



**HAL**  
open science

# Géométrie des variétés horosphériques de rang 1, projectives, lisses, de nombre de Picard 2

Léa Villeneuve

► **To cite this version:**

Léa Villeneuve. Géométrie des variétés horosphériques de rang 1, projectives, lisses, de nombre de Picard 2. Géométrie algébrique [math.AG]. Université de Poitiers, 2023. Français. NNT : 2023POIT2291 . tel-04509530

**HAL Id: tel-04509530**

**<https://theses.hal.science/tel-04509530v1>**

Submitted on 18 Mar 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École doctorale  
**MIMME**  
Université de Poitiers - ISAE-Ensm



## THÈSE

en vue de l'obtention du grade de

**Docteur de l'Université de Poitiers**  
Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées  
(Diplôme National - Arrêté du 25 mai 2016)

**Discipline** : Mathématiques

**Laboratoire** : LMA

**École doctorale** : MIMME

Présentée et soutenue publiquement le 7 décembre 2023

par **Léa Villeneuve**

---

**Géométrie des variétés horosphériques  
de rang 1, projectives,  
lisses, de nombre de Picard 2**

---

Directeur de thèse : Boris Pasquier

**Devant le jury formé de :**

Enrica Floris	Maîtresse de Conférences, Université de Poitiers	Examinatrice
Anne Moreau	Professeur, Université Paris-Saclay	Rapportrice
Boris Pasquier	Professeur, Université de Poitiers	Directeur
Nicolas Perrin	Professeur, École Polytechnique	Rapporteur
Ronan Terpeau	Professeur, Université de Lille	Examinateur



# REMERCIEMENTS

En premier lieu, je voudrais bien évidemment remercier mon directeur de thèse, Boris, sans qui l'aboutissement de cette thèse n'aurait pas été possible. Merci pour ta disponibilité tout au long de ces trois années, pour ta gentillesse et pour ta bienveillance, travailler avec toi a été un vrai plaisir pour moi.

Je remercie fortement les professeurs Anne Moreau et Nicolas Perrin d'avoir accepté de rapporter cette thèse, ainsi que Enrica Floris et Ronan Terpereau pour avoir pris part à mon jury.

Je souhaiterais également remercier l'Université de Poitiers, l'École Doctorale MIMME ainsi que le Laboratoire de Mathématiques et Applications qui m'ont permis d'effectuer cette thèse dans d'excellentes conditions de travail. J'ai une pensée toute particulière pour Alessandra, Samuel et Enrica, avec qui j'ai eu la chance de pouvoir échanger lors des différents groupes de travail, pour Jocelyne qui, malgré un emploi du temps chargé, s'est occupée de l'impression de tous les manuscrits nécessaires, pour Philippe qui a toujours réussi à me sauver de mes soucis informatiques, et pour l'ensemble de mes collègues qui, au temps où ils étaient mes professeurs, m'ont donné envie de poursuivre mes études en thèse.

Qui dit LMA, dit également doctorants. Au cours de ces trois années j'ai eu la chance de rencontrer de nombreux collègues doctorants dont certains sont devenus de vrais amis. Je commencerai par mon collègue préféré, mon binôme depuis le tout premier jour : mon Roro. Merci de m'avoir aussi bien accueillie à mon arrivée, merci d'avoir été un guide pour mon initiation à la géométrie, un ouvrier hors pair, un cupidon incroyablement efficace, une

oreille attentive et surtout un vrai ami. Alors, merci pour tout docteur Demelle.

Ma deuxième pensée ira bien sûr à Carlos, mi colombiano preferido. Eres una persona maravillosa y generosa, no cambies nunca! Y ahora ... vamos a celebrar juntos esta tesis y tu naturalización!

Un énorme merci également à Mathilde et Manon pour avoir insufflé un peu de girl power au sein de ce laboratoire au fil des années (c'était clairement devenu une nécessité!). Merci pour nos discussions de filles et nos jeudis soirs enflammés (et surtout merci de sauver chacune de mes excentricités vestimentaires grâce à vos plus beaux nœuds!). Mathilde, continue d'être la personne la plus studieuse de ton bureau, et toi Manon, suis mes traces comme tu le fais déjà si bien depuis ton arrivée!

Une dernière petite pensée pour Antoine, mon "collègue" adoré depuis mon entrée au LMA ... ;)

Tout au long de ces années j'ai également pu compter sur le soutien de mes amis de toujours, alors comment ne pas remercier ma première partenaire in crime de fac? Léa & Léa, une évidence depuis très longtemps maintenant. Jamais je n'oublierai notre entrée fracassante à la fac de médecine. Merci pour ces moments inoubliables, ces soirées Netflix & chill (qui a dit que les études de médecine demandaient du travail?), nos sorties ciné plus nulles les unes que les autres et surtout, merci d'être toujours là après toutes ces années et d'avoir fait de moi la future témoin de ton amour. PS : Finalement, j'ai réussi à devenir docteur ;).

Ma pensée suivante sera forcément pour toi, Hélène. Par où commencer ... Plus de 7 ans depuis notre première rencontre en L1 et pourtant tu es toujours là à me supporter. Merci d'avoir traversé toutes ces années avec moi, d'avoir été un soutien constant et sans faille, d'avoir toujours été une épaule sur laquelle je pouvais me reposer. Merci aussi de m'avoir initiée aux soirées étudiantes et aux boissons en tout genre et d'avoir été la meilleure co-supportrice et ouvrière au monde. Merci pour tout! La suivante sera forcément toi Nini. Toutes ces soirées avec toi ont été de vrais moments de détente tout au long de cette thèse. Merci de m'avoir fait rire comme personne, merci d'avoir été une oreille attentive et une aussi bonne conseillère. Tu es devenue une véritable amie. Je vous aime mes bombasses latinasses.

Je voudrais aussi remercier les plus anciennes de mes amies : Amélie, Manon, Léa (encore une) et Alice. Malgré nos vies complètement différentes et l'éloignement, vous êtes une constante dans ma vie depuis plus de dix ans, et pour beaucoup d'années encore je l'espère. Tous les moments passés avec vous m'ont permis de mettre de côté mes études pendant quelques heures, et pour ça : merci.

Une pensée particulière et émue pour toi, mon Julien. Malgré nos emplois du temps surchargés, notre amitié est toujours intacte, et chaque moment partagé avec toi me donne l'impression d'être retourné à l'époque de notre première année de médecine quand tu étais mon voisin.

Enfin, merci à tous les autres pour leur présence constante, leur soutien sans faille et leur amour inconditionnel.

Pour terminer ces remerciements, je voudrais m'adresser aux personnes les plus importantes de ma vie : ma famille. Papi, mamies, j'espère vous avoir rendu fiers de moi. Merci d'être des grands-parents aussi géniaux et uniques, j'ai de la chance de vous avoir. Tante Catoche, tonton William, tatie Fanny, tonton David, Axel, Zoé, Sarah, Julien : merci de faire partie de ma vie depuis toujours et de m'avoir offert d'aussi beaux souvenirs tout au long de ces années. Tous les moments passés avec vous ont été un vrai bonheur et une bouffée d'oxygène.

Merci à tous les autres membres de ma famille (beaucoup trop nombreux pour être tous cités) pour tous les instants de rigolade et de convivialité, merci à ma famille de cœur, Thierry, Loulou, Gwen et Steff pour nos étés mémorables et pour tous les autres moments de partage, et merci à ma belle-famille incroyable pour votre accueil (je rejoins enfin le clan des docteurs Lerbet!).

Papa, maman, j'espère que vous n'allez pas pleurer en lisant ces mots ... Si j'avais pu choisir mes parents, je n'en aurais pas voulu d'autres que vous. Vous avez été les parents les plus aimants qu'un enfant puisse espérer avoir, le meilleur des soutiens tout au long de ma vie. Merci pour votre exigence qui m'a permis d'aller aussi loin. Merci d'avoir toujours respecté mes choix sans jamais me juger et de m'avoir toujours aimée et accompagnée. Je suis reconnaissante pour tout ce que vous m'avez donné et pour avoir fait de moi la personne que je suis aujourd'hui.

Lolotte, ma petite sœur d'amour, mon bébé. Par où commencer ... Tout d'abord, merci d'être la personne la plus critique de mon entourage. Tu me permets d'évoluer et de m'améliorer sans cesse. Je n'aurais jamais pu en arriver là sans toi. Merci d'être à la fois mature pour me conseiller et me guider, et enfantine pour toujours me faire rire. Merci pour toutes ces années passées à tes côtés, merci d'avoir fait de mon enfance un vrai bonheur et de mes années fac une coloc incroyable. Je sais que le reste de notre vie ne se fera pas l'une sans l'autre, alors désolée Toto, mais j'étais là avant toi ! Merci quand même de prendre soin de ma petite sœur adorée, je n'aurais pas voulu d'autre beau-frère que toi.

Ma dernière pensée sera forcément pour toi mon amour. Merci pour ces (presque) trois années passées ensemble. Je n'aurais jamais réussi sans ton soutien constant et tes encouragements incessants. Merci de me pousser à faire toujours mieux, merci de prendre soin de moi comme personne avant toi, merci de me faire toujours rire et rêver, et surtout merci de me faire sentir aussi spéciale. La fin de cette thèse marque le début de notre vie en tant que docteur et docteur, et j'ai hâte de la vivre avec toi. Je t'aime.

Je VOUS aime ♡.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b>		<b>1</b>
<b>1 Généralités</b>		<b>7</b>
1	Systèmes de racines et groupes algébriques réductifs . . . . .	7
2	Variétés horosphériques de rang 1 . . . . .	12
3	Morphismes $G$ -équivariants et Log MMP . . . . .	22
4	Fibrés vectoriels au dessus des variétés de drapeaux et Théorème de Borel-Weil-Bott . . . . .	31
<b>2 Action de <math>\text{Aut}(\mathbb{X})</math> sur <math>\mathbb{X}</math></b>		<b>34</b>
1	Stabilité des $G$ -orbites fermées sous l'action de $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ . . . . .	35
1.1	Argument géométrique . . . . .	35
1.1.1	Quand $a_1 = 0$ et $G = G_0$ . . . . .	35
1.1.2	Quand $a_1 = 0$ et $G = G_0 \times G_1$ . . . . .	38
1.1.3	Quand $a_1 > 0$ . . . . .	39
1.2	Argument calculatoire . . . . .	39
1.2.1	Quand $a_1 = 0$ et $G = G_0$ . . . . .	40
1.2.2	Quand $a_1 = 0$ et $G = G_0 \times G_1$ . . . . .	41
1.2.3	Quand $a_1 > 0$ et $G = G_0 \times G_1$ avec $G_1$ de type $A_m$ ou $G_1 = \{1\}$ . . . . .	41
1.2.4	Quand $a_1 > 0$ et $G = G_0 \times G_1 \times G_2$ . . . . .	42
1.3	Conclusion . . . . .	43
2	Calcul de $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ . . . . .	45
2.1	Quand $\mathbb{X}$ est une variété à deux orbites sous l'action de $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ . . . . .	45



2.2	Quand $\mathbb{X}$ est une variété à trois orbites sous l'action de $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ . . . . .	48
3	Connexité de $\text{Aut}(\mathbb{X})$ . . . . .	49
3.1	Prérequis . . . . .	50
3.2	$s_\Gamma = \text{id}$ . . . . .	52
3.3	$s_\Gamma \neq \text{id}$ . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Rigidité locale et déformation de <math>\mathbb{X}</math></b>	<b>56</b>
1	Contexte et stratégie . . . . .	57
2	Calcul de $H^1(\mathbb{X}, T_{\mathbb{X}})$ . . . . .	61
	<b>Annexe</b>	<b>66</b>
	Quand $a_1 > 0$ avec $G = G_0$ ou $G = G_0 \times G_1$ et $\alpha_0$ ou $\alpha_1 \in G_1$ :	66
	Quand $a_1 > 0$ avec $G = G_0 \times G_1$ et $\alpha_0, \alpha_1 \in G_1$ : . . . . .	97
	Quand $a_1 > 0$ avec $G = G_0 \times G_1 \times G_2$ : . . . . .	98
	Quand $a_1 = 0$ avec $G = G_0$ et $\beta$ est entre $\alpha_0$ et $\alpha_1$ : . . . . .	99
	Quand $a_1 = 0$ avec $G = G_0$ et $\beta$ n'est pas entre $\alpha_0$ et $\alpha_1$ : . .	100
	Quand $a_1 = 0$ avec $G = G_0 \times G_1$ et $\alpha_0$ ou $\alpha_1 \in G_1$ : . . . . .	105
	<b>Bibliographie</b>	<b>110</b>

# INTRODUCTION

Une  $G$ -variété normale  $X$  est dite horosphérique si elle contient une orbite ouverte isomorphe à un espace homogène horosphérique  $G/H$  qui est une fibration torique sur une variété de drapeau généralisée. Ces variétés font partie de la grande famille des variétés sphériques qui sont riches en exemples et aujourd'hui bien connues. La famille des variétés horosphériques inclut les variétés homogènes rationnelles et les variétés toriques.

Dans les années 80, la théorie de Luna-Vust a donné un début de classification des plongements d'un espace homogène sphérique en termes d'éventails dans [LV83].

A la fin des années 80 et au début des années 90, M. Brion a obtenu plusieurs résultats sur la géométrie des variétés sphériques : caractérisation des diviseurs de Cartier, engendrés par leurs sections et amples ([Bri89]) ; description du cône des courbes effectives et terminaison du MMP ([Bri93]).

A partir des années 2000, une étude plus spécifique de la sous-famille des variétés horosphériques a donné plusieurs résultats, dont une classification des variétés horosphériques projectives lisses de nombre de Picard 1 dans [Pas09]. Il a également été prouvé que le groupe d'automorphismes d'une telle variété  $X$  agit avec au plus deux orbites et que ce groupe agit toujours avec seulement deux orbites sur l'éclatement de  $X$  en l'orbite fermée. Dans ce contexte, il y avait seulement 5 familles non homogènes à étudier. Une étude de la rigidité locale de ces variétés a également été menée dans [PP10].

Les variétés horosphériques projectives lisses de groupe de Picard de rang 2, décrites dans [Pas20], se décomposent en deux catégories, qui comportent cette fois un très grand nombre de familles non homogènes. L'objectif de cette thèse est de réaliser une étude similaire à celle menée dans le cas d'un nombre

de Picard égal à 1, uniquement dans le cas de variétés horosphériques de rang 1 (projectives lisses de groupe de Picard de rang 2). En effet, de nombreux auteurs ont par la suite repris les variétés horosphériques projectives lisses avec un nombre de Picard 1 classifiées et étudiées dans [Pas09] et [PP10], avec par exemple plusieurs études du fibré tangent ([Kan21],[Liu23],[Hon22]) ou de la cohomologie quantique ([Shi23],[Hwa13],[GPPS21]). L'intérêt d'étudier dans cette thèse des variétés avec un petit nombre de Picard vient de la géométrie birationnelle, où ces variétés apparaissent naturellement et donnent lieu à de nombreuses conjectures et études. Ainsi, les variétés avec un nombre de Picard 1 ayant déjà été étudiées, il est naturel de prendre cette fois un nombre de Picard égal à 2. La restriction au rang 1 a permis de limiter l'étude à un cas déjà très riche en familles de variétés non homogènes. On retrouvera d'ailleurs dans notre liste certains cas toriques. Ces variétés dépendent d'un certain nombre de données combinatoires :

- d'un groupe algébrique réductif connexe  $G$  (égal à  $G_0$  un groupe simple simplement connexe ou à un produit de  $G_0$  avec au plus deux autres groupes égaux à  $SL_n$ ,  $\mathbb{C}^*$  et  $\{1\}$ )
- d'une racine simple de  $G$  notée  $\beta$
- de zéro à deux autres racines simples de  $G$
- ainsi que d'un entier positif ou nul noté  $a_1$ .

Tout au long de la thèse, en l'absence d'ambiguïté, on notera  $\mathbb{X}$  les variétés étudiées (qui dépendent toujours des paramètres précédemment cités).

Pour l'étude de nos variétés, on utilisera le Log MMP (voir [Mat02] pour le Log MMP en général et [Pas17] pour le cas horosphérique) qui peut dans certains cas donner des informations sur le groupe d'automorphismes. Dans notre cas, on a deux Log MMP car on a deux rayons extrémaux dans le cône des courbes effectives (de dimension 2). La raison pour laquelle on utilise le Log MMP et non le MMP classique est que le cône des courbes effectives n'est pas toujours inclus dans le demi-espace où l'anticanonique est positif. Il est important de préciser que le Log MMP de  $\mathbb{X}$  ne sera pas le même si  $a_1 = 0$  ou si  $a_1 > 0$ . En effet, quand  $a_1 = 0$ , on a deux fibrations, alors que pour  $a_1 > 0$ , on a une fibration et une contraction birationnelle, et par convention on notera  $Y$  l'orbite correspondant au lieu exceptionnel de cette contraction. En revanche, il est le même pour n'importe quelle valeur de  $a_1$  strictement positive. Dans la suite de la thèse on fera toujours la distinction entre le cas  $a_1 = 0$  et le cas  $a_1 > 0$ .

L'une des motivations de cette thèse a donc été de trouver d'autres moyens de classifier nos variétés lorsque la géométrie décrite par le Log MMP ne suf-

fit plus : même lieu exceptionnel, mêmes dimensions des fibres.

Il est important de noter la grande quantité de cas étudiés pour remarquer à quel point les cas extraits dans certains résultats sont rares.

En effet, dans le cas où  $a_1 = 0$ , on obtient plus de 250 familles variétés à étudier, et lorsque  $a_1 > 0$ , on en compte plus de 500.

L'un des premiers résultats de cette thèse concerne la stabilité des  $G$ -orbites sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ .

**Théorème 0.1.** *Soit  $\mathbb{X}$  une variété horosphérique de rang 1, projective, lisse, de nombre de Picard 2, soient  $Y$  et  $Z$  les deux  $G$ -orbites fermées de  $\mathbb{X}$  qu'on ordonne comme dans la suite de la thèse (voir Chapitre 1, section 3).*

*Lorsque  $a_1 > 0$ , l'orbite  $Y$  est toujours stable sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  et  $\mathbb{X}$  est une variété à deux orbites sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ , sauf dans 12 cas dans lesquels  $\mathbb{X}$  est une variété à trois orbites sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  pour tout  $a_1 > 0$  (on donnera un peu plus tard dans la thèse une preuve géométrique expliquant ce résultat) et 16 cas dans lesquels on obtient de nouveau une variété à trois orbites sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ , mais cette fois pour certaines valeurs de  $a_1$  seulement.*

*Quand  $a_1 = 0$  en revanche, on ne distingue pas un nombre restreint de cas particuliers, et on décrit la stabilité des orbites dans l'annexe.*

Lorsque  $a_1 > 0$ , pour les 12 cas évoqués ci-dessus, un argument géométrique explique pourquoi elles sont à trois orbites.

Soit  $C$  le centre de  $G$  et  $\tilde{C} = \{(c, c^{-1}H) \in C \times P/H\}$ , avec  $P/H \simeq \mathbb{C}^*$ . On a le résultat suivant :

**Théorème 0.2.** *Soit  $\mathbb{X}$  une variété horosphérique de rang 1, projective, lisse, de nombre de Picard 2. Lorsque  $\mathbb{X}$  est une variété à deux orbites sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ , on note  $\Omega$  l'unique  $G$ -orbite non stable, et on obtient le résultat suivant :*

$$\text{Aut}^0(\mathbb{X}) = ((G \times \mathbb{C}^*)/\tilde{C}) \ltimes H^0(G/P_\Omega, N_\Omega).$$

**Théorème 0.3.** *Soit  $\mathbb{X}$  une variété horosphérique de rang 1, projective, lisse, de nombre de Picard 2. Si  $\mathbb{X}$  est une variété à trois orbites sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ , alors  $\text{Aut}^0(\mathbb{X}) = ((G \times \mathbb{C}^*)/\tilde{C})$ .*

Puis on s'intéresse au groupe d'automorphismes total, et on obtient qu'il existe très peu de cas dans lequel  $\text{Aut}(\mathbb{X})$  n'est pas connexe.

**Théorème 0.4.** *Soit  $\mathbb{X}$  une variété horosphérique de rang 1, projective, lisse, de nombre de Picard 2. Le groupe d'automorphismes est égal au produit semi-direct de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  par un ensemble des symétries du diagramme de Dynkin  $\Gamma$  de  $G$  fixant  $\beta$ .*

Enfin, le dernier théorème majeur de cette thèse porte sur la rigidité locale de  $\mathbb{X}$  et qui a de nouveau mis en évidence un nombre très restreint de cas dans lesquels  $\mathbb{X}$  peut admettre une déformation locale.

L'idée pour étudier la rigidité locale de  $\mathbb{X}$  consiste à calculer  $H^1(X, T_{\mathbb{X}})$ , où  $T_{\mathbb{X}}$  est le fibré tangent de  $\mathbb{X}$ , afin d'utiliser la théorie de Kodaira-Spencer qui dit que si  $H^1(X, T_{\mathbb{X}})$  est trivial, alors  $\mathbb{X}$  est localement rigide. Considérant le très grand nombre de variétés à étudier, le but est de trouver de nouveau des arguments combinatoires pour conclure sans avoir à calculer explicitement  $H^1(X, T_{\mathbb{X}})$ . On a alors obtenu le résultat suivant :

**Théorème 0.5.** *Soit  $\mathbb{X}$  une variété horosphérique de rang 1, projective, lisse, de nombre de Picard 2. Alors,  $\mathbb{X}$  est toujours localement rigide, sauf éventuellement dans 13 cas, où  $\mathbb{X}$  est une variété à deux orbites sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  dans 12 cas, et une variété à trois orbites dans le dernier cas.*

**Remarque 0.6.** Ces cas sont listés de manière explicite dans la section 2 du Chapitre 3.

La question de savoir si ces 13 variétés admettent réellement une déformation locale reste ouverte. Calculer les déformations explicites dans ces cas semble être assez difficile.

**Remarque 0.7.** Tout au long de cette thèse on va considérer des "vraies" racines et des racines dites "imaginaires". Il est intéressant de noter que l'ensemble des résultats est vérifié peu importe la nature des racines.

Dans le Chapitre 1, on rappelle les généralités sur les systèmes de racines, les variétés horosphériques, en particulier on donne la liste détaillée de tous

les cas à étudier (cf.[Pas20]). En particulier, on donne une caractérisation complète du Log MMP simplement en termes de morphismes  $G$ -équivariants. La caractérisation à l'aide des polytopes moments comme dans [Pas17] n'était pas utile dans le cas de variétés horosphériques de rang 1.

La chapitre suivant est d'abord consacré à l'étude de l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  sur notre variété  $\mathbb{X}$ , qui a trois  $G$ -orbites. Pour cela, on utilise deux types d'arguments : géométrique avec plusieurs méthodes basées sur la dimension des fibres ou encore la position relative des racines les unes par rapport aux autres, et calculatoire, le but étant d'utiliser le Théorème de Borel-Weil-Bott (Théorème 1.25) qui permet de calculer la cohomologie des fibrés vectoriels au dessus d'une variété de drapeaux. L'autre partie du Chapitre 2 est consacrée à l'étude de la connexité de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  et au calcul du groupe d'automorphismes.

Enfin, dans le Chapitre 3, le but est d'étudier la rigidité locale de  $\mathbb{X}$ , en présentant d'abord le contexte, mais surtout la méthode utilisée et quelques lemmes utiles pour la démonstration du dernier résultat majeur de cette thèse.



# CHAPITRE 1

---

# GÉNÉRALITÉS

Soit  $G$  un groupe algébrique connexe et réductif sur  $\mathbb{C}$ , soit  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$ , soit  $T$  un tore maximal de  $B$  et soit  $U$  le radical unipotent de  $B$ . Notons  $C$  le centre de  $G$  et  $G'$  la partie semi-simple de  $G$  (telle que  $G = C.G'$ ).

## 1 Systèmes de racines et groupes algébriques réductifs

On commence d'abord par donner la définition et les propriétés de base des systèmes de racines.

**Définition 1.1.** [Hum72, Chap.III] Soit  $V$  un espace vectoriel euclidien de dimension finie, on note  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire. On appelle **système de racines**  $\Phi$  dans  $V$ , un ensemble fini de vecteurs non nuls, appelés **racines** tel que :

1.  $V$  est engendré, en tant qu'espace vectoriel, par les racines,
2. soit  $\alpha \in \Phi$  une racine, alors  $k \times \alpha \in \Phi$  pour uniquement  $k = 1$  et  $-1$ ,
3. pour toute racine  $\alpha \in \Phi$ ,  $\Phi$  est stable par réflexion par rapport à l'hyperplan perpendiculaire à  $\alpha$ , ce qui signifie que pour toutes racines  $\alpha, \beta \in \Phi$ , on a  $s_\alpha(\beta) = \beta - 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \alpha \in \Phi$ ,



4. pour toutes racines  $\alpha, \beta \in \Phi$ ,  $2\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$  est un entier.

**Notation 1.2.** Pour tout  $\alpha \in \Phi$ , on note et on appelle coracine  $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}$  et  $\Phi^\vee = \{\alpha^\vee, \alpha \in \Phi\}$  est un système de racines, appelé système dual.

**Remarque 1.3.** Avec cette notation,  $s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha$ , pour tout  $\beta \in \Phi$ .

**Proposition/Définition 1.4.** Il existe  $\Phi^+$  un sous-ensemble de  $\Phi$  tel que :

1. pour toute racine  $\alpha \in \Phi$ , on a soit  $\alpha$  soit  $-\alpha$  une racine de  $\Phi^+$
2. pour toutes racines distinctes  $\alpha, \beta \in \Phi^+$ , telles que  $\alpha + \beta$  est une racine, alors  $\alpha + \beta \in \Phi^+$ .

Cet ensemble est appelé un ensemble de **racines positives**.

Un élément  $\alpha$  du sous-ensemble  $\Phi^+$  est appelé **racine simple**, si  $\alpha$  ne peut pas s'écrire comme  $\beta + \gamma$  avec  $\beta, \gamma \in \Phi^+$ . On note  $\Delta$  l'ensemble des racines simples de  $\Phi$ . En d'autres termes, l'ensemble  $\Delta$  est une base de  $V$ , qui vérifie les propriétés suivantes :

1. toute racine  $\alpha \in \Phi$  est une combinaison linéaire d'éléments de  $\Delta$  avec des coefficients entiers,
2. pour chaque racine  $\alpha \in \Phi$ , les coefficients précédents sont soit tous négatifs, soit tous positifs.

Tout groupe algébrique linéaire, en particulier tout sous-groupe semi-simple, définit un système de racines  $R$  de  $(G, T)$  par les poids sous le tore maximal  $T$  de  $G$ , de l'action adjointe de  $G$  sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  ([Spr98, Cor 8.1.2]). Le système de racines  $R$  ne dépend que de la partie semi-simple de  $G$ .

Le choix d'un sous-groupe de Borel  $B$  induit un ensemble de racines positives, noté  $R^+$ , ainsi qu'un ensemble  $S$  constitué des racines simples de  $(G, B, T)$ . On rappelle que  $R^+$  est le sous-ensemble de  $R$  dont les éléments sont des combinaisons linéaires d'éléments de  $S$  avec des coefficients non négatifs. Le choix de  $R^+$  définit un ordre partiel  $<$  sur  $R^+$  : on a  $\alpha < \beta \iff \beta - \alpha$  est une combinaison linéaire à coefficients entiers et positifs de racines simples.

