



**HAL**  
open science

# Méthode eulérienne faiblement diffuse appliquée à un modèle totalement conservatif pour la simulation des écoulements multifluides

Vincent Mahy

► **To cite this version:**

Vincent Mahy. Méthode eulérienne faiblement diffuse appliquée à un modèle totalement conservatif pour la simulation des écoulements multifluides. Analyse numérique [math.NA]. Université de Technologie de Compiègne, 2023. Français. NNT : 2023COMP2778 . tel-04500378

**HAL Id: tel-04500378**

**<https://theses.hal.science/tel-04500378>**

Submitted on 11 Mar 2024

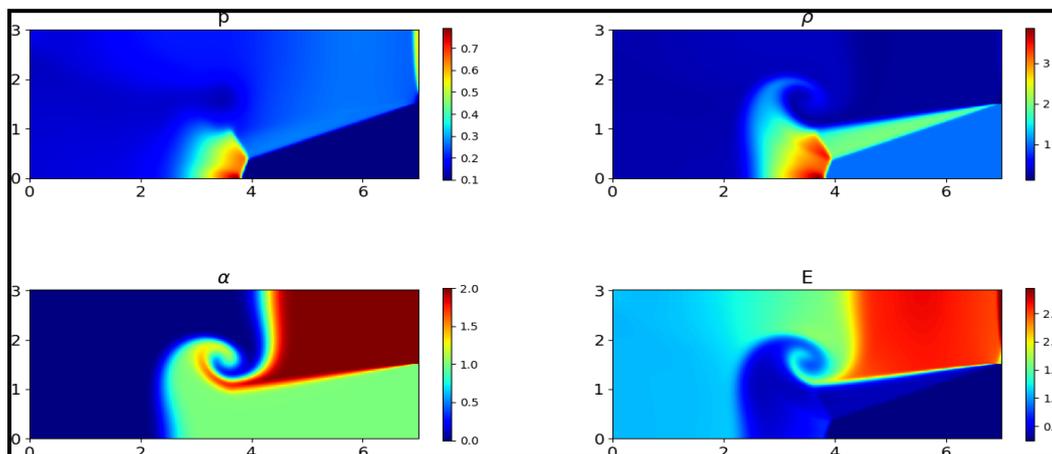
**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Par Vincent MAHY

*Méthode eulérienne faiblement diffuse  
appliquée à un modèle totalement conservatif  
pour la simulation des écoulements multifluides*

Thèse présentée  
pour l'obtention du grade  
de Docteur de l'UTC



Soutenue le 11 décembre 2023

**Spécialité :** Mathématiques Appliquées : Laboratoire de  
Mathématiques Appliquées de Compiègne (Unité de recherche  
EA-2222)

D2778

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE DE COMPIÈGNE

ÉCOLE DOCTORALE 71, SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR

---

**Méthode eulérienne faiblement diffuse appliquée à  
un modèle totalement conservatif pour la  
simulation des écoulements multifluides**

---

**Spécialité : Mathématiques Appliquées**

ÉCOLE DOCTORALE 71, SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR

Thèse présentée le 11 décembre 2023

par **Vincent MAHY**

**Composition du jury :**

<b>François ALOUGES</b>	Rapporteur
<b>Frédéric MAGOULÈS</b>	Rapporteur
<b>Daniel BOUCHE</b>	Examineur
<b>Romain LE TELLIER</b>	Examineur
<b>Chloé MIMEAU</b>	Examinatrice
<b>Antoine ZUREK</b>	Examineur
<b>Florian DE VUYST</b>	Directeur de thèse
<b>Mathieu PEYBERNES</b>	Co-encadrant
<b>Renaud MOTTE</b>	Invité

## Résumé

Dans ce manuscrit, nous développons une méthode numérique adaptée à la simulation d'écoulements de fluides compressibles non miscibles.

Pour modéliser ces écoulements, nous analysons un système totalement conservatif original comptant six équations, fermé par une équation d'état stiffened-gas et une équation d'équilibre en pression. Nous introduisons également un schéma numérique d'ordre 2, en espace et en temps, spécialement conçu pour la capture des interfaces entre les fluides dans des configurations à plusieurs dimensions. Pour atteindre l'ordre 2, nous mettons au point une méthode de reconstruction de pente multidimensionnelle basée sur le critère de stabilité : local extremum diminishing (LED).

Le schéma d'ordre 2 associé au modèle totalement conservatif entraîne l'apparition d'oscillations dans les profils de pression. Pour éviter ces oscillations parasites, nous démontrons un ensemble de propriétés essentielles. Tout d'abord, nous trouvons des conditions de stabilité, de type CFL, imposées par les reconstructions de pente. Puis, nous démontrons un théorème garantissant la consistance entre l'équation d'énergie et le transport des fractions volumiques. Ensuite, nous proposons une reconstruction de la pression en deux temps pour assurer la positivité de l'énergie interne.

Enfin, nous développons une méthode numérique à une seule étape adaptée à la simulation d'écoulements faisant intervenir plus de deux fluides.

L'ensemble des résultats présentés dans ce document est illustré par des cas test, à une, deux ou trois dimensions d'espace.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
Contexte industriel . . . . .	5
Méthodes de capture d'interface . . . . .	6
Les modèles pour la mécanique des fluides non miscibles . . . . .	9
Objectifs et plan de la thèse . . . . .	11
<b>1 Un schéma numérique original vraiment multidimensionnel pour la capture d'interface</b>	<b>15</b>
1.1 Introduction du chapitre . . . . .	16
1.2 Contexte mathématique de l'étude du schéma numérique . . . . .	20
1.3 Influence de la discrétisation en temps . . . . .	22
1.4 Développement d'une reconstruction de pente multidimensionnelle pour la capture d'interface . . . . .	26
1.5 Extension aux problèmes multimatériaux . . . . .	40
1.6 Résultats à trois dimensions en espace . . . . .	51
1.7 Conclusion du chapitre . . . . .	57
<b>2 Une dérivation d'une formulation totalement conservative pour les écoulements multifluides non miscibles</b>	<b>59</b>
2.1 Introduction du chapitre . . . . .	60
2.2 Définition d'un système de transport totalement conservatif . . . . .	62
2.3 Système totalement conservatif pour les écoulements multifluides compressibles . . . . .	75
2.4 Conclusion du chapitre . . . . .	80
<b>3 Un développement d'un schéma numérique strictement eulérien : Lagrange-Flux</b>	<b>81</b>

## TABLE DES MATIÈRES

---

3.1	Introduction du chapitre . . . . .	82
3.2	Développement mathématique du schéma Lagrange-Flux . . . . .	84
3.3	Résultats numériques . . . . .	89
3.4	Conclusion du chapitre . . . . .	98
<b>4</b>	<b>Une stratégie de reconstruction de pentes stables et compatibles</b>	<b>99</b>
4.1	Introduction du chapitre . . . . .	100
4.2	Propriétés sur les reconstructions . . . . .	101
4.3	Compatibilité physique des reconstructions . . . . .	108
4.4	Résultats numériques en deux dimensions . . . . .	117
4.5	Conclusion du chapitre . . . . .	125
<b>5</b>	<b>Une définition d'un schéma d'advection multidimensionnel à une seule étape</b>	<b>127</b>
5.1	Introduction du chapitre . . . . .	128
5.2	Développement mathématique du schéma numérique . . . . .	130
5.3	Développement d'une méthode de reconstruction affine par morceaux pour les cas multimatériaux . . . . .	152
5.4	Application à un système totalement conservatif pour les écoulements mul- tifluides . . . . .	162
5.5	Conclusion du chapitre . . . . .	167
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>168</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>171</b>

# Introduction

Les écoulements de fluides non miscibles sont des phénomènes fréquemment observés dans divers secteurs, notamment l'énergie, la défense, l'aérospatiale et même la planétologie. Leur occurrence régulière suscite un vif intérêt au sein de la communauté scientifique et industrielle.

Ce manuscrit est consacré à la simulation numérique de ces écoulements, un domaine essentiel pour la compréhension et l'optimisation de nombreux processus. Afin de garantir des simulations numériques pertinentes et fiables, il est impératif d'assurer la cohérence du modèle mathématique et des méthodes numériques utilisées. C'est précisément sur ces deux piliers fondamentaux que se concentre cette recherche. Dans ce contexte, notre étude se penche sur un modèle mathématique conservatif spécifiquement adapté aux fluides non miscibles, offrant ainsi une base solide pour nos travaux. Parallèlement, nous développons une méthode numérique associée qui revêt une importance cruciale dans la précision de nos simulations. Notre attention est particulièrement focalisée sur la capture précise des interfaces entre les différents fluides. En effet, dans le cas des fluides non miscibles, le maintien d'une interface nette et précise est impératif pour refléter fidèlement la réalité physique. Malheureusement, au cours de simulations numériques, il est possible qu'une diffusion numérique, non conforme à la physique, fasse son apparition, compromettant ainsi la distinction entre les différents fluides supposés non miscibles. Nous abordons également cette problématique avec l'objectif de la résoudre de manière satisfaisante.

En somme, ce manuscrit vise à apporter des contributions importantes à la modélisation et à la simulation des écoulements de fluides non miscibles en mettant en avant un modèle mathématique conservatif et des méthodes numériques innovantes, tout en garantissant la préservation rigoureuse des interfaces entre les fluides pour des résultats de simulation plus précis et fiables.

## Contexte applicatif

Afin de bien cerner les enjeux liés à la capture d'interfaces, nous proposons différents exemples d'applications. La présente thèse bénéficie d'une collaboration avec le Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives (CEA). Dans cette perspective, nous allons illustrer les applications potentielles de cette recherche en nous appuyant sur des exemples concrets issus de son domaine d'expertise. La figure 1, ci-dessous, présente un schéma décrivant un scénario d'accident grave dans une centrale nucléaire. Lors de ce type d'événement, le cœur du réacteur entre en fusion. La fusion des matériaux constituant le cœur forme un fluide appelé corium. Ce fluide peut dépasser des températures de 2 800K. À ce stade, il peut provoquer la fusion de la cuve de confinement des combustibles, engendrant ainsi des risques potentiels en dehors de la centrale. Il devient donc impératif de déterminer avec une précision extrême la position de ces différents fluides, afin de développer une stratégie efficace permettant de contenir les éléments radioactifs à l'intérieur de la centrale. Pour des informations plus approfondies sur les accidents graves dans les réacteurs à eau pressurisée, nous vous recommandons de consulter le rapport [1].

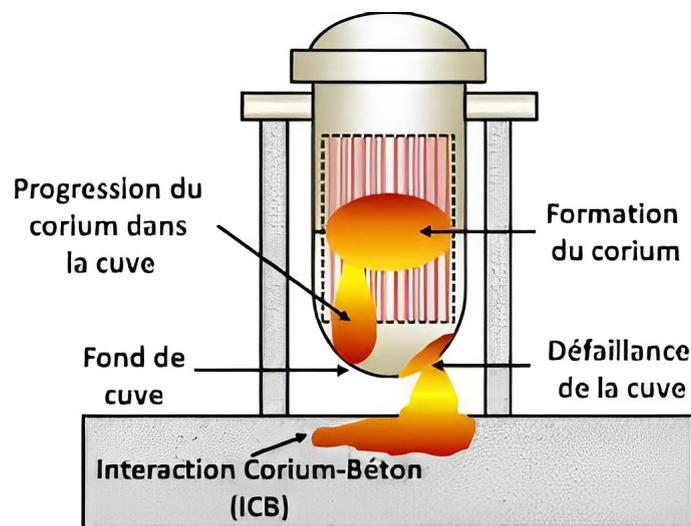


FIGURE 1 – Schéma du déroulement d'un accident grave dans une centrale nucléaire. Image issue de la thèse de Le Roy de Bonneville [65].

Sur la figure, 2, nous présentons une autre application des simulations d'écoulements multifluides. La figure ci-après illustre l'impact d'une météorite à la surface de la Terre. Dans cette situation, plusieurs matériaux interagissent, notamment l'air, l'eau, la croûte

terrestre et la météorite elle-même. Lorsqu'une météorite percute la planète à une vitesse supérieure à 10 km/s, le comportement de ces matériaux peut être décrit en utilisant les mêmes équations que celles appliquées en mécanique des fluides. La simulation de tels phénomènes permet de prévoir les scénarios possibles et, par conséquent, de comprendre les effets de ces impacts. Pour une exploration approfondie de l'importance de la capture d'interface dans les impacts hypervéloces, nous invitons le lecteur à se référer aux thèses de Seisson et de Jaulin [91, 99].

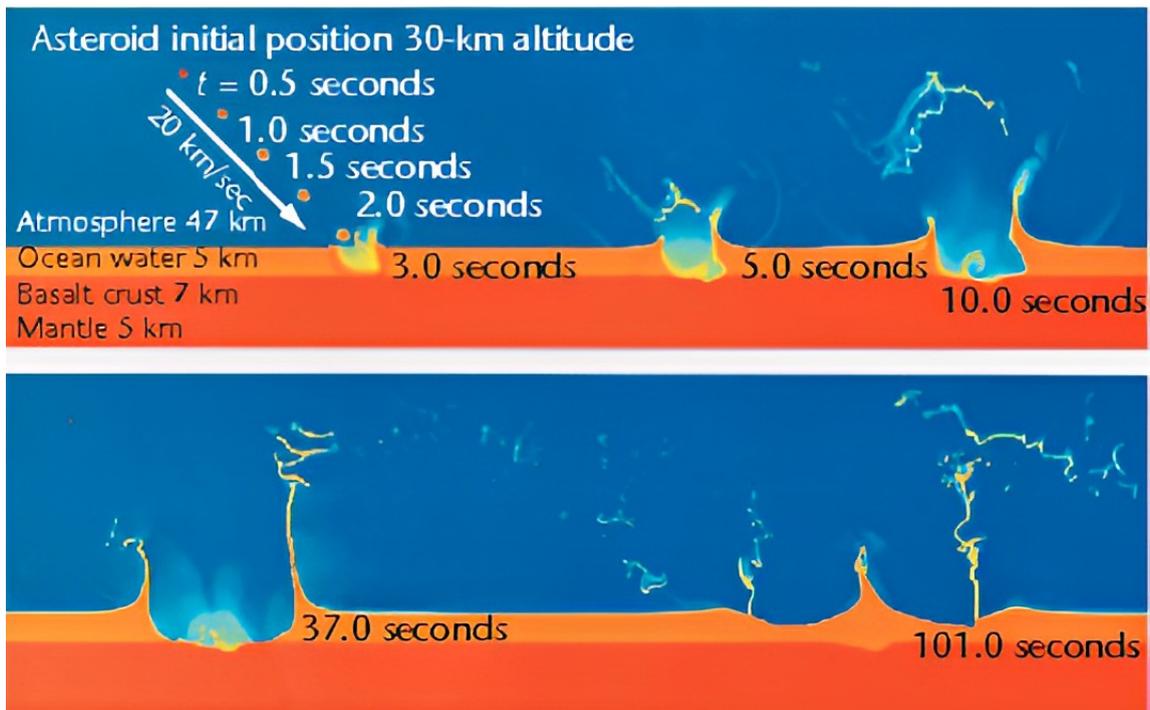


FIGURE 2 – Simulation d'un impact de météorite à la surface de la Terre. Différents instants sont représentés. Image issue de l'article de Gisler *et al.* [38].

## Méthodes de capture d'interface

Pour comprendre comment de telles simulations sont effectuées, il est essentiel de considérer les deux principales catégories de méthodes employées : les méthodes lagrangiennes et les méthodes eulériennes. La première approche consiste à suivre le déplacement d'une particule en se fixant à elle, tandis que la seconde implique l'observation du mouvement des particules depuis un point de vue fixe. Chacune de ces perspectives offre

plusieurs méthodes pour traiter les interfaces. Dans la littérature, on compte essentiellement quatre approches différentes. La première est une méthode lagrangienne appelée front-tracking (voir [39, 51, 96]), des marqueurs sont ajoutés au niveau de l'interface afin que le maillage se déforme en même temps que celle-ci, évitant toute diffusion parasite. La seconde approche adopte un point de vue eulérien, c'est l'ensemble des méthodes de reconstruction d'interface, aussi appelé VOF (Volume Of Fluid) géométrique. Parmi les plus connues nous pouvons citer les méthodes PLIC ou SLIC (voir [5, 9]). Cette approche repose sur une reconstruction géométrique de la distribution des fractions volumiques. La fraction volumique d'un fluide est égale à 1 là où le fluide remplit l'espace, et à 0 là où il est absent. Dans les zones de mélange numérique, la fraction volumique prend des valeurs comprises entre 0 et 1. La reconstruction a lieu à chaque étape de calcul, empêchant la diffusion numérique de se propager. Il existe aussi la méthode level-set introduite par Osher dans l'article [94]. Elle consiste à représenter l'interface par la ligne de niveau zéro d'une fonction régulière, et à la faire évoluer en fonction de la vitesse. La dernière approche, appelée VOF algébrique, utilise également une fonction couleur pour connaître la position des différents fluides. Mais contrairement à l'approche VOF géométrique, la méthode VOF algébrique reconstruit la distribution de la fraction volumique de façon algébrique, ainsi la diffusion numérique est contrôlée. Pour le lecteur souhaitant une comparaison des différentes méthodes de capture d'interface, nous le renvoyons aux articles de Boniou *et al.* et Mirjalili *et al.* [16, 74].

Les deux premières approches citées présentent toutes deux un haut niveau de précision. Malgré cela, elles souffrent d'un temps de calcul trop important et d'un manque de robustesse qui peut se révéler critique dans certains cas. Les méthodes level-set sont aussi précises et robustes. Cependant, elles ne sont pas naturellement conservatives, ce qui s'avère inadapté à certaines applications. Pour toutes ces raisons, nous choisissons de développer une méthode VOF algébrique.

Les méthodes VOF algébriques, aussi appelées méthodes d'interfaces diffuses, reposent sur des schémas volumes finis. Elles ont été introduites pour la première fois par Boris & Book [17]. L'idée est de réduire la diffusion en diminuant l'effet de moyenne. Cette effet est généré en raison des valeurs constantes par mailles utilisées dans les schémas de volumes finis. Pour cela, une stratégie de reconstruction de flux ou de pente est mise en place. Sweby propose un cadre unifié de ces deux possibilités dans l'article [95]. Il met en évidence les choix de reconstructions permettant d'atteindre une méthode d'ordre deux dans les zones régulières. Pour un détail complet de la construction de ces méthodes, nous vous renvoyons aux ouvrages de Godlewski & Raviart [43] ou à celui de Toro [98].

Ces méthodes ont l'avantage principal de gérer la déformation des matériaux avec un modèle physique unique, contrairement aux autres qui nécessitent le couplage de différents modèles aux interfaces. De plus, les méthodes VOF algébrique font preuve d'une grande stabilité. En effet, leur construction repose sur des critères de stabilité tel que le critère total variation diminishing (TVD) [29] ou le critère local extremum diminishing (LED) [56, 60]. En dimension un, ces méthodes ont déjà été largement étudiées et il existe différentes stratégies en fonction des propriétés recherchées.

Cependant, leur passage à plusieurs dimensions reste difficile. Lorsque les méthodes unidimensionnelles sont appliquées naïvement à plusieurs dimensions d'espace, certains artefacts numériques apparaissent. L'antidiffusion apportée par la reconstruction algébrique, associée à un schéma en temps inadapté, entraîne l'apparition d'oscillations parasites aux interfaces. Ce phénomène est mis en évidence dans l'article de De Vuyst *et al.* [26]. De plus, l'utilisation de reconstruction algébrique effectuée indépendamment dans chaque direction fait apparaître des artefacts géométriques, ces artefacts sont mis en avant dans la thèse de Watteaux [102] et dans l'article de De Vuyst *et al.* [26]. Récemment, la communauté multidimensionnal limiting process (MLP) [56, 106] a présenté une contribution significative à la capture des interfaces. La stratégie MLP offre des processus de limitation de gradient véritablement multidimensionnels, remplaçant le critère TVD par des méthodes de diminution des extrema locaux (LED). Il permet la reconstruction des gradients locaux en maintenant la direction du vecteur normal à l'interface diffuse. MLP s'est avéré être un outil flexible et précieux, adaptable aux maillages cartésiens, non structurés et aux problèmes en trois dimensions, contribuant ainsi à la précision géométrique des méthodes de capture d'interface. Enfin, l'extension de ces méthodes à plus de deux matériaux constitue une étape complexe. Pour que les résultats restent physiquement acceptables, il est primordial que la somme des fractions volumiques soit égale à un. Cette condition se vérifie aisément en présence de deux matériaux en raison de la symétrie du problème. Cependant, la contrainte multimatériaux se révèle particulièrement complexe à partir de trois matériaux. Lagoutière & Jaouen ont proposé dans l'article [53] une reconstruction de flux permettant de vérifier cette condition. Bien que leur solution présente une excellente précision de l'interface, elle ne se révèle pas tout à fait satisfaisante. En effet, un ordre est imposé dans le traitement des matériaux, ce qui entraîne des différences dans les résultats selon l'ordre choisi. De plus cette méthode présente des artefacts géométriques importants en dimension deux. Plus récemment Ancellin *et al.* ont proposé un algorithme d'optimisation permettant de satisfaire la condition multimatériaux [7]. Les résultats sont satisfaisants, mais nécessitent la résolution d'un problème complexe à chaque

étape.

L'objectif premier de cette thèse est le développement d'une méthode VOF algébrique géométriquement précise, quel que soit le nombre de dimensions présentes. En outre, il est essentiel que cette méthode puisse être étendue à un nombre quelconque de matériaux, tout en maintenant des temps de calcul raisonnables. Ainsi, un effort significatif est déployé pour parvenir au schéma numérique le plus rapide possible sans compromettre la précision.

Pour simuler efficacement les écoulements de fluides non miscibles, une modélisation mathématique précise est essentielle. Par conséquent, nous proposons un examen approfondi des différents modèles existants dans la littérature, afin de mieux comprendre leur applicabilité et appréhender leurs limites.

## **Modèles pour la mécanique des fluides non miscibles**

Le modèle le plus complet développé en mécanique des fluides est le système d'équations de Navier-Stokes [34]. Cependant, pour les applications spécifiques envisagées dans notre travail, il est possible d'introduire des hypothèses afin de simplifier l'étude. Tout d'abord, nous supposons des écoulements non visqueux, ce qui nous permet de négliger les termes de viscosité. Nous supposons l'ensemble des matériaux compressibles. En effet, sous certaines conditions, les solides peuvent être considérés comme faiblement compressibles. Ces hypothèses nous amènent donc à considérer les équations d'Euler compressibles.

De plus, nous souhaitons utiliser un modèle adapté aux méthodes d'interfaces diffuses. L'avantage de ces méthodes réside dans leur capacité à gérer les problèmes multimatériaux avec un modèle unifié. Pour simplifier l'étude en tirant le meilleur parti de cet avantage, nous supposons que les fluides dans les zones de mélange numérique ont une vitesse, et une énergie, uniques. Dans ce contexte, différents modèles sont proposés dans la littérature.

R. Abgrall souligne dans l'article [3] les difficultés à maintenir un profil de pression constant à l'interface entre deux fluides à l'équilibre de pression. En particulier, il montre que le caractère conservatif d'un système engendre des oscillations parasites dans le profil de pression. Ce travail revêt une importance fondamentale, car il a donné naissance à deux solutions qui demeurent à ce jour les seules solutions pertinentes pour éviter ces oscilla-

tions. Pour remédier à ce problème, R. Abgrall propose un modèle quasi-conservatif pour les écoulements à deux fluides. L'abandon du caractère conservatif d'un modèle constitue un moyen efficace pour éliminer ces oscillations. Un autre moyen est la méthode "ghost fluid", développée par Glimm *et al.* dans les articles [41, 40, 42] pour éviter ces instabilités numériques. La méthode "ghost fluid" repose sur le déplacement de fluides fictifs, permettant de corriger les flux et ainsi de supprimer les oscillations dans les profils de pression. Bien qu'elle ait été adaptée aux méthodes de type VOF [75], la méthode "ghost fluid" a été initialement conçue pour les méthodes level-set. Pour cette raison, dans ce manuscrit, nous nous intéressons à l'approche proposée par Abgrall, à savoir l'emploi d'un modèle quasi-conservatif.

Le modèle à quatre équations d'Abgrall a été spécifiquement étudié pour des gaz parfaits. Il repose sur le transport des coefficients adiabatiques, ce qui limite son applicabilité dans certaines situations. Par la suite, Allaire *et al.* ont présenté un modèle à cinq équations quasi-conservatif généralisant le modèle à quatre équations. Au lieu de transporter les coefficients adiabatiques, Allaire *et al.* ont proposé de suivre le déplacement des matériaux en utilisant le transport des fractions volumiques. Pour le cas bifluide à une dimension d'espace, le modèle proposé repose sur le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t (\rho_1 \alpha_1) + \partial_x (u \rho_1 \alpha_1) = 0, \\ \partial_t (\rho_2 \alpha_2) + \partial_x (u \rho_2 \alpha_2) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t (\rho E) + \partial_x (\rho E u + p u) = 0, \\ \partial_t \alpha_1 + u \partial_x \alpha_1 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Où  $\rho_k$  et  $\alpha_k$  sont respectivement la masse volumique et la fraction volumique du fluide  $k$  ( $k = 1, 2$ ),  $\rho$  est la masse volumique moyenne sur le volume de contrôle,  $u$  la vitesse,  $p$  la pression et  $E$  l'énergie totale. Pour fermer ce système, il est nécessaire d'ajouter deux équations. Dans l'article de référence [6], Allaire *et al.* montrent que l'utilisation d'un équilibre en pression s'avère préférable à un équilibre en température pour fermer le modèle. En effet, ce dernier entraîne à nouveau l'apparition d'oscillations dans les profils de pressions, contrairement à la première option. Nous supposons donc un équilibre en pression. Il manque alors une équation pour clore le système. Compte tenu des applications visées, nous fermons le modèle avec une équation d'état Stiffened-Gas. Cette équation s'exprime sous la forme suivante :

$$p = (\gamma - 1) \rho e - \gamma \pi. \quad (2)$$

Où  $p$  est la pression,  $e$  l'énergie interne tandis que  $\gamma$  et  $\pi$  sont respectivement la constante adiabatique et la constante Stiffened-Gas. Au-delà de fermer le système, cette équation rend compte des propriétés des matériaux qui interviennent dans les écoulements. Bien que simple en apparence, cette équation d'état permet de modéliser des matériaux présentant une diversité de niveaux de compressibilité, ces derniers étant caractérisés par les paramètres  $\gamma$  et  $\pi$ . Pour obtenir une compréhension plus approfondie du domaine de validité de l'équation d'état Stiffened-Gas, nous recommandons au lecteur de se tourner vers l'article de référence [48]. Pour ce qui concerne la valeur des constantes des matériaux, nous invitons le lecteur à consulter l'article [87].

Le point de départ de notre modèle est donc le modèle à cinq équations proposé par Allaire *et al.*, associé à un équilibre en pression et une équation Stiffened-Gas. Toutefois, comme mentionné précédemment, ce modèle n'est pas conservatif. Le caractère non-conservatif d'une méthode numérique peut entraîner la convergence du schéma vers une solution incorrecte. Ce phénomène est montré dans l'article de Hou & Lefloch [50].

Le verrou principal à lever d'un point de vue de la modélisation est donc d'obtenir un système totalement conservatif qui soit exempt d'oscillations parasites aux interfaces. Les travaux d'Abgrall ont mis en lumière la difficulté d'atteindre cet objectif en se limitant aux variables utilisées actuellement. Par conséquent, il apparaît impératif d'introduire une nouvelle variable conservative. Puis, en nous appuyant sur la méthode multimatériaux (plus de deux matériaux) développée pour les équations d'advection, nous souhaitons généraliser le modèle à un nombre arbitraire de matériaux. Enfin, le dernier objectif est d'étudier les répercussions des reconstructions algébriques, mentionnées précédemment, sur la stabilité de la méthode dans le cadre d'un système d'équations totalement conservatif.

## Objectifs et plan de la thèse

Avant d'annoncer le plan de ce manuscrit, nous proposons un résumé des objectifs. Cette thèse a pour but la simulation numérique d'écoulements de fluides non miscibles. Les objectifs visés par ce manuscrit peuvent s'énumérer dans l'ordre suivant :

- développer une méthode de capture d'interface multidimensionnelle géométriquement précise ;
- étendre la méthode de capture d'interface à un nombre arbitraire de matériaux ;
- construire un modèle totalement conservatif pour les écoulements multifluides. Ce modèle devant être exempt d'oscillations parasites aux interfaces et généralisable à un nombre arbitraire de matériaux ;

- étudier des critères de stabilité pour la méthode de capture d'interface appliquée au modèle totalement conservatif ;
- réduire la durée des calculs sans perte de précision.

### **Chapitre 1 : Un schéma numérique original vraiment multidimensionnel pour la capture d'interface**

Ce premier chapitre est entièrement consacré à la construction d'une méthode de reconstruction algébrique multidimensionnelle. Nous commencerons par explorer l'importance de la capture d'interface dans le contexte de l'équation d'advection. L'extension des méthodes unidimensionnelles au cas multidimensionnel engendre des artefacts, que nous identifierons et expliquerons. Pour corriger ces déformations numériques, nous définirons un gradient et un limiteur prenant en compte les mailles de coins. Puis, nous analyserons l'erreur et l'ordre de convergence de cette méthode. Enfin, nous conclurons ce chapitre en présentant une reconstruction des flux multifluides, garantissant la somme des fractions volumiques égale à un. Ce chapitre revêt une importance particulière, car il constitue le fondement de notre approche multidimensionnelle, avec des applications en trois dimensions.

### **Chapitre 2 : Une dérivation d'une formulation totalement conservative pour les écoulements multifluides non miscibles**

Le deuxième chapitre introduira une nouvelle variable,  $\xi$ , et une équation associée :

$$\partial_t \xi + \nabla \cdot \xi = 0.$$

Cette équation permettra la construction d'un système de transport totalement conservatif en prenant en compte la divergence de la vitesse dans l'équation des fractions volumiques. Nous comparerons les performances de ce système avec les différentes stratégies de transport existantes dans la littérature. Ensuite, nous remplacerons l'équation de transport dans le modèle à cinq équations d'Allaire *et al.* présenté dans l'article [6] par le système de transport nouvellement défini. Nous expliquerons les raisons de nos choix pour l'équation d'état et l'équation de fermeture, puis vérifierons le caractère hyperbolique du système. Enfin, nous déterminerons les paramètres de mélange du système, tels que la constante Stiffened-Gas, la pression et les coefficients adiabatiques.

### **Chapitre 3 : Un développement d'un schéma numérique strictement eulérien 'Lagrange-Flux'**

Dans ce chapitre, nous présenterons en détail un schéma numérique eulérien de type

Lagrange-Flux, tel qu'expliqué dans l'article [27]. Nous compléterons ce schéma en explicitant le solveur de Riemann HLL, tel qu'il est défini dans l'ouvrage [98], pour le calcul de la vitesse et de la pression aux faces du maillage. Enfin, nous conclurons en exposant des résultats numériques obtenus en une et deux dimensions d'espace, dans le but de valider l'approche.

### **Chapitre 4 : Une stratégie de reconstruction de pentes stables et compatibles**

Le quatrième chapitre se concentrera sur la mise en place d'un ensemble de reconstructions compatibles. Après une introduction générale sur la dualité entre limiteur de pente et limiteur de flux, nous présenterons des propriétés générales indispensables à la stabilité de notre méthode. Nous démontrerons également un théorème de compatibilité entre l'énergie interne et les fractions volumiques. Ensuite, nous explorerons le lien entre la reconstruction de la vitesse, de l'énergie cinétique et ses implications sur la stabilité numérique. Enfin, nous nous intéresserons à une reconstruction de la pression en deux étapes dans les cas où des pressions négatives pourraient apparaître.

### **Chapitre 5 : Une définition d'un schéma d'advection multidimensionnel à une seule étape**

Après avoir établi la nécessité d'un schéma en temps prenant en compte les mailles de coins dans le premier chapitre, ce cinquième chapitre proposera une adaptation de la méthode développée par Leveque, telle que présentée dans l'article [67]. Cette adaptation tiendra compte de notre méthode MLP présentée au chapitre 1. Nous définirons ce schéma en retrouvant les coefficients associés aux mailles de coins, puis comparerons ses performances avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre deux et une méthode de splitting. Cette comparaison portera sur l'ordre de la méthode et les temps de calcul. Par la suite, nous adapterons le schéma à un pas de temps pour les cas multimatériaux. Des résultats en trois dimensions seront également présentés, tout comme des applications au modèle multifluide.



# Chapitre 1

## Un schéma numérique original vraiment multidimensionnel pour la capture d'interface

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction du chapitre</b>	<b>16</b>
<b>1.2</b>	<b>Contexte mathématique de l'étude du schéma numérique</b>	<b>20</b>
<b>1.3</b>	<b>Influence de la discrétisation en temps</b>	<b>22</b>
1.3.1	Instabilités liées à la méthode d'Euler	22
1.3.2	Méthode de Runge-Kutta d'ordre deux	25
<b>1.4</b>	<b>Développement d'une reconstruction de pente multidimensionnelle pour la capture d'interface</b>	<b>26</b>
1.4.1	Éléments de compréhension	26
1.4.2	Approximation du gradient	28
1.4.3	Construction du limiteur	33
1.4.4	Analyse quantitative sur le cas Kothe-Rider	37
<b>1.5</b>	<b>Extension aux problèmes multimatériaux</b>	<b>40</b>
1.5.1	Propriétés de la méthode par flux renormalisés	42
1.5.2	Résultats numériques	46
<b>1.6</b>	<b>Résultats à trois dimensions en espace</b>	<b>51</b>
1.6.1	Extension de la reconstruction en trois dimensions	51
1.6.2	Résultats numériques	52
<b>1.7</b>	<b>Conclusion du chapitre</b>	<b>57</b>

---

## 1.1 Introduction du chapitre

Ce chapitre est dédié à la construction d'une méthode multidimensionnelle de capture d'interface, pour laquelle nous allons utiliser une méthode de reconstruction d'ordre élevé. Cela consiste à modifier les états constants sur chaque maille, en les substituant par des états reconstruits. L'une des solutions pour reconstruire un état sur une maille, est de remplacer l'approximation constante par une approximation affine. La reconstruction a pour but d'améliorer la précision de la solution numérique en évitant l'apparition d'oscillations, de nouveaux extremas parasites (ex : schéma de Lax-Wendroff [63]), tout en limitant la diffusion numérique (ex : schéma upwind [23]). Pour contrôler la reconstruction et garantir certaines propriétés, un limiteur de pente, noté  $\phi$ , est introduit. Il permet de contrôler l'intensité de la reconstruction et ainsi éviter la création de certains artefacts numériques. Dans la littérature, un grand nombre de limiteurs sont proposés afin de couvrir un large spectre de phénomènes physiques. Dans le cadre de cette thèse, nous souhaitons modéliser numériquement des fluides non miscibles. Nous cherchons donc à utiliser un limiteur anti-diffusif, dans le but d'éviter un mélange purement numérique provoquant une perte de précision.

De façon à se rendre compte de l'effet du limiteur, nous présentons sur la figure 1.1 le résultat de l'équation de transport (1.1) à vitesse  $u = 1$ , à une dimension d'espace avec différents limiteurs. Les conditions aux limites sont périodiques, ainsi à  $t = 1$  la solution est identique à la condition initiale.

Certains limiteurs sont "compressifs" (ex : Upper-bound, Ultrabee), l'interface reste sur un nombre fini de mailles et la diffusion numérique atteint un nombre de mailles au-delà duquel elle n'évolue plus. Nous pouvons aussi remarquer que les valeurs extrêmes, 0 et 1 dans ce cas, sont retrouvées avec ces limiteurs. Au contraire certains limiteurs semblent "diffusifs" (ex : min-mod, van Leer), l'interface se propage sur un nombre croissant de mailles et la diffusion augmente au cours du temps. Avec les limiteurs diffusifs, lorsque le temps final augmente, les valeurs extrêmes ne sont plus atteintes.

Malheureusement, il est connu que les méthodes de reconstruction de pente unidimensionnelle entraînent l'apparition d'artefacts numériques. En une seule dimension d'espace, le caractère compressif de certains limiteurs peut entraîner l'apparition d'escaliers dans les solutions régulières. Ces artefacts sont connus, les limiteurs sont donc choisis en fonction des propriétés attendues. Cependant, lorsqu'elles sont appliquées en plusieurs dimensions, ces méthodes font apparaître de nouveaux artefacts [102, 26].

Nous présentons un exemple d'artefact sur la figure 1.2, où un disque est advecté le long

# CHAPITRE 1. UN SCHÉMA NUMÉRIQUE ORIGINAL VRAIMENT MULTIDIMENSIONNEL POUR LA CAPTURE D'INTERFACE

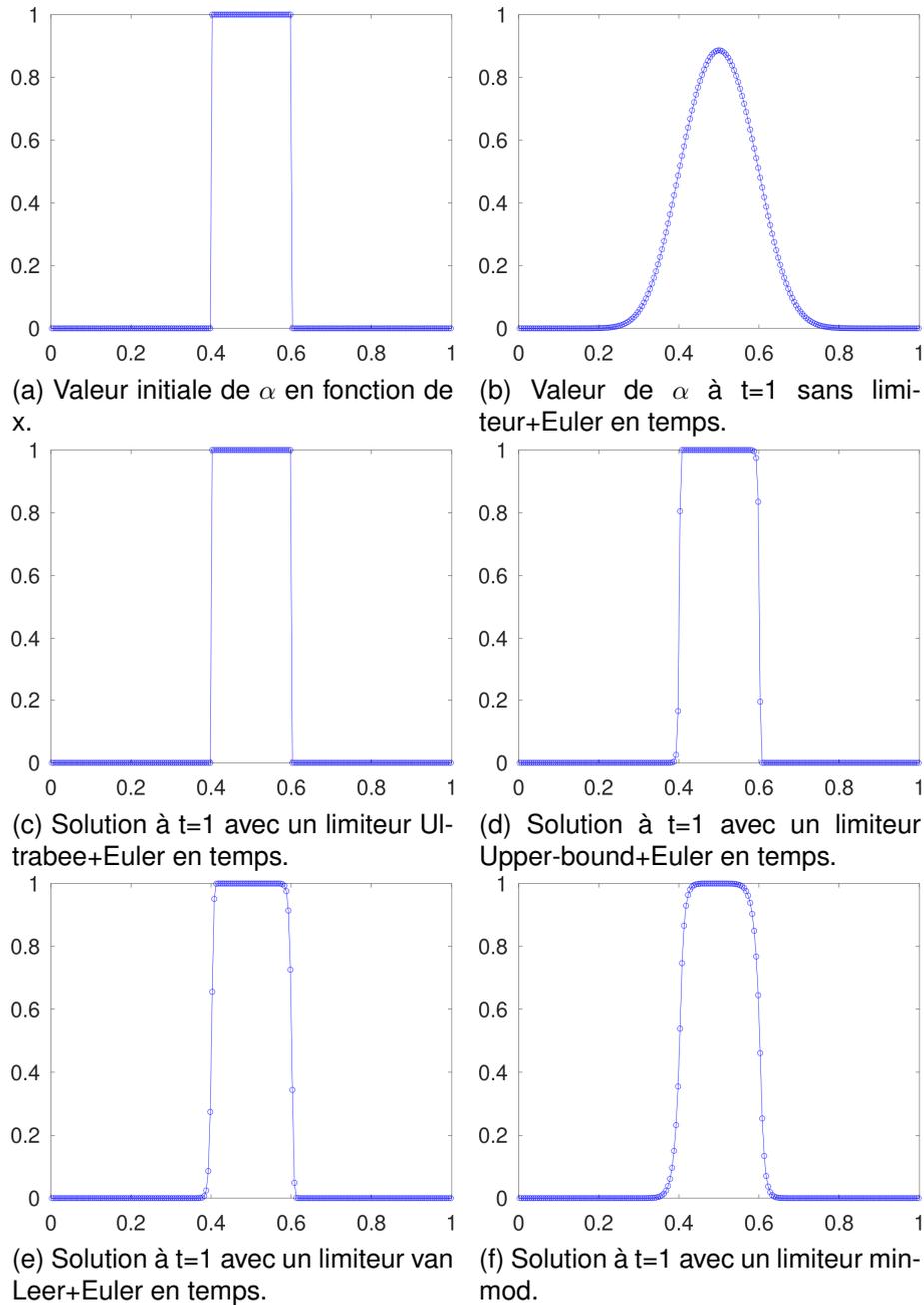


FIGURE 1.1 – Résultats obtenus pour une vitesse  $u=1$ , une condition initiale  $\alpha_0(x)=\mathbb{1}_{[-0.5;0.5]}$  avec 200 mailles et des conditions périodiques aux limites.

de la première bissectrice. À  $t=8$ , le support initialement circulaire s'est transformé en octogone (les détails sont donnés en partie 2). Dans l'article de Leveque & Goodman [44], les auteurs montrent que les limiteurs construits à partir du critère TVD (voir [49]) sont au maximum d'ordre un en dimension deux. Ce critère n'est donc pas pertinent pour les cas multidimensionnels. Il est nécessaire d'introduire une nouvelle condition afin d'utiliser

des limiteurs vraiment multidimensionnels. Dans la littérature relative aux processus de limitation multidimensionnels, le critère TVD est remplacé par le critère LED [60, 56]. Ce critère assure un principe du maximum local et garantit la stabilité de la reconstruction. La classe de limiteurs développée dans ce chapitre est construite à partir du critère LED.

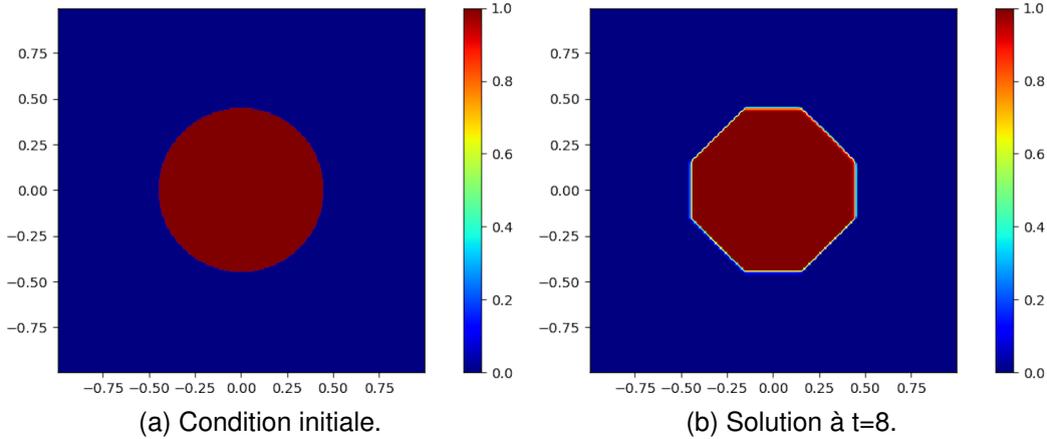


FIGURE 1.2 – Évolution d'un cercle avec une advection diagonale avec un schéma MUSCL+RK2 en temps et un limiteur Superbee. Les détails sont donnés sur la figure 1.7.

Nous allons développer une méthode MUSCL basée sur une reconstruction vraiment multidimensionnelle. Bien que les développements effectués puissent être utilisés dans un cadre général, nous travaillerons uniquement sur des maillages cartésiens. Dans ce chapitre, nous nous restreindrons également à un modèle d'advection en 2D avec un fluide incompressible :

$$\partial_t \alpha + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha = 0.$$

Où  $\mathbf{u}$  est le vecteur vitesse  $\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ .

**Remarque 1.** Dans le cas d'un fluide incompressible  $\alpha$  est aussi solution de l'équation de conservation :

$$\partial_t \alpha + \nabla \cdot (\mathbf{u} \alpha) = 0, \tag{1.1}$$

$$\text{car } \partial_t \alpha + \nabla \cdot (\mathbf{u} \alpha) = \partial_t \alpha + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha + \alpha \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Or  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  (hypothèse d'incompressibilité),

$$\Rightarrow \partial_t \alpha + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha = 0. \tag{1.2}$$

Avec  $\mathbf{u}$  la vitesse du fluide et  $\alpha \in [0;1]$  sa fraction volumique.

## CHAPITRE 1. UN SCHÉMA NUMÉRIQUE ORIGINAL VRAIMENT MULTIDIMENSIONNEL POUR LA CAPTURE D'INTERFACE

---

Le passage en dimension deux apporte des difficultés sur le schéma en espace, mais aussi en temps. Nous débuterons ce chapitre par la mise en évidence des artefacts liés au schéma en temps. Nous analyserons son origine puis nous corrigerons le schéma. Ensuite, nous nous intéresserons aux erreurs liées au schéma en espace. Nous exposerons les limites d'une approche dite direction par direction. Nous développerons alors une reconstruction vraiment multidimensionnelle. Tout d'abord en calculant un gradient tenant compte de toutes les mailles voisines, puis en définissant une classe de limiteurs basée sur le critère MLP. Nous étudierons alors le nouveau schéma aussi bien qualitativement (ordre du schéma) que quantitativement (étude numérique de l'erreur). Enfin, nous étendrons la méthode aux cas à  $L$  matériaux ( $L > 2$ ).

## 1.2 Contexte mathématique de l'étude du schéma numérique

Nous cherchons à approcher la solution de l'équation (1.1) suivante :

$$\partial_t \alpha + \nabla \cdot (\mathbf{u}\alpha) = 0. \quad (1.1)$$

Le maillage utilisé est cartésien et régulier, le pas de la discrétisation en espace est noté  $\Delta x$  en abscisse et  $\Delta y$  en ordonnée, le pas de temps est noté  $\Delta t$ . La valeur au centre de la maille  $(i, j)$  au temps  $t^n$  est :

$$\alpha_{i,j}^n = \alpha(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t),$$

et la valeur sur le bord droit de la maille  $(i, j)$  est :

$$\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^n = \alpha\left(\left(i + \frac{1}{2}\right)\Delta x, j\Delta y, n\Delta t\right).$$

Sur la figure 1.3 est représenté un maillage cartésien régulier.

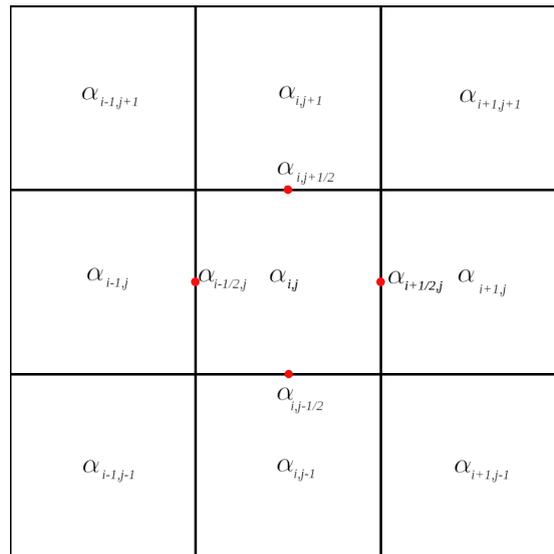


FIGURE 1.3 – Représentation d'un maillage à 9 mailles.

Nous nous intéressons, pour le moment, à une méthode MUSCL en espace et Euler en temps. Le schéma numérique est construit comme ceci :

$$\frac{\partial \alpha_{i,j}}{\partial t} \simeq \frac{\alpha_{i,j}^{n+1} - \alpha_{i,j}^n}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \nabla \cdot (\mathbf{u}\alpha_{i,j}) \simeq \frac{\psi_{i+\frac{1}{2},j} - \psi_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} + \frac{\psi_{i,j+\frac{1}{2}} - \psi_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y}.$$

Ce qui donne  $\alpha_{i,j}^{n+1} = \alpha_{i,j}^n - \Delta t \nabla \cdot (\mathbf{u}\alpha_{i,j})$ .

$$\text{Avec } \psi_{i+\frac{1}{2},j} = \begin{cases} u_x \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^-, & \text{si } u_x \geq 0, \\ u_x \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^+, & \text{si } u_x \leq 0, \end{cases} \quad \psi_{i,j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} u_y \alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^-, & \text{si } u_y \geq 0, \\ u_y \alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^+, & \text{si } u_y \leq 0. \end{cases}$$

$$\text{Où } \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^+ = \alpha_{i+1,j} - \frac{\Delta x}{2} s_{i+1,j}^x, \quad \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^- = \alpha_{i,j} + \frac{\Delta x}{2} s_{i,j}^x, \quad \text{avec } s_{i,j}^x = \frac{1}{h} \phi(\Delta_-^x \alpha_{i,j}, \Delta_+^x \alpha_{i,j}).$$

$$\text{Et } \alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^+ = \alpha_{i,j+1} - \frac{\Delta y}{2} s_{i,j+1}^y, \quad \alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^- = \alpha_{i,j} + \frac{\Delta y}{2} s_{i,j}^y, \quad \text{avec } s_{i,j}^y = \frac{1}{h} \phi(\Delta_-^y \alpha_{i,j}, \Delta_+^y \alpha_{i,j}).$$

Le limiteur est noté  $\phi$ , il va permettre de contrôler la pente de la reconstruction tout en conservant la propriété TVD [49].

$$\begin{aligned} \Delta_-^x \alpha_{i,j} &= \alpha_{i,j} - \alpha_{i-1,j} \quad (\text{resp} : \Delta_-^y \alpha_{i,j} = \alpha_{i,j} - \alpha_{i,j-1}), \\ \Delta_+^x \alpha_{i,j} &= \alpha_{i+1,j} - \alpha_{i,j} \quad (\text{resp} : \Delta_+^y \alpha_{i,j} = \alpha_{i,j+1} - \alpha_{i,j}). \end{aligned}$$

Nous définissons des limiteurs que nous utiliserons par la suite :

- Superbee :  $\phi^S(a, b) = \text{signe}(a) (ab > 0) \max(\min(|a|, 2|b|), \min(2|a|, |b|))$ ,
- Upper-Bound :  $\phi^{UB}(a, b) = 2\text{signe}(a) (ab > 0) \min(|a|, |b|)$ ,
- Min-mod :  $\phi^M(a, b) = \text{signe}(a) (ab > 0) \min(|a|, |b|)$ .

## 1.3 Influence de la discrétisation en temps

### 1.3.1 Instabilités liées à la méthode d'Euler

L'utilisation d'un limiteur de pente compressif peut conduire à des instabilités numériques à l'interface. Nous pouvons le vérifier avec les cas tests suivants. Sur les figures 1.4 et 1.5 apparaît un premier type d'erreur en forme de "zigzag" le long de l'interface.

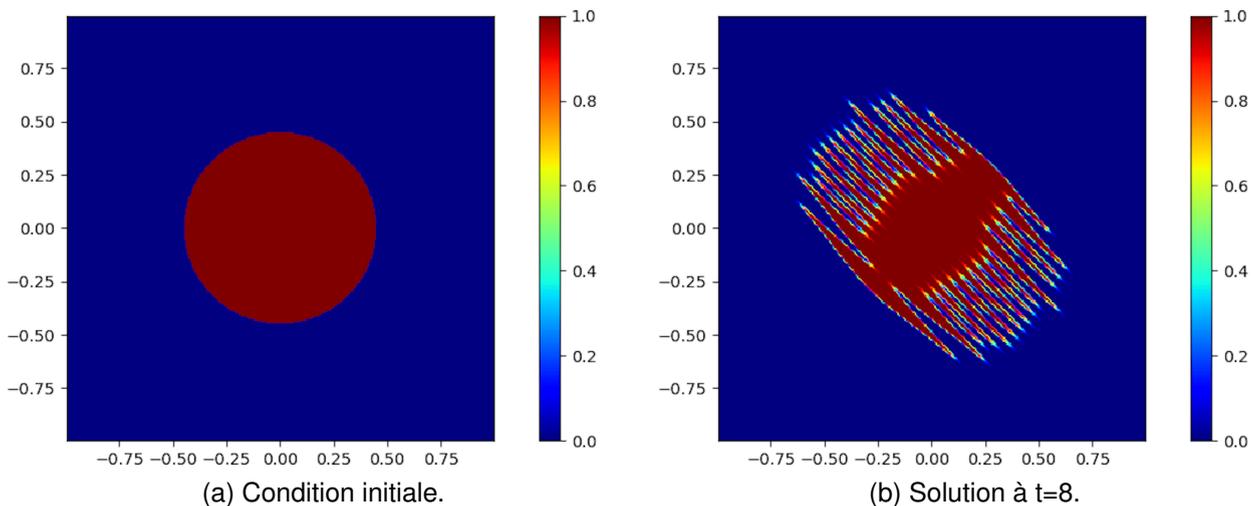
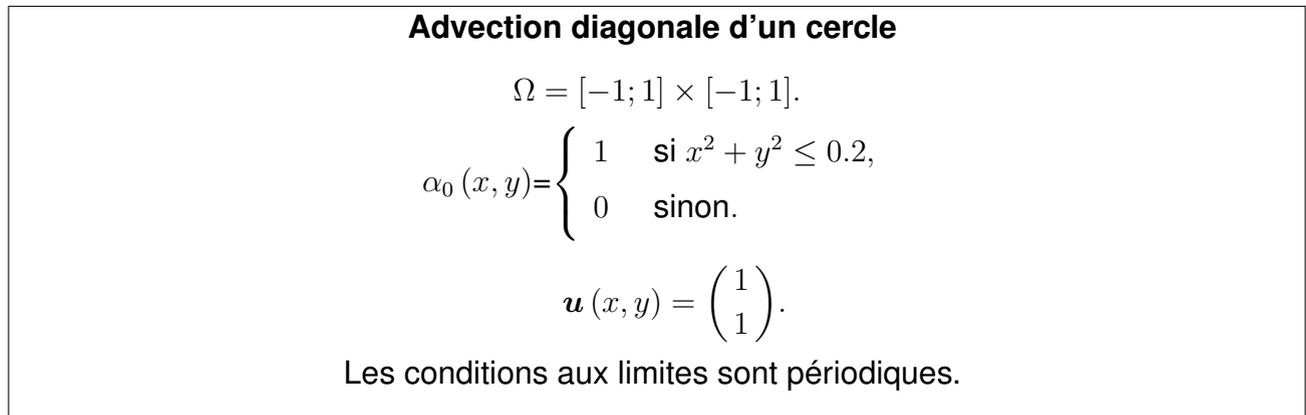


FIGURE 1.4 – **Advection diagonale d'un cercle** par méthode MUSCL+Euler avec le limiteur Upper-Bound. Résultat obtenu avec un maillage 300x300 et une CFL = 0.4. La fraction volumique  $\alpha$  est représentée par l'échelle de couleur.

**Cercle en rotation**

$$\Omega = [-1; 1] \times [-1; 1].$$

$$\alpha_0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x - 0.5)^2 + y^2 \leq 0.15, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Les conditions aux limites sont périodiques.

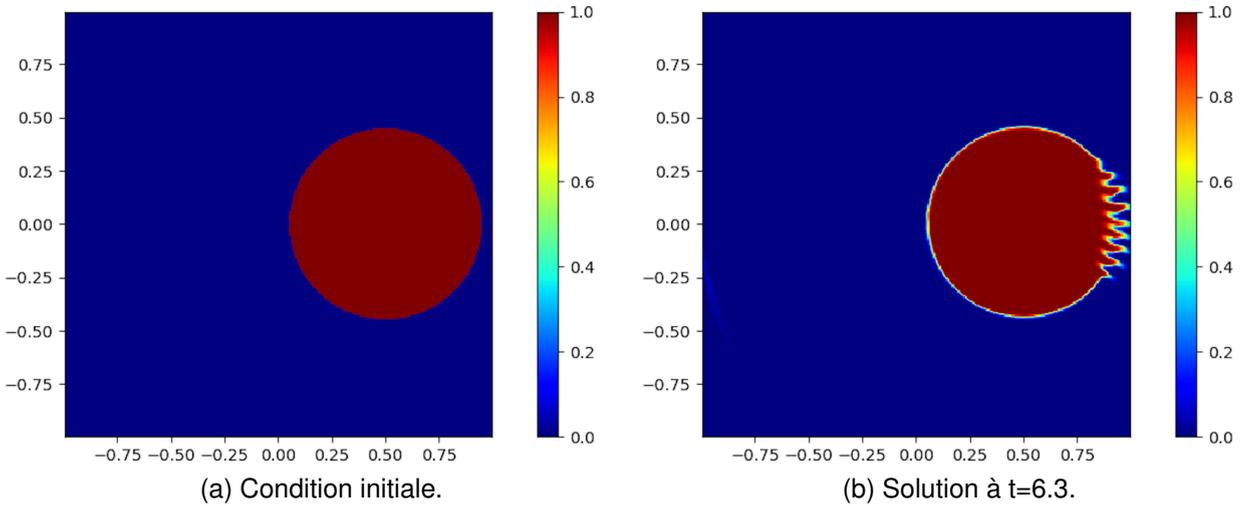


FIGURE 1.5 – **Cercle en rotation** par MUSCL+Euler avec le limiteur Superbee. Résultat obtenu avec un maillage 300x300 et une condition CFL = 0.4. La fraction volumique  $\alpha$  est représentée par l'échelle de couleur.

Pour expliquer ce phénomène, nous proposons d'étudier l'équation équivalente du schéma discrétisé en temps et continu en espace :

$$\frac{\alpha(x, y, t^{n+1}) - \alpha(x, y, t^n)}{\Delta t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\alpha(x, y, t^n)) = 0. \quad (1.3)$$

Le développement de Taylor d'ordre deux en temps de  $\alpha(x, y, t^{n+1})$  au temps  $t^n$  nous donne :

$$\alpha(x, y, t^{n+1}) = \alpha(x, y, t^n) + \Delta t \partial_t \alpha(x, y, t^n) + \frac{\Delta t^2 \partial_{tt}^2 \alpha(x, y, t^{n+1})}{2} + o(\Delta t^2).$$

Ensuite, il est injecté dans l'équation d'advection discrétisée en temps (1.3) :

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha(x, y, t^{n+1}) - \alpha(x, y, t^n)}{\Delta t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\alpha(x, y, t^n)) \\ &= \partial_t \alpha(x, y, t^n) + \frac{\Delta t \partial_{tt}^2 \alpha(x, y, t^n)}{2} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\alpha(x, y, t^n)) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Nous obtenons

$$\partial_t \alpha(x, y, t^n) + \nabla \cdot (\mathbf{u}\alpha(x, y, t^n)) = -\frac{\Delta t}{2} \partial_{tt}^2 \alpha(x, y, t^n) + o(\Delta t).$$

Or

$$\begin{aligned} & \partial_{tt}^2 \alpha(x, y, t^n) \\ &= -\partial_t \nabla \cdot (\mathbf{u}\alpha(x, y, t^n)) \\ &= -\nabla \cdot (\mathbf{u} \partial_t \alpha(x, y, t^n)) \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} \alpha(x, y, t^n)). \end{aligned}$$

Donc l'équation équivalente obtenue est :

$$\partial_t \alpha(x, y, t^n) + \nabla \cdot (\mathbf{u}\alpha(x, y, t^n)) = -\frac{\Delta t}{2} \nabla \cdot ((\mathbf{u}\mathbf{u}^t) \nabla \alpha(x, y, t^n)) + o(\Delta t). \quad (1.4)$$

La matrice  $A = \mathbf{u}\mathbf{u}^t$  est anti-diffusive, son noyau est  $Ker(A) = Vect(\mathbf{u}^\perp)$  et son image  $Im(A) = Vect(\mathbf{u})$ . À une dimension d'espace, le caractère anti-diffusif de la méthode d'Euler est connu. Une méthode MUSCL+Euler à une dimension d'espace est trop compressive pour les solutions régulières, et transforme ces solutions en créneau [31]. Dans les cas à deux dimensions d'espace, la méthode d'Euler est anti-diffusive mais uniquement dans la direction de l'image de  $A$ , donc du vecteur vitesse  $\mathbf{u}$ . Pour les gradients orthogonaux à la vitesse, au contraire, la méthode d'Euler n'empêche pas la diffusion. Cependant, nous utilisons des limiteurs eux aussi anti-diffusifs. Cela entraîne un conflit entre l'anisotropie de la diffusion du schéma en temps et le caractère anti-diffusif des limiteurs. La combinaison de ces deux effets conduit aux artefacts en "zigzag" visibles sur les figures 1.4 et 1.5.

Pour éviter ces instabilités, nous affirmons qu'il est nécessaire de faire intervenir les mailles de coins. En effet, la matrice  $A$  obtenue est de rang 1 ce qui entraîne une dif-

fusion anisotrope. Dans le cas où les mailles de coins interviendraient dans l'étape de transport, les dérivées croisées  $\partial_x \partial_y$  s'annuleraient. Nous obtiendrions alors une matrice anti-diffusive de rang 2, et cette fois-ci la diffusion serait limitée dans toutes les directions.

### 1.3.2 Méthode de Runge-Kutta d'ordre deux

Un schéma temporel à deux étapes fait naturellement intervenir les mailles diagonales. Nous choisissons d'utiliser une méthode de Runge-Kutta d'ordre deux (RK2) définie par :

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j}^{n+1} &= \alpha_{i,j}^n - \Delta t \nabla \cdot (\mathbf{u} \alpha_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}), \\ \text{avec } \alpha_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} &= \alpha_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2} \nabla \cdot (\mathbf{u} \alpha_{i,j}^n). \end{aligned} \quad (1.5)$$

On voit sur les figures 1.6 et 1.7 que la méthode RK2 corrige les artefacts en zigzag. Cependant un nouveau type d'artefact apparaît sur la figure 1.7.

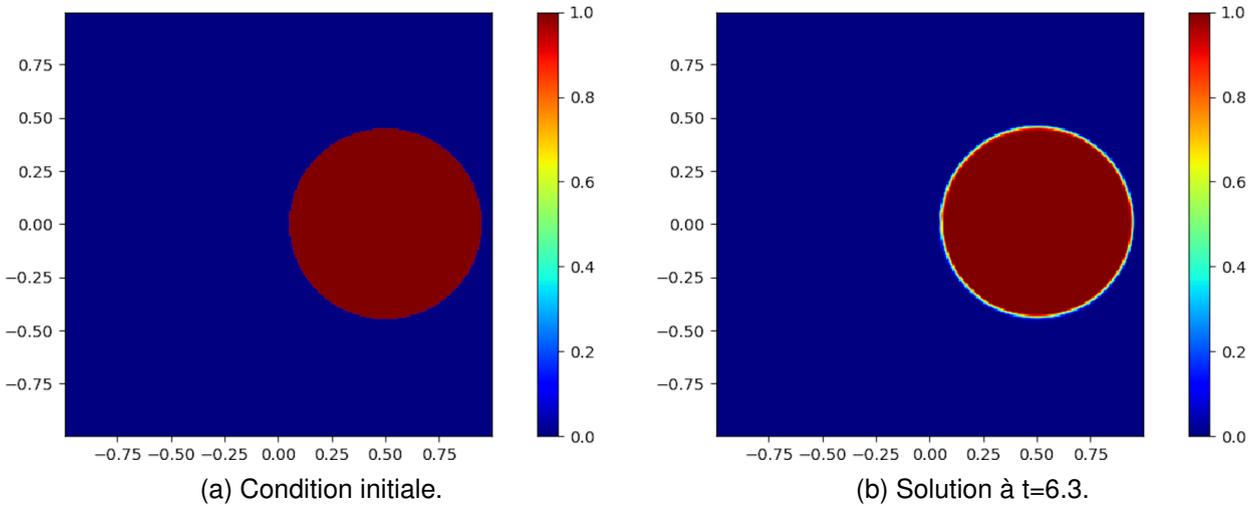


FIGURE 1.6 – **Cercle en rotation** par MUSCL+RK2 avec un maillage 300x300. La fraction volumique  $\alpha$  est représentée par l'échelle de couleur.

Dans le cas de l'**Advection diagonale d'un cercle**, le cercle initial se transforme en octogone avec la méthode MUSCL+RK2. Ce phénomène est montré sur la figure 1.7. Dans la partie suivante nous allons discuter des limites de l'extension des reconstructions unidimensionnelles aux cas multidimensionnels. Nous proposerons ensuite une méthode pour éviter ces artefacts géométriques.

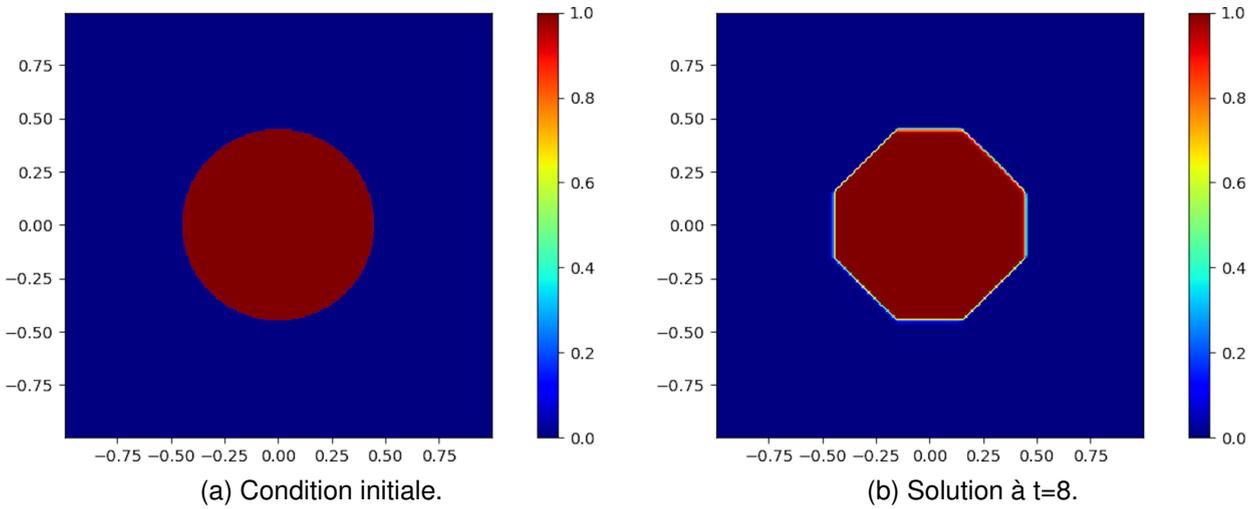


FIGURE 1.7 – **Advection diagonale d'un cercle** par MUSCL+RK2. Pour un maillage 300x300 et une CFL = 0.4. La fraction volumique  $\alpha$  est représentée par l'échelle de couleur.

## 1.4 Développement d'une reconstruction de pente multi-dimensionnelle pour la capture d'interface

### 1.4.1 Éléments de compréhension

La transformation du disque en octogone lors de l'advection diagonale, peut s'expliquer par l'équilibre des dérivées spatiales dans la reconstruction. Pour comprendre ce phénomène, nous représentons sur la figure 1.8 le cercle numérique à l'instant initial pour le cas **Advection diagonale d'un cercle**. Lorsque le centre d'une maille est contenu dans le cercle, la fraction volumique est initialisée à 1, sinon elle est initialisée à 0. Trois types de mailles sont colorées, chacune faisant apparaître une arête de l'octogone. Pour toutes les mailles en rouge, le gradient numérique, obtenu avec une reconstruction direction par direction, est vertical ( $\nabla_x^h \alpha = 0$ ) ce qui donne une interface horizontale sur toutes ces mailles. De la même façon, sur les mailles vertes, le gradient numérique est horizontal ( $\nabla_y^h \alpha = 0$ ), l'interface obtenue est verticale. Enfin, sur les mailles bleues, les gradients numériques sont égaux. Sur les mailles bleues, la reconstruction direction par direction donne  $\nabla_x^h \alpha = \nabla_y^h \alpha$ , l'interface est donc le long de la diagonale de la maille. Dans la figure 1.8, nous nous sommes placés dans le cas où  $\Delta x = \Delta y$ , regardons maintenant ce qu'il se passe si  $\Delta x \neq \Delta y$ .

Sur la figure 1.9  $\Delta x = 2\Delta y$ , encore une fois nous représentons en vert les mailles où  $\nabla_y^h \alpha = 0$ . Toutes les mailles en bleu ont le même gradient numérique. Avec une recons-

CHAPITRE 1. UN SCHÉMA NUMÉRIQUE ORIGINAL VRAIMENT  
MULTIDIMENSIONNEL POUR LA CAPTURE D'INTERFACE

truction direction par direction, nous allons à nouveau avoir une interface le long des diagonales sur ces mailles. Cependant,  $\Delta x = 2\Delta y$  implique cette fois  $2\nabla_x^h \alpha = \nabla_y^h \alpha$ . Dans ce cas de figure, le cercle initial va être déformé. Cependant, nous n'obtiendrons pas la même géométrie que dans le cas  $\Delta x = \Delta y$ .

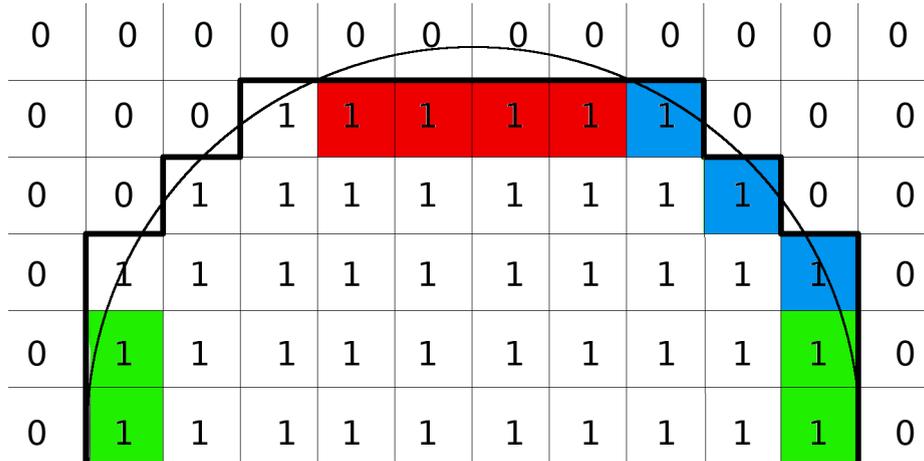


FIGURE 1.8 – Cercle au temps initial correspondant au cas **Advection diagonale d'un cercle**. Le trait en gras est la représentation numérique du cercle à  $t=0$ .

