



HAL
open science

Impact de la fragmentation des nuages moléculaires sur la genèse des systèmes stellaires

Benjamin Thomasson

► **To cite this version:**

Benjamin Thomasson. Impact de la fragmentation des nuages moléculaires sur la genèse des systèmes stellaires. Physique [physics]. Université Grenoble Alpes [2020-..], 2023. Français. NNT : 2023GRALY062 . tel-04512730

HAL Id: tel-04512730

<https://theses.hal.science/tel-04512730>

Submitted on 20 Mar 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

École doctorale : PHYS - Physique

Spécialité : Astrophysique et Milieux Dilués

Unité de recherche : Institut de Planetologie et d'Astrophysique de Grenoble

Impact de la fragmentation des nuages moléculaires sur la genèse des systèmes stellaires

Impact of the fragmentation of molecular clouds on the genesis of stellar systems.

Présentée par :

Benjamin THOMASSON

Direction de thèse :

Estelle MORAUX
MAITRE DE CONFERENCES HDR, Université Grenoble Alpes
Isabelle JONCOUR

Directrice de thèse

Co-encadrante de thèse

Rapporteurs :

PATRICK HENNEBELLE
DIRECTEUR DE RECHERCHE, CEA CENTRE DE PARIS-SACLAY
SYLVAIN BONTEMPS
DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS DELEGATION AQUITAINE

Thèse soutenue publiquement le **18 octobre 2023**, devant le jury composé de :

PATRICK HENNEBELLE DIRECTEUR DE RECHERCHE, CEA CENTRE DE PARIS-SACLAY	Rapporteur
SYLVAIN BONTEMPS DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS DELEGATION AQUITAINE	Rapporteur
CATHERINE DOUGADOS DIRECTRICE DE RECHERCHE, CNRS DELEGATION ALPES	Présidente
PIERRE HILY BLANT MAITRE DE CONFERENCES HDR, UNIVERSITE GRENOBLE ALPES	Examineur



Remerciements

Je tiens avant tout à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès de ma thèse, qui m'ont encouragé et qui m'ont aidé lors de ces trois dernières années à travers d'enrichissantes discussions, en rapport avec la science ou non. Je n'oublie pas mes professeurs du primaire, en particulier M. Claudy GENEVIEVE, et du secondaire qui ont su m'ouvrir à la beauté des mathématiques et ainsi développer l'intérêt que je porte pour la compréhension du monde à travers la physique dans toutes ses branches, et sans qui je n'aurais certainement pas acquis cette sensibilité scientifique qui m'anime aujourd'hui.

Je remercie mes directrices de thèse Isabelle et Estelle qui m'ont accompagné tout le long de ces trois années de thèse et ont été de bon conseil dans l'écriture et la relecture de ce manuscrit.

Je remercie également mon jury de thèse, Sylvain, Patrick, Catherine et Pierre pour leur regard critique et leurs questions ouvertes qui m'ont permis de mieux appréhender ma recherche future.

Merci à l'ensemble de ma famille pour m'avoir soutenu, plus spécifiquement dans mes choix d'études, et ce jusqu'à la fin.

Quel goujat ferais-je si je ne remerciais pas Marine qui me supporte depuis bien trop longtemps (je ne sais pas comment elle fait). Bien que matheuse, ma jeune demoiselle quart-italienne a relu dans les derniers jours mon manuscrit de thèse pour m'aider à repérer les coquilles de ce manuscrit jusqu'au moment de l'envoi et pendant les vacances qui s'en suivirent (celles qui précédaient aussi).

Je remercie l'équipe Odyssey pour leur support et tous leurs commentaires sur mes présentations le long de ces trois ans ; mais aussi pour les bons moments de convivialité autour d'une raclette au milieu de la montagne (promis au prochain loup-garou j'évite de préparer un scénario role-play avec un nécromancien). Je remercie les autres membres du labo, permanents ou non, Fred, Marta, Gaspard, Fabien, Nicolás pour leur présence et bons conseils, parfois autour d'une bière ; Yohan pour nos sorties nocturnes sur le plateau de Saclay (j'aime pas trop beaucoup ça...), et pour sa patience vis-à-vis de mon "épuiement" (lui seul comprendra) au retour de notre escapade au plateau de Bure ; les doctorants de l'IPAG, Julien, Thomas, Dorian, Vittoria, Nicolas, Tituan, Tamara qui ont été présents et solidaires pour entendre mes lamentations en période d'écriture de manuscrit, Hugo pour avoir été présent lors de mes répétitions ; la team RU le S, pour ceux

que je n'ai pas encore nommé avec Thibault, Lucie, Filip, Simon, Léopold, Maxime(s) (merci pour le titre) et tant d'autres (de toute façon les vrais se reconnaîtront), il y eut des épisodes bien marrant, et des plats toujours aussi savoureux et bien assaisonnés, d'une qualité qui rendrait jaloux les plus grands de ce monde. Je remercie plus généralement l'ensemble des doctorants pour toutes les sorties rando, bar, resto et tous les moments de rigolade !

Un grand merci à Léna (prochain plan quand on se voit : rhum + karaoke sur ABBA), Chiara (je vais sans doute reprendre un peu la patinoire), Lorine (on en a vécu des folies à la fac, mais on en est sortis vivants, après tout... "Faut pas bachoter"), Ben (R.I.P. le Fût, son rhum, ses bières, son saucisson de kangourou et les chocolats chauds à la chartreuse) pour leur présence morale durant la scène COVID et le long de ces trois années. Aurélia qui fut ma première co-bureau aux côtés de notre sauveur Raptor-Jésus grand créateur de la Terre plate et figure religieuse emblématique de la grande OURSS.

Une grosse pensée pour le Meylan Kendo Club avec qui j'ai pu me défouler et penser à autre chose que ma thèse, aller boire un verre et passer des moments mémorables en compétition et même au dojo, en espérant pouvoir mener d'autres ji-geiko avec vous dans le futur !

Finally, I would like to thank the ECOGAL consortium, with whom I was able to have some interesting discussions, and I hope to be able to collaborate with you again.

... Et l'oncle Shéo pour son fromage de qualité exquise, une vraie *folie* pour les plus petits comme les plus grands !

Résumé

Les nuages moléculaires sont les régions privilégiées pour la formation des étoiles, lesquelles se regroupent sous forme de systèmes multiples (Duchêne & Kraus 2013), voire s'amassent au sein de petits groupes (Lada & Lada 2003; Joncour et al. 2018) dont l'extension spatiale peut varier de quelques UA à plusieurs milliers d'UA. Bien que la réalité de ces systèmes stellaires jeunes soit établie, l'origine physique de leur multiplicité n'en reste pas moins questionnée encore aujourd'hui. Des phénomènes d'évolution dynamique, telles l'éjection ou la capture d'étoiles par ces systèmes lors de rencontres proches, permettent d'altérer leur multiplicité après leur formation. Toutefois, la présence de systèmes stellaires hiérarchiques et la jeunesse avérée de petits regroupements d'étoiles au sein de nuages moléculaires laissent à penser que ces systèmes pourraient être assemblés dès la phase de formation des étoiles, par fragmentation du nuage à plus grande échelle. Dans ce travail de thèse, cette dernière éventualité est explorée pour déterminer les propriétés attendues d'un système qui serait originaire d'un tel processus de fragmentation.

Nous proposons ainsi un modèle de fragmentation multi-échelle dans lequel une série d'évènements probabilistes décrivent des phénomènes de fragmentation en cascade le long des échelles spatiales. En outre, ce modèle raccorde la nature discrète de la fragmentation dont la résultante est la formation d'étoiles dénombrables, avec la structure continue et multi-échelle des nuages moléculaires à partir desquels les étoiles héritent de leur masse. Ce modèle introduit deux observables locales et continues : le taux de fragmentation qui gouverne la multiplicité des fragments produits et le taux effectif d'injection de masse accordée aux fragments qui caractérise leur rendement massique de formation. Un troisième paramètre, introduit comme le rapport de masse entre les fragments produits, caractérise plus spécifiquement la formation de fragments dénombrables.

Ce modèle est utilisé pour définir et délimiter trois régimes de fragmentation en fonction de la quantité de fragments productibles par un système en effondrement : les régimes hiérarchique, monolithique et dissipatif. Implémenter ce modèle dans le cadre de la théorie de la fragmentation gravo-turbulente (Padoan & Nordlund 2002; Hennebelle & Chabrier 2008) a permis de formaliser les circonstances d'accès à ces différents régimes en fonction des conditions physiques du milieu et à évaluer une échelle caractéristique d'arrêt de la fragmentation autour de quelques centaines d'UA.

Pour évaluer la possibilité d'extraire, de mesurer et de contraindre le taux de fragmentation, ce modèle est confronté aux données du nuage moléculaire NGC 2264 observé

par les télescopes spatiaux Herschel ([Motte et al. 2010](#)) et Spitzer ([Rapson et al. 2014](#)). La description multi-échelle du nuage est opérée à l'aide d'une représentation en réseaux connectés qui a permis d'évaluer, en tenant compte des biais de discrétisation et de projection, un taux de fragmentation compatible avec la prédiction effectuée dans le cadre de la théorie gravo-turbulente.

La dernière étude réalisée à l'aide de ce modèle consiste à évaluer l'impact de la fragmentation sur la fonction de masse des étoiles (IMF), en tenant compte du couplage existant entre une multiplicité qui partitionne la masse du nuage en plusieurs morceaux et une efficacité de formation qui réduit le budget total de masse utilisée. En particulier, cette thèse juge de la plausibilité que la fonction de masse des cœurs (CMF) de la région de formation massive W43 – MM2&MM3 ([Pouteau et al. 2022](#)) caractérisée par un excès d'objets massifs, puisse dans le futur se rattacher à une IMF de type Salpeter, ne contenant pas un tel excès d'étoiles massives.

Ce modèle a ainsi pour ambition d'évaluer en cohésion la multiplicité des systèmes formés avec la masse des étoiles qui les composent au moment de leur formation dans le nuage.

Abstract

Molecular clouds are the privileged regions for the formation of stars, which groups together under the form of multiple systems (Duchêne & Kraus 2013) and can cluster within small groups (Lada & Lada 2003; Joncour et al. 2018) whose spatial extension can vary from a few AU to several thousands of AU. Although the reality of these young stellar systems has been established, the physical origin of their multiplicity remains open to question. Dynamic evolutionary phenomena, such as ejection or capture of other stars by these systems during close encounters, may influence their multiplicity after their formation. However, the presence of hierarchical stellar systems as well as the young age of stars within small groups suggest that these systems could be assembled during the star formation phase, through the fragmentation of the cloud on a larger scale. The latter possibility is explored in order to determine the stellar systems properties expected from such a fragmentation process.

We propose a multi-scale fragmentation model in which series of probabilistic events describe fragmentation phenomena cascading along spatial scales. This model aims to reconcile the discrete nature of fragmentation, which results in the formation of countable stars, with the continuous, multiscale structure of molecular clouds from which stars inherit their mass. This model also introduces two local and continuous observables : the fragmentation rate, which sets the multiplicity of fragments produced and the net mass injection rate given to these fragments, which characterises the mass efficiency with which the fragments are formed. A third parameter is also introduced, defined as the mass ratio between the fragments, to characterise more specifically the formation of discrete, countable fragments.

This model is used to define three fragmentation regimes depending on the quantity of fragments that can be produced by a collapsing system, namely the hierarchical, monolithic and dissipative regimes. This model has been implemented within a gravo-turbulent fragmentation theory (Padoan & Nordlund 2002; Hennebelle & Chabrier 2008) to formalise the circumstances under which these different regimes occurs as a function of the physical conditions of the environment. This work also evaluates a characteristic scale where further fragmentation is prevented, around a few hundred of AU.

To assess the possibility of extracting, measuring and constraining the fragmentation rate, this model is tested with data from NGC 2264 molecular cloud observed by the space telescopes Herschel (Motte et al. 2010) and Spitzer (Rapson et al. 2014). The multi-scale description of the cloud is carried out using a connected network with which we evaluate

a fragmentation rate that is consistent with the prediction made within the gravo-turbulent theory, while considering the discretisation and projection biases.

The last study performed using this model consists of assessing the impact of fragmentation on the stellar mass function (IMF), taking into account the coupling between the multiplicity that partitions the mass of the cloud into several pieces and the formation efficiency that reduces the total mass budget usable. In particular, this thesis assesses the credibility that the core mass function (CMF) of the W43 – MM2 / MM3 massive region ([Pouteau et al. 2022](#)), characterised by an excess of massive objects, could in the future be reconciled with a Salpeter-type IMF, which does not feature such an excess of massive stars.

As a precursor to the dynamical effects that alter the multiplicity of existing systems, this model aims to evaluate the cohesion between the multiplicity of the stellar systems formed through fragmentation and the mass of the stars they are composed of, at the onset of their formation.

Table des matières

I	Introduction	18
1	Motivations	19
2	Les nuages moléculaires au coeur de la formation stellaire	20
2.1	L'origine des nuages moléculaires	20
2.2	La turbulence comme squelette pour la structure du nuage	22
2.3	La fragmentation hiérarchique du nuage	23
2.4	Structure hiérarchique du nuage	25
3	Les systèmes stellaires	26
3.1	Multiplicité des systèmes existants	26
3.2	Evolution dynamique et altération de la multiplicité	27
3.3	La fonction de masse des étoiles	28
4	Trame de ce travail de thèse	31
4.1	Question à résoudre	31
4.2	Démarche générale	31
	↔ Modélisation du processus de fragmentation	31
	↔ Formalisation d'une théorie prédictive	32
	↔ Mesure d'observables	32
	↔ Conséquences de la fragmentation sur les propriétés des systèmes stellaires	32
	↔ Débouché de ce travail	32
II	Modèle multi-échelle de sous-fragmentation du nuage	34
1	Principe général du modèle	36
1.1	Processus de production hiérarchique des fragments	36
1.2	Description multi-échelle d'une région du nuage	38
2	Formalisme mathématique du modèle	39
2.1	Description discrète de la fragmentation	39
2.2	Considération moyenne d'une population dans une région donnée	42
2.3	Description continue du modèle et des observables	43

TABLE DES MATIÈRES

	↔ Le taux de fragmentation	43
	↔ Le taux d'injection de masse dans les fragments	44
	↔ Masse des fragments produits	46
	↔ Densité volumique des fragments produits	46
	↔ Effet de moyenne	47
	↔ Densité stellaire	48
3	Influences géométriques sur le taux de fragmentation	48
3.1	Probabilité de fragmenter	48
3.2	Échantillonnage des niveaux de fragmentation	50
3.3	Erreur associée à la géométrie des fragments	52
	↔ En trois dimensions	53
	↔ En deux dimensions	55
III Implémentation de modèles physiques		58
1	Approximation locale et invariance d'échelle	61
1.1	Relations d'échelle	61
1.2	Dégénérescence entre les paramètres du modèle	62
1.3	Régimes de fragmentation	64
2	La théorie gravo-turbulente	70
2.1	Contexte théorique	70
2.2	Relation d'échelle entre la dispersion des vitesses et la taille . . .	72
2.3	Choix de la distribution normale des fluctuations en densité . . .	74
2.4	Seuil d'effondrement	75
3	Application à la théorie gravo-turbulente	75
3.1	Expression du taux de fragmentation	75
3.2	Cas limites d'un fluide subsonique et supersonique	78
3.3	Transition entre les régimes de fragmentation dans le cas sub- sonique	80
3.4	Effondrement quasi-statique	82
4	Propriétés des fragments en fonction de leur taille	83
4.1	Calcul du taux de fragmentation	83
4.2	Evolution du taux de fragmentation	85
4.3	Nombre total de fragments produits	86
4.4	Masse des fragments	88
IV Le taux de fragmentation dans le nuage moléculaire NGC 2264		92
1	Données utilisées	97
1.1	Cartes <i>Herschel</i>	97

	↔ Résolutions spatiales des cartes d'émission	97
	↔ Carte de densité de colonne	97
1.2	Extraction des fragments denses de poussières	98
	↔ Procédure d'extraction <code>getsf</code>	99
	↔ Taille typique R des fragments	99
1.3	Catalogue de YSOs utilisé	101
	↔ Définition des différentes classes de YSOs	101
	↔ Sélection des YSOs	101
2	Combinaison des jeux de données à l'aide d'un réseau connecté	103
2.1	Construction du réseau	103
2.2	Structures multi-échelles	104
2.3	Définition du critère d'inclusion	104
2.4	Effectif des structures multi-échelles extraites	105
2.5	Évaluation du statut évolutif des structures multi-échelles	107
3	Distribution spatiale des structures multi-échelles	110
3.1	Relation avec la colonne densité	110
3.2	Évaluation d'un alignement fortuit de structures linéaires	111
3.3	Probabilité d'observer une structure linéaire	114
4	Une mesure du taux de fragmentation	115
4.1	Le coefficient de fractalité : une métrique en deux dimensions	115
4.2	Incertitudes et biais associés	118
	↔ Coïncidence hiérarchique	118
	↔ Carence en fragments dans les réseaux	119
	↔ Géométrie des fragments et projection en deux dimensions	121
4.3	Résultats et interprétation de la mesure du taux de fragmentation	122
5	Test d'auto-similarité du nuage	124
5.1	Nombre de fragments produits le long des échelles	124
	↔ Productivité des fragments sans filtrage des structures coïnci- dentes	126
	↔ Productivité des fragments après filtrage des structures coïnci- dentes	127
5.2	Discussion sur la réalité de la brisure d'invariance d'échelle	127
	↔ Effet de la résolution spatiale des observations	127
	↔ Influence de la longueur d'onde d'observation	128
	↔ Contraintes géométriques de fragments elliptiques	131
5.3	Résultat et interprétation du suivi multi-échelle de la fragmentation	132
	↔ Fragmentation localement monolithique	132
	↔ Mesure d'auto-similarité	133

V	Conséquences de la fragmentation sur la fonction de masse des étoiles	136
1	Méthodes de dérivation de la fonction de masse des fragments	139
1.1	Solution approchée	139
1.2	Solution semi-analytique par les densités de probabilité	140
1.3	Validité des solutions	144
2	Étude préliminaire du processus de fragmentation appliqué à une fonction de masse	146
2.1	Conditions initiales et domaine de variation	146
2.2	Distribution de probabilité du nombre d'enfants produits	147
2.3	Contraintes d'échantillonnage spatial	150
2.4	Influence de la fragmentation sur la distribution en masse	152
	↔ Multiplicité des fragments produits	153
	↔ Rendement massique de formation	154
	↔ Rapport de masse entre fragments primaire et secondaires	156
3	Génération de fonction de masse de type Salpeter	157
3.1	Proximité de la distribution générée avec l'IMF	157
3.2	Solutions compatibles avec l'IMF canonique	160
3.3	Phase de formation d'étoile	165
3.4	Implications sur la relation entre masse et taille des fragments	167
4	Processus de fragmentation sur les échantillons finis	170
4.1	Évolution d'un échantillon fini au cours de la fragmentation	170
4.2	Conséquences d'une fragmentation gravo-turbulente	172
4.3	Conditions pour retrouver une IMF canonique	175
VI	Conclusions & Perspectives	178
1	Bilan du travail effectué	179
1.1	Résumé du Chapitre II	179
1.2	Résumé du Chapitre III	180
1.3	Résumé du Chapitre IV	180
1.4	Résumé du Chapitre V	182
2	Potentiel du modèle	183
2.1	Phénomènes d'accrétion	183
2.2	Une description modulable du taux de fragmentation	183
2.3	Contraindre les mécanismes de formation d'étoiles	184
3	Pistes de travail à venir	185
3.1	Axes d'amélioration du modèle	185
3.2	Meilleures contraintes observationnelles	185
3.3	Simulations numériques	186

3.4	Caractérisation des systèmes gravitationnellement liés	186
A	Modèle géométrique 3D et projection en plan 2D	198
1	Génération d'objets	199
1.1	Paramètres utiles	199
	↔ Nombre de fragments produits	200
	↔ Fraction de volume inclus	200
	↔ Densité d'objets	201
1.2	Construction des ellipsoïdes	201
	↔ Sélection des demi-axes	201
	↔ Sélection du centroïde	202
	↔ Sélection des angles d'Euler	202
2	Règle de sélection en 3D	202
2.1	Inclusion des fragments enfants dans leur parent	202
2.2	Optimisation du placement : zone d'exclusion	204
3	Projection en 2D	205
3.1	Définition des ellipses	205
3.2	Critère de séparation minimale	206
3.3	Conséquences sur la distribution des tailles	207
3.4	Conséquences sur le taux de recouvrement enfant - parent	208
3.5	Conséquences sur le taux de recouvrement enfant - enfant	208
B	Calcul analytique du taux de fragmentation dans le cadre du modèle gravo-turbulent	210
1	Bases	211
2	Seuil critique d'effondrement	211
2.1	Calcul de la dérivée de C_s^2	212
2.2	Calcul de la dérivée de V_{rms}^2	212
2.3	Calcul de la dérivée de δ_c	213
3	Variance des fluctuations en densité	214
3.1	Calcul de la dérivée de \mathcal{M}^2	214
3.2	Calcul de la dérivée de σ^2	215
4	Le taux de fragmentation	215
4.1	Calcul de la dérivée de $\mathcal{P}(\delta \geq \delta_c)$	215
4.2	Expression de $\phi(R)$	217
5	Etude des limites subsoniques et supersoniques	219
5.1	Simplification des expressions	219
5.2	Effondrement isotherme	223

TABLE DES MATIÈRES

5.3	Condition de fragmentation hiérarchique	223
5.4	Condition de fragmentation monolithique	225
5.5	Cas alternatif $\delta_c < 0$ dans la limite subsonique	228
C	Copie du travail publié sur NGC 2264	230
D	Comparaison des tests AD et KS	244
1	Tirage dans une distribution	245
2	Reconstruction de la distribution des scores AD	246
3	Performances des tests AD et KS avec la distribution L3-IMF	247

Glossaire

Acronymes

CMF Core Mass Function - Fonction de masse des cœurs.

IMF Initial Mass Function - Fonction de masse initiale des étoiles.

LMH Largeur à mi-hauteur d'un profil d'émission gaussien.

MIS Milieu InterStellaire.

NEST Nested Elementary STructure - Structure élémentaire d'étoiles nichées.

YSO Young Stellar Object - Un objet stellaire jeune.

Définitions

Fragment Région étendue, composée de gaz et/ou de poussières, de taille caractéristique R .

Fragment enfant Fragment originaire d'un fragment parent.

Fragment parent Fragment qui possède une descendance au niveau suivant.

Nœud Représentation d'un fragment dans un réseau connecté traçant leur généalogie.

Nœud intermédiaire Fragment avec une ascendance et une descendance.

Nœud isolé / Fragment isolé Fragment ne possédant pas ni d'ascendance ni de descendance.

Nœud puit / Fragment puit Fragment ne possédant pas de descendance avec une ascendance.

Nœud source / Fragment source Fragment ne possédant pas d'ascendance avec une descendance.

Rapport de masse primaire / secondaire ψ Lorsque plusieurs enfants sont produits au sein d'un parent, rapport de masse entre le fragment primaire le plus massif, et le fragment secondaire le moins massif..

Structure Ou structure multi-échelle. Ensemble de fragments ayant des liens de filiation, descendants de fragment(s) source(s).

Structure hiérarchique Structure dont au moins un des fragments qui le compose se subdivise.

Structure isolée Structure qui ne contient qu'un fragment représenté par un nœud isolé.

Structure linéaire Structure non isolée dont aucun des fragments qui le compose ne se subdivise.

Taux d'injection de masse ξ Variation logarithmique de l'efficacité massique de formation des fragments le long des échelles spatiales.

Taux de fragmentation ϕ Variation logarithmique du nombre de fragments le long des échelles spatiales.

Chapitre I

Introduction

Sommaire

1	Motivations	19
2	Les nuages moléculaires au coeur de la formation stellaire	20
2.1	L'origine des nuages moléculaires	20
2.2	La turbulence comme squelette pour la structure du nuage	22
2.3	La fragmentation hiérarchique du nuage	23
2.4	Structure hiérarchique du nuage	25
3	Les systèmes stellaires	26
3.1	Multiplicité des systèmes existants	26
3.2	Evolution dynamique et altération de la multiplicité	27
3.3	La fonction de masse des étoiles	28
4	Trame de ce travail de thèse	31
4.1	Question à résoudre	31
4.2	Démarche générale	31
	↔ Modélisation du processus de fragmentation	31
	↔ Formalisation d'une théorie prédictive	32
	↔ Mesure d'observables	32
	↔ Conséquences de la fragmentation sur les propriétés des systèmes stellaires	32
	↔ Débouché de ce travail	32

1 Motivations

La thématique de ce manuscrit pourrait être ouverte en pointant du doigt le fait simple, mais déroutant, que la grande majorité des étoiles scintillant dans le ciel nocturne se sont vraisemblablement formées en groupes au sein de grandes structures de gaz et de poussières évoluant dans notre Galaxie et au-delà. N'est-il pas cependant plus lyrique de considérer le fait que, sans ces étoiles telles qu'elles nous apparaissent par l'oeil et l'instrument, nulle créature ne put probablement exister pour témoigner du monde qui les entoure. Dès lors, n'auraient pu être développées ni l'inspiration pour poser ces mots, ni la pensée pour les lire. La vie et la pensée consciente telles que nous les connaissons n'auraient pu prospérer sans l'existence d'étoiles qui recyclent, produisent et diffusent les atomes constitutifs de la vie. Une d'entre elles, plus particulièrement, alimente en énergie la complexité biologique des êtres peuplant notre planète qui, pour certains, ont utilisé les étoiles pour se guider, conter des légendes ou même planter des carottes. Aussi, est-ce une recherche de causalité à leur existence, plus qu'une curiosité désintéressée qui anime toutes ces personnes qui, dans l'Histoire, se dévouent dans leur quête de compréhension de leur environnement ? Pour ma part, le second sert de prétexte au premier.

Laissons place à un axe plus pragmatique, entendant que ces excursions existentielles n'alimentent les esprits contemporains ni dans la connaissance ni dans les finances. La compréhension des processus de formation stellaire constitue un enjeu majeur tant les propriétés des étoiles influencent l'astrophysique moderne dans un large panel de domaines. Par exemple, la synthèse de noyaux atomiques lourds au coeur des étoiles, et leur expulsion à la mort de ces dernières est à l'origine de toute la chimie qui advient au sein des galaxies ; le rayonnement ultra-violet (UV) des étoiles ionise leur environnement, ouvrant la fenêtre à d'autres processus physiques plus complexes ; le champ magnétique et le rayonnement stellaire façonnent la morphologie et le devenir des disques de poussière hébergeant les planètes en formation autour des étoiles. Ainsi, les étoiles, et par extension les mécanismes qui régissent leur formation, constituent une interface non seulement entre l'évolution passée et future de la matière qui les environne, mais aussi entre deux domaines d'échelles spatiales caractérisées par des objets de nature différente : le milieu interstellaire diffus et gazeux d'une part, et les disques voire les planètes orbitant autour des étoiles d'autre part.

Dans les galaxies, les nuages moléculaires constituent le berceau privilégié des jeunes étoiles qui y naissent en amas et dont la plupart sont appareillées les unes aux autres en systèmes multiples, dont la taille varie de quelques unités astronomiques (UA¹) jusqu'à

1. 1 UA $\approx 150 \times 10^6$ km, soit la distance séparant la Terre du Soleil.

plusieurs centaines d'UA (Duchêne & Kraus 2013), voire quelques milliers d'UA (Joncour et al. 2017). Dans le nuage du Taureau, près de 75% des étoiles les plus jeunes se regroupent localement dans des structures denses appelées NESTs ('Nids' en français, *Nested Elementary Structures*), dont l'extension spatiale varie entre 10 et 90 kUA (Joncour et al. 2018). Dans ces mêmes travaux réalisés sur le Taureau, la distribution spatiale des systèmes d'étoiles démontre une forme de hiérarchie, suggérant que leur origine résulterait d'une cascade de fragmentation hiérarchique du nuage moléculaire parent. Bien que ces systèmes stellaires jeunes (âgés de 0.5 - 3 millions d'années) aient une réalité empirique, les origines physiques de cette multiplicité et la nature réelle de ces séparations spatiales restent sujets à débat. Sont-elles le résultat d'interactions dynamiques entre les étoiles après leur formation, les liant gravitationnellement ? Ont-elles une origine primordiale qui remonte au moment de la formation des étoiles dans le nuage moléculaire par fragmentation ? La réponse gît-elle à la jonction de ces deux phénomènes ? Ce travail de thèse aspire à donner des éléments de réponse en proposant une modélisation de la fragmentation et une inspection des conséquences d'une fragmentation hiérarchique sur la multiplicité des systèmes d'étoiles, en tant que propriété originelle à leur formation.

2 Les nuages moléculaires au coeur de la formation stellaire

2.1 L'origine des nuages moléculaires

Dans les galaxies, le milieu interstellaire (ou MIS), se compose de toute la matière présente entre les étoiles, en grande majorité d'hydrogène contribuant pour 90 % de la quantité de matière (Ferrière 2001) mais aussi d'atomes plus lourds éjectés des étoiles à leur mort, comme par exemple le carbone *C* ou l'oxygène *O*. Différentes régions du MIS peuvent disposer de conditions en densité et température radicalement différentes, en fonction de l'état physico-chimique de la matière qui les constitue (Spitzer 1978). Le MIS peut ainsi se décliner en trois phases principales caractérisées par l'état de la matière dans lequel se trouvent les particules d'hydrogène.

La première phase, dite atomique, constitue environ 40% (Draine 2011) du volume total du MIS, et est majoritairement constituée d'hydrogène sous sa forme primitive, pour ne pas dire *atomique*. Cette phase peut elle-même être scindée en distinguant les milieux plutôt chauds ($T \sim 8000$ K) des milieux plutôt froids ($T \sim 100$ K), mais toujours avec des densités particulières de l'ordre de quelques atomes par cm^3 .

La deuxième phase dite ionisée est constituée d’atomes d’hydrogène qui *s’ionisent* sous l’effet de rayonnement UV provenant des étoiles chaudes aux alentours et constitue environ 60% du volume du MIS. Cette phase peut atteindre des températures beaucoup plus élevées que la phase atomique, $8000 \text{ K} < T < 10^7 \text{ K}$ avec des densités allant de quelques particules par cm^3 à quelques milliers de particules par cm^3 . Bien qu’un atome d’hydrogène ne soit constitué que d’un proton et d’un électron, certaines régions caractérisées par cette phase sont étrangement appelées régions HII. De l’ionisation de l’hydrogène ne résulte *in fine* qu’un proton et un électron séparés évoluant au milieu d’un plasma relativement froid. Dans ce cas, pourquoi diable appelle-t-on ces régions ‘HII’ ?

La troisième et dernière phase est dite moléculaire et constitue la phase la plus dense du milieu interstellaire avec des densités particulières variant entre $10^3 - 10^7$ atomes / cm^3 , tout en étant aussi la plus froide avec des températures typiques $T \sim 10 - 100 \text{ K}$. Bien qu’elle regroupe un quart de la masse totale du MIS, cette phase en représente un volume insignifiant, environ 0.01% du volume du MIS. Dans cette phase, les conditions de densité et de température permettent l’existence de l’hydrogène sous sa forme moléculaire, dans laquelle deux atomes se lient pour former une molécule de dihydrogène H_2 .

Cette phase moléculaire attire tout particulièrement l’intérêt du travail à venir dans cette thèse car c’est elle qui délimite les nuages moléculaires, représentant les régions les plus actives dans la formation d’étoiles. Leur taille varie de quelques dixièmes de parsec² pour les nuages les plus petits à plusieurs dizaines de parsecs pour les plus étendus, avec des masses variant autour de $10^4 - 10^6 M_\odot$ ³. Ces nuages sont constitués principalement d’un gaz de H_2 , parmi pléthore d’autres molécules avec par exemple, CO , CH , NH , NH_2 , *et caetera*. La présence de grains de poussières carbonés et/ou silicatés participe à la synthèse des molécules de H_2 à leur surface et permet d’absorber une partie du rayonnement UV pour émettre un rayonnement infra-rouge (IR) (Lequeux 2005). Malgré leur rôle crucial dans la structure des nuages et leur évolution, ces poussières ne représentent qu’une faible proportion de la masse totale du nuage avec un rapport de masse poussières/gaz de l’ordre de 1% (Spitzer 1978). La réémission dans le domaine IR des poussières constitue l’émission continue du nuage, dont le spectre s’étend de quelques dizaines de μm jusqu’à quelques centaines de μm (Draine & Li 2007), observable par exemple par le biais du télescope spatial *Herschel*.

2. 1 parsec $\approx 3 \times 10^{16} \text{ m}$

3. $1 M_\odot \approx 2 \times 10^{30} \text{ kg}$, soit la masse du Soleil

2.2 La turbulence comme squelette pour la structure du nuage

Le gaz qui compose les nuages moléculaires est usuellement représenté comme un fluide dont l'écoulement se distingue par son comportement désordonné et non linéaire. Le type d'écoulement d'un fluide est décrit par son nombre de Reynolds $Re = \frac{Lv}{\nu}$; où L est la taille typique du système étudié, v la vitesse caractéristique de l'écoulement du fluide et ν la viscosité cinématique du milieu. Ce nombre permet d'identifier différents régimes d'écoulement des fluides en évaluant le rapport entre les forces inertielles et les forces visqueuses. Plus ce nombre est élevé, plus l'écoulement peut être qualifié de turbulent (typiquement pour $Re > 1000$), et plus la trajectoire d'une particule fluide dans le milieu sera instable et chaotique. Les nuages moléculaires sont caractérisés par des nombres de Reynolds $Re \sim 10^7$, typiques de régions hautement turbulentes (von Weizsäcker 1951). Cette turbulence est à l'origine d'un transfert d'énergie entre des structures à grandes échelles alimentées en énergie cinétique, vers des structures tourbillonnaires de plus petite échelle qui dissipent cette énergie. L'énergie cinétique, injectée à une échelle L_i , engendre la formation d'une structure turbulente, puis, en se dissipant, cette structure se rompt et provoque la formation de structures turbulentes sur des échelles spatiales plus petites. Celles-ci étant plus petites, leur nombre de Reynolds l'est également. Elles se rompent à leur tour en transférant leur énergie dans des structures toujours plus petites, de nombre de Reynolds plus bas, jusqu'à une échelle dissipative L_d sur laquelle l'énergie n'est plus transmise sous forme d'énergie cinétique, mais est dissipée sous forme de chaleur en raison des frottements provoqués par la viscosité du milieu : les forces visqueuses prennent le pas sur les forces inertielles. Cette cascade d'énergie, qui apparaît entre les échelles d'injection L_i et de dissipation L_d , est caractérisée par un spectre en énergie cinétique, dont le comportement est propre à une loi de puissance $E_c \propto L^{11/3}$ (Kolmogorov 1941). Cette cascade d'énergie, invariante d'échelle, couple les différentes échelles entre elles et structure le nuage le long de plusieurs échelles spatiales : le nuage est par construction un objet multi-échelle et auto-similaire.

Plusieurs études sur des nuages moléculaires témoignent du caractère auto-similaire du nuage, tant sur l'existence omniprésente de relations d'échelles liant les propriétés physiques des nuages (Larson 1981; Elmegreen & Falgarone 1996; Guszejnov et al. 2018) que sur les propriétés statistiques fractales de la distribution du gaz (Stutzki et al. 1998; Elia et al. 2014; Dib et al. 2020). D'autres, en revanche, mettent en exergue des phénomènes de brisure d'auto-similarité dès l'instant où un processus physique devient dominant dans l'évolution dynamique du gaz. Par exemple, lorsque le potentiel gravitationnel impose à l'écoulement une direction privilégiée (Kritsuk & Norman 2011), la cascade turbulente à l'origine de l'auto-similarité du nuage est stoppée. Cette brisure d'auto-similarité ca-

ractérisé les prémisses de la fragmentation en tant qu'instabilité gravitationnelle pour des régions de taille de l'ordre de 0.1 pc (Palau et al. 2015). En outre, la compressibilité du gaz constituant les nuages moléculaires engendre des fluctuations de densité qui peuvent devenir auto-gravitantes et former des structures qui persistent dans le temps. La statistique de ces fluctuations en densité, causée par une turbulence supersonique de nature stochastique, a été déterminée pour étudier la structure en densité des nuages de gaz (Passet & Vázquez-Semadeni 1998), et par extension pour tenter de justifier un éventuel lien causal entre les propriétés turbulentes des nuages qui engendrent des structures denses, avec la distribution en masse des jeunes étoiles formées au sein de ces structures (Padoan & Nordlund 2002; Hennebelle & Chabrier 2008; Hopkins 2013).

Les structures denses, qu'elles se forment par turbulence ou non, peuvent être définies sous un angle observationnel comme des pics d'émission contrastés par rapport à un fond continu et plus dilué. Toutefois, la multiplication des observations à différentes résolutions et les performances accrues des instruments récents ont permis de mettre en évidence que ces structures sont en réalité constituées de plusieurs sous-structures enfouies (Offner et al. 2012; Pokhrel et al. 2018, par exemple). Cette sous-structuration du nuage est souvent interprétée comme des traces de fragmentation du nuage, où les propriétés physiques de ces structures, comme la masse, dépendent effectivement de la résolution d'observation (Louvet et al. 2021) compliquant la caractérisation de ces objets.

2.3 La fragmentation hiérarchique du nuage

Au cours de leur évolution, la matière des nuages moléculaires se condense dans des structures auto-gravitantes qui engendrent par la suite des étoiles (Gutermuth et al. 2009). Cette formation s'effectue par l'intermédiaire d'instabilités dites gravitationnelles, très localisées dans ces agglomérats denses de matière. Les équations hydrodynamiques de Navier-Stokes peuvent être utilisées pour traiter ces instabilités en formalisant l'écoulement d'un fluide dans un milieu non magnétisé. En linéarisant ces équations, Jeans (1902) a montré que des perturbations introduisant des inhomogénéités en densité, périodiques dans l'espace et le temps et se propageant dans un milieu de densité uniforme, étaient caractérisées par la relation de dispersion suivante :

$$\omega^2 = -4\pi G\rho + k^2 C_s^2 \quad (\text{I.1})$$

Où ω représente la pulsation temporelle des perturbations du milieu, k leur nombre d'onde, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ la constante de gravitation universelle et C_s la vitesse de propagation d'une onde sonore dans le milieu perturbé. Par ailleurs, Chandrasekhar (1951) a montré qu'il était possible de considérer une relation de dispersion simi-

laire en ajoutant la contribution quadratique des vitesses turbulentes en substituant C_s^2 par $C_{s,\text{eff}}^2 = C_s^2 + \frac{\langle v^2 \rangle}{3}$.

Les inhomogénéités engendrées par cette perturbation peuvent provoquer et alimenter une instabilité dès lors que $\omega^2 < 0$, de telle sorte que toute perturbation caractérisée par un nombre d'onde k inférieur à une limite k_J est gravitationnellement instable :

$$k \leq k_J = \frac{\sqrt{4\pi G\rho}}{C_{s,\text{eff}}} \quad (\text{I.2})$$

En supposant une perturbation à géométrie sphérique, avec pour diamètre la longueur d'onde de perturbation $\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J}$, il est possible de définir une masse limite M_J au delà de laquelle un système soumis à une perturbation est gravitationnellement instable par rapport à sa pression thermique, et peut s'effondrer pour former une étoile :

$$M_J = \frac{\pi^{5/2}}{6} G^{-3/2} \rho^{-1/2} C_{s,\text{eff}}^3 \quad (\text{I.3})$$

En supposant que la structure auto-gravitante de gaz en effondrement est un polytrophe, la température dépend de la densité par la relation $T \propto \rho^{p-1}$, où p est l'indice polytropique. Avec la vitesse de propagation du son $C_s \propto T^{1/2}$, la masse de Jeans dépend de la densité en $M_J \propto \rho^{\frac{3}{2}(p-\frac{4}{3})}$. Ainsi, pour une transformation polytropique définie avec $p > \frac{4}{3}$, on a $\frac{3}{2}(p - \frac{4}{3}) > 0$ et la masse de Jeans augmente lorsque la densité de la structure augmente : il arrive un point au cours de l'effondrement où la masse de la structure ne permet plus d'entretenir l'instabilité et la structure cesse de s'effondrer et se stabilise. En revanche, pour une transformation avec $p < \frac{4}{3}$, on a $\frac{3}{2}(p - \frac{4}{3}) < 0$, et la masse de Jeans diminue lorsque la densité de la structure augmente : une contraction tend à alimenter l'instabilité et à l'accroître. Cette escalade dans l'alimentation de l'instabilité peut également avoir pour conséquence de provoquer l'apparition d'autres instabilités internes à la structure initiale (Hoyle 1953; Hunter 1962). Sous réserve que la structure ne perde pas de masse au cours de son effondrement ni n'en reçoive de son environnement voisin, le nombre de masse de Jeans contenue dans la structure initiale augmente à mesure que celle-ci se contracte. Apparaît alors de nouvelles régions gravitationnellement instables au sein de la structure initiale, causant la fragmentation hiérarchique du milieu (Guszejnov et al. 2018; Vázquez-Semadeni et al. 2019). De plus, cet effondrement peut se stabiliser au moment où la structure, tellement dense, devient opaque à son propre rayonnement (Hoyle 1953; Larson 1969) et ne puisse plus évacuer ses photons dans le nuage environnant, prévenant ainsi toute possibilité de refroidissement. Par augmentation de la température, la pression interne de cette structure commence à stabiliser l'effondrement en exerçant une force d'opposition à l'attraction gravitationnelle. Cependant, pour atteindre une sta-

bilisation totale, la structure doit exercer une force d'expansion suffisamment importante pour supporter sa propre masse. Les propriétés finales en masse et taille de ces structures dépendent donc de l'intensité avec laquelle la gravité alimente l'instabilité au cours de l'effondrement, mais aussi du degré d'instabilité de la structure initiale (Tohline 1980). Par ailleurs, la présence d'un champ magnétique introduirait un support supplémentaire qui tendrait à stabiliser l'effondrement et ainsi augmenter la masse de Jeans. Bien que qualitatif et certainement incomplet, ce mode de fragmentation, *via* déstabilisations locales et successives d'un nuage, semble fournir une explication raisonnable quant à l'origine des systèmes stellaires multiples.

2.4 Structure hiérarchique du nuage

Les nuages moléculaires renferment les origines des étoiles existantes et les processus liés à leur formation. Ces nuages, dont la taille est de l'ordre de $\sim 0.1 - 100$ pc, s'effondrent et fragmentent. En résulte la formation de structures denses de gaz et de poussières dont la taille peut atteindre ~ 0.01 pc. Ces structures denses représentent le réservoir de masse pour la formation de jeunes objets stellaires regroupés en systèmes multiples, dont l'extension spatiale peut descendre en dessous de $< 10^{-3}$ pc (Duchêne & Kraus 2013). Les processus de formation des étoiles dans les nuages apparaissent alors comme des processus multi-échelles couvrant cinq ordres de grandeur en taille, sans compter les mécanismes de formation d'une étoile au sein d'un disque d'accrétion, dont le rayon final est de l'ordre de 10^{-7} pc. Ainsi, le processus de fragmentation hiérarchique qui permet la production de jeunes étoiles au sein des nuages moléculaires nécessite d'employer des méthodes d'analyse multi-échelle pour étudier et décrire les différents processus qui gouvernent la physique entre les différentes échelles spatiales.

Dans ce cadre d'analyse multi-échelle des nuages, les travaux pionniers de (Houllahan & Scalo 1992; Rosolowsky et al. 2008) permettent de construire la structure multi-échelle d'une image en définissant un ensemble d'iso-contours hiérarchisés sous la forme d'un arbre appelé *dendrogramme*. Les différents iso-contours qui s'incluent les uns dans les autres tracent la sous-fragmentation locale du nuage à différentes échelles. D'autres méthodes d'analyse multi-échelle (Pokhrel et al. 2018, par exemple) permettent d'étudier la fragmentation d'un nuage en se basant sur des observations à plusieurs résolutions spatiales. Une structure dense observée à faible résolution peut en réalité être composée d'un ensemble d'autres objets denses plus petits, observables à plus haute résolution, signalant alors une fragmentation locale du nuage.

3 Les systèmes stellaires

3.1 Multiplicité des systèmes existants

Les structures denses localisées dans les nuages moléculaires représentent les niches dans lesquelles les étoiles naissent et évoluent (Gutermuth et al. 2011; Offner et al. 2022). La phase précoce de formation d'une étoile, définie alors comme une proto-étoile, trace l'étape primaire de la vie de celle-ci, encore enfouie dans une enveloppe de gaz et de poussière. Au cours de son évolution, cette enveloppe se disperse ou tombe dans la proto-étoile et cette dernière rejoint éventuellement la séquence principale où elle consommera son hydrogène pendant quelques milliards d'années avant de s'éteindre définitivement.

Les études de multiplicité montrent que les étoiles de la séquence principale ne se retrouvent que très rarement isolées et se regroupent dans des systèmes d'étoiles multiples gravitationnellement liées (Lada & Lada 2003; Duchêne & Kraus 2013). Parmi ces systèmes multiples se trouvent des conglomerats de deux étoiles (binaires), trois étoiles (triples), voire des structures de plus grande multiplicité. La séparation spatiale entre les différents compagnons au sein de ces systèmes est de l'ordre de quelques dizaines d'UA pour les objets les plus proches mais peut varier jusqu'à quelques milliers d'UA pour les plus éloignées. La plupart des systèmes multiples sont ainsi organisés hiérarchiquement (Reipurth et al. 2014) : un système peut être décomposé en plusieurs sous-systèmes plus petits, chacun d'eux regroupant une sous-population d'étoiles ayant leur propre centre de masse, l'ensemble orbitant autour du centre de masse du système global. Par ailleurs, la proportion de systèmes multiples, liés gravitationnellement, tend à augmenter avec la masse de l'objet le plus massif contenu dans ces systèmes. Ainsi, plus de 80% des étoiles les plus massives ($M > 10 M_{\odot}$) ont presque toujours au moins un compagnon, tandis que plus de 80% des étoiles les moins massives ($M < 0.1 M_{\odot}$) sont solitaires (Offner et al. 2022).

Toutefois, ces étoiles de la séquence principale ne reflètent pas réellement la statistique associée aux systèmes multiples *au moment de leur formation*, mais après plusieurs millions d'années d'évolution. Les systèmes multiples les plus jeunes, constitués de proto-étoiles encore enfouies dans leur enveloppe, fournissent une population plus adéquate pour évaluer la multiplicité primitive existante au moment de leur formation. La détection de tels objets nécessite cependant des instruments de haute résolution capables de recevoir l'émission submillimétrique et infrarouge des poussières et des molécules composant leur enveloppe. Malgré ces difficultés observationnelles, des études de multiplicité à partir de simulations numériques (Bate 2012; Guszejnov et al. 2017) ont établi que, similairement

aux étoiles de séquence principale, les proto-étoiles les plus massives tendent à naître avec au moins un compagnon gravitationnellement lié. Les observations de proto-étoiles suggèrent également une formation groupée, originaire de la fragmentation du nuage à plus grande échelle (Gutermuth et al. 2009; Tobin et al. 2018) avec 60% des systèmes formés possédant au moins deux objets séparés au maximum de quelques milliers d'UA (Chen et al. 2013). En revanche, compte tenu de la jeunesse des systèmes observés, certaines structures de gaz n'ont potentiellement pas encore atteint un stade de formation (Pineda et al. 2015) permettant la présence d'une proto-étoile.

3.2 Evolution dynamique et altération de la multiplicité

Au cours de leur évolution dans le temps, la quantité d'objets présents dans ces systèmes multiples décline (Duchêne & Kraus 2013), suggérant que ces systèmes subissent des transformations dynamiques entre le moment où leurs étoiles se forment et l'instant où elles arrivent à maturité. Ces transformations dynamiques sont en partie le résultat de collisions⁴ entre deux étoiles ou entre une étoile et un système multiple. Un premier effet pouvant affecter la multiplicité des systèmes d'étoiles, et par extension la proportion de systèmes multiples, est l'éjection d'un objet en dehors d'un système pré-existant par une déstabilisation causée soit par la nature chaotique d'un système à N corps s'attirant mutuellement, soit par la rencontre proche entre un système et un objet gravitationnellement non lié à ce système (Reipurth et al. 2014). Un second effet permettant de réguler la multiplicité des systèmes existants est la capture d'un objet par un système. Dans ce cas de figure, un objet entre en collision avec un système existant, ou avec une étoile solitaire, pour se lier gravitationnellement à la structure visée et ainsi augmenter sa multiplicité (Kuruwita & Haugbølle 2023). Ce mécanisme arrive plus favorablement dans des régions de forte densité stellaire et avec des collisions d'étoiles massives permettant d'augmenter la probabilité de collision liante étoile - étoile ou étoile - système.

Ces rencontres proches ont majoritairement lieu durant les premiers millions d'années après la formation des systèmes, et leur influence peut non seulement altérer la quantité d'étoiles au sein des systèmes multiples mais aussi les séparations spatiales entre les étoiles, de telle sorte à former des systèmes hiérarchiques, plus stables (Reipurth & Mikkola 2012). La capacité qu'ont ces effets dynamiques à modifier la multiplicité et les séparations démontre le besoin de déterminer les conditions initiales de formation des systèmes stellaires pour étudier leur évolution. Il apparaît également une difficulté pour définir un système multiple primaire, tant les liaisons gravitationnelles peuvent se rompre

4. Une collision ici ne signifie pas qu'il y a contact direct entre les objets mais signifie qu'ils subissent une interaction mutuelle, ici par le biais de la force gravitationnelle.

ou naître entre les objets avant qu'ils n'atteignent leur séquence principale. En raison de toutes ces variations temporelles éventuelles, un système stellaire sera défini dans ce manuscrit comme un regroupement d'étoiles nées de la fragmentation de la même condensation de gaz, indépendamment de leur état de liaison gravitationnelle.

3.3 La fonction de masse des étoiles

Outre ces aspects de multiplicité, les structures denses de gaz assimilent une certaine quantité de matière de leur environnement pour s'effondrer et atteindre des densités permettant l'allumage d'une jeune étoile. Cette matière est, à l'origine, constitutive du nuage à plus grande échelle, impliquant que le processus de formation d'un système stellaire par fragmentation pourrait être étroitement lié à la masse que reçoit chacune de ses étoiles. La masse des étoiles est une quantité essentielle pour leur évolution future, car c'est elle qui détermine leur stabilité et donc leur durée de vie sur un plus long terme. Un enjeu crucial apparaît alors concernant la détermination de la masse des étoiles à partir de leur environnement, au cours de leur formation. Un outil de diagnostic important, souvent utilisé pour étudier et caractériser la masse d'une population d'étoiles est la fonction de masse initiale des étoiles (IMF). Cette fonction ne représente ni plus ni moins que la distribution $\zeta(M)$ de la masse M des étoiles au moment de leur formation, dénombrant la quantité N (ou la fraction) d'étoiles de masse M , par unité de masse⁵. [Salpeter \(1955\)](#) a été le premier à décrire l'IMF avec une fonction mathématique en observant que la distribution en masse des étoiles suivait une loi de puissance, d'indice $\alpha = 2.35$:

$$\zeta(M) = \frac{dN}{dM} \propto M^{-\alpha}$$

Depuis, plusieurs autres formes mathématiques ont été introduites pour décrire plus finement l'IMF. On peut citer par exemple la fonction par morceaux proposée par [Kroupa \(2001\)](#) qui consiste en une succession de lois de puissance :

$$\zeta(M) \propto \begin{cases} M^{-\alpha} & \text{pour } M \geq 0.5 M_{\odot} \\ M^{-1.3} & \text{pour } 0.08 \leq M < 0.5 M_{\odot} \\ M^{-0.3} & \text{pour } 0.01 \leq M < 0.08 M_{\odot} \end{cases}$$

Puis la forme de [Chabrier \(2003\)](#) qui décrit une log-normale aux faibles masses et une

5. Une autre définition consiste à dénombrer ces étoiles par unité logarithmique de masse

loi de puissance aux grandes masses :

$$\zeta(M) \propto \begin{cases} M^{-\alpha} & \text{pour } M \geq 1 M_{\odot} \\ M^{-1} \exp\left[-\frac{(\log M - \log 0.08)^2}{2 \times 0.69^2}\right] & \text{pour } M < 1 M_{\odot} \end{cases}$$

Ou finalement [Maschberger \(2013\)](#) qui introduit une fonction logistique continue et dérivable :

$$\zeta(M) \propto \left(\frac{M}{0.2 M_{\odot}}\right)^{-\alpha} \left(1 + \left(\frac{M}{0.2 M_{\odot}}\right)^{1-\alpha}\right)^{-1.4} \quad (\text{I.4})$$

En dépit de faibles variations d'une région de formation à une autre ([Bastian et al. 2010](#)), la mesure de cette fonction de masse initiale dans l'environnement locale à notre système solaire montre une certaine régularité, si bien qu'il a été proposé qu'elle ait un caractère quasi-universel entre les différentes régions de formation de notre environnement solaire ([Krumholz 2014](#); [Klessen & Glover 2016](#)). Sur ce principe d'universalité, l'IMF a souvent été qualifiée de canonique et possède des propriétés de forme bien spécifiques, possédées par les fonctions utilisées pour la représenter, dont :

- Une distribution des masses en loi de puissance, d'indice $\alpha = 2.35$ aussi appelée pente de Salpeter pour des masses $M > 1 M_{\odot}$;
- Une changement de pente à partir d'une masse caractéristique $M \sim 0.2 M_{\odot}$;
- Un domaine de définition borné par des masses limites localisées dans le domaine des naines brunes $M \sim 0.01 M_{\odot}$ et parmi les objets les plus massifs $M \sim 100 - 120 M_{\odot}$.

Par ailleurs, si les étoiles naissent de la fragmentation du nuage, leur distribution en masse devrait également, dans une certaine mesure, varier d'une région à une autre en fonction des conditions physiques locales du nuage. Or, l'hypothèse d'une forme unique pour l'IMF remet en question la dépendance attendue de cette dernière par rapport à l'environnement dans lequel la formation d'étoiles a lieu ([Larson 2003](#); [Bonnell et al. 2007](#)). Les études théoriques permettant d'enraciner les caractéristiques de l'IMF dans les mécanismes physiques qui structurent les nuages moléculaires, nécessitent d'introduire des processus multiplicatifs afin de reproduire la tendance log-normale à petite masse ; mais aussi d'intégrer des processus auto-similaires tels que la turbulence pour expliquer le comportement en loi de puissance aux grandes masses ([Hennebelle & Chabrier 2008](#)).

L'universalité apparente de l'IMF ne serait donc que la résultante de l'invariance des processus physiques qui régissent l'évolution des nuages moléculaires.

Dans ce paradigme qui associe aux propriétés de l'IMF une hérédité locale liée au nuage, la fonction de masse initiale des étoiles pourrait développer ses caractéristiques à partir de la distribution de masse des coeurs de gaz dense, dans lesquelles les étoiles se forment (Motte et al. 1998). En effet, bien que déplacée vers des masses plus élevées, la fonction de masse de ces coeurs denses (CMF) ressemble étrangement sur sa forme à l'IMF, pouvant décrire des lois de puissance d'indices très proches de la pente de Salpeter usuellement dérivée pour les étoiles (Motte et al. 1998; Sadavoy et al. 2010; Offner et al. 2014; Suárez et al. 2021). Toutefois, des études soulignent un flou conceptuel dans la construction des différentes CMF en raison des effets de projection en deux dimensions sur le plan céleste, et de la sous-structuration d'un coeur dont les propriétés dépendent de la résolution spatiale d'observation (Louvet et al. 2021; Padoan et al. 2023). De plus, une telle relation déplacerait la question de l'origine de la masse des étoiles, à l'origine de la masse des structures denses de gaz qui forment ces étoiles.

D'autre part, en considérant le fait que les étoiles puissent se former en groupe au sein des structures denses qui composent la CMF, la relation IMF / CMF ne semble pas totalement triviale. En effet, la production d'un ensemble d'étoiles à partir de ces structures denses pourrait modifier la forme générale de l'IMF, résultante des processus de fragmentation. En outre, la fragmentation des objets composant la CMF pourrait incarner un vecteur de contrôle pour la convergence de la CMF vers l'IMF canonique (Goodwin et al. 2008). Toutefois, plusieurs études traitant d'une fragmentation hiérarchique d'un point de vue probabiliste, évaluent une convergence de l'IMF vers une loi log-normale Larson (1973); Elmegreen & Mathieu (1983). Ces analyses statistiques n'évaluent cependant pas l'influence qu'aurait une telle fragmentation sur une CMF déjà existante, possédant ses propres caractéristiques de forme.

Malgré les difficultés existantes sur la définition des structures denses et sur l'influence réelle de la fragmentation sur la CMF, la ressemblance frappante entre la CMF et l'IMF pourrait tracer l'héritage des coeurs de gaz dépourvu d'étoiles envers les futures jeunes étoiles qu'ils couvent. Ainsi, cette connexion IMF / CMF, en relation avec la formation des systèmes multiples, pourrait être une conséquence des processus de fragmentation qui ont lieu au sein des nuages et des structures denses abritant les systèmes stellaires.

4 Trame de ce travail de thèse

4.1 Question à résoudre

Les étoiles entretiennent une relation complexe avec leur environnement dans lequel elles se forment. Leur formation est influencée par cet environnement, et la présence d'étoiles dans le nuage apporte également son lot de conséquences sur la structure de celui-ci, par exemple en ionisant son environnement, ou en engendrant des jets de matières. L'héritage de la masse des étoiles et leur formation groupée pourraient avoir pour origine les mécanismes qui régulent et structurent le nuage à plus grande échelle. La fragmentation pourrait ainsi incarner un pont entre les propriétés des nuages moléculaires et les propriétés des étoiles qu'ils engendrent.

En supposant que les mécanismes de fragmentation sont bel et bien à l'origine de la multiplicité des étoiles dans les systèmes stellaires, quelles seraient les caractéristiques de ces systèmes à l'aube de leur naissance ? De combien d'étoiles seraient-ils constitués, et quelle serait la masse de ces étoiles ?

Répondre à ces questions nécessite de construire un modèle prédictif et quantifiable qui puisse retranscrire en cohérence la structure multi-échelle et continue d'un nuage moléculaire qui fragmente avec la nature discrète des étoiles, produits de cette fragmentation. Dans cette conception de la fragmentation, une structure dense représente une entité multi-échelle qui s'inscrit dans un nuage et qui se sous-structure en fonction des processus de fragmentation locaux jusqu'à la formation des étoiles.

4.2 Démarche générale

Modélisation du processus de fragmentation

Pour décrire le processus de fragmentation qui a lieu dans le nuage, nous introduisons au Chapitre II un modèle de fragmentation multi-échelle, de nature stochastique et isotrope, basé sur une succession de phénomènes de fragmentation le long des échelles spatiales au sein de structures multi-échelles. En outre, ce modèle a pour objectif de quantifier *in fine* le nombre total de fragments (ou d'étoiles) avec leur masse au sein des structures à géométrie sphérique pour n'importe quelle échelle spatiale.

Formalisation d'une théorie prédictive

Ce modèle stochastique, vierge de tout processus physique, est accordé au Chapitre III avec un processus de fragmentation gravo-turbulent qui permet de formaliser analytiquement :

1. les conditions thermodynamiques qui régissent différents modes d'effondrement du nuage ;
2. une échelle d'arrêt de la fragmentation qui dépend du degré d'instabilité impliquant un effondrement ;
3. les propriétés moyennes de multiplicité et de masse des fragments produits en fonction des conditions physiques locales du nuage.

Mesure d'observables

Ce modèle est ensuite confronté à des observations *Herschel* multi-échelles et multi-longueur d'onde d'un nuage moléculaire de la région de formation d'étoiles NGC 2264, au Chapitre IV. L'aspect multi-échelle du modèle est mis à profit pour caractériser la sous-structuration locale de régions denses contenues dans un nuage, et ainsi mesurer la capacité de production de ces régions à des échelles plus petites. Cette étude introduit ainsi une procédure permettant d'extraire et de calculer expérimentalement une observable définie par le modèle.

Conséquences de la fragmentation sur les propriétés des systèmes stellaires

La capacité prédictive du modèle est finalement utilisée au Chapitre V pour estimer l'IMF résultante de la fragmentation d'une CMF, comportant un excès d'objets massifs par rapport à une CMF de Salpeter. Le modèle de fragmentation permet de tenir compte du couplage existant entre une multiplicité qui partitionne la masse du nuage en plusieurs morceaux et une efficacité de formation qui réduit le budget total de masse utilisé. Cette étude permet aussi de déterminer la proportion de systèmes multiples engendrés par fragmentation, en fonction de la masse des objets qui les compose.

Débouché de ce travail

Nous concluons finalement ce travail de thèse au Chapitre VI en reprenant les principaux résultats obtenus sur les différents aspects modélisation, mesure et analyse. À l'issue

de cette conclusion nous discuterons des possibilités qu'ouvre ce travail quant aux analyses multi-échelles futures, à l'adaptabilité et l'utilisation générale du modèle de fragmentation que nous allons construire et aux différentes améliorations qui permettraient de l'approfondir pour décrire un panel plus large de processus physiques.

Chapitre II

Modèle multi-échelle de sous-fragmentation du nuage

Sommaire

1	Principe général du modèle	36
1.1	Processus de production hiérarchique des fragments	36
1.2	Description multi-échelle d'une région du nuage	38
2	Formalisme mathématique du modèle	39
2.1	Description discrète de la fragmentation	39
2.2	Considération moyenne d'une population dans une région donnée	42
2.3	Description continue du modèle et des observables	43
	↔ Le taux de fragmentation	43
	↔ Le taux d'injection de masse dans les fragments	44
	↔ Masse des fragments produits	46
	↔ Densité volumique des fragments produits	46
	↔ Effet de moyenne	47
	↔ Densité stellaire	48
3	Influences géométriques sur le taux de fragmentation	48
3.1	Probabilité de fragmenter	48
3.2	Échantillonnage des niveaux de fragmentation	50
3.3	Erreur associée à la géométrie des fragments	52
	↔ En trois dimensions	53
	↔ En deux dimensions	55

Le processus de fragmentation qui permet la production de jeunes étoiles au sein des nuages moléculaires, recouvre une large dynamique de tailles et englobe une pluralité de

processus physiques. Les outils et méthodes d'analyse multi-échelle sont dès lors des instruments adéquats pour étudier l'évolution et l'origine des objets qui se forment dans ces nuages.

Parmi ces méthodes, les travaux de [Houlahan & Scalo \(1992\)](#), précurseurs de ceux de [Rosolowsky et al. \(2008\)](#), permettent de décomposer une image du MIS en iso-contours dont la nature dépend de l'unité physique des pixels de cette image. Cette décomposition permet de définir des niveaux hiérarchisés en intensité et de construire une structure en arbre, appelée dendrogramme pour obtenir une information sur la structure multi-échelle d'une image vis-à-vis de ses iso-contours. D'autres méthodes d'analyse multi-échelle existent ([Pokhrel et al. 2018](#)) et se basent sur une composition de données issues d'observations de résolution et longueur d'onde différentes, dont les structures en gaz ou en poussières ne sont pas définies comme des iso-contours, mais comme des pics d'émission discernables du bruit et d'un fond plus diffus.

D'autre part, les premières modélisations du processus de fragmentation hiérarchique à l'aide de réseaux connectés sous forme d'arbres datent du siècle dernier avec les travaux fondateurs de [Larson \(1973\)](#) qui avait pour but de déterminer le spectre de masse des étoiles à partir de processus stochastiques. Dans cette représentation, un nuage fragmente successivement le long d'un nombre entier de niveaux jusqu'à aboutir à la masse des objets stellaires. Cette conception d'une fragmentation qui se déroulerait le long de niveaux discrets était déjà avancée par [Hoyle \(1953\)](#) qui formalisait ce processus en utilisant des suites géométriques traçant l'évolution de la masse des fragments produits après un certain nombre d'étapes de fragmentation. Par la suite, [Zinnecker \(1984\)](#) repris ce concept pour étudier l'évolution et le transfert du moment cinétique des objets formés entre chaque niveau de fragmentation. Enfin, [Elmegreen & Mathieu \(1983\)](#) proposaient de fragmenter des échantillons finis d'objets en appliquant des méthodes de tirage aléatoire dans le but d'évaluer leur fonction de masse après un certain nombre de niveaux de fragmentation tout en considérant une efficacité de formation aléatoire.

L'intérêt de cette approche discrète dans laquelle la fragmentation d'un objet primordial progresse le long d'un nombre entier de niveaux, réside non seulement dans la description des processus de fragmentation dont le produit final est un nombre dénombrable d'étoiles, mais réside aussi dans la constitution d'un support multi-échelle similaire à ce qui peut être employé dans les analyses de données réelles à la manière de [Rosolowsky et al. \(2008\)](#) et [Pokhrel et al. \(2018\)](#). L'approche adoptée dans ce manuscrit reprend et approfondit cette représentation en réseaux connectés qui permet par la suite de :

1. Modéliser la nature discrète du produit résultant de la fragmentation ;

2. Accéder à la description multi-échelle d'un nuage ou d'une région du nuage à partir d'observations multiples ;
3. Fournir des observables qui permettent de décrire les modalités du processus de fragmentation.

Le modèle qui est introduit dans ce chapitre décrit la formation de fragments dans un état pseudo-stationnaire dans lequel seule la résultante effective du processus de fragmentation est étudiée. Au cours de ce chapitre, le cadre général du modèle et sa structure en réseaux sont introduits dans la partie 1. Nous verrons ensuite comment il est possible de raccorder la nature continue des nuages moléculaires avec le caractère discret du processus de fragmentation dans la partie 2, en introduisant des observables statistiques. Enfin, nous aborderons dans la partie 3 les problématiques associées à l'extension spatiale des fragments qui introduit une incertitude systématique, en particulier sur l'une des observables. L'objectif de ce chapitre est de poser le cadre mathématique permettant de prédire la masse typique des étoiles et leur multiplicité à l'intérieur d'une région donnée.

1 Principe général du modèle

1.1 Processus de production hiérarchique des fragments

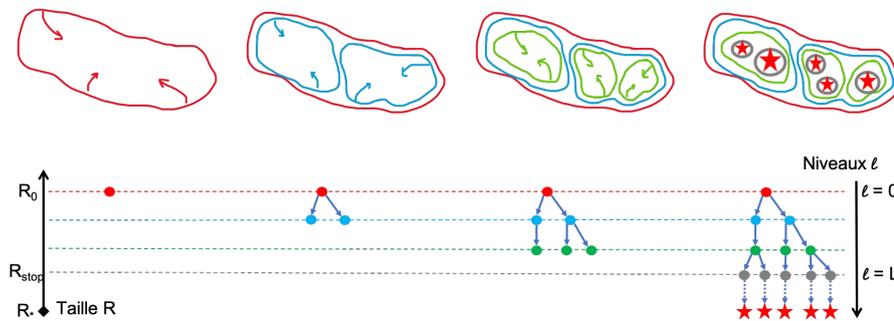


FIGURE II.1 – Schéma du processus de fragmentation hiérarchique d'un nuage et sa représentation en réseau. Chaque échelle spatiale R est associée à un niveau discret de fragmentation l . Ce processus de fragmentation hiérarchique se développe des grandes échelles vers les petites échelles jusqu'à un niveau $l = L$ à partir duquel on suppose que les objets produits ne fragmentent plus et s'effondrent chacun en une étoile.

Sous l'effet couplé de la gravité et de la turbulence, un nuage de taille caractéristique R_0 et de masse M_0 s'effondre localement et fragmente en plusieurs sous-régions distinctes de taille $R_0 > R$. Ces sous-régions sont assujetties au même processus de fragmentation et produisent des fragments à plus petite échelle. Ainsi, au cours de ce processus, des générations de fragments de plus en plus petits s'enchevêtrent dans leurs

prédécesseurs, plus larges. En raison des processus non-isothermes à petite échelle, qui seront abordés plus spécifiquement au Chapitre III, cette cascade de fragmentation aboutit éventuellement à des sous-régions dans l'incapacité de se sous-fragmenter et s'effondrent pour, individuellement, donner naissance à une étoile. Cette idée de la fragmentation hiérarchique introduit toutefois une difficulté conceptuelle. En effet, elle intègre d'une part la nature discrète de la fragmentation dont la résultante est la formation d'étoiles dénombrables, et d'autre part la nature continue et multi-échelle des nuages à partir desquels ces étoiles se forment. Le modèle visant à décrire ce phénomène de cascade de fragmentation doit, en conséquence, prendre en considération cette dualité entre les aspects discrets et continus pour nous permettre de comprendre la relation entre les étoiles et leur environnement. À cet égard, l'espace des tailles spatiales R est discrétisé en plusieurs niveaux de fragmentation l associés à des échelles spatiales R_l . Ainsi, l'ensemble des fragments de taille R_l est constitutif d'un niveau l . Le niveau suivant $l + 1$ définit une étape de fragmentation supplémentaire à des échelles spatiales inférieures telles que $R_l > R_{l+1}$. La cascade de fragmentation est donc organisée hiérarchiquement à partir des fragments de grande taille vers les fragments de plus petite taille.

De nature discrète, ce processus de fragmentation hiérarchique peut être représenté sous la forme d'un réseau de nœuds connectés (voir par exemple Figure II.1). Ce réseau est composé de plusieurs niveaux l qui représentent chacun une échelle spatiale R_l . Chaque niveau est constitué d'un ensemble de fragments de taille R_l représentés par des nœuds. D'un niveau à un autre ces nœuds sont connectés, ou non, par des arêtes qui représentent la filiation entre un fragment parent à grande échelle avec les fragments enfants qu'il contient. Ces arêtes sont dirigées dans le sens de la descendance, des grandes échelles vers les plus petites. Relativement à ces arêtes, on distingue alors quatre types de nœuds :

1. Nœud source : nœud sans ascendance mais avec une descendance ;
2. Nœud intermédiaire : nœud avec une descendance et une ascendance ;
3. Nœud puits : nœud sans descendance mais avec une ascendance ;
4. Nœud isolé : nœud sans descendance ni ascendance.

Par exemple, un fragment source s'enracine au niveau $l = 0$. De cette source naissent des fragments enfants sur le niveau $l = 1$ dans des nœuds intermédiaires qui formeront les prochaines générations de fragments aux échelles suivantes. Advient une échelle finale $l = L$ peuplée de fragments puits qui correspondent à une taille $R_L \equiv R_{\text{stop}}$ associée à la taille de l'objet final dans lequel on suppose qu'une seule et unique étoile se forme. Un système binaire serait ainsi défini par le fragment de l'échelle $l = L - 1$ qui aurait engendré deux puits contenant chacun une étoile. La séparation spatiale entre les étoiles composant ce système binaire correspondrait ainsi à la taille caractéristique R_{L-1} associée

au fragment du niveau $L - 1$.

1.2 Description multi-échelle d'une région du nuage

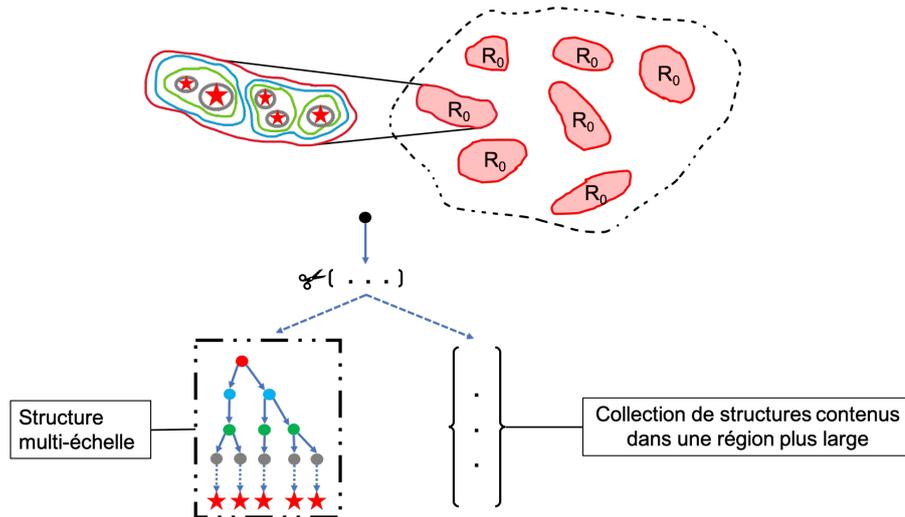


FIGURE II.2 – Schéma d'un fragment parent de taille R_0 évoluant au sein d'un objet plus large en compagnie d'autres parents. L'imbrication des fragments enfants au sein de ce parent forme une structure multi-échelle de fragments, représenté par un réseau connecté.

Un fragment source de taille R_0 qui fragmente peut toujours faire partie d'un ensemble de fragments sources évoluant au sein d'un objet plus large, par exemple un nuage moléculaire géant, une galaxie, voire un groupe de galaxie. Chaque source est associée à une structure multi-échelle composée des fragments enfants dont ils sont issus. Une structure multi-échelle est alors représentée par un réseau construit à partir des fragmentations successives des sources qu'elle contient (voir Figure II.2). Une structure est qualifiée de multi-échelle dans le sens où son architecture s'étend sur une gamme d'échelles spatiales plus ou moins large selon le nombre d'évènements de fragmentation qui s'y sont produits. Contrairement à un fragment source de taille R_0 , une structure de taille R_0 inclut toute l'information des fragments enfants à plus petite échelle.

Ces structures permettent de différencier des régions de formation qui, à une taille R_0 donnée, auraient des propriétés différentes en terme de fragmentation, par exemple des régions plus fécondes que d'autres. Ces régions constituent des structures multi-échelles classées en trois catégories :

1. Structure isolée : structure qui ne contient qu'un seul et unique fragment ;

2. Structure linéaire : structure non isolée dont aucun des fragments qui le compose ne se subdivise ;
3. Structure hiérarchique : structure dont au moins un des fragments qui le compose se subdivise.

Une structure hiérarchique peut en particulier présenter provisoirement un caractère linéaire le long d'un intervalle d'échelles spatiales. Chaque structure hiérarchique peut ainsi arborer des architectures variées en fonction de la quantité de fragments qu'elle produit à chaque échelle. Cette capacité à fragmenter dépend des propriétés physiques locales à chaque échelle et il est toujours possible de définir une tendance effective, moyennée au sein d'une région de taille R_0 décrite par une structure multi-échelle. En particulier, nous verrons par la suite (partie 2.2) que le nombre de fragments produits $\langle N(R) \rangle_{R_0}$ et la masse de ces fragments $\langle M(R) \rangle_{R_0}$ calculés à une taille $R < R_0$ sont des quantités moyennées sur l'ensemble des fragments de taille R contenus dans une structure de taille R_0 , c'est-à-dire contenus dans une région de taille R_0 .

D'un point de vue observationnel, nous verrons au Chapitre IV qu'une structure peut contenir plusieurs nœuds sources qui apparaissent à des niveaux différents, et donc à des tailles différentes. Cela est dû à la nature évasive d'un fragment et aux difficultés de définir concrètement ses bordures. Ainsi, deux fragments enfants localisés sur un même niveau peuvent se chevaucher, et ne pas être totalement inclus dans leur parent. Pour simplifier la formalisation mathématique du modèle, nous considérons par la suite que deux enfants de même taille ne se chevauchent ni ne franchissent le bord présupposé de leur parent.

2 Formalisme mathématique du modèle

2.1 Description discrète de la fragmentation

Afin de décrire la manière dont se fractionne chacun des fragments parents considérons leur fragmentation individuelle entre deux niveaux successifs R_l et R_{l+1} . Cette description individuelle revient à sélectionner uniquement un parent au niveau l et ses fragments enfants au niveau $l+1$ (voir Figure II.3). La résultante de cette fragmentation est déterminée à la fois par la quantité de fragments enfants produits et par la façon dont la masse du parent est répartie entre ses enfants. Le parent localisé au niveau l , de masse M_l , a une probabilité $p_l(n_l)$ de se subdiviser en un nombre fini de fragments enfants n_l , tel que $1 \leq n_l \leq n_{l,\max}$ soit borné. L'alternative $n_l = 0$ est exclue car, en supposant une continuité spatiale entre les échelles, un tel parent n'engendrerait pas d'enfant et ne contribuerait donc pas aux propriétés des systèmes d'étoiles finalement formés. La distribution de probabilité qui pour

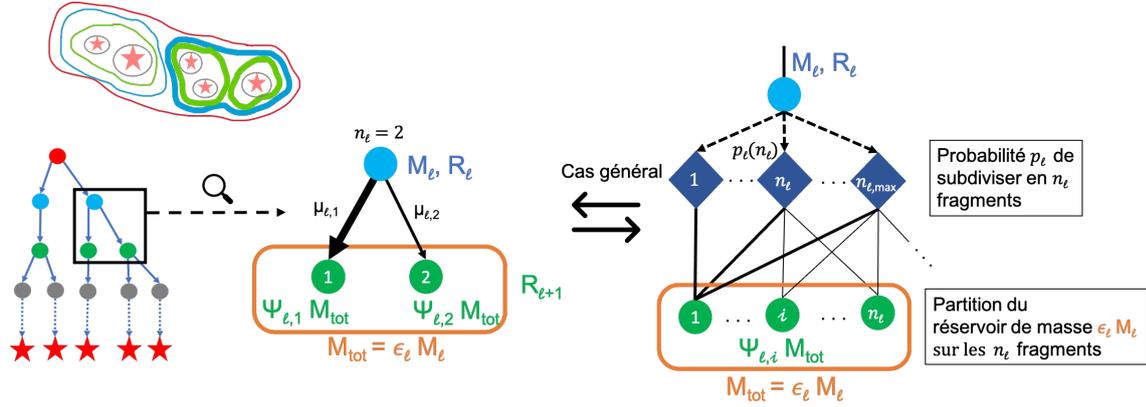


FIGURE II.3 – Schéma du processus de fragmentation pour un unique fragment parent contenu dans une structure multi-échelle. N’importe quel parent à un niveau l , de taille R_l et de masse M_l , peut être sélectionné afin d’évaluer le nombre n_l de fragments qu’il produit pour ensuite déterminer la fraction de sa masse $\mu_{li} = \epsilon_l \psi_{li}$ distribuée au fragment enfant numéro i . De manière générale, ce parent a une certaine probabilité p_l d’engendrer un nombre n_l d’enfants, avant de transférer une certaine fraction de sa masse μ_{li} vers chacun de ses enfants.

chaque nombre d’enfants produits n_l associe sa probabilité p_l , fixe le nombre d’enfants qu’un fragment parent forme au niveau suivant. Elle est normalisée de telle sorte :

$$\sum_{n_l=1}^{n_{l,\max}} p_l(n_l) = 1 \quad (\text{II.1})$$

On peut également calculer l’espérance \bar{n}_l de cette loi de probabilité, elle sera utile pour la suite :

$$\bar{n}_l = \sum_{n_l=1}^{n_{l,\max}} n_l p_l \quad (\text{II.2})$$

Une fois que le fragment parent s’est subdivisé en n_l morceaux, sa masse M_l est répartie entre ses n_l enfants. Le parent lègue à l’enfant numéro i une fraction μ_{li} de sa masse M_l . En conséquence, chacun des n_l fragments enfants hérite d’une masse $M_{l+1,i} = \mu_{li} M_l$, avec $1 \leq i \leq n_l$. Par ailleurs, la masse de l’ensemble des enfants produits au sein d’une portée ne correspond pas nécessairement à la masse du parent qui les a engendrés. Par exemple, une partie de la masse peut être restituée au milieu ambiant. Ces fragments enfants peuvent également accréter un surplus de masse de ce milieu ambiant. En décomposant cette fraction μ_{li} de la manière suivante :

$$\mu_{li} = \epsilon_l \psi_{li}, \quad (\text{II.3})$$

on dissocie le rendement massique ϵ_l avec lequel l'ensemble des fragments enfants sont produits, de la fraction de masse ψ_{li} reçue par l'enfant numéro i de la part du réservoir de masse disponible $\epsilon_l M_l$. Par définition, nous avons les équations suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n_l} \psi_{li} = 1 \quad (\text{II.4})$$

$$\epsilon_l = \frac{\sum_{i=1}^{n_l} M_{l+1,i}}{M_l} \quad (\text{II.5})$$

Supposons en plus qu'il existe une inégalité entre les enfants sur leur héritage de masse. Au sein d'une portée l'enfant le plus massif, appelé fragment primaire, est l'enfant numéro $i = 1$ héritant d'une masse plus grande d'un facteur $\psi \geq 1$ que les autres enfants, appelés fragments secondaires. Ainsi, la quantité ψ représente le rapport entre la masse du primaire sur la masse des secondaires¹. Pour respecter la relation de fermeture de l'équation II.4, la fraction de masse ψ_{li} reçue par l'enfant numéro i de la part du réservoir $\epsilon_l M_l$ peut s'écrire :

$$\psi_{li} = \begin{cases} \frac{\psi}{\psi + n_l - 1} & \text{si } i = 1 \\ \frac{1}{\psi + n_l - 1} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Si le fragment parent s'effondre sans se subdiviser, un seul enfant est produit avec $n_l = 1$ et cet enfant unique hérite de la totalité du réservoir disponible $\epsilon_l M_l$. Si $\psi = 1$, chaque enfant reçoit de la part du réservoir la même fraction $\psi_{li} = n_l^{-1}$. Ainsi, la valeur $\psi = 1$ modélise l'équipartition en masse dans une portée.

Le modèle que nous introduisons ici est une généralisation du modèle stochastique proposé par [Larson \(1973\)](#) dans lequel un fragment source se subdivise successivement le long de plusieurs niveaux de fragmentation. Dans leur modèle, un parent de masse M_0 au niveau initial a une probabilité $p = 1/2$ de former $n = 2$ fragments de masse $M_{1,1} = M_{1,2} = M_0/2$ et une probabilité $1-p = 1/2$ de former $n = 1$ fragment de masse $M_{1,1} = M_0$. Par conséquent, leur rendement massique entre deux niveaux correspond à $\epsilon_l = 1$, et la répartition de la masse, équitablement distribuée entre les fragments, correspond à $\psi = 1$. Toutefois, le modèle présenté dans ce manuscrit introduit une fonction de partition de la masse entre les fragments produits permettant de décrire le déséquilibre de masse lorsque

1. ψ représente ici l'inverse du rapport de masse usuellement défini pour caractériser les systèmes binaires comme le rapport de la masse du secondaire sur la masse du primaire

plusieurs fragments sont produits. De plus, notre modèle considère l'échelle physique des fragments produits pour chaque niveau de fragmentation, ce qui permet de moduler les propriétés de fragmentation en fonction de la physique qui régit cette échelle.

