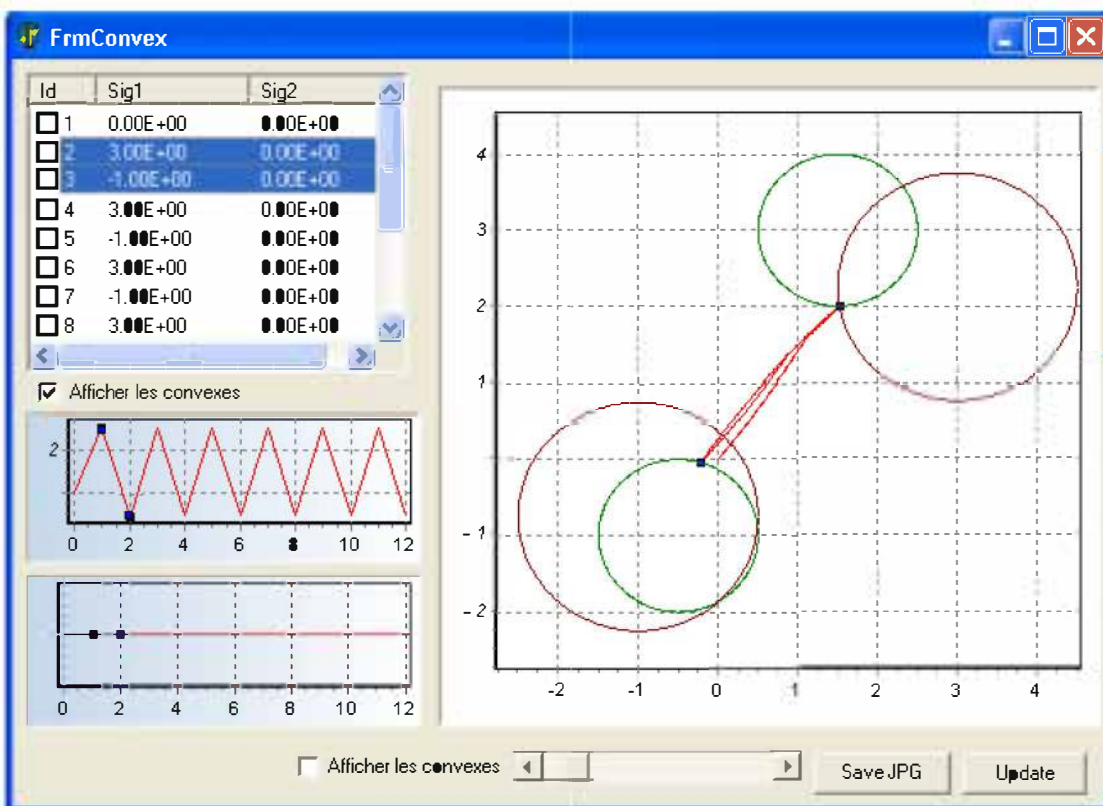


fig. A.2 - Réponse dans l'espace des paramètres transformés Y pour le chargement 2

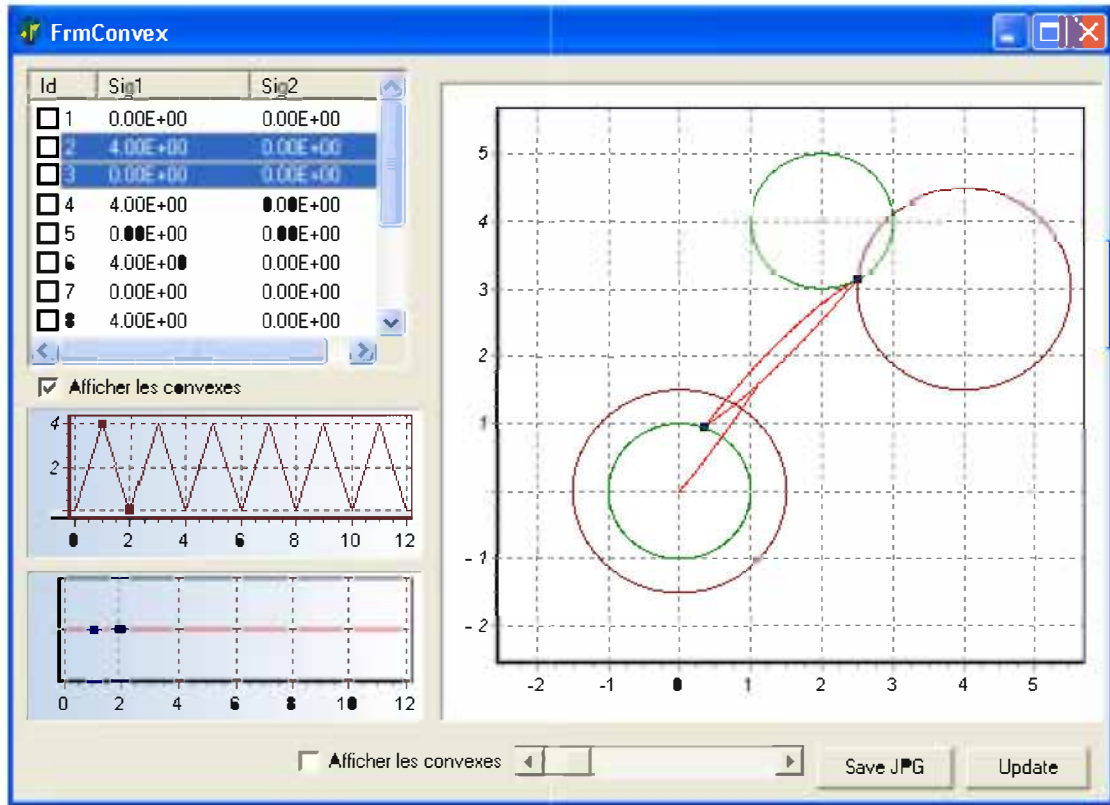


fig. A.3 - Réponse dans l'espace des paramètres transformés Y pour le chargement 3



# Annexe B

## Identification des coefficients a et b

DETAIL N° 20	S MINIMISER	COEFFICIENTS	
		a	b
H1	1.65	0.857	0.031
H2	0.948	-3.469	0.105
H3	1.1515	2.953	-0.134
H4	1.6738	5.556	0.056
H5	1.1120	-0.627	-0.444
H6	1.2762	5.814	0.706
H7	1.8942	2.979	0.033
H8	1.1411	2.708	-0.4
H9	1.1752	5.186	0.099
H10	0.5104	2.577	-0.193
H11	2.2861	5.888	0.037
H12	0.5582	4.183	0.277
H13	0.1709	8.419	-0.281
M1	12.4785	16.355	0.068
M2	2.8978	6.409	0.053
M3	1.4678	8.007	0.057
M4	0.6586	3.685	0.038
M5	0.0928	0.459	0.055
Q1	1.0225	14.542	0.149
Q2	1.2241	-2.320	-0.482
Q3	0.9276	-1.328	0.127
Q4	0.9426	-3.558	-0.074
Q5	0.9135	-1.448	0.111
Q6	0.2897	-4.088	-0.131
Q7	0.7203	-3.768	0.102

---

Q8	0.2044	-1.116	0.080
C1	1.1623	-0.694	-0.163
C2	1.3365	0.855	-0.635
C3	1.0501	0.859	-0.569
C4	0.91	1.975	-0.468
C5	0.9785	0.840	0.087
C6	1.0573	-0.380	0.159
T1	indéterminé	-0.104	-0.050
T2	1.1934	-10	1
T3	0.7642	1.142	-0.134