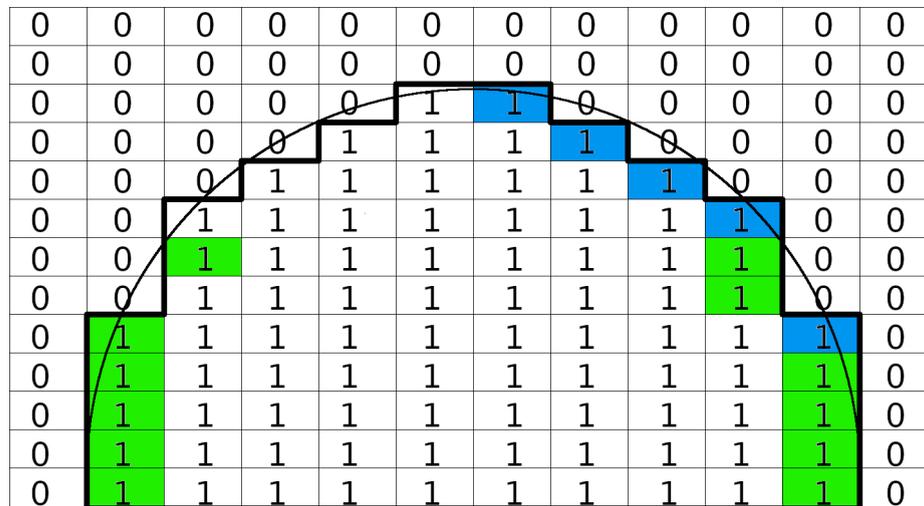


FIGURE 1.9 – Cercle au temps initial correspondant au cas **Advection diagonale d'un cercle** avec des mailles  $\Delta x = 2\Delta y$ . Le trait en gras est la représentation numérique du cercle à  $t=0$ .

Pour mieux se représenter la forme de l'interface dans une maille, nous isolons une des mailles bleues, pour les deux maillages présentés, sur la figure 1.10. Nous nous rendons compte que, plus nous raffinons le maillage en ordonnée, sans le raffiner en abscisse,

plus l'interface se rapproche de la verticale.

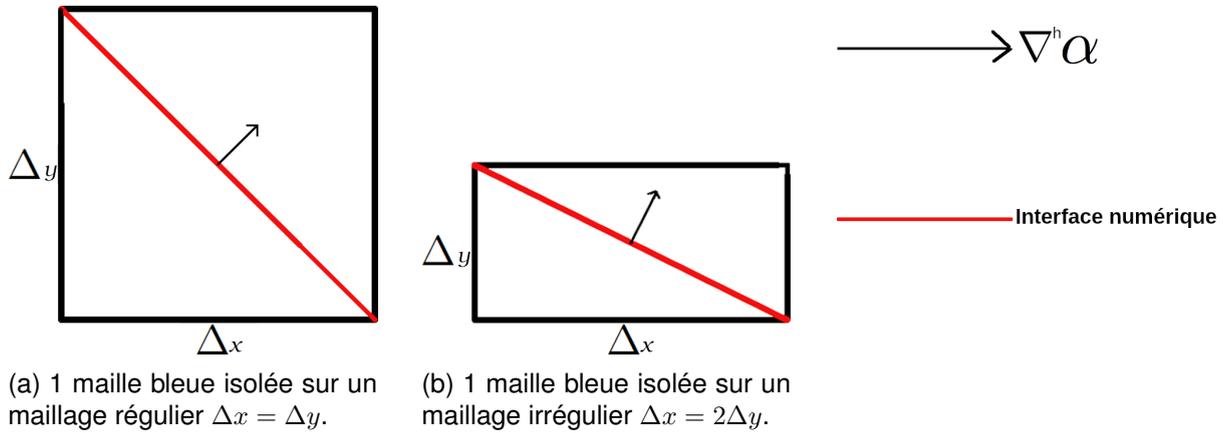


FIGURE 1.10 – Représentation de l'interface et du gradient en fonction du maillage.

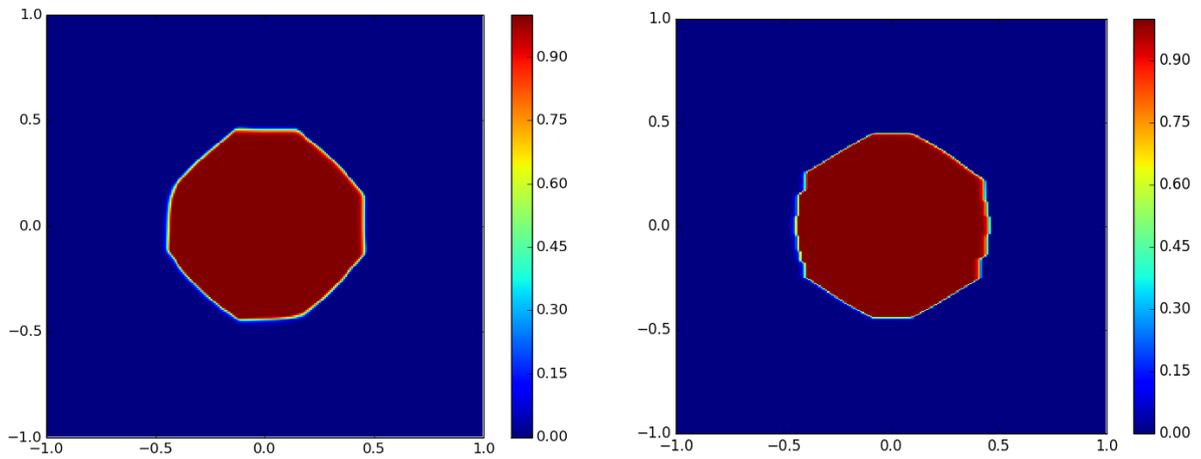
Pour vérifier cette hypothèse, nous testons le cas **Advection diagonale d'un cercle** sur différents maillages. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 1.11. Sur ces résultats, les artefacts attendus sont bien présents. Dans tous les cas, le cercle est déformé, et dans le cas où  $\Delta x = 10\Delta y$ , l'interface est proche de la verticale. Les simulations ont été volontairement rallongées, afin que toutes les géométries soient stabilisées.

Les artefacts liés à une reconstruction de pente direction par direction sont connus, il est possible d'utiliser des maillages non structurés pour limiter l'apparition de ces artefacts. Cependant, nous souhaitons insister sur la difficulté à conserver une géométrie convenable avec cette approche. Même si l'utilisation de maillage moins régulier limite les artefacts, il n'est pas à exclure qu'il déforme la solution numérique.

## 1.4.2 Approximation du gradient

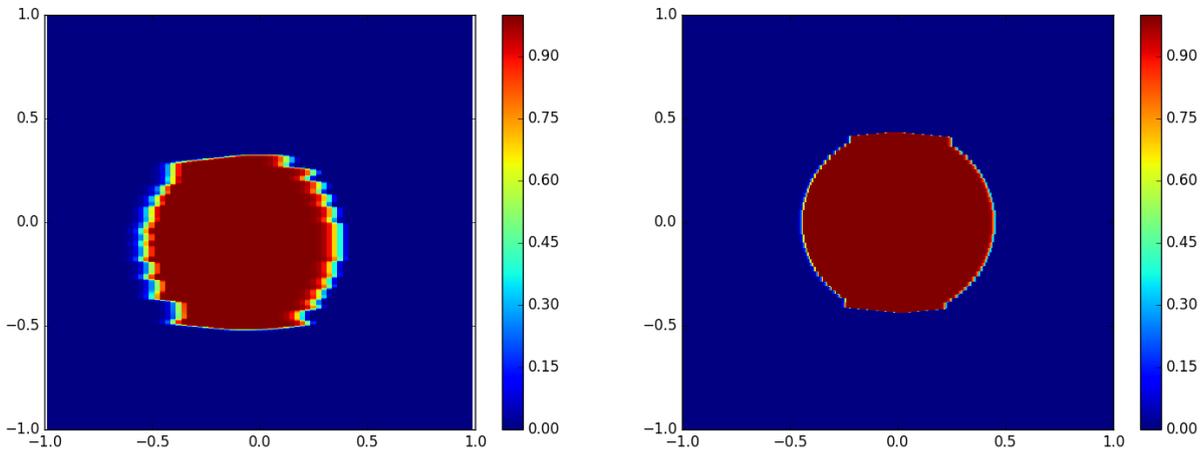
Dans la partie précédente, nous avons mis en évidence la cause des artefacts générés par une mauvaise approximation du gradient. Pour corriger ces artefacts nous allons mettre en place un schéma réellement multidimensionnel. Dans la suite de ce chapitre, nous utiliserons un pas d'espace égal en abscisse et en ordonnée. Le pas d'espace sera désormais noté  $h$ , où  $h = \Delta x = \Delta y$ . Nous choisissons d'approcher  $(\nabla\alpha)_{i,j}$  sur la maille  $V_{i,j}$  par une méthode de volumes finis comme ceci :

$$(\nabla\alpha)_{i,j} \simeq \frac{1}{|V_{i,j}|} \int_{V_{i,j}} \nabla\alpha(x,y) dx dy.$$



(a) Solution à  $t=30$  pour un maillage  $300 \times 300$ .

(b) Solution à  $t=30$  pour un maillage  $300 \times 600$ .



(c) Solution à  $t=30$  pour un maillage  $80 \times 800$ .

(d) Solution à  $t=30$  pour un maillage  $300 \times 3000$ .

FIGURE 1.11 – **Advection diagonale d'un cercle** avec une méthode MUSCL+RK2 pour différents maillages et une  $CFL = 0.4$ . La fraction volumique est représentée par l'échelle de couleur.

Où  $|V_{i,j}|$  est le volume de la maille  $i, j$ .

En appliquant la formule de Green, cela conduit à :

$$(\nabla \alpha)_{i,j} \simeq \frac{1}{|V_{i,j}|} \int_{\partial V_{i,j}} \alpha \vec{n}_{\partial V_{i,j}} d\sigma.$$

Avec  $\partial V_{i,j}$  le bord de la maille  $V_{i,j}$  et  $\vec{n}_{\partial V_{i,j}}$  la normale sortante au bord.

L'intégrale au bord est égale à la somme des intégrales sur chaque arête, ce qui donne :

$$\begin{aligned} (\nabla \alpha)_{i,j} &\simeq \frac{1}{|V_{i,j}|} \int_{\partial V_{i,j}} \alpha \vec{n}_{\partial V_{i,j}} d\sigma \\ &= \frac{1}{|V_{i,j}|} \sum_{S \subset \partial V_{i,j}} \int_S \alpha \vec{n}_S d\sigma. \end{aligned}$$

Où  $S$  correspond aux arêtes de la maille  $(i, j)$ .

L'intégrale sur  $S$  est approximée par une méthode de Simpson, ce qui donne :

$$\int_S \alpha dy \simeq \frac{h}{6} \alpha_{i+\frac{1}{2},j+1} + \frac{2h}{3} \alpha_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{h}{6} \alpha_{i+\frac{1}{2},j-1}.$$

$$\text{Où } \alpha_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\alpha_{i+1,j} + \alpha_{i,j}}{2}.$$

L'approximation numérique du gradient obtenu est la suivante :

$$\nabla \alpha_{i,j} \simeq \nabla^h \alpha_{i,j} = \frac{1}{h} \left( \begin{array}{l} \frac{1}{12} (\alpha_{i+1,j+1} - \alpha_{i-1,j+1}) + \frac{1}{3} (\alpha_{i+1,j} - \alpha_{i-1,j}) + \frac{1}{12} (\alpha_{i+1,j-1} - \alpha_{i-1,j-1}) \\ \frac{1}{12} (\alpha_{i+1,j+1} - \alpha_{i+1,j-1}) + \frac{1}{3} (\alpha_{i,j+1} - \alpha_{i,j-1}) + \frac{1}{12} (\alpha_{i-1,j+1} - \alpha_{i-1,j-1}) \end{array} \right) \quad (1.6)$$

Nous utiliserons aussi les notations  $\nabla_x^h \alpha_{i,j}$  et  $\nabla_y^h \alpha_{i,j}$  tel que  $\nabla^h \alpha_{i,j} \begin{pmatrix} \nabla_x^h \alpha_{i,j} \\ \nabla_y^h \alpha_{i,j} \end{pmatrix}$ .

Nous avons une nouvelle approximation de  $\nabla \alpha$  sur chaque maille, ce qui nous permet de définir  $\hat{\alpha}(x, y, t)_{i,j}$ .

**Définition 1.** On note  $\hat{\alpha}(x, y, t)_{i,j}$ , la reconstruction affine de la fraction volumique  $\alpha$  sur la maille  $(i, j)$  au point de coordonnées  $(x, y)$  à l'instant  $t$ .

$$\hat{\alpha}(x, y, t)_{i,j} = \alpha(t)_{i,j} + \phi(t)_{i,j} \begin{pmatrix} (x - x_{i,j}) \\ (y - y_{i,j}) \end{pmatrix} \cdot \nabla^h \alpha(t)_{i,j}. \quad (1.7)$$

Avec  $\phi(t)_{i,j}$  un limiteur multidimensionnel à définir.

**Propriété 1.** Soit  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

Si pour tout  $i, j$   $\phi(t)_{i,j} = 1$  alors le schéma semi-discret en espace

$$\partial_t \alpha(x_i, y_j, (t)) = - \frac{u_x \hat{\alpha}(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j, t)_{i,j} - u_x \hat{\alpha}(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j, t)_{i-1,j}}{h} - \frac{u_y \hat{\alpha}(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}, t)_{i,j} - u_y \hat{\alpha}(x_i, y_{j-\frac{1}{2}}, t)_{i-1,j}}{h}, \quad (1.8)$$

est d'ordre deux en espace. Avec  $\hat{\alpha}(x, y, t)_{i,j}$  défini par la formule (1.7).

*Démonstration.* On cherche à montrer que l'erreur de l'équation équivalente est un  $O(h^2)$  où  $h = \Delta x = \Delta y$ .

$$\hat{\alpha}(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j, t)_{i-1,j} = \alpha(t)_{i-1,j} + \frac{h}{2} \phi(t)_{i-1,j} \nabla_x^h \alpha(t)_{i-1,j}.$$

$$\hat{\alpha}(x_i, y_{j-\frac{1}{2}}, t)_{i,j-1} = \alpha(t)_{i,j-1} + \frac{h}{2} \phi(t)_{i,j-1} \nabla_y^h \alpha(t)_{i,j-1}.$$

Le développement de Taylor à l'ordre 2 au point  $(x_i, y_j)$  de  $\alpha(t)_{i-1,j}$  et  $\alpha(t)_{i,j-1}$  donne :

$$\alpha(t)_{i-1,j} = \alpha(t)_{i,j} - h \partial_x \alpha(t)_{i,j} + \frac{h^2}{2} \partial_{xx} \alpha(t)_{i,j} + O(h^3),$$

$$\alpha(t)_{i,j-1} = \alpha(t)_{i,j} - h \partial_y \alpha(t)_{i,j} + \frac{h^2}{2} \partial_{yy} \alpha(t)_{i,j} + O(h^3).$$

On fait aussi un développement de Taylor à l'ordre 2 de  $\nabla^h \alpha(t)_{i,j}$ , de  $\nabla^h \alpha(t)_{i-1,j}$  et de  $\nabla^h \alpha(t)_{i,j-1}$  autour de  $(x_i, y_j)$ .

$$\begin{aligned} \nabla^h \alpha(t)_{i,j} \cdot \begin{pmatrix} \frac{h}{2} \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} \left( \alpha(t)_{i+1,j+1} - \alpha(t)_{i-1,j+1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \left( \alpha(t)_{i+1,j} - \alpha(t)_{i-1,j} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} \left( \alpha(t)_{i+1,j-1} - \alpha(t)_{i-1,j-1} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} \left( 2h \partial_x \alpha(t)_{i,j} + 2h^2 \partial_{xy} \alpha(t)_{i,j} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \left( 2h \partial_x \alpha(t)_{i,j} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} \left( 2h \partial_x \alpha(t)_{i,j} - 2h^2 \partial_{xy} \alpha(t)_{i,j} \right) + O(h^3) \right) \\ &= \frac{h}{2} \partial_x \alpha(t)_{i,j} + O(h^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^h \alpha(t)_{i,j} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h}{2} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} \left( \alpha(t)_{i+1,j+1} - \alpha(t)_{i+1,j-1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} \left( \alpha(t)_{i,j+1} - \alpha(t)_{i,j-1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{12} \left( \alpha(t)_{i-1,j+1} - \alpha(t)_{i-1,j-1} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} \left( 2h \partial_y \alpha(t)_{i,j} + 2h^2 \partial_{xy} \alpha(t)_{i,j} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} \left( 2h \partial_y \alpha(t)_{i,j} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{12} \left( 2h \partial_y \alpha(t)_{i,j} - 2h^2 \partial_{xy} \alpha(t)_{i,j} \right) + O(h^3) \right) \\
&= \frac{h}{2} \partial_y \alpha(t)_{i,j} + O(h^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^h \alpha(t)_{i-1,j} \cdot \begin{pmatrix} \frac{h}{2} \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} \left( \alpha(t)_{i,j+1} - \alpha(t)_{i-2,j+1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} \left( \alpha(t)_{i,j} - \alpha(t)_{i-2,j} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{12} \left( \alpha(t)_{i,j-1} - \alpha(t)_{i-2,j-1} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} \left( 2h \partial_x \alpha(t)_{i,j} - 2h^2 \partial_{xx} \alpha(t)_{i,j} + 2h^2 \partial_{xy} \alpha(t)_{i,j} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} \left( 2h \partial_x \alpha(t)_{i,j} - 2h^2 \partial_{xx} \alpha(t)_{i,j} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{12} \left( 2h \partial_x \alpha(t)_{i,j} - 2h^2 \partial_{xx} \alpha(t)_{i,j} - 2h^2 \partial_{xy} \alpha(t)_{i,j} \right) + O(h^3) \right) \\
&= \frac{h}{2} \partial_x \alpha(t)_{i,j} - \frac{h^2}{2} \partial_{xx} \alpha(t)_{i,j} + O(h^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^h \alpha(t)_{i,j-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h}{2} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} \left( \alpha(t)_{i+1,j} - \alpha(t)_{i+1,j-2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} \left( \alpha(t)_{i,j} - \alpha(t)_{i,j-2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{12} \left( \alpha(t)_{i-1,j} - \alpha(t)_{i-1,j-2} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} \left( 2h\partial_y \alpha(t)_{i,j} - 2h^2\partial_{yy} \alpha(t)_{i,j} + 2h^2\partial_{xy} \alpha(t)_{i,j} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} \left( 2h\partial_y \alpha(t)_{i,j} - 2h^2\partial_{yy} \alpha(t)_{i,j} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{12} \left( 2h\partial_y \alpha(t)_{i,j} - 2h^2\partial_{yy} \alpha(t)_{i,j} - 2h^2\partial_{xy} \alpha(t)_{i,j} \right) + O(h^3) \right) \\
&= \frac{h}{2} \partial_y \alpha(t)_{i,j} - \frac{h^2}{2} \partial_{yy} \alpha(t)_{i,j} + O(h^3).
\end{aligned}$$

En injectant les développements précédents dans l'équation (1.8), on trouve :

$$\partial_t \alpha(t)_{i,j}^n + \nabla \cdot (\mathbf{u} \alpha(t)_{i,j}) = O(h^2).$$

□

Le schéma obtenu est similaire au schéma de Lax-Wendroff [63] avec un gradient multidimensionnel, il est bien d'ordre deux en espace. Cependant, comme le schéma de Lax-Wendroff à une dimension d'espace, les  $\alpha_{i,j}$  des extrema parasites apparaissent. Dans la partie suivante, nous allons construire un limiteur multidimensionnel afin de conserver les  $\alpha_{i,j} \in [0; 1]$  et ainsi éviter l'apparition de nouveaux extremas.

### 1.4.3 Construction du limiteur

Dans le cas des écoulements multidimensionnels à grande vitesse, le critère TVD n'est plus pertinent [52]. C'est pourquoi, le processus de limitation que nous utilisons est défini à partir d'un autre principe : MLP. Il a été introduit par Kim et Kim, d'abord à deux dimensions d'espace dans l'article [56], puis étendu à trois dimensions d'espace [106]. L'idée est de limiter la pente de la reconstruction en fonction de toutes les mailles voisines, dans le but de garantir un principe du maximum sur la reconstruction. Cela évite la création de nouveaux extremas, tout en permettant de contenir la diffusion numérique. Le critère MLP est applicable à des maillages non structurés, mais dans ce manuscrit nous travaillerons sur des maillages cartésiens réguliers.

Ce critère s'écrit sur chaque coin de la maille sous la forme :

$$\underline{\alpha}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \leq \hat{\alpha} \left( x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} \right)_{i,j} \leq \bar{\alpha}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}},$$

avec  $\underline{\alpha}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \min(\alpha_{i,j}, \alpha_{i+1,j}, \alpha_{i,j+1}, \alpha_{i+1,j+1})$ ,

et  $\bar{\alpha}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \max(\alpha_{i,j}, \alpha_{i+1,j}, \alpha_{i,j+1}, \alpha_{i+1,j+1})$ .

On a donc :  $\underline{\alpha}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \leq \alpha_{i,j} + \phi_{i,j} \nabla^h \alpha_{i,j} \cdot \left( \frac{h}{2} \right) \leq \bar{\alpha}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi_{i,j} \leq \frac{\bar{\alpha}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \alpha_{i,j}}{\nabla^h \alpha_{i,j} \cdot \left( \frac{h}{2} \right)}, & \text{si } \nabla^h \alpha_{i,j} \cdot \left( \frac{h}{2} \right) > 0, \\ \phi_{i,j} \leq \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \alpha_{i,j}}{\nabla^h \alpha_{i,j} \cdot \left( \frac{h}{2} \right)}, & \text{si } \nabla^h \alpha_{i,j} \cdot \left( \frac{h}{2} \right) < 0. \end{cases}$$

Cela doit être vrai pour les 4 coins de la maille. Dans un premier temps, il convient de définir un limiteur sur chaque coin :

$$\phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \alpha_{i,j}}{\nabla^h \alpha_{i,j} \cdot \left( \frac{h}{2} \right)}, & \text{si } \nabla^h \alpha_{i,j} \cdot \left( \frac{h}{2} \right) < 0, \\ \frac{\bar{\alpha}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \alpha_{i,j}}{\nabla^h \alpha_{i,j} \cdot \left( \frac{h}{2} \right)}, & \text{si } \nabla^h \alpha_{i,j} \cdot \left( \frac{h}{2} \right) > 0. \end{cases}$$

Ensuite, le limiteur sur toute la maille est défini comme le minimum des 4 :

$$\phi_{i,j,\beta} = \min \left( \beta, \phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \phi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \phi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}, \phi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right). \quad (1.9)$$

Nous introduisons  $\beta$ , un paramètre positif permettant de contrôler la compression de l'interface. Nous pouvons alors étendre les limiteurs unidimensionnels au cadre multidimensionnel.

$$\phi_{i,j,UB} = \phi_{i,j,2}.$$

$$\phi_{i,j,min-mod} = \min \left( 1, \frac{\phi_{i,j,2}}{2} \right).$$

$$\phi_{i,j,vanLeer} = \frac{\phi_{i,j,\infty}}{1 + \frac{\phi_{i,j,\infty}}{2}}$$

$$\phi_{i,j,Superbee} = \max \left( \min(\phi_{i,j,2}, 1), \min \left( 2, \frac{\phi_{i,j,2}}{2} \right) \right).$$

Sur la figure 1.12 sont représentés les résultats pour le cas de l'**Advection diagonale d'un cercle** à  $t=8$  avec différents limiteurs. L'octogone obtenu dans la partie précédente, avec les limiteurs unidimensionnels, est corrigé. Le gradient multidimensionnel associé aux limiteurs basés sur le critère MLP conserve la forme de cercle à  $t=8$ .

On remarque que la diffusion n'est pas isotrope pour chaque limiteur, particulièrement avec le limiteur MLP-Superbee.

Pour étudier le caractère diffusif de ces limiteurs, nous définissons le cas test pseudo multidimensionnel suivant :

**Pseudo-2D**

$$\Omega = [-4; 4] \times [0; 4\Delta x]$$

$$\alpha_0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } -3 \leq x \leq -2 \\ \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-1)+1\right)}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les conditions aux limites sont périodiques.

La condition initiale est composée d'un créneau discontinu et d'une fonction régulière. L'objectif ici est de tester la diffusion des limiteurs définis. Nous nous restreignons à un déplacement unidimensionnel afin de simplifier l'étude de la diffusion. Nous utilisons des conditions périodiques aux bords pour pouvoir comparer la solution finale à la condition initiale.

Sur la figure 1.13, le caractère compressif du limiteur MLP-UB est mis en évidence. En effet, la partie régulière de la solution est déformée et forme des marches d'escalier. En temps long, elle se dégraderait jusqu'à obtenir un créneau. La partie discontinue, quant à elle, est bien conservée et une fois un certain seuil atteint, la diffusion n'évolue plus.

Au contraire, les limiteurs MLP-Superbee, MLP-van Leer et MLP-min-mod préservent la

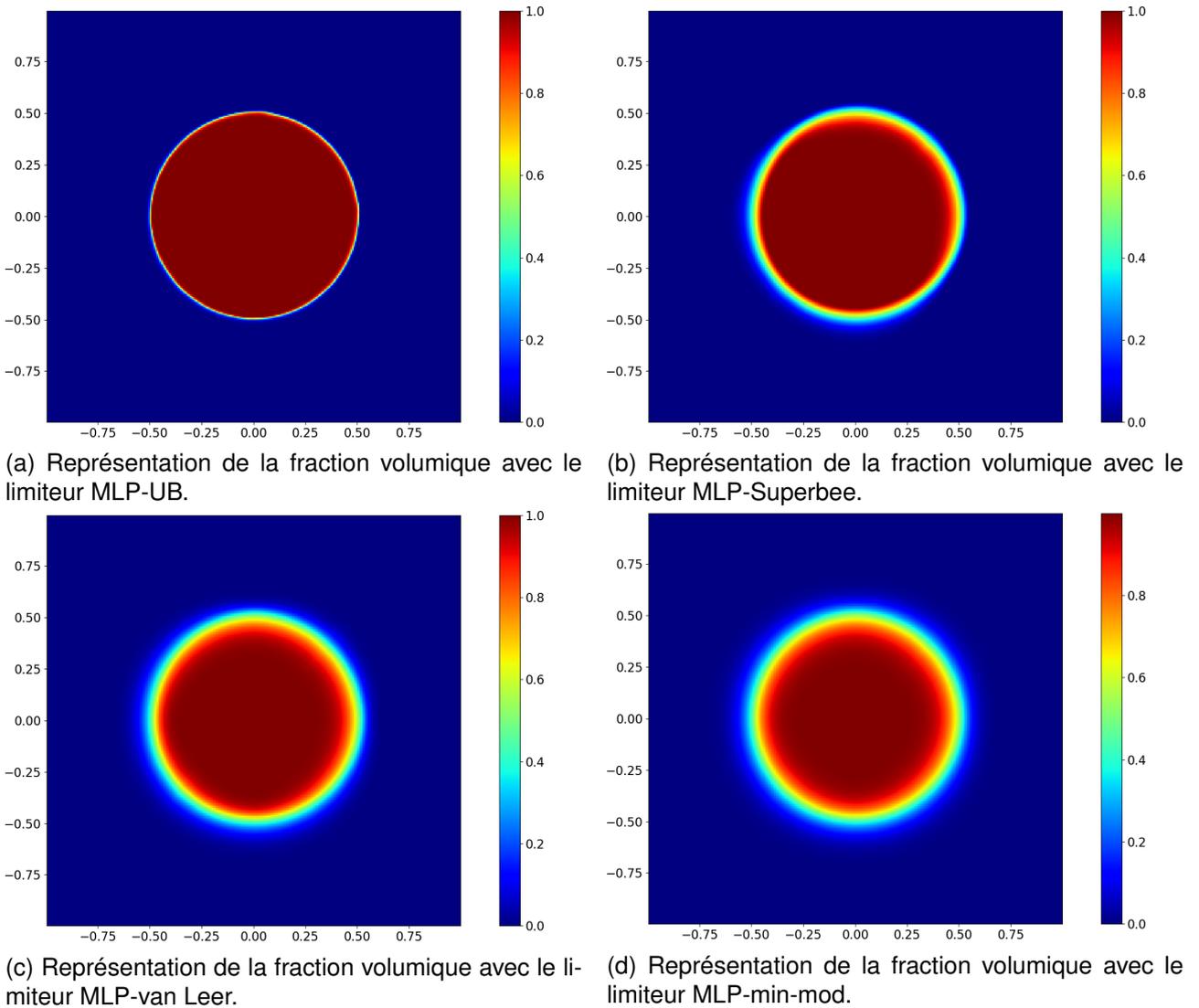


FIGURE 1.12 – **Advection diagonale d'un cercle** à  $t=8$  avec un maillage  $300 \times 300$  et une  $CFL = 0.4$ . Résultats obtenus avec différents limiteurs pour la méthode MLP+RK2.

partie régulière de la solution. Malheureusement, ces limiteurs ne permettent pas de capturer précisément le créneau. Ces limiteurs sont diffusifs, la diffusion ne cesse d'évoluer au cours du temps et les extremas ne sont pas maintenus en temps long.

Malgré le caractère diffusif de ces trois limiteurs, ils ne se comportent pas tous de la même façon. MLP-Superbee maintient les extremas plus longtemps au prix d'une perte de symétrie. MLP-min-mod lui est le plus diffusif des limiteurs étudiés néanmoins il est celui qui présente la meilleure symétrie.

Dans le but de représenter les fractions volumiques, nous nous intéressons principalement au comportement des limiteurs non diffusifs. Dans la suite de ce chapitre, nous

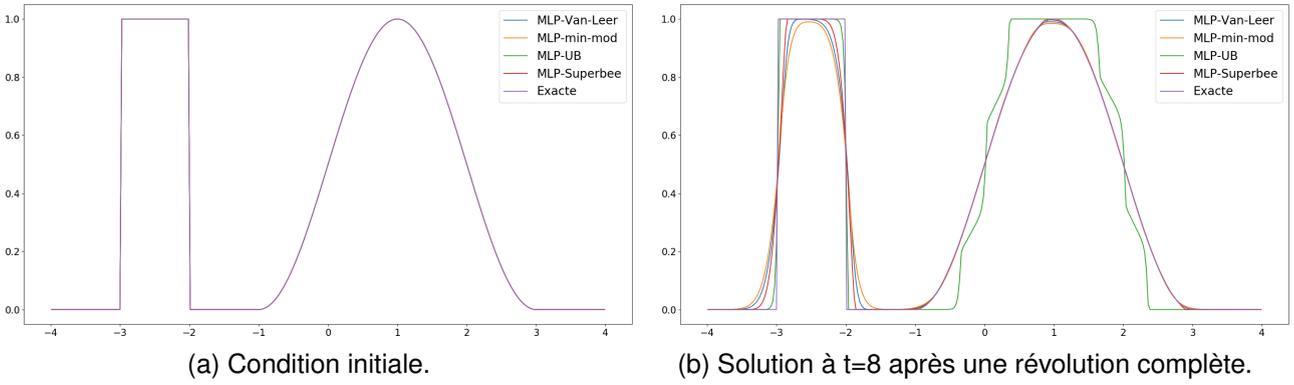


FIGURE 1.13 – Coupe horizontale pour le cas **Pseudo-2D** pour un maillage 300x4 et une condition CFL = 0.3. Résultats obtenus avec MLP+RK2 pour différents limiteurs.

étudierons exclusivement le comportement de  $\phi_{i,j,UB}$ . Les autres limiteurs sont des limiteurs diffusifs destinés aux variables régulières. Ils ne sont pas pertinents en présence des discontinuités liées à l'immiscibilité des fluides.

#### 1.4.4 Analyse quantitative sur le cas Kothe-Rider

Dans cette partie, nous allons étudier plus en détail le comportement de la méthode MLP+RK2 muni du limiteur  $\phi_{i,j,UB}$ .

Nous mettons en œuvre un cas présenté par Kothe et Rider dans l'article [84], afin de valider le schéma MLP.

La condition initiale est la suivante :

**Kothe-Rider**

$\Omega = [0; 1] \times [0; 1].$

$$\alpha_0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x - 0.75)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.03, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \begin{pmatrix} -\sin(\pi y) \cos(\pi y) \sin(\pi x) \sin(\pi x) \cos(\pi \frac{t}{T}) \\ \sin(\pi x) \cos(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi y) \cos(\pi \frac{t}{T}) \end{pmatrix}.$$

Les conditions aux limites sont périodiques.

**Remarque 2.** Le champ de vitesse reste dans le cadre des écoulements incompressibles, il vérifie  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ .

## CHAPITRE 1. UN SCHÉMA NUMÉRIQUE ORIGINAL VRAIMENT MULTIDIMENSIONNEL POUR LA CAPTURE D'INTERFACE

Le cas de référence proposé par Rider et Kothe correspond à la déformation d'un disque dans un champ de vitesse en rotation et en étirement. Le champ de vitesse est inversé à  $t = \frac{T}{2}$ , ainsi la solution au temps final est la même qu'à l'instant initial (processus réversible). Cela nous permet d'évaluer la justesse de l'approche en mesurant l'écart entre la solution au temps final et la solution initiale. Nous avons effectué deux tests avec deux niveaux de grille, le premier avec un maillage 350x350 et le second 500x500. En utilisant la grille la plus grossière, on peut observer une altération de la solution finale, principalement en raison de la diffusion numérique produite par le processus d'étirement, mais la forme initiale du disque est préservée. Le processus de capture d'interface à faible diffusion est capable de capturer l'effet d'étirement, sans aucun artefact, ni instabilité.

Sur ce cas test, deux types d'erreurs sont souvent retrouvés. La première est la difficulté à revenir à un disque à l'instant final. La seconde est la fragmentation de la solution lors de l'étirement. Dans notre cas, le fluide reste connexe tout au long de la simulation, sans apparition d'éclats dans la zone étirée. Pour la grille 500x500, la solution discrète à l'instant final, est très satisfaisante avec une forme de disque conservée, ce qui montre la justesse de la méthode.

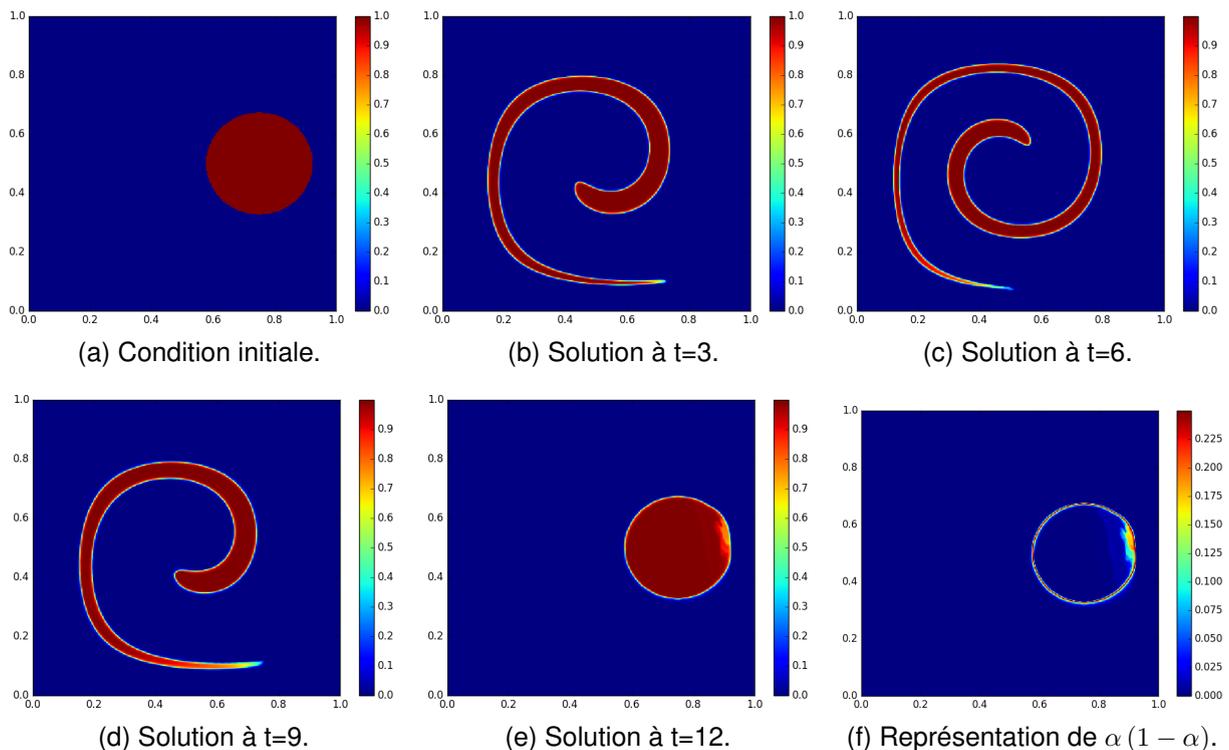


FIGURE 1.14 – Validation du code MLP-UB+RK2 sur **Kothe-Rider**, avec un maillage 350x350 et une CFL = 0.3. La fraction volumique est représentée par l'échelle de couleur. Le temps final est  $T=12$ .

# CHAPITRE 1. UN SCHÉMA NUMÉRIQUE ORIGINAL VRAIMENT MULTIDIMENSIONNEL POUR LA CAPTURE D'INTERFACE

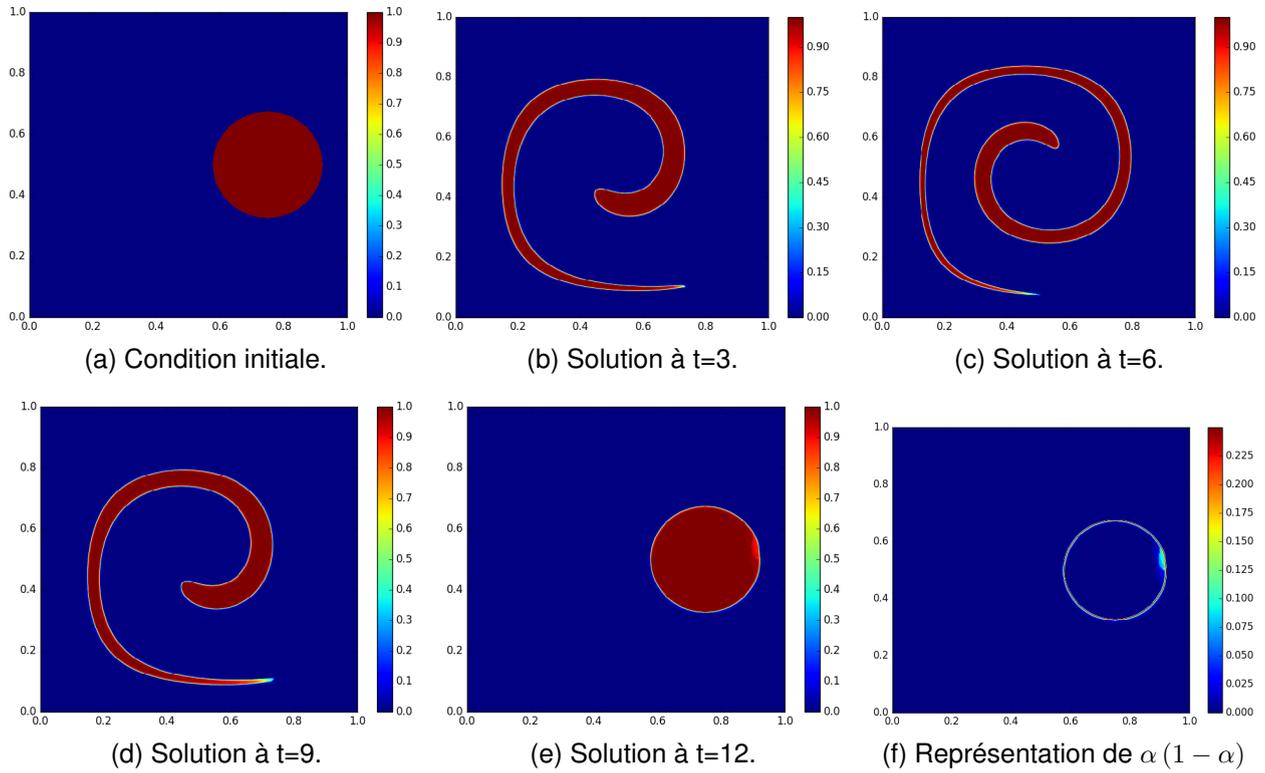


FIGURE 1.15 – Validation du code MLP-UB+RK2 sur **Kothe-Rider**, avec un maillage 500x500 et une CFL = 0.3. La fraction volumique est représentée par l'échelle de couleur. Le temps final est T=12.

Une mesure quantitative de l'erreur est donnée dans le tableau 5.2 pour évaluer l'ordre de convergence de la méthode. La méthode est d'ordre 1.85 en norme  $L^1$  et d'ordre 1.02 en norme  $L^2$ . Les résultats obtenus pour les différents maillages sont présentés sur la figure 1.16. Le lecteur souhaitant comparer la géométrie des résultats obtenus par la méthode MLP+RK2 à d'autres approches, est renvoyé à l'article de Pirozzoli *et al.* [83] où le cas **Kothe-Rider** est testé sur différentes méthodes.

TABLE 1.1 – Erreurs obtenues en normes  $L_1$  et  $L_2$  sur le cas **Kothe-Rider** à T=12. Étude de la méthode MLP-UB+RK2 avec une CFL = 0.4.

Norme \ Maillage	$64 \times 64$	$128 \times 128$	$256 \times 256$	$512 \times 512$
$L^1$	0.081	0.032	0.007	0.002
$L^2$	0.190	0.114	0.051	0.024

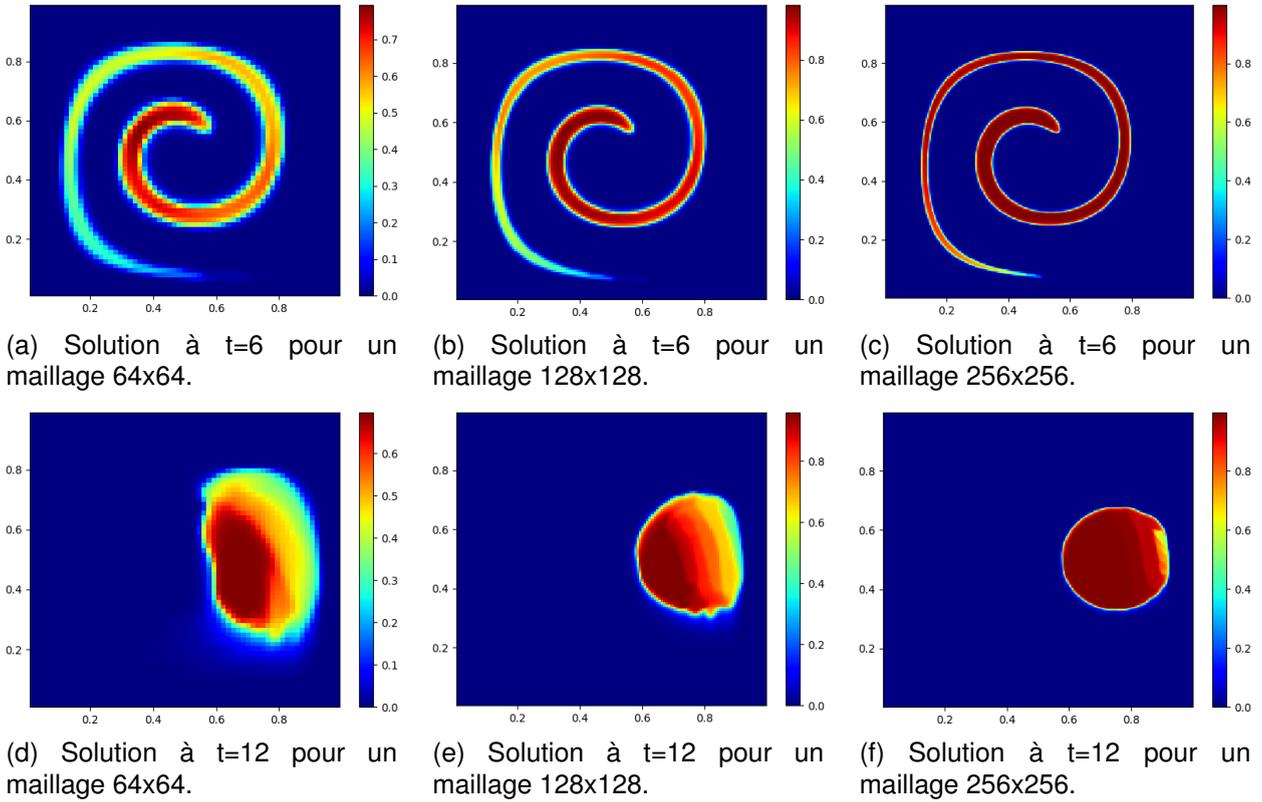


FIGURE 1.16 – Analyse de la convergence sur le cas **Kothe-Rider** pour différents maillage et une CFL = 0.4. Le temps final est T=12.

## 1.5 Extension aux problèmes multimatériaux

Lorsque plus de deux matériaux, ou fluides, sont considérés, la dynamique de l'écoulement est régie par un système d'équations. Ce système est composé d'autant d'équations d'advection qu'il y a de fluides. Dans ces écoulements, une nouvelle contrainte apparaît :

$$\sum_{k=1}^L \alpha_{k,i,j} = 1 \quad (1.10)$$

$\forall i, j$  avec  $L$  le nombre de matériaux.

Cette condition impose l'absence de vide dans une maille, dans le cas où la somme serait inférieure à 1 ou au contraire qu'une maille ne contienne pas un volume de fluide plus important que son propre volume, dans le cas où la somme serait supérieure à 1. Malheureusement, l'application de la méthode MLP+RK2 n'est pas immédiate. La non linéarité du limiteur ne permet pas de garantir la condition (1.10) sans appliquer un autre traitement aux flux.

La méthode la plus simple serait de transporter seulement L-1 fluides, et de considérer le dernier fluide comme la différence entre la somme des L-1 fluides transportés et 1. Bien que simple à mettre en œuvre, cette méthode présente de mauvais résultats. L'asymétrie de traitement entre les matériaux engendre une différence dans les résultats obtenus, selon l'ordre dans lequel les fluides sont traités. Ensuite, il est possible de trouver une fraction volumique négative, dans ce cas le résultat n'a plus aucun sens physique. Certains auteurs ont développé des méthodes permettant de garantir la condition (1.10). Nous pouvons citer les articles [90, 59, 79] pour les reconstructions géométriques d'interface, ces méthodes ont tendance à générer des éclats et à perdre la connexité d'un fluide. Pour les méthodes de raidissement d'interface, nous pouvons citer l'article de Lagoutière et Jaouen [53], leur méthode présente une très faible diffusion mais un traitement asymétrique des fluides. Ou plus récemment Ancellin *et al.* [7], cette méthode est symétrique et présente de bons résultats mais elle nécessite la résolution d'un problème d'optimisation qui peut se révéler coûteux en temps de calcul.

Pour la méthode MLP+RK2 développée dans ce manuscrit, la condition (1.10) est mise en défaut par la non linéarité des limiteurs. Cette non linéarité entraîne des écarts entre les limitations de pentes des différents matériaux. Si bien qu'il est possible d'obtenir localement, dans une maille, une mise en défaut de la condition (1.10). Autrement dit :

$$\exists (i, j), \exists (\tilde{x}, \tilde{y}) \sum_{k=1}^L \hat{\alpha}_{k,i,j}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 1.$$

Nous proposons alors de corriger ce défaut en ajoutant un traitement à la fin du processus de limitation. L'approche est dite par flux renormalisés, elle consiste à appliquer une renormalisation sur les bords de chaque maille :

$$\begin{aligned} \alpha_{l,i+\frac{1}{2},j} &= \frac{\hat{\alpha}(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)_{l,i,j}}{\sum_{k=1}^L \hat{\alpha}(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)_{k,i,j}}, & \alpha_{l,i-\frac{1}{2},j} &= \frac{\hat{\alpha}(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j)_{l,i,j}}{\sum_{k=1}^L \hat{\alpha}(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j)_{k,i,j}}, \\ \alpha_{l,i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{\hat{\alpha}(x_i, y_{j+\frac{1}{2}})_{l,i,j}}{\sum_{k=1}^L \hat{\alpha}(x_i, y_{j+\frac{1}{2}})_{k,i,j}}, & \alpha_{l,i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{\hat{\alpha}(x_i, y_{j-\frac{1}{2}})_{l,i,j}}{\sum_{k=1}^L \hat{\alpha}(x_i, y_{j-\frac{1}{2}})_{k,i,j}}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Avec  $L$ , le nombre de matériaux total, et  $l$  et  $k$  l'indice des matériaux.

**Remarque 3.** Ce traitement n'influe pas sur les stencils à 1 ou 2 matériaux. Dans ce cas, la symétrie des limiteurs permet de vérifier naturellement  $\sum_{k=1}^L \alpha_{k,i,j} = 1$ .

Cette approche est simple d'implémentation, peu coûteuse en temps de calcul et indépendante de l'ordre des matériaux. Nous allons la détailler dans cette section.

### 1.5.1 Propriétés de la méthode par flux renormalisés

Nous attendons deux propriétés indispensables de la méthode multimatériaux. La première, que nous avons déjà citée, est de conserver la condition (1.10) à chaque étape de calcul. La seconde est de garantir un principe du maximum global, c'est-à-dire de vérifier pour tout  $i, j, l$   $\alpha_{l,i,j} \in [0; 1]$ .

**Propriété 2.** Si  $\forall i, j \sum_{k=1}^L \alpha_{k,i,j}^n = 1$  alors  $\forall i, j \sum_{k=1}^L \alpha_{k,i,j}^{n+1} = 1$ .

*Démonstration.* On cherche à montrer  $\sum_{k=1}^L \alpha_{l,i,j}^{n+1} = 1$ , et que cela reste vrai pour tout  $u$  tel que  $\nabla \cdot \mathbf{u}_{i,j} = 0$ .

$$\alpha_{l,i,j}^{n+1} = \alpha_{l,i,j}^n - \frac{\Delta t}{h} \left( \begin{aligned} & u_{x,i+\frac{1}{2},j} \frac{\alpha_{l,i+\frac{1}{2},j}^n}{\sum_{k=1}^L \alpha_{k,i+\frac{1}{2},j}^n} - u_{x,i-\frac{1}{2},j} \frac{\alpha_{l,i-\frac{1}{2},j}^n}{\sum_{k=1}^L \alpha_{k,i-\frac{1}{2},j}^n} \\ & + u_{y,i,j+\frac{1}{2}} \frac{\alpha_{l,i,j+\frac{1}{2}}^n}{\sum_{k=1}^L \alpha_{k,i,j+\frac{1}{2}}^n} - u_{y,i,j-\frac{1}{2}} \frac{\alpha_{l,i,j-\frac{1}{2}}^n}{\sum_{k=1}^L \alpha_{k,i,j-\frac{1}{2}}^n} \end{aligned} \right).$$

Ensuite on somme sur  $k$  pour vérifier que  $\sum_{k=1}^L \alpha_{k,i,j}^{n+1} = 1$ .

$$\text{Par construction } \sum_{l=1}^L \frac{\alpha_{l,i+\frac{1}{2},j}^n}{\sum_{k=1}^L \alpha_{k,i+\frac{1}{2},j}^n} = 1.$$

$$\text{Donc } \sum_{l=1}^L \alpha_{l,i,j}^{n+1} = \sum_{l=1}^L \alpha_{l,i,j}^n - \frac{\Delta t}{h} \left( u_{x,i+\frac{1}{2},j} - u_{x,i-\frac{1}{2},j} + u_{y,i,j+\frac{1}{2}} - u_{y,i,j-\frac{1}{2}} \right).$$

On est dans le cadre incompressible donc

$$\frac{u_{x,i+\frac{1}{2},j} - u_{x,i-\frac{1}{2},j}}{h} + \frac{u_{y,i,j+\frac{1}{2}} - u_{y,i,j-\frac{1}{2}}}{h} = \nabla^h \cdot \mathbf{u}_{i,j} = 0.$$

$$\text{On trouve alors } \sum_{l=1}^L \alpha_{l,i,j}^{n+1} = \sum_{l=1}^L \alpha_{l,i,j}^n.$$

$$\text{Enfin, on utilise } \sum_{l=1}^L \alpha_{l,i,j}^n = 1, \text{ et on obtient } \sum_{k=1}^L \alpha_{l,i,j}^{n+1} = 1.$$

□

En nous appuyant sur l'équilibre entre les flux entrants et ceux sortants d'une maille, nous venons de démontrer que la méthode par flux renormalisés vérifie la propriété (1.10).

Nous souhaitons désormais nous assurer qu'elle garantit un principe du maximum global. Pour cela, il est nécessaire de comprendre plus en détails l'effet de la renormalisation.

$$\text{Lemme 1. Si } \forall i, j \sum_{k=1}^L \alpha_{k,i,j}^n = 1 \text{ alors } -0.25\beta \leq \sum_{k=1}^L \phi_{k,i,j} \nabla_x^h \alpha_{k,i,j}^n \frac{h}{2} \leq 0.25\beta$$

et  $-0.25\beta \leq \sum_{k=1}^L \phi_{k,i,j} \nabla_y^h \alpha_{k,i,j}^n \frac{h}{2} \leq 0.25\beta$ . Où  $\beta$  est le paramètre de compression du limiteur, défini dans (1.9).

$$\text{Démonstration. } \sum_{k=1}^L \alpha_{k,i+\frac{1}{2},j}^n = \sum_{k=1}^L \alpha_{k,i,j}^n + \sum_{k=1}^L \phi_{k,i,j} \nabla_x^h \alpha_{k,i,j}^n \frac{h}{2}.$$

$$\text{Or } \sum_{k=1}^L \alpha_{k,i,j}^n = 1 \implies \sum_{k=1}^L \alpha_{k,i+\frac{1}{2},j}^n = 1 + \sum_{k=1}^L \phi_{k,i,j} \nabla_x^h \alpha_{k,i,j}^n \frac{h}{2}.$$

$$\text{Par ailleurs } \sum_{k=1}^L \phi_{k,i,j} \nabla_x^h \alpha_{k,i,j}^n \frac{h}{2} \leq \max_k (\phi_{k,i,j}) \sum_{k=1}^L |\nabla_x^h \alpha_{k,i,j}^n \frac{h}{2}|.$$

Donc

$$\nabla_x^h \alpha_{k,i,j} = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{12} (\alpha_{k,i+1,j+1} - \alpha_{k,i-1,j+1}) + \frac{1}{3} (\alpha_{k,i+1,j} - \alpha_{k,i-1,j}) + \frac{1}{12} (\alpha_{k,i+1,j-1} - \alpha_{k,i-1,j-1}) \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=1}^L |\nabla_x^h \alpha_{k,i,j} \frac{h}{2}| &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \left( \frac{1}{12} |\alpha_{k,i+1,j+1} - \alpha_{k,i-1,j+1}| \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} |\alpha_{k,i+1,j} - \alpha_{k,i-1,j}| + \frac{1}{12} |\alpha_{k,i+1,j-1} - \alpha_{k,i-1,j-1}| \right). \end{aligned}$$

$$\text{Or } \sum_{k=1}^L (\alpha_{k,i+1,j+1} - \alpha_{k,i-1,j+1}) \leq 1 \text{ et } \sum_{k=1}^L (\alpha_{k,i+1,j} - \alpha_{k,i-1,j}) \leq 1.$$

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^L |\nabla_x^h \alpha_{k,i,j} \frac{h}{2}| \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \right) = 0.25.$$

De plus par définition  $\phi_{i,j} \leq \beta$ .

$$\text{Donc on retrouve bien } : -0.25\beta \leq \sum_{k=1}^L \phi_{k,i,j} \nabla_x^h \alpha_{k,i,j}^n \frac{h}{2} \leq 0.25\beta.$$

$$\text{C'est le même raisonnement pour } \sum_{k=1}^L \phi_{k,i,j} \nabla_y^h \alpha_{k,i,j}^n \frac{h}{2}.$$

□

**Lemme 2.** Si  $0 \leq \alpha_{k,i,j}^{n+1}$  pour tout  $k$  alors  $\alpha_{k,i,j}^{n+1} \leq 1$  pour tout  $k$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence directe de  $\sum_{k=1}^L \alpha_{k,i,j}^{n+1} = 1$ .

□

Pour simplifier les notations, nous notons désormais :

$$\sum_{k=1}^L \phi_{k,i,j} \nabla_x^h \alpha_{k,i,j}^n \frac{h}{2} = \epsilon_{i,j}^x.$$

et

$$\sum_{k=1}^L \phi_{k,i,j} \nabla_y^h \alpha_{k,i,j}^n \frac{h}{2} = \epsilon_{i,j}^y.$$

**Lemme 3.** Soit  $\phi_{i,j}$  le limiteur défini dans la formule (1.9).

$$\forall i, j \quad |\phi_{i,j} \nabla_x^h \alpha_{i,j}^n \frac{h}{2}| \leq \alpha_{i,j}^n.$$

*Démonstration.*  $0 \leq \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^n \leq 1$

$$\implies 0 \leq \alpha_{i,j}^n + \phi_{i,j} \nabla_x^h \alpha_{i,j}^n \frac{h}{2} \leq 1$$

$$\implies -\alpha_{i,j}^n \leq \phi_{i,j} \nabla_x^h \alpha_{i,j}^n \frac{h}{2} \leq 1 - \alpha_{i,j}^n$$

C'est aussi vrai en  $-\frac{h}{2} \implies -\alpha_{i,j}^n \leq \phi_{i,j} \nabla_x^h \alpha_{i,j}^n \frac{-h}{2} \leq 1 - \alpha_{i,j}^n$ .

Et comme  $0 \leq \alpha_{i,j}^n \leq 1$ , on peut conclure  $|\phi_{i,j} \nabla_x^h \alpha_{i,j}^n \frac{h}{2}| \leq \min(1 - \alpha_{i,j}^n, \alpha_{i,j}^n) \leq \alpha_{i,j}^n$ .

□

**Corollaire 1.**  $\forall i, j \quad 0 \leq \alpha_{i \pm \frac{1}{2}, j}^n \leq 2\alpha_{i,j}^n$ .

*Démonstration.* Comme  $\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^n = \alpha_{i,j}^n + \phi_{i,j} \nabla_x^h \alpha_{i,j}^n \frac{h}{2}$ .

D'après le lemme précédent on obtient directement :  $0 \leq \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^n \leq 2\alpha_{i,j}^n$ .

□

**Théorème 1.** Soit  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$  avec  $u, v \in \mathbb{R}^+$ .

Si  $\forall i, j \quad \sum_{k=1}^L \alpha_{k,i,j}^n = 1$  alors  $0 \leq \alpha_{k,i,j}^{n+1} \leq 1 \quad \forall (k, i, j)$ , sous condition  $CFL \leq \frac{1 - 0.25\beta}{2}$ .

*Démonstration.*

$$\alpha_{l,i,j}^{n+1} = \alpha_{l,i,j}^n - \frac{\Delta t}{h} \left( u_x \frac{\alpha_{l,i+\frac{1}{2},j}^n}{\sum_{k=1}^L \alpha_{k,i+\frac{1}{2},j}^n} - u_x \frac{\alpha_{l,i-\frac{1}{2},j}^n}{\sum_{k=1}^L \alpha_{k,i-\frac{1}{2},j}^n} + u_y \frac{\alpha_{l,i,j+\frac{1}{2}}^n}{\sum_{k=1}^L \alpha_{k,i,j+\frac{1}{2}}^n} - u_y \frac{\alpha_{l,i,j-\frac{1}{2}}^n}{\sum_{k=1}^L \alpha_{k,i,j-\frac{1}{2}}^n} \right).$$

En appliquant un traitement upwind sur les flux on a :

$$\alpha_{l,i,j}^{n+1} \geq \alpha_{l,i,j}^n - \frac{\Delta t}{h} \left( u_x \frac{\alpha_{l,i+\frac{1}{2},j}^n}{\sum_{k=1}^L \alpha_{k,i+\frac{1}{2},j}^n} + u_y \frac{\alpha_{l,i,j+\frac{1}{2}}^n}{\sum_{k=1}^L \alpha_{k,i,j+\frac{1}{2}}^n} \right).$$

En utilisant le corollaire 1 on a :  $\alpha_{l,i,j}^{n+1} \geq \alpha_{l,i,j}^n - \frac{\Delta t}{h} \left( u_x \frac{2\alpha_{l,i,j}^n}{\sum_{k=1}^L \alpha_{k,i+\frac{1}{2},j}^n} + u_y \frac{2\alpha_{l,i,j}^n}{\sum_{k=1}^L \alpha_{k,i,j+\frac{1}{2}}^n} \right)$ .

D'après le lemme 1 :

$$1 - 0.25\beta \leq \sum_{k=1}^L \alpha_{k,i+\frac{1}{2},j}^n \leq 1 + 0.25\beta \quad \text{et} \quad 1 - 0.25\beta \leq \sum_{k=1}^L \alpha_{k,i,j+\frac{1}{2}}^n \leq 1 + 0.25\beta$$

$$\implies \alpha_{l,i,j}^{n+1} \geq \alpha_{l,i,j}^n - \frac{\Delta t}{h} \left( u_x \frac{2\alpha_{l,i,j}^n}{1 - 0.25\beta} + u_y \frac{2\alpha_{l,i,j}^n}{1 - 0.25\beta} \right)$$

$$\implies \alpha_{l,i,j}^{n+1} \geq \alpha_{l,i,j}^n \left( 1 - \frac{2\Delta t (u_x + u_y)}{h (1 - 0.25\beta)} \right).$$

On en déduit que  $\frac{\Delta t (u_x + u_y)}{h} \leq \frac{1 - 0.25\beta}{2} \implies \alpha_{l,i,j}^{n+1} \geq 0$ .

Enfin en utilisant le lemme 2, on obtient :  $0 \leq \alpha_{l,i,j}^{n+1} \leq 1$ .

□

Le théorème 1, nous assure un minimum de stabilité dans le cas d'un écoulement à vitesse constante. Le lemme 1 apparaît aussi important, il nous apprend que la renormalisation des flux est contrôlée et dépend du limiteur choisi initialement. Dans le cas où  $\beta = 2$ , le flux est au maximum multiplié par deux. Le cas  $\beta = 0$  correspond quant à lui, à un schéma upwind sans reconstruction, dans ce cas la condition (1.10) est naturellement vérifiée et la renormalisation n'a aucun effet.

Dans les cas multimatériaux, nous utilisons la CFL obtenue dans le théorème 1.

## 1.5.2 Résultats numériques

Nous allons maintenant définir un ensemble de cas tests afin de valider numériquement la méthode. De la même façon que pour les cas à deux matériaux, nous analyserons les résultats aussi bien qualitativement que quantitativement.

Nous commençons par définir un cas à 3 matériaux, deux matériaux sont chacun initialisés dans un demi-cercle de rayon  $\sqrt{0.15}$ , plus un fluide à l'extérieur de ce disque. Ces trois matériaux sont en rotation autour du point de coordonnées (0;0).

**2 Demis en rotation**

$$\Omega = [-1; 1] \times [-1; 1].$$

$$\alpha_1(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x - 0.5)^2 + y^2 \leq 0.15 \text{ et } y \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\alpha_2(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x - 0.5)^2 + y^2 \leq 0.15 \text{ et } y < 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\alpha_3(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x - 0.5)^2 + y^2 > 0.15, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Les conditions aux limites sont périodiques.

Le résultat pour le cas **2 Demis en rotation** à  $t=5$  est présenté sur la figure 1.17. La géométrie est conservée au cours de la simulation et aucun matériau n'est éjecté. Pour faciliter le rendu graphique,  $\alpha_2$  est multiplié par six et  $\alpha_1$  par trois. Le principe du maximum est bien vérifié, aucune fraction volumique ne dépasse un ou zéro ce qui démontre la robustesse de la méthode.

Afin de valider plus largement l'approche, nous introduisons deux nouveaux cas tests plus

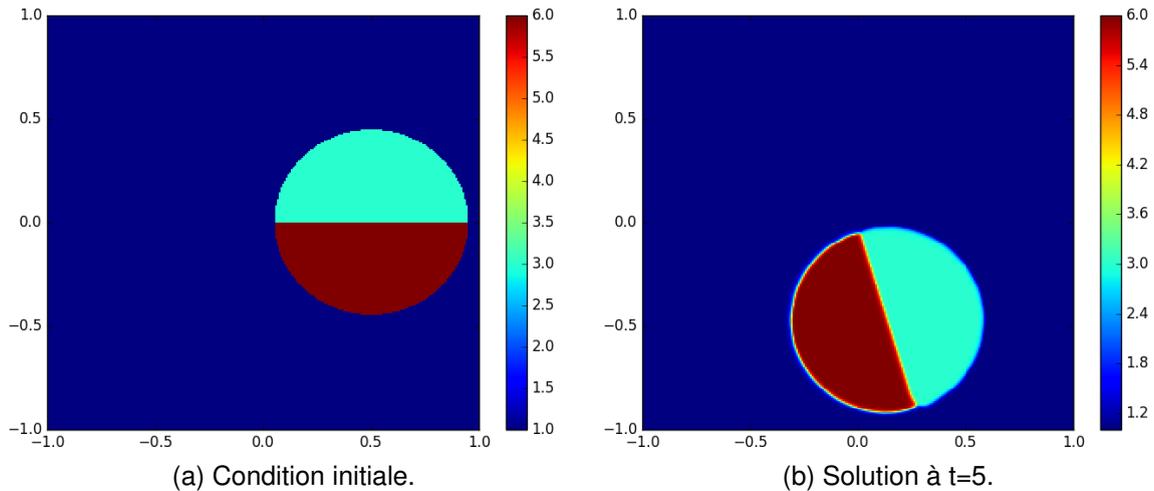


FIGURE 1.17 – **2 Demis en rotation** pour un maillage  $250 \times 250$  et une  $CFL = 0.25$  avec MLP-UB+RK2 par flux renormalisés.

ardus. Dans le premier, les fluides sont placés en anneaux concentriques, dans le second

dans un cercle découpé en quatre quarts, le rayon des cercles dans lequel sont déposés les fluides étant de  $\sqrt{0.03}$ . Les fluides sont soumis à un champ de vitesse en rotation et en étirement dans un sens jusqu'à  $t = \frac{T}{2}$  puis dans le sens inverse de  $t = \frac{T}{2}$  à  $t = T$ . La solution finale est donc la même que celle au temps initial.

#### 4 quarts K-R

$$\Omega = [0; 1] \times [0; 1]$$

$$\alpha_1(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x - 0.75)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.03 \\ & \text{et } x < 0.75 \text{ et } y < 0.5, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \alpha_2(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x - 0.75)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.03 \\ & \text{et } x < 0.75 \text{ et } y \geq 0.5, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\alpha_3(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x - 0.75)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.03 \\ & \text{et } x \geq 0.75 \text{ et } y < 0.5, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \alpha_4(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x - 0.75)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.03 \\ & \text{et } x \geq 0.75 \text{ et } y \geq 0.5, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\alpha_5(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x - 0.75)^2 + (y - 0.5)^2 > 0.03, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(\pi y) \cos(\pi y) \sin(\pi x) \sin(\pi x) \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) \\ \sin(\pi x) \cos(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi y) \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) \end{pmatrix}.$$

Les conditions aux limites sont périodiques.

Les résultats, pour le cas **4 quarts K-R**, sont présentés avec un maillage 150x150 sur la figure 1.18 et un maillage 350x350 sur la figure 1.19. Pour le maillage le plus grossier, le point quadruple est difficilement capturé, la connexion entre les matériaux rouge et orange est perdue. Il est important de préciser que ce point présente une singularité et que la géométrie des quatre matériaux n'est pas différentiable sur ce point, ce qui complexifie sa capture au-delà du traitement multimatériaux. Ce point mis à part, on retrouve le même défaut que dans le cas à deux matériaux, c'est-à-dire une diffusion importante sur l'extérieur du cercle. Cependant, l'ordre des matériaux est bien retrouvé, aucun des matériaux n'a perdu sa connexité malgré l'étirement de l'écoulement et la finesse de l'interface à  $t=6$ .

Pour le maillage le plus fin, la difficulté pour capturer le point quadruple est toujours présente, bien que le résultat soit beaucoup plus satisfaisant. Néanmoins, dans ce cas, la diffusion est mieux contrôlée et la géométrie finale est très proche de la condition initiale.