2.2 Considération moyenne d'une population dans une région donnée

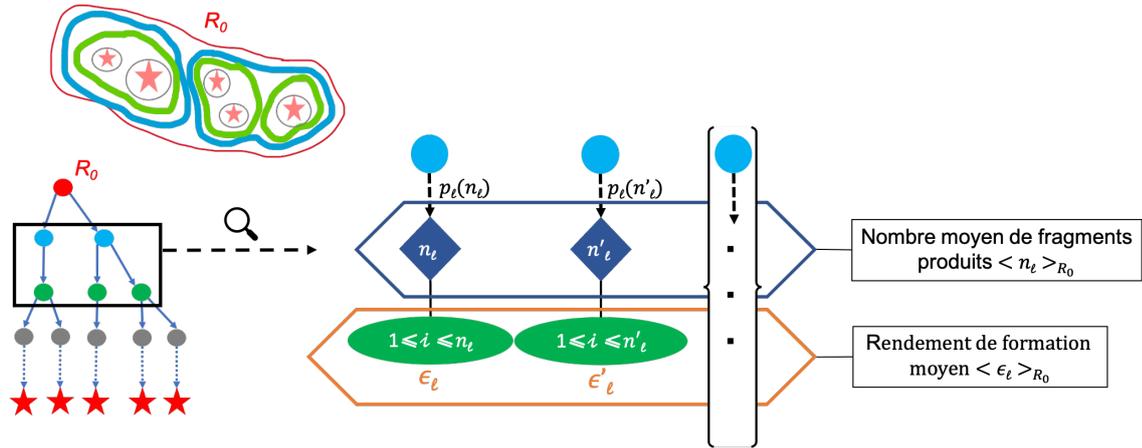


FIGURE II.4 – Principe de moyenne des quantités utiles sur l'ensemble des fragments parents considérés à un niveau l . Pour chaque structure multi-échelle il est possible de calculer, à un niveau donné, le nombre moyen de fragments produits avec leur rendement de formation en considérant la fragmentation de leur parent respectif.

Intéressons-nous maintenant au comportement moyen de l'ensemble des fragments parents du niveau l contenus dans une structure de taille R_0 (Figure II.4). Cette opération revient d'une part à chercher la quantité de fragments enfants produits en moyenne dans une région de taille R_0 , et d'autre part à déterminer avec quel rendement ces fragments enfants sont produits au sein de cette région.

Sur l'échelle l , il existe en moyenne un nombre $\langle N(R_l) \rangle_{R_0}$ de fragments parents qui produisent un total de $\langle N(R_{l+1}) \rangle_{R_0}$ enfants à l'échelle $l + 1$. L'opérateur $\langle x \rangle_{R_0}$ signifie que l'on prend la moyenne d'une quantité x dans une région de taille R_0 . Le nombre de fragments enfants moyen $\langle \bar{n}_l \rangle_{R_0}$ produit par les $\langle N(R_l) \rangle_{R_0}$ potentiels parents au sein d'une région de taille R_0 est alors :

$$\langle \bar{n}_l \rangle_{R_0} = \frac{\langle N(R_{l+1}) \rangle_{R_0}}{\langle N(R_l) \rangle_{R_0}} \quad (\text{II.7})$$

Selon la définition de l'équation II.5, le rendement massique ϵ_l d'un parent est le rapport entre la masse totale des fragments enfants produits et la masse de leur parent. Le rendement moyen $\langle \epsilon_l \rangle_{R_0}$ de l'ensemble des parents à un niveau l correspond alors au rapport entre la masse totale des enfants produits avec la masse totale de leurs parents :

$$\langle \epsilon_l \rangle_{R_0} = \frac{\langle M_{\text{tot}}(R_{l+1}) \rangle_{R_0}}{\langle M_{\text{tot}}(R_l) \rangle_{R_0}} \quad (\text{II.8})$$

Définissons l'efficacité de formation $\langle \mathcal{E}(R_l) \rangle_{R_0}$ des fragments de taille R_l produits à l'intérieur du fragment source de masse M_0 :

$$\langle \mathcal{E}(R_l) \rangle_{R_0} = \frac{\langle M_{\text{tot}}(R_l) \rangle_{R_0}}{M_0} \quad (\text{II.9})$$

Et écrivons le rendement massique moyen entre deux niveaux :

$$\langle \epsilon_l \rangle_{R_0} = \frac{\langle \mathcal{E}(R_{l+1}) \rangle_{R_0}}{\langle \mathcal{E}(R_l) \rangle_{R_0}} \quad (\text{II.10})$$

Ces quantités moyennées $\langle \bar{n}_l \rangle_{R_0}$ et $\langle \epsilon_l \rangle_{R_0}$ permettent de faire le pont entre la description continue et la description discrète comme nous le verrons dans la prochaine partie.

2.3 Description continue du modèle et des observables

Le taux de fragmentation

Nous allons désormais raccorder les quantités moyennes qui régissent la multiplicité et le rendement massique entre deux niveaux R_l et R_{l+1} à deux variables continues définies sur un intervalle infinitésimal $[R - dR, R]$. Reprenons notre fragment source de taille R_0 qui fragmente vers des échelles spatiales inférieures. À mesure que l'échelle spatiale diminue, de nouveaux fragments se forment pour continuer de se subdiviser. Pour chaque nouveau fragment produit, celui-ci a une certaine probabilité de se subdiviser pour engendrer un certain nombre de fragments enfants. Soit $\phi(R)$ la variation du nombre moyen de fragments produits par unité logarithmique de taille R , dans le sens des R décroissants :

$$\boxed{\phi(R) = - \frac{d \ln \langle N(R) \rangle_{R_0}}{d \ln R}} \quad (\text{II.11})$$

La quantité ϕ peut être interprétée comme un taux de fragmentation moyen, car elle donne une information statistique sur la capacité de production de l'ensemble des fragments parents contenus dans une région de taille R_0 , à une échelle R donnée (voir le tableau II.1). En effet, pour des tailles R de plus en plus petites, la population de fragments est en accroissement si $\phi > 0$. Si la population de fragments est stable, ou constante, $\phi = 0$ et la région est en effondrement sans sous-fragmentation effective. Si la population de fragments décroît, $\phi < 0$ ce qui signifie que les parents ne parviennent plus à conserver efficacement leur démographie à plus petite échelle. Ainsi, plus le taux de fragmentation est grand, plus la production de nouveaux fragments est élevée, et plus les structures sont

fécondes en étoiles. En intégrant l'équation II.11, nous obtenons le nombre moyen de fragments produits de taille R :

$$\boxed{\langle N(R) \rangle_{R_0} = N_0 \exp \left[\int_R^{R_0} \phi(R') d \ln R' \right]} \quad (\text{II.12})$$

Avec N_0 le nombre de sources à l'échelle R_0 . On peut réécrire :

$$\langle N(R) \rangle_{R_0} = N_0 \exp \left[\int_{R_{l+1}}^{R_l} \phi(R') d \ln R' \right] \times \exp \left[\int_{R_l}^{R_0} \phi(R') d \ln R' \right] \quad (\text{II.13})$$

Soit :

$$\langle N(R_l) \rangle_{R_0} = \langle N(R_{l+1}) \rangle_{R_0} \exp \left[\int_{R_{l+1}}^{R_l} \phi(R') d \ln R' \right] \quad (\text{II.14})$$

On peut alors relier le taux de fragmentation continu $\phi(R)$ au nombre moyen de fragments produits entre deux échelles discrètes par la relation :

$$\boxed{\langle \bar{n}_l \rangle_{R_0} = \exp \left[\int_{R_{l+1}}^{R_l} \phi(R') d \ln R' \right]} \quad (\text{II.15})$$

Le taux de fragmentation représente une première observable qui se base sur la multiplicité des fragments produits dans une région donnée. Par exemple, le Chapitre IV est dédié à une analyse basée sur la mesure de cette quantité dans des données observationnelles.

Le taux d'injection de masse dans les fragments

Pour obtenir une seconde observable basée sur la masse des fragments produits, regardons de la même manière la variation de la masse totale contenue dans des fragments de taille R , c'est-à-dire la variation de l'efficacité de formation $\langle \mathcal{E}(R) \rangle \propto \langle M_{\text{tot}}(R) \rangle_{R_0}$ par unité logarithmique de taille R , dans le sens des R décroissants :

$$\boxed{\xi(R) = - \frac{d \ln \langle \mathcal{E}(R) \rangle_{R_0}}{d \ln R}} \quad (\text{II.16})$$

La variable $\xi(R)$ représente alors le taux d'injection de masse dans les fragments produits car elle décrit la proportion de masse distribuée à l'ensemble des fragments de taille R produits dans une région de taille R_0 . Si $\xi < 0$ alors le réservoir total de la masse contenue dans l'ensemble des fragments diminue à mesure que la taille des fragments diminue. Cela signifie que les fragments parents perdent une partie de leur masse lors du processus de formation de leurs enfants, en la dispersant par exemple dans leur environ-

	> 0	$= 0$	< 0
ϕ	Fragmentation hiérarchique	Effondrement monolithique	Destruction
ξ	Accrétion	Conservation totale de la masse	Perte de masse

TABLE II.1 – Description physique du taux de fragmentation ϕ et du taux d’injection de masse ξ en fonction de leur signe.

nement. Au contraire, si $\xi > 0$, le réservoir de masse parental est moins important que le réservoir enfant : de la masse est alors injectée dans les fragments enfants, par exemple par accrétion. Si l’équivalent de la masse parentale est utilisée pour former les enfants, on a $\xi = 0$. Ainsi, plus le taux d’injection de masse ξ est grand, plus le rendement massique avec lequel sont formés les fragments est élevé. À noter que cette quantité ne tient compte que de la résultante entre accrétion / dispersion et ne discrimine pas la contribution individuelle de ces deux effets. Compte tenu de la définition du taux d’injection de masse ξ , nous pouvons exprimer l’efficacité de formation des fragments $\mathcal{E}(R)$ comme :

$$\langle \mathcal{E}(R) \rangle_{R_0} = \mathcal{E}_0 \exp \left[\int_R^{R_0} \xi(R') d \ln R' \right] \quad (\text{II.17})$$

Avec $\mathcal{E}_0 = 1$ car la masse totale des fragments de taille R_0 représente la masse de l’objet initial à cette taille R_0 . Nous avons en particulier à l’échelle R_{l+1} :

$$\langle \mathcal{E}(R_{l+1}) \rangle_{R_0} = \exp \left[\int_{R_{l+1}}^{R_l} \xi(R') d \ln R' \right] \times \exp \left[\int_{R_l}^{R_0} \xi(R') d \ln R' \right] \quad (\text{II.18})$$

Soit :

$$\langle \mathcal{E}(R_{l+1}) \rangle_{R_0} = \langle \mathcal{E}(R_l) \rangle_{R_0} \exp \left[\int_{R_{l+1}}^{R_l} \xi(R') d \ln R' \right] \quad (\text{II.19})$$

En remplaçant $\mathcal{E}(R_l)$ et $\mathcal{E}(R_{l+1})$ dans l’équation II.10 par leur expression intégrale, nous obtenons finalement la relation entre le taux d’injection de masse et le rendement moyen avec lequel les fragments parents engendrent leurs enfants :

$$\boxed{\langle \epsilon_l \rangle_{R_0} = \exp \left[\int_{R_{l+1}}^{R_l} \xi(R') d \ln R' \right]} \quad (\text{II.20})$$

Le taux d’injection de masse aux fragments produits $\xi(R)$ représente une seconde observable qui se base sur la masse de l’ensemble fragments produits dans une région donnée dont le signe est déterminé par le processus dominant entre accrétion et dispersion de la masse dans l’environnement (voir le tableau II.1).

Masse des fragments produits

On peut maintenant écrire la masse moyenne $\langle M(R) \rangle_{R_0}$ des fragments de taille R :

$$\langle M(R) \rangle_{R_0} = \frac{\langle M_{\text{tot}}(R) \rangle_{R_0}}{\langle N(R) \rangle_{R_0}} \quad (\text{II.21})$$

Qui peut se réécrire :

$$\langle M(R) \rangle_{R_0} = M_0 \frac{\langle \mathcal{E}(R) \rangle_{R_0}}{\langle N(R) \rangle_{R_0}} \quad (\text{II.22})$$

En prenant la dérivée logarithmique de cette expression et en injectant les équations II.16 et II.11, on obtient :

$$\boxed{\frac{d \ln \langle M \rangle}{d \ln R} = \phi(R) - \xi(R)} \quad (\text{II.23})$$

Nous pouvons ainsi dériver l'expression de la masse moyenne des fragments de taille R au sein d'une région de taille R_0 de masse M_0 :

$$\langle M(R) \rangle_{R_0} = M_0 \exp \left[- \int_R^{R_0} (\phi(R') - \xi(R')) d \ln R' \right] \quad (\text{II.24})$$

Cette expression nous indique que l'efficacité massique de formation des fragments tient compte de deux composantes. La première est donnée par le taux d'injection de masse qui est liée au rendement moyen de formation et qui donne une information sur la quantité de matière perdue ou obtenue pendant le processus de fragmentation. La seconde est donnée par le taux de fragmentation qui est liée au nombre de fragments enfants produits. Comme ces enfants doivent se partager la masse de leur parent, plus le nombre d'enfants est grand, plus la masse de chacun de ces enfants est petite.

Densité volumique des fragments produits

Il est ensuite possible de calculer l'évolution de la densité volumique moyenne des fragments à une échelle donnée $\langle \rho(R) \rangle_{R_0}$:

$$\langle \rho(R) \rangle_{R_0} = a_G \frac{\langle M(R) \rangle}{R^3} \quad (\text{II.25})$$

Où a_G est une constante qui dépend de la géométrie des fragments considérés. On a alors :

$$\frac{d \ln \langle \rho \rangle_{R_0}}{d \ln R} = \phi(R) - \xi(R) - 3 \quad (\text{II.26})$$

Ce couplage entre le taux de fragmentation, le taux d'injection de masse et la den-

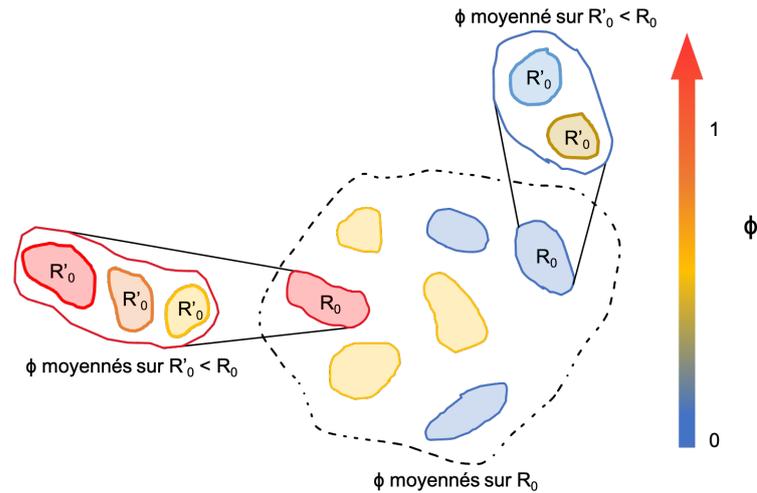


FIGURE II.5 – Le taux de fragmentation $\phi(R)$ vu comme une moyenne sur une région de taille donnée. La valeur de $\phi(R)$ calculée au sein d’une région tient compte de l’ensemble des sous-structures de taille R'_0 qui composent une région de taille R_0 donnée. Il est possible de calculer un taux de fragmentation plus précisément en tenant compte de chacune des structures qui composent la région de manière individuelle. Le même principe s’applique pour le taux d’injection de masse ξ .

sité des fragments formés sera important par la suite dans le Chapitre III, lorsque l’on cherchera à décrire la dépendance du taux de fragmentation avec les propriétés physiques de la région considérée. En effet, la dépendance de la densité du milieu avec les taux introduits dans notre modèle implique que la multiplicité et l’efficacité de formation sont influencés par l’équation d’état qui caractérise la thermodynamique du milieu. Cela signifie que les taux de fragmentation et de masse injectée sont dépendants des phénomènes physiques qui régissent le milieu à une échelle R donnée. On voit ici directement que si $\phi(R) - \xi(R) - 3 < 0$, alors la densité massique des fragments produits augmente à mesure que leur taille est faible.

Effet de moyenne

Le taux de fragmentation $\phi(R)$ et le taux d’injection de masse $\xi(R)$ sont des quantités moyennées sur l’ensemble des fragments de taille R contenues dans une région plus large de taille R_0 . Ces quantités ne tiennent compte que de la résultante effective du processus de fragmentation qui a lieu entre les échelles R_0 et R . Pour avoir une estimation plus fine et locale des taux ϕ , et ξ , on peut toujours tronçonner en deux l’arbre associé à une structure de taille R_0 à un niveau R'_0 et filtrer les échelles $R > R'_0$ pour définir de nouvelles structures multi-échelles de taille $R'_0 < R_0$. Alors, les propriétés effectives de fragmentation que définissent ϕ et ξ ne sont plus moyennées sur une région de taille R_0 , mais sont évaluées en considérant la moyenne de chaque sous-région de taille R'_0 . Dans

ce découpage, chaque structure contient une lignée de fragments dont les modalités de fragmentation effectives sont adjointes aux propriétés physiques de la région de taille R'_0 qui les contient (voir Figure II.5).

Cette modélisation permet d'étudier l'évolution multi-échelle des propriétés de multiplicité et de masse qui résultent d'événements de fragmentation successifs au sein d'un nuage. En outre, nous cherchons à évaluer ces propriétés jusqu'à une échelle finale R_{stop} où la fragmentation doit s'arrêter en raison de processus non isothermes (Guszejnov & Hopkins 2015; Lee & Hennebelle 2018) qui empêchent l'apparition d'instabilités gravitationnelles multiples. Au-delà de cette échelle d'arrêt R_{stop} , nous présumons qu'un fragment parent engendre une seule étoile avec un certain rendement représentant la fraction de la masse que ce parent utilise pour former une étoile unique. Ce rendement est défini plus précisément au Chapitre V où il est utilisé.

Densité stellaire

À partir de cette échelle d'arrêt R_{stop} , il est aussi possible de calculer la densité d'étoiles au sein d'une région de taille donnée. Dans notre modèle, cette densité stellaire n_* correspond au nombre d'étoiles contenues dans une structure de taille R_0 par unité de volume :

$$\langle n_* \rangle_{R_0} = a_G \frac{\langle N(R_{\text{stop}}) \rangle_{R_0}}{R_0^3} \quad (\text{II.27})$$

Soit :

$$\langle n_* \rangle_{R_0} = a_G \frac{N_0}{R_0^3} \exp \left[\int_{R_{\text{stop}}}^{R_0} \phi(R') d \ln R' \right] \quad (\text{II.28})$$

Ici, la taille de la structure R_0 peut être considérée comme une variable de telle sorte qu'on puisse calculer la densité stellaire pour n'importe quelle région de taille R_0 , à partir du taux de fragmentation local à cette région. Cette grandeur permet de quantifier la multiplicité des étoiles nouvellement formées au sein d'une région par rapport à la taille de cette région.

3 Influences géométriques sur le taux de fragmentation

3.1 Probabilité de fragmenter

Bien qu'il soit possible de faire correspondre le caractère discret de la fragmentation avec les propriétés continues d'un nuage, la question se pose de savoir quel échantillonnage en niveaux l est nécessaire pour avoir un suivi convenable de la fragmentation le long

d'une gamme continue d'échelles spatiales. Le nombre maximal de fragments enfants de taille R_{l+1} intercalables à l'intérieur d'un fragment parent de taille R_l est limité par le volume de remplissage du parent. En effet, un parent de taille R_l n'est pas en mesure de contenir un trop grand nombre d'enfants de taille R_{l+1} , enclavés dans ses supposées bordures, à moins que ceux-ci ne se chevauchent voire ne fusionnent. Ainsi, pour permettre l'existence de fragments enfants distincts entre deux niveaux successifs, une étape de fragmentation ne peut être déclenchée que pour des rapports d'échelle $r = \frac{R_l}{R_{l+1}}$ suffisamment grands. Si on suppose que les fragments produits ne s'entrecoupent pas, le nombre maximal d'enfants $n_{l,\max}$ pouvant exister au sein d'un fragment parent, en trois dimensions, est le rapport entre le volume du parent à l'échelle R_l et le volume de ses enfants à l'échelle R_{l+1} :

$$n_{l,\max} = r^3 \quad (\text{II.29})$$

Le rapport d'échelle minimal r_0 au-delà duquel un parent peut se scinder en deux et contenir au moins $n_{l,\max} = 2$ enfants est donc $r_0 = 2^{1/3}$. Cette capacité de se scinder en deux ou non décrit une étape de fragmentation, car c'est à ce moment là qu'un fragment supplémentaire peut, ou non, apparaître. Sous cette contrainte, on considère qu'entre deux échelles successives, une seule étape de fragmentation peut potentiellement avoir lieu pour chaque parent. Un fragment parent engendre alors deux enfants avec une probabilité p_l , et s'effondre en un enfant unique avec une probabilité $1 - p_l$. Par conséquent, le nombre moyen de fragments enfants produits par un parent est :

$$\bar{n}_l = 1 + p_l \quad (\text{II.30})$$

Or, le nombre de fragments enfants moyen $\langle \bar{n}_l \rangle_{R_0}$ produit par l'ensemble des parents dans une région de taille R_0 est donné par l'équation II.15. En considérant le taux de fragmentation local au parent de taille R_l , on ne moyenne que sur un seul élément qui est le parent lui-même et on a $\langle \bar{n}_l \rangle_{R_l} = \bar{n}_l$, soit :

$$\bar{n}_l = \exp \left[\int_{R_{l+1}}^{R_l} \phi(R') d \ln R' \right] \quad (\text{II.31})$$

Si on considère que la variation de ϕ est faible dans l'intervalle $[R_l, R_{l+1}]$ défini par le rapport d'échelle r , on peut estimer que ϕ est une constante et on peut écrire :

$$\bar{n}_l = r^\phi \quad (\text{II.32})$$

Toujours sous l'hypothèse $\phi = \text{constante}$, la probabilité $\mathcal{P}(n = 1; r_0)$ de former un enfant unique après contraction d'un facteur $r_0 = 2^{1/3}$ s'exprime comme :

$$\mathcal{P}(n = 1; r_0) = 1 - p_l = 2 - r_0^\phi \quad (\text{II.33})$$

Entre deux échelles caractérisées par leur rapport d'échelle r , le nombre d'évènements de fragmentation possible x est simplement le nombre de contractions r_0 qu'il est possible d'opérer sur le fragment parent pour atteindre l'échelle R_l , soit $r_0^x = r$. Ainsi, la probabilité de ne former qu'un seul enfant entre ces deux échelles est :

$$\mathcal{P}(n = 1, r) = \mathcal{P}(n = 1, r_0)^x \quad (\text{II.34})$$

Soit finalement :

$$\mathcal{P}(n = 1, r) = \left(2 - r_0^\phi\right)^{\frac{\ln r}{\ln r_0}} \quad (\text{II.35})$$

En admettant que le parent s'effondre, il est alors possible de dériver la probabilité que le fragment parent se subdivise au moins une fois comme étant simplement $\mathcal{P}(n \neq 1) = 1 - \mathcal{P}(n = 1)$.

3.2 Échantillonnage des niveaux de fragmentation

Comme le taux de fragmentation est une observable, il est intéressant de discuter de l'échantillonnage requis en terme d'échelles spatiales pour mesurer efficacement sa valeur numérique et avoir un suivi convenable de ses variations dans un intervalle donné. Précédemment, nous avons calculé le rapport d'échelle minimal $r_0 = 2^{1/3}$ à partir duquel un parent pouvait se subdiviser en au moins deux fragments, indépendamment de la valeur numérique du taux de fragmentation. En comparant l'équation II.32 avec l'équation II.29, on déduit qu'un taux de fragmentation $\phi = 3$ correspond à un remplissage total du fragment parent par ses enfants : les fragments produits occupent la totalité de l'espace disponible dans le volume qui les a engendré. Un taux de fragmentation $\phi > 3$ n'aurait donc pas de sens. Ainsi, avec $\phi = 3$, un parent se subdivise après chaque contraction d'un facteur r_0 . Avec un tel rapport d'échelle, peu importe la valeur numérique d'un taux de fragmentation $\phi \leq 3$, il sera toujours possible de discerner les échelles où une subdivision a lieu, et donc de suivre convenablement l'évolution du taux de fragmentation le long de n'importe quel domaine d'échelles spatiales.

En revanche, si le rapport d'échelle r entre deux niveaux est trop grand par rapport au nombre de subdivisions qui ont lieu entre ces échelles, alors il sera difficile de caractériser les variations potentielles de $\phi(R)$ et on ne pourra observer qu'un taux de fragmentation moyenné sur les échelles intermédiaires qui contiennent l'information sur les variations

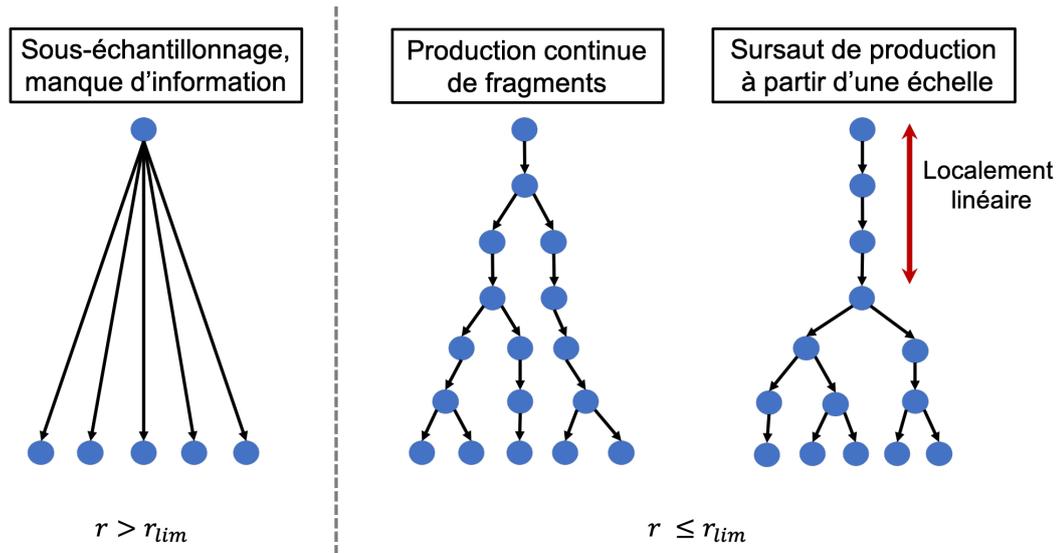


FIGURE II.6 – Conséquences d’un sous-échantillonnage des échelles spatiales sur le suivi de la production des fragments. Un sous-échantillonnage des échelles spatiales ne permet pas d’évaluer localement la production des fragments. Ce manque d’information ne permet pas de rendre compte des variations locales du taux de fragmentation ϕ entre les échelles initiales et finales dès lors que le rapport d’échelle r entre deux niveaux successifs excède une limite $r_{lim} = 2^{1/\phi}$.

réelles de $\phi(R)$. Pour pouvoir déterminer au mieux ces variations, il apparaît raisonnable de discerner les échelles dans lesquelles une subdivision binaire a lieu. En reprenant l’équation II.32, deux enfants sont produits en moyenne pour des rapports d’échelle :

$$r_{lim} = 2^{1/\phi} \quad (\text{II.36})$$

Les conséquences d’un échantillonnage tel que $r < r_{lim}$ ne sont pas délétères car cela impliquerait simplement que la structure multi-échelle engendrée par le processus de fragmentation présenterait localement, sur un certain intervalle d’échelles spatiales, des propriétés de structure linéaire (systématiquement un seul fragment produit à chaque niveau de fragmentation, comme montré dans la Figure II.6), ce qui induit simplement une redondance de l’information entre les niveaux. En revanche, un sous-échantillonnage tel que $r > r_{lim}$ implique des conséquences plus néfastes si on cherche à tracer les variations réelles de $\phi(R)$ le long des échelles spatiales tel qu’illustré dans la Figure II.6. Si $r > r_{lim}$, le nombre moyen d’enfants engendrés entre deux niveaux \bar{n}_l est supérieur à 2, et l’information du moment où une subdivision a lieu est perdue de telle sorte qu’il est difficile de savoir si la production des fragments enfants arrive de manière continue le long des échelles spatiales, ou si cette production surgit dans un domaine spatial très restreint entre l’échelle du parent et l’échelle des enfants (voir Figure II.6).

En utilisant des données réelles, l'échantillonnage en échelles spatiales peut être défini par les résolutions disponibles d'un jeu de données. L'échantillonnage optimal dépend de l'amplitude des variations de $\phi(R)$ sur un l'intervalle défini par le rapport d'échelle r : sans *a priori* sur la forme de la fonction $\phi(R)$, il est préférable de minimiser au maximum les rapports d'échelle entre les jeux de données. S'il existe un *a priori* sur la capacité de fragmenter d'une région connaissant les variations de $\phi(R)$, on peut sélectionner des données dont les rapports d'échelle sont ajustés en conséquence. Cet *a priori* peut être calculé comme nous le verrons dans le Chapitre III consacré à la relation entre le taux de fragmentation et la physique du milieu considéré.

3.3 Erreur associée à la géométrie des fragments

Précédemment, nous avons implicitement supposé que les fragments n'avaient pas de forme particulière de telle sorte qu'il était toujours possible de trouver une manière de placer l'intégralité des enfants à l'intérieur de leur parent. Si les fragments enfants sont caractérisés par des géométries bien spécifiques, alors il est possible que l'un, ou plusieurs d'entre eux ne puissent apparaître car le parent ne contiendrait plus l'espace nécessaire pour les accueillir. En guise d'exemple, considérons le problème de remplissage d'une sphère par d'autres sphères dont les rayons sont $r = 2$ fois plus petits. En dehors de toute considération sur la forme géométrique des fragments, le nombre maximal d'objets intercalables dans un parent dans ces conditions est donné par l'équation II.29 avec $n_{l,\max} = 8$. Cependant, il apparaît rapidement que ces 8 objets sphériques ne pourront pas tous être contenus dans la sphère d'origine. Dans ce cas précis, il n'est en effet pas possible de placer plus de deux sphères² au sein du parent, laissant 75% du volume de ce parent vide de tout fragment. Or, le taux de fragmentation ϕ dépend de la quantité d'enfants produits par les fragments parents. Si le fragment parent engendre moins d'enfants en raison d'une forme géométrique particulière, le taux de fragmentation effectif mesuré s'en retrouverait diminué. En outre, le taux de fragmentation peut être mesuré comme la variation du nombre total de fragments entre deux niveaux :

$$\phi_{\text{mes}} = - \frac{\ln N - \ln N_0}{\ln R - \ln R_0} \quad (\text{II.37})$$

Ce qui revient à calculer, en considérant $N_0 = 1$ fragment parent et un rapport d'échelle $r = \frac{R_0}{R}$:

$$\phi_{\text{mes}} = \frac{\ln N}{\ln r} \quad (\text{II.38})$$

Nous verrons dans le Chapitre IV dédié à une application avec des données d'obser-

2. Une belle expérience à reproduire à la maison.

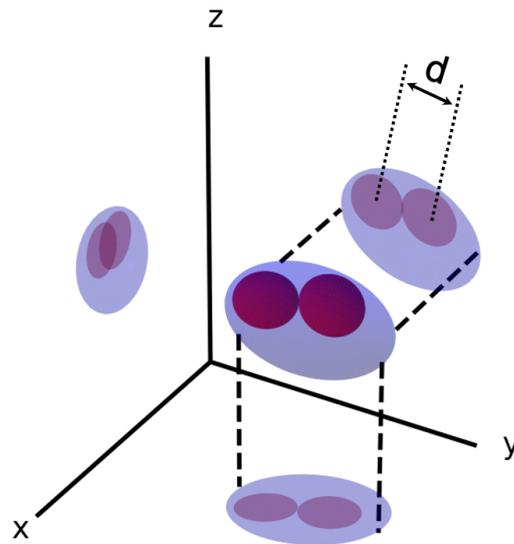


FIGURE II.7 – Projection d’ellipsoïdes dans les plans en deux dimensions et proximité des ellipses résultantes. Les ellipsoïdes parent et enfants sont représentés respectivement en bleu et rouge au milieu. Ces ellipsoïdes sont projetés sur les trois plans composant l’espace 3D. Bien que les enfants ne se recoupent pas, leurs ombres en deux dimensions peuvent se chevaucher et fusionner si leur distance centre-à-centre d devient suffisamment petite.

vation que les fragments que l’on extrait sont caractérisés en deux dimensions par des ellipses dont les rapports d’échelle r sont de l’ordre de $r \sim 1.5$. De plus, l’hypothèse d’inclusion parfaite des fragments enfants dans leur parent n’est pas nécessairement valide compte tenu des biais associés à l’extraction des fragments dans les données d’observation et à la difficulté de définir leur contour. En ce sens, nous pouvons relaxer la contrainte provoquée par la forme des fragments en autorisant un enfant à exister par delà les limites géométriques de son parent. Pour cela, définissons par α la portion du volume d’un enfant incluse dans son parent. Pour conserver une certaine proximité entre l’enfant et son parent, nous considérons au Chapitre IV $\alpha > 0.75$, sachant que de manière général, $0 < \alpha \leq 1$.

En trois dimensions

Dans un premier temps, cherchons une estimation de l’erreur géométrique occasionnée par des fragments ellipsoïdaux en trois dimensions sur le taux de fragmentation mesuré. Pour cela, générons des ellipsoïdes parents dans un espace à trois dimensions et plaçons aléatoirement des ellipsoïdes enfants à l’intérieur. Un exemple de tirage parent / enfants dans un espace à trois dimensions est exposé dans la Figure II.7. En supposant $\phi = \text{constante}$, le nombre d’enfants à placer est déterminé par l’équation II.32 qui donne la moyenne du nombre de fragments produits. Ainsi, un enfant doit être placé à l’intérieur

d'un parent en tenant compte que :

1. un parent contient un nombre entier de fragments ;
2. en moyenne un parent doit contenir r^ϕ enfants.

Pour tester les limites de la contenance d'un fragment parent en fonction du taux de fragmentation ϕ et du rapport d'échelle r , on peut simplement choisir de sélectionner le nombre d'enfants selon la règle suivante. En notant respectivement $\lfloor x \rfloor$ et $\{x\}$ les fonctions partie entière et partie fractionnaire de x , un fragment parent peut au maximum former un nombre $\lfloor r^\phi \rfloor + 1$ d'enfants avec la probabilité $1 - \{r^\phi\}$; et au minimum en former un nombre $\lfloor r^\phi \rfloor$ avec la probabilité $\{r^\phi\}$. La procédure de génération de ces ellipsoïdes est détaillée en Annexe A.

L'erreur relative entre le taux de fragmentation mesuré à trois dimensions $\phi_{\text{mes},3D}$ par rapport au taux de fragmentation attendu ϕ définissant le nombre de fragment à placer, est alors :

$$\frac{\Delta\phi_{\text{mes},3D}}{\phi} = \frac{\phi_{\text{mes},3D} - \phi}{\phi} \quad (\text{II.39})$$

Pour estimer cette erreur, on adopte une approche Monte-Carlo : un total de 1000 fragments parents fragmentent aléatoirement en étant soumis à un taux de fragmentation ϕ . On mesure ensuite le nombre $N_{\text{mes},3D}$ d'enfants qui ont réussi à se former malgré leur forme ellipsoïdale et on compare le taux de fragmentation correspondant $\phi_{\text{mes},3D}$ avec le taux de fragmentation ϕ que l'on devrait obtenir. Le résultat de ce test est donné dans la Figure II.8 pour des rapports d'échelle $r = 2^{1/3}, 1.5, 2.0$ et pour trois différents cas de portion incluse $\alpha = 1.0, 0.75, 0.5$. Dans le cadre de géométries ellipsoïdales, un échantillonnage de $r = r_0 = 2^{1/3}$ est sous optimal pour pouvoir mesurer convenablement le taux de fragmentation. En revanche, un échantillonnage de $r = 1.5$ commence à être convenable si on considère que la portion de volume incluse d'un enfant $\alpha < 0.75$ avec une erreur relative sur le taux de fragmentation mesuré de -20%. Cela signifie par exemple que pour un taux de fragmentation mesuré en trois dimensions $\phi_{\text{mes},3D} = 1$, le taux de fragmentation réel est de $\phi = 1.25$. Dans ces conditions, on peut aussi estimer l'échantillonnage requis pour mesurer une certaine valeur du taux de fragmentation. Par exemple, pour espérer mesurer un taux réel $\phi = 1$, il est préférable d'opter pour un échantillonnage compris entre $1.5 < r < 2.0$ si on considère $\alpha = 0.75$. Cette étude nous montre que la géométrie des fragments contraint et influe énormément sur la mesure du taux de fragmentation local $\phi(R)$ en introduisant une erreur systématique qui dépend non seulement de l'échantillonnage choisi mais aussi de la manière dont se recouvrent les fragments le long des échelles, autrement dit de la manière dont sont extraits leurs contours sur une carte d'observation donnée.

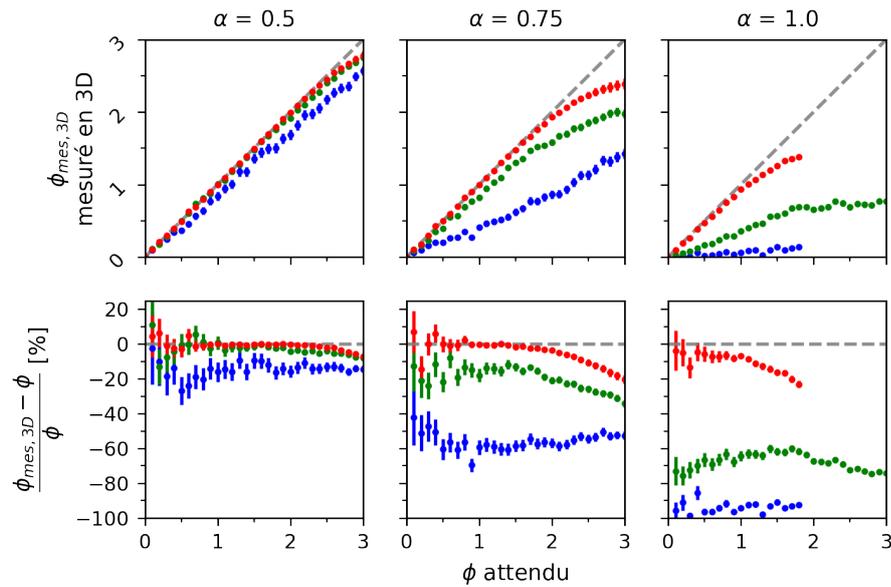


FIGURE II.8 – Erreur associée à la géométrie ellipsoïdale des fragments sur la mesure du taux de fragmentation en trois dimensions. Les points bleus, verts et rouges représentent respectivement les rapports d'échelle $r = 2^{1/3}, 1.5, 2.0$. Chaque colonne représente une portion minimale de volume incluse α tolérée, entre un enfant et son parent. La ligne du haut représente le taux de fragmentation mesuré $\phi_{\text{mes},3D}$ en fonction du taux de fragmentation ϕ utilisé pour généré les enfants. La ligne du bas représente la variation relative associée à la mesure du taux de fragmentation. La forme géométrique des fragments engendre une erreur systématique sur la mesure du taux de fragmentation.

En deux dimensions

Lorsque l'on observe un nuage moléculaire avec un télescope, on a seulement accès à la projection en deux dimensions de ce nuage sur le plan céleste. Deux fragments alignés sur la ligne de visée apparaîtront donc comme un seul et unique fragment. On s'attendrait alors à ce que le nombre de fragments détectés soit aussi influencé et sous-estimé par rapport au nombre de fragments réel. À partir du même modèle génératif que précédemment, cherchons à estimer l'erreur qu'introduit cette projection sur le taux de fragmentation mesuré en deux dimensions $\phi_{\text{mes},2D}$ par rapport au taux de fragmentation réel ϕ . Pour cela, les volumes qui décrivent les ellipsoïdes générés précédemment sont projetés sur un plan en deux dimensions, dont il résulte des surfaces elliptiques (voir par exemple dans la Figure II.7). L'orientation des ellipsoïdes dans l'espace étant isotrope, le plan de projection n'est pas important, et l'orientation spatiale des ellipses résultantes est également isotrope. L'Annexe A décrit plus précisément les propriétés géométriques des ellipses engendrées.

Ces ellipses sont ensuite filtrées en fonction de leur séparation centre-à-centre notée d . Pour obtenir une estimation de ce critère de séparation, supposons que les fragments

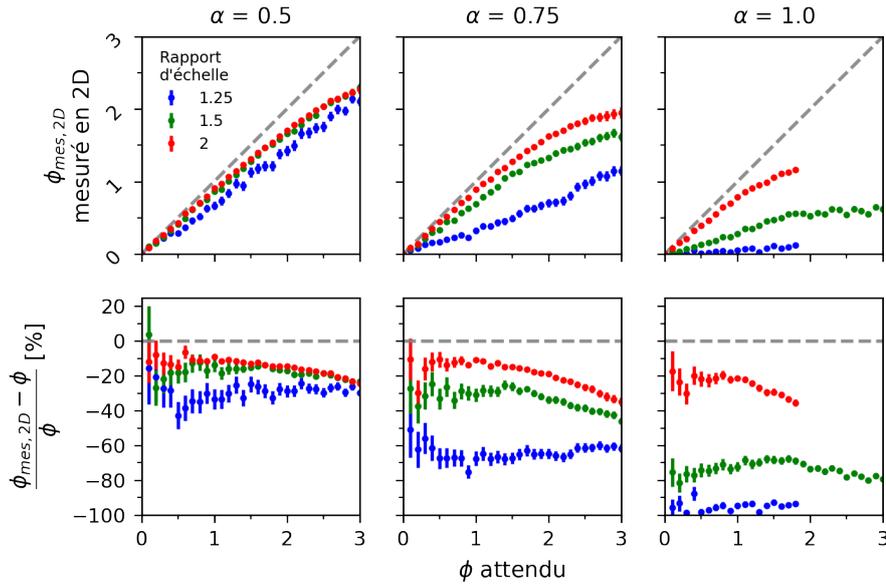


FIGURE II.9 – Erreur associée à la géométrie ellipsoïdale des fragments projetés en deux dimensions sur la mesure du taux de fragmentation. Même légende que la Figure II.8 à ceci près que les ellipsoïdes ont été projeté sur un plan en deux dimensions pour mesurer le taux de fragmentation associé $\phi_{mes,2D}$. Cette projection en deux dimensions engendre une erreur supplémentaire sur la mesure du taux de fragmentation.

sont extraits d'une carte d'observation, avec des profils d'émission gaussiens en deux dimensions. Un profil gaussien s'étendant techniquement à l'infini, il est nécessaire de définir une limite finie qui sera associée à la taille d'un fragment. Cette limite qui définit le bord du fragment doit englober la quasi-totalité de son matériau. Considérons alors que la taille caractéristique R d'une ellipse correspond à son extension à 2σ de ce profil, dont la largeur à mi-hauteur est associée à la résolution θ de la carte dont ils sont extraits. On peut alors relier la taille d'un fragment à sa largeur à mi-hauteur θ par :

$$\theta = \sqrt{2 \ln(2)} R \quad (\text{II.40})$$

Or, si la distance d entre deux fragments extraits était plus petite que la résolution θ de la carte dont ils sont originaires, ces fragments ne seraient pas distinguables l'un de l'autre. Ainsi, il est possible de différencier les deux ellipses si :

$$d > \theta = \sqrt{2 \ln(2)} R \quad (\text{II.41})$$

Connaissant la taille caractéristique R des ellipses que nous générons, on peut mesurer le taux de fragmentation en deux dimensions $\phi_{mes,2D}$ en comptant le nombre d'ellipses enfants après filtrage des séparations et en utilisant l'équation II.38.

PARTIE 3. INFLUENCES GÉOMÉTRIQUES SUR LE TAUX DE FRAGMENTATION

Le résultat de cette étude est donné Figure II.9 dans les mêmes conditions que le cas en trois dimensions, où l'on a simplement repris les mêmes objets afin de les projeter sur un plan. L'effet de la projection en deux dimensions vient ajouter une erreur supplémentaire sur la mesure du taux de fragmentation. En effet, le placement des fragments enfants est contraint non seulement par leur géométrie en trois dimensions, mais aussi par la capacité de détecter ou non deux fragments proches. Cette erreur supplémentaire est systématiquement de l'ordre de -10% par rapport à l'erreur sur une mesure en trois dimensions. Cette étude se base cependant sur une fragmentation isotrope, c'est-à-dire qu'on suppose qu'il n'est pas plus probable qu'un fragment se forme derrière ou devant un enfant déjà existant. L'erreur relative calculée dans cette partie permet d'apporter une correction sur la mesure du taux de fragmentation en considérant les biais géométriques associés aux effets de projection, ou à la définition des contours des fragments extraits dans des données réelles.

Chapitre III

Implémentation de modèles physiques

Sommaire

1	Approximation locale et invariance d'échelle	61
1.1	Relations d'échelle	61
1.2	Dégénérescence entre les paramètres du modèle	62
1.3	Régimes de fragmentation	64
2	La théorie gravo-turbulente	70
2.1	Contexte théorique	70
2.2	Relation d'échelle entre la dispersion des vitesses et la taille	72
2.3	Choix de la distribution normale des fluctuations en densité	74
2.4	Seuil d'effondrement	75
3	Application à la théorie gravo-turbulente	75
3.1	Expression du taux de fragmentation	75
3.2	Cas limites d'un fluide subsonique et supersonique	78
3.3	Transition entre les régimes de fragmentation dans le cas subsonique	80
3.4	Effondrement quasi-statique	82
4	Propriétés des fragments en fonction de leur taille	83
4.1	Calcul du taux de fragmentation	83
4.2	Evolution du taux de fragmentation	85
4.3	Nombre total de fragments produits	86
4.4	Masse des fragments	88

Le modèle de fragmentation hiérarchique introduit dans le chapitre précédent reste très générique et ne témoigne pas des propriétés physiques des nuages moléculaires, ni ne reconnaît sa capacité à fragmenter ou non sur certaines échelles spatiales privilégiées.

Or, c'est bien la distinction des différents processus physiques entre les échelles spatiales qui permet de décrire la structure multi-échelle des nuages, dont la connaissance est essentielle pour caractériser la formation des étoiles dans ce milieu. Les phénomènes physiques qui régissent l'évolution et la structure des nuages, et par extension la formation des étoiles, sont complexes et étroitement couplés. Usuellement, on suppose que le matériau qui compose les nuages est modélisable par un fluide dont l'écoulement est décrit par les équations, non linéaires, de la magnéto-hydrodynamique (MHD). Nous ne rappellerons pas explicitement ces équations ici car elles n'ont pas d'importance pour la suite de ce chapitre, mais leur mention reste importante du fait de leur utilisation fréquente pour décrire la physique des nuages moléculaires. Par ailleurs, l'intérêt de développer des modèles alternatifs vient du fait que les équations MHD, bien qu'*a priori* exactes, ne sont pas analytiquement solvables ; à moins qu'une âme charitable ne se risque à résoudre l'équation de Navier-Stokes faisant partie des sept¹ problèmes du millénaire dont la solution est grassement rémunérée. Plus spécifiquement, si on souhaitait décrire totalement le comportement de ce fluide, il faudrait prendre en compte les phénomènes de turbulence, la gravité, le champ magnétique, les différentes chaînes de réaction chimiques, le rayonnement des particules, la rétro-action des étoiles sur le milieu, *et caetera*. Bien qu'elles ne fournissent pas de solution analytique à ce problème, il existe un ensemble de simulations numériques intégrant une partie de la physique impliquée dans les nuages et qui permettent de tracer leur évolution.

Malgré l'existence de tous ces processus agissant au sein des nuages, on observe une récurrence voire une omni-présence des lois d'invariance d'échelle dans ce milieu. On peut citer par exemple les célèbres lois empiriques de Larson ([Larson 1981](#)) qui relie la dispersion des vitesses du fluide ΔV , la masse M d'un nuage virialisé² et la taille R de celui-ci ; ainsi que la densité particulaire $\langle n_{H_2} \rangle$ avec la taille R :

$$\begin{aligned}\Delta V &\propto R^{0.38} \\ \Delta V &\propto M^{0.20} \\ \langle n_{H_2} \rangle &\propto R^{-1.1}\end{aligned}$$

On peut aussi prendre pour exemple la distribution en masse des étoiles ou des cœurs pré-stellaires que nous aborderons plus précisément au Chapitre V et qui manifestent une décroissance en loi de puissance pour le domaine des grandes masses.

1. Six désormais car par conjecture : si c'est rond, c'est Poincaré.

2. Le terme virialisé réfère ici à un nuage ayant atteint un état de quasi-équilibre entre ses forces de pression interne et la force d'attraction gravitationnelle induite par sa propre masse.

Ces propriétés récurrentes d'invariance d'échelle révèlent la nature auto-similaire des nuages moléculaires et expriment le fait que pour n'importe quelle échelle considérée, le milieu est soumis aux mêmes phénomènes physique qui engendrent, toute proportion gardée, les mêmes conséquences. Dans le cas de la fragmentation qui nous intéresse ici, cela signifie que peu importe l'échelle spatiale à laquelle on observe un système ou une région du nuage, ce système formera toujours le même nombre de fragments à une échelle donnée. Ainsi, si une région à un niveau R_l se subdivise en trois fragments au niveau $R_{l+1} = \frac{R_l}{r}$ où $r > 1$, chacun de ces trois fragments se subdivisent à leur tour en trois autres fragments à l'échelle $R_{l+2} = \frac{R_{l+1}}{r}$. Cette conception décrit alors une hiérarchie parfaite dans la fragmentation, modélisable par un taux de fragmentation ϕ constant, soit indépendant de l'échelle spatiale considérée : on aurait alors une loi de puissance du type $N \propto R^{-\phi}$ pour déterminer le nombre N de fragments produits. Dans ce chapitre nous verrons pour quelles gammes d'échelles spatiales la condition $\phi = \text{constante}$ est satisfaite, autrement dit sur quelles gammes d'échelles le nuage peut effectivement être considéré comme auto-similaire.

Dans la partie 1, nous utiliserons les conditions d'existence des différents fragments enfants pour définir différents régimes de fragmentation en fonction de l'espace de variation du taux de fragmentation ϕ et du taux d'injection de masse ξ . Parmi ces régimes on compte un régime évanescent dans lequel un fragment enfant se dissipe et ne peut exister, un régime de fragmentation monolithique où le fragment parent s'effondre en un enfant unique, et un régime hiérarchique dans lequel le parent se subdivise en plusieurs morceaux. Nous introduirons ensuite dans la partie 2 la théorie dite de la gravo-turbulence qui servira de fer de lance pour les prochaines parties de ce chapitre pour :

1. Déterminer les conditions d'entrée dans les différents régimes de fragmentation ;
2. Prédire des échelles typiques de transition entre ces différents régimes ;
3. Délimiter les gammes d'échelles pour lesquelles la structure du milieu interstellaire peut être considérée comme auto-similaire.

Pour cette approche nous négligerons tout effet additionnel du champ magnétique ainsi que les effets de rétro-action des étoiles sur leur environnement à plus grande échelle et nous nous focaliserons uniquement sur une fragmentation causée par la turbulence et/ou par l'effondrement global du milieu.

1 Approximation locale et invariance d'échelle

1.1 Relations d'échelle

Supposons que les variations locales du taux de fragmentation $\phi(R)$ et du taux d'injection de masse $\xi(R)$ soient faibles dans un intervalle de tailles donné. On peut alors faire l'approximation que les taux ϕ et ξ sont constants sur cet intervalle. Les équations II.14 et II.24 qui régissent respectivement le nombre moyen de fragments $\langle N(R) \rangle$ produits et leur masse moyenne $\langle M(R) \rangle$ se simplifient alors :

$$\langle N \rangle = N_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-\phi} \quad (\text{III.1})$$

$$\langle M \rangle = M_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\phi-\xi} \quad (\text{III.2})$$

De même, la densité moyenne des fragments $\langle \rho(R) \rangle$ donnée par l'équation II.26 devient :

$$\langle \rho \rangle = \rho_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\phi-\xi-3} \quad (\text{III.3})$$

Il apparaît clairement ici qu'en moyenne, la densité des fragments produits augmente au cours de la fragmentation à plus petite échelle si l'exposant $\phi - \xi - 3 < 0$. Comme nous le verrons par la suite, cette condition décrit un mode de fragmentation hiérarchique dans lequel les fragments produits sont gravitationnellement instables et continuent de se sous-fragments.

Cette approximation est présentée comme invariante d'échelle du fait des relations en loi de puissance qui en découlent. Elle a pour conséquence que chaque fragment parent est soumis à la même productivité et le même rendement quelle que soit sa taille. Dans cette approximation, seul compte le rapport d'échelle r entre la taille d'un fragment parent R_0 et la taille de ses enfants à une échelle quelconque R , du moment que R_0 et R sont contenus dans le domaine de tailles qui délimite la validité de cette approximation des faibles fluctuations. Il est à noter que ce domaine de validité peut être plus ou moins large en fonction des variations réelles des taux $\phi(R)$ et $\xi(R)$.

Cette approximation permet de rendre compte, à moindre coût, de l'auto-similarité pré-supposée des nuages. Cependant, les relations d'échelle qui caractérisent la fragmentation du milieu nous imposent une pérennité du processus de subdivision pour des échelles infiniment petites, si $\phi > 0$. Dans ce cas, il est nécessaire de fixer *a posteriori* une

échelle d'arrêt R_{stop} fixant le moment où un parent ne se fragmente plus hiérarchiquement en plusieurs enfants, mais s'effondre d'un bloc en une étoile unique. Nous verrons dans la partie 4.2 que cette échelle d'arrêt apparaît naturellement lorsque le modèle de fragmentation s'inscrit dans un cadre théorique contenant plus de physique.

1.2 Dégénérescence entre les paramètres du modèle

L'avantage majeur de l'approximation en invariance d'échelle réside dans la facilité avec laquelle on peut dégager des comportements caractéristiques sur le processus de fragmentation. Il est en effet possible de mieux comprendre l'interdépendance des taux de fragmentation ϕ et de masse injectée ξ dans la formation des fragments finaux. La relation d'échelle sur la masse, équation III.2, nous informe que différents couples $(\phi ; \xi)$ peuvent conduire à la formation de fragments de même masse, avec des tailles R potentiellement différentes. Ainsi, un fragment parent peut produire des enfants dont la masse moyenne est identique à la masse des enfants d'un autre fragment parent similaire qui serait soumis à d'autres conditions de fragmentation. Cette redondance en masse se produit si $\langle M(R) \rangle$ est constante, ce qui peut être caractérisé de manière équivalente en réécrivant l'équation III.2 sous la forme :

$$\frac{\langle M(R) \rangle}{M_0} = \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\phi - \xi} \quad (\text{III.4})$$

Ainsi, deux fragments parentaux de taille R_0 , et de même masse M_0 , soumis à des taux ϕ et ξ différents, peuvent engendrer des enfants de même masse mais de taille R , et donc de densité ρ différentes. La Figure III.1 représente les iso-masses pour lesquelles l'équation précédente III.4 est vérifiée. On distingue trois cas particuliers pour mieux appréhender l'espace que définit cette dégénérescence entre ϕ , ξ et la taille R des fragments produits : les cas R constant, ϕ constant et le cas ξ constant.

Cas où R est constant

Si les fragments enfants produits ont la même taille R , alors l'équation III.4 devient :

$$\phi - \xi = \frac{\ln \frac{\langle M(R) \rangle}{M_0}}{\ln \left(\frac{R}{R_0} \right)} \quad (\text{III.5})$$

En conséquence, deux parents de même masse M_0 engendrent en moyenne des enfants de même masse et de même taille pour tout couple $(\phi ; \xi)$ sous réserve que leur différence $\phi - \xi$ soit égale. La relation liant le taux de fragmentation et le taux d'injection de masse

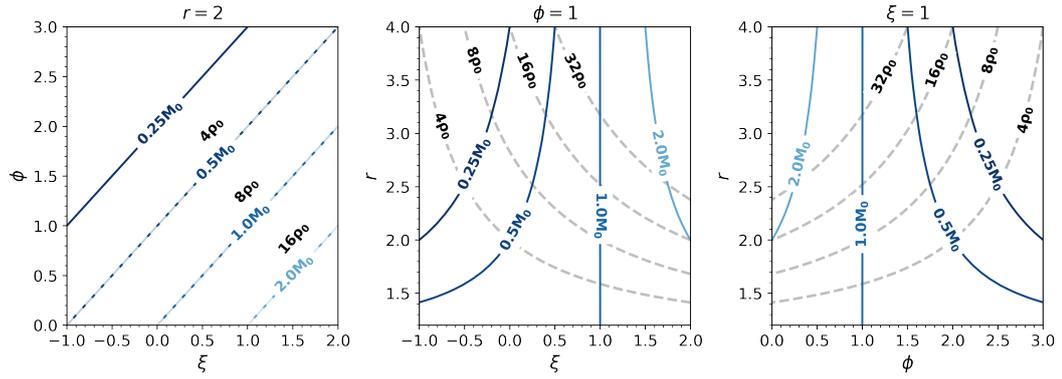


FIGURE III.1 – Dégénérescence entre le taux de fragmentation ϕ , le taux d'injection de masse aux fragment ξ et la taille R des fragments produits. Les lignes pleines montres les solutions iso-masses pour lesquelles l'équation III.4 est constante. Les traits pointillés indiquent les contours d'iso-densités associées. Chaque cadran représente une projection sur un plan de l'espace des variables en considérant comme constant, de la gauche vers la droite $r = \frac{R_0}{R}$, ϕ et ξ .

aux fragments est alors affine, comme on peut le voir dans le cadran gauche de la Figure III.1. Cette relation signifie que, du point de vue de la masse des fragments produits, injecter une quantité plus importante de masse aux enfants lors de leur formation est équivalent à produire moins de fragments. En effet, plus un parent va fragmenter et être productif, plus il devra partitionner sa masse en un nombre élevé d'enfants, ce qui revient à attribuer individuellement à chaque enfant une portion de masse moins élevée.

Cas où soit ϕ soit ξ est constant

Les cas de figure où ϕ et ξ sont constants se ressemblent étant donné que ces deux taux ont un effet opposé sur l'évolution de la masse des fragments : dans l'équation associée (équation III.4), la taille R est élevée à la puissance négative de ξ mais à la puissance positive de ϕ . On cherche donc ici les solutions telles que :

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\phi-\xi} = \text{constante} \quad (\text{III.6})$$

Ces solutions sont représentées dans la Figure III.1 respectivement dans les cadrans du milieu pour ϕ constant et de droite pour ξ constant.

Supposons que le taux d'injection de masse ξ soit constant (cas du cadran de droite de la Figure III.1) et que $\phi - \xi < 0$. Dans ce cas, regardons pour quelles valeurs de ϕ et R deux fragments parents de même masse forment en moyenne des enfants de même masse, sachant que $\frac{R}{R_0} < 1$. Si ϕ diminue, la quantité $\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\phi-\xi}$ diminue et il faut que R augmente

pour compenser cette réduction. Ainsi, si $\phi - \xi < 0$, le parent de plus haute productivité (donc de plus haut ϕ) formera nécessairement des fragments plus petits et leur densité ρ sera plus élevée. À l'inverse, si $\phi - \xi > 0$, pour compenser une augmentation de ϕ il faut que R augmente également. Ainsi, si $\phi - \xi > 0$, le parent de plus haute productivité formera nécessairement des fragments plus grands, et donc moins denses. De plus, si on considère que les fragments produits ne se subdivisent plus, la densité stellaire n_* du parent de plus haut taux de fragmentation est plus importante car ces objets fragmentent en un plus grand nombre d'étoiles dans le même volume.

De la même manière, à taux de fragmentation ϕ constant (cas du cadran intermédiaire de la Figure III.1), si $\phi - \xi < 0$, le parent ayant le rendement massique le plus faible (donc de plus faible ξ) formera des fragments plus petits ; tandis que si $\phi - \xi > 0$, c'est le parent ayant le plus haut rendement qui formera des fragments plus petits, donc de densité ρ plus importante. Dans tout les cas, si $\xi = \phi$, alors les deux parents produisent des enfants de même masse quelque soient leurs tailles.

1.3 Régimes de fragmentation

Pour caractériser différents régimes de fragmentation, intéressons-nous aux conditions nécessaires pour qu'un parent fragmente ou en plusieurs morceaux, ou en un enfant unique, ou ne puisse plus fragmenter. Nous avons vu dans le Chapitre II qu'un fragment parent, soumis à un taux de fragmentation nul, s'effondrait pour former un seul enfant, situation associée à un effondrement dit monolithique. Cependant, il existe d'autres couples (ϕ, ξ) permettant d'imposer, dans une certaine mesure, une fragmentation monolithique. Introduisons ici le temps de chute libre t_{ff} (certainement plus connu sous le nom de temps de *free-fall*) qui représente le temps caractéristique que met un fragment à s'effondrer sous sa propre attraction gravitationnelle, sans qu'il ne soit soumis à aucune autre force qui vienne s'opposer à son effondrement, par exemple avec sa pression interne. Le fragment enfant numéro i , produit par un parent dont le temps de chute libre est $t_{\text{ff},l}$, peut exister et s'effondrer si son propre temps de chute libre $t_{\text{ff},l+1,i}$ est plus petit que celui de son parent :

$$\frac{t_{\text{ff},l+1,i}}{t_{\text{ff},l}} < 1 \quad (\text{III.7})$$

Or, pour des fragments à géométrie sphérique, le temps de chute libre dépend de leur densité ρ de telle sorte que :

$$t_{\text{ff}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}} \propto \rho^{-1/2} \quad (\text{III.8})$$

Pour que l'enfant numéro i puisse avoir une existence à l'intérieur de son parent en tant que fragment, il faut donc que la densité du parent soit plus faible que la densité du fragment enfant potentiel :

$$\frac{\rho_l}{\rho_{l+1,i}} < 1 \quad (\text{III.9})$$

Ce qui équivaut à la condition suivante pour que l'enfant numéro i existe au niveau $l+1$:

$$\frac{M_l}{M_{l+1,i}} \left(\frac{R_{l+1}}{R_l} \right)^3 < 1 \quad (\text{III.10})$$

On peut alors utiliser le fait que $M_{l+1,i} = \epsilon_l \psi_{li} M_l$, où ψ_{li} est la fraction de masse reçue par l'enfant numéro i de la part du réservoir $\epsilon_l M_l$, décrit par l'équation II.6 rappelée ici :

$$\psi_{li} = \begin{cases} \frac{\psi}{\psi + n_l - 1} & \text{si } i = 1 \\ \frac{1}{\psi + n_l - 1} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

En injectant aussi les équations II.15 et II.20 qui lient respectivement les taux de fragmentation ϕ et de masse injectée ξ avec le nombre de fragments n_l que produit un parent au prochain niveau et son efficacité massique de formation ϵ_l , nous pouvons déduire à quelle condition le fragment primaire, le plus massif, peut exister :

$$C_p = \frac{\psi - 1 + \left(\frac{R_{l+1}}{R_l} \right)^{-\phi}}{\psi} \left(\frac{R_{l+1}}{R_l} \right)^{\xi+3} < 1 \quad (\text{III.12})$$

Où ψ représente le rapport de masse entre les fragments primaire et secondaires. Avec cette description de la partition en masse entre les fragments, on suppose que les fragments secondaires sont tous de même masse. On a donc, pour les fragments secondaires moins massifs :

$$C_s = \left[\psi - 1 + \left(\frac{R_{l+1}}{R_l} \right)^{-\phi} \right] \left(\frac{R_{l+1}}{R_l} \right)^{\xi+3} < 1 \quad (\text{III.13})$$

Ces conditions sont représentées Figure III.2 pour un rapport d'échelle $r = \frac{R_0}{R} = 1.5$, pour trois différentes valeurs de ψ . Pour qu'un parent produise plusieurs enfants, il faut que les fragments primaire et secondaires coexistent de telle sorte que les deux conditions $C_p < 1$ et $C_s < 1$ soient respectées. Les fragments secondaires étant par définition

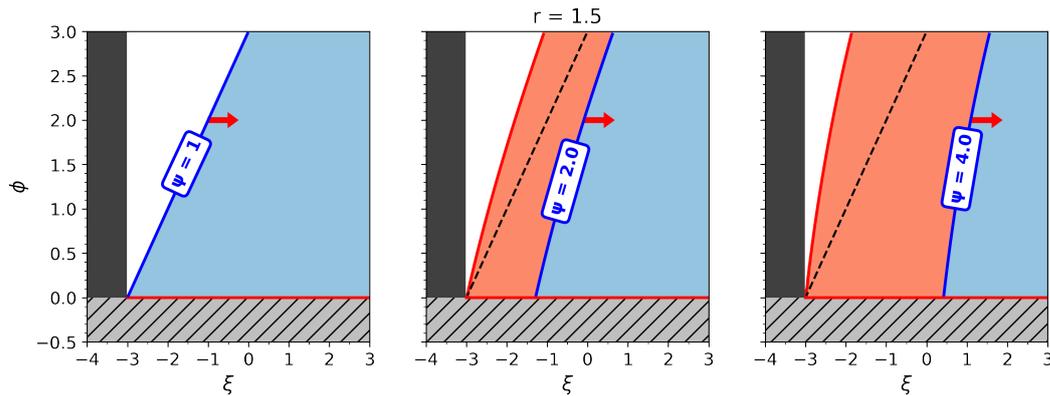


FIGURE III.2 – Conditions d’existence des fragments pour distinguer les différents régimes de fragmentation pour un rapport d’échelle $r = 1.5$ entre les tailles parent / enfants. La zone hachurée représente les valeurs de $\phi < 0$ qui ne permettent pas *a priori* une fragmentation. La zone en noir délimite la condition de dissipation $\xi < -3$. La ligne noire pointillée représente la courbe $\phi = \xi + 3$. Les zones bleue et orange représentent respectivement l’espace d’existence des fragments secondaires et primaire pour différentes valeurs de rapport de masse $\psi \geq 1$. La flèche rouge informe que la zone orange recouvre aussi la totalité de la zone bleue. Lorsque ψ augmente, l’espace délimité par $\xi + 3$ est rempli par la zone rouge. Si $\psi \rightarrow +\infty$, un unique fragment est produit et l’espace $\xi + 3$ héberge une fragmentation *a minima* monolithique.

moins denses que le primaire, si le primaire ne peut exister à une taille R donnée, alors les secondaires non plus. Il est aussi possible que le fragment primaire existe mais pas les secondaires, auquel cas un seul fragment est productible. Toutefois, s’il n’est possible de former qu’un seul fragment, la notion de fragment primaire et secondaire est absurde, et en conséquence le rapport de masse ψ tend nécessairement vers $+\infty$. En effet, si $\psi \rightarrow +\infty$, le fragment primaire reçoit la totalité de la masse du parent tandis que les secondaires n’en reçoivent pas : le fragment primaire est unique, et les secondaires n’existent pas.

On délimite ainsi plusieurs régimes de fragmentation : un régime hiérarchique dont le résultat est la production de plusieurs fragments (primaire et secondaires); un régime monolithique caractérisé par la présence d’un unique fragment (par défaut primaire); et un régime dissipatif dans lequel aucun fragment enfant n’existe à l’échelle considérée. Pour déterminer les solutions associées à ces différents régimes, regardons les cas limites des conditions de fragmentation pour un taux de fragmentation $\phi \geq 0$ qui permet une production de fragments.

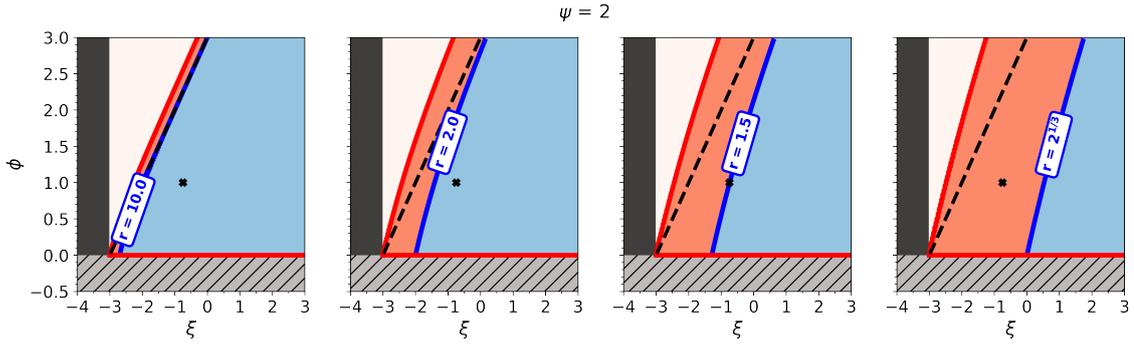


FIGURE III.3 – Conditions d’existence des fragments pour distinguer les différents régimes de fragmentation pour un rapport de masse $\psi = 2$ entre les enfants primaire / secondaires. La légende est la même que la Figure III.2 à la différence que les zones bleue et orange représentent l’espace d’existence des fragments secondaires et primaire pour différentes valeurs de rapport d’échelle $r = \frac{R_0}{R}$. La croix noire permet de visualiser pour un couple $(\phi ; \xi)$ l’existence des secondaires pour $r \leq 1.5$ mais pas pour $r > 1.5$: leur existence est donc retardée sur des échelles spatiales R plus petites.

Cas $\psi - 1 \gg \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-\phi} > 1$

Dans cette limite, on a la relation $\psi - 1 \gg n_l > 1$, soit de manière équivalente $\psi \gg n_l > 1$ et les fractions de masse ψ_{li} héritées par les fragments primaire et secondaires deviennent asymptotiquement :

$$\psi_{li} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \text{ (primaire)} \\ 0 & \text{sinon (secondaires)} \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

Cette limite est donc équivalente à supposer que le fragment primaire reçoit l’entièreté du réservoir de masse de son parent tandis que les fragments secondaires n’en reçoivent pas. Cela peut être par exemple le résultat d’une coalescence entre les fragments ou tout simplement le fait de l’effondrement du parent, sans subdivision.

En admettant que les secondaires existent en héritant malgré tout d’une faible portion de masse, les conditions d’existence de chacun des fragments deviennent :

$$\begin{cases} \xi > -3 & \text{pour le fragment primaire} \\ \psi \left(\frac{R}{R_0}\right)^{\xi+3} < 1 & \text{pour les secondaires} \end{cases}$$

Si le taux d'injection de masse $\xi = -3$, les temps de chute libre du parent et de l'enfant primaire coïncident ce qui implique un effondrement monolithique. Si $\xi < -3$ alors le fragment parent perdrait trop de masse au cours de sa contraction pour pouvoir continuer son effondrement et persister dans les échelles inférieures. Autrement dit, même si l'entièreté du réservoir disponible, *modulo* le taux d'injection de masse, était utilisé pour construire un seul et unique fragment, celui-ci ne serait pas suffisamment dense pour permettre un effondrement local dans le parent considéré, et ce, pour toute échelle $R < R_0$: on entre dans un régime dissipatif où tout fragment enfant potentiel est de nature évanescence. Pourvu que $\xi \geq -3$, il existera toujours une taille R suffisamment proche de la taille R_0 du parent pour que ce dernier se contracte et forme un enfant unique. Un effondrement monolithique est donc toujours au moins garanti si $\xi \geq -3$.

En se plaçant dans des conditions non dissipatives avec $\xi \geq -3$, et en admettant que les secondaires peuvent être formés, leur condition d'existence dépend de la taille R avec laquelle ces fragments sont produits. En outre, il existera toujours une taille R , aussi petite soit-elle, qui permet de compenser la faible fraction de masse que les secondaires reçoivent de leur parent, de telle sorte que la condition d'existence des fragments secondaires soit respectée. Dans ce cas, on peut considérer que la fragmentation est retardée sur des échelles spatiales inférieures : tous les fragments existent mais les secondaires sont formés avec des tailles plus petites. La taille maximale $R' < R$ que peut posséder un fragment retardé correspond à la solution de l'équation :

$$\left[\psi - 1 + \left(\frac{R'}{R_0} \right)^{-\phi} \right] \left(\frac{R'}{R_0} \right)^{\xi+3} = 1 \quad (\text{III.15})$$

Par exemple, si $\psi = 2$ on peut voir dans la seconde rangée de la Figure III.3 que pour des fragments formés avec un rapport d'échelle $r = 2^{1/3}$, le primaire existe pour le couple $(\phi = 1; \xi = -0.75)$ indiqué par la croix noire, mais pas les secondaires. En effet, ces derniers ne peuvent avoir une existence qu'à partir de $r = 1.5$. D'autre part, pour qu'il y ait fragmentation hiérarchique il est nécessaire que $\phi > 0$. Ainsi, à mesure que R diminue pour favoriser l'existence des secondaires (et sachant que ψ reste fini dans l'hypothèse où subdivision il y a) la relation $\psi \gg \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-\phi}$ n'est plus obligatoirement vérifiée. Contrairement au primaire, l'existence des secondaires n'est en réalité pas limitée à l'espace délimité par $\xi \geq -3$, mais est bornée par une frontière obtenue avec la prochaine condition.

Cas $0 \leq \psi - 1 \ll \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-\phi}$

Dans cette limite, on a la relation $0 \leq \psi - 1 \ll n_l$, soit de manière équivalente $1 \leq$

$\psi \ll n_l$ et les fractions de masse ψ_{li} héritées pas les fragments primaire et secondaires deviennent asymptotiquement :

$$\psi_{li} = \begin{cases} \frac{1}{n_l} & \text{si } i = 1 \text{ (primaire)} \\ \frac{1}{n_l} & \text{sinon (secondaires)} \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

Cette limite revient à supposer que le fragment primaire reçoit la même portion de masse du réservoir parental que les fragments secondaires et correspond à une équipartition en masse entre les fragments. Dans ce cas, les conditions d'existence des fragments sont similaires et la condition de fragmentation hiérarchique doit vérifier :

$$\phi < \xi + 3 \quad \begin{cases} \text{pour le fragment primaire} \\ \text{pour les secondaires} \end{cases}$$

Ces conditions favorisent au mieux l'existence des fragments secondaires car c'est dans ce scénario d'équipartition que ces derniers obtiennent la plus grande quantité de matière. La courbe $\phi = \xi + 3$ définit alors une transition à partir de laquelle les secondaires ne peuvent plus exister. Cela peut se vérifier graphiquement à l'aide de la Figure III.2 qui montre que l'espace d'existence des secondaires se situe systématiquement pour des $\phi < \xi + 3$. Or, comme vu précédemment, le fragment parent peut toujours s'effondrer en un seul fragment unique si son rendement massique le lui permet. En conséquence, si $\phi \geq \xi + 3$ et si $\xi \geq -3$, les secondaires n'existent pas et un fragment parent peut toujours se contracter pour former un enfant unique. Seul le primaire existe ce qui impose alors un rapport de masse effectif $\psi \rightarrow \infty$, et le parent s'effondre de manière monolithique.

En résumé

Avec ce critère d'existence de fragments basé sur le temps de chute libre, on distingue finalement trois régimes de fragmentation pour $\phi > 0$, représentés dans la Figure III.4 :

1. Un régime dissipatif si $\xi < -3$ ou, par définition, si $\phi < 0$;
2. Un régime de fragmentation monolithique si $\phi \geq \xi + 3 \geq 0$ ou, par définition, si $\phi = 0$;
3. Un régime de fragmentation hiérarchique si $0 < \phi < \xi + 3$.

On peut aussi différencier deux types de régime hiérarchique en considérant qu'il existe une fragmentation nette où les deux fragments se forment à la même taille et une

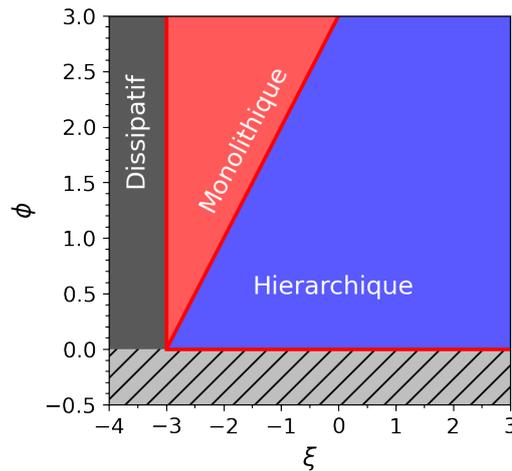


FIGURE III.4 – Séparation des différents régimes de fragmentation en fonction des valeurs numériques du taux de fragmentation ϕ et du taux d’injection de masse ξ . Les régimes hiérarchique, monolithique et dissipatif sont représentés en bleu, rouge et noir respectivement. Les valeurs hachurées $\phi < 0$ sont aussi des cas dissipatifs mais ne correspondent pas à des solutions qui permettent *a priori* une fragmentation.

fragmentation retardée sur les échelles spatiales pour $\phi < \xi + 3$, si le fragment secondaire ne se forme pas à la même échelle R que le primaire.

2 La théorie gravo-turbulente

2.1 Contexte théorique

Dans cette partie nous allons déterminer la dépendance du taux de fragmentation $\phi(R)$ avec (i) la taille physique R des fragments produits et (ii) les conditions physiques qui caractérisent le nuage dans lequel ces fragments évoluent. La fragmentation gravo-turbulente est une théorie qui décrit la formation des étoiles *via* la fragmentation d’un nuage soumis à la turbulence. Dans cette théorie, des structures auto-gravitantes sont formées localement dans le nuage grâce à des fluctuations de densité. Ces fluctuations ont pour origine des phénomènes de compression ou de dépression locales provoquées aléatoirement par l’écoulement turbulent du fluide qui compose le nuage. Ainsi, la fragmentation est modulée par l’équilibre entre :

1. La gravité qui tend à faire s’effondrer la structure sur elle-même ;
2. La pression thermique qui induit une expansion de la structure et s’oppose à la gravité ;
3. La turbulence du milieu qui tend à prévenir l’effondrement en détruisant la cohérence des structures potentielles ;

4. Cette même turbulence qui comprime localement le nuage et engendre des régions plus denses favorisant l'effondrement local du nuage à plus petite échelle ;

Dans un écoulement turbulent, la densité de fluide contenu dans un volume donné est sujette à des fluctuations de nature stochastique. Du fait de cette propriété des mouvements turbulents, il est aisé d'implémenter notre modèle probabiliste à cette théorie. Considérons la variable aléatoire s_1 suivante qui décrit une fluctuation provoquée par la turbulence :

$$s_1 = \frac{\rho_1}{\bar{\rho}} \quad (\text{III.17})$$

Avec $\bar{\rho}$ la densité moyenne du volume considéré avant la fluctuation, et ρ_1 la densité de ce même volume après fluctuation. On peut alors considérer l'apparition d'une nouvelle fluctuation de densité de telle sorte que la région passe d'un état d'origine ρ_1 à un état final ρ_2 , cette fois décrit par la variable aléatoire s_2 . Étant donné qu'une fluctuation de densité émerge à partir de l'état engendré par la fluctuation précédente, ce processus est de nature multiplicative. Ainsi, après un certains temps, le volume considéré aura expérimenté une succession de processus aléatoires qui auront modifié sa densité ρ de telle sorte que la fluctuation résultante correspond à :

$$s = \frac{\rho}{\bar{\rho}} \quad (\text{III.18})$$

Dans l'espace logarithmique, ce processus multiplicatif se transforme en un processus additif régi par la variable aléatoire :

$$\delta = \ln s = \ln \frac{\rho}{\bar{\rho}} \quad (\text{III.19})$$

Ici, δ est une variable aléatoire résultante de la somme successive d'autres variables aléatoires $\delta_i = \ln s_i$. Or, le théorème central limite nous informe que la statistique d'une variable aléatoire qui résulterait d'une suite de variables aléatoires différentes, par exemple l'ensemble des événements δ_i , converge vers une loi normale centrée sur une valeur moyenne μ et d'écart-type σ lorsque le nombre d'évènements i tend vers l'infini, et ce, peu importe la loi de probabilité que suivent les δ_i . Donc, pour un nombre de fluctuations très grand, la distribution de probabilité des fluctuations logarithmiques de densité δ suit une loi normale. C'est sur ce principe qu'est basé le formalisme de Press-Schechter ([Press & Schechter 1974](#)), plus usuellement appelé *excursion set formalism* largement repris et adapté aux problématiques qui nous intéressent, par exemple par [Padoan & Nordlund \(2002\)](#); [Hennebelle & Chabrier \(2008\)](#); [Hopkins \(2012\)](#); [Guszejnov & Hopkins \(2015\)](#) qui l'avaient initialement employé pour étudier les conséquences des propriétés turbulentes des nuages sur la fonction de masse des étoiles. Plus spécifiquement, [Passot &](#)

Vázquez-Semadeni (1998) démontrent que la distribution de probabilité de la variable δ s'écrit comme :

$$\mathcal{P}(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{\left(\delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (\text{III.20})$$

Où la variance des fluctuations logarithmiques en densité σ^2 s'exprime comme :

$$\sigma^2 = \ln\left[1 + b^2 \mathcal{M}^2\right] \quad (\text{III.21})$$

Avec $b^2 \approx 0.5$ une constante déterminée par simulations numériques, et $\mathcal{M} = \frac{V_{\text{rms}}}{C_s}$ est le nombre de Mach qui représente le ratio entre la vitesse de propagation du son C_s dans le nuage, et la vitesse quadratique moyenne $V_{\text{rms}} = \sqrt{\langle V^2 \rangle}$ des particules fluides, engendrée par la turbulence.

2.2 Relation d'échelle entre la dispersion des vitesses et la taille

Le nombre de Mach \mathcal{M} est une quantité importante qui détermine la variance de la distribution des fluctuations en densité, et compare la vitesse turbulente quadratique moyenne V_{rms} des particules fluides à la vitesse de propagation du son C_s . Or, si on considère un milieu isotrope, la vitesse moyenne des particules fluides $\langle V \rangle$ est nulle et la dispersion des vitesses ΔV peut s'écrire :

$$\Delta V = \sqrt{\langle V^2 \rangle} = V_{\text{rms}} \quad (\text{III.22})$$

Dans un milieu isotrope, la dispersion des vitesses correspond donc à la vitesse quadratique moyenne des particules. Supposons en toute généralité que la vitesse quadratique V_{rms} puisse être fonction de la taille des fragments de telle sorte qu'on puisse introduire localement un paramètre $\eta(R)$ caractérisant les variations de $V_{\text{rms}}(R)$ tel que :

$$\eta(R) = \frac{d \ln V_{\text{rms}}}{d \ln R} \quad (\text{III.23})$$

En admettant que la fonction $V_{\text{rms}}(R)$ soit une fonction invariante d'échelle, on a :

$$V_{\text{rms}} = V_0 \left(\frac{R}{R_0}\right)^\eta \quad (\text{III.24})$$

Or, d'après les lois de Larson (Larson 1981), la dispersion des vitesses est reliée à la taille R du nuage par la relation :

$$\Delta V = V_0 \left(\frac{R}{1 \text{ pc}}\right)^{0.38} \quad (\text{III.25})$$

Où $V_0 = 1000 \text{ m.s}^{-1}$. Grâce aux équations III.22 et III.24 tout en identifiant les termes, cette loi de Larson permet d'exprimer la fonction $V_{\text{rms}}(R)$ comme une fonction invariante d'échelle, avec $\eta = 0.38$.