Supposons  $\alpha$  une racine simple. On note  $\varpi_\alpha$  les **poinds fondamentaux** associés à  $\alpha$ , où  $(\varpi_\alpha)_{\alpha \in S}$  est la base duale de  $(\alpha^\vee)_{\alpha \in S}$  (voir [Bou07, Chap. VI, §1.10]). On note également  $P_\alpha$  le **sous-groupe parabolique** maximal contenant  $B$  tel que  $\varpi_\alpha$  s'étend en un caractère de  $P_\alpha$  (voir [Bou07, Chap. IV, §2.6]). On note  $\mathfrak{X}(T)$  le réseau des caractères de  $T$  (ou  $B$ ) engendré en tant que groupe semi-simple par les  $\varpi_\alpha$  et  $\mathfrak{X}^+(T) \subset \mathfrak{X}(T)$  le monoïde des caractères dominants, engendré en tant que semi-groupe par les  $\varpi_\alpha$ .

Soit  $W$  le groupe de Weyl de  $(G, T)$  engendré par les réflexions associées aux racines simples (voir [Bou07, Chap. VI, §1.1]). Quand  $I \subset S$ , on note  $W_I$  le sous-groupe de  $W$  engendré par les réflexions associées aux racines simples de  $I$ . On note  $P_I$  l'intersection des sous-groupes paraboliques  $P_\alpha$  avec  $\alpha \in I$  de sorte que si  $I = \emptyset$ ,  $P_I = G$  et  $P_S = B$ .

Soit  $\Gamma$  le diagramme de Dynkin de  $G$ . Quand  $I \subset S$ , on note  $\Gamma_I$  le sous-graphe de  $\Gamma$  dont les sommets sont les éléments de  $I$  en gardant toutes les arêtes existantes entre ces sommets (voir [Bou07, Chap. VI, §4.2]). Pour  $\lambda \in \mathfrak{X}^+(T)$ , on note  $V(\lambda)$  le  $G$ -module irréductible de plus haut poids  $\lambda$  et  $v_\lambda$  un vecteur de plus haut poids dans  $V(\lambda)$ .

Notons  $w_0^{\alpha, \beta}$  le **plus long élément** de  $W_{S \setminus \{\alpha, \beta\}}$ . On sait que  $w_0^{\alpha, \beta}$  est engendré par les réflexions  $s_\gamma$  avec  $\gamma \in S \setminus \{\alpha, \beta\}$  et puisque  $s_\gamma(\varpi_\alpha) = \varpi_\alpha$  et  $s_\gamma(\varpi_\beta) = \varpi_\beta$  pour tout  $\gamma \in S$ , alors on obtient  $w_0^{\alpha, \beta}(\varpi_\alpha) = \varpi_\alpha$  et  $w_0^{\alpha, \beta}(\varpi_\beta) = \varpi_\beta$ . On a que  $w_0^{\alpha, \beta}(S)$  est aussi une base de  $R$ .

**Lemme 1.5.** *Avec les notations précédentes,  $w_0^{\alpha, \beta}(\alpha)$  est la plus grande racine dans  $R$  (ou  $R^+$ ) pour l'ordre partiel  $<$  avec un coefficient devant  $\alpha$  égal à 1 et un coefficient devant  $\beta$  égal à 0.*

*Démonstration.* On a  $w_0^{\alpha, \beta}(R^+)$  engendré positivement par

$$w_0^{\alpha, \beta}(S) = \{-\gamma \mid \gamma \in S \setminus \{\alpha, \beta\}\} \cup \{w_0^{\alpha, \beta}(\alpha), w_0^{\alpha, \beta}(\beta)\}.$$

Puisque  $w_0^{\alpha, \beta}$  est engendré par les  $s_\gamma$  avec  $\gamma \in S \setminus \{\alpha, \beta\}$ , alors il existe des entiers  $c_\gamma$  et  $d_\gamma$  tels que :

$$\begin{aligned} * \quad w_0^{\alpha, \beta}(\alpha) &= \alpha + \sum_{\gamma \in S \setminus \{\alpha, \beta\}} c_\gamma \gamma \\ * \quad w_0^{\alpha, \beta}(\beta) &= \beta + \sum_{\gamma \in S \setminus \{\alpha, \beta\}} d_\gamma \gamma. \end{aligned}$$

Et puisque  $w_0^{\alpha,\beta}$  est le plus long élément de  $W_{S \setminus \{\alpha,\beta\}}$ , alors :

$$* w_0^{\alpha,\beta}(\gamma) = -\gamma', \text{ pour tout } \gamma \in S \setminus \{\alpha,\beta\} \text{ avec } \gamma' \in S \setminus \{\alpha,\beta\}.$$

On sait que pour tout  $\delta \in R$ ,  $\delta$  est une combinaison linéaire d'éléments de  $S$  avec tous les coefficients de même signe, donc les entiers  $c_\gamma$  et  $d_\gamma$  sont tous non négatifs. Notons  $\delta$  la plus grande racine (pour l'ordre partiel  $<$ ) de  $R_{S \setminus \{\beta\}}^+$  avec un coefficient 1 en  $\alpha$ , alors en écrivant  $\delta$  dans la base  $w_0^{\alpha,\beta}(S)$ , il existe des entiers  $e_\gamma$  pour tout  $\gamma \in S$  tels que :

$$\delta = - \sum_{\gamma \in S \setminus \{\alpha,\beta\}} e_\gamma \gamma + e_\beta w_0^{\alpha,\beta}(\beta) + e_\alpha w_0^{\alpha,\beta}(\alpha)$$

où les  $e_\gamma$  sont tous de même signe ou nuls.

Par identification, on obtient  $e_\beta = 0$  et  $e_{\alpha_0} = 1$ . En particulier, cela implique que  $e_\gamma \geq 0$  pour tout  $\gamma \in S$ . De plus, par maximalité de  $\delta$ , on obtient que  $e_\gamma = 0$ , pour tout  $\gamma \in S \setminus \{\alpha,\beta\}$ , ce qui signifie qu'on a  $\delta = w_0^{\alpha,\beta}(\alpha)$ . ■

**Corollaire 1.6.** *Avec les notations précédentes,  $w_0^{\alpha,\beta}(\alpha^\vee)$  est la plus grande coracine avec un coefficient 1 en  $\alpha^\vee$  et un coefficient 0 en  $\beta^\vee$ .*

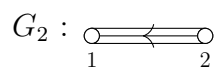
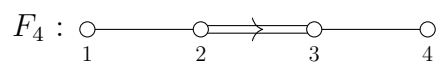
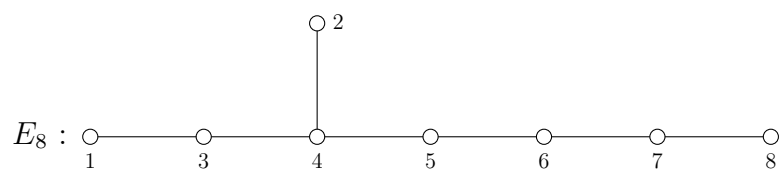
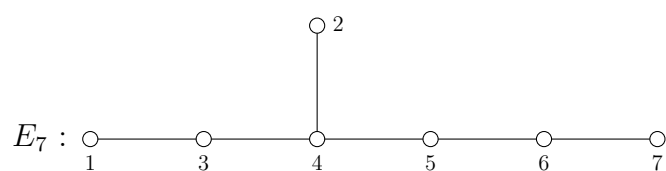
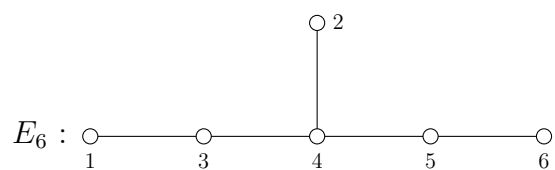
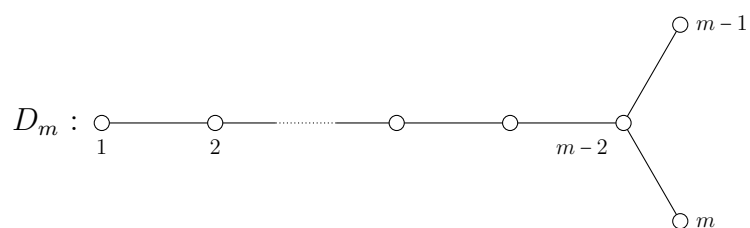
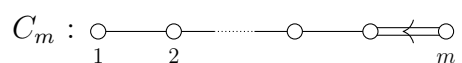
**Remarque 1.7.** On obtient le même résultat pour  $w_0^{\alpha,\beta}(\beta)$  et  $w_0^{\alpha,\beta}(\beta^\vee)$ .

*Démonstration du Corollaire 1.6.* La preuve est exactement la même que précédemment mais on utilise cette fois le système des racines duales. ■

**Remarque 1.8.** Quand  $\alpha$  est une racine dite imaginaire (voir Définition 1.12), on obtient que  $w_0^\beta(\beta)$  est la plus grande racine avec un coefficient 1 en  $\beta$  et que  $w_0^\beta(\beta^\vee)$  est la plus grande coracine avec un 1 en  $\beta^\vee$ .

On va voir par la suite que certains résultats qui jouent un rôle fondamental dans la preuve des principaux résultats de cette thèse consistent en la traduction de certaines propriétés des racines en termes d'agencement sur le diagramme de Dynkin. On va donc rappeler ici la liste des diagrammes de Dynkin des groupes algébriques linéaires simples qui schématisent les

systemes de racines associés (voir [Bou07, Planche I à Planche VIII]) :



## 2 Variétés horosphériques de rang 1

Dans cette section, on dénote par  $G$  un groupe algébrique connexe et réductif sur  $\mathbb{C}$ . On utilise les notations introduites précédemment dans le Chapitre 1.

**Définition 1.9.** [Pas09, §1.1] Soit  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$ . On dit que  $H$  est horosphérique s'il contient le radical unipotent d'un sous-groupe de Borel  $B$  de  $G$ .

Si  $H$  est horosphérique, on dit alors que l'espace homogène  $G/H$  est horosphérique. Alors, par [Pas09], soit  $P = N_G(H)$  le normalisateur de  $H$  dans  $G$ , il existe un fibré en tores  $G/H \rightarrow G/P$  au dessus d'une variété de drapeaux  $G/P$ . La dimension du tore  $P/H$  est appelée le **rang** de  $G/H$  et on le note  $n$ . Dans cette thèse, on s'intéressera uniquement au cas  $n = 1$ .

Notons  $M$  le sous-réseau de  $\mathfrak{X}(T)$  qui consiste en les caractères de  $P$  dont la restriction à  $H$  est triviale et notons  $N$  son réseau dual (de rang  $n$  tous les deux).

Notons  $S'$  le sous-ensemble de  $S$  dont les éléments sont les racines simples qui ne sont pas des racines simples de  $P$ , et pour toute racine  $\alpha \in S'$ , la restriction de  $\alpha^\vee$  à  $M$ , qu'on note  $\alpha_M^\vee$ , appartient à  $N$ . Enfin, notons  $\sigma$  l'application de  $S'$  dans  $N$  qui envoie  $\alpha$  sur  $\alpha_M^\vee$ .

Toute racine  $\alpha \in S'$  correspond à un diviseur de  $G/H$  (image réciproque d'un diviseur de Schubert par  $G/H \rightarrow G/P$ ) qu'on appelle **une couleur** de  $G/H$  dans la théorie des variétés sphériques, et  $\alpha_M^\vee$  correspond à la valuation associée au diviseur.

**Définition 1.10.** Une variété normale  $X$  avec une action de  $G$  est appelée variété horosphérique s'il existe un sous-groupe horosphérique  $H$  de  $G$  et une orbite ouverte de  $G$  sur  $X$  isomorphe à  $G/H$ . Dans ce cas, on dit aussi que  $X$  est un  $G/H$ -plongement.

Dans la suite on note  $\mathbb{F}_X$  l'éventail colorié associé à  $X$  (voir [Pas06, Définition 1.14]). La classification des  $G/H$ -plongements en termes d'éventails coloriés de  $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  (dûe à D.Luna et T.Vust [LV83]) est détaillée plus précisément dans [Pas06, Chap.1] et généralise la classification des variétés toriques en termes d'éventails. Ici, on ajoute des couleurs à l'éventail qui sont des éléments  $\alpha$  de  $S'$  de sorte que  $\alpha_M^\vee \neq 0$ .

La classification des plongements a été obtenue en étudiant leurs orbites sous l'action de  $G$  et  $B$ , ainsi que leur diviseurs irréductibles sous ces mêmes actions. On sait de plus qu'il y a une bijection entre les cônes coloriés et les  $G$ -orbites ([Kno91])

**Remarque 1.11.** Rappelons qu'un  $G/H$ -plongement  $X$  est complet si et seulement si  $\mathbb{F}_X$  est complet, c'est-à-dire recouvre tout  $N_{\mathbb{R}}$ .

Dans notre cas, on étudie des variétés horosphériques projectives de rang 1, ce qui donne les éventails coloriés complets :

$$\mathbb{F}_X = ((\{0\}, \emptyset), (\mathbb{R}_+, \{S_X^+\}), (\mathbb{R}_-, \{S_X^-\})),$$

de sorte que  $S_X^+ \sqcup S_X^- \subset S' \subset S$  avec  $\forall \alpha \in S_X = S_X^+ \sqcup S_X^-$ ,  $\alpha_M^\vee \neq 0$ .

En particulier, les variétés étudiées ici sont des  $G$ -variétés à trois orbites avec deux  $G$ -orbites fermées et une ouverte.

En ajoutant l'hypothèse de  $\mathbb{Q}$ -factorialité, on obtient que  $\text{card}(S_X^+) \leq 1$  et  $\text{card}(S_X^-) \leq 1$ .

Si on suppose également que les variétés sont localement factorielles, on obtient alors  $\alpha_{0M}^\vee = -1$  si  $S_X^- = \{\alpha_0\}$  et  $\alpha_{1M}^\vee = 1$  si  $S_X^+ = \{\alpha_1\}$ . Si  $S_X^- = \emptyset$  ou  $S_X^+ = \emptyset$ , on dira que  $\alpha_0$  ou  $\alpha_1$  sont des racines **imaginaires** (afin de toujours avoir deux racines  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$ ).

Dans notre cas, le nombre de Picard  $\rho$  étant donné par la formule suivante :  $\rho = \text{card}(S') + (2 - \text{card}(S_X)) - 1 = 1 + \text{card}(S' \setminus S_X)$ , on obtient que  $\rho = 2$  si et seulement si  $\text{card}(S' \setminus S_X) = 1$ . On note  $\beta$  la racine simple (non imaginaire) de  $S' \setminus S_X$  et  $a_1 = \beta_M^\vee \in \mathbb{Z}$ , mais on peut supposer sans perte de généralité  $a_1 \geq 0$ .

Enfin, en ajoutant l'hypothèse de lissité, qui donne des conditions sur le groupe  $G$  et les positions des racines simples sur le diagramme de Dynkin, on obtient un cas particulier de la classification donnée dans [Pas20] et les trois possibilités suivantes : soit  $G = G_0$ , soit  $G = G_0 \times G_1$ , soit  $G = G_0 \times G_1 \times G_2$ , avec  $G_0$  un groupe simple simplement connexe et  $G_1$  et  $G_2$  égaux à  $SL_n$ ,  $\mathbb{C}^*$  ou  $\{1\}$ .

Les variétés étudiées sont notées  $\mathbb{X}^1(G, \beta, \underline{\alpha}, \underline{a})$ , comme dans [Pas20, Déf 3.9], avec  $\beta$  une racine simple de  $G_0$  (non imaginaire),  $\underline{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1)$  où  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  sont des racines simples de  $G$ , distinctes, possiblement triviales et différentes de  $\beta$ . Pour uniformiser la notation, on définit la notion de racine imaginaire

de la manière suivante.

**Définition 1.12.** *On dit que  $\alpha_0$  est une racine imaginaire si  $G_1 = \{1\}$  et on note  $\varpi_{\alpha_0} = 0$  par convention. De la même façon, on dit que  $\alpha_1$  est une racine imaginaire si  $G_1 = \mathbb{C}^*$  ou  $G_2 = \mathbb{C}^*$  et  $\varpi_{\alpha_1} = id_{\mathbb{C}^*}$ .*

**Définition 1.13.** *La variété  $\mathbb{X}^1(G, \beta, \underline{\alpha}, \underline{a})$ , qu'on notera  $\mathbb{X}$  dans la suite de la thèse, est l'adhérence d'une  $G$ -orbite d'une somme de vecteurs de plus haut poids dans  $\mathbb{P}(V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\beta}) \oplus V(\varpi_{\alpha_1} + (1 + a_1)\varpi_{\beta}))$ .*

**Remarque 1.14.** On retrouve ici les trois  $G$ -orbites de  $\mathbb{X}$  : l'ouverte, ainsi que les deux fermées définies respectivement comme l'adhérence d'une  $G$ -orbite d'une somme de vecteurs de plus haut poids dans  $\mathbb{P}(V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\beta}))$  et  $\mathbb{P}(V(\varpi_{\alpha_1} + (1 + a_1)\varpi_{\beta}))$ .

D'après [Pas20, Déf 4.3 et Appendice], on obtient une liste exhaustive de tous les cas dans lesquels on obtient une variété horosphérique projective lisse de rang 1 de groupe de Picard de rang 2, on obtient la liste suivante, où on notera  $R_0$  le sous-ensemble de  $\{\alpha_0, \alpha_1\}$  constitué des racines simples de  $G_0$ . On a plusieurs cas de figure possibles : soit  $R_0 = \{\alpha_0, \alpha_1\}$ , soit  $R_0 = \{\alpha_0\}$  ou  $R_0 = \{\alpha_1\}$  et l'autre racine est une racine simple extrémale de  $G_1$  un groupe de type  $A_m$  soit une racine imaginaire (c'est-à-dire  $\alpha_0$  racine de  $\{1\}$  ou  $\alpha_1$  racine de  $\mathbb{C}^*$ ).

Par la suite, on notera  $\chi_1, \chi_2, \dots$  les racines simples de  $G_0$ ,  $\chi'_i$  les racines de  $G_1$  et  $\chi''_i$  les racines de  $G_2$ .

**Remarque 1.15.** Dans la liste, quand on note  $R_0 = \{\chi_i, \chi_j\}$ , par convention on a  $i < j$ . On a alors deux sous-cas à étudier : le cas où les racines sont rangées dans l'ordre croissant, c'est-à-dire  $\alpha_0 = \chi_i$  et  $\alpha_1 = \chi_j$  et le cas où  $\alpha_0 = \chi_j$  et  $\alpha_1 = \chi_i$ . On notera le premier sous-cas (I), (II), etc et le second (I'), (II'), etc. De la même façon, quand on a  $R_0 = \{\chi_k\}$ , on considère le cas où  $\alpha_0 = \chi_k$  et  $\alpha_1$  est une racine (possiblement imaginaire) de  $G_1$  et le cas où  $\alpha_1 = \chi_k$  et  $\alpha_0$  est une racine (possiblement imaginaire) simple de  $G_1$ .

**Remarque 1.16.** Quand  $a_1 = 0$ , il n'y a pas de cas ' et on considérera l'ordre croissant pour  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$ .

Quand  $a_1 > 0$ , on a aussi les cas où  $R_0$  est vide, ce qui signifie que soit  $G = G_0 \times G_1$  avec  $\alpha_0, \alpha_1$  des racines simples non triviales de  $G_1$  (cas (XVIII) de la liste ci-dessous), soit  $G = G_0 \times G_1 \times G_2$  et  $\alpha_0, \alpha_1$  respectivement des racines de  $G_1$  et  $G_2$ , possiblement imaginaires.

**Remarque 1.17.** Dans le premier cas de figure, il est important de considérer  $a_1 > 0$  sinon  $\mathbb{X}$  est un produit de deux variétés de Picard 1, qu'on n'étudie pas ici.

- ▶ (I)  $G_0$  est de type  $A_m$ ,  $m \geq 3$  :
  - (1)  $\beta = \chi_m$ ,  $R_0 = \{\chi_1, \chi_{m-1}\}$
  - (2)  $\beta = \chi_k$ ,  $3 \leq k < m$ ,  $R_0 = \{\chi_1, \chi_{k-1}\}$
  - (3)  $\beta = \chi_m$ ,  $R_0 = \{\chi_i, \chi_{i+1}\}$ ,  $1 \leq i \leq m-2$
  - (4)  $\beta = \chi_k$ ,  $4 \leq k < m$ ,  $R_0 = \{\chi_i, \chi_{i+1}\}$ ,  $1 \leq i \leq k-2$
- ▶ (II)  $G_0$  est de type  $B_m$ ,  $m \geq 3$  :
  - (1)  $\beta = \chi_m$ ,  $R_0 = \{\chi_1, \chi_{m-1}\}$
  - (2)  $\beta = \chi_k$ ,  $3 \leq k < m$ ,  $R_0 = \{\chi_1, \chi_{k-1}\}$
  - (3)  $\beta = \chi_m$ ,  $R_0 = \{\chi_i, \chi_{i+1}\}$ ,  $1 \leq i \leq m-2$
  - (4)  $\beta = \chi_k$ ,  $3 \leq k < m$ ,  $R_0 = \{\chi_i, \chi_{i+1}\}$ ,  $1 \leq i \leq k-2$
  - (5)  $\beta = \chi_k$ ,  $1 \leq k \leq m-2$ ,  $R_0 = \{\chi_{m-1}, \chi_m\}$
  - (6)  $\beta = \chi_{m-3}$ ,  $R_0 = \{\chi_{m-2}, \chi_m\}$
- ▶ (III)  $G_0$  est de type  $C_m$ ,  $m \geq 3$  :
  - (1)  $\beta = \chi_m$ ,  $R_0 = \{\chi_1, \chi_{m-1}\}$
  - (2)  $\beta = \chi_k$ ,  $3 \leq k < m$ ,  $R_0 = \{\chi_1, \chi_{k-1}\}$
  - (3)  $\beta = \chi_m$ ,  $R_0 = \{\chi_i, \chi_{i+1}\}$ ,  $1 \leq i \leq m-2$
  - (4)  $\beta = \chi_k$ ,  $4 \leq k < m$ ,  $R_0 = \{\chi_i, \chi_{i+1}\}$ ,  $1 \leq i \leq k-2$
  - (5)  $\beta = \chi_k$ ,  $1 \leq k \leq m-2$ ,  $R_0 = \{\chi_i, \chi_{i+1}\}$ ,  $i \geq k+1$
- ▶ (IV)  $G_0$  est de type  $D_m$ ,  $m \geq 4$  :
  - (1)  $\beta = \chi_k$ ,  $3 \leq k \leq m-2$ ,  $R_0 = \{\chi_1, \chi_{k-1}\}$
  - (2)  $\beta = \chi_m$ ,  $R_0 = \{\chi_1, \chi_{m-1}\}$
  - (3)  $\beta = \chi_k$ ,  $4 \leq k \leq m-2$ ,  $R_0 = \{\chi_i, \chi_{i+1}\}$ ,  $1 \leq i \leq k-2$
  - (4)  $\beta = \chi_m$ ,  $R_0 = \{\chi_i, \chi_{i+1}\}$ ,  $1 \leq i \leq m-2$
  - (5)  $\beta = \chi_k$ ,  $1 \leq k \leq m-4$ ,  $R_0 = \{\chi_{m-1}, \chi_m\}$
  - (6)  $\beta = \chi_{m-3}$ ,  $m \geq 5$ ,  $R_0 = \{\chi_{m-2}, \chi_{m-1}\}$
  - (7)  $\beta = \chi_{m-3}$ ,  $m \geq 5$ ,  $R_0 = \{\chi_{m-2}, \chi_m\}$
  - (8)  $\beta = \chi_{m-3}$ ,  $m \geq 5$ ,  $R_0 = \{\chi_{m-1}, \chi_m\}$
- (9)  $\beta = \chi_{m-2}$ ,  $m \geq 5$ ,  $R_0 = \{\chi_{m-1}, \chi_m\}$
- ▶ (V)  $G_0$  est de type  $E_6$  :
  - (1)  $\beta = \chi_1$ ,  $R_0 = \{\chi_2, \chi_3\}$
  - (2)  $\beta = \chi_2$ ,  $R_0 = \{\chi_1, \chi_6\}$
  - (3)  $\beta = \chi_2$ ,  $R_0 = \{\chi_1, \chi_3\}$
  - (4)  $\beta = \chi_2$ ,  $R_0 = \{\chi_3, \chi_4\}$
  - (5)  $\beta = \chi_3$ ,  $R_0 = \{\chi_2, \chi_6\}$
  - (6)  $\beta = \chi_3$ ,  $R_0 = \{\chi_2, \chi_4\}$
  - (7)  $\beta = \chi_3$ ,  $R_0 = \{\chi_4, \chi_5\}$
  - (8)  $\beta = \chi_3$ ,  $R_0 = \{\chi_5, \chi_6\}$
  - (9)  $\beta = \chi_4$ ,  $R_0 = \{\chi_1, \chi_3\}$
- ▶ (VI)  $G_0$  est de type  $E_7$  :
  - (1)  $\beta = \chi_1$ ,  $R_0 = \{\chi_2, \chi_3\}$
  - (2)  $\beta = \chi_2$ ,  $R_0 = \{\chi_1, \chi_7\}$
  - (3)  $\beta = \chi_2$ ,  $R_0 = \{\chi_1, \chi_3\}$
  - (4)  $\beta = \chi_2$ ,  $R_0 = \{\chi_3, \chi_4\}$
  - (5)  $\beta = \chi_2$ ,  $R_0 = \{\chi_4, \chi_5\}$
  - (6)  $\beta = \chi_2$ ,  $R_0 = \{\chi_5, \chi_6\}$
  - (7)  $\beta = \chi_2$ ,  $R_0 = \{\chi_6, \chi_7\}$
  - (8)  $\beta = \chi_3$ ,  $R_0 = \{\chi_2, \chi_7\}$
  - (9)  $\beta = \chi_3$ ,  $R_0 = \{\chi_2, \chi_4\}$
  - (10)  $\beta = \chi_3$ ,  $R_0 = \{\chi_4, \chi_5\}$
  - (11)  $\beta = \chi_3$ ,  $R_0 = \{\chi_5, \chi_6\}$
  - (12)  $\beta = \chi_3$ ,  $R_0 = \{\chi_6, \chi_7\}$
  - (13)  $\beta = \chi_4$ ,  $R_0 = \{\chi_1, \chi_3\}$
  - (14)  $\beta = \chi_4$ ,  $R_0 = \{\chi_5, \chi_7\}$
  - (15)  $\beta = \chi_4$ ,  $R_0 = \{\chi_5, \chi_6\}$
  - (16)  $\beta = \chi_4$ ,  $R_0 = \{\chi_6, \chi_7\}$
  - (17)  $\beta = \chi_5$ ,  $R_0 = \{\chi_1, \chi_2\}$
  - (18)  $\beta = \chi_5$ ,  $R_0 = \{\chi_1, \chi_3\}$
  - (19)  $\beta = \chi_5$ ,  $R_0 = \{\chi_3, \chi_4\}$
  - (20)  $\beta = \chi_5$ ,  $R_0 = \{\chi_2, \chi_4\}$
  - (21)  $\beta = \chi_5$ ,  $R_0 = \{\chi_6, \chi_7\}$