# Annexe C

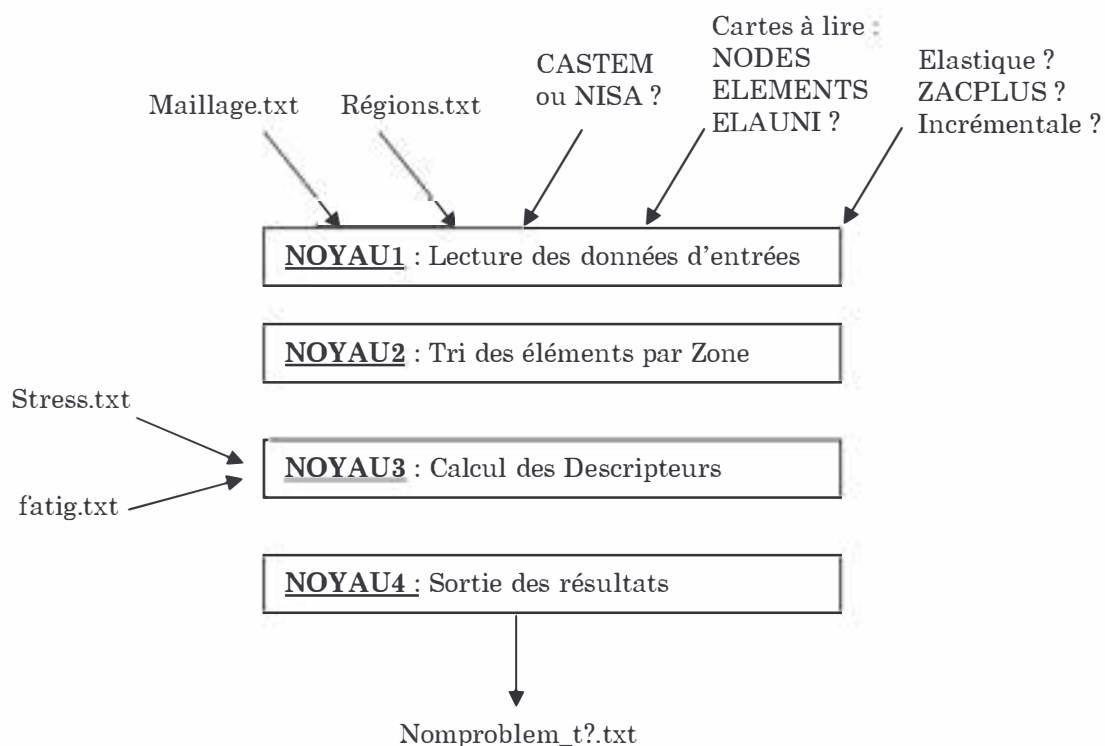
## Construction de la base de données

Un programme spécial (CalDesc) a été développé pour générer tous les exemples de la base de données. Nous avons eu besoin de créer deux versions particulières du programme :

- la première ("specialzac"), quand le champ de contraintes est purement élastique ou calculé par la méthode simplifiée (ZACPLUS)
- la deuxième ("specialpap"), quand le champ de contraintes est calculé avec la méthode incrémentale.

Le programme lit des fichiers éléments finis au format NISA ou CASTEM2000. Cependant dans CASTEM2000, il n'existe pas de format de sortie prédéfini qui soit adapté à notre application, nous avons dû créer des procédures de sortie spéciales.

Le programme est structuré en noyaux, modules et sous-modules. La communication d'un bloc à un autre se fait par l'intermédiaire de tableaux. La seule exigence est le respect "à la lettre" du formatage des tableaux. L'architecture générale du programme est la suivante :



**NOYAU1 : LECTURE DES DONNEES D'ENTREE**

- Module ReadMesh (maillage et champs de contraintes)
- Module ReadReg (définition des régions)
- Module ReadEnd (résultat optionnel ENDURE/NISA)

**NOYAU2 : TRI DES ELEMENTS PAR ZONE**

- Module SortReg (Tri par région  $\Rightarrow$  table Treg)
- Module SortMat (Tri par matériau à partir de Treg  $\Rightarrow$  table Tzone)
- Procédure GetTnoZon (Relève les numéros des nœuds dans chaque zone)
- Module CreTsurf (Calcul des surfaces de chaque élément des zones  $\Rightarrow$  Tsurf)

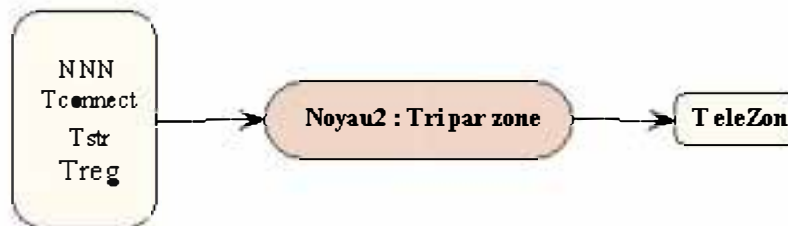
**NOYAU3 : DESCRIPTEURS**

- Module CreTdesc (calcul des champs scalaires I1, J2,  $\|\text{grad } J2\| \Rightarrow$  Tdesc)
- Module CreTmimamo (min, max, moy de Tdesc dans chaque zone  $\Rightarrow$  Tmin, Tmax, Tmoy)
- Module CreTdescSurf (descripteurs surfaciques  $\Rightarrow$  TdescSurf)
- Module CreTdescEnd (indicateur Endure  $\Rightarrow$  TdescFat)

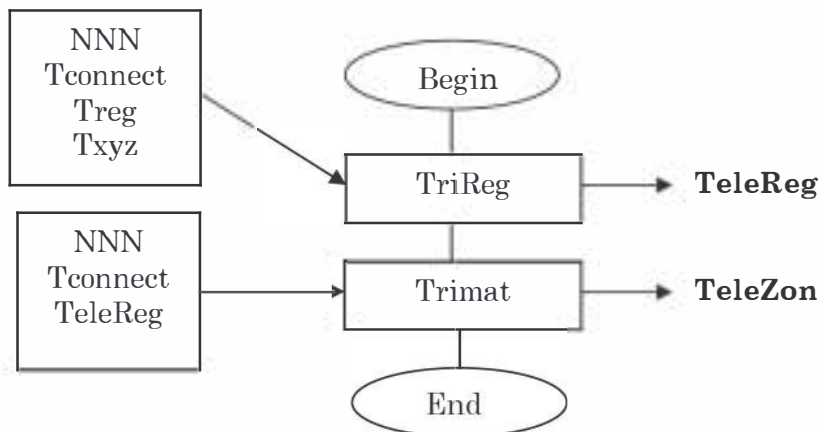
**NOYAU4 : SORTIES DES RESULTATS**

**NOYAU2 : Tri par zone**

Architecture générale du NOYAU2



Algorithme général du NOYAU3



**Algorithme de TriReg**

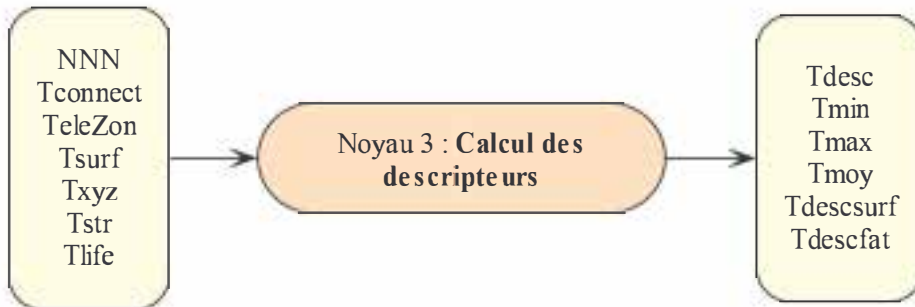
- 1- Calcul de la matrice de voisinage (**creTvoisin**)  
Pour chaque région, on recherche à partir des nœuds des parois maillées, si elles sont incluses dans une région spécifique.  
Boucle1 sur la paroi des éléments
- 2- Récupération des nœuds de l'élément courant (**getNode**)
- 3- Boucle2 sur les régions
- 4- Faire un test si tous les nœuds d'un élément sont inclus dans une région courante en Comparant ces nœuds aux nœuds de la matrice voisine relative de la région courante.
- 5- Enregistrer si le test est bon.

**Algorithme TriMat**

- 1- Boucle1 sur la région
- 2- Boucle2 sur les éléments pour une région spécifique
- 3- Identification du matériau id de l'élément courant
- 4- Stockage dans la table temporaire
- 5- Re Stockage dans le bon format (table TeleZon)

**NOYAU3 : calcul des descripteurs**

Il est associé au programme "creDesc.f90" qui cherche à partir du fichier d'entrée le champ des contraintes, la table des éléments triés par zone et quelques autres données intermédiaires. Les fichiers de sortie sont dans les tables qui peuvent être utilisées par NOYAU4.

**Achitecture Générale du NOYAU3****Données d'entrée:**

- Table NNN
- Tconnect : table de connectivité
- TeleZon : table avec les éléments triés par zone (région et matériau)
- TnoZon : table avec les numéros des nœuds des éléments de TeleZon
- TistrZon : table avec les adresses dans la table Tstr. Par exemple, TistrZon(10) donne l'adresse -1 de l'élément 10 pour la première composante de la contrainte. C'est très pratique pour avoir rapidement la contrainte pour un élément donné (utilisé dans la routine GetStr.f90)
- Tsurf : table avec les surfaces des éléments.
- Txyz : table avec les coordonnées des nœuds.



- TelStr : table avec le nombre d'éléments.
- Tstr : table avec les valeurs des contraintes.
- TnoLife: table avec les numéros des nœuds où la durée de vie à la fatigue est donnée.
- Tlife : table avec la durée de vie à la fatigue.