Bien que cette relation soit empiriquement valable pour des tailles $R > 0.1 \text{ pc}$, on la suppose correcte pour la totalité des échelles spatiales, même en deçà de $R \sim 0.1 \text{ pc}$. Cette simplification nous permettra de mieux appréhender l'effet de la vitesse quadratique du fluide vis à vis du taux de fragmentation lorsque nous le calculerons : sous les mêmes conditions de température il sera facile d'évaluer l'effet d'une réduction de la vitesse d'écoulement le long des échelles spatiales. D'autre part, la vitesse de propagation d'une onde sonore C_s s'écrit :

$$C_s = \sqrt{\frac{k_B T}{\mu m_H}} \quad (\text{III.26})$$

Où $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann, $\mu \approx 2.33$ est le poids moléculaire moyen usuel des nuages moléculaires et $m_H = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ est la masse d'un atome d'hydrogène. Pour un nuage dont la température s'élève autour de $10 < T < 30 \text{ K}$, on calcule $188 < C_s < 326 \text{ m.s}^{-1}$. En considérant les relations de Larson avec $\eta = 0.38$, le nombre de Mach est de l'ordre de l'unité pour des tailles $0.01 < R < 0.1 \text{ pc}$. À partir de cet ordre de grandeur, les particules fluides ne sont plus caractérisées par des vitesses supersoniques et entrent dans un régime trans-sonique voire subsonique. Dans ces conditions, on peut distinguer deux origines aux instabilités qui permettent au nuage de fragmenter :

1. Une instabilité régulée par les phénomènes de compression aléatoires si le fluide est supersonique ;
2. Une instabilité de type Jeans régulée par l'effondrement gravitationnel d'un fragment parent si le fluide est subsonique.

Il est important de noter que l'utilisation d'une relation invariante d'échelle (équation III.24) pour la vitesse d'écoulement reste une approximation car il n'est pas impossible qu'une composante de vitesse supplémentaire apparaisse et réhausse de fait la vitesse des particules à une échelle donnée. Cette composante supplémentaire peut être causée, par exemple, par l'accélération des particules fluides lors de l'effondrement du nuage. De même, on suppose qu'il n'y a pas d'injection d'énergie aux petites échelles, *via* par exemple des flots de matière provenant des jeunes étoiles, ce qui permettrait de maintenir un niveau de turbulence supersonique.

2.3 Choix de la distribution normale des fluctuations en densité

Le choix de la loi normale pour décrire les fluctuations en densité est une solution valable dans le cas d'un écoulement supersonique isotherme ce qui est le cas pour des échelles spatiales $R > 0.01$ pc. En revanche, pour un écoulement supersonique adiabatique, la distribution de probabilité manifeste des comportements en loi de puissance en bout de distribution (Scalo et al. 1998; Passot & Vázquez-Semadeni 1998). Comme nous le verrons par la suite, pour des échelles $R < 0.01$ pc, l'effondrement peut être caractérisé par une équation d'état polytropique du fait de l'augmentation progressive de la densité des fragments produits, et donc de la difficulté pour un fragment à évacuer son rayonnement interne. Or, dans cette gamme d'échelle, le fluide est *a priori* dans un état subsonique où l'amplitude des fluctuations en densité est amoindrie du fait du faible niveau de turbulence à ces échelles. Dans le cas de faibles fluctuations, il est possible d'après Passot & Vázquez-Semadeni (1998) d'approcher la distribution de probabilité avec une loi normale. Par contre, s'il existait des écoulements supersoniques accompagnés de processus non isothermes dans la gamme d'échelle $R < 0.01$ pc, cette approximation ne serait plus valable.

Il reste malgré tout un point noir dans l'utilisation de cette distribution de probabilité. En effet, sous l'effet de la gravité, une structure en effondrement s'embellira d'une enveloppe de matière, organisée selon un profil radial en densité de type $\rho \propto r^{-2}$ où r est ici la distance au centre de la structure (Shu 1977). L'existence de ce profil radial a pour conséquence de biaiser la distribution des fluctuations en densité car les zones les plus denses se réorganisent au centre de la structure tandis que les zones moins denses se répartissent sur ses bords. Pour la distribution de probabilité considérée, un tel profil provoquerait l'apparition d'une loi de puissance dans la limite des hautes densités (Kritsuk et al. 2011). Alors, la distribution en loi normale ne serait plus exacte et il faudrait tenir compte du biais introduit par le profil en densité des structures en effondrement. Toutefois, nous cherchons ici à savoir si une instabilité va se développer ou non dans le futur dans une région de taille donnée. Si ce profil apparaîtrait, alors l'instabilité s'est non seulement déjà développée, mais en plus aucune autre fluctuation n'est apparue entre-temps pour perturber le développement du profil en r^{-2} . D'autres fluctuations peuvent très bien apparaître dans la structure en effondrement avant même que cette tendance n'ait eu le temps de s'imposer, et permettre l'existence d'autres sous fragments. Pour avoir une description plus fine du phénomène, il faudrait tenir compte du développement dynamique de la relation $\rho(r)$ ce qui nécessiterait de considérer des dépendances temporelles. Cela sort du cadre de notre approche actuelle, mais serait potentiellement un axe d'amélioration du modèle.

2.4 Seuil d'effondrement

La capacité qu'une fluctuation en densité a d'entraîner un effondrement puis la fragmentation d'une région d'un nuage, est conditionnée par les propriétés physiques locales de cette région. Ainsi, pour continuer dans cette approche stochastique, on considère que chacun des fragments potentiels a une certaine probabilité $\mathcal{P}(\delta(R) \geq \delta_c(R))$ qu'une fluctuation $\delta(R)$ émerge et permette un effondrement local, en fonction d'une fluctuation critique $\delta_c = \ln \frac{\rho_c}{\bar{\rho}}$. Ainsi, un volume $V(R)$ contenu dans une structure plus large, s'effondre s'il est soumis à une certaine fluctuation δ qui excède une fluctuation critique δ_c . La probabilité $\mathcal{P}(\delta \geq \delta_c)$ d'effondrement de ce volume est alors caractérisée par la distribution des fluctuations $\mathcal{P}(\delta)$ qui suit la loi normale de l'équation III.20. Dans ce contexte, [Hennebelle & Chabrier \(2008\)](#) proposent une expression formelle de cette densité seuil δ_c en incorporant au critère d'instabilité de Jeans une composante supplémentaire décrivant l'action de la turbulence sur la stabilité d'une structure. Ils obtiennent alors un critère d'instabilité dépendant de la vitesse quadratique du fluide et de la densité $\bar{\rho}$ du fragment parent :

$$\delta_c = \ln \left[\frac{\pi^{5/3}}{6^{2/3}} \frac{3C_s^2 + V_{\text{rms}}^2}{3GR^2\bar{\rho}} \right] \quad (\text{III.27})$$

Où $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ est la constante de gravitation.

3 Application à la théorie gravo-turbulente

3.1 Expression du taux de fragmentation

Pour calculer le taux de fragmentation $\phi(R)$ à partir des fluctuations de densité écrivons d'abord le nombre de fragments enfants produits par un parent. Le nombre maximum d'enfants qu'un fragment parent peut engendrer correspond à son facteur de remplissage $V_0/V(R)$ où $V(R)$ est le volume d'un enfant de taille caractéristique R . Ce facteur de remplissage donne une estimation sur le nombre de fois qu'un volume V puisse être contenu à l'intérieur d'un autre volume V_0 . Il dépend donc de la géométrie des fragments produits, mais aussi de la capacité qu'ont ces enfants à s'extraire des bordures du volume parent V_0 et de se chevaucher les uns les autres. En effet, si les fragments enfants s'enchevêtrent, le volume utilisable à l'intérieur du parent est virtuellement plus grand et le facteur de remplissage en est augmenté. Par simplicité, supposons dans ce qui suit que les fragments enfants ne se recoupent pas entre eux et qu'ils sont totalement confinés à l'intérieur du volume de leur parent. Leur volume peut s'exprimer par $V = a_G R^3$, avec a_G une constante qui rend compte de la géométrie des fragments et qui ne dépend pas de

R . Un fragment parent pouvant potentiellement héberger un nombre $V_0/V(R)$ d'enfants et sachant que chacun a une probabilité $\mathcal{P}(\delta \geq \delta_c)$ de s'effondrer, le nombre moyen de fragments produits est alors le suivant :

$$\langle N(R) \rangle_{R_0} = \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3} \mathcal{P}(\delta \geq \delta_c) \quad (\text{III.28})$$

En écrivant cette équation on traduit le fait que chaque enfant potentiel a une certaine probabilité de s'effondrer en fonction des fluctuations locales en densité au sein d'une région spécifique. Pour obtenir le taux de fragmentation, il suffit de prendre la dérivée logarithmique du nombre moyen de fragments produits, donné par l'équation III.28 par rapport au logarithme de la taille, ce qui donne :

$$\phi(R) = 3 - \frac{d \ln \mathcal{P}(\delta \geq \delta_c)}{d \ln R} \quad (\text{III.29})$$

Cette expression est analytiquement calculable pour n'importe quelle distribution de probabilité $\mathcal{P}(\delta)$ pourvu que celle-ci soit dérivable. En considérant l'expression de la distribution de probabilité III.20, on obtient la fonction de répartition :

$$\mathcal{P}(\delta \geq \delta_c) = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left[\frac{\delta_c + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma \sqrt{2}} \right] \right) \quad (\text{III.30})$$

La démonstration complète du calcul du taux de fragmentation dans ces conditions est donnée en Annexe B. En développant l'équation III.29 on trouve finalement :

$$\phi(R) = \frac{3}{1 - A_{\text{th}}} - \frac{A_{\text{th}}(\xi(R) + 3)}{1 - A_{\text{th}}} + \frac{2A_{\text{turb}}}{1 - A_{\text{th}}} \quad (\text{III.31})$$

Où on a posé par commodité :

$$\begin{cases} A_{\text{th}} = A_{\text{p}} \left[1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho} \left(\hat{C}_s^2 + \frac{v \hat{M}^2}{\sqrt{2} \sigma} \right) \right] \\ A_{\text{turb}} = A_{\text{p}} \left[1 - \eta \left(\hat{V}_{\text{rms}}^2 - \frac{v \hat{M}^2}{\sqrt{2} \sigma} \right) \right] \\ A_{\text{p}} = - \frac{\exp[-u^2]}{\mathcal{P}(\delta) \sigma \sqrt{2\pi}} \end{cases} \quad (\text{III.32})$$

Avec $A_{\text{p}}, A_{\text{th}}, A_{\text{turb}}$ des fonctions de R et de $\bar{\rho}$ qui régulent respectivement :

1. La statistique des fluctuations (dépendance de la distribution de probabilité $\mathcal{P}(\delta)$ utilisée);

2. Le comportement thermodynamique de l'effondrement (dépendance de l'équation d'état utilisée *via* le terme $\frac{d \ln T}{d \ln \rho}$);
3. La vitesse quadratique moyenne du fluide (dépendance des variations locales de la vitesse quadratique turbulente *via* η).

Les variables \hat{C}_s^2 , \hat{V}_{rms}^2 , $\hat{\mathcal{M}}^2$ sont des variables réduites décrivant respectivement la vitesse de propagation du son, la vitesse turbulente quadratique moyenne, et le nombre de Mach dont les expressions sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{C}_s^2 = \frac{3C_s^2}{3C_s^2 + V_{\text{rms}}^2} \\ \hat{V}_{\text{rms}}^2 = \frac{V_{\text{rms}}^2}{3C_s^2 + V_{\text{rms}}^2} \\ \hat{\mathcal{M}}^2 = \frac{b^2 \mathcal{M}^2}{1 + b^2 \mathcal{M}^2} \end{array} \right. \quad (\text{III.33})$$

On introduit également deux variables centrées réduites qui dépendent du seuil critique d'effondrement δ_c et de l'écart-type σ des fluctuations en densité qui permettent une écriture plus pratique de ces équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\delta_c + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma \sqrt{2}} \\ v = \frac{\delta_c - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma \sqrt{2}} \end{array} \right. \quad (\text{III.34})$$

Le taux de fragmentation dépend en particulier du taux d'injection de masse aux fragments $\xi(R)$ qui peut être représenté par n'importe quelle fonction. Cependant, sans modèle adéquat pour prédire l'évolution de cette quantité, nous considérons sans perte de généralité par la suite que ξ est une constante.

En assimilant un fragment avec un polytrophe, on peut introduire l'indice polytropique p permettant de relier la température du milieu avec sa densité :

$$T\rho^{p-1} = \text{constante} \quad (\text{III.35})$$

L'indice polytropique p fournit ainsi une information sur la variation de température induite par la contraction du fluide sur lui-même : il permet donc de quantifier la façon dont un fragment chauffe au cours de son effondrement, et caractérise ainsi la transfor-

mation thermodynamique associée à l'effondrement du milieu. La pente associée à cette variation est localement décrite par la dérivée :

$$\frac{d \ln T}{d \ln \rho} = p - 1 \quad (\text{III.36})$$

Ainsi, si par exemple $p > 1$ et que le fluide se contracte, la densité augmente et la température aussi. Cet indice polytropique sera très important pour les prochaines parties car c'est principalement cette quantité qui régit les conditions d'entrée dans les différents régimes de fragmentation.

3.2 Cas limites d'un fluide subsonique et supersonique

Dans cette partie nous allons considérer deux cas limites qui permettent de dégager des comportements caractéristiques de fragmentation selon que le milieu soit caractérisé par des écoulements subsoniques ou supersoniques. Dans la limite subsonique, la vitesse d'écoulement du fluide est plus faible que la vitesse du son du milieu et on a mathématiquement $V_{\text{rms}} \ll C_s$. À l'inverse, dans la limite supersonique $V_{\text{rms}} \gg C_s$, la vitesse d'écoulement est bien plus grande que la vitesse de propagation du son.

Si la densité critique d'effondrement ρ_c est inférieure à la densité du fragment parent $\bar{\rho}$, on a $\delta_c < 0$, et on peut montrer (voir l'Annexe 5.5) que le taux de fragmentation $\phi(R)$ tend vers la valeur 3 dans les deux limites super et sub-sonique. Comme le fragment parent est composé de régions dont la densité excède la densité critique, toutes ces régions peuvent s'effondrer et le parent est alors entièrement rempli de fragments. Or, un remplissage maximal du parent sature le taux de fragmentation à la valeur 3, et c'est pourquoi le taux de fragmentation tend vers 3 dans ce cas.

Dans le cas contraire, $\delta_c > 0$ et on peut montrer (voir dans l'Annexe B) que le taux de fragmentation $\phi(R)$ s'écrit, avec les trois variables réduites $\hat{C}_s^2, \hat{V}_{\text{rms}}^2, \hat{\mathcal{M}}^2$:

Vitesse sub-sonique ; $V_{\text{rms}} \ll C_s$

$$\begin{cases} \hat{C}_s^2 = 1 \\ \hat{V}_{\text{rms}}^2 = 0 \\ \hat{\mathcal{M}}^2 = 0 \end{cases}$$

Vitesse super-sonique ; $V_{\text{rms}} \gg C_s$

$$\begin{cases} \hat{C}_s^2 = 0 \\ \hat{V}_{\text{rms}}^2 = 1 \\ \hat{\mathcal{M}}^2 = 1 \end{cases}$$

$$\phi(R) \approx \xi + 3 - \frac{2\left(1 + \eta \frac{\delta_c}{2}\right)}{1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho} \left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)} \quad (\text{III.37})$$

$$\phi(R) \approx 3 \quad (\text{III.38})$$

Dans le cas de vitesses supersoniques, ce résultat signifie qu'il existera toujours des écoulements provoquant la compression du fluide dans un fragment parent, permettant l'apparition de régions localement instables. Le volume du fragment parent est alors totalement rempli de régions en effondrement. De plus, d'après la partie 1.3 cet effondrement entre dans un régime de fragmentation hiérarchique si $\phi < \xi + 3$. Ainsi, si le fragment parent disperse une partie de sa masse ($\xi \leq 0$) au cours de son effondrement, alors les régions supposées instables ne sont plus assez massives pour s'effondrer individuellement et le fragment parent entre dans un régime de fragmentation monolithique. Ce régime persiste jusqu'à ce que le rendement de formation des fragments soit suffisamment bon pour que ces derniers puissent exister et persister dans le temps sans se recombiner ou se dissiper.

Désormais, regardons plus précisément la limite asymptotique du taux de fragmentation dans le cas d'un fluide subsonique donné par la relation III.37. L'analyse de cette limite peut être approfondie en considérant un fragment parent marginalement instable composé d'un fluide isotherme, c'est-à-dire que sa densité $\bar{\rho} \sim \rho_c$, soit $\delta_c = 0$ et que la température du fluide qui le compose reste constante au cours de l'effondrement avec $p = 1$. Dans ce cas là, on obtient la relation suivante :

$$\phi(R) \approx \xi(R) + 1 \quad (\text{III.39})$$

Cette relation est invariante d'échelle si et seulement si le taux d'injection de masse $\xi(R)$ est lui même invariant d'échelle. En l'état, cette relation nous permet de calculer localement la relation entre la masse des fragments et leur taille, sachant que localement $M \propto R^{\phi - \xi}$ d'après l'équation III.2 sous l'approximation locale d'invariance d'échelle. On trouve alors qu'une région isotherme marginalement instable est caractérisée par la relation $M \propto R$. Or, cette relation est similaire à la masse d'une sphère de Bonnor-Ebert (Bonnor 1956) qui représente la masse avec laquelle une sphère composée d'un gaz isotherme est en équilibre hydrostatique avec son milieu. Avec ce cas limite, on retrouve alors une propriété d'un objet astrophysique bien spécifique. Cependant, notre modèle permet de généraliser cet état en prenant en compte non seulement les éventuels flots de

matière qui viennent soit alimenter ($\xi > 0$) soit appauvrir ($\xi < 0$) le réservoir de masse disponible pour former les fragments enfants, mais aussi les échanges d'énergie qu'un fragment opère avec son environnement grâce à l'indice polytropique qui régit les processus de chauffage de ces objets lorsqu'ils se contractent.

3.3 Transition entre les régimes de fragmentation dans le cas subsonique

D'après les résultats de la partie 1.3 qui sépare les différents régimes de fragmentation en fonction des valeurs numériques du taux de fragmentation ϕ et du taux d'injection de masse aux fragments ξ , on peut établir différents scénarii d'effondrement dans la limite d'un fluide subsonique, où une fragmentation de type Jeans est opérée, causée par l'effondrement de la région considérée. De manière générale, un fragment parent s'effondre hiérarchiquement si la condition suivante est respectée :

$$\xi + 3 > \phi(R) > 0 \quad (\text{III.40})$$

On montre dans l'Annexe 5.3 que ces conditions prises séparément peuvent s'écrire :

Condition $\phi(R) < \xi + 3$

$$\boxed{p < 1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)}} \quad (\text{III.41})$$

Condition $\phi(R) > 0$

$$\boxed{p < 1 + \frac{\xi + 1 - \eta\delta_c}{(\xi + 3)\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)}} \quad (\text{III.42})$$

Sous la condition de stabilité marginale ($\delta_c = 0$), et sans accréation ni dissipation de matière ($\xi = 0$), il est possible de montrer qu'il est simplement nécessaire d'avoir :

$$\boxed{p < \frac{4}{3}}, \quad (\text{III.43})$$

pour qu'un fragment parent se fragmente de manière hiérarchique. Cette condition est dérivée à l'origine simplement de la condition $\phi(R) > 0$. Il est aussi possible de montrer que si $p = \frac{4}{3}$, alors le critère de fragmentation monolithique $\phi = 0$ est respecté de telle sorte qu'au delà de cette valeur de $\frac{4}{3}$, pour un fragment marginalement instable et sans accréation ni perte de masse, les enfants produits sont dans un régime dispersif. Aussi intéressant que cela puisse paraître, l'analyse traditionnelle de la fragmentation de Jeans impose également la limite $p < \frac{4}{3}$ pour qu'un effondrement se produise, car alors une contraction du nuage induirait une diminution de la masse de Jeans, déstabilisant les

régions internes.

Dans ces conditions, il existe par ailleurs une valeur particulière d'indice pour $p = 2$ à partir de laquelle le régime de fragmentation passe de l'état dispersif à l'état monolithique. Ce régime monolithique correspond à l'espace $\phi \geq \xi + 3$ pour $\phi > 0$ représenté par un triangle rouge dans la Figure III.4. En effet, on montre dans l'Annexe 5.4 que la limite asymptotique dérivée équation III.37 peut se réécrire :

Condition $\phi \geq \xi + 3$

$$\boxed{p > 1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)}} \quad (\text{III.44})$$

Condition $\phi > 0$

$$\boxed{p > 1 + \frac{\xi + 1 - \eta\delta_c}{(\xi + 3)\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)}} \quad (\text{III.45})$$

Ce qui peut se réduire à la condition suffisante, sous les conditions de stabilité marginale sans accrétion ni dissipation :

$$\boxed{p > 2} \quad (\text{III.46})$$

Toutefois, cette solution semble n'être qu'un artéfact mathématique du modèle. En effet, l'espace des solutions monolithiques $\phi \geq \xi + 3$ est associé soit à une coalescence des fragments enfants, soit à un effondrement conventionnel du parent sans subdivision. De plus, l'indice polytropique régule les variations de température au cours de la contraction induite par l'effondrement. Pour quelle raison une structure serait-elle être dispersive à $p \sim 2$ en raison d'une pression thermique trop importante, puis, à $p > 2$, dans un cas où la pression thermique devient encore plus importante pour une même contraction, cette structure s'effondrerait ?

Quoiqu'il en soit, gardons à l'esprit que les valeurs d'indice polytropique p décrivant les transitions entre les différents régimes de fragmentation sont dérivées de cas limites bien particuliers. Ces transitions sont résumées dans le tableau III.1. En restant dans un cadre subsonique, ces transitions dépendent non seulement du paramètre δ_c mais aussi de l'exposant η et du taux d'injection de masse ξ . Ainsi, dans l'approximation subsonique les modalités d'effondrement sont caractérisées par :

1. L'état thermodynamique local du fluide *via* l'indice polytropique p ;
2. Le degré de stabilité du fragment parent *via* δ_c ;
3. Plus marginalement, de la variation de la vitesse quadratique du fluide entre les

échelles *via* l'exposant local η ;

Dans le cas général, la véritable valeur de ϕ évolue entre ces limites asymptotiques, de même que les conditions de transitions entre régimes de fragmentation hiérarchique, monolithique et dispersif.

Régime de fragmentation	Limite subsonique $V_{\text{rms}} \ll C_s$	Limite supersonique $V_{\text{rms}} \gg C_s$
Expression de ϕ	$\frac{4 - 3p}{2 - p}$	3
Hiérarchique $\xi + 3 > \phi > 0$	$p < 4/3$	$\xi \geq 0$
Monolithique $0 \leq \xi + 3 \leq \phi$ ou $\phi = 0$	$p > 2$ $p = 4/3$	$-3 \leq \xi < 0$
Dissipatif $\phi < 0$ ou alors	$2 \geq p > 4/3$	$\xi < -3$

TABLE III.1 – Conditions d'apparition des différents régimes de fragmentation en fonction de l'indice polytropique p . Ces valeurs sont dérivées dans des conditions de stabilité marginale, sans accréation ni perte de masse au cours de l'effondrement.

3.4 Effondrement quasi-statique

Regardons ici le cas d'un effondrement quasi-statique, en d'autres termes la contraction lente du fluide qui compose un fragment parent. Dans la limite subsonique, le nombre de Mach $\mathcal{M} \approx 0$ et la vitesse du fluide contenu dans un fragment ne permet plus l'existence de fluctuations en densité car $\sigma \rightarrow 0$. Ainsi, la seule possibilité pour compresser le fluide dans un fragment parent est par le biais de l'attraction gravitationnelle. Or, l'équation d'état du polytrophe nous indique qu'une telle compression engendrerait une variation de la température du fluide. Si cette compression est suffisamment lente pour que la densité du parent demeure constante entre chaque étape de l'effondrement, alors on peut supposer que le fragment parent est composé d'un fluide virtuellement incompressible. Pour être dans ces conditions, il faut donc que la densité soit constante quelque soit la température. Pour cela, l'indice polytropique p doit tendre vers l'infini et la limite asymptotique du taux de fragmentation pour un fluide subsonique, rappelée ici :

$$\phi(R) \approx \xi + 3 - \frac{2\left(1 + \eta \frac{\delta_c}{2}\right)}{1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho} \left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)}$$

Peut se simplifier, sachant que :

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow +\infty} 1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho} \left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right) &= \lim_{p \rightarrow +\infty} 1 - (p - 1) \left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

On a alors :

$$\boxed{\lim_{p \rightarrow +\infty} \phi(R) = (\xi + 3)^+} \quad (\text{III.47})$$

Dans ce cas, on a de manière marginale mais suffisante la relation $\phi > \xi + 3$ de telle sorte que l'effondrement ne puisse pas entrer dans un régime de fragmentation hiérarchique. En conséquence, si le fragment parent subit une contraction lente, il s'effondre alors nécessairement en un seul morceau. Ainsi, une contraction quasi-statique s'effectue naturellement en régime monolithique. Ce type d'effondrement n'est possible que pour une vitesse subsonique car un écoulement turbulent viendrait compresser localement le fluide en induisant des fluctuations locales de densité ce qui entre en contradiction avec l'hypothèse de densité constante, et donc d'incompressibilité.

4 Propriétés des fragments en fonction de leur taille

4.1 Calcul du taux de fragmentation

Le taux de fragmentation $\phi(R)$ dépend non seulement de l'échelle spatiale mais aussi de l'état physique local du milieu à cette échelle spatiale. En effet, $\phi(R)$ est calculable pour n'importe quel R sous réserve de connaître la densité du fluide à l'échelle supérieure. Il apparaît alors nécessaire de considérer, en parallèle du taux de fragmentation, l'évolution de la densité $\bar{\rho}$ des fragments parents. Or, on connaît la densité de fluide à cette échelle si on connaît le taux de fragmentation aux échelles supérieures grâce à l'équation II.26. Dans ce cas, à partir de conditions initiales en densité et taille il est possible de construire numériquement et de manière itérative la fonction $\phi(R)$ pour des tailles de plus en plus petites. Sans modèle adéquat pour prédire la tendance du taux d'injection de masse $\xi(R)$, on considère que celui-ci est constant et on discutera uniquement sur le comportement

taux de fragmentation vis à vis d'un ξ donné.

Qui plus est, plus les fragments deviennent denses, plus leur milieu devient opaque à leur propre rayonnement (Larson 1969). Ainsi, plus la fragmentation engendre des enfants denses, plus ceux-ci sont soumis à un chauffage supplémentaire qui contrebalance la contraction due à l'effondrement gravitationnel. Une fois une certaine limite d'opacité atteinte, l'augmentation de la pression thermique engendrée par la montée de la température entre en équilibre avec l'effondrement et la fragmentation peut alors s'arrêter. Une telle modification de l'opacité peut être modélisée par une équation d'état adiabatique, régulée par un indice adiabatique $\gamma_{ad} > 1$ (Masunaga et al. 1998). Cette transition est à l'origine de la formation du premier cœur de Larson (Larson 1969), une fois que le fragment dépasse une densité $\rho_L \sim 10^{-13} \text{ g/cm}^3$. Dans le calcul de $\phi(R)$ cette transition peut être prise en compte par la transformation $C_s(T) \rightarrow C_s(\rho)$ tout en adaptant le terme $\frac{d \ln T}{d \ln \rho}$. Nous empruntons par la suite l'équation d'état de Lee & Hennebelle (2018) qui décrit de manière effective les différentes transformations polytropiques qui ont lieu au cours de l'effondrement, en fonction de la densité du milieu et des caractéristiques chimiques de la molécule de di-hydrogène H_2 dont l'indice adiabatique $\gamma_{ad} = 5/3$ pour des températures $T < 100 \text{ K}$ lorsque $\rho > \rho_L$. Cette équation d'état tient aussi compte de l'excitation des modes de rotation de H_2 qui s'activent pour une température $T > 100 \text{ K}$, caractérisé par $\gamma_{rot} = 7/5$ lorsque $\rho > 30\rho_L$; et décrit l'état de dissociation de ces molécules avec $\gamma_{dis} = 1.1$ pour des températures $T > 1000 \text{ K}$ lorsque $\rho > 3 \cdot 10^4 \rho_L$:

$$T(\rho) = T_0 \left[1 + \frac{\left(\frac{\rho}{\rho_L}\right)^{\gamma_{ad}-1}}{\left[1 + \left(\frac{\rho}{30\rho_L}\right)^{3(\gamma_{ad}-\gamma_{rot})} \left(1 + \left(\frac{\rho}{3 \cdot 10^4 \rho_L}\right)^{3(\gamma_{rot}-\gamma_{dis})}\right)\right]^{1/3}} \right] \quad (\text{III.48})$$

En particulier, tant que $\rho < \rho_L$, l'effondrement du milieu est décrit de manière effective par une transformation polytropique isotherme avec $p \sim 1$. Avec cette équation d'état, le taux de fragmentation $\phi(R)$ devrait être en mesure de transitionner entre les différents régimes de fragmentation car à mesure que la densité augmente, l'indice polytropique effectif devrait à un moment donné excéder la valeur seuil $p \sim \frac{4}{3}$ ce qui induit des transitions entre les régimes hiérarchique / monolithique et monolithique / dissipatif.

3. L'indice adiabatique γ pour un fluide représente le rapport des capacités calorifiques à pression constante C_P et à volume constant C_V . Cette quantité caractérise les transformations thermodynamique d'un système en l'absence d'échange de chaleur avec l'extérieur, et dépend de la composition du fluide.

4.2 Evolution du taux de fragmentation

En démarrant avec un nuage de taille $R_0 = 10$ pc et de masse $M_0 = 10^5 M_\odot$, soit une densité initiale $\rho_0 \sim 10^{-18}$ g/cm³, on calcule la tendance du taux de fragmentation $\phi(R)$, exposée dans la Figure III.5 pour différentes valeurs de taux d'injection de masse ξ . Au départ, pour $R > 1$ pc, les écoulements turbulents dominent le processus de fragmentation et induisent une diminution lente du taux de fragmentation entre les valeurs $\phi = 3$ et $\phi \approx 2.5$. Cette diminution est principalement causée par la réduction de la vitesse de fluide à mesure que l'échelle spatiale diminue. Dans le cas d'une très forte accrétion de matière avec $\xi = 1$, le taux de fragmentation sature à sa valeur optimale $\phi = 3$: en déstabilisant le nuage par apport de matière extérieure, toutes les régions contenues dans le nuage sont suffisamment massives (et donc denses) pour s'effondrer.

S'ensuit alors une transition autour de $R \sim 0.1$ pc au cours de laquelle le taux de fragmentation subit des variations rapides jusqu'à la valeur $\phi \approx 1$ où ces variations ralentissent. Cette période de transition décrit la bascule entre un régime où la fragmentation est causée par la turbulence du milieu et un régime où la formation des fragments est causée par l'effondrement hiérarchique du nuage. Durant cette transition, si le rendement de formation des fragments est trop faible (le cas $\xi < -1$), les fragments atteignent le régime dissipatif très rapidement et n'en ressortent pas : aucune étoile n'est formée.

En deçà de cette échelle de transition, pour des tailles $R < 1000$ UA, le taux de fragmentation diminue très rapidement et entre dans le régime dissipatif à des tailles caractéristiques R_{stop} de l'ordre de quelques centaines d'UA. Ces tailles décrivent les échelles typiques pour lesquelles le régime de fragmentation hiérarchique est raccordé à un régime dissipatif et n'apparaissent pas pour un effondrement purement isotherme. Nous verrons par la suite que ces points de raccordement sont en réalité associés à l'augmentation de l'indice polytropique qui caractérise l'effondrement du milieu du fait des hautes densités qui y règnent. Au niveau de ces points, la pression thermique entre en équilibre avec l'effondrement gravitationnel. Cependant, par delà ce régime dissipatif, des fragments de quelques dizaines d'unités astronomiques, peuvent re-émerger et exister : des étoiles peuvent apparaître dans ces fragments. Il existe une gamme d'échelle spatiale comprise entre $10 > R > 100$ UA pour lesquelles le fluide est voué à être dissipé, soit en tombant dans l'objet central soit en s'effaçant dans le nuage à plus grande échelle. Cette interprétation reste malgré tout très discutable étant donné qu'à ces échelles spatiales la condition d'effondrement d'une région ne devrait plus être associée à l'instabilité d'une sphère de gaz en effondrement, mais plutôt à l'instabilité d'un disque en rotation, de géométrie cylindrique, avec potentiellement une contribution non négligeable du champ

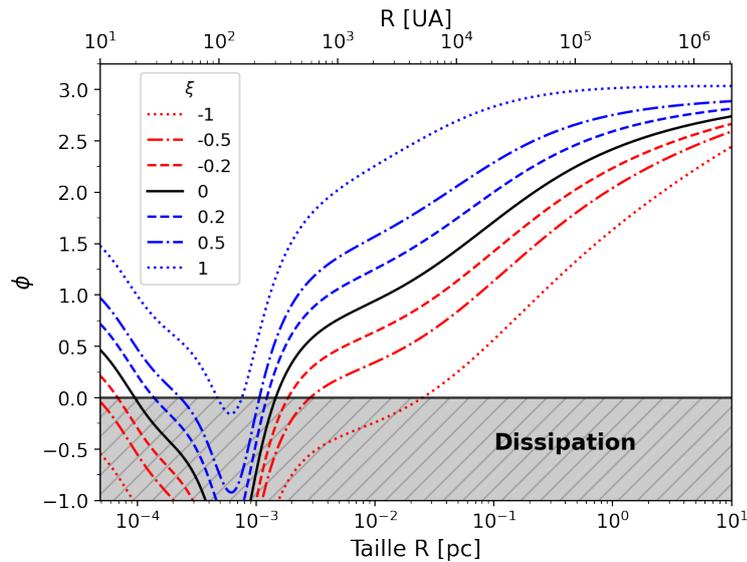


FIGURE III.5 – Évolution du taux de fragmentation en fonction de la taille des fragments pour différents taux d’injection de masse ξ . La fragmentation s’effectue dans un régime hiérarchique jusqu’à ce que la taille des fragments atteigne des échelles spatiales qui permettent de basculer vers le régime dissipatif en croisant la condition de régime monolithique $\phi = 0$.

magnétique sur l’évolution de cette structure.

En conséquence, le taux de fragmentation, calculé dans le cadre de la théorie gravoturbulente, nous informe sur plusieurs choses :

1. Les nuages moléculaires sont effectivement auto-similaires lorsque la fragmentation est causée exclusivement par la turbulence ou par un effondrement isotherme et hiérarchique du nuage ($R < 0.01$ pc et 1 pc $< R < 10$ pc) ;
2. Il existe une brisure de l’auto-similarité quand le moteur de la fragmentation est modifié (bascule turbulence / gravité) ;
3. Les processus adiabatiques brisent l’auto-similarité en deçà de $R < 0.01$ pc ;
4. Il existe une échelle spatiale $R_{\text{stop}} \sim 100$ UA qui décrit un arrêt de la fragmentation hiérarchique du nuage.

4.3 Nombre total de fragments produits

Si on considère que chaque fragment de taille R_{stop} produit une seule et unique étoile, on peut évaluer la quantité d’étoiles produites dans un nuage de taille $R_0 = 10$ pc. C’est l’objet du graphique gauche de la Figure III.6 qui représente le nombre moyen de fragments produits à une taille donnée. Si le nombre de fragments de taille R_{stop} est équivalent

au nombre d'étoiles dans le nuage, on peut voir qu'il y a une très grande disparité dans la population stellaire engendrée par un tel processus de fragmentation. En effet, le nombre d'étoiles varie de l'ordre de quelques dizaines voire centaines de millions pour des taux d'injection de masse $1 > \xi > 0$ jusqu'à l'ordre de quelques milliers au million pour $-1 < \xi < 0$. Si la totalité de la masse du nuage est convertie en étoile ($\xi = 0$), c'est-à-dire sans apport supplémentaire de matière de l'extérieur, on s'attendrait à produire au maximum quelques millions d'étoiles dans une région d'un volume de 10 pc^3 . Cette notion de "totalité de la masse" ne signifie pas que toute la matière du nuage d'origine se retrouve dans les étoiles formées, mais signifie que la masse totale des étoiles après leur formation correspond numériquement à la masse du nuage initialement : il est toujours possible que le nuage accrète de la matière mais que cet apport soit compensé par un faible rendement massique, ce qui résulterait d'un taux $\xi = 0$ en considérant le budget net de ces apports. Bien entendu, ce modèle est à titre indicatif et ne représente pas la réalité de ce qu'il se passe dans un nuage moléculaire, notamment par la lacune théorique que l'on a sur la forme de la fonction $\xi(R)$. Il apparaît ici très important d'avoir des contraintes sur ce taux d'injection de masse étant donné que la quantité d'étoiles formées est très sensible à la valeur numérique de ce paramètre.

Nous pouvons adopter une autre perspective en considérant le nombre moyen d'étoiles $\langle N_* \rangle_R$ localisées dans une région de taille R donnée : c'est-à-dire le nombre d'étoiles qui s'amassent dans un volume donné. C'est l'intérêt de la partie droite de la Figure III.6 qui montre le nombre d'étoiles contenues dans une région de taille R , en fonction de cette taille R . Par définition, si on considère que chaque fragment de taille R_{stop} produit une seule et unique étoile, le nombre d'étoiles $\langle N_* \rangle_R$ contenues dans une région de taille R_{stop} vaut un. Comme les nuages sont auto-similaires à grande échelle, on retrouve un comportement en loi de puissance. Cette quantité est directement comparable aux NESTs ('Nids' en français, *Nested Elementary Structures*) définis et décrits par [Joncour et al. \(2018\)](#) comme des petites structures stellaires regroupant une population dense de jeunes étoiles avec un grand degré de confiance statistique. En supposant que ces structures stellaires reflètent bel et bien les propriétés primitives à leur formation, il est possible de voir dans la partie droite de la Figure III.6 que l'extension spatiale des NESTs de taille $R > 20 \text{ kUA}$ n'est pas incompatible avec des taux d'injection de masse $\xi \sim -0.5$, soit un mode de formation caractéristique d'une perte de masse. De plus, les NESTs de plus petite taille migrent vers des courbes à taux d'injection ξ plus élevée, pouvant témoigner de variations de ξ le long des échelles spatiales. Qui plus est, le nombre d'étoiles par NESTs sature aux alentours de $\langle N_* \rangle_R \sim 5$, entre $R = 10 \text{ kUA}$ et $R = 30 \text{ kUA}$. Une telle stabilisation dans la production des fragments signifie soit que le taux de fragmentation ϕ est nul à ces échelles là, soit que l'effondrement s'effectue de manière quasi-statique. Tou-

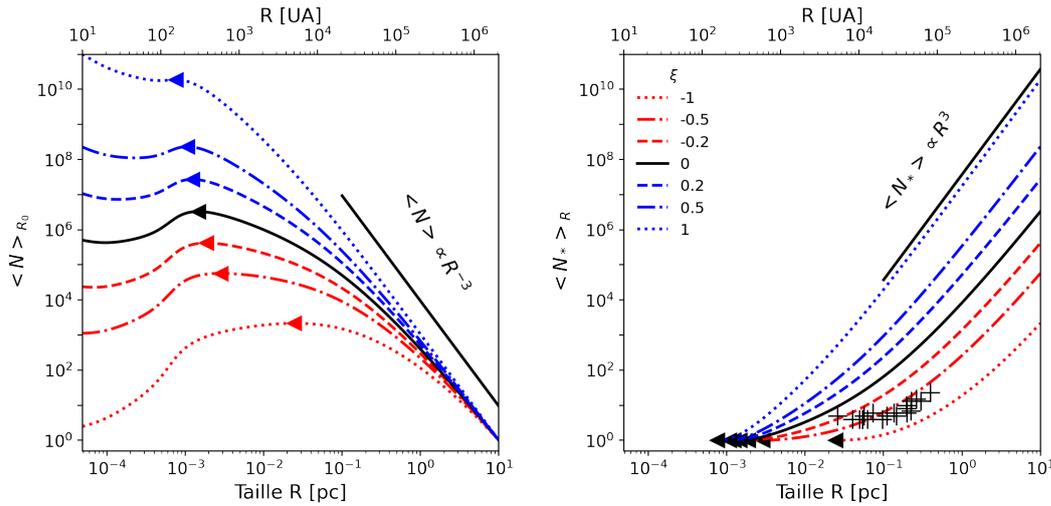


FIGURE III.6 – À gauche : Évolution du nombre moyen de fragments de taille R dans un nuage de taille $R_0 = 10$ pc, pour différentes valeurs de taux d’injection de masse ξ . Les triangles sont indicatifs de l’échelle à partir de laquelle le taux de fragmentation est nul et permet la transition entre un régime hiérarchique à un régime dissipatif. À droite : Nombre moyen d’étoiles localisées dans une région de taille R . Les croix représentent les propriétés des systèmes stellaires compacts appelés NESTs (Joncour et al. 2018), observés dans le nuage du Taureau.

tefois, compte tenu de la multiplicité de ces systèmes, la fragmentation devrait reprendre à plus petite échelle. Ainsi, la multiplicité et le rendement massique réel de production des fragments qui auraient pu engendrer ces NESTs, sur ce domaine spatial très restreint, semblent plus complexes que les prédictions effectuées grâce à notre modèle.

4.4 Masse des fragments

Observons maintenant plus en détails l’évolution de la masse des fragments produits en fonction de leur taille, exposée Figure III.7, toujours pour différentes valeurs de ξ . À grande échelle, pour $R > 0.1$ pc, on retrouve approximativement la relation de Larson en $M \propto R^2$ uniquement avec un taux d’injection de masse $\xi = 1$. Pour toutes les autres valeurs de $\xi < 1$, l’exposant x qui décrit la relation $M \propto R^x$ est plus élevé avec $x > 2$. Cette tendance indiquerait ainsi que les structures de taille $R > 0.1$ pc observées par Larson (1981) soient assujetties à des taux d’injection de masse élevés, de l’ordre de $\xi \sim 1$, témoignant de processus d’accrétion. Toutefois, d’autres observations de structures gazeuses dont les tailles varient entre $0.1 \text{ pc} < R < 1 \text{ pc}$ estiment une relation masse / taille des fragments pour des indices $x = 2.38$ (Traficante et al. 2018), indiquant que le taux d’injection de masse pourrait évoluer vers des valeurs numériques $\xi < 1$, caractérisant une diminution du budget en masse accrétée par les objets produits à plus petite échelle.

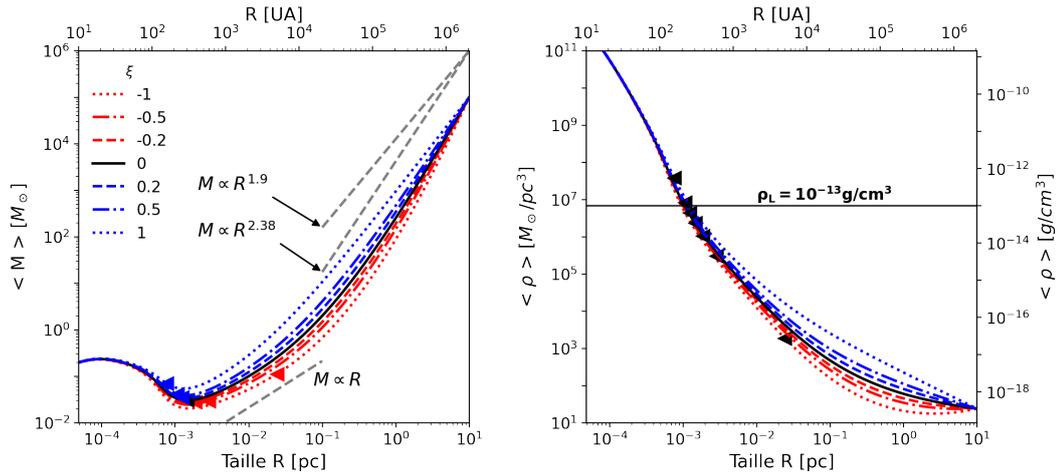


FIGURE III.7 – À gauche : Évolution de la masse des fragments en fonction de leur taille pour différentes valeurs de taux d’injection de masse ξ . Les courbes $M \propto R$, $M \propto R^{1.9}$ et $M \propto R^{2.38}$ représentent respectivement la tendance de la relation masse / taille provenant d’une sphère de Bonnor-Ebert (Bonnor 1956), des lois de Larson (1981) et d’observations au millimétrique et infrarouge sein de la galaxie de Traficante et al. (2018). Les triangles sont indicatifs de l’échelle à partir de laquelle le taux de fragmentation est nul, et transitionne d’un régime hiérarchique à un régime dissipatif. À droite : Évolution de la densité moyenne des fragments en fonction de leur taille. La ligne horizontale délimite la densité critique de Larson (1969) au delà de laquelle le premier cœur de Larson est supposé se former.

Pour $R < 0.1$ pc, on retrouve une relation de type $M \propto R$, soit la relation d’une sphère de Bonnor-Ebert. Or, d’après l’étude des cas limites partie 3.2, on converge vers cette relation pour des fragments isothermes marginalement instables. Ainsi, ce processus de fragmentation converge naturellement vers des solutions marginalement instables : il existe un équilibre dans la production des fragments. En effet, d’après les analyses de la partie 1.2 à taille constante, si le taux de fragmentation est important, les fragments produits sont moins massifs (la masse est répartie entre plus d’enfants) tandis que si le taux de fragmentation est faible, les fragments produits sont plus massifs (l’inexistence d’autres enfants permet à ceux qui existent d’acquérir plus de masse). On a donc deux effets opposés qui agissent et qui s’auto-régulent, ce qui explique cette convergence dans la tendance moyenne. Dans des conditions où ξ est effectivement une constante, cela aurait pour conséquence que les propriétés finales des étoiles ne soient que marginalement déterminées par les conditions initiales qui définissent le nuage à plus grande échelle, et ce, indépendamment de l’efficacité avec laquelle ce nuage distribue sa masse et est alimenté en masse. Cette auto-régulation implique que la masse typique d’une étoile dans un nuage est naturellement de l’ordre de $10^{-2} - 10^{-1} M_{\odot}$.

Bien que le profil M vs R ne soit pas en loi de puissance sur l'intégralité de la gamme de taille considérée, on retrouve tout de même localement des relations en loi de puissance lorsque la fragmentation est régulée soit par la turbulence pour $R > 0.1$ pc, soit par l'effondrement hiérarchique du nuage pour $R < 0.1$ pc. Bien entendu, entre les deux il existe toujours un domaine de transition. Ainsi, comme on s'y attendrait mathématiquement, il n'est pas nécessaire d'avoir une valeur ϕ constante pour considérer le milieu comme auto-similaire, mais il suffit que les variations de ϕ soit suffisamment faibles pour qu'on confonde la courbure locale de la courbe $M(R)$ avec une droite de type $M \propto R^x$. Dans ce cas, le milieu présenterait une auto-similarité apparente, qui resterait très localisée avant et après la transition à $R \sim 0.1$ pc.

En regardant la densité des fragments produits dans le cadran droit de la Figure III.7, on voit que les points d'arrêt de la hiérarchie R_{stop} sont localisés autour de la limite de densité ρ_L qui marque la transition isotherme / adiabatique avec $p \sim \gamma_{ad} = \frac{5}{3}$. Pour ces solutions, les conditions sont favorables à l'apparition du premier cœurs de Larson qui implique la formation d'une étoile dans ces objets. En revanche, pour $\xi = -1$, les conditions de densité ne permettent pas à la température interne d'augmenter, on a toujours $p = 1$, ce qui prévient la formation du premier cœurs de Larson, et par extension la formation d'étoiles. De plus, [Lee & Hennebelle \(2018\)](#) définissent le premier cœurs de Larson lorsque le profil radial en densité $\rho \propto r^a$ est raide pour des valeurs $a < -2$. Dans leurs simulations, un tel profil est atteint lorsque la taille de l'objet est de l'ordre de quelques dizaines d'UA. Pour quelques centaines d'UA, bien que la densité critique ρ_L soit atteinte, le profil radial en densité ne répond pas à cette définition. Pour aller plus loin dans l'interprétation de ce modèle, il faudrait une fois de plus introduire l'évolution dynamique du profil radial en densité $\rho(r)$ des fragments produits.

Chapitre IV

Le taux de fragmentation dans le nuage moléculaire *NGC 2264*

Sommaire

1	Données utilisées	97
1.1	Cartes <i>Herschel</i>	97
	↔ Résolutions spatiales des cartes d'émission	97
	↔ Carte de densité de colonne	97
1.2	Extraction des fragments denses de poussières	98
	↔ Procédure d'extraction <i>getsf</i>	99
	↔ Taille typique <i>R</i> des fragments	99
1.3	Catalogue de YSOs utilisé	101
	↔ Définition des différentes classes de YSOs	101
	↔ Sélection des YSOs	101
2	Combinaison des jeux de données à l'aide d'un réseau connecté	103
2.1	Construction du réseau	103
2.2	Structures multi-échelles	104
2.3	Définition du critère d'inclusion	104
2.4	Effectif des structures multi-échelles extraites	105
2.5	Évaluation du statut évolutif des structures multi-échelles	107
3	Distribution spatiale des structures multi-échelles	110
3.1	Relation avec la colonne densité	110
3.2	Évaluation d'un alignement fortuit de structures linéaires	111
3.3	Probabilité d'observer une structure linéaire	114
4	Une mesure du taux de fragmentation	115
4.1	Le coefficient de fractalité : une métrique en deux dimensions	115

4.2	Incertitudes et biais associés	118
	↔ Coïncidence hiérarchique	118
	↔ Carence en fragments dans les réseaux	119
	↔ Géométrie des fragments et projection en deux dimensions	121
4.3	Résultats et interprétation de la mesure du taux de fragmentation	122
5	Test d’auto-similarité du nuage	124
5.1	Nombre de fragments produits le long des échelles	124
	↔ Productivité des fragments sans filtrage des structures coïnci- dentes	126
	↔ Productivité des fragments après filtrage des structures coïnci- dentes	127
5.2	Discussion sur la réalité de la brisure d’invariance d’échelle	127
	↔ Effet de la résolution spatiale des observations	127
	↔ Influence de la longueur d’onde d’observation	128
	↔ Contraintes géométriques de fragments elliptiques	131
5.3	Résultat et interprétation du suivi multi-échelle de la fragmentation	132
	↔ Fragmentation localement monolithique	132
	↔ Mesure d’auto-similarité	133

Ce chapitre se consacre à la reconstruction de la structure multi-échelle et multi-longueur d’onde d’un nuage à partir de données observationnelles, afin d’en dériver le taux de fragmentation ϕ introduit dans les chapitres précédents. Cette étude a pour objectif d’interpréter des observations dans le prisme de notre modèle de fragmentation multi-échelle, pour les confronter avec nos prédictions. Une proposition d’analyse basée sur notre modèle de fragmentation sera présentée pour étudier la sous-fragmentation d’objets denses (des fragments) dans les nuages moléculaires. En tant qu’étude préliminaire, la procédure utilisée dans ce chapitre reste bien évidemment perfectible et nous verrons les biais possibles et les sources d’incertitudes dans la détermination du taux de fragmentation.

Pour effectuer cette analyse, nous utilisons les données d’un nuage moléculaire, de son nom poétique NGC 2264, dont les observations tirées du télescope spatial *Herschel* (Motte et al. 2010) ont déjà fait l’objet d’études par des membres de notre groupe de recherche à l’IPAG (Cunningham et al. 2016; Nony et al. 2021). Éloigné de notre planète d’une distance de 723 pc (Cantat-Gaudin, T. et al. 2018) et localisé dans le Nord de la constellation de la Licorne, NGC 2264 est un nuage moléculaire froid qui héberge des amas d’étoiles massives dont l’âge atteint en moyenne les 5 millions d’années (Venuti et al. 2018), et dont la forte émission UV engendre la formation très localisée de régions

HII dans le nuage (Dahm 2008). L'étoile la plus brillante est appelée *S Mon*, et gît dans la région Nord du nuage (voir dans la Figure IV.1). La zone centrale du nuage, localisée à environ 5pc de *S Mon*, est caractérisée par deux régions de formation active d'étoiles (Peretto et al. 2006; Teixeira et al. 2006), NGC 2264-D et NGC 2264-C qui se distinguent respectivement par la présence de deux étoiles massives très brillantes *IRS1*¹ et *IRS2*², qui surplombent la nébuleuse du Cône plus au Sud. Entre *S Mon* et la nébuleuse du Cône, la distribution spatiale des jeunes étoiles est caractérisée par un gradient d'âge dans lequel les étoiles proches de la séquence principale se retrouvent au Nord, tandis que les proto-étoiles continuent d'être produites plus au Sud (Sung et al. 2009; Venuti et al. 2018). En particulier, les régions NGC 2264-C et -D contiennent de nombreuses proto-étoiles (Rapsion et al. 2014) encore enfouies dans une enveloppe de gaz et de poussières, et exhibent des signes de sous-structuration trahissant des phénomènes de fragmentation (Williams & Garland 2002; Teixeira et al. 2006). À grande échelle, les écoulements de gaz tendent à converger vers ces régions témoignant potentiellement d'un effondrement local de ces structures (Williams & Garland 2002; Peretto et al. 2006; Nony et al. 2021). Malgré la présence de jets de matières au sein de NGC 2264-C pouvant engendrer de la turbulence à grande échelle (Maury et al. 2009; Cunningham et al. 2016), l'effondrement de cette structure semble être gouverné par une fragmentation gravitationnelle de type Jeans. Le nuage moléculaire NGC 2264, par sa fragmentation localisée et son activité de formation d'étoiles, correspond à une région idéale pour tester notre analyse multi-échelle, et quantifier par le biais du taux de fragmentation, la sous-structuration des amas centraux.

Ce chapitre est constitué de résultats publiés dans le cadre de cette thèse (Thomasson et al. 2022), dont une copie (en anglais) est fournie en Annexe C. Ces résultats ont été analysés en relation avec un modèle de fragmentation dans un stade encore juvénile. Aussi, nous aborderons ces résultats dans une version plus aboutie du modèle tel que présenté dans les chapitres II et III.

Dans la partie 1 de ce chapitre, nous présenterons le jeu de données utilisé pour effectuer notre analyse multi-échelle, qui comprend un ensemble de fragments de gaz et de poussières extraits de données *Herschel*, et un ensemble d'objets stellaires jeunes (ou YSOs, *Young Stellar Objects*). Ces constituants du nuage sont ensuite associés les uns aux autres dans la partie 2 à l'aide de la représentation en réseau de notre modèle de fragmentation et nous évaluerons également la relation existante entre les YSOs et les structures multi-échelles extraites par notre procédure. Dans la partie 3, nous regarderons la distribution spatiale des différentes structures extraites en relation avec la densité de colonne

1. Référencé comme IRAS 06384+0932.
2. Référencé comme IRAS 06382+0939.

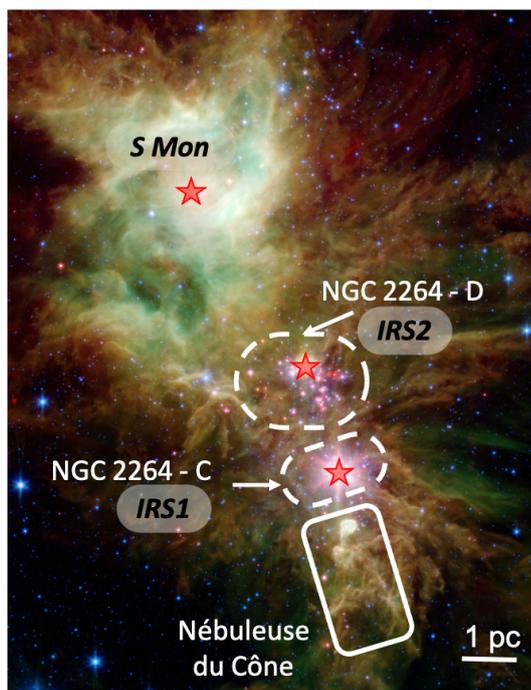


FIGURE IV.1 – Le nuage moléculaire NGC 2264 vu par le télescope spatial *Spitzer*. Crédit : NASA/JPL-Caltech/P.S. Teixeira (Center for Astrophysics). Les étoiles massives *S Mon*, *IRS1* et *IRS2* sont affichées avec une étoile rouge. Les régions de formation actives NGC 2264-C et -D sont entourées en pointillés tandis que la nébuleuse du Cône est entourée en trait plein.

du nuage. Nous introduirons ensuite dans la partie 4 une procédure pour mesurer le taux de fragmentation et lui associer une incertitude compte tenu des contraintes observationnelles. Finalement, nous regarderons plus spécifiquement dans la partie 5 l'évolution de la quantité de fragments produits au sein des structures, en fonction des échelles spatiales, pour tester le caractère auto-similaire du nuage.

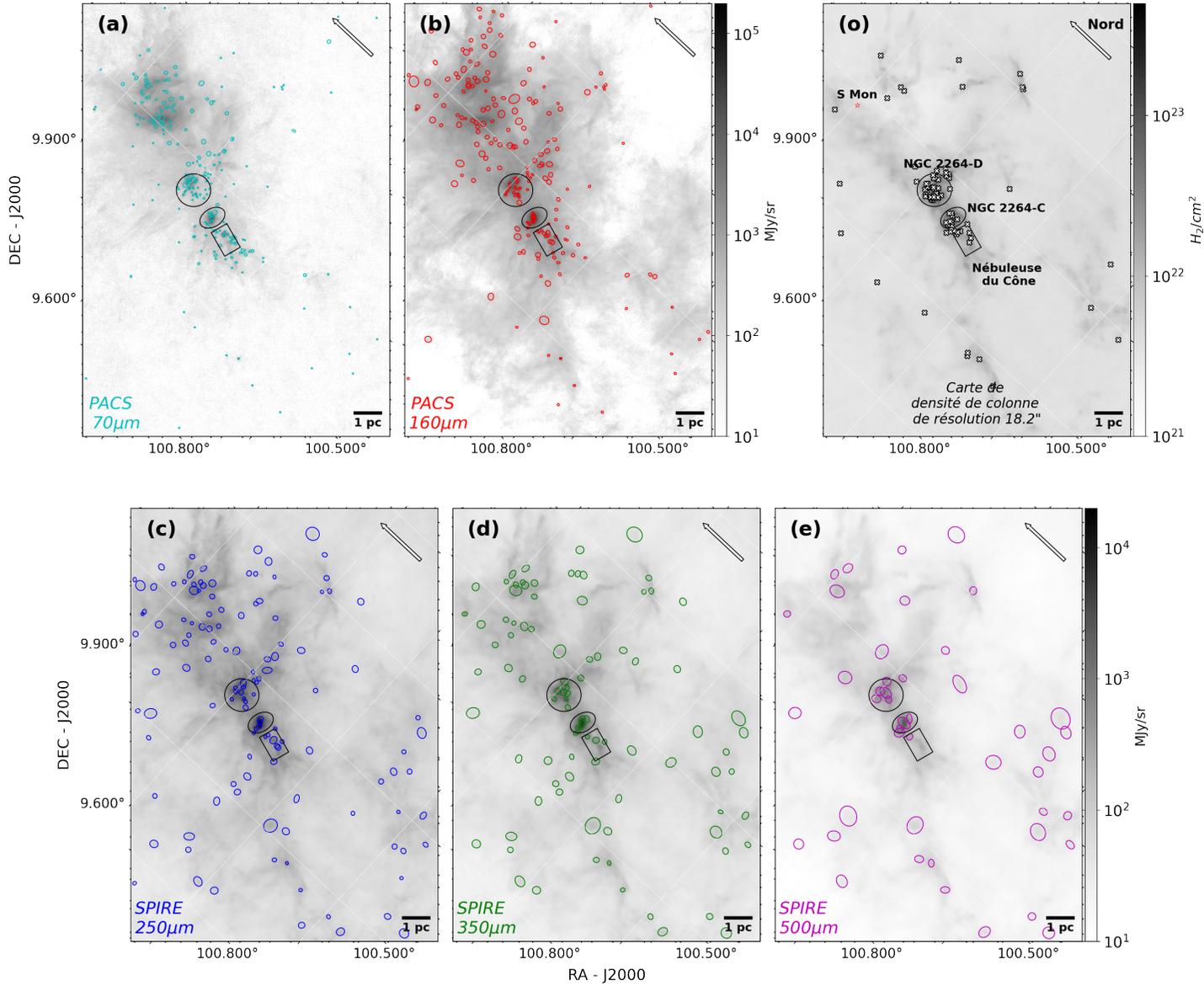


FIGURE IV.2 – Localisation des fragments elliptiques extraits par l’algorithme *getsf* sur chacune des cartes *Herschel* (a-b-c-d-e), et des YSOs de classe 0/I sous forme de croix sur la carte de densité de colonne (o). L’image de densité de colonne (o) indique les régions notables de NGC 2264 qui se retrouvent sur les autres cartes, où l’étoile rouge symbolise *S Mon*.

1 Données utilisées

1.1 Cartes *Herschel*

Résolutions spatiales des cartes d'émission

Pour avoir un suivi de l'évolution du taux de fragmentation le long de plusieurs échelles spatiales, nous utilisons les cartes d'émission de NGC 2264 tel qu'observé par *Herschel*. Ces cartes sont tirées du programme d'observation *HOBYS* (*Herschel imaging survey of OB Young Stellar objects*, [Motte et al. \(2010\)](#)). *Herschel* est un télescope spatial dont les observations s'effectuent dans le domaine de l'infrarouge lointain ce qui permet de sonder la matière moléculaire froide du milieu interstellaire, sous forme de poussières. Les données qui nous intéressent sont issues de deux instruments montés à son bord : PACS (*Photodetector Array Camera & Spectrometer*) et SPIRE (*Spectral & Photometric Imaging Receiver*). Les données observées par le programme *HOBYS* se composent de cinq cartes d'émission à des longueurs d'onde de 70, 160, 250, 350 et 500 μm dont les résolutions angulaires respectives sont de 8.4, 13.5, 18.2, 24.9 et 36.3 secondes d'arc ("). Les cartes à 70 et 160 μm sont mesurées par l'instrument PACS tandis que les cartes à plus hautes longueurs d'onde sont originaires de l'instrument SPIRE.

Pour une distance de 723 pc avec NGC 2264 ([Cantat-Gaudin, T. et al. 2018](#)), ces résolutions angulaires correspondent respectivement à des échelles spatiales de $\sim 6, 10, 13, 18$ et 26 kUA. Pour la suite nous considérons une région commune aux cinq cartes, décrite par une fenêtre rectangulaire dont les sommets ont pour coordonnées, en format Ascension droite - Déclinaison (*RA J2000 - DEC J2000*) : (100.10 - 10.15) degrés ($^{\circ}$), (99.52 - 9.53) $^{\circ}$, (100.40 - 8.72) $^{\circ}$ et (100.98 - 9.34) $^{\circ}$. De ce fait notre champ de vue total s'étend sur une surface de l'ordre de 10 pc^2 . Un aperçu de ces cinq images d'émission infrarouge de poussières est donné dans la Figure IV.2-(o), avec les positions de *S Mon*, de la nébuleuse du Cône et des régions actives de formation NGC 2264-C et -D.

Carte de densité de colonne

En supplément de ces cinq cartes d'émission, une carte de la densité de colonne a été calculée à une résolution de 18.2" grâce à la méthode `highres` de la suite `getsf` ([Men'shchikov 2021](#)). Cette méthode ajuste pixel par pixel les distributions spectrales d'énergie des images *Herschel* avec le profil d'émission d'un corps noir en utilisant les émissions à 160, 250, 350 et 500 μm ³ tout en supposant une émission infrarouge optique-

3. La carte d'émission à 70 μm ne traçant pas nécessairement une émission d'origine thermique, son utilisation dans l'ajustement par un corps noir apporterait une source d'erreur trop importante, nous l'avons donc volontairement mise de côté.

ment mince et un rapport de masse gaz/poussières de 100. Cette opération d’ajustement pixel par pixel nécessite dans un premier temps de projeter sur une même grille les pixels de l’ensemble des cartes. Ici, la grille de pixels de référence est définie par une matrice de 1523×2147 pixels dont le côté d’un pixel représente $2.0''$. Ensuite, la méthode `highres` regroupe les cartes en trois ensembles ($160, 250, 350, 500$) μm ; ($160, 250, 350$) μm et ($160, 250$) μm . La résolution de chaque carte est alors dégradée par convolution avec un kernel gaussien dont la largeur à mi-hauteur correspond à la plus faible des résolutions de l’ensemble d’images considéré. Par exemple, dans l’ensemble ($160, 250, 350$) μm , les cartes sont dégradées à la résolution $\theta'' = 24.9''$ associée à l’image à $350 \mu\text{m}$. De ces trois séries d’ajustement résultent trois images de densité de colonne de résolutions spatiales différentes, $D_{18.2''}$, $D_{24.9''}$ et $D_{36.6''}$. L’image la plus fiable est celle obtenue par ajustement de l’ensemble disposant du plus grand nombre de longueurs d’onde, soit $D_{36.6''}$. Pour améliorer sa qualité, la méthode `highres` transfère de manière différentielle les informations contenues à plus haute résolution (dans les images $D_{18.2''}$ et $D_{24.9''}$) vers l’image $D_{36.6''}$, et calcule une carte de densité de colonne à la résolution $\theta'' = 18.2''$. La carte en densité de colonne résultante de cette procédure est décrite en terme de nombre de molécules de H_2 par $/\text{cm}^2$ [N_{H_2}/cm^2], et est donnée dans la Figure IV.2-(o).

1.2 Extraction des fragments denses de poussières

Sur chacune des cinq cartes d’émission *Herschel*, des fragments denses de poussières ont été définis en utilisant la méthode d’extraction multi-échelle de sources et de filaments `getsf` (Men’shchikov 2021) sous la version v210609. Cet algorithme dissocie trois composantes structurantes d’une image qui sont les sources, les filaments et l’arrière-plan qui comprend l’émission issue de la matière devant ou derrière les autres composantes. Dans cette procédure d’extraction, une source est définie comme étant un pic d’émission dont l’amplitude est significativement plus importante que les fluctuations environnantes. Cet excès de rayonnement implique alors la présence d’un ou de plusieurs objets qui en sont la cause. Ainsi, on définit comme fragment toute source qui englobe de tels objets. Comme nous ne nous intéressons ici qu’à l’extraction de fragments à géométrie plutôt sphérique dont l’élongation n’est pas prononcée, nous ne prendrons pas en compte les composantes identifiées comme filaments qui restent intégrées dans l’arrière-plan. La méthode `getsf` ne nécessite qu’un seul paramètre d’entrée, à savoir la taille maximale $X_{\text{max}} = 1.5 \theta''$ des sources extraites que nous avons choisi ici comme étant 1.5 fois la résolution angulaire θ'' associée pour chaque image. Ce choix nous permet de ne pas être trop sélectif dans les tailles des sources extraites pour avoir une bonne statistique, mais permet aussi d’éviter l’extraction d’objets trop étendus spatialement. La distribution spatiale de ces sources peut être retrouvée dans la Figure IV.2 avec leurs images respectives.

Procédure d'extraction `getsf`

Pour extraire les sources, `getsf` décompose une image pour en isoler les éléments provenant des différentes échelles spatiales. Pour distinguer les sources de l'arrière-plan, `getsf` segmente chacune des contributions provenant de chacune des échelles spatiales en différents niveaux d'intensité. Ceci a pour but de définir des masques désignant l'ensemble des pixels contribuant à l'émission de l'image originelle, à un niveau d'intensité donné et à une échelle spatiale donnée. Seuls sont conservés les objets à géométrie elliptique dont la taille moyenne n'excède pas la taille maximale X_{\max} introduite comme paramètre en entrée de `getsf`. Les objets filtrés représentent ainsi la composante source d'une image. Cette première étape consiste principalement à repérer la position des sources et évaluer leur extension spatiale. Lors de cette étape, l'extension spatiale d'une source est déterminée par rapport à l'échelle spatiale sur laquelle cette source est la plus brillante.

Dans une seconde étape, la taille des sources est ajustée afin d'équilibrer le niveau d'intensité de l'arrière plan des sources par rapport au niveau de l'arrière plan environnant, à l'extérieur des sources. Dans cette étape, l'arrière plan est évalué en interpolant linéairement l'image originale soustraite de la composante source dont l'extension spatiale est modifiée itérativement afin de réaliser cet équilibrage. Le flux en émission des sources est mesuré sur l'image originale soustraite de cet arrière-plan. Cette opération a néanmoins tendance à augmenter la taille des sources dans le cas de profil d'émission non gaussien, jusqu'à potentiellement un facteur deux (Men'shchikov 2021). Les catalogues produits en sortie de `getsf` contiennent les caractéristiques spatiales des fragments représentés par des ellipses (Figure IV.3). Nous pouvons y trouver :

1. leur extension spatiale A_{LMH} et B_{LMH} , associée aux largeurs à mi-hauteur (LMH) d'un profil d'émission gaussien équivalent ;
2. leurs positions sur le plan céleste ;
3. l'orientation angulaire de l'ellipse dans ce plan par rapport à l'axe Nord du nuage (voir Figure IV.3).

Bien que le catalogue résultant contienne également les flux en émission de chaque source, nous n'utiliserons pas ces mesures de flux car, comme nous le verrons par la suite, nous ne nous intéressons dans cette étude qu'à la distribution spatiale des sources dans le nuage et à leur inclusion mutuelle.

Taille typique R des fragments

Pour pouvoir réaliser une analyse multi-échelle sur ces extractions, définissons la taille caractéristique R d'un fragment comme l'extension spatiale que décrit la demi-largeur

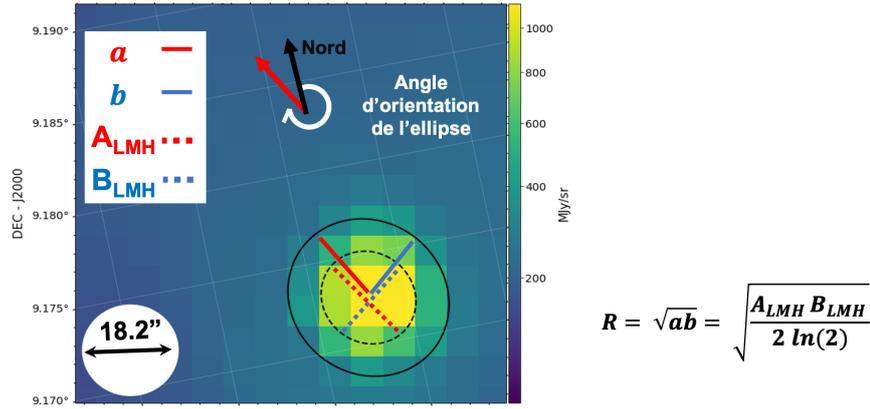


FIGURE IV.3 – Définition de l'extension spatiale des fragments extraits par *getsf*. Un fragment extrait sur la carte *Herschel* de résolution 18.2'' est représenté. L'ellipse en pointillé représente l'extension spatiale de la source telle qu'extraite par *getsf*, par rapport aux largeurs à mi-hauteur (LMH) A_{LMH} et B_{LMH} de son profil d'émission gaussien. L'ellipse pleine délimite l'extension spatiale utilisée pour l'analyse multi-échelle. La taille R des fragments est définie par rapport aux demi-axes a et b qui caractérisent l'extension à 2σ du profil gaussien des sources. L'orientation de l'ellipse est définie comme l'angle entre l'axe du Nord et le demi-grand axe a de l'ellipse, dans le sens horaire.

d'un profil gaussien à 2σ . Cette extension à 2σ étant relié à la LMH par :

$$LMH = \underbrace{2\sigma}_{\text{taille typique}} \times \sqrt{2 \ln(2)} \quad (\text{IV.1})$$

Les demi-grand/petit axes a, b d'un fragment elliptique s'expriment alors comme :

$$a = \frac{A_{LMH}}{\sqrt{2 \ln(2)}} \quad (\text{IV.2})$$

$$b = \frac{B_{LMH}}{\sqrt{2 \ln(2)}} \quad (\text{IV.3})$$

En conséquence, la moyenne géométrique $R = \sqrt{ab}$ d'un fragment elliptique retranscrit l'extension à 2σ de son profil gaussien sur chacun de ses axes :

$$R = \sqrt{\frac{A_{LMH} B_{LMH}}{2 \ln(2)}} \quad (\text{IV.4})$$

Il est possible de voir le résultat de ces extractions sur les cartes affichées dans la Figure IV.2, et les quantités d'objets extraits dans le Tableau IV.1. Un total de 231, 202, 126, 92 et 46 fragments sont ainsi extraits des cartes d'émission *Herschel*, associés à des résolutions d'extraction de 8.4, 13.5, 18.2, 24.9 et 36.3''.

1.3 Catalogue de YSOs utilisé

Définition des différentes classes de YSOs

Un objet stellaire jeune (ou YSO pour *Young Stellar Object*) caractérise une phase précoce de l'évolution d'une étoile dans laquelle son environnement subit de nombreux changements (voir Figure IV.4). Au moment de sa formation, une proto-étoile est encore profondément enfouie dans une enveloppe de gaz et de poussières, puis cette enveloppe tombe peu à peu dans la proto-étoile et un disque d'accrétion se forme. Ce disque se fragmente pour former des planétésimaux avant de se disperser totalement. Les différents stades évolutifs des YSOs sont traditionnellement répartis en quatre classes représentant chacune un âge évolutif différent :

1. La classe 0 qui représente une proto-étoile encore enfouie dans son enveloppe de gaz et de poussières (âge < 0.01 millions d'années);
2. La classe I qui désigne une proto-étoile dont le disque de poussières commence à se former (âge ~ 0.1 millions d'années);
3. La classe II qui correspond à un objet en marge de rejoindre la séquence principale, objet autour duquel l'enveloppe s'est dispersée et le disque proto-planétaire s'est formé (âge ~ 1 million d'année);
4. La classe III dans laquelle l'étoile voit son disque s'effacer (âge < 10 millions d'années).

Le spectre de rayonnement de ces objets est constitué du rayonnement de l'étoile centrale, assimilable à un corps noir, mais aussi du rayonnement des poussières autour de l'étoile qui alimentent une forte composante infra-rouge ce qui, dans le cas d'objets profondément enfouis dans une enveloppe, peut absorber le rayonnement visible de l'étoile. Ces différentes classes se distinguent alors en fonction de l'excès infrarouge que leur spectre de rayonnement arbore. À mesure que le matériau constituant le disque ou l'enveloppe s'épuise, l'excès d'émission infrarouge des poussières diminue. En ce sens, les différentes YSOs sont classifiées par rapport à leur excès infrarouge à des longueurs d'onde $\lambda \gtrsim 10 \mu\text{m}$.

Sélection des YSOs

Pour compléter les cinq catalogues d'extraction `getsf` cités dans la partie précédente, nous ajoutons un catalogue de YSOs produit par [Rapson et al. \(2014\)](#) obtenu à partir des données du télescope spatial *Spitzer*. Les instruments montés à bord de *Spitzer*, dont sont issues ces données, balayaient différentes longueurs d'onde : IRAC (*Infrared Array Camera*) possédant des bandes d'observation centrées autour de 3.6, 4.5, 5.8 et 8.0 μm , et MIPS

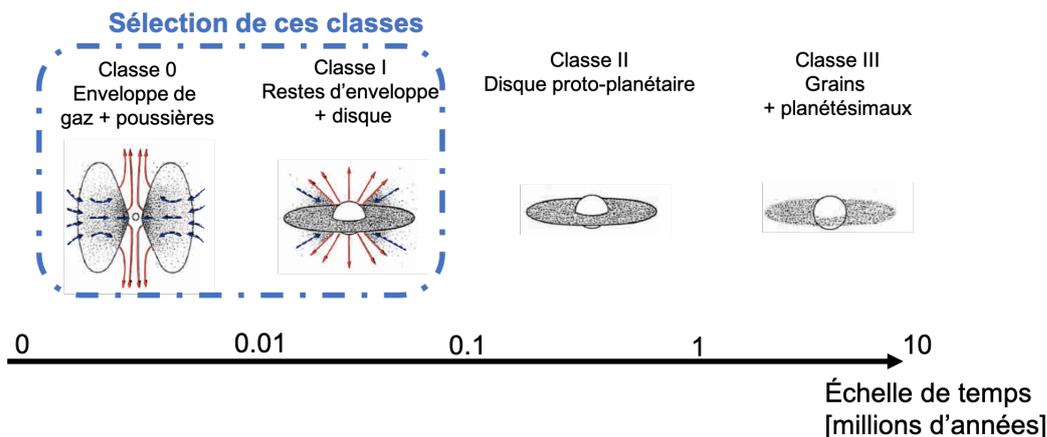


FIGURE IV.4 – Évolution empirique et classification des jeunes étoiles d’après (André 2002). Une proto-étoile encore enfouie dans son enveloppe (Classe 0) évolue pour former un disque d’accrétion (Classe I), puis évacue totalement son enveloppe (Classe II) pour finalement voir apparaître dans son disque, des planétésimaux (Classe III). Les flèches rouges représentent des jets de matière tandis que les flèches bleues représentent les processus d’accrétion sur l’étoile centrale. Dans ce travail nous nous focalisons que sur les classes 0 et I qui sont les étoiles les plus jeunes.

(*Multiband Imaging Photometer*) dont les bandes couvrent des longueurs d’onde centrées à 24, 70, et 160 μm . Une classification basée sur l’utilisation couplée des bandes d’observation *Spitzer* (Gutermuth et al. 2009) est utilisée pour attribuer des classes de YSOs en fonction de leur émission infrarouge. Le catalogue de Rapson et al. (2014) regroupe des populations de YSOs de classe III, II et une classe 0/I combinant comme son nom l’indique, les classes 0 et I. Représentant la population d’étoiles la plus jeune et la plus susceptible d’être localisée à proximité de leur lieu de formation originel, seules les YSOs de classe 0/I sont préservées par la suite. Comme l’extraction des fragments par *getsf* est effectuée sur un champ de vue restreint par *Herschel*, nous conservons uniquement les YSOs localisées à l’intérieur de ce champ. Au final, 87 YSOs de classe 0/I sont retenues dans cette post-sélection, soit 87 fragments supplémentaires qui viennent compléter les extractions *getsf*. Dans cet échantillon, 5% des YSOs sont suffisamment enfouies dans leur enveloppe pour n’être détectés que par les 24 μm de MIPS, dont la résolution est de $\sim 7''$; tandis que les autres 95% possèdent au moins une détection validée par une bande de l’instrument IRAC dont la résolution est de $\sim 2''$. Par simplification nous choisissons d’associer à la totalité des classes 0/I une échelle spatiale caractéristique de $2''$, correspondant à une taille physique de 1.4 kUA.

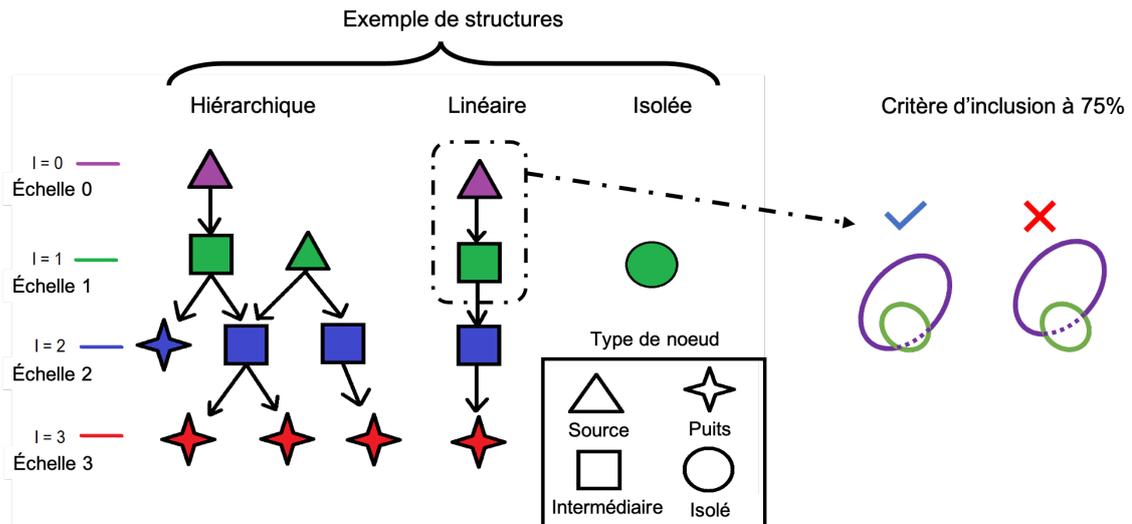


FIGURE IV.5 – Organisation d'un réseau représentant une structure multi-échelle, avec le critère d'inclusion d'un enfant dans son parent. Chaque couleur correspond à une échelle notée sur la gauche. Chaque forme de nœud correspond à un type de nœud (source, puits, intermédiaire ou isolé). Les trois types de structure multi-échelle sont représentés en guise d'exemple : hiérarchique, linéaire et isolé. Sur la droite est représenté un cas où un fragment est considéré comme un enfant (75% de son aire est incluse dans le parent), et un autre cas où ce fragment ne l'est pas.

2 Combinaison des jeux de données à l'aide d'un réseau connecté

2.1 Construction du réseau

Dans les parties précédentes, nous avons introduit les différents catalogues qui composent un jeu de données complet constitué d'objets de natures différentes : des fragments denses de poussières extraits par `getsf` (Men'shchikov 2021) et des YSOs de classe 0/I tirées du catalogue de Rapson et al. (2014). En adoptant la même représentation que dans notre modèle (formulé dans le chapitre II), deux fragments peuvent être inter-connectés par le biais d'une arête si l'un est contenu dans l'autre. En reprenant la terminologie des chapitres précédents, un fragment est dit enfant s'il est contenu dans un autre fragment appelé parent; une généalogie traçant l'inclusion spatiale entre les différents fragments étant alors représentée sous forme de réseau connecté. Pour rappel, ce réseau est composé de plusieurs niveaux l qui représentent chacun une échelle spatiale R_l . Chaque niveau est constitué d'un ensemble de fragments de taille R_l représentés par des nœuds. D'un niveau à un autre ces nœuds sont connectés, ou non, par des arêtes qui représentent la filiation entre un fragment parent à grande échelle avec les fragments enfants qu'il contient. Ces arêtes sont dirigées dans le sens de la descendance, des grandes échelles vers les plus

petites. On rappelle également la dénomination de quatre types de nœuds (voir la Figure IV.5 pour des exemples) :

1. Nœud source : nœud sans ascendance mais avec une descendance ;
2. Nœud intermédiaire : nœud avec une descendance et une ascendance ;
3. Nœud puits : nœud sans descendance mais avec une ascendance ;
4. Nœud isolé : nœud sans descendance ni ascendance.

2.2 Structures multi-échelles

D'un point de vue de l'architecture globale du nuage, un réseau décrit une structure multi-échelle qui contient l'information locale sur l'intrication entre les différents fragments, et trace la corrélation spatiale qu'un parent entretient avec ses enfants. On distingue trois types de structures multi-échelles (voir la Figure IV.5 pour des exemples) :

1. Structure hiérarchique : structure dont au moins un des fragments qui la compose se subdivise, assimilée à un mode de fragmentation hiérarchique ;
2. Structure linéaire : structure non isolée dont aucun des fragments qui la compose ne se subdivise, assimilée à un mode de fragmentation monolithique ;
3. Structure isolée : structure qui ne contient qu'un seul et unique fragment, peut être assimilée à un mode de fragmentation dissipatif si aucun fragment n'est produit dans le futur, ou à plus haute résolution.