- (22)  $\beta = \chi_6, R_0 = \{\chi_2, \chi_5\}$
- (VII)  $G_0$  est de type  $E_8$  :
  - (1)  $\beta = \chi_1, R_0 = \{\chi_2, \chi_3\}$
  - (2)  $\beta = \chi_2, R_0 = \{\chi_1, \chi_8\}$
  - (3)  $\beta = \chi_2, R_0 = \{\chi_1, \chi_3\}$
  - (4)  $\beta = \chi_2, R_0 = \{\chi_3, \chi_4\}$
  - (5)  $\beta = \chi_2, R_0 = \{\chi_4, \chi_5\}$
  - (6)  $\beta = \chi_2, R_0 = \{\chi_5, \chi_6\}$
  - (7)  $\beta = \chi_2, R_0 = \{\chi_6, \chi_7\}$
  - (8)  $\beta = \chi_2, R_0 = \{\chi_7, \chi_8\}$
  - (9)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_2, \chi_8\}$
  - (10)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_2, \chi_4\}$
  - (11)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_4, \chi_5\}$
  - (12)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_5, \chi_6\}$
  - (13)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_6, \chi_7\}$
  - (14)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_7, \chi_8\}$
  - (15)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_1, \chi_3\}$
  - (16)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_5, \chi_8\}$
  - (17)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_5, \chi_6\}$
- (18)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_6, \chi_7\}$
- (19)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_7, \chi_8\}$
- (20)  $\beta = \chi_5, R_0 = \{\chi_1, \chi_2\}$
- (21)  $\beta = \chi_5, R_0 = \{\chi_1, \chi_3\}$
- (22)  $\beta = \chi_5, R_0 = \{\chi_3, \chi_4\}$
- (23)  $\beta = \chi_5, R_0 = \{\chi_2, \chi_4\}$
- (24)  $\beta = \chi_5, R_0 = \{\chi_6, \chi_8\}$
- (25)  $\beta = \chi_5, R_0 = \{\chi_6, \chi_7\}$
- (26)  $\beta = \chi_5, R_0 = \{\chi_7, \chi_8\}$
- (27)  $\beta = \chi_6, R_0 = \{\chi_2, \chi_5\}$
- (28)  $\beta = \chi_6, R_0 = \{\chi_7, \chi_8\}$
- (VIII)  $G_0$  est de type  $F_4$  :
  - (1)  $\beta = \chi_1, R_0 = \{\chi_3, \chi_4\}$
  - (2)  $\beta = \chi_1, R_0 = \{\chi_2, \chi_3\}$
  - (3)  $\beta = \chi_2, R_0 = \{\chi_3, \chi_4\}$
  - (4)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_1, \chi_2\}$
  - (5)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_2, \chi_3\}$
  - (6)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_1, \chi_3\}$

Il reste encore à étudier les cas (2) de [Pas20, Appendice]. Voici la liste qu'on obtient :

- (IX)  $G_0$  est de type  $A_m, m \geq 2$  :
  - (1)  $\beta = \chi_1, R_0 = \{\chi_2\}$
  - (2)  $\beta = \chi_1, R_0 = \{\chi_m\}, m \geq 3$
  - (3)  $\beta = \chi_k, 2 \leq k \leq \frac{m}{2}, R_0 = \{\chi_{k+1}\}$
  - (4)  $\beta = \chi_k, 2 \leq k \leq \frac{m}{2}, R_0 = \{\chi_{k+1}\}$
  - (5)  $\beta = \chi_k, 2 \leq k \leq \frac{m}{2}, R_0 = \{\chi_1, \chi_{k+1}\}$
  - (6)  $\beta = \chi_k, 2 \leq k \leq \frac{m}{2}, R_0 = \{\chi_m\}$
  - (7)  $\beta = \chi_k, 2 \leq k \leq \frac{m}{2}, R_0 = \{\chi_1, \chi_m\}$
  - (8)  $\beta = \chi_k, 2 \leq k \leq \frac{m}{2}, R_0 = \{\chi_{k-1}\}$
  - (9)  $\beta = \chi_k, 2 \leq k \leq \frac{m}{2}, R_0 = \{\chi_{k-1}, \chi_{k+1}\}$
  - (10)  $\beta = \chi_k, 3 \leq k \leq \frac{m}{2}, R_0 = \{\chi_{k-1}\}$
  - (11)  $\beta = \chi_k, 3 \leq k \leq \frac{m}{2}, R_0 = \{\chi_m\}$
  - (12)  $\beta = \chi_k, 3 \leq k \leq \frac{m}{2}, R_0 = \{\chi_{k-1}, \chi_m\}$
  - (13)  $\beta = \chi_{\frac{m+1}{2}}, m$  impair,  $R_0 = \{\chi_1\}$
  - (14)  $\beta = \chi_{\frac{m+1}{2}}, m$  impair,  $R_0 = \{\chi_m\}$
  - (15)  $\beta = \chi_{\frac{m+1}{2}}, m$  impair,  $R_0 = \{\chi_1, \chi_m\}$
  - (16)  $\beta = \chi_{\frac{m+1}{2}}, m$  impair,  $R_0 = \{\chi_{\frac{m-1}{2}}\}$
  - (17)  $\beta = \chi_{\frac{m+1}{2}}, m$  impair,  $R_0 = \{\chi_1, \chi_{\frac{m+3}{2}}\}$
  - (18)  $\beta = \chi_{\frac{m+1}{2}}, m$  impair et  $m \geq 5, R_0 = \{\chi_{\frac{m-1}{2}}, \chi_{\frac{m+3}{2}}\}$
- (X)  $G_0$  est de type  $B_m, m \geq 3$  :
  - (1)  $\beta = \chi_1, R_0 = \{\chi_3\}, m = 3$
  - (2)  $\beta = \chi_k, 2 \leq k \leq m-3, R_0 = \{\chi_1\}$
  - (3)  $\beta = \chi_k, 3 \leq k \leq m-3, R_0 = \{\chi_{k-1}\}$
  - (4)  $\beta = \chi_{m-2}, m \geq 4, R_0 = \{\chi_1\}$
  - (5)  $\beta = \chi_{m-2}, m \geq 4, R_0 = \{\chi_m\}$
  - (6)  $\beta = \chi_{m-2}, m \geq 4, R_0 = \{\chi_1, \chi_m\}$
  - (7)  $\beta = \chi_{m-2}, m \geq 5, R_0 = \{\chi_{m-3}\}$
  - (8)  $\beta = \chi_{m-2}, m \geq 5, R_0 = \{\chi_m\}$
  - (9)  $\beta = \chi_{m-2}, m \geq 5, R_0 = \{\chi_{m-3}, \chi_m\}$
  - (10)  $\beta = \chi_{m-1}, R_0 = \{\chi_1\}$
  - (11)  $\beta = \chi_{m-1}, R_0 = \{\chi_m\}$
  - (12)  $\beta = \chi_{m-1}, R_0 = \{\chi_1, \chi_m\}$
  - (13)  $\beta = \chi_{m-1}, m \geq 4, R_0 = \{\chi_{m-2}\}$
  - (14)  $\beta = \chi_{m-1}, m \geq 5, R_0 = \{\chi_{m-2}, \chi_m\}$
  - (15)  $\beta = \chi_m, R_0 = \{\chi_1\}$
  - (16)  $\beta = \chi_m, R_0 = \{\chi_{m-1}\}$
- (XI)  $G_0$  est de type  $C_m, m \geq 2$  :
  - (1)  $\beta = \chi_1, R_0 = \{\chi_2\}$

- (2)  $\beta = \chi_k, 2 \leq k \leq m-1, m \geq 3, R_0 = \{\chi_1\}$
  - (3)  $\beta = \chi_k, 2 \leq k \leq m-1, m \geq 3, R_0 = \{\chi_{k+1}\}$
  - (4)  $\beta = \chi_k, 2 \leq k \leq m-1, m \geq 3, R_0 = \{\chi_1, \chi_{k+1}\}$
  - (5)  $\beta = \chi_k, 3 \leq k \leq m-1, m \geq 4, R_0 = \{\chi_{k-1}\}$
  - (6)  $\beta = \chi_k, 3 \leq k \leq m-1, m \geq 4, R_0 = \{\chi_{k+1}\}$
  - (7)  $\beta = \chi_k, 3 \leq k \leq m-1, m \geq 4, R_0 = \{\chi_{k-1}, \chi_{k+1}\}$
  - (8)  $\beta = \chi_m, R_0 = \{\chi_1\}$
  - (9)  $\beta = \chi_m, m \geq 3, R_0 = \{\chi_{m-1}\}$
- (XII)  $G_0$  est de type  $D_m, m \geq 4$  :
- (1)  $\beta = \chi_k, 2 \leq k \leq m-4, m \geq 6, R_0 = \{\chi_1\}$
  - (2)  $\beta = \chi_k, 3 \leq k \leq m-4, m \geq 7, R_0 = \{\chi_{k-1}\}$
  - (3)  $\beta = \chi_{m-3}, R_0 = \{\chi_{m-1}\}$
  - (4)  $\beta = \chi_{m-3}, m \geq 5, R_0 = \{\chi_1\}$
  - (5)  $\beta = \chi_{m-3}, m \geq 5, R_0 = \{\chi_{m-1}\}$
  - (6)  $\beta = \chi_{m-3}, m \geq 5, R_0 = \{\chi_1, \chi_{m-1}\}$
  - (7)  $\beta = \chi_{m-3}, m \geq 6, R_0 = \{\chi_{m-4}\}$
  - (8)  $\beta = \chi_{m-3}, m \geq 6, R_0 = \{\chi_{m-1}\}$
  - (9)  $\beta = \chi_{m-3}, m \geq 6, R_0 = \{\chi_{m-4}, \chi_{m-1}\}$
  - (10)  $\beta = \chi_{m-2}, R_0 = \{\chi_1\}$
  - (11)  $\beta = \chi_{m-2}, R_0 = \{\chi_1, \chi_{m-1}\}$
  - (12)  $\beta = \chi_{m-2}, m \geq 5, R_0 = \{\chi_{m-3}\}$
  - (13)  $\beta = \chi_{m-2}, m \geq 5, R_0 = \{\chi_{m-1}\}$
  - (14)  $\beta = \chi_{m-2}, R_0 = \{\chi_{m-3}, \chi_{m-1}\}, m \geq 5$
  - (15)  $\beta = \chi_m, R_0 = \{\chi_1\}$
  - (16)  $\beta = \chi_m, R_0 = \{\chi_{m-1}\}$
- (XIII)  $G_0$  est de type  $E_6$  :
- (1)  $\beta = \chi_2, R_0 = \{\chi_1\}$
  - (2)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_1\}$
  - (3)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_2\}$
  - (4)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_1, \chi_2\}$
  - (5)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_6\}$
  - (6)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_1, \chi_6\}$
  - (7)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_1\}$
  - (8)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_2\}$
  - (9)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_3\}$
  - (10)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_5\}$
  - (11)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_6\}$
  - (12)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_2, \chi_1\}$
  - (13)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_2, \chi_3\}$
  - (14)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_2, \chi_5\}$
  - (15)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_2, \chi_6\}$
  - (16)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_1, \chi_2\}$
  - (17)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_1, \chi_5\}$
  - (18)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_1, \chi_6\}$
  - (19)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_3, \chi_2\}$
- (20)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_3, \chi_5\}$
  - (21)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_3, \chi_6\}$
  - (22)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_5, \chi_1\}$
  - (23)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_5, \chi_2\}$
  - (24)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_5, \chi_3\}$
  - (25)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_6, \chi_1\}$
  - (26)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_6, \chi_2\}$
  - (27)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_6, \chi_3\}$
- (XIV)  $G_0$  est de type  $E_7$  :
- (1)  $\beta = \chi_2, R_0 = \{\chi_1\}$
  - (2)  $\beta = \chi_2, R_0 = \{\chi_7\}$
  - (3)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_1\}$
  - (4)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_2\}$
  - (5)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_1, \chi_2\}$
  - (6)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_7\}$
  - (7)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_1, \chi_7\}$
  - (8)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_1\}$
  - (9)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_2\}$
  - (10)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_3\}$
  - (11)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_5\}$
  - (12)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_7\}$
  - (13)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_2, \chi_1\}$
  - (14)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_2, \chi_3\}$
  - (15)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_2, \chi_5\}$
  - (16)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_2, \chi_7\}$
  - (17)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_1, \chi_2\}$
  - (18)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_1, \chi_5\}$
  - (19)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_1, \chi_7\}$
  - (20)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_3, \chi_2\}$
  - (21)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_3, \chi_5\}$
  - (22)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_3, \chi_7\}$
  - (23)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_5, \chi_1\}$
  - (24)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_5, \chi_2\}$
  - (25)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_5, \chi_3\}$
  - (26)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_7, \chi_1\}$
  - (27)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_7, \chi_2\}$
  - (28)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_7, \chi_3\}$
  - (29)  $\beta = \chi_5, R_0 = \{\chi_1\}$
  - (30)  $\beta = \chi_5, R_0 = \{\chi_2\}$
  - (31)  $\beta = \chi_5, R_0 = \{\chi_6\}$
  - (32)  $\beta = \chi_5, R_0 = \{\chi_7\}$
  - (33)  $\beta = \chi_5, R_0 = \{\chi_1, \chi_6\}$
  - (34)  $\beta = \chi_5, R_0 = \{\chi_1, \chi_7\}$
  - (35)  $\beta = \chi_5, R_0 = \{\chi_2, \chi_6\}$
  - (36)  $\beta = \chi_5, R_0 = \{\chi_2, \chi_7\}$
  - (37)  $\beta = \chi_6, R_0 = \{\chi_7\}$
- (XV)  $G_0$  est de type  $E_8$  :

- (1)  $\beta = \chi_2, R_0 = \{\chi_1\}$
  - (2)  $\beta = \chi_2, R_0 = \{\chi_8\}$
  - (3)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_1\}$
  - (4)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_2\}$
  - (5)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_1, \chi_2\}$
  - (6)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_8\}$
  - (7)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_1, \chi_8\}$
  - (8)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_1\}$
  - (9)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_2\}$
  - (10)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_3\}$
  - (11)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_5\}$
  - (12)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_8\}$
  - (13)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_2, \chi_1\}$
  - (14)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_2, \chi_3\}$
  - (15)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_2, \chi_5\}$
  - (16)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_2, \chi_8\}$
  - (17)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_1, \chi_2\}$
  - (18)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_1, \chi_5\}$
  - (19)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_1, \chi_8\}$
  - (20)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_3, \chi_2\}$
  - (21)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_3, \chi_5\}$
  - (22)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_3, \chi_8\}$
  - (23)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_5, \chi_1\}$
  - (24)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_5, \chi_2\}$
  - (25)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_5, \chi_3\}$
  - (26)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_8, \chi_1\}$
  - (27)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_8, \chi_2\}$
  - (28)  $\beta = \chi_4, R_0 = \{\chi_8, \chi_3\}$
  - (29)  $\beta = \chi_5, R_0 = \{\chi_1\}$
  - (30)  $\beta = \chi_5, R_0 = \{\chi_2\}$
  - (31)  $\beta = \chi_5, R_0 = \{\chi_6\}$
  - (32)  $\beta = \chi_5, R_0 = \{\chi_8\}$
  - (33)  $\beta = \chi_5, R_0 = \{\chi_1, \chi_6\}$
  - (34)  $\beta = \chi_5, R_0 = \{\chi_1, \chi_8\}$
  - (35)  $\beta = \chi_5, R_0 = \{\chi_2, \chi_6\}$
  - (36)  $\beta = \chi_5, R_0 = \{\chi_2, \chi_8\}$
  - (37)  $\beta = \chi_6, R_0 = \{\chi_7\}$
  - (38)  $\beta = \chi_6, R_0 = \{\chi_8\}$
  - (39)  $\beta = \chi_7, R_0 = \{\chi_8\}$
- (XVI)  $G_0$  est de type  $F_4$  :
- (1)  $\beta = \chi_1, R_0 = \{\chi_4\}$
  - (2)  $\beta = \chi_2, R_0 = \{\chi_1\}$
  - (3)  $\beta = \chi_2, R_0 = \{\chi_3\}$
  - (4)  $\beta = \chi_2, R_0 = \{\chi_1, \chi_3\}$
  - (5)  $\beta = \chi_2, R_0 = \{\chi_4\}$
  - (6)  $\beta = \chi_2, R_0 = \{\chi_1, \chi_4\}$
  - (7)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_1\}$
  - (8)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_4\}$
  - (9)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_1, \chi_4\}$
  - (10)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_2\}$
  - (11)  $\beta = \chi_3, R_0 = \{\chi_2, \chi_4\}$
- (XVII)  $G_0$  est de type  $G_2$  :
- (1)  $\beta = \chi_1, R_0 = \{\chi_2\}$
  - (2)  $\beta = \chi_2, R_0 = \{\chi_1\}$

Dans le cas où  $G = G_0 \times G_1$ , avec  $a_1 > 0$ , il existe aussi le cas où  $\beta \in G_0$  et  $\alpha_0, \alpha_1 \in G_1$ , ce qui correspond à la liste suivante :

► (XVIII)  $G_0$  quelconque et  $(G_1, \alpha_0, \alpha_1)$  est un des triplets de la liste suivante :

- (1)  $(A_m, \chi_1, \chi_m)$ , avec  $m \geq 2$
- (2)  $(A_m, \chi_i, \chi_{i+1})$ , avec  $m \geq 3$  et  $i \in \{1, \dots, m-1\}$
- (3)  $(B_m, \chi_{m-1}, \chi_m)$ , avec  $m \geq 3$
- (4)  $(B_3, \chi_1, \chi_3)$
- (5)  $(C_m, \chi_{i+1}, \chi_i)$ , avec  $m \geq 2$  et  $i \in \{1, \dots, m-1\}$
- (6)  $(D_m, \chi_{m-1}, \chi_m)$ , avec  $m \geq 4$
- (7)  $(F_4, \chi_2, \chi_3)$
- (8)  $(G_2, \chi_2, \chi_1)$

Comme précédemment, on notera (XVIII'), etc les cas précédents où cette fois on considère les triplets  $(G_1, \alpha_1, \alpha_0)$ .

Finalement, quand  $a_1 > 0$ , on traitera les cas  $G = G_0 \times G_1 \times G_2$  avec  $\beta \in G_0$ , où  $G_0$  quelconque,  $G_1$  de type  $A_m$  ou  $\{1\}$  et  $G_2$  de type  $A_m$  ou  $\mathbb{C}^*$ , avec  $\alpha_0, \alpha_1$  racines simples respectivement de  $G_1$  et  $G_2$  (éventuellement imaginaires).

On va à présent donner quelques éventails associés à  $\mathbb{X}$  quand  $a_1 = 0$  et quand  $a_1 > 0$ , dans le cas où  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  sont des vraies racines et dans le cas où  $\alpha_0$  est une vraie racine et  $\alpha_1$  une racine imaginaire. On ne donnera pas les éventails dans les cas où  $\alpha_0$  est imaginaire puisque le résultat est similaire.

Commençons par le premier cas, quand  $a_1 = 0$ , quand  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  sont des vraies racines. On obtient que l'éventail associé à  $\mathbb{X}$  est :

$$\mathbb{F}_{\mathbb{X}} = \{(\{0\}, \emptyset), (\mathbb{R}^+, \{\alpha_1\}), (\mathbb{R}^-, \{\alpha_0\})\}$$

illustré ci-dessous :

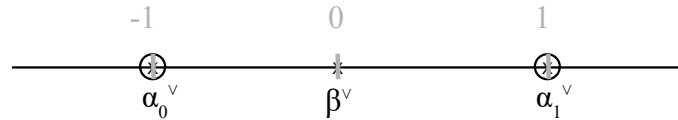


FIGURE 1.1 – Éventail associé à  $\mathbb{X}$  (cas A)

Dans le cas  $a_1 > 0$ , toujours avec  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  deux vraies racines, on obtient que l'éventail associé à  $\mathbb{X}$  est :

$$\mathbb{F}_{\mathbb{X}} = \{(\{0\}, \emptyset), (\mathbb{R}^+, \{\alpha_1\}), (\mathbb{R}^-, \{\alpha_0\})\}$$

illustré ci-dessous :

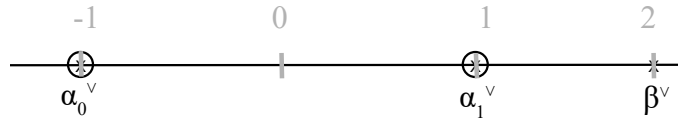


FIGURE 1.2 – Éventail associé à  $\mathbb{X}$  pour  $a_1 = 2$  (cas B)

Quand  $\alpha_1$  est une racine imaginaire et quand  $a_1 = 0$ , on obtient que l'éventail associé à  $\mathbb{X}$  est :

$$\mathbb{F}_{\mathbb{X}} = \{(\{0\}, \emptyset), (\mathbb{R}^+, \emptyset), (\mathbb{R}^-, \{\alpha_0\})\}$$

illustré ci-dessous :

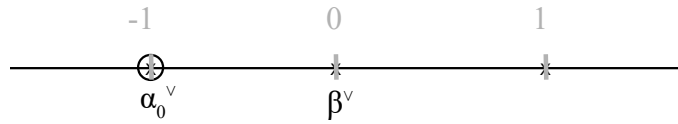


FIGURE 1.3 – Éventail associé à  $\mathbb{X}$  (cas C)

Dans le cas  $a_1 > 0$ , avec  $\alpha_1$  imaginaire, on obtient que l'éventail associé à  $\mathbb{X}$  est :

$$\mathbb{F}_{\mathbb{X}} = \{(\{0\}, \emptyset), (\mathbb{R}^+, \{\alpha_1\}), (\mathbb{R}^-, \{\alpha_0\})\}$$

illustré ci-dessous :

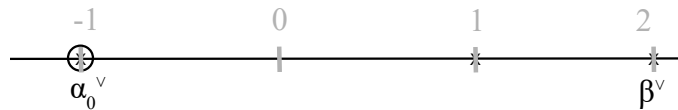


FIGURE 1.4 – Éventail associé à  $\mathbb{X}$  pour  $a_1 = 2$  (cas D)

### 3 Morphismes $G$ -équivariants et Log MMP

Soient  $X, X'$  deux variétés horosphériques projectives lisses, avec  $X$  un  $G/H$ -plongement et  $X'$  un  $G/H'$ -plongement. Il existe une caractérisation complète des morphismes  $G$ -équivariants entre  $X$  et  $X'$  (voir [Kno91, §4]). On détaille ci-dessous le cas où  $X$  est complète de rang 1 et  $X'$  est complète de rang 1 ou 0, et pour les contractions  $G$ -équivariantes (qui sont en particulier à fibres connexes).

**Notation 1.18.** Soit  $P_\chi$  le sous-groupe parabolique maximal associé à  $\chi$  tel que  $\varpi_\chi$  est un caractère de  $P_\chi$ . On note  $P_{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k} := P_{\chi_1} \cap P_{\chi_2} \cap \dots \cap P_{\chi_k}$ . (voir Chapitre 1, section 1). Par convention, on a  $P_\chi = G$  lorsque  $\chi$  est imaginaire. On note  $I_P$  les couleurs associées à  $P$  (c'est le  $I$  tel que  $P = P_I$ ).

On appelle **contraction** un morphisme projectif  $f : X \rightarrow Y$  tel que  $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$ .

On dit que la contraction est **extrémale** si les courbes contractées par  $f$  sont exactement celles dont la classe est sur le rayon extrémal.

**Proposition 1.19.** Soient  $X$  une variété complète de rang 1,  $X'$  une variété complète de rang 1 ou 0 et  $\varphi : X \rightarrow X'$  une contraction  $G$ -équivariante, alors on est dans l'un des trois cas suivants :

- 1)  $X$  et  $X'$  sont de rang 1,  $H = H'$  et  $S_X \subset S_{X'}$
- 2)  $X$  et  $X'$  sont de rang 1,  $H = \ker \chi \subset P$  et  $H' = \ker \chi \subset P'$  avec  $P' \not\supset P$  et  $\chi \in \mathfrak{X}(P')$  et  $\alpha \in S_P \setminus S_{P'}$  ce qui donne  $\alpha_M^\vee = 0$ ,  $S_X \subset S_{X'} \cap I_{P'}$
- 3)  $X$  est de rang 1 et  $X'$  est de rang 0,  $H' = P'$  parabolique tel que  $I_{P'} \subset S' \setminus S_X$  et  $X' = G/H'$ .

**Corollaire 1.20.** Si de plus  $\varphi$  est une contraction extrémale, alors on a l'un des cas suivants :

- 1)  $X$  et  $X'$  sont de rang 1,  $H = H'$  et  $S_{X'} = S_X \sqcup \{\alpha\}$  avec  $\alpha \in S' \setminus S_X$
- 2)  $X$  et  $X'$  sont de rang 1,  $H = \ker \chi \subset P$  et  $H' = \ker \chi \subset P'$ ,  $P = P' \cap P_\alpha$  avec  $\alpha \in S' \setminus S_X$  et  $\alpha_M^\vee = 0$ ,  $S_{X'} = S_X$

3)  $X$  est de rang 1 et  $X'$  est de rang 0,  $P' = P_{S' \setminus S_X}$  et  $X' = G/P'$ .

Afin de pouvoir étudier les variétés  $\mathbb{X}$ , on utilisera dans la suite de la thèse la version Log du Programme des Modèles Minimaux (appelé Log MMP). Le Log MMP décrit une suite de transformations birationnelles qui se termine par une fibration ou un modèle minimal, à savoir que dans nos cas, on a toujours une fibration à la fin (voir [Mat02] et [Pas17]).

On va s'intéresser à présent à la représentation du Log MMP de  $\mathbb{X}$  dans le cas des variétés horosphériques de rang 1, projectives, lisses, de nombre de Picard 2.

Le Log MMP peut être défini en termes de polytopes moments comme dans [Pas17] mais il peut aussi être donné directement par la description des morphismes  $G$ -équivariants, comme ici, à l'aide de la Proposition 1.19 et du Corollaire 1.20.

**Lemme 1.21.** *D'après [Pas20, Théorème 1.3], le Log MMP donne toujours d'un côté une fibration notée  $F_1 : \mathbb{X} \rightarrow G/P_\beta$  qui correspond au cas 3) du Corollaire 1.20.*

**Remarque 1.22.** On rappelle que nos variétés  $\mathbb{X}$  ont trois orbites sous l'action de  $G$  : deux fermées qu'on note  $Y$  et  $Z$  qui sont respectivement isomorphes à  $G/P_{\alpha_0, \beta}$  (en rouge),  $G/P_{\alpha_1, \beta}$  (en bleu) et une ouverte isomorphe à  $G/H \rightarrow G/P$  avec  $P = P_{\alpha_0, \alpha_1, \beta}$  :

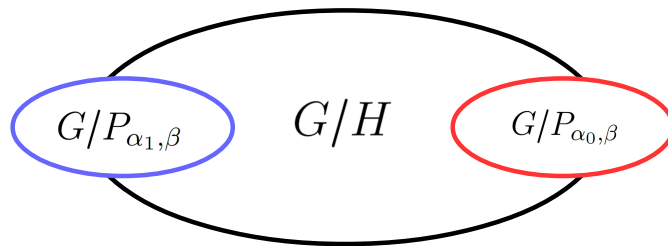


FIGURE 1.5 – Orbites d'une variété  $\mathbb{X}$  de rang 1 et de nombre de Picard 2



Il reste donc seulement à étudier la contraction provenant du deuxième rayon extrémal de  $\text{NE}(\mathbb{X})$ . Commençons par le premier cas.