# CHAPITRE 1. UN SCHÉMA NUMÉRIQUE ORIGINAL VRAIMENT MULTIDIMENSIONNEL POUR LA CAPTURE D'INTERFACE

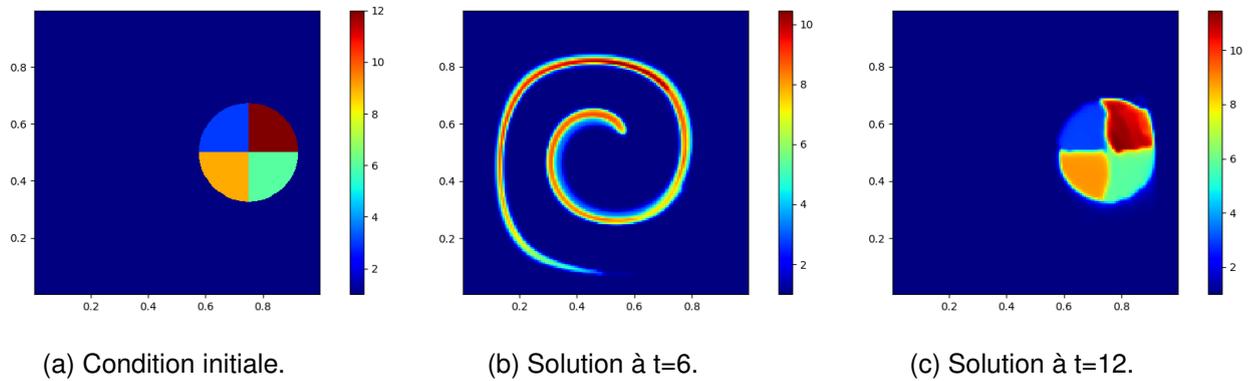


FIGURE 1.18 – **4 quarts K-R** avec un maillage  $150 \times 150$  et une  $CFL = 0.25$  avec la méthode MLP-UB+RK2 par flux renormalisés. Le temps final est  $T=12$ .

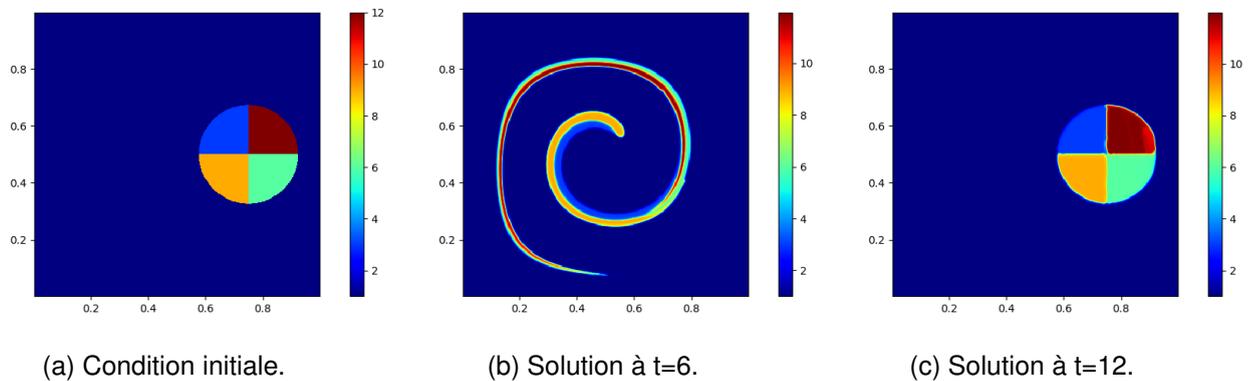


FIGURE 1.19 – **4 quarts K-R** pour un maillage  $350 \times 350$  et une  $CFL = 0.25$  avec la méthode MLP-UB+RK2 par flux renormalisés. Le temps final est  $T=12$ .

Une étude quantitative de l'erreur est proposée dans le tableau 1.2 afin de mesurer la précision de la méthode. L'erreur obtenue est sensiblement plus grande que dans le cas à deux matériaux **Kothe-Rider**. Cela s'explique par la complexité du test et une interface présente sur un plus grand nombre de mailles (l'interface est présente à l'intérieur du cercle dans le cas multimatériaux). Toutefois, l'ordre de convergence reste très proche et confirme la qualité du résultat observé.

TABLE 1.2 – Erreur pour les normes  $L^1$  et  $L^2$  sur le cas **4 quarts K-R** à  $T=12$ . Étude de la méthode MLP-UB+RK2 par flux renormalisés avec une  $CFL = 0.25$ .

Norme \ Maillage	$64 \times 64$	$128 \times 128$	$256 \times 256$	$512 \times 512$
$L^1$	0.145	0.053	0.016	0.0059
$L^2$	0.245	0.140	0.069	0.041

### 3 cercles K-R

$$\Omega = [0; 1] \times [0; 1]$$

$$\alpha_1(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x - 0.75)^2 + (y - 0.5)^2 < 0.02, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}, \quad \alpha_2(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x - 0.75)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.02 \\ & \text{et } (x - 0.75)^2 + (y - 0.5)^2 < 0.03, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\alpha_3(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x - 0.75)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.03 \\ & \text{et } (x - 0.75)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.04, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}, \quad \alpha_4(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x - 0.75)^2 + (y - 0.5)^2 > 0.04, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(\pi y) \cos(\pi y) \sin(\pi x) \sin(\pi x) \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) \\ \sin(\pi x) \cos(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi y) \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) \end{pmatrix}.$$

Les conditions aux limites sont périodiques.

Pour le cas **3 cercles K-R**, les résultats sont présentés sur la figure 5.9. Dans ce cas, l'interface contenant strictement plus de deux matériaux n'est plus ponctuelle. Chaque matériau reste connexe tout au long de la simulation, même lorsque l'étirement est maximal à  $t=6$  ce qui représente la principale difficulté dans ce type d'écoulement. Les résultats obtenus sont très satisfaisants, la solution finale est proche de la condition initiale et aucun artefact n'apparaît.

Dans cette section, nous avons développé un traitement pour les écoulements multifluides. Les résultats obtenus sont encourageants et vont nous permettre par la suite de simuler des écoulements multifluides dans un cadre plus réel. Pour l'instant, il nous apparaît essentiel de valider la méthode MLP+RK2 et le traitement par flux renormalisés dans le cas de résultat à trois dimensions d'espace.

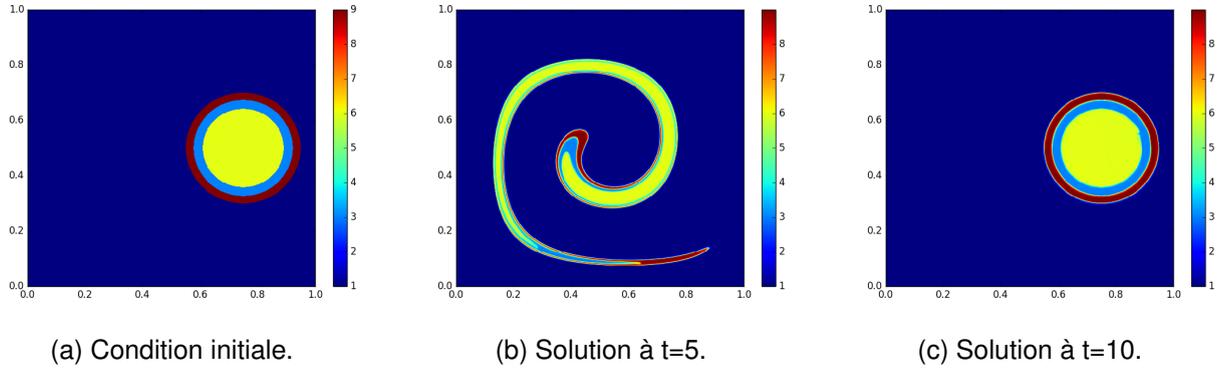


FIGURE 1.20 – **3 cercles K-R** pour un maillage 500x500 et une CFL = 0.25 avec la méthode MLP-UB+RK2 par flux renormalisés. Le temps final est T=10.

## 1.6 Résultats à trois dimensions en espace

### 1.6.1 Extension de la reconstruction en trois dimensions

Pour clore ce chapitre, nous étendons les résultats obtenus au cas à trois dimensions d'espace. La construction du gradient et du limiteur est identique au cas à deux dimensions d'espace, nous ne détaillons donc pas les étapes de calcul. La reconstruction de pente définie précédemment peut être étendue en trois dimensions.

Le gradient numérique en dimension trois s'écrit :

$$\nabla_x \alpha \simeq \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \frac{1}{72} (\alpha_{i+1,j+1,m+1} - \alpha_{i-1,j+1,m+1}) + \frac{1}{18} (\alpha_{i+1,j+1,m} - \alpha_{i-1,j+1,m}) + \frac{1}{72} (\alpha_{i+1,j+1,m-1} - \alpha_{i-1,j+1,m-1}) \\ \frac{1}{18} (\alpha_{i+1,j,m+1} - \alpha_{i-1,j,m+1}) + \frac{2}{9} (\alpha_{i+1,j,m} - \alpha_{i-1,j,m}) + \frac{1}{18} (\alpha_{i+1,j,m-1} - \alpha_{i-1,j,m-1}) \\ \frac{1}{72} (\alpha_{i+1,j-1,m+1} - \alpha_{i-1,j-1,m+1}) + \frac{1}{18} (\alpha_{i+1,j-1,m} - \alpha_{i-1,j-1,m}) + \frac{1}{72} (\alpha_{i+1,j-1,m-1} - \alpha_{i-1,j-1,m-1}) \end{pmatrix},$$

$$\nabla_y \alpha \simeq \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \frac{1}{72} (\alpha_{i+1,j+1,m+1} - \alpha_{i+1,j-1,m+1}) + \frac{1}{18} (\alpha_{i+1,j+1,m} - \alpha_{i+1,j-1,m}) + \frac{1}{72} (\alpha_{i+1,j+1,m-1} - \alpha_{i+1,j-1,m-1}) \\ \frac{1}{18} (\alpha_{i,j+1,m+1} - \alpha_{i,j-1,m+1}) + \frac{2}{9} (\alpha_{i,j+1,m} - \alpha_{i,j-1,m}) + \frac{1}{18} (\alpha_{i,j+1,m-1} - \alpha_{i,j-1,m-1}) \\ \frac{1}{72} (\alpha_{i-1,j+1,m+1} - \alpha_{i-1,j-1,m+1}) + \frac{1}{18} (\alpha_{i-1,j+1,m} - \alpha_{i-1,j-1,m}) + \frac{1}{72} (\alpha_{i-1,j+1,m-1} - \alpha_{i-1,j-1,m-1}) \end{pmatrix},$$

$$\nabla_z \alpha \simeq \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \frac{1}{72} (\alpha_{i+1,j+1,m+1} - \alpha_{i-1,j+1,m+1}) + \frac{1}{18} (\alpha_{i+1,j+1,m} - \alpha_{i-1,j+1,m}) + \frac{1}{72} (\alpha_{i+1,j+1,m-1} - \alpha_{i-1,j+1,m-1}) \\ \frac{1}{18} (\alpha_{i+1,j,m+1} - \alpha_{i-1,j,m+1}) + \frac{2}{9} (\alpha_{i+1,j,m} - \alpha_{i-1,j,m}) + \frac{1}{18} (\alpha_{i+1,j,m-1} - \alpha_{i-1,j,m-1}) \\ \frac{1}{72} (\alpha_{i+1,j-1,m+1} - \alpha_{i-1,j-1,m+1}) + \frac{1}{18} (\alpha_{i+1,j-1,m} - \alpha_{i-1,j-1,m}) + \frac{1}{72} (\alpha_{i+1,j-1,m-1} - \alpha_{i-1,j-1,m-1}) \end{pmatrix}.$$

Et pour le limiteur :

$$\phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}} - \alpha_{i,j,m}}{\nabla^h \alpha_{i,j,m} \cdot \begin{pmatrix} \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} \end{pmatrix}} & \text{si } \nabla^h \alpha_{i,j,m} \cdot \begin{pmatrix} \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} \end{pmatrix} < 0, \\ \frac{\bar{\alpha}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}} - \alpha_{i,j,m}}{\nabla^h \alpha_{i,j,m} \cdot \begin{pmatrix} \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} \end{pmatrix}} & \text{si } \nabla^h \alpha_{i,j,m} \cdot \begin{pmatrix} \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} \end{pmatrix} > 0. \end{cases}$$

Nous définissons ensuite le limiteur sur toute la maille comme le minimum des huit limiteurs obtenus pour chaque coin :

$$\phi_{i,j,m,\beta} = \min \left( \beta, \phi_{i\pm\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2},m\pm\frac{1}{2}} \right).$$

## 1.6.2 Résultats numériques

Le premier cas test, à trois dimensions, que nous présentons est défini dans l'article de Enright *et al.* [32]. Un fluide, initialisé dans une sphère de rayon 0.15, est soumis à un champ de vitesse non linéaire. Dans la première partie de la simulation, le fluide est étiré, ensuite le champ de vitesse est inversé et le fluide retrouve sa position initiale. Les résultats sont présentés sur la figure 1.21, ils peuvent être comparés à d'autres résultats existants [54, 8, 105, 72, 16].

À  $t=1.5$ , l'étirement du fluide est maximal, malgré tout, la couche mince parvient à être capturée. Les deux zones qui apparaissent vides, sont en réalité des zones de diffusion où  $\alpha < 0.5$ . Le fluide y est présent et il reste continu tout au long de la simulation. Cette diffusion entraîne un défaut dans le retour à la solution initiale. À  $t=3$  on voit apparaître une "crête", résidu des mailles diffusées au cours de la simulation qui se regroupent au temps final. Malgré tout, il n'y a aucun éclat, comme cela peut apparaître avec d'autres méthodes, et le fluide reste connexe tout le long de l'expérience numérique.

**Vortex 3D**

$$\Omega = [0; 1] \times [0; 1] \times [0; 1]$$

$$\alpha_0(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x - 0.35)^2 + (y - 0.35)^2 + (z - 0.35)^2 \leq 0.15^2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \sin(\pi x)^2 \sin(2\pi y) \sin(2\pi z) \cos(\pi \frac{t}{T}) \\ -\sin(\pi y)^2 \sin(2\pi z) \sin(2\pi x) \cos(\pi \frac{t}{T}) \\ -\sin(\pi z)^2 \sin(2\pi y) \sin(2\pi x) \cos(\pi \frac{t}{T}) \end{pmatrix}.$$

Les conditions aux limites sont périodiques.

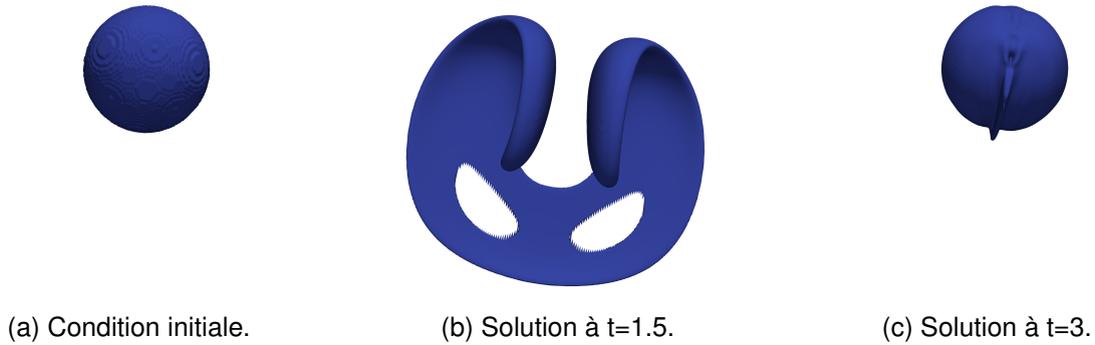


FIGURE 1.21 – Validation du code MLP-UB+RK2 sur **Vortex 3D**, avec un maillage 250x250x250 et une CFL = 0.2. Représentation de l'isovaleur 0.5 de la fraction volumique. Le temps final est T=3.

Le premier cas test multifluide en trois dimensions est présenté dans l'article de Ancelin *et al.* [7]. C'est un cas à quatre fluides, une croix est placée entre deux sphères de rayons différents le tout dans un fluide ambiant. Tous ces fluides sont transportés à vitesse constante.

Sur la figure 1.22, nous présentons les résultats obtenus pour la croix et la sphère intérieure. Il est connu que, dans certains cas à plus de deux fluides, et en particulier à trois dimensions, la conservation de l'ordre des matériaux pose problème. Or, dans notre cas la sphère intérieure ne recouvre pas la croix, et la géométrie de chaque fluide est respectée. Ce résultat met en avant la robustesse du traitement multimatériaux.

**Cross 3D**

$$\Omega = [-1; 1] \times [-1; 1] \times [-1; 1],$$

$$C = [-0.2; 0.2]^2 \times [-0.6; 0.6] \cup [-0.6; 0.6] \times [-0.2; 0.2]^2 \cup [-0.2; 0.2] \times [-0.6; 0.6] \times [-0.2; 0.2],$$

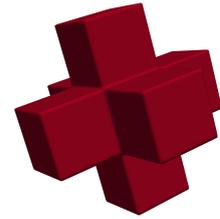
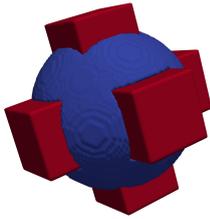
$$D_1 = x^2 + y^2 + z^2 \leq 0.5^2 \quad \text{et} \quad D_2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq 0.7^2.$$

$$\alpha_1(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y, z) \in C, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \alpha_3(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y, z) \in D_2 \setminus (C \cup D_1), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\alpha_2(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y, z) \in D_1 \setminus C, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \alpha_4(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y, z) \in [-1; 1]^3 \setminus D_2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

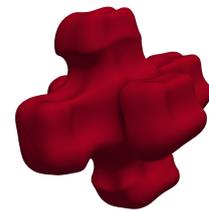
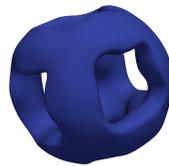
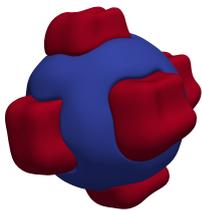
Les conditions aux limites sont périodiques.



(a) Condition initiale de la croix et de la sphère intérieure.

(b) Condition initiale de la sphère intérieure.

(c) Condition initiale de la croix.



(d) Solution à t=10 de la croix et de la sphère intérieure.

(e) Solution à t=10 de la sphère intérieure.

(f) Solution à t=10 de la croix.

FIGURE 1.22 – Validation du code MLP-UB+RK2 par flux renormalisés sur **Cross 3D**, avec un maillage 160x160x160 et une CFL = 0.2. Représentation de l'isovaleur 0.5 pour les matériaux 1 et 2.  $\alpha_1$  en rouge et  $\alpha_2$  en bleu.

Pour clore ce chapitre, nous proposons un nouveau cas test. Sur le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$  le cas

est similaire à l'expérience numérique **Kothe-Rider** avec un enroulement puis un retour à la position initiale. Sur l'axe  $\vec{z}$ , les fluides sont dans un premier temps étirés, puis ils reprennent leur position initiale. Des auteurs ont proposé des tests similaires dans le cadre d'écoulements à un ou deux fluides, nous pouvons citer les articles de Zhouteng Ye [105] ou Liovic *et al.* [72]. Ici, nous utilisons cinq matériaux. Quatre des matériaux partagent une boule de rayon 0.15 en quarts, le cinquième correspond au matériau extérieur à la boule. Pour visualiser les résultats, nous affichons les isovaleurs 0.5 des fractions volumiques. À  $t=1.5$ , l'étirement est maximal, pourtant, la position des fluides est respectée. Il n'y a aucune apparition d'éclats ou de perte de connexité des matériaux. Au temps final,  $t=3$ , la position des fluides est respectée. Nous ne constatons toujours aucune apparition d'éclat. Chaque fluide reste connexe tout au long de la simulation. La boule a été déformée à cause de la diffusion pendant l'étirement, néanmoins, la place des matériaux est cohérente avec la condition initiale et le résultat reste tout à fait satisfaisant.

À notre connaissance, aucun résultat similaire n'a été présenté en trois dimensions pour un écoulement multimatériaux. Ce résultat témoigne de l'excellente robustesse du traitement multimatériaux, et pourra servir de référence pour d'autres méthodes à plus de deux matériaux.

**Kothe-Rider 3D**

$$\Omega = [0; 1] \times [0; 1] \times [0; 2],$$

$$D_3 = \{(x, y, z) \mid (x - 0.5)^2 + (y - 0.75)^2 + (z - 0.25)^2 \leq 0.15^2\},$$

$$P_1 = [0; 0.5] \times [0; 1] \times [0; 2] \text{ et } P_2 = [0; 1] \times [0; 0.75] \times [0; 2].$$

$$\alpha_1(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y, z) \in D_3 \cap P_1 \cap P_2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \alpha_3(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y, z) \in (D_3 \cap P_1) \setminus P_2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\alpha_2(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y, z) \in (D_3 \cap P_2) \setminus P_1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \alpha_4(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y, z) \in D_3 \setminus (P_1 \cup P_2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\alpha_5(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y, z) \in \Omega \setminus D_3, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(\pi x)^2 \sin(2\pi y) \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) \\ -\sin(2\pi x) \sin(\pi y)^2 \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) \\ \left(1 - 2\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) \end{pmatrix}.$$

Les conditions aux limites sont périodiques.

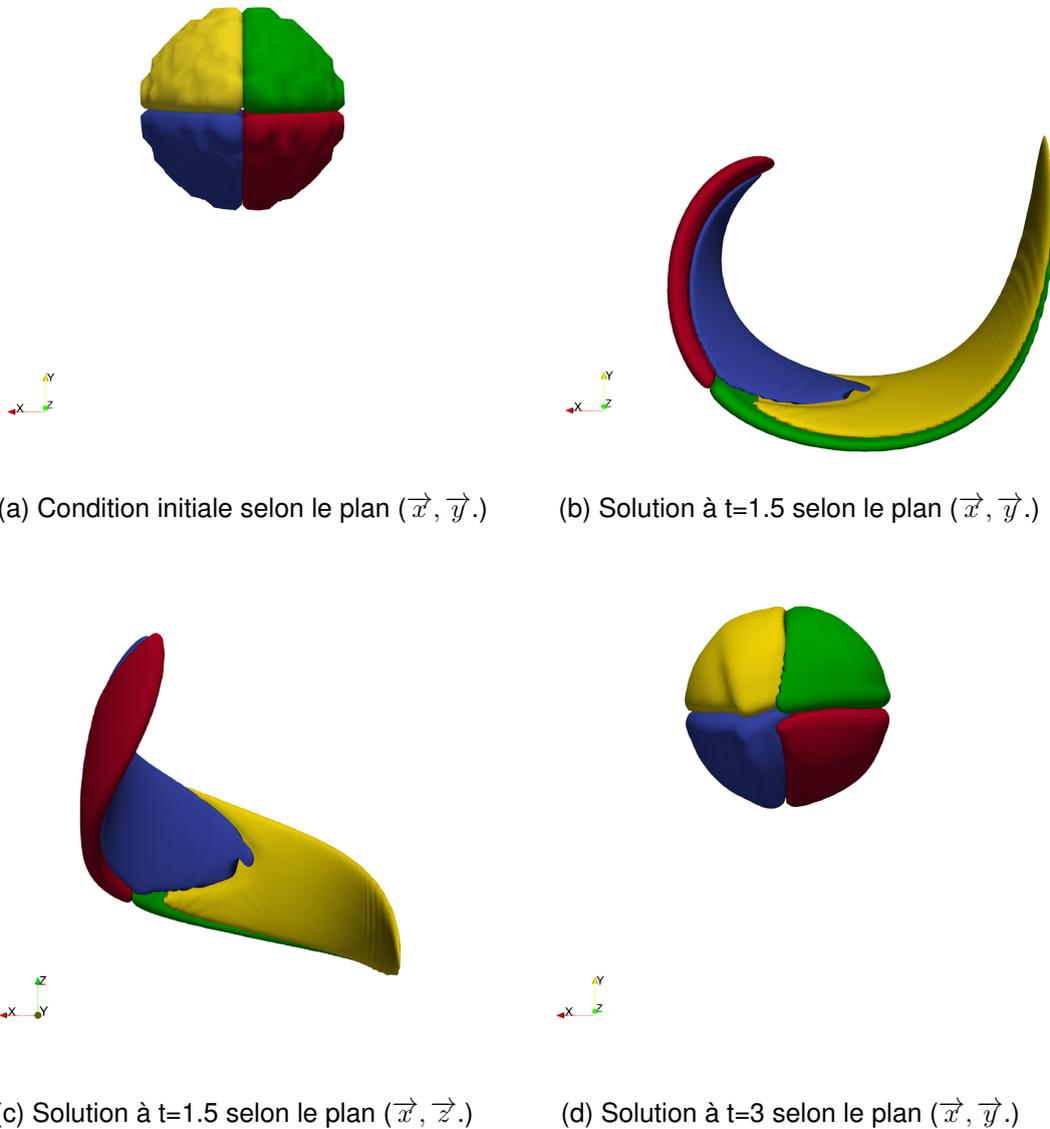


FIGURE 1.23 – Validation du code MLP-UB+RK2 par flux renormalisés sur **Kothe-Rider 3D**, avec un maillage  $160 \times 160 \times 320$  et une  $CFL = 0.2$ . Représentation de l'isovaleur 0.5 pour les matériaux de 1 à 4. Le temps final est  $T=3$ .

## 1.7 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons mis en évidence différents types d'artefacts, tous liés à l'aspect multidimensionnel de l'écoulement. Par la suite, nous avons développé une méthode de reconstruction de pente vraiment multidimensionnelle couplée à une méthode de Runge-Kutta en temps. Cette nouvelle reconstruction nous permet d'obtenir de bons

résultats numériques. En particulier, la géométrie des écoulements est respectée et les artefacts n'apparaissent plus. La méthode MLP+RK2 a été validée sur des résultats en trois dimensions sans apparition de nouveaux défauts. Enfin, un traitement pour les écoulements multifluides est développé dans ce chapitre, il apparaît très robuste et donne d'excellents résultats, mêmes sur les cas plus complexes. Nous souhaitons insister sur l'absence d'ordre dans le traitement des matériaux. À notre connaissance, il existe peu de méthodes permettant des résultats comparables en trois dimensions. Cette extension permettra, sans doute, d'améliorer grandement les résultats des simulations d'écoulements multifluides.

# Chapitre 2

## Une dérivation d'une formulation totalement conservative pour les écoulements multifluides non miscibles

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction du chapitre</b> . . . . .	<b>60</b>
<b>2.2</b>	<b>Définition d'un système de transport totalement conservatif</b> . . . . .	<b>62</b>
2.2.1	Dérivation d'une loi de conservation géométrique dans le formalisme eulérien . . . . .	62
2.2.2	Étude dans le cadre incompressible . . . . .	63
2.2.3	Étude théorique dans le cadre compressible . . . . .	64
2.2.4	Étude numérique dans le cadre compressible . . . . .	67
<b>2.3</b>	<b>Système totalement conservatif pour les écoulements multifluides compressibles</b> . . . . .	<b>75</b>
2.3.1	Présentation du système . . . . .	75
2.3.2	Propriétés du système . . . . .	77
<b>2.4</b>	<b>Conclusion du chapitre</b> . . . . .	<b>80</b>

---

## 2.1 Introduction du chapitre

L'équation d'advection, étudiée au chapitre précédent, n'est pas suffisante pour représenter le comportement de fluides réels. Il est nécessaire de tenir compte d'autres variables représentatives de la physique des fluides, comme la masse, l'énergie ou encore la pression. Dans ce chapitre, nous allons définir un modèle pour les écoulements multifluides, adapté aux méthodes de capture d'interface de type VOF.

Dans la littérature, il existe des modèles permettant le calcul des fractions volumiques, nécessaires aux méthodes de capture d'interface de type VOF. Ces modèles reposent généralement sur le calcul de variables de mélange. Dans les mailles où la diffusion numérique est présente, les variables de mélange sont calculées comme des moyennes pondérées par les fractions volumiques. Abgrall propose dans l'article [3] un modèle à quatre équations quasi-conservatif, valable pour deux fluides. En dimension un, il s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (u\rho) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t (\rho E) + \partial_x (\rho E u + p u) = 0, \\ \partial_t \kappa + u \partial_x \kappa = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Où  $\kappa = \frac{1}{\gamma - 1}$ , et  $\gamma$  est le coefficient adiabatique. Ensuite, la variable de mélange  $\kappa$  est inversée pour retrouver les fractions massiques. Malheureusement, son emploi est restreint à l'utilisation d'équations d'états particulières, comme l'équation des gaz parfaits. Allaire *et al.* ont généralisé ce modèle dans l'article [6]. Les auteurs proposent de transporter indépendamment les masses des deux fluides, et de remplacer le transport de  $\kappa$  par le transport de la fraction volumique  $\alpha_1$ . Ce qui donne le système à cinq équations suivant :

$$\begin{cases} \partial_t (\rho_1 \alpha_1) + \partial_x (u \rho_1 \alpha_1) = 0, \\ \partial_t (\rho_2 \alpha_2) + \partial_x (u \rho_2 \alpha_2) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t (\rho E) + \partial_x (\rho E u + p u) = 0, \\ \partial_t \alpha_1 + u \partial_x \alpha_1 = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Le système (2.2), permet l'utilisation de différentes équations d'état, comme l'équation d'état de van der Waals, de Mie-Grüneisen ou Stiffened-Gas. Ce système est le point de départ de ce chapitre. Cependant, l'équation sur la fraction volumique n'est pas conserva-

## CHAPITRE 2. UNE DÉRIVATION D'UNE FORMULATION TOTALEMENT CONSERVATIVE POUR LES ÉCOULEMENTS MULTIFLUIDES NON MISCIBLES

---

tive. Or Hou & Le Floch ont montré dans l'article [50] que les méthodes non conservatives peuvent converger vers de mauvaises solutions. Par ailleurs, Abgrall & Karni ont mis en avant, dans l'article [4], la difficulté de mettre en œuvre une méthode totalement conservative, sans faire apparaître d'oscillations parasites dans les profils de pression. Dans ce chapitre, nous proposons de dériver un système totalement conservatif pour les écoulements multifluides compressibles, sans aucune apparition d'oscillations parasites.

Pour débiter, nous allons présenter une loi de conservation géométrique dans le point de vue eulérien. Cela nous permettra de définir un système de transport totalement conservatif, valable dans le cas d'écoulements compressibles. Ensuite, nous étudierons le traitement numérique à adopter pour cette nouvelle équation. Nous comparerons les résultats obtenus à d'autres méthodes de transport, aussi bien d'un point de vue quantitatif que qualitatif. Enfin, nous présenterons un modèle à six équations totalement conservatif, et nous en étudierons les propriétés.

## 2.2 Définition d'un système de transport totalement conservatif

### 2.2.1 Dérivation d'une loi de conservation géométrique dans le formalisme eulérien

Dans les méthodes arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE), il est courant d'ajouter une loi de conservation géométrique. Dans le cas du modèle à cinq équations (2.2), nous pouvons citer les résultats de Tian & Li [97]. Nous proposons ici, de définir une loi de conservation géométrique dans le cadre eulérien.

Pour cela nous introduisons la variable  $\xi$  comme suit :

$$\xi(x, y, t) = \frac{V(x, y, t_0)}{V(x, y, t)}.$$

La variable  $\xi$  représente le rapport entre le volume de contrôle à l'instant initial  $t_0$  et à l'instant  $t$ .

Il est connu que :

$$\frac{dV(x, y, t)}{dt} = V(x, y, t) \nabla \cdot \mathbf{u}(x, y, t),$$

donc

$$\frac{d\xi(x, y, t)}{dt} = -\xi(x, y, t) \nabla \cdot \mathbf{u}(x, y, t).$$

En développant la dérivée particulaire de  $\xi$ , le résultat est :

$$\partial_t \xi(x, y, t) + \mathbf{u}(x, y, t) \cdot \nabla \xi(x, y, t) = -\xi(x, y, t) \nabla \cdot \mathbf{u}(x, y, t).$$

Nous pouvons alors l'écrire sous la forme conservative :

$$\partial_t \xi(x, y, t) + \nabla \cdot (\mathbf{u}(x, y, t) \xi(x, y, t)) = 0.$$

À l'instant initial  $V(x, y, t) = V(x, y, t_0)$ , donc  $\xi(x, y, t_0) = 1$ . Numériquement, nous initialiserons donc toujours  $\xi(x, y, t)$  à un sur l'ensemble du domaine.

Pour alléger les notations, nous omettrons l'écriture des variables spatiales et temporelles  $x, y$  et  $t$ . Nous écrirons alors :

$$\partial_t \xi + \nabla \cdot (\mathbf{u} \xi) = 0. \quad (2.3)$$

La variable  $\xi$  va agir comme une variable de "compression". Sa valeur va augmenter en présence d'ondes de choc et diminuer en présence d'onde de raréfaction.

Cette nouvelle équation nous permet alors d'écrire un système de transport totalement

## CHAPITRE 2. UNE DÉRIVATION D'UNE FORMULATION TOTALEMENT CONSERVATIVE POUR LES ÉCOULEMENTS MULTIFLUIDES NON MISCIBLES

---

conservatif, même lorsque la divergence de la vitesse n'est pas nulle. Nous rappelons l'équation d'advection pour la fraction volumique  $\alpha$  :

$$\partial_t \alpha + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha = 0. \quad (2.4)$$

Alors, en utilisant les formules (2.4) et (2.3), nous obtenons la dérivée particulière de  $(\alpha\xi)$  suivante :

$$\frac{d\alpha\xi}{dt} = -\alpha\xi \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Nous en déduisons directement l'équation de conservation :

$$\partial_t (\alpha\xi) + \nabla \cdot (\mathbf{u}\alpha\xi) = 0. \quad (2.5)$$

La variable  $\xi$  nous permet de calculer le niveau de "compression" imposé par la divergence de la vitesse. Elle nous permet ensuite d'en déduire la fraction volumique en tenant compte de cette "compression". En présence d'une onde de choc, les variables sont comprimées donc  $\xi$  va augmenter. Au contraire, dans le cas d'une onde de détente  $\xi$  va diminuer. La variable  $\xi$  est un rapport entre deux volumes, elle est donc positive et sans dimension. Nous allons maintenant étudier le système de transport formé par les équations (2.3) et (2.5).

Il s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \xi + \nabla \cdot (\mathbf{u}\xi) = 0, \\ \partial_t (\alpha\xi) + \nabla \cdot (\mathbf{u}\alpha\xi) = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

### 2.2.2 Étude dans le cadre incompressible

Lorsque la divergence de la vitesse est nulle à chaque instant, le système (2.6) dégénère, et l'on retrouve l'équation d'advection classique (2.4).

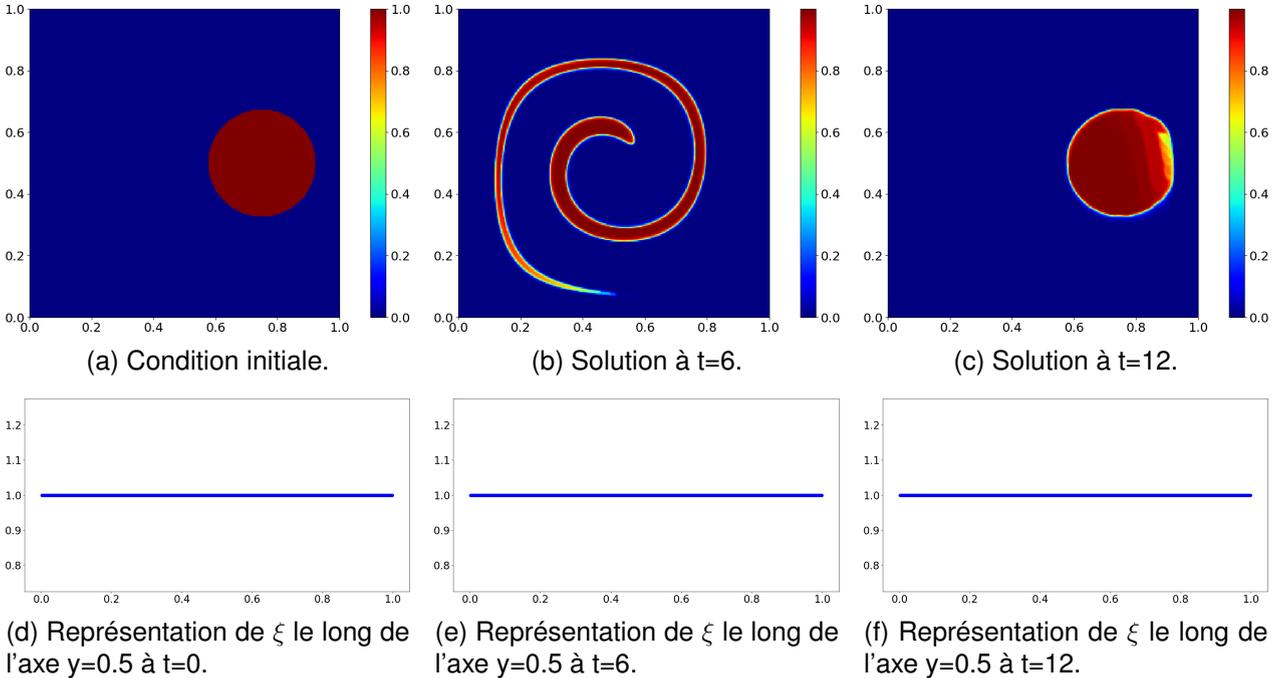
En effet :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \implies \partial_t \xi = 0. \quad (1.2)$$

Nous allons vérifier ce résultat numériquement sur le cas test **Kothe-Rider**. Nous choisissons ce test, car les dérivées partielles de la vitesse ne sont pas nulles comme c'est le cas pour le cas de l'**Advection diagonale d'un cercle** ou pour le **Cercle en rotation**. Dans le cas **Kothe-Rider**, les dérivées partielles s'annulent entre elles, ce qui peut complexifier l'obtention du résultat 1.2. Nous proposons d'employer la stratégie MLP+RK2. Pour l'instant, nous n'appliquons pas de reconstruction sur la variable  $\xi$ .

## CHAPITRE 2. UNE DÉRIVATION D'UNE FORMULATION TOTALEMENT CONSERVATIVE POUR LES ÉCOULEMENTS MULTIFLUIDES NON MISCIBLES

Sur la figure 2.1, sont présentés les résultats à  $t=12$  pour le cas **Kothe-Rider**. Les résultats semblent identiques aux résultats obtenus dans le chapitre précédent. De plus, le principe du maximum semble respecté, les fractions volumiques ne dépassent pas la valeur un. Enfin, nous affichons une coupe horizontale de  $\xi$  le long de la droite  $y=0.5$  pour différents temps. Nous retrouvons bien  $\xi$  constant à chaque temps. Ce résultat confirme que, dans le cadre incompressible, le système (2.6) dégénère en une équation d'advection classique.



Choix des limiteurs

$\alpha \rightarrow$  MLP-UB  $\xi \rightarrow$  sans reconstruction

FIGURE 2.1 – Validation du système de transport sur le cas **Kothe-Rider** pour un maillage  $256 \times 256$  avec une  $CFL = 0.3$  et une méthode RK2 en temps. Le temps final est  $T=12$ .

### 2.2.3 Étude théorique dans le cadre compressible

Le remplacement d'une équation de transport par une équation de conservation peut entraîner la perte du principe du maximum pour les fractions volumiques. Toutefois, la compression des  $\alpha_k \xi$  est compensée par la compression du  $\xi$ . Si les solutions sont suffisamment régulières, nous pouvons écrire dans le cadre continu, en dimension un :

$$\partial_t (\alpha_k \xi) + \partial_x (u \alpha_k \xi) = \xi \partial_t \alpha_k + u \xi \partial_x \alpha_k + \alpha_k \partial_t \xi + \alpha_k \partial_x (u \xi) = 0,$$

CHAPITRE 2. UNE DÉRIVATION D'UNE FORMULATION  
 TOTALEMENT CONSERVATIVE POUR LES ÉCOULEMENTS  
 MULTIFLUIDES NON MISCIBLES

---

or

$$\partial_t \xi + \partial_x u \xi = 0,$$

donc

$$\partial \alpha_k + u \partial_x \alpha_k = 0.$$

On voit ici que les  $\alpha_k$  sont transportés et que la divergence de la vitesse est compensée par les  $\xi$ . Les fractions volumiques vérifient toujours un principe du maximum dans le cas des équations continues. Nous allons montrer que cette propriété se vérifie également sur le schéma numérique. Nous faisons la démonstration à une seule dimension d'espace avec un schéma Euler en temps et nous prenons les valeurs upwind sur les faces.

Soit le schéma numérique suivant :

$$\begin{cases} (\alpha \xi)_i^{n+1} = \alpha_i^n \xi_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( u_{i+\frac{1}{2}}^n \alpha_{i+\frac{1}{2}}^n \xi_{i+\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^n \alpha_{i-\frac{1}{2}}^n \xi_{i-\frac{1}{2}}^n \right), \\ (\xi)_i^{n+1} = \xi_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( u_{i+\frac{1}{2}}^n \xi_{i+\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^n \xi_{i-\frac{1}{2}}^n \right). \end{cases} \quad (2.7)$$

Où les valeurs de  $\xi_{i+\frac{1}{2}}^n$  et  $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n$  sont les valeurs upwind sur la face  $i + \frac{1}{2}$  au temps  $t^n$ . Elles sont déduites du signe de la vitesse :

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \alpha_i^n + \frac{\Delta x}{2} \phi_i^n \nabla^h \alpha_i^n & \text{si } u_{i+\frac{1}{2}}^n \geq 0, \\ \alpha_{i+1}^n - \frac{\Delta x}{2} \phi_{i+1}^n \nabla^h \alpha_{i+1}^n & \text{si } u_{i+\frac{1}{2}}^n < 0. \end{cases} \quad \xi_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \xi_i^n + \frac{\Delta x}{2} \phi_i^n \nabla^h \xi_i^n & \text{si } u_{i+\frac{1}{2}}^n \geq 0, \\ \xi_{i+1}^n - \frac{\Delta x}{2} \phi_{i+1}^n \nabla^h \xi_{i+1}^n & \text{si } u_{i+\frac{1}{2}}^n < 0. \end{cases}$$

**Propriété 3.**

$$\forall i \in I \quad \min(\alpha_i^n, \alpha_{i+1}^n) \leq \alpha_{i+\frac{1}{2}}^n \leq \max(\alpha_i^n, \alpha_{i+1}^n) \quad \text{et} \quad \min(\xi_i^n, \xi_{i+1}^n) \leq \xi_{i+\frac{1}{2}}^n \leq \max(\xi_i^n, \xi_{i+1}^n)$$

$$\implies \min(\alpha_i^n, \alpha_{i+1}^n, \alpha_{i-1}^n) \leq \alpha_i^{n+1} \leq \max(\alpha_i^n, \alpha_{i+1}^n, \alpha_{i-1}^n).$$

*Sous la condition :  $CFL \leq \frac{1}{4}$ .*

La preuve est similaire à celle proposée par Larroutou dans l'article [62].

*Démonstration.* Dans la preuve, on utilisera la notation  $\psi_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i+\frac{1}{2}}^n \xi_{i+\frac{1}{2}}^n$ .

On supposera que  $\xi$  est supérieur à 0 à chaque instant et en chaque point de l'espace considéré.  $\xi$  est construit comme l'inverse d'un volume, cette hypothèse est donc physiquement cohérente.

CHAPITRE 2. UNE DÉRIVATION D'UNE FORMULATION  
 TOTALEMENT CONSERVATIVE POUR LES ÉCOULEMENTS  
 MULTIFLUIDES NON MISCIBLES

---

Cas 1 :  $u_{i+\frac{1}{2}}^n, u_{i-\frac{1}{2}}^n \geq 0$ .

On sait que  $\xi_i^{n+1} \alpha_i^{n+1} = \xi_i^n \alpha_i^n - \left( \psi_{i+\frac{1}{2}}^n \alpha_{i+\frac{1}{2}}^n - \psi_{i-\frac{1}{2}}^n \alpha_{i-\frac{1}{2}}^n \right)$ ,

et aussi  $\xi_i^{n+1} = \xi_i^n - \left( \psi_{i+\frac{1}{2}}^n - \psi_{i-\frac{1}{2}}^n \right)$ ,

donc on a :

$$\begin{aligned} \alpha_i^{n+1} &= \frac{\xi_i^n \alpha_i^n - \left( \psi_{i+\frac{1}{2}}^n \alpha_{i+\frac{1}{2}}^n - \psi_{i-\frac{1}{2}}^n \alpha_{i-\frac{1}{2}}^n \right)}{\xi_i^{n+1}} \\ &= \frac{\xi_i^n \alpha_i^n - \left( \psi_{i+\frac{1}{2}}^n \alpha_{i+\frac{1}{2}}^n - \psi_{i-\frac{1}{2}}^n \alpha_{i-\frac{1}{2}}^n \right)}{\xi_i^n - \left( \psi_{i+\frac{1}{2}}^n - \psi_{i-\frac{1}{2}}^n \right)}. \end{aligned}$$

En prenant les valeurs upwind, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \alpha_i^{n+1} &= \frac{\xi_i^n \alpha_i^n - \left( \psi_{i+\frac{1}{2}}^n \alpha_{i+\frac{1}{2}}^n - \psi_{i-\frac{1}{2}}^n \alpha_{i-\frac{1}{2}}^n \right)}{\xi_i^{n+1}} \\ &= \frac{\xi_i^n \alpha_i^n - \left( \psi_{i+\frac{1}{2}}^n \left( \alpha_i^n + \frac{\Delta x}{2} \phi_i^n \nabla^h \alpha_i^n \right) - \psi_{i-\frac{1}{2}}^n \alpha_{i-\frac{1}{2}}^n \right)}{\xi_i^n - \left( \psi_{i+\frac{1}{2}}^n - \psi_{i-\frac{1}{2}}^n \right)} \\ &= \frac{\left( \xi_i^n - \psi_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \alpha_i^n - \left( \xi_i^n - \psi_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \frac{\Delta x \psi_{i+\frac{1}{2}}^n \phi_i^n \nabla^h \alpha_i^n}{2 \left( \xi_i^n - \psi_{i+\frac{1}{2}}^n \right)} + \psi_{i-\frac{1}{2}}^n \alpha_{i-\frac{1}{2}}^n}{\xi_i^n - \left( \psi_{i+\frac{1}{2}}^n - \psi_{i-\frac{1}{2}}^n \right)} \\ &= \frac{\left( \xi_i^n - \psi_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \left( \alpha_i^n - \frac{\Delta x \psi_{i+\frac{1}{2}}^n \phi_i^n \nabla^h \alpha_i^n}{2 \left( \xi_i^n - \psi_{i+\frac{1}{2}}^n \right)} \right) + \psi_{i-\frac{1}{2}}^n \alpha_{i-\frac{1}{2}}^n}{\xi_i^n - \left( \psi_{i+\frac{1}{2}}^n - \psi_{i-\frac{1}{2}}^n \right)}. \end{aligned}$$

Écrit ainsi, on obtient une combinaison convexe. Il reste à montrer que :

$$\min(\alpha_i^n, \alpha_{i-1}^n, \alpha_{i+1}^n) \leq \left( \alpha_i^n - \frac{\Delta x \psi_{i+\frac{1}{2}}^n \phi_i^n \nabla^h \alpha_i^n}{2 \left( \xi_i^n - \psi_{i+\frac{1}{2}}^n \right)} \right) \leq \max(\alpha_i^n, \alpha_{i-1}^n, \alpha_{i+1}^n).$$

Or, par définition de la reconstruction algébrique de  $\alpha$ , l'inégalité est vérifiée si :  $\frac{\psi_{i+\frac{1}{2}}^n}{2 \left( \xi_i^n - \psi_{i+\frac{1}{2}}^n \right)} \leq$

## CHAPITRE 2. UNE DÉRIVATION D'UNE FORMULATION TOTALEMENT CONSERVATIVE POUR LES ÉCOULEMENTS MULTIFLUIDES NON MISCIBLES

---

On obtient alors la condition :  $\frac{\psi_{i+\frac{1}{2}}^n}{\xi_i^n} \leq \frac{1}{2}$ .

En développant  $\psi_{i+\frac{1}{2}}^n$  on a :  $\frac{\Delta t u_{i+\frac{1}{2}}^n \left( \xi_i^n + \frac{\Delta x}{2} \phi_i^n \nabla^h \xi_i^n \right)}{\Delta x \xi_i^n} \leq \frac{1}{2}$ .

Pour conclure, nous allons utiliser le lemme 4 que nous ne montrerons qu'au chapitre 4. Il assure que :  $\xi_i^n + \frac{\Delta x}{2} \phi_i^n \nabla^h \xi_i^n \leq 2\xi_i^n$ .

On obtient alors la condition :  $CFL = \max \left( \frac{\Delta t u_{i+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \right) \leq \frac{1}{4}$ .

Les autres cas se démontrent de la même façon. Ce résultat conclut la preuve.  $\square$

### 2.2.4 Étude numérique dans le cadre compressible

Dans cette section, nous allons étudier la convergence du système de transport. Nous proposons d'étudier deux stratégies différentes pour le traitement de la variable  $\xi$  dans le système de transport conservatif. Nous comparerons ces stratégies à d'autres méthodes de transport utilisées dans la littérature.

Rappelons que toutes les valeurs utilisées sur les faces  $(i + \frac{1}{2}, j)$  et  $(i, j + \frac{1}{2})$  sont les valeurs upwind, obtenues en fonction du signe de la vitesse.

#### Stratégie conservative 1

La première stratégie mise en place consiste en une méthode RK2, avec une remise à un de la variable  $\xi$  au début de chaque pas de temps. Comme la méthode du point milieu pour RK2 possède une étape avec un demi pas de temps, nous reconstruisons  $\xi$ , après le demi pas de temps, avec le limiteur MLP-UB dans le but de limiter la diffusion numérique. La fraction volumique  $\alpha$  est reconstruite avec le limiteur MLP-UB comme dans le chapitre précédent. L'algorithme utilisé est le suivant :

1. Calcul des  $u_{i+\frac{1}{2},j}^n$  et  $u_{i,j+\frac{1}{2}}^n$ ,
2. Calcul de  $\Delta t$  sous condition CFL,
3.  $\xi_{i,j}^n = 1$ ,
4.  $(\alpha \xi)_{i,j}^n = \alpha_{i,j}^n$ ,
5.  $\hat{\alpha}^n(x, y)_{i,j} = \alpha_{i,j}^n + \phi_{i,j,UB}^n \nabla^h \alpha_{i,j}^n \cdot \begin{pmatrix} (x - x_{i,j}) \\ (y - y_{i,j}) \end{pmatrix}$ ,

CHAPITRE 2. UNE DÉRIVATION D'UNE FORMULATION  
 TOTALEMENT CONSERVATIVE POUR LES ÉCOULEMENTS  
 MULTIFLUIDES NON MISCIBLES

---

$$6. \quad (\alpha\xi)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_{i,j}^n \xi_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( u_{x,i+\frac{1}{2},j}^n \hat{\alpha}_{i+\frac{1}{2},j}^n \xi_{i+\frac{1}{2},j}^n - u_{x,i-\frac{1}{2},j}^n \hat{\alpha}_{i-\frac{1}{2},j}^n \xi_{i-\frac{1}{2},j}^n \right. \\ \left. + u_{y,i,j+\frac{1}{2}}^n \hat{\alpha}_{i,j+\frac{1}{2}}^n \xi_{i,j+\frac{1}{2}}^n - u_{y,i,j-\frac{1}{2}}^n \hat{\alpha}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \xi_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right),$$

$$7. \quad (\xi)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \xi_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( u_{x,i+\frac{1}{2},j}^n \xi_{i+\frac{1}{2},j}^n - u_{x,i-\frac{1}{2},j}^n \xi_{i-\frac{1}{2},j}^n \right. \\ \left. + u_{y,i,j+\frac{1}{2}}^n \xi_{i,j+\frac{1}{2}}^n - u_{y,i,j-\frac{1}{2}}^n \xi_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right),$$

$$8. \quad \alpha_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(\alpha\xi)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\xi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}},$$

$$9. \quad \hat{\xi}^{n+\frac{1}{2}}(x, y)_{i,j} = \xi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \phi_{i,j,UB}^n \nabla^h \xi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} (x - x_{i,j}) \\ (y - y_{i,j}) \end{pmatrix},$$

$$10. \quad \hat{\alpha}^{n+\frac{1}{2}}(x, y)_{i,j} = \alpha_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \phi_{i,j,UB}^n \nabla^h \alpha_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} (x - x_{i,j}) \\ (y - y_{i,j}) \end{pmatrix},$$

$$11. \quad (\alpha\xi)_{i,j}^{n+1} = \alpha_{i,j}^n \xi_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( u_{x,i+\frac{1}{2},j}^n \hat{\alpha}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} \hat{\xi}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{x,i-\frac{1}{2},j}^n \hat{\alpha}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} \hat{\xi}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} \right. \\ \left. + u_{y,i,j+\frac{1}{2}}^n \hat{\alpha}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \hat{\xi}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{y,i,j-\frac{1}{2}}^n \hat{\alpha}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \hat{\xi}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right),$$

$$12. \quad (\xi)_{i,j}^{n+1} = \xi_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( u_{x,i+\frac{1}{2},j}^n \hat{\xi}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{x,i-\frac{1}{2},j}^n \hat{\xi}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} \right. \\ \left. + u_{y,i,j+\frac{1}{2}}^n \hat{\xi}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{y,i,j-\frac{1}{2}}^n \hat{\xi}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right),$$

$$13. \quad \alpha_{i,j}^{n+1} = \frac{(\alpha\xi)_{i,j}^{n+1}}{\xi_{i,j}^{n+1}}.$$

### Stratégie conservative 2- $\phi$

La seconde stratégie mise en place consiste en une méthode RK2, mais cette fois  $\xi$  n'est pas réinitialisée à 1. Elle évolue à chaque pas de temps. Pour limiter la diffusion numérique,  $\xi$  est quand même reconstruit à chaque étape avec le limiteur MLP-UB ou le limiteur MLP-min-mod. Les deux limiteurs seront testés par la suite. La fraction volumique  $\alpha$  est reconstruite avec le limiteur MLP-UB comme dans le chapitre précédent. L'algorithme utilisé est le suivant :

1. Calcul des  $u_{i+\frac{1}{2},j}^n$  et  $u_{i,j+\frac{1}{2}}^n$ ,
2. Calcul de  $\Delta t$  sous condition CFL,

CHAPITRE 2. UNE DÉRIVATION D'UNE FORMULATION  
 TOTALEMENT CONSERVATIVE POUR LES ÉCOULEMENTS  
 MULTIFLUIDES NON MISCIBLES

---

3.  $\hat{\xi}^n(x, y)_{i,j} = \xi_{i,j}^n + \phi_{i,j,UB}^n \nabla^h \xi_{i,j}^n \cdot \begin{pmatrix} (x - x_{i,j}) \\ (y - y_{i,j}) \end{pmatrix},$
4.  $\hat{\alpha}^n(x, y)_{i,j} = \alpha_{i,j}^n + \phi_{i,j,UB}^n \nabla^h \alpha_{i,j}^n \cdot \begin{pmatrix} (x - x_{i,j}) \\ (y - y_{i,j}) \end{pmatrix},$
5.  $(\alpha\xi)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_{i,j}^n \xi_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( u_{x,i+\frac{1}{2},j}^n \hat{\alpha}_{i+\frac{1}{2},j}^n \hat{\xi}_{i+\frac{1}{2},j}^n - u_{x,i-\frac{1}{2},j}^n \hat{\alpha}_{i-\frac{1}{2},j}^n \hat{\xi}_{i-\frac{1}{2},j}^n \right. \\ \left. + u_{y,i,j+\frac{1}{2}}^n \hat{\alpha}_{i,j+\frac{1}{2}}^n \hat{\xi}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - u_{y,i,j-\frac{1}{2}}^n \hat{\alpha}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \hat{\xi}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right),$
6.  $(\xi)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \xi_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( u_{x,i+\frac{1}{2},j}^n \hat{\xi}_{i+\frac{1}{2},j}^n - u_{x,i-\frac{1}{2},j}^n \hat{\xi}_{i-\frac{1}{2},j}^n \right. \\ \left. + u_{y,i,j+\frac{1}{2}}^n \hat{\xi}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - u_{y,i,j-\frac{1}{2}}^n \hat{\xi}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right),$
7.  $\alpha_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(\alpha\xi)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\xi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}},$
8.  $\hat{\xi}^{n+\frac{1}{2}}(x, y)_{i,j} = \xi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \phi_{i,j,UB}^n \nabla^h \xi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} (x - x_{i,j}) \\ (y - y_{i,j}) \end{pmatrix},$
9.  $\hat{\alpha}^{n+\frac{1}{2}}(x, y)_{i,j} = \alpha_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \phi_{i,j,UB}^n \nabla^h \alpha_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} (x - x_{i,j}) \\ (y - y_{i,j}) \end{pmatrix},$
10.  $(\alpha\xi)_{i,j}^{n+1} = \alpha_{i,j}^n \xi_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( u_{x,i+\frac{1}{2},j}^n \hat{\alpha}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} \hat{\xi}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{x,i-\frac{1}{2},j}^n \hat{\alpha}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} \hat{\xi}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} \right. \\ \left. + u_{y,i,j+\frac{1}{2}}^n \hat{\alpha}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \hat{\xi}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{y,i,j-\frac{1}{2}}^n \hat{\alpha}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \hat{\xi}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right),$
11.  $(\xi)_{i,j}^{n+1} = \xi_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( u_{x,i+\frac{1}{2},j}^n \hat{\xi}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{x,i-\frac{1}{2},j}^n \hat{\xi}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} \right. \\ \left. + u_{y,i,j+\frac{1}{2}}^n \hat{\xi}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{y,i,j-\frac{1}{2}}^n \hat{\xi}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right),$
12.  $\alpha_{i,j}^{n+1} = \frac{(\alpha\xi)_{i,j}^{n+1}}{\xi_{i,j}^{n+1}}.$

### Stratégie de correction

Dans la littérature, il existe des stratégies de correction. Dans l'article de Xiao & Yabe [103], les auteurs présentent un schéma avec une étape de correction. Ces méthodes permettent de rentrer la vitesse dans l'opérateur de gradient. Pour que la nouvelle équation demeure équivalente à une équation de transport, il est nécessaire d'ajouter un terme de correction correspondant à la divergence de la vitesse. L'équation obtenue est de la

## CHAPITRE 2. UNE DÉRIVATION D'UNE FORMULATION TOTALEMENT CONSERVATIVE POUR LES ÉCOULEMENTS MULTIFLUIDES NON MISCIBLES

---

forme :

$$\partial_t \alpha + \nabla \cdot (\mathbf{u} \alpha) = \alpha \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (2.8)$$

Nous allons résoudre numériquement cette équation avec une méthode RK2 en temps, et un limiteur MLP-UB pour la fraction volumique. L'algorithme utilisé est le suivant :

1. Calcul des  $u_{i+\frac{1}{2},j}^n$  et  $u_{i,j+\frac{1}{2}}^n$ ,
2. Calcul de  $\Delta t$  sous condition CFL,
3.  $\hat{\alpha}^n(x, y)_{i,j} = \alpha_{i,j}^n + \phi_{i,j,UB}^n \nabla^h \alpha_{i,j}^n \cdot \begin{pmatrix} (x - x_{i,j}) \\ (y - y_{i,j}) \end{pmatrix}$ ,
4.  $(\alpha)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( u_{x,i+\frac{1}{2},j}^n \hat{\alpha}_{i+\frac{1}{2},j}^n - u_{x,i-\frac{1}{2},j}^n \hat{\alpha}_{i-\frac{1}{2},j}^n + u_{y,i,j+\frac{1}{2}}^n \hat{\alpha}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - u_{y,i,j-\frac{1}{2}}^n \hat{\alpha}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{\Delta t \alpha_{i,j}^n}{2\Delta x} \left( u_{x,i+\frac{1}{2},j}^n - u_{x,i-\frac{1}{2},j}^n + u_{y,i,j+\frac{1}{2}}^n - u_{y,i,j-\frac{1}{2}}^n \right)$ ,
5.  $\hat{\alpha}^{n+\frac{1}{2}}(x, y)_{i,j} = \alpha_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \phi_{i,j,UB}^n \nabla^h \alpha_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} (x - x_{i,j}) \\ (y - y_{i,j}) \end{pmatrix}$ ,
6.  $(\alpha)_{i,j}^{n+1} = \alpha_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( u_{x,i+\frac{1}{2},j}^n \hat{\alpha}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{x,i-\frac{1}{2},j}^n \hat{\alpha}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{y,i,j+\frac{1}{2}}^n \hat{\alpha}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{y,i,j-\frac{1}{2}}^n \hat{\alpha}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \frac{\Delta t \alpha_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \left( u_{x,i+\frac{1}{2},j}^n - u_{x,i-\frac{1}{2},j}^n + u_{y,i,j+\frac{1}{2}}^n - u_{y,i,j-\frac{1}{2}}^n \right)$ .

### Stratégie d'advection

Enfin, nous terminons avec la stratégie naturelle pour une équation d'advection non conservative. Nous rappelons l'équation d'advection non conservative, telle qu'elle est dans le système à cinq équations de Allaire *et al.* [6] :

$$\partial_t \alpha + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha = 0. \quad (2.9)$$

Nous allons alors résoudre numériquement cette équation avec une méthode RK2 en temps, et un limiteur MLP-UB pour la fraction volumique. L'algorithme utilisé est le suivant :

1. Calcul des  $u_{i+\frac{1}{2},j}^n$  et  $u_{i,j+\frac{1}{2}}^n$ ,
2. Calcul de  $\Delta t$  sous condition CFL,
3.  $\hat{\alpha}^n(x, y)_{i,j} = \alpha_{i,j}^n + \phi_{i,j,UB}^n \nabla^h \alpha_{i,j}^n \cdot \begin{pmatrix} (x - x_{i,j}) \\ (y - y_{i,j}) \end{pmatrix}$ ,

CHAPITRE 2. UNE DÉRIVATION D'UNE FORMULATION  
 TOTALEMENT CONSERVATIVE POUR LES ÉCOULEMENTS  
 MULTIFLUIDES NON MISCIBLES

4.  $(\alpha)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( u_{x,i,j}^n \hat{\alpha}_{i+\frac{1}{2},j}^n - u_{x,i,j}^n \hat{\alpha}_{i-\frac{1}{2},j}^n + u_{y,i,j}^n \hat{\alpha}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - u_{y,i,j}^n \hat{\alpha}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right),$
5.  $\hat{\alpha}^{n+\frac{1}{2}}(x, y)_{i,j} = \alpha_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \phi_{i,j,UB}^n \nabla^h \alpha_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} (x - x_{i,j}) \\ (y - y_{i,j}) \end{pmatrix},$
6.  $(\alpha)_{i,j}^{n+1} = \alpha_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( u_{x,i,j}^n \hat{\alpha}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{x,i,j}^n \hat{\alpha}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{y,i,j}^n \hat{\alpha}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{y,i,j}^n \hat{\alpha}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right).$

**Définition et propriétés du cas test Dilatation-Compression**

Nous allons comparer ces différentes stratégies sur un nouveau cas test. La fraction volumique est initialisée à 1 dans un cercle de rayon 0.5. Un champ de vitesse périodique de période deux est utilisé, de sorte que le matériau se dilate et se comprime de façon périodique. Ce cas test nous permet d'étudier les résultats en temps long et de les comparer périodiquement à la solution initiale. Les conditions initiales sont présentées ci-dessous.

**Dilatation-Compression**

$$\Omega = [-1; 1] \times [-1; 1].$$

$$\alpha_0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 0.25, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \sin(\pi(y^2 + x^2)) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \cos(\pi t) \sin(\pi(y^2 + x^2)) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix}.$$

Les conditions aux limites sont périodiques.

Il est possible de vérifier que ce cas est invariant par rotation. En effet si l'on opère le changement de coordonnées polaires suivants :

$$x = r \cos(\theta) \quad \text{et} \quad y = r \sin(\theta).$$

Où  $r$  est la distance entre le point M de coordonnées (x,y) et l'origine du repère O, et  $\theta$  est l'angle dans le sens trigonométrique, entre la droite (OM) et l'axe polaire.

En appliquant ce changement de variable, la vitesse obtenue est la suivante :

$$\tilde{\mathbf{u}}(r, \theta, t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \sin(\pi r^2) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant les coordonnées polaires, l'équation d'advection sur  $\alpha$  devient :

$$\partial_t \alpha + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{r,\theta} \alpha = 0. \tag{2.10}$$

## CHAPITRE 2. UNE DÉRIVATION D'UNE FORMULATION TOTALEMENT CONSERVATIVE POUR LES ÉCOULEMENTS MULTIFLUIDES NON MISCIBLES

---

Où  $\tilde{u}$  est la vitesse en coordonnées polaires, et  $\nabla_{r,\theta}$  est le gradient en coordonnées polaires. Étant donné le choix de  $\tilde{u}$ , la dérivée dans la direction  $\theta$  s'annule. Alors, l'équation (2.10) revient à résoudre un problème de transport à une seule dimension d'espace. L'équation (2.10) est donc équivalente à l'équation :

$$\partial_t \alpha + \tilde{u}_r \partial_r \alpha = 0. \quad (2.11)$$

Pour résoudre le problème composé de l'équation (2.11) et de la condition initiale  $\alpha_0$ , il est alors possible d'utiliser la méthode des caractéristiques. La solution obtenue en coordonnées polaires est la suivante :

$$\alpha(r, \theta, t) = \alpha_0 \left( r - \frac{\sin(\pi t) \sin(\pi r^2)}{\pi} \right).$$

On remarque alors que pour  $t = 0 \pmod{1}$ , la solution exacte au point de coordonnée  $(r, \theta)$  est égale à la solution initiale au point de coordonnée  $(r, \theta)$ . Ce résultat va nous permettre de comparer les résultats numériques à la solution exacte.

### Étude de l'erreur sur le cas Dilatation-Compression

Nous testons les différentes stratégies présentées sur le cas **Dilatation-Compression**. Les résultats obtenus pour la fraction volumique à  $t=10$  sont présentés sur la figure 2.2. Nous pouvons remarquer, que la stratégie conservative  $2-\phi_{min-mod}$ , ne donne pas un résultat satisfaisant. Le cercle initialement de rayon 0.5 s'est contracté sur lui même. Pour le vérifier, nous présentons sur la figure 2.3, une coupe le long de l'axe  $y=0$  à  $t=10$ . Sur cette figure, nous distinguons nettement que le disque s'est contracté dans le cas de la stratégie conservative  $2-\phi_{min-mod}$ . Il semble que le disque soit aussi contracté avec la stratégie conservative  $2-\phi_{UB}$ , bien que cela soit beaucoup moins marqué. Pour les autres stratégies, aucune différence significative ne semble apparaître. La position du cercle à  $t=10$  est cohérente avec la solution de référence. Un autre point essentiel est la confirmation du principe du maximum démontré précédemment. Le principe du maximum est vérifié par les trois stratégies conservatives.

Pour vérifier la convergence du système de transport conservatif, nous allons maintenant étudier l'erreur en fonction du maillage utilisé.

Dans le tableau 2.1 sont présentées les erreurs commises pour chacune des stratégies en fonction du pas d'espace. Les erreurs obtenues pour les stratégies de correction, d'advection et conservative-1 sont très proches. En revanche, la stratégie conservative-2 donne des résultats sensiblement moins bons. Sur la figure 2.4, sont affichées les droites de ré-

## CHAPITRE 2. UNE DÉRIVATION D'UNE FORMULATION TOTALEMENT CONSERVATIVE POUR LES ÉCOULEMENTS MULTIFLUIDES NON MISCIBLES

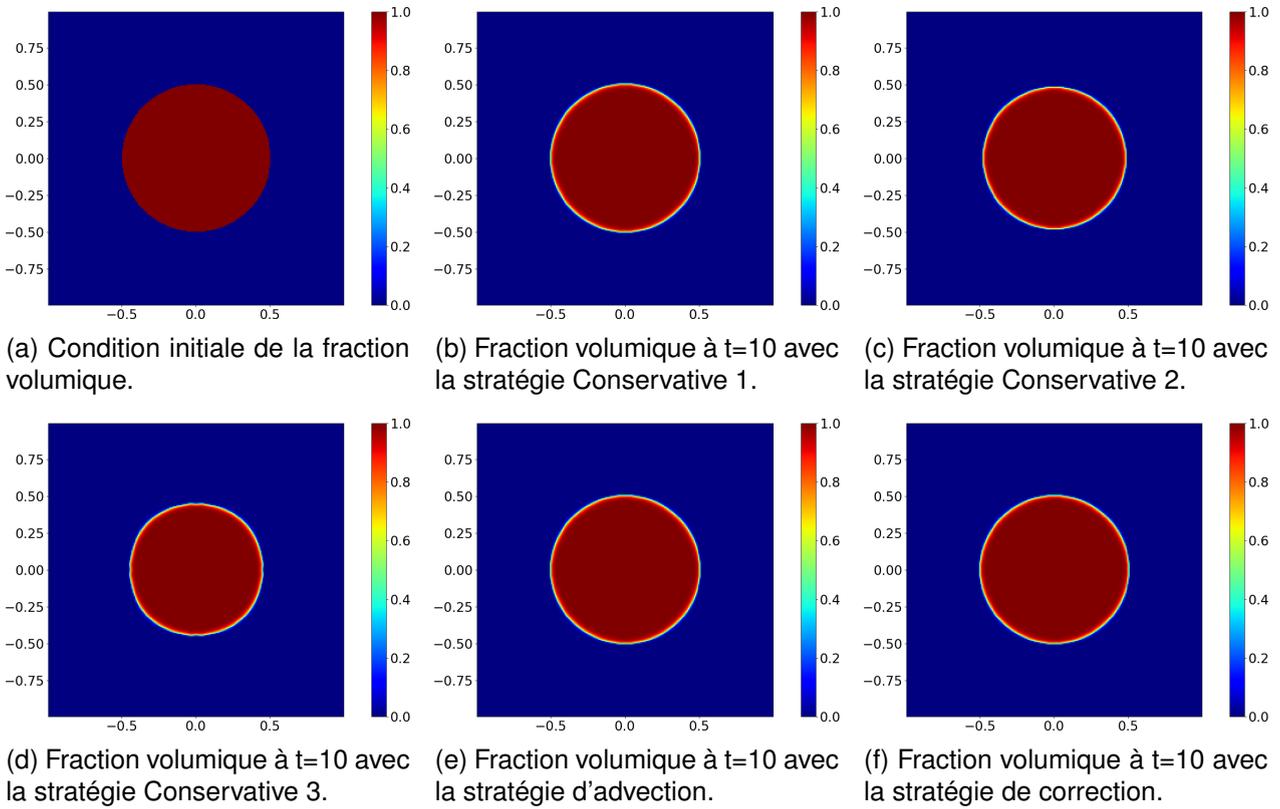


FIGURE 2.2 – Comparaison des différentes stratégies de transport sur le cas **Dilatation-Compression** avec une CFL = 0.18 et une méthode RK2 en temps. Le temps final est  $T=10$ .

gression linéaire pour chacune des stratégies. Les droites pour les stratégies d'advection, de correction et conservative-1 sont pratiquement confondues. L'ordre obtenu pour ces différentes méthodes est 1. Bien que l'erreur soit plus grande pour la stratégie conservative-2- $\phi_{UB}$ , nous obtenons tout de même une méthode d'ordre 1. En revanche, pour la stratégie conservative-2- $\phi_{min-mod}$  l'ordre de convergence est de 0.41.