**Données de sortie :**

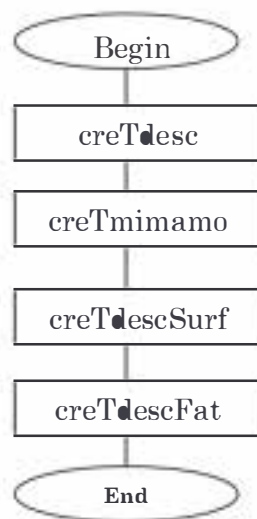
- Tdesc : Table avec les valeurs de chaque élément utilisé pour calculer les descripteurs par le champ des contraintes i.e. I1, J2 et  $\|\text{grad J2}\|$ . Les composantes de la contrainte moyenne de l'élément sont stockées aussi.
- Tmin : première table avec  $I1_{\min_{\Omega}}$ ,  $J2_{\min_{\Omega}}$ ,  $\|\text{grad J2}\|_{\min_{\Omega}}$  pour chaque zone.
- Tmax : deuxième table avec  $I1_{\max_{\Omega}}$ ,  $J2_{\max_{\Omega}}$ ,  $\|\text{grad J2}\|_{\max_{\Omega}}$  pour chaque zone
- Tmoy : troisième table avec  $I1_{\text{mean}_{\Omega}}$ ,  $J2_{\text{mean}_{\Omega}}$ ,  $\|\text{grad J2}\|_{\text{mean}_{\Omega}}$  pour chaque zone.
- Tdescsurf: quatrième table avec les descripteurs associés à I1, J2,  $\|\text{grad J2}\|$  pour chaque zone.

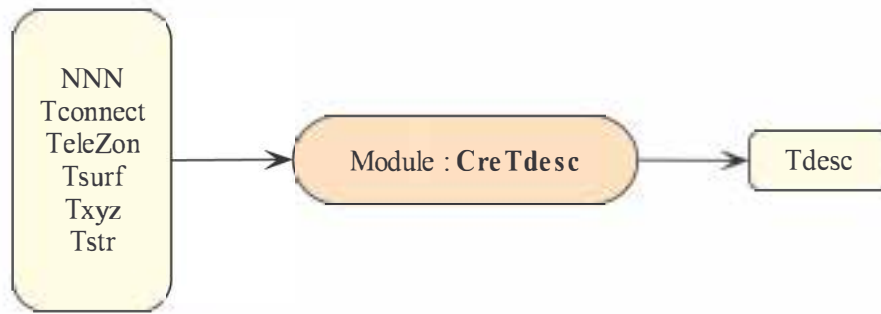
Les descripteurs surfaciques sont dans 5 intervalles :

- I1Lay1, J2Lay1,  $\|\text{grad J2}\|_{\text{Lay1}}$
- I1Lay2, J2Lay2,  $\|\text{grad J2}\|_{\text{Lay2}}$
- I1Lay3, J2Lay3,  $\|\text{grad J2}\|_{\text{Lay3}}$
- I1Lay4, J2Lay4,  $\|\text{grad J2}\|_{\text{Lay4}}$
- I1Lay5, J2Lay5,  $\|\text{grad J2}\|_{\text{Lay5}}$

- TdescFat: cinquième table avec les descripteurs de fatigue pour chaque zone.

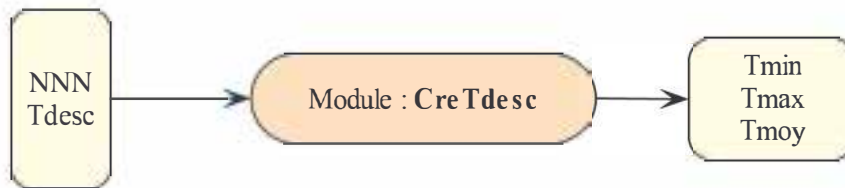
**Algorithme général du NOYAU3**



**Algorithme du module CreTdesc**

Boucle sur tous éléments de chaque région :

- 1- Identification de l'élément réel et recherche de son type (**getNsrl**)
- 2- Récupération des nœuds de l'élément actuel (ou réel) (**getNodeI**)
- 3- Récupération des contraintes de l'élément sur l'emplacement des nœuds (**getStr**)
- 4- Calcul de I1, J2 aux nœuds dans l'élément réel (**getI1, getJ2**)
- 5- Calcul de  $\|\text{grad } J2\|$ 
  - 5-1- Récupération des coordonnées des nœuds de l'élément réel (**getxyzEl**)
  - 5-2- Calcul du centre de gravité dans le repère qui a été choisi comme pour le calcul du gradient du point
  - 5-3- Calcul du gradient de J2 au centre de gravité défini ci-dessus (**getDf**)
  - 5-4- Calcul de la norme du gradient de J2 (**Norme**)
- 6- Enregistrer les quantités ci-dessous dans la table Tdesc:
  - 6-1- la moyenne de Sxx, Syy, Sxy de l'élément réel... (**moyenne**)
  - 6-2- la moyenne de I1 à l'intérieur de l'élément réel
  - 6-3- la moyenne de J2 de l'élément réel
  - 6-4-  $\|\text{grad } J2\|$

**Algorithme du module CreTmimamo**

- 1- Boucle1 sur les zones
- 2- Boucle2 sur les descripteurs (I1, J2,  $\|\text{grad } J2\|$ )
  - 2-1- Récupération des champs associés au descripteur réel dans un tableau temporaire
  - 2-2- Calcul du Min, Max, Moy
 

$I1_{\max_{\Omega}} = \sup_{\Omega} I1$	;	$I1_{\min_{\Omega}} = \inf_{\Omega} I1$
$J2_{\max_{\Omega}} = \sup_{\Omega} J2$	;	$J2_{\min_{\Omega}} = \inf_{\Omega} J2$
$\ \text{grad } J2\ _{\max_{\Omega}} = \sup_{\Omega} \ \text{grad } J2\ $	;	$\ \text{grad } J2\ _{\min_{\Omega}} = \inf_{\Omega} \ \text{grad } J2\ $
$I1_{\text{moy}_{\Omega}} = [\sum_{\Omega} I1 / n]^*$		

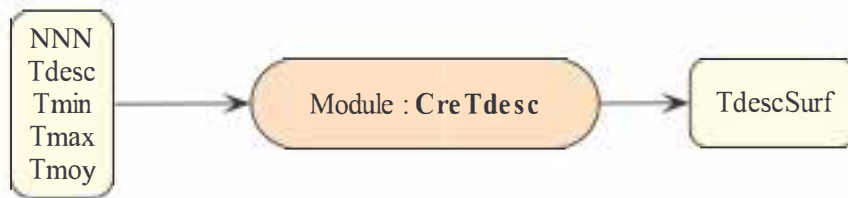
$$J2 \text{ moy}_\Omega = [\Sigma_\Omega J2 / n]^*$$

$$\|\text{grad } J2\| \text{ moy}_\Omega = [\Sigma_\Omega \|\text{grad } J2\| / n]^*$$

3- Enregistrer dans Tmin, Tmax, Tmoy

(\* n = nombre d'éléments dans la zone  $\Omega$ )

### Algorithme du module CreTdescSurf



- 1- Boucle1 sur les zones.
- 2- Boucle2 sur les descripteurs  $M = (I1, J2, \|\text{grad } J2\|)$
- 3- Définition des intervalles pour la description surfacique.

$$\Delta M = \frac{M_{max} - M_{min}}{N_{binter}}$$

$$I(n) = \left[ \frac{M_{min} + n\Delta M}{N_{binter}} ; \frac{M_{min} + (n+1)\Delta M}{N_{binter}} \right] \text{ avec } n = 0, 1, 2, \dots, N_{binter} - 1$$

$$I(N_{binter}) = \left[ \frac{M_{min} + (N_{binter} - 1)\Delta M}{N_{binter}} ; M_{max} \right]$$

où  $N_{binter}$  est le nombre d'intervalles

- 4- Boucle3 sur les intervalles  $N_{binter}$
- 5- Prélèvement des descripteurs surfaciques sur la zone réelle, le descripteur  $M = (I1, J2$  ou  $\|\text{grad } J2\|)$  et l'intervalle réel.

Recherche des éléments pour lesquels la valeur est dans un intervalle donné.

Calcul de la surface occupée par ces éléments sur une zone.