[Cas A] Soit  $\mathbb{X}$  comme dans la Définition 1.13. Supposons  $a_1 = 0$ . Soit  $W$  le  $G/H'$  plongement associé à l'éventail suivant, avec  $H' = \ker \chi \subset P'$  où  $P' = P_{\alpha_0, \alpha_1}$  :

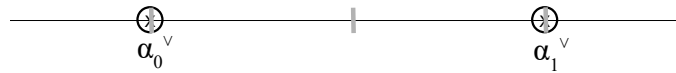


FIGURE 1.6 – Éventail associé à  $W$  dans le cas A

Alors :

- il existe une fibration  $F_2 : \mathbb{X} \rightarrow W$ , ce qui donne le Log MMP suivant :

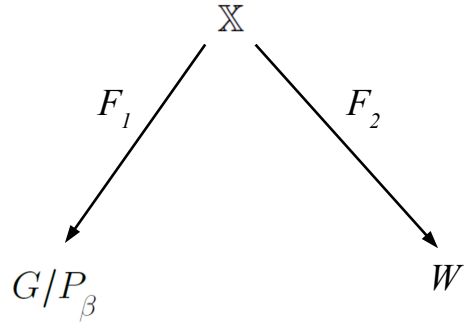


FIGURE 1.7 – Log MMP de  $\mathbb{X}$  pour  $a_1 = 0$  dans le cas A

- les orbites de  $W$  sont notées  $Y'$  isomorphe à  $G/P_{\alpha_0}$  (en rose),  $Z'$  isomorphe à  $G/P_{\alpha_1}$  (en vert) et  $G/H'$  :

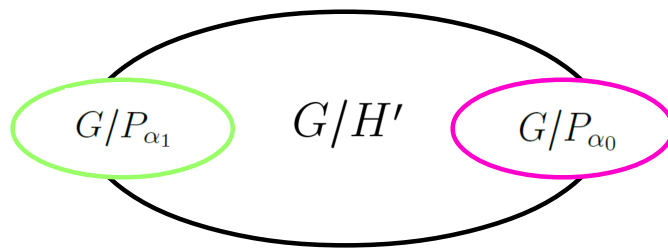


FIGURE 1.8 – Orbites de  $W$  dans le cas A

[Cas B] Soit  $\mathbb{X}$  comme dans la Définition 1.13. Supposons  $a_1 > 0$ . Soient  $X^+$  est le  $G/H$ -plongement tel que  $S_{X^+} = \{\alpha_0, \beta\}$  et  $X'$  le  $G/H'$ -plongement associé à l'éventail suivant

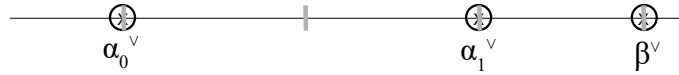


FIGURE 1.9 – Éventail associé  $X'$  dans le cas B

Alors :

- il existe un flip de  $\mathbb{X}$  dans  $X^+$  au dessus de  $X'$ , suivi d'une fibration  $F_3 : X' \rightarrow G/P_{\alpha_1}$ , ce qui donne le Log MMP suivant :

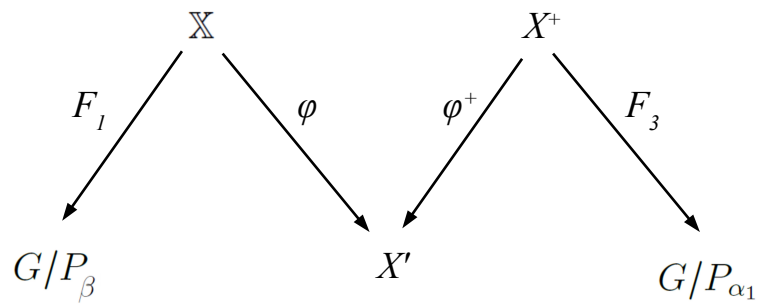


FIGURE 1.10 – Log MMP de  $\mathbb{X}$  pour  $a_1 > 0$  dans le cas B

- les orbites de  $X'$  sont isomorphes à  $G/P_{\alpha_1, \beta}$  (en jaune),  $G/P_{\alpha_0}$  (en gris)

et  $G/H'$  :

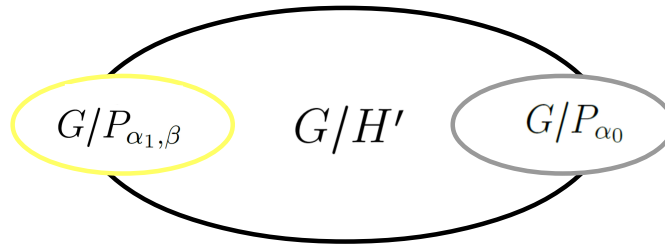


FIGURE 1.11 – Orbites de  $X'$  dans le cas B

[Cas C] Soit  $\mathbb{X}$  comme dans la Définition 1.13. Supposons  $a_1 = 0$ . Soit  $W$  le  $G/H'$  plongement associé à l'éventail suivant, avec  $H' = \ker \chi \subset P'$  où  $P' = P_{\alpha_0, \alpha_1}$  :

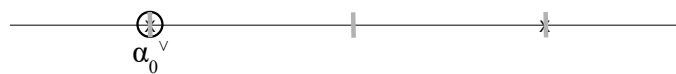


FIGURE 1.12 – Éventail associé à  $W$  (cas C)

Alors :

- il existe une fibration  $F_2 : \mathbb{X} \rightarrow W$ , ce qui donne le Log MMP suivant :

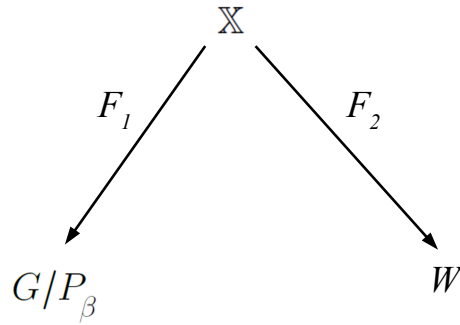


FIGURE 1.13 – Log MMP de  $\mathbb{X}$  pour  $a_1 = 0$  dans le cas C

- les orbites de  $W$  sont notées  $Y'$  isomorphe à  $G/P_{\alpha_0}$  (en rose),  $Z'$  isomorphe à  $G/P_{\alpha_1}$  (en vert) et  $G/H'$  :

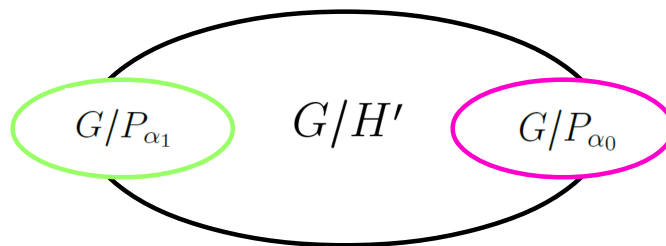


FIGURE 1.14 – Orbites de  $W$  dans le cas C

[Cas D] Soit  $\mathbb{X}$  comme dans la Définition 1.13. Supposons  $a_1 > 0$ . Soient

$X^+$  est le  $G/H$ -plongement tel que  $S_{X^+} = \{\alpha_0, \beta\}$  et  $X'$  le  $G/H'$ -plongement associé à l'éventail suivant

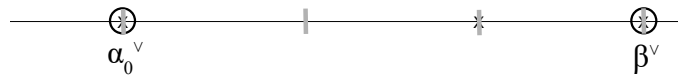


FIGURE 1.15 – Éventail associé à  $X'$  (cas D)

Alors :

- il existe une contraction divisorielle sur la variété  $X'$ , qu'on note  $\varphi : \mathbb{X} \rightarrow X'$  suivie par une fibration sur  $G/P_{\alpha_1}$ , qu'on note  $F_3 : X' \rightarrow G/P_{\alpha_1}$ .

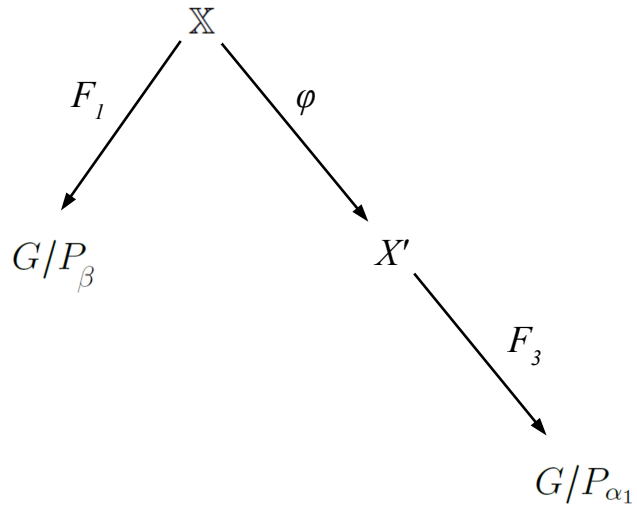


FIGURE 1.16 – Log MMP de  $\mathbb{X}$  pour  $a_1 > 0$  dans le cas D

- les orbites de  $X'$  sont isomorphes à  $G/P_{\alpha_1, \beta}$  (en jaune),  $G/P_{\alpha_0}$  (en gris) et  $G/H'$  :

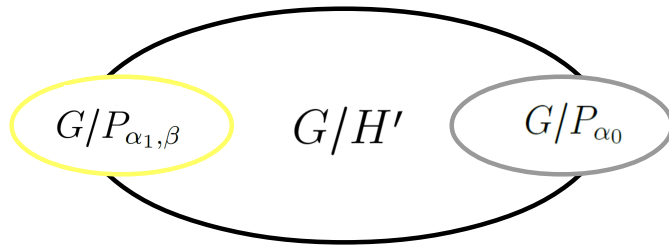


FIGURE 1.17 – Orbites de  $X'$  dans le cas D

Dans le Chapitre 2, on va étudier l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  sur  $\mathbb{X}$ , en étudiant tout d'abord la stabilité des  $G$ -orbites fermées. Pour cela, on va en particulier étudier les fibres de  $F_2$  au dessus des orbites qui sont :  $P_{\alpha_1}/P_{\alpha_1, \beta}$ ,  $P_{\alpha_0}/P_{\alpha_0, \beta}$  et

$P_{\alpha_0, \alpha_1} / P_{\alpha_0, \alpha_1, \beta}$ . En particulier, on étudiera les dimensions à l'aide du lemme suivant.

**Lemme 1.23.** *Soient  $\pi : X \rightarrow X'$  une fibration, avec  $X$  et  $X'$  de rang 1,  $G/P_1$  une  $G$ -orbite fermée de  $X$  et  $G/P_2$  une  $G$ -orbite fermée de  $X'$  telles que  $\pi$  envoie  $G/P_1$  sur  $G/P_2$ . Alors, au dessus de  $G/P_2$ , les fibres de  $\pi$  sont de même dimension que la dimension de  $P_2/P_1$ .*

Dans la suite, on utilise également à plusieurs reprises le Lemme de Blanchard, et plus précisément la version algébrique donnée par [BSU13].

**Lemme 1.24** (Blanchard). *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas propre tel que  $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$ . Soit  $\mathbb{G}$  un schéma de groupes connexe agissant sur  $X$ . Alors, il existe une unique  $\mathbb{G}$ -action sur  $Y$  telle que  $f$  est  $\mathbb{G}$ -équivariant.*

Ce lemme s'applique aux contractions du MMP et Log MMP qui satisfont les hypothèses du lemme, avec  $\mathbb{G} = \text{Aut}^0(X)$ .

## 4 Fibrés vectoriels au dessus des variétés de drapeaux et Théorème de Borel-Weil-Bott

On rappelle qu'on considère  $G$  un groupe algébrique connexe réductif et  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$  contenant un tore maximal  $T$ . On note  $\varpi_{\chi_i}$  les poids fondamentaux de  $(G, B, T)$  et  $\rho$  la somme des poids fondamentaux.

Soit  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$  et  $V$  un  $P$ -module. Alors, le fibré vectoriel homogène  $G \times^P V$  au dessus de  $G/P$  est le quotient du produit  $G \times V$  par la relation d'équivalence  $\sim$  définie de la façon suivante

$$\forall g \in G, \forall p \in P, \forall v \in V, (g, v) \sim (gp^{-1}, p \cdot v).$$

On utilise dans la suite le Théorème de Borel-Weil-Bott de [Akh95, section 4.3](avec les mêmes notations que dans [PP10]).



**Théorème 1.25** (Borel-Weil-Bott). *Soit  $V$  un  $P$ -module irréductible de plus haut poids  $\chi$ . On note  $\nu(\chi)$  le fibré vectoriel au dessus de  $G \times^P V$  au dessus  $G/P$  et  $w_0^P(\chi)$  le plus bas poids de  $V$ . On a alors l'alternative suivante :*

\* *s'il existe une racine  $\alpha$  avec  $\langle w_0^P(\chi) - \rho, \check{\alpha} \rangle = 0$ , alors, pour tout  $i \geq 0$ ,  $H^i(G/P, \nu(\chi)) = 0$ ,*

\* *sinon, il existe un élément  $w$  du groupe de Weyl avec  $\langle w(w_0^P(\chi) - \rho), \check{\alpha} \rangle < 0$  pour toute racine positive  $\alpha$ . On note  $\ell(w)$  la longueur de  $w$ . Alors, on a  $H^i(G/P, \nu(\chi)) = 0$  pour  $i \neq \ell(w)$  et  $H^{\ell(w)}(G/P, \nu(\chi))$  est le  $G$ -module de plus haut poids  $-w(w_0^P(\chi) - \rho) - \rho$ .*

**Corollaire 1.26.** *Avec les mêmes notations que précédemment, s'il existe une racine  $\alpha$  avec  $\langle w_0^P(\chi), \check{\alpha} \rangle > 0$ , alors  $H^0(G/P, \nu(\chi)) = 0$ , sinon  $H^0(G/P, \nu(\chi)) = V(-w_0^P(\chi))$ .*



# CHAPITRE 2

---

## ACTION DE $\text{Aut}(\mathbb{X})$ SUR $\mathbb{X}$

Dans ce chapitre, on étudie dans un premier temps la stabilité des  $G$ -orbites fermées de  $\mathbb{X}$  sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ , puis dans un deuxième temps on calcule  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  et pour terminer on étudie la connexité du groupe d'automorphismes. On rappelle que  $\mathbb{X}$  est une  $G$ -variété à trois orbites : une ouverte et deux fermées, notées  $Y$  et  $Z$  (voir Chapitre 1, section 3).

On commence par un rappel fondamental :  $\text{Lie}(\text{Aut}^0(X)) = H^0(X, T_X)$  et par donner la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow S_X \longrightarrow T_X \longrightarrow \iota_* N_{\partial X/X} \longrightarrow 0$$

où  $\iota : \partial X \hookrightarrow X$  est l'immersion fermée et  $S_X$  le faisceau d'action de  $X$ , c'est-à-dire le sous-faisceau de  $T_X$  constitué des champs de vecteurs tangents à  $\partial X = Y \sqcup Z$ , ce qui donne la suite exacte longue suivante :

$$0 \longrightarrow H^0(X, S_X) \longrightarrow H^0(X, T_X) \longrightarrow H^0(\partial X, N_{\partial X/X}) \longrightarrow \dots$$

Alors, si l'espace des sections globales  $H^0(\Omega, N_{\Omega/X})$  du faisceau normal d'une des deux  $G$ -orbites fermées  $\Omega$  est trivial, alors  $\Omega$  est stable sous l'action de  $\text{Aut}^0(X)$ .

# 1 Stabilité des $G$ -orbites fermées sous l'action de $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$

Dans cette partie, on va étudier la stabilité des  $G$ -orbites fermées  $\Omega$  de  $\mathbb{X}$  sous l'action de la composante connexe du groupe d'automorphismes  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ , dans les cas mentionnés au Chapitre 1. Pour cela, on utilise plusieurs méthodes qu'on détaille ci-après.

## 1.1 Argument géométrique

On a deux arguments géométriques différents utilisant le lemme de Blanchard (Lemme 1.24) qu'on pourra utiliser pour étudier la stabilité des  $G$ -orbites fermées  $Y$  et  $Z$  sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ , un qu'on utilisera dans le cas où  $a_1 = 0$  et un autre quand on a  $a_1 > 0$ , ce qui nous donne le résultat suivant.

### Proposition 2.1.

(\*) Supposons  $a_1 = 0$  et  $G = G_0$ .

Si  $\beta$  est entre  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  sur le diagramme de Dynkin, alors  $Y$  et  $Z$  sont stables sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ .

Si  $\alpha_0$  est entre  $\beta$  et  $\alpha_1$  sur le diagramme de Dynkin, alors  $Z$  est stable sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ .

Si  $\alpha_1$  est entre  $\beta$  et  $\alpha_0$  sur le diagramme de Dynkin, alors  $Y$  est stable sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ .

(\*\*) Supposons  $a_1 = 0$  et  $G = G_0 \times G_1$ . Alors  $Z$  est stable sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ .

(\*\*\* ) Supposons  $a_1 > 0$ . Alors  $Y$  est stable sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ .

#### 1.1.1 Quand $a_1 = 0$ et $G = G_0$

Dans cette sous-partie, on montre que la condition (\*) de la Proposition 2.1 est satisfaite. Quand on est dans le cas  $a_1 = 0$ , d'après le Chapitre 1, le Log MMP donne deux fibrations  $F_1$  et  $F_2$ . Cette seconde fibration sur la variété  $X'$  nous permet de calculer des dimensions de fibres potentiellement différentes. Si la dimension des fibres au dessus de la  $G$ -orbite fermée est différente de celle de la fibre générale, alors l'orbite est stable sous l'action

de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  par le lemme de Blanchard.

**Exemple 2.2.** Dans le cas (I)(1), on a  $\beta = \chi_m$ ,  $\alpha_0 = \chi_1$  et  $\alpha_1 = \chi_{m-1}$ , et ainsi on obtient :

- $\dim P_{\alpha_0, \alpha_1} / P_{\alpha_0, \alpha_1, \beta} =$  nombre de racines positives avec un coefficient nul en  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  et un coefficient non nul en  $\beta$   
 $=$  nombre de racines positives avec un coefficient nul en  $\chi_1$  et  $\chi_{m-1}$  et un coefficient non nul en  $\chi_m$   
 $= 1$ , car la seule possibilité est  $\chi_m$ ,

- $\dim P_{\alpha_0} / P_{\alpha_0, \beta} =$  nombre de racines positives avec un coefficient nul en  $\alpha_0$  et un coefficient non nul en  $\beta$   
 $=$  nombre de racines positives avec un coefficient nul en  $\chi_1$  et coefficient non nul en  $\chi_m$   
 $= m - 1$ , car les racines positives avec ces coefficients sont  $\sum_{i=j}^m \chi_i$  avec  $j \in \{2, \dots, m\}$ .

Donc ici les dimensions sont différentes ( $m \geq 3$ ) et ainsi  $Y$  est stable sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ .

Dans certains cas, il n'est pas nécessaire de calculer la dimension des fibres, car il existe un argument permettant de conclure immédiatement que  $Y$  ou  $Z$  est stable sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ .

**Lemme 2.3.** Soient  $\alpha_0, \alpha_1, \beta$  des racines simples du même groupe simple  $G_0$ . Si  $\beta$  est entre  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  sur le diagramme de Dynkin, alors on a :

$$\dim P_{\alpha_0, \alpha_1} / P_{\alpha_0, \alpha_1, \beta} < \dim P_{\alpha_0} / P_{\alpha_0, \beta}$$

$$\text{and } \dim P_{\alpha_0, \alpha_1} / P_{\alpha_0, \alpha_1, \beta} < \dim P_{\alpha_1} / P_{\alpha_1, \beta}$$

ce qui signifie que  $Y$  et  $Z$  sont stables sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ .

*Démonstration.* On rappelle que  $\dim P_{\alpha_0, \alpha_1} / P_{\alpha_0, \alpha_1, \beta} =$  nombre de racines positives avec un coefficient nul en  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  et un coefficient non nul en  $\beta$ . Alors, on a :

$\dim P_{\alpha_0} / P_{\alpha_0, \beta} =$  nombre de racines positives avec un coefficient nul en  $\alpha_0$  et un coefficient non nul en  $\beta$

= nombre de racines positives avec un coefficient nul en  $\alpha_0$  et un coefficient non nul en  $\alpha_1$  et  $\beta$  plus nombre de racines positives avec un coefficient nul en  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  et un coefficient non nul en  $\beta$   
= nombre de racines positives avec un coefficient nul en  $\alpha_0$  et un coefficient non nul en  $\alpha_1$  et  $\beta$  plus  $\dim P_{\alpha_0, \alpha_1} / P_{\alpha_0, \alpha_1, \beta}$ .

Mais puisqu'on a  $\beta$  entre  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  sur le diagramme de Dynkin, alors il existe au moins une racine positive avec un coefficient nul en  $\alpha_0$  et un coefficient non nul en  $\alpha_1$  et  $\beta$ , par exemple la somme de toutes les racines comprises entre  $\beta$  et  $\alpha_1$  (ces deux racines incluses), donc le nombre de racines positives avec un coefficient nul en  $\alpha_0$  et un coefficient non nul en  $\alpha_1$  et  $\beta$  est positif et ainsi on obtient  $\dim P_{\alpha_0, \alpha_1} / P_{\alpha_0, \alpha_1, \beta} < \dim P_{\alpha_0} / P_{\alpha_0, \beta}$ .

La preuve est exactement la même dans le second cas pour  $\dim P_{\alpha_0, \alpha_1} / P_{\alpha_0, \alpha_1, \beta} < \dim P_{\alpha_1} / P_{\alpha_1, \beta}$ . ■

On donne ci-dessous la liste de tous les cas dans lesquels on a  $\beta$  entre  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  sur le diagramme de Dynkin :

- |              |              |             |             |
|--------------|--------------|-------------|-------------|
| ▶ (IX)(5)    | ▶ (XIII)(14) | ▶ (XIV)(18) | ▶ (XV)(17)  |
| ▶ (IX)(7)    | ▶ (XIII)(15) | ▶ (XIV)(19) | ▶ (XV)(18)  |
| ▶ (IX)(9)    | ▶ (XIII)(16) | ▶ (XIV)(20) | ▶ (XV)(19)  |
| ▶ (IX)(12)   | ▶ (XIII)(17) | ▶ (XIV)(21) | ▶ (XV)(20)  |
| ▶ (IX)(15)   | ▶ (XIII)(18) | ▶ (XIV)(22) | ▶ (XV)(21)  |
| ▶ (IX)(17)   | ▶ (XIII)(19) | ▶ (XIV)(23) | ▶ (XV)(22)  |
| ▶ (IX)(18)   | ▶ (XIII)(20) | ▶ (XIV)(24) | ▶ (XV)(23)  |
| ▶ (X)(6)     | ▶ (XIII)(21) | ▶ (XIV)(25) | ▶ (XV)(24)  |
| ▶ (X)(9)     | ▶ (XIII)(22) | ▶ (XIV)(26) | ▶ (XV)(25)  |
| ▶ (X)(12)    | ▶ (XIII)(23) | ▶ (XIV)(27) | ▶ (XV)(26)  |
| ▶ (X)(14)    | ▶ (XIII)(24) | ▶ (XIV)(28) | ▶ (XV)(27)  |
| ▶ (XI)(4)    | ▶ (XIII)(25) | ▶ (XIV)(33) | ▶ (XV)(28)  |
| ▶ (XI)(7)    | ▶ (XIII)(26) | ▶ (XIV)(34) | ▶ (XV)(33)  |
| ▶ (XII)(6)   | ▶ (XIII)(27) | ▶ (XIV)(35) | ▶ (XV)(34)  |
| ▶ (XII)(9)   | ▶ (XIV)(5)   | ▶ (XIV)(36) | ▶ (XV)(35)  |
| ▶ (XII)(11)  | ▶ (XIV)(7)   | ▶ (XV)(5)   | ▶ (XV)(36)  |
| ▶ (XII)(14)  | ▶ (XIV)(13)  | ▶ (XV)(7)   | ▶ (XVI)(4)  |
| ▶ (XIII)(4)  | ▶ (XIV)(14)  | ▶ (XV)(13)  | ▶ (XVI)(6)  |
| ▶ (XIII)(6)  | ▶ (XIV)(15)  | ▶ (XV)(14)  | ▶ (XVI)(9)  |
| ▶ (XIII)(12) | ▶ (XIV)(16)  | ▶ (XV)(15)  | ▶ (XVI)(11) |
| ▶ (XIII)(13) | ▶ (XIV)(17)  | ▶ (XV)(16)  |             |

Dans tous ces cas, les  $G$ -orbites fermées  $Y$  et  $Z$  sont stables sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ .

**Lemme 2.4.** *Soient  $\alpha_0, \alpha_1, \beta$  des racines simples du même groupe simple  $G_0$ . Si  $\alpha_1$  est entre  $\alpha_0$  et  $\beta$  sur le diagramme de Dynkin, alors on a :*

$$\dim P_{\alpha_0, \alpha_1} / P_{\alpha_0, \alpha_1, \beta} < \dim P_{\alpha_0} / P_{\alpha_0, \beta}$$

ce qui signifie que  $Y$  est stable sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ .

De la même façon, si  $\alpha_0$  est entre  $\alpha_1$  et  $\beta$  sur le diagramme de Dynkin, alors  $Z$  est stable sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ .

*Démonstration.* La preuve est la même que celle du Lemme 2.3. ■

### 1.1.2 Quand $a_1 = 0$ et $G = G_0 \times G_1$

De nouveau, on va utiliser l'argument sur les dimensions des fibres de la fibration  $F_2$ , afin de montrer que la condition  $(**)$  de la Proposition 2.1 est satisfaite, ce qui correspond au lemme suivant.

**Lemme 2.5.** *L'orbite  $Z$  est toujours stable sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ .*

*Démonstration.* On a :

$$\begin{aligned} \bullet \dim P_{\alpha_1} / P_{\alpha_1, \beta} &= \dim G / P_{\alpha_1, \beta} - \dim G / P_{\alpha_1} \\ &= \dim G_0 / P_{\beta} \times G_1 / P_{\alpha_1} - \dim G_1 / P_{\alpha_1} \\ &= \dim G_0 / P_{\beta} \\ &= \text{nombre de racines positives avec un coefficient non nul en} \end{aligned}$$

$\beta$

$\neq$

- $\dim P_{\alpha_0, \alpha_1} / P_{\alpha_0, \alpha_1, \beta} = \dim G / P_{\alpha_0, \alpha_1, \beta} - \dim G / P_{\alpha_0, \alpha_1}$   
 $= \dim G_0 / P_{\alpha_0, \beta} \times G_1 / P_{\alpha_1} - \dim G_0 / P_{\alpha_0} \times G_1 / P_{\alpha_1}$   
 $= \dim G_0 / P_{\alpha_0, \beta} - \dim G_0 / P_{\alpha_0}$   
 $=$  nombre de racines positives avec un coefficient nul en  $\alpha_0$  et un coefficient non nul en  $\beta$ ,

ce qui signifie que  $Z$  est stable sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ . ■

**Remarque 2.6.** Concernant l'autre orbite, on va de nouveau vouloir comparer la dimension de la fibre  $P_{\alpha_0, \alpha_1} / P_{\alpha_0, \alpha_1, \beta}$  qui est égale au nombre de racines positives avec un coefficient nul en  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  et un coefficient non nul en  $\beta$ , et la dimension de la fibre  $P_{\alpha_0} / P_{\alpha_0, \beta}$  qui est égale au nombre de racines positives avec un coefficient nul en  $\alpha_0$  et un coefficient non nul en  $\beta$ . Ici, les dimensions sont les mêmes, ce qui signifie qu'on va devoir utiliser une autre méthode pour conclure.

### 1.1.3 Quand $a_1 > 0$

**Proposition 2.7.** *Quand  $a_1 > 0$ ,  $Y$  est toujours stable sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ .*

*Démonstration.* D'après le lemme de Blanchard, le lieu exceptionnel, qui est la  $G$ -orbite fermée  $Y$ , est stable sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ . ■

## 1.2 Argument calculatoire

Pour finir, si on ne peut pas utiliser les méthodes précédentes, on utilise une méthode calculatoire qui est similaire à celle utilisée dans [Pas09, Lemme 1.15].

Considérons la  $G$ -orbite fermée  $Z$ . On a le fibré vectoriel suivant  $\mathbb{X} \setminus Y \rightarrow Z$ , et  $V_Z$  un  $P_Z$ -module simple de plus haut poids  $\varpi_{\alpha_0} - \varpi_{\alpha_1} - a_1 \varpi_{\beta}$ , avec  $P_Z := P_{\alpha_1, \beta}$ . Le plus petit poids de  $V_Z$  est  $w_0^{\alpha_1, \beta}(\varpi_{\alpha_0} - \varpi_{\alpha_1} - a_1 \varpi_{\beta})$  où  $w_0^{\alpha_1, \beta}$  est le plus long élément de  $W_{S \setminus \{\alpha_1, \beta\}}$ . On souhaite étudier ici si  $w_0^{\alpha_1, \beta}(\varpi_{\alpha_0} - \varpi_{\alpha_1} - a_1 \varpi_{\beta})$  est antidominant ou non, afin d'utiliser le Corollaire 1.26, qui nous dit que le plus petit poids de  $V_Z$  est non antidominant si et



seulement si  $H^0(G/P_Z, N_{Z/\mathbb{X}}) = 0$ .