Dans la suite nous emploierons donc toujours la stratégie conservative-1. Son emploi se justifie également d'un point de vue physique. La stratégie conservative-1 revient à résoudre un nouveau problème à chaque pas de temps, sans tenir compte de l'évolution de la compression subie par le volume. Dans la mesure où nous travaillons dans un cadre eulérien avec un maillage fixe, à chaque pas de temps le volume de la maille est égal au volume de la maille à l'instant initial, donc  $\xi = 1$ .

## CHAPITRE 2. UNE DÉRIVATION D'UNE FORMULATION TOTALEMENT CONSERVATIVE POUR LES ÉCOULEMENTS MULTIFLUIDES NON MISCIBLES

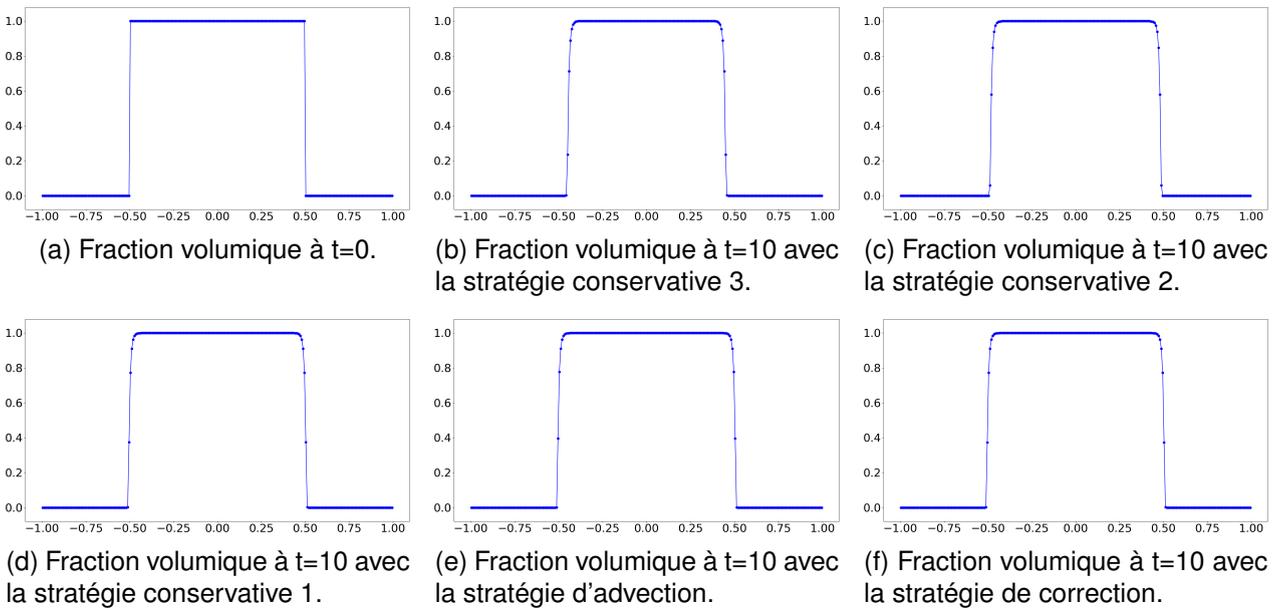


FIGURE 2.3 – Comparaison des différentes stratégies de transport sur le cas **Dilatation-Compression** avec une CFL = 0.18 et une méthode RK2 en temps. Coupe horizontale le long de la droite d'équation  $y=0$ . Le temps final est  $T=10$ .

TABLE 2.1 – Erreurs obtenues en normes  $L_1$  sur le cas **Dilatation-Compression** à  $T=10$  avec CFL = 0.18. Étude des différentes stratégies.

méthode \ Maillage	$32 \times 32$	$64 \times 64$	$128 \times 128$	$256 \times 256$	$512 \times 512$
Correction	0.0536	0.0253	0.0127	0.00622	0.00295
Advection	0.0501	0.0261	0.0131	0.00633	0.00298
Conservative 1	0.0537	0.0254	0.0127	0.00622	0.00295
Conservative 2	0.0755	0.0554	0.034	0.0162	0.00456
Conservative 3	0.0771	0.0652	0.0520	0.0384	0.0245

Nous allons maintenant introduire le système de transport conservatif (2.6), dans le modèle à cinq équations (2.2), et étudier les propriétés de ce nouveau modèle.

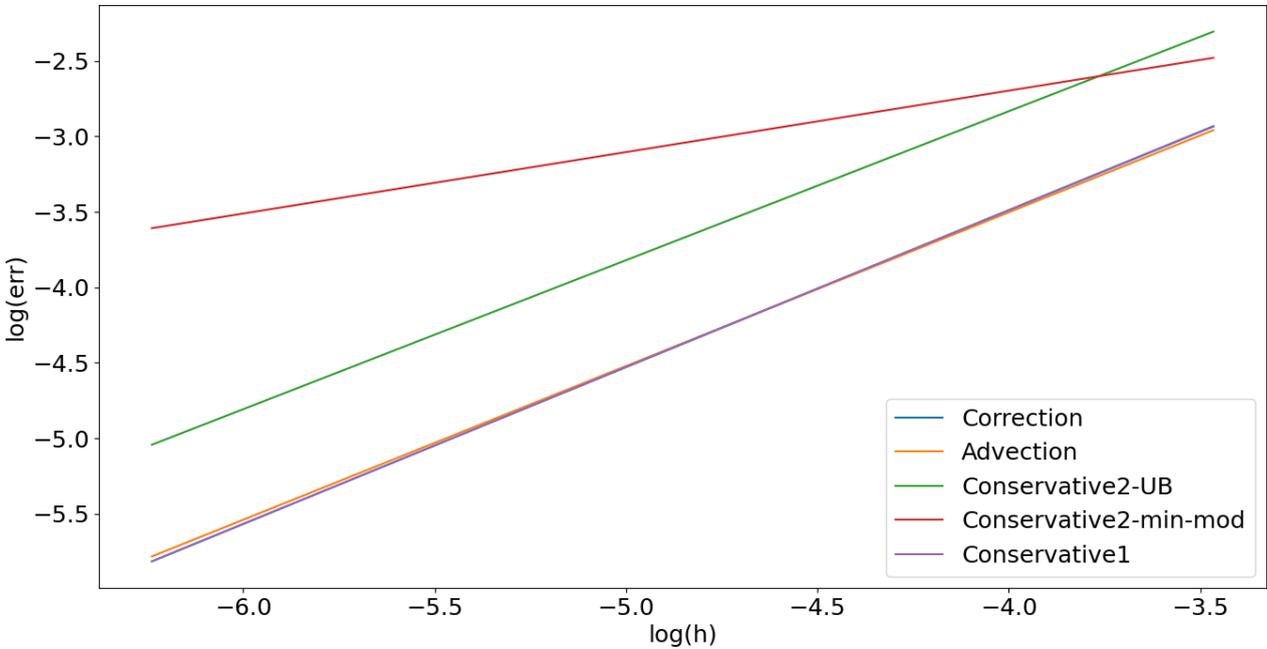


FIGURE 2.4 – Comparaison des différentes stratégies de transport sur le cas **Dilatation-Compression** avec une CFL = 0.18 et une méthode RK2 en temps. Courbe de régression linéaire du logarithme des erreurs en fonction du logarithme de  $\Delta x$ . Le temps final est T=10.

## 2.3 Système totalement conservatif pour les écoulements multifluides compressibles

### 2.3.1 Présentation du système

Rappelons le modèle à cinq équations, en dimension un, présenté par Allaire *et al.* dans l'article [6] :

$$\begin{cases} \partial_t (\rho_1 \alpha_1) + \partial_x (u \rho_1 \alpha_1) = 0, \\ \partial_t (\rho_2 \alpha_2) + \partial_x (u \rho_2 \alpha_2) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t (\rho E) + \partial_x (\rho E u + p u) = 0, \\ \partial_t \alpha_1 + u \partial_x \alpha_1 = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

En remplaçant l'équation de transport par le système de transport (2.6), nous obtenons le nouveau système :

CHAPITRE 2. UNE DÉRIVATION D'UNE FORMULATION  
 TOTALEMENT CONSERVATIVE POUR LES ÉCOULEMENTS  
 MULTIFLUIDES NON MISCIBLES

---

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t (\alpha_1 \rho_1) + \partial_x (u \alpha_1 \rho_1) = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2) + \partial_x (u \alpha_2 \rho_2) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t (\rho E) + \partial_x (\rho E u + p u) = 0, \\ \partial_t \xi + \partial_x u \xi = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \xi) + \partial_x (u \alpha_1 \xi) = 0. \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Le système (2.12), est valable pour un écoulement à deux fluides. Ici, nous souhaitons travailler avec un modèle valable pour nombre arbitraire de fluides. Nous ajoutons donc une équation pour chaque fluide présent. La fraction volumique du fluide  $k$ , est noté  $\alpha_k$  et sa densité  $\rho_k$ . Avec  $L$  fluides présents, nous obtenons le système totalement conservatif suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t (\alpha_k \rho_k) + \partial_x (u \alpha_k \rho_k) = 0, \quad k \in \llbracket 1; L \rrbracket, \\ \partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t (\rho E) + \partial_x (\rho E u + p u) = 0, \\ \partial_t \xi + \partial_x u \xi = 0, \\ \partial_t (\alpha_k \xi) + \partial_x (u \alpha_k \xi) = 0, \quad k \in \llbracket 1; L \rrbracket. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Rappelons que la densité  $\rho$  est la moyenne des  $\rho_k$  pondérés par les  $\alpha_k$ . Elle se calcule comme suit :

$$\rho = \sum_{k=1}^L \alpha_k \rho_k. \quad (2.14)$$

Le système composé de (2.13) et (2.14) est composé de  $2L+5$  variables, mais seulement de  $2L+4$  équations. Il est donc nécessaire d'ajouter une équation pour clore le système. Dans l'article [6] de Allaire *et al.*, il est montré que fermer le modèle avec un équilibre en température ne garantit pas l'existence d'une entropie convexe. Nous fermons donc le modèle avec un équilibre en pression et une loi Stiffened-Gas pour le calcul de celle-ci :

$$p = p_1 = \dots = p_L, \quad k \in \llbracket 1; L \rrbracket, \quad (2.15)$$

$$p = (\gamma - 1) \rho e - \gamma \pi. \quad (2.16)$$

Où  $\gamma$  est le coefficient adiabatique de mélange et  $\pi$  le coefficient Stiffened-Gas de mélange. Leur formule reste toutefois à déterminer. L'énergie interne est quant à elle notée  $e$ .

## CHAPITRE 2. UNE DÉRIVATION D'UNE FORMULATION TOTALEMENT CONSERVATIVE POUR LES ÉCOULEMENTS MULTIFLUIDES NON MISCIBLES

---

Elle s'obtient en calculant la différence entre l'énergie totale et l'énergie cinétique, comme suit :

$$e = E - \frac{1}{2}u^2.$$

Les équations (2.15) et (2.16) ajoutent  $L$  variables (les  $p_k$ ) et  $L+1$  équations. Désormais, nous avons autant d'équations que d'inconnues.

L'équation d'état Stiffened-Gas a fait l'objet de nombreuses études, nous pouvons citer les travaux de Abgrall et Saurel [87, 3] et de Le Metayer [64]. Le choix de l'équation d'état est motivé par le souhait de décrire des fluides réels, et de ne pas se restreindre à des gaz parfaits. En effet, sous certaines hypothèses, cette équation d'état permet de représenter un grand nombre de fluides différents. De plus, d'un point de vue numérique, cette équation nous donne une expression explicite de la pression, ce qui n'est pas toujours le cas. Certains modèles nécessitent l'inversion d'une fonction pour déterminer la pression, cette inversion s'effectue à l'aide de méthodes numériques itératives, comme dans les articles [33, 13]. Les méthodes numériques utilisées pour calculer la pression augmentent la durée des simulations, et ajoutent une source d'erreur numérique. Pour ces raisons, nous utilisons une équation d'état Stiffened-Gas.

### 2.3.2 Propriétés du système

Dans cette section, nous allons présenter les propriétés essentielles à la compréhension du modèle et à sa mise en œuvre numérique. Pour plus de détails, nous vous renvoyons le lecteur à l'article de Allaire *et al.* [6]. Les propriétés obtenues sont similaires. Une valeur propre et un vecteur propre supplémentaire sont obtenus dans notre modèle, ils sont liés au remplacement de l'équation de transport par le système de transport conservatif.

**Propriété 4.** *Le système est hyperbolique et la vitesse du son est :  $c = \sqrt{\frac{\gamma(p + \pi)}{\rho}}$ .*

*Démonstration.* Pour des solutions régulières on peut écrire le système sous la forme vectorielle suivante :

CHAPITRE 2. UNE DÉRIVATION D'UNE FORMULATION  
 TOTALEMENT CONSERVATIVE POUR LES ÉCOULEMENTS  
 MULTIFLUIDES NON MISCIBLES

$$\partial_t M + A(M) \partial_x M = 0, \quad \text{avec } M = \begin{pmatrix} \alpha_k \rho_k \\ u \\ p \\ \xi \\ \alpha_k \end{pmatrix} \quad \text{et } A(M) = \begin{pmatrix} u & \alpha_k \rho_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(p + \pi) & u & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

Ensuite on calcule le déterminant de la matrice :  $(A(M) - \lambda Id)$ .

On obtient alors les valeurs propres suivantes :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = u \quad ; \quad \lambda_4 = u + \sqrt{\frac{\gamma(p + \pi)}{\rho}} \quad ; \quad \lambda_5 = u - \sqrt{\frac{\gamma(p + \pi)}{\rho}}. \quad \square$$

Le modèle présente plusieurs propriétés intéressantes aussi bien d'un point de vue théorique que numérique. La propriété suivante nous donne une formule explicite pour calculer la pression à partir de variables de mélanges.

**Propriété 5.** *Dans les zones de mélange on a le calcul de la pression suivant :*

$$p = (\gamma - 1) \rho e - \gamma \pi.$$

$$\text{Où } \frac{1}{\gamma - 1} = \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_k}{\gamma_k - 1}, \quad \frac{\gamma \pi}{(\gamma - 1)} = \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_k \gamma_k \pi_k}{\gamma_k - 1} \quad \text{et } \rho e = \rho E - \rho u^2.$$

$$\text{Démonstration. On sait que } \rho_k e_k = \frac{p + \gamma_k \pi_k}{\gamma_k - 1} \quad \text{et donc } \rho e = \sum_{k=1}^L \alpha_k \rho_k e_k = \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_k (p + \gamma_k \pi_k)}{\gamma_k - 1}.$$

$$\text{On peut écrire } \rho e = p \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_k}{\gamma_k - 1} + \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_k \gamma_k \pi_k}{\gamma_k - 1},$$

$$\text{on en déduit } p = \frac{\rho e}{\sum_{k=1}^L \frac{\alpha_k}{\gamma_k - 1}} - \frac{\sum_{k=1}^L \frac{\alpha_k \gamma_k \pi_k}{\gamma_k - 1}}{\sum_{k=1}^L \frac{\alpha_k}{\gamma_k - 1}} = (\gamma - 1) \rho e - \gamma \pi. \quad \square$$

Cette propriété va nous permettre de calculer la pression dans les zones de mélanges. Dans la propriété 5, les  $\rho_k$  ne sont pas nécessaires dans le calcul de la pression. Nous pourrions donc considérer de façon équivalente le système suivant :

CHAPITRE 2. UNE DÉRIVATION D'UNE FORMULATION  
 TOTALEMENT CONSERVATIVE POUR LES ÉCOULEMENTS  
 MULTIFLUIDES NON MISCIBLES

---

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x u \rho = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t (\rho E) + \partial_x (\rho E u + p u) = 0, \\ \partial_t \xi + \partial_x u \xi = 0, \\ \partial_t (\alpha_k \xi) + \partial_x (u \alpha_k \xi) = 0, \quad k \in \llbracket 1; L \rrbracket. \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Ce système peut être vu comme une version conservative du système de Shyue présentée dans l'article [92]. Dans le cas où nous utiliserions une équation non conservative pour le transport des fractions volumiques, l'utilisation de ce système serait recommandée d'un point de vue de la compatibilité numérique. En effet, le calcul des  $\rho_k$  dans le cas d'un système non conservatif peut faire apparaître des valeurs incohérentes et entraîner des difficultés numériques. Cependant, dans la mesure où nous employons un système de transport conservatif, le calcul des  $\rho_k$  ne présente pas de difficultés numériques. Nous travaillons donc avec le système (2.13) afin de conserver un maximum d'informations sur chaque fluide.

## 2.4 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons introduit une nouvelle variable conservative :  $\xi$ . Cette variable nous a permis de définir un système de transport conservatif, même dans le cadre d'un écoulement compressible. Après avoir étudié le comportement numérique du système de transport, nous avons mis en évidence une stratégie optimale pour le traitement de la variable  $\xi$ .

En remplaçant ensuite l'équation de transport non conservative dans le modèle à cinq équations de Allaire *et al.*, par le système de transport conservatif, nous avons obtenu un nouveau modèle totalement conservatif pour un nombre arbitraire de fluides. À notre connaissance, aucun modèle similaire n'a été présenté dans la littérature. Son utilisation garantit la convergence des schémas numériques vers des solutions entropiques.

Dans le chapitre suivant, nous allons expliciter un schéma numérique adapté à la simulation d'écoulements multifluides. Cela nous permettra de vérifier la consistance du modèle dans le cas d'un écoulement à un seul fluide. Puis nous nous assurerons que les oscillations parasites présentées dans la littérature, avec d'autres systèmes conservatifs, ne sont pas présentes avec le système (2.13).

# Chapitre 3

## Un développement d'un schéma numérique strictement eulérien : Lagrange-Flux

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction du chapitre</b> . . . . .	<b>82</b>
<b>3.2</b>	<b>Développement mathématique du schéma Lagrange-Flux</b> . . . . .	<b>84</b>
3.2.1	Contexte d'étude mathématique du schéma . . . . .	84
3.2.2	Construction du schéma . . . . .	85
<b>3.3</b>	<b>Résultats numériques</b> . . . . .	<b>89</b>
3.3.1	Comparaison des solutions théoriques et numériques en dimension un . . . . .	89
3.3.2	Résultats numériques à deux dimensions d'espaces . . . . .	95
<b>3.4</b>	<b>Conclusion du chapitre</b> . . . . .	<b>98</b>

---

### 3.1 Introduction du chapitre

Dans le cadre des écoulements multifluides, les méthodes lagrangiennes sont souvent préférées aux méthodes eulériennes pour leur précision. Les méthodes lagrangiennes permettent un suivi direct des différents fluides, aucune diffusion numérique n'est générée par les itérations successives. Malheureusement, elles se révèlent très peu robustes. Le maillage étant déformé à la vitesse des fluides, il est possible de se retrouver dans une situation où une maille se retourne sur elle-même. Ce phénomène est connu et empêche la poursuite de la simulation. Pour éviter ce phénomène des méthodes dites Lagrange+projection sont développées [11]. Dans un premier temps, elles consistent en une phase lagrangienne, où le maillage se déplace à la vitesse du fluide, et les variables sont déduites en fonction de l'évolution lagrangienne. Ensuite, les quantités obtenues sur le maillage lagrangien sont projetées sur le maillage eulérien. Ces schémas allient à la fois la précision des méthodes lagrangiennes et la robustesse des schémas eulériens. Un schéma des différentes étapes est représenté sur la figure 3.1.

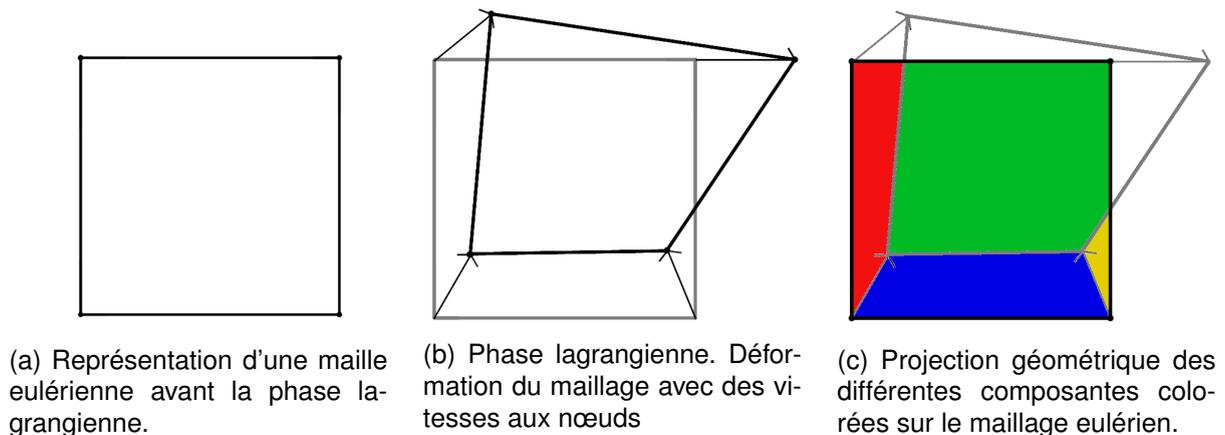


FIGURE 3.1 – Schéma des différentes étapes pour une méthode Lagrange+projection.

Dans ce chapitre, nous allons expliciter un schéma, Lagrange-Flux, présenté dans la thèse de Gasc [36]. Ce choix est motivé par le souhait de travailler uniquement sur le maillage eulérien. En effet, ce schéma numérique est construit à partir d'une étape lagrangienne suivie d'une étape de projection algébrique. L'étape de projection algébrique nous permet de nous affranchir complètement des calculs sur le maillage lagrangien. Dans sa thèse, Gasc montre les propriétés de scalabilité du schéma Lagrange-Flux. La scalabilité du schéma nous permet de réaliser des calculs sur des maillages plus fins et ainsi obtenir de

meilleures solutions.

Compte tenu de l'évolution des architectures de calculs, vers des machines avec un nombre de cœurs croissant et un débit mémoire toujours plus important, il nous apparaît important de travailler avec une méthode adaptée à ces machines. Pour plus de détails sur les propriétés informatiques de la méthode Lagrange-Flux, nous renvoyons le lecteur à la thèse de Gasc [36].

Dans ce chapitre, nous commencerons par rappeler les étapes de la construction du schéma Lagrange-Flux. Puis nous présenterons le solveur de Riemann approché : HLL. Pour enfin comparer des résultats numériques obtenus avec les solutions exactes.

## 3.2 Développement mathématique du schéma Lagrange-Flux

### 3.2.1 Contexte d'étude mathématique du schéma

Pour simplifier l'étude, nous nous plaçons dans le cas d'un écoulement monofluide avec une équation d'état des gaz parfaits. Dans ce cas de figure, l'écoulement est simplement régi par les équations d'Euler. En conservant le point de vue eulérien, les équations s'écrivent en version multidimensionnelle comme suit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\mathbf{u}\rho) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0, \\ \partial_t (\rho E) + \nabla \cdot (\mathbf{u}\rho E) + \nabla \cdot (\mathbf{u}p) = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$p = (\gamma - 1) \rho e.$$

Pour passer au point de vue lagrangien, il suffit d'appliquer le théorème de transport de Reynolds :

$$\frac{d}{dt} \int_V f dv = \int_V \partial_t f dv + \int_{\partial V} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{\partial V}) f d\sigma. \quad (3.2)$$

Où  $V$  est le volume de la particule en point de vue lagrangien,  $f$  est une fonction régulière,  $\mathbf{u}$  est la vitesse de déplacement de la particule,  $\partial V$  les bords du domaine suivi et  $\mathbf{n}_{\partial V}$  la normale sortant au bord de  $V$ .

En appliquant la formule (3.2) sur les équations (3.1), le système (3.1) se réécrit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_V \rho dv = 0, \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dv = - \int_{\partial V} p \mathbf{n}_{\partial V} d\sigma, \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho E dv = - \int_{\partial V} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{\partial V}) p d\sigma, \end{cases} \quad (3.3)$$

$$p = (\gamma - 1) \rho e.$$

Nous ajoutons une loi de conservation géométrique. Elle nous donne l'évolution du volume. Elle est obtenue directement en choisissant  $f$ , comme la fonction constante égale à un dans la formule (3.2) :

$$\frac{d}{dt} \int_V dv = \int_{\partial V} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{\partial V}) d\sigma. \quad (3.4)$$

Le système (3.3) associé à la loi de conservation géométrique constituent le point de départ des méthodes lagrangiennes.

### 3.2.2 Construction du schéma

Nous pouvons maintenant discrétiser les équations de la mécanique des fluides dans le cadre lagrangien. Lorsque les variables seront considérées sur le maillage lagrangien (mobile), nous ajouterons l'exposant  $L$ . Les équations (3.3) et (3.4) discrétisées, nous donnent le résultat suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} |V_{i,j}^{n+1,L}| - |V_{i,j}^n| = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{S \subset \partial V_{i,j}} \int_S (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_S) d\sigma dt, \\ |V_{i,j}^{n+1,L} \rho_{i,j}^{n+1,L} - |V_{i,j}^n \rho_{i,j}^n = 0, \\ |V_{i,j}^{n+1,L} \rho_{i,j}^{n+1,L} \mathbf{u}_{i,j}^{n+1,L} - |V_{i,j}^n \rho_{i,j}^n \mathbf{u}_{i,j}^n = - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{S \subset \partial V_{i,j}} \int_S (p \mathbf{n}_S) d\sigma dt, \\ |V_{i,j}^{n+1,L} \rho_{i,j}^{n+1,L} E_{i,j}^{n+1,L} - |V_{i,j}^n \rho_{i,j}^n E_{i,j}^n = - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{S \subset \partial V_{i,j}} \int_S (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_S) p d\sigma dt. \end{array} \right.$$

Les vitesses et les pressions, sur les bords de la maille  $(i, j)$ , sont calculées au temps  $n + \frac{1}{2}$  pour atteindre l'ordre 2. La discrétisation au temps  $n + \frac{1}{2}$  sur l'arête  $S$  est noté avec un exposant  $n + \frac{1}{2}$  et un indice  $S$ . Nous obtenons alors le système totalement discrétisé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} |V_{i,j}^{n+1,L}| - |V_{i,j}^n| = \Delta t \sum_{S \subset \partial V_{i,j}^{n+\frac{1}{2},L}} |S| \left( \mathbf{u}_S^{n+\frac{1}{2},L} \cdot \mathbf{n}_S^{n+\frac{1}{2},L} \right), \\ |V_{i,j}^{n+1,L} \rho_{i,j}^{n+1,L} - |V_{i,j}^n \rho_{i,j}^n = 0, \\ |V_{i,j}^{n+1,L} \rho_{i,j}^{n+1,L} \mathbf{u}_{i,j}^{n+1,L} - |V_{i,j}^n \rho_{i,j}^n \mathbf{u}_{i,j}^n = - \Delta t \sum_{S \subset \partial V_{i,j}^{n+\frac{1}{2},L}} |S| \left( p_S^{n+\frac{1}{2},L} \mathbf{n}_S^{n+\frac{1}{2},L} \right), \\ |V_{i,j}^{n+1,L} \rho_{i,j}^{n+1,L} E_{i,j}^{n+1,L} - |V_{i,j}^n \rho_{i,j}^n E_{i,j}^n = - \Delta t \sum_{S \subset \partial V_{i,j}^{n+\frac{1}{2},L}} |S| \left( \mathbf{u}_S^{n+\frac{1}{2},L} \cdot \mathbf{n}_S^{n+\frac{1}{2},L} \right) p_S^{n+\frac{1}{2},L}. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Le système discrétisé (3.5), peut être écrit sous la forme compacte :

$$|V_{i,j}^{n+1,L}|U_{i,j}^{n+1,L} - |V_{i,j}^n|U_{i,j}^n = -\Delta t \sum_{S \subset \partial V_{i,j}^{n+\frac{1}{2},L}} |S| \pi_S^{n+\frac{1}{2},L}. \quad (3.6)$$

Où  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \rho E \end{pmatrix}$  et  $\pi = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_S \\ 0 \\ p \mathbf{n}_S \\ p(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_S) \end{pmatrix}$ .

Classiquement, dans les méthodes Lagrange+projection, les grandeurs calculées en point de vue lagrangien sont projetées vers le maillage eulérien en approchant l'intégrale :

$$U_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{V_{i,j}} \int_{V_{i,j}} \mathcal{I}(U_{i,j}^{n+1,L}) \, dv.$$

Où  $\mathcal{I}$  est un opérateur d'interpolation sur le maillage lagrangien. Nous ne discuterons pas ici des différentes manières de projeter géométriquement les valeurs lagrangiennes sur le maillage lagrangien. Dans ce chapitre, nous allons présenter une projection algébrique. Elle va nous permettre de travailler uniquement avec les valeurs eulériennes. Le lecteur souhaitant approfondir les méthodes de projection géométrique est renvoyé à la littérature. Nous pouvons citer [30, 11].

Nous allons maintenant définir la projection algébrique. Rappelons que l'étape de projection ne correspond pas à une évolution temporelle. Nous pouvons donc écrire :

$$\partial_t U = 0.$$

Ou de façon équivalente :

$$\partial_t U + \nabla \cdot (\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2},L} U) - \nabla \cdot (\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2},L} U) = 0. \quad (3.7)$$

Nous allons résoudre l'équation (3.7) en deux temps. Dans un premier temps nous allons résoudre l'étape de recul d'un point de vue lagrangien :

$$\partial_t U - \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2},L} U = 0. \quad (3.8)$$

Ce qui nous donne directement :

$$|V_{i,j}^{n+1,L}|U_{i,j}^{n+1,L} = |V_{i,j}| \tilde{U}_{i,j}^n. \quad (3.9)$$

Où  $\tilde{U}$  vérifie l'équation discrète de l'équation (3.8) dans le cadre lagrangien. Cette étape nous permet de nous ramener au maillage eulérien sans avoir aucun calcul géométrique. Ensuite, nous pouvons résoudre l'étape d'avancée en point de vue eulérien :

$$\partial_t U + \nabla \cdot (\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2},L} U) = 0. \quad (3.10)$$

Ce qui donne la discrétisation :

$$|V_{i,j}|U_{i,j}^{n+1} = |V_{i,j}|\tilde{U}_{i,j}^n - \Delta t \sum_{S \subset \partial V_{i,j}^{n+\frac{1}{2},L}} |S| \left( \mathbf{u}_S^{n+\frac{1}{2},L} \cdot \mathbf{n}_S^{n+\frac{1}{2},L} \right) \tilde{U}_S^{n+\frac{1}{2}}. \quad (3.11)$$

Maintenant, en combinant les formules (3.11), (3.9) et (3.6) nous obtenons :

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{n+1} &= U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{|V_{i,j}|} \sum_{S \subset \partial V_{i,j}^{n+\frac{1}{2},L}} |S| \left( \boldsymbol{\pi}_S^{n+\frac{1}{2},L} \cdot \mathbf{n}_S^{n+\frac{1}{2},L} \right) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{|V_{i,j}|} \sum_{S \subset \partial V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}} |S| \left( \mathbf{u}_S^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{n}_S^{n+\frac{1}{2}} \right) \tilde{U}_S^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Si l'on regarde cette équation d'un point de vue continu en temps et discret en espace, on peut écrire :

$$\begin{aligned} U_{i,j}(t^n + \Delta t) &= U_{i,j}(t^n) - \frac{\Delta t}{|V_{i,j}|} \sum_{S \subset \partial V_{i,j}^L(t^n + \frac{\Delta t}{2})} |S| \left( \boldsymbol{\pi}_S^L \left( t^n + \frac{\Delta t}{2} \right) \cdot \mathbf{n}_S^L \left( t^n + \frac{\Delta t}{2} \right) \right) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{|V_{i,j}|} \sum_{S \subset \partial V_{i,j}} |S| \left( \mathbf{u}_S \left( t^n + \frac{\Delta t}{2} \right) \cdot \mathbf{n}_S \left( t^n + \frac{\Delta t}{2} \right) \right) \tilde{U}_S \left( t^n + \frac{\Delta t}{2} \right). \end{aligned}$$

En faisant tendre  $\Delta t$  vers 0, la position du maillage lagrangien tend vers la position du maillage eulérien. Et les flux calculés en  $t^{n+\frac{1}{2}}$  tendent vers des flux calculés en  $t^n$ . Nous

obtenons alors l'équation, discrétisée en espace, et continue en temps, suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dU_{i,j}}{dt} = & - \frac{1}{|V_{i,j}|} \sum_{S \subset \partial V_{i,j}(t^n)} |S| (\boldsymbol{\pi}_S(t^n) \cdot \mathbf{n}_S(t^n)) \\ & - \frac{1}{|V_{i,j}|} \sum_{S \subset \partial V_{i,j}} |S| (\mathbf{u}_S(t) \cdot \mathbf{n}_S(t)) U_S(t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Nous en déduisons un schéma calculé entièrement sur le maillage eulérien :

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{n+1} = & U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{|V_{i,j}|} \sum_{S \subset \partial V_{i,j}^n} |S| (\boldsymbol{\pi}_S^n \cdot \mathbf{n}_S^n) \\ & - \frac{\Delta t}{|V_{i,j}|} \sum_{S \subset \partial V_{i,j}^n} |S| (\mathbf{u}_S^n \cdot \mathbf{n}_S^n) U_S^n. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Les vitesses  $\mathbf{u}_S$  et pressions  $p_S$  peuvent être calculées par un solveur de Riemann approché. Nous faisons le choix d'utiliser le solveur HLL. Pour les détails de sa construction, le lecteur est renvoyé au livre de Toro [98]. En dimension deux, le solveur HLL utilisé s'écrit :

$$\begin{aligned} p_{i-\frac{1}{2},j}^{n,*} &= \frac{\rho_{i,j} p_{i-1,j} + \rho_{i-1,j} p_{i,j}}{\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j}} - \frac{\rho_{i,j} \rho_{i-1,j} (u_{i,j} - u_{i-1,j}) \max(C_{i,j}, C_{i-1,j})}{\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j}}, \\ u_{i-\frac{1}{2},j}^{n,*} &= \frac{\rho_{i,j} u_{i,j} + \rho_{i-1,j} u_{i-1,j}}{\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j}} - \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\max(C_{i,j}, C_{i-1,j}) (\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j})}. \end{aligned}$$

Les valeurs de  $U$  sur la face  $S$  en  $(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j)$  sont les valeurs upwind, calculées en fonction du signe de  $u_{i-\frac{1}{2},j}^{n,*}$ .

**Remarque 4.** *Le choix du solveur de Riemann peut être discuté, mais il est important pour la suite que l'on ait l'implication suivante :*

$$p_{i,j} = p_{i-1,j} \implies p_{i-\frac{1}{2},j}^* = p_{i,j}.$$

Le schéma obtenu est entièrement calculé sur le maillage eulérien, aucun calcul géométrique sur le maillage lagrangien n'est nécessaire. Le schéma eulérien, obtenu en partant d'une méthode Lagrange+projection est similaire au schéma advection upstream splitting method (AUSM) proposé dans les travaux de Liou *et al.* [71, 70, 100]. La construction semi-discrète présentée dans la formule (3.12), permet d'obtenir un résultat d'entropie pour le schéma Lagrange-Flux. Ce résultat est détaillé dans l'article de De Vuyst [25]. Pour clore ce chapitre, nous allons tester numériquement le schéma Lagrange-Flux sur des cas à une et deux dimensions d'espace.

### 3.3 Résultats numériques

Dans cette section nous revenons au système multifluide. Ici, nous le présentons pour un nombre arbitraire de dimensions. Il s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases}
 \partial_t (\alpha_k \rho_k) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \alpha_k \rho_k) = 0, & k \in \llbracket 1; L \rrbracket, \\
 \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0, \\
 \partial_t (\rho E) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \rho E) + \nabla \cdot (\mathbf{u} p) = 0, \\
 \partial_t \xi + \nabla \cdot (\mathbf{u} \xi) = 0, \\
 \partial_t (\alpha_k \xi) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \alpha_k \xi) = 0, & k \in \llbracket 1; L \rrbracket,
 \end{cases} \quad (3.14)$$

$$p_k = (\gamma_k - 1) \rho_k e_k - \gamma_k \pi_k, \quad k \in \llbracket 1; L \rrbracket,$$

$$p_1 = \dots = p_n = p \quad k \in \llbracket 1; L \rrbracket,$$

$$\sum_{k \in \llbracket 1; L \rrbracket} \alpha_k = 1.$$

Pour commencer, nous prendrons un seul fluide afin de tester le schéma numérique. Ensuite, nous le testerons en dimension deux dans des cas avec un nombre de fluides strictement supérieur à un.

#### 3.3.1 Comparaison des solutions théoriques et numériques en dimension un

Les cinq cas test, à une dimension d'espace, mis en œuvre sont issus du livre de Toro [98]. Le solveur de Riemann exact utilisé pour calculer les solutions de référence est issu du même ouvrage.

Le premier test est un tube à choc de Sod. Un fluide au repos est séparé en deux états, gauche et droit, par une membrane placée au centre. Initialement, la densité et la pression de l'état gauche sont supérieures à celles de l'état droit. Les conditions initiales sont données en figure 3.2. Une fois que l'on retire la membrane, trois ondes apparaissent. Une onde de raréfaction à gauche, une onde de contact au centre et une onde de choc à droite. Sur la figure 3.3, sont présentés les résultats avec le schéma Lagrange-Flux (représentés par les points bleus) et une solution de référence (trait continu). La position des ondes est

### CHAPITRE 3. UN DÉVELOPPEMENT D'UN SCHÉMA NUMÉRIQUE STRICTEMENT EULÉRIEN : LAGRANGE-FLUX

correctement capturée par le schéma Lagrange-Flux. Cependant, la diffusion numérique est trop importante à l'ordre 1, elle rend difficile la distinction entre les différentes ondes visibles sur  $\rho$ .

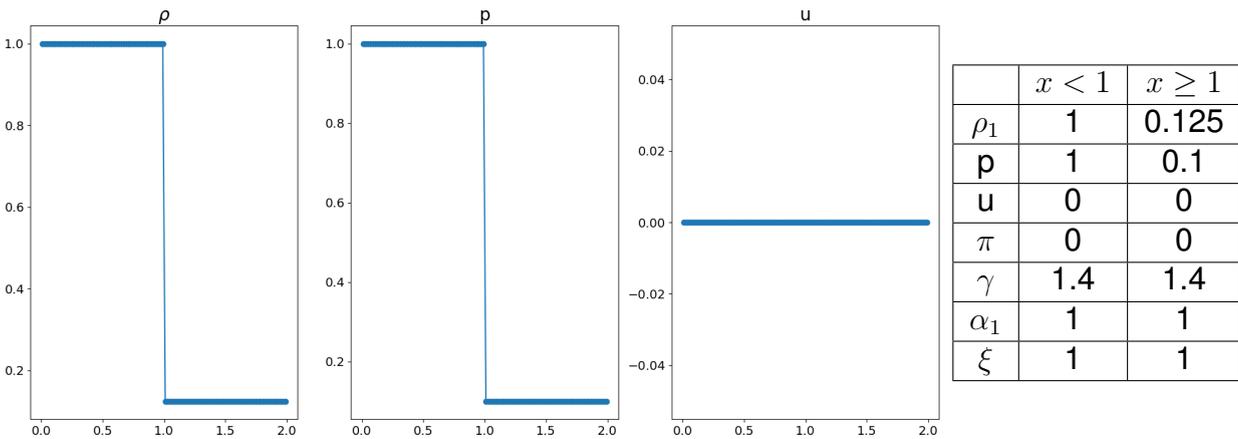


FIGURE 3.2 – Conditions initiales du cas **Test 1**.

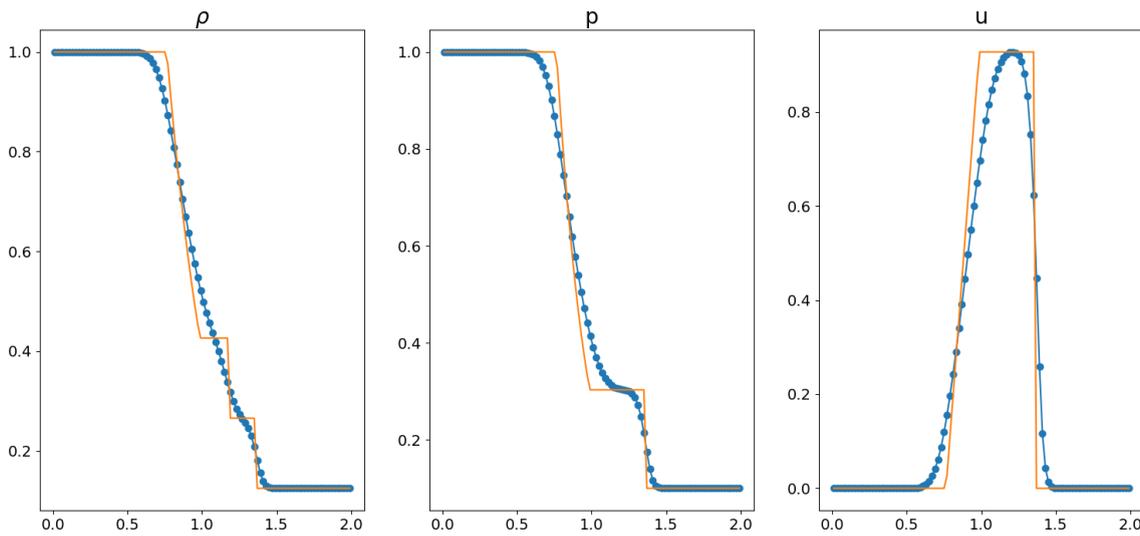


FIGURE 3.3 – Comparaison de la solution exacte et du résultat obtenu avec le schéma Lagrange-Flux pour le cas **Test 1**. Résultat à  $t=0.2$  avec 100 mailles et une  $CFL=0.18$ . La solution exacte est représentée par la ligne orange continue. La solution obtenue par le schéma Lagrange-Flux est représentée par les points bleus.

Le second cas test est une double détente. Un fluide avec une pression constante est présent sur tout le domaine. Seule la vitesse est discontinue au centre, elle est égale à -2 à gauche et 2 à droite. Les conditions initiales sont présentées sur la figure 3.4. Sur la figure 3.5, on retrouve des profils de densité et de pression tout à fait satisfaisants, et

ce malgré une pression très faible (proche du vide). On remarque aussi que le minimum est atteint pour la densité malgré l'absence de reconstruction. Pour la vitesse, la partie constante n'apparaît pas, l'onde de contact n'est pas bien capturée.

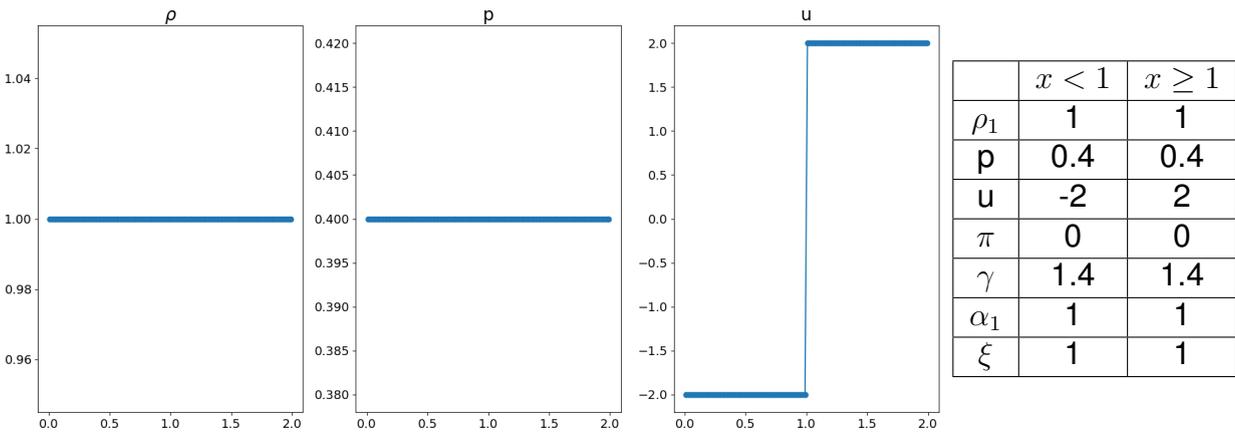


FIGURE 3.4 – Conditions initiales du cas **Test 2**.

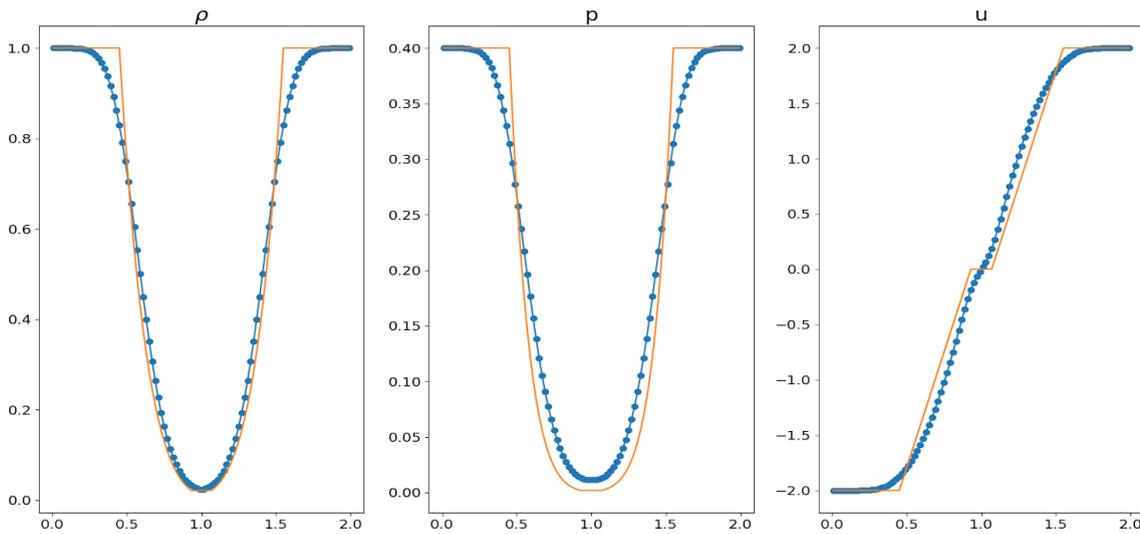


FIGURE 3.5 – Comparaison de la solution exacte et du résultat obtenu avec le schéma Lagrange-Flux pour le cas **Test 2**. Résultat à  $t=0.2$  avec 100 mailles et une  $CFL=0.18$ . La solution exacte est représentée par la ligne orange continue. La solution obtenue par le schéma Lagrange-Flux est représentée par les points bleus.

Le troisième test présente des profils de densité et de vitesse constante sur l'ensemble du domaine. La pression est discontinue au centre du domaine, avec un ratio de 10 000 entre l'état gauche et l'état droit. Les conditions initiales sont présentées sur la figure 3.6. Sur la figure 3.7, sont présentés les résultats. Une détente apparaît à gauche suivie d'une onde de contact, puis d'un choc. Les résultats obtenus par le schéma Lagrange-Flux

### CHAPITRE 3. UN DÉVELOPPEMENT D'UN SCHÉMA NUMÉRIQUE STRICTEMENT EULÉRIEN : LAGRANGE-FLUX

pour la pression et la vitesse sont en accord avec la solution exacte. Malheureusement, la distance entre l'onde de choc et l'onde de contact est trop faible pour capturer avec précision le profil de densité.

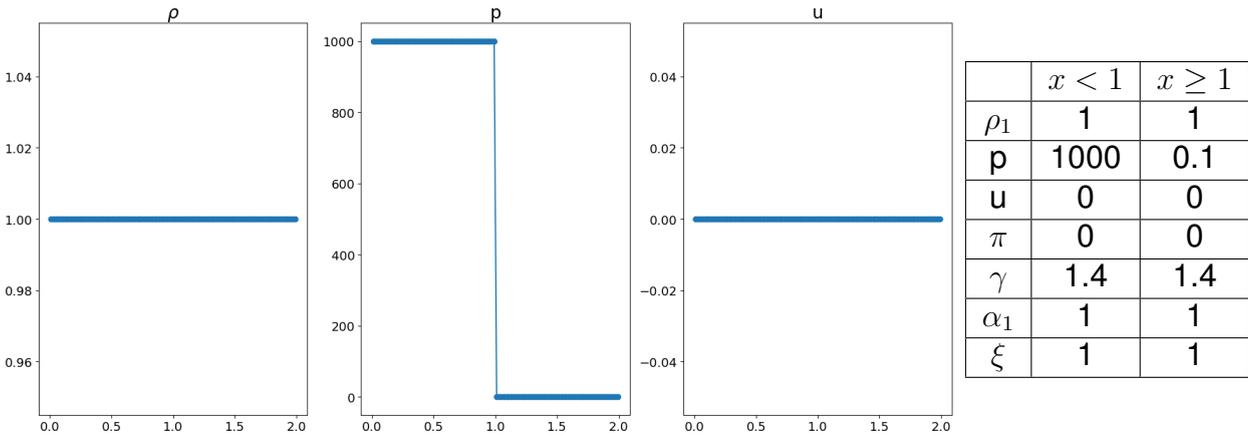


FIGURE 3.6 – Conditions initiales du cas **Test 3**.

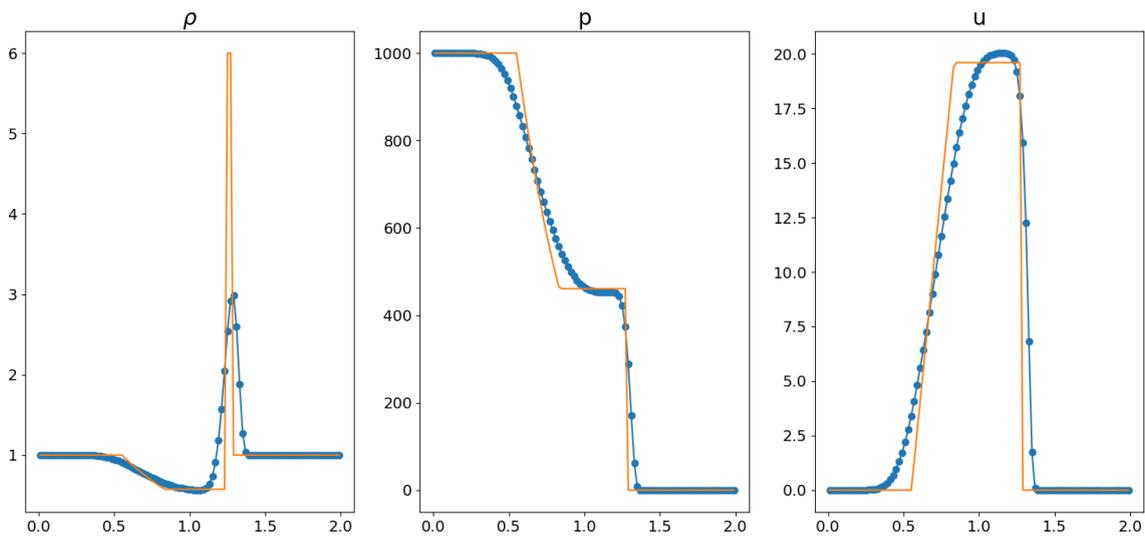


FIGURE 3.7 – Comparaison de la solution exacte et du résultat obtenu avec le schéma Lagrange-Flux pour le cas **Test 3**. Résultat à  $t=0.012$  avec 100 mailles et une  $CFL=0.18$ . La solution exacte est représentée par la ligne orange continue. La solution obtenue par le schéma Lagrange-Flux est représentée par les points bleus.

Le quatrième test est similaire au précédent. Il présente des profils de densité et de vitesse constants sur l'ensemble du domaine. La pression, elle, a une discontinuité au centre avec un ratio de 1000 entre l'état gauche et l'état droit. Les conditions initiales sont présentées sur la figure 3.8. Sur la figure 3.9, sont présentés les résultats. Une détente apparaît à

### CHAPITRE 3. UN DÉVELOPPEMENT D'UN SCHÉMA NUMÉRIQUE STRICTEMENT EULÉRIEN : LAGRANGE-FLUX

gauche suivie d'une onde de contact puis d'un choc. Les résultats obtenus par le schéma Lagrange-Flux pour la pression et la vitesse sont en accord avec la solution exacte. Malheureusement, nous retrouvons le même défaut que pour le cas précédent, la distance entre les ondes de choc et de contact est trop faible pour capturer avec précision le profil de densité.

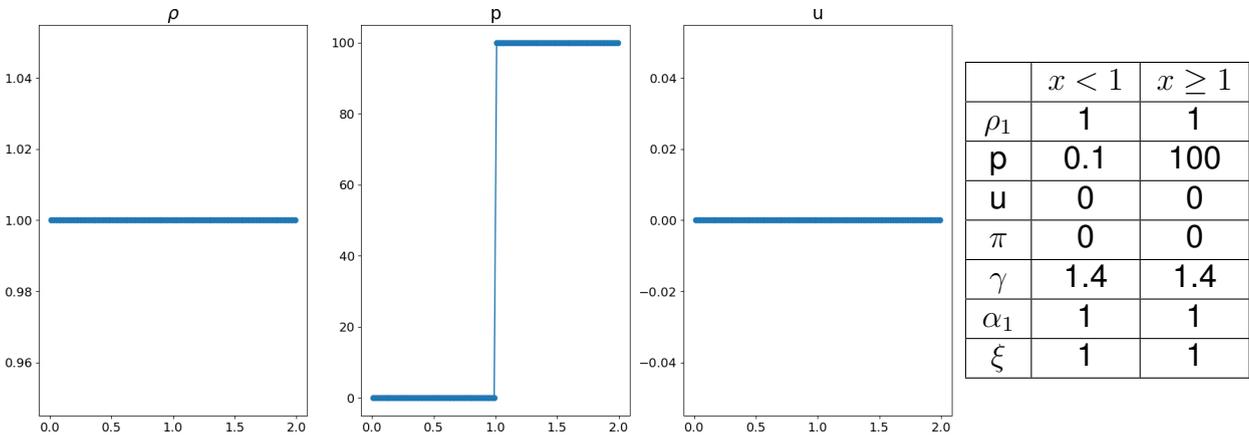


FIGURE 3.8 – Conditions initiales du cas **Test 4**.

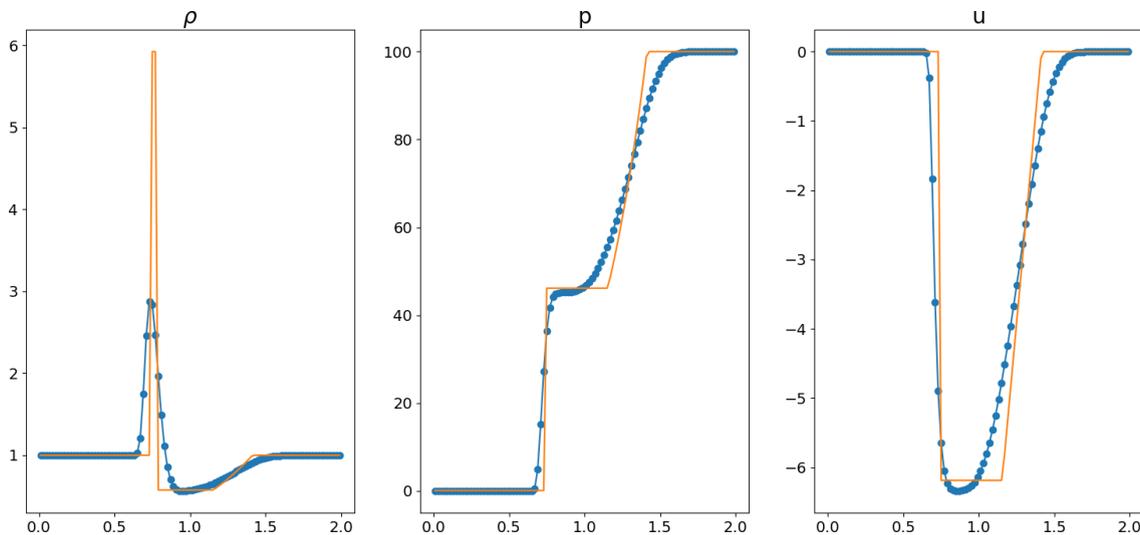


FIGURE 3.9 – Comparaison de la solution exacte et du résultat obtenu avec le schéma Lagrange-Flux pour le cas **Test 4**. Résultat à  $t=0.035$  avec 100 mailles et une  $CFL=0.18$ . La solution exacte est représentée par la ligne orange continue. La solution obtenue par le schéma Lagrange-Flux est représentée par les points bleus.

Le dernier test en dimension un, le **Test 5**, est le résultat de la rencontre entre le choc issu du **Test 3** et celui issu du **Test 4**. Il en résulte deux ondes de chocs se déplaçant

### CHAPITRE 3. UN DÉVELOPPEMENT D'UN SCHÉMA NUMÉRIQUE STRICTEMENT EULÉRIEN : LAGRANGE-FLUX

chacune dans une direction opposée. Et entre les deux se trouve une onde de contact. La position des différentes ondes est bien capturée par le schéma Lagrange-Flux. Toutefois, la diffusion numérique ne nous permet pas de retrouver le caractère discontinu des ondes de chocs et de contact.

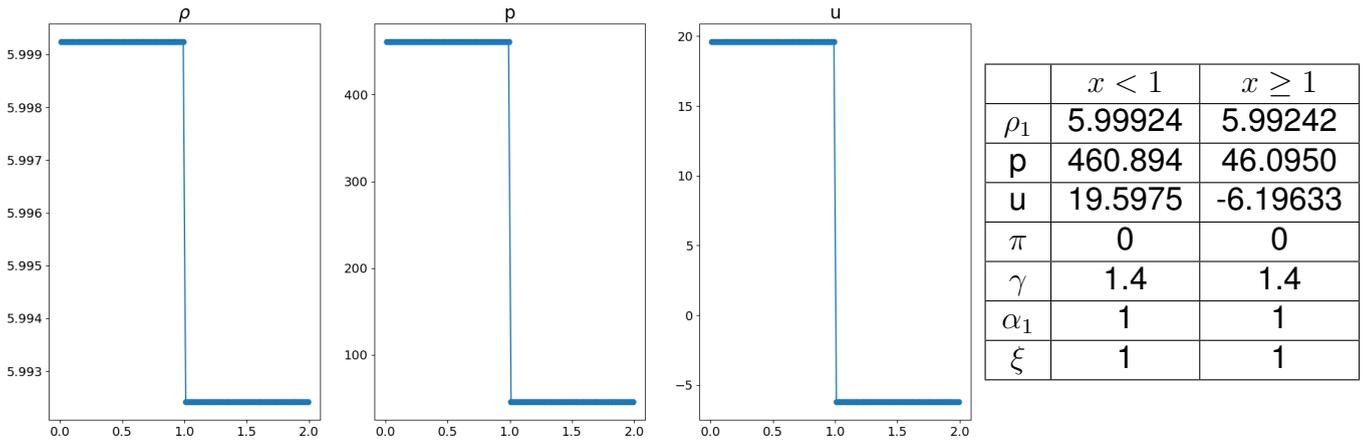


FIGURE 3.10 – Conditions initiales du cas **Test 5**.

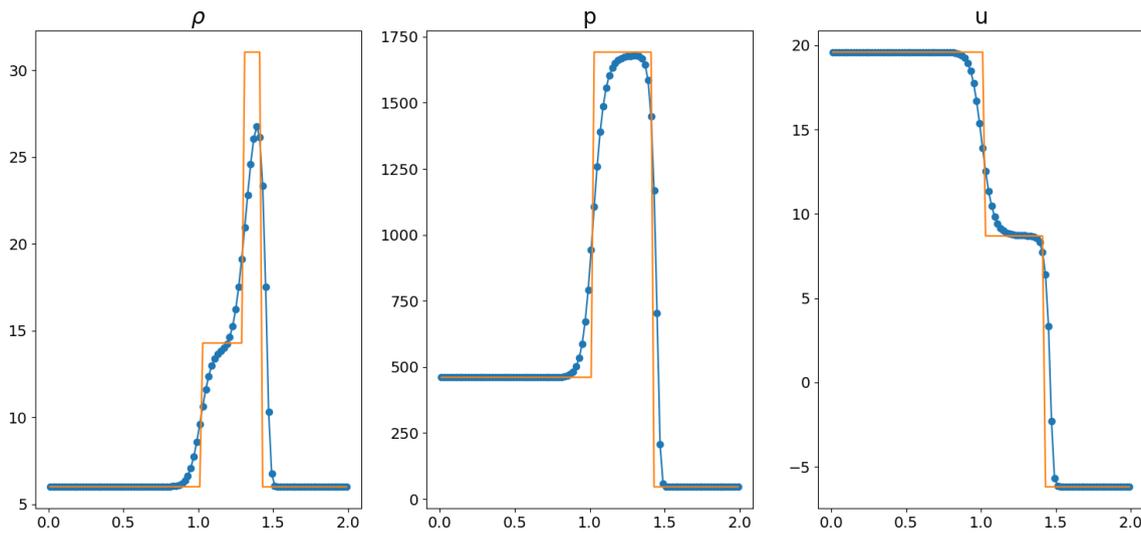


FIGURE 3.11 – Comparaison de la solution exacte et du résultat obtenu avec le schéma Lagrange-Flux pour le cas **Test 5**. Résultat à  $t=0.035$  avec 100 mailles et une  $CFL=0.18$ . La solution exacte est représentée par la ligne orange continue. La solution obtenue par le schéma Lagrange-Flux est représentée par les points bleus.

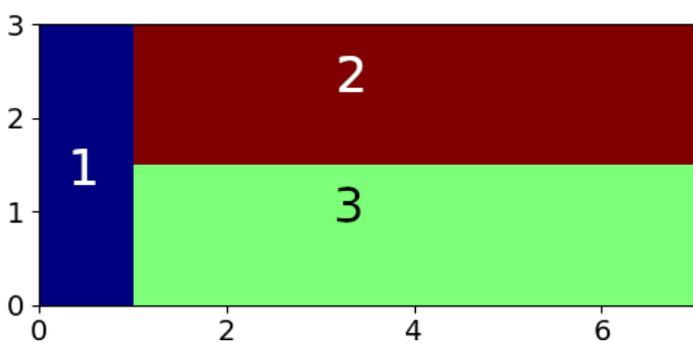
La comparaison de ces cinq cas test nous a permis de vérifier la cohérence du schéma Lagrange-Flux, en le comparant à des solutions exactes. De plus, cela nous a aussi permis de nous assurer de la consistance du système à six équations avec les équations d'Euler classiques.

Désormais, nous allons vérifier l'ensemble de la méthode proposée sur des cas à deux dimensions d'espace en présence de plusieurs fluides.

### 3.3.2 Résultats numériques à deux dimensions d'espaces

Nous commençons par présenter un cas test couramment mis en œuvre dans la littérature [15, 76, 79, 107] : le point triple multimatériaux. Il s'agit d'un cas à trois matériaux, tous au repos. Initialement, la pression est discontinue, avec un état gauche égal à 1 dans le matériau 1 et un état droit égal à 0.1 dans les matériaux 2 et 3. Les matériaux 1 et 3 sont plus denses que le matériau 2, les conditions initiales sont présentées en figure 3.12.

La différence de pression entre l'état gauche et droit entraîne l'apparition d'une onde de choc. Cette onde va entraîner les matériaux vers la droite. Or la différence de densité entre les matériaux implique une différence de vitesse de déplacement. Le matériau 2 va se compresser plus rapidement que le matériau 3, ce qui entraîne l'apparition d'un vortex. Les résultats à  $t=3.5$  sont affichés sur la figure 3.13. L'onde de choc percute la frontière droite du domaine à  $t=3.5$ , c'est en accord avec les résultats présentés dans la littérature. L'affichage des fractions volumiques, s'effectue en multipliant  $\alpha_1$  par zéro,  $\alpha_3$  par un et  $\alpha_2$  par deux. On peut observer que le principe du maximum est bien respecté. Cette constatation confirme la propriété 3 démontrée au chapitre précédent dans le contexte d'un système de transport totalement conservatif.



	zone 1 [0; 1] × [0; 3]	zone 2 ]1; 7] × ]1.5; 3]	zone 3 ]1; 7] × [0; 1.5]
p	1	0.1	0.1
$\rho$	1.	0.125	1.
$\pi$	0	0	0
$\gamma$	1.5	1.5	1.4
$\alpha_1$	1	0	0
$\alpha_2$	0	1	0
$\alpha_3$	0	0	1

FIGURE 3.12 – Paramètres des conditions initiales pour le **Point triple**.

Nous clôturons ce chapitre avec un cas test présenté par Nandan *et al.* dans l'article [76]. Il s'agit d'un cas à trois fluides. Il peut être vu comme un tube à choc de Sod en dimension deux, en présence d'un fluide Stiffened-Gas. Initialement, un fluide raide ( $\pi = 100$ ) est présent dans une sphère de rayon 0.08. Ce fluide est entouré par un second fluide, non

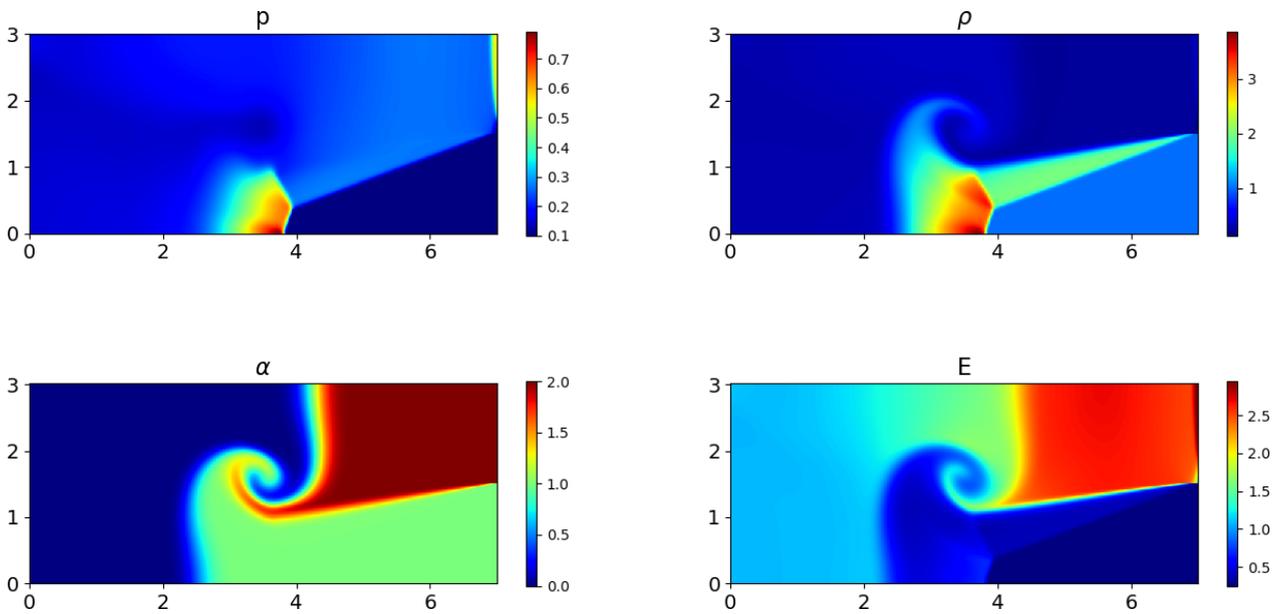
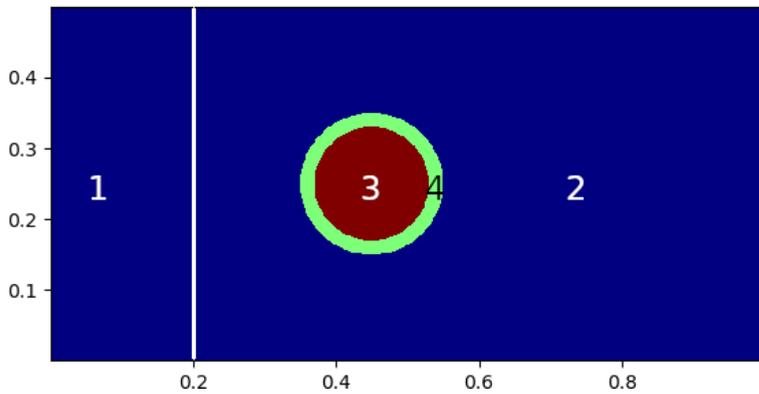


FIGURE 3.13 – Résultat du **Point triple** pour un maillage 600x258 avec une CFL=0.18 avec une méthode Lagrange-Flux+RK2 en temps. Représentation des fractions volumiques à t=3.5.

raide ( $\pi=0$ ) lui-même contenu dans un disque de rayon 0.1. Autour de ces deux fluides se trouve un fluide ambiant, non raide. À l'instant initial, la pression possède un état gauche égal à 1 et un état droit égal à 0.1. Les conditions initiales sont données sur la figure 3.14. Cette différence de pression entraîne l'apparition d'une onde de choc. Cette onde va déformer les deux matériaux placés dans les sphères. Le fluide raide va opposer une force interne à l'onde de choc, ce qui va limiter sa déformation. Quant à l'autre fluide, il va complètement se déformer, et faire apparaître une instabilité de Richtmyer-Meshkov. Ce test nous permet de vérifier la capacité du schéma Lagrange-Flux, associé au solveur HLL, à résoudre numériquement des systèmes faisant intervenir des fluides ou matériaux Stiffened-Gas. Les résultats à t=0.6 pour les fractions volumiques sont présentés sur la figure 3.15. La solution obtenue est cohérente avec le résultat de référence présenté par Nandan *et al.* [76].