Calcul du rapport

$$\text{Rapport} = \frac{\text{Surface d'un élément où sa valeur est comprise dans l'intervalle}}{\text{Surface totale de la zone}}$$

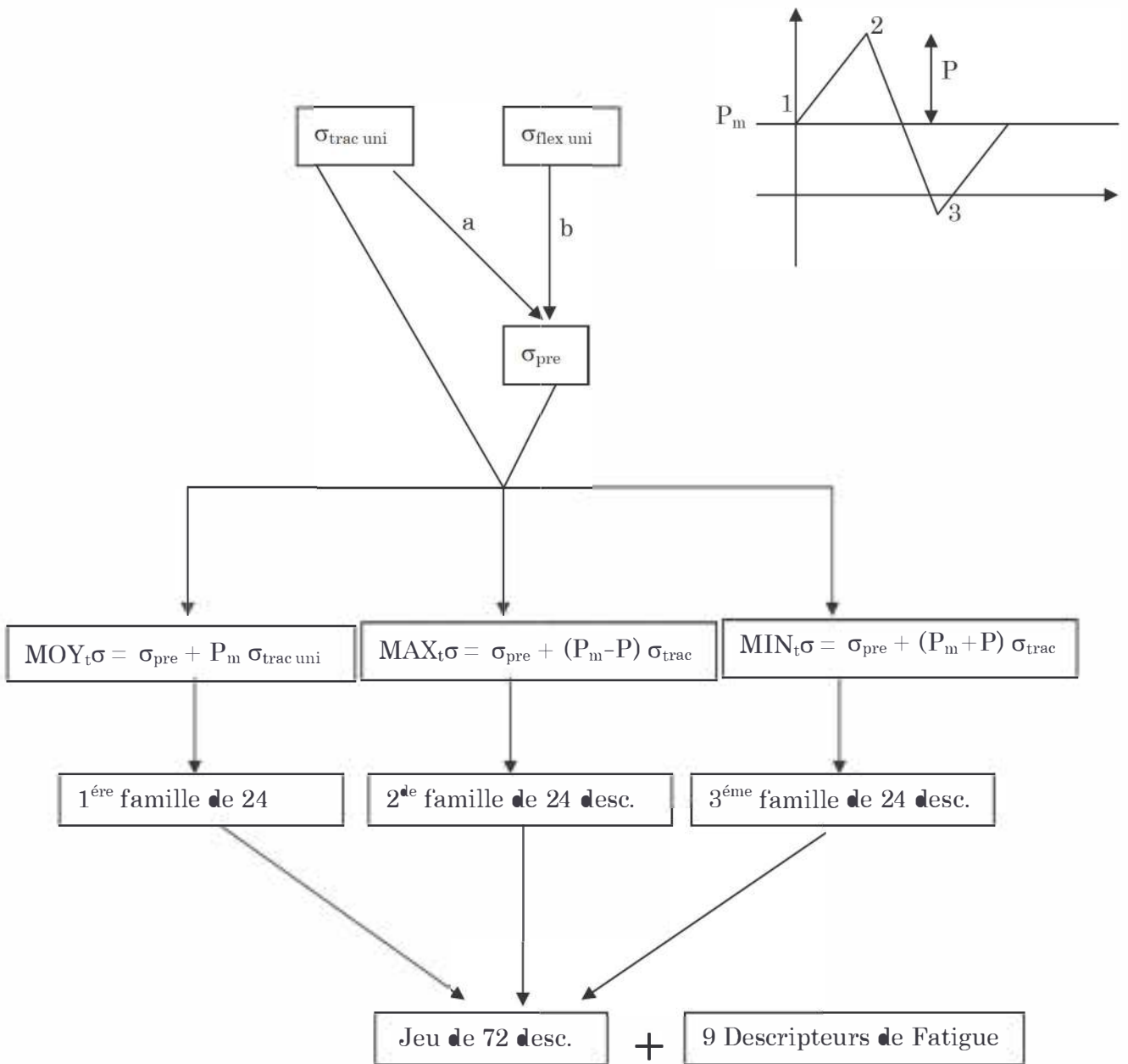
- 6- Enregistrement des descripteurs de  $N_{binter}$  dans TdescSurf :