Les structures hiérarchiques seront d'un intérêt particulier pour évaluer le taux de fragmentation ϕ . Les réseaux associés à chacune des structures sont organisés en différents niveaux discrets qui représentent les échelles spatiales des fragments qui y demeurent. On assigne alors à chaque catalogue une échelle de fragmentation R_l , ce qui nous permet de définir au total six échelles spatiales $\sim 1.4, 6, 10, 13, 18$ et 26 kUA correspondant respectivement aux six résolutions angulaires disponibles $2.0, 8.4, 13.5, 18.2, 24.9$ et $36.3''$ pour une distance de 723 pc avec NGC 2264. Chaque fragment est alors associé à l'échelle spatiale R_l du catalogue dont il est tiré, par exemple un fragment extrait par `getsf` de la carte *Herschel* à $18.2''$ sera localisé sur le niveau de fragmentation associé à l'échelle 13 kUA.

2.3 Définition du critère d'inclusion

L'extension spatiale des fragments denses de gaz et de poussières peut être sujette à des variabilités en raison de la difficulté à définir leur limite de contour par rapport à leur environnement, de leur définition par `getsf`, ou du fait qu'entre deux échelles, la longueur

d'onde puisse modifier la structure du nuage. Ainsi, rien ne garantit qu'un fragment enfant soit totalement inclus à l'intérieur de son parent. Pour pallier à l'incertitude quant à la définition des bords des fragments extraits, nous prescrivons un critère de regroupement pour les couples parent/enfant. Considérons qu'une arête se crée entre un parent et un enfant lorsqu'au moins 75% de la surface totale de l'enfant est contenue dans le parent à plus grande échelle (voir la Figure IV.5). Ce critère est certes totalement arbitraire mais permet d'être suffisamment :

1. flexible pour associer des fragments vis à vis des recouvrements potentiels entre les fragments qui n'ont pas de bords clairement définis ;
2. stricte pour ne pas regrouper des structures voisines et ne pas définir des structures à moitié vides.

De plus, les résultats qui suivent ne fluctuent que très peu si on abaisse ou augmente ce critère à 65% ou 85%. Avec cette méthode, on construit une collection de sous-réseaux déconnectés les uns des autres. Il est d'ailleurs possible de voir dans la Figure IV.6 l'intégralité des structures hiérarchiques extraites avec cette méthode et leur équivalent en terme de réseau.

2.4 Effectif des structures multi-échelles extraites

Après association des différents fragments sous forme de structures, on dénombre un total de 334 structures dont 23 sont hiérarchiques, 135 sont linéaires et 176 sont isolées (les effectifs complets sont reportés dans le Tableau IV.1). La carte du milieu de la Figure IV.7 montrant la distribution spatiale des structures extraites révèle que les structures hiérarchiques sont principalement localisées dans les deux régions centrales du nuage et au Nord, tandis que les structures linéaires se situent dans le filament Nord et dans la région Sud. Les structures isolées quant à elles sont distribuées dans l'ensemble du nuage et ne semblent pas se restreindre à des régions spécifiques.

Les structures hiérarchiques contiennent 52% de la population totale de YSOs et 28% de l'ensemble des fragments de poussières. À l'inverse, les structures linéaires n'hébergent que 28% de la population totale d'étoiles jeunes du nuage et contiennent 50% des fragments de poussières. Ainsi, 20% des YSOs n'ont pas de contrepartie à plus grande échelle et constituent des structures isolées, leur matériau à grande échelle ayant été vraisemblablement totalement évacué ou consommé. Par ailleurs, les structures linéaires représentent une population six fois plus importante que les structures hiérarchiques qui sont sous-représentées dans le nuage. Plus généralement, les structures hiérarchiques produisent en moyenne 2.0 YSOs, tandis que les structures linéaires produisent en moyenne 0.2 YSOs.

Or, les structures linéaires peuvent produire au maximum une seule YSO. Le déficit de jeunes étoiles concernant les structures linéaires est dû au fait que la majorité d’entre elles ne descendent pas jusqu’au stade de la formation d’une jeune étoile, en particulier dans la région Sud de NGC 2264. Nous discuterons plus amplement de ce déficit en YSOs dans la partie 2.5.

Pour mieux évaluer le rôle des structures hiérarchiques dans la formation d’étoiles, nous pouvons évaluer la production moyenne de YSOs par rapport à la proportion de fragments puits qu’ils contiennent. En outre, le ratio YSOs / fragments puits contenu dans un type de structure donne une indication sur la part qu’occupe les YSOs par rapport à l’intégralité des fragments qui pourraient encore, ou qui contribuent, à la formation d’étoiles. Cette perspective permet de s’affranchir de la production naturellement plus élevée des structures hiérarchiques de par leur définition. Nous constatons que les structures linéaires (ratio YSOs / puits = 8 / 45) sont appauvries en YSOs, tandis que les structures hiérarchiques (ratio YSOs / puits = 45 / 94) en montrent une présence dominante. Cela signifie qu’en moyenne, un fragment puits sur deux est une YSO dans une structure hiérarchique, tandis qu’un fragment puits sur six est une YSO pour les structures linéaires.

	Structures			Total
	Hiérarchiques	Linéaires	Isolées	
Nombre d’objets	23	135	176	334
YSOs	45	24	18	87
70 μm	69	77	85	231
160 μm	52	91	59	202
Extractions getsf 250 μm	33	84	9	126
350 μm	25	63	4	92
500 μm	16	29	1	46
Total	195	344	158	697
YSOs + Extractions getsf	240	368	176	784
Fragments puits	94	135	-	229
Fragments sources	34			169

TABLE IV.1 – Nombre de structures de chaque type extraites dans NGC 2264 en distinguant pour chacune d’entre elles la quantité d’objets contenus dans ces structures : le nombre de YSOs de classe 0/I du catalogue de [Rapson et al. \(2014\)](#), et le nombre de fragments denses de poussières extraits par `getsf` ([Men’shchikov 2021](#)) sur chacune des cartes d’émission *Herschel*. Le nombre total de fragments sources et puits sont aussi indiqués. Un “-” indique l’absence de fragment puits ou source dans les structures isolées car par définition, ces structures n’en contiennent pas.

2.5 Évaluation du statut évolutif des structures multi-échelles

Bien que la question du statut évolutif, c'est-à-dire du degré de maturité, des structures extraites ne soit quantitativement pas abordée, la nature des fragments puits (i.e nœud terminal) des différentes structures extraites peut donner qualitativement des indications sur le devenir des structures. Par exemple, sous les mêmes conditions physiques, une structure contenant une ou plusieurs YSOs présenterait vraisemblablement un stade d'effondrement plus évolué comparé à des structures plus pauvres en YSOs. Ainsi, le fait que les structures linéaires aient un déficit en YSOs pourrait être causé par un processus de formation latent, en particulier dans la région Sud de NGC 2264. En effet, les structures linéaires qui se situent dans la partie Sud du nuage ne contiennent que des fragments issus des émissions à $500 - 250 \mu\text{m}$ et n'apparaissent pas à plus petite échelle/longueur d'onde. Cette interprétation de formation à venir corroborerait avec la jeunesse de la région Sud du nuage qui n'a pas encore connu d'épisode de formation d'étoiles.

De même, une structure hiérarchique qui ne contiendrait que des YSOs en guise de fragments puits aurait vraisemblablement terminé son processus de formation d'étoiles par rapport à une autre structure dont il resterait des fragments de poussières vacants dont le matériau ne se serait pas encore condensé en étoile. Par ailleurs, les structures hiérarchiques ayant une forte production de YSOs se situent principalement dans les zones de formation actives à savoir les régions centrales NGC 2264-C et NGC 2264-D.

Une question en suspens pour comparer la production de YSOs entre les structures hiérarchiques et linéaires est alors de savoir si les structures linéaires s'effondreront de manière monolithique ou hiérarchique, voire si elles se dissiperont dans le nuage. Dans le premier cas (effondrement monolithique), il existerait une proportion plus grande d'étoiles formées seules *via* fragmentation monolithique ; mais il est toujours possible que les structures hiérarchiques actuelles continuent leur production avec leur excédant de fragments puits de poussières encore vacants. Le deuxième cas (effondrement hiérarchique à plus petite échelle) accentuerait le phénomène de formation groupée des étoiles. Le dernier cas (dissipation future) ne changerait pas le fait que les structures hiérarchiques contiennent la majorité des YSOs.

La contribution des structures hiérarchiques dans le peuplement du nuage par les jeunes étoiles n'est donc pas négligeable par rapport à leurs contreparties linéaires. En outre, à cet instant d'observation, les structures hiérarchiques représentent les principaux producteurs de YSOs et sont, par définition, liées à la formation des groupes stellaires tandis que la formation d'étoiles solitaires reste un mécanisme peu fructueux mais réalisable.

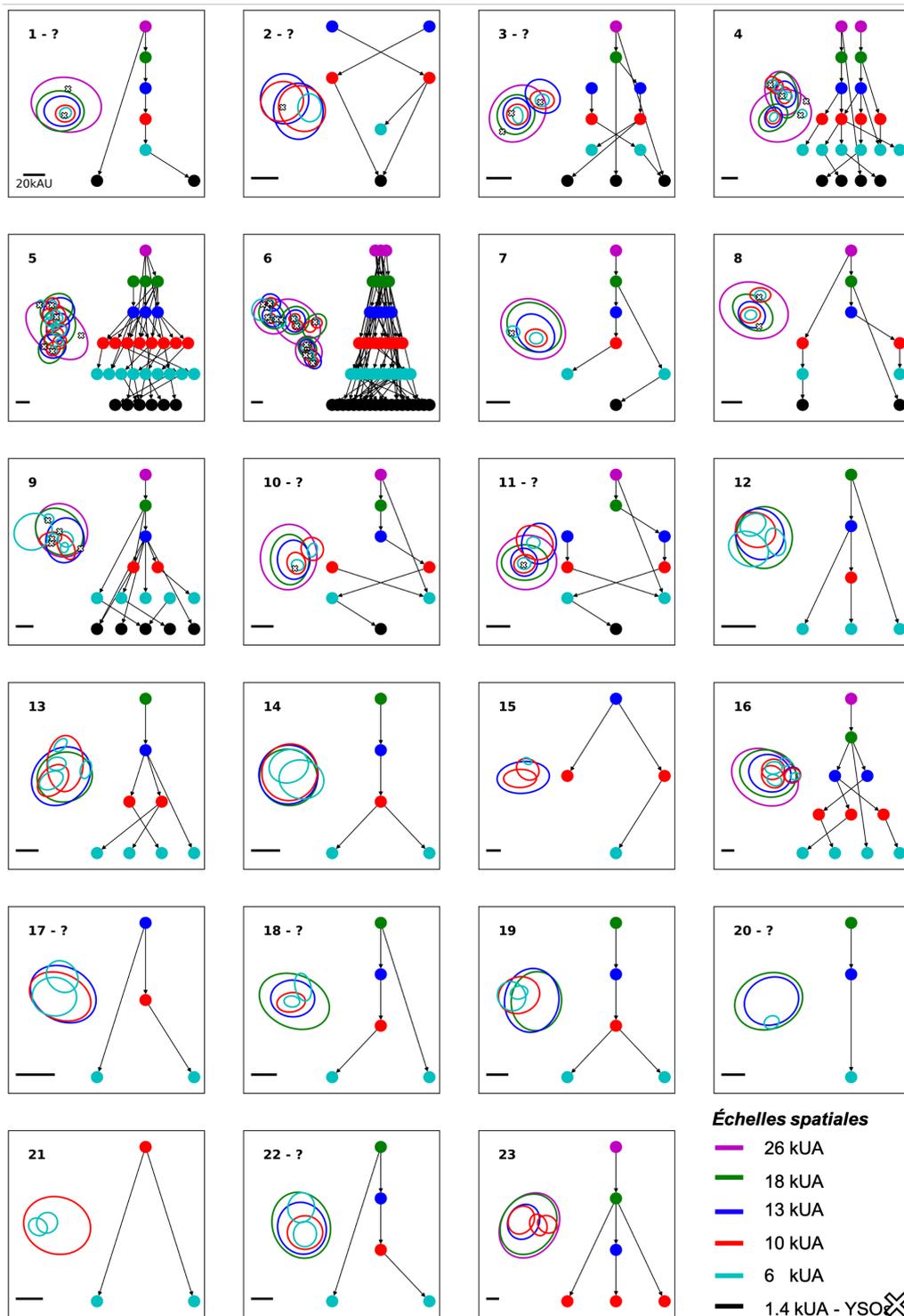


FIGURE IV.6 – Collection complète des structures labellisées hiérarchiques dans la procédure d’assemblage des fragments dans NGC 2264. Les nœuds cyan, rouge, bleu, vert et magenta sont respectivement associés aux cartes d’émission à 70, 160, 250, 350 et 500 μm . Les nœuds noirs quant à eux représentent les YSOs de classe 0/I. On dénombre un total de 23 structures dont 9 d’entre elles repérées par un “?” sont suspectées d’être le fait d’un alignement fortuit de structures linéaires sur la ligne de visée (cf partie 3.2). Le choix concernant les structures #4 et #6 est discutable tant elles peuvent être le fruit d’un alignement respectivement de structures hiérarchique/linéaire et hiérarchique/hiérarchique.

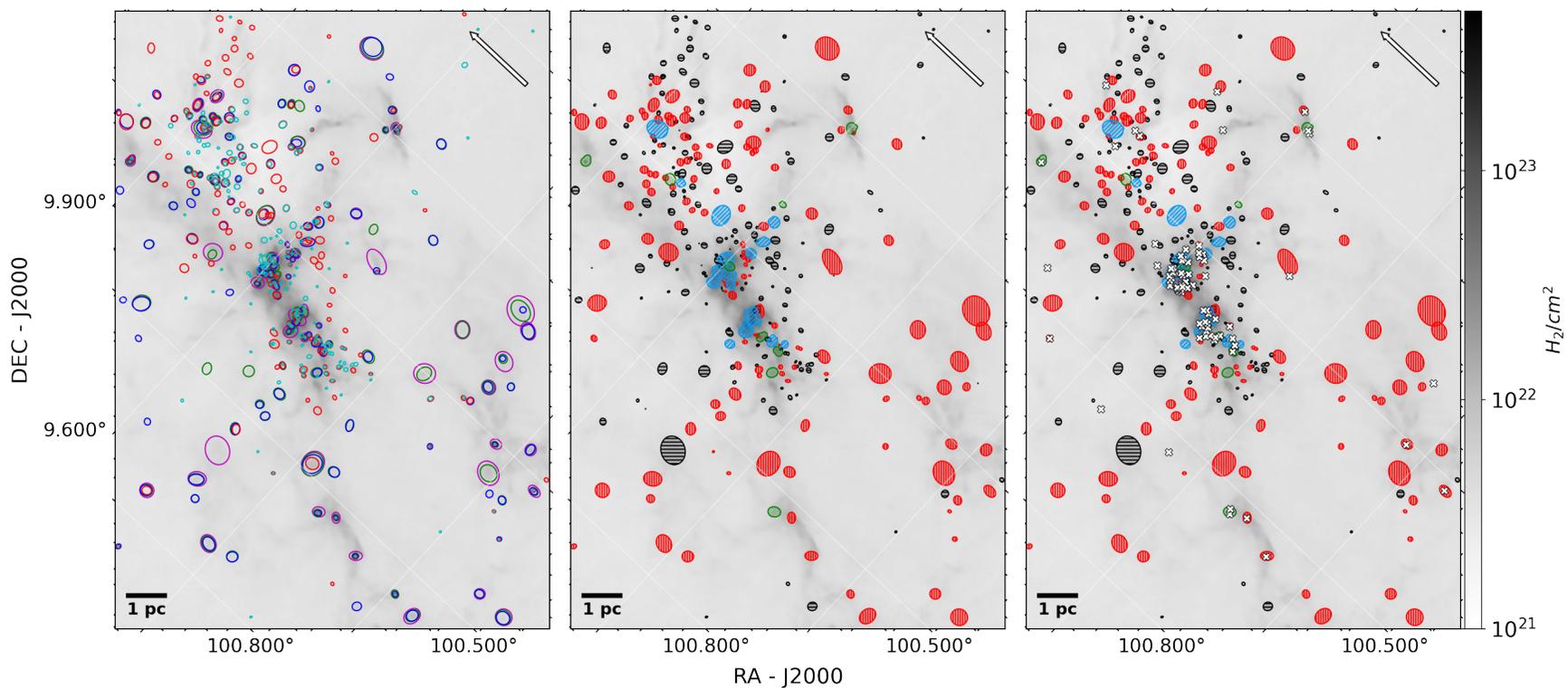


FIGURE IV.7 – Localisation des différentes structures superposées à la carte de la densité de colonne. À gauche : Superposition de tout les fragments extraits par get.s.f. Les extractions cyan, rouge, bleu, vert et magenta sont respectivement associées aux cartes d'émission à 70, 160, 250, 350 et 500 μm . Au milieu : L'extension spatiale des structures hiérarchiques, linéaire, isolées et à coïncidence hiérarchiques sont représentées respectivement en bleu, rouge, noir et vert. À droite : Même représentation qu'au milieu avec les YSOs de classe 0/I indiquées par des croix blanches.

3 Distribution spatiale des structures multi-échelles

3.1 Relation avec la colonne densité

À partir de la carte de densité de colonne de NGC 2264 construite dans la partie 1.1, il est possible d'évaluer la relation entre la densité de colonne N_{H_2} du nuage et la localisation des différentes structures multi-échelles extraites. Pour cela, traçons l'histogramme représentant la distribution de la densité de colonne contenue dans chacun des types de structure. Cet histogramme est construit en dénombrant, pour chaque classe (ou *bin*) de densité de colonne δN_{H_2} , la quantité de pixels recouverts par un type de structure donné. Cet histogramme est donné dans le cadran gauche de la Figure IV.8 où les trois distributions correspondant aux trois types de structures ont été empilées. Les structures linéaires sont favorablement localisées pour des densités $N_{\text{H}_2} \approx 6 \times 10^{21} \text{ cm}^{-2}$ tandis que les structures hiérarchiques s'étalent jusqu'à des densités de colonne plus élevées. Les structures hiérarchiques dévoilent deux modes privilégiés : l'un similaire aux structures linéaires et l'autre émergeant pour des densités de colonne de l'ordre de $N_{\text{H}_2} \approx 4 \times 10^{22} \text{ cm}^{-2}$. À mesure que la densité de colonne augmente, l'apparition successive des structures linéaires et hiérarchiques pourrait indiquer que leur existence est régie localement par les conditions physiques. Si ces structures contiennent une faible densité de colonne, il est vraisemblable qu'en l'absence de concentration de masse sur la ligne de visée, leur densité massique et par extension leur taux de fragmentation, soient tout aussi faible. Qualitativement, les structures à faible densité de colonne auraient ainsi davantage tendance à manifester des comportements de fragmentation monolithique par rapport aux structures de plus haute densité de colonne.

Pour avoir une meilleure perception de la proportion qu'occupe chaque type de structure dans cet histogramme, normalisons chaque classe (ou *bin*) de densité de colonne δN_{H_2} par le nombre total de pixels de l'image représentés au sein de cette classe. Ainsi, nous évaluons la fraction de surface occupée par chaque type de structure par rapport à la surface totale du nuage couverte par chaque classe de densité de colonne. Le résultat de cette normalisation est représentée au milieu de la Figure IV.8. Nous constatons alors que les structures hiérarchiques occupent 95% de la surface du nuage dont la densité de colonne $N_{\text{H}_2} > 6 \times 10^{22} \text{ cm}^{-2}$. Les structures hiérarchiques commencent à être dominantes pour une densité $N_{\text{H}_2} > 3 \times 10^{22} \text{ cm}^{-2}$ avec une occupation de surface $> 50\%$ tandis qu'en dessous de $N_{\text{H}_2} \sim 3 \times 10^{22} \text{ cm}^{-2}$ toutes les structures coexistent, bien que les structures hiérarchiques représentent alors moins de 20% de la surface totale du nuage. Ce comportement est cohérent avec la définition des *hubs* et des *ridges*, qui sont des structures de forte densité massique (et par extension à haute densité de colonne) formant des amas d'étoiles avec un taux de formation stellaire élevé (voir par exemple [Louvet et al. 2014](#);

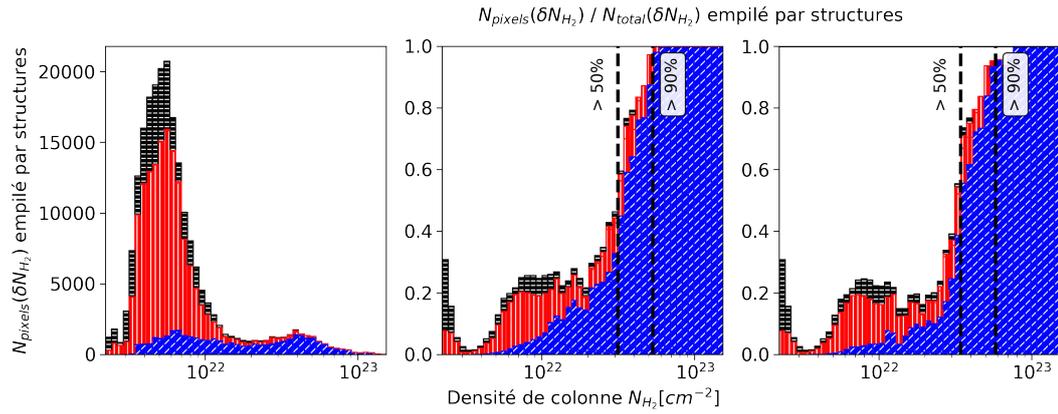


FIGURE IV.8 – Histogrammes empilés de la densité de colonne répartis par type de structure. Les structures hiérarchiques, linéaires et isolées sont représentées respectivement en bleu, rouge et noir. À *gauche* : Cette distribution représente le nombre de pixels communs à une classe (ou *bin*) de densité de colonne δN_{H_2} et à un type de structure donné. *Au milieu* : La distribution est normalisée par le nombre total de pixels couverts par une classe de densité de colonne δN_{H_2} . La partie blanche représente les pixels non affiliés à une structure. Les lignes verticales représentent des seuils au delà desquelles les structures hiérarchiques couvrent une certaine proportion de la surface du nuage. À *droite* : Même graphe que celui du milieu mais en ignorant les structures hiérarchiques supposées coïncidentes.

Motte et al. 2018), et donc *a priori*, un taux de fragmentation élevé.

3.2 Évaluation d'un alignement fortuit de structures linéaires

Dans notre échantillon, il est important de considérer que l'assemblage de certaines structures hiérarchiques peut être la conséquence d'effets de projection. Une telle structure peut en effet être construite par un alignement fortuit de plusieurs structures linéaires le long de la ligne de visée. La probabilité associée à cette coïncidence dépend du taux d'occupation n de structures linéaires sur cette ligne de visée, correspondant au rapport entre le volume total des $N_{\text{struc.}}$ structures de volume $V_{\text{struc.}}$ localisés dans un volume V donné :

$$n = N_{\text{struc.}} \frac{V_{\text{struc.}}}{V} \quad (\text{IV.5})$$

Ce taux d'occupation représente ainsi la fraction du volume du nuage occupée par les structures. Pour calculer la probabilité de coïncidence en fonction du taux d'occupation des structures sur la ligne de visée, nous avons généré en trois dimensions des ellipsoïdes qui fragmentent monolithiquement (un fragment produit à chaque échelle) le long des mêmes échelles spatiales qui caractérisent notre analyse multi-échelle dans NGC 2264.

Vingt ellipsoïdes de volume connu et constant sont générés dans un cube de volume variable régulant ainsi la fraction de volume occupée par les structures linéaires, en trois dimensions. Les structures linéaires en trois dimensions qui résultent de ce processus sont projetées sur un plan en deux dimensions. De la même manière que dans la partie 3.3 du Chapitre II, nous avons considéré que deux ellipses pouvaient être discernables l'une de l'autre si leur distance centre-à-centre d excédait une résolution spatiale θ en fonction de la taille R des ellipses :

$$d > \theta = \sqrt{2 \ln(2)} R \quad (\text{IV.6})$$

Si la condition précédente n'est pas respectée, les ellipses sont fusionnées. La probabilité $\mathcal{P}_{\text{coïc}}$ qu'une structure en deux dimensions sélectionnée aléatoirement soit hiérarchique correspond alors au rapport entre le nombre de structures hiérarchiques extraits dans cette procédure avec le nombre de structures totales extraites en deux dimensions. La probabilité de coïncidence $\mathcal{P}_{\text{coïc}}$ est évaluée dans la Figure IV.9 pour différents taux d'occupation n de structures initiales en trois dimensions. En particulier, la probabilité qu'une structure hiérarchique soit en réalité un alignement de structures linéaires est supérieure à 0.1 lorsque 3% du volume du nuage est rempli par des structures.

Comme les structures linéaires semblent être préférentiellement localisées sur les filaments, la quantité de structures hiérarchiques dans la région centrale du nuage peut être biaisée par la présence d'un filament perpendiculaire au plan d'observation. Par ailleurs, un alignement de plusieurs structures sur la ligne de visée, quelle que soit leur nature, engendrerait la présence de plusieurs fragments sources (i.e nœud initial) au sein d'une même structure observée en deux dimensions. Ainsi, on peut estimer un ensemble de structures jugées suspectes qui apparaissent hiérarchiques mais qui pourraient tout à fait être le fruit d'une coïncidence de structures linéaires sur la ligne de visée. Sont considérées comme suspectes les structures hiérarchiques dont :

1. La réunion de leur sources sous la forme d'une structure se fait par l'intermédiaire d'un fragment puits ;
2. Un des fragments puits n'est pas structuré par rapport aux sources.

Ces structures suspectes sont annotées d'un point d'interrogation dans la Figure IV.6 qui montre la totalité des structures hiérarchiques, et pourront faire l'objet d'une correction, rectifiant les résultats.

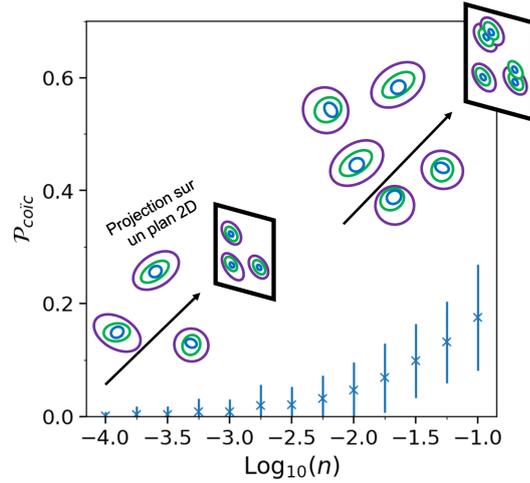


FIGURE IV.9 – Probabilité de coïncidence hiérarchique en fonction du taux d’occupation des structures linéaires dans un espace à trois dimensions. Pour différents taux d’occupation n de structures linéaires en trois dimensions, définie par l’équation IV.5 comme le rapport de volume entre les structures générées et l’espace dans lequel elles fragmentent. Cent générations de 20 ellipsoïdes initiaux sont réalisées pour obtenir la moyenne (croix “x”) des probabilités $\mathcal{P}_{\text{coic}}$ qu’une structure résultante observée en deux dimensions soit hiérarchique, malgré l’omniprésence de structures linéaires en trois dimensions. L’incertitude associée à cette moyenne correspond à $\frac{\sigma}{\sqrt{N-1}}$, où $N = 100$ et σ est l’écart-type de la distribution des $\mathcal{P}_{\text{align}}$.

La partie droite de la Figure IV.8 montre la distribution normalisée après avoir supprimé de l’échantillon les structures hiérarchiques suspectées d’être d’origine coïncidente. Après ce correctif *ad-hoc*, les structures hiérarchiques dépeuplent en partie les régions à densité de colonne $N_{\text{H}_2} < 3 \times 10^{22} \text{ cm}^{-2}$. L’augmentation nette de la présence de ces structures autour de $N_{\text{H}_2} \sim 3 \times 10^{22} \text{ cm}^{-2}$ persiste, ce qui tend à marquer l’existence d’une transition linéaire/hiérarchiques, et donc à une régulation du régime de fragmentation par la densité du milieu. Il serait cohérent d’expliquer, par ces coïncidences hiérarchiques, la présence de structures hiérarchiques à des densités $N_{\text{H}_2} \approx 7 \times 10^{21} \text{ cm}^{-2}$, similaires au pic de présence des structures linéaires. Toutefois, il est important de mentionner que des structures hiérarchiques continuent de peupler ces densités de colonne, même après suppression des structures jugées coïncidentes. Discuter plus amplement de ces effets de projection et de la relation entre densité et régime de fragmentation requiert néanmoins la reconstitution du nuage en trois dimensions afin d’évaluer la quantité de fragments superposés sur la ligne de visée avec leurs densités massiques respectives, mais aussi avec leur volume d’occupation.

3.3 Probabilité d’observer une structure linéaire

Outre les effets de projection qui peuvent confondre plusieurs structures linéaires alignées en une structure hiérarchique, il est également important de tenir compte du fait qu’une structure peut sembler *a priori* linéaire mais peut devenir hiérarchique pour une résolution plus grande, inaccessible avec notre jeu de données. Cet effet pourrait convertir certains pixels, associés à des structures linéaires, en structures hiérarchiques. Cela peut se comprendre dans le cadre de notre modèle de fragmentation : supposons sans perte de généralité que le taux de fragmentation ϕ soit constant. Un effondrement monolithique est caractérisé par une structure linéaire, à taux de fragmentation $\phi = 0$: un seul fragment est produit le long des échelles spatiales. Or, la probabilité qu’une structure ne se subdivise pas entre deux échelles quelconques est donnée par l’équation II.35 du Chapitre II :

$$\mathcal{P}(n = 1, r) = (2 - r_0^\phi)^{\frac{\ln r}{\ln r_0}}$$

Où $r_0 = 2^{1/3}$ et $r = \frac{R_l}{R_{l+1}} > 1$ est le rapport d’échelle entre un fragment parent et un enfant localisés respectivement à des échelles R_l et R_{l+1} . Cette probabilité représente ainsi la probabilité qu’une structure soit perçue comme linéaire, malgré un taux de fragmentation associé à un effondrement hiérarchique. Le Tableau IV.2 compile ce calcul pour différentes valeurs de faibles taux de fragmentation $\phi \leq 0.5$, pour différents rapports d’échelle r .

La majeure partie des structures linéaires de faible densité de colonne et localisées au Sud de NGC 2264, sont constituées d’échelles spatiales allant de 13 kUA jusqu’à 26 kUA soit des rapports d’échelle $r \leq 2$. Avec $r \leq 2$, la probabilité qu’une structure multi-échelle ne se subdivise est $\mathcal{P}(n = 1, r \leq 2) > 0.80$ pour $\phi < 0.3$: il est donc probable qu’une telle structure soit perçue comme linéaire, même si son taux de fragmentation n’est pas nul. Considérons également le cas d’une structure linéaire ayant une YSO à la dernière échelle spatiale disponible à 1.4 kUA et un fragment source à l’échelle initiale à 26 kUA. La probabilité qu’une telle structure apparaisse linéaire, avec un taux de fragmentation non nul est $\mathcal{P}(n = 1, r = 18.6) > 0.2$ pour $\phi < 0.5$. Une structure définie comme linéaire n’est donc pas nécessairement dans un régime de fragmentation monolithique : son taux de fragmentation ”réel” n’est pas nécessairement nul mais peut être suffisamment faible pour que, dans la dynamique d’échelles spatiales considérées, cette structure soit perçue comme ayant les propriétés d’une fragmentation monolithique. Pour être plus quantitatif sur cet aspect, il faudrait établir explicitement la dépendance du taux de fragmentation avec la densité de colonne du milieu.

Taux de fragmentation ϕ		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
		$\mathcal{P}(n = 1, r)$					
R_{l+1} [kUA]	1.4	1.00	0.74	0.54	0.39	0.28	0.19
	13	-	0.93	0.86	0.80	0.74	0.68
	18	-	0.96	0.93	0.89	0.85	0.81

TABLE IV.2 – Probabilité $\mathcal{P}(n = 1, r)$ qu’une structure de NGC 2264 ne se subdivise pas et soit linéaire d’après l’équation 3.3. Cette probabilité dépend du rapport d’échelle $r = \frac{R_l}{R_{l+1}}$ entre un fragment parent à l’échelle $R_l = 26$ kUA et un enfant produit à l’échelle $R_{l+1} = 1.4, 13$ ou 18 kUA.

4 Une mesure du taux de fragmentation

4.1 Le coefficient de fractalité : une métrique en deux dimensions

À l’origine, ce travail (Thomasson et al. 2022) avait entre autre pour objectif de tester le caractère auto-similaire du nuage dans le domaine d’échelles spatiales que permet de sonder *Herschel*. Or, d’après notre modèle de fragmentation, le nuage est auto-similaire si le taux de fragmentation ϕ est constant, ce taux de fragmentation étant défini comme le taux de variation du nombre moyen de fragments produits le long des échelles. Pour définir une métrique traçant le taux de variation du nombre de fragments le long des échelles spatiales sous cette hypothèse d’auto-similarité, nous avons pris en compte (Thomasson et al. 2022) la totalité des échelles disponibles au sein des structures hiérarchiques en définissant un *coefficient de fractalité* \mathcal{F} . Cette quantité est définie comme le nombre moyen de fragments enfants que produit un seul parent après réduction de l’échelle spatiale d’un facteur 2. D’après la définition de ϕ donnée par l’équation II.11, il est possible d’exprimer de manière totalement équivalente en deux dimensions un ϕ_{2D} qui décrit la variation du nombre moyen de fragments $\langle N_{2D} \rangle$ observés. Sous l’hypothèse d’auto-similarité, et donc d’invariance d’échelle avec $\phi_{2D} = \text{constant}$, on écrit :

$$\phi_{2D} = - \frac{\Delta \ln \langle N_{2D} \rangle}{\Delta \ln R}$$

Avec $\Delta \ln \langle N_{2D} \rangle = \ln \langle N_{2D} \rangle - \ln \langle N_{2D} \rangle$ correspondant, au logarithme près, au nombre moyen d’enfants que produit un parent après une variation de sa taille par un facteur $\Delta \ln R = \ln R_{l+1} - \ln R_l$. Si de surcroît $\frac{R_l}{R_{l+1}} = 2$, l’échelle spatiale est réduite d’un facteur 2 et on a, par définition, $\Delta \ln \langle N_{2D} \rangle = \ln \mathcal{F}$. La relation entre \mathcal{F} et le taux de fragmentation projeté en deux dimensions ϕ_{2D} s’écrit alors simplement :

$$\mathcal{F} = 2^{\phi_{2D}} \tag{IV.7}$$

Pour mesurer ce coefficient de fractalité considérons n'importe quelle structure extraite du nuage. Il n'est pas impossible que plusieurs fragments sources existent dans cette structure. Prenons un sous-réseau G qui découle d'un des fragments sources ; c'est-à-dire, l'ensemble des nœuds qui descendent de cette source (voir un exemple de cette sélection dans la Figure IV.10). Dans cette sous-partie de la structure totale, il existe au total V nœuds localisés sur un nombre L de niveaux associés à des échelles spatiales R_l , où $l < L$. Construisons ensuite un réseau similaire G_0 qualifié de fractal qui, à chaque niveau, posséderait le nombre de fragments moyen résultant d'un processus de fragmentation à $\phi_{2D} = \text{constant}$. D'après l'équation III.1, on peut écrire le nombre moyen de fragment produits à une échelle spatiale donnée :

$$\langle N_{2D}(R_l) \rangle = N_0 \left(\frac{R_l}{R_0} \right)^{-\phi_{2D}}$$

Avec $N_0 = 1$ dans notre cas car nous ne considérons que la production d'un fragment source unique. En combinant cette équation avec l'expression IV.7 du coefficient de fractalité, on obtient pour chaque échelle spatiale :

$$\langle N_{2D}(R_l) \rangle = \left(\frac{R_l}{R_0} \right)^{-\frac{\ln \mathcal{F}}{\ln 2}} \quad (\text{IV.8})$$

Soit la relation suivante, en posant $r_l = \frac{R_0}{R_l}$:

$$\ln \langle N_{2D}(R_l) \rangle = \ln \mathcal{F} \frac{\ln r_l}{\ln 2} \quad (\text{IV.9})$$

Ou bien :

$$\langle N_{2D}(R_l) \rangle = \mathcal{F}^{\frac{\ln r_l}{\ln 2}} \quad (\text{IV.10})$$

En sommant cette quantité sur les niveaux disponibles, on obtient le nombre total de nœuds dans le réseau G_0 :

$$V_0 = \sum_{l=0}^{L-1} \langle N_{2D}(R_l) \rangle \quad (\text{IV.11})$$

Sont alors connus le nombre de nœuds V_0 que l'on attendrait d'un réseau fractal et le nombre de nœuds V dénombrés dans le sous-réseau associé à une structure multi-échelle issue des observations. Sous l'hypothèse que le réseau G soit fractal et donc que le taux de fragmentation soit constant, on devrait avoir la relation $V = V_0$. La valeur numérique de \mathcal{F} qui permettrait de satisfaire cette égalité correspond ainsi à la solution de l'équation suivante :

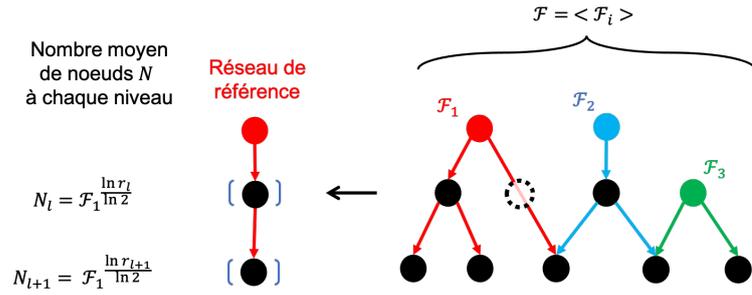


FIGURE IV.10 – Exemple du calcul du coefficient de fractalité \mathcal{F} d’une structure. La structure est découpée en trois sous-réseaux associés à chacun de ses fragments sources. Pour chaque sous-réseau on cherche le coefficient \mathcal{F}_i tel que le nombre de nœuds du sous-réseau est équivalent au nombre de nœuds du réseau de référence. Le coefficient de fractalité \mathcal{F} de la structure est la moyenne des coefficients individuels des sous-réseaux qui constituent cette structure. Le nœud en pointillé symbolise une carence en fragment qui peut être source d’erreur dans la mesure de \mathcal{F} .

$$\begin{cases} V - \sum_{l=0}^{L-1} \mathcal{F}^{x_l} = 0 \\ x_l = \frac{\ln r_l}{\ln 2} \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

Où les équations IV.10 et IV.11 ont été utilisées pour exprimer la quantité V_0 en fonction de \mathcal{F} . Le coefficient de fractalité d’un réseau G représente donc, dans un intervalle d’échelles spatiales donné, le nombre de subdivisions qui définirait le réseau G si ce dernier était effectivement un réseau fractal.

Pour tenir compte de l’ensemble des fragments sources présents dans une structure, on calcule pour chaque source numéroté i un coefficient de fractalité \mathcal{F}_i tel que décrit précédemment pour ensuite estimer la moyenne de ces coefficients :

$$\mathcal{F} = \langle \mathcal{F}_i \rangle_{\text{sources}} \quad (\text{IV.13})$$

Chaque source est donc traitée individuellement en fonction de leur arborescence respective, sans prendre en compte les fragments avec lesquelles elle n’est pas connectée, et qui sont contenus dans d’autres sources. Les structures linéaires ont, par définition, un coefficient de fractalité $\mathcal{F} = 1$ tandis que ce coefficient n’est pas défini pour les structures isolées. Ainsi, nous nous intéresserons uniquement à la mesure de ce coefficient pour les structures hiérarchiques. La prochaine partie est dédiée à l’estimation de l’incertitude associée à la mesure du coefficient de fractalité en considérant les biais de cette méthode et leurs répercussions sur la mesure du taux de fragmentation en trois dimensions.

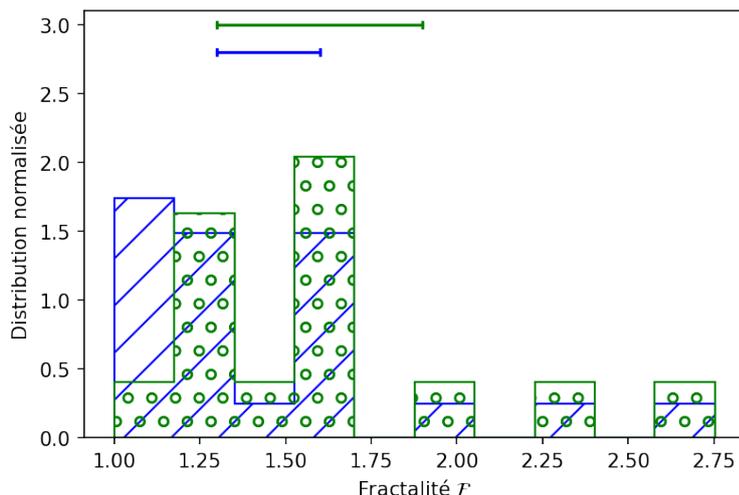


FIGURE IV.11 – Distribution des coefficients de fractalité des structures hiérarchiques dans NGC 2264. Les histogrammes bleu et vert représentent respectivement les échantillons sans filtrage des coïncidences hiérarchiques (Thomasson et al. 2022) et avec filtrage. Les traits horizontaux représentent l’intervalle d’incertitude du coefficient de fractalité dérivé en tenant compte de la présence des carences dans les réseaux.

4.2 Incertitudes et biais associés

Comme toute mesure, le coefficient de fractalité est soumis à plusieurs facteurs qui introduisent une erreur sur sa valeur numérique, se répercutant inéluctablement sur la mesure du taux de fragmentation. Pour obtenir une estimation sur la capacité qu’à le nuage à fragmenter, on considère la statistique associée au coefficient de fractalité calculé sur l’ensemble des structures hiérarchiques. On dénombre ici trois sources d’erreurs potentielles :

1. L’introduction de structures dans l’échantillon dont la hiérarchie n’est que coïncidence, par des effets de projection ;
2. Une erreur pouvant être causée par l’absence de détection de fragments sur certaines échelles spatiales ;
3. Une erreur d’origine géométrique liée aux contours des fragments extraits et qui affecte le taux de fragmentation en trois dimensions.

Toutes ces sources d’incertitude sont par la suite quantifiées pour évaluer *in fine*, à partir du coefficient de fractalité \mathcal{F} , le taux de fragmentation ϕ en trois dimensions.

Coïncidence hiérarchique

La distribution des coefficients de fractalité mesurés pour l’ensemble des structures hiérarchiques du nuage est donnée dans la Figure IV.11. Les structures hiérarchiques de

NGC 2264 sont caractérisées par une fractalité moyenne $\langle \mathcal{F} \rangle = 1.5$. La distribution des coefficients étant très asymétrique, il apparaît plus approprié d'employer l'estimateur de la médiane pour décrire la tendance générale de cette population à fragmenter, soit $\text{Med}(\mathcal{F}) = 1.3$. Cependant, comme nous l'avons vu dans la partie 2.4, certaines structures sont labelisées sous le terme "hiérarchique" mais pourraient en réalité être le résultat de deux structures linéaires alignées sur la ligne de visée. Pour éviter au mieux de considérer ces effets de coïncidences, les structures catégorisées comme "suspectes" sont retirées de l'échantillon. Après filtrage, on mesure une fractalité médiane $\text{Med}(\mathcal{F}_{\text{corr}}) = 1.6$. Ainsi, en l'absence de coïncidences hiérarchiques, on donne une estimation minimale du coefficient de fractalité $\mathcal{F}_{\text{min}} = 1.3$ tandis qu'une borne maximale est estimée avec $\mathcal{F}_{\text{max}} = 1.6$ après filtrage des structures coïncidentes.

Carence en fragments dans les réseaux

Dans les réseaux extraits, il est possible qu'une structure possède un nœud à un niveau l relié à un autre nœud au niveau $l + 2$ sans qu'il n'y ait de nœud intermédiaire au niveau $l + 1$ (voir par exemple le sous-réseau rouge de la Figure IV.12). L'absence de fragment intermédiaire à ce niveau $l + 1$ engendre l'apparition d'une "carence" qui introduit une source d'erreur supplémentaire. Ce défaut de détection peut être causé par la procédure d'extraction `getsf` qui peut :

1. Associer ce fragment éventuel à l'arrière plan car son émission serait trop peu intense par rapport à l'émission d'arrière-plan pour la longueur d'onde considérée ;
2. Écarter ce fragment car son existence le mélangerait à d'autres fragments, résultant en une structure en filament.

Peu importe la raison pour laquelle ces fragments intermédiaires pourraient ne pas être détectés, il est possible d'évaluer une incertitude dans un cas pessimiste où la totalité des carences correspondraient à un défaut de détection. Le cas le moins pessimiste correspondant alors au cas où aucun fragment n'a été manqué lors de l'extraction.

Un tel défaut de détection aurait pour conséquence d'influencer le comptage du nombre total de nœuds V dans la structure considérée en diminuant sa valeur. Or, si le nombre de nœuds V diminue, alors le coefficient de fractalité diminue également. Comptons dans un premier temps le nombre de carences contenues dans une structure, en étant pessimiste sur la perte de nœuds éventuelle. Considérons qu'une structure contenant $\{1, 0, 0, 2\}$ fragments respectivement aux niveaux $l = \{0, 1, 2, 3\}$ possède au total quatre carences, soit deux carences par fragment puits. En supposant qu'aucun fragment puits n'est manquant, cette structure aurait donc au maximum $\{1, 2, 2, 2\}$ fragments. Cette méthode de comptage surestime grandement le nombre de carences étant donné qu'elle ne prend pas en compte

les potentielles fusions entre les fragments à plus grande échelle. Comme le nombre total de fragments dans la structure est surestimé, le coefficient de fractalité associé est lui aussi surestimé. On obtient ainsi une estimation de la borne supérieure du coefficient de fractalité, dont l'incertitude est ici associée à la carence en fragments le long des échelles spatiales.

On estime la proportion de perte p_c de fragments pour chaque structure hiérarchique comme étant le rapport entre le nombre de carence n_c estimé par la méthode de comptage précédente, et le nombre de fragments total déjà existants $n_f + n_c$:

$$p_c = \frac{n_c}{n_f + n_c} \quad (\text{IV.14})$$

Pour prendre une fourchette d'incertitude large, considérons la structure hiérarchique possédant la plus grande proportion de perte, soit une perte $p_c \sim 45\%$. Pour évaluer la variation du coefficient de fractalité \mathcal{F} engendré par cette perte, reprenons les résultats de la Figure IV.12 extraites de [Thomasson et al. \(2022\)](#). Pour obtenir ces courbes, nous avons utilisé un modèle de génération d'ellipses à deux dimensions, dont la procédure de génération est tout à fait similaire au modèle de génération en trois dimensions utilisé au Chapitre II. La procédure synthétise des ellipses intriquées les unes dans les autres et leur quantité est régie par le coefficient de fractalité. Les fragments produits dans ces structures prolifèrent le long des mêmes échelles spatiales que les données utilisées, et sont générés pour différentes valeurs de coefficient de fractalité \mathcal{F} . Une certaine proportion de nœuds p_c sont supprimés aléatoirement dans les réseaux générés pour simuler la présence de carences dans les réseaux générés. Il en résulte alors une mesure du coefficient de fragmentation, biaisée par la quantité de carences dans les réseaux.

En considérant le cas pessimiste dans lequel il existe des coïncidences hiérarchiques, on a $\mathcal{F}_{\max} = 1.6$. Or, cette mesure est biaisée par la présence des carences dans les réseaux. Pour une perte maximale $p_c \sim 45\%$, on cherche alors le coefficient \mathcal{F} permettant de générer une population qui, après suppression aléatoire de fragments, est caractérisée par le coefficient $\mathcal{F}_{\max} = 1.6$. Par mesure graphique, on a :

$$\frac{\mathcal{F}_{\max} - \mathcal{F}}{\mathcal{F}} \approx -16\%$$

Cela correspond à un coefficient de fractalité $\mathcal{F} = 1.9$, en tenant compte de la proportion de perte p_c la plus pessimiste. Ce coefficient correspond alors à une nouvelle borne maximum, et on estime que le coefficient de fractalité est contenu dans l'intervalle $\text{Med}(\mathcal{F}) \in [1.3, 1.9]$, soit un coefficient médian pour le nuage dans son entièreté $\text{Med}(\mathcal{F}) = 1.6 \pm 0.3$. La prochaine étape consiste à remonter le fil jusqu'au taux de frag-

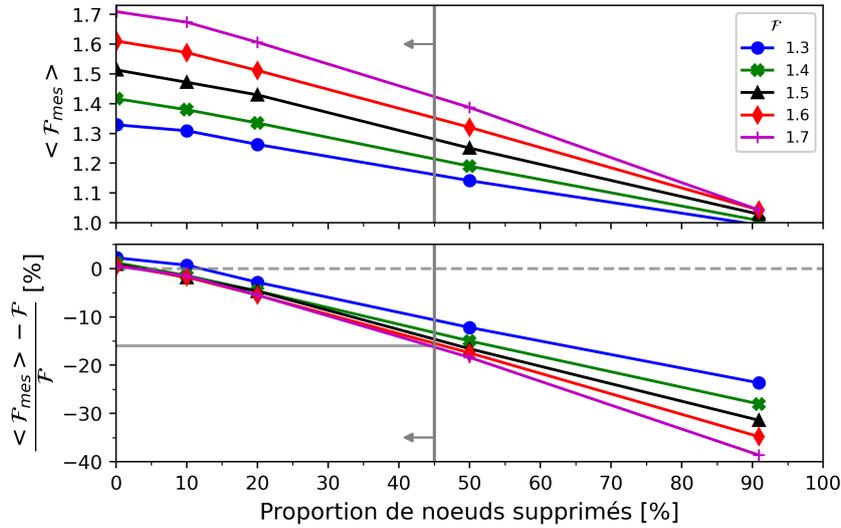


FIGURE IV.12 – Erreur causée par la carence en nœuds dans la mesure du coefficient de fractalité. Dix mille sources sont synthétisées dans un modèle génératif à deux dimensions et fragmentent le long des échelles représentatives des données de NGC 2264 pour différentes valeurs de fractalité \mathcal{F} avant qu’une fraction de leurs nœuds ne soient supprimés. La ligne verticale et les flèches indiquent l’estimation de la proportion maximale de nœuds non détectés dans NGC 2264. *En haut* : Fractalité moyenne de l’ensemble de la population générée. *En bas* : Erreur relative de la fractalité. Les lignes horizontales en pointillés et pleine indiquent une variation de 0% et de -16% respectivement. Les erreurs $> 0\%$ proviennent de la méthode de génération des ellipses et n’introduisent qu’une variation de l’ordre du %.

mentation en deux dimensions ϕ_{2D} puis en trois dimensions ϕ .

Géométrie des fragments et projection en deux dimensions

Pour obtenir une valeur du taux de fragmentation en deux dimensions ϕ_{2D} et son erreur de mesure, reprenons l’expression reliant le coefficient de fractalité \mathcal{F} avec ϕ_{2D} :

$$\phi_{2D} = \frac{\ln \mathcal{F}}{\ln 2} \quad (\text{IV.15})$$

En différenciant cette expression par rapport à \mathcal{F} , on peut calculer l’erreur $\Delta\phi_{2D}$ induite sur le taux de fragmentation :

$$\Delta\phi_{2D} = \frac{\Delta\mathcal{F}}{\mathcal{F}} \quad (\text{IV.16})$$

On calcule alors, avec $\mathcal{F} = 1.6 \pm 0.3$, le taux de fragmentation en deux dimensions :

$$\phi_{2D} = \frac{\ln \mathcal{F}}{\ln 2} \pm \frac{\Delta \mathcal{F}}{\mathcal{F}} \quad (\text{IV.17})$$

Soit $\phi_{2D} = 0.7 \pm 0.2$. Toutefois, le taux de fragmentation calculé ici ne correspond pas au taux de fragmentation ϕ en trois dimensions tel que défini dans le modèle présenté au Chapitre II. Pour obtenir ce taux de fragmentation en trois dimensions, on peut utiliser le graphique II.9 qui évalue l'erreur introduite par la géométrie ellipsoïdale des fragments et par leur projection en deux dimensions. Pour des rapports d'échelle $r \sim 1.5$ similaire aux données *Herschel*, et un taux de recouvrement entre les fragments enfants et parents $\alpha = 0.75$, on estime par lecture graphique une variation $f = \frac{\phi_{2D} - \phi}{\phi} \approx -0.30 \pm 0.05$. On a alors la relation suivante :

$$\phi = \frac{\phi_{2D}}{1 + f} \quad (\text{IV.18})$$

Soit une incertitude associée $\Delta\phi$ évaluée quadratiquement par :

$$\Delta\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial\phi_{2D}}\right)^2 \Delta\phi_{2D}^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial f}\right)^2 \Delta f^2} \quad (\text{IV.19})$$

Soit son expression :

$$\Delta\phi = \sqrt{\left(\frac{\Delta\phi_{2D}}{1 + f}\right)^2 + \left(\frac{\phi_{2D} \Delta f}{(1 + f)^2}\right)^2} \quad (\text{IV.20})$$

Avec $\phi_{2D} = 0.7$, $\Delta\phi_{2D} = 0.2$, $f = -0.3$ et $\Delta f = 0.05$, on obtient finalement un taux de fragmentation :

$$\boxed{\phi = 1.0 \pm 0.3}$$

4.3 Résultats et interprétation de la mesure du taux de fragmentation

Jusqu'à présent nous avons supposé que le taux de fragmentation était constant. Or, comme nous l'avons vu lorsque nous avons cherché à dériver l'évolution de ϕ en fonction de la taille R des fragments produits (cf Figure III.5 du Chapitre III), le taux de fragmentation varie dans la gamme d'échelle allant de 1.4 à 26 kUA. Le coefficient de fractalité calculé précédemment permet en réalité de dériver un taux de fragmentation moyen $\phi \equiv \langle \phi \rangle_R$ sur la gamme d'échelle étudiée et ne peut décrire localement les variations du taux de fragmentation, à moins de fractionner les réseaux en plusieurs gammes d'échelles. Notre modèle de fragmentation permet d'évaluer, pour un taux d'injection

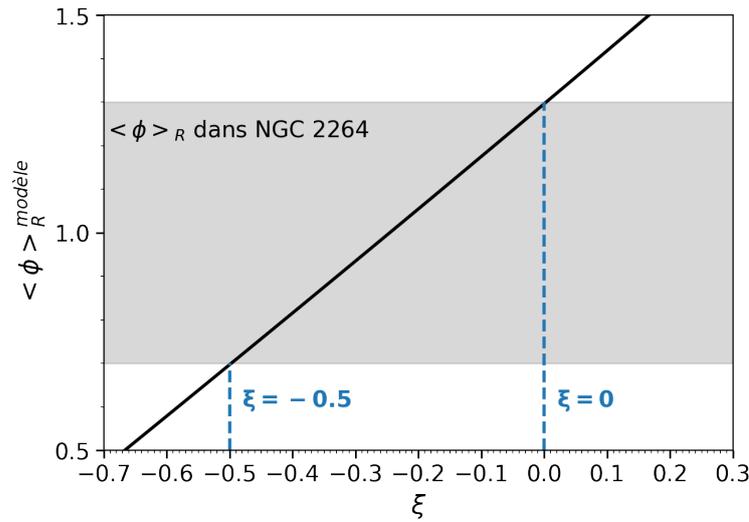


FIGURE IV.13 – Taux de fragmentation moyen $\langle \phi \rangle_R^{\text{modèle}}$ prédit par un modèle de fragmentation gravo-turbulent en fonction du taux d’injection de masse ξ sur l’intervalle d’échelles [1.4; 26] kUA. La zone grisée correspond au domaine d’incertitude du taux de fragmentation moyen $\langle \phi \rangle_R$ mesuré dans NGC 2264. Les lignes verticales indiquent les positions pour lesquelles ξ encadre la zone grisée.

de masse ξ donné, les variations de ϕ sur une gamme d’échelle spatiale se situant entre $R_a = 1.4$ kUA et $R_b = 26$ kUA et d’en calculer la moyenne avec :

$$\langle \phi \rangle_R^{\text{modèle}} = \frac{1}{\ln R_b - \ln R_a} \int_{\ln R_b}^{\ln R_a} \phi d \ln R \quad (\text{IV.21})$$

On peut alors comparer notre mesure $\langle \phi \rangle_R = 1.0 \pm 0.3$ avec les valeurs numériques attendues de notre modèle. En calculant numériquement l’intégrale de l’équation IV.21 et en reprenant la tendance moyenne du taux de fragmentation de la Figure III.5 calculée au Chapitre III, on détermine une compatibilité entre la valeur mesurée et la valeur théorique du modèle pour des taux d’injection de masse $\xi \in [-0.5; 0.0]$ (voir Figure IV.13). Ainsi, notre estimation du taux de fragmentation moyenné n’est pas incompatible avec une fragmentation hiérarchique caractérisée par une perte progressive de la masse des fragments, par exemple par le biais de jets moléculaires. Toutefois, l’absence de modélisation dynamique intégrée à ξ ne nous permet pas de quantifier la masse éjectée par unité de temps. De plus, la valeur numérique du taux de fragmentation tend à supposer que la sous-fragmentation sondée dans les structures de NGC 2264 correspond à un effondrement hiérarchique du nuage qui induit une fragmentation de type Jeans, dominé par la gravité avec une contribution marginale de la turbulence. La présence de jets moléculaires dans la région NGC 2264-C (Maury et al. 2009; Cunningham et al. 2016) ne remet pas en cause ce scénario de perte de masse avec $\xi < 0$. Bien que cette méthode nous fournisse

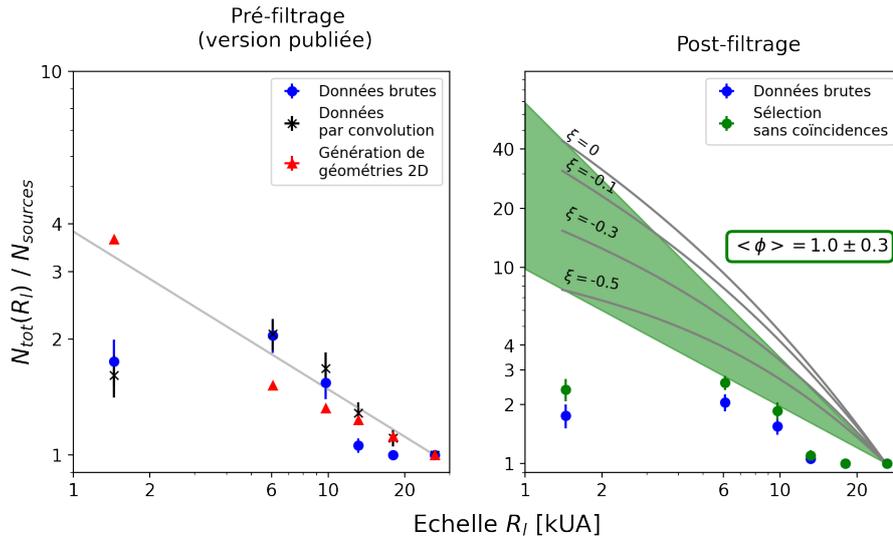


FIGURE IV.14 – Courbe de productivité des structures hiérarchiques de NGC 2264 avec et sans filtrage des structures coïncidentes. La productivité représente le nombre de fragments produits par fragment source, en moyenne, par structure hiérarchique. À gauche : Courbe de productivité publiée qui comprend les productivités calculées à partir des structures extraites de NGC 2264 (bleu), extraites de cartes à $160\mu\text{m}$ obtenues par convolution de la carte originale (noir), et extraites des données générées par un modèle géométrique (rouge). La ligne grise représente une tendance invariante d'échelle pour un coefficient de fractalité $\mathcal{F} = 1.3$. À droite : Productivité calculée à partir des structures hiérarchiques extraites de NGC 2264 (bleu) et à partir des structures hiérarchiques non coïncidentes (vert). Le cône vert représente la productivité associée au taux de fragmentation moyen $\langle \phi \rangle$ mesuré. Les courbes grises correspondent aux solutions du modèle gravo-turbulent pour différents taux d'injection de masse.

une estimation du taux de fragmentation moyen, ses variations réelles le long des échelles spatiales restent inconnues. Ce suivi multi-échelle fait néanmoins l'objet de la partie suivante qui déterminera la validité de l'hypothèse d'auto-similarité sur la gamme d'échelle étudiée.

5 Test d'auto-similarité du nuage

5.1 Nombre de fragments produits le long des échelles

Dans la partie précédente, nous avons donné une estimation du taux de fragmentation moyen $\langle \phi \rangle_R$ sur une gamme d'échelle donnée en considérant l'ensemble des échelles intermédiaires présentes dans les structures hiérarchiques. Regardons désormais l'évolution du nombre de fragments produits le long des échelles spatiales sondées. Dans Thomasson et al. (2022), nous avons testé le caractère auto-similaire du nuage en étudiant

la production moyenne d'objets par fragment source au sein des structures hiérarchiques tout en attribuant à chaque fragment l'échelle spatiale associée à leur résolution d'extraction.

Pour chaque échelle spatiale R_l , on peut définir la productivité d'une structure comme le nombre de fragments qui apparaissent par rapport au nombre de fragments sources $N_{sources}$ contenues dans cette structure : c'est le rapport entre le nombre de fragments à une échelle R_l , et le nombre de sources dans la structure. La normalisation par le nombre de sources $N_{sources}$ est intéressante car elle permet de réduire les conséquences d'un alignement fortuit de structures hiérarchiques le long de la ligne de visée, qui induirait la présence de plusieurs sources produisant plusieurs fragments au sein d'une même structure. Une structure hiérarchique qui serait la combinaison de plusieurs structures hiérarchiques contiendrait en effet d'autant plus de fragments qu'il existe de structures (et donc de sources) sous-jacentes.

L'équation IV.9 donne le nombre de fragments moyen $\langle N(R_l) \rangle$ produits par une source seule en fonction du coefficient de fractalité \mathcal{F} de la structure :

$$\langle N_{2D}(R_l) \rangle = \mathcal{F}^{\frac{\ln r_l}{\ln 2}} \quad (IV.22)$$

Le nombre de fragments total $\langle N_{tot}(R_l) \rangle$ produits à l'échelle R_l par l'ensemble des sources contenues dans la structure est donc :

$$\langle N_{tot}(R_l) \rangle = \langle N_{2D}(R_l) \rangle N_{sources} \quad (IV.23)$$

Le nombre de fragments total produit par toutes les sources est donc :

$$\ln \left(\frac{\langle N_{tot}(R_l) \rangle}{N_{sources}} \right) = \ln \mathcal{F} \frac{\ln r_l}{\ln 2} \quad (IV.24)$$

Ou encore :

$$\frac{\langle N_{tot}(R_l) \rangle}{N_{sources}} = \left(\frac{R_l}{R_0} \right)^{-\frac{\ln \mathcal{F}}{\ln 2}} \quad (IV.25)$$

Cette relation définit la productivité des structures dans le nuage sous hypothèse d'invariance d'échelle. Une déviation de cette tendance signifierait alors une dépendance du coefficient de fractalité (et donc du taux de fragmentation) avec l'échelle spatiale. Il est possible de calculer la quantité $\frac{N_{tot}(R_l)}{N_{sources}}$ pour chaque structure, à chaque échelle R_l . Le nombre de sources pour normalisation est compté rétro-activement par rapport au niveau

l considéré : si une structure possède un fragment source au niveau R_l , il ne sera pas décompté dans la normalisation des échelles supérieures $R_l' > R_l$, car cette source ne participe pas à la formation de fragments localisés à plus grande échelle.

Productivité des fragments sans filtrage des structures coïncidentes

Pour chaque échelle spatiale R_l , il est possible de moyenniser cette quantité sur les structures hiérarchiques du nuage pour avoir la tendance globale des structures associées. C'est l'objet du cadran gauche de la Figure IV.14 qui représente la productivité des structures hiérarchiques, sans tenir compte des éventuelles coïncidences hiérarchiques, telle que publiée par [Thomasson et al. \(2022\)](#). La productivité des structures de NGC 2264 reste constante entre 26 et 13 kUA : les réseaux sont localement linéaires jusqu'à ce que la résolution soit suffisamment élevée pour effectivement observer une subdivision. Aucune trace de hiérarchie n'est relevée dans cet intervalle contrairement aux petites échelles où la productivité moyenne augmente jusqu'à ~ 2 fragments par structures hiérarchiques à une échelle de 6 kUA. En dessous de 6 kUA on observe une stabilisation de YSOs par rapport à la quantité de fragments à $70\mu\text{m}$.

Si l'hypothèse d'auto-similarité était vérifiée, on s'attendrait à avoir une quantité plus importante de YSOs. Ce défaut de YSOs de classes 0/I peut s'expliquer par le fait que la moitié des fragments puits ne sont pas de nature stellaire, pouvant indiquer la possibilité d'événements futurs de formation d'étoiles. Sachant que les structures hiérarchiques sont principalement localisées dans les régions centrales NGC 2264-C et -D, il est possible que leur réservoir de gaz se reconstitue *via* les filaments adjacents (modèle de type *conveyor belt*, [Longmore et al. \(2014\)](#)) permettant une production de YSOs supplémentaires pour plusieurs événements de formation d'étoiles à venir. Cette hypothèse favoriserait la cohabitation potentielle de YSOs de classe 0/I avec des YSOs de classe II au sein des structures hiérarchiques. Il est également possible que ce défaut de YSOs soit la conséquence du fait qu'on n'a pas considéré les YSOs de classe II, plus évoluées. Sans filtrer les structures hiérarchiques potentiellement coïncidentes, [Thomasson et al. \(2022\)](#) avaient mesuré un coefficient de fractalité $\mathcal{F} = 1.45 \pm 0.12$. On s'attendrait alors à former en moyenne un minimum de 3.33 YSOs à l'échelle $R = 1.4$ kUA. Même en ajoutant les YSOs de classe II du catalogue de [Rapson et al. \(2014\)](#), les structures hiérarchiques produiraient en moyenne 2.26 ± 0.28 YSOs par source au lieu de 1.75 ± 0.24 avec la classe 0/I uniquement. Ainsi, l'absence des YSOs de classe II ne semble pas pouvoir expliquer complètement cette diminution de la production d'étoiles par rapport à un cas auto-similaire.

Productivité des fragments après filtrage des structures coïncidentes

Pour tenir compte du filtrage des sources coïncidentes, le cadran du milieu de la Figure IV.14 présente la courbe de productivité pour les structures hiérarchiques précédemment supposées non coïncidentes, c'est-à-dire sans alignement présumé de structures linéaires sur la ligne de visée. Le plateau aux grande échelles demeure mais la production moyenne de fragments est réhaussée aux petites échelles. Il serait tentant d'évaluer le taux de fragmentation à partir de la courbe en deçà de $R \sim 13$ kUA, mais le faible échantillonnage spatial (trois points de mesure dont un qui se situe nécessairement à l'ordonnée $y = 1$) questionnerait cette tentative.

En quantifiant les défauts de détection éventuels (les carences) au sein des structures hiérarchiques, il serait possible de voir si le plateau aux grandes échelles est causé par une incomplétude des extractions associées à l'outil `gets.f`. La méthode de comptage de carences introduite dans la partie 4.2 ne nous serait d'aucune aide ici car elle surestime grandement la quantité de fragments manqués. Elle nous donnerait une estimation supérieure de la courbe de productivité mais ne nous informerait pas sur les variations de ϕ le long des échelles.

5.2 Discussion sur la réalité de la brisure d'invariance d'échelle

Pour vérifier si le plateau aux échelles spatiales 13 – 26 kUA bénéficie d'une origine physique et trace une fragmentation monolithique, testons les conséquences qu'engendrent la géométrie des fragments, l'utilisation de différentes résolutions spatiales et leur longueur d'onde associée sur la productivité des structures. Dans un premier temps, définissons $I(\theta'', \lambda[\mu m])$ comme étant la carte d'émission à la longueur d'onde λ , associée à la résolution θ . Ajoutons l'indice I_0 pour indiquer la carte *Herschel* d'origine. Ainsi, les données brutes pour lesquelles chaque longueur d'onde est associée à sa résolution native sont représentées par les cartes $I_0(36.3, 500)$, $I_0(24.9, 350)$, $I_0(18.2, 250)$ et $I_0(13.5, 160)$.

Effet de la résolution spatiale des observations

Commençons par évaluer l'influence de la résolution spatiale sur la courbe de productivité. Lors de l'observation d'un nuage, le flux reçu à une longueur d'onde donnée est convolué avec le *beam* instrumental dont la taille définit la résolution angulaire de l'observation. Par convolution, deux fragments à une échelle donnée peuvent éventuellement fusionner. Si les fragments sont suffisamment éloignés pour ne pas fusionner, on s'attendrait à une correspondance un à un entre les fragments originaux et leurs contreparties convoluées : on conserverait un plateau en terme de production de fragments. Si les frag-

	13.5''	18.2''	24.9''	36.3''
160 μm	$I_0(13.5, 160)$	$I(18.2, 160)$	$I(24.9, 160)$	$I(36.3, 160)$
250 μm	-	$I_0(18.2, 250)$	-	$I(36.3, 250)$
350 μm	-	-	$I_0(24.9, 350)$	$I(36.3, 350)$
500 μm	-	-	-	$I_0(36.3, 500)$

TABLE IV.3 – Ensemble des cartes disponibles pour évaluer l’origine de la stagnation aux grandes échelles dans la courbe de productivité. Les images I_0 représentent les données *Herschel* non modifiées. L’encadré bleu est construit par convolution de la carte à 160 μm à des résolutions supérieures. L’encadré rouge est construit par convolution de l’ensemble des cartes de résolution $< 36.3''$ vers cette résolution.

ments sont suffisamment proches pour fusionner à une résolution plus élevée après convolution, ce plateau n’aurait plus lieu d’exister car on aurait une correspondance de deux à un entre les résolutions spatiales, soit une production nette.

Afin d’évaluer l’influence de la résolution spatiale sur nos résultats, construisons les cartes mono-longueur d’onde $I(18.2, 160)$, $I(24.9, 160)$ et $I(36.3, 160)$ par convolution de la carte d’émission à 160 μm $I_0(13.5, 160)$ aux résolutions associées (voir encadré bleu du Tableau IV.3). À partir de ces nouvelles cartes, de nouveaux catalogues d’extraction ont été obtenus en utilisant `getsf` avec les mêmes paramètres que les données originales. Ces nouveaux catalogues ont ensuite été assemblés par notre procédure de combinaison en réseaux afin d’extraire de nouvelles structures tout en conservant les données d’origine à 70 μm et les YSOs de classe 0/I pour peupler les échelles inférieures. La courbe de productivité est calculée avec ces nouvelles données dans le cadran gauche de la Figure IV.14. À défaut d’observer une stagnation de la productivité pour des échelles $R > 13$ kUA, nous constatons une augmentation effective de la production de fragments. Par conséquent, ce plateau ne provient vraisemblablement pas d’un simple effet de résolution spatiale dont l’effet est de construire naturellement une hiérarchie à grande échelle à partir de ces données.

Influence de la longueur d’onde d’observation

Discutons maintenant de la potentielle influence de la longueur d’onde sur la détection des fragments. Chaque échelle spatiale est associée à une longueur d’onde spécifique, et chaque longueur d’onde est associée à un flux et une température d’émission de poussières différents. Nous n’observons pas exactement le nuage sous un même aspect entre les images à 500 μm et les images à 250 μm ou à 160 μm . Le plateau observé pour les échelles supérieures à 13 kUA pourrait alors être dû à un défaut de détection à grande échelle qui induirait une perte effective de productivité à ces échelles. Nous cherchons alors à savoir

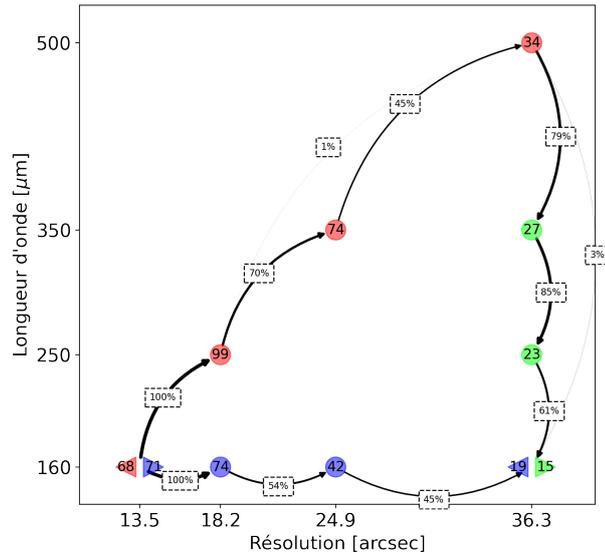


FIGURE IV.15 – Représentation de la persistance des fragments entre les échelles et les longueurs d'onde pour les structures linéaires. Les marqueurs rouges sont associés aux données originales de NGC 2264. Les marqueurs bleus sont associés aux données mono-longueur d'onde provenant de la convolution de l'image à $160 \mu\text{m}$ aux résolutions de 13.5, 24.9, et $36.3''$. Les marqueurs verts sont associés aux données mono-résolution provenant de la convolution des cartes à 160, 250 et $350 \mu\text{m}$ à une résolution de $36.3''$. Les nombres inscrits dans les marqueurs indiquent le nombre de fragments contenus dans une structure linéaire construite dans le jeu de données associé. Le pourcentage au milieu des flèches indique la proportion de fragments qui persiste du nœud sortant vers le nœud entrant.

si cette tendance à la perte existe à grande longueur d'onde. Nous disposons déjà des données brutes ainsi que des données mono-longueur d'onde obtenues par convolution de $I_0(13.5, 160)$ à des résolutions plus élevées. Afin de compléter ces deux ensembles de données, effectuons une convolution des images $I_0(18.2, 250)$ et $I_0(24.9, 350)$ pour obtenir les images $I(36.3, 250)$ et $I(36.3, 350)$. Les fragments sont extraits de ces nouvelles images mono-résolution avec la procédure `gets.f`. En utilisant notre procédure de combinaison de fragments, nous pouvons assembler les catalogues issus de ces données mono-résolution en termes de longueur d'onde (et non en termes d'échelles spatiales). Avec ces données, nous avons étudié la persistance des fragments, c'est-à-dire la proportion de fragments qui ont un équivalent entre deux images.

Pour évaluer simplement la manière dont l'apparence d'une structure est modifiée le long des longueurs d'onde, il est préférable d'éviter des conditions d'observation où deux fragments proches peuvent se recombinaer à plus grande résolution. Comme les structures hiérarchiques sont un ensemble de fragments incrustés les uns dans les autres et que les structures isolées ne sont observables que dans une seule longueur d'onde, nous ne de-

vons considérer que les structures linéaires. En effet, ces dernières représentent des objets uniques multi-échelles et multi-longueurs d'onde sans proximité immédiate avec un autre objet. Dans les données mono-résolution (images I(36.3, 160 – 500)), l'effet de résolution est implicitement couplé à l'effet de la longueur d'onde. Malgré cela, nous connaissons les conséquences d'une convolution pure avec l'ensemble I(13.5 – 36.3, 160) ce qui nous permet dans une moindre mesure de distinguer les deux effets.

En comparant la persistance des données brutes $I_0(13.5 - 36.3, 160 - 500)$ et mono-longueur d'onde I(13.5 – 36.3, 160), nous montrons dans la Figure IV.15 que les persistances associées à ces deux jeux de données sont très similaires : pour la transition 24.9'' → 36.3'' de ces deux ensembles de données, 45% des fragments extraits à 24.9'' se retrouvent à 36.3''. Pour la transition 18.2'' → 24.9'', 70% des fragments de $I_0(18.2, 250)$ sont retrouvés dans $I_0(24.9, 350)$; tandis que 54% des fragments I(18.2, 160) sont retrouvés dans I(24.9, 160). De plus, à résolution égale, nous détectons systématiquement plus de fragments dans $I_0(13.5 - 36.3, 160 - 500)$ que dans I(13.5 – 36.3, 160). Or, *a priori*, la différence entre ces deux jeux de données tient de l'effet induit par la longueur d'onde dans les données brutes. Par conséquent, si la longueur d'onde a un effet sur la détectabilité des fragments, il tend à augmenter le nombre de fragments détectés et à augmenter marginalement la persistance des structures. Les observations à plus grande longueur d'onde ne semblent donc pas améliorer significativement la détection des fragments par rapport à une dégradation des images, et ne semblent pas suffisants pour expliquer un aplatissement de la cascade hiérarchique à grande échelle.

Toutefois, si nous regardons la persistance des données mono-résolution I(36.3, 160 – 500), nous trouvons que 79% des fragments détectés dans $I_0(36.3, 500)$ se retrouvent dans I(36.3, 350). Par conséquent, on estime qu'un fragment sur cinq disparaît entre ces deux longueurs d'onde. Or, notre modèle prédit une production moyenne de 1.29 fragments avec un coefficient de fractalité $\mathcal{F} \sim 1.6$ à l'échelle spatiale correspondant à la résolution 24.9'', soit un peu moins d'un fragment sur trois qui se subdivise. Sous cette éventualité, deux parents produisent chacun un enfant et le dernier parent se subdivise en deux enfants, pour un total de quatre fragments produits en moyenne pour trois parents. Pour obtenir un plateau dans la productivité, il faudrait que le parent ayant produit deux fragments voit l'un ou l'autre de ses enfants disparaître.

Sachant qu'un parent sur cinq n'apparaît pas à plus petite longueur d'onde, il apparaît invraisemblable que l'absence de fragments multiples à 24.9'' soit systématique à l'ensemble des structures, sans ajouter de biais supplémentaires pouvant provenir de la nature hiérarchique des structures à fragments multiples (biais pouvant être causés par l'outil

d'extraction utilisé en raison de la proximité des fragments, ou d'une architecture du nuage plus complexe en raison des émissions respectives de chaque fragment). Il faut en effet garder à l'esprit que cette évaluation est valable sur des structures simples, linéaires, sans subdivision dans le domaine d'échelles considérées. Rien ne garantit que cette statistique de perte (un parent sur cinq) soit valable pour les structures plus complexes qui contiennent un ensemble de fragments. Il n'est donc pas totalement évident de conclure sur les conséquences de la longueur d'onde sur la possibilité de détecter ou non des fragments par le biais de $get\ s.f.$. Idéalement, pour tester notre plateau il faudrait construire, pour chaque longueur d'onde, une courbe de productivité. Cela nécessite d'avoir, pour chaque résolution spatiale, une carte de chaque longueur d'onde.

Contraintes géométriques de fragments elliptiques

Pour tester la contrainte de placement des fragments enfants dans leur parent compte tenu de leur rapport d'échelle, nous avons utilisé le modèle de génération d'ellipses décrit dans l'article exposé en Annexe C. Cette procédure générative Monte-Carlo est similaire au modèle de génération d'ellipsoïdes introduit au Chapitre II et détaillé dans l'Annexe A. Cette procédure positionne dans un parent une quantité de fragments enfants déterminée par un coefficient de fractalité $\mathcal{F} = 1.6$. Les réseaux construits sont lésés de 45% de leurs nœuds pour simuler un taux de carence équivalent aux données, ce qui permet d'avoir une fractalité effective $\mathcal{F}_{\text{eff}} = 1.3$ (voir Figure IV.14), similaire à la fractalité mesurée dans les données brutes sans prise en compte des coïncidences hiérarchiques. La courbe de productivité des structures générées est comparée aux données brutes dans la Figure IV.14. La productivité observée n'est certes pas invariante d'échelle, mais aucune saturation n'a lieu aux grandes échelles. Ces contraintes géométriques, associées à la suppression aléatoire de nœuds dans les réseaux, tendent à déclinier la productivité des structures sans pour autant expliquer la présence d'un plateau dans les données brutes. Le mode de suppression des nœuds, réalisé de manière uniforme le long des échelles, ne garantit cependant pas de retranscrire au mieux les éventuels défauts de détection. En effet, dans les réseaux observés de NGC 2264, on peut supposer que certains nœuds puits n'apparaissent pas tout simplement parce qu'ils n'ont pas encore été formés. Or, lorsque nous supprimons des nœuds dans les réseaux générés, nous supprimons également ces nœuds à petite échelles qui n'existent pas nécessairement. Ainsi, nous ne tenons pas compte du fait que les défauts de détection sont principalement orientés vers les grandes échelles.

Sous ces contraintes géométriques, le nombre de fragments produits aux échelles 13 et 18 kUA (de résolution 18.2'' et 24.9'') s'élève en moyenne respectivement à ~ 1.23 et ~ 1.14 fragments. Alors, moins d'un fragment parent sur cinq à 26 kUA (36.3'') a la

possibilité de se subdiviser à des échelles inférieures. Par ailleurs, nous ne disposons que de 23 structures, dont seulement 12 possèdent un fragment source à l'échelle 36.3", pour un total de 15 fragments sources à cette échelle. Ainsi, en moyenne, seules trois sources devraient se subdiviser. Du fait de cette faible statistique, l'effet couplé de la contrainte de placement des fragments avec l'incertitude liée à leur longueur d'onde d'émission pourrait fournir une explication sur la pénurie de fragments aux grandes échelles. Par ailleurs, les défauts de détection éventuels dus à la procédure d'extraction pouvant introduire la présence de carences dans les structures, sous-estiment également le nombre de fragments détectés et renforcent les problèmes liés à la faible statistique.

5.3 Résultat et interprétation du suivi multi-échelle de la fragmentation

Sous hypothèse d'auto-similarité du nuage, la productivité des fragments doit être nécessairement invariante d'échelle. Or, nous avons vu que la productivité des structures hiérarchiques dans NGC 2264 n'est pas à première vue invariante d'échelle, en raison d'une stagnation des YSOs à petite échelle ($R < 6$ kUA), et d'un plateau aux grandes échelles ($13 \text{ kUA} < R < 26 \text{ kUA}$) traçant des structures localement linéaires. La stagnation des YSOs pourrait s'expliquer par des processus évolutifs latents : dans le futur il est possible que le nombre de YSOs augmente. Cependant, la réalité du plateau aux grandes échelles n'est pas clairement établie en raison d'effets couplés de longueurs d'onde (partie), de géométrie des fragments (partie), mais aussi des biais associés aux éventuels défauts de détection par getsf. Dans un premier temps, supposons malgré tout que la fragmentation a un caractère monolithique entre 13 kUA et 26 kUA de telle sorte que le plateau observé possède une certaine réalité. Nous supposerons dans un second temps le cas contraire et aviserons de ce qu'il serait nécessaire d'avoir pour lever cette incertitude sur la réalité du plateau.