CHAPITRE 3. UN DÉVELOPPEMENT D'UN SCHÉMA NUMÉRIQUE STRICTEMENT EULÉRIEN : LAGRANGE-FLUX



$$C_4 = \{(x, y) \mid (x - 0.45)^2 + (y - 0.25)^2 < (0.1)^2\},$$

$$C_3 = \{(x, y) \mid (x - 0.45)^2 + (y - 0.25)^2 < (0.08)^2\}.$$

	zone 1 [0;0.2]×[0;0.5]	zone 2 [0;0.2]×[0;0.5] \ C <sub>4</sub>	zone 3 C <sub>3</sub>	zone 4 C <sub>4</sub> \ C <sub>3</sub>
p	1	0.1	0.1	0.1
ρ	1.	0.125	2.	0.0125
π	0	0	100	0
γ	1.4	1.4	2.	1.648

FIGURE 3.14 – Paramètres des conditions initiales pour le cas **Sod 2D**.

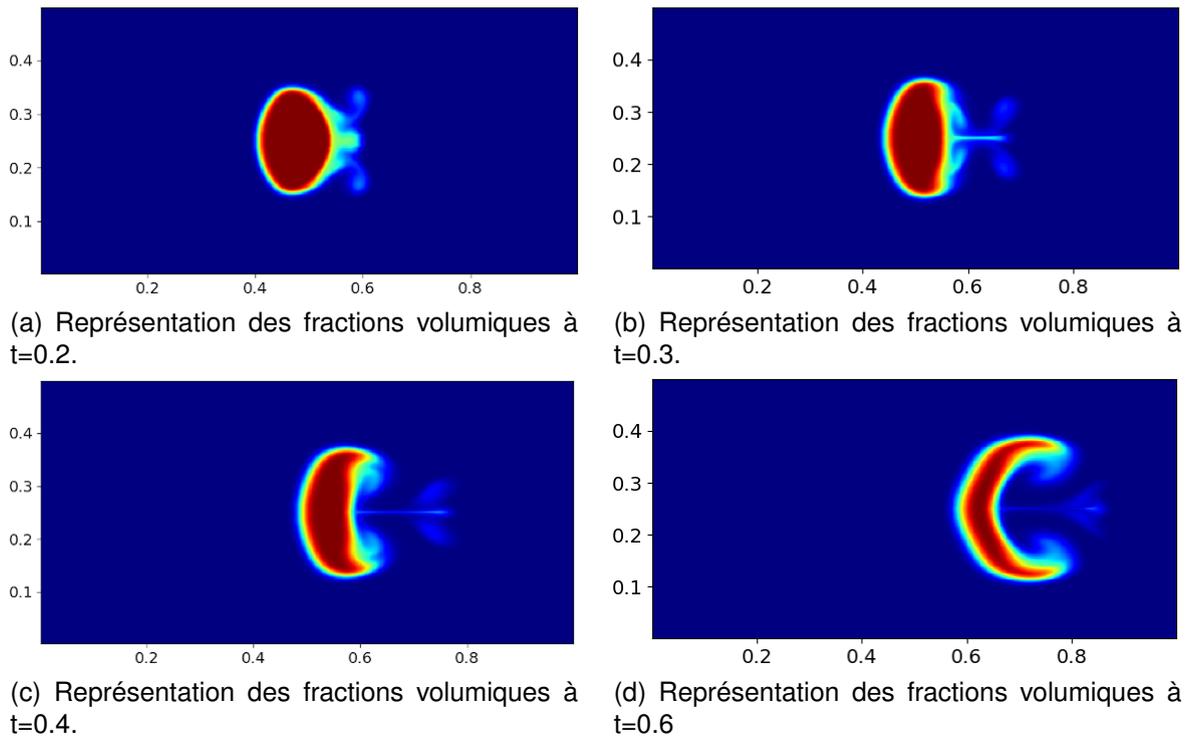


FIGURE 3.15 – Résultat pour le cas **Sod 2D** pour un maillage 800x400 avec une CFL=0.18 avec une méthode Lagrange-Flux+RK2 en temps.

### 3.4 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons développé un schéma totalement eulérien à partir d'un point de vue lagrangien. Ce schéma nous a permis de résoudre numériquement le système défini au chapitre précédent pour les écoulements multifluides. Nous avons ensuite mis en œuvre ce schéma sur le système multifluide (3.14), mais dans un cadre monofluide. Cette étape nous a permis de vérifier la consistance du modèle multifluide avec les équations d'Euler classiques, mais aussi de tester la robustesse du schéma Lagrange-Flux associé au solveur HLL.

Bien que les résultats obtenus soient cohérents, et que la position des ondes ait été retrouvée, le schéma souffre d'une diffusion numérique trop importante, ce qui rend la lecture des discontinuités peu précise. Dans notre cas, nous souhaitons simuler des écoulements de fluides non miscibles. Il est donc indispensable de réduire cette diffusion, dans le but d'empêcher l'apparition d'un mélange non physique.

Dans le prochain chapitre, nous allons nous concentrer sur la réduction de cette diffusion. Pour la réduire, nous allons employer les limiteurs définis au premier chapitre.

# Chapitre 4

## Une stratégie de reconstruction de pentes stables et compatibles

### Sommaire

---

<b>4.1 Introduction du chapitre</b> . . . . .	<b>100</b>
<b>4.2 Propriétés sur les reconstructions</b> . . . . .	<b>101</b>
4.2.1 Dualité entre reconstruction de pente et reconstruction de flux . . .	101
<b>4.3 Compatibilité physique des reconstructions</b> . . . . .	<b>108</b>
4.3.1 Transport d'un front de matière . . . . .	108
4.3.2 Positivité de la vitesse du son . . . . .	112
4.3.3 Positivité de l'énergie cinétique . . . . .	114
<b>4.4 Résultats numériques en deux dimensions</b> . . . . .	<b>117</b>
4.4.1 Comparaison expérimentale d'une interaction choc/bulle . . . . .	118
4.4.2 Capture d'un vortex . . . . .	118
4.4.3 Interaction choc/bulle en présence de matériaux Stiffened-Gas . . .	123
<b>4.5 Conclusion du chapitre</b> . . . . .	<b>125</b>

---

## 4.1 Introduction du chapitre

Les résultats obtenus dans le chapitre précédent souffrent d'une diffusion numérique importante, qui empêche d'avoir une compréhension précise des phénomènes physiques mis en jeu. Pour améliorer ces résultats, sans avoir à raffiner le maillage, il est nécessaire d'utiliser un schéma d'ordre élevé.

Afin de monter en ordre, nous utiliserons deux approches. La première consiste à reconstruire algébriquement une variable sur toute la maille. Nous pouvons citer différentes formes de reconstructions : linéaire, plateau/pente [81], polynomiale [69]. La forme de la reconstruction est choisie en fonction de la physique du problème et des propriétés recherchées. Dans le cadre de fluides non miscibles, nous souhaitons limiter au maximum la diffusion sur les fractions volumiques. Dans ce but, nous avons développé une méthode de capture d'interface au chapitre 1. Cependant, au premier chapitre, nous nous sommes restreints à une équation d'advection, il y avait une seule inconnue.

Désormais, nous allons étudier les implications induites par la reconstruction de la fraction volumique sur les autres variables. Afin de tenir compte de ces implications, nous proposons d'utiliser une seconde approche. Cette approche consiste à reconstruire directement le flux associé à une variable, au lieu de reconstruire la pente. Cette démarche est largement répandue dans la littérature [61, 15], elle permet d'assurer la robustesse du schéma.

Nous allons commencer par définir le cadre d'étude à une dimension d'espace. En dimension un nous utilisons les limiteurs Superbee et min-mod définis au chapitre 1. Nous avons vu dans ce même chapitre que les limiteurs unidimensionnels, basés sur le critère TVD, font apparaître des artefacts géométriques sur les cas multidimensionnels. Pour les cas à deux dimensions d'espace, nous utilisons la méthode MLP qui peut être vue comme une extension des schémas MUSCL au cas multidimensionnel. Cette méthode est définie au chapitre 1.

## 4.2 Propriétés sur les reconstructions

Nous rappelons le système (3.14) totalement conservatif suivant :

$$\begin{cases}
 \partial_t (\alpha_k \rho_k) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \alpha_k \rho_k) = 0, & k \in \llbracket 1; L \rrbracket, \\
 \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0, \\
 \partial_t (\rho E) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \rho E) + \nabla \cdot (\mathbf{u} p) = 0, \\
 \partial_t \xi + \nabla \cdot (\mathbf{u} \xi) = 0, \\
 \partial_t (\alpha_k \xi) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \alpha_k \xi) = 0, & k \in \llbracket 1; L \rrbracket,
 \end{cases} \quad (3.14)$$

$$p_k = (\gamma_k - 1) \rho_k e_k - \gamma_k \pi_k, \quad k \in \llbracket 1; L \rrbracket,$$

$$p_1 = \dots p_k = \dots = p_L = p \quad k \in \llbracket 1; L \rrbracket,$$

$$\sum_{k \in \llbracket 1; L \rrbracket} \alpha_k = 1.$$

Il est possible de l'écrire sous la forme vectorielle :  $\partial_t M + \partial_x f(M) = 0$  avec  $M =$

$$\begin{pmatrix} \alpha_k \rho_k \\ \rho \mathbf{u} \\ \rho E \\ \xi \\ \alpha_k \xi \end{pmatrix}, M \in \Omega. \Omega = \{ \mathbb{R}^{2L+3} \mid \rho u^2 > 0, \rho e > 0, \alpha > 0, \xi > 0, m_k = \alpha_k \rho_k > 0, p > -\pi \}, \text{ avec}$$

$L$ , le nombre de matériaux.

### 4.2.1 Dualité entre reconstruction de pente et reconstruction de flux

Nous allons commencer ce chapitre en présentant le lien entre reconstruction de flux et reconstruction de pente. Nous allons utiliser le formalisme présenté dans l'article de Berthon [14]. Pour un schéma de type MUSCL (en 1D), nous commençons par calculer un gradient numérique. Ensuite, nous cherchons à reconstruire algébriquement la variable en respectant certains critères (par exemple la stabilité : TVD, invariance du domaine). Une fois la reconstruction effectuée, nous en déduisons les flux associés. La dualité entre les reconstructions de pente et les reconstructions de flux est présentée sur le schéma en figure 4.1. À chaque temps  $t^n$ , nous calculons un gradient en fonction des valeurs des mailles voisines (stencil à 3 mailles sur le schéma). Ce gradient nous donne la direction de la pente, ensuite son intensité est contrôlée par un limiteur (défini dans le chapitre 1). C'est l'étape de la figure 4.1 a) → figure 4.1 b). Ensuite, nous en déduisons la valeur des flux associés figure 4.1 b) → figure 4.1 c). Dans le schéma nous représentons des re-

## CHAPITRE 4. UNE STRATÉGIE DE RECONSTRUCTION DE PENTES STABLES ET COMPATIBLES

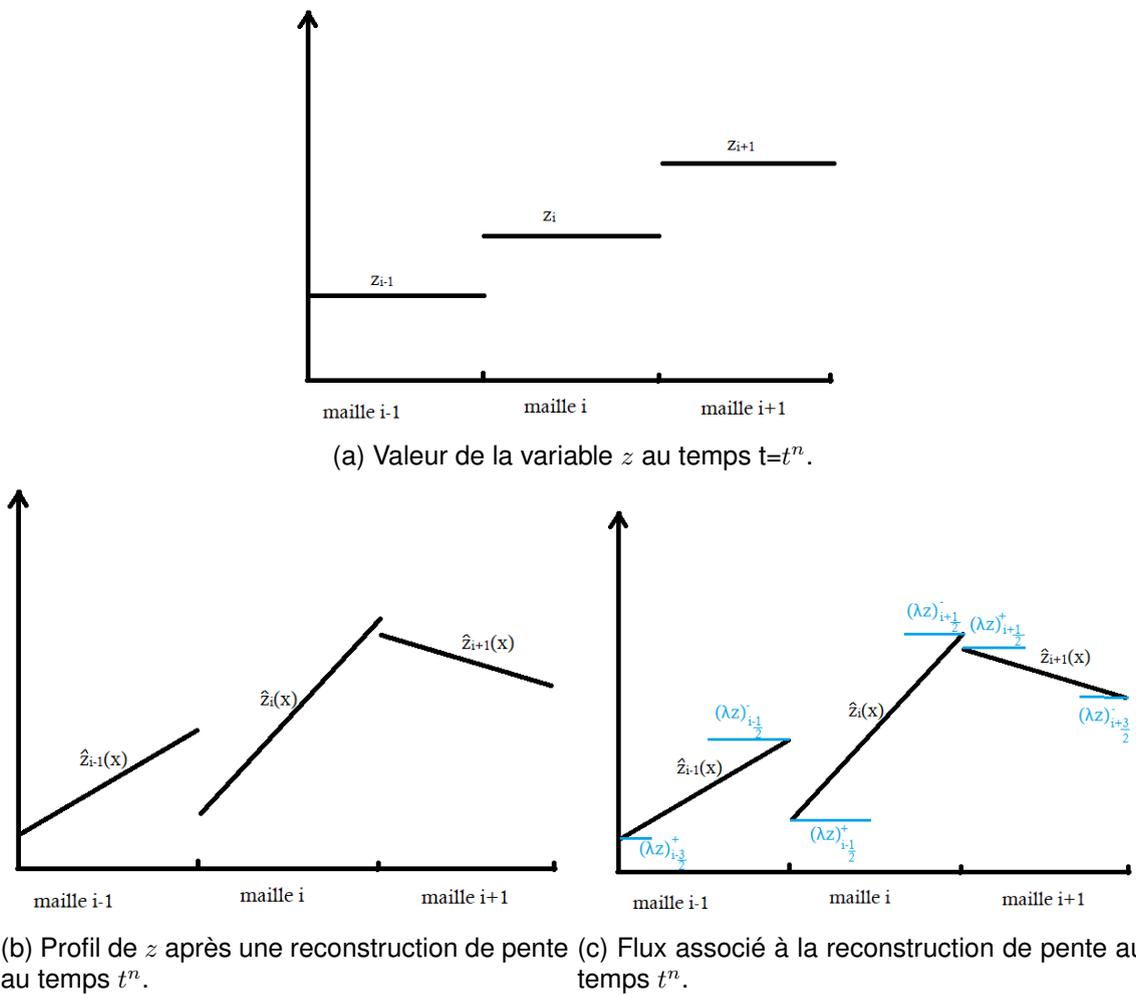


FIGURE 4.1 – Représentation du lien reconstruction de pente et reconstruction de flux.

constructions linéaires. Il est connu qu'une variable reconstruite linéairement et respectant le critère TVD est stable [31]. Cependant, dans le cadre des équations d'Euler, certains flux sont associés à un produit ou à une somme de reconstructions linéaires. Est-ce que les reconstructions restent valides dans ces cas ? Dans cette partie nous allons présenter certaines propriétés permettant d'assurer la stabilité du schéma tout en conservant la compatibilité physique des reconstructions.

Nous commençons par définir les objets nécessaires à l'étude.

Rappelons les notations pour les reconstructions de pente (1.7), vues au chapitre 1 :

$$\hat{z}_i^n(x) = z_i + \phi_i^{z,n} x \nabla^h z_i^n. \quad (1.7)$$

Où  $\phi_i^z$  est le limiteur associé à la variable  $z$  sur la maille  $i$  au temps  $t^n$  avec  $x \in \left[ x_i - \frac{\Delta x}{2}; x_i + \frac{\Delta x}{2} \right]$ , et

$$z_{i+\frac{1}{2}}^{n,-} = \hat{z}_i^n \left( x_i + \frac{\Delta x}{2} \right) \quad \text{et} \quad z_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} = \hat{z}_{i+1}^n \left( x_{i+1} - \frac{\Delta x}{2} \right),$$

sont les valeurs associées à la reconstruction de pente sur le bord de la maille  $i$ . La variable  $z$  est utilisée pour représenter une variable quelconque.

On pose :

$$\lambda_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i+\frac{1}{2}}.$$

En utilisant un traitement upwind le flux  $\psi_{i+\frac{1}{2}}^n$  sur la face  $i + \frac{1}{2}$  peut s'écrire :

$$\psi_{i+\frac{1}{2}}^n = \lambda_{i+\frac{1}{2}} \left( \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0} z_{i+\frac{1}{2}}^{n,-} + \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} < 0} z_{i+\frac{1}{2}}^{n,+} \right).$$

**Remarque 5.** Nous choisirons toujours  $\phi_i^{z,n}$ , de sorte que :

$$\forall x \in \left[ x_i - \frac{\Delta x}{2}; x_i + \frac{\Delta x}{2} \right], \quad \hat{z}_i^n(x) \in \left[ \min(z_i^n, z_{i+1}^n, z_{i-1}^n); \max(z_i^n, z_{i+1}^n, z_{i-1}^n) \right].$$

**Définition 2.** Une reconstruction de flux est localement conservative sur la maille  $i$  si

$$i) z_{i+\frac{1}{2}}^{n,+}, z_{i-\frac{1}{2}}^{n,-} \in \Omega_z$$

$$ii) \exists \tilde{z}_i^n \in \Omega_z \quad \text{tel que} \quad z_i^n = \left( 1 - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| - |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| \right) \tilde{z}_i^n,$$

$$+ |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| z_{i+\frac{1}{2}}^{n,-} + |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| z_{i-\frac{1}{2}}^{n,+}.$$

Cette définition garantit la conservation de la quantité  $z_i$  ainsi que l'invariance du domaine sur la maille  $i$ , elle veille à la cohérence physique de la reconstruction. Cette propriété est naturellement assurée pour les reconstructions linéaires vérifiant le critère TVD, il s'agit de la propriété 6. Cependant, comme mentionné précédemment, la reconstruction linéaire des variables primitives n'implique pas une reconstruction linéaire sur les variables conservatives. Dans ce cas, une condition plus restrictive de type CFL apparaît. Nous démontrons ce résultat dans la propriété 7.

**Propriété 6.** Soit  $\forall i \quad z_i^n \in \Omega \quad \hat{z}_i^n(x) = z_i + \phi_i^{z,n} x \nabla^h z_i^n$  une reconstruction linéaire de  $z_i^n$ .

$$\text{Si} \quad \min(z_i^n, z_{i+1}^n) \leq \hat{z}_i^n \left( x + \frac{\Delta t}{2} \right) \leq \max(z_i^n, z_{i+1}^n),$$

$$\text{et} \quad \min(z_i^n, z_{i-1}^n) \leq \hat{z}_i^n \left( x - \frac{\Delta t}{2} \right) \leq \max(z_i^n, z_{i-1}^n),$$

## CHAPITRE 4. UNE TRATÉGIE DE RECONSTRUCTION DE PENTES STABLES ET COMPATIBLES

---

alors la reconstruction de flux associée est localement conservative sous la condition

$$CFL \leq \frac{1}{2}$$

*Démonstration.*  $\min(z_i^n, z_{i+1}^n) \leq \tilde{z}_i^n(x + \frac{\Delta x}{2}) \leq \max(z_i^n, z_{i+1}^n)$

et  $\min(z_i^n, z_{i-1}^n) \leq \tilde{z}_i^n(x - \frac{\Delta x}{2}) \leq \max(z_i^n, z_{i-1}^n)$  assure directement

$$\tilde{z}_i^n(x) \in [\min(z_i^n, z_{i+1}^n, z_{i-1}^n); \max(z_i^n, z_{i+1}^n, z_{i-1}^n)] \subset \Omega, \quad \forall x \in [x_i - \frac{\Delta x}{2}, x_i + \frac{\Delta x}{2}].$$

On vient de vérifier i)

Vérifions ii) Pour le cas  $|\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| + |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| = 1$  on a l'ensemble de solution  $\tilde{z}_i^n \in \mathbb{R}$  et  $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$  donc  $\exists \tilde{z}_i^n \in \Omega$

Regardons le cas  $|\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| + |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| < 1$

$$\begin{aligned} z_i^n &= \left(1 - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| - |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}|\right) \tilde{z}_i^n + |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| z_{i+\frac{1}{2}}^{n,-} + |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| z_{i-\frac{1}{2}}^{n,+} \\ \implies \left(1 - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| - |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}|\right) \tilde{z}_i^n &= z_i^n - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| z_{i+\frac{1}{2}}^{n,-} - |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| z_{i-\frac{1}{2}}^{n,+} \\ \implies \left(1 - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| - |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}|\right) \tilde{z}_i^n &= z_i^n - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| \left(z_i^n + \phi_i^{z,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h z_i^n\right) \\ &\quad - |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| \left(z_i^n - \phi_i^{z,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h z_i^n\right) \\ \implies \left(1 - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| - |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}|\right) \tilde{z}_i^n &= \left(1 - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| - |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}|\right) z_i^n \\ &\quad + \left(|\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}|\right) \phi_i^{z,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h z_i^n \\ \implies \tilde{z}_i^n &= z_i^n + \frac{\left(|\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}|\right)}{1 - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| - |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}|} \phi_i^{z,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h z_i^n. \end{aligned}$$

Or par construction  $|\phi_i^{z,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h z_i^n| \leq \min(|z_i^n - z_{i+1}^n|, |z_i^n - z_{i-1}^n|)$ .

Donc si on a  $\left| \frac{\left(|\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}|\right)}{1 - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| - |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}|} \right| < 1$ ,

alors  $\tilde{z}_i^n \in [\min(z_i^n, z_{i-1}^n, z_{i+1}^n), \max(z_i^n, z_{i-1}^n, z_{i+1}^n)] \subset \Omega$ .

$$\begin{aligned} & \frac{\left( |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| \right)}{1 - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| - |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}|} < 1 \\ \implies & \left( |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| \right) < 1 - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| - |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| \\ \implies & 2|\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| < 1 \\ \implies & |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

De la même façon on a

$$\begin{aligned} & \frac{\left( |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| \right)}{1 - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| - |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}|} > -1 \\ \implies & \left( |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| \right) > -1 + |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| + |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| \\ \implies & 2|\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| < 1 \\ \implies & |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On prend  $CFL = \max_i \left( \lambda_{i+\frac{1}{2}} \right) < \frac{1}{2}$ , et on a  $z_i^n \in \Omega$ .

□

Comme l'a mis en évidence Saurel *et al.*, la reconstruction des variables primitives donne de meilleurs résultats que celle sur les variables conservatives [87, 88]. Même si cette approche a du sens d'un point de vue physique, elle entraîne des difficultés numériques. La reconstruction des variables primitives peut faire apparaître des produits, ou des sommes de variables reconstruites de façon linéaire. Toutefois, le produit de deux reconstructions linéaires ne donne pas une reconstruction linéaire. La reconstruction obtenue ne respecte alors pas de critère de stabilité. Dans la propriété suivante, nous cherchons une condition afin de garantir la stabilité pour les produits de variables. Nous nous restreignons aux variables primitives positives, de la forme  $z_i^n \geq 0$ . Cela englobe les variables  $\alpha_k, \rho, e, \xi, u^2, \rho_k$ , ce sont celles qui apparaissent dans les produits.

**Lemme 4.** Si  $\forall i \ a_i^n \in \Omega \cap \mathbb{R}^+$ , alors  $|\phi_i^{a,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h a_i^n| \leq a_i^n$ .

*Démonstration.* On suppose  $\phi_i^{a,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h a_i^n < -a_i^n$ .

Or  $\phi_i^{a,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h a_i^n < -a_i^n$

$$\implies a_i^n + \phi_i^{a,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h a_i^n < 0.$$

$$\implies a_i^n + \phi_i^{a,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h a_i^n < \min(a_{i-1}^n, a_i^n, a_{i+1}^n) \quad \text{c'est absurde par définition de } \phi_i^{a,n}.$$

$$\text{Donc } \phi_i^{a,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h a_i^n \geq -a_i^n.$$

Avec le même raisonnement en partant de  $-\phi_i^{a,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h a_i^n < -a_i^n$  on obtient :

$$\phi_i^{a,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h a_i^n \leq a_i^n.$$

□

**Propriété 7.** Soit  $a_i^n, b_i^n \in \mathbb{R}^+ \forall i$ . Soit  $\hat{a}_i^n(x)$  et  $\hat{b}_i^n(x)$  deux reconstructions linéaires vérifiant le lemme 1. La reconstruction de flux associée à  $\hat{a}_i^n(x)$  est égale à :

$$\hat{a}b_i^n(x) = \hat{a}_i^n(x) \hat{b}_i^n(x) = \left( a_i + \phi_i^{a,n} x \nabla^h a_i^n \right) \left( b_i + \phi_i^{b,n} x \nabla^h b_i^n \right), \quad \text{vérifie } \tilde{a}b_i^n \in \mathbb{R}^+ \quad \text{sous condi-}$$

tion CFL <  $\frac{1}{4}$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} (ab)_i^n &= \left( 1 - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} < 0}| - |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| \right) (\tilde{a}b)_i^n \\ &\quad + |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} < 0}| \left( a_i + \phi_i^{a,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h a_i^n \right) \left( b_i + \phi_i^{b,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h b_i^n \right) \\ &\quad + |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| \left( a_i - \phi_i^{a,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h a_i^n \right) \left( b_i - \phi_i^{b,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h b_i^n \right) \\ \implies &\left( 1 - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} < 0}| - |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| \right) (\tilde{a}b)_i^n \\ &= (ab)_i^n - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} < 0}| \left( a_i + \phi_i^{a,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h a_i^n \right) \left( b_i + \phi_i^{b,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h b_i^n \right) \\ &\quad - |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| \left( a_i - \phi_i^{a,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h a_i^n \right) \left( b_i - \phi_i^{b,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h b_i^n \right) \\ \implies &\left( 1 - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} < 0}| - |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| \right) (\tilde{a}b)_i^n \\ &= (ab)_i^n - \left( |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} < 0}| + |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| \right) \left( a_i^n b_i^n + \phi_i^{a,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h a_i^n \phi_i^{b,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h b_i^n \right) \\ &\quad - \left( |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} < 0}| - |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| \right) \left( a_i^n \phi_i^{b,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h b_i^n + b_i^n \phi_i^{a,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h a_i^n \right). \end{aligned}$$

On cherche une condition sur  $\lambda = \max_i (|\lambda_{i+\frac{1}{2}}|)$  pour laquelle  $(\tilde{a}b)_i^n \geq 0$ .

Comme  $a$  et  $b$  sont deux variables positives et que leurs reconstructions sont positives,

on peut écrire :

$$\begin{aligned} \implies \tilde{ab}_i^n &\geq (ab)_i^n - \lambda \left( a_i^n + \phi_i^{a,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h a_i^n \right) \left( b_i^n + \phi_i^{b,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h b_i^n \right) \\ &\quad - \lambda \left( a_i^n - \phi_i^{a,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h a_i^n \right) \left( b_i^n - \phi_i^{b,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h b_i^n \right) \\ \implies \tilde{ab}_i^n &\geq (ab)_i^n - \lambda b_i \left( a_i^n + \phi_i^{a,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h a_i^n + a_i^n - \phi_i^{a,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h a_i^n \right) \\ &\quad - \lambda |\phi_i^{b,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h b_i^n| \left( a_i^n + \phi_i^{a,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h a_i^n - a_i^n + \phi_i^{a,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h a_i^n \right) \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 4 sur la variable  $b$ , on peut écrire :

$$\tilde{ab}_i^n \geq (ab)_i^n - 2\lambda b_i^n a_i^n - 2\lambda b_i^n \phi_i^{a,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h a_i^n.$$

En appliquant maintenant le lemme 4 sur la variable  $a$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{ab}_i^n &\geq (ab)_i^n - 2\lambda b_i^n a_i^n - 2\lambda b_i^n a_i^n \\ \implies \tilde{ab}_i^n &\geq (1 - 4\lambda) (ab)_i^n. \end{aligned}$$

On trouve bien  $\tilde{ab}_i^n \geq 0$  si  $\lambda \leq \frac{1}{4}$ .

Il reste à montrer  $(ab)_{i+\frac{1}{2}}^n \in \mathbb{R}^+$ .

$$\text{Or } (ab)_{i+\frac{1}{2}}^n = (a)_{i+\frac{1}{2}}^n (b)_{i+\frac{1}{2}}^n,$$

et comme  $(a)_{i+\frac{1}{2}}^n \geq 0$  et  $(b)_{i+\frac{1}{2}}^n \geq 0$ . On a bien  $(ab)_{i+\frac{1}{2}}^n \geq 0$ .

□

Désormais nous pouvons reconstruire les  $\alpha_k$ ,  $\xi$  et  $\rho_k$  indépendamment, la propriété précédente nous assure la stabilité de leurs reconstructions sous condition  $\text{CFL} < \frac{1}{4}$ .

### 4.3 Compatibilité physique des reconstructions

Les propriétés démontrées jusque-là s'appliquent à différents modèles. Désormais, à partir de ces propriétés, nous allons définir un ensemble de reconstructions de pentes compatibles pour le modèle présenté au chapitre 2.

Dans le cadre des équations scalaires, la stabilité et la robustesse des schémas de type MUSCL sont largement étudiées [18, 78]. En revanche, dans le cas des équations d'Euler la question reste ouverte. C'est pourquoi dans cette section, nous proposons donc d'étudier la robustesse du schéma à travers la compatibilité des reconstructions. Nous imposons un limiteur compressif pour les fractions volumiques afin d'obtenir les interfaces les moins diffuses possibles, puis nous étudions les implications que cela entraîne sur les autres variables.

L'objectif de cette section étant de proposer un ensemble de reconstruction compatible, nous nous intéressons uniquement aux instabilités numériques liées aux incompatibilités. Chacun des choix que nous allons faire sera illustré par un cas test.

#### 4.3.1 Transport d'un front de matière

Dans la littérature, il est mentionné la difficulté de ne pas faire apparaître des oscillations de pression dans les ondes de contact, pour un système totalement conservatif [10, 2, 55]. Nous démontrons ici qu'il est possible d'éviter ces oscillations en tenant compte de la reconstruction des fractions volumiques dans la reconstruction de l'énergie interne. Ce résultat correspond au théorème suivant :

**Théorème 2.** *On suppose  $\exists p, u \in \mathbb{R}, \forall i \ p_i^n = p$  et  $u_i^n = u$ .*

*Si  $\forall i \ (\rho e)_{i+\frac{1}{2}}^n = \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_{k,i+\frac{1}{2}}^n (p_{i+\frac{1}{2}}^n + \gamma_k \pi_k)}{(\gamma_k - 1)}$  alors  $\forall i \ p_i^{n+1} = p$  et  $u_i^{n+1} = u$ .*

**Remarque 6.** *Il est important de choisir un solveur de Riemann qui vérifie :*

$$p_i = p_{i+1} \implies p_{i+\frac{1}{2}}^* = p_i \quad \text{et} \quad u_i = u_{i+1} \implies u_{i+\frac{1}{2}}^* = u_i.$$

$$\text{Démonstration.} \quad (\rho u)_i^{n+1} = (\rho u)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( u_{i+\frac{1}{2}}^{n,*} (\rho u)_{i+\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^{n,*} (\rho u)_{i-\frac{1}{2}}^n + p_{i+\frac{1}{2}}^{n,*} - p_{i-\frac{1}{2}}^{n,*} \right).$$

$$\text{Or } p_i^n = p_{i+1}^n = p_{i-1}^n = p_{i-\frac{1}{2}}^{n,*} = p_{i+\frac{1}{2}}^{n,*} = p \quad \text{et} \quad u_i^n = u_{i+1}^n = u_{i-1}^n = u_{i-\frac{1}{2}}^{n,*} = u_{i+\frac{1}{2}}^{n,*} = u,$$

$$\text{Donc } (\rho u)_i^{n+1} = u \left( \rho_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} u \left( \rho_{i+\frac{1}{2}}^n - \rho_{i-\frac{1}{2}}^n + p - p \right) \right).$$

## CHAPITRE 4. UNE STRATÉGIE DE RECONSTRUCTION DE PENTES STABLES ET COMPATIBLES

---

De plus on sait par somme sur les  $m_k$ , que  $(\rho)_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} u \left( \rho_{i+\frac{1}{2}}^n - \rho_{i-\frac{1}{2}}^n \right)$ .

Donc on en déduit  $(\rho u)_i^{n+1} = u (\rho)_i^{n+1} \implies u_i^{n+1} = u$ .

On s'intéresse maintenant à l'équation d'énergie.

$$\begin{aligned} (\rho e)_i^{n+1} + \left( \rho \frac{u^2}{2} \right)_i^{n+1} &= (\rho e)_i^n + \left( \rho \frac{u^2}{2} \right)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( u_{i+\frac{1}{2}}^{n,*} \left( (\rho e)_{i+\frac{1}{2}}^n + \left( \rho \frac{u^2}{2} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \right. \\ &\quad \left. - u_{i-\frac{1}{2}}^{n,*} \left( (\rho e)_{i-\frac{1}{2}}^n + \left( \rho \frac{u^2}{2} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \right. \\ &\quad \left. + p_{i+\frac{1}{2}}^{n,*} u_{i+\frac{1}{2}}^{n,*} - p_{i-\frac{1}{2}}^{n,*} u_{i-\frac{1}{2}}^{n,*} \right). \end{aligned}$$

On sait que  $u = u_i^{n+1} = u_i^n = u_{i+\frac{1}{2}}^{n,*} = u_{i-\frac{1}{2}}^{n,*}$ , donc

$$\begin{aligned} (\rho e)_i^{n+1} + \frac{u^2}{2} \rho_i^{n+1} &= (\rho e)_i^n + \frac{u^2}{2} \rho_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( u \left( (\rho e)_{i+\frac{1}{2}}^n + \frac{u^2}{2} \rho_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \right. \\ &\quad \left. - u \left( (\rho e)_{i-\frac{1}{2}}^n + \frac{u^2}{2} \rho_{i-\frac{1}{2}}^n \right) + pu - pu \right). \end{aligned}$$

Par somme sur les  $m_k$   $(\rho)_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} u \left( \rho_{i+\frac{1}{2}}^n - \rho_{i-\frac{1}{2}}^n \right)$

$$\implies (\rho e)_i^{n+1} = (\rho e)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} u \left( (\rho e)_{i+\frac{1}{2}}^n - (\rho e)_{i-\frac{1}{2}}^n \right).$$

On remplace  $(\rho e)_{i+\frac{1}{2}}^n = \sum_{k=1}^L \frac{(\alpha_k)_{i+\frac{1}{2}}^n \left( p_{i+\frac{1}{2}}^n + \gamma_k \pi_k \right)}{\gamma_k - 1}$  et  $(\rho e)_i^n = \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_{k,i}^n \left( p_i^n + \gamma_k \pi_k \right)}{\gamma_k - 1}$ ,

et on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_{k,i}^{n+1} \left( p_i^{n+1} + \gamma_k \pi_k \right)}{\gamma_k - 1} &= \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_{k,i}^n \left( p_i^n + \gamma_k \pi_k \right)}{\gamma_k - 1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} u \left( \sum_{k=1}^L \frac{(\alpha_k)_{i+\frac{1}{2}}^n \left( p_{i+\frac{1}{2}}^n + \gamma_k \pi_k \right)}{\gamma_k - 1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^L \frac{(\alpha_k)_{i-\frac{1}{2}}^n \left( p_{i-\frac{1}{2}}^n + \gamma_k \pi_k \right)}{\gamma_k - 1} \right). \end{aligned}$$

De plus  $\alpha_{k,i}^{n+1} = \alpha_{k,i}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} u \left( \alpha_{k,i+\frac{1}{2}}^n - \alpha_{k,i-\frac{1}{2}}^n \right)$

$$\implies \alpha_{k,i}^{n+1} \frac{\gamma_k \pi_k}{\gamma_k - 1} = \alpha_{k,i}^n \frac{\gamma_k \pi_k}{\gamma_k - 1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} u \left( \alpha_{k,i+\frac{1}{2}}^n \frac{\gamma_k \pi_k}{\gamma_k - 1} - \alpha_{k,i-\frac{1}{2}}^n \frac{\gamma_k \pi_k}{\gamma_k - 1} \right).$$

On sait aussi que  $p_{i-\frac{1}{2}}^n = p_{i+\frac{1}{2}}^n = p_i^n$  puisque par construction

$p_{i-\frac{1}{2}}^n \in [\min(p_{i-1}^n, p_{i-1}^n); \max(p_{i-1}^n, p_{i-1}^n)]$ . Comme on a supposé  $p = p_i^n$ , on a bien

$$p_{i-\frac{1}{2}}^n = p_{i+\frac{1}{2}}^n = p.$$

On en déduit 
$$p_i^{n+1} \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_{k,i}^{n+1}}{\gamma_k - 1} = p_i^n \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_{k,i}^n}{\gamma_k - 1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} u \left( \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_{k,i+\frac{1}{2}}^n}{\gamma_k - 1} - \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_{k,i-\frac{1}{2}}^n}{\gamma_k - 1} \right).$$

Comme 
$$\alpha_{k,i}^{n+1} = \alpha_{k,i}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} u \left( \alpha_{k,i+\frac{1}{2}}^n - \alpha_{k,i-\frac{1}{2}}^n \right).$$

Par somme sur les  $\alpha_k$  on a :

$$\sum_{k=1}^L \frac{\alpha_{k,i}^{n+1}}{\gamma_k - 1} = \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_{k,i}^n}{\gamma_k - 1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} u \left( \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_{k,i+\frac{1}{2}}^n}{\gamma_k - 1} - \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_{k,i-\frac{1}{2}}^n}{\gamma_k - 1} \right) = \frac{1}{\gamma - 1}$$

$$\implies \frac{p_i^{n+1}}{\gamma - 1} = \frac{p_i^n}{\gamma - 1}.$$

On trouve bien  $p_i^{n+1} = p_i^n = p.$

□

On peut observer sur la figure 4.4 b) la correction qu'apporte la compatibilité. Le phénomène d'oscillations présenté sur la figure 4.3 a) peut s'expliquer par un défaut d'énergie dans la maille. Dans le modèle utilisé, l'évolution de l'énergie dépend bien évidemment de l'équation de conservation d'énergie totale, mais aussi de l'équation sur les fractions volumiques. Chaque matériau possède une "force" interne dépendante des coefficients  $\pi_k$  et  $\gamma_k$ . Or, la proportion de chaque fluide dans une maille est obtenue grâce à l'équation sur les  $\alpha_k$  et non l'équation d'énergie. Il apparaît donc indispensable que l'énergie interne déplacée par l'équation d'énergie totale tienne compte de l'énergie déplacée par les fractions volumiques. En raisonnant de la sorte, nous obtenons le théorème 2.

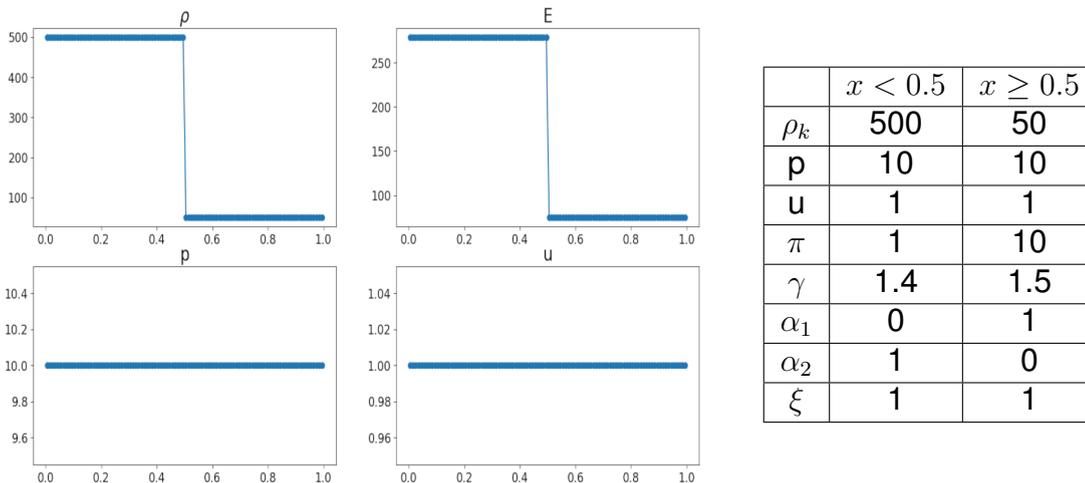
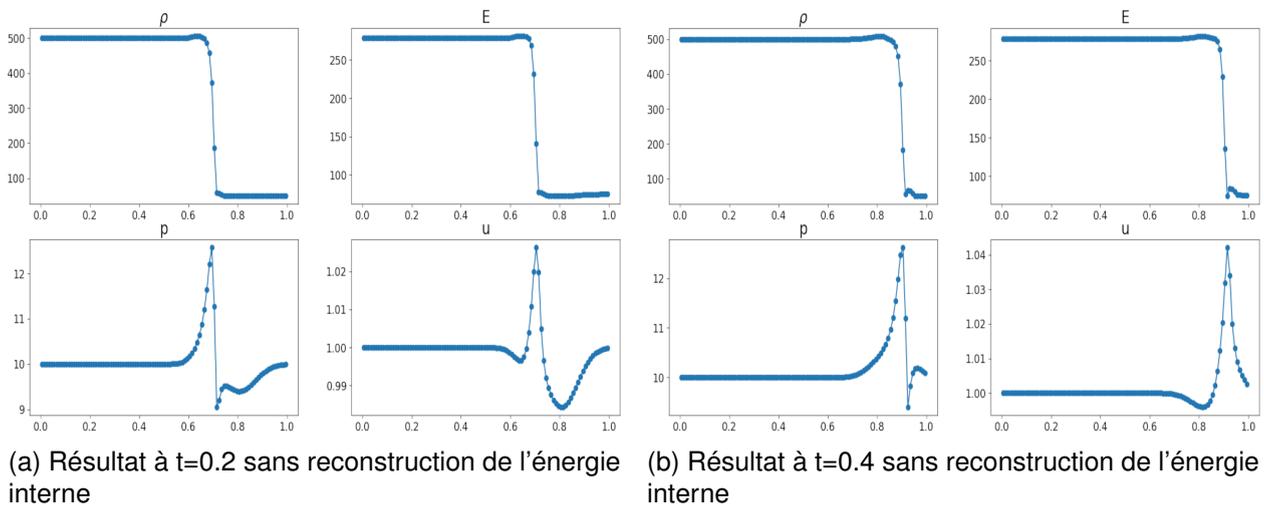


FIGURE 4.2 – Conditions initiales du cas **Onde de contact**.

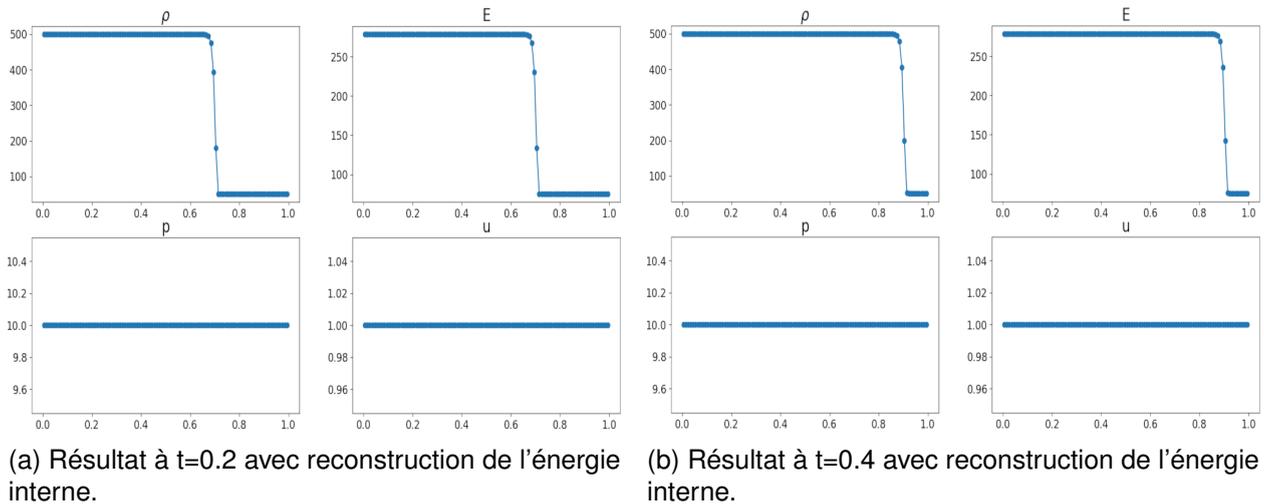
## CHAPITRE 4. UNE STRATÉGIE DE RECONSTRUCTION DE PENTES STABLES ET COMPATIBLES



### Choix des limiteurs

$\alpha_k \rightarrow$  Superbee  $p \rightarrow$  min-mod  $u \rightarrow$  sans reconstruction  $\rho_k \rightarrow$  Superbee  $\xi \rightarrow$  Superbee

FIGURE 4.3 – Apparition d'oscillations en pression dans un système totalement conservatif pour le cas **Onde de contact**. Résultat obtenu avec le schéma Lagrange-Flux+Euler en temps avec 100 mailles et une CFL = 0.18.



### Choix des limiteurs

$\alpha_k \rightarrow$  Superbee  $p \rightarrow$  min-mod  $u \rightarrow$  min-mod  $\rho_k \rightarrow$  Superbee  $\xi \rightarrow$  Superbee

FIGURE 4.4 – Correction des oscillations en pression dans un système totalement conservatif lorsque la reconstruction de l'énergie tient compte des fractions volumiques. Résultat obtenu sur le cas **Onde de contact**, un schéma Lagrange-Flux+Euler en temps est utilisé avec 100 mailles et une CFL = 0.18.

### 4.3.2 Positivité de la vitesse du son

Lorsque des matériaux Stiffened-Gas sont présents, des pressions négatives peuvent apparaître [37]. Il s'agit là d'un phénomène existant à l'état naturel [80], il est donc souhaitable de ne pas contraindre  $p > 0$ . Cependant, lorsque  $p < 0$ , certaines difficultés numériques apparaissent. Deux quantités, strictement positives,  $c^2$  et  $\rho e$  peuvent devenir localement négatives si nous ne prenons pas garde à la compatibilité des reconstructions. Si la reconstruction de la pression ne tient pas compte de la reconstruction des fractions volumiques, il est possible d'avoir localement  $c^2 < 0$  et même  $\rho e < 0$ . Pour éviter ce phénomène, nous proposons une reconstruction de la pression en deux étapes.

Dans un premier temps la pression est reconstruite avec un limiteur min-mod, si la reconstruction obtenue ne vérifie pas  $\hat{p}_i^n(x) \in \Omega$  alors  $p + \pi$  est reconstruit avec un limiteur Superbee et  $\hat{p}_i^n(x) = \left(\widehat{p + \pi}\right)_i^n(x) - \hat{\pi}_i^n(x)$ .

La reconstruction de la pression est la suivante :

$$\hat{p}_i^n(x) = \begin{cases} (p_i^n + \phi_i^{p,n} x \nabla^h p_i^n) & \text{si } p_i^n + \phi_i^{p,n} x \nabla^h p_i^n > \hat{\pi}_i^n(x), \\ \left(\widehat{p + \pi}\right)_i^n(x) - \hat{\pi}_i^n(x) & \text{si } p_i^n + \phi_i^{p,n} x \nabla^h p_i^n \leq \hat{\pi}_i^n(x). \end{cases} \quad (4.1)$$

$p + \pi$  est une grandeur positive, donc sa reconstruction est positive pour tout  $x$ . Cela nous assure une reconstruction de la pression dans l'espace  $\Omega$  pour tout  $x$ . Le choix des limiteurs min-mod et Superbee peut être discuté. Pour la première étape, nous avons choisi un limiteur min-mod afin de ne pas créer d'artefacts en escalier générés par des limiteurs trop compressifs dans les zones où la pression est régulière, comme vu au chapitre 1. Dans les zones où la pression est inférieure à  $\pi$ , nous souhaitons équilibrer la variation de la pression avec la variation des forces internes, nous employons donc le même limiteur que pour les fractions volumiques.

Afin d'illustrer l'intérêt de cette reconstruction en deux étapes, nous définissons un nouveau cas test. À l'état initial, il y a deux fluides de densité égale qui se déplacent à vitesse constante  $u = 1$ . La pression est discontinue à l'interface, et  $p$  est proche de  $-\pi$  dans le fluide de gauche. Lorsque les fluides se déplacent, la diffusion numérique apparaît à l'interface. Si nous reconstruisons la pression par un limiteur min-mod la pente de la pression ne serait pas suffisante pour compenser la pente des  $\alpha_k$  à l'interface entre les fluides. Nous nous retrouvons alors avec  $p < \pi$ . C'est le résultat obtenu dans la figure 4.6. Des valeurs non physiques apparaissent pour la pression et les fractions volumiques. Au contraire, dans la figure 4.7, nous tenons compte de la reconstruction de  $\pi$  dans la reconstruction de la pression, cette fois aucune oscillation n'apparaît ni pour les fractions

# CHAPITRE 4. UNE STRATÉGIE DE RECONSTRUCTION DE PENTES STABLES ET COMPATIBLES

volumiques ni pour la pression.

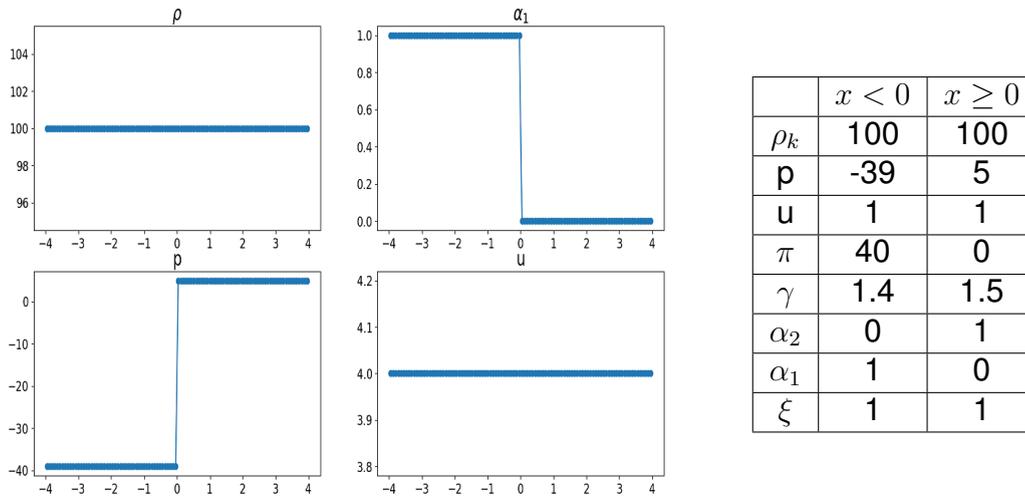
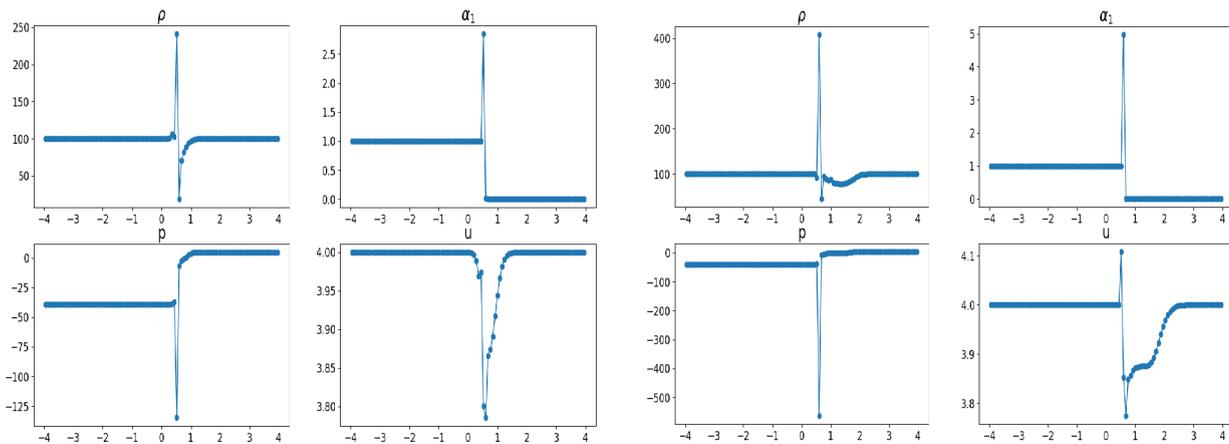


FIGURE 4.5 – Conditions initiales pour le cas **Pression négative**.



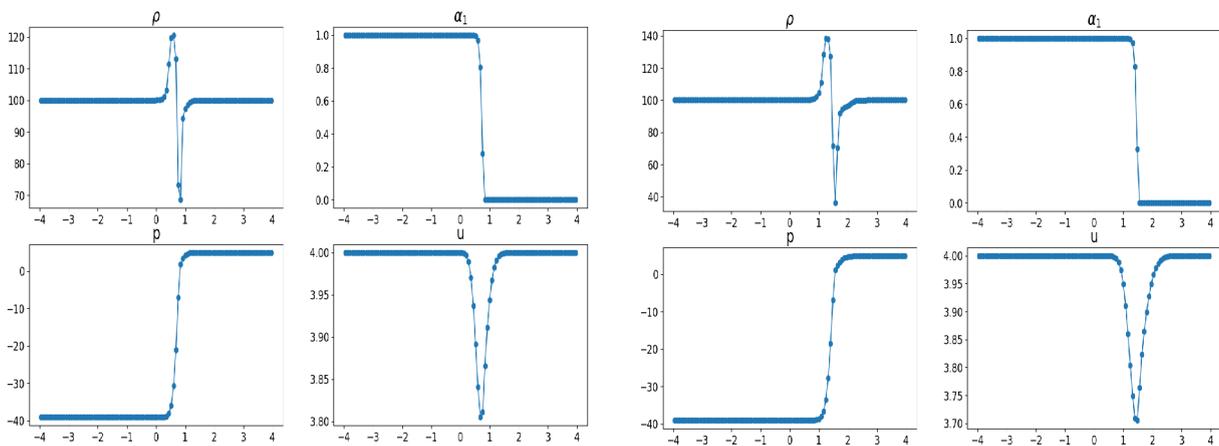
(a) Résultat à  $t=0.2$  avec un reconstruction directe de la pression.

(b) Résultat à  $t=0.4$  avec un reconstruction directe de la pression.

### Choix des limiteurs

$\alpha_k \rightarrow$  Superbee  $p \rightarrow$  min-mod  $u \rightarrow$  min-mod  $\rho_k \rightarrow$  Superbee  $\xi \rightarrow$  Superbee

FIGURE 4.6 – Apparition d’oscillations lorsque la reconstruction de  $p$  n’est pas compatible avec la positivité de la vitesse du son. Résultat obtenu sur le cas **Pression négative**, un schéma Lagrange-Flux+Euler en temps est utilisé avec 100 mailles et une CFL = 0.18.



(a) Résultat à  $t=0.2$  avec une reconstruction en deux temps de la pression.

(b) Résultat à  $t=0.4$  avec une reconstruction en deux temps de la pression.

Choix des limiteurs

$\alpha_k \rightarrow$  Superbee  $p \rightarrow$  min-mod  $u \rightarrow$  sans reconstruction  $(\alpha\rho)_k \rightarrow$  Superbee  $\xi \rightarrow$  Superbee

FIGURE 4.7 – Aucune oscillation en pression n’apparaît lorsque l’on assure la positivité de la vitesse du son. Résultat obtenu sur le cas **Pression négative**, un schéma Lagrange-Flux+Euler en temps est utilisé avec 100 mailles et une CFL = 0.18.

### 4.3.3 Positivité de l’énergie cinétique

Nous allons aborder ici un point rarement mentionné dans la littérature : la reconstruction de l’énergie cinétique. En première approche, nous voulons calculer la reconstruction de  $u$  pour ensuite en déduire la reconstruction de  $u^2$ . Or l’ensemble de définition de  $u$  n’impose aucune contrainte, ce qui n’est pas le cas de  $u^2$ . Il est possible de se retrouver avec des flux non conservatif localement. La figure 4.8 présente un exemple de reconstruction non valide. Initialement, la maille  $i$  ne contient pas d’énergie cinétique. Mais on voit sur la figure 4.8 qu’en ne tenant compte que de la reconstruction de  $u$ , l’énergie cinétique est transportée hors de la maille  $i$ . Ce qui est absurde puisque nous avons supposé précédemment que la maille  $i$  ne contenait pas d’énergie cinétique.

**Remarque 7.** Si nous reprenons les notations précédentes, nous pouvons mettre en évidence que le cas  $u_i = 0$  pose problème.

On a :

CHAPITRE 4. UNE STRATÉGIE DE RECONSTRUCTION DE PENTES STABLES ET COMPATIBLES

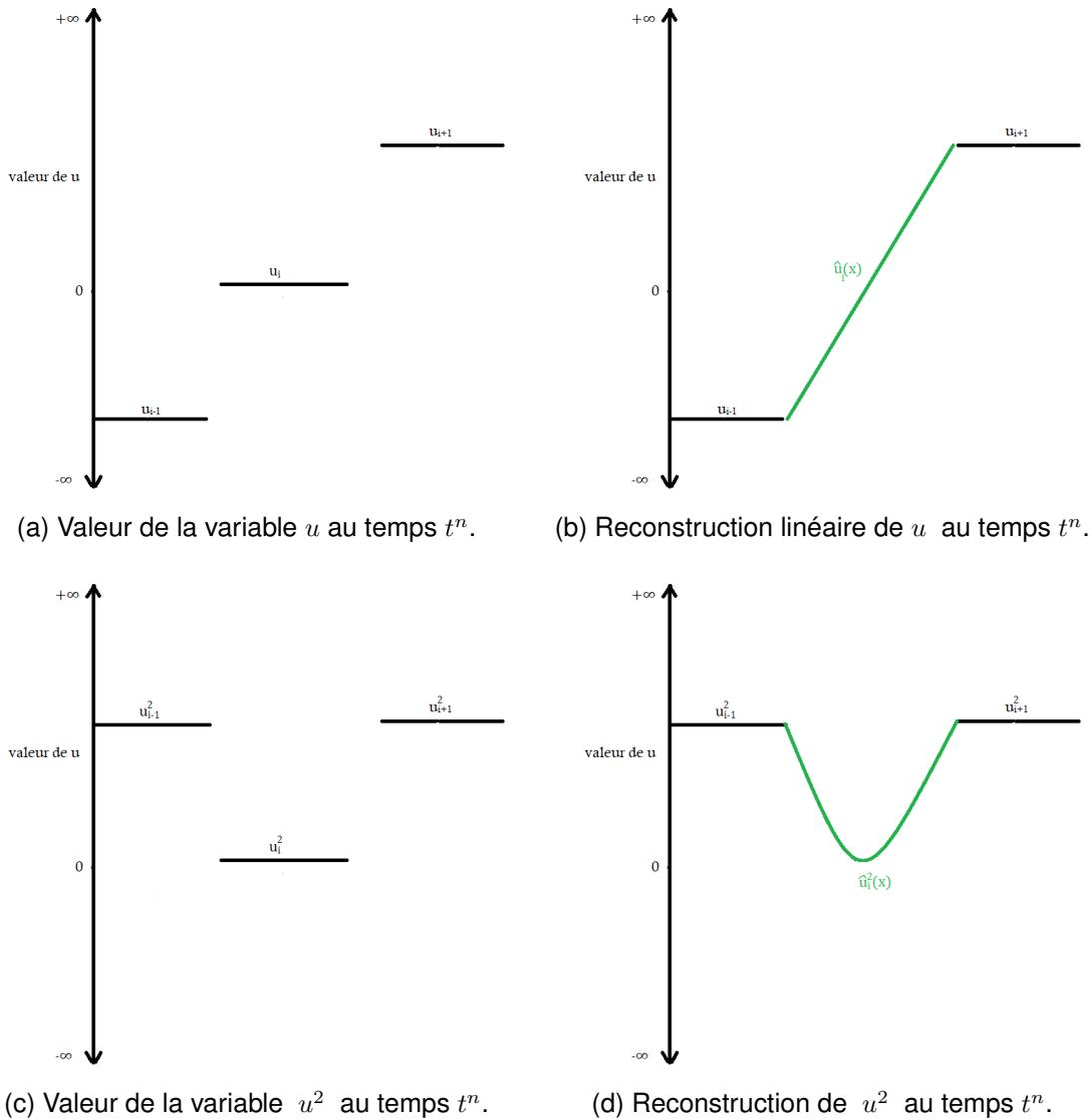


FIGURE 4.8 – Effet de la reconstruction de la vitesse sur l'énergie cinétique.

$$\begin{aligned} \left(1 - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| - |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}|\right) (\tilde{u}^2)_i^n &= \left(1 - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| - |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}|\right) (u^2)_i^n \\ &+ \left(|\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}| - |\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}|\right) u_i^n \phi_i^{u,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h u_i^n \\ &- \left(|\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| + |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}|\right) \left(\phi_i^{u,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h u_i^n\right)^2. \end{aligned}$$

Si  $u_i^n$  est reconstruit, la reconstruction de  $(u^2)_i^n$  n'est pas conservative par maille. Par exemple :

$$u_i^n = 0 \implies (\tilde{u}^2)_i^n \leq - \left(|\lambda_{i+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i+\frac{1}{2}} > 0}| + |\lambda_{i-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{u_{i-\frac{1}{2}} < 0}|\right) \left(\phi_i^{u,n} \frac{\Delta x}{2} \nabla^h u_i^n\right)^2, \text{ . Il est alors}$$

possible que  $(\tilde{u}^2)_i^n$  soit négative et donc  $(\tilde{u}^2)_i^n \notin \Omega$ .

Nous proposons un cas test pour montrer ce défaut d'énergie. Dans ce cas, la vitesse est régulière mais passe de valeurs négatives à positives en quelques mailles. Il s'agit d'un cas de double détente similaire au cas proposé par E.Toro dans le livre [98]. Cependant, dans le cas proposé ici, la vitesse est continue. Une reconstruction est donc effectuée dans la zone où la vitesse change de signe. Nous nous retrouvons alors dans la situation présentée à la remarque 7. Sur la figure 4.10, nous reconstruisons la vitesse. À  $t=0.2$  on constate déjà des oscillations apparaître, et, à  $t=0.4$ , en plus des oscillations, l'énergie est négative. La simulation n'est donc pas physique. Au contraire, sur la figure 4.11, nous ne reconstruisons pas la vitesse. Dans ce cas, les oscillations n'apparaissent pas et l'énergie reste positive sur toute la durée de la simulation.

Malgré l'importance de reconstruire la vitesse pour la capture des ondes ou des interfaces, nous venons de montrer les instabilités provoquées lorsque la pente de la vitesse n'est pas compatible avec l'énergie cinétique. Dans la suite, nous ne reconstruisons pas les variables  $u$  et  $u^2$ . Néanmoins, nous sommes en mesure de présenter certains critères nécessaires au développement d'une reconstruction de la vitesse. Ces critères sont les suivants :

- La CFL doit tenir compte d'un triple produit de reconstruction dans l'équation d'énergie.
- Le signe de  $u$  ne doit pas changer dans une maille lorsque  $u$  est reconstruit.
- Dans les cas multidimensionnels, afin de ne pas changer la direction du vecteur vitesse, un unique limiteur doit être utilisé pour toutes les composantes de la vitesse.

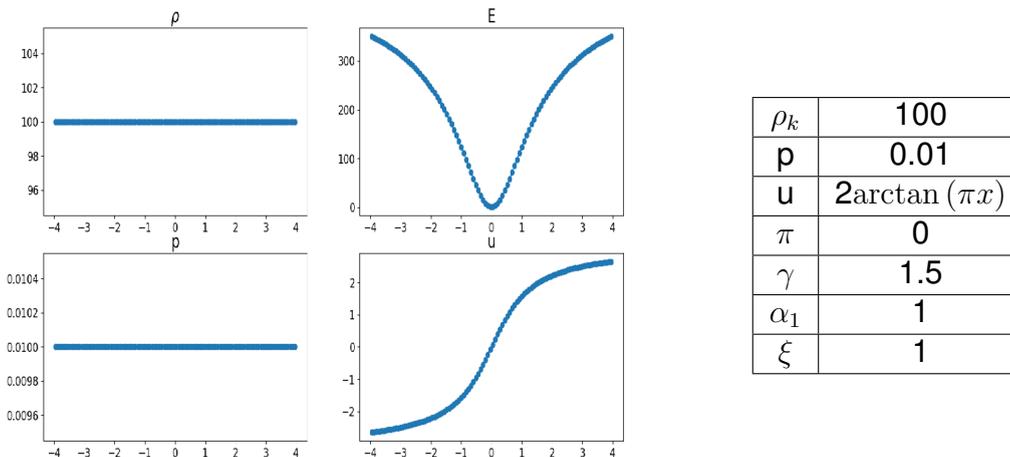
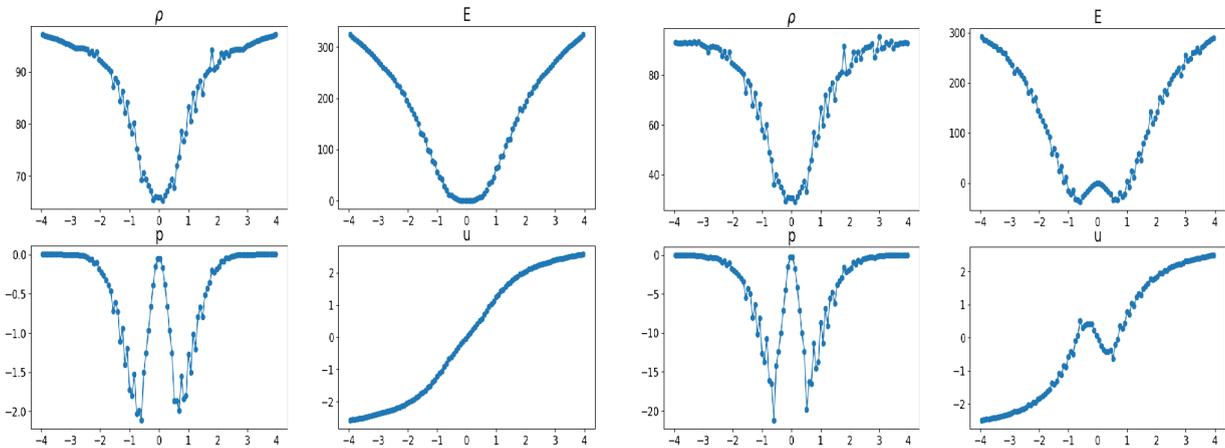


FIGURE 4.9 – Conditions initiales pour le cas **Double détente**.

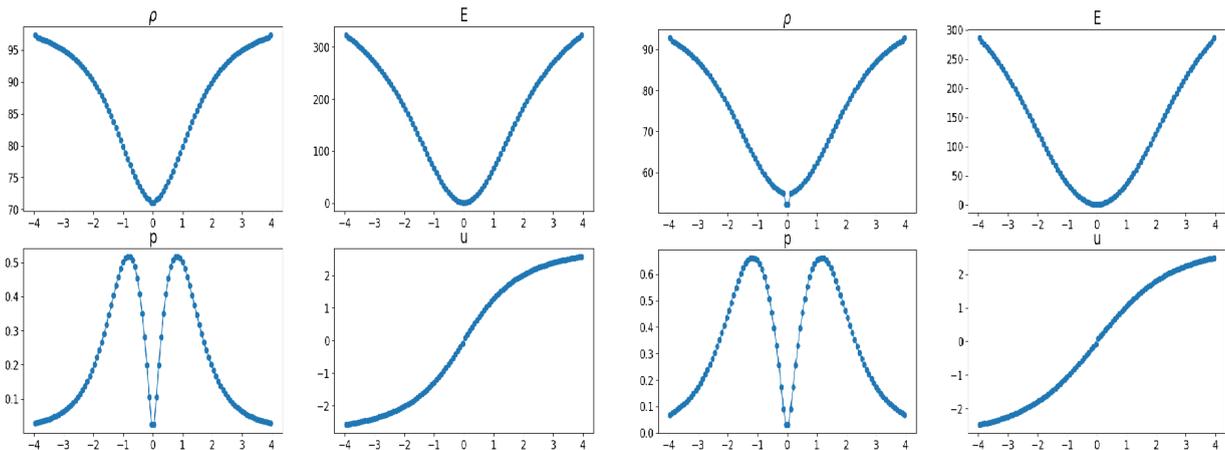


(a) Résultat à  $t=0.2$  avec une reconstruction de la vitesse. (b) Résultat à  $t=0.4$  avec une reconstruction de la vitesse.