Pour toute racine simple  $\gamma$  de  $G$  (non imaginaire), alors on a

$$\langle w_0^{\alpha_1, \beta}(\varpi_{\alpha_0} - \varpi_{\alpha_1} - a_1 \varpi_{\beta}), \gamma^\vee \rangle = \langle \varpi_{\alpha_0} - \varpi_{\alpha_1} - a_1 \varpi_{\beta}, w_0^{\alpha_1, \beta}(\gamma^\vee) \rangle.$$

Si  $\gamma$  est une racine différente de  $\beta$  et  $\alpha_1$ , alors  $w_0^{\alpha_1, \beta}(\gamma^\vee) = -\delta^\vee$  pour un certain  $\delta \in S \setminus \{\beta, \alpha_1\}$  avec  $\delta$  et  $\gamma$  dans la même composante connexe de  $\Gamma_{S \setminus \{\alpha_1, \beta\}}$ . Ainsi, il reste seulement à calculer  $w_0^{\alpha_1, \beta}(\alpha_1^\vee)$  et  $w_0^{\alpha_1, \beta}(\beta^\vee)$ . Si on obtient que l'un de ces deux nombres est strictement positif, alors la  $G$ -orbite est stable sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  par le Théorème 1.25.

**Exemple 2.8.** Dans le cas (I)(1), on a  $\beta = \chi_m$ ,  $\alpha_0 = \chi_1$  et  $\alpha_1 = \chi_{m-1}$ . Par Corollaire 1.6, on obtient que  $w_0^{\alpha_1, \beta}(\alpha_1^\vee) = \chi_1^\vee + \dots + \chi_{m-1}^\vee$  et  $w_0^{\alpha_1, \beta}(\beta^\vee) = \chi_m^\vee$  et ainsi on a :

$$\langle \varpi_{\alpha_0} - \varpi_{\alpha_1} - a_1 \varpi_{\beta}, w_0^{\alpha_1, \beta}(\gamma^\vee) \rangle = \begin{cases} -a_1 \leq 0 & \text{si } \gamma = \beta \\ 0 & \text{si } \gamma = \alpha_1 \end{cases}$$

donc  $H^0(G/P_Z, N_{Z/\mathbb{X}})$  n'est pas trivial et puisqu'on a :

$$H^0(G/P_Z, N_{Z/\mathbb{X}}) = V(-\sum_{\gamma} \langle \varpi_{\alpha_0} - \varpi_{\alpha_1} - a_1 \varpi_{\beta}, w_0^{\alpha_1, \beta}(\gamma^\vee) \rangle \varpi_{\gamma}),$$

on obtient finalement  $H^0(G/P_Z, N_{Z/\mathbb{X}}) = V(a_1 \varpi_{\beta} + \varpi_{\chi_{m-2}})$ .

Comme précédemment, on a différents cas à traiter ici, en fonction du groupe  $G$ , pour lesquels on va donner certaines règles simplifiant l'étude des cas.

### 1.2.1 Quand $a_1 = 0$ et $G = G_0$

Dans cette partie, on ne pourra pas utiliser d'arguments permettant de conclure immédiatement comme précédemment, donc on devra utiliser la méthode calculatoire dans tous les cas où on ne pourra pas utiliser la dimension des fibres.

### 1.2.2 Quand $a_1 = 0$ et $G = G_0 \times G_1$

Dans ce cas, c'est-à-dire quand  $a_1 = 0$  et  $\#R = 1$  avec  $\alpha_1$  racine simple de  $G_1$ ,  $G_1$  de type  $A_m$  ou  $\mathbb{C}^*$ , il n'est pas nécessaire d'effectuer les calculs dans tous les cas. En effet, on a la proposition suivante :

**Proposition 2.9.** *Pour les cas (IX) à (XVII), dans le contexte ci-dessus, on a  $H^0(Y, N_{Y/\mathbb{X}})$  non trivial.*

*Démonstration.* Soient  $\alpha_0, \beta$  racines simples de  $G_0$ ,  $\alpha_1 = \chi'_1$  racine simple de  $G_1$  avec  $G_1$  de type  $A_m$  ou  $\mathbb{C}^*$ , alors :

$$\begin{aligned}
\langle -\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\alpha_1}, w_0^{\alpha_0, \beta}(\gamma^\vee) \rangle &= \langle w_0^{\alpha_0, \beta}(-\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\alpha_1}), \gamma^\vee \rangle \\
&= \langle -w_0^{\alpha_0, \beta}(\varpi_{\alpha_0}) + w_0^{\alpha_0, \beta}(\varpi_{\alpha_1}), \gamma^\vee \rangle \\
&= \langle -\varpi_{\alpha_0} + w_0^{\alpha_0, \beta}(\varpi_{\alpha_1}), \gamma^\vee \rangle \\
&= \langle -\varpi_{\alpha_0} + \frac{1}{m+1}(-\chi'_1 - 2\chi'_2 - \dots - (m-1)\chi'_{m-1} - \\
m\chi'_m), \gamma^\vee \rangle \\
&= \langle -\varpi_{\alpha_0} - \varpi_{\chi'_m}, \gamma^\vee \rangle \\
(1) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma = \beta \\ -1 < 0 & \text{si } \gamma = \alpha_0 \\ -1 < 0 & \text{si } \gamma = \chi'_m \end{cases}
\end{aligned}$$

si  $G_1$  est de type  $A_m$  et  $\alpha_1 = \chi'_1$ , ce qui signifie que  $H^0(Y, N_{Y/\mathbb{X}})$  n'est pas trivial et on obtient  $H^0(Y, N_{Y/\mathbb{X}}) = V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$ .

Dans le cas où  $\alpha_1$  est une racine imaginaire, on obtient un résultat presque identique, en retirant la troisième ligne de (1) et on obtient que  $H^0(Y, N_{Y/\mathbb{X}})$  n'est pas trivial et  $H^0(Y, N_{Y/\mathbb{X}}) = V(\varpi_{\alpha_0})$ . ■

### 1.2.3 Quand $a_1 > 0$ et $G = G_0 \times G_1$ avec $G_1$ de type $A_m$ ou $G_1 = \{1\}$

De nouveau dans cette sous-partie, dans le contexte où  $a_1 > 0$  et  $\#R = 1$  avec  $\alpha_0$  racine simple de  $G_1$  avec  $G_1$  de type  $A_m$  ou  $\{1\}$ , il n'est pas nécessaire

d'effectuer les calculs dans tous les cas. En effet, on a le lemme suivant :

**Lemme 2.10.** *Pour les cas (IX') à (XVII'), dans le contexte ci-dessus, on a  $H^0(Z, N_{Z/\mathbb{X}})$  non trivial.*

*Démonstration.* Soit  $\alpha_0$  racine simple de  $G_1$  avec  $G_1$  de type  $A_m$  ou  $\{1\}$ , on a :

$$\begin{aligned}
\langle w_0^{\alpha_1, \beta}(\varpi_{\alpha_0} - \varpi_{\alpha_1} - a_1 \varpi_{\beta}), \gamma^\vee \rangle &= \langle w_0^{\alpha_1, \beta}(\varpi_{\alpha_0}) - \varpi_{\alpha_1} - a_1 \varpi_{\beta}, \gamma^\vee \rangle \\
&= \langle \frac{1}{m+1}(-\chi'_1 - 2\chi'_2 - \dots - (m-1)\chi'_{m-1} - m\chi'_m) - \\
&\varpi_{\alpha_1} - a_1 \varpi_{\beta}, \gamma^\vee \rangle. \\
&= \langle -\varpi_{\chi'_m} - \varpi_{\alpha_1} - a_1 \varpi_{\beta}, \gamma^\vee \rangle. \\
(2) &= \begin{cases} -a_1 < 0 & \text{si } \gamma = \beta \\ -1 < 0 & \text{si } \gamma = \alpha_1 \\ -1 < 0 & \text{si } \gamma = \chi'_m \end{cases}
\end{aligned}$$

si  $G_1$  est de type  $A_m$  et  $\alpha_0 = \chi'_1$ , ce qui signifie que  $H^0(Z, N_{Z/\mathbb{X}})$  n'est pas trivial et on obtient  $H^0(Z, N_{Z/\mathbb{X}}) = V(a_1 \varpi_{\beta} + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$ .

Si  $\alpha_0$  est une racine imaginaire, on obtient un résultat presque similaire, en retirant de nouveau la troisième ligne de (2) et on obtient que  $H^0(Z, N_{Z/\mathbb{X}})$  n'est pas trivial et  $H^0(Z, N_{Z/\mathbb{X}}) = V(a_1 \varpi_{\beta} + \varpi_{\alpha_1})$ . ■

#### 1.2.4 Quand $a_1 > 0$ et $G = G_0 \times G_1 \times G_2$

Ici, on a  $\alpha_0$  racine de  $G_1$  et  $\alpha_1$  racine de  $G_2$ , avec les cas de figures suivants :

- (XIX)(1)  $G_1$  et  $G_2$  sont tous les deux de type  $A_m$
- (XIX)(2)  $G_1$  est de type  $A_m$  et  $G_2 = \mathbb{C}^*$
- (XIX)(3)  $G_1 = \{1\}$  et  $G_2$  est de type  $A_m$
- (XIX)(4)  $G_1 = \{1\}$  et  $G_2 = \mathbb{C}^*$ .

Comme on est dans le cas  $a_1 > 0$ , on sait déjà que  $Y$  est stable sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  et on va donc chercher à étudier la  $G$ -orbite fermée  $Z$ , pour laquelle on a le résultat suivant.

**Lemme 2.11.** *Dans le contexte ci dessus,  $H^0(Z, N_{Z/\mathbb{X}})$  n'est pas trivial.*

*Démonstration.* Soient  $\beta$  racine simple de  $G_0$  quelconque,  $\alpha_0$  une racine simple de  $G_1$  avec  $G_1$  de type  $A_m$  ou  $\{1\}$  et  $\alpha_1$  une racine simple de  $G_2$  avec  $G_2$  de type  $A_m$  ou  $\mathbb{C}^*$ . On a alors :

$$\begin{aligned}
\langle w_0^{\alpha_1, \beta}(\varpi_{\alpha_0} - \varpi_{\alpha_1} - a_1 \varpi_{\beta}), \gamma^\vee \rangle &= \langle w_0^{\alpha_1, \beta}(\varpi_{\alpha_0}) - \varpi_{\alpha_1} - a_1 \varpi_{\beta}, \gamma^\vee \rangle \\
&= \langle \frac{1}{m+1}(-\chi'_1 - 2\chi'_2 - \dots - (m-1)\chi'_{m-1} - m\chi'_m) - \\
\varpi_{\alpha_1} - a_1 \varpi_{\beta}, \gamma^\vee \rangle. \\
&= \langle -\varpi_{\chi'_m} - \varpi_{\alpha_1} - a_1 \varpi_{\beta}, \gamma^\vee \rangle. \\
(3) &= \begin{cases} -a_1 < 0 & \text{si } \gamma = \beta \\ -1 < 0 & \text{si } \gamma = \alpha_1 \\ -1 < 0 & \text{si } \gamma = \chi'_m \end{cases}
\end{aligned}$$

si  $G_1$  et  $G_2$  sont de types  $A_m$  avec  $\alpha_0 = \chi'_1$  et  $\alpha_1 = \chi'_m$ , ce qui signifie que  $H^0(Z, N_{Z/\mathbb{X}})$  n'est pas trivial et on a  $H^0(Z, N_{Z/\mathbb{X}}) = V(a_1 \varpi_{\beta} + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$ , ce qui correspond au cas (XIX)(1).

Dans le cas (XIX)(2), on retire la deuxième ligne de (3) et on obtient que  $H^0(Z, N_{Z/\mathbb{X}})$  n'est pas trivial et  $H^0(Z, N_{Z/\mathbb{X}}) = V(a_1 \varpi_{\beta} + \varpi_{\chi'_m})$ .

Pour le cas (XIX)(3), on ne considère cette fois pas la troisième ligne de (3) ce qui donne de nouveau que  $H^0(Z, N_{Z/\mathbb{X}})$  n'est pas trivial et  $H^0(Z, N_{Z/\mathbb{X}}) = V(a_1 \varpi_{\beta} + \varpi_{\alpha_1})$ .

Enfin, pour le dernier cas (XIX)(4), on ne conserve cette fois que la première ligne de (3), ce qui donne  $H^0(Z, N_{Z/\mathbb{X}})$  non trivial et  $H^0(Z, N_{Z/\mathbb{X}}) = V(a_1 \varpi_{\beta})$ . ■

### 1.3 Conclusion

En utilisant les différentes méthodes précédemment explicitées dans l'ensemble des cas listés et non listés (c'est-à-dire les cas dits symétriques), on obtient une étude complète de l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  sur les deux  $G$ -orbites fermées  $Y$  et  $Z$ . Tous les résultats de l'étude sont regroupés dans l'Annexe,

mais voici la conclusion générale de l'étude :

\* quand  $a_1 = 0$ , on obtient dans une partie des cas une variété à deux orbites sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ , et dans l'autre une variété à trois orbites sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ .

\* quand  $a_1 > 0$  :  $\mathbb{X}$  est toujours une variété à deux orbites sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ , sauf dans les cas suivants :

- $\mathbb{X}$  est une variété à trois orbites pour tout  $a_1 > 0$  :

- |             |              |
|-------------|--------------|
| ▶ (II)(5)   | ▶ (XVIII)(3) |
| ▶ (II)(6)   | ▶ (XVIII)(4) |
| ▶ (III')(5) | ▶ (XVIII)(5) |
| ▶ (VIII)(1) | ▶ (XVIII)(7) |
| ▶ (VIII)(2) | ▶ (XVIII)(8) |
| ▶ (VIII)(5) |              |
| ▶ (VIII)(6) |              |

- $\mathbb{X}$  est une variété à trois orbites pour certains  $a_1 > 0$  :

- |                             |                                 |
|-----------------------------|---------------------------------|
| ▶ (II')(1) pour $a_1 = 1$   | ▶ (XI)(6) pour $a_1 = 1$        |
| ▶ (II')(3) pour $a_1 = 1$   | ▶ (XI')(7) pour $a_1 = 1$       |
| ▶ (VIII')(4) pour $a_1 = 1$ | ▶ (XVI)(7) pour $a_1 = 1$       |
| ▶ (VIII')(6) pour $a_1 = 1$ | ▶ (XVI)(9) pour $a_1 = 1$       |
| ▶ (X)(15) pour $a_1 = 1$    | ▶ (XVI)(10) pour $a_1 = 1$      |
| ▶ (X)(16) pour $a_1 = 1$    | ▶ (XVI)(11) pour $a_1 = 1$      |
| ▶ (XI)(1) pour $a_1 = 1$    | ▶ (XVII)(1) pour $a_1 = 1$ et 2 |
| ▶ (XI)(3) pour $a_1 = 1$    |                                 |
| ▶ (XI')(4) pour $a_1 = 1$   |                                 |

Pour les cas dans lesquels  $\mathbb{X}$  est une variété à trois orbites sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  pour tout  $a_1 > 0$ , si on considère les fibres  $F$  de la fibration  $F_1$  précédemment explicitée, on obtiendra par la suite un résultat qui nous permet de retrouver tous les cas précédemment listés (voir Proposition 2.14).

Concernant les cas dans lesquels  $\mathbb{X}$  est une variété à trois orbites sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ , seulement pour certaines valeurs de  $a_1$ , on remarque que malgré un Log MMP de  $\mathbb{X}$  identique pour tout  $a_1 > 0$ , il existe certains cas dans lesquels on obtient que la  $G$ -orbite fermée  $Z$  est stable sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  pour certains  $a_1$  seulement, alors que le Log MMP de  $\mathbb{X}$  est

strictement le même pour tout  $a_1 > 0$ .

## 2 Calcul de $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$

Dans cette section, on va prouver les Théorèmes 0.2 et 0.3, c'est-à-dire on calcule  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  dans les cas où  $\mathbb{X}$  est une variété à deux ou trois orbites sous  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ . Pour cela, on s'inspire de la preuve de [Pas09, Lemme 1.17] en l'adaptant à notre contexte.

### 2.1 Quand $\mathbb{X}$ est une variété à deux orbites sous l'action de $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$

**Proposition 2.12.** *Soit  $\mathbb{X}$  une variété à deux orbites sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  et  $Y$  la  $G$ -orbite fermée. Alors, on obtient*

$$\text{Aut}^0(\mathbb{X}) = ((G \times \mathbb{C}^*)/\tilde{C}) \ltimes H^0(G/P_Z, N_{Z/\mathbb{X}}).$$

En particulier,  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  n'est pas réductif ici.

#### Remarque 2.13.

1) On obtient le même résultat dans le cas où  $Z$  est la  $G$ -orbite fermée :  $\text{Aut}^0(\mathbb{X}) = ((G \times \mathbb{C}^*)/\tilde{C}) \ltimes H^0(G/P_Y, N_{Y/\mathbb{X}})$ .

2) Les variétés à deux orbites sous un groupe réductif ont déjà fait l'objet d'études, en particulier elles sont toutes sphériques d'après [Cup03]. Nous ne sommes pas dans cette situation ici.

*Démonstration.* Soit  $\pi : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{X}$  l'éclatement de  $Y$  dans  $\mathbb{X}$ . On sait que  $\mathbb{X}$  et  $Y$  sont lisses, donc  $\tilde{X}$  est aussi lisse et de plus, il s'agit du fibré projectif suivant au dessus de  $G/P_{\alpha_1, \beta}$

$$\psi : \tilde{X} := G \times^{P_{\alpha_1, \beta}} \mathbb{P}(V_Z \oplus \mathbb{C}) \rightarrow G/P_{\alpha_1, \beta}$$

où  $P_{\alpha_1, \beta}$  agit trivialement sur  $\mathbb{C}$ . De plus, on sait que le diviseur exceptionnel  $\tilde{Y}$  de  $\tilde{X}$  est  $G/P_{\alpha_0, \alpha_1, \beta} = G/P$ .

On remarque que  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  et  $\text{Aut}^0(\tilde{X})$  sont isomorphes. En effet :

\* chaque automorphisme  $g$  de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  stabilise  $Y = G/P_{\alpha_0, \beta} \subset \tilde{Y} = G/P_{\alpha_0, \alpha_1, \beta}$ , donc  $\text{Aut}^0(\mathbb{X}) \subset \text{Aut}^0(\tilde{X})$ .

\* par Lemme 1.24, on sait que  $\text{Aut}^0(\tilde{X})$  agit sur  $\mathbb{X}$  de sorte que  $\pi$  est équivariant.

On peut tout d'abord observer que  $\forall s \in H^0(G/P_Z, N_Z), \forall (g_0, [v_0, \xi]) \in G \times^{P_Z} \mathbb{P}(V_Z \oplus \mathbb{C}), s.(g_0, [v_0, \xi]) = (g_0, [v_0 + \xi v(g_0), \xi])$ , donc  $H^0(G/P_Z, N_Z)$  agit sur  $\tilde{X}$  par translations des fibres de  $\psi$ .

On sait que  $G$  agit sur  $\mathbb{X}$ , et on sait également que  $P/H$  agit sur  $\mathbb{X} = \overline{G.[v_{(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\beta})} + v_{(\varpi_{\alpha_1} + (1+a_1)\varpi_{\beta})}]}$  par  $p.(g[v_{(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\beta})} + v_{(\varpi_{\alpha_1} + (1+a_1)\varpi_{\beta})}]) := g[p^{-1}(v_{(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\beta})} + v_{(\varpi_{\alpha_1} + (1+a_1)\varpi_{\beta})})]$ . Puisque  $\mathbb{C}^*$  est isomorphe à  $P/H$ ,  $\mathbb{C}^*$  agit sur  $\mathbb{X}$ , donc  $G \times \mathbb{C}^*$  agit sur  $\mathbb{X}$ . De plus,  $\tilde{C} = \{(c, c^{-1}H) \in C \times P/H\} \subset G \times \mathbb{C}^*$  agit également trivialement sur  $\mathbb{X}$ , donc  $(G \times \mathbb{C}^*)/\tilde{C}$  agit sur  $\mathbb{X}$ , et donc sur  $\tilde{X}$ .

Alors, le groupe  $((G \times \mathbb{C}^*)/\tilde{C}) \rtimes H^0(G/P_Z, N_Z)$  agit de manière effective sur  $\tilde{X}$  (le produit semi-direct est défini par  $((g', c'), s').((g, c), s) = ((g'g, c'c), c'g's + s')$ ), et sur  $\mathbb{X}$  par le Lemme de Blanchard.

Donc il reste seulement à prouver que  $\text{Aut}^0(\tilde{X}) = ((G \times \mathbb{C}^*)/\tilde{C}) \rtimes H^0(G/P_Z, N_Z)$ .

On sait d'après [Akh95, §2.4, Prop.1] que  $\text{Aut}^0(\tilde{X})$  échange les fibres de  $\psi$  et induit également un automorphisme  $\tilde{\psi} : G/P_Z \rightarrow G/P_Z$ . On sait aussi par [Akh95, §3.3, Th.2] que  $\text{Aut}^0(G/P_Z) = G/C$ . Ainsi, on a la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \text{Aut}^0(\tilde{X}) \longrightarrow G/C \longrightarrow 0$$

où  $A$  est l'ensemble des automorphismes qui stabilisent chaque fibre du fibré projectif  $\tilde{X}$ . En fait,  $A$  consiste tout simplement en les transformations affines des fibres.

Alors,  $H^0(G/P_Z, N_Z)$  est le sous-groupe de  $A$  qui consiste en les translations. Notons  $A'$  le sous-groupe de  $A$  consistant en les transformations linéaires des fibres.

Alors,  $Z$  est stable sous l'action de  $A'$  et  $A'$  agit sur l'éclatement  $\tilde{X}$  de  $Z$  dans  $\tilde{X}$ . De plus, on sait que  $\tilde{X}$  est un  $\mathbb{P}^1$ -fibré au dessus de  $G/P$  et il s'agit en fait de l'unique  $G/H$ -plongement sans couleur.

De nouveau, par [Akh95, §2.4, Prop.1], on sait que  $\text{Aut}^0(\tilde{X})$  échange les fibres de ce fibré et induit un automorphisme de  $G/P$ . Puisque  $\text{Aut}^0(G/P) = G/C$  en utilisant de nouveau [Akh95, §3.3, Th.2], et par [Pas09, Remarque 1.18], on sait que l'action de  $G$  sur une variété  $\mathbb{X}$  peut être étendue à une action de  $G \times \mathbb{C}^*$  et le sous-groupe  $\tilde{C} = \{(c, c^{-1}H) \in C \times P/H\} \subset G \times \mathbb{C}^*$  agit également trivialement sur  $\tilde{X}$ , de sorte que  $\text{Aut}^0(\tilde{X}) = (G \times \mathbb{C}^*)/\tilde{C}$ . ■

Grâce à la Proposition 2.12, on peut démontrer de manière géométrique que certaines variétés  $\mathbb{X}$  sont à 3 orbites sous  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  (et non 2 orbites).

Notons  $F \subset \mathbb{X}$  la fibre de la fibration  $F_1$  au dessus de  $P_\beta/P_\beta \in G/P_\beta$ . Sous l'action d'un sous-groupe de Levi  $L_\beta$  de  $P_\beta$ ,  $F$  est une variété horosphérique lisse de rang 1 et de Picard 1 : elle est soit homogène sous l'action de son groupe d'automorphismes, soit à 2 orbites ([Pas09, Th.0.1]).

**Proposition 2.14.** *Supposons que  $F$  est une des  $L_\beta$ -variétés à deux orbites suivantes :*

- $(B_m, \chi_{m-1}, \chi_m)$ , avec  $m \geq 3$
- $(B_3, \chi_1, \chi_3)$
- $(C_m, \chi_{i+1}, \chi_i)$ , avec  $m \geq 2$  et  $i \in \{1, \dots, m-1\}$ .

*Supposons de plus que l'orbite fermée sous  $\text{Aut}^0(F)$  est  $Z_F := Z \cap F$ . Alors,  $Z$  est une  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ -orbite.*

*Démonstration.* Supposons que  $H^0(Z, N_{Z/\mathbb{X}})$  est non trivial. D'après la Proposition 2.12,  $Y$  est  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ -stable car on sait que  $\mathbb{X}$  est non homogène, et ainsi l'éclatement  $\pi_1 : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{X}$  de  $Y$  dans  $\mathbb{X}$  est  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ -équivariant.

Par la preuve de la Proposition 2.12, on sait que  $H^0(Z, N_{Z/\mathbb{X}})$  agit sur  $\tilde{X}$  et donc sur  $\mathbb{X}$ . De plus, on sait que  $\tilde{F} = (F_1 \circ \pi_1)^{-1}(P_\beta) \simeq P_\beta \times^{P_{\alpha_1, \beta}} \mathbb{P}(V_Z \oplus \mathbb{C})$ , qui est stable par l'action de  $H^0(Z, N_{Z/\mathbb{X}})$  donc on a une action de  $H^0(Z, N_{Z/\mathbb{X}})$  de sorte que  $Z_F$  n'est pas stabilisé par  $H^0(Z, N_{Z/\mathbb{X}})$ . On obtient une contradiction avec les hypothèses de la proposition, ce qui signifie que  $H^0(Z, N_{Z/\mathbb{X}})$



est trivial, donc  $Z$  est stable sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ . ■

En appliquant la Proposition 2.14, on retrouve que  $\mathbb{X}$  est une variété à 3 orbites sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ , dans tous les cas où  $a_1 > 0$  et où une composante  $\Gamma'$  de  $\Gamma_{S \setminus \{\beta\}}$  contient  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  de sorte que :

$$(\Gamma', \alpha_0, \alpha_1) = \begin{cases} (B_m, \chi_{m-1}, \chi_m), & m \geq 3 \\ \text{ou } (B_3, \chi_1, \chi_3) \\ \text{ou } (C_m, \chi_{i+1}, \chi_i), & m \geq 2, \quad i \in \{1, \dots, m-1\}. \end{cases}$$

On retrouve alors la liste établie dans la section 1.3 des 12 cas dans lesquels  $\mathbb{X}$  est une variété à 3 orbites sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  pour tout  $a_1 > 0$ .

## 2.2 Quand $\mathbb{X}$ est une variété à trois orbites sous l'action de $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$

**Proposition 2.15.** *Soit  $\mathbb{X}$  une variété à trois orbites sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ . Alors, on obtient  $\text{Aut}^0(\mathbb{X}) = (G \times \mathbb{C}^*) / \tilde{C}$ . En particulier,  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  est réductif ici.*

*Démonstration.* Soit  $\pi : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{X}$  l'éclatement de  $Y$  et  $Z$  dans  $\mathbb{X}$ . On sait que  $\tilde{X}$  est lisse et est le fibré projectif au dessus de  $G/P$

$$\psi : G \times^P \mathbb{P}^1 \rightarrow G/P.$$

Comme précédemment, on sait que  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  et  $\text{Aut}^0(\tilde{X})$  sont isomorphes, et on sait également cette fois qu'il n'existe aucune translation des fibres de  $\psi$ , mais on a toujours l'action triviale de  $\tilde{C} = \{(c, c^{-1}H) \in C \times P/H\} \subset G \times \mathbb{C}^*$  sur  $\mathbb{X}$  et  $\tilde{X}$ , donc  $(G \times \mathbb{C}^*) / \tilde{C}$  agit sur  $\mathbb{X}$ , et sur  $\tilde{X}$ .