Fragmentation localement monolithique

Dans ce cas de fragmentation localement monolithique, on observe que la fragmentation transitionne d'un régime linéaire à un régime hiérarchique entre les grandes échelles (13 – 26 kUA) et les petites échelles (6 – 13 kUA). Dans l'interprétation de notre modèle de fragmentation, cela peut être provoqué par un taux de fragmentation nul avec $\phi = 0$ entre 13 et 26 kUA, puis un taux de fragmentation $\phi > 0$ en deçà de 13 kUA. Or, une fragmentation gravo-turbulente telle qu'implémentée au Chapitre III, partie 2 ne prédit pas cette succession de régime monolithique/hiérarchique à ces échelles. Il n'est pas impossible que la physique considérée dans ce modèle soit incomplète pour calculer conve-

nablement l'évolution du taux de fragmentation, auquel cas quel mécanisme (spécifique à ces échelles) permettrait de prévenir la fragmentation du nuage ? En l'état, avec $\phi = 0$ et ξ constant, il apparaît impossible d'expliquer ce régime d'effondrement localement monolithique.

Toutefois, il existe un autre cadre dans lequel un régime monolithique peut apparaître, si $\phi \geq \xi + 3 \geq 0$. À ϕ constant, une augmentation du taux d'injection de masse ξ aux petites échelles aurait pour conséquence de basculer de ce régime monolithique ($\phi \geq \xi + 3 \geq 0$) à un régime hiérarchique avec $0 < \phi < \xi + 3$. Cette hypothèse signifierait que :

1. soit le nuage est en contraction quasi-statique supposant un milieu non turbulent aux plus grandes échelles ;
2. soit les fragments produits aux grandes échelles entrent en coalescence.

Le premier cas semble peu probable étant donné qu'au moins une des régions centrales de NGC 2264 est sujette à des jets de matières injectant de l'énergie cinétique à grande échelle, et donc de la turbulence. Le second cas questionne sur le phénomène qui favoriserait une coalescence à grande échelle mais empêcherait les plus petites échelles à faire de même. Est-ce un effet purement géométrique en lien avec la structure en filaments du nuage qui se recoupent dans les amas centraux ? Est-ce un effet évolutif des fragments ? Si la présence de ce régime monolithique est caractéristique de la structure de NGC 2264, il ne devrait pas apparaître dans d'autres nuages moléculaires aux mêmes échelles. Il faudrait alors effectuer cette analyse multi-échelle sur d'autres nuages pour tester la présence de ce plateau entre 13 kUA et 26 kUA.

Mesure d'auto-similarité

Si la présence de ce plateau était le résultat des biais énoncés précédemment (effets de longueur d'onde, géométrie et/ou de complétude des extractions à grande échelle), alors il ne serait pas possible de conclure, en l'état, sur le caractère auto-similaire du nuage. Toutefois, on peut introduire des travaux alternatifs qui permettraient de confirmer la présence ou non de ce plateau. On pourrait alors :

1. quantifier plus précisément la quantité de fragments omis par $getsf$ et ainsi évaluer une courbe de productivité corrigée ;
2. croiser cette analyse avec d'autres outils d'extraction pour valider la présence ou l'absence de fragments à certaines échelles ;
3. synthétiser des cartes multi-échelles à longueurs d'onde constante pour extraire la courbe de productivité associée à une longueur d'onde.

Par ailleurs, le suivi multi-échelle effectué ici ne tient compte que de la variation de la productivité sur une décade. Si le taux de fragmentation évolue lentement sur cette décade (voire moins si on ne compte pas les YSOs) la courbe de productivité associée apparaîtrait invariante d'échelle. Par exemple, sur la Figure IV.14 est affiché le domaine de variation moyen du taux de fragmentation $\langle \phi \rangle = 1.0 \pm 0.3$ tel qu'il a été mesuré en partie 4, en considérant un cas pessimiste des défauts de détection. En comparant ce domaine de variation avec les courbes de productivité attendues par un modèle de fragmentation gravo-turbulent, on voit que les variations attendues de la productivité dans le domaine d'échelles 1.4 – 26 kUA, sont suffisamment faibles pour être confondues avec un processus invariant d'échelle, compte tenu de nos incertitudes. Pour pouvoir rejeter le cas de faibles variations et confirmer l'hypothèse d'un auto-similarité stricte du nuage, il faudrait réaliser cette analyse sur une dynamique spatiale plus large, donc pas uniquement avec les observations *Herschel* qui ne couvrent qu'une demi-décade d'échelles spatiales. En outre, la caractérisation du suivi multi-échelle du taux de fragmentation nécessiterait une dynamique plus importante et plus robuste en terme de complétude des fragments extraits, mais aussi en terme de statistique.

Chapitre V

Conséquences de la fragmentation sur la fonction de masse des étoiles

Sommaire

1	Méthodes de dérivation de la fonction de masse des fragments	139
1.1	Solution approchée	139
1.2	Solution semi-analytique par les densités de probabilité	140
1.3	Validité des solutions	144
2	Étude préliminaire du processus de fragmentation appliqué à une fonction de masse	146
2.1	Conditions initiales et domaine de variation	146
2.2	Distribution de probabilité du nombre d'enfants produits	147
2.3	Contraintes d'échantillonnage spatial	150
2.4	Influence de la fragmentation sur la distribution en masse	152
	↔ Multiplicité des fragments produits	153
	↔ Rendement massique de formation	154
	↔ Rapport de masse entre fragments primaire et secondaires	156
3	Génération de fonction de masse de type Salpeter	157
3.1	Proximité de la distribution générée avec l'IMF	157
3.2	Solutions compatibles avec l'IMF canonique	160
3.3	Phase de formation d'étoile	165
3.4	Implications sur la relation entre masse et taille des fragments	167
4	Processus de fragmentation sur les échantillons finis	170
4.1	Évolution d'un échantillon fini au cours de la fragmentation	170
4.2	Conséquences d'une fragmentation gravo-turbulente	172
4.3	Conditions pour retrouver une IMF canonique	175

La fonction de masse initiale des étoiles (*Initial Mass Function*, IMF) représente la densité de probabilité qui caractérise la distribution en masse des étoiles à leur naissance. La première représentation mathématique de l’IMF a été introduite par [Salpeter \(1955\)](#) qui a caractérisé le domaine des masses intermédiaires et élevées ($M \in [0.5; 10] M_{\odot}$) comme une loi de puissance pour laquelle la fraction d’étoiles $\zeta(\log M)$, dont les masses sont contenues dans un intervalle logarithmique en masse $\log(M)$, est donnée par $\zeta(\log M) = dN/d(\log M) \propto M^{1-\alpha}$ avec $\alpha = 2.35$. Ce comportement, associé à la valeur numérique de l’indice α , symbolise la “*pente de Salpeter*”. Par la suite, d’autres fonctions ont été proposées pour tenir compte de la complexité de la forme réelle de l’IMF, comme par exemple les fonctions segmentées en plusieurs lois de puissance de [Kroupa \(2001\)](#), ou combinant des fonctions log-normale et loi de puissance ([Chabrier 2003](#)). D’autres fonctions non segmentées, différentiables et continues, peuvent également être définies ([De Marchi et al. 2005](#); [Maschberger 2013](#)) permettant une manipulation plus pratique de l’IMF. Malgré leurs différences mathématiques, toutes ces fonctions partagent des propriétés communes, caractéristiques des différents domaines de masse constituant l’IMF :

1. Un comportement en loi de puissance de type Salpeter pour des masses $M > 1 M_{\odot}$;
2. Une courbure représentative d’une fonction log-normale à des masses plus faibles, avec un pic localisé autour de $M \sim 0.2 M_{\odot}$;
3. Des masses limites dans le domaine des naines brunes $M \sim 0.01 M_{\odot}$ et pour les objets les plus massifs $M \sim 100 - 120 M_{\odot}$.

Plusieurs mécanismes permettent d’expliquer l’existence de tels comportements, dont des processus de nature stochastique qui, en se cumulant, peuvent reproduire la composante log-normale de l’IMF ([Larson 1973](#); [Elmegreen & Mathieu 1983](#)) ; mais aussi des processus physiques invariants d’échelle amenant naturellement vers le développement de lois de puissance ([Elmegreen & Falgarone 1996](#); [Padoan & Nordlund 2002](#)). De plus, les études théoriques prédisent une dépendance du pic de l’IMF avec les propriétés physiques du nuage à plus grande échelle ([Larson 2005](#); [Hennebelle & Chabrier 2008](#); [Hopkins 2013](#)). Cette relation que semble entretenir l’IMF avec les phénomènes se déroulant à plus grande échelle, laisse entrevoir une dépendance directe entre la forme de l’IMF, et donc la masse des étoiles, avec les mécanismes physiques et/ou stochastiques structurant leur environnement proche.

Les caractéristiques de l’IMF pourraient ainsi découler des propriétés statistiques de la distribution en masse des cœurs denses dans lesquels ces étoiles sont formées ([Motte et al. 1998](#)). Bien que définies sur des domaines de masses plus élevées, les distributions en masse des cœurs (*Core Mass Function*, CMF) sont caractérisées par une loi de puis-

sance aux grandes masses, d'indice très proche d'une distribution type Salpeter (Motte et al. 1998; Offner et al. 2014). Bien que la définition d'un cœur semble être dépendante de la résolution spatiale avec laquelle il est observé (Louvet et al. 2021), la proximité de l'IMF avec certaines CMF est telle qu'une efficacité de transfert de masse de l'ordre de 30% (Alves et al. 2007) est nécessaire pour réconcilier les deux distributions, sans besoin particulier de prescrire quelconque procédé capable d'altérer la forme générale de la distribution. Ce lien apparent entre la CMF et l'IMF traduirait ainsi les conséquences des processus dominant de formation d'étoiles au sein des cœurs.

Par ailleurs, des mesures récentes dans des régions massives de formation d'étoiles révèlent la présence de CMF classées *top-heavy*, c'est-à-dire présentant des lois de puissance d'indice $\alpha < 2.35$, associées à des distributions plus pentues qu'une IMF de type Salpeter (Motte et al. 2018; Pouteau et al. 2022). En particulier, le large programme ALMA prénommé ALMA-IMF (Motte et al. 2022, projet #2017.1.01355.L), a pour objectif d'étudier plus en détails ce type de variations concernant la pente des distributions de masse au sein de régions de formation massives afin de contraindre les origines de l'IMF. Parmi les régions observées au sein de ce programme, les nuages W43 – MM2 & MM3 localisés dans la région de W43 ont fait l'objet d'une étude approfondie par Pouteau et al. (2022) qui ont mis en évidence une CMF caractérisée par un indice $\alpha = 1.95$ pour des masses $1 M_{\odot} < M < 100 M_{\odot}$. Les nuages W43 – MM2 et W43 – MM3 constituent à eux deux un filament dense, de masse $M \sim 3.5 \times 10^4 M_{\odot}$ dans lequel des étoiles massives se forment (Nguyen-Lu'o'ng et al. 2013). S'étendant sur une surface de 14 pc^2 , cette région de formation se situe à 5.5 kpc de notre système solaire (Zhang et al. 2014) et est localisée dans le bras du Centaure, au niveau de la barre centrale de notre galaxie. Le programme ALMA – IMF a imagé cette région de formation avec une résolution angulaire de $0.5''$, ce qui correspond à une échelle spatiale caractéristique de 2500 UA. Les cœurs constituant la CMF extraite de W43 – MM2 & MM3 ont été extraits à l'aide de l'algorithme `gets.f`, dont il résulte un échantillon de 205 structures denses. Cet échantillon est estimé complet au delà de $\sim 1 M_{\odot}$.

Ce chapitre a pour objectif d'évaluer la possibilité que la CMF de W43, et plus généralement que des CMF classées *top-heavy*, puissent être réconciliées avec une IMF de type Salpeter en envisageant uniquement les processus de fragmentation tels qu'introduits dans les chapitres précédents. S'il est effectivement possible de réconcilier une CMF *top-heavy* avec l'IMF de Salpeter, la question se posera de savoir si l'IMF de W43 est vraisemblablement vouée à devenir *top-heavy*, ou si elle évoluera naturellement vers une IMF de Salpeter. Dans la partie 1, nous introduirons les différentes méthodes utilisées pour obtenir la distribution en masse des fragments le long de n'importe quelle échelle

spatiale. Ensuite, nous évaluerons dans la partie 2 l'influence spécifique de chaque paramètre de notre modèle sur le devenir d'une CMF caractérisée par une loi de puissance. Dans la partie 3 seront dérivées des solutions compatibles avec l'IMF de Salpeter dans le cadre d'une fragmentation invariante d'échelle en considérant uniquement la densité de probabilité caractérisant l'échantillon de cœurs de W43. Enfin, nous appliquerons dans la partie 4 notre modèle de fragmentation gravo-turbulent sur l'échantillon fini de W43 pour apporter une tentative de prédiction sur le devenir de l'IMF de cette région.

1 Méthodes de dérivation de la fonction de masse des fragments

1.1 Solution approchée

Pour déterminer la fonction de masse d'objets résultants de la fragmentation d'un ensemble de structures, reprenons la description discrète du modèle de fragmentation du Chapitre II. Dans ce modèle, un fragment parent engendre un nombre entier d'enfants n_l selon une loi de probabilité discrète $p_l(n_l)$ qui attribue, pour chaque alternative n_l , une probabilité p_l . Ensuite, chaque enfant engendré dans une fratrie de cardinal n_l reçoit une certaine fraction de la masse parentale M_l . Pour construire cette fratrie, son cardinal est d'abord déterminé en attribuant au parent un nombre aléatoire x uniformément distribué entre 0 et 1. La valeur numérique de x détermine le nombre d'enfants produits en fonction de la probabilité $\mathcal{P}(n_l \leq m)$ que le nombre n_l d'enfants produit soit au plus égal à une valeur m . La valeur sélectionnée n_l correspond alors à la valeur minimale de m pour laquelle le tirage aléatoire satisfait $x < \mathcal{P}(n_l \leq m)$ (voir Figure V.1).

La loi de probabilité considérée exclut le cas $n_l = 0$ de cette sélection car cette éventualité n'apporterait aucune contribution supplémentaire sur la distribution en masse : ces fragments enfants n'existent tout simplement pas. Une masse est ensuite attribuée à chacun des enfants produits en fonction du rendement de formation ϵ_l , supposé ici non aléatoire, et de la fraction de masse $\psi_{li}(n_l)$ reçue par l'enfant numéro i de la part du réservoir $\epsilon_l M_l$, d'après :

$$M_{l+1,i} = \epsilon_l \psi_{li}(n_l) M_l \quad (\text{V.1})$$

Bien qu'il soit possible de modéliser la quantité $\psi_{li}(n_l)$ par le biais de l'équation II.6 en introduisant le rapport de masse ψ entre les fragments primaires et secondaires, il est possible de conserver $\psi_{li}(n_l)$ comme étant une fonction quelconque qui décrit la manière dont est répartie la masse entre les fragments enfants. De manière itérative, en substituant

les enfants par des parents, il est alors possible de déterminer la distribution en masse des fragments à une échelle d'arrêt R_{stop} à partir de laquelle la fragmentation est vraisemblablement inhibée. Il apparaît alors simple de dériver des distributions en masse par tirage Monte-Carlo à l'aide de la variable aléatoire x .

La prolifération des fragments le long des échelles spatiales est complexifiée par la croissance stochastique de la population de fragments parents. En effet, la quantité totale de fragments productibles dépend de la taille de la population de parents à l'échelle supérieure. Par analogie, cherchons à calculer la probabilité qu'après cinq lancés d'un dé (non pipé), celui-ci soit tombé quatre fois sur sa face "2". Pour calculer cette probabilité, il est possible d'effectuer un comptage du nombre de succès "le dé est tombé sur la face "2" au cours des cinq lancés". Cependant, à chaque fois que ce dé est tiré, de nouveaux dés sont ajoutés au système, d'un nombre équivalent au montant inscrit sur la face du dé tiré, moins un. Au prochain tirage, il faut alors lancer l'ensemble des dés disponibles : la probabilité d'obtenir un dé sur une face "2" dépend de la quantité de dés produits par le, voire les tirages précédents. Ce procédé ne peut donc pas être trivialement formalisé par une simple combinatoire, d'où l'intérêt de trouver des méthodes de calcul alternatives. Cette analogie permet aussi d'appréhender le fait qu'à la fin des lancés de dé, uniquement une seule combinaison est réalisée parmi un ensemble de possibilités. Par exemple, si un dé tombe sur "4", trois nouveaux dés apparaissent, affectant la probabilité d'obtenir un "2" au niveau suivant, et modifie totalement les tirages ultérieurs car l'échantillon sera différent. Ainsi, la fonction de masse des fragments enfants correspond à une forme approchée de la distribution que l'on obtiendrait en considérant l'ensemble des alternatives possibles. La précision de cette forme approchée est limitée par la taille N de l'échantillon initial de fragments parents. En effet, plus cet échantillon est grand, plus les choix entrepris individuellement par chaque parent seront variés, et plus la quantité d'issues différentes sera importante. Avec un petit échantillon de parents, il est nécessaire de réaliser cette opération de fragmentation plusieurs fois pour couvrir une variété suffisante d'issues et ainsi obtenir une distribution moyenne.

1.2 Solution semi-analytique par les densités de probabilité

Une procédure de calcul semi-analytique est présentée afin de palier aux limitations causées par la taille N de l'échantillon initial de fragments parents. Cette procédure reste valable sous les hypothèses suivantes :

1. Rendement déterministe : ϵ_l n'est pas une variable aléatoire ;
2. Homogénéité : la fragmentation ne dépend pas des conditions physiques locales aux fragments parents.

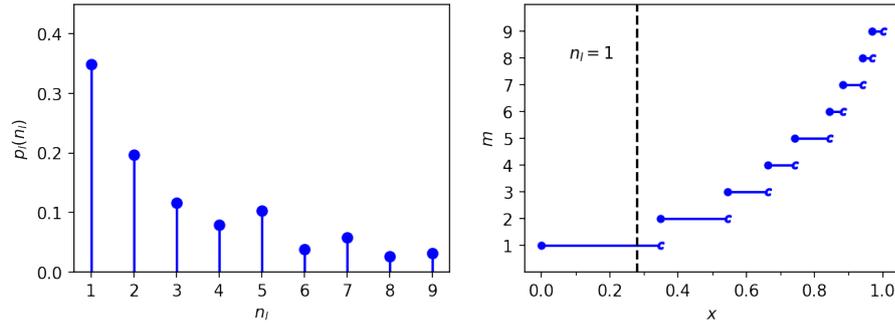


FIGURE V.1 – Procédure de sélection de la quantité de fragments enfants produits. À gauche : Exemple d’une loi de probabilité discrète qui associe à chaque nombre de fragment enfant n_l productible par un parent, une probabilité p_l . À droite : Sélection du nombre d’enfants produits n_l en fonction du tirage aléatoire d’une variable x uniformément distribuée entre 0 et 1. Chaque “c” marque la probabilité $\mathcal{P}(n_l \leq m)$ de tirer un nombre n_l qui soit au plus égal à une valeur m donnée. La valeur sélectionnée n_l correspond alors à la valeur minimale de m pour laquelle $x < \mathcal{P}(n_l \leq m)$.

Considérons une population de fragments dont la distribution en masse suit une densité de probabilité $\zeta_l(M)$ au niveau l , normalisée comme :

$$\int_0^{+\infty} \zeta_l(M) dM = 1 \quad (\text{V.2})$$

Une nouvelle fonction de masse $\zeta_{l+1}(M)$ peut être calculée à partir de $\zeta_l(M)$ en tenant compte du nombre de fragments n_l produits par les parents constituant $\zeta_l(M)$ et de la fraction de masse $\epsilon_l \psi_{li}$ que ces parents distribuent à leurs enfants. Les objets constituant $\zeta_l(M)$ peuvent être regroupés en différentes sous populations, en fonction de la quantité d’enfants produits au sein de chacune de ces sous populations, et des différentes fractions de masse qui leur sont attribuées. Par exemple, l’ensemble des enfants numéro i originaires d’une fratrie de cardinal $n_l = 2$ ayant reçu la fraction $\epsilon_l \psi_{li}(n_l = 2)$ de la part de leur parent, constituent une sous-population de $\zeta_{l+1}(M)$. Ainsi, au niveau $l+1$, chaque sous-population de fragments hérite des mêmes propriétés : la même multiplicité n_l et la même fraction de masse $\epsilon_l \psi_{li}(n_l)$. En reprenant l’analogie des lancés de dés, il existe toujours un sous-ensemble (même vide) de dés ajoutés précédemment par d’autres dés ayant montré la face “1”, la face “2”, ou d’autres faces. Une sous population peut alors être définie par l’ensemble des dés montrant la face “X”. Dans notre cas, une sous-population est caractérisée par l’ensemble des fragments originaires du couple $(n_l ; \epsilon_l \psi_{li})$.

En revanche, l’origine stochastique des fratries dont les composantes s’associent au sein de chacune de ces sous-populations, implique que ces dernières contribuent avec des pondérations différentes à la reconstitution de $\zeta_{l+1}(M)$. Après fragmentation d’une popu-

lation parentale de taille N_l , la probabilité $v_l(n_l)$ de tirer aléatoirement un fragment enfant provenant de la sous-population caractérisée par $(n_l; \epsilon_l \psi_{li})$ est le rapport entre la quantité d'enfants constituant cette sous-population avec la quantité totale d'enfants produits. La quantité d'enfants constituant une fratrie de cardinal n_l équivaut à $N_l p_l(n_l) n_l$, mais la quantité d'enfants ayant hérité d'une fraction $\epsilon_l \psi_{li}$ dans cette fratrie équivaut à $N_l p_l(n_l)$, soit :

$$v_l(n_l) = \frac{N_l p_l(n_l)}{N_l \sum_{n_l} n_l p_l} \quad (\text{V.3})$$

Ou, plus simplement, avec $\bar{n}_l = \sum_{n_l} n_l p_l$ l'espérance de la loi de probabilité p_l :

$$v_l(n_l) = \frac{p_l(n_l)}{\bar{n}_l} \quad (\text{V.4})$$

Cette probabilité est bien normalisée, en sommant sur l'ensemble des sous-populations existantes, c'est-à-dire sur l'ensemble des fragments ayant hérité d'une fraction $\epsilon_l \psi_{li}$ dans chacune des fratries de cardinal n_l :

$$\begin{aligned} \sum_{n_l} \sum_{i=1}^{n_l} v_l(n_l) &= \sum_{n_l} \frac{p_l(n_l)}{\bar{n}_l} \sum_{i=1}^{n_l} 1 \\ &= \sum_{n_l} \frac{n_l p_l(n_l)}{\bar{n}_l} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Pour chacune de ces sous-populations, la masse des enfants est reliée à la masse de leur parent par $M_{l+1,i}(n_l) = \epsilon_l \psi_{li}(n_l) M_l$. Comme chaque masse parentale engendre une masse réduite d'un facteur $\epsilon_l \psi_{li}(n_l)$, nous pouvons écrire l'expression de la densité de probabilité au niveau $l + 1$ en sommant les contributions de chacune des sous-populations :

$$\zeta_{l+1}(M) \propto \sum_{n_l} \sum_{i=1}^{n_l} v_l(n_l) \zeta_l \left(\frac{M}{\epsilon_l \psi_{li}(n_l)} \right) \quad (\text{V.5})$$

Il est alors possible de calculer le coefficient de normalisation de cette nouvelle densité de probabilité :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \zeta_{l+1}(M) dM &= 1 \\
 &= A \int_0^{+\infty} \sum_{n_l} \sum_{i=1}^{n_l} \nu_l(n_l) \zeta_l \left(\frac{M}{\epsilon_l \psi_{li}(n_l)} \right) dM \\
 &= A \sum_{n_l} \nu_l(n_l) \sum_{i=1}^{n_l} \int_0^{+\infty} \zeta_l \left(\frac{M}{\epsilon_l \psi_{li}(n_l)} \right) dM
 \end{aligned}$$

En posant $M' = \frac{M}{\epsilon_l \psi_{li}(n_l)}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 1 &= A \sum_{n_l} \nu_l(n_l) \sum_{i=1}^{n_l} \int_0^{+\infty} \zeta_l(M') \epsilon_l \psi_{li}(n_l) dM' \\
 &= A \underbrace{\epsilon_l}_{=1/\bar{n}_l} \sum_{n_l} \nu_l(n_l) \underbrace{\sum_{i=1}^{n_l} \psi_{li}(n_l)}_{=1} \underbrace{\int_0^{+\infty} \zeta_l(M') dM'}_{=1}
 \end{aligned}$$

Or, d'après la normalisation de $\zeta_l(M)$ formulée équation V.2 et de la relation de fermeture de $\psi_{li}(n_l)$ donnée équation II.4, on a :

$$A = \frac{\bar{n}_l}{\epsilon_l} \quad (\text{V.6})$$

Soit finalement :

$$\zeta_{l+1}(M) = \sum_{n_l} \sum_{i=1}^{n_l} \frac{\bar{n}_l \nu_l(n_l)}{\epsilon_l} \zeta_l \left(\frac{M}{\epsilon_l \psi_{li}(n_l)} \right) \quad (\text{V.7})$$

Ou encore :

$$\boxed{\zeta_{l+1}(M) = \sum_{n_l} \sum_{i=1}^{n_l} \frac{p_l(n_l)}{\epsilon_l} \zeta_l \left(\frac{M}{\epsilon_l \psi_{li}(n_l)} \right)} \quad (\text{V.8})$$

La construction des distributions en masse des niveaux suivants est procédurale en considérant chaque niveau l'un après l'autre. Cette approche procédurale a pour avantage de ne pas prendre en compte explicitement toutes les combinaisons possibles du premier niveau disponible jusqu'au dernier. Par la suite, nous testons la validité de cette procédure.

1.3 Validité des solutions

Le modèle de fragmentation introduit et défini au Chapitre II, puis utilisé pour dériver la distribution en masse des fragments, est analogue au modèle développé par Larson (1973), ci-après L73. En effet, ces deux modèles formalisent le processus de fragmentation le long de plusieurs niveaux discrets, dans lesquels chaque fragment parent possède une certaine probabilité de fragmenter au niveau suivant. Dans le modèle de L73, un objet de masse M_0 au niveau initial $l = 0$ a une probabilité p de se fragmenter vers le niveau $l = 1$ en deux enfants de masse égale $M_0/2$, et une probabilité $1 - p$ de s'effondrer en un enfant unique de masse M_0 . Chacun des enfants est ensuite soumis au même processus probabiliste et ils peuplent les niveaux suivants avec de nouveaux fragments. Ainsi, après l niveaux de fragmentation, les fragments enfants ne peuvent acquérir que des valeurs de masse discrètes $M_n = 2^{-n}M_0$, où $n \leq l$ est un entier positif. Dans le cadre de notre modèle, ce procédé correspond à des conditions d'équipartition avec $\psi = 1$, et de conservation totale de la masse du parent avec $\xi = 0$. Un taux de fragmentation ϕ équivalent ne peut être évalué car L73 ne considère pas la taille des fragments au cours du processus de fragmentation. Or, pour définir numériquement la quantité ϕ , il est essentiel de définir la fragmentation comme un mécanisme multi-échelle. Dans son modèle, L73 démontre que la fraction $f(n, l)$ de la masse totale du nuage se déversant dans des fragments de masse $M_n = 2^{-n}M_0$, après l niveaux de fragmentation, est donnée par la distribution binomiale :

$$f(n, l) = p^n (1 - p)^{n-l} \frac{n!}{l!(n-l)!} \quad (\text{V.9})$$

D'autre part, en posant $s(M_n)$ la proportion d'enfants héritant d'une masse M_n , la fraction $f(n, l)$ peut se réécrire comme la masse totale que représentent les enfants de masse M_n avec la masse totale initiale :

$$f(n, l) = \frac{2^{-n}M_0}{M_0} s(M_n) \quad (\text{V.10})$$

Soit en inversant l'équation, la proportion d'enfants héritant d'une masse M_n après l niveaux de fragmentation :

$$s(M_n) = 2^n f(n, l) \quad (\text{V.11})$$

Cette quantité représente la probabilité discrète qu'un enfant, choisi aléatoirement dans une population ayant expérimenté l niveaux de fragmentation, possède une masse M_n : elle représente la distribution discrète de la masse des fragments produits. Dans son modèle, L73 utilise le théorème central limite pour dériver plus spécifiquement la densité de probabilité continue de la fonction de masse.

Pour tester nos différentes approches de calcul, comparons la distribution discrète en masse $s(M_n)$ tirée par L73 avec les distributions dérivées du tirage Monte-Carlo et de la solution semi-analytique exprimée par l'équation V.8. Pour définir un ϕ correspondant à une probabilité $p = 1/2$ pour un parent de fragmenter en un ou deux enfants, considérons un rapport d'échelle entre les niveaux $r = 1.5$ de telle sorte qu'en moyenne $r^\phi = 1.5$ fragments sont produits, soit $\phi = 1$. Sous ces conditions la quantité de fragments engendrés par un parent est sélectionnée selon une loi binaire : deux enfants sont produits avec une probabilité $p = 0.5$ et un enfant est produit avec une probabilité $1 - p = 0.5$. À cause de l'absence d'échelles spatiales dans L73, le choix de prendre $r = 1.5$ est purement arbitraire, le même raisonnement pourrait être fait avec $r = 2$ et $\phi = \frac{\ln 1.5}{\ln 2}$. De plus, pour simuler l'existence d'une masse initiale unique telle que considérée par L73, la densité de probabilité initiale $\zeta_0(M)$ injectée dans la solution semi-analytique s'exprime avec une distribution gaussienne équivalente à une distribution de Dirac, définie comme :

$$\zeta_0(M) = \frac{1}{a\pi} \exp\left[-\left(\frac{M}{a}\right)^2\right] \quad (\text{V.12})$$

Avec $a \sim 10^{-4}$ pour reproduire une largeur de distribution suffisamment fine. La solution de L73 étant à l'origine une distribution de probabilité discrète, nous veillerons à intégrer la densité de probabilité finale $\zeta_L(M)$ autour des valeurs de masse accessibles M_n pour obtenir les probabilités discrètes associées à la solution semi-analytique.

La partie gauche de la Figure V.2 compare les différentes approches proposées dans ce travail avec la solution de L73, après un total de $L = 20$ niveaux de fragmentation en démarrant avec une masse unique $M_0 = 10^3 M_\odot$. Les distributions formulées sont toutes en concordance les unes avec les autres. Ce résultat indique que notre modèle peut se raccorder à d'autres modélisations similaires en adoptant le bon cas limite. Le modèle de fragmentation multi-échelle introduit dans ce manuscrit doit être considéré comme une extension de L73 à plusieurs égards. Tout d'abord, il permet au processus de fragmentation de débiter avec une distribution en masse quelconque. Ensuite, il met en oeuvre la possibilité d'introduire une répartition en masse quelconque lorsque plusieurs fragments sont produits, de même qu'un rendement massique pour former ces fragments. Enfin, il permet une description locale de la productivité des fragments produits en fonction de leur taille et de leurs conditions physiques, le long d'un domaine d'échelles spatiales.

La distribution résultante du tirage Monte-Carlo permet par ailleurs de vérifier la validité de l'expression semi-analytique en se plaçant dans des conditions de fragmentation plus complexes. Sans considération de faisabilité physique, la droite de la Figure V.2 compare les deux distributions tirées du Monte-Carlo et de l'expression V.8 pour $\psi = 4$,

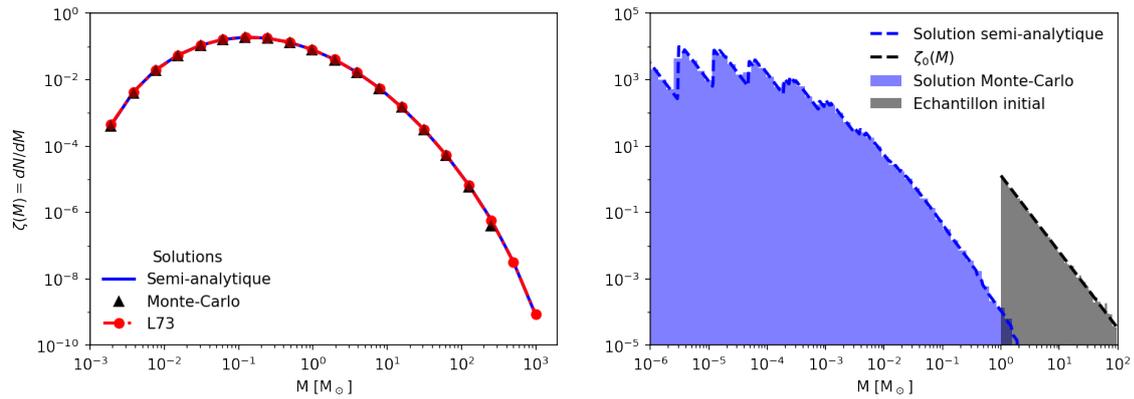


FIGURE V.2 – Comparaison des différentes approches pour calculer une CMF fragmentée. À gauche : La solution de Larson (1973) (L73) est superposée aux CMF obtenues par tirage Monte-Carlo et *via* la solution semi-analytique articulée autour de l'équation V.8. Ce comparatif a été effectué sous les conditions $\xi = 0$, $\psi = 1$, $\phi = 1$, $r = 1.5$ après fragmentation sur $L = 20$ niveaux et en partant de fragments parents de masse $M_0 = 10^3 M_\odot$. Le tirage Monte-Carlo est effectué à partir de $N = 10^4$ objets. À droite : Même chose sans L73 tout en partant d'une distribution en masse initiale en loi de puissance $\zeta_0(M) \propto M^{-\alpha}$ d'indice $\alpha = 2.3$. L'échantillon utilisé pour le tirage Monte-Carlo, et la densité de probabilité $\zeta_0(M)$ injectée dans la solution semi-analytique sont représentés respectivement sous forme d'histogramme, et avec une courbe en pointillés. Ce comparatif a été réalisé sous les conditions $\xi = -1$, $\psi = 4$, $\phi = 1$, $r = 1.5$ après fragmentation sur $L = 7$ niveaux.

$\xi = -1$, $\phi = 1$, $r = 1.5$ après un total de $L = 15$ niveaux, et une densité de probabilité initiale $\zeta_0(M)$ en loi de puissance de type $\zeta_0(M) \propto M^{-2.35}$. Pour avoir une bonne confiance en la solution Monte-Carlo, 10^4 objets sont tirés aléatoirement dans la distribution $\zeta_0(M)$ avant qu'ils ne fragmentent aux échelles inférieures. Les deux méthodes fournissent des résultats très similaires, présageant le bien-fondé de la procédure de calcul semi-analytique.

2 Étude préliminaire du processus de fragmentation appliqué à une fonction de masse

2.1 Conditions initiales et domaine de variation

Pour déterminer l'influence de la fragmentation sur le devenir de la fonction de masse, plaçons-nous sous l'approximation d'invariance d'échelle en considérant les taux de fragmentation ϕ et de masse injectée aux fragments ξ constants de telle sorte que ces deux paramètres soient indépendants l'un de l'autre. Il est ainsi possible d'apprécier l'influence de chacun de ces deux paramètres de manière indépendante sur la fonction de masse.

Pour l'exemple, utilisons la forme paramétrique de la CMF de W43 telle que décrite par [Pouteau et al. \(2022\)](#), sous forme d'une loi de puissance :

$$\zeta_0(M) = \frac{1 - \alpha}{M_{\max}^{1-\alpha} - M_{\min}^{1-\alpha}} M^{-\alpha} \quad (\text{V.13})$$

Où $M_{\min} = 1 M_{\odot}$ et $M_{\max} = 100 M_{\odot}$ sont les bornes de la distribution associées au niveau de complétude de l'échantillon extrait de W43, avec $\alpha = 1.95$. Le préfacteur devant le terme $M^{-\alpha}$ est obtenu par normalisation de la densité de probabilité $\zeta_0(M) \propto M^{-\alpha}$ entre les bornes M_{\min} et M_{\max} de l'échantillon. Par ailleurs, les cœurs extraits de W43 ont une taille caractéristique de l'ordre de 2500 UA. Or, l'étude sur l'évolution du taux de fragmentation en fonction de la taille des fragments de la partie 4.2 du Chapitre III montrait que la fragmentation hiérarchique était inhibée autour de $R_{\text{stop}} \sim 100$ UA. Ainsi, le rapport d'échelle r_{tot} entre le commencement et l'arrêt du processus de fragmentation vaut $r_{\text{tot}} \approx \frac{2500}{100} = 25$. Ce domaine de variation en tailles est associé à des variations du taux de fragmentation ϕ dans l'intervalle $[0 ; 1]$. Comme la masse des étoiles est généralement plus faible que la masse des cœurs qui les forme, considérons des variations du taux d'injection de masse ξ dans l'intervalle $[-1 ; 0]$. Il serait tout à fait possible d'employer des valeurs de $\xi > 0$ sans que cela ne change fondamentalement nos futures observations.

Ces conditions serviront de référence pour sonder l'évolution échelle après échelle de la CMF de W43 en fonction de la taille des objets qui la constituent. Avant de procéder à cette étape, plusieurs choix restent à définir concernant d'une part la distribution de probabilité $p_l(n_l)$ associée au nombre d'enfants que produit un fragment parent, et d'autre part la discrétisation en différents niveaux de fragmentation R_l du domaine spatial étudié.

2.2 Distribution de probabilité du nombre d'enfants produits

Intéressons-nous dans un premier temps à la distribution de probabilité $p_l(n_l)$ régulant l'occurrence de formation des fragments enfants niveau après niveau. Une solution simple serait de considérer une sélection binaire du nombre de fragments produits en fonction du taux de fragmentation ϕ selon la règle suivante : un parent engendre respectivement n et $n + 1$ enfants avec une probabilité $1 - p_l$ et p_l . D'après l'équation II.32 décrivant le nombre moyen d'enfants produits $\bar{n}_l = r^\phi$ en fonction du taux de fragmentation ϕ , la probabilité p_l s'exprime en fonction du taux de fragmentation ϕ par :

$$n(1 - p_l) + (n + 1)p_l = r^\phi \quad (\text{V.14})$$

Soit pour chaque probabilité p_l et $1 - p_l$:

$$\begin{cases} p_l = r^\phi - n \\ 1 - p_l = n + 1 - r^\phi \end{cases} \quad (\text{V.15})$$

Par exemple, pour former en moyenne $\bar{n}_l = 2.3$ fragments, un parent a une probabilité $1 - p_l = 0.7$ de fragmenter en $n = 2$ enfants et une probabilité $p_l = 0.3$ de fragmenter en $n + 1 = 3$ enfants. L'espérance de cette loi de probabilité vérifie la contrainte $\bar{n}_l = r^\phi$ pour n'importe quel r . Toutefois, si $\bar{n}_l \equiv n$ est une valeur entière, alors $p_l = 0$ et $1 - p_l = 1$: pour des valeurs entières de \bar{n}_l , le nombre de fragments productibles est unique. Aussi, cette loi de probabilité impose à la quantité de fragments formés d'osciller entre deux valeurs seulement.

Une autre option consisterait à utiliser une loi de Poisson, définie en fonction d'un paramètre λ ¹ représentant son espérance $\lambda = \sum_{n_l=0}^{+\infty} n_l p_l$ comme :

$$p_l(n_l) = \frac{\lambda^{n_l}}{n_l!} e^{-\lambda} \quad (\text{V.16})$$

Où $x!$ représente la factorielle² de x . Cette distribution est normalisée avec la contrainte :

$$\sum_{n_l=0}^{+\infty} p_l(n_l) = 1 \quad (\text{V.17})$$

Dans la loi de Poisson telle que définie ici, n_l peut représenter n'importe quel entier positif. Or, d'après l'équation II.29 de la partie 3.1 du Chapitre II, il existe une contenance maximale $n_{\max} = r^3$ à partir de laquelle il n'est géométriquement plus possible pour un parent de contenir un enfant supplémentaire, et qui dépend du rapport d'échelle r entre deux niveaux de fragmentation. En supposant qu'un parent fragmente au prochain niveau, le nombre de fragments productibles se limite à $1 \leq n_l \leq \lfloor r^3 \rfloor$; où $\lfloor r^3 \rfloor$ représente l'entier inférieur de la contenance maximale r^3 . La loi de Poisson, considérée sur cet intervalle, doit alors être normalisée avec :

$$\sum_{n_l=1}^{\lfloor r^3 \rfloor} p_l(n_l) = 1 \quad (\text{V.18})$$

Une telle restriction modifie nécessairement l'espérance qui définit la loi de Poisson initiale. En effet, λ tient compte des contributions d'ordre nulle ($n_l = 0$) et supérieures ($n_l > r^3$) qui doivent alors être amputées. Or, le nombre moyen de fragments produits

1. Nous n'utilisons volontairement pas la variable \bar{n}_l ici car λ deviendra un paramètre libre d'ici quelques lignes.

2. Avec par définition, $0! = 1$.

PARTIE 2. ÉTUDE PRÉLIMINAIRE DU PROCESSUS DE FRAGMENTATION
APPLIQUÉ À UNE FONCTION DE MASSE

entre deux niveaux doit valoir numériquement $\bar{n}_l = r^\phi$. On a donc la contrainte suivante :

$$\sum_{n_l=1}^{\lfloor r^3 \rfloor} n_l p_l = r^\phi \quad (\text{V.19})$$

Soit plus explicitement, avec le paramètre λ de la loi de Poisson :

$$\sum_{n_l=1}^{\lfloor r^3 \rfloor} \frac{\lambda^{n_l}}{(n_l - 1)!} e^{-\lambda} = r^\phi \quad (\text{V.20})$$

Pour obtenir une distribution de probabilité compatible avec la valeur attendue par le taux de fragmentation, il faudrait trouver le paramètre λ_0 qui satisfasse l'équation précédente. La loi de probabilité utilisée s'écrirait alors :

$$p_l(n_l) = \frac{\lambda_0^{n_l}}{n_l!} e^{-\lambda_0} \quad (\text{V.21})$$

Avec $1 \leq n_l \leq \lfloor r^3 \rfloor$. Une limitation fort inconvenue de cette solution réside dans la recherche de la valeur λ_0 . En effet, rien ne garantit qu'il soit possible de trouver ce paramètre sous les contraintes imposées en terme d'espérance et des probabilités tirées de la loi de Poisson originelle. Par exemple, pour des valeurs de $r \sim 1.5$, le nombre maximum de fragments productibles entre deux niveaux correspond à $\lfloor r^3 \rfloor = 3$, répartissant les probabilités disponibles sur seulement trois alternatives différentes avec $n_l = 1, 2$ et 3 . Dans ces conditions, une recherche numérique de la racine de l'équation V.20 ne fournit qu'une solution λ_0 approchée dont l'espérance de la loi déduite ne correspond pas à l'espérance souhaitée. Un moyen simple de résoudre cette difficulté serait d'augmenter le nombre maximum de fragments dans la loi de probabilité, au risque de biaiser la multiplicité finale des systèmes générés.

La Figure V.3 compare les distributions en masse générées par la procédure semi-analytique pour différents échantillonnages spatiales r avec une loi de Poisson modifiée ou avec une sélection binaire. Les CMF résultantes de ces deux lois de probabilité sont similaires dans leur domaine de grandes masses. Néanmoins, les densités de probabilités qui résultent de la loi de Poisson modifiée présentent des discontinuités moins excessives que celles issues de la sélection binaire. Cet effet en dent de scie tient pour origine la discrétisation du domaine spatial en plusieurs niveaux de fragmentation mais provient également de la nécessité de définir un nombre entier de fragments à chaque échelle. La réduction de l'effet en dent de scie pour la loi de Poisson modifiée résulte d'une plus grande variété dans la multiplicité des fragments produits ce qui, sous l'effet du brassage répété niveau après niveau, tend à lisser la CMF générée.

Bien que la loi de Poisson modifiée permette un lissage de la densité de probabilité et une prise en compte plus cohérente de la multiplicité des fragments productibles, son utilisation n'est pas entièrement opérationnelle à cause des biais provoqués par une mauvaise évaluation de l'espérance \bar{n}_i . Aussi nous faisons usage par la suite de la sélection binaire pour choisir le nombre de fragments produits au sein de chaque parent. Le choix de la sélection binaire n'introduit qu'une troncature de la distribution finale pour le domaine des plus faibles masses dont l'intérêt est limitée, tant nous cherchons à réconcilier les comportements en loi de puissance, caractéristiques des grandes masses, de la CMF de W43 avec l'IMF de Salpeter. Qui plus est, lorsque ce domaine des grandes masses couvre le domaine associé à la pente de Salpeter $M \sim 1 - 100 M_{\odot}$, la troncature a lieu en deçà du régime de formation des naines brunes, pour des masses $M < 10^{-2} M_{\odot}$.

2.3 Contraintes d'échantillonnage spatial

La discrétisation du domaine spatial en niveaux de fragmentation provoque naturellement un mauvais raccordement entre l'échelle spatiale R_{fin} effectivement atteinte par le processus de fragmentation après L niveaux, et une échelle cible R_{stop} . Le nombre maximum de fragments que peut contenir un parent localisé à l'échelle initial R_0 à cette échelle R_{stop} correspond à $r_{\text{stop}}^3 = \left(\frac{R_0}{R_{\text{stop}}}\right)^3$. À titre informatif, après L niveaux de fragmentation, le nombre maximum de fragments productibles par la sélection binaire est donné par $(\lfloor r^{\phi} \rfloor + 1)^L \neq r_{\text{stop}}^3$. Après L niveaux de fragmentation, le nombre maximum de fragments productibles par la loi de Poisson est donnée par $\lfloor r^3 \rfloor^L \neq r_{\text{stop}}^3$. Comme le montrent les CMF nées de la loi de Poisson modifiée dans la Figure V.3, l'effet combiné de la discrétisation du nombre maximal de fragments productible entre deux niveaux et de l'échantillonnage des échelles spatiales, affecte le domaine des faibles masses en neutralisant, au sein de ces derniers, la production de fragments supplémentaires. Cet effet d'échantillonnage est moins prépondérant avec la loi par sélection binaire car sa définition échelle après échelle n'est pas caractérisée par la contenance maximale des fragments parents. Pour les deux lois, la densité de probabilité associée au domaine des grandes masses subit des déviations inférieures à 10% entre les rapports d'échelle $r = 1.26$ et $r = 1.75$, tout en gardant la même forme entre ces rapports d'échelles.

Outre les problématiques de discrétisation, un autre biais à considérer découle du rapport de masse ψ entre les fragments enfants primaire et secondaires au moment de leur formation. Ce biais n'est important que si ce rapport de masse doit être pris en compte, avec $\psi \neq 1$. En effet, la partie 1.3 du Chapitre III montre l'existence d'un régime de frag-

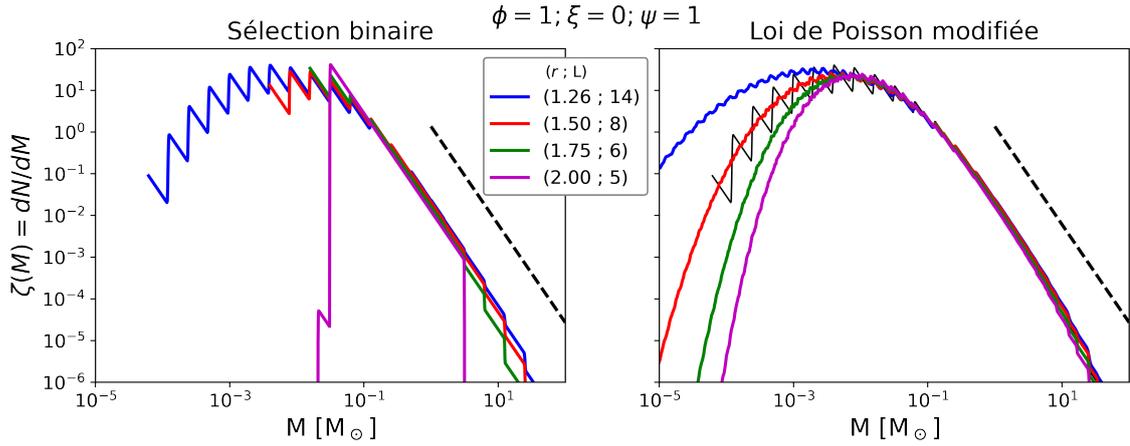


FIGURE V.3 – Distributions en masse générées pour différents rapports d'échelle r permettant d'échantillonner un domaine spatial s'étendant entre une échelle initiale R_0 et une échelle finale $\frac{R_0}{25}$ avec un total L niveaux de fragmentation, pour différentes lois de probabilité associées au nombre d'enfants produits entre chaque niveau. L'échelle finale n'est jamais exactement atteinte du fait de la discrétisation des niveaux de fragmentation. La ligne en pointillés correspond la CMF initiale à l'échelle R_0 . À gauche : CMF fragmentées en utilisant une loi de probabilité binaire. À droite : CMF fragmentée en utilisant une loi de Poisson modifiée. La courbe noire en dents de scie correspond à la CMF générée par une loi binaire dans le cas $r = 1.26$.

mentation hiérarchique retardé, en fonction du couple $(\psi; r)$. Ce phénomène est le résultat de la formation d'un fragment secondaire dont la densité prohibe son existence à l'échelle considérée mais autorise sa présence à une échelle plus basse. Ainsi, l'échantillonnage du domaine spatial définit implicitement une limite de résolution associée au rapport de masse ψ . De plus, lorsqu'un fragment secondaire est délayé sur une échelle inférieure par rapport au primaire, ce dernier atteint l'échelle de formation du secondaire après que sa masse ait été réduite d'une proportion équivalente à r^ξ : à cette échelle commune le rapport de masse entre les deux est donc différent de ψ . Malheureusement la résolution de ce problème de consistance nécessite du temps qui a manqué, aussi nous nous placerons dans des conditions arrangeantes en adoptant un rapport d'échelle r qui admet un domaine de variation claire de ψ dans le cadre d'une fragmentation hiérarchique non retardée.

En résumé, l'échantillonnage d'un domaine spatial doit satisfaire un rapport d'échelle r :

1. suffisamment petit pour prévenir les effets de sous-échantillonnage et se rapprocher au mieux de l'échelle visée R_{stop} ;
2. suffisamment grand pour définir le domaine de variation de ψ , dans le cas $\psi \neq 1$.

Avec l'utilisation d'une loi de sélection binaire, le critère numéro un est respecté pour

$r < 1.75$ tandis que la seconde condition est remplie en se limitant à $1 \leq \psi \lesssim 2$ pour $r > 1.5$; dans le domaine de variation de ϕ et ξ considéré. Pour maximiser le nombre d'échelles disponibles, nous utilisons par la suite un échantillonnage spatial caractérisé par un rapport d'échelle $r = 1.5$. En conséquence, les domaines de variation que l'on cherche à étudier s'écrivent :

$$\begin{cases} 0 \leq \phi \leq 1 \\ -1 \leq \xi \leq 0 \\ 1 \leq \psi \lesssim 2 \end{cases} \quad (\text{V.22})$$

Le processus de fragmentation implémenté ici est suffisant pour apprécier l'influence indépendante des taux ϕ et ξ et du rapport de masse ψ sur l'évolution de la distribution en masse des fragments produits le long des différentes échelles spatiales.

2.4 Influence de la fragmentation sur la distribution en masse

La CMF de W43 (Pouteau et al. 2022), caractérisée par une densité de probabilité $\zeta_0(M)$ en loi de puissance, est injectée dans la procédure semi-analytique présentée partie 1.2 pour générer d'autres CMF représentées par leur densité de probabilité $\zeta_l(M)$ sur différents niveaux de fragmentation. L'influence sur la CMF initiale $\zeta_0(M)$ de chaque paramètre du modèle de fragmentation est examinée avec des rapports d'échelle $r = 1.5$ entre chaque niveau, soit un totale de $L = 8$ niveaux de fragmentation pour parcourir le domaine spatial $R_0 = 2500 \text{ UA} - R_{\text{stop}} \sim 100 \text{ UA}$. Plus spécifiquement, regardons indépendamment les conséquences de :

1. la multiplicité des fragments produits (déterminé par ϕ);
2. le rendement massique pour la formation des fragments (déterminé par ξ);
3. le déséquilibre de masse entre les fragments primaire et secondaires (déterminé par ψ).

Nous ne nous intéresserons pas au domaine de masse parcouru par les distributions générées mais uniquement aux effets de chaque paramètre sur la forme générale de la distribution. Ces effets sont résumés dans le Tableau V.1 et seront détaillés par la suite. Ainsi, nous ne discuterons pas dans cette partie de la possibilité ou non de produire des objets très peu massifs. Il sera possible de vérifier la validité des efficacités de masse induite par la procédure de fragmentation en calculant numériquement la moyenne de la distribution $\zeta(M)$ selon :

$$\langle M \rangle = \int_0^{+\infty} M' \zeta(M') dM' \quad (\text{V.23})$$

PARTIE 2. ÉTUDE PRÉLIMINAIRE DU PROCESSUS DE FRAGMENTATION APPLIQUÉ À UNE FONCTION DE MASSE

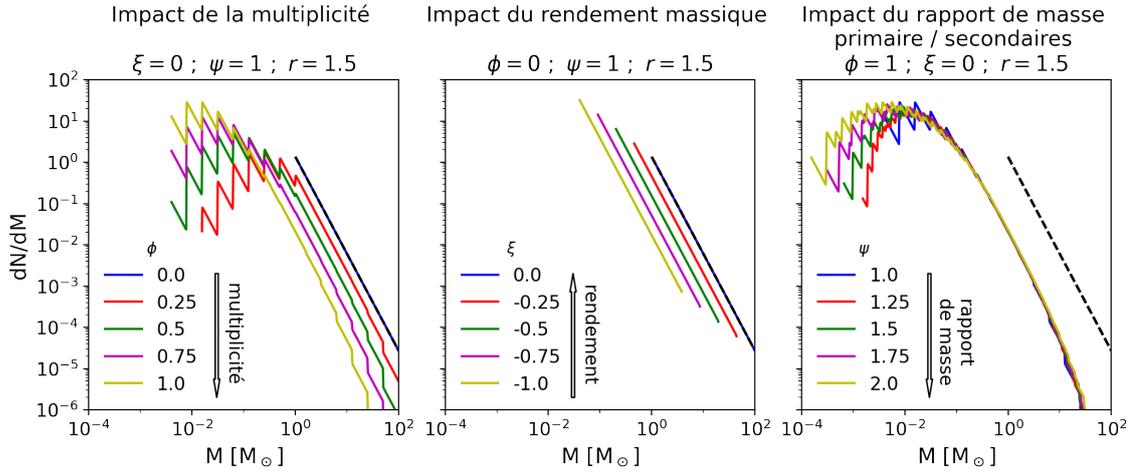


FIGURE V.4 – Impact des différents paramètres du modèle sur le devenir de la distribution en masse des fragments. Sont testés les effets de multiplicité par le biais du taux de fragmentation ϕ , de rendement massique grâce au taux d’injection de masse ξ et de déséquilibre en masse avec différents rapport de masse primaire / secondaires ψ . Toutes les CMF ont été générées en considérant un rapport d’échelle $r = 1.5$ entre les niveaux de fragmentation, en partant d’une CMF en loi de puissance d’indice $\alpha = 1.95$ indiquée par le trait en pointillés. Les flèches indiquent le sens de variation des paramètres vers lequel la multiplicité, le rendement et le rapport de masse augmentent.

Le modèle prédit une masse moyenne $\langle M \rangle = \langle M_0 \rangle (r^{-L})^{\phi - \xi}$, avec $r^{-L} \approx 0.039$ et $\langle M_0 \rangle$ est la moyenne de la distribution initiale :

$$\langle M_0 \rangle = \int_0^{+\infty} M' \zeta_0(M') dM' \quad (\text{V.24})$$

En substituant à cette équation l’expression V.13 de $\zeta_0(M')$, en considérant $\alpha = 1.95$, on trouve $\langle M_0 \rangle = 3.1 M_\odot$. Pour toutes les CMF générées dans cette partie, la masse moyenne prédite correspond exactement à la masse moyenne calculée numériquement, les CMF sont donc consistantes avec le modèle de fragmentation dont elles dépendent.

Multiplicité des fragments produits

Pour découpler l’influence de ϕ des impacts de ξ et ψ , ces deux derniers paramètres doivent disposer de valeurs numériques dont l’effet est neutre sur le processus de fragmentation. Un taux d’injection de masse nul, $\xi = 0$, permet de conserver totalement la masse des parents à chaque évènement de fragmentation et a donc un effet neutre sur le budget massique total des fragments produits. De même, une équipartition en masse entre les fragments produits par chaque parent, avec $\psi = 1$, prescrit une homogénéité entre les fragments produits. De cette manière, la masse des fragments enfants est uniquement modulée par la quantité d’enfants produits. Plusieurs CMF générées sous ces conditions

et pour différentes valeurs de ϕ sont montrées dans le cadran gauche de la Figure V.4.

Dans ces conditions, les distributions générées à partir de la distribution initiale $\zeta_0(M)$ s'étendent vers des domaines de masse plus faible car, à chaque niveau, l'efficacité totale de formation dépend de la multiplicité n_l selon :

$$\epsilon_l \frac{\psi}{\psi + n_l - 1} \sim \frac{1}{n_l}$$

Où le rendement massique de formation des enfants $\epsilon_l = r^\xi = 1$ et $\psi = 1$. Ainsi, plus il existe des alternatives de production à n_l élevé (donc plus ϕ est grand), plus les sous-populations de fragments associés à ce degré de multiplicité seront déportées vers des masses plus faibles. Par ailleurs, la forme globale de la distribution a été altérée dans les limites des grandes et petites masses. Cette métamorphose peut être appréhendée grâce à la Figure V.5 qui dissocie, dans chaque intervalle de masse, la contribution de chaque ensemble de sous-populations générant *in fine* un système à N fragments au dernier niveau. En outre, les systèmes de haute multiplicité n'apportent aucune contribution au domaine des objets les plus massifs car, en raison du comportement en $\frac{1}{n_l}$, la partition en masse induite par une forte multiplicité peuple naturellement les domaines de masse faible. Ce raisonnement s'applique tout aussi bien pour les systèmes de faible multiplicité qui s'accumulent dans les domaines de masse élevée car ils ne fragmentent pas suffisamment pour accéder aux domaines plus faibles. De plus, une CMF générée par fragmentation voit la pente de son domaine des grandes masses s'incliner plus brusquement en raison de l'apparition des systèmes de plus haute multiplicité (voir Figure V.5). Qualitativement, ce changement de pente pourrait être l'origine d'une transformation d'une CMF *top-heavy* à une IMF de Salpeter.

Rendement massique de formation

Pour tester l'influence de ξ , reprenons la même méthodologie en considérant la neutralité des autres paramètres sur le processus de fragmentation. Un taux de fragmentation nul ($\phi = 0$) greffe le processus de fragmentation dans un régime monolithique où l'absence de subdivision le long des échelles permet de s'affranchir des effets de multiplicité. Le rapport de masse ψ n'a pas d'importance dans ce cas car un seul fragment est systématiquement produit. Ainsi, la masse d'un fragment enfant est uniquement modulée par son efficacité de formation. Plusieurs CMF sont générées sous ces conditions pour différentes valeurs de ξ et sont montrées dans le cadran intermédiaire de la Figure V.4.

En l'absence de subdivision, les distributions générées ne subissent pas de change-

PARTIE 2. ÉTUDE PRÉLIMINAIRE DU PROCESSUS DE FRAGMENTATION APPLIQUÉ À UNE FONCTION DE MASSE

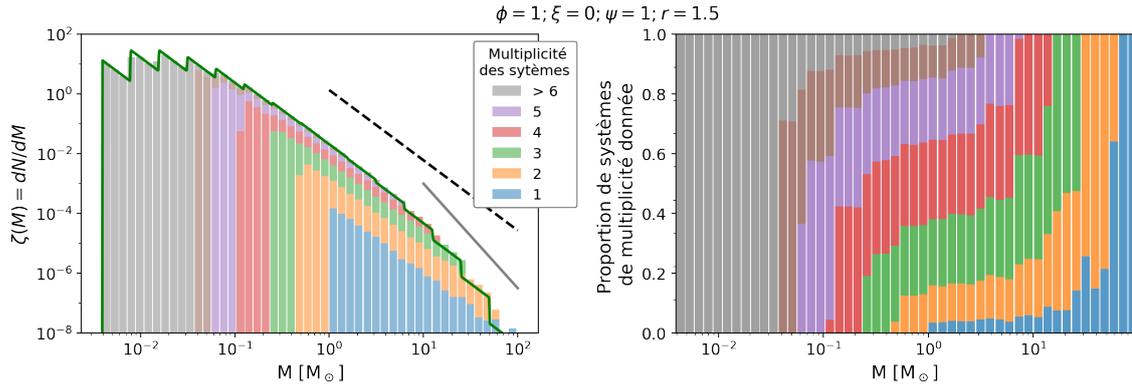


FIGURE V.5 – Répartition de la multiplicité N des objets formés en fonction de leur masse. Chaque couleur représente différentes multiplicités. À *gauche* : Probabilité cumulée de sélectionner un fragment, dans chaque intervalle de masse, provenant d’une structure ayant formé un total de N fragments. La courbe en pointillés indique la CMF de départ tandis que la courbe verte décrit la CMF finale après 8 niveaux de fragmentation. La courbe pleine et grise donne une indication du changement de pente engendré par la fragmentation. À *droite* : Proportion cumulée du nombre de structures qui forment un total de N fragments, dont au moins un tombe dans l’intervalle de masse considéré en abscisse.

ment de forme par rapport à la distribution initiale $\zeta_0(M)$, mais sont déplacées vers des domaines de masses plus faibles. Comme $n_l = 1$, ce déplacement est causé uniquement par le rendement massique ϵ_l de formation des fragments enfants :

$$\epsilon_l \frac{\psi}{\psi + n_l - 1} \sim \epsilon_l$$

Ainsi, plus ϵ_l est faible (donc plus ξ est faible), plus l’amplitude de ce déplacement est important. Cet effet, dont la conséquence est semblable à l’expansion induite par la multiplicité, permet de délocaliser la fonction de masse des objets sur un autre domaine de masse. Cette équivalence entre le déplacement engendré par ξ ou par ϕ n’est que le reflet de la relation locale $M \propto R^{\phi-\xi}$ qui lie la masse et la taille. En effet, il est possible de produire des fragments de même masse soit en accentuant la multiplicité des fratries générées, soit en réduisant le rendement massique avec lequel ces fratries sont formées, ou inversement. Bien que déjà connu au sein de la communauté, l’impact du rendement massique est intuitif : plus le taux d’injection de masse ξ est grand, meilleure est la conservation de la masse du parent au cours du processus de fragmentation, avec pour conséquence un rapprochement des valeurs numériques entre les masses des fragments enfants et la masse de leur parent.

	Pente aux grandes masses	Pic de la distribution	Domaine de masse
Augmentation de : ϕ	Plus inclinée	Formation d'un pic	Déplacement vers les faibles masses
ξ	-	-	Déplacement vers les faibles masses
ψ	-	Déplacement vers les faibles masses	Élargissement aux faibles masses

TABLE V.1 – Résumé des effets des paramètres du modèle de fragmentation sur une fonction de masse. Les effets enregistrés sont les conséquences d'une augmentation respective du taux de fragmentation ϕ , du taux d'injection de masse ξ et du rapport de masse ψ entre les fragments primaires et secondaires. Une diminution de ces paramètres entraînerait un effet inverse.

Rapport de masse entre fragments primaire et secondaires

L'impact du rapport de masse ψ sur la fonction de masse des fragments est testé en considérant $\phi = 1$ pour que des subdivisions soient possibles et que la définition de ψ ait un sens, tandis que $\xi = 0$. La masse d'un fragment enfant est alors modulée par la multiplicité des fragments produits, dont l'effet est connu, et systématique car ϕ est constant ; mais aussi par la proportion de masse que reçoit le primaire par rapport aux secondaires. Plusieurs CMF générées sous ces conditions pour différentes valeurs de ψ sont montrées dans le cadran droit de la Figure V.4.

Dans le domaine de variation considéré, et imposé par le choix de l'échantillonnage, le rapport de masse ψ n'exerce pas de déplacement supplémentaire de la distribution initiale, outre celui induit par la multiplicité. En revanche, le rapport de masse affecte marginalement l'emplacement du maximum de la distribution à mesure que ψ augmente, en élargissant la distribution dans le domaine des faibles masses. Cet élargissement est logique car pour des valeurs de ψ comparativement plus élevées, les fragments secondaires reçoivent une plus faible proportion de masse de leur parent et ont, par conséquent, accès à des domaines de masse plus faible. De même, le peuplement des domaines de grande masse n'est pas affecté car le surplus de masse accordé aux primaires ne peut excéder la masse des enfants solitaires, de même masse que leur parent. Ainsi, la distribution finale possède une borne supérieure correspondant à la borne supérieure de la distribution d'origine.

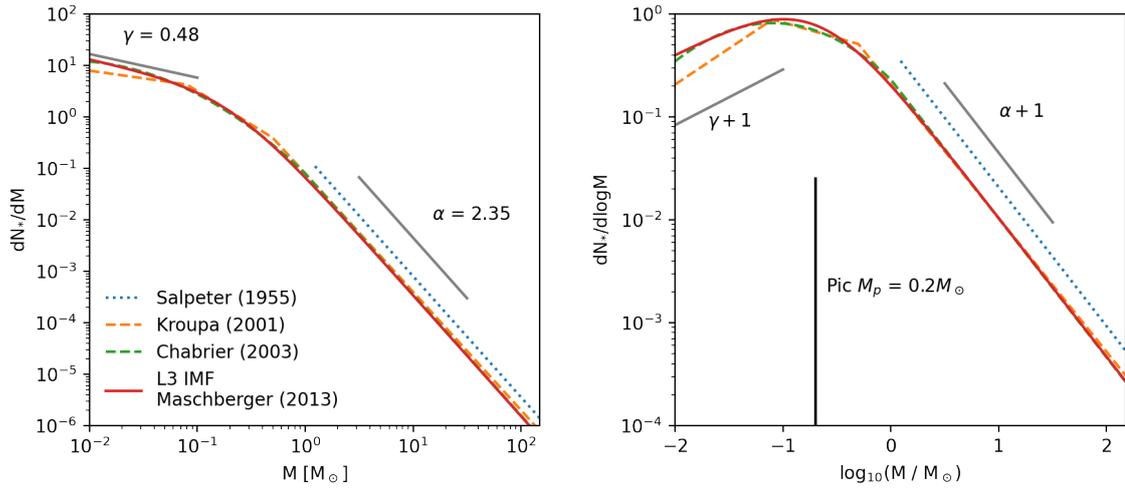


FIGURE V.6 – Représentation de l’IMF de [Maschberger \(2013\)](#) (L3-IMF) comparée aux IMF de [Salpeter \(1955\)](#), [Kroupa \(2001\)](#) et [Chabrier \(2003\)](#). La L3-IMF est représentée sous sa forme canonique avec les pentes aux grandes et petites masses α et γ ainsi que son pic M_p . À gauche : Représentation linéaire en dN/dM , celle utilisée dans ce manuscrit. À droite : Représentation logarithmique en $dN/d(\log M)$. Le pic M_p est défini dans cette représentation qui modifie également les valeurs numériques des pentes α et γ .

3 Génération de fonction de masse de type Salpeter

3.1 Proximité de la distribution générée avec l’IMF

Cette partie vise à évaluer la capacité dont dispose la fragmentation à transformer la CMF de W43, de type *top-heavy*, pour la rattacher avec une IMF de type Salpeter. Pour déterminer si la CMF générée par notre modèle de fragmentation se raccorde ou pas à une IMF stellaire de type Salpeter, leur proximité mutuelle doit être quantifiée. L’IMF canonique peut être commodément représentée par une fonction log-logistique proposée par [Maschberger \(2013\)](#), désignée comme la *L3-IMF* et représentée dans la Figure V.6. Cette fonction décrit la densité de probabilité $\zeta_{L3}(m)$ avec trois paramètres α , β , μ et borne la distribution en masse par deux limites M_b , M_h nécessaires à sa normalisation. Cette densité de probabilité s’exprime comme :

$$\zeta_{L3}(M) = A(M_b, M_h) \left(\frac{M}{\mu} \right)^{-\alpha} \left(1 + \left(\frac{M}{\mu} \right)^{1-\alpha} \right)^{-\beta} \quad (\text{V.25})$$

Avec $A(M_b, M_h)$ un coefficient de normalisation défini comme :

$$A = \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta)}{\mu} \left[G(M_h) - G(M_b) \right]^{-1} \quad (\text{V.26})$$

Où $G(M)$ est une fonction auxiliaire :

$$G(M) = \left(1 + \left(\frac{M}{\mu}\right)^{1-\alpha}\right)^{1-\beta} \quad (\text{V.27})$$

Les valeurs numériques des paramètres qui décrivent l'IMF canonique de type Salpeter sont données par $\alpha = 2.3$, $\beta = 1.4$ et $\mu = 0.2 M_{\odot}$. Le paramètre α représente la pente logarithmique aux grandes masses, équivalente à la pente de Salpeter tandis que le paramètre β dépend de la pente logarithmique aux faibles masses γ , défini positivement par la relation :

$$\beta = \frac{\gamma - \alpha}{1 - \alpha} \quad (\text{V.28})$$

Le paramètre μ est lié à la masse M_p correspondant au maximum de la distribution dans la représentation logarithmique $dN/d(\log M)$ (voir Figure V.6) par la relation :

$$\mu = \frac{M_p}{(\beta - 1)^{\frac{1}{\alpha-1}}} \quad (\text{V.29})$$

La paramétrisation de l'IMF par cette fonction log-logistique sert de référence pour évaluer le caractère “*Salpeter*” des différentes CMF générées par fragmentation. Pour se rapprocher de la pente de Salpeter, on pose $\alpha = 2.35$ au lieu de $\alpha = 2.3$ tel que décrit par [Maschberger \(2013\)](#). Cette variation n'induit pas de modification radicale mais il semble important de le préciser. Comme la L3-IMF est bornée en masse, cette comparaison est effectuée pour une gamme de masses partant de $M_b = 0.01 M_{\odot}$ jusqu'à $M_h = 150 M_{\odot}$.

Pour évaluer la proximité entre cette IMF de référence et les différentes CMF générées par fragmentation, introduisons le test d'Anderson-Darling (AD) ([Anderson & Darling 1954](#)). Ce test permet de rejeter l'hypothèse nulle H_0 selon laquelle un échantillon de taille finie a été constitué à partir d'une distribution spécifique. En outre, ce test permet de déterminer si un échantillon obtenu à partir d'une CMF fragmentée peut, en réalité, avoir pour origine la L3-IMF. Ainsi, ces deux densités de probabilité, mathématiquement différentes, peuvent néanmoins être suffisamment proches pour que l'une engendre un échantillon dont la distribution d'origine puisse être confondue avec l'autre. Le score X de ce test est calculé à partir d'un échantillon de taille N d'après :

$$X = -N - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (2i - 1) \left[\ln(F_{L3}(M_i)) + \ln(1 - F_{L3}(M_{n-i+1})) \right] \quad (\text{V.30})$$

Où M_i est l'élément numéro i du vecteur M contenant les masses d'un échantillon, ordonnées par ordre croissant et $F_{L3}(M)$ est la fonction de répartition de la L3-IMF donnée par [Maschberger \(2013\)](#) :

$$F_{L3}(M) = \frac{G(M) - G(M_b)}{G(M_h) - G(M_b)} \quad (\text{V.31})$$

Pour pouvoir rejeter l'hypothèse H_0 , utilisons la valeur-p associée au test AD qui permet de quantifier la significativité accordée au résultat du test. Dans ce test, la valeur-p associée au score X représente la probabilité, sous hypothèse nulle, d'obtenir un score au moins aussi élevé que ce score X obtenu. L'hypothèse H_0 peut alors être rejetée si le score mesuré X est suffisamment improbable par rapport au degré de significativité que l'on souhaite accorder au test. Ainsi, un échantillon obtenu à partir d'une CMF fragmentée peut être dissocié de la L3-IMF ($\equiv H_0$ peut être rejetée) si le score X du test AD obtenu avec cet échantillon excède une valeur X_{crit} associée à une valeur-p représentant la probabilité au delà de laquelle le résultat du test est considéré comme improbable. En effet, si $X > X_{\text{crit}}$ alors la probabilité que cet échantillon provienne effectivement de la L3-IMF est plus faible que la probabilité associée au niveau de significativité souhaitée. En ce sens, si H_0 est vrai, il est improbable d'obtenir un tel résultat. Donc H_0 est vraisemblablement erronée et peut être rejetée : l'échantillon considéré ne provient pas de la L3-IMF. Au contraire, si $X < X_{\text{crit}}$, H_0 ne peut pas être rejetée et il apparaît vraisemblable que l'échantillon provienne en réalité de la L3-IMF. La littérature (Koziol 1987) fournit des tables de scores critiques X_{crit} associées à différentes valeurs-p et sont compilés dans le Tableau V.2. Dans notre étude ultérieure, l'hypothèse nulle est arbitrairement rejetée à un degré de significativité de 0.05, soit si le score mesuré X excède $X_{\text{crit}} = 2.492$.

Par soucis de contrôle, les scores critiques de ces tables ont été vérifiés en reconstruisant la distribution de la statistique X sous hypothèse nulle. Pour ce faire, 10^5 échantillons composés de $N = 100$ objets chacune³ ont été construits en tirant aléatoirement des objets dans la L3-IMF. Pour chaque échantillon composé de 100 objets, un score X a été calculé permettant la constitution d'un échantillon de 10^5 valeurs de X . Finalement, la fonction de répartition empirique de cet échantillon a permis de déterminer les scores critiques pour lesquels la valeur-p, représentative de la probabilité $F(X > X_{\text{crit}})$, correspond aux valeurs-p usuelles enregistrées dans le Tableau V.2. La compatibilité de ces scores critiques avec les scores tabulés permet d'être confiant sur leur utilisation.

Pour évaluer la capacité du test AD à sonder les différences de pente dans le domaine des grandes masses, une étude de sensibilité est réalisée en comparant la L3-IMF, dans sa forme canonique décrite précédemment avec $\alpha = 2.3$, avec une distribution L3 de paramètre α variable, tout en gardant constant le pic M_p et la pente aux faibles masses γ . Le

3. En réalité cette opération a été réalisée pour différentes tailles d'échantillon allant de $N = 5$ jusqu'à $N = 1000$ sans modification notable des valeurs critiques. La taille de l'échantillon pour chaque tirage n'a donc que peu d'importance.

détail de cette étude est donné en Annexe D et montre que pour des échantillons de taille $N = 10^3$, le test AD peut rejeter le fait qu'un échantillon provienne d'une distribution donnée pour des différences de pentes α supérieures à 0.2. Ce test de sensibilité est aussi appliqué au test de Kolmogorov-Smirnov (KS) qui, au même titre que le test AD, permet de quantifier, à partir de la fonction de répartition d'un échantillon, la proximité entre cet échantillon et une distribution donnée. Le test KS consiste à mesurer la différence entre la fonction de répartition de la loi à tester avec la fonction de répartition empirique. Comme la fonction de répartition tend naturellement vers 1 pour les grandes valeurs d'un échantillon, la différence mesurée entre les deux fonctions de répartition est biaisée en donnant des valeurs systématiquement proches de 0 (voir par exemple, [Hou et al. 2009](#)). Ainsi, le poids accordé aux valeurs hautes est sous-estimé par rapport au poids accordé aux valeurs intermédiaires de la fonction de répartition. Le test AD quant à lui a l'avantage d'être équitablement sensible aux différences entre les fonctions de répartition sur l'ensemble de l'échantillon, et est donc moins sujet à ce biais de convergence. C'est pourquoi nous préférons employer le test AD plutôt que le test KS : on veut être en mesure de détecter une différence de pente dans le domaine des grandes masses. Plus de détails sont donnés dans cet Annexe D concernant l'efficacité relative de ces tests vis-à-vis de la pente aux grandes masses des CMF considérées.

	Valeur-p - Probabilité d'obtenir un score X supérieur à X_{crit}							
	0.25	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
X_{crit} par Koziol (1987)	1.248	1.610	1.933	2.492	3.070	3.880	4.500	6.000
X_{crit} recalculés	1.247	1.621	1.935	2.498	3.088	3.887	4.503	5.974

TABLE V.2 – Scores critiques du test AD associés à leur degré de significativité sous réserve que l'hypothèse nulle soit vérifiée.

3.2 Solutions compatibles avec l'IMF canonique

Les modalités de comparaison entre la CMF fragmentée et l'IMF canonique ayant été énoncées, plaçons-nous dans les conditions standard décrites et utilisées dans la partie 2.1 : la CMF extraite de W43 par [Pouteau et al. \(2022\)](#) fragmente le long d'un domaine spatial partant d'une échelle initiale $R_0 = 2500$ UA. Chaque niveau est séparé par un rapport d'échelle $r = 1.5$ en considérant les domaines de variation $\phi \in [0, 1]$; $\xi \in [-1, 0]$ et $\psi \in [1, 2]$. Un échantillon de taille $N = 10^3$ objets est sélectionné aléatoirement dans chacune des CMF générées avant de calculer le score X associé au test AD et sa valeur-p associée.

La Figure V.7 montre des cartes de valeur-p dans le plan (ϕ, ξ) contenant les domaines de variation étudiés, pour chaque niveau de fragmentation entre $R_0 = 2500$ UA et $R_8 = 98$ UA tout en considérant un rapport de masse $\psi = 2$. Ces diagrammes révèlent qu'il existe un ensemble de solutions admettant une compatibilité entre les CMF générées et la L3-IMF. Plus particulièrement, entre les paramètres ξ et ϕ existe une dégénérescence de type affine $\phi = \xi + \text{constante}$ pour des taux de fragmentation $\phi \gtrsim 0.3$, indiquant l'existence d'une productivité minimale pour transformer efficacement la CMF en distribution de type Salpeter. Une inspection plus détaillée de la CMF générée par les paramètres $\phi = 0.2$, $\xi = -0.9$ et $\psi = 2$ après $L = 7$ niveaux de fragmentation (Figure V.7-(iii)) montre que, contrairement aux solutions acceptables, les CMF de faible multiplicité possèdent une pente similaire à celle de la CMF d'origine sur le domaine de masse intermédiaire ($0.1 M_\odot < M < 2 M_\odot$) et ne s'étendent pas dans le domaine des grandes masses ($M > 8 M_\odot$) de l'IMF canonique. Si ces CMF étaient déplacées vers le domaine des grandes masses, leur pente ne correspondrait pas à celle attendue dans l'IMF canonique.

Pour une échelle R_l donnée, la dégénérescence observée est une conséquence de l'équation III.4 décrivant $M \propto R^{\phi-\xi}$, et prédit une équivalence entre la proportion de masse injectée aux fragments (*via* ξ) et le nombre de fragments enfants dans une fratrie (*via* ϕ). Cet effet reflète simplement la contribution équivalente entre la multiplicité et le rendement massique sur le devenir des masses des fragments pris individuellement. Nous reviendrons plus précisément sur cette dégénérescence dans la partie 3.4.

La localisation de cet espace de solutions réconciliant la CMF avec la L3-IMF dépend également de l'échelle considérée. Lorsque l'échelle spatiale diminue, l'ensemble des solutions décrites par le couple $(\phi; \xi)$ évolue vers des solutions de plus haut rendement (ξ augmente) et vers une productivité amoindrie (ϕ diminue pour une valeur de ξ donnée). De même que précédemment, cet effet est également une conséquence de l'équation III.4 qui prédit la capacité qu'un parent a de produire des enfants de même masse moyenne, mais de densité, et donc de tailles différentes. Des fragments enfants peuvent en effet avoir la même masse que d'autres enfants plus grands grâce à un meilleur rendement de formation (ξ plus grand) et / ou à cause d'un défaut de multiplicité (ϕ plus faible).

De plus, les différentes valeurs de ψ prises dans son domaine de variation modifient significativement la présence de cet espace de solutions dégénérées. Comme évalué dans la partie 2.4, le rapport de masse n'affecte que marginalement la localisation du maximum de la distribution et élargit la distribution vers le domaine des faibles masses. En inspectant les différences entre une solution existante à $\psi = 2$ et absente à $\psi = 1$ pour

des valeurs $\phi = 1$ et $\xi = -0.4$ au bout de $l = 5$ niveaux dans la Figure V.8, il est possible de mieux comprendre pourquoi le rapport de masse influence le résultat du test AD. La CMF associée à une fragmentation $\psi = 1$ est constituée d'une faible diversité d'issues, et donc de sous-populations, comme en témoigne la présence des dents de scie dont l'effet est assez abrupte par rapport à la solution à $\psi = 2$. Cette différence de lissage affecte le résultat du test AD en introduisant localement de plus grands écarts entre la CMF et la L3 - IMF dans les domaines des grandes masses, mais aussi plus particulièrement aux faibles masses. L'absence d'information sur le maximum de la distribution induit une trop grande disparité entre les deux distributions. Cette dissociation semble indiquer que si les processus de fragmentation entrent en jeu dans la formation de l'IMF, alors une modélisation aussi basique qu'une équipartition en masse n'est pas nécessairement suffisante pour converger vers l'IMF canonique. Il apparaît alors nécessaire d'adopter une description plus complexe du phénomène, avec la possibilité pour un parent de synthétiser une plus grande variété de masses.