FinBoucle3

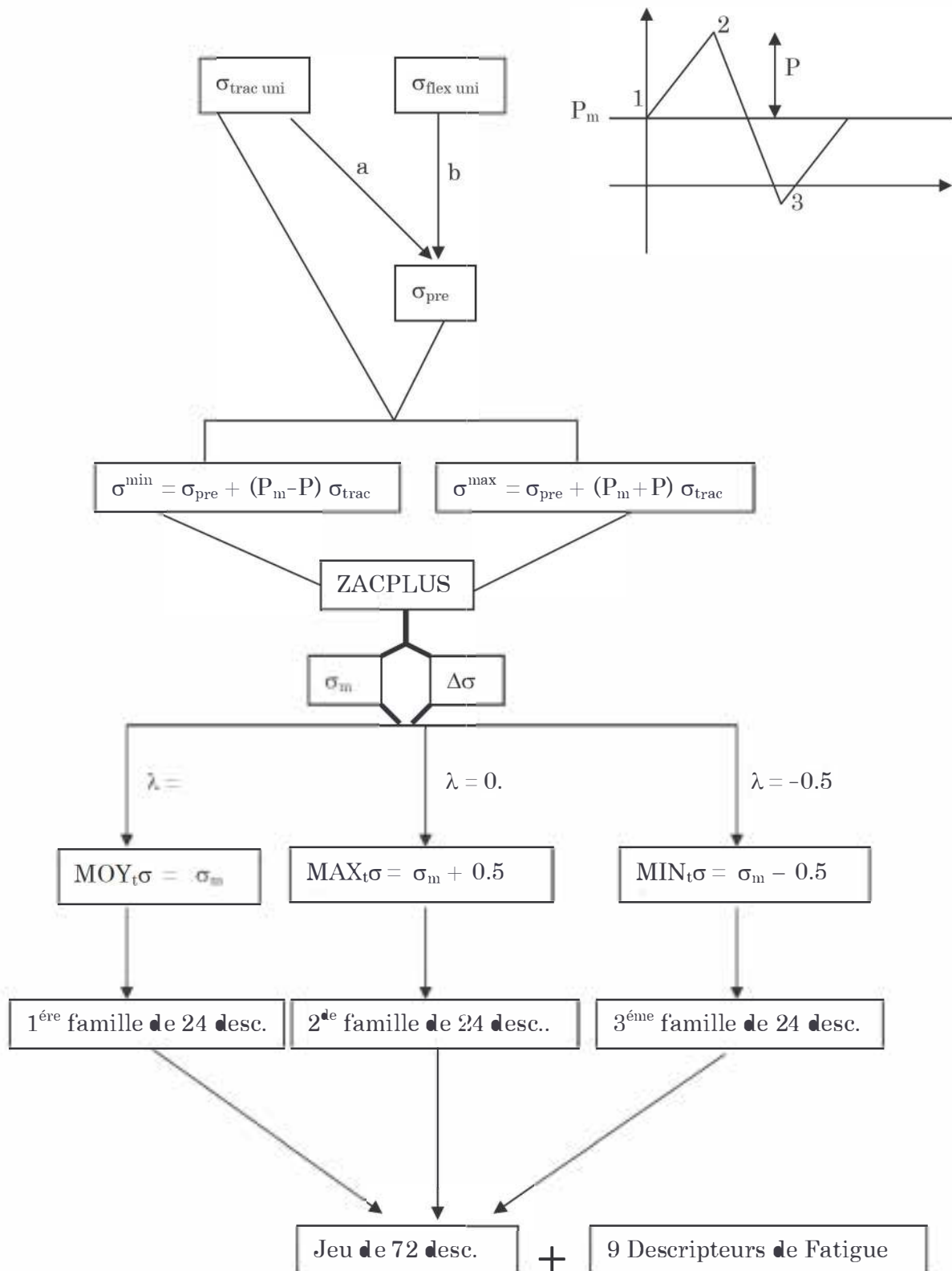
FinBoucle2

FinBoucle1

Chargement à amplitude constante + Analyse élastique



Chargement à amplitude constante + Analyse élastoplastique simplifiée



# Annexe D

## Présentation de FatSimPro



fig. D.1 : Générateur automatique de chargements aléatoires

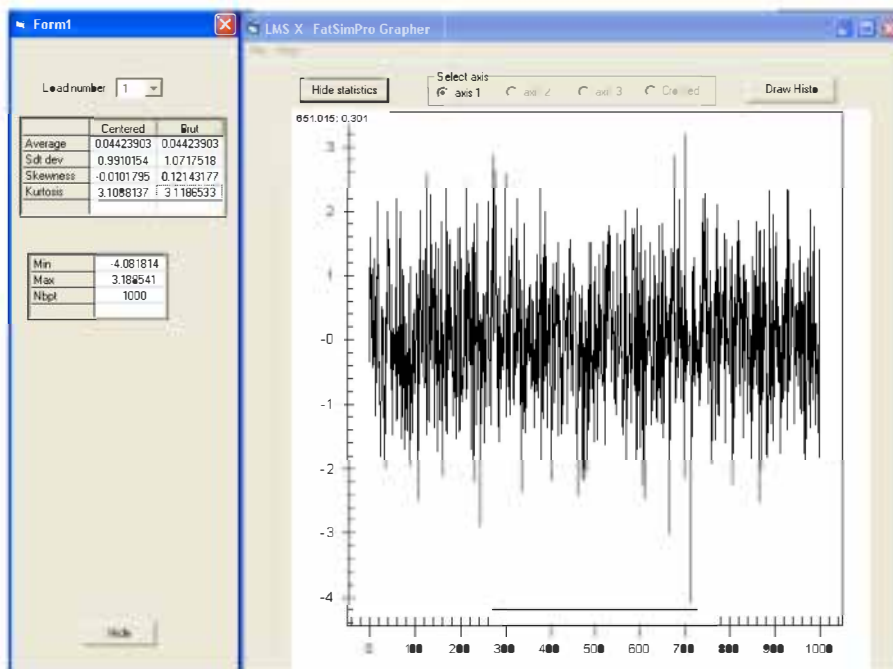


fig. D.2 : Visualiseur de chargements et calcul des statistiques

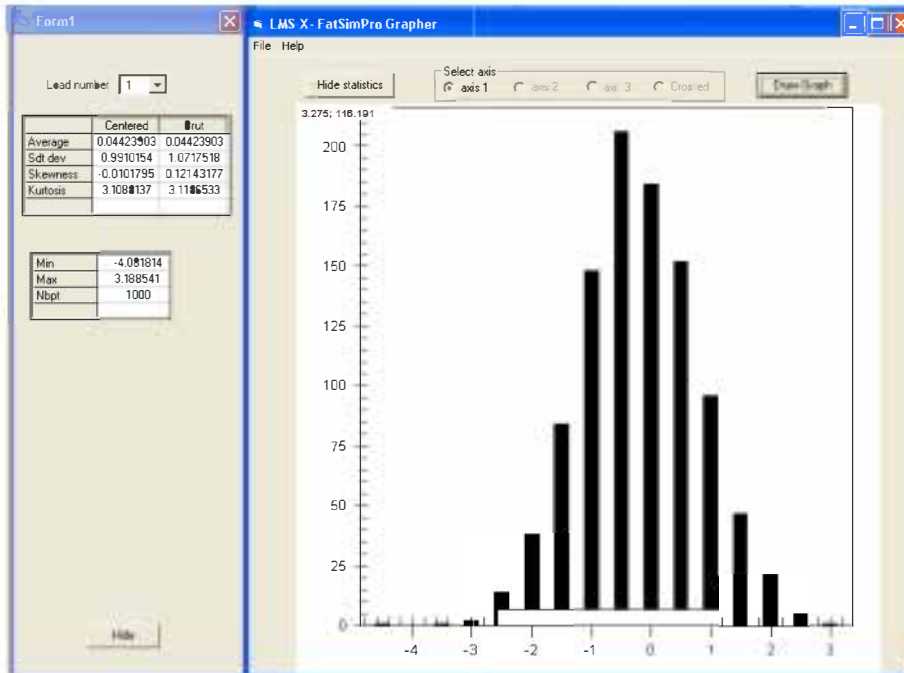


fig. D.3 : Visualiseur sous forme histogrammes

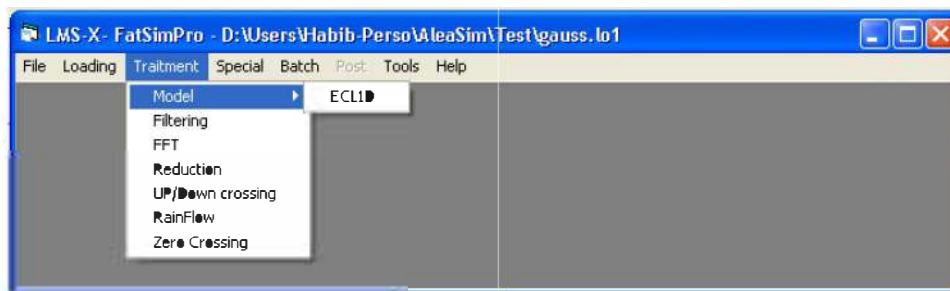


fig. D.4 : Multiples traitements sur le chargement

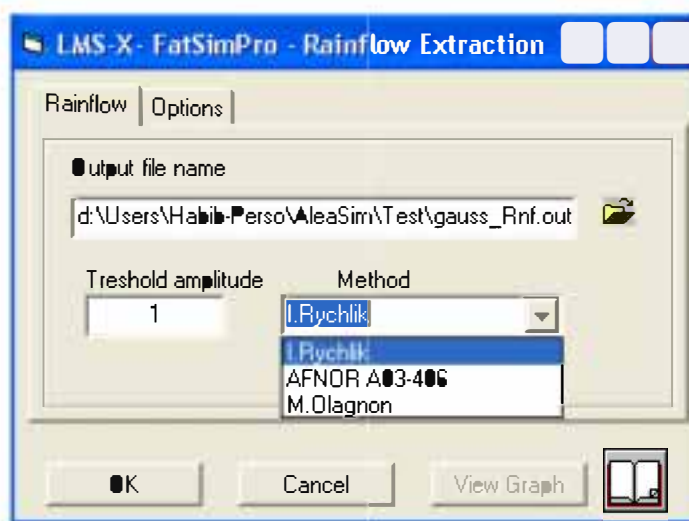


fig. D.5 : Traitement Rainflow

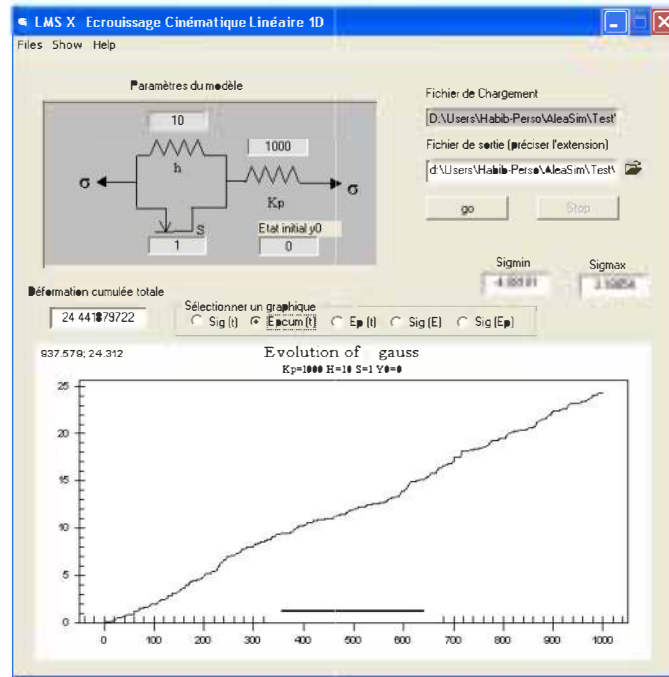


fig. D.6 : Calcul de l'endommagement interne (déformation plastique cumulée locale)