Choix des limiteurs

$\alpha_k \rightarrow$  Superbee  $p \rightarrow$  min-mod  $u \rightarrow$  min-mod  $\rho_k \rightarrow$  Superbee  $\xi \rightarrow$  Superbee

FIGURE 4.10 – Apparition d’oscillations lorsque la reconstruction de  $u$  n’est pas compatible avec la conservation de l’énergie. Résultat obtenu sur le cas **Double détente**, un schéma Lagrange-Flux+Euler en temps est utilisé avec 100 mailles et une CFL = 0.18.



(a) Résultat à  $t=0.2$  sans reconstruction de la vitesse. (b) Résultat à  $t=0.4$  sans reconstruction de la vitesse.

Choix des limiteurs

$\alpha_k \rightarrow$  Superbee  $p \rightarrow$  min-mod  $u \rightarrow$  sans reconstruction  $\rho_k \rightarrow$  Superbee  $\xi \rightarrow$  Superbee

FIGURE 4.11 – Aucune oscillation n’apparaît si l’on ne reconstruit pas la vitesse. Résultat obtenu sur le cas **Double détente**, un schéma Lagrange-Flux+Euler en temps est utilisé avec 100 mailles et une CFL = 0.18.

## 4.4 Résultats numériques en deux dimensions

Toutes ces propriétés peuvent être étendues aux cas à deux dimensions d’espace. Dans cette partie nous présentons un ensemble de cas test permettant de valider l’ensemble

de la méthode. Des comparaisons avec des résultats expérimentaux sont également effectuées afin de juger de la validité du modèle.

### 4.4.1 Comparaison expérimentale d'une interaction choc/bulle

Le premier cas test est issu des expériences de Haas & Sturtevant [47]. Il est largement référencé dans la littérature [24, 19, 58, 57, 82]. Il va nous permettre de comparer le modèle avec une expérience. Il consiste à suivre la déformation d'une bulle d'hélium dans l'air soumis à une onde de choc à Mach 1.22. La vitesse du son dans l'hélium étant supérieure à celle dans l'air, l'onde de choc se déplace plus vite dans la bulle que dans l'air, ce qui va déformer la bulle d'hélium.

Les conditions initiales sont données en figure 4.12. Le temps de simulation correspond au temps écoulé depuis le début de l'interaction entre l'onde de choc et la bulle. Les conditions aux limites sur les axes horizontaux sont de type mur et sur les axes verticaux de type sortie.

Sur la figure 4.13 sont représentées les isovaleurs 0.5 des fractions volumiques du résultat, pour le temps souhaité mais aussi, pour la condition initiale. Les résultats numériques sont en accord avec l'expérience. La position du front de matière est proche de celle obtenue dans l'expérience, et aucune instabilité n'apparaît, ce qui semble être le cas dans l'expérience.

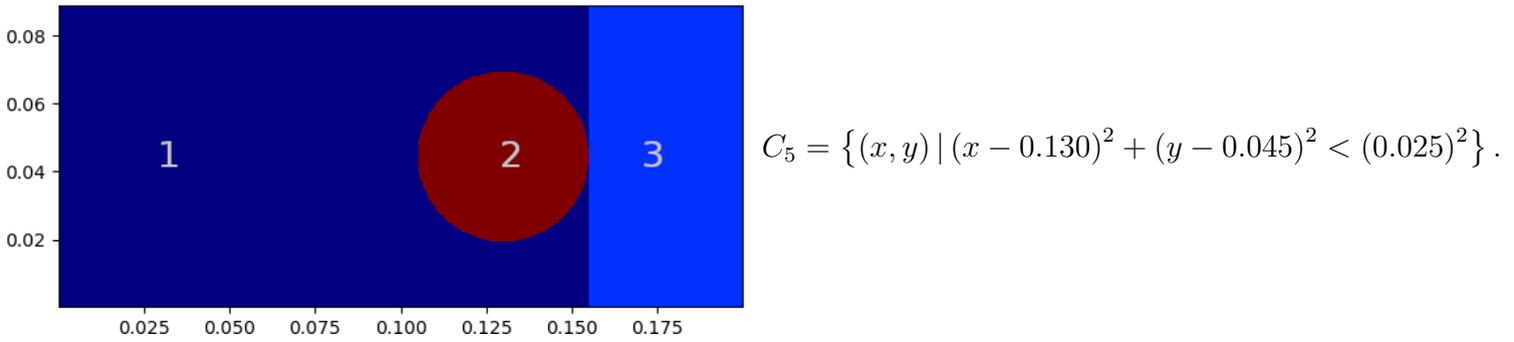
### 4.4.2 Capture d'un vortex

Sur la figure 4.14 nous présentons le cas du **Point triple** défini au chapitre 3 sur la figure 3.12. En utilisant la méthode MLP la diffusion numérique est contrôlée, nous pouvons distinguer le vortex s'enrouler autour des trois matériaux.

Dans la littérature, il est souvent mentionné la présence d'instabilité de type Kelvin-Helmoltz sur ce cas test. Nous proposons donc en figure 4.15 une simulation du **Point triple** avec un maillage plus fin afin d'essayer de capturer ces instabilités. Nous nous apercevons qu'aucune instabilité n'apparaît mais que la capture du vortex devient extrêmement précise.

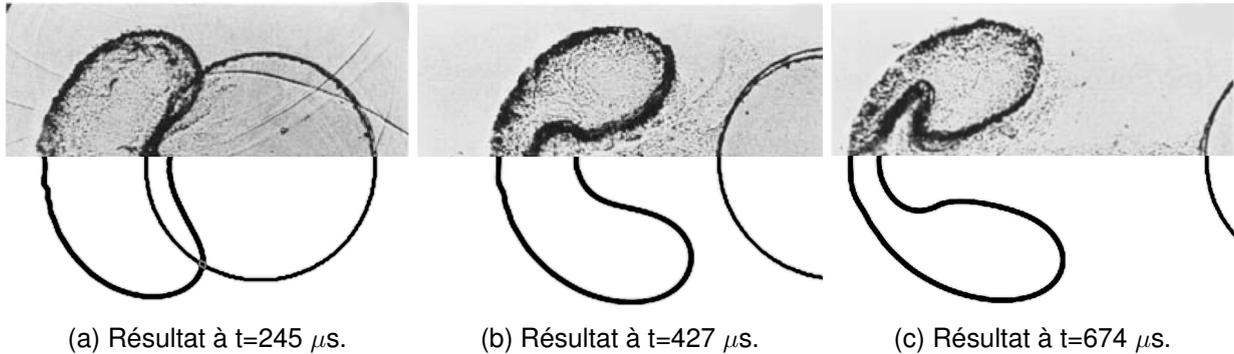
En développant la méthode MLP, nous nous sommes aperçus que ces instabilités apparaissent lorsque nous ne tenons pas compte des propriétés citées précédemment. Par exemple, dans la littérature, des instabilités apparaissent souvent à l'intérieur du vortex

## CHAPITRE 4. UNE STRATÉGIE DE RECONSTRUCTION DE PENTES STABLES ET COMPATIBLES



	zone 1 [0;0.155]×[0;0.89] \ C <sub>5</sub>	zone 2 C <sub>5</sub>	zone 3 [0.155;0.2]×[0;0.89]
<b>p</b>	10 <sup>5</sup>	10 <sup>5</sup>	1.5698 × 10 <sup>5</sup>
<b>ρ</b>	1.4	0.25463	1.92691
<b>π</b>	0	0	0
<b>γ</b>	1.4	1.648	1.4
<b>u</b>	0	0	-114.42
<b>v</b>	0	0	0
<b>α<sub>1</sub></b>	1	0	1

FIGURE 4.12 – Paramètres des conditions initiales pour le cas **Choc/bulle hélium**.



(a) Résultat à t=245 μs.

(b) Résultat à t=427 μs.

(c) Résultat à t=674 μs.

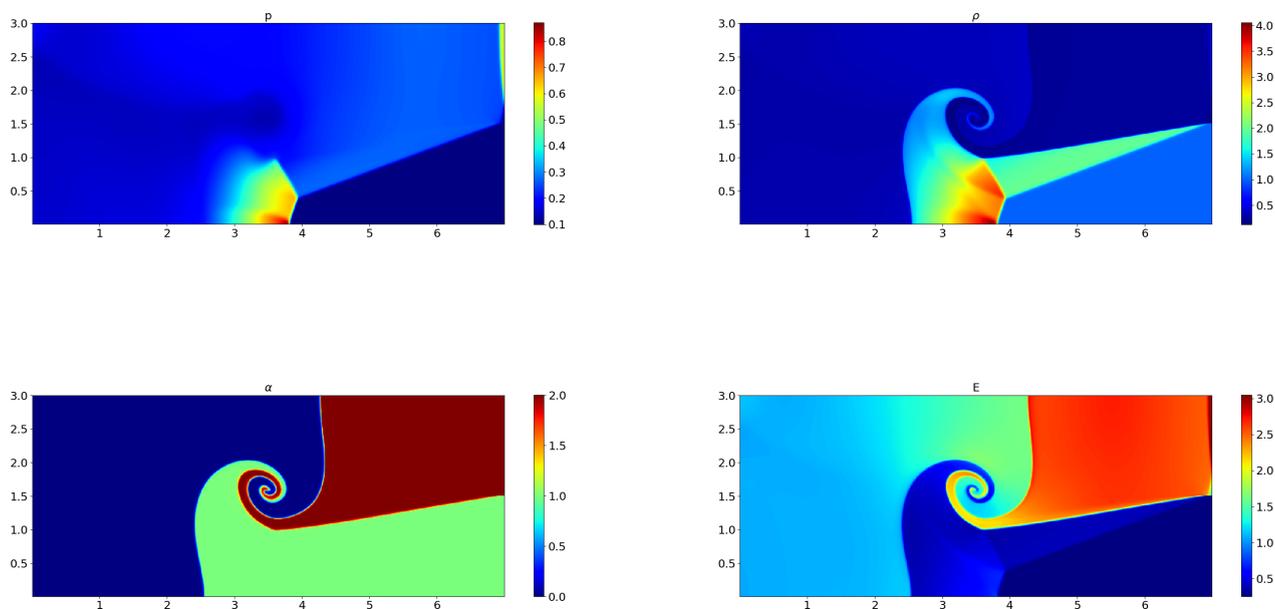
### Choix des limiteurs

$$\begin{aligned} \alpha_k &\rightarrow \text{MLP-UB} & p &\rightarrow \text{MLP-min-mod} & u &\rightarrow \text{sans reconstruction} \\ \rho_k &\rightarrow \text{MLP-min-mod} & \xi &\rightarrow \text{MLP-UB} \end{aligned}$$

FIGURE 4.13 – Résultat pour le cas **Choc/bulle hélium** pour un maillage 600x267 avec une CFL = 0.18. Résultat obtenu avec une méthode Lagrange-Flux+RK2 en temps. Les résultats expérimentaux sont en haut et les isovaleurs des fractions volumiques obtenues numériquement sont en bas.

(zone où les 3 matériaux sont présents) lorsque l'invariant (1.10)  $\sum_{k=1}^L \alpha_k = 1$  n'est pas assuré, ou bien lorsque les limiteurs ne sont pas vraiment multidimensionnels [15, 107, 79]. Une reconstruction de la vitesse incompatible avec l'énergie cinétique entraîne aussi la rupture du vortex.

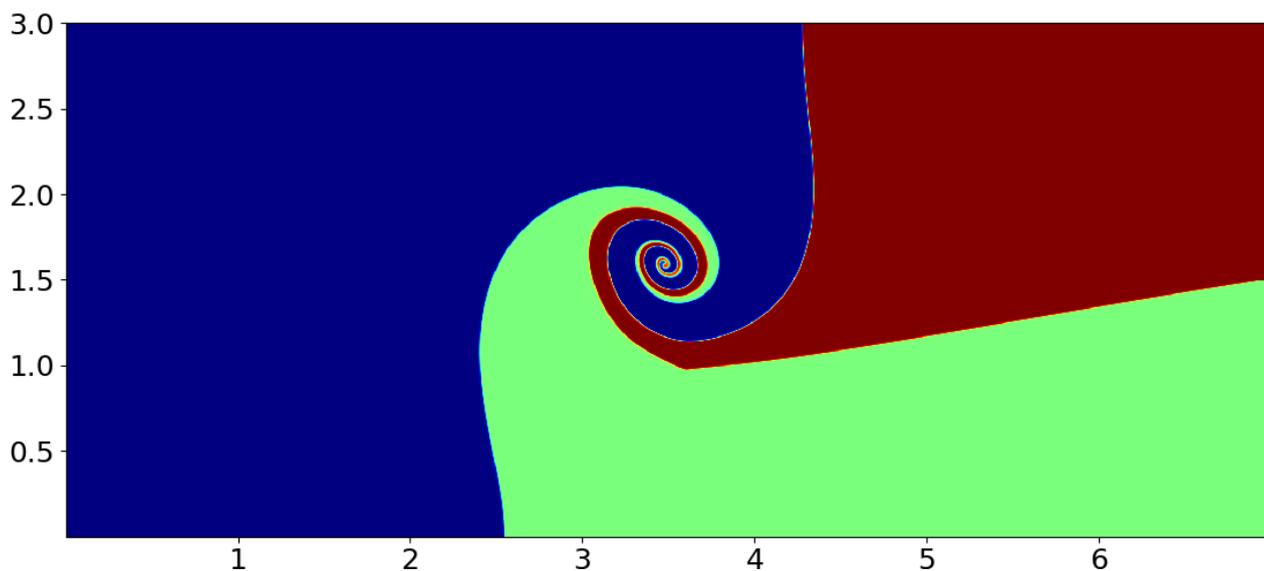
## CHAPITRE 4. UNE STRATÉGIE DE RECONSTRUCTION DE PENTES STABLES ET COMPATIBLES



### Choix des limiteurs

$\alpha_k \rightarrow$  MLP-UB     $p \rightarrow$  MLP-min-mod     $u \rightarrow$  sans reconstruction  
 $\rho_k \rightarrow$  MLP-min-mod     $\xi \rightarrow$  MLP-UB

FIGURE 4.14 – Résultat du **Point triple** pour un maillage 600x258 avec une CFL = 0.18. Résultat obtenu avec une méthode Lagrange-Flux+RK2 en temps.

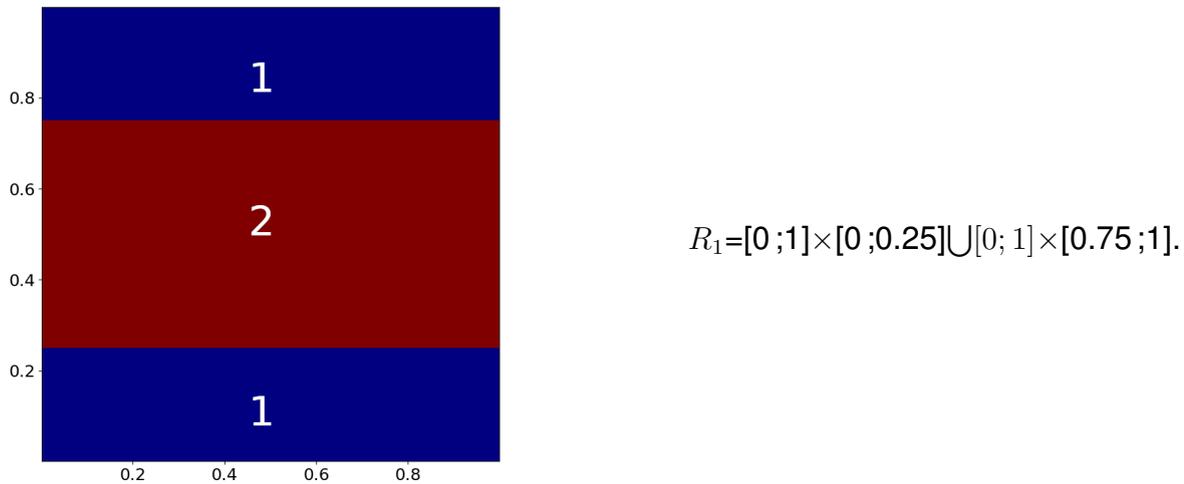


### Choix des limiteurs

$\alpha_k \rightarrow$  MLP-UB     $p \rightarrow$  MLP-min-mod     $u \rightarrow$  sans reconstruction  
 $\rho_k \rightarrow$  MLP-min-mod     $\xi \rightarrow$  MLP-UB

FIGURE 4.15 – Fractions volumiques pour **Point triple** avec un maillage 2000x858 avec une CFL = 0.18. Résultat obtenu avec une méthode Lagrange-Flux+RK2 en temps.

Afin d'observer la capacité du schéma à capturer des instabilités de type Kelvin-Helmoltz

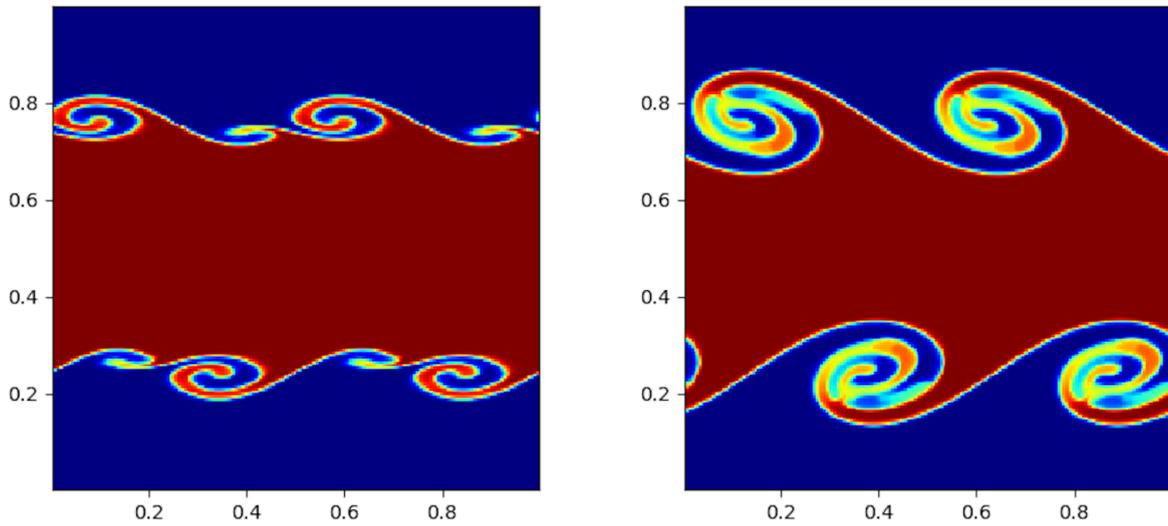


	zone 1	zone 2
	$R_1$	$[0;1] \times [0.25;0.75]$
$p$	2.5	2.5
$\rho$	1.	2
$\pi$	0	0
$\gamma$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$
$u_x$	-0.5	0.5
$\alpha_1$	0	1
$u_y$	$0.1 \sin(4\pi x) \left( \exp\left(\frac{-(y-0.25)^2}{0.05^2}\right) + \exp\left(\frac{-(y-0.75)^2}{0.05^2}\right) \right)$	

FIGURE 4.16 – Paramètres des conditions initiales pour le cas **Kelvin-Helmoltz**.

nous étudions le cas présenté par Galera *et al.* [35]. Ce cas représente le cisaillement horizontal de deux matériaux avec des masses volumiques différentes. Une petite perturbation est ajoutée dans la vitesse verticale. Les conditions initiales sont données en figure 4.16. Sur les figures 4.17 et 4.18 nous retrouvons les résultats obtenus dans [35, 19] pour les instabilités principales. Nous obtenons aussi des instabilités secondaires sur la figure 4.18, comme Scaal *et al.* [89], lorsque nous raffinons le maillage. Ce cas test atteste de la capacité de la méthode à capturer les instabilités de type Kelvin-Helmoltz.

Sur la figure 4.17, il est important de remarquer que les instabilités apparaissent avec  $\Delta x = 0.005$  pour le cas **Kelvin-Helmoltz**, alors que sur la figure 4.15, pour le cas du **point triple**  $\Delta x = 0.0035$ , et pourtant aucune instabilité n'est présente. Ce résultat nous permet d'affirmer que l'absence d'instabilités de type **Kelvin-Helmoltz** dans le cas du **Point triple** ne vient pas d'un manque de finesse du maillage.

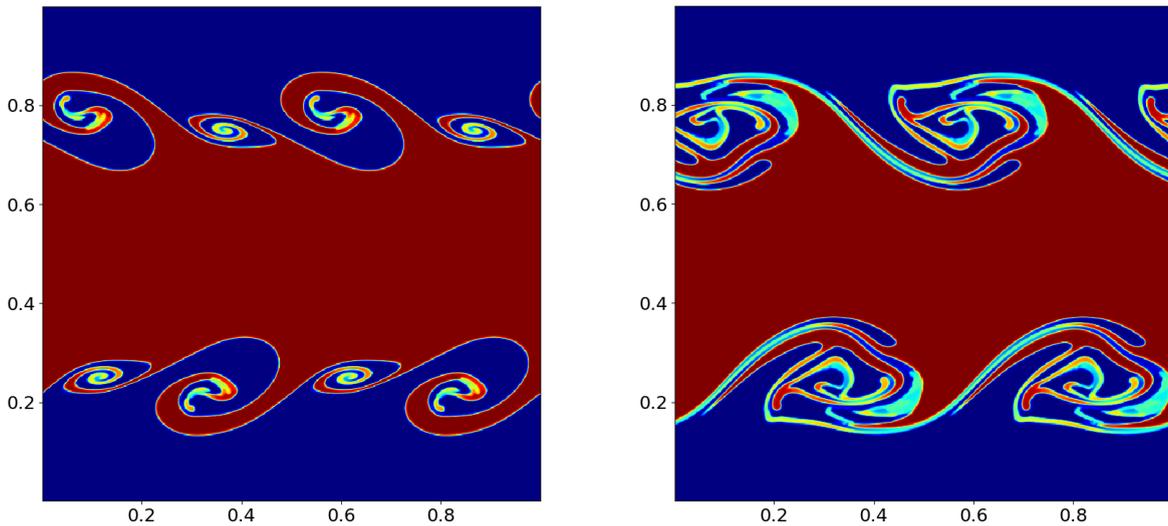


(a) Représentation des fractions volumiques à  $t=1$ . (b) Représentation des fractions volumiques à  $t=2$ .

Choix des limiteurs

$\alpha_k \rightarrow$  MLP-UB    $p \rightarrow$  MLP-min-mod    $u \rightarrow$  sans reconstruction  
 $\rho_k \rightarrow$  MLP-min-mod    $\xi \rightarrow$  MLP-UB

FIGURE 4.17 – Résultat pour le cas **Kelvin-Helmoltz** pour un maillage  $200 \times 200$  avec une CFL = 0.18. Résultat obtenu avec une méthode Lagrange-Flux+RK2 en temps.



(a) Représentation des fractions volumiques à  $t=1$ . (b) Représentation des fractions volumiques à  $t=2$ .

Choix des limiteurs

$\alpha_k \rightarrow$  MLP-UB    $p \rightarrow$  MLP-min-mod    $u \rightarrow$  sans reconstruction  
 $\rho_k \rightarrow$  MLP-min-mod    $\xi \rightarrow$  MLP-UB

FIGURE 4.18 – Résultat pour le cas **Kelvin-Helmoltz** pour un maillage  $600 \times 600$  avec une CFL = 0.18. Résultat obtenu avec une méthode Lagrange-Flux+RK2 en temps.

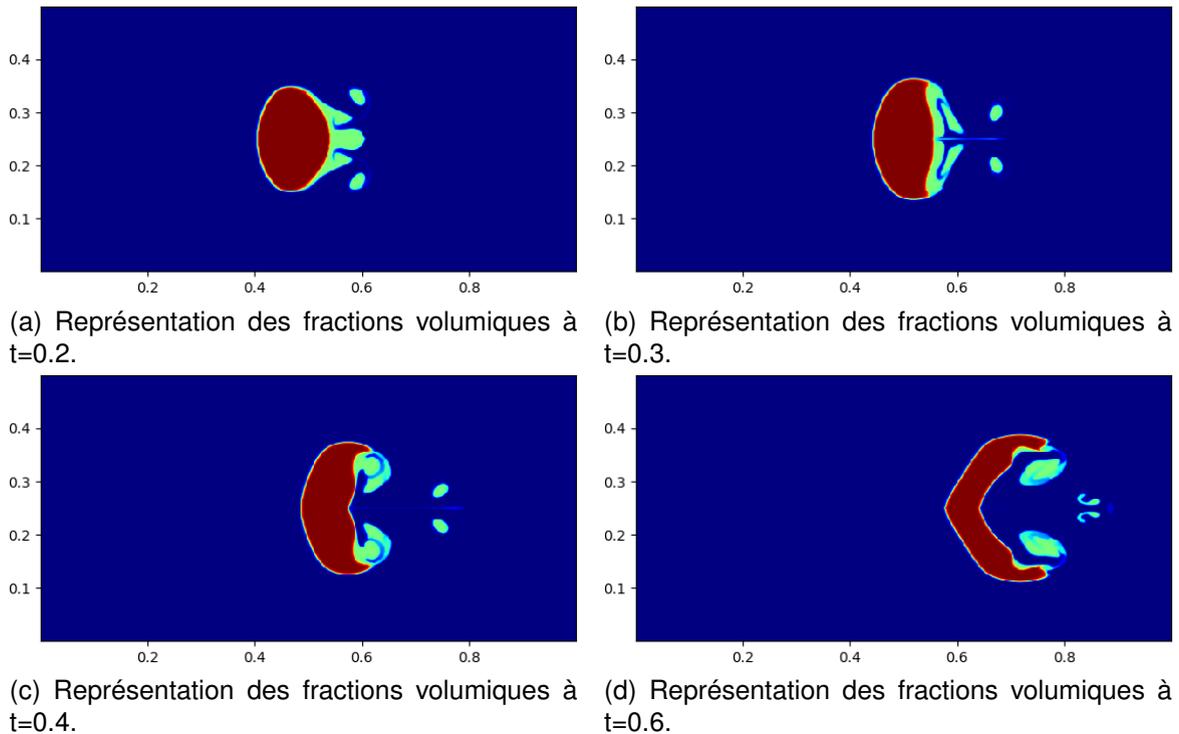
### 4.4.3 Interaction choc/bulle en présence de matériaux Stiffened-Gas

Jusqu'à présent nous avons étudié des cas dans lesquels les fluides étaient assimilés à des gaz parfaits ( $\pi_k = 0$ ). Pour clore ce chapitre nous allons nous intéresser à deux cas faisant intervenir des gaz raides ( $\pi_k > 0$ ).

Nous commençons par le cas **Sod 2D** présenté au chapitre précédent. Les résultats obtenus sur la figure 4.19 sont en accord avec les résultats de références [76]. Sur les figures 4.19 a) et b), il apparaît une instabilité de type Richtmyer-Meshkov provoquée par la différence de densité entre les fluides.

Ce test met en évidence la robustesse de la méthode. En effet, le paramètre  $\pi_k$  est cent fois supérieur à la pression induite par l'onde de choc, ce qui fait apparaître des pressions négatives pouvant amener à des pas de temps dégénérés ( $\Delta t \simeq 0$ ) si la condition  $p + \pi > 0$  n'est pas garantie. Dans notre cas, la reconstruction de la pression en deux temps présentée en section 4.3.2 assure cette condition.

Le cas suivant représente l'interaction d'une onde de choc dans un liquide vers une bulle



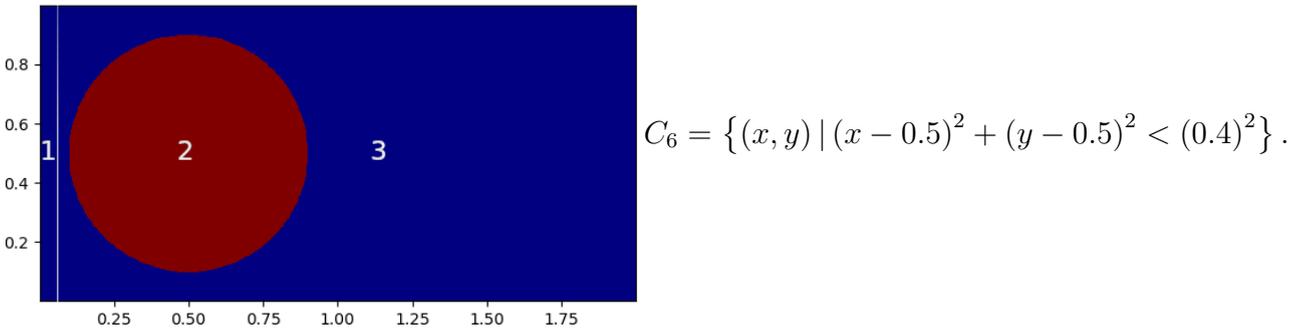
#### Choix des limiteurs

$$\begin{aligned} \alpha_k &\rightarrow \text{MLP-UB} & p &\rightarrow \text{MLP-min-mod} & u &\rightarrow \text{sans reconstruction} \\ \rho_k &\rightarrow \text{MLP-min-mod} & \xi &\rightarrow \text{MLP-UB} & p + \pi &\rightarrow \text{MLP-UB} \end{aligned}$$

FIGURE 4.19 – Résultat pour le cas **Sod 2D** pour un maillage  $600 \times 300$  avec une  $CFL = 0.18$ . Résultat obtenu avec une méthode Lagrange-Flux+RK2 en temps.

## CHAPITRE 4. UNE STRATÉGIE DE RECONSTRUCTION DE PENTES STABLES ET COMPATIBLES

de gaz. Les conditions initiales sont données sur la figure 4.20. Les conditions aux limites horizontales sont des murs et les verticales sont des conditions de sorties.

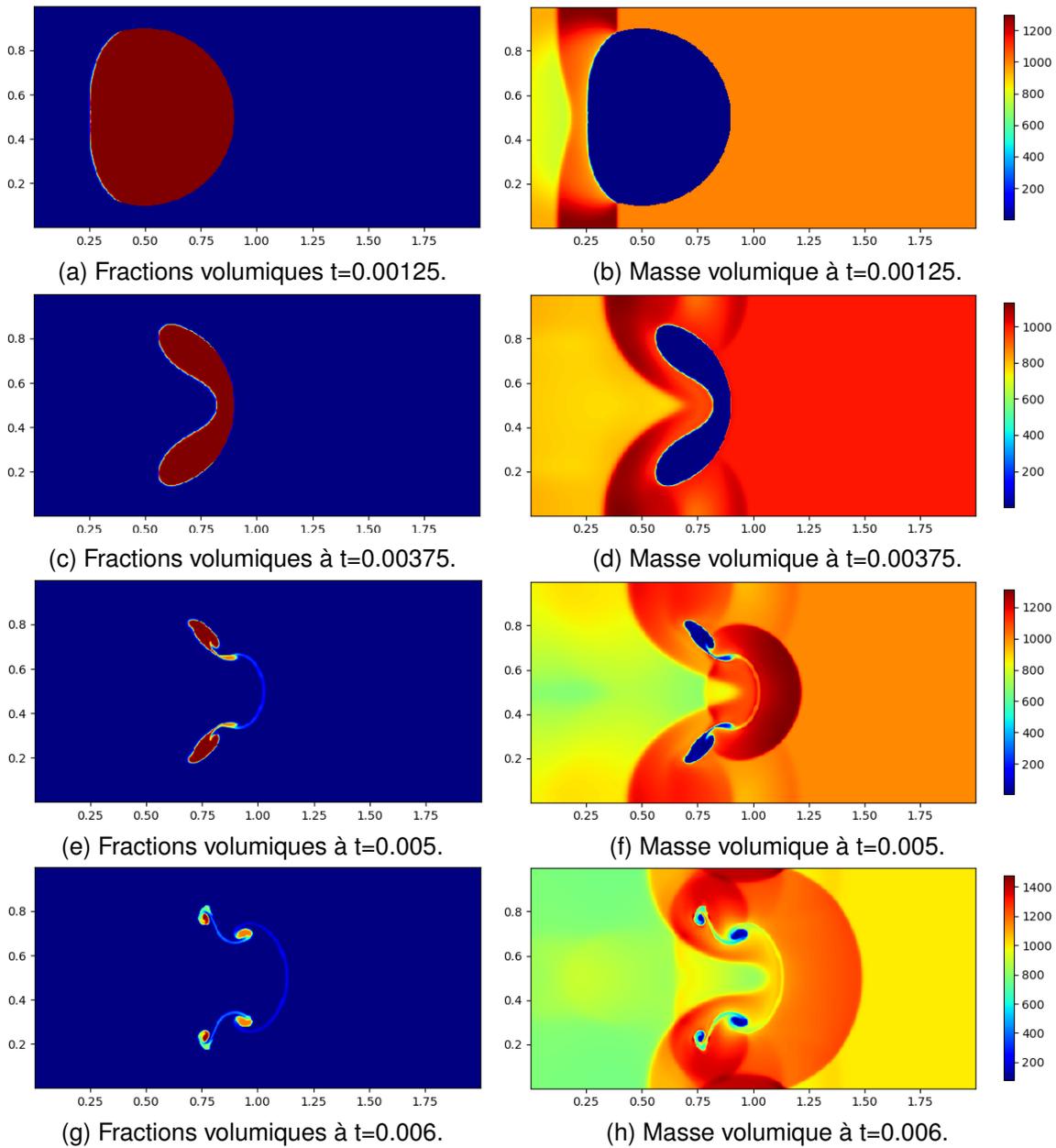


	zone 1 [0;0.04]×[0;1]	zone 2 $C_6$	zone 3 [0.04;2]×[0;1] \setminus C_6
$p$	$3 \times 10^9$	$10^5$	$10^5$
$\rho$	1030.9	1.	1000
$\pi$	$6.8 \times 10^8$	0	$6.8 \times 10^8$
$\gamma$	4.4	1.4	4.4
$u$	300	0	0
$\alpha_1$	1	0	1
$\alpha_2$	0	1	0

FIGURE 4.20 – Paramètres des conditions initiales pour le cas **Choc/bulle liquide gaz**.

La vitesse du son dans le gaz est inférieure à celle dans le liquide, cela se vérifie sur les figures 4.21. Le choc dépasse la bulle à l'extérieur avant d'avoir complètement traversé celle-ci. Il est important aussi de noter la symétrie du résultat. Après le passage de l'onde de choc, le gaz forme des petites poches reliées par un filament. Ces poches de gaz sont parfaitement symétriques.

Encore une fois ce test met en évidence la robustesse de la méthode. Le ratio de densité de 1000 entre les deux fluides peut entraîner des difficultés numériques, ce qui n'est pas le cas ici. La compatibilité de l'ensemble des flux permet d'assurer la robustesse du schéma.



Choix des limiteurs

$$\begin{aligned} \alpha_k &\rightarrow \text{MLP-UB} & p &\rightarrow \text{MLP-min-mod} & u &\rightarrow \text{sans reconstruction} \\ \rho_k &\rightarrow \text{MLP-min-mod} & \xi &\rightarrow \text{MLP-UB} & p + \pi &\rightarrow \text{MLP-UB} \end{aligned}$$

FIGURE 4.21 – Résultat pour le cas **Choc/bulle liquide gaz** pour un maillage  $600 \times 300$  avec une  $\text{CFL} = 0.18$ . Résultat obtenu avec une méthode Lagrange-Flux+RK2 en temps.

## 4.5 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons démontré un ensemble de propriétés nécessaires à la stabilité des schémas de type MUSCL dans un cadre général. Ensuite, nous avons mis en

évidence le lien entre les reconstructions. Les propriétés démontrés, nous ont permis de développer un ensemble de reconstructions compatibles, grâce auxquelles nous sommes parvenus à limiter les instabilités purement numériques.

Nous souhaitons souligner l'importance du théorème 2. Il existe des résultats permettant d'éviter les oscillations en pression pour des systèmes non conservatifs [45, 46], mais, à notre connaissance, aucun résultat n'existe dans littérature permettant d'éviter les oscillations en pression dans un cadre totalement conservatif.

La reconstruction en deux étapes permettant de conserver  $p \in \Omega$  ouvre de nouvelles possibilités de simulation. Dans les codes de calculs, il est courant d'imposer  $p > 0$  afin d'assurer la stabilité du schéma. Si cette hypothèse est valable dans certaines applications, elle ne permet pas toujours de rendre compte de la physique réelle. Les phénomènes de cavitations par exemple font naturellement apparaître des pressions négatives [73]. Avec cette reconstruction, il est possible de conserver une méthode stable sans imposer de condition sur la pression.

Nous avons donc proposé un ensemble de reconstruction original, validé par un ensemble de cas tests, permettant ainsi de démontrer la robustesse et la stabilité de l'approche.

# Chapitre 5

## Une définition d'un schéma d'advection multidimensionnel à une seule étape

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction du chapitre</b> . . . . .	<b>128</b>
<b>5.2</b>	<b>Développement mathématique du schéma numérique</b> . . . . .	<b>130</b>
5.2.1	Étude du schéma numérique sous forme volumes finis . . . . .	131
5.2.2	Étude qualitative et quantitative des propriétés du schéma d'Intégration temporelle en dimension deux . . . . .	138
5.2.3	Extension à trois dimensions d'espace . . . . .	143
5.2.4	Résultats numériques à deux et trois dimensions d'espace . . . . .	149
<b>5.3</b>	<b>Développement d'une méthode de reconstruction affine par morceaux pour les cas multimatériaux</b> . . . . .	<b>152</b>
5.3.1	Définition d'une reconstruction pour les cas multimatériaux . . . . .	154
5.3.2	Résultats numériques à deux et trois dimensions d'espace pour les cas multimatériaux . . . . .	157
<b>5.4</b>	<b>Application à un système totalement conservatif pour les écoulements multifluides</b> . . . . .	<b>162</b>
5.4.1	Comparaison expérimentale et numérique . . . . .	162
5.4.2	Capture d'un vortex . . . . .	163
<b>5.5</b>	<b>Conclusion du chapitre</b> . . . . .	<b>167</b>

---

## 5.1 Introduction du chapitre

Dans ce chapitre, nous allons développer un schéma temporel multidimensionnel à une seule étape. Dans le premier chapitre, nous avons mis en évidence les artefacts liés à la combinaison des limiteurs antidiffusifs et du schéma d'Euler en temps. Ces oscillations sont dues aux dérivées croisées dans l'équation équivalente. Pour éviter l'apparition de ces zigzags, il est nécessaire d'utiliser les mailles de coins dans l'étape d'advection. Dans le but d'éviter ces artefacts parasites, nous avons eu recours à une méthode de Runge-Kutta d'ordre deux. Bien qu'elle se soit révélée extrêmement stable et robuste, elle nécessite deux étapes de calculs. Ces deux étapes complexifient l'analyse du schéma, et augmentent la durée des simulations. Pour faire intervenir les mailles diagonales, il est aussi possible d'utiliser des méthodes de splitting. Pour les splitting à deux dimensions d'espace, nous pouvons citer l'article de Strang [93] et en dimension trois celui de Aulisa [9]. Ces méthodes sont efficaces, mais en dimension trois elles nécessitent, au minimum, trois étapes d'advection. Pour chaque étape, il est nécessaire de recalculer le gradient afin de reconstruire la pente. Tous ces calculs allongent la durée des simulations. Nous souhaitons développer un schéma à une seule étape afin de limiter le nombre de calcul de flux et de reconstruction de pente, et ainsi diminuer la durée des simulations.

Jusqu'ici, nous avons développé un ensemble d'outils mathématiques permettant la réduction de la diffusion et la stabilité de la méthode. Le développement présenté dans ce chapitre, a pour but de diminuer le temps des simulations tout en garantissant un niveau de précision des résultats similaire à celui obtenu jusqu'ici. Des méthodes ne nécessitant qu'un seul pas de temps ont déjà été étudiées. Les premiers résultats ont été présentés par Colella dans l'article [20] comme un schéma upwind en dimension deux, Saltzman a ensuite étendu le concept à trois dimensions d'espace dans l'article [86]. Par la suite Leveque a proposé un schéma d'advection multidimensionnel d'ordre élevé à une étape pour les dimensions deux et trois [67, 68, 66]. Plus récemment, nous pouvons citer l'article de Nonaka *et al.* [77] ou ceux Liovic *et al.* [72] dans le cadre de suivi d'interface, et enfin l'article de Comminal et Spangenberg [21] qui présentent une méthode VOF en dimensions trois.

La méthode que nous allons présenter dans ce chapitre est basée sur les travaux de Leveque [67, 68, 66]. Dans l'article [68], Leveque utilise une reconstruction direction par direction, or l'utilisation d'une telle reconstruction ne garantit pas le principe du maximum dans le cas où des flux de coins interviennent. Nous proposons ici d'utiliser la méthode

## CHAPITRE 5. UNE DÉFINITION D'UN SCHÉMA D'ADVECTION MULTIDIMENSIONNEL À UNE SEULE ÉTAPE

---

MLP. La reconstruction multidimensionnelle de notre méthode va permettre de garantir le principe du maximum, malgré une étape d'advection diagonale. De plus, la reconstruction proposée étant linéaire, les calculs d'intégrales sont exacts. Un autre verrou important, qui à notre connaissance n'a jamais été abordé, est l'utilisation de ce type de méthode dans un cadre multfluides, avec un nombre de matériaux supérieur à deux. Nous proposons une généralisation de la méthode par flux renormalisés, vus au chapitre 1, dans le cas d'une advection à une seule étape.

Dans ce chapitre, nous allons donc développer un schéma temporel multidimensionnel à une étape. Nous commencerons par développer le schéma en dimension deux afin de le valider et d'étudier son comportement aussi bien d'un point de vue quantitatif que qualitatif. Ensuite, nous l'étendrons à trois dimensions d'espaces puis aux cas multimatériaux. Enfin, nous finirons par présenter des résultats à deux dimensions d'espaces dans le cas du système à six équations présenté dans le chapitre 3 pour les écoulements réels multfluides.

## 5.2 Développement mathématique du schéma numérique

Afin de simplifier le développement du schéma, nous allons d'abord nous restreindre à l'équation de transport de la fraction volumique  $\alpha$  :

$$\partial_t \alpha + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha = 0. \quad (1.2)$$

Nous nous restreignons au cas incompressible ce qui revient à  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Nous pouvons donc écrire l'équation sous la forme conservative :

$$\partial_t \alpha + \nabla \cdot (\mathbf{u} \alpha) = 0. \quad (5.1)$$

Nous commençons par chercher les coefficients qui permettent une advection à une étape. Pour les trouver, nous cherchons la valeur de la fraction volumique à l'instant  $t^{n+1}$  sur la maille  $(i,j)$ . Dans le cas d'une équation d'advection, nous connaissons la solution exacte. Pour la trouver, il suffit de remonter les courbes caractéristiques.

Pour déterminer les coefficients du schéma temporel, nous allons remonter les courbes caractéristiques du temps  $t^{n+1}$  jusqu'au temps  $t^n$ , correspondant à l'itération précédente. Pour simplifier l'étude, nous supposons que  $u_x$  et  $u_y$  sont égaux et constants sur l'ensemble du domaine  $\Omega$ . L'origine est positionnée au centre de la maille  $(i, j)$ . Le volume de la maille  $(i, j)$  est noté  $|V_{i,j}|$

Nous approximons  $\alpha(x_i, y_j, t^{n+1})$  par une approche volumes finis :

$$\begin{aligned} \alpha(x_i, y_j, t^{n+1}) &\simeq \frac{1}{|V_{i,j}|} \int_{|V_{i,j}|} \alpha(x, y, t^{n+1}) dx dy \\ &= \frac{1}{|V_{i,j}|} \int_{V_{i,j}} \alpha^n(x - u_x \Delta t, y - u_y \Delta t, t^n) dx dy \\ &= \frac{1}{|V_{i,j}|} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha^n(x - u_x \Delta t, y - u_y \Delta t, t^n) dx dy. \end{aligned}$$

En appliquant le changement de variable  $x' = x - u_x \Delta t$  et  $y' = y - u_y \Delta t$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|V_{i,j}|} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha(x - u_x \Delta t, y - u_y \Delta t, t^n) dx dy \\ &= \frac{1}{|V_{i,j}|} \int_{-\frac{h}{2} - u_x \Delta t}^{\frac{h}{2} - u_x \Delta t} \int_{-\frac{h}{2} - u_y \Delta t}^{\frac{h}{2} - u_y \Delta t} \alpha(x', y', t^n) dx' dy'. \end{aligned}$$

En tenant compte de la discrétisation en espace, nous approchons l'intégrale précédente comme la somme des volumes déplacés des mailles  $(i, j)$ ,  $(i - 1, j)$ ,  $(i, j - 1)$  et  $(i - 1, j - 1)$  vers la maille  $(i, j)$ . Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|V_{i,j}|} \int_{\frac{-h}{2}-u_x\Delta t}^{\frac{h}{2}-u_x\Delta t} \int_{\frac{-h}{2}-u_y\Delta t}^{\frac{h}{2}-u_y\Delta t} \alpha(x', y', t^n) dx' dy' &\simeq \frac{1}{|V_{i,j}|} \left( \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}-u_x\Delta t} \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}-u_y\Delta t} \alpha_{i,j}(x', y', t^n) dx' dy' \right. \\ &+ \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}-u_x\Delta t} \int_{\frac{-h}{2}-u_y\Delta t}^{\frac{-h}{2}} \alpha_{i,j-1}(x', y', t^n) dx' dy' \\ &+ \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}-u_y\Delta t} \int_{\frac{-h}{2}-u_x\Delta t}^{\frac{-h}{2}} \alpha_{i-1,j}(x', y', t^n) dx' dy' \\ &\left. + \int_{\frac{-h}{2}-u_y\Delta t}^{\frac{-h}{2}} \int_{\frac{-h}{2}-u_x\Delta t}^{\frac{-h}{2}} \alpha_{i-1,j-1}(x', y', t^n) dx' dy' \right). \end{aligned}$$

Comme la distribution de  $\alpha$  est reconstruite linéairement sur chaque cellule avec la méthode MLP. Les intégrales précédentes peuvent être calculées explicitement, sans avoir à employer une méthode d'approximation. Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|V_{i,j}|} \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}-u_x\Delta t} \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}-u_y\Delta t} \alpha_{i,j}(x', y', t^n) dx' dy' &= \frac{1}{|V_{i,j}|} (h - u_x\Delta t) (h - u_y\Delta t) \hat{\alpha}_{i,j}^n \left( -\frac{u_x\Delta t}{2}, -\frac{u_y\Delta t}{2} \right) \\ \frac{1}{|V_{i,j}|} \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}-u_x\Delta t} \int_{\frac{-h}{2}-u_y\Delta t}^{\frac{-h}{2}} \alpha_{i,j-1}(x', y', t^n) dx' dy' &= \frac{1}{|V_{i,j}|} (h - u_x\Delta t) u_y\Delta t \hat{\alpha}_{i,j-1}^n \left( -\frac{u_x\Delta t}{2}, \frac{h - u_y\Delta t}{2} \right) \\ \frac{1}{|V_{i,j}|} \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}-u_y\Delta t} \int_{\frac{-h}{2}-u_x\Delta t}^{\frac{-h}{2}} \alpha_{i-1,j}(x', y', t^n) dx' dy' &= \frac{1}{|V_{i,j}|} (h - u_y\Delta t) u_x\Delta t \hat{\alpha}_{i-1,j}^n \left( \frac{h - u_x\Delta t}{2}, -\frac{u_y\Delta t}{2} \right) \\ \frac{1}{|V_{i,j}|} \int_{\frac{-h}{2}-u_y\Delta t}^{\frac{-h}{2}} \int_{\frac{-h}{2}-u_x\Delta t}^{\frac{-h}{2}} \alpha_{i-1,j-1}(x', y', t^n) dx' dy' &= \frac{1}{|V_{i,j}|} u_y\Delta t u_x\Delta t \hat{\alpha}_{i-1,j-1}^n \left( \frac{h - u_x\Delta t}{2}, \frac{h - u_y\Delta t}{2} \right). \end{aligned} \tag{5.2}$$

### 5.2.1 Étude du schéma numérique sous forme volumes finis

Les intégrales, obtenues dans la formule (5.2), nous donnent la valeur moyenne de  $\alpha_i, j^{n+1}$  en fonction des valeurs au temps  $t^n$ . Nous souhaitons écrire la discrétisation, obtenue dans la formule (5.2), sous la forme d'un schéma volumes finis de la forme :

$$\alpha_{i,j}^{n+1} = \alpha_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{h} \left( \psi_{i+\frac{1}{2},j}^n - \psi_{i-\frac{1}{2},j}^n \right) - \frac{\Delta t}{h} \left( \psi_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \psi_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right). \tag{5.3}$$

## CHAPITRE 5. UNE DÉFINITION D'UN SCHÉMA D'ADVECTION MULTIDIMENSIONNEL À UNE SEULE ÉTAPE

---

Où les  $\psi^n$  sont les flux aux faces de chaque maille. Pour les écrire sous cette forme, nous allons développer les résultats obtenus dans (5.2).

Nous utilisons la définition de la reconstruction (1.7). Nous nous plaçons dans le cadre du développement précédent, c'est-à-dire  $u_x, u_y$  constants et positifs. De plus, nous nous restreignons à un maillage structuré cartésien où  $\Delta x = \Delta y = h$ , nous avons donc  $|V_{i,j}| = h^2$ . On peut écrire :

$$\begin{aligned} & \frac{(h - u_x \Delta t)(h - u_y \Delta t) \hat{\alpha}_{i,j}^n \left( -\frac{u_x \Delta t}{2}, -\frac{u_y \Delta t}{2} \right)}{h^2} \\ &= \frac{(h - u_x \Delta t)(h - u_y \Delta t) \left( \alpha_{i,j}^n - \frac{u_x \Delta t}{2} \phi_{i,j}^n \nabla_x \alpha_{i,j}^n - \frac{u_y \Delta t}{2} \phi_{i,j}^n \nabla_y \alpha_{i,j}^n \right)}{h^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_{i,j}^n - \frac{h^2 (u_x \Delta t \phi_{i,j}^n \nabla_x \alpha_{i,j}^n + u_y \Delta t \phi_{i,j}^n \nabla_y \alpha_{i,j}^n)}{2h^2} \\
&\quad - \frac{\Delta t u_x (2\alpha_{i,j}^n - u_x \Delta t \phi_{i,j}^n \nabla_x \alpha_{i,j}^n - u_y \Delta t \phi_{i,j}^n \nabla_y \alpha_{i,j}^n)}{2h} \\
&\quad - \frac{\Delta t u_y (2\alpha_{i,j}^n - u_x \Delta t \phi_{i,j}^n \nabla_x \alpha_{i,j}^n - u_y \Delta t \phi_{i,j}^n \nabla_y \alpha_{i,j}^n)}{2h} \\
&\quad + \frac{u_x u_y \Delta t}{h} \left( \frac{2\alpha_{i,j}^n - u_x \Delta t \phi_{i,j}^n \nabla_x \alpha_{i,j}^n - u_y \Delta t \phi_{i,j}^n \nabla_y \alpha_{i,j}^n}{2h} \right) \\
&= \alpha_{i,j}^n - \Delta t u_x \frac{2\alpha_{i,j}^n + (h - u_x \Delta t) \phi_{i,j}^n \nabla_x \alpha_{i,j}^n - u_y \Delta t \phi_{i,j}^n \nabla_y \alpha_{i,j}^n}{2h} \\
&\quad - \Delta t u_y \frac{2\alpha_{i,j}^n - u_x \Delta t \phi_{i,j}^n \nabla_x \alpha_{i,j}^n + (h - u_y \Delta t) \phi_{i,j}^n \nabla_y \alpha_{i,j}^n}{2h} \\
&\quad + \frac{\Delta t}{h} \left( \frac{u_x u_y \Delta t (2\alpha_{i,j}^n - u_x \Delta t \phi_{i,j}^n \nabla_x \alpha_{i,j}^n - u_y \Delta t \phi_{i,j}^n \nabla_y \alpha_{i,j}^n)}{2h} \right) \\
&\quad + \frac{\Delta t}{h} \left( \frac{u_x u_y \Delta t ((h - u_x \Delta t) \Delta t \phi_{i,j}^n \nabla_x \alpha_{i,j}^n + (h - u_y \Delta t) \Delta t \phi_{i,j}^n \nabla_y \alpha_{i,j}^n)}{2h} \right) \\
&\quad - \frac{\Delta t}{h} \left( \frac{u_x u_y \Delta t ((h - u_x \Delta t) \Delta t \phi_{i,j}^n \nabla_x \alpha_{i,j}^n + (h - u_y \Delta t) \Delta t \phi_{i,j}^n \nabla_y \alpha_{i,j}^n)}{2h} \right) \\
&= \alpha_{i,j}^n - \frac{\Delta t u_x}{h} \left( 1 - \frac{\Delta t u_y}{h} \right) \left( \alpha_{i,j}^n + \frac{(h - u_x \Delta t) \phi_{i,j}^n \nabla_x \alpha_{i,j}^n}{2} - \frac{u_y \Delta t \phi_{i,j}^n \nabla_y \alpha_{i,j}^n}{2} \right) \\
&\quad - \frac{\Delta t u_y}{h} \left( 1 - \frac{\Delta t u_x}{h} \right) \left( \alpha_{i,j}^n - \frac{u_x \Delta t \phi_{i,j}^n \nabla_x \alpha_{i,j}^n}{2} + \frac{(h - u_y \Delta t) \phi_{i,j}^n \nabla_y \alpha_{i,j}^n}{2} \right) \\
&\quad - \frac{\Delta t u_y \Delta t u_x}{h^2} \left( \alpha_{i,j}^n + \frac{(h - u_x \Delta t) \phi_{i,j}^n \nabla_x \alpha_{i,j}^n}{2} + \frac{(h - u_y \Delta t) \phi_{i,j}^n \nabla_y \alpha_{i,j}^n}{2} \right).
\end{aligned}$$

Il nous reste à calculer les quantités transportées depuis les mailles voisines :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|V_{i,j}|} (h - u_x \Delta t) u_y \Delta t \hat{\alpha}_{i,j-1}^n \left( -\frac{u_x \Delta t}{2}, \frac{h - u_y \Delta t}{2} \right) \\
&= \frac{1}{h^2} (h - u_x \Delta t) u_y \Delta t \left( \alpha_{i,j-1}^n - \frac{u_x \Delta t \phi_{i,j-1}^n \nabla_x \alpha_{i,j-1}^n}{2} + \frac{(h - u_y \Delta t) \phi_{i,j-1}^n \nabla_y \alpha_{i,j-1}^n}{2} \right) \\
&= \frac{u_y \Delta t}{h} \left( 1 - \frac{u_x \Delta t}{h} \right) \left( \alpha_{i,j-1}^n - \frac{u_x \Delta t \phi_{i,j-1}^n \nabla_x \alpha_{i,j-1}^n}{2} + \frac{(h - u_y \Delta t) \phi_{i,j-1}^n \nabla_y \alpha_{i,j-1}^n}{2} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|V_{i,j}|} (h - u_y \Delta t) u_x \Delta t \hat{\alpha}_{i-1,j}^n \left( \left( \frac{(h - u_x \Delta t)}{2}, \frac{-u_y \Delta t}{2} \right) \right) \\
&= \frac{1}{h^2} (h - u_y \Delta t) u_x \Delta t \left( \alpha_{i-1,j}^n + \frac{(h - u_x \Delta t) \phi_{i-1,j}^n \nabla_x \alpha_{i-1,j}^n}{2} - \frac{u_y \Delta t \phi_{i-1,j}^n \nabla_y \alpha_{i-1,j}^n}{2} \right) \\
&= \frac{u_x \Delta t}{h} \left( 1 - \frac{u_y \Delta t}{h} \right) \left( \alpha_{i-1,j}^n + \frac{(h - u_x \Delta t) \phi_{i-1,j}^n \nabla_x \alpha_{i-1,j}^n}{2} - \frac{u_y \Delta t \phi_{i-1,j}^n \nabla_y \alpha_{i-1,j}^n}{2} \right), \\
& \frac{1}{|V_{i,j}|} u_y \Delta t u_x \Delta t \hat{\alpha}_{i-1,j-1}^n \left( -\frac{u_x \Delta t}{2}, -\frac{u_y \Delta t}{2} \right) \\
&= \frac{u_y \Delta t u_x \Delta t}{h^2} \left( \alpha_{i-1,j-1}^n - \frac{u_x \Delta t \phi_{i-1,j-1}^n \nabla_x \alpha_{i-1,j-1}^n}{2} - \frac{u_y \Delta t \phi_{i-1,j-1}^n \nabla_y \alpha_{i-1,j-1}^n}{2} \right).
\end{aligned}$$

En rassemblant toutes les quantités déplacées nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\alpha_{i,j}^n &= \alpha_{i,j}^n - \frac{\Delta t u_x}{h} \left( 1 - \frac{\Delta t u_y}{h} \right) \left( \alpha_{i,j}^n + \frac{(h - u_x \Delta t) \phi_{i,j}^n \nabla_x \alpha_{i,j}^n}{2} - \frac{u_y \Delta t \phi_{i,j}^n \nabla_y \alpha_{i,j}^n}{2} \right) \\
&\quad - \frac{\Delta t u_y}{h} \left( 1 - \frac{\Delta t u_x}{h} \right) \left( \alpha_{i,j}^n - \frac{u_x \Delta t \phi_{i,j}^n \nabla_x \alpha_{i,j}^n}{2} + \frac{(h - u_y \Delta t) \phi_{i,j}^n \nabla_y \alpha_{i,j}^n}{2} \right) \\
&\quad - \frac{\Delta t u_y \Delta t u_x}{h^2} \left( \alpha_{i,j}^n + \frac{(h - u_x \Delta t) \phi_{i,j}^n \nabla_x \alpha_{i,j}^n}{2} + \frac{(h - u_y \Delta t) \phi_{i,j}^n \nabla_y \alpha_{i,j}^n}{2} \right) \\
&\quad + \frac{u_x \Delta t}{h} \left( 1 - \frac{u_y \Delta t}{h} \right) \left( \alpha_{i-1,j}^n + \frac{(h - u_x \Delta t) \phi_{i-1,j}^n \nabla_x \alpha_{i-1,j}^n}{2} - \frac{u_y \Delta t \phi_{i-1,j}^n \nabla_y \alpha_{i-1,j}^n}{2} \right) \\
&\quad + \frac{u_y \Delta t}{h} \left( 1 - \frac{u_x \Delta t}{h} \right) \left( \alpha_{i,j-1}^n - \frac{u_x \Delta t \phi_{i,j-1}^n \nabla_x \alpha_{i,j-1}^n}{2} + \frac{(h - u_y \Delta t) \phi_{i,j-1}^n \nabla_y \alpha_{i,j-1}^n}{2} \right) \\
&\quad + \frac{1}{h^2} u_y \Delta t u_x \Delta t \left( \alpha_{i-1,j-1}^n - \frac{u_x \Delta t \phi_{i-1,j-1}^n \nabla_x \alpha_{i-1,j-1}^n}{2} - \frac{u_y \Delta t \phi_{i-1,j-1}^n \nabla_y \alpha_{i-1,j-1}^n}{2} \right).
\end{aligned}$$

Les flux de la maille  $(i, j - 1)$  vers la maille  $(i + 1, j)$  et de la maille  $(i - 1, j)$  vers la maille

$(i, j + 1)$  à travers la maille  $(i, j)$  sont ajoutés puis retranchés. Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 \alpha_{i,j}^n = & \alpha_{i,j}^n - \frac{\Delta t u_x}{h} \left( 1 - \frac{\Delta t u_y}{h} \right) \left( \alpha_{i,j}^n + \frac{(h - u_x \Delta t) \phi_{i,j}^n \nabla_x \alpha_{i,j}^n}{2} - \frac{u_y \Delta t \phi_{i,j}^n \nabla_y \alpha_{i,j}^n}{2} \right) \\
 & - \frac{\Delta t u_y}{h} \left( 1 - \frac{\Delta t u_x}{h} \right) \left( \alpha_{i,j}^n - \frac{u_x \Delta t \phi_{i,j}^n \nabla_x \alpha_{i,j}^n}{2} + \frac{(h - u_y \Delta t) \phi_{i,j}^n \nabla_y \alpha_{i,j}^n}{2} \right) \\
 & - \frac{\Delta t u_y \Delta t u_x}{h^2} \left( \alpha_{i,j}^n + \frac{(h - u_x \Delta t) \phi_{i,j}^n \nabla_x \alpha_{i,j}^n}{2} + \frac{(h - u_y \Delta t) \phi_{i,j}^n \nabla_y \alpha_{i,j}^n}{2} \right) \\
 & + \frac{u_x \Delta t}{h} \left( 1 - \frac{u_y \Delta t}{h} \right) \left( \alpha_{i-1,j}^n + \frac{(h - u_x \Delta t) \phi_{i-1,j}^n \nabla_x \alpha_{i-1,j}^n}{2} - \frac{u_y \Delta t \phi_{i-1,j}^n \nabla_y \alpha_{i-1,j}^n}{2} \right) \\
 & - \frac{\Delta t u_y \Delta t u_x}{2h^2} \left( \alpha_{i-1,j}^n + \frac{(h - u_x \Delta t) \phi_{i-1,j}^n \nabla_x \alpha_{i-1,j}^n}{2} + \frac{(h - u_y \Delta t) \phi_{i-1,j}^n \nabla_y \alpha_{i-1,j}^n}{2} \right) \\
 & + \frac{\Delta t u_y \Delta t u_x}{2h^2} \left( \alpha_{i-1,j}^n + \frac{(h - u_x \Delta t) \phi_{i-1,j}^n \nabla_x \alpha_{i-1,j}^n}{2} + \frac{(h - u_y \Delta t) \phi_{i-1,j}^n \nabla_y \alpha_{i-1,j}^n}{2} \right) \\
 & + \frac{u_y \Delta t}{h} \left( 1 - \frac{u_x \Delta t}{h} \right) \left( \alpha_{i,j-1}^n - \frac{u_x \Delta t \phi_{i,j-1}^n \nabla_x \alpha_{i,j-1}^n}{2} + \frac{(h - u_y \Delta t) \phi_{i,j-1}^n \nabla_y \alpha_{i,j-1}^n}{2} \right) \\
 & - \frac{\Delta t u_y \Delta t u_x}{2h^2} \left( \alpha_{i,j-1}^n + \frac{(h - u_x \Delta t) \phi_{i,j-1}^n \nabla_x \alpha_{i,j-1}^n}{2} + \frac{(h - u_y \Delta t) \phi_{i,j-1}^n \nabla_y \alpha_{i,j-1}^n}{2} \right) \\
 & + \frac{\Delta t u_y \Delta t u_x}{2h^2} \left( \alpha_{i,j-1}^n + \frac{(h - u_x \Delta t) \phi_{i,j-1}^n \nabla_x \alpha_{i,j-1}^n}{2} + \frac{(h - u_y \Delta t) \phi_{i,j-1}^n \nabla_y \alpha_{i,j-1}^n}{2} \right) \\
 & + \frac{1}{h^2} u_y \Delta t u_x \Delta t \left( \alpha_{i-1,j-1}^n - \frac{u_x \Delta t \phi_{i-1,j-1}^n \nabla_x \alpha_{i-1,j-1}^n}{2} - \frac{u_y \Delta t \phi_{i-1,j-1}^n \nabla_y \alpha_{i-1,j-1}^n}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Nous pouvons en déduire un schéma volumes finis écrit sous la forme conservative décrite par la formule (5.3).

Où les flux sont les suivants :

$$\psi_{i+\frac{1}{2},j}^n = \left\{ \begin{array}{l} u_{x,i+\frac{1}{2},j} \left( \left( 1 - \frac{\Delta t |u_{y,i+\frac{1}{2},j}|}{h} \right) \hat{\alpha}_{i+1,j} \left( \frac{h - \Delta t u_{x,i+\frac{1}{2},j}}{2}, -\frac{\Delta t u_{y,i+\frac{1}{2},j}}{2} \right) \right. \\ \quad + \frac{\Delta t |u_{y,i+\frac{1}{2},j}|}{2h} \hat{\alpha}_{i+1,j} \left( \frac{h - \Delta t u_{x,i+\frac{1}{2},j}}{2}, \frac{h - \Delta t u_{y,i+\frac{1}{2},j}}{2} \right) \\ \quad \left. + \frac{\Delta t |u_{y,i+\frac{1}{2},j}|}{2h} \hat{\alpha}_{i+1,j-1} \left( \frac{h - \Delta t u_{x,i+\frac{1}{2},j}}{2}, \frac{h - \Delta t u_{y,i+\frac{1}{2},j}}{2} \right) \right) \text{ si } u_{x,i+\frac{1}{2},j} < 0 \text{ et } u_{y,i+\frac{1}{2},j} \geq 0, \\ \\ u_{x,i+\frac{1}{2},j} \left( \left( 1 - \frac{\Delta t |u_{y,i+\frac{1}{2},j}|}{h} \right) \hat{\alpha}_{i,j} \left( \frac{h - \Delta t u_{x,i+\frac{1}{2},j}}{2}, -\frac{\Delta t u_{y,i+\frac{1}{2},j}}{2} \right) \right. \\ \quad + \frac{\Delta t |u_{y,i+\frac{1}{2},j}|}{2h} \hat{\alpha}_{i,j} \left( \frac{h - \Delta t u_{x,i+\frac{1}{2},j}}{2}, \frac{h - \Delta t u_{y,i+\frac{1}{2},j}}{2} \right) \\ \quad \left. + \frac{\Delta t |u_{y,i+\frac{1}{2},j}|}{2h} \hat{\alpha}_{i,j-1} \left( \frac{h - \Delta t u_{x,i+\frac{1}{2},j}}{2}, \frac{h - \Delta t u_{y,i+\frac{1}{2},j}}{2} \right) \right) \text{ si } u_{x,i+\frac{1}{2},j} \geq 0 \text{ et } u_{y,i+\frac{1}{2},j} \geq 0, \\ \\ u_{x,i+\frac{1}{2},j} \left( \left( 1 - \frac{\Delta t |u_{y,i+\frac{1}{2},j}|}{h} \right) \hat{\alpha}_{i+1,j} \left( \frac{h - \Delta t u_{x,i+\frac{1}{2},j}}{2}, -\frac{\Delta t u_{y,i+\frac{1}{2},j}}{2} \right) \right. \\ \quad + \frac{\Delta t |u_{y,i+\frac{1}{2},j}|}{2h} \hat{\alpha}_{i+1,j} \left( \frac{h - \Delta t u_{x,i+\frac{1}{2},j}}{2}, -\frac{h - \Delta t u_{y,i+\frac{1}{2},j}}{2} \right) \\ \quad \left. + \frac{\Delta t |u_{y,i+\frac{1}{2},j}|}{2h} \hat{\alpha}_{i+1,j+1} \left( \frac{h - \Delta t u_{x,i+\frac{1}{2},j}}{2}, -\frac{h - \Delta t u_{y,i+\frac{1}{2},j}}{2} \right) \right) \text{ si } u_{x,i+\frac{1}{2},j} \geq 0 \text{ et } u_{y,i+\frac{1}{2},j} \geq 0, \\ \\ u_{x,i+\frac{1}{2},j} \left( \left( 1 - \frac{\Delta t |u_{y,i+\frac{1}{2},j}|}{h} \right) \hat{\alpha}_{i,j} \left( \frac{h - \Delta t u_{x,i+\frac{1}{2},j}}{2}, -\frac{\Delta t u_{y,i+\frac{1}{2},j}}{2} \right) \right. \\ \quad + \frac{\Delta t |u_{y,i+\frac{1}{2},j}|}{2h} \hat{\alpha}_{i,j} \left( \frac{h - \Delta t u_{x,i+\frac{1}{2},j}}{2}, -\frac{h - \Delta t u_{y,i+\frac{1}{2},j}}{2} \right) \\ \quad \left. + \frac{\Delta t |u_{y,i+\frac{1}{2},j}|}{2h} \hat{\alpha}_{i,j+1} \left( \frac{h - \Delta t u_{x,i+\frac{1}{2},j}}{2}, -\frac{h - \Delta t u_{y,i+\frac{1}{2},j}}{2} \right) \right) \text{ si } u_{x,i+\frac{1}{2},j} \geq 0 \text{ et } u_{y,i+\frac{1}{2},j} < 0. \end{array} \right.$$

Et

$$\psi_{i,j+\frac{1}{2}}^n = \left\{ \begin{array}{l} u_{y,i,j+\frac{1}{2}} \left( \left( 1 - \frac{\Delta t |u_{x,i,j+\frac{1}{2}}|}{h} \right) \hat{\alpha}_{i,j+1} \left( -\frac{\Delta t u_{x,i,j+\frac{1}{2}}}{2}, -\frac{h + \Delta t u_{y,i,j+\frac{1}{2}}}{2} \right) \right. \\ \quad + \frac{\Delta t |u_{x,i,j+\frac{1}{2}}|}{2h} \hat{\alpha}_{i,j+1} \left( \frac{h - \Delta t u_{x,i,j+\frac{1}{2}}}{2}, -\frac{h + \Delta t u_{y,i,j+\frac{1}{2}}}{2} \right) \\ \quad \left. + \frac{\Delta t |u_{x,i,j+\frac{1}{2}}|}{2h} \hat{\alpha}_{i-1,j+1} \left( \frac{h - \Delta t u_{x,i,j+\frac{1}{2}}}{2}, -\frac{h + \Delta t u_{y,i,j+\frac{1}{2}}}{2} \right) \right) \text{ si } u_{y,i,j+\frac{1}{2}} < 0 \text{ et } u_{x,i,j+\frac{1}{2}} \geq 0, \\ \\ u_{y,i,j+\frac{1}{2}} \left( \left( 1 - \frac{\Delta t |u_{x,i,j+\frac{1}{2}}|}{h} \right) \hat{\alpha}_{i,j} \left( -\frac{\Delta t u_{x,i,j+\frac{1}{2}}}{2}, \frac{h - \Delta t u_{y,i,j+\frac{1}{2}}}{2} \right) \right. \\ \quad + \frac{\Delta t |u_{x,i,j+\frac{1}{2}}|}{2h} \hat{\alpha}_{i,j} \left( \frac{h - \Delta t u_{x,i,j+\frac{1}{2}}}{2}, \frac{h - \Delta t u_{y,i,j+\frac{1}{2}}}{2} \right) \\ \quad \left. + \frac{\Delta t |u_{x,i,j+\frac{1}{2}}|}{2h} \hat{\alpha}_{i-1,j} \left( \frac{h - \Delta t u_{x,i,j+\frac{1}{2}}}{2}, \frac{h - \Delta t u_{y,i,j+\frac{1}{2}}}{2} \right) \right) \text{ si } u_{y,i,j+\frac{1}{2}} \geq 0 \text{ et } u_{x,i,j+\frac{1}{2}} \geq 0, \\ \\ u_{y,i,j+\frac{1}{2}} \left( \left( 1 - \frac{\Delta t |u_{x,i,j+\frac{1}{2}}|}{h} \right) \hat{\alpha}_{i,j+1} \left( -\frac{\Delta t u_{x,i,j+\frac{1}{2}}}{2}, -\frac{h + \Delta t u_{y,i,j+\frac{1}{2}}}{2} \right) \right. \\ \quad + \frac{\Delta t |u_{x,i,j+\frac{1}{2}}|}{2h} \hat{\alpha}_{i,j+1} \left( \frac{h - \Delta t u_{x,i,j+\frac{1}{2}}}{2}, -\frac{h + \Delta t u_{y,i,j+\frac{1}{2}}}{2} \right) \\ \quad \left. + \frac{\Delta t |u_{x,i,j+\frac{1}{2}}|}{2h} \hat{\alpha}_{i+1,j+1} \left( \frac{h - \Delta t u_{x,i,j+\frac{1}{2}}}{2}, -\frac{h + \Delta t u_{y,i,j+\frac{1}{2}}}{2} \right) \right) \text{ si } u_{y,i,j+\frac{1}{2}} < 0 \text{ et } u_{x,i,j+\frac{1}{2}} < 0, \\ \\ u_{y,i,j+\frac{1}{2}} \left( \left( 1 - \frac{\Delta t |u_{x,i,j+\frac{1}{2}}|}{h} \right) \hat{\alpha}_{i,j} \left( -\frac{\Delta t u_{x,i,j+\frac{1}{2}}}{2}, \frac{h - \Delta t u_{y,i,j+\frac{1}{2}}}{2} \right) \right. \\ \quad + \frac{\Delta t |u_{x,i,j+\frac{1}{2}}|}{2h} \hat{\alpha}_{i,j} \left( -\frac{h + \Delta t u_{x,i,j+\frac{1}{2}}}{2}, \frac{h - \Delta t u_{y,i,j+\frac{1}{2}}}{2} \right) \\ \quad \left. + \frac{\Delta t |u_{x,i,j+\frac{1}{2}}|}{2h} \hat{\alpha}_{i+1,j} \left( -\frac{h + \Delta t u_{x,i,j+\frac{1}{2}}}{2}, \frac{h - \Delta t u_{y,i,j+\frac{1}{2}}}{2} \right) \right) \text{ si } u_{y,i,j+\frac{1}{2}} \geq 0 \text{ et } u_{x,i,j+\frac{1}{2}} < 0. \end{array} \right.$$

Avec  $\hat{\alpha}_{i,j}$  la reconstruction définie dans le chapitre 1 par la formule (1.7).