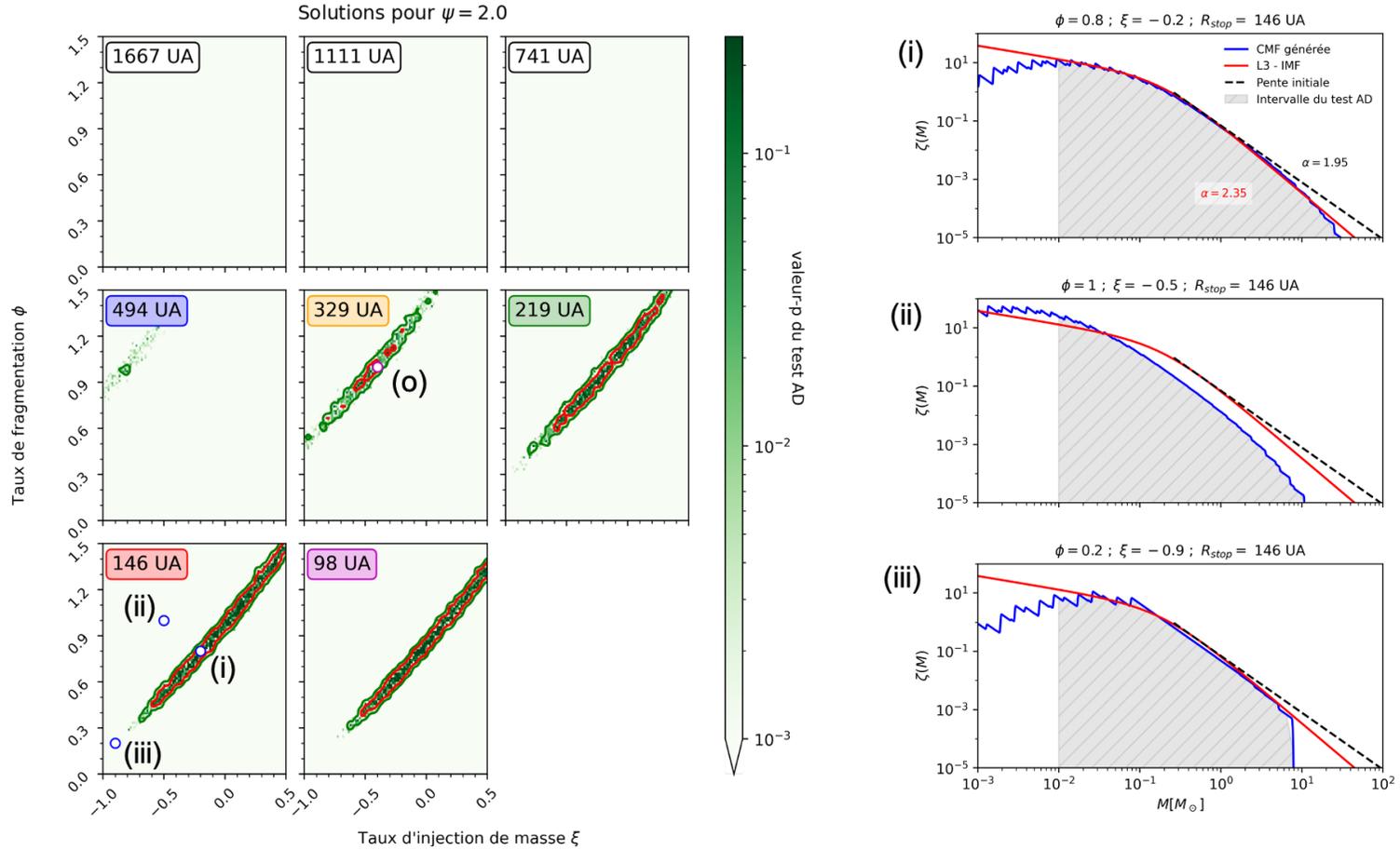


FIGURE V.7 – Cartes de valeurs-p associées aux scores du test AD effectué pour chaque CMF générée dans l’espace des paramètres ξ, ϕ, R_{stop} , pour $\psi = 2$. Les valeurs encadrées représentent l’échelle d’arrêt R_{stop} et les couleurs associées repèrent les relations d’échelle masse / taille de la Figure V.9. Les contours rouges et verts représentent respectivement les valeurs-p associées à un niveau de confiance de 0.01 et 0.05. Trois exemples de CMF sont représentées sur la droite et correspondent aux labels (i), (ii) et (iii). La CMF associée à (o) est représentée Figure V.8.

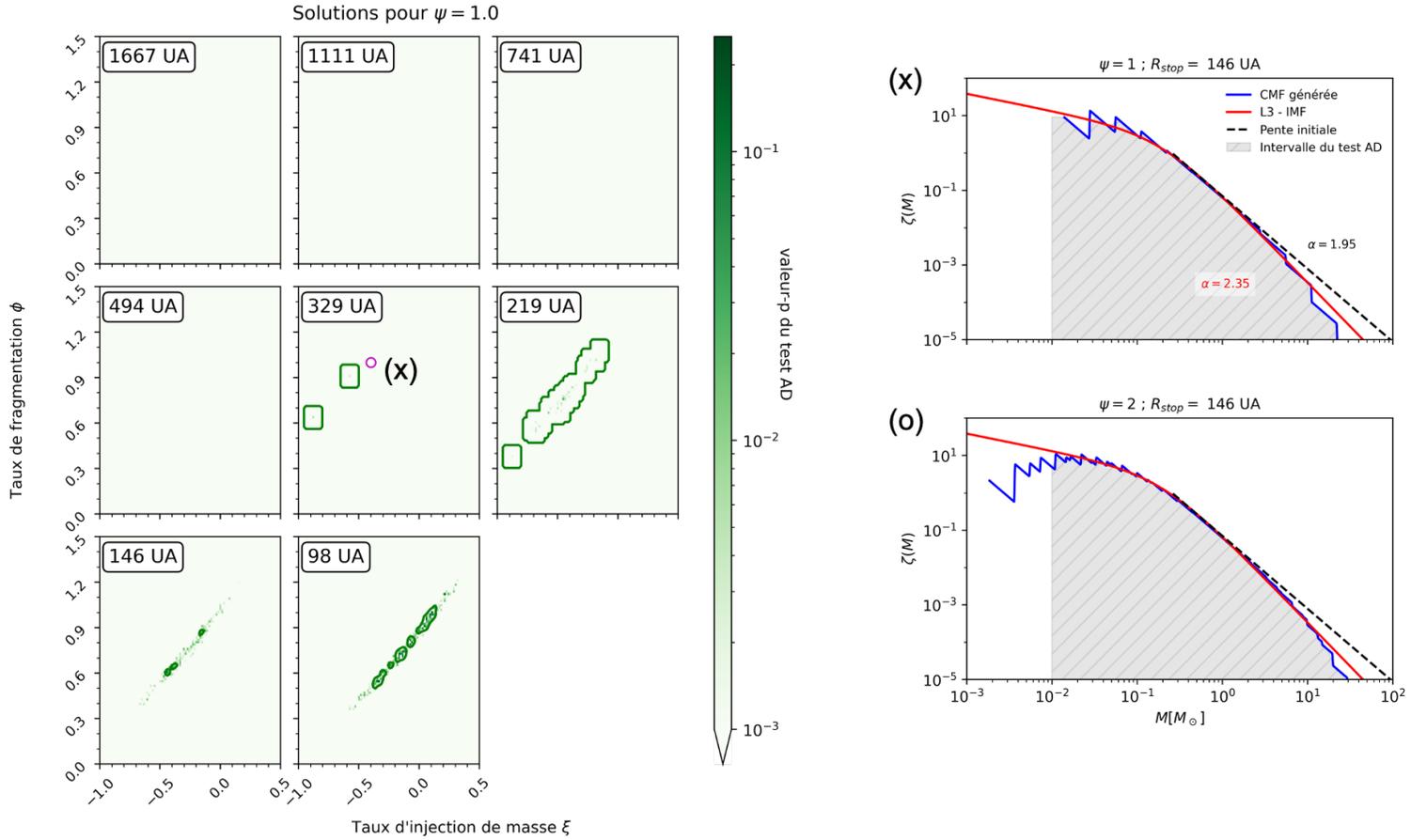


FIGURE V.8 – Cartes de valeurs-p associées aux scores du test AD effectué pour chaque CMF générée dans l’espace des paramètres $\xi, \phi, R_{\text{stop}}$, pour $\psi = 1$. Les valeurs encadrées représentent l’échelle d’arrêt R_{stop} . Les contours rouges et verts représentent respectivement les valeurs-p associées à un niveau de confiance de 0.01 et 0.05. Deux exemples de CMF où seul ψ est changé sont représentées sur la droite de la Figure, associés au label (o) de la Figure V.7 pour $\psi = 2$ et au label (x) pour $\psi = 1$.

Ces dégénérescences permettent de conclure sur plusieurs aspects. D’abord, pour qu’une CMF fragmentée se raccorde à l’IMF canonique, la CMF fragmentée doit être définie dans le domaine de masse de l’IMF. Cette condition est réalisée si l’efficacité de formation, qui tient compte de la multiplicité et du rendement de formation, permet la production de fragments dont la distribution en masse coïncide avec le domaine de masse caractéristique de l’IMF. Ensuite, le changement de pente aux grandes masses provoqué par la quantité de fragments produits doit être suffisamment équilibré pour se racoler à une pente de Salpeter. En particulier, un taux de fragmentation $\phi \gtrsim 0.3$ est nécessaire pour que la transformation de la CMF engendrée par la fragmentation converge convenablement sur la forme. Finalement, le caractère multi-échelle de la fragmentation semble nécessaire pour permettre un brassage suffisant des masses issues des sous-populations de multiplicité et rendement différents.

3.3 Phase de formation d’étoile

Supposons désormais, de manière abstraite, que chaque échelle spatiale R_l puisse représenter une échelle d’arrêt de la fragmentation R_{stop} à partir de laquelle une étoile unique est formée par le fragment de taille R_{stop} . Les CMF générées à ces échelles ne correspondent alors pas réellement à l’IMF, qui caractérise la distribution en masse des jeunes étoiles à partir d’une échelle de formation $R_* \ll R_{\text{stop}}$. Ces CMF coïncideraient avec l’IMF si la totalité de la masse du fragment produit à R_{stop} était utilisée pour former son étoile unique. Ces distributions sont donc biaisées par une efficacité ϵ_{CE} (Cœurs / Étoile) avec laquelle un fragment de taille R_{stop} produit son étoile à des échelles plus basses. Plus généralement, cette efficacité décrit le rapport de masse d’une étoile avec le dernier fragment résultant du processus de fragmentation dont elle est issue. Pour tenir compte de cette phase de formation d’étoile, il est nécessaire d’appliquer à chaque masse constitutive de la CMF finale un facteur correctif correspondant à ϵ_{CE} . Cette correction n’engendrant pas de fragmentation supplémentaire, elle déplacerait simplement l’ensemble de la distribution vers un autre intervalle de masse.

Pour quantifier cette correction, définissons convenablement la fameuse efficacité de formation d’étoiles \mathcal{E}_{SF} (*Star Formation Efficiency*) comme la proportion de matière d’une structure à grande échelle de masse M_0 (par exemple un nuage) qui se retrouve dans l’ensemble des étoiles de masse totale $M_{\text{tot}}(R_*)$:

$$\mathcal{E}_{SF} = \frac{M_{\text{tot}}(R_*)}{M_0} \quad (\text{V.32})$$

Dans la continuité de notre modèle stochastique, reprenons la définition de l’efficacité moyenne de formation du Chapitre II :

$$\langle \mathcal{E}(R) \rangle = \frac{\langle M_{\text{tot}}(R) \rangle}{M_0} \quad (\text{V.33})$$

En tenant compte du caractère probabiliste de la formation d'étoile imposée par notre modèle, l'efficacité de formation des étoiles peut se réécrire sous la forme :

$$\langle \mathcal{E}_{SF} \rangle \equiv \langle \mathcal{E}(R_*) \rangle = \frac{\langle M_{\text{tot}}(R_*) \rangle}{M_0} \quad (\text{V.34})$$

De même, l'efficacité moyenne de formation des fragments de taille R_{stop} s'exprime comme :

$$\langle \mathcal{E}(R_{\text{stop}}) \rangle = \frac{\langle M_{\text{tot}}(R_{\text{stop}}) \rangle}{M_0} \quad (\text{V.35})$$

Or, d'après l'équation II.10, le rapport entre ces deux efficacités (l'une décrivant la formation des étoiles à l'échelle de formation R_* et l'autre décrivant la formation des derniers fragments à R_{stop}) correspond au rendement moyen avec lequel chaque parent de taille R_{stop} produit un enfant de taille R_* . Par définition, cette quantité correspond à l'efficacité moyenne de formation individuelle :

$$\langle \epsilon_{\text{CE}} \rangle = \frac{\langle M_{\text{tot}}(R_*) \rangle}{\langle M_{\text{tot}}(R_{\text{stop}}) \rangle} \quad (\text{V.36})$$

Soit :

$$\langle \mathcal{E}_{SF} \rangle = \langle \epsilon_{\text{CE}} \rangle \times \langle \mathcal{E}(R_{\text{stop}}) \rangle \quad (\text{V.37})$$

L'efficacité de formation d'étoiles peut ainsi s'exprimer en fonction de ξ , en considérant l'équation II.17 qui décrit l'évolution de l'efficacité moyenne $\langle \mathcal{E}(R) \rangle$ en fonction de R , et en considérant que ξ est constant sur le domaine spatial étudié :

$$\langle \mathcal{E}_{SF} \rangle = \langle \epsilon_{\text{CE}} \rangle \left(\frac{R_{\text{stop}}}{R_0} \right)^{-\xi} \quad (\text{V.38})$$

Ainsi, la relation $\langle \mathcal{E}_{SF} \rangle = \langle \epsilon_{\text{CE}} \rangle$ implique automatiquement que le taux d'injection de masse ξ est nul. En effet, si la proportion de matière $\langle \mathcal{E}_{SF} \rangle$ que reçoivent les étoiles de la part du nuage est la même que celle reçue de la part de l'ensemble des cœurs, alors la masse de la structure à grande échelle est totalement concentrée dans les cœurs. Cette structure s'est donc effondrée et sa masse s'est accumulée dans les fragments finaux, sans perte ni accréation : c'est bien la signification derrière $\xi = 0$. En réarrangeant l'équation V.38, on obtient finalement :

$$\xi = \frac{\ln \langle \mathcal{E}_{SF} \rangle}{\ln R_0 - \ln R_{\text{stop}}} - \frac{\ln \langle \epsilon_{\text{CE}} \rangle}{\ln R_0 - \ln R_{\text{stop}}} \quad (\text{V.39})$$

Distinguons deux composantes ξ_{SF} et ξ_{CE} , correspondant respectivement aux contributions découlant des termes en $\langle \mathcal{E}_{SF} \rangle$ et $\langle \epsilon_{CE} \rangle$:

$$\begin{cases} \xi_{SF} = \frac{\ln \langle \mathcal{E}_{SF} \rangle}{\ln R_0 - \ln R_{\text{stop}}} \\ \xi_{CE} = \frac{\ln \langle \epsilon_{CE} \rangle}{\ln R_0 - \ln R_{\text{stop}}} \end{cases} \quad (\text{V.40})$$

Soit :

$$\xi = \xi_{SF} - \xi_{CE} \quad (\text{V.41})$$

On distingue ainsi les deux quantités ξ_{SF} et ξ_{CE} , associées chacune à un rendement effectif nécessaire pour former les étoiles à partir respectivement du nuage et des derniers fragments produits par fragmentation.

3.4 Implications sur la relation entre masse et taille des fragments

	Niveau				
	4	5	6	7	8
R_{stop} [UA]	494	329	219	146	98
$C = \phi - \xi_{SF}$	1.85	1.43	1.15	0.98	0.83
$\phi - \xi$	1.10	0.84	0.66	0.56	0.46

TABLE V.3 – Exposant de la relation $M \propto R^x$ avant (ligne $\phi - \xi_{SF}$) et après (ligne $\phi - \xi$) correction de la phase de formation d'étoiles pour les différentes échelles d'arrêt R_{stop} à partir de laquelle un fragment engendre une étoile unique. La correction suppose une efficacité de formation individuelle moyenne $\langle \epsilon_{CE} \rangle \sim 30\%$ (Alves et al. 2007).

Reprenons l'espace des solutions qui admettent la convergence de la CMF de W43 vers une IMF canonique, et plus particulièrement l'espace des solutions défini à taille R_l constante, caractérisée par la relation affine $\phi = \xi + C$, où C est une constante. Pour une fragmentation invariante d'échelle, l'évolution de la masse des fragments en fonction de leur taille est décrite par une loi de puissance :

$$\langle M(R) \rangle \propto R^{\phi - \xi} \quad (\text{V.42})$$

En substituant naïvement $\phi - \xi$ par la constante C il est alors possible d'extraire, pour chaque échelle $R_l \equiv R_{\text{stop}}$, une valeur de C traçant la pente de la fonction $\langle M(R) \rangle$ dans

l'espace log-log (voir Figure V.9). Toutefois, cette constante serait alors dérivée d'une solution où la CMF fragmentée coïncide avec l'IMF, sans tenir compte de la phase de formation d'étoiles. Par conséquent, pour obtenir la véritable pente de la relation $M(R)$, une correction doit être apportée en considérant l'efficacité de formation d'une étoile individuelle $\langle \epsilon_{CE} \rangle$ à partir des derniers fragments produits à l'échelle R_{stop} . Pour corriger la valeur de pente obtenue, calculons la constante C . Compte tenu du caractère invariant d'échelle du modèle utilisé ici :

$$C = \frac{\Delta \ln \langle M(R) \rangle}{\Delta \ln R} \quad (\text{V.43})$$

Or, les solutions considérées ici correspondent à des fragments dont la masse est équivalente à ce que devrait être la masse de leurs étoiles, mais obtenues à des échelles R_{stop} :

$$C = \frac{\ln M_0 - \ln \langle M(R_*) \rangle}{\ln R_0 - \ln R_{\text{stop}}} \quad (\text{V.44})$$

En ajoutant $\pm \ln \langle M(R_{\text{stop}}) \rangle$ au numérateur, on peut montrer que :

$$C = \phi - \xi - \xi_{CE} \quad (\text{V.45})$$

Autrement dit, la constante C que nous mesurons grâce aux dégénérescences des diagrammes s'exprime en réalité comme (voir Tableau V.3) :

$$C = \phi - \xi_{SF} \quad (\text{V.46})$$

Soit finalement l'expression de la véritable pente $\phi - \xi$:

$$\phi - \xi = C + \xi_{CE} \quad (\text{V.47})$$

Cette relation confirme que le taux d'injection de masse considéré dans les générations de CMF ne correspond pas au taux d'injection de masse réellement utilisé pour former les fragments de taille R_{stop} , mais est associée à l'efficacité totale nécessaire pour former les étoiles dont il est nécessaire de corriger la valeur. En partant de structures de taille $R_0 = 2500$ UA et en estimant $\langle \epsilon_{CE} \rangle \sim 30\%$ (Alves et al. 2007), nous pouvons calculer la correction de pente engendrée par la phase de formation d'étoiles (voir le Tableau V.3). Ainsi, les diagrammes de valeur-p évaluent la relation $M \propto R^{\phi - \xi - \xi_{CE}}$ quand, en réalité, on doit avoir $M \propto R^{\phi - \xi}$. La pente réelle $\phi - \xi$ est encadrée par les valeurs [0.84, 1.10] pour des échelles d'arrêt $R_{\text{stop}} \in [329, 494]$ UA. Bien qu'à ces échelles la proximité de la CMF avec la L3-IMF est discutable, avec des efficacités de formation $\langle \epsilon_{CE} \rangle < 30\%$, il est possible de réconcilier une CMF *top-heavy* avec une IMF de type Salpeter, tout en

obtenant des valeurs de pente $\phi - \xi \sim 1$. Ces valeurs de pente, proches de l'unité, peuvent être comparées à d'autres travaux qui évaluent cette même pente et prédisent $M \propto R$ lors de l'effondrement de cœurs pré-stellaires dont l'écoulement est subsonique (Guszejnov & Hopkins 2015), pour des masses $M < 3 M_{\odot}$ et des tailles de fragment $R < 0.1$ pc. Cette relation d'échelle entre la masse et la taille est également typique de l'effondrement de sphères de Bonnor-Ebert (Bonnor 1956) qui prédit :

$$M_{BE} = 2.4 R_{BE} \frac{C_s^2}{G} \quad (\text{V.48})$$

Où C_s est la vitesse de propagation du son du milieu et G la constante de gravitation universelle. Le fait que la convergence vers une IMF de type Salpeter résulte de ces relations d'échelles est assez surprenant voire intrigant puisqu'aucune hypothèse physique n'a été effectuée dans le cadre de notre approximation en invariance d'échelle. Le comportement en loi de puissance est bel et bien prédit mais ne garantit nullement que la valeur numérique de la pente affirme une relation de type $M \propto R$.

Si ce résultat n'est pas une coïncidence, la physique d'effondrement des structures pourrait contrôler la convergence des CMF vers une IMF canonique. Toutefois, dans le modèle utilisé ici, l'obtention de la relation $M \propto R$ dépend fortement de :

1. l'échelle d'arrêt de la fragmentation R_{stop} à partir de laquelle l'objet considéré compense son énergie gravitationnelle par son énergie interne ;
2. l'efficacité de formation des fragments à partir des derniers fragments de l'échelle R_{stop} .

Il faut aussi garder à l'esprit que cette réconciliation CMF / IMF est obtenue à partir d'une CMF bien spécifique, de type *top-heavy* avec $\alpha = 1.95$, dont les objets qui la constituent pourraient fragmenter. *Quid* des CMF présentant déjà un caractère Salpeter et non *top-heavy*? Si ces CMF fragmentent suffisamment sur plus de trois niveaux, elles ne conserveront bien évidemment pas cette propriété. En revanche, l'absence de fragmentation significative permettrait de conserver leur forme. En outre, des CMF dont les exposants α aux grandes masses seraient différents décrivent des relations d'échelle $M(R)$ différentes. Pour que ces relations se retranchent systématiquement vers $M \propto R$, chaque CMF, de pente α différente, devrait avoir des échelles d'arrêt R_{stop} différentes. Il serait intéressant d'évaluer la variation de l'échelle d'arrêt R_{stop} en fonction de l'exposant α des distributions en masse pour avoir connaissance de l'amplitude des fluctuations de R_{stop} et évaluer la sensibilité de la relation d'échelle $M(R)$. Cette étude n'a pas été réalisée mais pourrait l'être en modifiant la distribution en masse initiale.

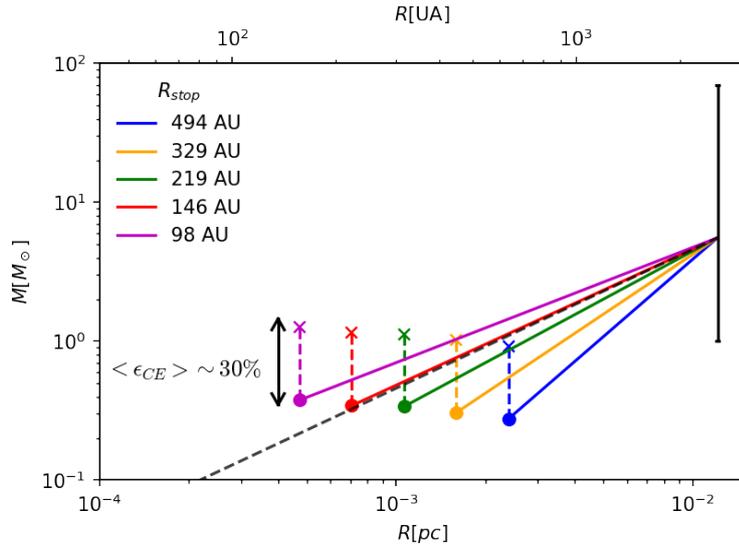


FIGURE V.9 – Relation masse M vs taille R des fragments induits par les solutions de coïncidence CMF / L3-IMF pour les différentes échelles d’arrêt admettant des solutions. La barre verticale noire sur la droite délimite l’intervalle de la CMF initiale. En partant du point caractérisant la masse moyenne, différentes trajectoires colorées sont tracées, décrivant l’évolution $M(R)$ en utilisant les pentes non corrigées (Tableau V.3) de la phase de formation stellaire. Ces courbes arrivées à leur point d’arrêt, cette correction est prise en compte en appliquant une efficacité $\langle \epsilon_{CE} \rangle$, faisant remonter les points d’arrêts vers des masses plus élevées. La courbe en pointillés indique la relation $M \propto R$.

4 Processus de fragmentation sur les échantillons finis

4.1 Évolution d’un échantillon fini au cours de la fragmentation

Travailler avec les densités de probabilité plutôt qu’avec les échantillons réels a pour avantage de s’affranchir de la taille de cet échantillon. Toutefois, la CMF de W43 reste le plus fidèlement caractérisée par l’échantillon fini constitué des 205 cœurs extraits par [Pou-teau et al. \(2022\)](#). Dans cette partie nous appliquons la procédure de fragmentation Monte-Carlo directement sur cet échantillon sans considérer l’approche semi-analytique. Pour représenter les échantillons générés, définissons la fonction de survie $S(M)$ d’une distribution $\zeta(M)$ comme étant la probabilité qu’une masse M aléatoirement sélectionnée dans l’échantillon soit supérieure à une autre masse m quelconque. En supposant que la distribution en masse $\zeta(M)$ suit une loi de puissance définie dans l’intervalle $[M_{\min}, M_{\max}]$, on a :

$$\zeta(M) = \frac{1 - \alpha}{M_{\max}^{1-\alpha} - M_{\min}^{1-\alpha}} M^{-\alpha} \quad (\text{V.49})$$

Avec $\alpha > 0$. On peut alors définir la fonction de survie $S(M)$:

$$S(M) = \int_M^{M_{\max}} \zeta(M') dM' \quad (\text{V.50})$$

Soit :

$$S(M) = \frac{M_{\max}^{1-\alpha} - M^{1-\alpha}}{M_{\max}^{1-\alpha} - M_{\min}^{1-\alpha}} \quad (\text{V.51})$$

Dans nos conditions, $1 - \alpha < 0$, ce qui permet d'écrire, dans les limites asymptotiques $M_{\min} < M \ll M_{\max}$, équivalentes à $M_{\min}^{1-\alpha} > M^{1-\alpha} \gg M_{\max}^{1-\alpha}$:

$$S(M) \sim \left(\frac{M}{M_{\min}} \right)^{1-\alpha} \quad (\text{V.52})$$

Ainsi, il apparaît que la pente de la fonction de survie dans l'espace log-log donne, à une constante + 1 près, l'exposant $-\alpha$ de la distribution qu'elle représente. Par ailleurs, sous les mêmes conditions asymptotiques on peut montrer que la fonction de répartition converge vers 1, justifiant l'utilisation de la fonction de survie dans le cas⁴ $1 - \alpha < 0$. De même, toute variation pouvant être localement décrite par un exposant $1 - \alpha < 0$ peut être identifiée grâce à la fonction de survie.

Considérons dans un premier temps une fragmentation invariante d'échelle afin de vérifier la convergence de l'échantillon de cœurs de W43 vers une IMF de Salpeter. Pour cela, plaçons-nous dans des conditions favorables à cette convergence, avec par exemple $\phi = 0.82$, $\xi = -0.2$, $\psi = 2$ avec un total de $L = 7$ niveaux séparés d'un rapport d'échelle $r = 1.5$, soit correspondant à $R_{\text{stop}} = 146$ UA, et supposons pour simplifier une efficacité de formation d'étoile individuelle $\langle \epsilon_{CE} \rangle = 1$. Le résultat de la fragmentation des cœurs par ce procédé est montré dans la Figure V.10, où 10^4 tirages Monte-Carlo ont été réalisés pour évaluer une grande variété d'issues possibles. Pour chaque tirage, un ajustement moindre carré⁵ est effectué pour mesurer la valeur numérique de la pente $1 - \alpha$. Les distributions des coefficients $1 - \alpha$ sont données dans la Figure V.11 pour chaque niveau intermédiaire incluant $L = 7$. Ces distributions montrent que la déviation standard de ces distributions augmente à mesure que le nombre de niveaux augmente : plus la fragmentation descend le long des niveaux, plus la multiplicité dans les systèmes produits peut varier, et donc plus la forme de la distribution fluctue. À partir de $l = 5$ niveaux, les mesures de pente ne sont pas incompatibles avec la pente de Salpeter en considérant un intervalle

4. Le cas inverse favorisant l'utilisation de la fonction de répartition par rapport à la fonction de survie.

5. La méthode des moindres carrés minimise la somme des différences quadratiques (différences élevées au carré) entre les données et une fonction test, parmi un ensemble de fonctions, et sélectionne celle qui reproduit le mieux les données.

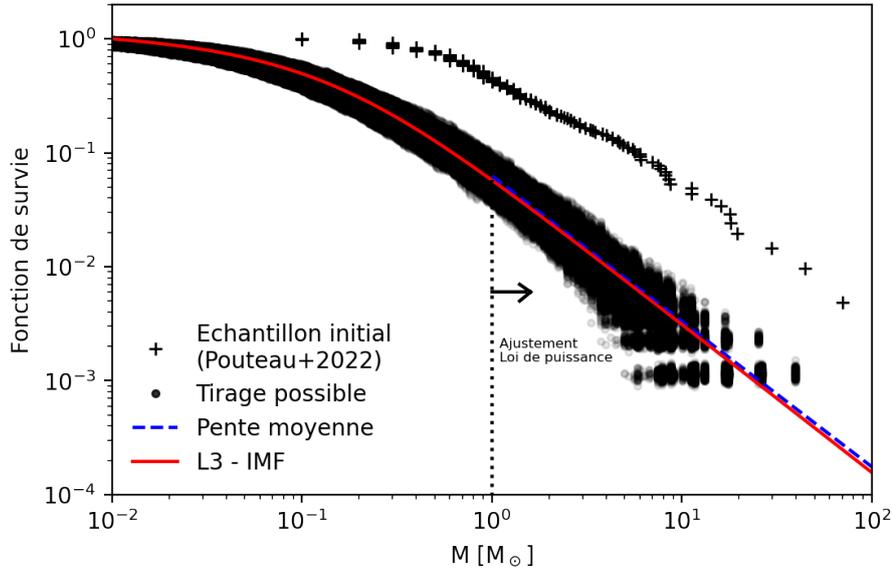


FIGURE V.10 – Fonctions de survie de l’échantillon de W43 (Pouteau et al. 2022) et des différents tirages Monte-Carlo. Sont superposées la paramétrisation de la L3 IMF de Machberger (2013), et la pente moyenne ajustée pour des masses $M > 1 M_{\odot}$. Ces fonctions de survie correspondent aux paramètres de fragmentation $\phi = 0.82$, $\xi = -0.2$, $\psi = 2$, un total de $L = 7$ niveaux séparés par un rapport d’échelle $r = 1.5$, correspondant à $R_{\text{stop}} = 146$ UA.

de confiance de 3σ . Cela correspond à des échelles d’arrêt $146 \text{ UA} < R_{\text{stop}} < 329 \text{ UA}$, pour $\langle \epsilon_{CE} \rangle = 1$. Toutefois, la prise en compte d’un trop grand nombre de niveaux devrait continuer à déplacer la valeur de pente vers des $1 - \alpha$ plus faibles et à augmenter la variance de ces distributions.

4.2 Conséquences d’une fragmentation gravo-turbulente

D’après l’étude menée au Chapitre III, le domaine d’échelles spatiales étudié, où $R < 2500 \text{ UA}$, n’est pas caractéristique d’une fragmentation invariante d’échelle. En effet, dans le cadre d’une modélisation gravo-turbulente, le taux de fragmentation n’est pas constant, du moins sous les conditions employées pour calculer la fonction $\phi(R)$. Procédons cette fois-ci à la fragmentation des cœurs de W43 sous contrainte, en adoptant l’équation II.15 (rappelée ci-après) qui donne le nombre moyen de fragments produits entre deux échelles quelconques en fonction des variations du taux de fragmentation dans un intervalle donné :

$$\langle \bar{n}_l \rangle = \exp \left[\int_{R_{l+1}}^{R_l} \phi(R') d \ln R' \right] \quad (\text{V.53})$$

En utilisant cette quantité comme espérance dans la loi de sélection binaire pour

déterminer le nombre de fragments enfants, il est alors possible de caractériser la production des fragments niveau après niveau tout en tenant compte des variations du taux de fragmentation entre ces niveaux. On utilise aussi un rapport de masse entre les fragments primaires et secondaires $\psi = 2$, et réalisé 10^4 tirages Monte-Carlo pour obtenir un ensemble de distributions possibles. Reprenons l'évolution spatiale générale du taux de fragmentation $\phi(R)$ dérivée dans la partie 4.2 du Chapitre III, dont les valeurs numériques dépendent du taux d'injection de masse ξ . Dans ce modèle, le point d'arrêt de la fragmentation R_{stop} est contraint par le taux d'injection de masse ξ qui détermine aussi directement l'évolution spatiale du taux de fragmentation $\phi(R)$. Ainsi, les formes des CMF sont entièrement déterminées par la valeur de ξ , supposée constante. La Figure V.12-(a) montre les 10^4 fonctions de survie des CMF fragmentées autour du point d'arrêt défini par la solution $\phi = 0$, pour différentes valeurs de $0 \geq \xi \geq -0.5$. Une efficacité moyenne $\langle \epsilon_{CE} \rangle$ de formation d'étoile individuelle a été appliquée *a posteriori* à ces fonctions de survie pour tenir compte de la phase de formation d'étoile au sein des derniers coeurs produits. Cette correction donne une estimation de la valeur numérique de $\langle \epsilon_{CE} \rangle$ et permet de faire coïncider l'IMF de Salpeter avec les CMF fragmentées pour :

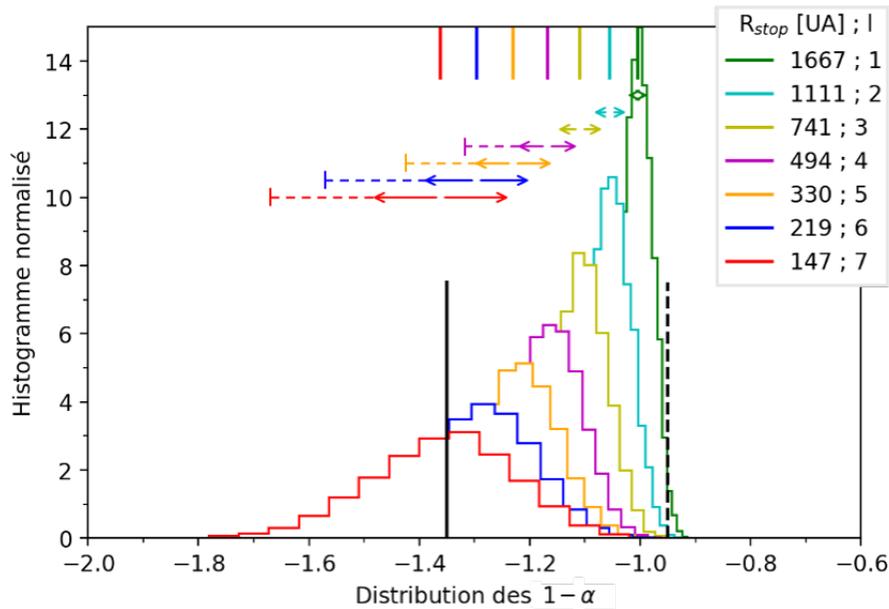


FIGURE V.11 – Distributions des pentes ajustées sur les CMF générées pour les niveaux $1 \leq l \leq 7$. Les barres colorées indiquent les moyennes des distributions et les flèches leur écart-type (1σ). La prolongation des flèches en pointillés indiquent l'extension à 3σ de la distribution. La ligne verticale pleine représente la pente de Salpeter $\alpha = 2.35$ tandis que la ligne pointillée noire représente la valeur de pente d'origine $\alpha = 1.95$. La pente de Salpeter est incompatible avec les CMF de niveaux $l < 5$ à un intervalle de confiance de 3σ .

1. Calculer le score du test AD associé à chaque CMF et leur valeur-p associée ;
2. Ajuster la pente des fonctions de survie pour des masses $M > 1 M_{\odot}$;

À première vue, les solutions obtenues par le modèle de fragmentation sont relativement proches de l'IMF de Salpeter. Cependant, en inspectant la Figure V.12-(b) qui représente respectivement les scores des tests AD effectués, la proximité des CMF avec la L3-IMF est discutable. En effet, les distributions des tests AD indiquent qu'il est possible de rejeter l'hypothèse nulle à un degré de confiance associé à une valeur-p de 0.05 : les échantillons issus de la fragmentation des 205 cœurs de W43 ne sont vraisemblablement pas compatibles avec l'IMF canonique.

Bien que la forme générale des CMF obtenues par fragmentation soit incompatible avec une IMF canonique, pour un intervalle de confiance de 3σ les distributions des pentes ajustées aux grandes masses de la V.12-(c) ne sont quant à elles pas incompatibles avec une IMF de Salpeter pour des taux d'injection de masse $0 \geq \xi \geq -0.5$. En prenant comme estimateur de cette pente la moyenne des distributions et leur écart-type comme incertitude type, on trouve par exemple que pour $\xi = 0$, une pente moyenne aux grandes masses $\alpha = 2.30 \pm 0.13$ (voir Tableau V.4). Avec cet estimateur, pour $\xi < -0.3$, l'IMF de W43 – MM2 & MM3 n'est pas une IMF de type Salpeter mais reste *top-heavy* avec un indice $\alpha \sim 2.21 \pm 0.12$ très proche de la pente de Salpeter. Il est ainsi plus vraisemblable que l'IMF soit de type Salpeter pour $\xi \geq -0.3$ que dans le cas $\xi > -0.3$. Cela est dû au fait que l'échelle d'arrêt de la fragmentation R_{stop} augmente à mesure que les taux d'injection de masse diminuent. Ainsi, moins de niveaux de fragmentation sont disponibles et donc les CMF associées à $\xi < -0.3$ fragmentent moins. Il semble donc nécessaire de continuer à fragmenter pour des échelles $R < 450$ UA.

Les CMF qui présentent un caractère Salpeter ont ainsi des efficacités de formation permettant de retrouver $\left(\frac{R_{\text{stop}}}{2500 \text{ UA}}\right)^{-\xi} > 57\%$ de la masse des parents dans les derniers fragments de l'échelle R_{stop} . En revanche, les processus de formation des étoiles semblent plus inefficaces car entre $26\% \leq \epsilon_{CE} \leq 32\%$ de la masse des derniers fragments à l'échelle R_{stop} est utilisée pour produire chaque étoile individuellement.

Concernant la multiplicité des étoiles formées dans les cœurs denses, considérons bien que la notion de groupe est relative à la taille des cœurs initiaux : les étoiles naissent groupées avec une séparation maximale de l'ordre de 2500 UA. Plus le taux d'injection de masse est élevé, plus le nombre de systèmes multiples sera grand en raison d'une fragmentation favorisée. Ainsi, pour $0 \geq \xi \geq -0.3$, plus de 75% des systèmes formés sont des systèmes multiples. En revanche, pour $\xi < -0.4$, les étoiles se forment préférentiellement

ξ	$R_{\text{stop}}[\text{UA}]$	α	$\langle \epsilon_{CE} \rangle$	% Étoiles solitaires	% Étoiles groupées
0	307	2.30 ± 0.13	0.32	5	95 [3.33]
-0.1	336	2.27 ± 0.13	0.30	9	91 [2.96]
-0.2	372	2.27 ± 0.14	0.28	13	87 [2.72]
-0.3	422	2.24 ± 0.15	0.26	25	75 [2.64]
-0.4	496	2.23 ± 0.13	0.24	43	57 [2.26]
-0.5	620	2.21 ± 0.12	0.22	63	37 [2.17]

TABLE V.4 – Propriétés de la formation d'étoiles, induites par un modèle de fragmentation gravo-turbulente. Pour chaque taux d'injection de masse, sont consignés l'échelle d'arrêt de la fragmentation R_{stop} , la pente α dans le domaine des grandes masses, l'efficacité de formation individuelle d'une étoile $\langle \epsilon_{CE} \rangle$ et la proportion d'étoiles nées seules ou en groupe. Les valeurs notées entre crochets [x] représentent le nombre de fragments moyens produits dans les systèmes multiples.

sans compagnons dans une région de taille typique $R_0 = 2500$ UA représentent $> 50\%$ des systèmes formés. En regardant la quantité de fragments formés au sein de chaque système, il est possible de calculer le nombre moyen de fragments contenu dans chaque structure hiérarchique. Pour retrouver une IMF de Salpeter, les systèmes multiples produits contiennent en moyenne entre 2.64 et 3.33 fragments.

4.3 Conditions pour retrouver une IMF canonique

En résumé, sous des conditions invariantes d'échelles, si l'IMF était universelle alors l'IMF finale construite par fragmentation de la CMF de W43 – MM2 & MM3 devrait être compatible avec l'IMF canonique. Les processus qui mènent à sa formation devraient présenter les propriétés suivantes :

1. Une relation masse / taille $M \propto R$ typique d'une sphère isotherme de Bonnor-Ebert en effondrement marginalement instable ;
2. Une échelle d'arrêt comprise entre 330 UA $< R_{\text{stop}} < 500$ UA en considérant une efficacité de formation d'étoile $\langle \epsilon_{CE} \rangle = 30\%$ (ou bien une échelle d'arrêt comprise entre 150 UA $< R_{\text{stop}} < 330$ UA en en considérant une efficacité de formation d'étoile $\langle \epsilon_{CE} \rangle = 100\%$) ;

Sous les conditions avec lesquelles notre modèle gravo-turbulent a été dérivé (distribution log-normale des fluctuations en densité, support turbulent à grande échelle et fragmentation de type Jeans en considérant des processus non-isotherme à petite échelle), si l'IMF finale devait présenter un caractère Salpeter, alors les processus qui mènent à sa formation devraient présenter les propriétés suivantes :

1. Une efficacité de formation d'étoiles $26\% \leq \epsilon_{CE} \leq 32\%$;

2. Un taux d'injection de masse $-0.3 \leq \xi \leq 0$;
3. Une proportion de systèmes multiples $> 75\%$ dans une région de taille $R = 2500$ UA, contenant en moyenne ~ 3 fragments.

De manière générale, les étoiles formées seules peuplent les domaines de masse les plus élevées, et les systèmes multiples peuplent les domaines plus faibles. Une étude similaire pour des cas d'objets accrétant de la matière ($\xi > 0$) n'a pas été réalisée, mais on s'attendrait à ce que ces objets fragmentent plus, et donc produisent des distributions en masse dont la pente $\alpha > 2.35$. Par ailleurs, l'analyse basée sur le modèle gravo-turbulent applique une tendance moyenne du taux de fragmentation. Il est également possible d'appliquer une trajectoire spécifique à chaque cœur dense pris individuellement, en tenant compte de leur masse et taille respectives. Il serait intéressant d'effectuer cette étude au cas par cas pour vérifier la pertinence de considérer une trajectoire moyenne, et peut être avoir une idée plus précise de l'évolution locale de chaque cœur de W43.

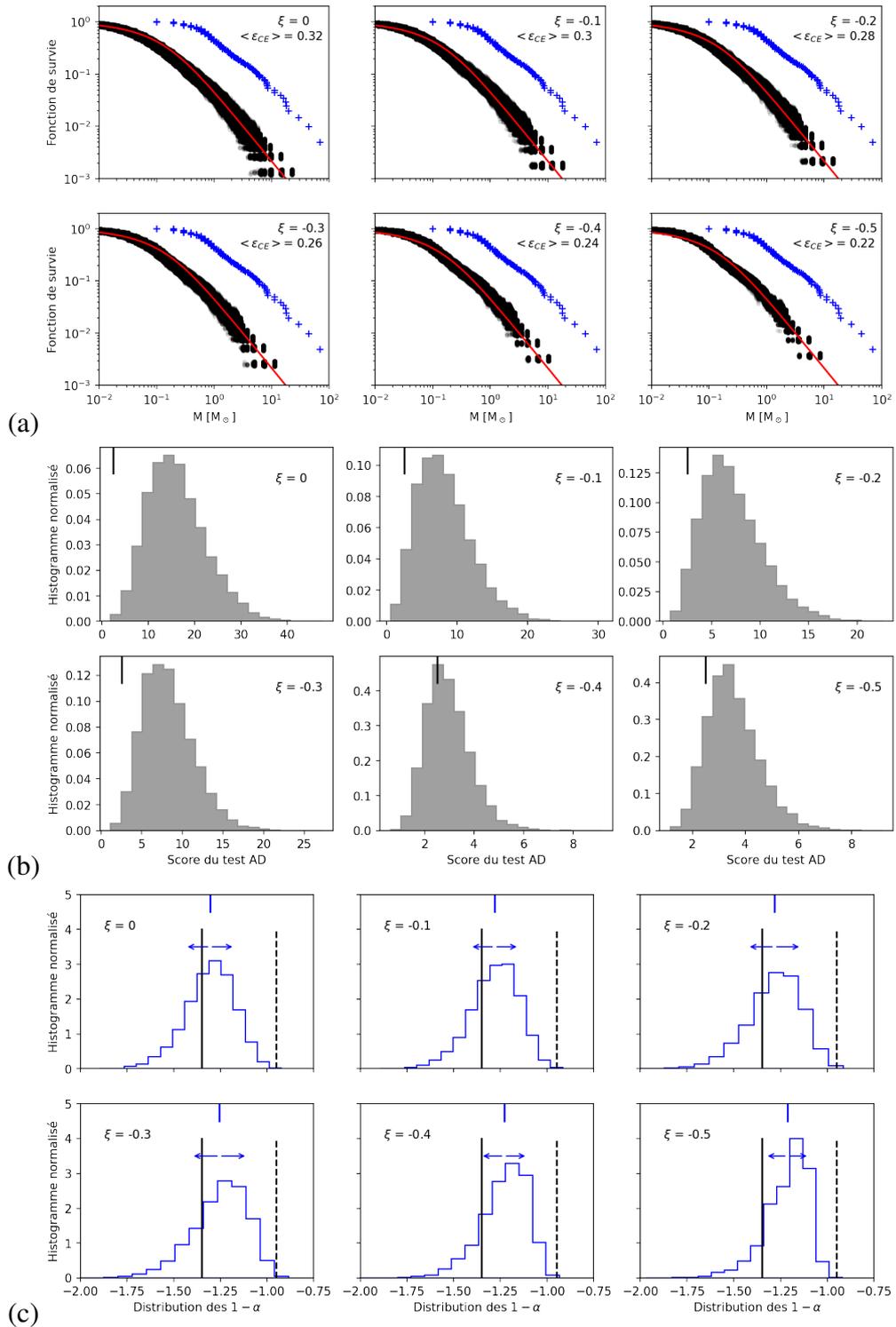


FIGURE V.12 – (a) Fonctions de survie des CMF générées dans le cadre du modèle gravo-turbulent. Sont affichés en noir les différents tirages Monte-Carlo, en bleu l'échantillon initial avec leur pente associée, et en rouge la L3-IMF. (b) Distribution des scores obtenus des test AD pour chaque tirage. La barre noire représente la valeur critique associée à une valeur-p de 0.05 : au delà, l'échantillon est incompatible avec la L3-IMF. (c) Distribution des pentes ajustées à partir de $M = 1 M_{\odot}$. Les flèches bleues représentent la déviation standard à 1σ , la barre indique la valeur moyenne. Les lignes noires pleines et pointillées représentent respectivement la pente de Salpeter et la pente initiale.

Chapitre VI

Conclusions & Perspectives

Sommaire

1	Bilan du travail effectué	179
1.1	Résumé du Chapitre II	179
1.2	Résumé du Chapitre III	180
1.3	Résumé du Chapitre IV	180
1.4	Résumé du Chapitre V	182
2	Potentiel du modèle	183
2.1	Phénomènes d'accrétion	183
2.2	Une description modulable du taux de fragmentation	183
2.3	Contraindre les mécanismes de formation d'étoiles	184
3	Pistes de travail à venir	185
3.1	Axes d'amélioration du modèle	185
3.2	Meilleures contraintes observationnelles	185
3.3	Simulations numériques	186
3.4	Caractérisation des systèmes gravitationnellement liés	186

Dans cette thèse, j'ai présenté un modèle de fragmentation multi-échelle de nature probabiliste pour décrire la sous-structuration des nuages moléculaires jusqu'à la formation des étoiles. Ce modèle a pour but de prédire la multiplicité stellaire des systèmes formés et la masse des objets qui composent ces systèmes. Par ailleurs, son architecture en réseau offre un squelette permettant d'analyser des données multi-échelles et de les interpréter en mesurant des observables du modèle. Pour terminer ce manuscrit et ces trois années de thèse qui n'auront finalement pas entièrement eu raison de moi, passons en revue les résultats clés associés au développement de notre modèle de fragmentation, à son exploitation et à l'analyse qu'il propose.

1 Bilan du travail effectué

1.1 Résumé du Chapitre II

Dans le Chapitre II nous avons construit un modèle de fragmentation en le structurant le long de plusieurs niveaux discrets, chacun étant associé à une échelle spatiale spécifique, le long desquels des fragments prolifèrent. Le processus de fragmentation du nuage est représenté sous la forme d'un réseau organisé en différentes échelles spatiales peuplées de fragments inter-connectés en fonction de leur appartenance généalogique. En outre, ce modèle raccorde la description discrète de la fragmentation dont la résultante est la formation d'étoiles dénombrables, avec la structure continue et multi-échelle des nuages moléculaires à partir desquels les étoiles héritent de leur masse. Ce modèle introduit trois paramètres qui déterminent la multiplicité et la masse des fragments :

1. le taux de fragmentation $\phi(R)$ qui maîtrise la quantité de fragments produits à chaque échelle, et donc *in fine* la multiplicité des étoiles sur la dernière échelle ;
2. le taux d'injection de masse $\xi(R)$ qui caractérise le rendement massique avec lequel les fragments sont formés échelle après échelle, et par extension l'efficacité de formation des étoiles ;
3. le rapport de masse ψ entre les fragments qui caractérise plus finement la répartition de la masse entre les fragments au sein d'un même système.

Contrairement au modèle de fragmentation stochastique proposé par [Larson \(1973\)](#), notre modèle introduit la possibilité de décrire une situation de non-équipartition en masse entre les fragments produits (paramètre ψ), et permet également de rendre compte échelle après échelle de la croissance en masse des fragments (par accrétion) par rapport à la quantité de matière perdue au cours de l'effondrement (paramètre ξ). De plus, notre modèle considère l'échelle physique des fragments produits pour chaque niveau de fragmentation, ce qui permet de moduler les propriétés de fragmentation en fonction de la physique qui régit cette échelle.

Le taux de fragmentation et le taux d'injection de masse permettent de calculer en moyenne le nombre de fragments produits, leur masse, leur densité massique et la densité stellaire d'étoiles dans une région donnée. Toutes ces quantités sont définies par rapport à une échelle spatiale R_0 sur laquelle on effectue lesdites moyennes. Nous avons également vu que la géométrie des fragments, au même titre que l'échantillonnage en tailles spatiales, pouvait introduire une erreur systématique dans la mesure du taux de fragmentation.

1.2 Résumé du Chapitre III

Le Chapitre III reprend ce modèle stochastique et lui offre une interprétation physique en :

1. associant différents régimes de fragmentation en fonction des valeurs numériques de ϕ et ξ ;
2. quantifiant le taux de fragmentation ϕ en fonction des mécanismes physiques qui structurent le nuage, et en fonction du taux d'injection de masse ξ .

En considérant les temps de chute libre de chaque fragment, nous avons pu mettre en évidence trois régimes de fragmentation en fonction de la quantité de fragments productibles par un système en effondrement :

1. le régime hiérarchique lorsque plusieurs subdivisions sont possibles si $0 < \phi < \xi + 3$;
2. le régime monolithique lorsqu'un unique fragment est produit si $\phi = 0$ ou si $\phi \geq \xi + 3 \geq 0$;
3. le régime dissipatif lorsqu'aucun fragment ne peut exister si $\xi < -3$ ou si $\phi < 0$.

Interpréter notre modèle dans le cadre d'une fragmentation gravo-turbulente a permis de formaliser les circonstances d'accès à ces différents régimes en fonction de la thermodynamique du milieu et du degré d'instabilité de la structure en effondrement, puis à évaluer une échelle caractéristique d'arrêt R_{stop} de la fragmentation autour de $R_{\text{stop}} \sim 100$ UA. L'existence d'une telle échelle est conditionnée par les transformations non-isothermes que subissent les fragments au cours de leur effondrement. Pour un effondrement purement isotherme, si $\xi = 0$ alors le taux de fragmentation $\phi = 1$ et le nuage fragmente jusqu'à des échelles spatiales infiniment petites. De plus, l'évolution moyenne de la masse des fragments en fonction de leur taille montre que notre processus de fragmentation est un processus auto-régulateur qui tend, en moyenne, à produire des fragments marginalement instables à plus petite échelle. Par ailleurs, nous avons pu constater que la multiplicité des étoiles contenues dans les systèmes stellaires denses du Taureau (les NESTs de [Joncour et al. \(2018\)](#)) dévoilait des signes de formation *via* des taux d'injection de masse $-0.5 < \xi < 0$, permettant la contrainte de ce paramètre par le biais d'une analyse stellaire.

1.3 Résumé du Chapitre IV

Le Chapitre IV présente quant à lui un outil d'analyse multi-échelle basé sur l'architecture en réseau du modèle afin de reconstruire la généalogie entre des fragments de

différentes échelles spatiales, et permet d'étudier une photographie de la cascade de fragmentation à l'instant t . La connexion entre des fragments d'échelles spatiales différentes respecte un principe d'inclusion qui permet d'associer deux fragments pourvu que 75% du volume de l'enfant soit inclus dans son parent. Cette analyse est effectuée sur le nuage moléculaire NGC 2264 tel qu'observé par les télescopes spatiaux *Spitzer* et *Herschel* dont les résolutions angulaires définissent respectivement des niveaux de fragmentation à 2" et 8.4, 13.5, 18.2, 24.9 et 36.3", soit des échelles spatiales de 1.4, 6, 10, 13, 18 et 26 kUA. Les niveaux associés aux échelles 6, 10, 13, 18 et 26 kUA sont peuplés avec des fragments extraits par l'algorithme `getsf` (Men'shchikov 2021). Le niveau à 1.4 kUA est quant à lui peuplé des jeunes étoiles de classe O/I du catalogue de Rapson et al. (2014). En construisant le réseau associé à ces données, nous avons identifié trois catégories de structures multi-échelles : des structures hiérarchiques, que nous associons à un processus de fragmentation hiérarchique ; linéaires, que nous interprétons comme un processus de fragmentation monolithique ; et un dernier mode isolé, pouvant être associé à un mode dissipatif en admettant qu'aucune sous-structuration ne s'implantera dans le futur. L'analyse de ces structures multi-échelles révèle plusieurs caractéristiques dans NGC 2264 :

1. l'existence de structures linéaires incubant une seule étoile montre que les modes d'effondrement monolithique et hiérarchique peuvent coexister au sein d'un même nuage ;
2. les structures hiérarchiques sont les principaux incubateurs de jeunes étoiles et représentent donc le principal réservoir de masse pour la formation d'étoiles ;
3. les régions à forte densité de colonne sont corrélées avec un mode d'effondrement hiérarchique tandis que les régions à plus faible densité de colonne sont dominées par un effondrement monolithique, suggérant que le taux de fragmentation dépend de la densité de colonne du nuage ;
4. le taux de fragmentation moyen mesuré dans le nuage est évalué à $\langle \phi \rangle = 1.0 \pm 0.3$, caractéristique d'un effondrement hiérarchique dominé par la gravité, avec une contribution marginale de la turbulence ;
5. Le taux de fragmentation mesuré n'est pas incompatible avec une fragmentation gravo-turbulente dont le taux d'injection de masse $-0.5 < \xi < 0$ est associé à une perte de masse progressive des fragments au cours de l'effondrement.

Toutefois, un taux de fragmentation à ϕ constant, caractéristique d'un processus invariant d'échelle, échoue à décrire la cascade de fragmentation observée pour $R < 26$ kUA car la sous-fragmentation n'est observée qu'à partir des échelles $R < 13$ kUA. La réalité de ce plateau est néanmoins discutable, en particulier lorsque l'on cherche à prendre en compte les effets de longueurs d'onde, de contraintes géométriques et de défaut de

détection. Les biais d'extraction associés à la définition des contours des fragments peuvent également altérer le suivi multi-échelle du taux de fragmentation, sans toutefois modifier significativement sa mesure $\langle \phi \rangle$ moyenne. Les résultats de ce Chapitre ont fait l'objet d'une publication (Thomasson et al. 2022) dans le journal *Astronomy & Astrophysics*.

1.4 Résumé du Chapitre V

En dernier lieu, le Chapitre V exploite notre modèle de fragmentation pour évaluer l'impact de la fragmentation sur la fonction de masse des étoiles (IMF), en tenant compte du couplage existant entre une multiplicité qui partitionne la masse du nuage en plusieurs morceaux et une efficacité de formation qui réduit le budget total de masse utilisée. En découplant les effets du taux de fragmentation, du taux d'injection de masse, et du rapport de masse entre les fragments produits, nous avons pu mettre en évidence que :

1. l'efficacité de formation des étoiles dépend non seulement de leur rendement massique de formation individuel mais aussi de leur multiplicité ;
2. la nature probabiliste du nombre de fragments produits modifie la forme de la fonction de masse dans les domaines des grandes masses et des faibles masses ;
3. le taux d'injection de masse ξ ne fait que déplacer l'ensemble de la fonction de masse sans en changer la forme ;
4. une répartition déséquilibrée de la masse entre les fragments induit l'existence de fragments de plus faible masse, déplaçant le pic de la distribution sans en modifier la forme dans le domaine des grandes masses.

Dans cette étude, nous nous sommes interrogés sur la possibilité que la fonction de masse des coeurs (CMF) extraite de la région de formation massive W43 – MM2 & MM3 (Pouteau et al. 2022), caractérisée par un excès d'objets massifs (de pente $\alpha = 1.95$), puisse dans le futur se rattacher à une IMF stellaire de type Salpeter (de pente $\alpha = 2.35$). En appliquant notre modèle de fragmentation sur cette CMF, nous avons pu montrer que :

1. des processus invariants d'échelle permettaient d'altérer suffisamment cette CMF pour la réconcilier avec l'IMF canonique si la relation masse / taille des fragments était du type $M \propto R$;
2. ces mêmes processus invariants d'échelle atteignent une convergence vers l'IMF canonique pour une échelle d'arrêt de la fragmentation de l'ordre de quelques centaines d'UA ;
3. la fragmentation gravo-turbulente d'une sphère de gaz permet de se raccorder, à une IMF de type Salpeter pour des taux d'injection de masse $-0.3 \leq \xi \leq 0$;

4. $\sim 75\%$ des systèmes produits dans cette fragmentation gravo-turbulente sont des systèmes multiples, contenant en moyenne ~ 3 étoiles localisées dans un rayon de 2500 UA.
5. pour réconcilier la CMF de W43 – MM2 & MM3 avec une IMF de Salpeter, il faut que les derniers fragments issus du processus de fragmentation produisent leurs étoiles avec une efficacité $26\% \leq \epsilon_{CE} \leq 32\%$.

De manière générale, la fragmentation hiérarchique des structures denses composant une CMF de pente quelconque α a tendance à produire une IMF plus pentue, de paramètre $\alpha' > \alpha$, sans pour autant garantir la convergence vers une IMF canonique. Une CMF dont la pente serait déjà de type Salpeter ne pourrait engendrer une IMF de type Salpeter qu'en l'absence de processus de fragmentation. Cette capacité à fragmenter ou non dépend de la densité, et donc en partie de l'échelle spatiale des fragments qui composent la CMF. En l'état actuel de notre modèle de fragmentation, une CMF de type Salpeter composée de fragments de taille $R \sim 300$ UA ne pourrait plus fragmenter, et donc produirait naturellement une IMF de type Salpeter *modulo* une efficacité de formation. En revanche, la même CMF composée de fragments de taille $R \sim 2000$ UA pourrait fragmenter, et l'IMF engendrée ne serait plus Salpeter. Ce travail fait l'objet d'une publication à venir.

2 Potentiel du modèle

2.1 Phénomènes d'accrétion

Le modèle de fragmentation présenté dans ce travail de thèse introduit le paramètre ξ qui est lié au rendement massique de formation des fragments. Ce rendement tient compte de l'équilibre entre les processus d'accrétion qui alimentent un fragment en masse, et des processus d'éjection de matière qui appauvrissent ce fragment. Bien que cette opposition entre ajout et rejet de matière ne soit pas exploité dans ce travail, il serait possible de le développer pour quantifier et contraindre le taux d'injection de masse ξ par rapport à des modèles d'accrétion (Bonnell et al. 2001; Longmore et al. 2014), ou de manière équivalente, à tout processus qui viendrait altérer localement la masse contenue dans les fragments.

2.2 Une description modulable du taux de fragmentation

Outre le fait de pouvoir donner une expression analytique au taux de fragmentation, la formalisation mathématique de cette quantité permet de considérer une multitude de processus physiques. Dans cette thèse, nous avons considéré :

1. Une distribution log-normale des fluctuations aléatoires en densité ;
2. Une relation d'échelle entre la vitesse quadratique moyenne de la turbulence et l'échelle spatiale sur laquelle agit cette turbulence ;
3. Une équation d'état polytropique ;
4. Le critère d'instabilité d'une sphère en effondrement gravitationnel.

Une autre solution analytique pourrait être dérivée avec une tout autre description du nuage, par exemple en considérant l'instabilité d'un disque en rotation ou une composante turbulente plus prédominante à petite échelle. D'autres modèles physiques qui caractérisent la fragmentation d'autres objets dans d'autres circonstances, pourraient ainsi mener à une prédiction alternative du taux de fragmentation et à une caractérisation de la multiplicité des objets produits. Cette flexibilité dans la description des processus de fragmentation permettrait de décrire, sous la même prescription, différents mécanismes de formation d'étoile et de leurs compagnons stellaires ou, pourquoi pas, planétaires.

2.3 Contraindre les mécanismes de formation d'étoiles

La mesure du taux de fragmentation $\phi(R)$ à l'aide d'un réseau connecté et son interprétation dans le cadre d'une description physique, qui le quantifie, facilite l'analyse et l'exploitation de données multi-échelles. Ce type d'analyse contraint la valeur numérique du taux de fragmentation qui représente alors une sonde pour les propriétés locales du nuage. En effet, les processus physiques suspectés de structurer le nuage sont utilisés pour évaluer un taux de fragmentation qui peut ensuite être confronté à la multiplicité des fragments effectivement observés dans le nuage. La mesure du taux de fragmentation donne ainsi une information sur la validité du cadre physique utilisé pour effectuer cette prédiction, et donc sur la cohérence d'utiliser telle description physique du nuage plutôt qu'une autre.

Dans le cadre de notre modèle de fragmentation, la connaissance des processus physiques qui régissent le taux de fragmentation permet également de prédire la quantité d'étoiles produites dans une région donnée. Ainsi, un ensemble de processus physiques suffirait à déterminer la multiplicité des systèmes stellaires. *A contrario*, la multiplicité et les propriétés spatiales de ces systèmes pourraient donner une information sur les processus physiques responsables de leur formation. Toutefois, l'absence (provisoire) de théorie prédictive concernant le taux d'injection de masse ξ restreint l'évaluation complète des propriétés des systèmes stellaires dont le mécanisme parent est la fragmentation du nuage. Comme énoncé précédemment dans la partie 2.1, pour palier à cette problématique, on pourrait évaluer le paramètre ξ sur la base des différents modèles d'accrétion existant.

3 Pistes de travail à venir

3.1 Axes d'amélioration du modèle

Il est toujours possible d'améliorer la description physique du taux de fragmentation, voire du taux d'injection de masse, afin d'apporter plus de nuances sur l'estimation qu'on en fait. En l'état, il est possible de déterminer analytiquement un taux de fragmentation dans le cadre d'une fragmentation gravo-turbulente, sans tenir compte des aspects évolutifs des structures produites : ces dernières fragmentent et seul le résultat final de cette fragmentation est évalué. Même si notre modèle apporte une description quantitative des conséquences de la fragmentation, plusieurs aspects lui font défaut, par exemple sur la formation du premier coeur de Larson ([Larson 1969](#)) à petite échelle, sur la distribution des fluctuations en densité qui n'est pas nécessairement log-normale à plus petite échelle, ou sur l'évolution dynamique des structures parentales en effondrement. Intégrer le profil radial en densité de ces structures en effondrement serait une étape supplémentaire qui permettrait d'étudier plus en détails ces trois derniers aspects, en caractérisant la capacité qu'une structure a de fragmenter en fonction de la vitesse à laquelle la gravité façonne la distribution en densité au sein de ces structures.

Par ailleurs, nous n'avons pas caractérisé l'évolution du taux de masse injectée ξ le long des échelles spatiales. Cette quantité peut néanmoins être évaluée empiriquement en connaissant la masse des fragments qui sont produits dans un nuage. Dans cette thèse nous n'avons évalué que qualitativement cette donnée soit par le biais des efficacités de formation nécessaires pour produire une IMF stellaire, soit par le biais des propriétés spatiales des NESTs. D'autres travaux ([Louvet et al. 2014](#)) ont par exemple mis en évidence une augmentation de l'efficacité de formation des fragments avec une augmentation de la densité de colonne du milieu. Il serait donc possible de construire une loi empirique de $\xi(\rho)$ en fonction de la densité. Cette loi empirique serait ensuite facilement incorporable à l'expression analytique du taux de fragmentation $\phi(R)$ qui dépend linéairement de ξ . Cette contrainte additionnelle modifierait l'équilibre existant entre ϕ et ξ en imposant que les fragments moins denses produisent des fragments toujours moins denses et inversement.

3.2 Meilleures contraintes observationnelles

Les améliorations théoriques associées à ce modèle de fragmentation s'accompagnent de contraintes observationnelles plus poussées, par l'intermédiaire de données multi-échelles issues d'instruments différents. En particulier, à ce stade de développement du modèle, la réalisation d'autres analyses multi-échelles serait nécessaire pour vérifier ou remettre en cause certains faits qui découlent du modèle :

1. Le taux de fragmentation est-il constant à plus petite échelle ? Auquel cas le processus de fragmentation est-il auto-similaire, ou subit-il un arrêt progressif comme prédit par notre modèle actuel ?
2. La fragmentation du nuage s'arrête-t-elle réellement pour des échelles autour de $R_{\text{stop}} \sim 100 \text{ UA}$?
3. Si le modèle est incomplet, quels processus physiques à plus petite échelle modifieraient la valeur numérique du taux de fragmentation ?

De plus, notre suivi multi-échelle du taux de fragmentation sur le domaine spatial $13 < R < 26 \text{ kUA}$ suggère que ces échelles sont dominées par un mode de fragmentation monolithique. Or, des traces d'une telle fragmentation monolithique se retrouvent également dans les NESTs, dont la multiplicité reste constante pour des échelles $R < 40 \text{ kUA}$. Diversifier les analyses multi-échelle sur d'autres nuages que NGC 2264 favoriserait la construction d'une statistique plus robuste du taux de fragmentation afin de vérifier la brisure des lois invariantes d'échelles pour les échelles $R > 13 \text{ kUA}$.

3.3 Simulations numériques

Peut être plus important encore que de chercher à contraindre le modèle avec des observations, bénéficier d'un environnement expérimental contrôlé est une nécessité pour tester les prédictions de notre modèle. En ce sens, l'utilisation de simulations numériques, traçant l'évolution des nuages moléculaires à toutes les échelles, représenterait fatalement une étape incontournable dans le développement futur de ce modèle de fragmentation. De plus, contrairement aux données réelles, l'analyse multi-échelle des structures formées dans les simulations numériques permettrait d'avoir non pas accès à une photographie du ciel à un instant t , mais d'avoir accès à l'évolution des structures formées dans le nuage. En conséquence, ce type d'analyse rendrait plus aisé l'intégration et le contrôle de nouveaux mécanismes physiques.

3.4 Caractérisation des systèmes gravitationnellement liés

La définition des systèmes d'étoiles produits par notre modèle de fragmentation ne tient pas compte des potentielles interactions mutuelles, et ne sont par conséquent pas nécessairement des systèmes liés gravitationnellement. Or, les systèmes stellaires sont traditionnellement définis comme des systèmes d'étoiles en interaction gravitationnelle. Pour concrétiser le rapport qu'entretiennent les étoiles avec leur nuage moléculaire, il apparaît primordial de caractériser la capacité qu'ont les fragments à interagir entre eux, voire à orbiter les uns autour des autres lors de leur formation. Cette problématique est

intimement liée au problème de la conservation du moment angulaire dans les nuages moléculaires (Bouvier et al. 2014). En caractérisant le transfert successive, échelle après échelle, du moment angulaire disponible dans un nuage jusqu’au étoiles, ce modèle pourrait déterminer les périodes orbitales des étoiles constituant les systèmes multiples.

En ajoutant ces aspects, le taux de fragmentation pourrait dès lors être utilisé pour calculer, à partir des conditions physiques du nuage, les métriques communément utilisées en statistique stellaire, comme la fraction de systèmes multiples, ou la quantité de compagnons présents dans ces systèmes. Il serait également possible de comparer directement les rapports de masse entre les fragments primaires et secondaires avec les rapports de masse mesurés dans les systèmes binaires, gravitationnellement liés. Cette passerelle entre systèmes stellaires et nuage moléculaire unifierait les descriptions théoriques des systèmes gravitationnellement liés avec celles qui structurent les nuages moléculaires.

Le mot de la fin

Pour clôturer ce manuscrit de thèse et résumer ces trois dernières années, je reprendrai les mots d’un très grand philosophe ailé et bipède :

“Avec un escalier prévu pour la montée on réussit souvent à monter plus bas qu’on ne serait descendu avec un escalier prévu pour la descente.”

Les shadoks de Jacques Rouxel

Bibliographie

- Alves, J., Lombardi, M., & Lada, C. J. 2007, *Astronomy & Astrophysics*, 462, L17
- Anderson, T. W. & Darling, D. A. 1954, *Journal of the American Statistical Association*, 49, 765
- André, P. 2002, in *EAS Publications Series*, Vol. 3, *EAS Publications Series*, ed. J. Bouvier & J.-P. Zahn, 1–38
- Bastian, N., Covey, K. R., & Meyer, M. R. 2010, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 48, 339
- Bate, M. R. 2012, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 419, 3115
- Bonnell, I. A., Bate, M. R., Clarke, C. J., & Pringle, J. E. 2001, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 323, 785
- Bonnell, I. A., Larson, R. B., & Zinnecker, H. 2007, in *Protostars and Planets V*, ed. B. Reipurth, D. Jewitt, & K. Keil, 149
- Bonnor, W. B. 1956, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 116, 351
- Bouvier, J., Matt, S. P., Mohanty, S., et al. 2014, in *Protostars and Planets VI*, ed. H. Beuther, R. S. Klessen, C. P. Dullemond, & T. Henning, 433–450
- Cantat-Gaudin, T., Jordi, C., Vallenari, A., et al. 2018, *Astronomy & Astrophysics*, 618, A93
- Chabrier, G. 2003, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 115, 763
- Chandrasekhar, S. 1951, *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 210, 26
- Chen, X., Arce, H. G., Zhang, Q., et al. 2013, *The Astrophysical Journal*, 768, 110
- Cunningham, N., Lumsden, S., Cyganowski, C., Maud, L., & Purcell, C. 2016, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 458, stw359

- Dahm, S. E. 2008, in Handbook of Star Forming Regions, Volume I, ed. B. Reipurth, Vol. 4, 966
- De Marchi, G., Paresce, F., & Portegies Zwart, S. 2005, in Astrophysics and Space Science Library, Vol. 327, The Initial Mass Function 50 Years Later, ed. E. Corbelli, F. Palla, & H. Zinnecker, 77
- Dib, S., Bontemps, S., Schneider, N., et al. 2020, *Astronomy & Astrophysics*, 642, A177
- Draine, B. T. 2011, *Physics of the Interstellar and Intergalactic Medium*
- Draine, B. T. & Li, A. 2007, *The Astrophysical Journal*, 657, 810
- Duchêne, G. & Kraus, A. 2013, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 51, 269
- Elia, D., Strafella, F., Schneider, N., et al. 2014, *The Astrophysical Journal*, 788, 3
- Elmegreen, B. G. & Falgarone, E. 1996, *The Astrophysical Journal*, 471, 816
- Elmegreen, B. G. & Mathieu, R. D. 1983, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 203, 305
- Ferrière, K. M. 2001, *Reviews of Modern Physics*, 73, 1031
- Goodwin, S. P., Nutter, D., Kroupa, P., Ward-Thompson, D., & Whitworth, A. P. 2008, *Astronomy & Astrophysics*, 477, 823
- Guszejnov, D. & Hopkins, P. F. 2015, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 450, 4137
- Guszejnov, D., Hopkins, P. F., & Grudić, M. Y. 2018, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 477, 5139
- Guszejnov, D., Hopkins, P. F., & Krumholz, M. R. 2017, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 468, 4093
- Gutermuth, R. A., Megeath, S. T., Myers, P. C., et al. 2009, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 184, 18
- Gutermuth, R. A., Pipher, J. L., Megeath, S. T., et al. 2011, *The Astrophysical Journal*, 739, 84
- Hennebelle, P. & Chabrier, G. 2008, *The Astrophysical Journal*, 684, 395
- Hopkins, P. F. 2012, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 423, 2016

BIBLIOGRAPHIE

- Hopkins, P. F. 2013, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 433, 170
- Hou, A., Parker, L. C., Harris, W. E., & Wilman, D. J. 2009, *The Astrophysical Journal*, 702, 1199
- Houllahan, P. & Scalo, J. 1992, *The Astrophysical Journal*, 393, 172
- Hoyle, F. 1953, *The Astrophysical Journal*, 118, 513
- Hunter, C. 1962, *The Astrophysical Journal*, 136, 594
- Jeans, J. H. 1902, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 199, 1
- Joncour, I., Duchêne, G., & Moraux, E. 2017, *Astronomy & Astrophysics*, 599, A14
- Joncour, I., Duchêne, G., Moraux, E., & Motte, F. 2018, *Astronomy & Astrophysics*, 620, A27
- Klessen, R. S. & Glover, S. C. O. 2016, in *Saas-Fee Advanced Course*, Vol. 43, *Saas-Fee Advanced Course*, ed. Y. Revaz, P. Jablonka, R. Teyssier, & L. Mayer, 85
- Kolmogorov, A. N. 1941, *Akademiia Nauk SSSR Doklady*, 32, 16
- Koziol, J. A. 1987, *Journal of Educational Statistics*, 12, 412
- Kritsuk, A. G. & Norman, M. L. 2011, *arXiv e-prints*, arXiv :1111.2827
- Kritsuk, A. G., Norman, M. L., & Wagner, R. 2011, *The Astrophysical Journal Letters*, 727, L20
- Kroupa, P. 2001, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 322, 231
- Krumholz, M. R. 2014, *Physics Reports*, 539, 49
- Kuruwita, R. L. & Haugbølle, T. 2023, *Astronomy & Astrophysics*, 674, A196
- Lada, C. J. & Lada, E. A. 2003, *Annual Reviews of Astronomy & Astrophysics*, 41, 57
- Larson, R. B. 1969, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 145, 271
- Larson, R. B. 1973, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 161, 133
- Larson, R. B. 1981, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 194, 809
- Larson, R. B. 2003, *Reports on Progress in Physics*, 66, 1651

- Larson, R. B. 2005, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 359, 211
- Lee, Y.-N. & Hennebelle, P. 2018, *Astronomy & Astrophysics*, 611, A89
- Lequeux, J. 2005, *The Interstellar Medium*
- Longmore, S. N., Kruijssen, J. M. D., Bastian, N., et al. 2014, in *Protostars and Planets VI*, ed. H. Beuther, R. S. Klessen, C. P. Dullemond, & T. Henning, 291
- Louvet, Motte, F., Hennebelle, P., et al. 2014, *Astronomy & Astrophysics*, 570, A15
- Louvet, F., Hennebelle, P., Men'shchikov, A., et al. 2021, *Astronomy & Astrophysics*, 653, A157
- Maschberger, T. 2013, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 429, 1725
- Masunaga, H., Miyama, S. M., & Inutsuka, S.-i. 1998, *The Astrophysical Journal*, 495, 346
- Maury, A. J., André, P., & Li, Z. Y. 2009, *Astronomy & Astrophysics*, 499, 175
- Men'shchikov, A. 2021, *Astronomy & Astrophysics*, 649, A89
- Motte, F., Andre, P., & Neri, R. 1998, *Astronomy & Astrophysics*, 336, 150
- Motte, F., Bontemps, S., Csengeri, T., et al. 2022, *Astronomy & Astrophysics*, 662, A8
- Motte, F., Nony, T., Louvet, F., et al. 2018, *Nature Astronomy*, 2, 478
- Motte, F., Zavagno, A., Bontemps, S., et al. 2010, *Astronomy and Astrophysics*, 518, L77
- Nguyen-Lu'o'ng, Q., Motte, F., Carlhoff, P., et al. 2013, *The Astrophysical Journal*, 775, 88
- Nony, T., Robitaille, J.-F., Motte, F., et al. 2021, *Astronomy & Astrophysics*, 645, A94
- Offner, S. S. R., Capodilupo, J., Schnee, S., & Goodman, A. A. 2012, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 420, L53
- Offner, S. S. R., Clark, P. C., Hennebelle, P., et al. 2014, in *Protostars and Planets VI*, ed. H. Beuther, R. S. Klessen, C. P. Dullemond, & T. Henning, 53–75
- Offner, S. S. R., Moe, M., Kratter, K. M., et al. 2022, *arXiv e-prints*, arXiv :2203.10066
- Padoan, P. & Nordlund, Å. 2002, *The Astrophysical Journal*, 576, 870

- Padoan, P., Pelkonen, V. M., Juvela, M., Haugbølle, T., & Nordlund, Å. 2023, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* [[arXiv]2301.07398]
- Palau, A., Ballesteros-Paredes, J., Vázquez-Semadeni, E., et al. 2015, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 453, 3785
- Passot, T. & Vázquez-Semadeni, E. 1998, *Physical Review E*, 58, 4501
- Peretto, N., André, P., & Belloche, A. 2006, *Astronomy & Astrophysics*, 445, 979
- Pineda, J. E., Offner, S. S. R., Parker, R. J., et al. 2015, *Nature*, 518, 213
- Pokhrel, R., Myers, P. C., Dunham, M. M., et al. 2018, *The Astrophysical Journal*, 853, 5
- Pouteau, Y., Motte, F., Nony, T., et al. 2022, *Astronomy & Astrophysics*, 664, A26
- Press, W. H. & Schechter, P. 1974, *The Astrophysical Journal*, 187, 425
- Rapson, V. A., Pipher, J. L., Gutermuth, R. A., et al. 2014, *The Astrophysical Journal*, 794, 124
- Reipurth, B., Clarke, C. J., Boss, A. P., et al. 2014, in *Protostars and Planets VI*, ed. H. Beuther, R. S. Klessen, C. P. Dullemond, & T. Henning, 267–290
- Reipurth, B. & Mikkola, S. 2012, *Nature*, 492, 221
- Rosolowsky, E. W., Pineda, J. E., Kauffmann, J., & Goodman, A. A. 2008, *The Astrophysical Journal*, 679, 1338
- Sadavoy, S. I., Di Francesco, J., Bontemps, S., et al. 2010, *The Astrophysical Journal*, 710, 1247
- Salpeter, E. E. 1955, *The Astrophysical Journal*, 121, 161
- Scalo, J., Vázquez-Semadeni, E., Chappell, D., & Passot, T. 1998, *The Astrophysical Journal*, 504, 835
- Shu, F. H. 1977, *The Astrophysical Journal*, 214, 488
- Spitzer, L. 1978, *Physical processes in the interstellar medium*
- Stutzki, J., Bensch, F., Heithausen, A., Ossenkopf, V., & Zielinsky, M. 1998, *Astronomy & Astrophysics*, 336, 697
- Suárez, G., Galván-Madrid, R., Aguilar, L., et al. 2021, *The Astrophysical Journal*, 921, 48

- Sung, H., Stauffer, J. R., & Bessell, M. S. 2009, *The Astronomical Journal*, 138, 1116
- Teixeira, P. S., Lada, C. J., Young, E. T., et al. 2006, *The Astrophysical Journal Letters*, 636, L45
- Thomasson, B., Joncour, I., Moraux, E., et al. 2022, *Astronomy & Astrophysics*, 665, A119
- Tobin, J. J., Looney, L. W., Li, Z.-Y., et al. 2018, *The Astrophysical Journal*, 867, 43
- Tohline, J. E. 1980, *The Astrophysical Journal*, 239, 417
- Traficante, A., Duarte-Cabral, A., Elia, D., et al. 2018, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 477, 2220
- Venuti, L., Prisinzano, L., Sacco, G. G., et al. 2018, *Astronomy & Astrophysics*, 609, A10
- von Weizsäcker, C. F. 1951, *The Astrophysical Journal*, 114, 165
- Vázquez-Semadeni, E., Palau, A., Ballesteros-Paredes, J., Gómez, G. C., & Zamora-Avilés, M. 2019, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 490, 3061
- Williams, J. P. & Garland, C. A. 2002, *The Astrophysical Journal*, 568, 259
- Zhang, B., Moscadelli, L., Sato, M., et al. 2014, *The Astrophysical Journal*, 781, 89
- Zinnecker, H. 1984, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 210, 43

Table des figures

II.1	Schéma du processus de fragmentation hiérarchique d'un nuage et sa représentation en réseau.	36
II.2	Schéma d'un fragment parent de taille R_0 évoluant au sein d'un objet plus large en compagnie d'autres parents.	38
II.3	Schéma du processus de fragmentation pour un unique fragment parent contenu dans une structure multi-échelle.	40
II.4	Principe de moyenne des quantités utiles sur l'ensemble des fragments parents considérés à un niveau l	42
II.5	Le taux de fragmentation $\phi(R)$ vu comme une moyenne sur une région de taille donnée.	47
II.6	Conséquences d'un sous-échantillonnage des échelles spatiales sur le suivi de la production des fragments.	51
II.7	Projection d'ellipsoïdes dans les plans en deux dimensions et proximité des ellipses résultantes.	53
II.8	Erreur associée à la géométrie ellipsoïdale des fragments sur la mesure du taux de fragmentation en trois dimensions.	55
II.9	Erreur associée à la géométrie ellipsoïdale des fragments projetés en deux dimensions sur la mesure du taux de fragmentation.	56
III.1	Dégénérescence entre le taux de fragmentation ϕ , le taux d'injection de masse aux fragment ξ et la taille R des fragments produits.	63
III.2	Conditions d'existence des fragments pour distinguer les différents régimes de fragmentation à taille constante.	66
III.3	Conditions d'existence des fragments pour distinguer les différents régimes de fragmentation à rapport de masse constant.	67
III.4	Séparation des différents régimes de fragmentation en fonction des valeurs numériques du taux de fragmentation ϕ et du taux d'injection de masse ξ	70
III.5	Évolution du taux de fragmentation en fonction de la taille.	86

III.6	Évolution du nombre de fragments total produits en fonction de leur taille.	88
III.7	Évolution de la masse moyenne des fragments et de leur densité moyenne en fonction de leur taille.	89
IV.1	Le nuage moléculaire NGC 2264 vu par le télescope spatial <i>Spitzer</i> . Crédit : NASA/JPL-Caltech/P.S. Teixeira (Center for Astrophysics).	95
IV.2	Localisation des sources extraites par l’algorithme <code>getsf</code> sur chacune des cartes <i>Herschel</i> , et des YSOs de classe 0/I sur la carte de densité de colonne.	96
IV.3	Définition de l’extension spatiale des fragments extraits par <code>getsf</code>	100
IV.4	Évolution empirique et classification des jeunes étoiles d’après (André 2002)	102
IV.5	Organisation d’un réseau représentant une structure multi-échelle, avec le critère d’inclusion d’un enfant dans son parent.	103
IV.6	Collection complète des structures labellisées hiérarchiques dans la procédure d’assemblage des fragments dans NGC 2264.	108
IV.7	Localisation des différentes structures superposées à la carte de la densité de colonne de NGC 2264.	109
IV.8	Histogrammes empilés de la densité de colonne, répartis par type de structure.	111
IV.9	Probabilité de coïncidence hiérarchique en fonction du volume d’occupation des structures.	113
IV.10	Exemple du calcul du coefficient de fractalité \mathcal{F} d’une structure. La structure est découpée en trois sous-réseaux associés à chacun de ses fragments sources	117
IV.11	Distribution des coefficients de fractalité des structures hiérarchiques dans NGC 2264.	118
IV.12	Erreur causée par la carence en nœuds dans la mesure du coefficient de fractalité.	121
IV.13	Taux de fragmentation moyen $\langle \phi \rangle_R^{\text{modèle}}$ prédit par un modèle de fragmentation gravo-turbulent en fonction du taux d’injection de masse ξ	123
IV.14	Courbe de productivité des structures hiérarchiques de NGC 2264 avec et sans filtrage des structures coïncidentes.	124
IV.15	Représentation de la persistance des fragments entre les échelles et les longueurs d’onde pour les structures linéaires.	129
V.1	Procédure de sélection de la quantité de fragments enfants produits.	141
V.2	Comparaison des différentes approches pour calculer une CMF fragmentée.	146

V.3	Distributions en masse générées pour différents rapports d'échelle r permettant d'échantillonner le domaine spatial étudié avec un total L niveaux de fragmentation.	151
V.4	Impact des différents paramètres du modèle sur le devenir de la distribution en masse des fragments.	153
V.5	Répartition de la multiplicité des objets formés en fonction de leur masse.	155
V.6	Représentation de l'IMF de Maschberger (2013) (L3-IMF) comparée aux IMF de Salpeter (1955) , Kroupa (2001) et Chabrier (2003)	157
V.7	Cartes de valeurs-p associées aux scores du test AD effectué pour chaque CMF générée dans l'espace des paramètres $\xi, \phi, R_{\text{stop}}$, pour $\psi = 2$	163
V.8	Cartes de valeurs-p associées aux scores du test AD effectué pour chaque CMF générée dans l'espace des paramètres $\xi, \phi, R_{\text{stop}}$, pour $\psi = 1$	164
V.9	Relation masse M vs taille R des fragments induits par les solutions de coïncidence CMF / L3-IMF pour les différentes échelles d'arrêt admettant des solutions.	170
V.10	Fonctions de survie de l'échantillon de W43 (Pouteau et al. 2022) et des différents tirages Monte-Carlo.	172
V.11	Distributions des pentes ajustées sur les CMF générées pour les niveaux $1 \leq l \leq 7$	173
V.12	Fonctions de survie des CMF générées dans le cadre du modèle gravo-turbulent, distribution des scores obtenus à partir des test AD et distribution de leur pentes ajustées à partir de $M = 1M_{\odot}$	177
A.1	Construction des ellipsoïdes et définition de leurs paramètres.	203
A.2	Schéma de la zone d'exclusion dans un ellipsoïde pour aider la génération des fragments enfants.	205
A.3	Schéma de la réunion de deux fragments enfants dans un parent lorsque leur distance d est trop proche.	206
A.4	Distribution des tailles des fragments générés pour deux taux de fragmentation ϕ limite.	207
A.5	Effet de la projection en deux dimensions sur les taux de recouvrement parent / enfant et enfant / enfant.	208
D.1	Échantillonnage d'une distribution.	246
D.2	Reconstruction de la statistique du test AD.	248

Liste des tableaux

II.1	Description physique du taux de fragmentation ϕ et du taux d'injection de masse ξ en fonction de leur signe.	45
III.1	Conditions d'apparition des différents régimes de fragmentation dans des conditions de stabilité marginale sans accréation ni perte de masse.	82
IV.1	Nombre de structures de chaque type extraites dans NGC 2264 et leur répartition en terme de YSOs et d'extractions <i>gets.f.</i>	106
IV.2	Probabilité $\mathcal{P}(n = 1, r)$ qu'une structure de NGC 2264 ne se subdivise pas et soit linéaire	115
IV.3	Ensemble des cartes disponibles pour évaluer l'origine de la stagnation aux grandes échelles dans la courbe de productivité. Les images I_0 représentent les données <i>Herschel</i> non modifiées. L'encadré bleu est construit par convolution de la carte à $160\mu\text{m}$ à des résolutions supérieures. L'encadré rouge est construit par convolution de l'ensemble des cartes de résolution $< 36.3''$ vers cette résolution.	128
V.1	Résumé des effets des paramètres du modèle de fragmentation sur une fonction de masse.	156
V.2	Scores critiques du test AD associés à leur degré de significativité sous réserve que l'hypothèse nulle soit vérifiée.	160
V.3	Exposant de la relation $M \propto R^x$ avant et après correction de la phase de formation d'étoiles pour les différentes échelles d'arrêt R_{stop} à partir de laquelle un fragment engendre une étoile unique.	167
V.4	Propriétés de la formation d'étoiles, induites par un modèle de fragmentation gravo-turbulente.	175
D.1	Valeurs critiques du test AD et leurs valeurs-p associées pour différentes taille d'échantillon.	247
D.2	Comparaison de sensibilité entre les tests KS et AD en utilisant différentes pentes aux grandes masses α et tailles N d'échantillons.	250

Annexe A

Modèle géométrique 3D et projection en plan 2D

Sommaire

1	Génération d'objets	199
1.1	Paramètres utiles	199
	↔ Nombre de fragments produits	200
	↔ Fraction de volume inclus	200
	↔ Densité d'objets	201
1.2	Construction des ellipsoïdes	201
	↔ Sélection des demi-axes	201
	↔ Sélection du centroïde	202
	↔ Sélection des angles d'Euler	202
2	Règle de sélection en 3D	202
2.1	Inclusion des fragments enfants dans leur parent	202
2.2	Optimisation du placement : zone d'exclusion	204
3	Projection en 2D	205
3.1	Définition des ellipses	205
3.2	Critère de séparation minimale	206
3.3	Conséquences sur la distribution des tailles	207
3.4	Conséquences sur le taux de recouvrement enfant - parent	208
3.5	Conséquences sur le taux de recouvrement enfant - enfant	208

Cette annexe présente un modèle géométrique qui génère des ellipsoïdes dans un espace à trois dimensions. Il a été utilisé dans ce manuscrit pour :

1. Tester la possibilité qu'un fragment parent puisse contenir ou non un certain nombre d'enfants compte tenu de leur extension spatiale ;
2. Évaluer l'erreur effectuée lorsque l'on mesure le taux de fragmentation en projetant en deux dimensions une région observée ;
3. Déterminer la coïncidence que deux structures linéaires alignées soient considérées comme une structure hiérarchique par projection ;
4. Déterminer le degré de recouvrement des fragments induit par projection ;

En outre, on veut synthétiser des objets à géométrie elliptique, de même nature que ceux que l'on extrait à l'aide de l'algorithme `getsf` dans le Chapitre IV. Les ellipsoïdes générés en trois dimensions fragmentent en d'autres ellipsoïdes plus petits contenus dans les ellipsoïdes parents.