Prouvons à présent que  $\text{Aut}^0(\tilde{X}) = ((G \times \mathbb{C}^*) / \tilde{C})$ . On rappelle que,  $\tilde{X}$  est un  $\mathbb{P}^1$ -fibré au dessus de  $G/P$  et il s'agit en fait de l'unique  $G/H$ -plongement sans couleur.

Comme précédemment, par [Akh95, §2.4, Prop.1], on a que  $\text{Aut}^0(\tilde{X})$  échange les fibres de ce fibré et induit de plus un automorphisme de  $G/P$ .

Puisque  $\text{Aut}^0(G/P) = G/C$  par [Akh95, §3.3, Th.2] et par [Pas09, Remarque 1.18], on sait que l'action de  $G$  sur une variété  $\mathbb{X}$  peut de nouveau être étendue à une action de  $G \times \mathbb{C}^*$  et comme précédemment, on obtient  $\text{Aut}^0(\tilde{X}) = (G \times \mathbb{C}^*)/\tilde{C}$ . ■

### 3 Connexité de $\text{Aut}(\mathbb{X})$

A présent qu'on a calculé  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  dans tous les cas qui nous intéressent, on souhaite calculer  $\text{Aut}(\mathbb{X})$  et étudier sa connexité. Pour cela, on étudie différents cas de figure, en fonction de  $G$  et de la valeur de  $a_1$ .

Avant d'énoncer le résultat de cette section, on va introduire un dernier objet utile par la suite : soit  $s_\Gamma$  une symétrie du diagramme de Dynkin de  $G$ , alors  $s_\Gamma$  induit un automorphisme de  $G$  qu'on notera aussi  $s_\Gamma$  qui préserve le tore  $T$ , le Borel  $B$  et les ensembles de racines  $S, R, R^+$ . On verra par la suite que sous certaines conditions,  $s_\Gamma$  se prolonge en un automorphisme de  $\mathbb{X}$ .

**Définition 2.16.** *On note  $\text{Sym}^{(1)(2)}(\Gamma, \beta, \alpha_0, \alpha_1)$  l'ensemble des  $s_\Gamma$  qui fixent  $\beta$  et soit fixent  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$ , soit les échangent.*

*De la même façon,  $\text{Sym}^{(1)}(\Gamma, \beta, \alpha_0, \alpha_1)$  est l'ensemble des  $s_\Gamma$  qui fixent  $\beta$ ,  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$ , alors que  $\text{Sym}^{(2)}(\Gamma, \beta, \alpha_0, \alpha_1)$  correspond à l'ensemble des  $s_\Gamma$  qui fixent  $\beta$  et permutent  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$ .*

**Remarque 2.17.** Si  $\alpha$  est imaginaire, par convention  $s_\Gamma$  fixe  $\alpha$ .

**Théorème 2.18.** *On a les deux cas de figure suivants.*

*Pour tout  $\mathbb{X}$  avec  $a_1 = 0$ ,  $\text{Aut}(\mathbb{X}) = \text{Aut}^0(\mathbb{X}) \rtimes \text{Sym}^{(1),(2)}(\Gamma, \beta, \alpha_0, \alpha_1)$ .*

*Pour tout  $\mathbb{X}$  avec  $a_1 > 0$ ,  $\text{Aut}(\mathbb{X}) = \text{Aut}^0(\mathbb{X}) \rtimes \text{Sym}^{(1)}(\Gamma, \beta, \alpha_0, \alpha_1)$ .*

Pour démontrer ce théorème, on aura besoin du résultat suivant.

**Lemme 2.19.** *Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux sous-groupes paraboliques de  $G$  contenant le même sous-groupe de Borel  $B$ . Si  $P_1$  et  $P_2$  sont conjugués par un élément  $g$  de  $G$ , alors  $P_1 = P_2$  et  $g \in P_1$ .*

*Démonstration.* Soit  $g \in G$  tel que  $P_2 = gP_1g^{-1}$ . On sait que  $B \subset P_1$ , et puisque  $B \subset P_2$ , on a  $g^{-1}Bg \subset P_1$ . Comme tous les Borel de  $P_1$  sont conjugués, il existe  $q \in P_1$  tel que  $qBq^{-1} = g^{-1}Bg$ , ce qui signifie que  $B = q^{-1}g^{-1}Bqq$ , donc  $qq \in N_G(B)$ . Mais puisque  $N_G(B) = B$  par [Spr98, §6.4.9], on obtient  $g \in q^{-1}B \subset P_1$ , et ainsi  $P_2 = P_1$ .

De plus, comme  $P_2 = P_1$ , on a  $gP_1g^{-1} = P_1$ , d'où  $g \in N_G(P_1) = P_1$  d'après [Spr98, §6.4.10] ■

### 3.1 Prérequis

Soit  $G \times \mathbb{C}^*/C$  la partie réductive vue comme un sous-groupe de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ .

**Lemme 2.20.** *Soit  $\psi$  un automorphisme de  $\mathbb{X}$ . Quitte à composer  $\psi$  par un élément de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ , on peut supposer que :*

1)  $\psi$  induit un automorphisme  $\tilde{\psi}$  de  $G \times \mathbb{C}^*/C$  tel que  $\psi$  stabilise l'ensemble des  $G$ -orbites (sachant qu'il s'agit également des  $G \times \mathbb{C}^*/C$ -orbites).

2)  $\psi(G/H) = G/H$  et  $\psi(H/H) = H/H$ .

3)  $\tilde{\psi}(H) = H$  et  $\tilde{\psi}(P) = P$ .

*Démonstration.* L'automorphisme  $\psi$  induit  $\tilde{\psi}$  un automorphisme de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  par  $\tilde{\psi}(g) = \psi \circ g \circ \psi^{-1}$ . Remarquons que pour tout  $g \in \text{Aut}^0(\mathbb{X})$  et  $x \in \mathbb{X}$ , on a  $(\psi \circ g)(x) = \psi \circ g \circ \psi^{-1} \circ \psi(x) = \tilde{\psi}(g)y$ , avec  $y = \psi(x)$  et  $\tilde{\psi}(g) \in \text{Aut}^0(\mathbb{X})$ .

On sait que  $\tilde{\psi}$  fixe  $\text{Ru}(\text{Aut}^0(\mathbb{X}))$  et  $\tilde{\psi}$  envoie donc  $G \times \mathbb{C}^*/C$  sur un sous-groupe conjugué par un élément  $g'$  du radical unipotent de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ , donc quitte à composer  $\psi$  par  $g'$ , on peut supposer que  $\tilde{\psi}$  envoie  $G \times \mathbb{C}^*/C$  sur  $G \times \mathbb{C}^*/C$ .

On a donc bien qu'une  $G$ -orbite est envoyée sur une  $G$ -orbite et en particulier  $\psi(G/H) = G/H$ . Puis, quitte à composer par un élément de  $G \times \mathbb{C}^*$ , on a  $\psi(H/H) = H/H$ .

On a donc bien prouvé les points 1) et 2), passons à présent au point 3). On a  $\forall h \in H$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(h).H/H &= \psi \circ h \circ \psi^{-1}.\psi(H/H) \\ &= \psi \circ h.H/H \\ &= \psi(H/H) \end{aligned}$$

$$= H/H$$

d'après le point 2). Ainsi, on a  $\tilde{\psi}(H) \subset H$ , et donc  $\tilde{\psi}(H) = H$ .

Soit  $P = N_G(H)$ . On a  $\forall p \in P, pHp^{-1} = H$ , d'où  $\tilde{\psi}(pHp^{-1}) = \tilde{\psi}(H) = H$  d'après ce qui précède. On obtient alors  $\tilde{\psi}(p)\tilde{\psi}(H)\tilde{\psi}(p^{-1}) = H$ , ce qui implique que  $\tilde{\psi}(P) = P$ . ■

**Corollaire 2.21.** *Soit  $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{X})$ . Quitte à composer par un élément de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  tout en gardant les propriétés du Lemme 2.20, l'automorphisme  $\tilde{\psi}$  de  $G$  associé à  $\psi$  est égal à un automorphisme  $s_\Gamma$  provenant d'une symétrie du diagramme de Dynkin (éventuellement l'identité) où  $s_\Gamma$  vérifie l'une des deux conditions suivantes :*

- 1)  $s_\Gamma$  fixe  $\alpha_0, \alpha_1$  et  $\beta$  et alors  $\psi$  stabilise  $G/P_{\alpha_0, \beta}$  et  $G/P_{\alpha_1, \beta}$ ,
- 2)  $s_\Gamma$  échange  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  et fixe  $\beta$  et alors  $\psi$  échange  $G/P_{\alpha_0, \beta}$  et  $G/P_{\alpha_1, \beta}$ .

De plus  $\psi(P/H) = P/H$ .

*Démonstration.* On a  $\tilde{\psi} = \gamma_{g'} \circ s_\Gamma$  par la description de  $\text{Aut}(G \times \mathbb{C}^*)$  et ainsi,  $\forall g \in G$  :

$$\begin{aligned} \psi(gH/H) &= \psi \circ g(H/H) \\ &= \psi \circ g \circ \psi^{-1}(\psi(H/H)) \\ &= \psi \circ g \circ \psi^{-1}(H/H) \\ &= \tilde{\psi}(g)(H/H) \\ &= (\gamma_{g'} \circ s_\Gamma)(g)(H/H) \\ &= (g' s_\Gamma(g) g'^{-1} H/H) \end{aligned}$$

D'après ce qui précède,  $\tilde{\psi}(P) = g' P' g'^{-1} = P$  avec  $P' := s_\Gamma(P) \supset B$  donc par le Lemme 2.19, on a  $g' \in P$ .

On sait que  $P/H \simeq \mathbb{C}^*$  agit sur  $G/H$  par  $pH/H.gH = gpH/H$  et on a :

$$(g'^{-1}, g'H/H).H/H = g'^{-1}g'H/H = H/H,$$

donc  $(g'^{-1}, g'H/H) \in \text{Stab}_{P \times P/H}(x_0)$ , avec  $x_0 = H/H$ . En composant avec  $\psi$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
(g'^{-1}, g'H/H) \circ \psi(gH/H) &= (g'^{-1}, g'H/H) \circ (g' s_\Gamma(g) g'^{-1} H/H) \\
&= g'^{-1} g' s_\Gamma(g) g'^{-1} g'H/H \\
&= s_\Gamma(g) H/H.
\end{aligned}$$

et on obtient finalement que  $\tilde{\psi} = s_\Gamma$  et  $\psi(P/H) = P/H$ . Puisque  $\mathbb{C}^* \simeq P/H \subset G/H \subset \mathbb{X}$  et comme  $\mathbb{X} \supset \overline{P/H} = P/H \sqcup \{P_Z/P_Z, P_Y/P_Y\}$ , alors  $\psi$  stabilise  $\{P_Z/P_Z, P_Y/P_Y\}$ . On a soit  $\psi$  qui stabilise  $P_Z/P_Z$  et  $P_Y/P_Y$  ou  $\psi$  qui les échange. ■

**Remarque 2.22.** Remarquons les points suivants.

1) L'application  $\psi \mapsto \tilde{\psi}$  est injective.

2) Lorsque  $a_1 > 0$ , on sait que l'orbite  $Y$  est stable sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  (en tant que lieu exceptionnel), donc il peut y avoir des automorphismes extérieurs qui fixent les orbites mais pas qui les échangent. En effet, s'il existait un automorphisme extérieur échangeant les  $G$ -orbites fermées, alors en composant avec la contraction birationnelle on obtiendrait une contraction birationnelle qui contracte l'autre orbite fermée, ce qui est impossible d'après le Log MMP.

3) Quand  $a_1 = 0$ , si  $\mathbb{X}$  est une variété à deux orbites sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ , alors il n'existe aucun automorphisme qui échange les deux  $G$ -orbites fermées, sinon par composition, on se retrouverait avec une variété homogène, ce qui n'est pas le cas.

### 3.2 $s_\Gamma = \text{id}$

Remarquons que  $s_\Gamma$  est toujours l'identité lorsque  $G = G_0$ , avec  $G_0$  un groupe simple  $G_0$  de type  $B_m, C_m, E_7, E_8, F_4$  ou  $G_2$ . En effet, dans ces cas il n'existe aucune symétrie non triviale du diagramme de Dynkin de  $G$ , ce qui signifie qu'il n'existe aucun automorphisme non trivial du diagramme de Dynkin de  $G$ , ainsi l'automorphisme induit  $\tilde{\psi}$ , est nécessairement un automorphisme intérieur d'après [Hum72, §16.5]. On a alors le résultat suivant :

**Proposition 2.23.** *Supposons que  $\tilde{\psi} = \text{id}$ . Alors,  $\psi = \text{id}$ . Par conséquent, le groupe d'automorphismes de  $\mathbb{X}$  est connexe lorsque  $\text{Sym}^{(1)(2)}(\Gamma, \beta, \alpha_0, \alpha_1)$*

$$= \{id_\Gamma\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Démonstration. Pour tout } g \in G, \quad \psi(g.H/H) &= \tilde{\psi}(g)(H/H) \\ &= g.H/H \end{aligned}$$

d'où  $\psi = id$  dans  $G/H$  et donc dans  $\mathbb{X}$ . En particulier,  $\psi \in \text{Aut}^0(\mathbb{X})$ .

Par le Lemme 2.20 et le Corollaire 2.21 on obtient que le groupe d'automorphismes de  $\mathbb{X}$  est connexe lorsque  $\text{Sym}^{(1)(2)}(\Gamma, \beta, \alpha_0, \alpha_1) = \{id_\Gamma\}$ . ■

### 3.3 $s_\Gamma \neq id$

Ce cas ne peut avoir lieu que dans les cas où  $G_0$  est de type  $A_m$ ,  $D_m$  ou  $E_6$ , ou lorsque  $G = G_0 \times A_{m'} \times A_{m'}$ , avec  $G_0$  quelconque. On a bien dans ces cas des symétries du diagramme de Dynkin de  $G$ , donc  $\psi$  peut à présent induire un automorphisme de  $G$  qui est non intérieur d'après [Hum72, §16.5].

**Remarque 2.24.** Si on a  $s_\Gamma \neq id$ , on est dans un des cas suivants du Corollaire 2.21 :

- $s_\Gamma$  est dans  $\text{Sym}^{(2)}(\Gamma, \beta, \alpha_0, \alpha_1)$  si  $G_0$  est de type  $A_m$  ou  $E_6$ , ou si  $G = G_0 \times A_{m'} \times A_{m'}$  avec  $G_0$  non de type  $D_m$
- $s_\Gamma$  est dans  $\text{Sym}^{(1)(2)}(\Gamma, \beta, \alpha_0, \alpha_1)$  si  $G_0$  est de type  $D_m$ .

**Remarque 2.25.** Dans tous les cas considérés dans cette thèse, les ensembles  $\text{Sym}^{(1)}(\Gamma, \beta, \alpha_0, \alpha_1)$  et  $\text{Sym}^{(2)}(\Gamma, \beta, \alpha_0, \alpha_1)$  ne peuvent pas être non vides tous les deux sauf dans le cas  $G = D_m \times A_{m'} \times A_{m'}$ .

**Lemme 2.26.** Pour tout  $s_\Gamma$  dans  $\text{Sym}^{(1)}(\Gamma, \beta, \alpha_0, \alpha_1)$  lorsque  $a_1 > 0$  ou  $\text{Sym}^{(1)(2)}(\Gamma, \beta, \alpha_0, \alpha_1)$  lorsque  $a_1 = 0$ ,  $s_\Gamma$  induit un automorphisme de  $\mathbb{X}$ .

*Démonstration.* Soit  $V$  un  $G$ -module simple de plus haut poids  $v_\lambda$ . Le  $G$ -module  $V$  avec l'action  $\odot_{s_\Gamma}$ , définie par :

$$\forall g \in G, \forall v \in V, g \odot_{s_\Gamma} v = s_\Gamma(g).v$$

est toujours un  $G$ -module. Ainsi, il existe un isomorphisme  $G$ -équivariant  $\varphi$  de  $(V, \cdot)$  dans  $(V, \odot_{s_\Gamma})$ , c'est-à-dire de sorte que  $\forall g \in G, \forall v \in V, \varphi(g.v) = s_\Gamma(g).\varphi(v)$ . En particulier, comme  $s_\Gamma$  stabilise  $B$  et  $T$  et agit sur le système de racines, on a  $\varphi(v_\lambda) = v_{s_\Gamma(\lambda)}$ .

En appliquant cela à  $V_1 := V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_\beta)$  et  $V_2 := V(\varpi_{\alpha_1} + (a_1 + 1)\varpi_\beta)$ , avec les conditions imposées à  $s_\Gamma$ , on obtient un isomorphisme  $G$ -équivariant  $\phi$  de  $(\mathbb{P}(V_1 \oplus V_2), \cdot)$  dans soit  $(\mathbb{P}(V_1 \oplus V_2), \odot_{s_\Gamma})$ , soit  $(\mathbb{P}(V_2 \oplus V_1), \odot_{s_\Gamma})$  (uniquement si  $a_1 = 0$ ).

Comme les vecteurs de plus haut poids sont envoyés sur les vecteurs de plus haut poids, la variété  $\mathbb{X}$ , qui est définie comme l'adhérence d'une  $G$ -orbite d'une somme de vecteurs de plus haut poids, est envoyée sur elle-même, de sorte que  $s_\Gamma$  agit sur l'orbite ouverte par  $\phi(gH/H) = s_\Gamma(g)H/H$ . Ainsi,  $\phi$  induit un automorphisme  $\tilde{\phi}$  de  $\mathbb{X}$  tel que  $\tilde{\phi} = s_\Gamma$ . ■

*Démonstration du Théorème 2.18.* En utilisant les points 1) et 2) de la Remarque 2.22 et le Corollaire 2.21, on montre à la fois que  $\text{Aut}(\mathbb{X}) \subset \text{Aut}^0(\mathbb{X}) \rtimes \text{Sym}^{(1),(2)}(\Gamma, \beta, \alpha_0, \alpha_1)$ , lorsque  $a_1 = 0$ , et que  $\text{Aut}(\mathbb{X}) \subset \text{Aut}^0(\mathbb{X}) \rtimes \text{Sym}^{(1)}(\Gamma, \beta, \alpha_0, \alpha_1)$ , lorsque  $a_1 > 0$ . La seconde inclusion est obtenue par le Lemme 2.26. ■





## CHAPITRE 3

# RIGIDITÉ LOCALE ET DÉFORMATION DE $\mathbb{X}$

A présent qu'on a étudié l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  sur  $\mathbb{X}$  dans tous les cas qu'on a précédemment listés et qu'on a conclu qu'on obtenait soit une variété à deux orbites (une ouverte et une fermée) soit une variété à trois orbites (une ouverte et deux fermées), en calculant  $H^0(\mathbb{X}, T_{\mathbb{X}})$  (dans les cas où l'espace des sections globales du faisceau tangent est non trivial), on étudie à présent la rigidité locale de  $\mathbb{X}$ , en calculant  $H^1(\mathbb{X}, T_{\mathbb{X}})$ .

En utilisant les mêmes notations que précédemment, on a toujours la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow S_X \longrightarrow T_X \longrightarrow N_{\partial X/X} \longrightarrow 0$$

avec  $S_X$  le faisceau d'action de  $X$ , c'est-à-dire le sous-faisceau de  $T_X$  constitué des champs vectoriels tangents à  $\partial X = Y \cup Z$ , ce qui donne la suite exacte longue suivante :

$$H^0(X, S_X) \longrightarrow H^0(X, T_X) \longrightarrow H^0(\partial X, N_{\partial X/X}) \longrightarrow H^1(X, S_X) \longrightarrow H^1(X, T_X) \longrightarrow H^1(\partial X, N_{\partial X/X}) \longrightarrow H^2(X, S_X) \longrightarrow H^2(X, T_X) \longrightarrow \dots$$

# 1 Contexte et stratégie

Soit  $X$  une variété horosphérique projective lisse. Alors, on sait que  $H^i(X, S_X) = 0$ ,  $\forall i > 0$  d'après [PP10, Th.0.4]. Ainsi, d'après la suite exacte longue précédente, on obtient que

$$H^1(X, T_X) = H^1(\partial X, N_{\partial X/X}). \quad (1)$$

Notre but ici est d'étudier cette fois  $H^1(\mathbb{X}, T_{\mathbb{X}})$ . Si le calcul nous donne 0, on a, d'après la théorie de Kodaira-Spencer, que  $\mathbb{X}$  est localement rigide, c'est-à-dire n'admet aucune déformation locale.

D'après (1), il faut seulement calculer  $H^1(\partial \mathbb{X}, N_{\partial \mathbb{X}/\mathbb{X}})$ . En effet, on sait que  $H^1(\partial \mathbb{X}, N_{\partial \mathbb{X}/\mathbb{X}}) = H^1(Y, N_{Y/\mathbb{X}}) \oplus H^1(Z, N_{Z/\mathbb{X}})$ , et si  $Y$  (ou  $Z$ ) n'est pas stable sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$ , alors on obtient que  $H^0(Y, N_{Y/\mathbb{X}}) \neq 0$  (resp.  $H^0(Z, N_{Z/\mathbb{X}}) \neq 0$ ) et  $H^1(Y, N_{Y/\mathbb{X}}) = 0$  (resp.  $H^1(Z, N_{Z/\mathbb{X}}) = 0$ ) par Borel-Weil.

Donnons un exemple concret de la méthode employée par la suite afin d'étudier la rigidité locale, mais avant commençons par donner les différentes étapes à suivre.

1 - On va considérer le poids  $\chi$  qui décrit l'espace total de  $N_{Y/\mathbb{X}}$  or  $N_{Z/\mathbb{X}}$ , qui est égal respectivement à  $-\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\alpha_1} + a_1 \varpi_{\beta}$  ou  $\varpi_{\alpha_0} - \varpi_{\alpha_1} - a_1 \varpi_{\beta}$ , et on calcule ensuite  $w_0^{\alpha_0, \beta}(\chi)$  ou  $w_0^{\alpha_1, \beta}(\chi)$ .

2 - L'étape suivante consiste ensuite à écrire  $w_0^{\alpha_0, \beta}(\chi) - \rho$  ou  $w_0^{\alpha_1, \beta}(\chi) - \rho$  comme combinaison linéaire des  $\varpi_{\chi_j}$ . On va ensuite exclure tous les cas où  $H^0(\mathbb{X}, T_{\mathbb{X}}) \neq 0$  (c'est-à-dire tous les cas où  $H^0(\Omega, N_{\Omega/\mathbb{X}}) \neq 0$  pour  $\Omega$  une  $G$ -orbite fermée) ainsi que tous les cas où  $H^i(\mathbb{X}, T_{\mathbb{X}}) = 0$  pour tout  $i$  (qui correspondent aux cas où l'un des coefficients est nul). On a à présent deux cas de figure :

- tous les coefficients sont strictement négatifs et ainsi on est dans la chambre dominante et on peut alors calculer  $H^1(\mathbb{X}, T_{\mathbb{X}})$ , ou
- il existe une racine  $\gamma$  avec un coefficient positif, et on effectue alors l'étape suivante.

**Remarque 3.1.** Si on obtient deux coefficients strictement positifs à l'étape 2, alors il n'existe aucune réflexion orthogonale de sorte que tous les coefficients deviennent strictement négatifs. En effet, si on considère deux racines distinctes  $\gamma$  et  $\gamma'$  avec un coefficient positif, alors il existe  $\delta^\vee \in R_+^\vee$  de sorte que

$s_\gamma(\delta^\vee) = \gamma'^\vee$  et ainsi  $\langle s_\gamma(w_0^{\alpha_0, \beta}(\chi) - \rho), \delta^\vee \rangle > 0$  ou  $\langle s_\gamma(w_0^{\alpha_1, \beta}(\chi) - \rho), \delta^\vee \rangle > 0$ .

3 - Cette dernière étape consiste à trouver une réflexion simple qui envoie  $w_0^{\alpha_0, \beta}(\chi) - \rho$  ou  $w_0^{\alpha_1, \beta}(\chi) - \rho$  selon le cas, dans la chambre antidominante. On cherche à calculer  $\langle w_0^{\alpha_0, \beta}(\chi) - \rho, s_\gamma(\chi_j^\vee) \rangle$  ou  $\langle w_0^{\alpha_1, \beta}(\chi) - \rho, s_\gamma(\chi_j^\vee) \rangle$  avec  $\gamma \in S$ , en utilisant ce qui suit :

$$s_\gamma(\chi_j^\vee) = \begin{cases} \chi_j^\vee & \text{si } \gamma \text{ et } \chi_j \text{ non liées} \\ -\chi_j^\vee & \text{si } \gamma = \chi_j \\ \text{coracine positive } \neq \chi_j^\vee & \text{sinon} \end{cases}$$

de telle sorte que :

$$\langle \varpi_\gamma, s_\gamma(\chi_j^\vee) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma \text{ et } \chi_j \text{ non liées} \\ -1 & \text{si } \gamma = \chi_j \\ -\langle \chi_j, \gamma^\vee \rangle & \text{sinon} \end{cases}$$

Si  $\langle \varpi_\gamma, s_\gamma(\chi_j^\vee) \rangle < 0$ , pour tout  $\chi_j^\vee$ , alors on obtient bien  $H^1(\mathbb{X}, T_{\mathbb{X}}) \neq 0$ . Sinon, on a  $H^1(\mathbb{X}, T_{\mathbb{X}})$  trivial.

Avant de donner un exemple concret, on va d'abord donner un premier résultat intermédiaire qui simplifiera les calculs, en utilisant les notations suivantes. On note respectivement  $c_{\alpha_1}$  et  $d_{\alpha_1}$  les coefficients de  $\alpha_1$  dans  $w_0^{\alpha_0, \beta}(\alpha_0^\vee)$  et  $w_0^{\alpha_0, \beta}(\beta^\vee)$  (voir Lemme 1.5) et  $\alpha'_1 := w_0^{\alpha_0, \beta}(\alpha_1)$  (respectivement  $c_{\alpha_0}$  et  $d_{\alpha_0}$  les coefficients de  $\alpha_0$  dans  $w_0^{\alpha_1, \beta}(\alpha_1^\vee)$  et  $w_0^{\alpha_1, \beta}(\beta^\vee)$  et  $\alpha'_0 := w_0^{\alpha_1, \beta}(\alpha_0)$ ).

**Convention 3.2.** Si  $\alpha_1$  est une racine imaginaire, alors  $c_{\alpha_1} = d_{\alpha_1} = 0$ . Si  $\alpha_0$  est une racine imaginaire, alors  $c_{\alpha_1} = 1$ . Cette convention n'est pas très naturelle, mais elle permet que les calculs effectués restent vrais dans tous les cas.

**Remarque 3.3.** On a la même convention pour  $c_{\alpha_0}$  et  $d_{\alpha_0}$ .

**Lemme 3.4.** Avec les notations précédentes, lorsque  $\alpha_1$  est non imaginaire, on a  $w_0^{\alpha_0, \beta}(\varpi_{\alpha_1}) = c_{\alpha_1} \varpi_{\alpha_0} + d_{\alpha_1} \varpi_\beta - \varpi_{\alpha'_1}$ . Sinon,  $w_0^{\alpha_0, \beta}(\varpi_{\alpha_1}) = \varpi_{\alpha_1}$ .

**Remarque 3.5.** On obtient le même résultat pour l'autre cas :  $w_0^{\alpha_1, \beta}(\varpi_{\alpha_0}) = c_{\alpha_0} \varpi_{\alpha_1} + d_{\alpha_0} \varpi_\beta - \varpi_{\alpha'_0}$  si  $\alpha_0$  non imaginaire et  $w_0^{\alpha_1, \beta}(\varpi_{\alpha_0}) = \varpi_{\alpha_0}$  si  $\alpha_0$  imaginaire.