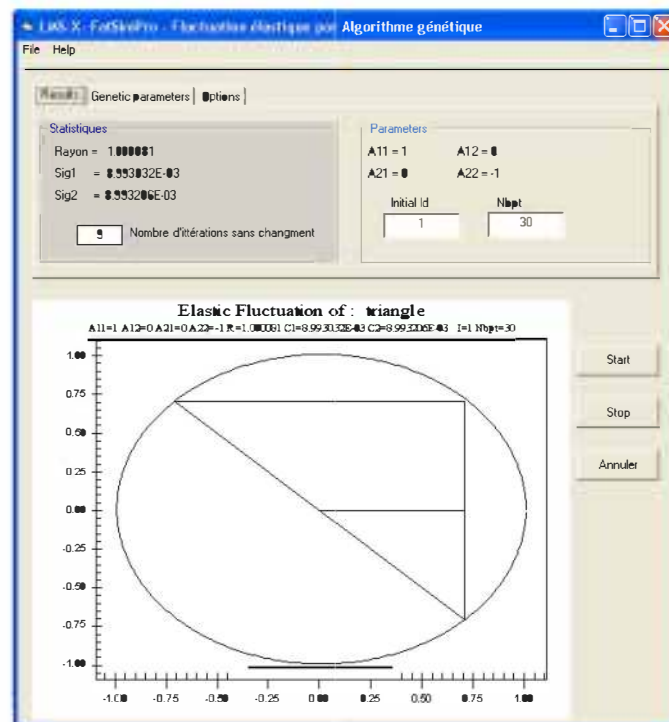


fig. D.7 : Calcul de la fluctuation d'un chargement à 2 paramètres internes



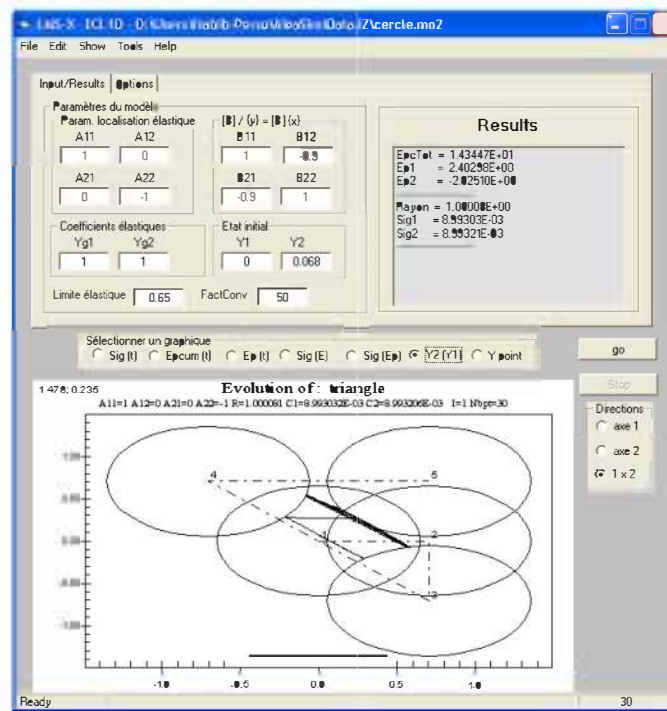


fig. D.8 : Calcul de l'endommagement interne pour le modèle bi-dim

# Annexe E

## Estimation de la durée de vie en fatigue avec le modèle IP de Park/Lawrence

Dans leur rapport, S.K. PARK, F.V. LAWRENCE (1988) ont présenté leur modèle de prédiction de durée de vie applicable aux structures soudées et aux éprouvettes entaillées. Ce modèle considère que la durée de vie totale de la fatigue ( $N_T$ ) se décompose d'une part en une période associée à l'initiation et au début de la propagation de la fissure ( $N_I$ ) et d'autre part en une période associée à la propagation d'une fissure dominante ( $N_P$ ) :

$$N_T = N_I + N_P \quad [1]$$

En général, dans le cas de la fatigue à long terme, la partie relative à l'initiation de la fissure  $N_I$  prédomine. La durée de vie ou la résistance à la fatigue d'un composant entaillé peut donc être estimée en considérant seulement la phase d'initiation (avec éventuellement un début de propagation) de la fissure à travers l'équation de Basquin :

$$\sigma_a = (\sigma_f - \sigma_m)(2N_I)^b \quad [2]$$

où  $\sigma_a$  est l'amplitude de la contrainte,  $\sigma_f$  est le coefficient de la résistance à la fatigue,  $\sigma_m$  est la contrainte moyenne qui comporte la contrainte résiduelle et la contrainte locale moyenne après le premier cycle du chargement,  $2N_I$  est égale à 2 périodes de l'initiation et du début de la propagation de la fissure (1 cycle = 2 périodes) et  $b$  est le coefficient de la résistance à la fatigue.

Pour estimer convenablement  $N_I$ , il faut se reporter aux procédures codifiées où il s'agit de définir au mieux l'historique des contraintes (avec ou sans plasticité en pointe d'entailles) dans les zones/composants les plus critiques, de déterminer les effets de la géométrie (par l'intermédiaire de  $K_t$  ou  $K_f$ ), d'estimer les contraintes résiduelles, de rechercher les propriétés élastoplastique et en fatigue des matériaux, de corriger le coefficient de réduction à la fatigue  $K_f$  dans le cas d'entaille non-idéalisée ( $K_{f \max}^{eff}$ )...

Ensuite, la partie relative à la propagation de la fissure  $N_p$  est calculée avec les méthodes classiques puis rajoutée à  $N_I$  pour former l'estimation globale de la durée de vie.

**Prédiction du comportement à la fatigue sous chargement à amplitude constante sans plasticité autour des pieds d'entailles ou avec relaxation de la contrainte moyenne**

Dans cette partie, on s'intéresse à la prédiction du comportement à la fatigue sous chargement à amplitude constante. Avec des conditions simples, la résistance à la fatigue ( $S_a$ ) des éléments entaillés ayant des durées de vie illimitées données peuvent être évaluées en utilisant cette expression :

$$\Delta S_a K_f = (\sigma'_f - K_f S_m - \sigma_r) (2N_I)^b \quad [3]$$

où  $S_a$  est l'amplitude de la contrainte éloignée,  $\sigma_r$  la contrainte résiduelle du pied d'entaille,  $S_m$  la contrainte sollicitée ou la contrainte résiduelle globale dans la structure à côté de l'entaille et  $K_f$  est la concentration de contraintes.

Une expression simple de la résistance à la fatigue des membres entaillés à durée de vie illimitée peut être obtenue par l'expression ci-dessous :

$$S = \left( \frac{\sigma'_f - \sigma_r}{K_f} \right) \left( \frac{(2N_I)^b}{1 + \frac{1+R}{1-R} (2N_I)^b} \right) \quad [4]$$

L'expression ci-dessus est utilisée seulement dans un cas simple (à durée de vie illimitée) : lorsque le  $K_f$  de l'entaille est connu, lorsque les contraintes résiduelles ne se relaxent pas, lorsque les chargements sont purement axial ou purement en flexion, et lorsque le chargement historique (réel) est à amplitude constante.

L'équation [4] est réécrite ci-dessous pour incorporer le concept de  $K_{f \max}^{eff}$  :

$$S_a^T = \frac{(\sigma'_f - \sigma_r)(2N_I)^b}{K_{f \max}^{eff} \left[ 1 + \frac{1+R}{1-R} (2N_I)^b \right]} \quad [5]$$

où

$$K_{f \max}^{eff} = (1-x)K_{f \max}^A + xK_{f \max}^B \quad [6]$$

$$x = S_a^B / S_a^T = \frac{S_a^B}{S_a^A + S_a^B}$$

**Prédiction du comportement à la fatigue sous chargement à amplitude constante avec plasticité autour des pieds d'entailles ou sans relaxation de la contrainte moyenne**

Lorsque les conditions sur les pieds d'entailles ne sont pas quasi-élastiques et lorsque la déformation plastique importante apparaît durant la mise au point du cycle, l'expression simple développée précédemment ne peut pas être utilisée.

Pendant la mise au point du cycle, lorsqu'il y a de la plasticité autour des pieds d'entailles mais pas de relaxation de la contrainte moyenne durant le prochain cycle, l'amplitude de contrainte des pieds d'entailles ( $\sigma_a$ ) et la contrainte moyenne ( $\sigma_m$ ) déterminées, peuvent être déduites de l'équation [2] pour estimer (la durée de vie) de la résistance à la fatigue ou la durée de vie de l'initiation de la fissure ( $N_f$ ).

**Prédiction de la durée de vie de l'initiation de la fissure sous chargement à amplitude constante avec plasticité autour des pieds d'entailles ou avec relaxation de la contrainte moyenne**

Les cas dans lesquelles les contraintes moyennes des pieds d'entailles existent, après la mise au point du cycle, ne se relaxent que pendant le cycle de fatigue qui requière une analyse spéciale.

Si la contrainte moyenne établit durant la mise au point du cycle se relaxe pendant le cycle, la valeur actuelle de la contrainte moyenne ( $\sigma_{m,2N}$ ) peut être prédite en utilisant la fonction de puissance :

$$\sigma_{m,2N} = \sigma_{m,i}(2N-1)^k \quad [7]$$

où  $k$  est l'exposant de relaxation déterminé en utilisant les propriétés des matériaux qui décrivent la contrainte de relaxation et les contraintes et déformations des pieds d'entailles déterminées dans l'analyse de la mise au point du cycle,  $\sigma_{m,i}$  est la contrainte moyenne du pied d'entaille après la mise au point du cycle et  $2N$  est le nombre d'inversions du chargement.