1 Génération d'objets

1.1 Paramètres utiles

Pour répondre aux enjeux de cette annexe, on se focalise sur un système à deux niveaux, c'est-à-dire qu'on s'intéresse à la fragmentation du niveau l jusqu'au niveau $l + 1$. Un système à deux niveaux est suffisant pour cette étude car le fragment formé au niveau $l + 2$ ne dépend que de l'état de son parent direct au niveau $l + 1$. Il est toujours possible d'appliquer cette procédure pour générer n'importe quel nombre L de niveaux de fragmentations si besoin est.

On introduit par la suite quatre quantités qui caractérisent une population de fragments et de structures :

1. Le rapport d'échelle entre deux niveaux successifs r ;
2. Le taux de fragmentation ϕ ;
3. La fraction α du volume d'un enfant exclu du parent ;
4. La densité de fragments n_e à un niveau l donné ;

Les structures que définissent les ellipsoïdes, sous-fragmentent dans un espace en trois dimensions délimité par un cube d'arête a_{cube} . On suppose ici que les fragments enfants ne se recouvrent pas entre eux en trois dimensions : le volume de leur intersection est nulle. Nous verrons également que par effet de projection en deux dimensions, deux enfants peuvent partager une intersection dont l'aire est non nulle.

Nombre de fragments produits

On suppose sans perte de généralité que le taux de fragmentation ϕ varie faiblement sur l'intervalle $[R_{l+1}, R_l]$, avec $R_{l+1} < R_l$, si bien qu'il peut être considéré constant sur cet intervalle. Or, le nombre de fragments enfants N_{l+1} que produit un parent suit :

$$N_{l+1} = N_l \exp \left[\int_{R_{l+1}}^{R_l} \phi(R') d \ln R' \right] \quad (\text{A.1})$$

Par conséquent, le nombre de fragments produits respecte la relation suivante, avec $\phi = \text{constante}$:

$$N_{l+1} = N_l r^\phi \quad (\text{A.2})$$

Avec $r > 1$ le rapport d'échelle entre les deux niveaux consécutifs :

$$r = \frac{R_l}{R_{l+1}} \quad (\text{A.3})$$

Au départ, N_{l+1} fragments existent à l'échelle initiale R_{l+1} et chaque parent se fragmente en r^ϕ morceaux de taille $R_{l+1} < R_l$. Ces fragments doivent être placés à l'intérieur de leur parent respectif en tenant compte que chaque parent contient un nombre entier de fragments, et qu'en moyenne un parent doit contenir r^ϕ enfants. Pour tester les limites de la contenance d'un fragment parent, on choisit de sélectionner le nombre d'enfants selon la règle suivante, en notant respectivement $\lfloor x \rfloor$ et $\{x\}$ les fonctions partie entière et partie fractionnaires de x . Un fragment parent peut au maximum former un nombre $\lfloor r^\phi \rfloor + 1$ d'enfants avec la probabilité $1 - \{r^\phi\}$; et un minimum former un nombre $\lfloor r^\phi \rfloor$ d'enfants avec la probabilité $\{r^\phi\}$.

Fraction de volume inclus

Chaque fragment enfant \mathcal{F} a la possibilité de posséder au minimum une fraction α_{\min} de son volume $V_{\mathcal{F}}$ à l'intérieur des bords de son parent \mathcal{P} :

$$\alpha_{\min} \leq \alpha = \frac{V(\mathcal{F} \cap \mathcal{P})}{V_{\mathcal{F}}} \quad (\text{A.4})$$

Où $V(\mathcal{F} \cap \mathcal{P})$ représente le volume de l'intersection entre un fragment enfant \mathcal{F} et son parent \mathcal{P} ; et α représente la fraction du volume de l'enfant inclus dans son parent.

Densité d'objets

On peut aussi définir la densité d'objets $n_{e;l}$ produits à un niveau l donné comme étant le rapport entre le volume total que remplit l'ensemble des N_l fragments de taille R_l avec le volume du cube dans lequel évoluent les structures qui fragmentent :

$$n_{e;l} = N_l \frac{4\pi}{3} \frac{R_l^3}{a_{\text{cube}}^3} \quad (\text{A.5})$$

Il est alors possible de définir la taille a_{cube} du cube en fonction de la densité de structures multi-échelles. Initialement, si on a N_0 ellipsoïdes à l'échelle $l = 0$ qui fragmentent à plus petite échelle :

$$n_{e;0} = N_0 \frac{4\pi}{3} \frac{R_0^3}{a_{\text{cube}}^3} \quad (\text{A.6})$$

Soit :

$$a_{\text{cube}} = \left(N_0 \frac{4\pi R^3}{3n_{e;0}} \right)^{1/3} \quad (\text{A.7})$$

En définissant la taille du cube en fonction de la densité d'objets initiaux, on peut évaluer les différences entre les régions fortement peuplées et les régions faiblement peuplées.

1.2 Construction des ellipsoïdes

Tout ellipsoïde, qu'il soit parent ou enfant, est construit à partir des coordonnées de son centroïde (x, y, z) , par ses demi-axes (a, b, c) (voir Figure A.1); et par son orientation dans l'espace caractérisé par les angles d'Euler φ, Ψ, Ω (voir Figure) A.1. Ces angles n'ont que peu d'importance dans la suite car on suppose ici que l'orientation des fragments produits est isotrope.

Sélection des demi-axes

Le demi-axe a d'un ellipsoïde de taille R_l est sélectionné aléatoirement, selon une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ de moyenne $\mu = R_l$ et d'écart-type $\sigma = 0.1R_l$, équivalent à 10% de sa taille typique pour permettre de petites fluctuations. Le demi-axe b est défini comme le demi petit axe, sélectionné à partir d'un rapport d'aspect échantillonnés uniformément entre 0.7 et 1, de moyenne 0.85. Le demi-axe c est défini comme le demi grand axe, sélectionné à partir d'un rapport d'aspect échantillonnés uniformément entre 1 et 1.4, de

moyenne 1.2. La taille typique R_l d'un fragment ellipsoïdale étant donné par le produit $(abc)^{1/3}$, on s'attend à générer en moyenne des objets de taille :

$$(a \times 0.85a \times 1.2a)^{1/3} \approx a \quad (\text{A.8})$$

Soit bel et bien des objets de taille R_l . Le rapport d'aspect minimal que peut avoir une ellipse projetée en deux dimensions dans un plan quelconque est :

$$\frac{\min(b)}{\max(c)} = \frac{0.7}{1.4} \approx 0.5 \quad (\text{A.9})$$

La probabilité d'obtenir une valeur du demi-axe a négative est donnée par la fonction cumulative $P(x < 0) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{0-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right)$, où erf représente la fonction erreur. Cette probabilité est indépendante de R_l car $\mu = R$ et $\sigma = 0.1R_l$. Puisque $P(X < 0) < 1.10^{-16}$, la probabilité d'échantillonner une valeur $a < 0$ est peu probable.

Sélection du centroïde

Les coordonnées (x, y, z) du centroïde des fragments primordiaux à l'échelle $l = 0$ sont sélectionnées uniformément dans le cube d'arête a_{cube} . Les coordonnées du centroïde des fragments enfants sont sélectionnées uniformément dans le pavé qui englobe leur ellipsoïde parent.

Sélection des angles d'Euler

Les angles d'Euler φ, Ψ, Ω de tout les fragments sont sélectionnés uniformément dans les domaines :

- $\varphi \in [0, 2\pi]$
- $\Psi \in [0, \pi]$
- $\Omega \in [0, 2\pi]$

de telle sorte que l'orientation spatiale des fragments produits soit isotrope.

2 Règle de sélection en 3D

2.1 Inclusion des fragments enfants dans leur parent

Comme notre modèle génère des objets étendus, il est nécessaire d'établir des règles afin de synthétiser une population qui respecte des contraintes géométriques bien spécifiques.

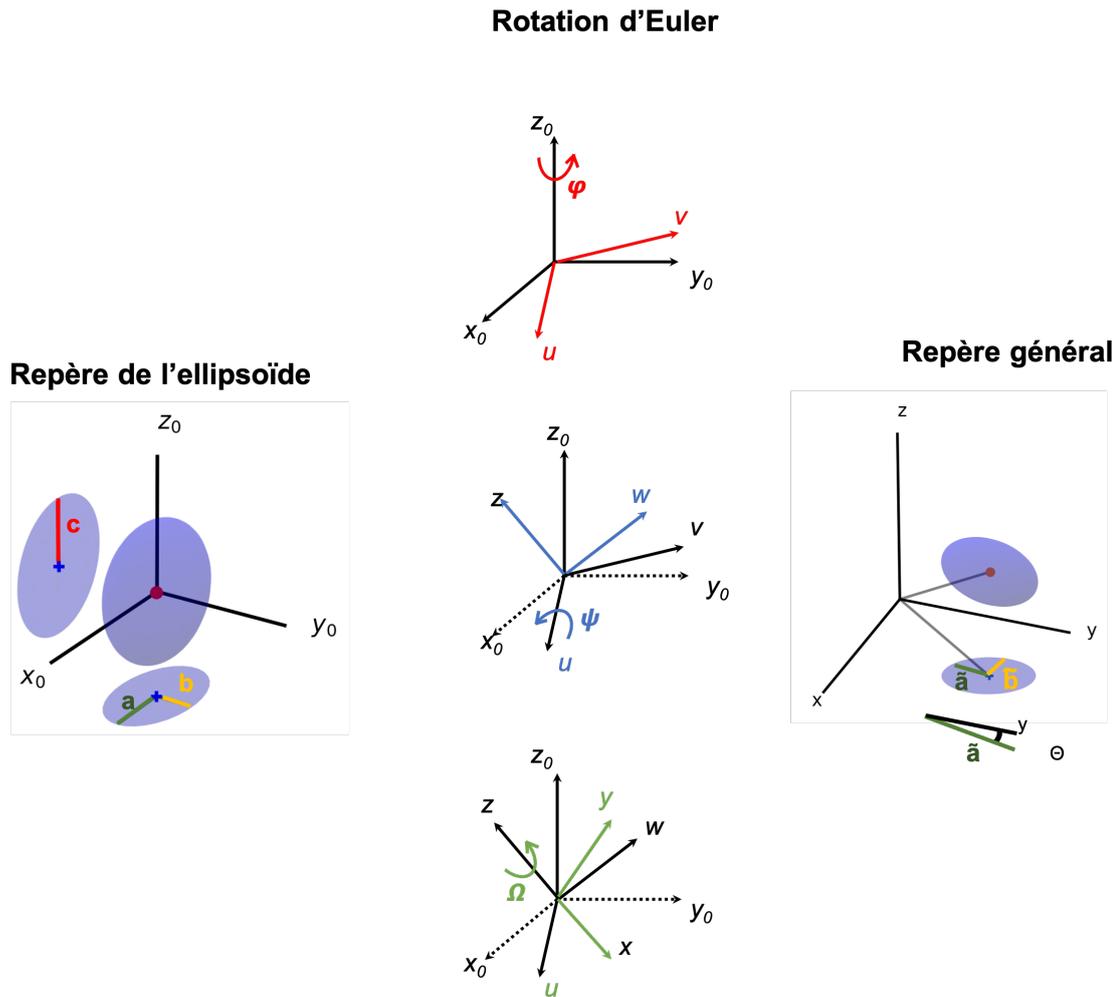


FIGURE A.1 – Construction des ellipsoïdes et définition de leurs paramètres. Les demi-axes de l'ellipsoïde sont définies dans son propre repère (x_0, y_0, z_0) . L'ellipsoïde subit ensuite des rotations (φ, Ψ, Ω) pour caractériser son orientation dans le cube de repère (x, y, z) . Enfin, l'ellipsoïde peut être projeté sur un plan en deux dimensions pour définir une ellipse de paramètres \tilde{a} , \tilde{b} et d'orientation Θ .

1. Deux fragments enfants $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ ne peuvent se chevaucher, c'est-à-dire que le volume $V(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$ de leur intersection est nul ;
2. Un enfant \mathcal{F} ne peut avoir qu'une fraction maximal α de son volume à l'extérieur de son parent \mathcal{P} .

Pour calculer le volume de l'intersection entre deux fragments quelconques, on tire aléatoirement un nombre $n = 1000$ points, contenus à l'intérieur d'un premier fragment, tout en comptant ceux qui tombent à l'intérieur du contour décrit par le second fragment. Le rapport entre le nombre de points communs aux deux fragments et le nombre de points total donne une approximation de la fraction du volume du premier fragment chevauchant

le second. En tirant les points dans le volume du fragment enfant, cette méthode calcule directement la fraction de volume inclus α d'un enfant sur son parent.

Pour rejeter ou non le placement d'un fragment enfant \mathcal{F}_2 , sachant qu'un premier enfant \mathcal{F}_1 existe, il faut que leur volume d'intersection $V(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$ soit nul. De plus, pour rejeter ou non le placement d'un fragment enfant \mathcal{F} à l'intérieur de son parent \mathcal{P} , il faut que le volume d'intersection respecte l'équation A.4. En résumé :

$$V(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{V(\mathcal{F} \cap \mathcal{P})}{V_{\mathcal{F}}} \geq \alpha_{\min} \quad (\text{A.11})$$

Où α_{\min} est un critère de tolérance ajustable.

2.2 Optimisation du placement : zone d'exclusion

Si un fragment parent engendre deux enfants, ceux-ci ne peuvent être placés trop proches du centre de leur parent. En effet, un premier enfant placé dans la zone centrale peut empêcher l'existence du second, car l'espace disponible autour du premier fragment peut être insuffisant pour placer le second sans que ceux-ci ne se chevauchent. Pour réduire cette contrainte, la région interne du fragment parent exclu la présence d'un enfant. En ajoutant cette zone d'exclusion, la probabilité de placer un enfant qui entrave l'existence du second est amoindrie. L'étendue de la zone d'exclusion est définie à partir de la taille typique R d'un fragment enfant (voir Fig A.2), et est supposée sphérique (isotrope car l'orientation d'un ellipsoïde est uniformément répartie). La distance d entre le centre d'un ellipsoïde enfant et le centre de son parent respecte donc la condition suivante :

$$d \geq R \quad (\text{A.12})$$

Notons que si le parent engendre un seul et unique enfant, cette zone d'exclusion devient inutile et le fragment enfant peut être placé n'importe où à l'intérieur son parent, à condition que la règle d'inclusion de cet enfant au sein de son parent soit respectée.

De plus, si un enfant n'est pas encastrable dans un fragment parent, on tire aléatoirement un nouveau fragment enfant pour éviter que cette impossibilité de placement ne soit simplement dû qu'au hasard. Si après 1000 enfants tirés aucun n'a réussi à être placé, on abandonne et on considère que plus aucun enfant ne peut être contenu dans le parent. Aussi, si le fragment parent ne possède aucun enfant à cette étape, la zone d'exclusion

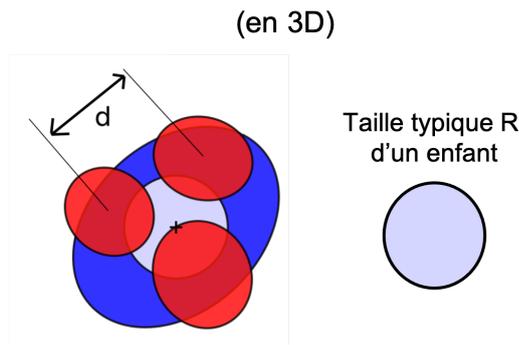


FIGURE A.2 – Schéma de la zone d'exclusion (gris) dans un ellipsoïde parent (bleu) pour aider la génération des fragments enfants (rouges). La distance d centre à centre des fragments est aussi indiquée. La croix marque le centroïde du parent, et de la zone d'exclusion.

est abolie et un fragment enfant est placé au centre de telle sorte qu'un parent engendre toujours au moins un enfant.

3 Projection en 2D

Lorsque l'on observe un nuage moléculaire avec un télescope, on a seulement accès à la projection en deux dimensions de ce nuage sur le plan céleste. Ainsi, il apparaît nécessaire de projeter sur un plan en deux dimensions les ellipsoïdes générés en trois dimensions. De part le caractère isotrope de la génération des fragments, cette projection en deux dimensions est équivalente pour n'importe quel plan.

3.1 Définition des ellipses

Les ellipsoïdes générés en trois dimensions peuvent facilement être projetées en deux dimensions. En effet, la projection d'un ellipsoïde sur n'importe quel plan en deux dimensions décrit une forme elliptique. Ainsi, il est toujours possible de définir une ellipse à partir des contours projetés de l'ellipsoïde originale. L'extension spatiale de cette ellipse est définie par son demi-grand axe \tilde{a} et son demi-petit axe \tilde{b} . L'orientation spatiale θ de l'ellipse quant à elle dépend des angles d'Euler de son ellipsoïde d'origine. Comme l'orientation en trois dimensions est isotrope, l'orientation Θ en deux dimension l'est aussi. Par simplification, on choisi de projeter les ellipsoïdes sur le plan (x, y) de telle sorte que le centre de l'ellipse est repéré par les coordonnées en (x, y) de l'ellipsoïde originale (voir par exemple dans la Figure A.1).

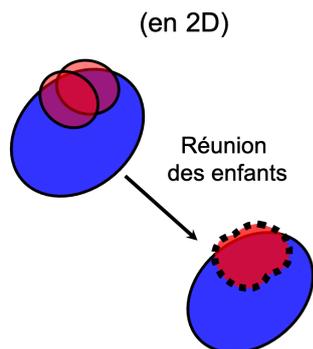


FIGURE A.3 – Schéma de la réunion de deux fragments enfants (rouges) dans un parent (bleu) lorsque leur distance d est trop proche. Le résultat de cette réunion n'est pas nécessairement une ellipse.

3.2 Critère de séparation minimale

Par effet de projection, les extensions spatiales de deux ellipses résultantes peuvent se recouvrir partiellement et la question se pose de savoir si ces deux ellipses seraient discernables si elles devaient être observées dans la réalité. En effet, si les deux ellipses se recouvrent parfaitement, l'une n'est plus distinguable de l'autre et elles apparaissent comme un objet unique. La distinction des ellipses est testée en fonction de leur séparation centre-à-centre d . Supposons que les fragments extraits d'une carte observée ont des profils gaussiens en deux dimensions. Un profil gaussien s'étendant à l'infini, il est nécessaire de définir une limite finie qui sera associée à la taille d'un fragment. Cette limite qui définit le bord du fragment doit englober la quasi-totalité de sa masse. On définit alors la taille caractéristique R comme l'extension à 2σ de ce profil gaussien dont la largeur à mi-hauteur (LMH) est associée à la résolution θ de la carte dont ils sont extraits. Or, l'extension d'un profil gaussien à 2σ est reliée à sa LMH θ par :

$$\theta = \sqrt{2 \ln(2)} 2\sigma \quad (\text{A.13})$$

Or, si la distance minimale d_{\min} entre deux fragments extraits est plus petite que la résolution θ de la carte dont ils sont originaires, ces fragments ne seraient pas distinguables l'un de l'autre. Ainsi, il est possible de différencier les deux ellipses si leur distance centre-à-centre satisfait :

$$d > d_{\min} = \sqrt{2 \ln(2)} R \quad (\text{A.14})$$

Par exemple, dans l'application aux données de NGC 2264 du chapitre IV, l'algorithme d'extraction `getsf` définit des ellipses dont la taille typique de la LMH correspond à la résolution de la carte associée.

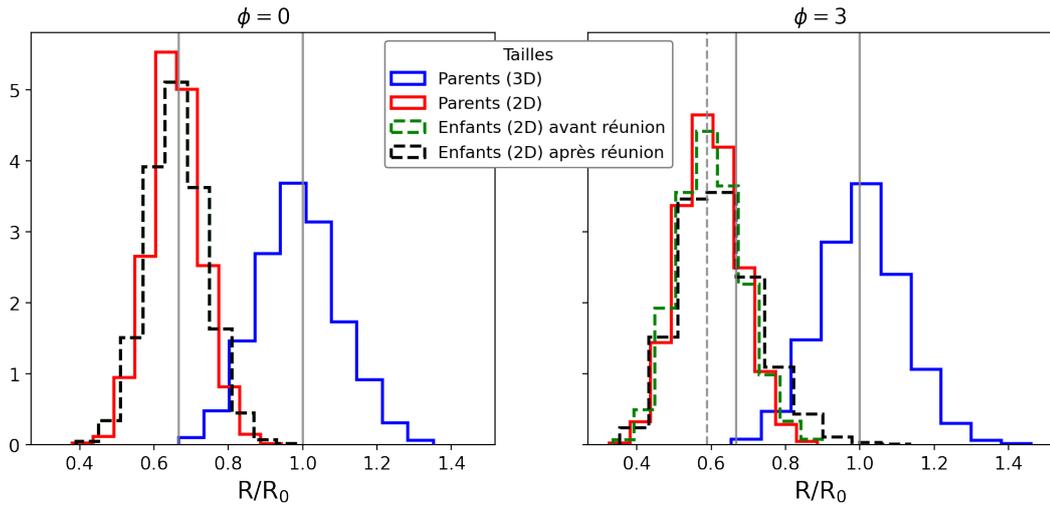


FIGURE A.4 – Distribution des tailles des fragments générés pour deux taux de fragmentation ϕ limite. Les lignes pleines et grises correspondent à des rapports d'échelle $r = \frac{R_0}{R}$ valant 1 et 1.5, pour repérer respectivement la taille des parents et la taille attendue des enfants. La ligne grise en pointillé indique un rapport d'échelle $r \sim 1.12 \times 1.5$, conséquence d'une variation induite par le taux de fragmentation. Les enfants sont réunis si leur distance centre à centre d est trop faible par rapport à leur extension spatiale.

Si deux ellipses ne sont pas discernables, on peut tout simplement les fusionner en considérant un profil moyen, somme des deux profils initiaux (voir Figure A.3). Ainsi, le centre du fragment fusionné correspondrait au photo-centre des deux ellipses initiales et sa LMH serait aussi plus grande. Cependant, il n'est pas nécessaire d'effectuer une telle opération si ce qui nous intéresse est le nombre de fragments produits. Si on ne considère que ce problème de comptage il suffit simplement de supprimer l'une des deux ellipses.

3.3 Conséquences sur la distribution des tailles

La réunion de fragments enfants engendre la production de fragments plus larges que leur taille d'origine. Cette variation affecte leur distribution en taille engendre une légère dissymétrie de cette distribution vers les objets de grandes tailles (voir Figure A.4). Par ailleurs, un taux de fragmentation maximal ($\phi = 3$) induit la formation de fragments de plus petites tailles par rapport à leur taille $R = \frac{R_0}{r}$ supposée. Cela est dû au fait qu'est plus facile de placer r^ϕ fragments de tailles $R' \lesssim R$ que r^ϕ fragments de taille R : la pré-existence d'un fragment de taille R induit une probabilité de présence plus forte de fragments de plus petite taille, qui occupent moins de volume. La variation en taille induite par cet effet est de l'ordre de 12% la valeur du rapport d'échelle r , les fragments

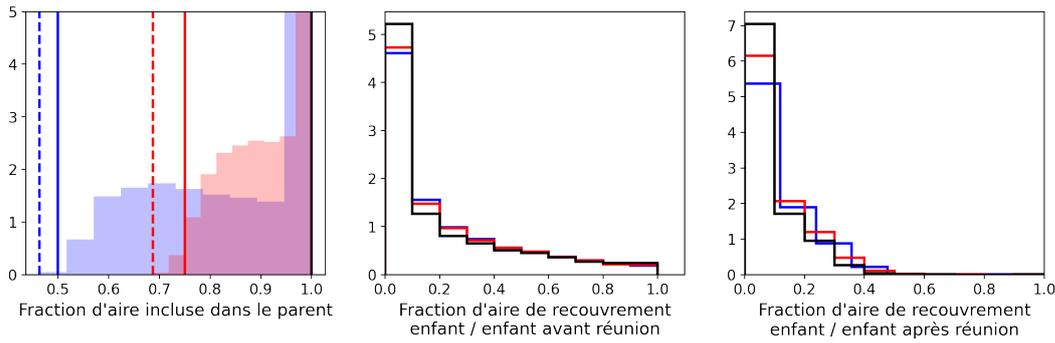


FIGURE A.5 – Effet de la projection en deux dimensions sur les taux de recouvrement parent / enfant et enfant / enfant. Les couleurs bleu, rouge et noire décrivent respectivement des populations générés avec des taux de recouvrement 3D minimum $\alpha = 0.5, 0.75$ et 1.0 . À gauche : Distribution des taux de recouvrement parent / enfant en deux dimensions (fraction d’aire de l’enfant incluse dans son parent). Les lignes verticales pleines marquent les taux de recouvrement en trois dimensions utilisés pour générer les populations. Les lignes verticales en pointillés marquent le taux de recouvrement en deux dimension minimum. Au milieu : Distribution des taux de recouvrement enfant / enfant en deux dimensions avant leur réunion éventuelle. À droite : Distribution des taux de recouvrement enfant / enfant en deux dimensions après leur réunion éventuelle.

produits sont donc, dans le cas extrême $\phi = 3$, de taille $R' \approx \frac{R_0}{1.12r}$ ce qui n’influe pas significativement les tailles relatives des objets entre eux. Dans le cas $\phi = 0$, on retrouve bien la taille R recherchée, $R' = R = \frac{R_0}{r}$. Dans un cas intermédiaire, $\frac{R_0}{r} < R' < \frac{R_0}{1.12r}$.

3.4 Conséquences sur le taux de recouvrement enfant - parent

La projection des ellipsoïdes sur un plan en deux dimensions engendre également des modifications sur les recouvrements relatifs enfants / parents et enfants / enfants. La fraction minimale d’aire incluse ne correspond pas nécessairement à la fraction minimale de volume inclus (voir traits verticaux du cadran gauche de la Figure A.5). Par ailleurs, moins de 1% des fragments enfants ont leur fraction d’aire incluse en deçà de la limite numérique correspondant à la fraction minimale de volume inclus. On peut donc convenablement supposer que la fraction limite d’inclusion d’un enfant dans son parent est la même en trois dimensions qu’en deux dimensions.

3.5 Conséquences sur le taux de recouvrement enfant - enfant

Bien que deux enfants en trois dimensions ne peuvent pas partager une volume commun (leur intersection est nulle), en deux dimensions ces derniers peuvent se recouvrir totalement, partiellement ou pas du tout (voir cadran intermédiaire de la Figure A.5).

Toutefois, après réunion, l'aire de recouvrement enfant / enfant est limitée ($\lesssim 0.5$, d'après le cadran droit de la Figure A.5), mais leur extension spatiale peut toujours déborder sur un voisin.

Annexe B

Calcul analytique du taux de fragmentation dans le cadre du modèle gravo-turbulent

Sommaire

1	Bases	211
2	Seuil critique d'effondrement	211
2.1	Calcul de la dérivée de C_s^2	212
2.2	Calcul de la dérivée de V_{rms}^2	212
2.3	Calcul de la dérivée de δ_c	213
3	Variance des fluctuations en densité	214
3.1	Calcul de la dérivée de \mathcal{M}^2	214
3.2	Calcul de la dérivée de σ^2	215
4	Le taux de fragmentation	215
4.1	Calcul de la dérivée de $\mathcal{P}(\delta \geq \delta_c)$	215
4.2	Expression de $\phi(R)$	217
5	Etude des limites subsoniques et supersoniques	219
5.1	Simplification des expressions	219
5.2	Effondrement isotherme	223
5.3	Condition de fragmentation hiérarchique	223
5.4	Condition de fragmentation monolithique	225
5.5	Cas alternatif $\delta_c < 0$ dans la limite subsonique	228

Cette annexe a pour objectif de démontrer l'expression du taux de fragmentation $\phi(R)$ introduit dans le Chapitre III.

1 Bases

On rappelle ici l'expression qui détermine le nombre moyen de fragments produits de taille R comme étant le nombre de fois qu'un volume $V(R)$ puisse être contenu dans un volume parent $V(R_0)$; chaque volume étant pondéré par une probabilité $\mathcal{P}(\delta \geq \delta_c)$ qu'une fluctuation en densité δ engendre un effondrement local relativement à une fluctuation seuil δ_c :

$$\langle N(R) \rangle = \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3} \mathcal{P}(\delta \geq \delta_c) \quad (\text{B.1})$$

On rappelle aussi la définition du taux de fragmentation ϕ :

$$\phi(R) = - \frac{d \ln \langle N \rangle}{d \ln R} \quad (\text{B.2})$$

Ce qui induit :

$$\phi(R) = 3 - \frac{d \ln \mathcal{P}}{d \ln R} \quad (\text{B.3})$$

On réintroduit ici la distribution de probabilité des fluctuations en densité :

$$\mathcal{P}(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[- \frac{\left(\delta + \frac{\sigma^2}{2} \right)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (\text{B.4})$$

Ce qui permet de calculer sa fonction de répartition :

$$\mathcal{P}(\delta \geq \delta_c) = 1 - \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left[\frac{\delta_c + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma \sqrt{2}} \right] + 1 \right) \quad (\text{B.5})$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left[\frac{\delta_c + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma \sqrt{2}} \right] \right) \quad (\text{B.6})$$

Par la suite, l'objectif va être de calculer la quantité $\frac{d \ln \mathcal{P}}{d \ln R}$. Ce calcul est séparé en plusieurs blocs pour des raisons pratiques, dont les résultats seront assemblés en partie 4 pour obtenir l'expression finale du taux de fragmentation.

2 Seuil critique d'effondrement

Dans cette partie nous allons calculer la dérivée du seuil d'effondrement δ_c qui intervient dans l'expression de $\phi(R)$. Pour cela nous reprenons l'expression calculée par

Hennebelle & Chabrier (2008) qui prend en compte le support thermique et la composante turbulente. Cette expression s'écrit :

$$\delta_c = \ln \left[a_J^{2/3} \frac{3C_s^2 + V_{\text{rms}}^2}{3GR^2\bar{\rho}} \right] \quad (\text{B.7})$$

Où $a_J = \frac{\pi^{5/2}}{6}$ le pré-facteur apparaissant dans l'expression de la masse de Jeans, C_s est la vitesse de propagation du son dans le fragment parent de densité $\bar{\rho}$, et V_{rms} est la vitesse quadratique moyenne causée par la turbulence du milieu.

2.1 Calcul de la dérivée de C_s^2

La vitesse de propagation d'une onde sonore dans un milieu à température T s'exprime comme suit :

$$C_s^2 = \frac{k_B T}{\mu m_H} \quad (\text{B.8})$$

Avec $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K, $\mu = 2.33$ et $m_H = 1.67 \times 10^{-27}$ kg respectivement la constante de Boltzmann, la masse moléculaire moyenne dans les nuages moléculaires et la masse d'un atome d'hydrogène. On calcule alors :

$$\frac{1}{C_s^2} \frac{dC_s^2}{d \ln R} = \frac{d \ln C_s^2}{d \ln R} \quad (\text{B.9})$$

$$= \frac{d \ln T}{d \ln \rho} \frac{d \ln \rho}{d \ln R} \quad (\text{B.10})$$

$$= \frac{d \ln T}{d \ln \rho} (\phi - \xi - 3) \quad (\text{B.11})$$

$$(\text{B.12})$$

Soit :

$$\boxed{\frac{dC_s^2}{d \ln R} = C_s^2 \frac{d \ln T}{d \ln \rho} (\phi - \xi - 3)} \quad (\text{B.13})$$

2.2 Calcul de la dérivée de V_{rms}^2

La vitesse quadratique issue des lois de Larson (Larson 1981) s'exprime comme :

$$V_{\text{rms}}^2 = V_0^2 \left(\frac{R}{1 \text{ pc}} \right)^{2\eta} \quad (\text{B.14})$$

Avec $V_0 = 1000$ m/s et $\eta = 0.38$ sont respectivement la dispersion des vitesses au sein d'une région de taille $R = 1$ pc et la puissance qui caractérise la relation d'échelle entre la dispersion des vitesses et la taille de la région considérée. On calcule alors :

$$\frac{1}{V_{\text{rms}}^2} \frac{dV_{\text{rms}}^2}{d \ln R} = \frac{d \ln V_{\text{rms}}^2}{d \ln R} \quad (\text{B.15})$$

$$= \frac{d}{d \ln R} \left(\ln \left[V_0 \left(\frac{R}{1 \text{ pc}} \right)^{2\eta} \right] \right) \quad (\text{B.16})$$

$$= 2\eta \quad (\text{B.17})$$

$$(\text{B.18})$$

Soit :

$$\boxed{\frac{dV_{\text{rms}}^2}{d \ln R} = 2\eta V_{\text{rms}}^2} \quad (\text{B.19})$$

2.3 Calcul de la dérivée de δ_c

En dérivant l'équation B.7 qui détermine le seuil critique d'effondrement on obtient :

$$\frac{d\delta_c}{d \ln R} = \frac{a_j^{2/\xi} \left[\frac{3 \frac{dC_s^2}{d \ln R} + \frac{dV_{\text{rms}}^2}{d \ln R}}{3GR^2\bar{\rho}} - \frac{3C_s^2 + V_{\text{rms}}^2}{(3GR^2\bar{\rho})^2} \frac{d(3GR^2\bar{\rho})}{d \ln R} \right]}{a_j^{2/\xi} \frac{3C_s^2 + V_{\text{rms}}^2}{3GR^2\bar{\rho}}} \quad (\text{B.20})$$

$$= \frac{3 \frac{dC_s^2}{d \ln R} + \frac{dV_{\text{rms}}^2}{d \ln R} - \frac{3C_s^2 + V_{\text{rms}}^2}{3GR^2\bar{\rho}} \frac{d(3GR^2\bar{\rho})}{d \ln R}}{3C_s^2 + V_{\text{rms}}^2} \quad (\text{B.21})$$

Or :

$$\frac{1}{3GR^2\bar{\rho}} \frac{d(3GR^2\bar{\rho})}{d \ln R} = \frac{d \ln(3GR^2\bar{\rho})}{d \ln R} \quad (\text{B.22})$$

$$= 2 \frac{d \ln R}{d \ln R} + \frac{d \ln \bar{\rho}}{d \ln R} \quad (\text{B.23})$$

$$= 2 + \phi - \xi - 3 \quad (\text{B.24})$$

Donc :

$$\frac{d\delta_c}{d \ln R} = \frac{3 \frac{dC_s^2}{d \ln R} + \frac{dV_{\text{rms}}^2}{d \ln R}}{3C_s^2 + V_{\text{rms}}^2} + \xi - \phi + 1 \quad (\text{B.25})$$

En posant :

$$\begin{cases} \hat{C}_s^2 = \frac{3C_s^2}{3C_s^2 + V_{\text{rms}}^2} \\ \hat{V}_{\text{rms}}^2 = \frac{V_{\text{rms}}^2}{3C_s^2 + V_{\text{rms}}^2} = 1 - \hat{C}_s^2 \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

Et en injectant les équations sur les dérivées de C_s^2 B.13 et de V_{rms}^2 B.19 calculées précédemment, on a finalement :

$$\frac{d\delta_c}{d \ln R} = (\xi - \phi + 3) \left[1 - \hat{C}_s^2 \frac{d \ln T}{d \ln \rho} \right] - 2 \left[1 - \eta \hat{V}_{\text{rms}}^2 \right] \quad (\text{B.27})$$

3 Variance des fluctuations en densité

3.1 Calcul de la dérivée de \mathcal{M}^2

Le nombre de Mach \mathcal{M} d'un milieu est défini comme le rapport de la vitesse quadratique sur la vitesse de propagation du son :

$$\mathcal{M} = \frac{V_{\text{rms}}}{C_s} \quad (\text{B.28})$$

On calcule alors :

$$\frac{1}{\mathcal{M}^2} \frac{d\mathcal{M}^2}{d \ln R} = \frac{d \ln \mathcal{M}^2}{d \ln R} \quad (\text{B.29})$$

$$= \frac{d \ln V_{\text{rms}}^2}{d \ln R} - \frac{d \ln C_s^2}{d \ln R} \quad (\text{B.30})$$

$$= 2\eta - \frac{d \ln T}{d \ln \rho} (\phi - \xi - 3) \quad (\text{B.31})$$

$$(\text{B.32})$$

Soit :

$$\boxed{\frac{d\mathcal{M}^2}{d \ln R} = \mathcal{M}^2 \left[2\eta - \frac{d \ln T}{d \ln \rho} (\phi - \xi - 3) \right]} \quad (\text{B.33})$$

3.2 Calcul de la dérivée de σ^2

La variance σ^2 des fluctuations dépend du nombre de Mach \mathcal{M} par :

$$\sigma^2 = \ln \left[1 + b^2 \mathcal{M}^2 \right] \quad (\text{B.34})$$

Où $b^2 \approx 0.5$ est une constante. On calcule alors :

$$\frac{d\sigma^2}{d \ln R} = \frac{d}{d \ln R} \left(\ln \left[1 + b^2 \mathcal{M}^2 \right] \right) \quad (\text{B.35})$$

$$= \frac{b^2 \frac{d\mathcal{M}^2}{d \ln R}}{1 + b^2 \mathcal{M}^2} \quad (\text{B.36})$$

En posant :

$$\hat{\mathcal{M}}^2 = \frac{b^2 \mathcal{M}^2}{1 + b^2 \mathcal{M}^2} \quad (\text{B.37})$$

Et en injectant le résultat précédent B.33, on obtient finalement :

$$\frac{d\sigma^2}{d \ln R} = \hat{\mathcal{M}}^2 \left[2\eta - \frac{d \ln T}{d \ln \rho} (\phi - \xi - 3) \right] \quad (\text{B.38})$$

Soit :

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d \ln R} = \frac{\hat{\mathcal{M}}^2}{2\sigma} \left[2\eta + \frac{d \ln T}{d \ln \rho} (\xi - \phi + 3) \right]} \quad (\text{B.39})$$

4 Le taux de fragmentation

4.1 Calcul de la dérivée de $\mathcal{P}(\delta \geq \delta_c)$

Rappelons ici l'expression générale de la fonction de répartition de la distribution des fluctuations en densité :

$$\mathcal{P}(\delta \geq \delta_c) = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left[\frac{\delta_c + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma \sqrt{2}} \right] \right) \quad (\text{B.40})$$

En posant $u = \frac{\delta_c + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma \sqrt{2}}$ on calcule :

$$\frac{d \ln \mathcal{P}}{d \ln R} = \frac{1}{\mathcal{P}} \frac{d \mathcal{P}}{d \ln R} \quad (\text{B.41})$$

$$= -\frac{1}{2\mathcal{P}} \frac{\text{derf}(u)}{d \ln R} \quad (\text{B.42})$$

$$= -\frac{1}{2\mathcal{P}} \frac{\text{derf}(u)}{du} \frac{du}{d \ln R} \quad (\text{B.43})$$

Or, $\frac{\text{derf}(u)}{du} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp[-u^2]$ ce qui donne :

$$\boxed{\frac{d \ln \mathcal{P}}{d \ln R} = -\frac{1}{\mathcal{P}} \frac{\exp[-u^2]}{\sqrt{\pi}} \frac{du}{d \ln R}} \quad (\text{B.44})$$

Calculons désormais $\frac{du}{d \ln R}$:

$$\frac{du}{d \ln R} = \frac{\frac{d\delta_c}{d \ln R} + \sigma \frac{d\sigma}{d \ln R}}{\sigma \sqrt{2}} - \frac{\delta_c + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2 \sqrt{2}} \frac{d\sigma}{d \ln R} \quad (\text{B.45})$$

$$= \frac{1}{\sigma \sqrt{2}} \left[\frac{d\delta_c}{d \ln R} + \sigma \frac{d\sigma}{d \ln R} - \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d \ln R} \left(\delta_c + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] \quad (\text{B.46})$$

$$= \frac{1}{\sigma \sqrt{2}} \left[\frac{d\delta_c}{d \ln R} + \frac{d\sigma}{d \ln R} \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\delta_c}{\sigma} \right) \right] \quad (\text{B.47})$$

Il est possible de simplifier légèrement cette expression en posant $v = \frac{\delta_c - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma \sqrt{2}}$:

$$\boxed{\frac{du}{d \ln R} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2}} \left[\frac{d\delta_c}{d \ln R} - \sqrt{2} v \frac{d\sigma}{d \ln R} \right]} \quad (\text{B.48})$$

Soit finalement, en posant $A_p(\delta_c(R); \sigma(R)) = -\frac{\exp[-u^2]}{\mathcal{P} \sigma \sqrt{2\pi}}$:

$$\boxed{\frac{d \ln \mathcal{P}}{d \ln R} = A_p \left[\frac{d\delta_c}{d \ln R} - \sqrt{2} v \frac{d\sigma}{d \ln R} \right]} \quad (\text{B.49})$$

4.2 Expression de $\phi(R)$

À ce stade, nous avons les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\delta_c}{d \ln R} = (\xi - \phi + 3) \left[1 - \hat{C}_s^2 \frac{d \ln T}{d \ln \rho} \right] - 2 \left[1 - \eta \hat{V}_{\text{rms}}^2 \right] \\ \frac{d\sigma}{d \ln R} = \frac{\hat{M}^2}{2\sigma} \left[2\eta + \frac{d \ln T}{d \ln \rho} (\xi - \phi + 3) \right] \\ \frac{d \ln \mathcal{P}}{d \ln R} = A_p \left[\frac{d\delta_c}{d \ln R} - \sqrt{2} v \frac{d\sigma}{d \ln R} \right] \\ \phi(R) = 3 - \frac{d \ln \mathcal{P}}{d \ln R} \end{array} \right.$$

Nous avons vu dans les calculs précédents que le seuil critique d'effondrement δ_c et la déviation standard des fluctuations σ dépendent du taux de fragmentation ϕ mais aussi du taux de masse injectée ξ . Pour obtenir la fonction qui décrit le taux de fragmentation à un R donné, il faut donc retravailler les équations précédentes en isolant la quantité $\phi(R)$:

$$\begin{aligned} \phi(R) &= 3 - A_p \left[\frac{d\delta_c}{d \ln R} - \sqrt{2} v \frac{d\sigma}{d \ln R} \right] \\ &= 3 \\ &\quad - \underline{A_p} (\xi - \phi + 3) \left[\underline{1 - \hat{C}_s^2 \frac{d \ln T}{d \ln \rho}} \right] + 2A_p \left[1 - \eta \hat{V}_{\text{rms}}^2 \right] \\ &\quad + \underline{\sqrt{2} A_p \frac{v \hat{M}^2}{2\sigma}} \left[\underline{2\eta + \frac{d \ln T}{d \ln \rho} (\xi - \phi + 3)} \right] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \phi \left[1 - A_p \left(1 - \hat{C}_s^2 \frac{d \ln T}{d \ln \rho} \right) + A_p \frac{v \hat{M}^2}{\sqrt{2} \sigma} \frac{d \ln T}{d \ln \rho} \right] = 3$$

$$- A_p (\xi + 3) \left[1 - \hat{C}_s^2 \frac{d \ln T}{d \ln \rho} \right] + 2 A_p \left[1 - \eta \hat{V}_{\text{rms}}^2 \right]$$

$$+ A_p \frac{v \hat{M}^2}{\sqrt{2} \sigma} \left[2 \eta + \frac{d \ln T}{d \ln \rho} (\xi + 3) \right]$$

$$\Leftrightarrow \phi \left[1 - A_p \left[1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho} \left(\hat{C}_s^2 + \frac{v \hat{M}^2}{\sqrt{2} \sigma} \right) \right] \right] = 3$$

$$- A_p (\xi + 3) \left[1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho} \left(\hat{C}_s^2 + \frac{v \hat{M}^2}{\sqrt{2} \sigma} \right) \right]$$

$$+ 2 A_p \left[1 - \eta \left(\hat{V}_{\text{rms}}^2 - \frac{v \hat{M}^2}{\sqrt{2} \sigma} \right) \right]$$

On peut alors écrire :

$$\boxed{\phi(R) = \frac{3}{1 - A_{\text{th}}} - \frac{A_{\text{th}} (\xi + 3)}{1 - A_{\text{th}}} + \frac{2 A_{\text{turb}}}{1 - A_{\text{th}}}} \quad (\text{B.50})$$

Avec :

$$\begin{cases} A_p = -\frac{\exp[-u^2]}{\mathcal{P} \sigma \sqrt{2\pi}} \\ A_{\text{th}} = A_p \left[1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho} \left(\hat{C}_s^2 + \frac{v \hat{M}^2}{\sqrt{2} \sigma} \right) \right] \\ A_{\text{turb}} = A_p \left[1 - \eta \left(\hat{V}_{\text{rms}}^2 - \frac{v \hat{M}^2}{\sqrt{2} \sigma} \right) \right] \end{cases} \quad (\text{B.51})$$

Et :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\delta_c + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma \sqrt{2}} \\ v = \frac{\delta_c - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma \sqrt{2}} \end{array} \right. \quad (\text{B.52})$$

5 Etude des limites subsoniques et supersoniques

5.1 Simplification des expressions

Supposons d'une part que $V_{\text{rms}} \ll C_s$ et d'autre part que $V_{\text{rms}} \gg C_s$. Dans ces limites, le nombre de Mach $\mathcal{M} = \frac{V_{\text{rms}}}{C_s}$:

Vitesse sub-sonique ; $V_{\text{rms}} \ll C_s$

Vitesse super-sonique ; $V_{\text{rms}} \gg C_s$

$$\mathcal{M}^2 \rightarrow 0$$

$$\mathcal{M}^2 \rightarrow +\infty$$

Et donc le nombre de Mach réduit $\hat{\mathcal{M}}$:

$$\hat{\mathcal{M}}^2 = \frac{b^2 \mathcal{M}^2}{1 + b^2 \mathcal{M}^2}$$

S'écrit dans sa limite asymptotique :

$$\boxed{\hat{\mathcal{M}}^2 \approx b^2 \left(\frac{V_{\text{rms}}}{C_s} \right)^2} \quad (\text{B.53})$$

$$\boxed{\hat{\mathcal{M}}^2 \approx 1} \quad (\text{B.54})$$

En utilisant le développement limité en pour $x \ll 1$ de la fonction $\ln(1 + x) \approx x$, on peut calculer la déviation standard des fluctuations en densité σ :

$$\sigma^2 = \ln(1 + b^2 \mathcal{M}^2)$$

Dans cette limite, σ tend asymptotiquement :

ANNEXE B. CALCUL ANALYTIQUE DU TAUX DE FRAGMENTATION DANS LE CADRE DU MODÈLE GRAVO-TURBULENT

vers 0 sur la même tendance que $\hat{\mathcal{M}}^2$:

$$\boxed{\sigma^2 \approx b^2 \left(\frac{V_{\text{rms}}}{C_s} \right)^2} \quad (\text{B.55})$$

vers $+\infty$ selon :

$$\boxed{\sigma^2 \approx 2 \ln \left(\frac{V_{\text{rms}}}{C_s} \right)} \quad (\text{B.56})$$

On peut aussi donner les limites suivantes valables respectivement dans le cas où $V_{\text{rms}} \ll C_s$ et le cas où $V_{\text{rms}} \gg C_s$:

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} u &= \frac{\delta_c}{\sigma \sqrt{2}} \\ \lim_{\sigma \rightarrow 0} v &= \frac{\delta_c}{\sigma \sqrt{2}} \\ \lim_{\mathcal{M} \rightarrow 0} \hat{C}_s^2 &= 1 \\ \lim_{\mathcal{M} \rightarrow 0} \hat{V}_{\text{rms}}^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} u &= \frac{\sigma}{2 \sqrt{2}} \\ \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} v &= -\frac{\sigma}{2 \sqrt{2}} \\ \lim_{\mathcal{M} \rightarrow +\infty} \hat{C}_s^2 &= 0 \\ \lim_{\mathcal{M} \rightarrow +\infty} \hat{V}_{\text{rms}}^2 &= 1 \end{aligned}$$

On peut aussi calculer la limite asymptotique de la quantité $\frac{v \hat{\mathcal{M}}^2}{\sqrt{2} \sigma}$ intervenant dans les coefficients A_{th} et A_{turb} pour chacune des cas :

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{v \hat{\mathcal{M}}^2}{\sqrt{2} \sigma} &= \frac{\delta_c}{\sqrt{2} \sigma} b^2 \frac{V_{\text{rms}}^2}{C_s^2} \frac{1}{\sqrt{2} \sigma} \\ &= \frac{\delta_c}{2} b^2 \frac{V_{\text{rms}}^2}{C_s^2} \frac{C_s^2}{b^2 V_{\text{rms}}^2} \end{aligned}$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{v \hat{\mathcal{M}}^2}{\sqrt{2} \sigma} = -\frac{\sigma}{2 \sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2} \sigma}$$

Soit :

$$\boxed{\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{v \hat{\mathcal{M}}^2}{\sqrt{2} \sigma} = \frac{\delta_c}{2}} \quad (\text{B.57})$$

$$\boxed{\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{v \hat{\mathcal{M}}^2}{\sqrt{2} \sigma} = -\frac{1}{4}} \quad (\text{B.58})$$

Calculons maintenant la limite asymptotique du coefficient A_p :

$$A_p = -\frac{\exp[-u^2]}{\mathcal{P} \sigma \sqrt{2\pi}}$$

Avec $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}(\delta \geq \delta_j)$:

$$\mathcal{P}(\delta \geq \delta_c) = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf}(u) \right)$$

Dans le cas sub-sonique, où $V_{\text{rms}} \ll C_s$, la fluctuation critique standardisée u tend soit vers $+\infty$ si $\delta_c > 0$, soit $-\infty$ si $\delta_c < 0$. Considérons dans un premier temps le cas $\delta_c > 0$ pour pouvoir continuer un développement similaire avec le cas super-sonique. On a, pour $\delta_c > 0$:

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(\delta \geq \delta_c) = \frac{1}{2} \left(1 - \lim_{u \rightarrow +\infty} \operatorname{erf}(u) \right)$$

Or, l'expansion asymptotique pour $u \rightarrow +\infty$ de la fonction erreur s'écrit :

$$\operatorname{erf}(u) \approx 1 - \frac{\exp[-u^2]}{u \sqrt{\pi}}$$

Dans ce cas, on peut réécrire la limite asymptotique de $\mathcal{P}(\delta \geq \delta_c)$ sous la forme :

$$\boxed{\lim_{u \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(\delta \geq \delta_c) = \frac{1}{2} \frac{\exp[-u^2]}{u \sqrt{\pi}}} \quad (\text{B.59})$$

On peut alors déduire la limite asymptotique du coefficient A_p :

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow +\infty} A_p &= - \frac{2u \sqrt{\pi} \exp[-u^2]}{\exp[-u^2] \sigma \sqrt{2\pi}} \\ &= - \frac{2\delta_c}{\sigma^2} \end{aligned}$$

Soit :

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} A_p = - \frac{\delta_c}{\sigma^2}$$

D'où, toujours avec $\delta_c > 0$:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} A_p = -\infty \quad (\text{B.60})$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} A_p = 0^- \quad (\text{B.61})$$

On rappelle ici les expressions de A_{th} et A_{turb} :

$$\begin{cases} A_{\text{th}} = A_p \left[1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho} \left(\hat{C}_s^2 + \frac{v \hat{M}^2}{\sqrt{2} \sigma} \right) \right] \\ A_{\text{turb}} = A_p \left[1 - \eta \left(\hat{V}_{\text{rms}}^2 - \frac{v \hat{M}^2}{\sqrt{2} \sigma} \right) \right] \end{cases}$$

Qui ont pour limites :

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} A_{\text{th}} &= A_p \left[1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho} \left(1 + \frac{\delta_c}{2} \right) \right] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Si $\frac{d \ln T}{d \ln \rho} \neq \left(1 + \frac{\delta_c}{2} \right)^{-1}$ dont nous verrons par la suite ce qu'il se passe physiquement autour de cette singularité grâce au taux de fragmentation.

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} A_{\text{turb}} &= A_p \left[1 + \eta \frac{\delta_c}{2} \right] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Si $\eta \delta_c \neq -2$ ce qui est le cas ici car $\delta_c > 0$ et $\eta > 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} A_{\text{th}} &= A_p \left[1 + \frac{1}{4} \frac{d \ln T}{d \ln \rho} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} A_{\text{turb}} &= A_p \left[1 - \frac{5}{4} \eta \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

On peut alors écrire la limite asymptotique du taux de fragmentation $\phi(R)$:

$$\phi(R) = \frac{3}{1 - A_{\text{th}}} - \frac{A_{\text{th}}(\xi + 3)}{1 - A_{\text{th}}} + \frac{2A_{\text{turb}}}{1 - A_{\text{th}}}$$

$$\phi(R) \approx \frac{A_{\text{th}}(\xi + 3)}{A_{\text{th}}} - 2 \frac{A_{\text{turb}}}{A_{\text{th}}}$$

$$\phi(R) \approx 3$$

Soit finalement, pour $\delta_c > 0$:

Vitesse sub-sonique ; $V_{\text{rms}} \ll C_s$

Vitesse super-sonique ; $V_{\text{rms}} \gg C_s$

$$\phi(R) \approx \xi + 3 - \frac{2\left(1 + \eta\frac{\delta_c}{2}\right)}{1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho} \left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)} \quad (\text{B.62})$$

$$\phi(R) \approx 3 \quad (\text{B.63})$$

5.2 Effondrement isotherme

On suppose ici que les fragments sont des objets autogravitants caractérisés par une équation d'état polytropique. En notant $p > 0$ l'indice polytropique du gaz qui compose les fragments parentaux, la température T du milieu est alors reliée à la densité ρ par $T \propto \rho^{p-1}$, et on a localement à l'échelle R :

$$\frac{d \ln T}{d \ln \rho} = p - 1 \quad (\text{B.64})$$

Nous verrons par la suite l'utilisation d'une équation d'état plus complexe où l'indice p dépend de la densité des fragments considérés. Supposons que l'effondrement d'un fragment se déroule de façon isotherme, c'est-à-dire à température constante, soit $p = 1$ de telle sorte que $\frac{d \ln T}{d \ln \rho} = 0$. Les expressions asymptotiques précédentes s'écrivent alors :

Vitesse sub-sonique ; $V_{\text{rms}} \ll C_s$

Vitesse super-sonique ; $V_{\text{rms}} \gg C_s$

$$\phi(R) \approx \xi + 1 - \eta\delta_c \quad (\text{B.65})$$

$$\phi(R) = 3 \quad (\text{B.66})$$

5.3 Condition de fragmentation hiérarchique

À partir des expressions aux limites précédentes, il est possible de dégager les conditions physiques qui régulent la fragmentation hiérarchique d'un fragment parental. En effet, pour qu'un fragment soit dans un régime de fragmentation hiérarchique, d'après la Section 1.3, il est nécessaire de remplir les deux conditions suivantes :

1. $\xi + 3 > \phi$;
2. $\phi > 0$

ANNEXE B. CALCUL ANALYTIQUE DU TAUX DE FRAGMENTATION DANS LE CADRE DU MODÈLE GRAVO-TURBULENT

On suppose ici que $\xi > -3$ de telle sorte que le fragment parental soit effectivement dans un régime qui lui permette de s'effondrer, au regard des conditions associées aux comparaisons des temps de chute libre énoncées Section 1.3. Réécrivons les conditions précédentes :

Condition $\phi < \xi + 3$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \xi + 3 - \frac{2\left(1 + \eta\frac{\delta_c}{2}\right)}{1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho}\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)} &< \xi + 3 \\ \Leftrightarrow \frac{2\left(1 + \eta\frac{\delta_c}{2}\right)}{1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho}\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)} &> 0 \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho}\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right) &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d \ln T}{d \ln \rho} &< \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)} \end{aligned}$$

Condition $\phi > 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \xi + 3 - \frac{2\left(1 + \eta\frac{\delta_c}{2}\right)}{1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho}\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)} &> 0 \\ \Leftrightarrow \xi + 3 > \frac{2\left(1 + \eta\frac{\delta_c}{2}\right)}{1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho}\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)} \end{aligned}$$

Or, d'après la condition $\phi < \xi + 3$, pour avoir un effondrement hiérarchique il est nécessaire d'avoir :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho}\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right) &> 0 \\ \Rightarrow \xi + 3 > \frac{2\left(1 + \eta\frac{\delta_c}{2}\right)}{1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho}\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)} \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho}\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right) &> 2\frac{\left(1 + \eta\frac{\delta_c}{2}\right)}{\xi + 3} \\ \Leftrightarrow \frac{d \ln T}{d \ln \rho} &< \frac{\xi + 1 - \eta\delta_c}{(\xi + 3)\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)} \end{aligned}$$

Soit les deux conditions nécessaires, en terme de p pour un effondrement hiérarchique :

$$\boxed{p < 1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)}} \quad (\text{B.67})$$

$$\boxed{p < 1 + \frac{\xi + 1 - \eta\delta_c}{(\xi + 3)\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)}} \quad (\text{B.68})$$

Pour aller plus loin, regardons plus spécifiquement l'effondrement d'un fragment parental marginalement instable, c'est-à-dire avec $\bar{\rho} \sim \rho_c$, soit $\delta_c = \ln \frac{\rho_c}{\bar{\rho}} \approx 0$; et sans accréation de masse supplémentaire ni de dissipation du matériau dans l'environnement avec $\xi = 0$:

$$p < 2 \quad (\text{B.69}) \quad \Bigg| \quad p < \frac{4}{3} \quad (\text{B.70})$$

Pour avoir un effondrement hiérarchique, les deux conditions doivent être satisfaites et il est alors suffisant que :

$$\boxed{p < \frac{4}{3}} \quad (\text{B.71})$$

5.4 Condition de fragmentation monolithique

Il est aussi possible de calculer les conditions physiques qui régulent l'effondrement monolithique d'un fragment parental. Pour qu'un fragment soit dans un régime de fragmentation monolithique, d'après la Section 1.3, il est nécessaire de remplir l'un des deux conditions suivantes :

1. $\phi \geq \xi + 3$ et $\phi > 0$
2. ou bien $\phi = 0$;

On suppose toujours ici que $\xi > -3$ de telle sorte que le fragment parental soit effectivement dans un régime qui lui permet de s'effondrer, au regard de la condition énoncée Section 1.3. Réécrivons la première condition précédente :

Condition $\phi \geq \xi + 3$

$$\Leftrightarrow \xi + 3 - \frac{2\left(1 + \eta\frac{\delta_c}{2}\right)}{1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho}\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)} \geq \xi + 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(1 + \eta\frac{\delta_c}{2}\right)}{1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho}\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho}\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d \ln T}{d \ln \rho} > \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)}$$

Condition $\phi > 0$

$$\Leftrightarrow \xi + 3 - \frac{2\left(1 + \eta\frac{\delta_c}{2}\right)}{1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho}\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \xi + 3 > \frac{2\left(1 + \eta\frac{\delta_c}{2}\right)}{1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho}\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)}$$

Or, d'après la condition $\phi \geq \xi + 3$, pour avoir un effondrement monolithique il est nécessaire d'avoir :

$$1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho}\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right) < 0$$

$$\Rightarrow \xi + 3 > \frac{2\left(1 + \eta\frac{\delta_c}{2}\right)}{1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho}\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho}\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right) < 2\frac{\left(1 + \eta\frac{\delta_c}{2}\right)}{\xi + 3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d \ln T}{d \ln \rho} > \frac{\xi + 1 - \eta\delta_c}{(\xi + 3)\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)}$$

Soit les deux conditions nécessaires, en terme de p pour un effondrement monolithique sous la première alternative $\phi > \xi + 3$ et $\phi > 0$:

$$\boxed{p > 1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)}} \quad (\text{B.72})$$

$$\boxed{p > 1 + \frac{\xi + 1 - \eta\delta_c}{(\xi + 3)\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)}} \quad (\text{B.73})$$

Pour aller plus loin, regardons plus spécifiquement l'effondrement d'un fragment pa-

rent marginalement instable, c'est-à-dire avec $\bar{\rho} \sim \rho_c$, soit $\delta_c = \ln \frac{\rho_c}{\bar{\rho}} \approx 0$; et sans accréation de masse supplémentaire ni de dissipation du matériau dans l'environnement avec $\xi = 0$:

$$p > 2 \quad \Bigg| \quad p > \frac{4}{3}$$

Comme les deux conditions doivent être satisfaites, pour avoir un effondrement monolithique il est suffisant que :

$$\boxed{p > 2} \quad (\text{B.74})$$

Condition alternative $\phi = 0$

Il reste cependant la solution $\phi = 0$ qui se calcule en reprenant le résultat de $\phi < 0$, ce qui implique qu'on peut aussi avoir un effondrement monolithique pour :

$$\boxed{p = 1 + \frac{\xi + 1 - \eta\delta_c}{(\xi + 3)\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)}} \quad (\text{B.75})$$

Ce qui se réduit, avec les hypothèses précédentes, par :

$$\boxed{p = \frac{4}{3}} \quad (\text{B.76})$$

Cette conditions est toutefois valable uniquement si :

$$1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho} \left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right) \neq 0$$

C'est-à-dire, uniquement si :

$$p \neq 1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta_c}{2}\right)}$$

Soit, avec les hypothèses précédentes :

$$p \neq 2$$

En effet, si $p = 2$, l'expression asymptotique de $\phi(R)$ diverge vers $-\infty$ et les fragments sont dans un régime dissipatif.

5.5 Cas alternatif $\delta_c < 0$ dans la limite subsonique

La fonction erreur $\text{erf}(u)$ est une fonction impaire, ce qui signifie que $\text{erf}(-u) = -\text{erf}(u)$. Dans ce cas, la limite asymptotique de $\mathcal{P}(\delta \geq \delta_c)$ où $u \rightarrow -\infty$, peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow -\infty} \mathcal{P}(\delta \geq \delta_c) &= \frac{1}{2} \left(1 - \lim_{u \rightarrow -\infty} \text{erf}(u) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \lim_{u \rightarrow -\infty} \text{erf}(-u) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + 1 - \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{\exp[-u^2]}{u \sqrt{\pi}} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Soit, avec $u \sim \sigma^{-1}$:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} A_p = -\frac{\exp[-u^2]}{\sigma \sqrt{2\pi}} = 0 \quad (\text{B.77})$$

Avec pour conséquences :

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} A_{\text{th}} &= A_p \left[1 - \frac{d \ln T}{d \ln \rho} \left(1 + \frac{\delta_c}{2} \right) \right] \\ &= 0 \\ \lim_{\sigma \rightarrow 0} A_{\text{turb}} &= A_p \left[1 + \eta \frac{\delta_c}{2} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

On peut alors écrire la limite asymptotique du taux de fragmentation $\phi(R)$ dans la limite subsonique si $\delta_c < 0$:

$$\boxed{\lim_{u \rightarrow -\infty} \phi(R) = 3} \quad (\text{B.78})$$

Qui est donc indépendant du taux de masse injectée ξ .

Annexe C

Copie du travail publié sur NGC 2264

Voir à la page suivante.

A graph-theory-based multi-scale analysis of hierarchical cascade in molecular clouds

Application to the NGC 2264 region

B. Thomasson¹, I. Joncour¹, E. Moraux¹, C. Crespelle², F. Motte¹, Y. Pouteau¹, and T. Nony³

¹ IPAG – Université Grenoble-Alpes, Grenoble, France

e-mail: benjamin.thomasson@univ-grenoble-alpes.fr

² LIP – Université Claude Bernard Lyon 1, France

³ Instituto de Radioastronomía y Astrofísica, Universidad Nacional Autónoma de México, Apdo. Postal 3-72, 58089 Morelia, Michoacán, Mexico

Received 6 February 2022 / Accepted 30 May 2022

ABSTRACT

Context. The spatial properties of small star clusters suggest that they may originate from a fragmentation cascade starting from molecular cloud, of which there might be traces found at spatial scales up to a few tens of thousands of astronomical units (kAU).

Aims. Our goal is to investigate the multi-scale spatial structure of gas clumps, to probe the existence of a hierarchical cascade over a range of characteristic spatial scales, and to evaluate its possible link with star production in terms of multiplicity.

Methods. From the *Herschel* emission maps of NGC 2264 at [70, 160, 250, 350, 500] μm , clumps are extracted using *getsf* software at each of the associated spatial resolutions (respectively [8.4, 13.5, 18.2, 24.9, 36.3]”). Using the spatial distribution of these clumps and the class 0/I young stellar object (YSO) from *Spitzer* data, we developed a graph-theoretic analysis to represent the multi-scale structure of the cloud as a connected network. This network is organised in levels, and each level represents a characteristic scale among the available spatial scales. A link is created between two nodes which could be either a clump or a YSO from two different levels if their footprints overlap with each other. A parent node is then associated with a child node from a lower scale. The way in which the network subdivides scale after scale is compared with a geometric model that we have developed. This model generates extended objects that have a particularity in that they are geometrically constrained and subdivide along the scales following a fractal law. This graph-theoretic representation allows us to develop new statistical metrics and tools aiming at characterising, in a quantitative way, the multi-scale nature of molecular clouds.

Results. We obtain three classes of multi-scale structure in NGC 2264 according to the number of nodes produced at the deepest level (called graph-sinks): hierarchical (several graph-sinks), linear (a single graph-sink with at most a single parent at each level), and isolated (no connection to any other node). The class of structure is strongly correlated with the column density N_{H_2} of NGC 2264. The hierarchical structures dominate the regions whose column density exceeds $N_{\text{H}_2} = 6 \times 10^{22} \text{ cm}^{-2}$. Although the latter are in the minority, namely 23% of the total number of structures, they contain half of the class 0/I YSOs, proving that they are highly efficient in producing stars. We define a novel statistical metric, the fractality coefficient \mathcal{F} , corresponding to the fractal index that an equivalent population of clumps would have if they were generated by an ideal fractal cascade. For NGC 2264, over the whole range of spatial scales (1.4–26 kAU), this coefficient is globally estimated to be $\mathcal{F} = 1.45 \pm 0.12$ and its dispersion suggests that the cascade may depend on local physical conditions. However, a single fractal index is not the best fit for the NGC 2264 data because the hierarchical cascade starts at a 13 kAU characteristic spatial scale.

Conclusions. Our novel methodology allows us to correlate YSOs with their gaseous environment which displays some degree of hierarchy for spatial scales below 13 kAU. We identify hierarchical multi-scale structures, which we associate with a hierarchical fragmentation process, and linear structures, which we associate with a monolithic fragmentation process. Hierarchical structures are observed as the main vectors of star formation. This cascade, which drives efficient star formation, is then suspected of being both hierarchical and rooted by the larger scale gas environment up to 13 kAU. We do not see evidence for any hierarchical structural signature of the cloud within the 13–26 kAU range, implying that the structure of the cloud does not follow a simple fractal law along the scales but instead might be submitted to a multi-fractal process.

Key words. methods: data analysis – methods: statistical – open clusters and associations: individual: NGC 2264 – stars: formation – ISM: clouds

1. Introduction

Molecular clouds are large, cold, dense, and substructured gaseous objects that host the formation of young stellar objects (YSOs). Most of these YSOs are not found to be isolated but are rather in close multiple systems (Duchêne & Kraus 2013), ultra-wide multiple pairs (UWPs, Joncour et al. 2017), or are even concentrated in small local stellar groups defined as nested elementary structures (NESTs, Joncour et al. 2018; González et al.

2021). These stellar structures cover spatial scales ranging from a few thousand astronomical units (kAU) to a few tens of kAU, suggesting that they originate from a hierarchical fragmentation cascade of the cloud on a larger scale.

In order to study the large-scale hierarchy in molecular clouds, Houlahan & Scalzo (1992) and then Rosolowsky et al. (2008) applied connected tree statistics (dendrograms). This method consists of separating a single image into several pixel-intensity thresholds in order to describe the architecture of a

molecular cloud. In these dendrograms, the low-intensity iso-contours of an image are connected to the higher intensity iso-contours. As a result, the dendrogram branches out towards higher intensity levels. By construction, this method extracts a hierarchy in column density, and builds a network whose structure can be described using metrics; for example, the path length between two nodes or the branching of a node. In addition, Pokhrel et al. (2018) studied the hierarchical aspect of sizes using several observations ranging from the cloud scale to the prestellar core scale. This method has the advantage of being based on a series of independent observations whose associated maps cover a wide range of spatial scales. Consequently, the structural and multi-scale description of the hierarchical cascade of the cloud can be highlighted. However, in contrast to the work of Houllahan & Scalo (1992), the analysis of Pokhrel et al. (2018) does not provide a simple framework to define metrics that would allow the comparison of different regions or of observational results with numerical simulations. Therefore, we propose a novel approach that takes advantage of both the network representation of Houllahan & Scalo (1992) and Rosolowsky et al. (2008) and the multi-scale description of the cloud from independent observations (Pokhrel et al. 2018). The latter, coupled with a network representation, would then make it possible to compare, based on network metrics, different star formation regions with numerical simulations. These tools would then supply constraints to star-formation scenarios. In particular, we aim to probe the ~ 5 – 30 kAU spatial scales in order to look for clues as to the origin of small stellar groups such as UWPs (Joncour et al. 2017) and NESTs (Joncour et al. 2018).

In order to test our methodology, we apply it to the molecular cloud NGC 2264. Located at 723 pc (Cantat-Gaudin et al. 2018) in the Mon OB1 molecular cloud, NGC 2264 has a complex star formation history. This cloud has an active star-forming region in its central part, where the majority of class 0/I YSOs have been identified (Rapson et al. 2014), as well as two main clusters in the process of forming massive stars (Cunningham et al. 2016; Nony et al. 2021). The distribution of YSOs is characterised by an age gradient from the northern part, which contains most of the older stars (Rapson et al. 2014; Venuti et al. 2018), to the quiescent southern part (Venuti et al. 2018). The analysis of this type of cloud could therefore provide clues as to the fragmentation signature of a massive region that may trace the star formation history.

This paper is organised as follows. In Sect. 2, we present the multi-scale data of NGC 2264 and our graph-theoretic methodology applied to these data. In Sect. 3, we develop a fractal hierarchical cascade model with extended objects before defining a network metric that can describe such a cascade. Using our model and metrics, we study the fractal behaviour of the network of NGC 2264. In Sect. 4, we discuss the physical origin of the observed properties of the hierarchical cascade. We conclude in Sect. 5 with a summary of our results and other possible applications of our methodology.

2. Multi-scale representation of clumps and YSOs in NGC 2264

In this section, our goal is to probe the existence of a hierarchical cascade in NGC 2264. As we want to investigate this cascade along spatial scales, we use a collection of *Herschel* maps of NGC 2264 obtained at different wavelengths to extract a set of gaseous clumps covering a large range of spatial scales. Using a network-based approach, we then connect the nested clumps and

identify disconnected graph components to evaluate the degree of hierarchy in regards to the number of final nodes contained in each of these components.

2.1. NGC 2264 data

In order to span the ~ 5 – 30 kAU spatial scales that appear to be the crucial range where hierarchical fragmentation may produce UWPs, NESTs, and clusters of NESTs (Joncour et al. 2017, 2018), we use the *Herschel* imaging survey of OB YSOs (HOBYS) multi-band observation data (Motte et al. 2010) of NGC 2264. These data are composed of five emission images at [70, 160, 250, 350, 500] μm with respective spatial resolutions of [8.4, 13.5, 18.2, 24.9, 36.3]'' , corresponding respectively to spatial scales of \sim [6, 10, 13, 18, 26] kAU considering the distance of NGC 2264 at 723 pc (Cantat-Gaudin et al. 2018). To extract intensity-peaked clumps in the five *Herschel* images, we used the multi-scale source and filament extraction method *getsf* version v210609 (Men'shchikov 2021). This algorithm applied to an image distinguishes three components which are the sources, the filaments, and the background. As we are only interested here in the extraction of clumps, that is, the sources, we do not take into account the filamentary component which remains embedded in the background component. To extract the sources, the *getsf* method spatially decomposes the image into several scales in order to give a first identification of the sources and the background. The source images are flattened and small noise fluctuations are removed such that the sources are detected as significant peaks of emission. The geometric and flux properties of the sources are finally measured in the original image that has been dissociated with its background. The catalogues produced by *getsf* contain the spatial characteristics of the ellipsoid sources, in particular the major and minor axes of the ellipses defined as the full width at half maximum (FWHM) of their Gaussian emission profile. The *getsf* method requires only one input parameter which is the maximum size of the extracted sources, taken here to be about 2.5 times the size of the beam associated with the image. This choice allows us to not be too selective in the extraction, and to avoid extracting objects that are too extended. As a result, [231, 202, 126, 92, 46] ellipsoidal clumps are extracted for their respective spatial resolution of [8.4, 13.5, 18.2, 24.9, 36.3]'' . This procedure of extraction allows us to monitor the existence of clumps along multiple independent images with different scales and to probe the persistence of the gas structures throughout the scales. To complement these five catalogues of clumps, we use a catalogue of YSOs extracted from the *Spitzer* survey by Rapson et al. (2014). This catalogue originally contains populations of Class III, II, and 0/I YSOs. Only class 0/I YSOs are selected in this work. Indeed, these YSOs are the most likely to be connected to their parental environment, as they are among the youngest; see for example Nony et al. (2021). As 5% of class 0/I YSOs are primarily detected by the Multi-Band Imaging Photometer (MIPS), the resolution of which is $\sim 7''$, and 95% of these YSOs are also detected with the InfraRed Array Camera (IRAC), the resolution of which is $\sim 2''$, we choose $2''$ to be the associated scale for the class 0/I YSOs. This resolution corresponds to a 1.4 kAU spatial scale. As the *getsf* extraction is performed on a rectangular window of (RA-DEC) corner coordinates [(100.10–10.15), (99.52–9.53), (100.40–8.72), (100.98–9.34)] $^\circ$, we only keep the YSOs that are inside this field of view. A total of 87 class 0/I YSOs are kept in this post-selection. Clumps and YSOs are then connected according to the procedure presented in Sect. 2.2.

A column density image was also computed, which is used in Sect. 2.4. This image at $18.2''$ resolution is provided by the `getsf` method `highres`. This image was derived as follow. Using the $[160\text{--}500]\mu\text{m}$ emission images, column density and temperature images at different resolutions were computed by fitting the spectral energy distribution (SED), assuming optically thin thermal emission. These images were then recombined to produce a high-resolution image of column density that contains spatial information from all images at all resolutions. More detailed information about the `getsf` source extraction method can be found in Men'shchikov (2021).

2.2. Network methodology

In the previous section, we describe how we built catalogues of clumps and YSOs, which we refer to here as substructures for simplicity. Each substructure is associated with a specific spatial scale s which corresponds to the resolution of clump extraction and YSO detection. These substructures can be spatially connected to each other if they overlap, that is, if one substructure is contained within another at a larger scale. The nested substructure is called a ‘child’ while the container is called a ‘parent’. We define a criterion of connection between two substructures of two different spatial scales. This criterion must take into account the spatial extent of the substructures we consider, both child and parent. We establish the following inclusion criterion: two substructures are connected if at least 75%¹ of the child total surface is contained inside the extent of the parent. The representation of our data by a connected network appears to be the most adequate description. Indeed, a network is composed of an ensemble of nodes, for which one node contains some data information (in nodal attributes, e.g. size, wavelength, measured flux, etc.). These nodes are connected together with edges that reflect the specific relationship between nodes. In our case, one node describes a substructure which can be a clump extracted from a specific image or a YSO. One edge reflects the inclusion relationship that two substructures might have. Moreover, a network makes it possible to organise the different scales s_l in different levels l as shown in Fig. 1. Each of our six catalogues is associated with an l level so that a total of six levels can be defined. The edge created between two nodes is oriented from the parent (high-scale) to the child (low-scale) such that an oriented network is constructed from $l = 0$ to $l = L - 1$, where L is the total number of levels. In this work, $L = 6$ with $s_0 = 26$ kAU and $s_5 = 1.4$ kAU. The number of substructures at each level l can be written as: $\{N_0, N_1, \dots, N_{L-1}\}$. With this method of connection between substructures and between scales, the resulting connected network contains several subnetworks that are independent of each other. These subnetworks are disconnected from their counterparts; they are components of the main network. From a physical point of view, this organisation reflects the spatial correlation a parent has with its children. Indeed, a single component describes a whole complex of connected substructures that are all affiliated. On the contrary, two different components describe two spatially unaffiliated complexes of substructures and two independent structures are defined. In the remainder of this paper, we use the term ‘structure’ to refer to these network components. Inside a structure, there are nodes connected to each other. These nodes are labelled

¹ Here we use the 2σ extension of the ellipses. We multiply each axis by $\frac{1}{\sqrt{2 \ln(2)}}$ to get the 2σ Gaussian width from the FWHM axis provided by `getsf` catalogues, and then check the overlap criterion.