*Démonstration.* On sait qu'on a :

$$\langle w_0^{\alpha_0, \beta}(\varpi_{\alpha_1}), \gamma^\vee \rangle = \langle \varpi_{\alpha_1}, w_0^{\alpha_0, \beta}(\gamma^\vee) \rangle = \begin{cases} -1 & \text{si } \gamma = \alpha'_1 \\ c_{\alpha_1} & \text{si } \gamma = \alpha_0 \\ d_{\alpha_1} & \text{si } \gamma = \beta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose  $w_0^{\alpha_0, \beta}(\varpi_{\alpha_1}) = \sum_{p=1}^m f_i \varpi_{\chi_i}$ , alors on a :

$$\langle w_0^{\alpha_0, \beta}(\varpi_{\alpha_1}), \gamma^\vee \rangle = \left\langle \sum_{p=1}^m f_i \varpi_{\chi_i}, \gamma^\vee \right\rangle = \sum_{p=1}^m f_i \langle \varpi_{\chi_i}, \gamma^\vee \rangle = \begin{cases} -1 & \text{si } \gamma = \alpha'_1 \\ c_{\alpha_1} & \text{si } \gamma = \alpha_0 \\ d_{\alpha_1} & \text{si } \gamma = \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui nous donne  $f_{\alpha'_1} = -1$ ,  $f_{\alpha_0} = c_{\alpha_1}$ ,  $f_{\beta} = d_{\alpha_1}$  et  $f_i = 0$  pour tous les autres  $i$ , donc on a  $w_0^{\alpha_0, \beta}(\varpi_{\alpha_1}) = -\varpi_{\alpha'_1} + c_{\alpha_1} \varpi_{\alpha_0} + d_{\alpha_1} \varpi_{\beta}$ . ■

A présent, choisissons un cas dans lequel  $H^0(Y, N_{Y/\mathbb{X}})$  est trivial, comme dans le cas (V)(1), avec  $a_1 \geq 0$ , pour illustrer la méthode précédemment énoncée.

**Exemple 3.6.** *On va donc chercher à étudier l'orbite  $Y$  dans le cas (V)(1). On rappelle que dans ce cas, on a  $G = G_0$  de type  $E_6$ ,  $\beta = \chi_1$ ,  $\alpha_0 = \chi_2$ ,  $\alpha_1 = \chi_3$  et  $\chi = -\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\alpha_1} + a_1 \varpi_{\beta}$ . On rappelle également qu'on a  $\rho = \sum_{j=1}^m \varpi_{\chi_j}$ , de sorte que :*

$$\begin{aligned} w_0^{\alpha_0, \beta}(\chi) - \rho &= w_0^{\alpha_0, \beta}(-\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\alpha_1} + a_1 \varpi_{\beta}) - \sum_{j=1}^6 \varpi_{\chi_j} \\ &= -w_0^{\alpha_0, \beta}(\varpi_{\alpha_0}) + w_0^{\alpha_0, \beta}(\varpi_{\alpha_1}) + a_1 w_0^{\alpha_0, \beta}(\varpi_{\beta}) - \sum_{j=1}^6 \varpi_{\chi_j} \\ &= -\varpi_{\alpha_0} + w_0^{\alpha_0, \beta}(\varpi_{\alpha_1}) + a_1 \varpi_{\beta} - \sum_{j=1}^6 \varpi_{\chi_j} \quad (*) \end{aligned}$$

D'après Lemme 3.4,  $w_0^{\alpha_0, \beta}(\varpi_{\alpha_1}) = -\varpi_{\chi_6} + \varpi_{\chi_2} + \varpi_{\chi_1}$ , donc on a :

$$\begin{aligned} (*) &= -\varpi_{\chi_2} - \varpi_{\chi_6} + \varpi_{\chi_2} + \varpi_{\chi_1} + a_1 \varpi_{\chi_1} - \sum_{j=1}^6 \varpi_{\chi_j} \\ &= a_1 \varpi_{\chi_1} - \varpi_{\chi_2} - \varpi_{\chi_3} - \varpi_{\chi_4} - \varpi_{\chi_5} - 2\varpi_{\chi_6}. \end{aligned}$$

Ainsi, on note que le seul coefficient positif ici est  $a_1$ . Ainsi, la dernière étape consiste à présent à calculer  $\langle s_{\chi_1}(w_0^{\alpha_0, \beta}(\chi) - \rho), \chi_j^\vee \rangle$ , pour tout  $j \in \{1, \dots, 6\}$ .

**Remarque 3.7.** On choisit  $s_{\chi_1}$  car si on considérait  $s_{\chi_i}$  avec  $i \neq 1$ , on aurait  $s_{\chi_i}(\chi_i^\vee) = -\chi_i$ , ce qui nous donne par la suite  $\langle s_{\chi_i}(w_0^{\alpha_0, \beta}(\chi) - \rho), \chi_i^\vee \rangle = \langle w_0^{\alpha_0, \beta}(\chi) - \rho, s_{\chi_i}(\chi_i^\vee) \rangle = \langle w_0^{\alpha_0, \beta}(\chi) - \rho, -\chi_i^\vee \rangle \geq 0$ , car pour tout  $i \neq 1$ , le coefficient devant  $\varpi_{\chi_i}$  est négatif ou nul.

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle s_{\chi_1}(w_0^{\alpha_0, \beta}(\chi) - \rho), \chi_j^\vee \rangle &= \langle w_0^{\alpha_0, \beta}(\chi) - \rho, s_{\chi_1}(\chi_j^\vee) \rangle \\ &= \langle a_1 \varpi_{\chi_1} - \varpi_{\chi_2} - \varpi_{\chi_3} - \varpi_{\chi_4} - \varpi_{\chi_5} - 2\varpi_{\chi_6}, s_{\chi_1}(\chi_j^\vee) \rangle \\ &= a_1 \langle \varpi_{\chi_1}, s_{\chi_1}(\chi_j^\vee) \rangle - \langle \varpi_{\chi_2}, s_{\chi_1}(\chi_j^\vee) \rangle - \langle \varpi_{\chi_3}, s_{\chi_1}(\chi_j^\vee) \rangle - \\ &\langle \varpi_{\chi_4}, s_{\chi_1}(\chi_j^\vee) \rangle - \langle \varpi_{\chi_5}, s_{\chi_1}(\chi_j^\vee) \rangle - 2 \langle \varpi_{\chi_6}, s_{\chi_1}(\chi_j^\vee) \rangle \end{aligned}$$

$$\text{et puisque } s_{\chi_1}(\chi_j^\vee) = \begin{cases} -\chi_1^\vee & \text{if } j = 1 \\ \chi_2^\vee & \text{if } j = 2 \\ \chi_3^\vee + \chi_1^\vee & \text{if } j = 3 \\ \chi_4^\vee & \text{if } j = 4 \\ \chi_5^\vee & \text{if } j = 5 \\ \chi_6^\vee & \text{if } j = 6 \end{cases}$$

on obtient au final :

$$\langle s_{\chi_1}(w_0^{\alpha_0, \beta}(\chi) - \rho), \chi_j^\vee \rangle = \begin{cases} -a_1 \leq 0 & \text{if } j = 1 \\ -1 < 0 & \text{if } j = 2 \\ a_1 - 1 & \text{if } j = 3 \\ -1 < 0 & \text{if } j = 4 \\ -1 < 0 & \text{if } j = 5 \\ -2 < 0 & \text{if } j = 6 \end{cases}$$

Si  $a_1 = 0$ , on est sur le mur de la chambre antidominante et on a donc  $H^1(\mathbb{X}, T_{\mathbb{X}}) = 0$ , et si  $a_1 > 0$ , alors  $a_1 - 1 \geq 0$  donc on n'est pas dans la chambre antidominante et  $H^1(\mathbb{X}, T_{\mathbb{X}}) = 0$ . Donc dans ce cas,  $X$  est localement rigide.

## 2 Calcul de $H^1(\mathbb{X}, T_{\mathbb{X}})$

On va maintenant regarder, sans perte de généralité, ce qui se passe pour la  $G$ -orbite fermée  $Y$ , qui est isomorphe à  $G/P_{\alpha_0, \beta}$ . On sait qu'on a :

$$\begin{aligned} w_0^{\alpha_0, \beta}(\chi) - \rho &= -\varpi_{\alpha_0} + c_{\alpha_1} \varpi_{\alpha_0} + d_{\alpha_1} \varpi_{\beta} - \varpi_{\alpha'_1} + a_1 \varpi_{\beta} - \sum_{l=1}^m \varpi_{\chi_l} \\ &= (c_{\alpha_1} - 2) \varpi_{\alpha_0} - 2\varpi_{\alpha'_1} + (d_{\alpha_1} + a_1 - 1) \varpi_{\beta} - \sum_{\substack{l=1 \\ \chi_l \neq \beta \\ \chi_l \neq \alpha_0 \\ \chi_l \neq \alpha'_1}}^m \varpi_{\chi_l}. \end{aligned}$$

D'après les remarques précédentes, il y a deux cas de figure à étudier :

- soit  $c_{\alpha_1} - 2 < 0$  et  $d_{\alpha_1} + a_1 - 1 > 0$ ,
- soit  $c_{\alpha_1} - 2 > 0$  et  $d_{\alpha_1} + a_1 - 1 < 0$ .

Or, on a le lemme suivant, qui rend ce dernier cas de figure impossible.

**Lemme 3.8.** *Le coefficient  $c_{\alpha_1}$  est toujours égal à 0, 1 ou 2 dans tous les cas étudiés (voir Chapitre 1).*

*Démonstration.* Si  $G_0$  est de type  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $C_m$  ou  $D_m$ , on a toujours  $0 \leq c_{\alpha_1} \leq 2$ , d'après [Bou07].

Si  $G_0$  est de type  $F_4$ ,  $\Gamma_{S \setminus \{\beta\}}$  est de type  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $C_m$  ou  $D_m$ , donc on a de nouveau  $0 \leq c_{\alpha_1} \leq 2$  (puisque  $w_0^{\alpha_0, \beta}(\alpha_0^\vee)$  est une racine de  $\Gamma_{S \setminus \{\beta\}}$ ).

Si  $G = G_0 \times G_1$  avec  $G_0$  de type  $G_2$ , alors  $\Gamma_{S \setminus \{\beta\}}$  est de type  $A_1 \times A_m$ .

Si  $G_0$  est de type  $E_6$ , on a  $\Gamma_{S \setminus \{\beta\}}$  de type  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $C_m$  ou  $D_m$ , et de nouveau  $0 \leq c_{\alpha_1} \leq 2$ .

Enfin, si  $G$  est de type  $E_7$  ou  $E_8$ , alors  $\Gamma_{S \setminus \{\beta\}}$  peut être de type  $E_6$  ou  $E_7$ , ce qui peut donner  $c_{\alpha_1} > 2$ . Pour cela,  $\beta$  doit être respectivement  $\chi_7$  ou,  $\chi_7$  ou  $\chi_8$ . Mais comme ce n'est pas un cas possible dans le cadre de cette thèse, on a de nouveau  $0 \leq c_{\alpha_1} \leq 2$ . ■

**Théorème 3.9.** *Soit  $a_1 \geq 0$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)(a)  $\lambda = d_{\alpha_1} + a_1 - 1 > 0$  et  $2 - c_{\alpha_1} > 0$ , et  
 (b)  $\beta$  est uniquement liée à  $\alpha_0$  et  $\alpha'_1$  (ou l'une d'elles si  $\beta$  est extrémale),

et

$$(c) \begin{cases} A\lambda + (c_{\alpha_1} - 2) < 0 \\ B\lambda - 2 < 0 \end{cases}$$

avec  $A = -\langle \alpha_0, \beta^\vee \rangle$  et  $B = -\langle \alpha'_1, \beta^\vee \rangle$ .

(2)  $H^1(Y, N_{Y/\mathbb{X}})$  n'est pas triviale.

**Remarque 3.10.** On peut aussi réécrire la condition (c) de l'une des façons suivantes :

- \*  $\lambda = 1, c_{\alpha_1} = 0, A = 0$  or  $1, B = 0$  ou  $1,$
- \*  $\lambda = 1, c_{\alpha_1} = 1, A = 0, B = 1.$

*Démonstration.* On va commencer par montrer l'implication (1)  $\implies$  (2). On rappelle que dans cette preuve on va travailler sans perte de généralité sur la  $G$ -orbite  $Y$  et qu'on a :

$$w_0^{\alpha_0, \beta}(\chi) - \rho = (c_{\alpha_1} - 2)\varpi_{\alpha_0} - 2\varpi_{\alpha'_1} + (d_{\alpha_1} + a_1 - 1)\varpi_\beta - \sum_{\substack{l=1 \\ \chi_l \neq \beta \\ \chi_l \neq \alpha_0 \\ \chi_l \neq \alpha'_1}}^m \varpi_{\chi_l}.$$

avec  $c_{\alpha_1} - 2 < 0$  et  $d_{\alpha_1} + a_1 - 1 > 0$ .

On veut à présent calculer  $\langle s_\beta(w_0^{\alpha_0, \beta}(\chi) - \rho), \chi_j^\vee \rangle, \forall j \in \{1, \dots, m\}$  :

$$\begin{aligned} (*_1) \quad & \langle s_\beta(w_0^{\alpha_0, \beta}(\chi) - \rho), \chi_j^\vee \rangle = \langle w_0^{\alpha_0, \beta}(\chi) - \rho, s_\beta(\chi_j^\vee) \rangle \\ & = \langle (c_{\alpha_1} - 2)\varpi_{\alpha_0} - 2\varpi_{\alpha'_1} + (d_{\alpha_1} + a_1 - 1)\varpi_\beta - \sum_{\substack{l=1 \\ \chi_l \neq \beta \\ \chi_l \neq \alpha_0 \\ \chi_l \neq \alpha'_1}}^m \varpi_{\chi_l}, s_\beta(\chi_j^\vee) \rangle \\ & = (c_{\alpha_1} - 2)\langle \varpi_{\alpha_0}, s_\beta(\chi_j^\vee) \rangle - 2\langle \varpi_{\alpha'_1}, s_\beta(\chi_j^\vee) \rangle + (d_{\alpha_1} + a_1 - 1)\langle \varpi_\beta, s_\beta(\chi_j^\vee) \rangle - \sum_{\substack{l=1 \\ \chi_l \neq \beta \\ \chi_l \neq \alpha_0 \\ \chi_l \neq \alpha'_1}}^m \langle \varpi_{\chi_l}, s_\beta(\chi_j^\vee) \rangle \end{aligned}$$

On va traiter les trois cas de figure suivants :

- (i)  $\chi_j = \beta$
- (ii)  $\chi_j$  et  $\beta$  ne sont pas liées sur le diagramme de Dynkin
- (iii)  $\chi_j$  et  $\beta$  sont liées sur le diagramme de Dynkin.

Dans le cas (i), on a :

$$(*_1) = -(d_{\alpha_1} + a_1 - 1) < 0$$

Dans le cas (ii), on a  $\chi_j$  et  $\beta$  non liées sur le diagramme de Dynkin, ce qui signifie que  $\chi_j$  est différente de  $\alpha_0$  et  $\alpha'_1$  :

$$(*_1) = -1 < 0 \text{ (avec } \chi_j \neq \beta, \alpha_0, \alpha'_1)$$

Enfin, dans le cas (iii), on a  $\chi_j$  et  $\beta$  liées sur le diagramme de Dynkin, ce qui signifie qu'on considère  $\chi_j = \alpha_0$  et  $\chi_j = \alpha'_1$ , ce qui nous donne :

$$(*_1) = \begin{cases} (c_{\alpha_1} - 2) + A(d_{\alpha_1} + a_1 - 1) & \text{si } \chi_j = \alpha_0 \\ -2 + B(d_{\alpha_1} + a_1 - 1) & \text{si } \chi_j = \alpha'_1 \end{cases}$$

avec  $A = -\langle \alpha_0, \beta^\vee \rangle$  et  $B = -\langle \alpha'_1, \beta^\vee \rangle$ .

En utilisant (c), on obtient que les coefficients sont tous les deux strictement négatifs, et ainsi  $H^1(\mathbb{X}, T_{\mathbb{X}})$  est non trivial pour certaines valeurs de  $a_1 \geq 0$ , donc (1)  $\implies$  (2).

On va à présent prouver la seconde implication, c'est-à-dire que  $H^1(\mathbb{X}, T_{\mathbb{X}})$  non trivial pour certains  $a_1 \geq 0$  implique (a), (b) et (c). L'implication (2)  $\implies$  (a) étant triviale, on va commencer par montrer (2)  $\implies$  (b).

Supposons que (b) n'est pas vérifiée, c'est-à-dire que  $\beta$  est liée à une autre racine que  $\alpha_0$  et  $\alpha'_1$ , et montrons donc que  $(*_1)$  n'est pas toujours strictement négatif.

- (i) Quand  $\chi_j = \beta$ , on obtient le même résultat que précédemment.
- (ii) Quand  $\chi_j$  et  $\beta$  ne sont pas liées sur le diagramme de Dynkin, une des  $\chi_j$  est  $\alpha_0$  et/ou  $\alpha'_1$ , et on a :

$$(*_1) = \begin{cases} -1 < 0 & \text{si } \chi_j \neq \alpha'_1 \text{ et } \chi_j \neq \alpha_0 \\ -2 < 0 & \text{si } \chi_j = \alpha'_1 \\ c_{\alpha_1} - 2 < 0 & \text{si } \chi_j = \alpha_0 \end{cases}$$

- (iii) Pour finir, quand  $\chi_j$  et  $\beta$  sont liées sur le diagramme de Dynkin, on a une racine  $\gamma$  différente de  $\alpha_0$  et  $\alpha'_1$ , ce qui nous donne pour  $\chi_j = \gamma$  :



$$\begin{aligned}
(*_1) &= -1 - (d_{\alpha_1} + a_1 - 1)\langle \gamma, \beta^\vee \rangle \\
&= -1 + A(d_{\alpha_1} + a_1 - 1)
\end{aligned}$$

avec  $A = -\langle \gamma, \beta^\vee \rangle$ . On obtient  $-1 + A\lambda < 0 \iff A\lambda < 1$ . La seule possibilité est  $A\lambda = 0$ , mais comme  $\lambda > 0$ , on doit avoir  $A = 0$ , ce qui est impossible car  $\gamma$  et  $\beta$  sont liées sur le diagramme de Dynkin, donc ici  $(*_1) \geq 0$ , ce qui signifie que  $H^1(\mathbb{X}, T_{\mathbb{X}})$  est trivial.

Le dernier point à montrer est l'implication  $(2) \implies (c)$ , c'est-à-dire  $H^1(\mathbb{X}, T_{\mathbb{X}})$  non trivial pour certains  $a_1 \geq 0 \implies A\lambda + (c_{\alpha_1} - 2) < 0$  et  $B\lambda - 2 < 0$ .

On sait que  $H^1(\mathbb{X}, T_{\mathbb{X}})$  non trivial  $\implies \langle s_\beta(w_0^{\alpha_0, \beta}(\chi) - \rho), \chi_j^\vee \rangle < 0, \forall j$ , ce qui nous donne clairement que  $A\lambda + (c_{\alpha_1} - 2) < 0$  et  $B\lambda - 2 < 0$ , d'après ce qui précède, donc on a bien  $(2) \implies (c)$ , et ainsi  $(2) \implies (1)$ . ■

Après avoir étudié la liste de tous nos cas, on peut remarquer qu'il y a en réalité très peu de cas qui rentrent dans le cas du Théorème 3.9, certains pour  $a_1 = 0$ , d'autres pour certaines valeurs strictement positives de  $a_1$ .

Quand  $a_1 = 0$ ,  $H^1(\mathbb{X}, T_{\mathbb{X}})$  est non trivial seulement dans les cas suivants :

- (II)(3)
- (VIII)(6)
- (XVI)(9).

Quand  $a_1 > 0$ ,  $H^1(\mathbb{X}, T_{\mathbb{X}})$  est non trivial seulement dans les cas suivants :

- (I)(3) pour  $a_1 = 1$
- (IV')(2) pour  $a_1 = 2$
- (IX)(1) pour  $a_1 = 2$
- (IX')(2) pour  $a_1 = 1$
- (IX')(5) pour  $a_1 = 1$
- (IX)(12) pour  $a_1 = 1$
- (XI)(1) pour  $a_1 = 2$
- (XI')(4) pour  $a_1 = 1$
- (XVI)(11) pour  $a_1 = 1$
- (XVII)(1) pour  $a_1 = 2$ .



# ANNEXE

On va résumer tous les résultats obtenus dans les tableaux suivants, pour voir quelles  $G$ -orbites fermées sont stables sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  et dans quels cas nos variétés  $\mathbb{X}$  sont localement rigides.

Quand  $a_1 > 0$ , on ne fait pas apparaître dans les tableaux la colonne  $H^0(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$  car on sait que  $Y$  est stable sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  d'après la Proposition 2.7 et donc que  $H^0(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}}) = 0$  dans tous les cas. De plus, on ne fait pas non plus apparaître la colonne  $H^1(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$  car on sait que lorsque  $H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$  n'est pas trivial,  $H^1(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}}) = 0$  par le théorème de Borel-Weil-Bott, et dans les autres cas on obtient  $H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}}) = 0$  par le Théorème 3.9.

**Quand  $a_1 > 0$  avec  $G = G_0$  ou  $G = G_0 \times G_1$  et  $\alpha_0$  ou  $\alpha_1 \in G_1$  :**

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(I)(1)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_{m-2}})$	0
(I')(1)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0
(I)(2)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_{k-2}})$	0
(I')(2)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(I)(3)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	non trivial pour $a_1 = 1$
(I')(3)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_{m-1}})$	0
(I)(4)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(I')(4)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_{k-1}})$	0
(II)(1)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_{m-2}})$	0
(II')(1)	0 si $a_1 = 1$ , $V((a_1 - 2)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$ sinon	0
(II)(2)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_{k-2}})$	0
(II')(2)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0
(II)(3)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(II')(3)	0 si $a_1 = 1$ , $V((a_1 - 2)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_{m-1}})$ sinon	0
(II)(4)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(II')(4)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_{k-1}})$	0
(II)(5)	0	0
(II')(5)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_m})$	0
(II)(6)	0	0
(II')(6)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_m})$	0
(III)(1)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_{m-2}})$	0
(III')(1)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(III)(2)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_{k-2}})$	0
(III')(2)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0
(III)(3)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(III')(3)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_{m-1}})$	0
(III)(4)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(III')(4)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_{k-1}})$	0
(III)(5)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_{k+1}})$	0
(III')(5)	0	0
(IV)(1)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_{k-2}})$	0
(IV')(1)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0
(IV)(2)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_{m-2}})$	0
(IV')(2)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	non trivial pour $a_1 = 2$
(IV)(3)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(IV')(3)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_{k-1}})$	0
(IV)(4)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(IV')(4)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_{m-1}})$	0
(IV)(5)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_{k+1}})$	0
(IV')(5)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_{k+1}})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(IV)(6)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_m})$	0
(IV')(6)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_{m-1}})$	0
(IV)(7)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_{m-1}})$	0
(IV')(7)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_m})$	0
(IV)(8)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_{m-2}})$	0
(IV')(8)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_{m-2}})$	0
(IV)(9)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{m-1}})$	0
(IV')(9)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_m})$	0
(V)(1)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_6})$	0
(V')(1)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_6})$	0
(V)(2)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_5})$	0
(V')(2)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_3})$	0
(V)(3)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(V')(3)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_6})$	0
(V)(4)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(V')(4)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_6})$	0
(V)(5)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_5})$	0
(V')(5)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_4})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(V)(6)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0
(V')(6)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_6})$	0
(V)(7)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0
(V')(7)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_6})$	0
(V)(8)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0
(V')(8)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_6})$	0
(V)(9)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(V')(9)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_3})$	0
(VI)(1)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_7})$	0
(VI')(1)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_7})$	0
(VI)(2)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_6})$	0
(VI')(2)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_3})$	0
(VI)(3)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(VI')(3)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_7})$	0
(VI)(4)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(VI')(4)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_7})$	0
(VI)(5)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(VI')(5)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_7})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(VI)(6)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(VI')(6)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_7})$	0
(VI)(7)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(VI')(7)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_7})$	0
(VI)(8)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_6})$	0
(VI')(8)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_4})$	0
(VI)(9)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0
(VI')(9)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_7})$	0
(VI)(10)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0
(VI')(10)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_7})$	0
(VI)(11)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0
(VI')(11)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_7})$	0
(VI)(12)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0
(VI')(12)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_7})$	0
(VI)(13)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(VI')(13)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_3})$	0
(VI)(14)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_6})$	0
(VI')(14)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_6})$	0



Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(VI)(15)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_5})$	0
(VI')(15)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_7})$	0
(VI)(16)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_5})$	0
(VI')(16)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_7})$	0
(VI)(17)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_4})$	0
(VI')(17)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_3})$	0
(VI)(18)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(VI')(18)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0
(VI)(19)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(VI')(19)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0
(VI)(20)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0
(VI')(20)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(VI)(21)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_6})$	0
(VI')(21)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_7})$	0
(VI)(22)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(VI')(22)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(VII)(1)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_8})$	0
(VII')(1)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_8})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(VII)(2)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_7})$	0
(VII')(2)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_3})$	0
(VII)(3)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(VII')(3)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_8})$	0
(VII)(4)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(VII')(4)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_8})$	0
(VII)(5)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(VII')(5)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_8})$	0
(VII)(6)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(VII')(6)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_8})$	0
(VII)(7)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(VII')(7)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_8})$	0
(VII)(8)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(VII')(8)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_8})$	0
(VII)(9)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_7})$	0
(VII')(9)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_4})$	0
(VII)(10)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0
(VII')(10)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_8})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(VII)(11)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0
(VII')(11)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_8})$	0
(VII)(12)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0
(VII')(12)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_8})$	0
(VII)(13)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0
(VII')(13)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_8})$	0
(VII)(14)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0
(VII')(14)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_8})$	0
(VII)(15)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(VII')(15)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_3})$	0
(VII)(16)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_7})$	0
(VII')(16)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_6})$	0
(VII)(17)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_5})$	0
(VII')(17)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_8})$	0
(VII)(18)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_5})$	0
(VII')(18)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_8})$	0
(VII)(19)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_5})$	0
(VII')(19)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_8})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(VII)(20)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_4})$	0
(VII')(20)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_3})$	0
(VII)(21)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(VII')(21)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0
(VII)(22)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(VII')(22)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0
(VII)(23)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0
(VII')(23)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(VII)(24)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_7})$	0
(VII')(24)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_7})$	0
(VII)(25)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_6})$	0
(VII')(25)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_8})$	0
(VII)(26)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_6})$	0
(VII')(26)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_8})$	0
(VII)(27)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(VII')(27)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(VII)(28)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_7})$	0
(VII')(28)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_8})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(VIII)(1)	0	0
(VIII')(1)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_4})$	0
(VIII)(2)	0	0
(VIII')(2)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_4})$	0
(VIII)(3)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_3})$	0
(VIII')(3)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_4})$	0
(VIII)(4)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(VIII')(4)	0 si $a_1 = 1$ , $V((a_1 - 2)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$ sinon	0
(VIII)(5)	0	0
(VIII')(5)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_3})$	0
(VIII)(6)	0	0
(VIII')(6)	0 si $a_1 = 1$ , $V((a_1 - 2)\varpi_\beta + \varpi_{\chi_3})$ sinon	0
(IX)(1)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_m})$	non trivial pour $a_1 = 2$
(IX')(1)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(IX)(2)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(IX')(2)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	non trivial pour $a_1 = 1$
(IX)(3)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{k-1}})$	0
(IX')(3)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(IX)(4)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_m})$	0
(IX')(4)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(IX)(5)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{k-1}})$	0
(IX')(5)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_m})$	non trivial pour $a_1 = 1$
(IX)(6)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{k+1}})$	0
(IX')(6)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(IX)(7)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{k-1}})$	0
(IX')(7)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{k+1}})$	0
(IX)(8)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(IX')(8)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(IX)(9)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(IX')(9)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_m})$	0
(IX)(10)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(IX')(10)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(IX)(11)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{k+1}})$	0
(IX')(11)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(IX)(12)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	non trivial pour $a_1 = 1$
(IX')(12)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{k+1}})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(IX)(13)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{\frac{m-1}{2}}})$	0
(IX')(13)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(IX)(14)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{\frac{m+3}{2}}})$	0
(IX')(14)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(IX)(15)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{\frac{m-1}{2}}})$	0
(IX')(15)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{\frac{m+3}{2}}})$	0
(IX)(16)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{\frac{m-2k+3}{2}}})$	0
(IX')(16)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(IX)(17)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_k})$	0
(IX')(17)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_m})$	0
(IX)(18)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0
(IX')(18)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_m})$	0
(X)(1)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_3})$	0
(X')(1)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(X)(2)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{k-1}})$	0
(X')(2)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(X)(3)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(X')(3)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(X)(4)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{m-3}})$	0
(X')(4)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(X)(5)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_m})$	0
(X')(5)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(X)(6)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{m-3}})$	0
(X')(6)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_m})$	0
(X)(7)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(X')(7)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(X)(8)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_m})$	0
(X')(8)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(X)(9)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(X')(9)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_m})$	0
(X)(10)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{m-2}})$	0
(X')(10)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(X)(11)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_m})$	0
(X')(11)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(X)(12)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{m-2}})$	0
(X')(12)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_m})$	0



Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(X)(13)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(X')(13)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(X)(14)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(X')(14)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_m})$	0
(X)(15)	0 si $a_1 = 1$ , $V((a_1 - 2)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{m-1}})$ sinon	0
(X')(15)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(X)(16)	0 si $a_1 = 1$ , $V((a_1 - 2)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$ sinon	0
(X')(16)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XI)(1)	0 si $a_1 = 1$ , $V((a_1 - 2)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{m-1}})$ sinon	non trivial pour $a_1 = 2$
(XI')(1)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XI)(2)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{k-1}})$	0
(XI')(2)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XI)(3)	0 si $a_1 = 1$ , $V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{m-1}})$ sinon	0
(XI')(3)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XI)(4)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{k-1}})$	0
(XI')(4)	0 si $a_1 = 1$ , $V((a_1 - 2)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{m-1}})$ sinon	non trivial pour $a_1 = 1$
(XI)(5)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XI')(5)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(XI)(6)	0 si $a_1 = 1$ , $V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{m-1}})$ sinon	0
(XI')(6)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XI)(7)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XI')(7)	0 si $a_1 = 1$ , $V((a_1 - 2)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{m-1}})$ sinon	0
(XI)(8)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{m-1}})$	0
(XI')(8)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XI)(9)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XI')(9)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XII)(1)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{k-1}})$	0
(XII')(1)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XII)(2)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XII')(2)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XII)(3)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{m-1}})$	0
(XII')(3)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XII)(4)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{m-4}})$	0
(XII')(4)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XII)(5)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{m-1}})$	0
(XII')(5)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(XII)(6)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{m-4}})$	0
(XII')(6)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_m})$	0
(XII)(7)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XII')(7)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XII)(8)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{m-1}})$	0
(XII')(8)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XII)(9)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XII')(9)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_m})$	0
(XII)(10)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{m-3}})$	0
(XII')(10)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XII)(11)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{m-3}})$	0
(XII')(11)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{m-1}})$	0
(XII)(12)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XII')(12)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XII)(13)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{m-1}})$	0
(XII')(13)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XII)(14)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XII')(14)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{m-1}})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(XII)(15)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_{m-1}})$	0
(XII')(15)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XII)(16)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XII')(16)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIII)(1)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_6})$	0
(XIII')(1)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIII)(2)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XIII')(2)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIII)(3)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_6})$	0
(XIII')(3)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIII)(4)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XIII')(4)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_6})$	0
(XIII)(5)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XIII')(5)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIII)(6)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XIII')(6)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XIII)(7)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_3})$	0
(XIII')(7)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(XIII)(8)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XIII')(8)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIII)(9)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XIII')(9)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIII)(10)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_6})$	0
(XIII')(10)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIII)(11)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_5})$	0
(XIII')(11)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIII)(12)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XIII')(12)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_3})$	0
(XIII)(13)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XIII')(13)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XIII)(14)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XIII')(14)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_6})$	0
(XIII)(15)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XIII')(15)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_5})$	0
(XIII)(16)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_3})$	0
(XIII')(16)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(XIII)(17)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_3})$	0
(XIII')(17)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_6})$	0
(XIII)(18)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_3})$	0
(XIII')(18)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_5})$	0
(XIII)(19)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XIII')(19)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XIII)(20)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XIII')(20)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_6})$	0
(XIII)(21)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XIII')(21)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_5})$	0
(XIII)(22)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_6})$	0
(XIII')(22)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_3})$	0
(XIII)(23)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_6})$	0
(XIII')(23)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XIII)(24)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_6})$	0
(XIII')(24)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XIII)(25)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_5})$	0
(XIII')(25)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_3})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(XIII)(26)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_5})$	0
(XIII')(26)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XIII)(27)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_5})$	0
(XIII')(27)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XIV)(1)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_7})$	0
(XIV')(1)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIV)(2)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XIV')(2)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIV)(3)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XIV')(3)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIV)(4)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_7})$	0
(XIV')(4)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIV)(5)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XIV')(5)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_7})$	0
(XIV)(6)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XIV')(6)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIV)(7)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XIV')(7)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(XIV)(8)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_3})$	0
(XIV')(8)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIV)(9)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XIV')(9)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIV)(10)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XIV')(10)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIV)(11)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_7})$	0
(XIV')(11)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIV)(12)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_5})$	0
(XIV')(12)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIV)(13)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XIV')(13)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_3})$	0
(XIV)(14)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XIV')(14)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XIV)(15)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XIV')(15)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_7})$	0
(XIV)(16)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XIV')(16)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_5})$	0



Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(XIV)(17)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_3})$	0
(XIV')(17)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XIV)(18)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_3})$	0
(XIV')(18)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_7})$	0
(XIV)(19)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_3})$	0
(XIV')(19)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_5})$	0
(XIV)(20)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XIV')(20)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XIV)(21)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XIV')(21)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_7})$	0
(XIV)(22)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XIV')(22)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_5})$	0
(XIV)(23)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_7})$	0
(XIV')(23)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_3})$	0
(XIV)(24)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_7})$	0
(XIV')(24)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XIV)(25)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_7})$	0
(XIV')(25)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(XIV)(26)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_5})$	0
(XIV')(26)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_3})$	0
(XIV)(27)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_5})$	0
(XIV')(27)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XIV)(28)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_5})$	0
(XIV')(28)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XIV)(29)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XIV')(29)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIV)(30)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XIV')(30)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIV)(31)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_7})$	0
(XIV')(31)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIV)(32)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_6})$	0
(XIV')(32)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIV)(33)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XIV')(33)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_7})$	0
(XIV)(34)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XIV')(34)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_6})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(XIV)(35)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XIV')(35)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_7})$	0
(XIV)(36)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XIV')(36)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_6})$	0
(XIV)(37)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_7})$	0
(XIV')(37)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XV)(1)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_8})$	0
(XV')(1)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XV)(2)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XV')(2)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XV)(3)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XV')(3)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XV)(4)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_8})$	0
(XV')(4)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XV)(5)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XV')(5)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_8})$	0
(XV)(6)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XV')(6)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(XV)(7)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XV')(7)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XV)(8)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_3})$	0
(XV')(8)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XV)(9)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XV')(9)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XV)(10)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XV')(10)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XV)(11)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_8})$	0
(XV')(11)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XV)(12)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_5})$	0
(XV')(12)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XV)(13)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XV')(13)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_3})$	0
(XV)(14)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XV')(14)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XV)(15)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XV')(15)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_8})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(XV)(16)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XV')(16)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_5})$	0
(XV)(17)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_3})$	0
(XV')(17)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XV)(18)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_3})$	0
(XV')(18)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_8})$	0
(XV)(19)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_3})$	0
(XV')(19)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_5})$	0
(XV)(20)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XV')(20)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XV)(21)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XV')(21)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_8})$	0
(XV)(22)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XV')(22)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_5})$	0
(XV)(23)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_8})$	0
(XV')(23)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_3})$	0
(XV)(24)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_8})$	0
(XV')(24)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(XV)(25)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_8})$	0
(XV')(25)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XV)(26)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_5})$	0
(XV')(26)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_3})$	0
(XV)(27)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_5})$	0
(XV')(27)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XV)(28)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_5})$	0
(XV')(28)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XV)(29)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XV')(29)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XV)(30)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XV')(30)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XV)(31)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_8})$	0
(XV')(31)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XV)(32)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_6})$	0
(XV')(32)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XV)(33)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XV')(33)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_8})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(XV)(34)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$	0
(XV')(34)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_6})$	0
(XV)(35)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XV')(35)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_8})$	0
(XV)(36)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XV')(36)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_6})$	0
(XV)(37)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_8})$	0
(XV')(37)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XV)(38)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_7})$	0
(XV')(38)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XV)(39)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_8})$	0
(XV')(39)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XVI)(1)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_3})$	0
(XVI')(1)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XVI)(2)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XVI')(2)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XVI)(3)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_4})$	0
(XVI')(3)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(XVI)(4)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XVI')(4)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_4})$	0
(XVI)(5)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_3})$	0
(XVI')(5)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XVI)(6)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XVI')(6)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_3})$	0
(XVI)(7)	0 si $a_1 = 1$ , $V((a_1 - 2)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$ sinon	0
(XVI')(7)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XVI)(8)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_4})$	0
(XVI')(8)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XVI)(9)	0 si $a_1 = 1$ , $V((a_1 - 2)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$ sinon	0
(XVI')(9)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_4})$	0
(XVI)(10)	0 si $a_1 = 1$ , $V((a_1 - 2)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$ sinon	0
(XVI')(10)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XVI)(11)	0 si $a_1 = 1$ , $V((a_1 - 2)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$ sinon	non trivial pour $a_1 = 1$
(XVI')(11)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_4})$	0
(XVII)(1)	0 si $a_1 = 1$ or 2, $V((a_1 - 3)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_2})$ sinon	non trivial pour $a_1 = 2$
(XVII')(1)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0



Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(XVII)(2)	$V((a_1 - 1)\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi_1})$	0
(XVII')(2)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0

Quand  $a_1 > 0$  avec  $G = G_0 \times G_1$  et  $\alpha_0, \alpha_1 \in G_1$  :

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(XVIII)(1)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_{m-1}})$	0
(XVIII')(1)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_2})$	0
(XVIII)(2)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(XVIII')(2)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_m})$	0
(XVIII)(3)	0	0
(XVIII')(3)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_m})$	0
(XVIII)(4)	0	0
(XVIII')(4)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_3})$	0
(XVIII)(5)	0	0
(XVIII')(5)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(XVIII)(6)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(XVIII')(6)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0
(XVIII)(7)	0	0
(XVIII')(7)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_4})$	0
(XVIII)(8)	0	0
(XVIII')(8)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi_1})$	0

Quand  $a_1 > 0$  avec  $G = G_0 \times G_1 \times G_2$  :

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(XIX)(1)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIX')(1)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1} + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIX)(2)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIX')(2)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1})$	0
(XIX)(3)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\alpha_1})$	0
(XIX')(3)	$V(a_1\varpi_\beta + \varpi_{\chi'_m})$	0
(XIX)(4)	$V(a_1\varpi_\beta)$	0
(XIX')(4)	$V(a_1\varpi_\beta)$	0

**Quand  $a_1 = 0$  avec  $G = G_0$  et  $\beta$  est entre  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  :**

Dans ce cas, on a que  $H^0(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$  et  $H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$  sont triviaux, car on sait que  $Y$  et  $Z$  sont stables sous l'action de  $\text{Aut}^0(X)$  d'après le Lemme 2.3, et ainsi on ne regarde que  $H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$  et  $H^1(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$ . On obtient que  $H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$  et  $H^1(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$  sont tous les deux triviaux dans tous les cas d'après le Théorème 3.9 sauf dans le cas suivant :

Cas	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$
(XVI)(9)	0	non trivial

Quand  $a_1 = 0$  avec  $G = G_0$  et  $\beta$  n'est pas entre  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  :

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$
(I)(1)	0	0	$V(\varpi_{\chi_{m-2}})$	0
(I)(2)	0	0	$V(\varpi_{\chi_{k-2}})$	0
(I)(3)	0	0	$V(\varpi_{\chi_1})$	0
(I)(4)	0	0	$V(\varpi_{\chi_1})$	0
(II)(1)	0	0	$V(\varpi_{\chi_{m-2}})$	0
(II)(2)	0	0	$V(\varpi_{\chi_{k-2}})$	0
(II)(3)	0	non trivial	$V(\varpi_{\chi_1})$	0
(II)(4)	0	0	$V(\varpi_{\chi_1})$	0
(II)(5)	$V(\varpi_{\chi_m})$	0	0	0
(II)(6)	$V(\varpi_{\chi_m})$	0	0	0
(III)(1)	0	0	$V(\varpi_{\chi_{m-2}})$	0
(III)(2)	0	0	$V(\varpi_{\chi_{k-2}})$	0
(III)(3)	0	0	$V(\varpi_{\chi_1})$	0
(III)(4)	0	0	$V(\varpi_{\chi_1})$	0
(III)(5)	0	0	0	0
(IV)(1)	0	0	$V(\varpi_{\chi_{k-2}})$	0
(IV)(2)	0	0	$V(\varpi_{\chi_{m-2}})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$
(IV)(3)	0	0	$V(\varpi_{\chi_1})$	0
(IV)(4)	0	0	$V(\varpi_{\chi_1})$	0
(IV)(5)	0	0	0	0
(IV)(6)	$V(\varpi_{\chi_{m-1}})$	0	0	0
(IV)(7)	$V(\varpi_{\chi_m})$	0	0	0
(IV)(8)	0	0	0	0
(IV)(9)	0	0	0	0
(V)(1)	0	0	$V(\varpi_{\chi_6})$	0
(V)(2)	0	0	0	0
(V)(3)	0	0	$V(\varpi_{\chi_1})$	0
(V)(4)	0	0	$V(\varpi_{\chi_1})$	0
(V)(5)	0	0	0	0
(V)(6)	0	0	$V(\varpi_{\chi_2})$	0
(V)(7)	$V(\varpi_{\chi_6})$	0	0	0
(V)(8)	$V(\varpi_{\chi_6})$	0	0	0
(V)(9)	0	0	$V(\varpi_{\chi_1})$	0
(VI)(1)	0	0	$V(\varpi_{\chi_7})$	0
(VI)(2)	0	0	0	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$
(VI)(3)	0	0	$V(\overline{\omega}_{\chi_1})$	0
(VI)(4)	0	0	$V(\overline{\omega}_{\chi_1})$	0
(VI)(5)	$V(\overline{\omega}_{\chi_7})$	0	0	0
(VI)(6)	$V(\overline{\omega}_{\chi_7})$	0	0	0
(VI)(7)	$V(\overline{\omega}_{\chi_7})$	0	0	0
(VI)(8)	0	0	0	0
(VI)(9)	0	0	$V(\overline{\omega}_{\chi_2})$	0
(VI)(10)	$V(\overline{\omega}_{\chi_7})$	0	0	0
(VI)(11)	$V(\overline{\omega}_{\chi_7})$	0	0	0
(VI)(12)	$V(\overline{\omega}_{\chi_7})$	0	0	0
(VI)(13)	0	0	$V(\overline{\omega}_{\chi_1})$	0
(VI)(14)	$V(\overline{\omega}_{\chi_6})$	0	0	0
(VI)(15)	$V(\overline{\omega}_{\chi_7})$	0	0	0
(VI)(16)	$V(\overline{\omega}_{\chi_7})$	0	0	0
(VI)(17)	0	0	0	0
(VI)(18)	0	0	$V(\overline{\omega}_{\chi_1})$	0
(VI)(19)	0	0	$V(\overline{\omega}_{\chi_1})$	0
(VI)(20)	0	0	$V(\overline{\omega}_{\chi_2})$	0

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$
(VI)(21)	$V(\varpi_{\chi_7})$	0	0	0
(VI)(22)	0	0	$V(\varpi_{\chi_1})$	0
(VII)(1)	0	0	$V(\varpi_{\chi_8})$	0
(VII)(2)	0	0	0	0
(VII)(3)	0	0	$V(\varpi_{\chi_1})$	0
(VII)(4)	0	0	$V(\varpi_{\chi_1})$	0
(VII)(5)	$V(\varpi_{\chi_8})$	0	0	0
(VII)(6)	$V(\varpi_{\chi_8})$	0	0	0
(VII)(7)	$V(\varpi_{\chi_8})$	0	0	0
(VII)(8)	$V(\varpi_{\chi_8})$	0	0	0
(VII)(9)	0	0	0	0
(VII)(10)	0	0	$V(\varpi_{\chi_2})$	0
(VII)(11)	$V(\varpi_{\chi_8})$	0	0	0
(VII)(12)	$V(\varpi_{\chi_8})$	0	0	0
(VII)(13)	$V(\varpi_{\chi_8})$	0	0	0
(VII)(14)	$V(\varpi_{\chi_8})$	0	0	0
(VII)(15)	0	0	$V(\varpi_{\chi_1})$	0
(VII)(16)	$V(\varpi_{\chi_6})$	0	0	0



Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$	$H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$	$H^1(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$
(VII)(17)	$V(\varpi_{\chi_8})$	0	0	0
(VII)(18)	$V(\varpi_{\chi_8})$	0	0	0
(VII)(19)	$V(\varpi_{\chi_8})$	0	0	0
(VII)(20)	0	0	0	0
(VII)(21)	0	0	$V(\varpi_{\chi_1})$	0
(VII)(22)	0	0	$V(\varpi_{\chi_1})$	0
(VII)(23)	0	0	$V(\varpi_{\chi_2})$	0
(VII)(24)	$V(\varpi_{\chi_7})$	0	0	0
(VII)(25)	$V(\varpi_{\chi_8})$	0	0	0
(VII)(26)	$V(\varpi_{\chi_8})$	0	0	0
(VII)(27)	0	0	$V(\varpi_{\chi_1})$	0
(VII)(28)	$V(\varpi_{\chi_8})$	0	0	0
(VIII)(1)	$V(\varpi_{\chi_4})$	0	0	0
(VIII)(2)	$V(\varpi_{\chi_4})$	0	0	0
(VIII)(3)	$V(\varpi_{\chi_4})$	0	0	0
(VIII)(4)	0	0	$V(\varpi_{\chi_1})$	0
(VIII)(5)	0	0	0	0
(VIII)(6)	0	non trivial	0	0

**Quand  $a_1 = 0$  avec  $G = G_0 \times G_1$  et  $\alpha_0$  ou  $\alpha_1 \in G_1$  :**

Dans ce cas, on ne fait pas apparaître la colonne  $H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$  car on sait que  $Z$  est stable sous l'action de  $\text{Aut}^0(\mathbb{X})$  d'après le Lemme 2.5 et donc que  $H^0(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}}) = 0$  dans tous les cas. De plus, on ne fait pas non plus apparaître la colonne  $H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$  car on sait que lorsque  $H^0(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$  n'est pas trivial,  $H^1(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}}) = 0$ . Enfin, on obtient que  $H^1(\mathbb{X}, N_{Z/\mathbb{X}})$  est trivial dans tous les cas d'après le Théorème 3.9 :

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$	Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(IX)(1)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(X)(4)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(IX)(2)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(X)(5)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(IX)(3)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(X)(7)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(IX)(4)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(X)(8)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(IX)(6)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(X)(10)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(IX)(8)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(X)(11)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(IX)(10)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(X)(13)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(IX)(11)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(X)(15)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(IX)(13)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(X)(16)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(IX)(14)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XI)(1)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(IX)(16)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XI)(2)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(X)(1)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XI)(3)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(X)(2)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XI)(5)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(X)(3)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XI)(6)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$	Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(XI)(8)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XIII)(7)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XI)(9)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XIII)(8)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XII)(1)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XIII)(9)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XII)(2)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XIII)(10)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XII)(3)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XIII)(11)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XII)(4)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XIV)(1)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XII)(5)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XIV)(2)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XII)(7)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XIV)(3)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XII)(8)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XIV)(4)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XII)(10)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XIV)(6)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XII)(12)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XIV)(8)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XII)(13)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XIV)(9)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XII)(15)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XIV)(10)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XII)(16)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XIV)(11)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XIII)(1)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XIV)(12)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XIII)(2)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XIV)(29)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XIII)(3)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XIV)(30)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XIII)(5)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XIV)(31)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$

Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$	Cas	$H^0(\mathbb{X}, N_{Y/\mathbb{X}})$
(XIV)(32)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XV)(31)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XIV)(37)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XV)(32)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XV)(1)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XV)(37)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XV)(2)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XV)(38)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XV)(3)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XV)(39)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XV)(4)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XVI)(1)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XV)(6)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XVI)(2)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XV)(8)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XVI)(3)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XV)(9)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XVI)(5)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XV)(10)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XVI)(7)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XV)(11)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XVI)(8)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XV)(12)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XVI)(10)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XV)(29)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XVII)(1)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$
(XV)(30)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$	(XVII)(2)	$V(\varpi_{\alpha_0} + \varpi_{\chi'_m})$



# BIBLIOGRAPHIE

- [Akh95] Dmitri N. Akhiezer, Lie Group Actions in Complex Analysis, Aspects of Mathematics, vol. 27, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 1995.
- [Bou07] Nicolas Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.
- [Bri89] Michel Brion, Groupe de Picard et nombres caractéristiques des variétés sphériques, Duke Mathematical Journal **58** (1989), no. 2, 397–424.
- [Bri93] ———, Variétés sphériques et théorie de Mori, Duke Mathematical Journal **72** (1993), no. 2, 369–404.
- [BSU13] Michel Brion, Preena Samuel, and V. Uma, Lectures on the structure of algebraic groups and geometric applications, Hindustan Book Agency, Gurgaon, 2013.
- [Cup03] S. Cupit-Foutou, Classification of two-orbit varieties, Commentarii Mathematici Helvetici **78** (2003), no. 2, 245–265.
- [GPPS21] Richard Gonzales, Clélia Pech, Nicolas Perrin, and Alexander Samokhin, Geometry of horospherical varieties of Picard rank one, August 2021.
- [Hon22] Jaehyun Hong, Simplicity of tangent bundles of smooth horospherical varieties of Picard number one, Comptes Rendus. Mathématique. Académie des Sciences, Paris **360** (2022), 285–290.
- [Hum72] James E. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Graduate Texts in Mathematics, vol. 9, Springer, New York, NY, 1972.

- [Hwa13] Jun-Muk Hwang, Varieties of minimal rational tangents of codimension 1, *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* **46** (2013), no. 4, 629–649.
- [Kan21] Akihiro Kanemitsu, Fano manifolds and stability of tangent bundles, *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* **2021** (2021), no. 774, 163–183.
- [Kno91] Friedrich Knop, The Luna-Vust theory of spherical embeddings, *Proceedings of the Hyderabad Conference on Algebraic Groups (Hyderabad, 1989)*, vol. 225, Citeseer, 1991, p. 249.
- [Liu23] Jie Liu, On moment map and bigness of tangent bundles of G-varieties, *Algebra & Number Theory* **17** (2023), no. 8, 1501–1532.
- [LV83] Domingo Luna and Thierry Vust, Plongements d'espaces homogènes, *Commentarii Mathematici Helvetici* **58** (1983), no. 1, 186–245.
- [Mat02] Kenji Matsuki, Introduction to the Mori Program, Universitext, Springer, New York, NY, 2002.
- [Pas06] Boris Pasquier, Variétés horosphériques de Fano, Ph.D. thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 2006.
- [Pas09] ———, On some smooth projective two-orbit varieties with Picard number 1, *Mathematische Annalen* **344** (2009), no. 4, 963–987.
- [Pas17] ———, The Log Minimal Model Program for horospherical varieties via moment polytopes, June 2017.
- [Pas20] ———, Smooth projective horospherical varieties of Picard group  $\mathbb{Z}^2$ , *Épjournal de Géométrie Algébrique* **Volume 4** (2020).
- [PP10] Boris Pasquier and Nicolas Perrin, Local rigidity of quasi-regular varieties, *Mathematische Zeitschrift* **265** (2010), no. 3, 589–600.
- [Shi23] Ryan M. Shifler, Quantum cohomology determined with negative structure constants present, July 2023.
- [Spr98] Tony Albert Springer, Linear Algebraic Groups, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998.

## Géométrie des variétés horosphériques de rang 1, projectives, lisses, de nombre de Picard 2

Les variétés horosphériques forment une sous-famille importante de variétés algébriques complexes, munies de l'action d'un groupe  $G$  réductif et connexe. Celles qui sont lisses de nombre de Picard 1 (non homogènes) sont regroupées en 5 familles et ont déjà été étudiées. Celles qui sont lisses de nombre de Picard 2 sont beaucoup plus nombreuses. Dans cette thèse, on étudie la géométrie de ces dernières qu'on notera  $\mathbb{X}$ , uniquement en rang 1, ce qui représente déjà plus de 500 familles.

Une partie de la géométrie de ces variétés a déjà été décrite par le Log MMP, et dans cette thèse on donne d'autres types de caractéristiques géométriques.

Le premier axe d'étude concerne l'action du groupe connexe d'automorphismes de  $\mathbb{X}$ , qui possède 3 orbites sous l'action de  $G$ . On montre dans cette thèse que  $\mathbb{X}$  est soit à 2 orbites, soit à 3 orbites sous son groupe connexe d'automorphismes. Grâce à cette étude, une description totale de ce groupe est donnée, puis on décrit le groupe d'automorphismes de  $\mathbb{X}$  dans sa totalité, et on remarque en particulier qu'il n'y a que très peu de cas où le groupe n'est pas connexe.

La deuxième partie de cette thèse porte sur la rigidité locale de  $\mathbb{X}$ . On calcule le premier groupe de cohomologie  $H^1(\mathbb{X}, T_{\mathbb{X}})$  du fibré tangent de  $\mathbb{X}$  et on extrait ainsi un nombre assez restreint de cas où la variété peut ne pas être localement rigide.

**Mots-clés :** Variétés horosphériques, groupes algébriques, Log MMP, groupes d'automorphismes, rigidité locale

---

### Abstract

Horospherical varieties represent an important subfamily of complex algebraic varieties, endowed with the action of a reductive and connected group  $G$ . The ones which are smooth with Picard number 1 (non homogeneous) are grouped into 5 families and have already been studied. The ones which are smooth with Picard number 2 are much more numerous. In this thesis, we study the geometry of these varieties denoted by  $\mathbb{X}$ , only in rank 1, which already represents more than 500 families.

Part of the geometry of these varieties has already been described by the Log MMP, and in this thesis we give other types of geometric characteristics.

The first part of the study deals with the action of the connected automorphisms group of  $\mathbb{X}$ , which has 3 orbits under the action of  $G$ . In this thesis we show that  $\mathbb{X}$  is either a two or three-orbit variety under the action of the connected automorphisms group. Then, a full description of this group is given and we describe the automorphisms group of  $\mathbb{X}$ , and we note that there are only few cases in which the group is not connected.

The second part of this thesis deals with the local rigidity of  $\mathbb{X}$ . We compute the first cohomology group  $H^1(\mathbb{X}, T_{\mathbb{X}})$  of the tangent bundle of  $\mathbb{X}$  and we extract a very small number of cases in which the variety may not be locally rigid.

**Keywords :** Horospherical varieties, algebraic groups, Log MMP, automorphisms group, local rigidity