Les coefficients obtenus sont identiques à ceux présentés dans l'article de Leveque [67]. Cependant, comme la reconstruction est linéaire et vraiment multidimensionnelle, les intégrales peuvent être calculées explicitement. La méthode MLP associée à la remontée des courbes caractéristiques multidimensionnelles nous donne un schéma multidimensionnel en espace et en temps. De plus le processus de limitation de la méthode MLP s'effectuant aux coins des mailles, le principe du maximum est garanti. Il ne peut pas y avoir d'apparition de nouveaux extrema sur les mailles diagonales, comme cela pourrait être le cas en utilisant une reconstruction de pente direction par direction. Il est possible de vérifier

facilement que les valeurs de  $\psi_{i+\frac{1}{2},j}^n$  et  $\psi_{i,j+\frac{1}{2}}^n$  correspondent à la construction au résultat (5.2).

## 5.2.2 Étude qualitative et quantitative des propriétés du schéma d'Intégration temporelle en dimension deux

Commençons par citer une propriété intéressante du schéma d'Intégration temporelle. Le schéma possède la propriété d'être exact avec une condition CFL égale à un, lorsque les vitesses horizontales et verticales sont égales et constantes.

**Propriété 8.** *Pour  $u_x$  et  $u_y$  constants et égaux entre eux sur  $\Omega$ , le schéma est exact pour une condition CFL égale à un. Avec  $CFL = \frac{u_x \Delta t}{h}$*

*Démonstration.* Prenons  $u_x = u_y > 0$ . Si le schéma est exact on doit trouver

$$\alpha_{i,j}^{n+1} = \alpha_{i-1,j-1}^n.$$

$$\text{On a } CFL = \max\left(\frac{u_x \Delta t}{h}, \frac{u_y \Delta t}{h}\right) = 1 \implies \frac{\Delta t u_y}{h} = \frac{\Delta t u_x}{h} = 1.$$

$$\begin{aligned} \implies \alpha_{i,j}^{n+1} &= \alpha_{i,j}^n - \frac{1}{2} (\hat{\alpha}_{i,j}(x,y) + \hat{\alpha}_{i,j-1}(x,y) \\ &\quad - \hat{\alpha}_{i-1,j}(x,y) - \hat{\alpha}_{i-1,j-1}(x,y)) - \frac{1}{2} (\hat{\alpha}_{i,j}(x,y) \\ &\quad + \hat{\alpha}_{i-1,j}(x,y) - \hat{\alpha}_{i,j-1}(x,y) - \hat{\alpha}_{i-1,j-1}(x,y)) \\ &= \hat{\alpha}_{i-1,j-1}(x,y). \end{aligned}$$

Par définition de la reconstruction on a  $\hat{\alpha}_{i-1,j-1}(x,y) = \alpha_{i-1,j-1}^n$

Pour le cas  $u_x = u_y < 0$  on obtient de la même façon  $\alpha_{i,j}^{n+1} = \hat{\alpha}_{i+1,j+1}(x,y) = \alpha_{i+1,j+1}^n$ . □

Nous mettons en œuvre cette propriété dans le cas de l'**Advection diagonale d'un cercle** dans la section suivante, sur la figure 5.1.

Rappelons que le schéma d'Euler, qui n'a aussi qu'une seule étape, fait apparaître des zigzags en raison des dérivées croisées dans l'équation équivalente. Nous souhaitons donc vérifier que dans le schéma d'Intégration temporelle les dérivées croisées s'annulent. Nous vérifions que le schéma est d'ordre deux en temps. Les dérivées croisées d'ordre

deux, responsables des artefacts en zigzag, s'annulent donc. Pour le vérifier nous proposons d'étudier l'équation équivalente du schéma complètement discrétisé. Pour simplifier, nous supposons  $u_x$  et  $u_y$  des réels constants positifs. Nous supposons  $\alpha(x, y, t^n)$  connu en tout point de l'espace ce qui nous permet de nous affranchir des reconstructions de pente.

Nous cherchons l'équation équivalente de :

$$\frac{\alpha(x_i, y_i, t^{n+1}) - \alpha(x_i, y_i, t^n)}{\Delta t} + \frac{\psi_{i+\frac{1}{2},j}^n - \psi_{i-\frac{1}{2},j}^n + \psi_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \psi_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{h} = 0. \quad (5.4)$$

Dans le chapitre 1, nous avons montré l'erreur de la partie temporelle dans (1.4). Il reste à étudier la partie spatiale. Nous supposons la solution exacte connue au temps  $t^n$  en tout point.

On effectue le développement de Taylor de  $\psi_{i+\frac{1}{2},j,t^n}^n$  et  $\psi_{i-\frac{1}{2},j,t^n}^n$  au point  $(x_i, y_j, t^n)$  :

$$\begin{aligned} \alpha\left(x_i + \frac{h}{2} - \frac{\Delta t u_x}{2}, y_j - \frac{\Delta t u_y}{2}, t^n\right) &= \alpha(x_i, y_j, t^n) + \frac{(h - \Delta t u_x)}{2} \partial_x \alpha(x_i, y_j, t^n) \\ &\quad - \frac{\Delta t u_y}{2} \partial_y \alpha(x_i, y_j, t^n) \\ &\quad + \frac{(h - \Delta t u_x)^2}{8} \partial_{xx}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) \\ &\quad + \frac{(\Delta t u_y)^2}{8} \partial_{yy}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) \\ &\quad - \frac{(h - \Delta t u_x)(\Delta t u_y)}{4} \partial_{xy}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) \\ &\quad + o((h - \Delta t u_x)^2 + (\Delta t u_y)^2), \\ \alpha\left(x_i + \frac{h}{2} - \frac{\Delta t u_x}{2}, y_j + \frac{h}{2} - \frac{\Delta t u_y}{2}, t^n\right) &= \alpha(x_i, y_j, t^n) + \frac{(h - \Delta t u_x)}{2} \partial_x \alpha(x_i, y_j, t^n) \\ &\quad + \frac{(h - \Delta t u_y)}{2} \partial_y \alpha(x_i, y_j, t^n) \\ &\quad + \frac{(h - \Delta t u_x)^2}{8} \partial_{xx}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) \\ &\quad + \frac{(h - \Delta t u_y)^2}{8} \partial_{yy}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) \\ &\quad + \frac{(h - \Delta t u_x)(h - \Delta t u_y)}{4} \partial_{xy}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) \\ &\quad + o((h - \Delta t u_x)^2 + (h - \Delta t u_y)^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha \left( x_i + \frac{h}{2} - \frac{\Delta t u_x}{2}, y_{j-1} + \frac{h}{2} - \frac{\Delta t u_y}{2}, t^n \right) &= \alpha(x_i, y_j, t^n) + \frac{(h - \Delta t u_x)}{2} \partial_x \alpha(x_i, y_j, t^n) \\
 &\quad - \frac{(h + \Delta t u_y)}{2} \partial_y \alpha(x_i, y_j, t^n) \\
 &\quad + \frac{(h - \Delta t u_x)^2}{8} \partial_{xx}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) \\
 &\quad + \frac{(h + \Delta t u_y)^2}{8} \partial_{yy}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) \\
 &\quad - \frac{(h - \Delta t u_x)(h + \Delta t u_y)}{4} \partial_{xy}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) \\
 &\quad + o((h - \Delta t u_x)^2 + (h + \Delta t u_y)^2),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha \left( x_{i-1} + \frac{h}{2} - \frac{\Delta t u_x}{2}, y_j - \frac{\Delta t u_y}{2}, t^n \right) &= \alpha(x_i, y_j, t^n) - \frac{(h + \Delta t u_x)}{2} \partial_x \alpha(x_i, y_j, t^n) \\
 &\quad - \frac{\Delta t u_y}{2} \partial_y \alpha(x_i, y_j, t^n) \\
 &\quad + \frac{(h + \Delta t u_x)^2}{8} \partial_{xx}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) \\
 &\quad + \frac{(\Delta t u_y)^2}{8} \partial_{yy}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) \\
 &\quad + \frac{(h + \Delta t u_x) \Delta t u_y}{4} \partial_{xy}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) \\
 &\quad + o((h + \Delta t u_x)^2 + (\Delta t u_y)^2),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha \left( x_{i-1} + \frac{h}{2} - \frac{\Delta t u_x}{2}, y_j + \frac{h}{2} - \frac{\Delta t u_y}{2}, t^n \right) &= \alpha(x_i, y_j, t^n) - \frac{(h + \Delta t u_x)}{2} \partial_x \alpha(x_i, y_j, t^n) \\
 &\quad + \frac{(h - \Delta t u_y)}{2} \partial_y \alpha(x_i, y_j, t^n) \\
 &\quad + \frac{(h + \Delta t u_x)^2}{8} \partial_{xx}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) \\
 &\quad + \frac{(h - \Delta t u_y)^2}{8} \partial_{yy}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) \\
 &\quad - \frac{(h + \Delta t u_x)(h - \Delta t u_y)}{4} \partial_{xy}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) \\
 &\quad + o((h - \Delta t u_x)^2 + (h - \Delta t u_y)^2),
 \end{aligned}$$

CHAPITRE 5. UNE DÉFINITION D'UN SCHÉMA D'ADVECTION  
MULTIDIMENSIONNEL À UNE SEULE ÉTAPE

---

$$\begin{aligned}
 \alpha \left( x_{i-1} + \frac{h}{2} - \frac{\Delta t u_x}{2}, y_{j-1} + \frac{h}{2} - \frac{\Delta t u_y}{2}, t^n \right) &= \alpha(x_i, y_j, t^n) - \frac{(h + \Delta t u_x)}{2} \partial_x \alpha(x_i, y_j, t^n) \\
 &\quad - \frac{(h + \Delta t u_y)}{2} \partial_y \alpha(x_i, y_j, t^n) \\
 &\quad + \frac{(h + \Delta t u_x)^2}{8} \partial_{xx}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) \\
 &\quad + \frac{(h + \Delta t u_y)^2}{8} \partial_{yy}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) \\
 &\quad + \frac{(h + \Delta t u_x)(h + \Delta t u_y)}{4} \partial_{xy}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) \\
 &\quad + o((h + \Delta t u_x)^2 + (h + \Delta t u_y)^2).
 \end{aligned}$$

En injectant les développements limités dans les  $\psi_{i \pm \frac{1}{2}, j}^n$ , nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 \psi_{i+\frac{1}{2}, j}^n - \psi_{i-\frac{1}{2}, j}^n &= u_x \left( h \partial_x \alpha(x_i, y_j, t^n) - \frac{h \Delta t u_x}{2} \partial_{xx}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) + \frac{h \Delta t u_y}{2} \partial_{xy}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) \right) \\
 &\quad + o(h^2 + h \Delta t + (\Delta t)^2).
 \end{aligned}$$

De la même façon nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 \psi_{i, j+\frac{1}{2}}^n - \psi_{i, j-\frac{1}{2}}^n &= u_y \left( h \partial_y \alpha(x_i, y_j, t^n) - \frac{h \Delta t u_y}{2} \partial_{yy}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) + \frac{h \Delta t u_x}{2} \partial_{xy}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) \right) \\
 &\quad + o(h^2 + h \Delta t + (\Delta t)^2).
 \end{aligned}$$

En injectant ces résultats dans l'équation (5.4), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 &\frac{\alpha(x_i, y_i, t^{n+1}) - \alpha(x_i, y_i, t^n)}{\Delta t} + \frac{\psi_{i+\frac{1}{2}, j}^n - \psi_{i-\frac{1}{2}, j}^n + \psi_{i, j+\frac{1}{2}}^n - \psi_{i, j-\frac{1}{2}}^n}{h} \\
 &= \partial_t \alpha(x_i, y_j, t^n) + \partial_x u_x \alpha(x_i, y_j, t^n) + \partial_y u_y \alpha(x_i, y_j, t^n) + \frac{\Delta t u_x^2}{2} \partial_{xx}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) + \frac{\Delta t u_y^2}{2} \partial_{yy}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) \\
 &\quad + \Delta t u_x u_y \partial_{xy} \alpha(x_i, y_j, t^n) - \frac{\Delta t u_x^2}{2} \partial_{xx}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) - \frac{\Delta t u_y^2}{2} \partial_{yy}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) \\
 &\quad - \Delta t u_x u_y \partial_{xy}^2 \alpha(x_i, y_j, t^n) + o\left(h + \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{h}\right) = 0.
 \end{aligned}$$

Ce qui donne l'équation équivalente suivante :

$$\partial_t \alpha(x_i, y_j, t^n) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \alpha(x_i, y_j, t^n)) = o\left(h + \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{h}\right) \quad (5.5)$$

Cette fois les dérivées d'ordre deux se sont annulées, les artefacts en zigzag obtenus

avec la méthode d'Euler dans le chapitre 1 ne devraient pas apparaître. Il est important de rappeler que nous avons supposé la solution connue à  $t^n$ , cela nous permet de nous affranchir de l'approximation spatiale et des reconstructions de pente.

Nous souhaitons comparer les erreurs et les temps de calcul de la méthode d'Intégration temporelle avec d'autres méthodes. Nous la comparons avec la méthode RK2 utilisée dans les chapitres précédents, mais aussi avec une méthode de splitting d'ordre un définie comme ceci :

$$\begin{aligned}\alpha_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} &= \alpha_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{h} \left( \psi_{i+\frac{1}{2},j}^n - \psi_{i-\frac{1}{2},j}^n \right) \\ \alpha_{i,j}^{n+1} &= \alpha_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{h} \left( \psi_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \psi_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right).\end{aligned}\tag{5.6}$$

Sur les tables 5.1, 5.2 et 5.3, nous proposons une comparaison des erreurs entre une méthode MLP+Intégration temporelle, MLP+RK2 et MLP+splitting, sur le cas **Kothe-Rider**. Les erreurs obtenues par la méthode d'Intégration temporelle sont proches de celles obtenues par la méthode RK2. L'ordre de convergence obtenu est aussi de 1.8 en norme  $L_1$  et de 1 en norme  $L_2$ . Au contraire, l'ordre de convergence obtenu par la méthode de splitting est plus faible. L'étude de l'erreur est à mettre en parallèle avec les temps de calculs présentés sur le tableau 5.4. La méthode par Intégration temporelle est 36% plus rapide que la méthode RK2 pour des erreurs similaires à CFL égale, et 22% plus rapide que la méthode de splitting pour une erreur plus faible. De plus, la méthode par Intégration temporelle permet l'utilisation d'une CFL maximum de 1 contrairement aux méthodes de splitting et RK2 qui ne sont plus stables au dessus de 0.5. Comparons donc les résultats les plus rapides obtenus par chaque méthode, la méthode d'Intégration temporelle (à CFL = 0.9) est alors 3.15 fois plus rapide que la méthode RK2 (à CFL = 0.4) et 2.85 fois plus rapide que la méthode de splitting (à CFL = 0.4). Nous avons conservé une sécurité de 0.1 en dessous des CFL maximum de chaque méthode pour des raisons de stabilité.

Les résultats des simulations pour les méthodes d'Intégration temporelle et de splitting sont présentés sur les figures 5.2 à 5.5 dans la section suivante.

TABLE 5.1 – Erreur pour les normes  $L^1$  et  $L^2$  sur le cas **Kothe-Rider** à  $T= 12$  avec une CFL = 0.4 et une méthode MLP+Intégration temporelle.

Norme \ Maillage	$64 \times 64$	$128 \times 128$	$256 \times 256$	$512 \times 512$
$L^1$	0.08	0.032	0.007	0.002
$L^2$	0.19	0.12	0.052	0.025

## CHAPITRE 5. UNE DÉFINITION D'UN SCHÉMA D'ADVECTION MULTIDIMENSIONNEL À UNE SEULE ÉTAPE

---

TABLE 5.2 – Erreurs obtenues en normes  $L_1$  et  $L_2$  sur le cas **Kothe-Rider** à  $T=12$  avec une CFL = 0.4 et une méthode MLP+RK2.

Norme \ Maillage	$64 \times 64$	$128 \times 128$	$256 \times 256$	$512 \times 512$
$L^1$	0.08	0.032	0.007	0.002
$L^2$	0.19	0.11	0.051	0.024

TABLE 5.3 – Erreurs obtenues en normes  $L^1$  et  $L^2$  sur le cas **Kothe-Rider** à  $T= 12$  avec une CFL = 0.4 et une méthode MLP+splitting.

Norme \ Maillage	$64 \times 64$	$128 \times 128$	$256 \times 256$	$512 \times 512$
$L^1$	0.064	0.028	0.011	0.004
$L^2$	0.17	0.12	0.078	0.05

TABLE 5.4 – Temps de calcul en seconde pour le cas **Kothe-Rider** à  $T= 12$  avec un maillage  $512 \times 512$  en fonction de la méthode et de la CFL utilisée.

CFL \ Méthode	Intégration temporelle	Splitting	RK2
0.1	187	228	254
0.2	93	114	127
0.3	62	75	83
0.4	46	57	63
0.5	36	\	\
0.6	31	\	\
0.7	26	\	\
0.8	23	\	\
0.9	20	\	\

### 5.2.3 Extension à trois dimensions d'espace

De la même façon qu'en dimension deux, il est possible d'étendre la méthode en dimension trois en remontant les courbes caractéristiques. Pour simplifier l'étude, nous nous restreignons à des vitesses constantes  $u_x$ ,  $u_y$  et  $u_z$  sur l'ensemble du domaine. Cette

fois-ci nous obtenons l'approximation de  $\alpha(x_i, y_j, z_m, t^{n+1})$  suivante :

$$\begin{aligned}
 & \alpha(x_i, y_j, z_m, t^{n+1}) \\
 & \simeq \frac{1}{|V_{i,j}|} \int_{|V_{i,j}|} \alpha(x, y, z, t^{n+1}) dx dy dz \\
 & = \frac{1}{|V_{i,j}|} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha(x - u_x \Delta t, y - u_y \Delta t, z - u_z \Delta t, t^n) dx dy dz \\
 & \simeq (h - u_x \Delta t) (h - u_y \Delta t) (h - u_z \Delta t) \hat{\alpha}_{i,j,m} \left( \frac{-u_x \Delta t}{2}, \frac{-u_y \Delta t}{2}, \frac{-u_z \Delta t}{2} \right) \\
 & \quad + (h - u_x \Delta t) (h - u_y \Delta t) u_z \Delta t \hat{\alpha}_{i,j,m-1} \left( \frac{-u_x \Delta t}{2}, \frac{-u_y \Delta t}{2}, \frac{h - u_z \Delta t}{2} \right) \\
 & \quad + (h - u_x \Delta t) u_y \Delta t (h - u_z \Delta t) \hat{\alpha}_{i,j-1,m} \left( \frac{-u_x \Delta t}{2}, \frac{h - u_y \Delta t}{2}, \frac{-u_z \Delta t}{2} \right) \\
 & \quad + (h - u_x \Delta t) u_y \Delta t u_z \Delta t \hat{\alpha}_{i,j-1,m-1} \left( \frac{-u_x \Delta t}{2}, \frac{h - u_y \Delta t}{2}, \frac{h - u_z \Delta t}{2} \right) \\
 & \quad + u_x \Delta t (h - u_y \Delta t) (h - u_z \Delta t) \hat{\alpha}_{i-1,j,m} \left( \frac{h - u_x \Delta t}{2}, \frac{-u_y \Delta t}{2}, \frac{-u_z \Delta t}{2} \right) \\
 & \quad + u_x \Delta t u_y \Delta t (h - u_z \Delta t) \hat{\alpha}_{i-1,j-1,m} \left( \frac{h - u_x \Delta t}{2}, \frac{h - u_y \Delta t}{2}, \frac{-u_z \Delta t}{2} \right) \\
 & \quad + u_x \Delta t (h - u_y \Delta t) u_z \Delta t \hat{\alpha}_{i-1,j,m-1} \left( \frac{h - u_x \Delta t}{2}, \frac{-u_y \Delta t}{2}, \frac{h - u_z \Delta t}{2} \right) \\
 & \quad + u_x \Delta t u_y \Delta t u_z \Delta t \hat{\alpha}_{i-1,j-1,m-1} \left( \frac{h - u_x \Delta t}{2}, \frac{h - u_y \Delta t}{2}, \frac{h - u_z \Delta t}{2} \right).
 \end{aligned}$$

On peut en déduire les flux. Pour alléger la rédaction, nous explicitons uniquement les flux dans la direction de  $u_x$ . Les flux en  $y$  et  $z$  se calculent de façon similaire. Nous utilisons aussi les notations  $u_x = u_{x,i+\frac{1}{2},j,m}$ ,  $u_y = u_{y,i+\frac{1}{2},j,m}$  et  $u_z = u_{z,i+\frac{1}{2},j,m}$ . En  $x$  nous avons les flux suivants :

$$\psi_{i+\frac{1}{2},j,m}^n = \left\{ \begin{array}{l} u_x \left( \left(1 - \frac{\Delta t|u_y|}{h}\right) \left(1 - \frac{\Delta t|u_z|}{h}\right) \hat{\alpha}_{i+1,j,m} \left(-\frac{h + \Delta t u_x}{2}, -\frac{\Delta t u_y}{2}, -\frac{\Delta t u_z}{h}\right) \right. \\ + \frac{\Delta t|u_y|\Delta t|u_z|}{3h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j,m} \left(-\frac{h + \Delta t u_x}{2}, \frac{h - \Delta t u_y}{2}, \frac{h - \Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{(h - \Delta t|u_y|)\Delta t|u_z|}{2h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j,m} \left(-\frac{h + \Delta t u_x}{2}, -\frac{\Delta t u_y}{2}, \frac{h - \Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{(h - \Delta t|u_z|)\Delta t|u_y|}{2h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j,m} \left(-\frac{h + \Delta t u_x}{2}, \frac{h - \Delta t u_y}{2}, -\frac{\Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{(h - \Delta t|u_z|)\Delta t|u_y|}{2h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j-1,m} \left(-\frac{h + \Delta t u_x}{2}, \frac{h - \Delta t u_y}{2}, -\frac{\Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{\Delta t|u_z|\Delta t|u_y|}{6h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j-1,m} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, \frac{h - \Delta t u_y}{2}, \frac{h - \Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{\Delta t|u_z|(h - \Delta t|u_y|)}{2h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j,m-1} \left(-\frac{h + \Delta t u_x}{2}, -\frac{\Delta t u_y}{2}, \frac{h - \Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{\Delta t|u_z|\Delta t|u_y|}{6h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j,m-1} \left(-\frac{h + \Delta t u_x}{2}, \frac{h - \Delta t u_y}{2}, \frac{h - \Delta t u_z}{2}\right) \\ \left. + \frac{\Delta t|u_z|\Delta t|u_y|}{3h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j-1,m-1} \left(-\frac{h + \Delta t u_x}{2}, \frac{h - \Delta t u_y}{2}, \frac{h - \Delta t u_z}{2}\right) \right), \\ \text{si } u_x < 0 \quad u_y \geq 0 \quad \text{et } u_z \geq 0, \end{array} \right.$$

$$\psi_{i+\frac{1}{2},j,m}^n = \left\{ \begin{array}{l} u_x \left( \left(1 - \frac{\Delta t|u_y|}{h}\right) \left(1 - \frac{\Delta t|u_z|}{h}\right) \hat{\alpha}_{i+1,j,m} \left(-\frac{h + \Delta t u_x}{2}, -\frac{\Delta t u_y}{2}, -\frac{\Delta t u_z}{h}\right) \right. \\ + \frac{\Delta t|u_y|\Delta t|u_z|}{3h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j,m} \left(-\frac{h + \Delta t u_x}{2}, -\frac{h + \Delta t u_y}{2}, \frac{h - \Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{(h - \Delta t|u_y|)\Delta t|u_z|}{2h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j,m} \left(-\frac{h + \Delta t u_x}{2}, -\frac{\Delta t u_y}{2}, \frac{h - \Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{(h - \Delta t|u_z|)\Delta t|u_y|}{2h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j,m} \left(-\frac{h + \Delta t u_x}{2}, -\frac{h + \Delta t u_y}{2}, -\frac{\Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{(h - \Delta t|u_z|)\Delta t|u_y|}{2h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j+1,m} \left(-\frac{h + \Delta t u_x}{2}, -\frac{h + \Delta t u_y}{2}, -\frac{\Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{\Delta t|u_z|\Delta t|u_y|}{6h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j+1,m} \left(-\frac{h + \Delta t u_x}{2}, -\frac{h + \Delta t u_y}{2}, \frac{h - \Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{\Delta t|u_z|(h - \Delta t|u_y|)}{2h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j,m-1} \left(-\frac{h + \Delta t u_x}{2}, -\frac{\Delta t u_y}{2}, \frac{h - \Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{\Delta t|u_z|\Delta t|u_y|}{6h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j,m-1} \left(-\frac{h + \Delta t u_x}{2}, -\frac{h + \Delta t u_y}{2}, \frac{h - \Delta t u_z}{2}\right) \\ \left. + \frac{\Delta t|u_z|\Delta t|u_y|}{3h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j+1,m-1} \left(-\frac{h + \Delta t u_x}{2}, -\frac{h + \Delta t u_y}{2}, \frac{h - \Delta t u_z}{2}\right) \right), \\ \text{si } u_x < 0 \quad u_y < 0 \quad \text{et } u_z \geq 0, \end{array} \right.$$

$$\psi_{i+\frac{1}{2},j,m}^n = \left\{ \begin{array}{l} u_x \left( \left(1 - \frac{\Delta t|u_y|}{h}\right) \left(1 - \frac{\Delta t|u_z|}{h}\right) \hat{\alpha}_{i+1,j,m} \left(-\frac{h + \Delta tu_x}{2}, -\frac{\Delta tu_y}{2}, -\frac{\Delta tu_z}{h}\right) \right. \\ + \frac{\Delta t|u_y|\Delta t|u_z|}{3h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j,m} \left(-\frac{h + \Delta tu_x}{2}, \frac{h - \Delta tu_y}{2}, -\frac{h + \Delta tu_z}{2}\right) \\ + \frac{(h - \Delta t|u_y|)\Delta t|u_z|}{2h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j,m} \left(-\frac{h + \Delta tu_x}{2}, -\frac{\Delta tu_y}{2}, -\frac{h + \Delta tu_z}{2}\right) \\ + \frac{(h - \Delta t|u_z|)\Delta t|u_y|}{2h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j,m} \left(-\frac{h + \Delta tu_x}{2}, \frac{h - \Delta tu_y}{2}, -\frac{\Delta tu_z}{2}\right) \\ + \frac{(h - \Delta t|u_z|)\Delta t|u_y|}{2h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j-1,m} \left(-\frac{h + \Delta tu_x}{2}, \frac{h - \Delta tu_y}{2}, -\frac{\Delta tu_z}{2}\right) \\ + \frac{\Delta t|u_z|\Delta t|u_y|}{6h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j-1,m} \left(-\frac{h + \Delta tu_x}{2}, \frac{h - \Delta tu_y}{2}, -\frac{h + \Delta tu_z}{2}\right) \\ + \frac{\Delta t|u_z|(h - \Delta t|u_y|)}{2h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j,m+1} \left(-\frac{h + \Delta tu_x}{2}, -\frac{\Delta tu_y}{2}, -\frac{h + \Delta tu_z}{2}\right) \\ + \frac{\Delta t|u_z|\Delta t|u_y|}{6h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j,m+1} \left(-\frac{h + \Delta tu_x}{2}, \frac{h - \Delta tu_y}{2}, -\frac{h + \Delta tu_z}{2}\right) \\ \left. + \frac{\Delta t|u_z|\Delta t|u_y|}{3h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j-1,m+1} \left(-\frac{h + \Delta tu_x}{2}, \frac{h - \Delta tu_y}{2}, -\frac{h + \Delta tu_z}{2}\right) \right), \\ \text{si } u_x < 0 \quad u_y \geq 0 \quad \text{et } u_z < 0, \end{array} \right.$$

$$\psi_{i+\frac{1}{2},j,m}^n = \left\{ \begin{array}{l} u_x \left( \left(1 - \frac{\Delta t|u_y|}{h}\right) \left(1 - \frac{\Delta t|u_z|}{h}\right) \hat{\alpha}_{i+1,j,m} \left(-\frac{h + \Delta tu_x}{2}, -\frac{\Delta tu_y}{2}, -\frac{\Delta tu_z}{h}\right) \right. \\ + \frac{\Delta t|u_y|\Delta t|u_z|}{3h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j,m} \left(-\frac{h + \Delta tu_x}{2}, -\frac{h + \Delta tu_y}{2}, -\frac{h + \Delta tu_z}{2}\right) \\ + \frac{(h - \Delta t|u_y|)\Delta t|u_z|}{2h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j,m} \left(-\frac{h + \Delta tu_x}{2}, -\frac{\Delta tu_y}{2}, -\frac{h + \Delta tu_z}{2}\right) \\ + \frac{(h - \Delta t|u_z|)\Delta t|u_y|}{2h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j,m} \left(-\frac{h + \Delta tu_x}{2}, -\frac{h + \Delta tu_y}{2}, -\frac{\Delta tu_z}{2}\right) \\ + \frac{(h - \Delta t|u_z|)\Delta t|u_y|}{2h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j+1,m} \left(-\frac{h + \Delta tu_x}{2}, -\frac{h + \Delta tu_y}{2}, -\frac{\Delta tu_z}{2}\right) \\ + \frac{\Delta t|u_z|\Delta t|u_y|}{6h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j+1,m} \left(-\frac{h + \Delta tu_x}{2}, -\frac{h + \Delta tu_y}{2}, -\frac{h + \Delta tu_z}{2}\right) \\ + \frac{\Delta t|u_z|(h - \Delta t|u_y|)}{2h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j,m+1} \left(-\frac{h + \Delta tu_x}{2}, -\frac{\Delta tu_y}{2}, -\frac{h + \Delta tu_z}{2}\right) \\ + \frac{\Delta t|u_z|\Delta t|u_y|}{6h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j,m+1} \left(-\frac{h + \Delta tu_x}{2}, -\frac{h + \Delta tu_y}{2}, -\frac{h + \Delta tu_z}{2}\right) \\ \left. + \frac{\Delta t|u_z|\Delta t|u_y|}{3h^2} \hat{\alpha}_{i+1,j+1,m+1} \left(-\frac{h + \Delta tu_x}{2}, -\frac{h + \Delta tu_y}{2}, -\frac{h + \Delta tu_z}{2}\right) \right), \\ \text{si } u_x < 0 \quad u_y < 0 \quad \text{et } u_z < 0, \end{array} \right.$$

$$\psi_{i+\frac{1}{2},j,m}^n = \left\{ \begin{array}{l} u_x \left( \left(1 - \frac{\Delta t|u_y|}{h}\right) \left(1 - \frac{\Delta t u_z}{h}\right) \hat{\alpha}_{i,j,m} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, -\frac{\Delta t u_y}{2}, -\frac{\Delta t|u_z|}{h}\right) \right. \\ + \frac{\Delta t|u_y|\Delta t|u_z|}{3h^2} \hat{\alpha}_{i,j,m} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, \frac{h - \Delta t u_y}{2}, \frac{h - \Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{(h - \Delta t|u_y|)\Delta t|u_z|}{2h^2} \hat{\alpha}_{i,j,m} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, -\frac{\Delta t u_y}{2}, \frac{h - \Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{(h - \Delta t|u_z|)\Delta t|u_y|}{2h^2} \hat{\alpha}_{i,j,m} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, \frac{h - \Delta t u_y}{2}, -\frac{\Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{(h - \Delta t|u_z|)\Delta t|u_y|}{2h^2} \hat{\alpha}_{i,j-1,m} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, \frac{h - \Delta t u_y}{2}, -\frac{\Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{\Delta t|u_z|\Delta t|u_y|}{6h^2} \hat{\alpha}_{i,j-1,m} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, \frac{h - \Delta t u_y}{2}, \frac{h - \Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{\Delta t|u_z|(h - \Delta t|u_y|)}{2h^2} \hat{\alpha}_{i,j,m-1} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, -\frac{\Delta t u_y}{2}, \frac{h - \Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{\Delta t|u_z|\Delta t|u_y|}{6h^2} \hat{\alpha}_{i,j,m-1} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, \frac{h - \Delta t u_y}{2}, \frac{h - \Delta t u_z}{2}\right) \\ \left. + \frac{\Delta t|u_z|\Delta t|u_y|}{3h^2} \hat{\alpha}_{i,j-1,m-1} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, \frac{h - \Delta t u_y}{2}, \frac{h - \Delta t u_z}{2}\right) \right), \\ \text{si } u_x \geq 0 \quad u_y \geq 0 \quad \text{et } u_z \geq 0, \end{array} \right.$$

$$\psi_{i+\frac{1}{2},j,m}^n = \left\{ \begin{array}{l} u_x \left( \left(1 - \frac{\Delta t|u_y|}{h}\right) \left(1 - \frac{\Delta t u_z}{h}\right) \hat{\alpha}_{i,j,m} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, -\frac{\Delta t u_y}{2}, -\frac{\Delta t|u_z|}{h}\right) \right. \\ + \frac{\Delta t|u_y|\Delta t|u_z|}{3h^2} \hat{\alpha}_{i,j,m} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, -\frac{h + \Delta t u_y}{2}, \frac{h - \Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{(h - \Delta t|u_y|)\Delta t|u_z|}{2h^2} \hat{\alpha}_{i,j,m} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, -\frac{\Delta t u_y}{2}, \frac{h - \Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{(h - \Delta t|u_z|)\Delta t|u_y|}{2h^2} \hat{\alpha}_{i,j,m} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, -\frac{h + \Delta t u_y}{2}, -\frac{\Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{(h - \Delta t|u_z|)\Delta t|u_y|}{2h^2} \hat{\alpha}_{i,j+1,m} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, -\frac{h + \Delta t u_y}{2}, -\frac{\Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{\Delta t|u_z|\Delta t|u_y|}{6h^2} \hat{\alpha}_{i,j+1,m} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, -\frac{h + \Delta t u_y}{2}, \frac{h - \Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{\Delta t|u_z|(h - \Delta t|u_y|)}{2h^2} \hat{\alpha}_{i,j,m-1} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, -\frac{\Delta t u_y}{2}, \frac{h - \Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{\Delta t|u_z|\Delta t|u_y|}{6h^2} \hat{\alpha}_{i,j,m-1} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, -\frac{h + \Delta t u_y}{2}, \frac{h - \Delta t u_z}{2}\right) \\ \left. + \frac{\Delta t|u_z|\Delta t|u_y|}{3h^2} \hat{\alpha}_{i,j+1,m-1} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, -\frac{h + \Delta t u_y}{2}, \frac{h - \Delta t u_z}{2}\right) \right), \\ \text{si } u_x \geq 0 \quad u_y < 0 \quad \text{et } u_z \geq 0, \end{array} \right.$$

$$\psi_{i+\frac{1}{2},j,m}^n = \left\{ \begin{array}{l} u_x \left( \left(1 - \frac{\Delta t|u_y|}{h}\right) \left(1 - \frac{\Delta t u_z}{h}\right) \hat{\alpha}_{i,j,m} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, -\frac{\Delta t u_y}{2}, -\frac{\Delta t|u_z|}{h}\right) \right. \\ + \frac{\Delta t|u_y|\Delta t|u_z|}{3h^2} \hat{\alpha}_{i,j,m} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, \frac{h - \Delta t u_y}{2}, -\frac{h + \Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{(h - \Delta t|u_y|)\Delta t|u_z|}{2h^2} \hat{\alpha}_{i,j,m} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, -\frac{\Delta t u_y}{2}, -\frac{h + \Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{(h - \Delta t|u_z|)\Delta t|u_y|}{2h^2} \hat{\alpha}_{i,j,m} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, \frac{h - \Delta t u_y}{2}, -\frac{\Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{(h - \Delta t|u_z|)\Delta t|u_y|}{2h^2} \hat{\alpha}_{i,j-1,m} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, \frac{h - \Delta t u_y}{2}, -\frac{\Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{\Delta t|u_z|\Delta t|u_y|}{6h^2} \hat{\alpha}_{i,j-1,m} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, \frac{h - \Delta t u_y}{2}, -\frac{h + \Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{\Delta t|u_z|(h - \Delta t|u_y|)}{2h^2} \hat{\alpha}_{i,j,m+1} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, -\frac{\Delta t u_y}{2}, -\frac{h + \Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{\Delta t|u_z|\Delta t|u_y|}{6h^2} \hat{\alpha}_{i,j,m+1} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, \frac{h - \Delta t u_y}{2}, -\frac{h + \Delta t u_z}{2}\right) \\ \left. + \frac{\Delta t|u_z|\Delta t|u_y|}{3h^2} \hat{\alpha}_{i,j-1,m+1} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, \frac{h - \Delta t u_y}{2}, -\frac{h + \Delta t u_z}{2}\right) \right), \\ \text{si } u_x \geq 0 \quad u_y \geq 0 \quad \text{et } u_z < 0, \end{array} \right.$$

$$\psi_{i+\frac{1}{2},j,m}^n = \left\{ \begin{array}{l} u_x \left( \left(1 - \frac{\Delta t|u_y|}{h}\right) \left(1 - \frac{\Delta t u_z}{h}\right) \hat{\alpha}_{i,j,m} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, -\frac{\Delta t u_y}{2}, -\frac{\Delta t|u_z|}{h}\right) \right. \\ + \frac{\Delta t|u_y|\Delta t|u_z|}{3h^2} \hat{\alpha}_{i,j,m} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, -\frac{h + \Delta t u_y}{2}, -\frac{h + \Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{(h - \Delta t|u_y|)\Delta t|u_z|}{2h^2} \hat{\alpha}_{i,j,m} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, -\frac{\Delta t u_y}{2}, -\frac{h + \Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{(h - \Delta t|u_z|)\Delta t|u_y|}{2h^2} \hat{\alpha}_{i,j,m} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, -\frac{h + \Delta t u_y}{2}, -\frac{\Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{(h - \Delta t|u_z|)\Delta t|u_y|}{2h^2} \hat{\alpha}_{i,j+1,m} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, -\frac{h + \Delta t u_y}{2}, -\frac{\Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{\Delta t|u_z|\Delta t|u_y|}{6h^2} \hat{\alpha}_{i,j+1,m} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, -\frac{h + \Delta t u_y}{2}, -\frac{h + \Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{\Delta t|u_z|(h - \Delta t|u_y|)}{2h^2} \hat{\alpha}_{i,j,m+1} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, -\frac{\Delta t u_y}{2}, -\frac{h + \Delta t u_z}{2}\right) \\ + \frac{\Delta t|u_z|\Delta t|u_y|}{6h^2} \hat{\alpha}_{i,j,m+1} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, -\frac{h + \Delta t u_y}{2}, -\frac{h + \Delta t u_z}{2}\right) \\ \left. + \frac{\Delta t|u_z|\Delta t|u_y|}{3h^2} \hat{\alpha}_{i,j+1,m+1} \left(\frac{h - \Delta t u_x}{2}, -\frac{h + \Delta t u_y}{2}, -\frac{h + \Delta t u_z}{2}\right) \right), \\ \text{si } u_x \geq 0 \quad u_y < 0 \quad \text{et } u_z < 0. \end{array} \right.$$

### 5.2.4 Résultats numériques à deux et trois dimensions d'espace

Sur la figure 5.1, nous mettons en œuvre le cas de la propriété 8. Les vitesses horizontales et verticales sont identiques et égales à un, nous prenons une CFL=1. Comme les conditions aux limites sont périodiques, la solution est elle aussi périodique de période deux. À  $t=8$ , après 4 périodes nous retrouvons bien la solution initiale du problème sans apparition de diffusion liée à l'approximation numérique.

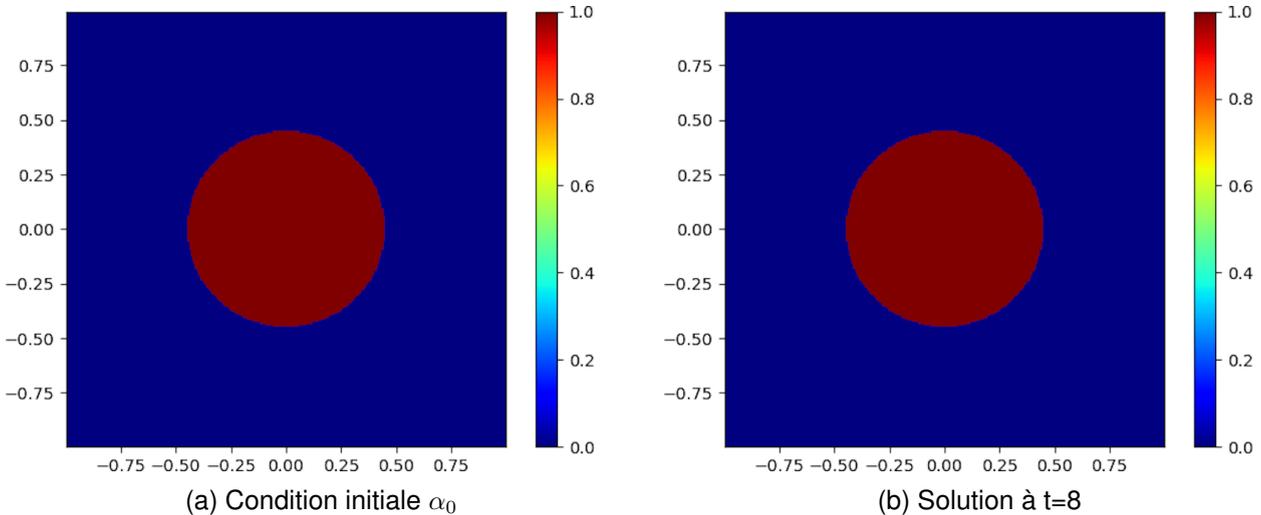


FIGURE 5.1 – **Advection diagonale d'un cercle** à  $t=8$  avec un maillage  $300 \times 300$  et une CFL=1. Résultats obtenus avec la méthode MLP+Intégration temporelle. La fraction volumique est représentée par l'échelle de couleur.

Sur les figures 5.2 à 5.5 sont présentés les résultats pour le cas **Kothe-Rider** avec différents maillages. Sur la première ligne de chaque figure, ce sont les résultats pour la méthode MLP et une méthode de splitting pour le temps. Sur la deuxième ligne de chaque figure, ce sont les résultats pour la méthode MLP et une méthode d'Intégration temporelle pour le temps. Bien que les résultats semblent assez proches pour les deux méthodes, avec une précision de l'interface similaire. On remarque que la méthode de splitting ne respecte pas le principe du maximum. En effet, le fait de séparer les flux en abscisse et en ordonnée donne une divergence numérique différente de 0. La méthode de splitting ne respecte pas la condition d'incompressibilité, l'équation d'advection n'est donc plus équivalente à une équation de conservation. Au contraire, avec la méthode par Intégration temporelle et le maillage le plus fin, on retrouve les bornes maximales que sont 0 et 1 tout au long de la simulation. Contrairement aux résultats obtenus par Leveque dans l'article [68], la combinaison de la reconstruction de pente MLP avec la méthode d'Intégration

temporelle ne crée pas de nouveaux extrema Les résultats obtenus sont proches de ceux obtenus par la méthode MLP+RK2 mais avec des durées de simulations plus courtes.

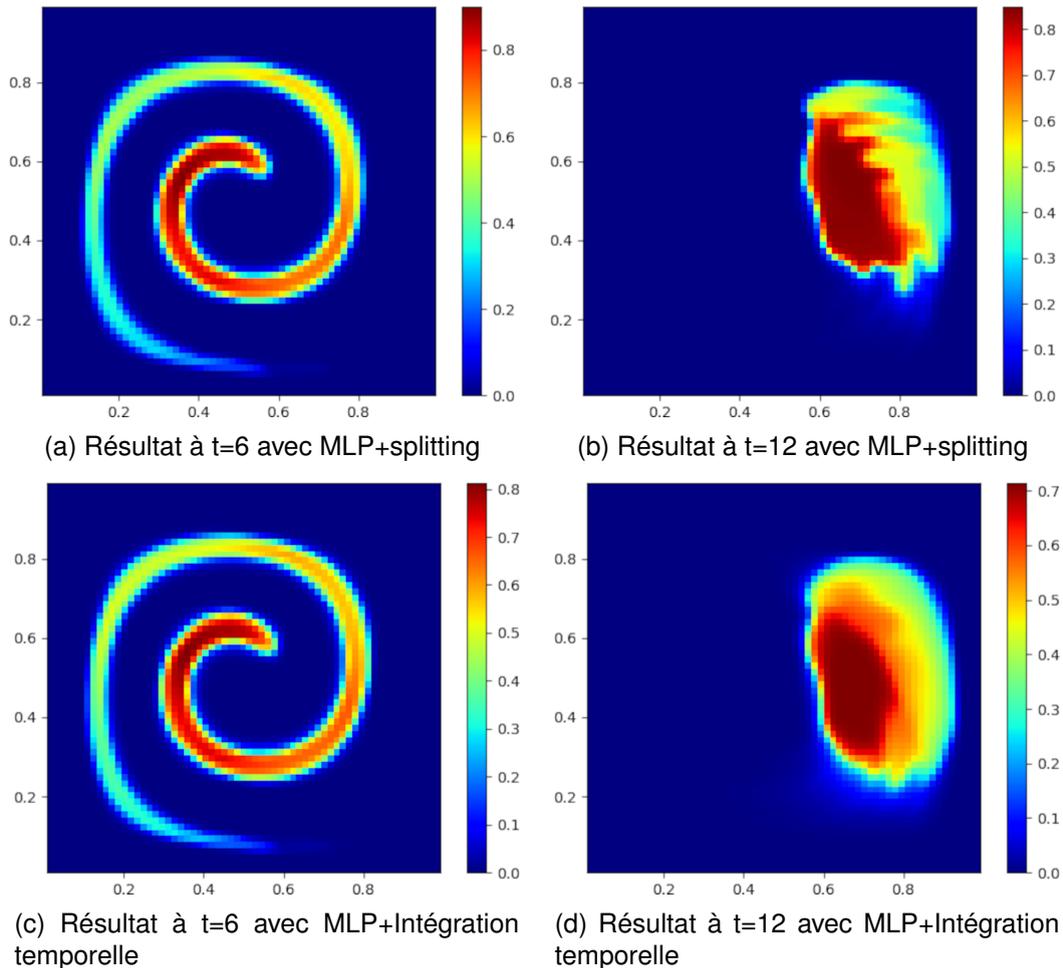


FIGURE 5.2 – Résultats pour le cas **Kothe-Rider** avec un maillage 64x64, une CFL = 0.4 et un temps final T=12. Différentes méthodes sont utilisées. La fraction volumique est représentée par l'échelle de couleur.

Nous validons la méthode en dimension trois sur le cas **Vortex 3D** défini au chapitre 1. Sur la figure 5.6 est représentée l'isovaleur 0.5 de la fraction volumique obtenue aux temps t=0, t=1.5 et t=3. À t=1.5 l'étirement est maximal, on retrouve le même défaut qu'avec la méthode MLP+RK2, à savoir une diffusion importante dans la zone d'étirement. À t=3, la diffusion générée par le processus d'étirement ne permet pas de retrouver exactement la sphère initiale, et donc une crête apparaît le long du plan  $Vect < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$ . Cependant, les résultats sont comparables à ceux obtenus avec la méthode MLP+RK2. À nouveau, nous avons diminué le temps des simulations sans diminuer la qualité des résultats.

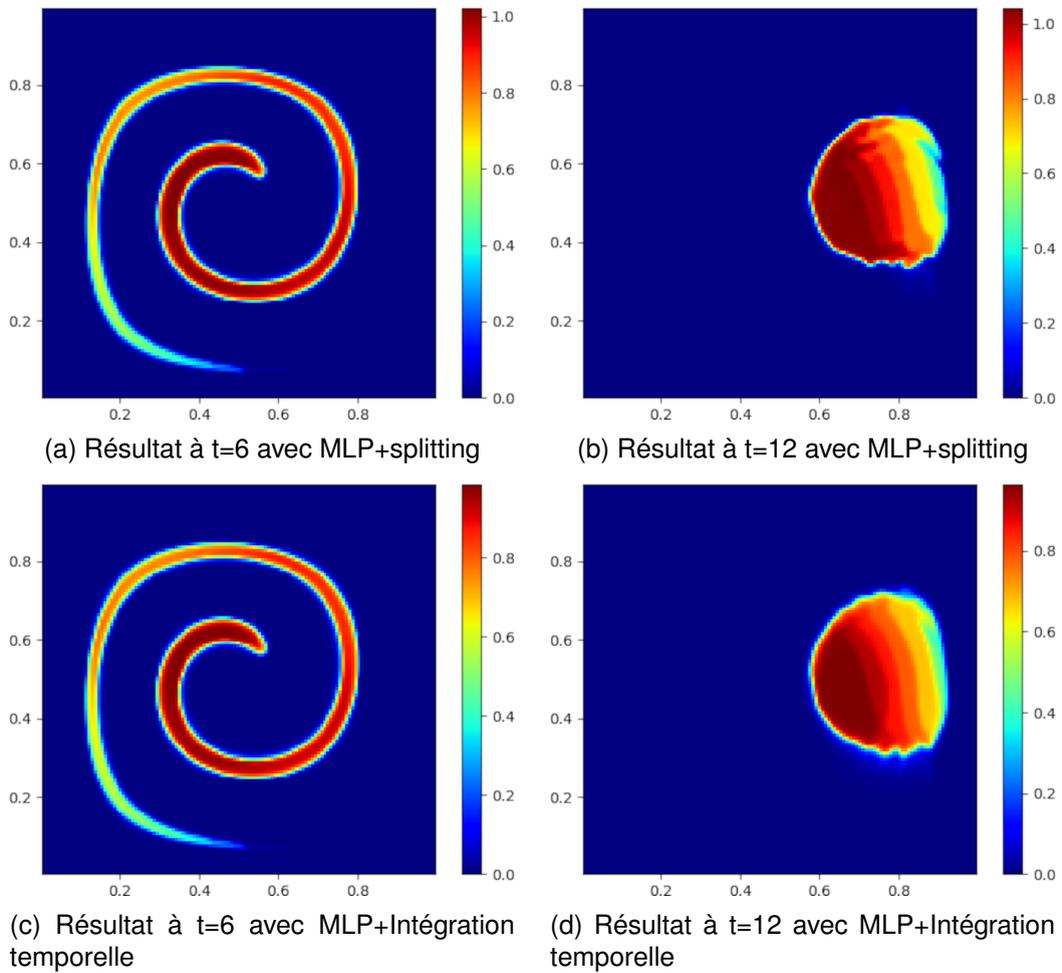


FIGURE 5.3 – Résultats pour le cas **Kothe-Rider** avec un maillage  $128 \times 128$ , une  $CFL = 0.4$  et un temps final  $T=12$ . Différentes méthodes sont utilisées. La fraction volumique est représentée par l'échelle de couleur.

tats. Cette réduction des temps de calcul justifie l'emploi de la méthode MLP+Intégration temporelle.

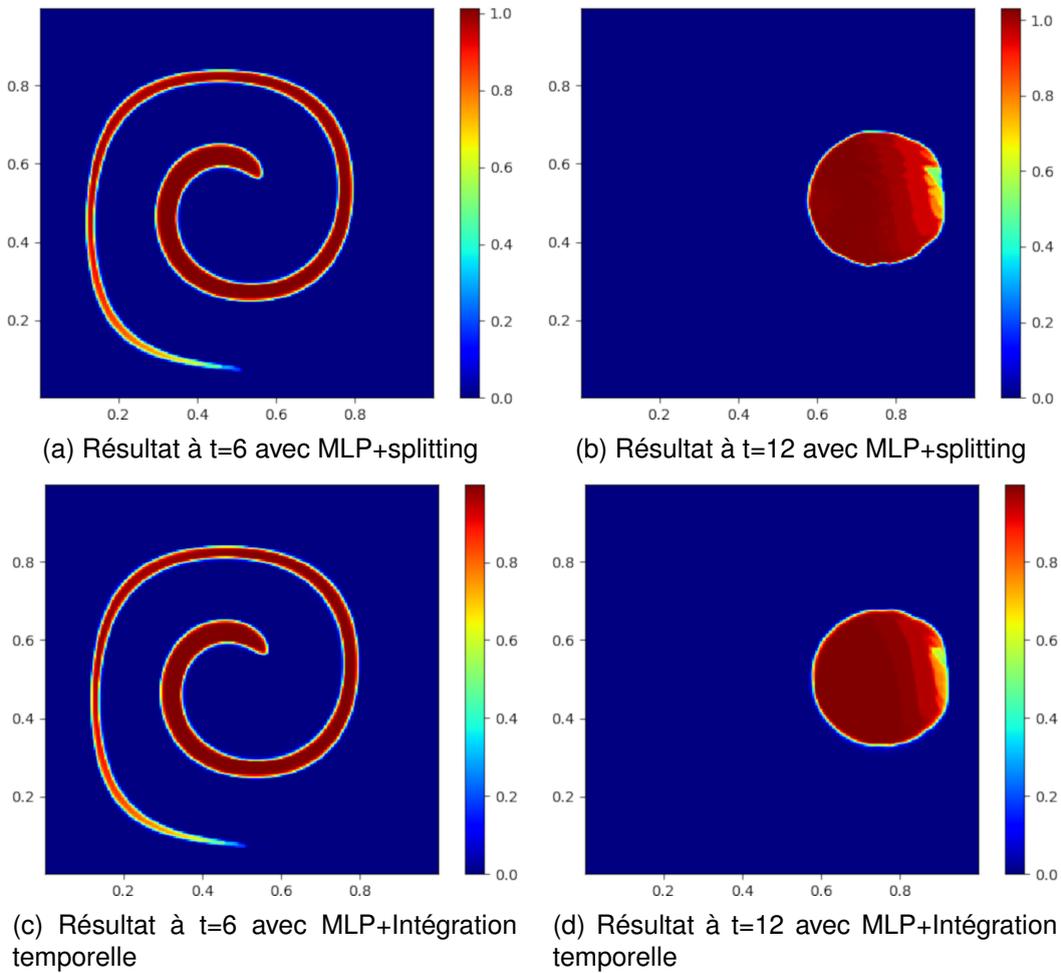


FIGURE 5.4 – Résultats pour le cas **Kothe-Rider** avec un maillage 256x256, une CFL = 0.4 et un temps final T=12. Différentes méthodes sont utilisées. La fraction volumique est représentée par l'échelle de couleur.

### 5.3 Développement d'une méthode de reconstruction affine par morceaux pour les cas multimatériaux

Dans le premier chapitre, nous avons soulevé les difficultés à étendre une méthode valide en présence d'un ou deux matériaux, à une méthode valide pour un nombre arbitraire de matériaux. Le verrou principal réside dans l'invariance de la somme des fractions volumiques. Nous rappelons la condition (1.10) :

$$\sum_{k=1}^L \alpha_{k,i,j} = 1. \quad (1.10)$$

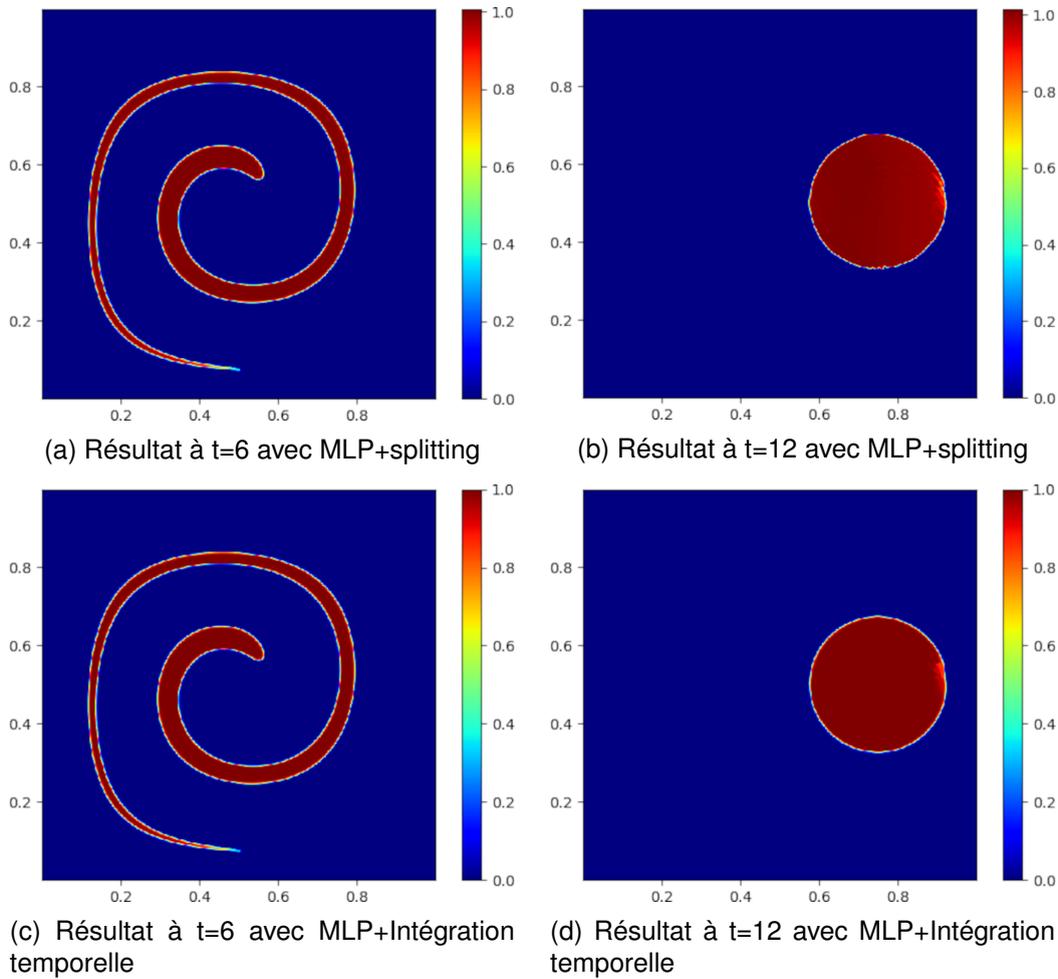


FIGURE 5.5 – Résultats pour le cas **Kothe-Rider** avec un maillage 512x512 , une CFL = 0.4 et un temps final T=12. Différentes méthodes sont utilisées. La fraction volumique est représentée par l'échelle de couleur

Au chapitre un, nous avons développé une méthode par flux renormalisé. Bien qu'elle se soit révélée efficace avec la méthode de Runge-Kutta, elle n'est pas applicable avec la méthode d'Intégration temporelle. En effet, à deux dimensions d'espace la méthode d'Intégration temporelle fait intervenir directement les mailles voisines dans le calcul des flux, alors en utilisant directement la méthode des flux renormalisés, les valeurs obtenues aux coins des mailles ne seraient plus cohérentes entre elles. Pour mieux comprendre, en dimension deux, prenons l'exemple d'un écoulement à vitesse constante et égale à un dans les deux directions. Dans ce cas, la quantité, venant de la maille  $(i, j - 1)$ , transportée au travers de la face  $(i, j - \frac{1}{2})$  doit être la même que la quantité, venant de la maille  $(i, j - 1)$ , transportée au travers de la face  $(i + \frac{1}{2}, j)$ . Cependant, le flux le long de la face  $(i + \frac{1}{2}, j)$  fait intervenir la maille  $(i, j)$  mais aussi la maille  $(i, j - 1)$ ; et le flux le long de la

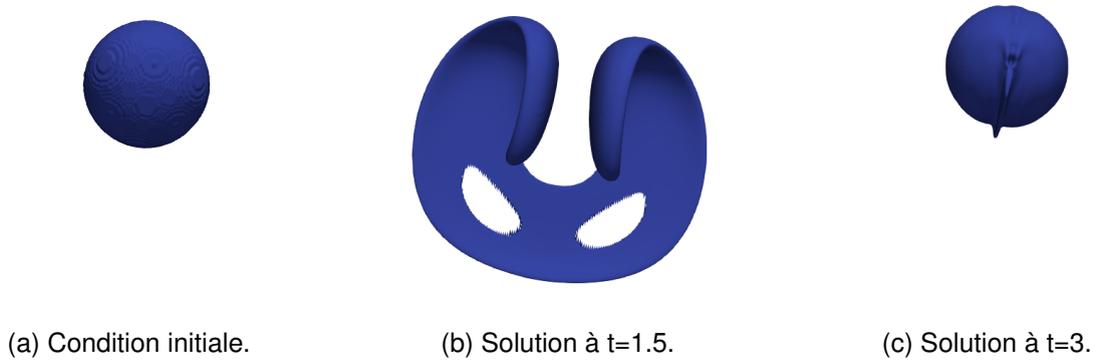


FIGURE 5.6 – Validation du code MLP-UB+Intégration temporelle sur le cas **Vortex 3D**, avec un maillage  $250 \times 250 \times 250$ , une  $CFL = 0.2$  et un temps final  $T=3$ . Représentation de l'isovaleur 0.5 de la fraction volumique

face  $(i, j - \frac{1}{2})$  fait intervenir la maille  $(i, j - 1)$  mais aussi la maille  $(i - 1, j - 1)$ . Alors rien ne garantit que les flux renormalisés soient consistants entre eux. En général, c'est faux et le résultat ne sera pas stable. Pour éviter le manque de consistance entre les flux, nous proposons de généraliser la méthode par flux renormalisés.

### 5.3.1 Définition d'une reconstruction pour les cas multimatériaux

L'idée ici est de renormaliser les  $\alpha_{i,j}$  sur chaque face pour en déduire une nouvelle reconstruction des fractions volumiques sur toute la maille. En dimension deux, nous calculons quatre sous-gradients numériques. Un gradient à gauche nommé  $\nabla_d^h$ , un à droite  $\nabla_g^h$ , un en haut  $\nabla_t^h$  et enfin un en bas  $\nabla_b^h$ . Nous souhaitons que la nouvelle reconstruction soit consistante avec la méthode par flux renormalisés. Alors, nous calculons les quatre sous-gradients pour le matériau  $l$  sur la maille  $(i, j)$  comme ceci :

$$\alpha_{l,i,j} + \frac{h}{2} \nabla_d^h \alpha_{i,j} = \frac{\hat{\alpha} \left( x_{i+\frac{1}{2}}, y_j \right)_{l,i,j}}{\sum_{k=1}^L \hat{\alpha} \left( x_{i+\frac{1}{2}}, y_j \right)_{k,i,j}}$$

$$\Rightarrow \nabla_d^h \alpha_{i,j} = \frac{2}{h} \left( \frac{\hat{\alpha} \left( x_{i+\frac{1}{2}}, y_j \right)_{l,i,j}}{\sum_{k=1}^L \hat{\alpha} \left( x_{i+\frac{1}{2}}, y_j \right)_{k,i,j}} - \alpha_{l,i,j} \right),$$

$$\alpha_{l,i,j} - \frac{h}{2} \nabla_g^h \alpha_{i,j} = \frac{\hat{\alpha} \left( x_{i-\frac{1}{2}}, y_j \right)_{l,i,j}}{\sum_{k=1}^L \hat{\alpha} \left( x_{i-\frac{1}{2}}, y_j \right)_{k,i,j}}$$

$$\Rightarrow \nabla_g^h \alpha_{i,j} = -\frac{2}{h} \left( \frac{\hat{\alpha} \left( x_{i-\frac{1}{2}}, y_j \right)_{l,i,j}}{\sum_{k=1}^L \hat{\alpha} \left( x_{i-\frac{1}{2}}, y_j \right)_{k,i,j}} - \alpha_{l,i,j} \right),$$

$$\alpha_{l,i,j} + \frac{h}{2} \nabla_t^h \alpha_{i,j} = \frac{\hat{\alpha} \left( x_i, y_{j+\frac{1}{2}} \right)_{l,i,j}}{\sum_{k=1}^L \hat{\alpha} \left( x_i, y_{j+\frac{1}{2}} \right)_{k,i,j}}$$

$$\Rightarrow \nabla_t^h \alpha_{i,j} = \frac{2}{h} \left( \frac{\hat{\alpha} \left( x_i, y_{j+\frac{1}{2}} \right)_{l,i,j}}{\sum_{k=1}^L \hat{\alpha} \left( x_i, y_{j+\frac{1}{2}} \right)_{k,i,j}} - \alpha_{l,i,j} \right),$$

$$\alpha_{l,i,j} - \frac{h}{2} \nabla_b^h \alpha_{i,j} = \frac{\hat{\alpha} \left( x_i, y_{j-\frac{1}{2}} \right)_{l,i,j}}{\sum_{k=1}^L \hat{\alpha} \left( x_i, y_{j-\frac{1}{2}} \right)_{k,i,j}}$$

$$\Rightarrow \nabla_b^h \alpha_{i,j} = -\frac{2}{h} \left( \frac{\hat{\alpha} \left( x_i, y_{j-\frac{1}{2}} \right)_{l,i,j}}{\sum_{k=1}^L \hat{\alpha} \left( x_i, y_{j-\frac{1}{2}} \right)_{k,i,j}} - \alpha_{l,i,j} \right),$$

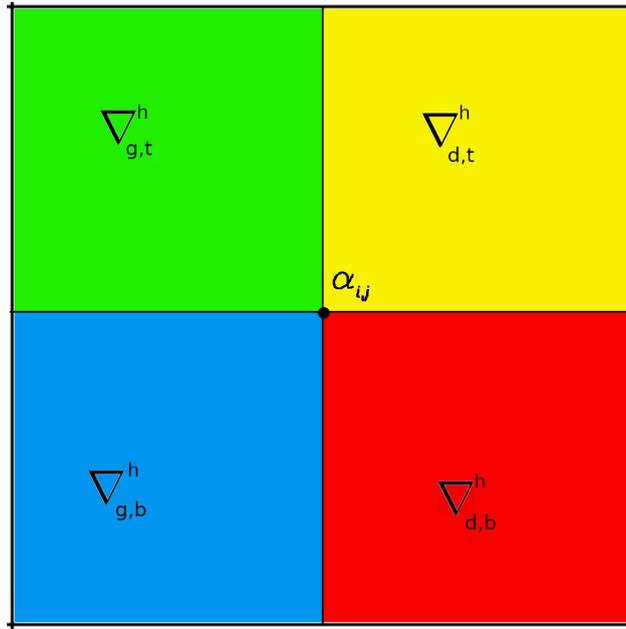


FIGURE 5.7 – Schéma de la répartition des sous gradients pour une reconstruction affine par morceaux. Chaque couleur représente une partie affine de la reconstruction.