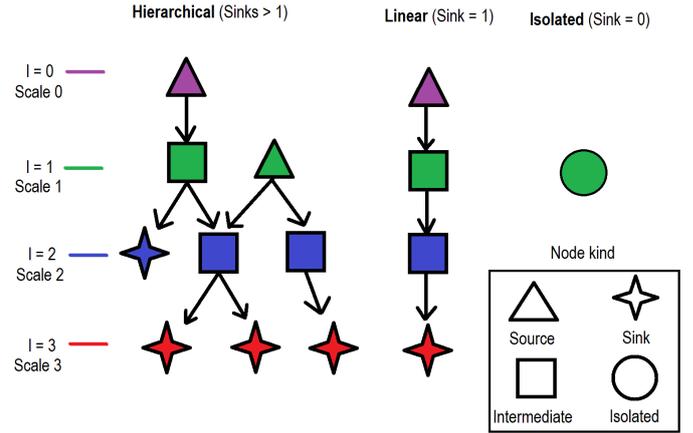


Fig. 1. Organisation of a network and definition of nodes. Each colour corresponds to a scale. Each node shape corresponds to a specific kind (source, sink, intermediate, or isolated). Three structures are represented: hierarchical, linear, or isolated. One example of each type of structure is shown.

as follows:

- Graph-sinks: nodes without children that inherit from at least one parent.
- Graph-sources: nodes without a parent that breed at least one child.
- Intermediates: nodes with child(ren) and parent(s).
- Isolated: nodes without a child or a parent.

If we write as $\{N_0, N_1, \dots, N_{L-1}\}$ the number of substructures contained in the structures shown in Fig. 1 at all levels l , we define the following structures types:

- Hierarchical: structure with multiple substructures in at least one level; for example $\{1, 2, 3, 3\}$ substructures at level l .
- Linear: structure with at most one single substructure at all levels; for example $\{1, 1, 1, 1\}$ substructures at level l .
- Isolated: structure that is an isolated node; for example $\{0, 1, 0, 0\}$ substructure at level l .

We can then differentiate between non-persistent structures (isolated), structures that physically only represent a single object (linear), and structures that show some degree of multiplicity and clustering between substructures (hierarchical). We use this procedure to construct a network for NGC 2264 in the following section (Sect. 2.3).

2.3. Extracted structures in NGC 2264

In NGC 2264, the network built by the procedure described in Sect. 2.2 is composed of six levels of scale: five of them contain clumps at their associated resolution and one contains class 0/I YSOs. The network involves a total of 334 structures in which 23 are hierarchical, 135 are linear, and 176 are isolated (see Table 1 and left panel of Fig. 2). Inside the same class of structure, one can observe the different physical nature of graph-sinks (see Fig. 3) as they can be associated either to YSOs or clumps. In fact, some structures do not cascade down to the last possible level, but stop before that. A structure that contains a YSO might be in a more evolved stage of collapse since star formation actually happened. The diversity in the nature of the graph-sinks inside hierarchical structure can also indicate the global evolutionary stage. Indeed, if a hierarchical structure contains YSOs as graph-sinks only, it is more likely to have ended its star formation process than a structure hosting sibling YSOs and clumps.

Table 1. Number of structures of each class inside NGC 2264 with the numbers of clumps and YSOs inside each of them.

		Structures			
		Hierarchical	Linear	Isolated	Total
Number		23	135	176	334
YSOs included		45	24	18	87
70 μm		69	77	85	231
160 μm		52	91	59	202
Clumps included	250 μm	33	84	9	126
	350 μm	25	63	4	92
	500 μm	16	29	1	46
	Total	195	344	158	697
YSOs + clumps		240	368	176	784
Graph-sinks		94	135	X	229
Graph-sources		34	135	X	169

Notes. An X indicates the absence of graph-sinks and graph-sources within isolated structures as these structures do not contain them by definition.

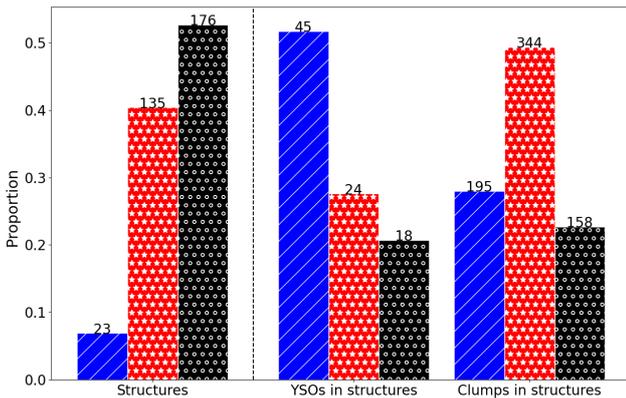


Fig. 2. *Left:* statistics of extracted structures. Precise numbers are shown above the bars. Hierarchical structures are represented with blue bars (line hatching), linear with red bars (star hatching), and isolated with black bars (circle hatching). *Right:* statistics for each type of substructure (YSOs or clumps) inside each type of structure.

With this representation, the existence of YSOs inside a structure can be readily evaluated along with their multiplicity.

Hierarchical structures contain 52% of the total YSO population and 28% of the total gaseous substructures (see Fig. 2). As a majority of YSOs are forming inside hierarchical structures despite their under-representation in the cloud ($\sim 7\%$), these structures are not irrelevant when it comes to the formation of young stars. Linear structures contain 50% of the population of whole clumps but host only 28% of the total YSO population in the cloud. To further evaluate the role of hierarchy in star formation, we can assess the average production of YSOs and the proportion of graph-sinks they represent. The hierarchical structures produce on average 2.0 YSOs while the linear structures produce on average 0.2 YSOs. We would expect the linear structures to produce a maximum of one single YSO, which means that most of the linear structures do not cascade down to the stage of forming a young star (see Fig. 3), or at least not yet. In addition, the ratio (YSOs: graph-sinks) contained in a type of structure indicates the actual proportion of YSOs found at the end of

the cascade. We find that linear structures (8:45 ratio) are mainly composed of gaseous graph-sinks whereas hierarchical structures (45:94 ratio) show a more dominant presence of YSOs.

Consequently, hierarchical structures dominate the total production of YSOs in the cloud and cascade more towards lower levels compared with linear structures. Therefore, hierarchical structures seem to be either more evolved than their linear counterparts, or are the main vectors for the formation of YSOs; this latter case would mean that hierarchical structures are closely linked to the formation of stellar groups.

2.4. Spatial distribution

Another major difference between the types of structures we extracted despite their YSO multiplicity is their location in the cloud with respect to the column density background Σ . In NGC 2264, structures appear to be partitioned with graph-sources of all scales. The hierarchical structures are mainly localised in the two central hub regions (see Fig. 4), while the linear structures are mostly localised in the north and south filaments, and on the eastern region. Isolated structures are distributed everywhere and do not seem to have a preferential location. In order to investigate the correlation between structure type and local column density, we associated each class of structure to the number of pixels of the column density image they cover. Then, inside a bin of column density B_Σ , we evaluated the proportion of pixels contained in a structure compared to the total number of pixels of B_Σ . In other words, we evaluate the proportion of area covered by a type of structure inside each bin of column density. We find that hierarchical structures occupy more than 95% of the map area with column density $N_{\text{H}_2} > 6 \times 10^{22} \text{ cm}^{-2}$ (see Fig. 5). Hierarchical structures start being dominant for density $N_{\text{H}_2} > 3 \times 10^{22} \text{ cm}^{-2}$ with an area occupation $> 40\%$ while below $N_{\text{H}_2} \sim 3 \times 10^{22} \text{ cm}^{-2}$ all structures coexist. This behaviour is consistent with the definition of hubs and ridges, which are high-density (and therefore high-column density) cloud structures forming clusters of stars with a high star-formation rate (see e.g. Louvet, F. et al. 2014; Motte et al. 2018). In addition, the linear structures show a peak of presence at $N_{\text{H}_2} \approx 6 \times 10^{21} \text{ cm}^{-2}$. This peak could indicate that local physical conditions govern the successive emergence of linear and hierarchical modes in the cloud. As in this work we only focus on the analysis of hierarchical structure, this effect is not investigated further here. It is also important to consider that the cascade might appear linear but may become hierarchical at higher resolution, which we do not probe here. This effect might convert some of the pixels associated to linear structures into hierarchical structures, and thus increase the total hierarchy in the cloud.

3. Towards a fractal model of the hierarchical cascade

In Sect. 2, we identify different types of multi-scale structures in NGC 2264. In this section, we focus on the hierarchical structures we highlighted. This hierarchical cascade is occurring inside the densest region of NGC 2264, and dominates the star production in the cloud. However, the characteristics of this cascade throughout the scales has not yet been investigated. In this section we aim to evaluate the scale-free property of this cascade. For this purpose, we compare the hierarchical cascade of NGC 2264 with a fractal cascade model. To make a proper comparison, our model displays the spatial properties of substructures: these are spatially extended as ellipsoids and belong to a specific scale. We also define a network metric to ease the

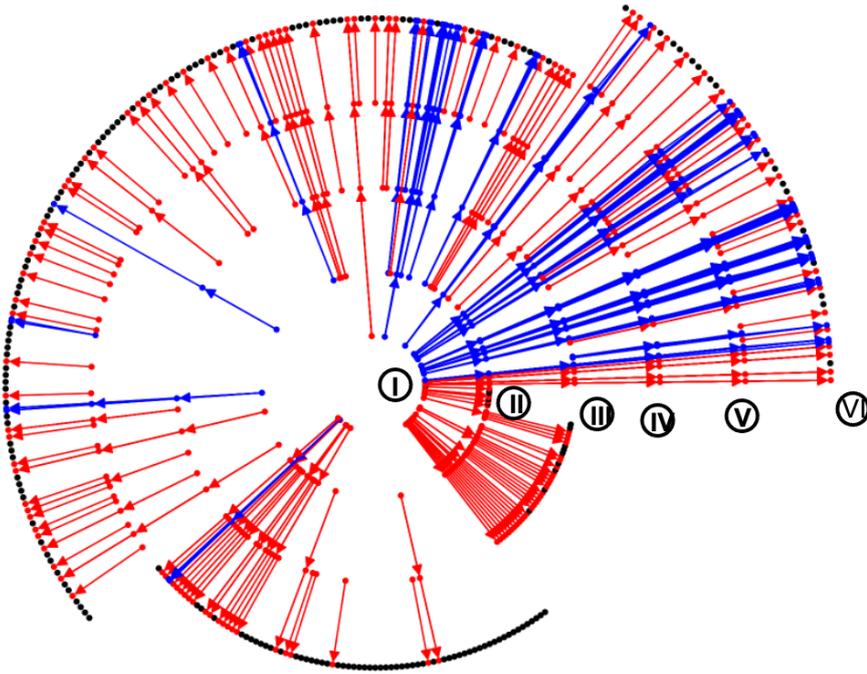


Fig. 3. Network representation of the data. Each substructure is represented as a node with respect to its specific scale, associated with a ring. Rings from I to VI represent respectively [26, 18, 13, 10, 6] kAU and class 0/I YSOs at 1.4 kAU such that inner rings represent the larger substructures and the scale is decreasing towards the outer rings. The angular position indicates the membership of substructures to a structure. The cascade of one structure is processed in the same direction towards the exterior of the wheel. Blue, red, and black colours represent hierarchical, linear, and isolated structures, respectively.

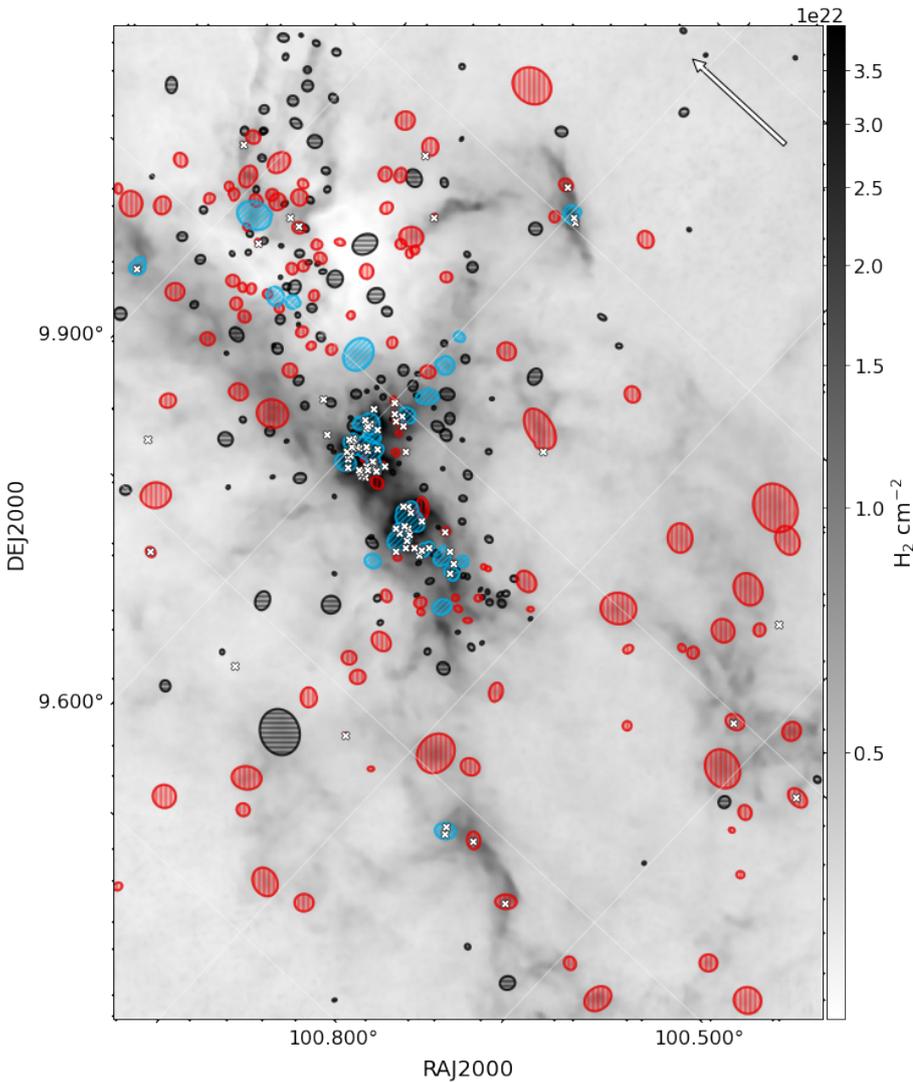


Fig. 4. Column density image of NGC 2264 at 18.2'' resolution. Extracted multi-scale structures are superimposed as coloured imprints with the class 0/I YSOs (white crosses). Cyan (diagonal hatch), red (vertical hatch), and black (horizontal hatch) ellipses locate hierarchical, linear, and isolated structures, respectively. The white arrow indicates the north.

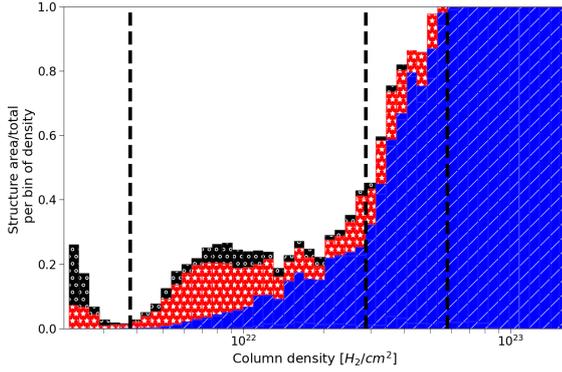


Fig. 5. Stacked histogram of the surface covered by structures per bin of surface density, normalised by the total area covered by a bin of surface density. White bars are unassigned pixels, red (stars) are linear structures, blue (lines) are hierarchical, and black (circles) are isolated. Vertical lines represent threshold for the proportion of area covered by hierarchical structures, from left to right: 0%, 40%, 100%.

comparison between the cascade of NGC 2264 and the fractal model.

3.1. Geometrical fractal model generation

3.1.1. Parameters and bases

The model proposed here consists of generating a population of extended ellipsoidal clumps that subdivide into nested and smaller ellipsoids along the spatial scale at different levels l . In order to reproduce the same network architecture that we build for the data, we define multiple levels l associated to scales s_l . As the model is scale-free, the only important quantity is the scaling ratio $r_{l \rightarrow l+1} > 1$ between two spatial scales s_l and s_{l+1} with $s_l > s_{l+1}$:

$$r_{l \rightarrow l+1} = \frac{s_l}{s_{l+1}}. \quad (1)$$

The value of the initial scale s_0 is intrinsically irrelevant as the process we want to model is scale-free; however, it allows us to define all the levels in the network and to assign a physical dimension to the substructures we model. For example, the scale s_1 is defined with respect to s_0 with the scaling ratio $r_{0 \rightarrow 1}$. These substructures subdivide following a fractal law of constant fractal index $N_{[r_0]}$ such that $N_{[r_0]}$ children are generated each time the scale of the parental substructure is reduced by a factor r_0 . If the scale is reduced by any factor $r_{m \rightarrow l}$ between two levels m and l , we can always define x such that $r_{m \rightarrow l} = r_0^x$ where the exponent x corresponds to the number of times the scale has been reduced by r_0 between levels m and l . The exponent x can be written as:

$$x = \frac{\ln r_{m \rightarrow l}}{\ln r_0}. \quad (2)$$

The number of substructures $N_{m \rightarrow l}$ produced from the level m to the level l is then $N_{[r_0]}^x$, which leads to

$$\ln N_{m \rightarrow l} = \frac{\ln r_{m \rightarrow l}}{\ln(r_0)} \times \ln N_{[r_0]}. \quad (3)$$

In particular, the total number of substructures N_l produced by a level s_0 graph-source at the level l is given by

$$\ln N_l = \frac{\ln\left(\frac{s_0}{s_l}\right)}{\ln(r_0)} \times \ln N_{[r_0]}. \quad (4)$$

As $N_{[r_0]}$ is defined with respect to an arbitrary scaling ratio r_0 , the scaling ratio $r_{l \rightarrow l+1}$ we request in the model does not affect the total multiplicity at the scale s_l . Indeed, with these definitions, the fractal index allows a parental substructure to subdivide into the right number of pieces irrespective of the value of $r_{l \rightarrow l+1}$. For example, a parental node in level l with fractal index $N_{[2]} = 2$ produces 2 substructures for $r_{l \rightarrow l+1} = 2$; and $2^2 = 4$ substructures for $r_{l \rightarrow l+1} = 4$, which is consistent. Without this scaling ratio of reference r_0 in the definition of the fractal index, the production of substructures would be the same for two different $r_{l \rightarrow l+1}$, which can lead to different multiplicity, and therefore to inconsistencies when we stop at the same scale whether we take two, three, or more levels to reach it.

3.1.2. Generative subdivision process

Once the two parameters $N_{[r_0]}$ and $r_{l \rightarrow l+1}$ of the model are defined, we can establish a procedure to generate extended substructures. To start this generative process, an initial population of N_{ini} graph-sources is defined at the initial scale s_0 . Each graph-source subdivides into N_1 pieces of size $s_1 < s_0$. Sizes are determined by the scaling ratio $r_{0 \rightarrow 1}$ (see Eq. (1)) requested in the process. N_1 is determined by Eq. (4) with $l = 1$. Each sibling placement inside a graph-source takes into account the spatial extent of substructures (see Sect. 3.2). This procedure is repeated for all scales $s_l \rightarrow s_{l+1}$ until the last scale s_L is reached. As N_l represents the total number of substructures produced by a graph-source at the level l , we redistribute these N_l substructures equally into their N_{l-1} parents, which will contain $N = N_l/N_{l-1}$ substructures each. For the case in which N is a non-integer number, the selection of the ‘real’ \tilde{N} is done randomly using a binomial rule between $\lfloor N \rfloor$ and $\lceil N \rceil$ with respective probability $1 - \{N\}$ and $\{N\}$; where $\lfloor x \rfloor$ and $\lceil x \rceil$ denote the floor and ceiling function of x , respectively, and $\{x\}$ denotes its fractional part. It is not excluded that two graph-sources share a child in common if their extent overlaps; in this instance, they would be part of the same structure. Consequently, a structure generated by our model possesses on average $N_{\text{ini}} \times N_l$ substructures at the level l , but individual structures may not host exactly $N_{\text{ini}} \times N_l$ substructures if $N_{\text{ini}} \times N_l$ is a non-integer.

3.2. Rules of substructure selection

3.2.1. Geometrical parameter sampling

Because our model generates extended objects, it is necessary to establish rules in order to synthesize a coherent population both in terms of spatial coverage inside the same level l , and in terms of inheritance. Each substructure is defined by its centroid coordinates (x, y) ; by its major and minor axis (a, b) , respectively; and by its position angle θ in 2D space. The coordinates of the graph-sources are sampled uniformly in a squared window while the coordinates of the children are sampled uniformly inside their parental ellipsoids (more details in Sects. 3.2.3 and 3.2.4). The orientation is sampled uniformly between 0 and π . The major axis a is sampled in a normal distribution $\mathcal{N}(s_l, \frac{s_l}{10})^2$ for which the mean value s_l is the scale of the substructure inside the level l , and the standard deviation is equivalent to 10% of its typical

² The probability of getting a negative value is given by the cumulative function $P(x < 0) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{0-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right)$, where erf represents the error function. This probability is independent of s_l because $\mu = s_l$ and $\sigma = \frac{s_l}{10}$ in our case. As $P(X < 0) < 1 \times 10^{-16}$, the probability of sampling a negative value is unlikely.

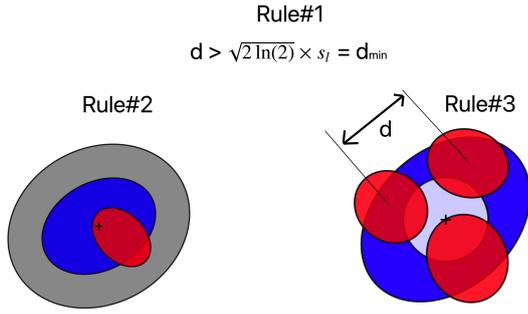


Fig. 6. Rules of selection for the model. *Rule#1*: the distance d between the centroids of two substructures of the same level at scale s_l needs to exceed the indicated tolerance. *Rule#2*: as the child (red) lies within its parent (blue), its extent can go beyond the grey area as long as 75% of its area remains inside its progenitor. *Rule#3*: child (red) centroid lies within its parent (blue), but avoids the forbidden area at the centre (grey). The minimal separation d_{\min} between the centroids of siblings is seen as the diameter of the forbidden area.

scale to allow small fluctuations. The minor axis is taken from the value of the major axis and the aspect ratio which is sampled uniformly between 0.5 and 1 as `getsf` extraction rejects clumps with aspect ratios < 0.5 .

3.2.2. Rule#1: minimal distance between substructures of an l level

Two substructures that belong to the same level l cannot be closer (taking the centroid distance) than their typical scale, or they would blend. Their spatial extent can only overlap up to a certain limit. In this model, the typical scale s_l of generated substructures is taken to be 2σ of the extent of a real substructure. However, in observational data, the typical scale of substructure, which can be associated to the image beam, is defined with respect to their FWHM. In our model, two substructures of scale s_l cannot be closer than $\sqrt{2 \ln(2)} \times s_l$. The factor $\sqrt{2 \ln(2)}$ is the scaling factor between FWHM and 2σ such that the scale defined in the model is comparable to the scale one can define in real data. This leads to Rule#1: the minimal distance between the centroids of two substructures inside the level l is $\sqrt{2 \ln(2)} \times s_l$.

3.2.3. Rule#2: child coverage inside its parent

In Sect. 2.2, the inheritance property of the network is defined as the inclusion relationship between a child and its parent. The two are connected if 75% of the child spatial extent is contained inside its parent (see Fig. 6). This relationship needs to be kept when a child is placed inside a parent during the generative procedure. In polar coordinates $[R; \phi]$, the equation of the border of an ellipse of half major axis a and half minor axis b is:

$$R_{\max} = a \sqrt{\cos^2 \phi + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sin^2 \phi}. \quad (5)$$

The child centroid coordinate inside such an ellipse is sampled in:

$$\begin{cases} R \in [0, R_{\max}] \\ \phi \in [0, 2\pi] \end{cases}. \quad (6)$$

A threshold limit is then imposed to verify that the proportion of the area of the child that lies within that of its parent actually

exceeds 75%. This defines Rule#2: a parent needs to cover at least 75% of the area of its child for this child to actually exist and be placed. This threshold is purely arbitrary and 75% is chosen because this is the tolerance requested to define our structures in the data for NGC 2264.

3.2.4. Rule#3: room for siblings

During the generation of hierarchical structures, it is expected that more than one child need to be placed inside a parent. When adding siblings, a geometrical constraint can appear if the first selected child lies in the middle of its parent. A child placed in the central area may prevent its siblings from being placed as its presence drastically reduces the available space. If this happens, the parental clump may be overcrowded and there could be insufficient space available to actually select a sibling according to Rule#1 and Rule#2. To reduce this geometrical constraint, the inner area of the parent is forbidden for the centroid selection of a child. By adding this forbidden area, the probability of choosing a child that prevents the placement of siblings is reduced, relaxing the constraint. The full extent of this inner region is taken as the minimal separation between two clumps (consequence of Rule#1), and is supposed to be circular (isotropic because the distribution of orientation θ is uniform). Therefore, the radius of the inner region is half of its full extent (see Fig. 6). In case of multiple children, centroid coordinates are selected according to Rule#3 which alters the original selection as follows:

$$\begin{cases} R \in \left[\frac{\sqrt{2 \ln(2)} \times s_l}{2}, R_{\max} \right] \\ \phi \in [0, 2\pi] \end{cases}. \quad (7)$$

We note that if only one child is desired, this area becomes useless and the child is able to be placed anywhere inside its parental area, provided that Rule#2 is fulfilled. Consequently, our model generates a population of substructures and takes into account their spatial extent. The resulting network mimics those that can be derived from a real observational data set and can be tested.

3.3. Metric to describe a fractal hierarchical cascade

3.3.1. A measure of the network fractality

Our geometrical fractal model generates a population of extended substructures. These substructures can form hierarchical structures (for $N_{[r_0]} > 1$) or linear structures (for $N_{[r_0]} = 1$). As we focus on hierarchical structures, we consider that the population of structures generated by our model is hierarchical. In order to characterise the hierarchical cascade in terms of multiplicity, we define a network fractality coefficient \mathcal{F} . This coefficient is a measure of the fractal index that would best describe a network (e.g. a hierarchical structure). Computing this coefficient for a structure generated by our model returns the input free parameter $N_{[r_0]}$. Therefore, by measuring \mathcal{F} in the data, we aim to estimate the parameter $N_{[r_0]}$ that would best fit our model. To compute this coefficient \mathcal{F} in the data, we first measure the total number of nodes (i.e. substructures) V_0 of a network G_0 that possesses L levels of scales s_l . We then compare this number of nodes with the expected number of nodes produced by an ideal fractal network using Eq. (4). Consider an ideal fractal network G that subdivides into $N_{[r_0]}$ pieces for each scale reduction of an arbitrary factor r_0 . This network of

reference contains the same levels as G_0 . On one hand, G_0 possesses a total number of V_0 nodes. On the other hand, the total number of nodes V possessed by G is the sum over the levels of all nodes contained in the level l . To lighten the notation, we consider here $N = N_{[r_0]}$. The number of nodes at a level l is, according to Eq. (4), N^{x_l} where $x_l = \frac{\ln(s_0/s_l)}{\ln(r_0)}$. The total number of nodes belonging to G is

$$\begin{cases} V = N^{x_0} + N^{x_1} + \dots + N^{x_L} = \sum_{l=0}^L N^{x_l} \\ x_l = \frac{\ln(s_0/s_l)}{\ln(r_0)} \end{cases} \quad (8)$$

Because both networks need to be equivalent in terms of the number of nodes for comparison, we have $V_0 = V$. When this condition is fulfilled, the measure of the fractality \mathcal{F} of G_0 is equivalent to the fractal index N by definition. Hence, $\mathcal{F} = N$ when $V_0 = V$. The previous equation can therefore be written as

$$\begin{cases} V_0 - \sum_{l=0}^{L-1} \mathcal{F}^{x_l} = 0 \\ x_l = \frac{\ln(s_0/s_l)}{\ln(r_0)} \end{cases} \quad (9)$$

Consequently, \mathcal{F} is the root solution of the previous equation, and can be computed numerically. With the definition of the exponent x_l , \mathcal{F} is independent of the set of scales s_l available. Indeed, a different set of scales would have no impact on the theoretical value of \mathcal{F} because it is defined with respect to a fixed, arbitrary scaling ratio r_0 . However, some of the hierarchical structures in the data for NGC 2264 contain multiple graph-sources, whereas Eq. (9) accounts for networks with a single graph-source. For each graph-source i of a structure, we compute a fractality \mathcal{F}_i that is computed from the subnetwork described by all the nodes that are directly affiliated to this graph-source i . For example, consider a hierarchical structure with a graph-source $i = 0$ that is linked with nodes labelled A , B , and C . Another graph-source $i = 1$ is affiliated to nodes C , D , and E . Then, \mathcal{F}_0 is computed from nodes A , B , and C regardless of D and E , even though these latter are part of the structure. Similarly, \mathcal{F}_1 is computed from nodes C , D , and E . Hence, the fractality of the whole structure is defined as the average of these individual fractality coefficients over all the graph-sources:

$$\mathcal{F} = \langle \mathcal{F}_i \rangle_{\text{sources}} = \frac{\sum_{i=0}^{N_{\text{sources}}} \mathcal{F}_i}{N_{\text{sources}}} \quad (10)$$

The measurement of \mathcal{F} can be performed for any network built under our graph-theoretic representation, whether data comes from the model or real data. From this measurement, we can assess the number of subdivisions one equivalent fractal network would have with the same number of levels. We can evaluate the production of substructures scale by scale and compare it with an equivalent fractal network using our fractal model.

3.3.2. Structure productivity at each scale

The productivity of structures evaluates, at each scale s_l of a structure, the number of substructures that appears with respect to the number of graph-sources N_{sources} in this structure. This

is the ratio between the number of substructures at a scale s_l , and the number of graph-sources of the structure. Normalising by N_{sources} is interesting because if a structure contains multiple graph-sources, the total number of substructures (assuming an ideal fractal cascade) would be multiplied by N_{sources} , and the production rate might be biased. For a fractal process of index $N_{[r_0]}$, Eq. (4) gives the relationship between the number of substructures N_l produced at the scale s_l and $N_{[r_0]}$. By dividing the equation by N_{sources} :

$$\frac{N_l}{N_{\text{sources}}} = \frac{N_{[r_0]}^{\ln(\frac{s_0}{s_l})/\ln(r_0)}}{N_{\text{sources}}} \quad (11)$$

This leads to

$$\ln\left(\frac{N_l}{N_{\text{sources}}}\right) = \frac{\ln\left(\frac{s_0}{s_l}\right)}{\ln(r_0)} \times \ln N_{[r_0]} - \ln N_{\text{sources}} \quad (12)$$

Letting $Y = \ln\left(\frac{N_l}{N_{\text{sources}}}\right)$ and $X = \ln\left(\frac{s_0}{s_l}\right)$, the relation can be written as

$$Y = \frac{\ln N_{[r_0]}}{\ln(r_0)} \times X - \ln N_{\text{sources}} \quad (13)$$

The productivity of an ideal fractal cascade should be described by a power law in which the slope in a log–log scale indicates the value of $\frac{\ln N_{[r_0]}}{\ln(r_0)}$. In order to test the fractal behaviour of a structure, we can evaluate the compatibility between the productivity of the structures in NGC 2264 data and the productivity of a fractal structure with a similar fractality.

This can be done easily as the slope of the productivity depends directly on our model parameters. Moreover, in the case of an ideal fractal cascade, the measurement of the fractality corresponds to the fractal index we need to put in our model. Therefore, measuring the average fractality per graph-source in a structure gives us what should be the fractal index, which we put in the model for comparison.

3.3.3. Fractality uncertainty and limit of the model

In this subsection, we aim to characterise the uncertainty of the fractality coefficients computed from our model, which we want to compare to the theoretical fractality index of an ideal cascade process. Unlike the former network, the ideal cascade is characterised by a fractional number of substructures for a given scale. The network built from the NGC 2264 data or our model is characterised by an integer number of substructures for a given scale. Therefore, for each individual hierarchical structure, we derive an approximate value of the fractality. However, if we assume that a population of structures subdivide with the same fractal law (e.g. generated by our model), then taking the average of the fractality coefficients of this population must converge to the true value of the fractality.

There is another source of error when considering model-generated data. Indeed, our model requires that a substructure at a level l subfragments into at least one child for the cascade to continue towards lower levels. This condition guarantees that the resulting network is continuous along the branches, and that each branch is equivalent from one to another. For example, consider structures that are supposed to contain 1.2 substructures at the level $l = 1$ and 1.5 substructures at the level $l = 2$ on average, and specifically any graph-source of one of the structures. At the level l , the model selects an integer number of substructures to

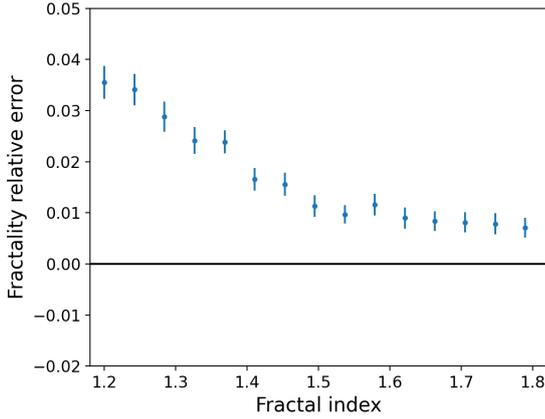


Fig. 7. Average fractality relative error over the structures for different fractal index put in the model. For each fractal index we sample 1000 initial graph-sources, subdividing through levels defined by the scaling ratios of NGC 2264. Error bars are taken as $\sigma/\sqrt{N-1}$ where σ is the standard deviation of the fractality of the N structures.

put into the level $l = 1$: either 1 or 2 can be selected, but on average it has to be 1.2. Assuming the model selects 2, we need to place 1.5 substructures at the level $l = 2$ inside two existing substructures at level $l = 1$. As zero children is impossible, the model always puts one substructure inside each of the existing substructures. The choice of selecting two substructures at the level $l = 1$ always results in two substructures at the level $l = 2$. However, the choice of selecting one substructure at the level $l = 1$ results in 1.5 substructures on average at the level $l = 2$. The total number of substructures tends to be overestimated. As a consequence, the fractality is overestimated. This can be seen in Fig. 7 where the value of the fractality is systematically above the expected value for model-generated data. However, this error is always less than 5% of the expected value. This effect is due to a low fractal index coupled to a low scaling ratio between two consecutive levels.

If we want to compare our model with the data for NGC 2264, we need to take into account another effect. Indeed, in these data, some of the intermediate substructures might not be detected at a specific scale. An undetected clump at this scale directly affects the fractality value because it reduces the number of nodes of the structure by adding a hole in the cascade (see Fig. 8). Our model can be used to quantify the error caused by the missed detections to determine a fractality confidence interval. For different fractal index (see Fig. 9), we use the scaling ratios that are defined by the NGC 2264 data set and we generate a population of 1000 graph-sources. We then randomly delete a specific proportion of nodes inside each structure, excluding their graph-sources, and compute the fractality.

3.4. Fractal hierarchy in NGC 2264

Further analysis regarding the hierarchical structures is performed with NGC 2264 data using both our geometrical model and the metric \mathcal{F} defined in Sect. 3.3. This analysis is performed specifically on hierarchical structures because both the model and the metric we designed were made to describe hierarchy. Computing the fractality on linear structures systematically returns a value of 1, and computing it for isolated structures is useless by definition. As pointed out in Sect. 3.3.3, fractality computation is biased by the fact that some hierarchical structures may miss intermediates substructures. In order to properly

compare the structures of NGC 2264 with the model, we need to estimate the number of missing substructures in these structures. As the networks that represent these structures contain holes at some levels instead of nodes, we count the number of holes. Hence, a structure containing $\{1, 0, 0, 2\}$ substructures at a level l is considered to possess four holes in total (two holes per graph-sink). Under the assumption that no graph-sink is missing, and in the worst case scenario, this structure can have a $\{1, 2, 2, 2\}$ configuration. This method overestimates the number of holes, because it does not consider the eventual merging of substructures at higher scales. As we overestimate the number of substructures, we overestimate the fractality we want to compute. Hence, we can assess an upper limit. To estimate a lower limit, we take the fractality value without any hole-filling.

On average, the extracted hierarchical population for NGC 2264 gives $\mathcal{F} = 1.45$. However, the median value (1.33) seems to be a more appropriate estimator because of the asymmetry of the distribution (see Fig. 10). As our data contain holes, this estimation of the fractality is underestimated. We therefore take $\mathcal{F}_{min} = 1.33$ as a lower limit for the fractality. We estimate the maximum proportion of holes in hierarchical structures to be 45%. This corresponds to a fractality negative variation of $\sim 15\%$ according to Fig. 9. Solving $(1 - 0.15)\mathcal{F}_{max} = 1.33$, we estimate the upper limit $\mathcal{F}_{max} = 1.57$. This value is also consistent with the median of the fractality distribution after filling the holes in the structures. As the true fractality for the whole population is likely to fluctuate between 1.33 and 1.57, we derive $\mathcal{F} = 1.45 \pm 0.12$ for the total population of hierarchical structures in NGC 2264.

Taking into account the bias introduced by the holes, we choose to compare the NGC 2264 hierarchical structures with the structures of our fractal model of index 1.57, where we randomly deleted 45% of the nodes inside each structure. In particular, the distribution of fractality coefficient in NGC 2264 is wider than the distribution extracted from our model (see Fig. 10). This means that the NGC 2264 structures and our model are not equivalent in terms of fractality despite our correction concerning the holes. In fact, a single value of fractality fails to describe every single structure in the data. If the fractal assumption were true, we would expect to get a homogeneous fractality coefficient throughout the cloud regardless of the scale considered (assumption of mono-fractal process) and also independent of the physical environment (temperature, density, turbulence). This dispersion may suggest that the fractality of structures, and by extension the multiplicity of their substructures, could depend either on local physical conditions or on the scale itself.

The hierarchical property of the structures of NGC 2264 can be tested by analysing the hierarchical cascade scale by scale using the productivity of structures per graph-source as introduced in Sect. 3.3.2. The result of the productivity curve in NGC 2264 is also compared with our model in Fig. 11 with a fractal index of 1.57 with 45% of the nodes removed. This comparison confirms that the hierarchical structures in NGC 2264 are incompatible with a single fractal fragmentation. Indeed, between 26 kAU and 13 kAU, the productivity of the structures of NGC 2264 remains constant: the networks are locally linear until the resolution is high enough to observe a subdivision. No hierarchical cascade seems to occur at these scales. Because we do not obtain the same trend with our geometrical model, this effect is not due to low scaling ratios between the scales. The geometrical constraints coupled with random deletion of holes cannot explain this result. It is important to consider the fact that we encounter the same issue as before concerning the potentially missed intermediate substructures. The previous technique

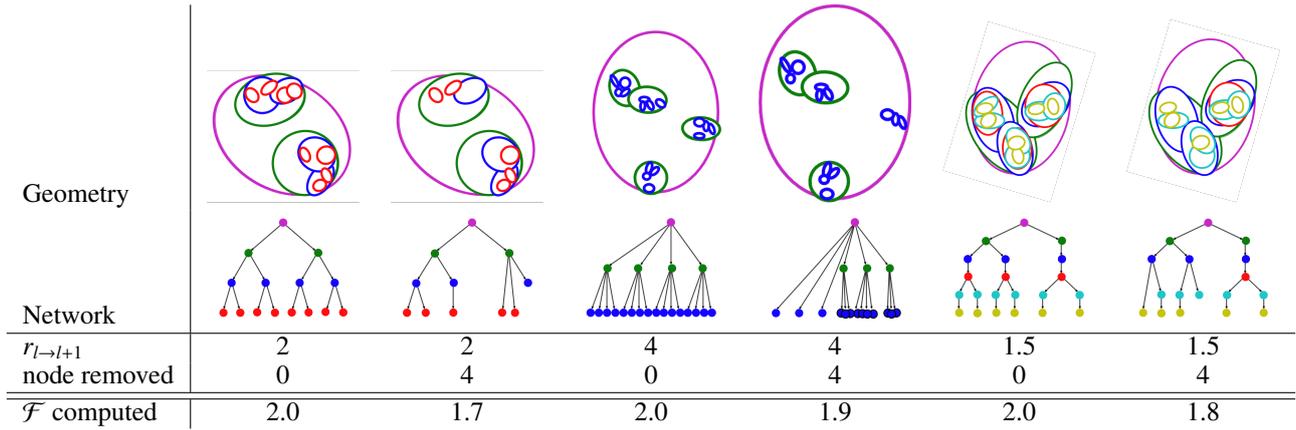


Fig. 8. Example of structures generated by the model with a scaling index $N_{[2]} = 2$ and multiple constant scaling ratio $r_{l \rightarrow l+1} = r, \forall l$. Nodes were removed randomly to simulate the types of structures that the observation can provide. The fractality coefficient \mathcal{F} is reported as well as the number of missing nodes. In all of these generations, $\mathcal{F} = 2$ is expected.

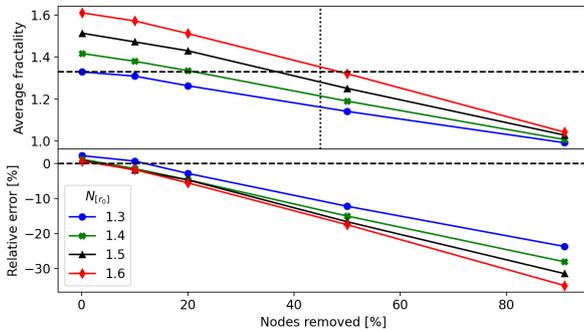


Fig. 9. Ten thousand graph-sources sampled in our model and subdivided along the scales defined for NGC 2264 (see Sect. 2.1) for the four different fractal indices $N_{[r_0]}$ reported in the legend. *Top*: average fractality of the whole population for each fractal index as a function of the removed nodes. Horizontal dashed line indicates the fractality measured for NGC 2264 in Sect. 3.4. The vertical dashed line corresponds to the estimation of the maximum proportion of nodes undetected in NGC 2264 in Sect. 3.4. *Bottom*: relative error of the fractality as a function of the removed nodes. Horizontal dashed line indicates a 0% variation. Positive relative errors are due to over-sampled substructures in the model with low fractal index (more details in text Sect. 3.3.3).

that consists of filling the holes cannot be used here because it assumes that the hierarchy begins at the highest levels in order to assess what would be the worst-case scenario to evaluate an uncertainty, while here we investigate the multiplicity property scale by scale. A similar correction would completely bias the result, given that we do not know whether or not the hierarchical cascade actually has a starting scale; and if it does, we do not know what this starting scale would be. Therefore, we consider the curve without any correction and discuss its reliability in Sect. 4.1. A depletion of YSOs can be seen below 6 kAU: structures in NGC 2264 do not produce as many substructures as the model at the last level. Indeed, down to 1 kAU, the model predicts about four class 0/I YSOs per graph-source in a structure, whereas about one or two YSOs are produced per graph-source in most structures in NGC 2264. There are multiple factors that could explain this effect: half of the graph-sinks are clumps which might indicate that the gas reservoir is not fully depleted, and star formation can still occur in the future ; the

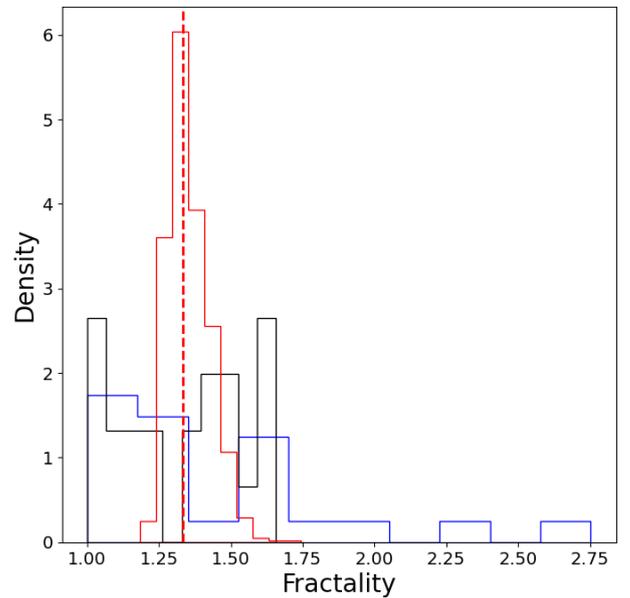


Fig. 10. Normalised distribution of fractality coefficient \mathcal{F} for different sets of data. In blue, \mathcal{F} distribution for the hierarchical structures in NGC 2264. In red, \mathcal{F} distribution with our fractal model of index 1.57 where we have removed 45% of the nodes. In black, \mathcal{F} distribution for the convolved data (see Sect. 4). The red dotted line corresponds to the median value of 1.33.

subdivision rate slows down to produce YSOs ; the oldest class 0/I evolve towards class II objects and are not taken into account in this study.

4. Discussion

4.1. Origin of the plateau observed in the hierarchical cascade

In Sect. 3.4, we show that the hierarchical cascade in NGC 2264 is not fractal over the full 6–26 kAU range. Indeed, the substructure production scale by scale plateaued on scales of >13 kAU. We perform a series of tests allowing us to evaluate the robustness of the cascade and check whether the plateau may arise from spatial resolution and/or wavelength effects.

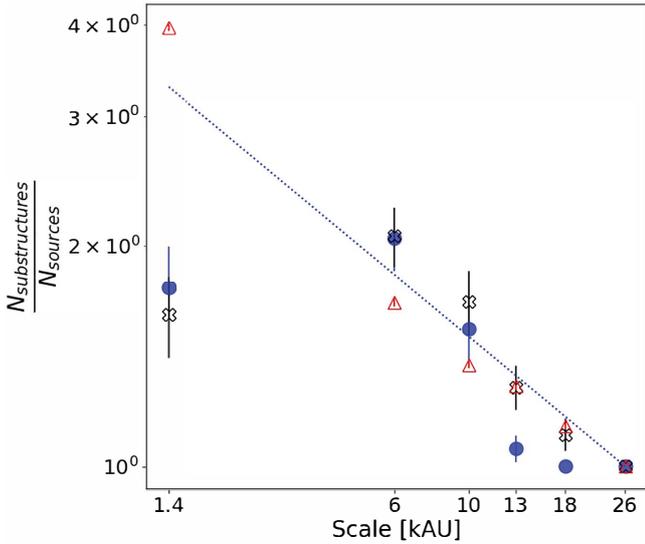


Fig. 11. Average productivity of hierarchical structures for each scale. Blue circles represent NGC 2264 data. Red triangles represent a population of 1000 structures generated by our geometrical model with a fractal index of 1.57 where we have removed 45% of the nodes. Blue dotted curve represents an ideal fractal fragmentation of index 1.33. Black crosses represent the same curve for convolved data (see Sect. 4).

4.1.1. Spatial resolution effect

First, we start by checking spatial resolution effects. When a cloud is observed, the flux received at a given wavelength is convolved with the instrumental beam whose size defines the angular resolution. Through convolution, two substructures at a given scale may or may not merge. If the substructures are spaced far enough apart such that they do not merge, we would expect to have a one-to-one correspondence between the original substructures and their convoluted counterparts, that is, a plateau in terms of substructure production. If the substructures are close enough to merge at higher resolution, then this plateau cannot exist as there is no longer a one-to-one correspondence. In order to evaluate the influence of spatial resolution on our results, we performed a convolution of the 160 μm emission image at [18.2, 24.9, 36.3]'' resolution. New catalogues of clumps were obtained using `getsf` source extraction on the new images using the same setup as for the original data (see Sect. 2.1). These catalogues were then reprocessed by our network procedure in order to extract the new structures, keeping the original 70 μm and class 0/I YSO data at lower scales. When we investigate the substructure production scale by scale with these modelled data, we do not observe any plateau on scales >13 kAU, but we see an actual increase in the substructure production (see Fig. 11). Therefore, the plateau cannot originate from a pure spatial resolution effect.

4.1.2. Wavelength effect

Secondly, we discuss the influence of the wavelength on the detection of clumps. Indeed, each spatial resolution is associated with a specific wavelength, and each wavelength is associated with a different flux and emission temperature of dust. We do not observe exactly the same sky between images at 500 μm and images at 250 μm or at 160 μm . The plateau that is observed for scales larger than 13 kAU (see Fig. 11) could be due to the failure to detect large-scale clumps that would allow their productivity

curve to flatten at high scales. We also investigated whether there is indeed a tendency to loose clumps at large scales.

Let us set $I(\theta, \lambda)$ as the map associated with the θ resolution in arcsec and λ wavelength in μm for simplicity. We already have original data for which a wavelength is associated with a resolution (i.e. $I(36.3, 500)$, $I(24.9, 350)$, $I(18.2, 250)$, $I(13.5, 160)$), and the data we obtained by convolving the 160 μm map to higher resolutions (i.e. $I(13.5\text{-to-}36.3, 160)$). In order to complete these two data sets, we additionally convolved the 250 and 350 μm maps at 36.3'' resolution and extracted clumps with the `getsf` procedure. We thus obtained new $I(36.3, 250)$ and $I(36.3, 350)$ data. Using our methodology of associating clumps with each other, we can connect the $I(36.3, 160\text{-to-}500)$ data in terms of wavelength (and not in terms of scales). With these data we investigated the persistence of the clumps in each of the data sets, which is the proportion of clumps that are found from one scale or wavelength to another. This study was performed in terms of constant wavelength ($I(13.5\text{-to-}36.3, 160)$), constant resolution ($I(36.3, 160\text{-to-}500)$), and real data ($I(13.5\text{-to-}36.3, 160\text{-to-}500)$). We completely ignored the 70 μm clumps and YSOs because we only want the large-scale information and, unlike longer wavelengths, 70 μm does not trace optically thin thermal emission. We want to assess how the appearance of a clump changes along the wavelengths. As we are convolving the images to have new datasets and populations of clumps, we want to avoid the case where a clump in the vicinity of the one we are looking at interferes in any way with its persistence measurement. As hierarchical structures are a complex of clumps, and isolated structures are observable in only one wavelength, we need to consider only the linear structures. Indeed, the latter represent multi-scale and multi-wavelength single objects without immediate proximity of another object. With this method of synthesising data at several different wavelengths ($I(36.3, 160\text{-to-}500)$), we implicitly couple the resolution effect with the wavelength effect. Indeed, with successive convolutions of a map, the flux of a clump is diluted in its close environment, which corresponds to the size of the Gaussian kernel with which we convolve the map. Despite this, we know what happens during a pure convolution with the set $I(13.5\text{-to-}36.3, 160)$ (see Sect. 4.1.1).

Comparing the persistence of $I(13.5\text{-to-}36.3, 160\text{-to-}500)$ and $I(13.5\text{-to-}36.3, 160)$ data, we show (see Fig. 12) that the persistence of the original data is very similar to the persistence of data obtained from the convolution. For the 24.9'' to 36.3'' transition in both data sets, 45% of the clumps at 24.9'' can be retrieved at 36.3''. In the other transition, 70% of the $I(18.2, 250)$ clumps are retrieved in the $I(24.9, 350)$ data whereas 54% of the $I(18.2, 160)$ clumps are retrieved in the $I(24.9, 160)$ data. This suggests that from one scale to another, on average, the resolution effect dominates the probability of detecting a clump, and wavelength might influence the detection of clumps. Nevertheless, we systematically detect more clumps at equal resolution in $I(13.5\text{-to-}36.3, 160\text{-to-}500)$ than in $I(13.5\text{-to-}36.3, 160)$. Therefore, if there is a wavelength effect, it tends to increase the number of clumps detected. However, in order to flatten the productivity curve at large scales, the number of substructures needs to be reduced so that a plateau can be obtained. Furthermore, the reason we have a plateau in the productivity curve is that a single substructure is produced between 250 and 500 μm . There should be a loss of detection in this area. If we look at the persistence on the $I(36.3, 160\text{-to-}500)$ data, by degrading the map at 350 μm to 36.3'' resolution, we find 79% of the clumps detected at 500 μm . Therefore, if we have a 21% loss between 500 and 350 μm , this means that one clump out of five disappears. To explain the

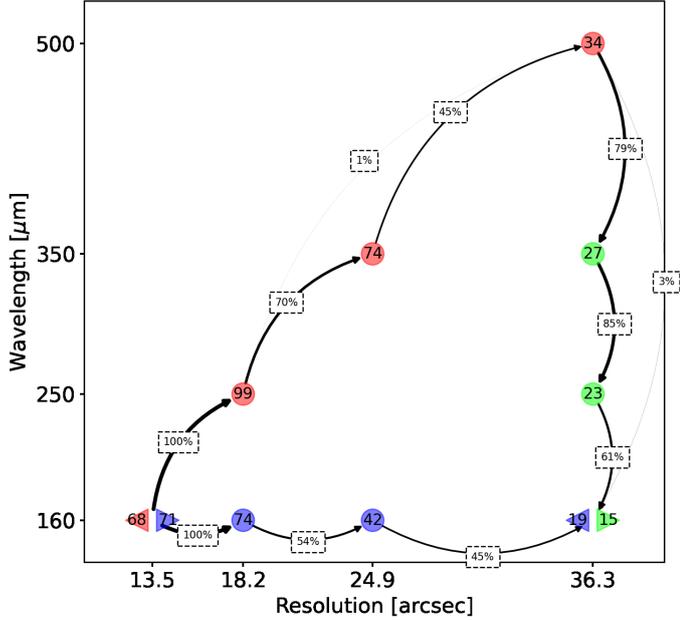


Fig. 12. Representation of the successive association of clumps between scales and wavelengths for linear structures. Red markers are associated with the original data from NGC 2264. Blue markers are associated with the data from the convolution of the image at 160 μm to resolutions of 13.5, 24.9, and 36.3". Green markers are associated with data from the convolution of the 160, 250, and 350 μm maps to a resolution of 36.3". The numbers in the markers indicate the number of associated substructures. Triangle markers are turning points to make it clear that even though the data are the same, the substructures associated with the linear structures may change. The percentage in the middle of the arrows gives the proportion of substructures that persist from the out-coming node to the in-coming node.

plateau, we would need one clump out of two given the geometrical constraints, which is at least a 50% loss. As this loss is not obtained at longer wavelengths, the lack of clumps on this range seems unlikely. The same applies to losses between 350 and 250 μm . On the other hand, if there were a tendency for clumps to appear at longer wavelengths, this could not explain a flattening of the curve because there would be more substructures in this wavelength domain. Wavelength effects appear to be negligible compared to resolution effects and seem insufficient to explain a flattening of the hierarchical cascade at large scale. The spatial resolution effects are already contained in the 160 μm convolved data set, and are already contained in the productivity curve in Fig. 11. We can therefore assess the physical reality of the plateau observed in the productivity curve for scales of between 13 kAU and 26 kAU.

4.2. Interpretation of the hierarchical cascade

The hierarchical cascade we outlined can be interpreted as a fragmentation cascade. According to this framework, the turbulent (Larson 1978; Padoan 1995) or gravo-turbulent (Hopkins 2013; Guszejnov et al. 2018a; Vázquez-Semadeni et al. 2019) fragmentation model assumes that the gravitational instabilities responsible for the cloud fragmentation originate from supersonic (Padoan 1995) velocity propagation. These turbulent motions allow matter to condense locally, resulting in a cascade of turbulence from large to small scales. These instabilities subsequently ‘subfragment’, allowing a chain of ‘collapse within collapse’ (Vázquez-Semadeni et al. 2019; Krause et al. 2020) in

which the smaller scales accrete matter from the larger scales. However, this idea of a hierarchy in the fragmentation process is not universal. Indeed, as the gas flow velocities become subsonic (Mach number $>2-3$, Hopkins 2013; Guszejnov et al. 2018b), the cloud may collapse into a single massive fragment instead of forming several sibling fragments (Guszejnov et al. 2018b). Therefore, if we consider that the hierarchical cascade originates from fragmentation processes, we can dissociate two regimes. Indeed, in this interpretation, hierarchical structures describe a mode of hierarchical fragmentation (e.g. Hoyle 1953; Vázquez-Semadeni et al. 2019) in which a single clump fragments into multiple pieces while linear structures may be associated to a monolithic fragmentation where the collapse is radially concentrated and one clump collapses into a single clump or YSO (e.g. Shu 1977; Krause et al. 2020).

This concept of hierarchical ‘subfragmentation’ originates from Hoyle (1953) who studied the hierarchical collapse from Galactic scale down to prestellar cores assuming isothermal collapse of a spherical cloud. In this model, we expect a fractal process of fragmentation in which two fragments are formed each time the scale of the parent is reduced by a factor of two. Applied to our work, this process would be associated to a fractality value of two. Considering a fragmentation process that starts at 13 kAU, a fractality of two would, on average at 6 kAU, induce 2.17 fragments per graph-source whereas we actually get 2.05 ± 0.20 fragments at 6 kAU in NGC 2264 which is consistent with the hierarchical model of Hoyle (1953). Nevertheless, hierarchical fragmentation is associated with turbulent scale-free processes which one would expect to exhibit fractal behaviour. However, there does not seem to be any fractal subdivision in NGC 2264, but rather a range of scales for which the cloud does not fragment before starting these hierarchical processes. Therefore, it appears that turbulent processes alone do not fully describe the hierarchical cascade observed in NGC 2264. Hopkins (2013) modelled intermittency phenomena that can originate with shocks or sound waves. These intermittency phenomena have the effect of constraining the hierarchical cascade process between several scales, which could explain the plateau for scales >13 kAU seen in the hierarchical cascade in NGC 2264. Consequently, it would be necessary to develop a multi-fractal description of the cloud, where the hierarchical cascade is not scale-free but scale-dependent.

4.3. Influence of star formation history

Regarding the stellar component of the hierarchical structures, it appears that the production of YSOs slows down below a certain scale of <6 kAU. However, it is also possible that this is an incompleteness effect with respect to the star formation phenomena that occurred in the past in NGC 2264. Indeed, we have only taken into account the class 0/I YSOs, leaving aside the more evolved class II YSOs. Knowing that the hierarchical structures are mainly located in the central hubs, it is likely that the available gas reservoir replenishes throughout the filaments (conveyor belt model, Longmore et al. 2014) which would allow the production of YSOs for several star forming events. This hypothesis would favour the cohabitation of class 0/I with class II YSOs within the hierarchical structures. However, this scenario does not seem to be able to fully explain this decrease in star production because, taking into account the class II YSOs from Rapson et al. (2014), the hierarchical structures would produce on average 2.26 ± 0.28 YSOs per graph-source (instead of 1.75 ± 0.24 with class 0/I only). Considering the Hoyle (1953) fragmentation estimation (fractality $\mathcal{F} = 2$), we expect to produce on average

nine YSOs per graph-source. Therefore, the fragmentation of the clumps into YSOs seems to be inhibited, or is still in the process of forming prestellar objects.

5. Conclusion

We designed a methodology based on connected network representation to link clumps of different scales and YSOs. This linkage respects an inclusion principle in order to study a snapshot of the spatial properties of the hierarchical cascade. The computed network is structured in different levels, each one of them being associated with a specific spatial scale. We designed a geometric model to generate a population of extended objects that subdivide according to a fractal law whose associated fractal index takes into account the scaling ratios between the levels. Using the *Herschel* five-band observation of resolution [8.4, 13.5, 18.2, 24.9, 36.3]'' coupled with the class 0/I YSOs from the *Spitzer* survey of NGC 2264, we applied our methodology and extracted structures of three types: hierarchical, which we associate with a hierarchical fragmentation process; linear, which we interpret as a monolithic fragmentation process; and a final isolated mode. Our analysis of the structures reveals various phenomena. We observed that linear structures that incubate a YSO exist, showing that monolithic collapse and hierarchical collapse can coexist within the same cloud. In particular, the hierarchical structures are the main incubators of YSOs in NGC 2264, and have therefore been the main fuel for star formation. Finally, regions with high column density are correlated with hierarchical collapse while other regions are dominated by monolithic collapse.

Our network analysis and comparison with our model show that although we were able to measure an average fractality of $\mathcal{F} = 1.45 \pm 0.12$ on the whole network, the hierarchical cascade is incompatible with a purely fractal model when we analyse it scale after scale. We also find that no hierarchical cascade occurs between 26 and 13 kAU, and that no obvious hierarchical cascade seems to occur between 6 kAU and the YSO scale of class 0/I at 1.4 kAU, indicating that hierarchical cascade may occur mainly between 6 and 13 kAU in NGC 2264.

Our methodology provides a new approach to studying fragmentation processes within molecular clouds. We are planning future work to define a metric to quantify how the subdivision of our structures deviates from a scale-free, or fractal, process. However, the fractality coefficient we define can be reapplied to analyse the subdivision of dendrograms (Rosolowsky et al. 2008) in order to study the hierarchy in column density instead of hierarchy in scales as is done in the present paper. By studying the hierarchy in density using dendrograms, it is possible to investigate the cascade from a larger dynamic.

One of the goals of this work is to provide tools to study the links between multi-scale structure of gas and the multiplicity of YSOs/NESTs. However, the current study is limited by the scale dynamics of the gas to which we have access, from 6 kAU to 26 kAU. In order to better investigate the link between multiple systems (<1 kAU), the UWPs of high-order multiplicity (<10 kAU) (Joncour et al. 2017), and the small stellar groups (NESTs, Joncour et al. 2018) together with the multi-scale hierarchical cascade of the gas, we would need to investigate scales smaller than 6 kAU. Indeed, at this stage we cannot explain the high multiplicity observed in these stellar structures which contain more than four YSOs each. In order to probe scales smaller than 6 kAU in NGC 2264, more observations need to be carried

out using the NOthern Extended Millimeter Array (NOEMA, the updated Plateau de Bure Interferometer Guilloteau et al. 1992), or the Atacama Large Millimeter Array (ALMA, Wootten & Thompson 2009) facilities.

The application of clustering methods to our structures could also help to elucidate the close relationship between the spatial properties (separation, first neighbours, etc.) of stellar systems and their environment, which can be single clumps or clusters of clumps. Do small stellar groups arise from a simple hierarchical collapse of a clump, or are their spatial extent and multiplicity more compatible with an association of clumps that would result from the fragmentation of a filament, with each of these clumps in turn collapsing hierarchically or monolithically? Most probably, both scenarios exist (Offner et al. 2022): the UWPs and large NESTs may result from the fragmentation of filaments (scale >13 kAU), and the hierarchical fragmentation of clumps may proceed at smaller range, whereas disc fragmentation around YSOs may explain the very close stellar systems (scale <100 AU). Our methodology is suitable for studying the spatial characteristics of hierarchical fragmentation, but gives no indication of the temporal aspects. However, the same metrics can be used to describe the temporal evolution of fragmentation in simulations.

Acknowledgements. The authors would like to deeply and sincerely thank A. Men'shchikov for his mentorship regarding the learning process of handling getsf software. We are also grateful to the ECOGAL project (European Research Council synergy, Grant: 855130) and its members for all the discussion and workshop opportunities we benefit from.

References

- Cantat-Gaudin, T., Jordi, C., Vallenari, A., et al. 2018, *A&A*, **618**, A93
 Cunningham, N., Lumsden, S., Cyganowski, C., Maud, L., & Purcell, C. 2016, *MNRAS*, **458**, 1742
 Duchêne, G., & Kraus, A. 2013, *ARA&A*, **51**, 269
 González, M., Joncour, I., Buckner, A. S. M., et al. 2021, *A&A*, **647**, A14
 Guilloteau, S., Delannoy, J., Downes, D., et al. 1992, *A&A*, **262**, 624
 Guszejnov, D., Hopkins, P. F., & Grudić, M. Y. 2018a, *MNRAS*, **477**, 5139
 Guszejnov, D., Hopkins, P. F., Grudić, M. Y., Krumholz, M. R., & Federrath, C. 2018b, *MNRAS*, **480**, 182
 Hopkins, P. F. 2013, *MNRAS*, **430**, 1653
 Houlahan, P., & Scalo, J. 1992, *ApJ*, **393**, 172
 Hoyle, F. 1953, *ApJ*, **118**, 513
 Joncour, I., Duchêne, G., & Moraux, E. 2017, *A&A*, **599**, A14
 Joncour, I., Duchêne, G., Moraux, E., & Motte, F. 2018, *A&A*, **620**, A27
 Krause, M. G. H., Offner, S. S. R., Charbonnel, C., et al. 2020, *Space Sci. Rev.*, **216**, 64
 Larson, R. B. 1978, *MNRAS*, **184**, 69
 Longmore, S. N., Kruijssen, J. M. D., Bastian, N., et al. 2014, in *Protostars and Planets VI*, eds. H. Beuther, R. S. Klessen, C. P. Dullemond, & T. Henning, 291
 Louvet, F., Motte, F., Hennebelle, P., et al. 2014, *A&A*, **570**, A15
 Men'shchikov, A. 2021, *A&A*, **649**, A89
 Motte, F., Zavagno, A., Bontemps, S., et al. 2010, *A&A*, **518**, A77
 Motte, F., Bontemps, S., & Louvet, F. 2018, *ARA&A*, **56**, 41
 Nony, T., Robitaille, J.-F., Motte, F., et al. 2021, *A&A*, **645**, A94
 Offner, S. S. R., Moe, M., Kratter, K. M., et al. 2022, Protostars and Planets VII, accepted, [arXiv:2203.10066]
 Padoan, P. 1995, *MNRAS*, **277**, 377
 Pokhrel, R., Myers, P. C., Dunham, M. M., et al. 2018, *ApJ*, **853**, 5
 Rapon, V. A., Pipher, J. L., Gutermuth, R. A., et al. 2014, *ApJ*, **794**, 124
 Rosolowsky, E. W., Pineda, J. E., Kauffmann, J., & Goodman, A. A. 2008, *ApJ*, **679**, 1338
 Shu, F. H. 1977, *ApJ*, **214**, 488
 Venuti, L., Prisinzano, L., Sacco, G. G., et al. 2018, *A&A*, **609**, A10
 Vázquez-Semadeni, E., Palau, A., Ballesteros-Paredes, J., Gómez, G. C., & Zamora-Avilés, M. 2019, *MNRAS*, **490**, 3061
 Wootten, A., & Thompson, A. R. 2009, *Proc. IEEE*, **97**, 1463

Annexe D

Comparaison des tests AD et KS

Sommaire

1	Tirage dans une distribution	245
2	Reconstruction de la distribution des scores AD	246
3	Performances des tests AD et KS avec la distribution L3-IMF	247

Cette annexe a pour objectif de :

1. Montrer comment on tire aléatoirement des objets dans une distribution de probabilité;
2. À partir de ce tirage, évaluer la sensibilité du test d'Anderson-Darling (AD) sur une variation de pente de l'IMF canonique;
3. Comparer le test AD avec le test de Kolmogorov-Smirnov (KS).

La distribution de probabilité utilisée dans cette annexe représente la L3-IMF qui s'écrit à l'aide de trois paramètres de forme α , β et μ comme :

$$\zeta_{L3}(M) = A(M_b, M_h) \left(\frac{M}{\mu} \right)^{-\alpha} \left(1 + \left(\frac{M}{\mu} \right)^{1-\alpha} \right)^{-\beta} \quad (\text{D.1})$$

Avec $A(M_b, M_h)$ un coefficient de normalisation qui dépend des bornes de la distribution M_b, M_h , défini comme :

$$A = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\mu} \left[G(M_h) - G(M_b) \right]^{-1} \quad (\text{D.2})$$

Où $G(M)$ est une fonction auxiliaire :

$$G(M) = \left(1 + \left(\frac{M}{\mu} \right)^{1-\alpha} \right)^{1-\beta} \quad (\text{D.3})$$

Les valeurs numériques des paramètres qui décrivent l'IMF canonique d'après [Maschberger \(2013\)](#) sont données par $\alpha = 2.3$, $\beta = 1.4$ et $\mu = 0.2 M_\odot$. Le paramètre α représente la pente logarithmique aux grandes masses tandis que le paramètre β dépend de la pente logarithmique aux faibles masses γ , défini positivement par la relation :

$$\beta = \frac{\gamma - \alpha}{1 - \alpha} \quad (\text{D.4})$$

Le paramètre μ est lié à la masse $M_p = 0.1 M_\odot$ correspondant au pic de la distribution dans la représentation logarithmique $dN/d(\log M)$ par la relation :

$$\mu = \frac{M_p}{(\beta - 1)^{\frac{1}{\alpha-1}}} \quad (\text{D.5})$$

Le score X du test AD est calculé à partir d'un échantillon de taille N d'après :

$$X = -N - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (2i - 1) [\ln(F_{L3}(M_i)) + \ln(1 - F_{L3}(M_{n-i+1}))] \quad (\text{D.6})$$

Où M_i est l'élément numéro i du vecteur M contenant les masses d'un échantillon, ordonnées par ordre croissant et $F_{L3}(M)$ est la fonction de répartition de la L3-IMF donnée par [Maschberger \(2013\)](#) :

$$F_{L3}(M) = \frac{G(M) - G(M_b)}{G(M_h) - G(M_b)} \quad (\text{D.7})$$

Les méthodes employées ici pourraient être appliquées à d'autres distributions de probabilité.

1 Tirage dans une distribution

Pour tirer aléatoirement un échantillon d'objets de masse M dans une distribution $\zeta(M)$ donnée, nous effectuons un tirage dans la zone délimitée par la distribution en définissant un rectangle dont la longueur couvre toute la gamme des masses M pour l'axe des abscisses, et dont la hauteur s'étend de l'ordonnée $y = 0$ à la valeur maximale de la distribution $\zeta(M)$. On sélectionne uniformément une variable M dans le domaine décrit par la largeur du rectangle, et uniformément une ordonnée y dans le domaine décrit par sa hauteur. De ce fait, nous choisissons aléatoirement un point de coordonnées (M, y) à l'intérieur de ce rectangle. Si ce point se situe en dessous de la courbe $p(M)$, il est conservé dans l'échantillon, sinon il est écarté de l'échantillon (voir Figure D.1).

Pour peupler les classes (ou *bins*) de plus haute masse dans la distribution initiale, il faut que l'échantillonnage soit suffisamment grand en comparaison de la probabilité qu'un

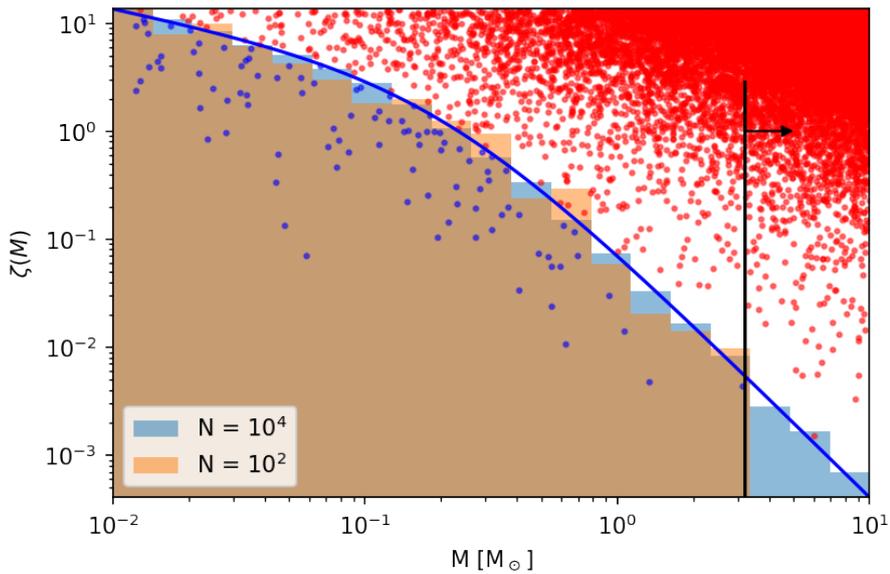


FIGURE D.1 – Échantillonnage d’une distribution. La courbe bleu représente la L3-IMF, les histogrammes bleu et marron ont été obtenus par un tirage de respectivement $N = 10^4$ et $N = 10^2$ objets dans la L3-IMF. Les points bleus représentent 100 points tirés aléatoirement dans la fenêtre (dans l’espace linéaire) que décrit les limites des axes et qui tombent en dessous de la courbe bleu ce qui permet de construire la distribution marron. Les points rouges sont d’autres points tirés de la même manière mais rejetés car ils apparaissent au dessus de la courbe bleue. La ligne verticale noire et la flèche représentent l’abscisse à partir de laquelle la probabilité qu’un objet tombe dans cet intervalle est inférieure à 0.01. En moyenne, un seul point devrait tomber dans cet intervalle si $N = 10^2$.

objet apparaisse dans ces classes. En moyenne, un élément d’un échantillon de taille N peut peupler le domaine des grandes masses si la probabilité de sélectionner objet dans ce domaine vaut $\frac{1}{N}$ (voir Figure D.1). Ainsi, plus la pente de la distribution est raide, plus l’échantillon doit être important pour peupler les *bins* de haute masse.

2 Reconstruction de la distribution des scores AD

Pour reconstruire la statistique du test AD, nous avons tiré aléatoirement 50 000 échantillons de différentes tailles N dans la L3-IMF. Nous avons ensuite réalisé un test AD sur chacun de ces échantillons et reconstruit par ce biais la distribution des scores X des tests réalisés (Figure D.2). La fonction de répartition de cette distribution nous a ensuite permis de calculer les valeurs critiques au delà desquels l’hypothèse nulle peut être rejetée, à un niveau de confiance associé à une valeur- p (voir Tableau D.1). La valeur- p associée au score X du test AD représente la probabilité, sous hypothèse nulle, d’obtenir

PARTIE 3. PERFORMANCES DES TESTS AD ET KS AVEC LA DISTRIBUTION L3-IMF

Taille d'un échantillon	Valeurs-p							
	0.250	0.150	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
5	1.255	1.650	1.968	2.546	3.136	3.987	4.646	6.310
10	1.253	1.632	1.966	2.531	3.122	3.905	4.577	6.172
15	1.255	1.618	1.939	2.496	3.052	3.869	4.516	5.868
25	1.243	1.620	1.936	2.492	3.104	3.838	4.432	5.939
50	1.242	1.606	1.918	2.479	3.055	3.887	4.501	5.917
100	1.247	1.607	1.933	2.512	3.134	3.980	4.539	6.054
250	1.237	1.612	1.908	2.466	3.043	3.788	4.357	5.735
500	1.248	1.617	1.922	2.474	3.058	3.845	4.460	5.779
1000	1.248	1.621	1.927	2.488	3.087	3.886	4.497	5.987
Moyenne des lignes	1.247	1.621	1.935	2.498	3.088	3.887	4.503	5.974

TABLE D.1 – Valeurs critiques du test AD et leurs valeurs-p associées pour différentes taille d'échantillon. La dernière ligne correspond à la valeur critique moyenne.

un score au moins aussi élevé que ce score X obtenu. L'hypothèse nulle peut être rejetée si le score mesuré X est suffisamment improbable par rapport au degré de significativité que l'on souhaite accorder au test, c'est-à-dire si la probabilité d'obtenir ce score X est plus faible qu'une valeur-p de référence.

3 Performances des tests AD et KS avec la distribution L3-IMF

En utilisant la méthode décrite précédemment, une quantité $E = 50.000$ d'échantillons de masses M sont générés en tirant aléatoirement un nombre N d'objets dans une L3 IMF dont la pente aux grandes masses α peut varier entre $1.3 \leq \alpha \leq 2.8$. Ici, nous réalisons cette étude avec des échantillons de $N = 5, 10, 15, 25, 50, 100, 250, 500, 1000$ objets. Nous disposons ainsi de 50.000×9 échantillons de masse de tailles N différentes. Les deux autres paramètres de la L3 IMF, β et μ , sont ajustés conformément aux équations D.4 et D.5 de telle sorte que les propriétés $M_p = 0.1$, $\gamma = 0.48$ de l'IMF canonique décrite par [Maschberger \(2013\)](#) restent constantes.

Pour chaque α , les échantillons tirés sont soumis aux tests KS et AD en les comparant avec l'IMF canonique caractérisée par $\alpha = 2.3$. Nous avons évalué la sensibilité respective des deux tests en comparant le taux de rejet de chaque test en fonction de la taille N de l'échantillon, et en fonction de la déviation de pente entre l'échantillon (de α variable) et l'IMF canonique (de $\alpha = 2.3$ fixe). Le taux de rejet p_r est défini comme le nombre de tests

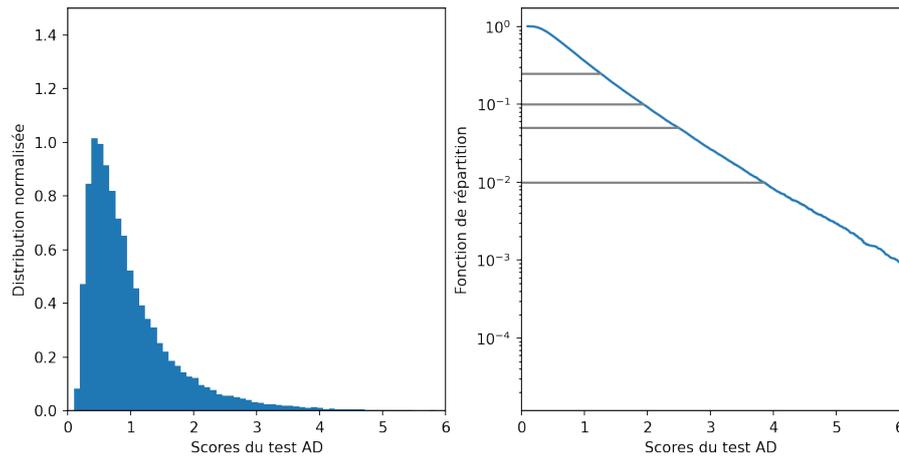


FIGURE D.2 – Reconstruction de la statistique du test AD. À *gauche* : distribution des scores X du test AD calculé avec 50 000 échantillons de $N = 1000$ objets tirés dans une L3-IMF. Le test AD a été réalisé pour comparer chaque échantillon avec leur distribution d’origine. À *droite* : Fonction de répartition de la distribution de gauche. Les lignes grises indiquent respectivement les valeurs-p de 0.250, 0.100, 0.050 et 0.010. Cette valeur-p correspond à la probabilité qu’un score X mesuré soit supérieur à la valeur en abscisse. Par exemple, la probabilité, sous hypothèse nulle, de mesurer un score $X > 4$ est inférieure à 0.010.

rejetés n_- parmi les $E = 50.000$ test effectués, divisé par le nombre total de tests effectués E :

$$p_r = \frac{n_-}{E} \quad (\text{D.8})$$

Par conséquent, plus le taux de rejet élevé, moins les échantillons sont représentatifs de l’IMF canonique. Le test KS est réalisé à l’aide de la bibliothèque python `scipy` en utilisant la fonction `ks_1samp`, tandis que le test AD est réalisé à l’aide de l’équation D.6 et des valeurs critiques associés du tableau D.1.

Dans ce qui suit, nous décidons de rejeter l’hypothèse nulle au risque de 5%, c’est-à-dire que nous rejetons un test (KS ou AD) si la valeur-p associée est inférieure à 0.05. Le tableau D.2 répertorie les taux de rejets associé à chaque test, pour un échantillon N donné, en fonction du paramètre α utilisé pour générer les échantillons en masse. Comme on peut s’y attendre, le taux de rejet à $\alpha = 2.3$ reste constant pour n’importe quelle valeur de N , avec un taux de rejet $p_r = 5$. En effet, sous hypothèse nulle, par définition il y a exactement 5% de chances qu’un échantillon obtienne un score dont la valeur-p est inférieure à 0.05. Or, l’hypothèse nulle est respectée pour $\alpha = 2.3$, donc 5% des échantillons peuvent être rejetés. *Idem* pour le test KS.

Pour les autres valeurs de α , nous savons que les échantillons ne respectent pas l'hypothèse nulle (la distribution dans laquelle ils sont tirés est différente de l'IMF canonique) : on s'attend donc à ce que les tests rejettent ces échantillons, et donc que le taux de rejet soit élevé. En général, le test AD est plus fiable pour détecter une déviation de la pente aux grandes masses (taux de rejet plus élevés). Par exemple, un échantillon de taille $N = 25$ généré dans une distribution de pente $\alpha = 1.47$, a 55% de chances d'être rejeté par le test KS, à juste titre. En revanche, ce même échantillon a 75% de chances d'être rejeté par le test AD, à juste titre.

La probabilité de rejeter l'hypothèse nulle lorsqu'elle devrait être rejetée (donc de rejeter le fait qu'un échantillon provienne d'une distribution donnée, sachant qu'elle n'en provient pas) augmente avec la taille de l'échantillon. Toutefois, plus la distribution est pentue lorsque α augmente, moins ces tests sont fiables pour les petits échantillons. Cela est dû au fait que l'échantillonnage de la pente aux grandes masses devient plus difficile à mesure que la PDF devient plus raide. Pour peupler ce domaine, il est nécessaire d'augmenter la taille de l'échantillon. Avec $2.8 > \alpha > 2.3$, aucun des tests ne permet de rejeter le fait qu'un échantillon provienne d'une distribution donnée, jusqu'à $N = 1.000$. Avec $\alpha < 2.3$, nous avons une meilleure confiance dans le test AD.

En particulier, un échantillon $N = 1000$ permet d'être confiant dans le test AD pour détecter un changement de pente jusqu'à $\alpha = 2.13$. Dans ces conditions, il y a 3 chances sur 4 que le test AD rejette l'hypothèse nulle, à raison. Pour être sûr du test, nous pouvons toujours tirer plusieurs fois un échantillons de $N = 1000$ objets.

α	Test	Taille de l'échantillon								
		5	10	15	25	50	100	250	500	1000
1.3	KS	23	37	51	72	96	100	100	100	100
	AD	39	58	72	88	99	100	100	100	100
1.47	KS	18	27	37	55	85	99	100	100	100
	AD	30	44	56	75	95	100	100	100	100
1.63	KS	13	18	24	36	63	92	100	100	100
	AD	22	30	39	54	81	98	100	100	100
1.8	KS	9	12	15	21	36	65	97	100	100
	AD	15	19	24	32	53	81	99	100	100
1.97	KS	7	8	9	11	17	30	66	94	100
	AD	10	11	13	17	25	43	81	98	100
2.13	KS	6	6	6	7	8	10	19	34	63
	AD	7	7	7	8	10	13	26	46	77
— 2.3 —	KS	5	5	5	5	5	5	5	5	5
	AD	5	5	5	5	5	5	5	5	5
2.47	KS	5	5	5	5	6	7	11	19	37
	AD	4	4	4	5	5	7	13	24	48
2.63	KS	5	5	5	6	8	14	35	70	97
	AD	4	4	5	6	9	16	44	80	99
2.8	KS	4	5	6	8	13	28	72	98	100
	AD	4	5	6	8	15	33	81	99	100

TABLE D.2 – Comparaison de sensibilité entre les tests KS et AD en utilisant différentes pentes aux grandes masses α et tailles N d'échantillons. Pour chaque taille d'échantillon nous tirons 50 000 échantillons et nous évaluons la proportion d'échantillons p_r rejetant l'hypothèse nulle H_0 . Les nombres donnés dans la table sont les valeurs de p_r en %.