Les grandes amplitudes de déformation plastique et les hautes contraintes moyennes causent une très rapide relaxation des contraintes moyennes des pieds d'entailles. En utilisant l'expression ci-dessus pour la valeur actuelle de la contrainte moyenne au niveau des pieds d'entailles et l'équation de Basquin [2], nous pouvons résoudre pour l'initiation de la fissure à la fatigue ( $2N_f$ ) en utilisant l'équation de l'intégration de la limite supérieure :

$$\int_0^{2N_f} \left[ (\sigma_f' / \sigma_a) (1 - (\sigma_{m,i} / \sigma_f') (2N_i)^k) \right]^{1/b} dN_i = 1 \quad [8]$$

**Prédiction de la durée de vie de l'initiation de la fissure sous chargement réel variable à avec relaxation de la contrainte moyenne**

Pour le chargement réel à amplitude variable, la règle d'endommagement linéaire cumulative est utilisée pour sommer le taux d'endommagement à la fatigue ( $D_i$ ) de

plusieurs boucles fermées d'hystérésis dans un bloc du chargement réel en ignorant la possibilité de la relaxation des contraintes moyennes aux pieds d'entailles :

$$D_{\text{block}} = \sum D_i = \sum \left[ \frac{\sigma_f' - \sigma_m}{\Delta\sigma/2} \right]_i^{1/b} \quad [9]$$

puis  $N_i$  est l'inverse de  $D_{\text{block}}$

$$N_i = \frac{1}{D_{\text{block}}}$$

Cependant, plusieurs méthodes pour compter les cycles ont été proposées, la notion de la “**méthode du vecteur**” développé par Dowling et Socie [4], est considéré pour être la plus efficace et la plus simple pour programmer un ordinateur digital.

Pour un membre entaillé sans contraintes de flexion et sans contrainte résiduelle, le chargement réel est réarrangé de telle manière que la plus grande valeur de  $(K_{f\text{max}}^A S_i^A + K_{f\text{max}}^B S_i^B + \sigma_f)$  soit la première et la dernière valeur tant que le cycle de comptage est effectué.

### Evaluation de la durée de vie à la fatigue liée a la propagation de la fssure $N_p$

La propagation de la fissure à la fatigue ( $N_p$ ) pour un chargement à amplitude constante peut être calculée en intégrant l'équation de Paris à partir de la longueur de la fissure initiale  $a_i$  à la longueur de la fissure finale  $a_f$  :

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^n \quad [10]$$

$$N = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{C(\Delta K)^n}$$

où  $C$  et  $n$  sont des constantes du matériau,  $\Delta K$  est l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte :

$$\Delta K = YS(\pi a)^{1/2} \quad [11]$$

où  $Y$  est un facteur de la géométrie.

L'effet de la contrainte moyenne sur la propagation de la fissure peut être expliqué en substituant l'amplitude du facteur d'intensité de la contrainte effective  $\Delta K_{\text{eff}}$  dans l'équation [10]. Pour une forme de soudure donnée,  $Y$  peut être exprimé convenablement par superposition de plusieurs effets de la géométrie [8] :

$$Y = M_s M_t M_k / \phi_0 \quad [12]$$

où  $M_s$  compte pour les effets de la surface- avant libre ;  $M_t$  pour la plaque finie d'épaisseur  $w$  ;  $\phi_0$  pour la forme de fissure ;  $M_k$  pour la non uniformité du gradient des contraintes due à la discontinuité de la concentration des contraintes des soudures. Lorsqu'une soudure est soumise, en combinant un chargement axial, en incluant une flexion et des contraintes résiduelles, l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte totale  $\Delta K_T$  peut être obtenue par une méthode de superposition :

$$\Delta K_T = \Delta K_A + \Delta K_B + K_r \quad [13]$$

$$K_r = F \cdot \sigma_r (\pi a)^{1/2} \quad [14]$$

où  $\Delta K_A$  et  $\Delta K_B$  sont les facteurs d'intensité de contraintes pour respectivement la traction et la flexion, et  $K_r$  est le facteur d'intensité de contrainte dû aux contraintes résiduelles et  $F$  est une fonction de la distribution de contrainte résiduelle.

## Résultats

Dans le tableau ci-dessous sont reportées quelques prédictions obtenus le modèle IP.

Spec. No.	Sites	Mean Stress (ksi)	$K_{fmax}^A$	$K_{fmax}^B$	Actual Life (Blocks)	Predicted Life		
						$N_I$	$N_P$ (Blocks)	$N_T$
H-1	IJP 1-3	0.0	5.36	0.92	926	599	301	900
	TOE 1	0.0	4.24	2.08		7794	1110	8904
	TOE 3	0.0	3.49	2.01		25651	941	26591
	IJP 2-4	0.0	5.48	0.82		495	356	851
	TOE 2	0.0	3.49	2.01		25828	707	26535
	TOE 4	0.0	3.49	2.02		181399	1630	183029
	H-2	IJP 1-3	0.0	5.75		0.80	769	342
TOE 1		0.0	3.93	2.03	7386	756		8142
TOE 3		0.0	3.81	2.02	38693	1050		39743
IJP 2-4		0.0	5.59	0.80	438	353		791
TOE 2		0.0	3.30	1.98	95384	1120		96504
TOE 4		0.0	3.74	2.04	1961889	7480		1969369
H-3		IJP 1-3	0.0	5.54	0.90	1291		457
	TOE 1	0.0	3.34	2.00	377630		1410	379040
	TOE 3	0.0	3.70	2.03	7769		629	8398
	IJP 2-4	0.0	5.55	0.79	465		341	806
	TOE 2	0.0	3.32	1.98	209061		1120	210181
	TOE 4	0.0	3.89	2.07	16059		1150	17209
	H-4	IJP 1-3	0.0	5.21	0.77		1414	766
TOE 1		0.0	3.87	2.06	17500	1210		18710
TOE 3		0.0	3.95	2.06	250528	4810		255338
IJP 2-4		0.0	5.77	0.98	337	301		638
TOE 2		0.0	3.49	2.01	42595	913		43508
TOE 4		0.0	3.53	2.00	68587	1040		69627
H-5		IJP 1-3	0.0	5.13	0.71	416		896
	TOE 1	0.0	3.81	2.06	2090380		1110	2091490
	TOE 3	0.0	3.77	2.06	4112		687	4799
	IJP 2-4	0.0	5.24	0.79	777		348	1125
	TOE 2	0.0	3.90	2.06	1228444		1120	1229564
	TOE 4	0.0	3.86	2.08	4660		761	5431
	H-6	IJP 1-3	0.0	5.45	0.86		303	493
TOE 1		0.0	3.73	2.03	1675	535		2210
TOE 3		0.0	3.92	2.08	3319125	1330		3320455
IJP 2-4		0.0	5.01	0.82	1118	348		1466
TOE 2		0.0	4.02	2.11	1772	757		2529
TOE 4		0.0	4.79	2.14	186802	1250		188052

# Bibliographie

**C. AMZALLAG, J.P. GEREY, J.L. ROBERT, J. BAHUAUD (1993)** : “ La méthode Rainflow de comptage des cycles. Application aux 3 séquences CARLOS uniaxiales ”, Editions de la revue de métallurgie, N° 7, p. 54-68.

**C. BATIAS (1999)** : “ There is no fatigue life in mettalic materials ”, Blackwell Science Ltd. Fatigue Engng Mater Struct 22, 559-565.

**C. BATIAS, G. BAUDRY (2000)** : “ Application de la résistance à la fatigue gigacyclique au calcul de structure ”, Revue Française de Mécanique.

**A. BRAND, J.F. FLAVENOT, R. GREGOIRE, C. TOURNIER (1992)** : “ Données technologiques sur la fatigue ”, CETIM, Paris.

**R. CAZAUD (1969)** : “ La fatigue des métaux ”, Dunod, Paris.

**H.K CHOUMIN (2000)** : “ Dimensionnement à la fatigue polycyclique par une approche locale des assemblages soudés ”, Thèse de l'école polytechnique.

**B. CROSSLAND (1956)** : “ Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel ”, International conference on fatigue of metals, London.

**K. DANG-VAN (1973)** : “ Sur la résistance à la fatigue des métaux”, Sciences et Techniques de l'Armement, 3<sup>ème</sup> fascicule, p.647-722

**K. DANG-VAN, G. CAILLETAUD, J.F. FLAVENOT, A. LEDOUARON H.P. LIEURADE (1984)** : “ Critère d'amorçage en fatigue à grand nombre de cycles sous sollicitations multiaxiales ”, Amorçage des fissures sous sollicitations complexes, Journées internationales de printemps, p.301-328, Paris.