Ces sous gradients nous permettent de définir une nouvelle reconstruction pour les fractions volumiques :

$$\hat{\alpha}(x, y, t)_{i,j} = \begin{cases} \alpha(t)_{i,j} + \begin{pmatrix} \nabla_d^h \alpha(t)_{i,j} \\ \nabla_t^h \alpha(t)_{i,j} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x - x_{i,j}) \\ (y - y_{i,j}) \end{pmatrix} & \text{si } (x, y) \in [x_i; +\infty[ \times [y_j; +\infty[, \\ \alpha(t)_{i,j} + \begin{pmatrix} \nabla_g^h \alpha(t)_{i,j} \\ \nabla_t^h \alpha(t)_{i,j} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x - x_{i,j}) \\ (y - y_{i,j}) \end{pmatrix} & \text{si } (x, y) \in ]-\infty; x_i] \times [y_j; +\infty[, \\ \alpha(t)_{i,j} + \begin{pmatrix} \nabla_g^h \alpha(t)_{i,j} \\ \nabla_b^h \alpha(t)_{i,j} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x - x_{i,j}) \\ (y - y_{i,j}) \end{pmatrix} & \text{si } (x, y) \in ]-\infty; x_i] \times ]-\infty; y_j], \\ \alpha(t)_{i,j} + \begin{pmatrix} \nabla_d^h \alpha(t)_{i,j} \\ \nabla_b^h \alpha(t)_{i,j} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (x - x_{i,j}) \\ (y - y_{i,j}) \end{pmatrix} & \text{si } (x, y) \in [x_i; +\infty[ \times ]-\infty; y_j]. \end{cases} \quad (5.7)$$

Sur la figure 5.7 est représentée la répartition des sous gradients dans une maille en dimension deux. Chaque couleur représente une partie affine de la reconstruction. Cette nouvelle reconstruction est consistante avec la méthode par flux renormalisés dans le cas où les flux sont choisis au milieu d'une face. La reconstruction affine par morceaux est continue sur chaque maille, et dans le cas d'un écoulement à un ou deux matériaux elle est équivalente à la reconstruction affine (1.7) vue au chapitre 1.

Nous pouvons vérifier que l'invariant (1.10) est bien conservé à chaque étape.

**Propriété 9.** Si à l'instant  $t^n$  l'invariant  $\sum_{k=1}^L \alpha_{k,i,j}^n = 1$  est vérifié pour tout  $(i, j)$  alors pour tout  $(x, y)$  dans  $\Omega$  on a l'invariant  $\sum_{k=1}^L \hat{\alpha}^n(x, y, t^n)_{k,i,j} = 1$ .

*Démonstration.* Il suffit de vérifier que la somme sur les matériaux de chaque sous gradient est nulle.

$$\begin{aligned} \text{Or } \nabla_g^h \alpha_{i,j} &= -\frac{2}{h} \left( \frac{\hat{\alpha} \left( x_{i-\frac{1}{2}}, y_j \right)_{l,i,j}}{\sum_{k=1}^L \hat{\alpha} \left( x_{i-\frac{1}{2}}, y_j \right)_{k,i,j}} - \alpha_{l,i,j} \right) \\ \implies \sum_{k=1}^L \nabla_g^h \alpha_{i,j} &= -\frac{2}{h} \left( \frac{\sum_{k=1}^L \hat{\alpha} \left( x_{i-\frac{1}{2}}, y_j \right)_{l,i,j}}{\sum_{k=1}^L \hat{\alpha} \left( x_{i-\frac{1}{2}}, y_j \right)_{k,i,j}} - \sum_{k=1}^L \alpha_{l,i,j} \right). \end{aligned}$$

Comme  $\sum_{k=1}^L \alpha_{k,i,j} = 1$  on obtient :

$$\sum_{k=1}^L \nabla_g^h \alpha_{i,j} = -\frac{2}{h} (1 - 1) = 0.$$

C'est vrai pour les quatre sous gradients, on en déduit donc pour tout  $(x_i, y_j)$  dans  $\Omega$  :

$$\sum_{k=1}^L \hat{\alpha} \left( x_i, y_j, t^n \right)_{k,i,j} = 1.$$

□

Contrairement à la méthode par flux renormalisés, la reconstruction affine par morceaux nous permet de garantir que la reconstruction vérifie l'invariant en tout point de l'espace. Cette approche s'avère plus adaptée à la méthode d'Intégration temporelle que la renormalisation des flux. Une autre solution aurait été de renormaliser chaque point d'intérêt. Autrement dit, nous aurions pu renormaliser indépendamment chaque partie des flux et ensuite les additionner. Néanmoins, ce processus se serait avéré bien plus coûteux en temps de calcul, et l'intérêt d'un schéma avec une seule étape de calcul en aurait été diminué.

### 5.3.2 Résultats numériques à deux et trois dimensions d'espace pour les cas multimatériaux

Pour valider la méthode par gradients renormalisés, nous commençons par définir un nouveau cas test. Il s'agit d'un cas à cinq matériaux, quatre matériaux sont placés chacun dans un quart de cercle de rayon  $\sqrt{0.2}$  et de centre  $(0;0)$ , le cinquième matériau remplit le domaine à l'extérieur du cercle. Le champ de vitesse est constant sur l'ensemble du

domaine et égal à un dans chaque direction. Les conditions aux limites sont périodiques, ainsi la solution est périodique, de période deux.

Sur la figure 5.8, sont représentées la solution initiale et les solutions à  $t=8$  avec différentes CFL. On remarque qu'avec une condition CFL égale à un, nous retrouvons la propriété 8 énoncée dans le cas à deux fluides. Dans le cas où la CFL est égale à 0.25, la diffusion apparaît mais elle reste contenue sur un nombre fini de mailles et la position de chaque matériau est respectée.

**Advection 4 quarts**

$\Omega = [-1; 1] \times [-1; 1]$

$$\alpha_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 0.2 \\ & \text{et } x < 0 \text{ et } y < 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}, \quad \alpha_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 0.2 \\ & \text{et } x < 0 \text{ et } y \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\alpha_3 = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 0.2 \\ & \text{et } x \geq 0 \text{ et } y < 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}, \quad \alpha_4 = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 0.2 \\ & \text{et } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\alpha_5 = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 0.2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les conditions aux limites sont périodiques.

Le second cas test que nous mettons en œuvre est le cas **3 cercles K-R** défini au chapitre 1. À  $t=5$ , l'enroulement est maximal, malgré tout on distingue toujours la position des différents matériaux. À  $t=10$ , les matériaux reviennent à leur position initiale. Aucun éclat n'apparaît et la position de chaque matériaux est cohérente avec la position qu'ils occupent à  $t=0$ . Les résultats obtenus sont très proches de ceux obtenus par la méthode MLP+RK2.

Le premier cas test multifluide en trois dimensions mis en œuvre est le cas **Cross 3D**. C'est un cas à quatre fluides, une croix est placée entre deux sphères de rayons différents le tout dans un fluide ambiant. Tous ces fluides sont transportés à une vitesse constante égale à un dans chaque direction.

Sur la figure 5.10, nous utilisons une CFL égale à un, nous pouvons remarquer que la pro-

## CHAPITRE 5. UNE DÉFINITION D'UN SCHÉMA D'ADVECTION MULTIDIMENSIONNEL À UNE SEULE ÉTAPE

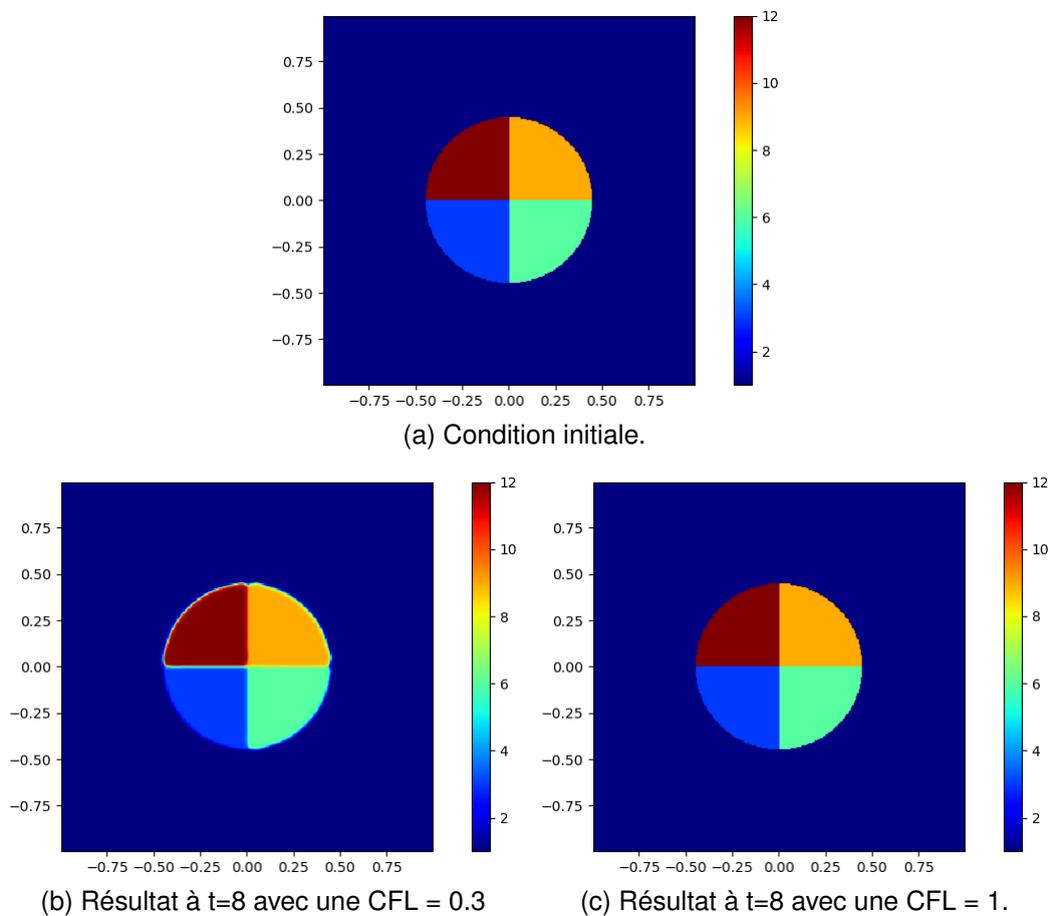


FIGURE 5.8 – **Advection diagonale 4 quarts** pour un maillage  $300 \times 300$  avec différentes CFL. Validation de la méthode MLP-UB+Intégration temporelle par gradient renormalisés.

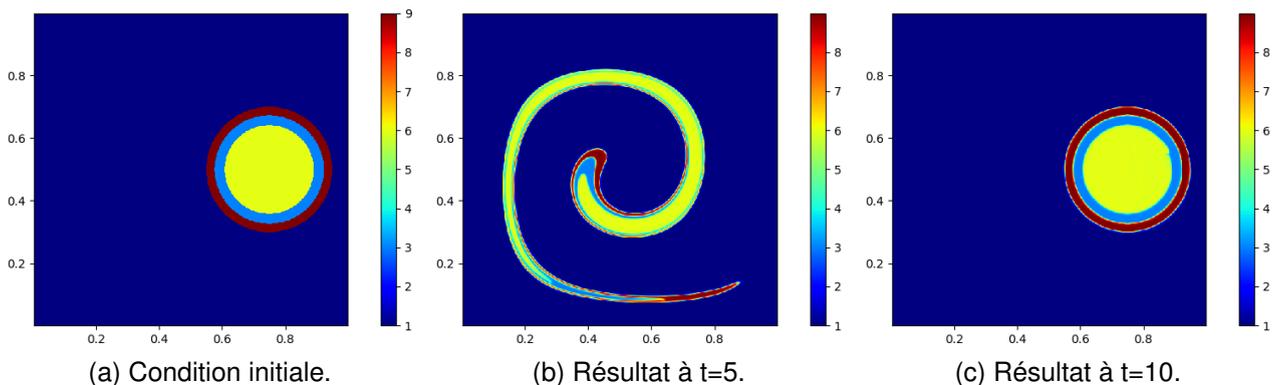
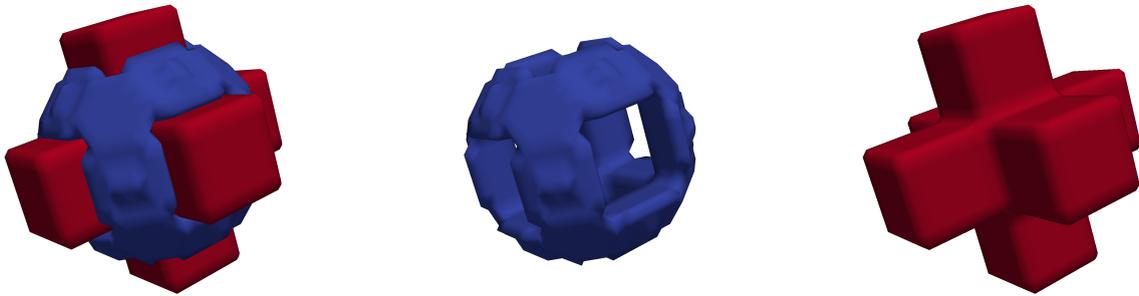


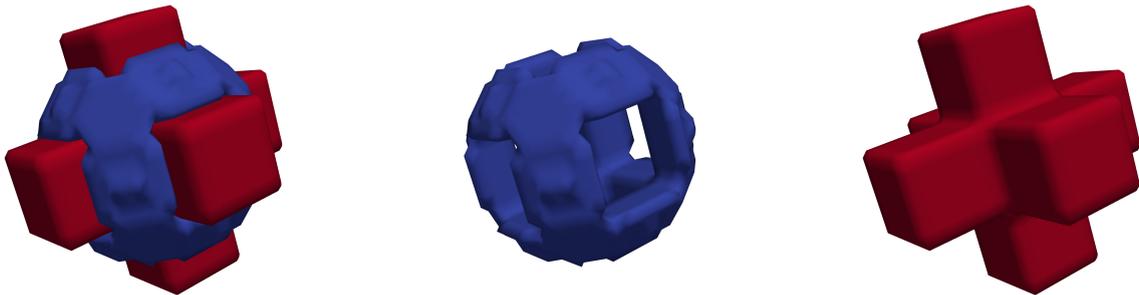
FIGURE 5.9 – Validation de la méthode MLP-UB+Intégration temporelle par gradient renormalisés sur le cas **3 cercles K-R**. Un maillage  $500 \times 500$ , une CFL = 0.25 et un temps final  $T=10$  sont utilisés.

priété 8 est aussi vraie en dimensions trois. Ce résultat confirme la validité des coefficients

utilisés pour les flux de coins. Nous avons volontairement utilisé un maillage grossier dans le but de montrer que la validité de la propriété ne dépend pas de la finesse du maillage. Pour nous assurer de la cohérence des flux en trois dimensions, et de la reconstruction par gradients renormalisés dans un cas plus difficile, nous mettons en œuvre le cas **Kothe-Rider 3D** sur la figure 5.11.



(a) Condition initiale de la croix et de la sphère intérieure. (b) Condition initiale de la sphère intérieure. (c) Condition initiale de la croix.



(d) Résultat à  $t=10$  de la croix et de la sphère intérieure. (e) Résultat à  $t=10$  de la sphère intérieure. (f) Résultat à  $t=10$  de la croix.

FIGURE 5.10 – Validation du code MLP-UB+Intégration temporelle sur **Cross 3D**, avec un maillage  $40 \times 40 \times 40$  et une  $CFL = 1$ . Représentation de l'isovaleur 0.5 pour les matériaux 1 et 2.  $\alpha_1$  en rouge et  $\alpha_2$  en bleu.

Pour clore cette section, nous testons la méthode des gradients renormalisés sur le cas **Kothe 3D**. Sur la figure 5.11, sont représentées les isovaleurs 0.5 des quatre matériaux formant le cercle initiale. À  $t=3$ , l'étirement est maximal mais l'on remarque que les fluides restent connexes. La position des différents fluides peut être déterminée et la simulation reste stable. À  $t=3$ , les fluides retrouvent leur position initiale, cependant on remarque que la diffusion générée lors de l'écoulement entraîne une déformation du cercle. Ce résultat témoigne de la robustesse de l'approche par gradients renormalisés.

## CHAPITRE 5. UNE DÉFINITION D'UN SCHÉMA D'ADVECTION MULTIDIMENSIONNEL À UNE SEULE ÉTAPE

---

La méthode par gradients renormalisés s'est avérée extrêmement robuste et les résultats

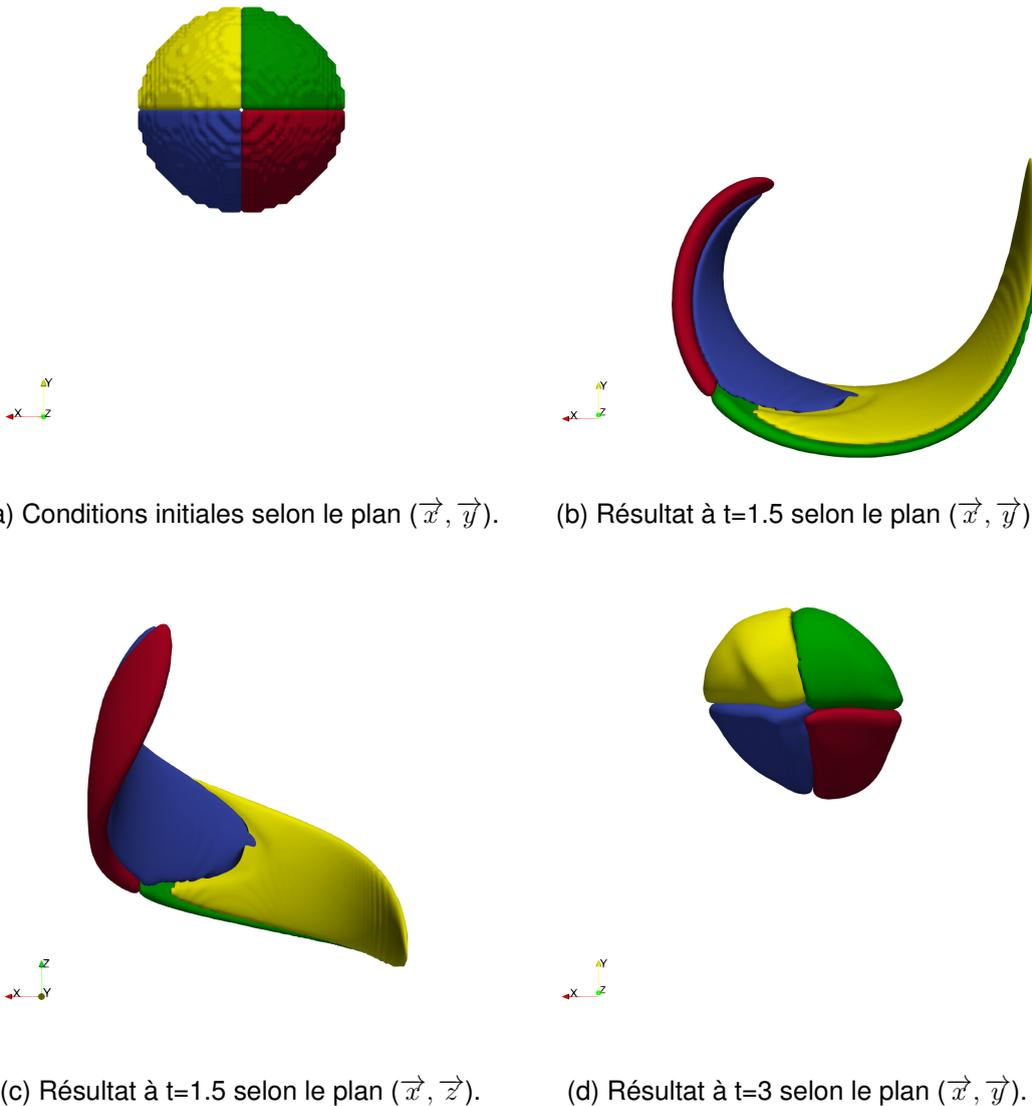


FIGURE 5.11 – Validation du code MLP-UB+Intégration temporelle sur **Kothe-Rider 3D**, avec un maillage  $160 \times 160 \times 320$ , une CFL = 0.2 et un temps final  $T=3$ . Représentation de l'isovaleur 0.5 pour les matériaux de 1 à 4.

obtenus sont comparables à ceux obtenus avec la méthode MLP+RK2 par flux renormalisés. Nous proposons donc de tester cette nouvelle méthode sur des écoulements réels en dimension deux.

## 5.4 Application à un système totalement conservatif pour les écoulements multifluides

Nous rappelons le système à six équations défini dans le chapitre 2. Rappelons aussi l'utilisation d'un équilibre en pression et d'une loi Stiffened-Gas pour clore le système. Nous allons tester la méthode par Intégration temporelle sur le modèle multifluide (3.14) :

$$\begin{cases} \partial_t (\alpha_k \rho_k) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \alpha_k \rho_k) = 0, & k \in \llbracket 1; L \rrbracket, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0, \\ \partial_t (\rho E) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \rho E) + \nabla \cdot \mathbf{u} p = 0, \\ \partial_t \xi + \nabla \cdot (\mathbf{u} \xi) = 0, \\ \partial_t (\alpha_k \xi) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \alpha_k \xi) = 0, & k \in \llbracket 1; L \rrbracket, \end{cases} \quad (3.14)$$

$$p_k = (\gamma_k - 1) \rho_k e_k - \gamma_k \pi_k, \quad k \in \llbracket 1; L \rrbracket,$$

$$p_1 = \dots p_k = \dots = p_L = p \quad k \in \llbracket 1; L \rrbracket,$$

$$\sum_{k \in \llbracket 1; L \rrbracket} \alpha_k = 1.$$

Nous pouvons l'écrire sous la forme vectorielle :  $\partial_t M + \partial_x f(M) = 0$  avec  $M = \begin{pmatrix} \alpha_k \rho_k \\ \mathbf{u} \\ p \\ \xi \\ \alpha_k \end{pmatrix}$ ,

$M \in \Omega$ .  $\Omega = \{ \mathbb{R}^{2N+3} \mid \rho u^2 > 0, \rho e > 0, \alpha > 0, \xi > 0, m_k = \alpha_k \rho_k > 0, p > -\pi \}$  avec  $L$  le nombre de matériaux.

Dans tous les résultats qui vont suivre, il est important de noter qu'il n'y a besoin d'aucune reconstruction sur  $\xi$ . Étant donné qu'il est réinitialisé à chaque pas de temps, et qu'il n'y a qu'une seule étape de calcul par pas de temps (contrairement à RK2), son gradient est nul partout et donc sa reconstruction n'aurait aucun effet.

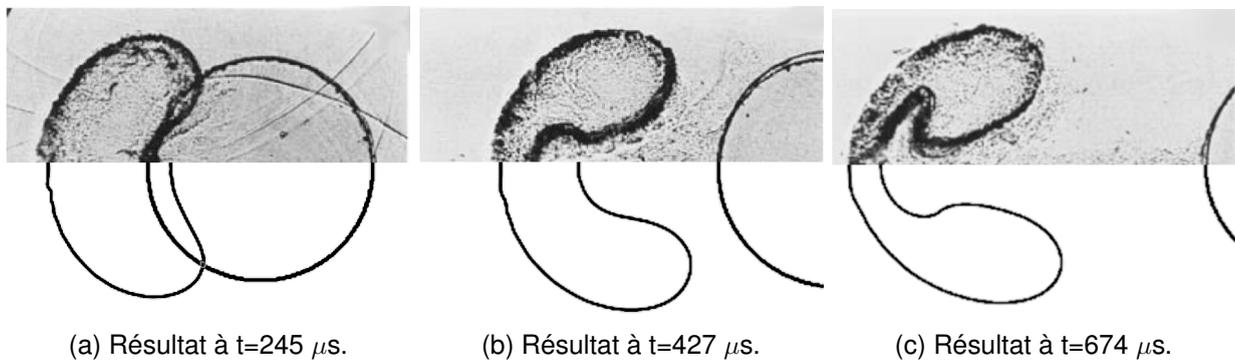
Nous avons aussi choisi de conserver les mêmes CFL que dans le chapitre précédent afin de pouvoir comparer plus précisément les méthodes RK2 et par Intégration temporelle.

### 5.4.1 Comparaison expérimentale et numérique

Comme pour le chapitre précédent, nous allons débiter en comparant les résultats numériques à des résultats expérimentaux. Nous simulons numériquement le cas d'une inter-

action d'une onde de choc avec une bulle d'hélium. Le processus expérimental est détaillé dans l'article de Haas & Sturtevant [47]. Les conditions initiales utilisées sont celles du cas **Choc/bulle hélium**. Sur la figure 5.12 sont représentés les isovaleurs 0.5 de la fraction volumique pour l'hélium en bas, et les résultats expérimentaux en haut. Pour comparer les résultats le plus objectivement possible, nous avons placé les résultats en fonction de la position initiale de la bulle d'hélium.

On peut observer une excellente cohérence entre la position obtenue expérimentalement et celle obtenue numériquement. La bulle se déplace à la même vitesse, seule la déformation intérieure n'est pas tout à fait identique entre les deux résultats. Dans les deux cas, nous n'observons aucune instabilité apparaître à l'interface, comme cela peut être le cas avec certaines méthodes numériques comme la méthode WENO présentée par Coralic & Colonius ou celle présentée par Wang *et al.* [101, 22].



Choix des limiteurs  
 $\alpha_k \rightarrow$  MLP-UB     $p \rightarrow$  MLP-min-mod     $u \rightarrow$  sans reconstruction  
 $\rho_k \rightarrow$  MLP-min-mod     $\xi \rightarrow$  sans reconstruction

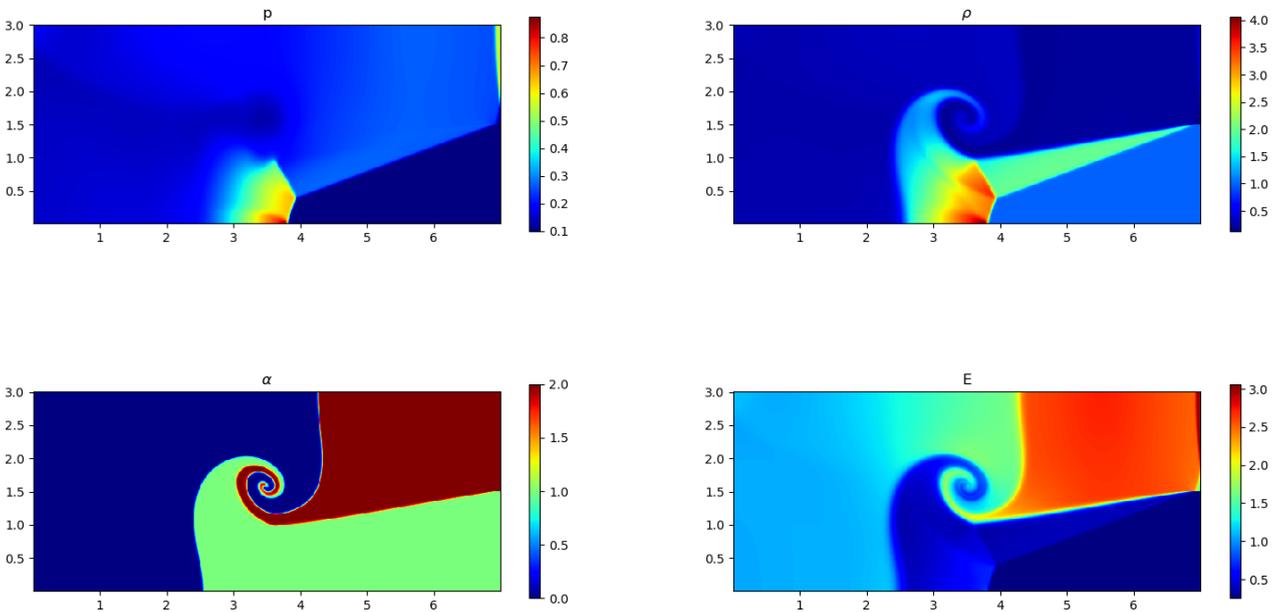
FIGURE 5.12 – Résultat pour le cas **Choc/bulle hélium** pour un maillage 600x267 avec une CFL = 0.18 et une méthode d'Intégration temporelle. Résultat obtenu avec une méthode Lagrange-Flux+Intégration temporelle pour le temps. Les résultats expérimentaux sont en haut et les isovaleurs des fractions volumiques obtenues numériquement sont en bas.

### 5.4.2 Capture d'un vortex

Nous allons maintenant tester la capacité de la méthode à capturer un vortex avec précision. Sur la figure 5.13 nous présentons le cas du **Point triple** défini au chapitre 3. Nous présentons le résultat à  $t=3.5$ , lorsque l'onde de choc, générée par les différences de pression à l'instant initial, arrive au bord droit du domaine. En utilisant la méthode MLP-UB sur la fraction volumique, nous pouvons distinguer avec précision la position des trois fluides. Le vortex s'enroule parfaitement et aucune instabilité n'apparaît aux interfaces.

## CHAPITRE 5. UNE DÉFINITION D'UN SCHÉMA D'ADVECTION MULTIDIMENSIONNEL À UNE SEULE ÉTAPE

Le fait qu'aucune instabilité n'apparaisse dans la zone à trois matériaux prouve la robustesse de l'approche par gradients renormalisés. Dans le but de vérifier qu'aucune in-



### Choix des limiteurs

$$\begin{aligned} \alpha_k &\rightarrow \text{MLP-UB} & p &\rightarrow \text{MLP-min-mod} & u &\rightarrow \text{sans reconstruction} \\ \rho_k &\rightarrow \text{MLP-min-mod} & \xi &\rightarrow \text{sans reconstruction} \end{aligned}$$

FIGURE 5.13 – Résultat du **Point triple** à  $t=3.5$  pour un maillage  $600 \times 258$  avec une  $CFL = 0.18$ . Résultat obtenu avec une méthode Lagrange-Flux+Intégration temporelle pour le temps.

stabilité de Kelvin-Helmoltz n'apparaît aux interfaces, comme cela peut se produire avec certaines méthodes [15, 107, 79], nous proposons sur la figure 5.14 le résultat obtenu pour les fractions volumiques avec un maillage  $2000 \times 858$ . Comme avec la méthode RK2, nous ne retrouvons aucune instabilité aux interfaces malgré la finesse du maillage.

Afin de nous assurer de la capacité de la méthode à capturer des instabilités de type Kelvin-Helmoltz, nous présentons sur les figures 5.15 et 5.16 les résultats pour le cas **Kelvin-Helmoltz**. Les conditions initiales sont données en figure 4.16. Pour la figure 5.15, un maillage  $200 \times 200$  est utilisé et pour la figure 5.16 nous utilisons un maillage  $600 \times 600$ . Les instabilités de Kelvin-Helmoltz sont capturées avec les deux résolutions utilisées. Ce cas test démontre la capacité du schéma à capturer des instabilités et confirme la justesse du résultat pour le **Point-triple**. Nous remarquons que les instabilités apparaissent avec  $\Delta x = 0.005$  sur la figure 5.15, alors que dans le cas du point triple, sur la figure 5.14,  $\Delta x = 0.0035$  mais aucune instabilité n'est présente. Ce résultat nous permet d'affirmer

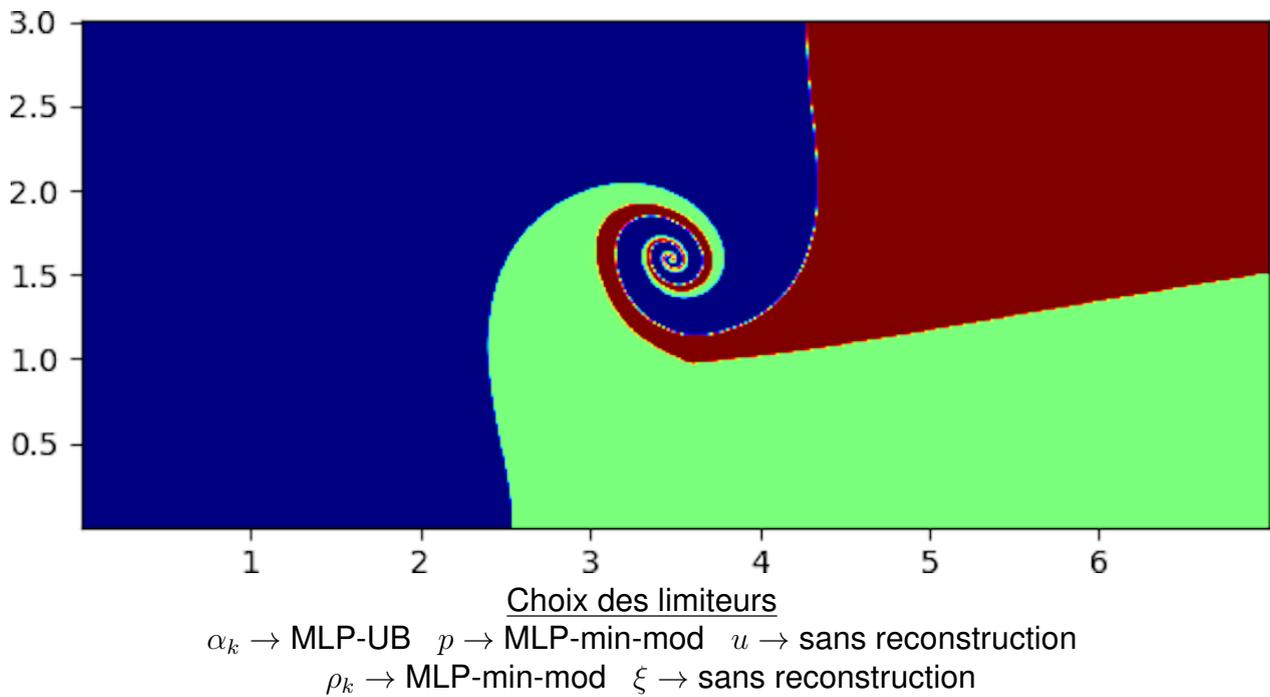
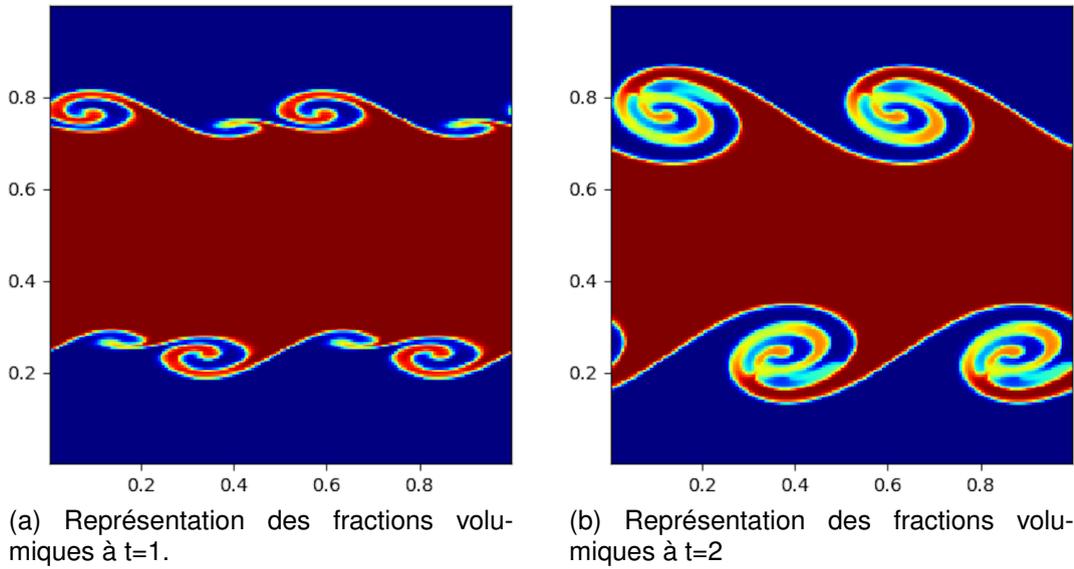


FIGURE 5.14 – Fractions volumiques pour **Point triple** à  $t=3.5$  avec un maillage  $2000 \times 858$  avec une CFL = 0.18. Résultat obtenu avec une méthode Lagrange-Flux+Intégration temporelle pour le temps.

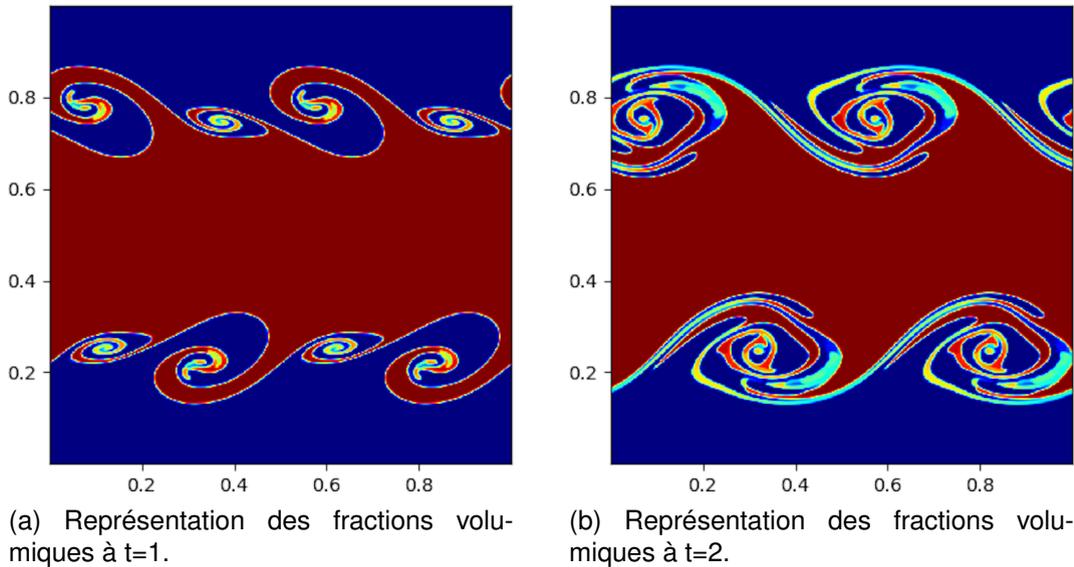
que l'absence d'instabilité de type **Kelvin-Helmoltz** dans le cas du **Point triple** ne vient pas d'un manque de finesse du maillage.



Choix des limiteurs

$\alpha_k \rightarrow$  MLP-UB  $p \rightarrow$  MLP-min-mod  $u \rightarrow$  sans reconstruction  
 $\rho_k \rightarrow$  MLP-min-mod  $\xi \rightarrow$  sans reconstruction

FIGURE 5.15 – Résultat pour le cas **Kelvin-Helmoltz** pour un maillage 200x200 avec une CFL = 0.18. Résultat obtenu avec une méthode Lagrange-Flux+Intégration temporelle pour le temps.



Choix des limiteurs

$\alpha_k \rightarrow$  MLP-UB  $p \rightarrow$  MLP-min-mod  $u \rightarrow$  sans reconstruction  
 $\rho_k \rightarrow$  MLP-min-mod  $\xi \rightarrow$  sans reconstruction

FIGURE 5.16 – Résultat pour le cas **Kelvin-Helmoltz** avec un maillage 600x600 et une CFL = 0.18. Résultat obtenu avec une méthode Lagrange-Flux+Intégration temporelle pour le temps.

## 5.5 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons développé une méthode multidimensionnelle à une seule étape. Cette méthode s'est avérée particulièrement bien adaptée à l'approche MLP, qui nous a permis de calculer de façon exacte les intégrales nécessaires au développement du schéma. La méthode d'Intégration temporelle permet aussi de retrouver la solution exacte dans certaines conditions.

Les résultats obtenus par l'approche d'Intégration temporelle se sont avérés très proche de ceux que nous avons obtenus jusqu'ici avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre deux. Cependant, l'utilisation de la méthode d'Intégration temporelle ne nécessite qu'une seule étape de calcul ce qui nous a permis d'accélérer le code de calcul de l'ordre de 35%. Combiné à ce gain, la possibilité d'utiliser une CFL moins restrictive, nous obtenons une amélioration du temps de calcul d'un facteur 3.15 par rapport à MLP+RK2.

Nous avons ensuite généralisé la méthode des flux renormalisés, défini au chapitre 1, afin de la rendre applicable à la méthode d'Intégration temporelle. Étant donné la robustesse dont elle a fait preuve, nous espérons que cette généralisation permettra une application à un plus grand nombre de schéma.

Enfin, nous avons utilisé la méthode d'Intégration temporelle avec un schéma Lagrange-Flux pour simuler des écoulements de fluides non miscibles. Les résultats obtenus sont satisfaisants et encore une fois très proches de ceux obtenus par la méthode MLP+RK2. Pour conclure, l'emploi d'une méthode de calcul plus rapide nous semble important dans le cadre de la capture d'interface raide. En effet, améliorer les performances de calcul permet d'utiliser des maillages plus fins, pour un temps de calcul égal. Il est ainsi possible d'obtenir de meilleurs résultats sans améliorer l'ordre du schéma, ni la durée des simulations.

# Conclusion et perspectives

## Conclusion

Dans ce manuscrit, nous avons mis en place un ensemble d'outils permettant la simulation numérique de fluides compressibles, non miscibles. Cette thèse a pour objectif le développement d'une méthode numérique à la fois précise géométriquement, stable numériquement et convergente. Nous résumons les principales contributions ci-dessous :

- La principale difficulté dans ces écoulements réside dans la capture des interfaces. Nous avons donc mis au point une méthode de capture d'interfaces multidimensionnelle applicable à un nombre arbitraire de fluides ou de matériaux. Pour ce faire, nous avons développé une méthode de reconstruction algébrique à partir d'un gradient multidimensionnel et du critère MLP (Multidimensional Limiting Process). La stratégie de reconstruction MLP+RK2 nous a permis de corriger les défauts des reconstructions algébriques direction par direction. Cette stratégie a été étendue à un nombre arbitraire de fluides, ou matériaux, tout en conservant l'invariant (1.10) sur la somme des fractions volumiques. L'extension multimatériaux de MLP+RK2 a donné des résultats sur un large choix de cas test, en dimension deux et trois. La méthode numérique conserve l'invariant sans imposer d'ordre dans le traitement des matériaux, ce qui permet d'obtenir une excellente reproductibilité.
- La stratégie MLP+RK2 a ensuite été appliquée à un nouveau modèle conservatif pour les fluides non miscibles. L'originalité de ce nouveau modèle repose dans l'introduction d'une variable annexe, représentative d'un facteur de compressibilité. Cette variable étant conservative, elle nous a permis de définir un système de transport conservatif dans le cadre compressible. Ce système de transport nous a alors permis de travailler avec un modèle totalement conservatif. Le caractère conservatif d'un modèle nous apparaît essentiel pour la simulation numérique de phénomènes complexes. En effet, la propriété de conservativité est un élément important dans l'analyse de la convergence du schéma numérique vers une solution

physique. L'emploi d'une méthode conservative semble alors indispensable lorsque l'on souhaite améliorer la précision des résultats.

- Les systèmes conservatifs sont connus pour générer des oscillations parasites aux interfaces. L'utilisation de ce nouveau modèle nous a conduit à un ensemble de propriétés de compatibilité sur les reconstructions algébriques. Tout d'abord, nous avons démontré un théorème de compatibilité sur l'énergie. Celui-ci nous assure la conservation des invariants de Riemann : pression et vitesse à l'interface. Ce résultat apparaît d'une importance capitale dans la simulation des écoulements de fluides non miscibles. Il nous assure également la compatibilité de l'équation de conservation d'énergie avec le transport des fractions volumiques. À notre connaissance, aucun résultat similaire n'a été démontré dans un cadre totalement conservatif. Par la suite, nous avons mis en évidence les difficultés de compatibilité entre les différentes reconstructions. Une condition de stabilité de type CFL a été démontrée pour les produits de reconstruction algébrique, et un ensemble de reconstructions stables et compatibles a été proposé. Les résultats obtenus sont en accord avec la littérature et la méthode a fait preuve de robustesse, même dans les cas les plus complexes.
- Pour terminer, nous avons souhaité améliorer les performances de calcul de la méthode. Nous avons alors proposé une méthode à un seul pas de temps adaptée à la capture d'interface. Les résultats obtenus, avec la méthode à un seul pas de temps, sont similaires aux résultats obtenus avec la stratégie MLP+RK2. Cependant, le temps de calcul a pu être divisé par un facteur trois. Diminuer les temps de calculs, sans amoindrir la qualité des résultats, permet de travailler sur des maillages plus fins sans allonger la durée des simulations. De cette manière, la qualité des résultats est améliorée et les interfaces apparaissent plus précises. L'amélioration de la vitesse de calcul peut aussi permettre de diminuer les coûts énergétiques liés à l'utilisation de supers-calculateurs. Pour un même maillage, les temps de calcul sont donc réduits sans perdre la précision des résultats.

En résumé, nous avons développé une stratégie de reconstruction permettant de simuler numériquement les écoulements de fluides non miscibles. Les résultats obtenus ont montré une bonne précision géométrique des interfaces. La compatibilité des reconstructions associée à une méthode à un seul pas de temps nous a permis d'obtenir des résultats sans instabilités parasites, et ce malgré l'utilisation de maillages très fins.

### Perspectives

Pour la suite des travaux, deux axes sont envisagés.

Le premier a toujours pour objectif l'amélioration des temps de calcul. Cette fois par l'adaptation des techniques développées dans ce manuscrit, à des architectures de calculs plus performantes. En effet, dans ce manuscrit, nous nous sommes restreints à l'utilisation de CPU. Or, lorsqu'un grand nombre d'opérations similaires est effectué à la suite, les GPU se révèlent plus efficaces. Il serait alors intéressant d'appliquer l'ensemble des techniques développées dans ce manuscrit sur une architecture GPU afin de comparer le gain de temps obtenu. La comparaison des résultats pourrait aussi être effectuée avec d'autres méthodes de capture d'interface, comme les méthodes de reconstructions géométriques. Compte tenu de l'évolution des architectures de calculs, avec l'arrivée des architectures hybride CPU/GPU, tel que le NVIDIA Grace Hopper Superchip, il nous apparaît important de déterminer le type de méthode le plus adapté à l'architecture choisie. Des méthodes de parallélisation adaptées aux méthodes de volumes finis sur GPU sont proposées dans les articles [28, 104] et pourront servir de base de travail pour les futurs développements. Ensuite, nous envisageons d'appliquer les méthodes développées dans ce manuscrit à des modèles physiques plus complexes. Dans les contextes industriels présentés en introduction, les phénomènes de changement de phase sont fréquents. Il apparaît donc essentiel d'étudier le comportement des outils développés lors d'un changement de phase. Dans la littérature il existe des modèles permettant d'étudier les changements de phase, nous pouvons citer l'article de Bernard *et al.* [12] où les auteurs proposent une loi Stiffened-Gas adaptative pour les écoulements dans les centrales nucléaires ; ou encore celui de Rodio et Abgrall [85], dans lequel le changement de phase est appliqué au modèle à cinq équations (proche du modèle développé dans ce manuscrit) avec une équation d'état Stiffened-Gas.

En poursuivant ces perspectives, nous espérons étendre l'impact de nos travaux et contribuer à l'amélioration des simulations numériques dans des domaines variés.

# Bibliographie

- [1] Présentation d'un "bilan et perspectives" sur la r&d relative aux accidents graves susceptibles de survenir dans les réacteurs à eau pressurisée. Technical report, IRSN, CEA, EDF, 2007.
- [2] Rémi Abgrall. An extension of Roe's upwind scheme to algebraic equilibrium real gas models. *Computers & Fluids*, 19(2) :171–182, January 1991.
- [3] Rémi Abgrall. How to Prevent Pressure Oscillations in Multicomponent Flow Calculations : A Quasi Conservative Approach. *Journal of Computational Physics*, 125(1) :150–160, April 1996.
- [4] Rémi Abgrall and Smadar Karni. Computations of Compressible Multifluids. *Journal of Computational Physics*, 169(2) :594–623, May 2001.
- [5] Hyung Taek Ahn and Mikhail Shashkov. Multi-material interface reconstruction on generalized polyhedral meshes. *Journal of Computational Physics*, 226(2) :2096–2132, October 2007.
- [6] Grégoire Allaire, Sébastien Clerc, and Samuel Kokh. A Five-Equation Model for the Simulation of Interfaces between Compressible Fluids. *Journal of Computational Physics*, 181(2) :577–616, September 2002.
- [7] Matthieu Ancellin, Bruno Després, and Stéphane Jaouen. Extension of generic two-component VOF interface advection schemes to an arbitrary number of components. *Journal of Computational Physics*, 473 :111721, January 2023.
- [8] Anirudh Asuri Mukundan, Thibaut Ménard, Jorge César Brändle De Motta, and Alain Berlemont. A 3D Moment of Fluid method for simulating complex turbulent multi-phase flows. *Computers & Fluids*, 198 :104364, February 2020.

- [9] E. Aulisa, S. Manservigi, R. Scardovelli, and S. Zaleski. Interface reconstruction with least-squares fit and split advection in three-dimensional Cartesian geometry. *Journal of Computational Physics*, 225(2) :2301–2319, August 2007.
- [10] Mathieu Bachmann, Philippe Helluy, Jonathan Jung, Hélène Mathis, and Siegfried Müller. Random sampling remap for compressible two-phase flows. *Computers & Fluids*, 86 :275–283, November 2013.
- [11] David J. Benson. Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 99(2-3) :235–394, September 1992.
- [12] Manuel Bernard, Stéphane Dellacherie, Gloria Faccanoni, Bérénice Grec, and Yohan Penel. Study of a low Mach nuclear core model for two-phase flows with phase transition I : stiffened gas law. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 48(6) :1639–1679, November 2014.
- [13] Aude Bernard-Champmartin and Florian De Vuyst. A low diffusive Lagrange-remap scheme for the simulation of violent air–water free-surface flows. *Journal of Computational Physics*, 274 :19–49, October 2014.
- [14] Christophe Berthon. Stability of the MUSCL Schemes for the Euler Equations. *Communications in Mathematical Sciences*, 3(2) :133–157, 2005.
- [15] Marie Billaud Friess and Samuel Kokh. Simulation of sharp interface multi-material flows involving an arbitrary number of components through an extended five-equation model. *Journal of Computational Physics*, 273 :488–519, September 2014.
- [16] Victor Boniou, Thomas Schmitt, and Aymeric Vié. Comparison of interface capturing methods for the simulation of two-phase flow in a unified low-Mach framework. *International Journal of Multiphase Flow*, 149 :103957, April 2022.
- [17] Jay P Boris and David L Book. Flux-corrected transport. I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works. *Journal of Computational Physics*, 11(1) :38–69, January 1973.
- [18] F. Bouchut, Ch. Bourdarias, and B. Perthame. A MUSCL Method Satisfying all the Numerical Entropy Inequalities. *Mathematics of Computation*, 65(216) :1439–1461, 1996. Publisher : American Mathematical Society.

- [19] Jérôme Breil, Thibault Harribey, Pierre-Henri Maire, and Mikhail Shashkov. A multi-material ReALE method with MOF interface reconstruction. *Computers & Fluids*, 83 :115–125, August 2013.
- [20] Phillip Colella. Multidimensional upwind methods for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 87(1) :171–200, March 1990.
- [21] Raphaël Comminal and Jon Spangenberg. Three-dimensional cellwise conservative unsplit geometric VOF schemes. *Journal of Computational Physics*, 442 :110479, October 2021.
- [22] Vedran Coralic and Tim Colonius. Finite-volume WENO scheme for viscous compressible multicomponent flows. *Journal of Computational Physics*, 274 :95–121, October 2014.
- [23] Richard Courant, Eugene Isaacson, and Mina Rees. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 5(3) :243–255, August 1952.
- [24] F. Daude, P. Galon, Z. Gao, and E. Blaud. Numerical experiments using a HLLC-type scheme with ALE formulation for compressible two-phase flows five-equation models with phase transition. *Computers & Fluids*, 94 :112–138, May 2014.
- [25] Florian De Vuyst. Lagrange-Flux schemes and the entropy property, March 2017. arXiv :1703.00235 [math].
- [26] Florian De Vuyst, Christophe Fochesato, Vincent Mahy, Renaud Motte, and Mathieu Peybernes. A geometrically accurate low-diffusive conservative interface capturing method suitable for multimaterial flows. *Computers & Fluids*, 227 :104897, September 2021.
- [27] Florian De Vuyst, Thibault Gasc, Renaud Motte, Mathieu Peybernes, and Raphaël Poncet. Lagrange-Flux Schemes : Reformulating Second-Order Accurate Lagrange-Remap Schemes for Better Node-Based HPC Performance. *Oil & Gas Science and Technology – Revue d’IFP Energies nouvelles*, 71(6) :64, November 2016.
- [28] Vincent Delmas and Azzedine Soulaïmani. Multi-GPU implementation of a time-explicit finite volume solver using CUDA and a CUDA-Aware version of OpenMPI

- with application to shallow water flows. *Computer Physics Communications*, 271 :108190, February 2022.
- [29] B. Després, S. Kokh, and F. Lagoutière. Sharpening Methods for Finite Volume Schemes. In *Handbook of Numerical Analysis*, volume 17, pages 77–102. Elsevier, 2016.
- [30] Bruno Després. *Lois de Conservations Eulériennes, Lagrangiennes et Méthodes Numériques*, volume 68 of *Mathématiques et Applications*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2010.
- [31] Bruno Després and Frédéric Lagoutière. Contact discontinuity capturing schemes for linear advection and compressible gas dynamics. *Journal of Scientific Computing*, 16(4) :479–524, 2001.
- [32] Douglas Enright, Ronald Fedkiw, Joel Ferziger, and Ian Mitchell. A Hybrid Particle Level Set Method for Improved Interface Capturing. *Journal of Computational Physics*, 183(1) :83–116, November 2002.
- [33] Tore Flåtten, Alexandre Morin, and Svend Tollak Munkejord. On Solutions to Equilibrium Problems for Systems of Stiffened Gases. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 71(1) :41–67, January 2011.
- [34] G.P. Galdi. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations : Steady-State Problems*. Springer Monographs in Mathematics. Springer New York, New York, NY, 2011.
- [35] Stéphane Galera, Jérôme Breil, and Pierre-Henri Maire. A 2D unstructured multi-material Cell-Centered Arbitrary Lagrangian–Eulerian (CCALE) scheme using MOF interface reconstruction. *Computers & Fluids*, 46(1) :237–244, July 2011.
- [36] Thibault Gasc. *Modèles de performance pour l’adaptation des méthodes numériques aux architectures multi-coeurs vectorielles. Application aux schémas Lagrange-Projection en hydrodynamique compressible*. PhD thesis, 2016. Thèse de doctorat dirigée par Vuyst, Florian de et Audit, Edouard Mathématiques appliquées Université Paris-Saclay (ComUE) 2016.
- [37] Jean-Michel Ghidaglia and Ahmed Amine Mrabet. A regularized stiffened-gas equation of state. *Journal of Applied Analysis & Computation*, 8(3) :675–689, 2018.

- [38] G.R. Gisler, R.P. Weaver, C.L. Mader, and M.L. Gittings. Two- and three-dimensional asteroid impact simulations. *Computing in Science & Engineering*, 6(3) :46–55, May 2004.
- [39] J. Glimm, M.J. Graham, J. Grove, X.L. Li, T.M. Smith, D. Tan, F. Tangerman, and Q. Zhang. Front tracking in two and three dimensions. *Computers & Mathematics with Applications*, 35(7) :1–11, April 1998.
- [40] J Glimm, D Marchesin, and O McBryan. Subgrid resolution of fluid discontinuities, II. *Journal of Computational Physics*, 37(3) :336–354, October 1980.
- [41] J Glimm, D Marchesin, and O McBryan. A numerical method for two phase flow with an unstable interface. *Journal of Computational Physics*, 39(1) :179–200, January 1981.
- [42] James Glimm, Xiaolin Li, Yingjie Liu, Zhiliang Xu, and Ning Zhao. Conservative Front Tracking with Improved Accuracy. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 41(5) :1926–1947, January 2003.
- [43] Edwige Godlewski and Pierre-Arnaud Raviart. The Case of Multidimensional Systems. In *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, volume 118, pages 425–579. Springer New York, New York, NY, 2021. Series Title : Applied Mathematical Sciences.
- [44] Jonathan B. Goodman and Randall J. LeVeque. On the Accuracy of Stable Schemes for 2D Scalar Conservation Laws. *Mathematics of Computation*, 45(171) :15, July 1985.
- [45] Yaguang Gu, Zhen Gao, Guanghui Hu, Peng Li, and Lifeng Wang. High Order Finite Difference Alternative WENO Scheme for Multi-component Flows. *Journal of Scientific Computing*, 89(3) :52, December 2021.
- [46] Yaguang Gu, Dongmi Luo, Zhen Gao, and Yibing Chen. An Adaptive Moving Mesh Method for the Five-Equation Model. *Communications in Computational Physics*, 32(1) :189–221, June 2022.
- [47] J.-F. Haas and B. Sturtevant. Interaction of weak shock waves with cylindrical and spherical gas inhomogeneities. *Journal of Fluid Mechanics*, 181(-1) :41, September 1987.

- [48] Francis H Harlow and Anthony A Amsden. Fluid dynamics. a lasl monograph. Technical report, Los Alamos National Lab.(LANL), Los Alamos, NM (United States), 1971.
- [49] Ami Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 49(3) :357–393, March 1983.
- [50] Thomas Y. Hou and Philippe G. LeFloch. Why nonconservative schemes converge to wrong solutions : error analysis. *Mathematics of Computation*, 62(206) :497–530, 1994.
- [51] Jinsong Hua and Dag Mortensen. A front tracking method for simulation of two-phase interfacial flows on adaptive unstructured meshes for complex geometries. *International Journal of Multiphase Flow*, 119 :166–179, October 2019.
- [52] A. Jameson. ANALYSIS AND DESIGN OF NUMERICAL SCHEMES FOR GAS DYNAMICS, 1 : ARTIFICIAL DIFFUSION, UPWIND BIASING, LIMITERS AND THEIR EFFECT ON ACCURACY AND MULTIGRID CONVERGENCE. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 4(3-4) :171–218, January 1995.
- [53] Stéphane Jaouen and Frédéric Lagoutière. Numerical transport of an arbitrary number of components. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(33-34) :3127–3140, July 2007.
- [54] Matthew Jemison, Eva Loch, Mark Sussman, Mikhail Shashkov, Marco Arienti, Mitsuhiro Ohta, and Yaohong Wang. A Coupled Level Set-Moment of Fluid Method for Incompressible Two-Phase Flows. *Journal of Scientific Computing*, 54(2-3) :454–491, February 2013.
- [55] Smadar Karni. Multicomponent Flow Calculations by a Consistent Primitive Algorithm. *Journal of Computational Physics*, 112(1) :31–43, May 1994.
- [56] Kyu Hong Kim and Chongam Kim. Accurate, efficient and monotonic numerical methods for multi-dimensional compressible flows. *Journal of Computational Physics*, 208(2) :570–615, September 2005.
- [57] S. Kokh and F. Lagoutière. An anti-diffusive numerical scheme for the simulation of interfaces between compressible fluids by means of a five-equation model. *Journal of Computational Physics*, 229(8) :2773–2809, April 2010.

- [58] Ksenia Kozhanova. *High-Order Numerical Methods for Shock-Bubble Interaction Computations*. Theses, ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique - Poitiers, February 2022.
- [59] Milan Kucharik and Mikhail Shashkov. Conservative multi-material remap for staggered multi-material Arbitrary Lagrangian–Eulerian methods. *Journal of Computational Physics*, 258 :268–304, February 2014.
- [60] D. Kuzmin and S. Turek. High-resolution FEM-TVD schemes based on a fully multidimensional flux limiter. *Journal of Computational Physics*, 198(1) :131–158, July 2004.
- [61] Dmitri Kuzmin. A new perspective on flux and slope limiting in discontinuous Galerkin methods for hyperbolic conservation laws. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 373 :113569, January 2021.
- [62] B Larrouturou. How to preserve the mass fractions positivity when computing compressible multi-component flows. *Journal of Computational Physics*, 95(1) :59–84, July 1991.
- [63] Peter Lax and Burton Wendroff. Systems of conservation laws. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13(2) :217–237, May 1960.
- [64] Olivier Le Métayer and Richard Saurel. The Noble-Abel Stiffened-Gas equation of state. *Physics of Fluids*, 28(4) :046102, April 2016.
- [65] Florian Le Roy de Bonneville. *Modélisation numérique de l'agitation et du mélange dans les écoulements à bulles. Application aux phénomènes de convection dans un bain de corium*. PhD thesis, 2020. Thèse de doctorat dirigée par Risso, Frédéric et Zamansky, Rémi Dynamique des fluides Toulouse, INPT 2020.
- [66] Randall J. LeVeque. High-Resolution Conservative Algorithms for Advection in Incompressible Flow. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33(2) :627–665, April 1996.
- [67] Randall J. LeVeque. Wave Propagation Algorithms for Multidimensional Hyperbolic Systems. *Journal of Computational Physics*, 131(2) :327–353, March 1997.
- [68] Randall J. LeVeque and Keh-Ming Shyue. Two-Dimensional Front Tracking Based on High Resolution Wave Propagation Methods. *Journal of Computational Physics*, 123(2) :354–368, February 1996.

- [69] Zhe Li, Guillaume Oger, and David Le Touzé. A finite volume WENO scheme for immiscible inviscid two-phase flows. *Journal of Computational Physics*, 418 :109601, October 2020.
- [70] Meng-Sing Liou. A Sequel to AUSM : AUSM+. *Journal of Computational Physics*, 129(2) :364–382, December 1996.
- [71] Meng-Sing Liou and Christopher J. Steffen. A New Flux Splitting Scheme. *Journal of Computational Physics*, 107(1) :23–39, July 1993.
- [72] Petar Liovic, Murray Rudman, Jong-Leng Liow, Djamel Lakehal, and Doug Kothe. A 3D unsplit-advection volume tracking algorithm with planarity-preserving interface reconstruction. *Computers & Fluids*, 35(10) :1011–1032, December 2006.
- [73] Humphrey Maris and Sebastien Balibar. Negative Pressures and Cavitation in Liquid Helium. *Physics Today*, 53(2) :29–34, February 2000.
- [74] Shahab Mirjalili, Suhas S Jain, and Micheal Dodd. Interface-capturing methods for two-phase flows : An overview and recent developments. *Center for Turbulence Research Annual Research Briefs*, 2017(117-135) :13, 2017.
- [75] T. Ménard, S. Tanguy, and A. Berlemont. Coupling level set/VOF/ghost fluid methods : Validation and application to 3D simulation of the primary break-up of a liquid jet. *International Journal of Multiphase Flow*, 33(5) :510–524, May 2007.
- [76] Shambhavi Nandan, Christophe Fochesato, Mathieu Peybernes, Renaud Motte, and Florian De Vuyst. Sharp Interface Capturing in Compressible Multi-Material Flows with a Diffuse Interface Method. *Applied Sciences*, 11(24) :12107, December 2021.
- [77] A. Nonaka, S. May, A. S. Almgren, and J. B. Bell. A Three-Dimensional, Unsplit Godunov Method for Scalar Conservation Laws. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 33(4) :2039–2062, January 2011.
- [78] Stanley Osher. Convergence of Generalized MUSCL Schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 22(5) :947–961, 1985. Publisher : Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [79] Shucheng Pan, Luhui Han, Xiangyu Hu, and Nikolaus A. Adams. A conservative interface-interaction method for compressible multi-material flows. *Journal of Computational Physics*, 371 :870–895, October 2018.

- [80] Thomas Paula, Stefan Adami, and Nikolaus A. Adams. Analysis of the early stages of liquid-water-drop explosion by numerical simulation. *Physical Review Fluids*, 4(4) :044003, April 2019.
- [81] Christina Paulin. *Improved numerical schemes for monotonic conservative scalar advection : tackling mesh imprinting and numerical wetting*. Theses, Université Paris-Saclay, May 2021.
- [82] Simon Peluchon. *Approximation numérique et modélisation de l'ablation liquide*. PhD thesis, 2017. Thèse de doctorat dirigée par Mieussens, Luc Mathématiques appliquées et calcul scientifique Bordeaux 2017.
- [83] Sergio Pirozzoli, Simone Di Giorgio, and Alessandro Iafra. On algebraic TVD-VOF methods for tracking material interfaces. *Computers & Fluids*, 189 :73–81, July 2019.
- [84] William Rider and Douglas Kothe. Stretching and tearing interface tracking methods. In *12th Computational Fluid Dynamics Conference*, San Diego, CA, U.S.A., June 1995. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [85] M.G. Rodio and R. Abgrall. An innovative phase transition modeling for reproducing cavitation through a five-equation model and theoretical generalization to six and seven-equation models. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 89 :1386–1401, October 2015.
- [86] Jeff Saltzman. An Unsplit 3D Upwind Method for Hyperbolic Conservation Laws. *Journal of Computational Physics*, 115(1) :153–168, November 1994.
- [87] Richard Saurel and Rémi Abgrall. A Simple Method for Compressible Multifluid Flows. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21(3) :1115–1145, January 1999.
- [88] Richard Saurel and Olivier Lemetayer. A multiphase model for compressible flows with interfaces, shocks, detonation waves and cavitation. *Journal of Fluid Mechanics*, 431 :239–271, March 2001.
- [89] Kevin Schaal, Andreas Bauer, Praveen Chandrashekar, Rüdiger Pakmor, Christian Klingenberg, and Volker Springel. Astrophysical hydrodynamics with a high-order discontinuous Galerkin scheme and adaptive mesh refinement. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 453(4) :4279–4301, November 2015.

- [90] Samuel P. Schofield, Rao V. Garimella, Marianne M. Francois, and Raphaël Loubère. A second-order accurate material-order-independent interface reconstruction technique for multi-material flow simulations. *Journal of Computational Physics*, 228(3) :731–745, February 2009.
- [91] Gabriel Seisson. *Etude expérimentale et théorique de l'endommagement du graphite sous sollicitation dynamique - Application aux impacts hypervéloces*. Theses, ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique - Poitiers, October 2014.
- [92] Keh-Ming Shyue. An Efficient Shock-Capturing Algorithm for Compressible Multicomponent Problems. *Journal of Computational Physics*, 142(1) :208–242, May 1998.
- [93] Gilbert Strang. On the Construction and Comparison of Difference Schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 5(3) :506–517, September 1968.
- [94] Mark Sussman, Peter Smereka, and Stanley Osher. A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flow. *Journal of Computational Physics*, 114(1) :146–159, September 1994.
- [95] P. K. Sweby. High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 21(5) :995–1011, October 1984.
- [96] Hiroshi Terashima and Grétar Tryggvason. A front-tracking method with projected interface conditions for compressible multi-fluid flows. *Computers & Fluids*, 39(10) :1804–1814, December 2010.
- [97] Baolin Tian and Li Li. A five-equation model based global ale method for compressible multifluid and multiphase flows. *Computers & Fluids*, 214 :104756, January 2021.
- [98] E. F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics : a practical introduction*. Springer, Dordrecht ; New York, 3rd ed edition, 2009. OCLC : ocn401321914.
- [99] Jaulin Vincent. *Étude et modélisation d'impacts hautes et basses vitesses sur des matériaux et structures de satellites*. PhD thesis, 02 2021.

- [100] Yasuhiro Wada and Meng-Sing Liou. An Accurate and Robust Flux Splitting Scheme for Shock and Contact Discontinuities. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(3) :633–657, May 1997.
- [101] Qiuju Wang, Ralf Deiterding, Jianhua Pan, and Yu-Xin Ren. Consistent high resolution interface-capturing finite volume method for compressible multi-material flows. *Computers & Fluids*, 202 :104518, April 2020.
- [102] Romain Watteaux. *Détection des grandes structures turbulentes dans les couches de mélange de type Rayleigh-Taylor en vue de la validation de modèles statistiques turbulents bi-structure*. PhD thesis, 2011. Thèse de doctorat dirigée par Ghidaglia, Jean-Michel Mathématiques et sciences physiques Cachan, Ecole normale supérieure 2011.
- [103] Feng Xiao and Takashi Yabe. Completely Conservative and Oscillationless Semi-Lagrangian Schemes for Advection Transportation. *Journal of Computational Physics*, 170(2) :498–522, July 2001.
- [104] Jingheng Xu, Guangwen Yang, Haohuan Fu, Wayne Luk, Lin Gan, Wen Shi, Wei Xue, Chao Yang, Yong Jiang, and Conghui He. Optimizing Finite Volume Method Solvers on Nvidia GPUs. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 30(12) :2790–2805, December 2019.
- [105] Zhouteng Ye. A comparative study of split advection algorithms on the moment-of-fluid (MOF) method for incompressible flow. *Computers & Fluids*, 255 :105815, April 2023.
- [106] Sung-Hwan Yoon, Chongam Kim, and Kyu-Hong Kim. Multi-dimensional Limiting Process for Two- and Three-dimensional Flow Physics Analyses. In Herman Deconinck and E. Dick, editors, *Computational Fluid Dynamics 2006*, pages 185–190. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [107] Chao Zhang and Igor Menshov. Eulerian Model for Simulating Multi-Fluid Flows with an Arbitrary Number of Immiscible Compressible Components. *Journal of Scientific Computing*, 83(2) :31, May 2020.