**F. DE COULON (1996)** : “ Théorie et traitement des signaux ”, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne.

**A. DEPERROIS (1991)** : “ Sur le seul calcul de limites d'endurance des aciers ”, Thèse de l'Ecole Polytechnique.

**Y. D'ESCATHA et al. (1978)** : “ Critères pour analyser l'amorçage de la propagation d'une fissure en fatigue oligocyclique dans les zones singulières ”, Conf. Matériaux et Structures sous Chargement Cyclique, Ecole Polytechnique, Palaiseau, pp. 2295-304.

**A. EKBERG (1997)** : “ Fatigue initiation - Some notes ”, Dep. of Solid Mechanics, Chalmers university of technology.



- J.L. FAYARD (1996)** : “ Dimensionnement à la fatigue polycyclique de structures soudées”, Thèse de l'Ecole Polytechnique.
- J.W. FISHER, A. NUSSBAUMER, P.B. KEATING, B.T. YEN (1992)** : “ Resistance of welded details under variable amplitude long life loading ”, NCHRP project 12-15(5).
- M. FOGUE (1987)** : “ Critère de fatigue à longue durée de vie pour des états multiaxiaux de contraintes sinusoïdales en phase et hors phase ”, Thèse de l'INSA de Lyon.
- C. FOURNIER (1997)** : “ Fiabilité et mécanique : dimensionnement probabiliste des structures : application aux enceintes sous pression ”, thèse de l'université Blaise Pascal - Clermont 2.
- A. GALTIER (1993)** : “ Contribution à l'étude de l'endommagement des aciers sous sollicitations uni ou multi-axiales ”, Thèse de l'ENSAM.
- G. GLINKA, J.C.P. KAM (1987)** : “ Rainflow counting algorithm for very long stress histories”, International journal of fatigue, p223-228, Vol.9 Num.4.
- J.M. HABLOT (1990)** : “ Construction de solutions exactes en élastoplasticité, application à l'estimation d'erreur par apprentissage ”, Thèse de l'ENPC.
- B. HALPHEN (1978)** : “ Problèmes quasi-statiques en viscoplasticité ”, Thèse Dr. ès Sciences, Paris.
- J. HERTZ, A. KROGH, R. PALMER (1991)** : “ Introduction to the theory of neural computation ”, Santa Fe Institute, Addison Wesley.
- B. JACOB, J. GOYET, M. SERROR (1999)** : “ Approche probabiliste à la fatigue ”, X-collège de polytechnique.
- J.J. JANOSCH (1993)** : “ Aide à la définition des soudures d'un assemblage d'angle - Etude de l'influence de la géométrie des assemblages en angles symétriques sur l'état de contrainte local dans chaque zone potentielle d'amorçage en fatigue ”, *Rapport IS N°* 28660.
- D.P. KHIL (1997)** : “ Fatigue strength of stainless steel weldments in air ”, NSWCCD-65-TR-2000/04, february 2000
- P. KREE, C. SOIZE (1983)** : “ Mécanique aléatoire : vibrations non linéaires, turbulences, séismes, houle, fatigue ”, Bordas, Paris.
- C. LALANNE (1999)** : “ Dommage par fatigue ”, Vibrations et chocs mécaniques - Tome 4, Hermès, Paris.
- J. LEMAITRE, J.L. CHABOCHE (1988)** : “ Mécanique des matériaux solides ”, Dunod, Paris.
- J. MANDEL (1966)** : “ Cours de Mécanique des Milieux Continus ”, Tome 2, Mécanique des solides, Paris, Gauthier-Villars éditeur.

**J. MANDEL (1973)** : “ Adaptation d’une structure plastique écrouissable ”, Mech. Res. Comm., Vol.3, p.251-256, Pergamon Press.

**J. MANDEL, J. ZARKA, B. HALPHEN (1977)** : “ Adaptation d’une structure élastoplastique à écrouissage cinématique ”, Mech. Res. Comm., Vol.4, p.309-314, Pergamon Press.

**E.A. MANSOUR** : “ An introduction to structural reliability theory ”, Mansour Engineering Inc, Berkeley CA, January 1989

**M.A. MINER (1945)** : “ Cumulative damage in fatigue ”, Journal of applied mechanics, p. 159-164

**F. MOREL** : “ Fatigue multiaxiale sous chargement d’amplitude variable ”, Thèse de Doctorat, Université de Poitiers.

**H. NEUBER (1961)** : “ Theory of stress concentration for shear-strained prismatical bodies with arbitrary non-linear stress-strain law ”, Journal of applied mechanics, Vol. 28, p. 544-550.

**NORME NF A03-406 (1993)** : “ Fatigue sous sollicitations d’amplitude variable – Méthode Rainflow de comptage des cycles ”, Normalisation Française

**M. OLAGNON (1996)** : “ Traitement de données numériques avec fortran 90 ”, MASSON, Paris.

**I. PAPADOPOULOS (1987)** : “ Fatigue polycyclique des métaux – une nouvelle approche ”, Thèse de l’ENPC.

**I. PAPADOPOULOS (1994)** : “ A new criterion of fatigue strength for out of phase bending and torsion of hard metals ”, International journal of fatigue, Vol. 16, N° 6, p. 377-384.

**S.K. PARK, F.V. LAWRENCE (1988)** : “ Fatigue characterization of fabricated ship details (phase2) ”, University of Illinois at Urbana-Champaign, PB91-142315.

**R.E. PETERSON (1974)** : “ Stress Concentration Factors ”, J. Willey & Sons.

**N. RANGANATHAN, J.R. DESFORGES (1996)** : “ Equivalent constant amplitude concepts examined under fatigue crack propagation by block loading ”, Fatigue Fract. Engng Mater Struct Vol.19, No.8, pp.997-1008.

**J.M. RENDERS (1995)** : “ Algorithmes génétiques et réseaux de neurones ”, Hermès, Paris.

**J.L. ROBERT (1992)** : “ Contribution à l’étude de la fatigue multiaxiale sous sollicitations périodiques ou aléatoires ”, Thèse de l’INSA de Lyon.

**J. SALENCON (1998)** : “ Introduction à l’élastoplasticité et au calcul à la rupture ”, Cours à l’X 2ème année majeure 1,

**N. SKALLI, J.F. FLAVENOT (1984)** : “ Prise en compte des contraintes résiduelles dans un calcul prévisionnel de fatigue ”, Journées internationales de printemps, p. 98-117, Paris.

**D.F. SOCIE, G.B. MARQUS (2000)** : “ Multiaxial fatigue ”, SAE international Inc.

**C. SOIZE (1996)** : “ Signaux aléatoires ”, Cours à l'ECP.

**C.M. SONSINO (1995)** : “ Multiaxial fatigue of welded joints under in-phase and out-of-phase local strains and stresses ”, *Int. J. Fatigue*, Vol. 17, n° 1, 1995, pp. 55-70.

**S. TAHERI, V. DOQUET (2000)** : “ Le non conservatisme de la méthode rainflow en déformation contrôlée ”, EDF, HI-74/00/006/A.

**M. TERRIEN (1991)** : “ Systèmes experts par apprentissage en contrôle non destructif ”, Les systèmes experts et leurs applications, Volume 3, p. 439-447.

**E. VASSEUR (1997)** : “ Application de l'apprentissage automatique à l'étude du comportement à la fatigue des structures ”, Thèse de l'université de Lille1.

**E. VIDAL (1996)** : “ Prévission de la durée de vie en fatigue multiaxiale sous sollicitations d'amplitude variable à l'aide d'un critère global ”, Thèse de l'INSA de Lyon.

**J. ZARKA (1975)** : “ Calcul des structures ”, Cours à l'ENSTA.

**J. ZARKA, H. KARAOUNI (2001)** : “ Fatigue Analysis during One-parametered Loadings ”, First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics.

**J. ZARKA, H. KARAOUNI (2001)** : “ Fatigue Analysis of welded structures during random loadings ”, 9<sup>th</sup> National congress on theoretical and applied mechanics, Bulgarie.

**J. ZARKA, H. KARAOUNI (2002)** : “ New rules to be included in codes and standards to represent multiaxial random loadings on structures ”, ICONE 10, Track 10.

**J. ZARKA, H. KARAOUNI (2002)** : “ Characterization of fatigue properties during multiaxial random loadings ”, ICONE 10, Track 2.

**J. ZARKA, J. CASIER (1979)** : “ Elastic plastic response of a structure to cyclic loading ; Practical rules ”, Mechanics today Vol. 6, S. NEMAT-NASSER Editor, Pergamon Press.

**J. ZARKA, J. FRELAT, G. INGLEBERT, P. KASMAI-NAVIDI (1990)** : “ A new approach in inelastic analysis of structures ”, CADLM, Gif sur Yvette.

**J. ZARKA, P. NAVIDI (2000)** : “ Intelligent Optimal Design of Materials and Structures ”, CADLM, Gif sur Yvette.